МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ И.С. ТУРГЕНЕВА»

Современные проблемы физико-математических наук

Материалы III Международной
научно-практической конференции
23 – 26 ноября 2017 г., Орел

Орел – 2017

УДК 51+53+681.3
ББК 22.1+22.3+32.81(072.8)
С56

Редакционная коллегия:
Дорофеева В.И., кандидат физико-математических наук, доцент
Зарубин А.Н., доктор физико-математических наук, профессор
Можарова Т.Н., кандидат физико-математических наук, профессор
Марков О.И., доктор физико-математических наук, профессор
Селютин В.Д., доктор педагогических наук, профессор
Тарасова О.В., доктор педагогических наук, профессор
Федяев Ю.С., кандидат физико-математических наук, доцент

Современные проблемы физико-математических наук. Материалы III Международной научно-практической конференции, 23-26 ноября 2017 г. / под общ. ред. Т.Н. Можаровой. – Орел: ОГУ, 2017. – 579 с.

ISBN 978-5-9929-0559-5

В сборнике содержатся тексты докладов, прочитанных на III Международной научно-практической конференции, проходившей 23-26 ноября на базе физико-математического факультета Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева.

Материалы издаются в авторской редакции с незначительной технической корректурой.

ISBN 978-5-9929-0559-5

© ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева», 2017 г.
© Коллектив авторов, 2017 г.

Оглавление

Предисловие 10
Математический анализ и дифференциальные уравнения 11
Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б. Обратная задача определения источника в двумерном псевдопараболическом уравнении. Случай задачи Коши 11
Аблабеков Б.С., Курманбаева А.К. Задача Гурса для линейного нагруженного уравнения и связанные с нею обратная задача 14
Аксёнов Н.А. Задача для интегрально-операторного уравнения с нелокальным условием 19
Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение некоторых краевых задач для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое 24
Антоновская О.Г. Применение квадратичных функций Ляпунова в задачах оценивания макроструктуры пространства состояний нелинейной динамической системы 27
Бородинова И.А., Родионова И.Н. Задача с несколькими условиями для уравнения гиперболического типа третьего порядка в трехмерном евклидовом пространстве 32
Васильев В.Б. О разрешимости некоторых дискретных уравнений 37
Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Конечномерные спектрально-обратимые динамические системы 42
Зарубин А.Н. Об алгоритме решения краевой задачи для функционально-дифференциального опережающе-запаздывающего гиперболо-параболического уравнения 45
Зарубин А.Н., Чаплыгина Е.В. Об общем решении задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа с интерированным функциональным запаздыванием и опережением 52
Клопов Н.В. Изучение понятия комплексной интерполяции 57
Козлов А.А., Бурак А.Д. Глобальная управляемость характеристических показателей Ляпунова трехмерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами и наблюдателем 61
Корниенко Д.В. Граничная задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных 64
Можарова Т.Н. Об элементах локально выпуклого пространства H_{α}^{β} 68
Ноздрунов В.В. Алгоритм построения группы эквивалентности по параметрам для произвольной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка 72
Отарова Ж.А. Краевая задача для уравнения четвёртого порядка с неоднородными краевыми условиями 76
Русаков А.А., Чубариков В.Н. Математика и компьютерное моделирование 80
Сагателян Т.М. О равномерной сходимости двойных рядов по системе Кристенсона-Леви 86
Соломатин О.Д. К вопросу о полноте системы обобщенных экспонент в полном метрическом пространстве 89

Соломатин О.Д. Целые векторнозначные функции как решения дифференциально-операторных уравнений в локально выпуклых пространствах 93
Startsev S.Ya. The degeneracy of Laplace invariants for hyperbolic systems possessing integrals 96
Толпаев В.А., Ахмедов К.С., Кравцов А.М., Петросянц М.Т. Аппроксимация табличных данных обобщениями полиномов Бернштейна 100
Усманов С.Э. Приспособленные системы координат для некоторых функции многих переменных 105
Чернова О.В. Эллиптические системы первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами 109

Алгебра, топология и геометрия 113
Агафонцев В.В. Лемма «ABC» и Последняя теорема Ферма 113
Батуров Д.П. Нормальность и коллективная нормальность плотных подпространств произведений вещественных прямых 120
Букушева А.В. О продолженных структурах на распределениях N-субримановых многообразий 122
Галаев С.В. О продолженных структурах Кенмоцу на субримановых многообразиях с нулевым тензором кривизны Схоутена 127
Невский М.В., Ухалов А.Ю. О совершенных симплексах в R^5 132
Черкасова В.В. Некоторые приложения мультипликативного интеграла в теории поверхностей 137

Теория вероятностей и математическая статистика 141
Голдаева А.А., Лебедев А.В. Неклассические свойства экстремальных индексов в схеме серий 141
Иванов Д.В. Верхние границы средних максимумов случайных величин с известными коэффициентами асимметрии и эксцесса 146
Лебедев А.В. О взаимосвязи некоторых коэффициентов зависимости двумерных копул экстремальных значений 151

Методы дискретных особенностей в задачах математической физики 155
Дергачев С.А., Щеглов Г.А. Моделирование методом вихревых петель эволюции завихренности и расчет гидродинамических нагрузок при пространственном обтекании тел 155
Желанников А.И. Метод дискретных особенностей в задачах моделирования вихревых следов за воздушными судами 157
Коцур О.С., Щеглов Г.А. Модели вязкости в методе вихревых элементов 164
Kuzmina K.S., Ryatina P. On a New Approach to Vortex Sheet Intensity Calculation for Flows Simulation by Using Vortex Methods 168
Marchevsky I.K., Shcheglov G.A. On a New Approach to Vortex Sheet Intensity Calculation for Flows Simulation by Using Vortex Methods 173
Пивень В.Ф. Граничные задачи трехмерной фильтрации в анизотропной пористой среде 177

Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Дебит совершенной скважины в анизотропном неоднородном грунте 182
Ставцев С.Л. Модификация метода минимальных невязок для решения динамических задач 186
Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в анизотропном слое пористой среды, ограниченном прямолинейной границей 191

Физика конденсированного состояния. Наноструктуры и наноматериалы 197
Березина О.Я., Яковлева Д.С., Бурдюх С.В. Электрохромный эффект в гидрированных пленках пентаоксида ванадия 197
Гончаренко В.В., Шкурин И.Г., Шкурина Ю.А., Ноздрачёв Р.А. Наноструктурные материалы их классификация, свойства и методы получения 201
Данилова Л.П., Вирченко Ю.П. Вириальное разложение в теории фазового перехода порядок-беспорядок 205
Марков О.И. Моделирование температурного поля в остывающем монокристалле висмута 208
Марков О.И. Холловская подвижность электронов в сплавах $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Gd_{0.01}Te_x$ 212
Ставчикова Л.Ф. Исследование структуры поверхности монокристалла висмута с помощью электронного микроскопа 216
Трубаев А.А., Малай Н.В. Особенности теплообмена в неизотермических газообразных средах 220

Инженерные приложения физико-математических наук 225
Анпилогов Д.И., Снижко Н.В. Деформирование кольца неравномерно распределённым моментом 225
Здоровенко М.Ю., Серова А.С., Прозорова Т.Г. Локализация значений параметров гиперконечномерного вейвлетного преобразования 231
Злобин С.Н., Измеров О.В., Дорофеев О.В., Копылов С.О., Мазинский О.С. Раскрытие неопределенности исходных данных для САПР подвески тягового электродвигателя 234
Корнаев А.В., Корнаева Е.П. Сравнение эффектов геометрического и вязкостного клина при гидродинамическом трении 239
Малый Д.О., Матюхин С.И., Вишняков А.С., Заночкин Е.А., Петрухин А.Д. Компьютерное моделирование теплопереноса в силовых IGBT-модулях паяной конструкции 242
Матюхин С.И., Малый Д.О., Вишняков А.С. Компьютерное моделирование деформаций, возникающих при производстве силовых полупроводниковых модулей паяной конструкции 246
Пономарев Н.С., Рогожина Т.С. Методика определения теплопотерь здания с использованием тепловизора 249
Преснецова В.Ю., Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С., Зенкин Е.А., Морозов И.С., Архипов Е.Р. Адгезионная прочность покрытий режущего инструмента 253

Сурма А.М., Титушкин Д.А., Матюхин С.И., Остапенко С. Особенности контактного соединения силовых полупроводниковых приборов посредством низкотемпературного спекания серебра, обусловленные шероховатостью поверхностей 258
Толпаев В.А., Ахмедов К.С., Колесников А.В., Гоголева С.А. Развитие метода виртуальных поверхностей тока применительно к осесимметричным задачам теории фильтрации 263
Толпаев В.А., Ахмедов К.С., Кравцов А.М., Петросянц М.Т. Исследование математических моделей излучения тепла в системах нагруженных пульсирующими сосредоточенными и распределенными источниками тепла на примере газотранспортных систем 290
Турин В.О., Шкарлат Р.С., Зебрев Г.И., Шур М.С., Инигез Б. Линейное приближение для зависимости тока стока МОП-транзистора в режиме насыщения от напряжения на стоке с учетом сопротивлений истока и стока 294
Турин В.О., Рахматов Б.А., Зебрев Г.И., Ким Ч.Х., Шур М.С., Инигез Б. Моделирование тока насыщения органического полевого транзистора с учетом контактных сопротивлений 299
Якушина С.И., Шоркин В.С., Сами Аль Шатеби. Метод расчета потенциалов нелокального взаимодействия разных материалов 306

Информатика и информационные технологии 311
Булаев И.М. Подход к автоматизации процесса распознавания элементов топологии интегральных микросхем 311
Ваграменко Я.А., Русаков А.А. Общественная инициатива в развитии математики и информационных образовательных технологий 315
Ванюшкин А.С., Гращенко Л.А. О распределениях длин текстов в коллекциях аналитических статей 328
Ермаков И.Е., Плынский Н.В. ERSY Control: импортозамещающая программная платформа АСУТП. Автоматизация крупных объектов АПК 333
Зиборов В.И. Разработка компьютерной программы для решения профессионально-прикладных задач в области психологии 338
Кирющенкова Н.И., Лебедева Е.В. Проектирование информационной системы учета деятельности членов Трубчевской районной общественной студенческой организации «Факел» 343
Куликов А.Ю., Петров К.Е. Имитационное моделирование цифровых потоков уплотненных источников сообщений мультиплексированного цифрового потока 349
Моисеенко А.А. Разработка 3D модели для интерактивного изучения анатомо-физиологических особенностей строения и функционирования сердца 352
Ревякин А.М. Подходы к разработке модели распознавания сжатого неподвижного графического сообщения формата JPEG 357
Рюмшина О.А. О влиянии применения правил формирования реляционных отношений из связей er-модели на нормальные формы этих отношений 363

Фролов М.М., Труфанов М.И. Структурно-функциона-льная организация системы трехмерного технического зрения на базе территориально распределенных оптико-электронных датчиков 367
Черных Г.А. Оценка тональности текста на основе технологии word2vec 369
Якубов А.З., Нисрединов С.Д. Сведение задачи о «безоконном» расписании к нахождению потока в сети 374

Математические методы в экономике 377
Евсеев А.А., Шуметов В.Г. Алгоритмы модификации метода анализа иерархий на основе элементов теории Демпстера-Шейфера 377
Никишов В.Н., Левченко В.О. Модели интернет торговли на базе уравнений ферментативной кинетики 382
Мишина С.В. Модель профессионально значимых качеств будущих экономистов 385
Руренко Е.Н. Об оптимальном управлении для модели Ричардсона 391
Русских Т.Н., Строев С.П. Мониторинг эффективности функционирования системы здравоохранения Орловской области в разрезе синтетических категорий «ресурсы – результат» 394
Чернобровкина И.И., Чернобровкина Ю.В. Применение генетического алгоритма при нейронно-сетевом моделировании 398

Методика преподавания математики, информатики, физики и астрономии в школе и вузе 402
Авдеев И.Ф., Авдеев Ф.С., Авдеева Т.К. Иван Матвеевич Виноградов и Андрей Петрович Киселев у истоков математических олимпиад 402
Аксёнов А.А. О вкладе профессора М.И. Зайкина в теорию школьных математических задач 409
Бешевли Б.И., Пустынникова И.Н. Использование лекционных демонстраций при подготовке учителя физики 413
Бондарь А.А. Использование системы компьютерной алгебры Maple для создания анимации при решении задач с параметрами 418
Бурцева К.В. Обучение методам быстрого счёта в рамках реализации ФГОС 423
Бухтиярова А.Л. Использование личностно-ориентиро-ванного подхода при обучении математике 427
Ваграменко Я.А., Афонин А.Н. Среда компьютерного класса колледжа как ресурс формирования общих компетенций студентов IT-специальностей 431
Ваккер Е.Д. Использование мультимедиа технологий на уроках физики 437
Вакульчик В.С. Воспроизводящие, частично-поисковые, творческие самостоятельные работы студентов в процессе обучения математике на технических специальностях 441
Власов Д.А., Синчуков А.В. Формирование модельных представлений о конфликтных ситуациях у будущих бакалавров экономики 445
Волченкова Е.С. Проблемное обучение как условие творческого освоения знаний 448

Воробьева Л.В. Применение технологии проблемного обучения на занятиях по физике 450
Гаврилова М.С. Методические особенности учебника геометрии Н.В. Бугаева 454
Гомбоева И.С. Методические аспекты преподавания информатики в организациях среднего профессионального образования 458
Дворяткина С.Н., Лопухин А.М. Эффективность применения деловых игр в обучении математике студентов-юристов 461
Дронов В.М. Некоторые методы повышения качества образования у студентов по физике 469
Елаховский Д.В. Знакомство студентов строительной специальности с моделирование температурных полей 471
Елаховский Д.В. К вопросу об адаптации физического образования к предполагаемой профессиональной деятельности студентов строительных факультетов университета. 475
Заикин Д.И. Соотношение виртуального и реального эксперимента при изучении физики в школе 478
Закалкина Е.В., Еремеева Н.П. Аспекты преподавания дисциплины вычислительная математика 482
Кислякова М.А. Математические игры как средство повышения мотивации студентов-гуманитариев к изучению математических дисциплин 485
Корогодина И.В., Цуканов Б.Д. Дидактическая модель формирования готовности к анализу проблем электромагнитной безопасности 488
Корогодина И.В. Структура знаний специалиста в рамках компетентностного подхода 493
Максимова Т.С. Формирование самообразовательной компетентности студентов при изучении линейной алгебры в условиях современных технологий обучения 495
Мателенок А.П. Формирование познавательной самостоятельности в процессе изучения раздела «Векторная алгебра» у студентов технических специальностей 499
Мошкина Е.В., Казакова Е.Л., Кручек М.М., Сергеева О.В. Реализация междисциплинарного подхода в курсах математического анализа и физики 504
Никонова Г.Н. Особенности подготовки к урокам геометрии при использовании средств дистанционного обучения 508
Первых Н.В. Задачи на простые и сложные проценты при обучении математике в классах экономического профиля 511
Печикина Д.И. Формирование и развитие навыков самостоятельной деятельности школьников в процессе поиска решения задач 515
Рогожина Т.С., Шиманская Г.С. Разработка сборника задач межпредметного содержания на основе физики по курсу «Концепции современного образования» 519
Русаков А.А., Русакова В.Н. Типовые расчеты по математике для студентов естественнонаучных направлений подготовки 524
Селютин В.Д. Экспериментальная проверка влияния контролируемых факторов в педагогике 529

Симанева Т.А., Бородина Н.А. Использование сетевых образовательных сервисов в учебном процессе как необходимое требование реализации ФГОС ООО 534
Симанева Т.А. Совершенствование профессионально-методической подготовки будущего учителя-предметника при изучении модуля «Мультимедийные технологии в профессиональной деятельности учителя» в условиях реализации требований ФГОС ВО 542
Тарасова О.В. Реализация образовательной программы по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, профиль Математическое образование на физико-математическом факультете ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева» 547
Темиргалеев Е.Э. Блэкбокс-Оберон – оптимальное решение для современных задач ИТ-образования 552
Цуканов Б.Д., Корогодина И.В. Деление на зоны электромагнитных полей линейного и апертурного излучателей 557
Цуканов Б.Д., Корогодина И.В., Корогодин И.Е. К вопросу о профессионализации физического образования 562
Черных Г.А. О принципах преподавания естественно-научных курсов слушателям гуманитарных и междисциплинарных профилей подготовки 566
Чижикова Ю.В. О методических аспектах проведения лекционных занятий по дисциплине «Информационная безопасность» 570
Щербатых С.В., Лыкова К.Г. Обеспечение непрерывности в системе школьного математического образования 575

Предисловие

В настоящем сборнике представлены материалы III-ей Международной научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математических наук» (СПФМН-2017), состоявшейся 23-26 ноября 2017 г. в Орле и объединившей участников из крупнейших университетов Москвы, Санкт-Петербурга, Ельца, Ставрополя, Самары, Кирова, а также стран ближнего и дальнего зарубежья.

Целью конференции являлось обсуждение фундаментальных и прикладных проблем современной математики, физики, информационных технологий, вопросов методики преподавания.

Работа конференции проводилась по следующим секциям:

1. Математический анализ и дифференциальные уравнения;
2. Алгебра, топология и геометрия;
3. Математические методы в экономике;
4. Теория вероятностей и математическая статистика;
5. Методы дискретных особенностей в задачах математической физики;
6. Физика конденсированного состояния;
7. Наноструктуры и наноматериалы;
8. Информатика и информационные технологии;
9. Инженерные приложения физико-математических наук;
10. Методика преподавания математики, информатики, физики и астрономии в школе и вузе.

Благодарим всех авторов статей, докладчиков и участников за вклад в организацию нашей научно-практической конференции и ее успешное проведение.

Организационный и Программный комитеты

Математический анализ и дифференциальные уравнения

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА В ДВУМЕРНОМ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ. СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Б.С. Аблабеков, д.ф.-м.н., проф.
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына
e-mail: *ablabekov_63@mail.ru*
А.Б. Байсеркеева
Иссык-кульский государственный университет имени К. Тыныстанова
e-mail: *a.baiserkeeva@mail.ru*

В работе исследована обратная задача для двумерного псевдопараболического уравнения третьего порядка. Обратная задача состоит в определении неизвестного источника зависящего от времени по переопределению во внутренних точках. Доказывается существование и единственность решения рассматриваемой обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, псевдопараболическое уравнение, условия переопределения.

1. Введение и постановка задачи

В настоящее время теория обратных задач математической физики развивается представителями ряда отечественных математических школ, в том числе Московской (основанной А.Н. Тихоновым) и Сибирской (основанной М.М. Лаврентьевым и В.Г. Романовым.

Вопросы корректности обратных задач идентификации функции источника для параболических уравнений изучались в работах Ю.Я. Белова, А.И. Прилепко, В.В. Соловьева и других.

В работе Б.С. Аблабековым изучены обратные задачи определения неизвестных коэффициентов для квазилинейных уравнений типа Бенджамина-Бона-Махони.

Обратные задачи в аналогичной постановке для уравнений Бусинеска-Лява, псевдопараболических и гиперболических уравнений при других предположениях о входных данных и другими методами изучалась в [1–4].

2. Постановка задачи

Пусть $Q_T = \{(x,t) \mid x \in R^2, 0 < t \le T\}$, $T > 0$ – фиксированное число.

$C_{M_\gamma}^{(n,m,k)}(Q_T)$ – множество функций из $C^{(n,m)}(Q_T)$, которые вместе со своими производными вплоть до порядка (n,m) принадлежат $M_\gamma(Q_T)$, т.е. $\dfrac{\partial^{i+l+j}v}{\partial x_1^i \partial x_2^l \partial t^j} \in M_\gamma(Q_T)$ при $0 \le i \le n, \quad 0 \le l \le m, 0 \le j \le k$, аналогично определяется пространство $C_{M_\gamma}^{(n+m)}(R^2)$.

В области Q_T рассмотрим обратную задачу: найти функций $f(t)$ связанные с двумерным псевдопараболическим уравнением

$$Lu \equiv u_t - \alpha\Delta_2 u_t - \beta\Delta_2 u = f(t)h(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in R^2, \tag{2}$$

а также условию переопределения

$$u(x_0,t) = \psi(t), \qquad x_0 \in R^2, \quad 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Здесь $\Delta_2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, $u_0(x)$, $h(x,t)$, $g(x,t)$, $\psi(t)$ – заданные функции.

3. Существование решения обратной задачи

Сначала сформулируем терему существования и единственности решения прямой задачи (1)-(2) доказанное в [2] нужном далее нам виде.

Теорема 1. Пусть $u_0(x) \in C_{M_\gamma}^2(R^2)$, $h(x,t) \in C_{M\gamma}^{(2,1)}(\overline{Q}_T)$, $g(x,t) \in C_{M\gamma}^{(2,1)}(\overline{Q}_T)$, $f(t) \in C([0,T])$. Тогда существует единственное решение задачи Коши (1)-(2), представимое в виде

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{R^2} E_2(x-\xi, t-\tau) f(\tau) h(\xi,\tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_{R^2} E_2(x-\xi, t-\tau) g(\xi,\tau) d\xi d\tau + \\ + \int_{R^2} E(x-\xi, t) L_1 u_0(\xi) d\xi, \tag{4}$$

где $E_2(x,t) = \dfrac{\theta(t) e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}}{2\pi\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{\beta t |x|}{2\sqrt{\alpha^3}} \right)^n \dfrac{K\left(\dfrac{|x|}{\sqrt{\alpha}} \right)}{n!^2}$ – фундаментальное решение оператора Lu, $K(z)$ – функция Макдональда, $L_1 = I - \alpha\Delta_2$.

Доказательство существования единственного решения задачи (1)-(2) в классе функций $C_{M\gamma}^{(2,1)}(Q_T) \bigcap C_{M\gamma}(\overline{Q}_T)$ и представления (4) изложены в [2,3].

Определение. Под решением обратной задачей будем понимать задачу определения пары функций $\{u(x,t,f(t))\} \in C_{M_\nu}^{(4,1)}(Q_T) \times C([0,T])$, которые удовлетворяют условиям (1)–(3).

Для обратной задачи (1)-(3) справедлива следующая теорема существования и единственности её решения.

Теорема 2. Пусть $u_0(x) \in C^{(4)}_{M_\gamma}(R^2)$, $h(x,t), g(x,t) \in C^{(2,0)}_{M_\gamma}(\overline{\Omega}_T)$, и $|h(x_0,t)| \geq h_0 > 0 \ \forall t \in [0,T]$, $\alpha\, \Delta_2 h(x_0,t) \neq -h(x_0,t)$ и выполнены условия согласования $u_0(x_0) = \psi(0)$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)-(3) такое, что $\{u(x,t,f(t))\} \in C^{(4,1)}_{M_\nu}(Q_T) \times C([0,T])$.

Доказательство. Так как $|h(x_0,t)| \geq h_0 > 0 \ \forall t \in [0,T]$, то положив в уравнении (1) $x = x_0$ и, учитывая условие (3), получим

$$f(t) = \left[\psi'(t) - g(x_0,t) - \left(\alpha\, \Delta_2 u_t(x_0,t) + \beta\, \Delta_2 u(x_0,t)\right) \right] / h(x_0,t). \qquad (4)$$

Введем в рассмотрение функцию $\Delta_2 u(x,t) = v(x,t)$. Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$v_t - \alpha \Delta_2 v_t - \beta \Delta_2 v = f(t) \Delta_2 h(x,t) + \Delta_2 g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \qquad (5)$$

$$v(x,0) = \Delta_2 u_0(x), \quad x \in R^2, \qquad (6)$$

$$f(t) = \left[\psi'(t) - g(x_0,t) - \alpha\, v_t(x_0,t) - \beta\, v(x_0,t) \right] / h(x_0,t). \qquad (7)$$

Используя фундаментальное решение оператора L, построенное в [2], задачу (4),(5) заменим интегральным соотношением

$$v(x,t) = v_0(x,t) + \int_0^t \int_{R^2} E_2(x-\xi, t-\tau) f(\tau) \Delta_2 h(\xi,\tau) d\xi d\tau, \qquad (8)$$

где

$$v_0(x,t) = \int_{R^2} E(x-\xi,t) L_1\left(\Delta_2 u_0(\xi)\right) d\xi + \int_0^t \int_{R^2} E_2(x-\xi, t-\tau) \Delta_2 g(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

$L_1 = I - \alpha \Delta_2$.

Подставляя (8) в (7) и учитывая условие $\alpha\, \Delta_2 h(x_0,t) \neq -h(x_0,t)$, для функции $f(t)$ получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$f(t) = \int_0^t K(t,\tau) f(\tau) d\tau + b(t), \qquad (9)$$

где

$$a(t) = \alpha\, \Delta_2 h(x_0,t) + h(x_0,t), \qquad (10)$$

$$K(t,\tau) = -\frac{1}{a(t)} \int_{R^2} [\alpha E_{2t}(x_0 - \xi, t) + \beta E_2(x_0 - \xi, t)] \Delta_2 h(\xi,\tau) d\xi, \qquad (11)$$

$$b(t) = \frac{1}{a(t)} \left[\psi'(t) - g(x_0,t) - \alpha\, v_{0t}(x_0,t) - \beta\, v_0(x_0,t) \right]. \qquad (12)$$

Покажем, что функции $b(t)$, $K(t,\tau)$ является непрерывными.

Учитывая, что $u_0(x) \in C^4_{M_\gamma}(R^2), g \in C^{2,0}_{M_\gamma}(\overline{\Omega}_T), h \in C^{2,0}_{M_\gamma}(\overline{\Omega}_T)$ и в силу свойств фундаментального решения, то из (11),(12) следует, что функции $b(t)$, $K(t,\tau)$ удовлетворяет неравенствам

$$|b(t)| \le \frac{1}{|a(t)|}\left[\left|\psi'(t)\right| + |g(x_0,t)| + \alpha|v_{0t}(x_0,t)| + \beta|v_0(x_0,t)|\right] \le C.$$

$$|K(t,\tau)| \le \frac{1}{|a(t)|}\int_{R^2}[\alpha|E_{2t}(x_0-\xi,t)| + \beta|E_2(x_0-\xi,t)|]|\Delta_2 h(\xi,\tau)|d\xi \le C.$$

Таким, образом, мы получили интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и правой частью. Это уравнение безусловно, имеет единственное непрерывное решение. Отсюда следует разрешимость уравнение (9). Подставляя решение уравнение (9) в (8) находим $v(x,t)$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1.Аблабеков Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. – LAP. LAMBERT Academic Publishing 2011. –291 с.

2. Аблабеков Б.С. Фундаментальное решение задачи Коши для двумерного уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде // Известия КГТУ им.И.Раззакова, №9, Бишкек 2009. – С.8-101.

3. Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б. Явное решение задачи Коши для двумерного псевдопараболического уравнения // Известия Вузов Кыр-гызстана, №10, 2015. – С.3-7.

4. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: Илим, 2001. –183 с.

УДК 517.946

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЮ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Б.С. Аблабеков, д.ф.-м.н., проф.
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына
e-mail: *ablabekov_63@mail.ru*
А.К. Курманбаева, к.ф.-м.н., доц.
Кыргызско-российский университет имени Б. Ельцина
e-mail: *ainura1971@mail.ru*

В статье доказана однозначная разрешимость задачи Гурса для линейного нагруженного псевдопараболического уравнения с нелокальным начальным условием. Задача Гурса для линейного нагруженного псевдопараболического уравнения сводится к системе интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода и опираясь на это, доказывается существование и единственность решения задачи Гурса. Сведением к линейному нагруженному уравнению доказывается однозначная разрешимость обратной задачи определения источника по финальному переопределению.

Ключевые слова: нагруженные уравнения, обратные задачи, псевдопараболические уравнения, финальное переопределение.

1. Введение

В последние годы в связи с интенсивным исследованием обратных задач для дифференциальных уравнений, задач оптимального управления, долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги возникла необходимость в изучении нового класса уравнений, получивших название «нагруженное уравнение». Такие уравнения впервые исследованы в работах Н.Н. Назарова и Н.Н. Кочина. Но ими не был использован термин «нагруженное уравнение».

Впервые этот термин был использован в работах А.М. Нахушева, в которых дано наиболее общее определение нагруженного уравнения и подробная классификация различных нагруженных уравнений: нагруженных дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, функциональных уравнений, а также их многочисленные приложения.

Наиболее полное современное состояние теории нагруженных уравнений с обширной библиографией отражено в монографиях [3-5].

Работа посвящена исследованию разрешимости задачи Гурса для линейного нагруженного уравнения с нелокальными начальными условиями и связанные с нею обратные задачи для псевдопараболических уравнений.

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи, в которых наряду с нахождением решения требуется найти коэффициенты уравнения, правой части или функции, определяющие начальные или граничные условия по некоторой дополнительной информации о решении.

Обратным задачам для псевдопараболических уравнений очень посвящены большое количество работ, см. например работы [2–6] .

2. Исследование задачи Гурса для линейного нагруженного псевдопараболического уравнения

Пусть Q_T – прямоугольник $\{(x,t): x \in (0,l), t \in (0,T), 0 < t < \infty\}$.

Задача 1. Найти в области Q_T решение $u(x,t)$ из класса $C(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющее уравнению

$$u_t - u_{xxt} - c(x,t)u_{xx} + p(x,t)u_x + q(x,t)u = \\ = a(x,t)[u(x,T) - u_{xx}(x,T)] + f(x,t), \tag{1}$$

нелокальным начальным условием

$$u_{xx}(x,0) - u(x,0) - k(x)[u_{xx}(x,T) - u(x,T)] = u_0(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{2}$$

и условию Гурса

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть $c(x), k(x) \in C^2[0,l]$, $p(x) \in C^1[0,l]$, $q(x) \in C[0,l]$, $p(x) > 0$, $q(x) > 0$, $x \in [0,l]$, $\mu_1(t), \mu_2(t) \in C^2[0,T]$, $\mu_1(0) = \mu_2(t) = 0$, $u_0(x) \in C^1[0,l]$, $f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$.

Кроме того $\int_0^T e^{-c(x)(T-\tau)} a(x,\tau)d\tau + k(x)e^{-c(x)T} \ne 1$. Тогда существует единственное решение задачи 1, удовлетворяющая условиям (1)- (3).

Доказательство. Введем новую неизвестную функцию

$$v(x,t) = u_{xx}(x,t) - u(x,t). \tag{4}$$

Тогда задача (1)-(3), эквивалентно к задаче

$$v_t + c(x)v = p(x,t)u_x + (q(x,t) + c(x))u + a(x,t)v(x,T) + f(x,t), \tag{5}$$

нелокальным начальным условием

$$v(x,0) + k(x)v(x,T) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{6}$$

Задача (5) -(6) эквивалентна интегральному уравнению для функции $v(x,t)$:

$$\begin{aligned} v(x,t) = &\int_0^t e^{-c(x)(t-\tau)}\left[p(x)u_x(x,\tau) + (q(x,\tau) + c(x))u(x,\tau) + f(x,\tau)\right]d\tau + \\ &+ \int_0^t e^{-c(x)(t-\tau)}a(x,\tau)v(x,T)d\tau + +(u_0(x) + k(x)v(x,T))e^{-c(x)t}. \end{aligned} \tag{7}$$

С другой стороны, обращая, оператор $\frac{d^2}{dx^2} - I$, из задачи (3), (4) имеем:

$$u(x,t) = \mu_1(t)chx + \mu_2(t)shx + \int_0^t sh(x-s)v(s,t)ds. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), имеем

$$v(x,t) = \int_0^t\int_0^x K(x,t,s,\tau)v(s,\tau)dsd\tau + b(x,t)v(x,T) + F(x,t), \tag{9}$$

где

$$K(x,t,s,\tau) = e^{-c(x)(t-\tau)}\left[p(x)ch(x-s) + (q(x,\tau)+c(x))sh(x-s)\right],$$

$$b(x,t) = \int_0^t e^{-c(x)(t-\tau)}a(x,\tau)d\tau + k(x)e^{-c(x)t},$$

$$F(x,t) = \int_0^t e^{-c(x)(t-\tau)}\left[p(x)(\mu_1(\tau)chx + \mu_2(\tau)shx) + (q(x,\tau)+c(x))(\mu_1(\tau)shx + \mu_2(\tau)chx)\right]d\tau +$$

$$+ \int_0^t e^{-c(x)(t-\tau)}f(x,\tau)d\tau + u_0(x)e^{-c(x)t}.$$

Положив в (9) , получаем уравнение относительно функции $v(x,T)$:

$$v(x,T) = \int_0^T\int_0^x K_1(x,t,s,\tau)v(s,\tau)dsd\tau + F_1(x,t), \tag{10}$$

$$K_1(x,T,s,\tau) = (1-b(x,T))^{-1}K(x,T,s,\tau), \quad F_1(x,T) = F(x,T)(1-b(x,T))^{-1}.$$

Система (9), (10) является замкнутой системой интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода. Используя метод операторных уравнений Вольтерра ([1, 5]), несложно показать, что эта система имеет единственное решение.

3. Обратная задача определения источника, зависящего от пространственных переменных

В этом пункте рассматривается обратная задача определения источника в псевдопараболическом уравнении, которая заключается в нахождении решения и

правой части из условий, составляющих задачу Гурса и некоторого дополнительного условия, называемого переопределением. В качестве переопределения рассматривается финальное переопределение.

Задача 2. Требуется найти пару функций $\{u(x,t), f(x)\}$ из условий

$$u_t - u_{xxt} - c(x)u_{xx} + p(x)u_x + q(x)u = f(x)h(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \qquad (11)$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \le x \le l, \qquad (12)$$

а также условиям Гурса

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T. \qquad (13)$$

и финальному переопределению

$$u(x,T) = u_1(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (14)$$

$u_1(x)$ – заданная функция.

Пусть для функций $u_0(x), u_1(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ выполнены условия согласования:

$$u_0(0) = \mu_1(0), u_0'(0) = \mu_2(0), \quad u_1(0) = \mu_1(T), \quad u_1'(0) = \mu_2(T). \qquad (15)$$

Теорема 2. Пусть $c(x), \in C^2[0,l]$, $p(x) \in C^1[0,l]$, $q(x) \in C[0,l]$, $p(x) > 0$, $q(x) > 0$, $x \in [0,l]$, $u_0(x) \in C^1[0,l]$, $\mu_1(t), \mu_2(t) \in C^2[0,T]$, $h(x,t), g(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, причем $|h(x,T)| \ge h_0 > 0$. Кроме того, для функций $u_0(x), u_1(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ выполнены условия согласования (15). Тогда существует единственное решение обратной задачи (11)-(14).

Доказательство. Так как обратная задача (11)-(14) линейна, то ее решение можно представить в виде

$$(u, f) = (u^1, 0) + (u^2, f), \qquad (16)$$

где $u^1(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$u_t^1 - u_{xxt}^1 - c(x)u_{xx}^1 + p(x)u_x^1 + q(x)u^1 = g(x,t), \qquad (17)$$

$$u^1(x,0) = u_0(x), \quad u^1(0,t) = \mu_1(t), \; u_x^1(0,t) = \mu_2(t). \qquad (18)$$

Пара функций (u^2, f) удовлетворяет задаче

$$u_t^1 - u_{xxt}^1 - c(x)u_{xx}^1 + p(x)u_x^1 + q(x)u^1 = f(x)h(x,t), \qquad (19)$$

$$u^2(x,0) = u^2(0,t) = u_x^2(0,t) = 0, \qquad (20)$$

$$u^2(x,T) = \psi(x) - u^1(x,T) = u_1(x). \qquad (21)$$

Из этих рассуждений следует, что для доказательства теоремы 2 достаточно доказать существование и единственность определения пары функций (u, f) из условий

$$u_t(x,t) - u_{xxt}(x,t) - c(x)u_{xx}(x,t) + p(x)u_x + q(x)u = f(x)h(x,t), \qquad (22)$$

$$u(x,0) = u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \qquad (23)$$

$$u(x,T) = u_1(x). \qquad (24)$$

Для доказательства разрешимости задачи (22)-(24) положим в (22) $t = T$ и воспользуемся дополнительной информацией (24):

$$f(x) = [u_{xxt}(x,T) - u_t(x,T)]/h(x,T) + \varphi_0(x), \tag{25}$$

где

$$\varphi_0(x) = \left[-c(x)u_1''(x) + p(x)u_1'(x) + q(x)u_1(x)\right]/h(x,T).$$

Подставляя (25) в уравнение (22), получим следующую нелокальную задачу для нагруженного псевдопараболического уравнения

$$u_t - u_{xxt} - c(x)u_{xx} + p(x)u_x + q(x)u = \frac{h(x,t)}{h(x,T)}[u_{xxt}(x,T) - u(x,T)] + h(x,t)\varphi_0(x), \tag{26}$$

с однородными начальными и граничными условиями (23).

Введем функцию $u(x,t) = v_t(x,t)$. Тогда для $v(x,t)$ имеем следующую задачу:

$$v_t - v_{xxt} - c(x)v_{xx} + p(x)v_x + q(x)v = \frac{h_t(x,t)}{h(x,T)}[v_{xx}(x,T) - v(x,T)] + h_t(x,t)\varphi_0(x), \tag{27}$$

$$v(x,0) - v_{xx}(x,0) + k(x)[v_{xx}(x,T) - v(x,T)] = \phi(x), \tag{28}$$

$$v(0,t) = 0, \quad v_x(0,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{29}$$

где $k(x) = -\dfrac{h(x,0)}{h(x,T)}$, $\phi(x) = h(x,0)\varphi_0(x)$.

Применяя к задаче (27)-(29) методику, изложенную в п.1, приходим к заключению теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: Илим, 2001. –183 с.
2. Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995. – 270 с.
3. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения – как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: ҒЫЛЫМ, 2010. – 334 с.
4. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Науч. исслед. ин-т прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. – М.: Наука, 2012. – 232 с.
5. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 254 с.

УДК 517.98

ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Н. А. Аксенов, к.ф.-м.н.
Орловский филиал Финансового университета
при Правительстве Российской Федерации
e-mail: *aksenovna@inbox.ru*

Работа посвящена исследованию нелокальной задачи для интегрально-операторного уравнения в пространствах аналитических векторнозначных функций. Для рассматриваемой задачи найдены условия, при которых она имеет единственное аналитическое решение, представленное в форме степенных векторнозначных рядов.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, линейный оператор, нелокальное условие, интегрально-операторное уравнение.

Введение

Задачи с нелокальными условиями занимают особое место в теории дифференциальных уравнений. Нелокальными принято называть такие условия, которые задают некоторую связь между значениями искомого решения в различных точках рассматриваемой области (как внутри нее, так и на ее границе).

Одной из разновидностей задач с нелокальными условиями являются задачи, содержащие интегральные условия. В частности, подобные задачи рассматривались в работах Д.Г. Гордезиани, Г.А. Авалишвили [1]., С.В. Кириченко, Л.С. Пулькиной [2], М.Г. Волынской [3]. Интерес к этим задачам в действительном случае обусловлен тем, что к ним приводит математическое моделирование многих физических, биологических и химических процессов.

Для уравнений с комплексными переменными исследование таких задач представляет интерес с точки зрения аналитического продолжения действительных решений.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{H}$ — произвольное счётно-полное локально выпуклое пространство, топология которого определяется мультинормой $\{\|\cdot\|_p\}, p \in \mathcal{P}$, и пусть A — линейный оператор с областью определения $D(A) \subseteq \mathbb{H}$. Оператор A не обязан быть непрерывным, но замкнут.

Рассморим в пространстве $\mathbb{H}$ нелокальную задачу для интегрально-операторного уравнения

$$u(z) + A\int\limits_a^z u(\xi)d\xi + A^2\int\limits_a^z (z-\xi)u(\xi)d\xi = 0 \tag{1}$$

со следующими условиями:

$$u(b) = x_0,\ \int\limits_a^b u(\xi)d\xi = x_1,\quad a \neq b,\ a,b \in \mathbb{C},\ x_0, x_1 \in \mathbb{H}. \tag{2}$$

Требуется отыскать векторнозначную функцию $u(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2).

2. Методы решения

О п р е д е л е н и е. Пусть $D(A^\nu)$ — область определения оператора A^ν, $D_\infty(A) = \bigcap\limits_{\nu\geq 0} D(A^\nu)$ — множество векторов пространства $\mathbb{H}$, на которые оператор A действует бесконечно много раз. Вектор $x \in D_\infty(A)$ назовём вектором класса $\aleph_{\mathbb{H}}^{\beta_p,\alpha}[\tilde{\beta},\infty), \tilde{\beta} \in \mathbb{R}$, если $\beta_p(x) < \tilde{\beta}, \forall p$, либо $\beta_p(x) = \tilde{\beta}, \forall p$, но тогда $\alpha(x) < \infty$.

Здесь $\beta_p(x)$ и $\alpha(x)$ — соответственно операторный p-порядок и операторный тип вектора x относительно оператора A [4].

Т е о р е м а 1. Пусть $A^{-(2-k)}$ — оператор, левый обратный к оператору $A^{(2-k)}$, однозначно определен на векторе x_k, $k = 0, 1$. Тогда $\forall x_0, x_1 \in \aleph_{\mathbb{H}}^{\beta_p,\alpha}[0,\infty)$ нелокальная задача (1)-(2) имеет единственное решение. Оно является целой векторнозначной функцией со значениями в пространстве $\mathbb{H}$ и определяется формулой

$$u(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{4\pi(n+m)i}{3}\right)(-b)^m}{n!m!} A^{n+m+2}(\tau_1(x_0,x_1))z^n + \\ + \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{2\pi(n+m)i}{3}\right)(-b)^m}{n!m!} A^{n+m+2}(\tau_2(x_0,x_1))z^n, \quad (3)$$

в которой

$$\tau_1(x_0,x_1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) A^{-2}(x_0) - \frac{i}{\sqrt{3}} A^{-1}(x_1), \quad (4)$$

$$\tau_2(x_0,x_1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) A^{-2}(x_0) + \frac{i}{\sqrt{3}} A^{-1}(x_1). \quad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем подстановку

$$v(z) = \int_a^z (z-\xi)u(\xi)d\xi. \quad (6)$$

Тогда нелокальная задача (1)-(2) трансформируется в неклассическую задачу Коши

$$v''(z) + Av'(z) + A^2 v(z) = 0, \quad (7)$$

$$x_0 = v''(b),\ x_1 = v'(b). \quad (8)$$

Найдем решение задачи Коши (7)-(8). Известно [5], что общее решение

уравнения (7) имеет вид:

$$v(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\left(\frac{4\pi ni}{3}\right)}{n!}A^n(y_0)z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\left(\frac{2\pi ni}{3}\right)}{n!}A^n(y_1)z^n, \tag{9}$$

где $y_0, y_1 \in \aleph_{\mathbb{H}}^{\beta_p,\alpha}[0,\infty)$ — произвольные векторы пространства $\mathbb{H}$, подлежащие определению.

В работе [5] показано, что при $y_0, y_1 \in \aleph_{\mathbb{H}}^{\beta_p,\alpha}[0,\infty)$ вектор-функция (9) является целой, поэтому подставляя (9) в (8), задачу нахождения неизвестных векторов y_0, y_1 сведем к разрешимости системы векторных уравнений

$$\begin{cases} e^{4\pi i/3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\left(\frac{4\pi ni}{3}\right)}{n!}b^nA^n(y_0)+e^{2\pi i/3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\left(\frac{2\pi ni}{3}\right)}{n!}b^nA^n(y_1)=A^{-1}(x_1), \\ e^{2\pi i/3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\left(\frac{4\pi ni}{3}\right)}{n!}b^nA^n(y_0)+e^{4\pi i/3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\left(\frac{2\pi ni}{3}\right)}{n!}b^nA^n(y_1)=A^{-2}(x_0). \end{cases} \tag{10}$$

Преобразовывая систему (10), получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\left(\frac{4\pi ni}{3}\right)}{n!}b^nA^n(y_0)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2\sqrt{3}}\right)A^{-2}(x_0)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}\right)A^{-1}(x_1), \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\left(\frac{2\pi ni}{3}\right)}{n!}b^nA^n(y_1)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}\right)A^{-2}(x_0)-\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}\right)A^{-1}(x_1). \end{cases} \tag{11}$$

Построим решение первого уравнения системы (11) (второе уравнение решается аналогично).

Поскольку рассматриваемое уравнение имеет вид

$$\left(E-\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_mA^m\right)(y_0)=x,$$

его единственное решение представляется формулой [4]:

$$y_0=\sum_{m=0}^{\infty}c_mA^m(x),$$

где c_m — коэффициенты разложения функции $\psi(\xi)=(\varphi(\xi))^{-1}$ в ряд Маклорена, $\varphi(\xi)=1-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\lambda_m\xi^m$ — характеристическая функция оператора $E-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\lambda_mA^m$.

Легко видеть, что

$$\varphi(\xi)=1-\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{(be^{4\pi i/3})^m}{m!}\right)\xi^m=\exp\left(be^{4\pi i/3}\xi\right),$$

поэтому

$$\psi(\xi) = (\varphi(\xi))^{-1} = \exp\left(-be^{4\pi i/3}\xi\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-b)^m e^{4\pi mi/3}}{m!}\xi^m.$$

Итак,

$$y_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-b)^m e^{4\pi mi/3}}{m!} A^m \left\{ \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) A^{-2}(x_0) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) A^{-1}(x_1) \right\}. \tag{12}$$

Рассуждая аналогично, находим

$$y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-b)^m e^{2\pi mi/3}}{m!} A^m \left\{ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) A^{-2}(x_0) - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) A^{-1}(x_1) \right\}. \tag{13}$$

Подставляя теперь (12)-(13) в (9), получаем решение задачи Коши (7)-(8):

$$\begin{aligned} v(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} & \frac{\exp\left(\frac{4\pi(n+m)i}{3}(-b)^m\right)}{n!m!} \times \\ & \times A^{n+m} \left\{ \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) A^{-2}(x_0) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) A^{-1}(x_1) \right\} z^n + \\ & + \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{2\pi(n+m)i}{3}(-b)^m\right)}{n!m!} \times \\ & \times A^{n+m} \left\{ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) A^{-2}(x_0) - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) A^{-1}(x_1) \right\} z^n. \end{aligned} \tag{14}$$

Повторно учитывая, что вектор-функция (14) является целой, путем двукратного дифференцирования, после преобразований, приходим к решению нелокальной задачи (1)-(2) в форме (3)-(5).

Единственность решения задачи (1)-(2) является следствием его голоморфности.

З а м е ч а н и е . Построенное решение нелокальной задачи (1)-(2) получено формально и требует обоснования. Методика исследования рядов вида (3) (с учетом (4)-(5)) на абсолютную по топологии пространства $\mathbb{H}$ сходимость представлена в работе [5]. Ввиду громоздкости доказательств, в настоящей работе исследование сходимости указанных рядов не приводится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Математическое моделирование. — 2000.— Т 12. — №1. — С. 94–103.

2. Кириченко С. В., Пулькина Л. С. Задача с нелокальными начальными данными для одномерного гиперболического уравнения // Известия вузов. Математика. — 2014. — №9. — С. 17–26.
3. Волынская М. Г. Об одной нелокальной задаче с интегральным условием для гиперболического уравнения // Труды Третьей Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. — Самара: СамГТУ — 2006. — С. 74–76.
4. Громов В. П., Мишин С. Н., Панюшкин С. В. Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения. — Орел: ОГУ. — 2009. — 430 с.
5. Аксёнов Н. А. Применение теории порядка и типа оператора в локально выпуклых пространствах к исследованию аналитических задач для дифференциально-операторных уравнений. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Орел: ОГУ. — 2011. — 153 с.

УДК 517.57

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В МНОГОМЕРНОМ БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

О.Д. Алгазин, к.ф.-м.н., доц.
МГТУ имени Н. Э. Баумана
А.В. Копаев, к.ф.-м.н., доц.
МГТУ имени Н. Э. Баумана

Гармонические функции двух и трёх переменных описывают многие стационарные процессы подземной гидродинамики, теплопроводности и т. д. Поэтому поиск решений различных краевых задач для уравнения Лапласа (и новых более простых форм решений) весьма актуален. Для плоских односвязных областей (например, полосы) решение этих задач конформными преобразованиями сводятся к их решению для канонических областей – круга и полуплоскости. Если число переменных больше двух, то такой возможности нет, и для каждой области приходится искать свои методы решения. Мы остановили свой выбор на многомерном бесконечном слое.

Кроме того, нам хотелось получить интегральные представления решений краевых задач, ядра которых содержат только элементарные функции (ну, в крайнем случае, еще и специальные функции). Это удалось сделать для двух краевых задач – задачи Дирихле и смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана [1], [2].

Задача Дирихле. Введём следующие обозначения:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ , \qquad (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \ , \ y \in \mathbb{R} \ ,$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \ , \qquad \langle x, t \rangle = x_1 t_1 + \dots + x_n t_n \ , \qquad dx = dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n \ ,$$

$$\Delta u(x, y) = \Delta u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n} + u_{yy} \ - \text{оператор Лапласа.}$$

Рассмотрим краевую задачу Дирихле: найти функцию $n+1$ переменной $u(x, y)$, гармоническую в области $D = \{(x, y): 0 < y < a\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\Delta u(x, y) = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}^n \ , \ 0 < y < a \ , \qquad (1)$$

по краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \quad u(x, a) = \psi(x), \ x \in \mathbb{R}^n \ . \qquad (2)$$

Решим эту задачу методом преобразования Фурье. Введем обозначение

$$F(t) = \mathcal{F}[f](t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x, t \rangle} dx \ -$$

преобразование Фурье суммируемой функции $f(x)$. Если суммируемая по x функция $f(x, y)$ зависит от переменных x и y, то ее преобразование Фурье по x будем обозначать

$$\mathcal{F}_x[f](t, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) e^{i\langle x, t \rangle} dx \ .$$

Аналогично определяется обратное преобразование Фурье суммируемой функции $F(t)$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(t) e^{-i\langle x, t \rangle} dt$$

и суммируемой по t функции $F(t,y)$

$$\mathcal{F}_t^{-1}[F](x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} F(t,y)e^{-i\langle x,t\rangle}dt\,.$$

Применим преобразование Фурье по x к уравнению Лапласа (1), обозначив

$$U(t,y) = \mathcal{F}_x[u](t,y)\,, \qquad \Phi(t) = \mathcal{F}[\varphi](t), \qquad \Psi(t) = \mathcal{F}[\psi](t).$$

Получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $t \in \mathbb{R}^n$:

$$-|t|^2U(t,y) + U_{yy}(t,y) = 0\ , \tag{3}$$

$$U(t,0) = \Phi(t)\ ,\ U(t,a) = \Psi(t)\,. \tag{4}$$

Решением этой краевой задачи будет функция

$$U(t,y) = \Phi(t)\frac{\mathrm{sh}(|t|(a-y))}{\mathrm{sh}(a|t|)} + \Psi(t)\frac{\mathrm{sh}(|t|y)}{\mathrm{sh}(a|t|)}. \tag{5}$$

Применив обратное преобразование Фурье, получим решение исходной смешанной краевой задачи в виде свертки

$$u(x,y) = \varphi(x) * K_n(x,y) + \psi(x) * L_n(x,y)\,,$$

где для ядер введены обозначения

$$K_n(x,y) = \mathcal{F}_t^{-1}[k_n](x,y)\,,\ k_n(|t|,y) = \frac{\mathrm{sh}(|t|(a-y))}{\mathrm{sh}(a|t|)}\ , t \in \mathbb{R}^n\,, \tag{6}$$

$$L_n(x,y) = \mathcal{F}_t^{-1}[l_n](x,y)\,,\ l_n(|t|,y) = \frac{\mathrm{sh}(|t|y)}{\mathrm{sh}(a|t|)}\ , t \in \mathbb{R}^n\ . \tag{7}$$

В работе [1] показано, что справедливы рекуррентные соотношения

$$K_{n+2}(r) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}K_n(r), \qquad L_{n+2}(r) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}L_n(r),$$

где введено обозначение $r = |x|$. Отсюда следует, что достаточно найти ядра $K_n(x,y)$ и $L_n(x,y)$ только для $n = 1$ и $n = 2$.

Выражения для ядер $K_1(t,y)$ и $L_1(t,y))$ находим по таблицам обратного преобразования Фурье:

$$K_1(x,y) = \frac{1}{2a}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right)-\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}\ ,\ L_1(x,y) = \frac{1}{2a}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)} \tag{8}$$

Для трех переменных ядра уже не выражаются через элементарные функции:

$$K_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,(\rho(a-y))}{\mathrm{sh}\,(a\rho)}\rho\,J_0(\rho|x|)d\rho\,, \tag{9}$$

$$L_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,(\rho y)}{\mathrm{sh}\,(a\rho)}J_0(\rho|x|)d\rho\ , \tag{10}$$

где $J_0(\rho|x|) -$ функция Бесселя 1-го рода порядка $\nu = 0$.

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x) -$ функции полиномиального роста, то решение задачи Дирихле, представленное сверткой, можно записать интегральной формулой. При этом интегральная формула, решающая задачу Дирихле в полосе на плоскости, приводится в справочнике [3]. А интегральная формула, приведенная в справочнике [3] и решающая задачу Дирихле в бесконечном слое трехмерного пространства, содержит ядро , представленное в виде суммы функционального ряда.

Задача Дирихле-Неймана. Рассмотрим смешанную краевую задачу Дирихле-Неймана: найти функцию $n+1$ переменной $u(x,y)$, гармоническую в области

$$D=\{(x,y)\colon 0<y<a\}\subset \mathbb{R}^{n+1},$$
$$\Delta u(x,y)=0\ ,\qquad x\in\mathbb{R}^n\ ,\qquad 0<y<a\ ,$$

по краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad x\in\mathbb{R}^n,\qquad u_y(x,a)=\psi(x),\qquad x\in\mathbb{R}^n\ .$$

Решение этой краевой задачи буквально повторяет решение задачи Дирихле. При этом граничные условия (4) для дифференциального уравнения (3) принимают вид

$$U(t,0)=\Phi(t)\ ,\qquad U_y(t,a)=\Psi(t)\ .$$

Вместо формулы (5) для решения краевой задачи получаем формулу

$$U(t,y)=\Phi(t)\frac{\operatorname{ch}(|t|(a-y))}{\operatorname{ch}(a|t|)}+\Psi(t)\frac{\operatorname{sh}(|t|y)}{|t|\operatorname{ch}(a|t|)}.$$

Вместо формул (6) и (7) будут верны формулы

$$K_n(x,y)=\mathcal{F}_t^{-1}[k_n](x,y)\ ,\ k_n(|t|,y)=\frac{\operatorname{ch}\big(|t|(a-y)\big)}{\operatorname{ch}(a|t|)}\ ,t\in\mathbb{R}^n\ ,$$

$$L_n(x,y)=\mathcal{F}_t^{-1}[l_n](x,y)\ ,\ l_n(|t|,y)=\frac{\operatorname{sh}(|t|y)}{|t|\operatorname{ch}(a|t|)}\ ,t\in\mathbb{R}^n\ .$$

Вместо формул (8) будут верны формулы

$$K_1(x,y)=\frac{1}{a}\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right)-\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}\ ,L_1(x,y)\ =\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)+\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)-\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right).$$

А вместо формул (9) и (10) будут верны формулы

$$K_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}\,(\rho(a-y))}{\operatorname{ch}\,(a\rho)}\rho J_0(\rho|x|)d\rho\ ,$$
$$L_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}\,(\rho y)}{\operatorname{ch}\,(a\rho)}J_0(\rho|x|)d\rho\ .$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)-$ функции полиномиального роста, то решение задачи Дирихле-Неймана, представленное сверткой, можно записать интегральной формулой. При этом и интегральная формула, решающая задачу Дирихле-Неймана в полосе на плоскости, и интегральная формула, решающая задачу Дирихле-Неймана в бесконечном слое трехмерного пространства, приведенные в справочнике [3], содержат ядра , представленные в виде сумм функциональных рядов.

Наконец, отметим что в [4] приведены примеры применения смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана в подземной гидродинамике. Там построены фильтрационные течения под точечной плотиной с водоупором и каскадом из двух точечных плотин с водоупором в двумерном случае. В трехмерном случае построено течение к несовершенной вертикальной скважине в бесконечном слое с водоупором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. – 2015. – № 4. – С. 41-53.
2. Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». – 2016. – № 3. С. 42-56.
3. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит. – 2001. – 576 с.
4. Алгазин О.Д., Копаев А.В. Фильтрация жидкости в неоднородном слое с коэффициентом фильтрации, меняющимся по квадратичному закону // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2017. – Выпуск 6. – С.1-15.

УДК 517.96

ПРИМЕНЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ ОЦЕНИВАНИЯ МАКРОСТРУКТУРЫ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

О.Г. Антоновская, к.ф.-м.н., доц.

Нижегородский архитектурно-строительный университет

e-mail: *olga.antonovsckaja@yandex.ru*

В настоящей работе описывается методика оценки размеров областей притяжения асимптотически устойчивых равновесных состояний нелинейных непрерывных и дискретных динамических систем на основе метода функций Ляпунова. За оценку области притяжения принимается окрестность равновесного состояния, в которой первая производная (первая разность) функции Ляпунова отрицательна. Функция Ляпунова выбирается в виде положительно определенной квадратичной формы, для которой знакоотрицательность ее первой производной (первой разности) в силу линеаризованной системы обеспечивается с заданным запасом. Предложена методика расширения полученных оценок области притяжения.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, состояние равновесия, область притяжения, метод функций Ляпунова.

1. Введение

Исследование структуры пространства состояний и зависимости ее от основных параметров системы является основной задачей изучения динамики систем [1,2]. В частности, представляет интерес задача построения областей притяжения, которые траектория в дальнейшем не покидает [3]. Для решения этой задачи может быть использован второй (прямой) метод Ляпунова или метод функций Ляпунова [2,3], когда изучается поведение некоторой вспомогательной функции вдоль траекторий системы.

Центральное место во втором (прямом) методе Ляпунова занимает проблема построения функции Ляпунова. При этом функцию Ляпунова нелиней-

ной динамической системы часто ищут [2,3] в классе положительно определенных квадратичных форм, исходя из того условия, что построенная квадратичная форма является функцией Ляпунова для соответствующей линеаризованной системы. Кроме того может ставиться вопрос о построении квадратичных функций Ляпунова с некоторыми заданными свойствами, которые определяются особенностями задачи. В динамических задачах, когда интерес представляют уже не только качественные, но и некоторые количественные характеристики системы, возникает необходимость ограничений на первую производную (первую разность) функции Ляпунова [4].

Метод функций Ляпунова позволяет, в принципе, решать задачу точного оценивания макроструктуры пространства состояний как непрерывных, так и дискретных динамических систем, т.е. существуют функции Ляпунова, дающие оценки областей притяжения состояний равновесия, совпадающие с самими областями притяжения [2,3]. Однако факт существования таких функций Ляпунова носит общеметодологический характер и не содержит какого-либо алгоритма их построения в каждом конкретном случае.

В настоящей работе описывается прикладная методика оценивания размеров областей притяжения асимптотически устойчивых состояний равновесия динамических систем на основе применения прямого метода Ляпунова.

2. Получение оценок области притяжения в случае непрерывной динамической системы

Пусть нелинейная непрерывная динамическая система задана системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (i = 1,2,...,n) \tag{1}$$

имеющей асимптотически устойчивое состояние равновесие $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. И пусть функции f_i имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Запишем (1) в виде

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \Omega_i(x_1, x_2, ..., x_n), \ (i = 1,2,...,n) \tag{2}$$

где a_{ij} – постоянные, равные значениям частных производных первого порядка функций f_i при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, а Ω_i – остаточные члены второго порядка в разложении по формуле Тейлора. В силу непрерывности вторых производных для остаточных членов Ω_i на любом ограниченном множестве, содержащем состояние равновесия, можно указать оценку

$$\left|\Omega_i(x_1, x_2, ..., x_n)\right| \le C \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \qquad C = Ln/2, \ (i = 1,2,...,n) \tag{3}$$

где $\left|\partial^2 f_i / \partial x_j \partial x_k\right| \le L \qquad (i, j, k = 1,2,...,n)$. Требуется получить оценку области притяжения состояния равновесия $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Выберем функцию Ляпунова в классе положительно определенных квадратичных форм

$$\mathrm{V}(\mathrm{x}_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_i x_j \quad (K_{ij} = K_{ji}, i, j = 1,2,\ldots,n) \tag{4}$$

так, чтобы она была функцией Ляпунова соответствующей (2) линеаризованной системы

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad (i = 1,2,...,n) \tag{5}$$

и обеспечивала выполнение неравенства $\dot{V} < 0$ с заданным (в том числе максимальным) запасом, т.е. удовлетворяла условию [4] $\max\limits_{\mathrm{V}=\mathrm{V}_0} (\dot{V}/V) = -\delta$ $\left(2\max\limits_{i=1,n}\{\mathrm{Re}\,\lambda_i\} \le -\delta < 0\right)$, где

$$\dot{V}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}(\dot{x}_i x_j + x_i \dot{x}_j)$$

первая производная (5) в силу линеаризованной системы, а $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$, $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0 \ \ (i = 1,2,...,n)$ – собственные числа матрицы системы $A = (a_{ij})$. В [4] показано, что выбор коэффициентов (4), удовлетворяющей этому условию, можно осуществить с помощью простых явных соотношений. В частности, в случае, когда все корни характеристического уравнения, соответствующего состоянию равновесия, действительны и различны $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < 0$, всегда существует линейное невырожденное преобразование координат

$$x_{\mathrm{i}} = \sum_{j=1}^{\mathrm{n}} b_{ij} \xi_i, \quad (i = 1,2,...,n), \tag{6}$$

приводящее систему к каноническому виду

$$\dot{\xi}_{\mathrm{i}} = \lambda_i \xi_i, \ (i = 1,2,...,n).$$

Но тогда условию $\max\limits_{\mathrm{V}=\mathrm{V}_0} (\dot{V}/V) = -\delta$ будет удовлетворять функция

$$\mathrm{V}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = \sum_{i=1}^{n-2} K_{ii}\xi_i^2 + \mathrm{K}_{\mathrm{n\text{-}1,n\text{-}1}}\xi_{n-1}^2 + 2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n + \mathrm{K}_{\mathrm{nn}}\xi_n^2, \tag{7}$$

$$K_{n-1,n}^2 = (1 - R(\delta))K_{n-1,n-1}K_{nn}, R(\delta) = (\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2(\lambda_{n-1} + \lambda_n + \delta)^{-2} \ \ (2\lambda_n \le -\delta \le 0),$$

$$K_{ii} > 0, K_{n-1,n-1}K_{nn} - K_{n-1,n}^2 > 0.$$

Возвращаясь назад к переменным $x_i, i = 1,2,...,n,$ получим искомую квадратичную функцию Ляпунова.

Но тогда в силу следующей теоремы [5], можно получить оценку области притяжения состояния равновесия системы.

Теорема 1. Область

$$S_y = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : V(x_1, x_2, ..., x_n) < V_{0y}\}, \tag{8}$$

где

$$V_{0y} = \delta^2 (2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |K_{ij}| CM)^{-2},$$

является оценкой снизу области притяжения асимптотически устойчивого состояния равновесия $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ системы дифференциальных уравнений (2).

Замечание. Приведенная выше теорема дает аналитическую оценку области притяжения асимптотически устойчивого состояния равновесия нелинейной системы дифференциальных уравнений. Однако полученное значение V_0 для ее границы $V = V_0$ может быть существенно занижено в сравнении с соответствующим значением для сечения, реально вписанного в область притяжения. При необходимости для расширения полученной оценки можно применять численные методы, отображая точки границы полученной области обратным ходом траекторий системы.

3. Получение оценок области притяжения в случае дискретной динамической системы

Пусть нелинейная дискретная динамическая система задана точечным отображением

$$\bar{x}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (i = 1,2,...,n) \tag{9}$$

имеющим асимптотически устойчивую неподвижную точку $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. И пусть функции f_i имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Запишем (9) в виде

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \Omega_i(x_1, x_2, ..., x_n), \ (i = 1,2,...,n) \tag{10}$$

где a_{ij} – постоянные, равные значениям частных производных первого порядка функций f_i при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, а Ω_i – остаточные члены второго порядка в разложении по формуле Тейлора. В силу непрерывности вторых производных для остаточных членов Ω_i на любом ограниченном множестве, содержащем неподвижную точку, можно указать оценку вида (3). Требуется получить оценку области притяжения неподвижной точки $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Выберем функцию Ляпунова в классе положительно определенных квадратичных форм вида (4) так, чтобы она была функцией Ляпунова соответствующего (10) линеаризованного отображения

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad (i = 1,2,...,n) \tag{11}$$

и обеспечивала выполнение неравенства $\Delta V < 0$ с заданным (в том числе максимальным) запасом, т.е. удовлетворяла условию [4] $\max\limits_{V = V_0} (\Delta V / V) = -\delta$ $\left(\min\limits_{i=\overline{1,n}} \{ | z_i |^2 \} - 1 \le -\delta < 0 \right)$, где $\Delta V(x_1, x_2, ..., x_n) = V(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) - V(x_1, x_2, ..., x_n)$ первая разность (4) в силу линеаризованного отображения, а $z_1, z_2, .., z_n$, $| z_i | < 1$ $(i = 1,2,...,n)$ – собственные числа матрицы отображения $A = (a_{ij})$. В [4] показано, что выбор коэффициентов (4), удовлетворяющей этому условию,

можно осуществить с помощью простых явных соотношений. В частности, в случае, когда все корни характеристического уравнения, соответствующего состоянию равновесия, действительны и различны, $|z_1|<|z_2|<...<|z_n|<1$, всегда существует линейное невырожденное преобразование координат (6), приводящее отображение к каноническому виду

$$\overline{\xi_i} = \lambda_i \xi_i \qquad (i = 1,2,...,n).$$

Но тогда условию $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V / V) = -\delta$ будет удовлетворять функция (7), где

$$K_{n-1,n}^2 = (1 - R(\delta))K_{n-1,n-1}K_{nn},\ R(\delta) = (1-\delta)(z_n - z_{n-1})^2 (z_n z_{n-1} - 1 + \delta)^{-2}$$

$$(z_n^2 - 1 \le -\delta \le 0).$$

Возвращаясь назад к переменным $x_i, i = 1,2,...,n,$ получим искомую квадратичную функцию Ляпунова.

Но тогда в силу следующей теоремы [5], можно получить оценку области притяжения неподвижной точки отображения.

Теорема 2. Область (8), где

$$V_{0y} = ((-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} CM\left|K_{ij}\right| |a_{il}| + ((-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} CM\left|K_{ij}\right| |a_{il}|)^2 +$$

$$+ \delta \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|K_{ij}\right| M^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|K_{ij}\right| M^2)^{-1})^2$$

является оценкой снизу области притяжения асимптотически устойчивой неподвижной точки $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ точечного отображения (10).

Замечание. Следует отметить, что приведенная выше теорема дает аналитическую оценку области притяжения устойчивой неподвижной точки точечного отображения. Однако полученное значение V_0 для ее границы $V = V_0$ может быть существенно занижено в сравнении с соответствующим значением для сечения, реально вписанного в область притяжения. С целью уточнения полученной оценки в [6] была предложена качественно-численная процедура, аналогичная той, которая используется при синтезе систем автоматического управления [7]. А именно, чтобы граница полученной оценки отображалась обратным точечным отображением до тех пор, пока сохраняется его однозначность (т.е. взаимная однозначность исходного отображения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – 2-е изд. – М.: Физматгиз. – 1959. – 916 с.
2. Косякин А.А., Шамриков Б.М. Колебания в цифровых автоматических системах. – М.: Наука. – 1983. – 334 с.
3. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М.: Наука. – 1970. – 240 с.
4. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Том 52. – № 3. – С. 275-281.

5. Антоновская О.Г. Применение квадратичных функций Ляпунова при решении прикладных динамических задач // Международный научно-исследовательский журнал. – 2017. – № 8 (62). – Ч. 2. – С. 142-147.
6. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. Об одном способе оценки размеров области притяжения неподвижной точки нелинейного точечного отображения произвольной размерности. // Известия вузов. Математика. – 2016. – №12. – С. 12-18.
7. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука. – 1977. – 400 с.

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА С НЕСКОЛЬКИМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.А. Бородинова, старший преподаватель
ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
e-mail: *teacher79@mail.ru*
И.Н. Родионова, к.ф.-м.н., доц.
ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

В области ограниченной плоскости $x=h$, $(h>0)$ $y=h$, $y=0$, $y=-x$, $z=0$ рассматривается полное уравнение гиперболического типа, вырождающееся на координатных плоскостях. Методом интегральных уравнений доказана однозначная разрешимость краевой задачи с условиями, содержащими интегралы от искомого решения.

Ключевые слова: уравнения гиперболического типа, краевая задача, интегральное уравнении.

Для уравнения гиперболического типа третьего порядка с сингулярными коэффициентами в области, представляющей трапециидальную бесконечную призму, поставлена задача с одним граничным и двумя интегральными условиями. Последние можно рассматривать задания среднего значения искомого решения на внутренних плоскостях, параллельных граничным $x=h$, $y=h$.

Задача сводится к совокупности однозначно разрешимых интегральных уравнений Вольтерры, в силу чего ее решение может быть получено в явном виде.

Уравнение

$$U_{xyz}+\frac{\gamma}{z}U_{xy}+\frac{\beta}{y}U_{xz}+\frac{\alpha}{x}U_{yz}+\frac{\beta\gamma}{yz}U_x+\frac{\alpha\gamma}{xz}U_y+\frac{\alpha\beta}{xy}U_z+\frac{\alpha\beta\gamma}{xyz}U=0 \qquad (1)$$

$$\alpha,\beta,\gamma-const,\ 0<\alpha,\beta,\gamma<1$$

рассмотрим на множестве

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup H_3,\ H_1 = \{(x,y,z)/0 < x < y < h, 0 < z < +\infty\},$$
$$H_2 = \{(x,y,z)/0 < y < x < h, 0 < z < +\infty\},\ H_3 = \{(x,y,z)/0 < -x < y < h, 0 < z < +\infty\}.$$

Задача I. На множестве Ω найти решение $U(x,y,z)$ уравнение (1), удовлетворяющее условиям:

$$\lim_{я \to 0} z^{\gamma} U(x,y,z) = \begin{cases} f_1(x,y), (x,y) \in \overline{D_1},\ D_1 = \{0 < x < y < h\}; \\ f_2(x,y), (x,y) \in \overline{D_2},\ D_2 = \{0 < y < x < h\}; \\ f_3(x,y), (x,y) \in \overline{D_3},\ D_3 = \{0 < -x < y < h\}; \end{cases} \tag{2}$$

$$\int_0^x t^{\beta} U(x,t,z)dt = \varphi(x,z), (x,z) \in \overline{D_0},\ D_0 = \{(x,z)/0 < x < h, 0 < z < +\infty\}, \tag{3}$$

$$D_0^* = \{(y,z)/0 < y < h, 0 < z < +\infty\}. \tag{4}$$

с сопряжением на внутренней характеристической плоскости $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0+0} x^{\alpha} U(x,y,z) = \lim_{x \to 0-0} (-x)^{\alpha} U(x,y,z) \tag{5}$$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\partial}{\partial x} \int_x^y t^{\alpha} (t-x)^{-r_1} U(t,y,z)dt = \lim_{x \to 0-0} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-y}^x t^{\alpha} (x-t)^{-r_2} U(t,y,z)dt \tag{6}$$

при $(0 < r_1, r_2 < 1)$ и на нехарактеристической плоскости $y = x$:

$$\lim_{y \to x+0} U(x,y,z) = \lim_{y \to x-0} U(x,y,z), \tag{7}$$

$$\lim_{y \to x+0} (U_x - U_y) = \lim_{y \to x-0} (U_x - U_y + \frac{2\alpha}{x} U) + \frac{\partial}{\partial x} U(x, x-0, z). \tag{8}$$

На заданные функции налагаются условия:

Условия А. Имеет место представление

$$\psi(x,z) = x\psi^*(x,z),\ \psi^* \in C(\overline{D_0}) \cup C^{(1)}(D_0);$$
$$\varphi(y,z) = y^3 \varphi^*(y,z),\ \varphi^* \in C(D_0{}^* \cup C^{(1)}(D_0{}^*).$$

Условия В.

1) $f_i(x,y) \in C(D_i),\ \frac{\partial}{\partial x \partial y} \in C(D_i), i = \overline{1,3};\ f_1(0,y) = f_3(0,y) = f_1(x,x) = f_2(x,x) = 0;$

2) выполняется условие ортогональности

$$\int_0^y \left[r_1 t^{-r_1 - 1 + \alpha} f_1(t,y) + r_2 t^{-r_2 - 1 + \alpha} f_3(-t,y) \right] dt = 0.$$

Опираясь на результаты работ [1-3] запишем в каждой из областей $H_i (i = \overline{1,3})$ формулу решения задачи Дарбу, которая получила более простой вид в силу интегрального представления одного из данных. Имеем в области H_1:

$$U(x,y,z) = \frac{1}{x^{\beta} y^{\beta}} \int_0^x T_1(s,z) s^{2\beta} ds + \frac{1}{x^{\alpha} y^{\beta}} \int_x^y N_1(s,z) s^{\alpha+\beta} ds + z^{-\gamma} f_1(x,y) \tag{9}$$

где

$$U(x, x+0, z) = \int_0^x T_1(s,z) (\frac{s}{x})^{2\beta} ds, \tag{10}$$

$$N_1 = \frac{1}{2}[T_1 - \nu_1], \nu_1 = \lim_{y \to x+0}(U_x - U_y), \tag{11}$$

в области H_2:

$$U(x,y,z) = \frac{1}{x^\alpha y^\alpha}\int_0^y T_2(s,z)s^{2\alpha}ds + \frac{1}{x^\alpha y^\beta}\int_y^x N_2(s,z)s^{\alpha+\beta}ds + z^{-\gamma}f_2(x,y) \tag{12}$$

,

$$U(x,x-0,z) = \int_0^x (\frac{s}{x})^{2\alpha} T_2(s,z)ds\ , \tag{13}$$

$$N_2 = \frac{1}{2}[T_2 + \nu_2],\ \nu_2 = \lim_{y \to x-0}(U_x - U_y) \tag{14}$$

и в области H_3:

$$U(x,y,z) = \int_x^0 T_3(s,z)\frac{(-s)^{2\beta}ds}{(-x)^\beta y^\beta} + \frac{1}{(-x)^\alpha y^\beta}\int_{-y}^x N_3(s,z)(-s)^{\alpha+\beta}ds + z^{-\gamma}f_3(x,y) \tag{15}$$

,

где

$$U(x,-x+0,z) = \int_x^0 (\frac{s}{x})^{2\beta} T_3(s,z)ds, \tag{16}$$

$$N_3 = \frac{1}{2}[T_3 + \nu_3], \tag{17}$$

Решение уравнения (1) определяемое формулами (9), (12), (15) удовлетворяет условию (2) задачи I и взято нами за основу ее решения. Неизвестные функции $N_k x^{\alpha+\beta}$, $(k = \overline{1,3})$ $T_1 x^{2\beta}$, $T_2 x^{2\alpha}$, $T_3(-x)^{2\beta}$ ищем в классе функций непрерывных в области D_0 вместе со своими частными производными первого порядка по переменной z абсолютно интегрируемы по x на сегменте $[0,h]$ при любом $z \in [0,+\infty]$.

Из условий задачи I выведем основные соотношения для неизвестных функций $N_k, T_k (k = \overline{1,3})$.

После ряда тождественных преобразований из условий (3), (4) соответственно имеем:

$$\int_0^x T_2(t,z)t^{2\alpha}dt + x^{2\alpha+1}N_2(x,z) = x^{\alpha-\beta}\left[x^\alpha \psi(x,z)\right]_x', \tag{18}$$

$$\int_{-y}^0 T_3(t,z)(-t)^{-2\beta}dt + y^{2\beta+1}N_3(-y,z) = y^{\beta-\alpha}\left[y^\beta \varphi(y,z)\right]_y'. \tag{19}$$

Из условий

$$\int_0^x T_1(s,z)(\frac{s}{x})^{2\alpha}ds = \int_0^x T_2(s,z)(\frac{s}{x})^{2\alpha}ds \tag{20}$$

$$N_1 + N_2 = \frac{1}{2} T_1 \tag{21}$$

$$N_1(y,z) = N_3(-y,z) \tag{22}$$

сопряжений на плоскости $y = x$ и $x = 0$ получаем соответственно:

$$\begin{aligned} &- N_1(y,z) y^{\alpha+\beta-r_1} + r_1 y^{-r_1+\alpha-\beta-1} \int_0^y T_1(s,z) s^{2\beta} ds = \\ &N_3(-y,z) y^{\alpha+\beta-r_2} - r_2 y^{-r_2+\alpha-\beta-1} \int_{-y}^0 T_3(s,z)(-s)^{2\beta} ds. \end{aligned} \tag{23}$$

Соотношение (18), (20), (21) приводят к интегральному уравнению

$$T_1(x,y) x^{2\beta} + \frac{2}{x} \int_0^x T_1(s,z) s^{2\beta} ds = \varphi(x,z), \tag{24}$$

где

$$\varphi = 2x^{\beta-\alpha-1} \left[x^{\alpha} \psi(x,z) \right]_x' + 2z^{2\beta} N_1(x,z). \tag{25}$$

Единственное решение уравнения (24), полученное методом последовательных приближений, представимо формулой

$$T_1(x,y) x^{2\beta} = -\frac{2}{x} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^2 \varphi(t,z) dt + \varphi(x,z). \tag{26}$$

Из соотношений (22), (26), (19), (23) получаем уравнение

$$y^{2+2\beta} N_1(y,z) = \frac{\delta(y)}{y} \int_0^y N_1(t,z) t^{2+2\beta} dt + F_1(y,z), \tag{27}$$

в котором F_1 содержит только заданные функции φ, ψ а $\delta(y)$ непрерывная на $[0,h]$ функция, причем $0 < \delta < 2$. Единственное решение уравнения (27) получено в виде

$$N_1(y,z) y^{\alpha+\beta} = \delta(y) y^{\alpha-\beta-3} \int_0^y t^2 F_1(t,z) e^{\int_t^y \frac{\delta(\tau) d\tau}{\tau}} dt + F_1(y,z) y^{\alpha-\beta-2}.$$

Вычислением показываем, что при выполнении условия А функция $N_1 y^{\alpha+\beta}$ принадлежит указанному выше классу. Остальные неизвестные функции находим по формулам (26), (20), (21), (22), (19). Их выражения не приводим в силу громоздкости записи.

Отметим, что однозначная разрешимость задачи I следует из единственности решения задачи Дарбу для уравнения (1) в областях H_k, $k = \overline{1,3}$, взятого за основу, а также из однозначной разрешимости интегральных уравнений (24), (27) полученных в процессе решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгополов В.М., Родионова И.Р. Две задачи для пространственного аналога гиперболического уравнения третьего порядка // Вест. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ-мат. науки. – 2012. – №4(29). – С.212-217.

2. Родионова И.Н. Задача с интегральным условием для одного пространственного уравнения гиперболического типа, вырождающего на координатных плоскостях // Вест. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ-мат. науки. – 2011. – №2(23) – С.189-193.
3. Родионова И.Н., Долголополов В.М. Задачи с сопряжением на характеристической плоскости для одного гиперболического уравнения третьего порядка в трехмерном пространстве // Вест. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ-мат. науки. – 2014. – №1(34) – С.48-55.

УДК 517.954

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Б. Васильев
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: *vbv57@inbox.ru*

Рассматриваются дискретные псевдодифференциальные уравнения в дискретных аналогах пространств Соболева–Слободецкого в модельных дискретных областях евклидова пространства. Ключевую роль при исследовании разрешимости играет понятие периодической факторизации эллиптического символа дискретного псевдодифференциального оператора, которое может быть использовано для для различных типов канонических областей.

Ключевые слова: дискретное пространство Соболева–Слободецкого, дискретный псевдодифференциальный оператор, эллиптический символ, периодическая факторизация.

Введение

Мы рассмотрим некоторые «дискретные» аспекты хорошо разработанной теории эллиптических псевдодифференциальных уравнений [1], именно вопросы разрешимости их дискретных аналогов. По-видимому, для построения дискретных аппроксимаций решений псевдодифференциальных уравнений исследование этих вопросов является одной из важных составляющих. Некоторые предварительные рассмотрения элементов этой теории приведены в [3, 4, 5].

1. Дискретные пространства и операторы

Мы используем следующие обозначения. Пусть $\mathbb{T}^m$ – m-мерный куб $[-\pi,\pi]^m, h>0, \hbar=h^{-1}$. Мы рассматриваем, определенные на этом кубе как периодические функции на $\mathbb{R}^m$ с таким основным кубом периодов.

Мы будем использовать термин «дискретная функция» для функций дискретной переменной $u_d(\tilde{x}), \tilde{x}\in h\mathbb{Z}^m$. Для таких функций можно определить дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi)\equiv \tilde{u}_d(\xi)=\sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^m} e^{-i\tilde{x}\cdot\xi}u_d(\tilde{x})h^m,\quad \xi\in\hbar\mathbb{T}^m,$$

если ряд сходится, функция $\tilde{u}_d(\xi)$ является периодической на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Такое дискретное преобразование Фурье сохраняет основные свойства интегрального преобразования Фурье, в частности, обратное дискретное преобразование Фурье дается формулой

$$(F_d^{-1}\tilde{u}_d)(\tilde{x})=\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}_d(\xi)d\xi,\quad \tilde{x}\in h\mathbb{Z}^m.$$

Дискретное преобразование Фурье устанавливает взаимно-однозначное соответствие между пространствами $L_2(h\mathbb{Z}^m)$ и $L_2(\hbar\mathbb{T}^m)$ с нормами

$$||u_d||_2=\left(\sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^m}|u_d(\tilde{x})|^2h^m\right)^{1/2}$$

и

$$||\tilde{u}_d||_2 = \left(\int\limits_{\xi \in \hbar \mathbb{T}^m} |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

П р и м е р. Поскольку в определении пространств Соболева–Слободецкого участвуют частные производные, мы будем использовать их дискретные аналоги, т.е. разделенные разности первого порядка

$$(\Delta_k^{(1)} u_d)(\tilde{x}) = h^{-1}(u_d(x_1, \cdots, x_k + h, \cdots, x_m) - u_d(x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_m)),$$

для которых дискретное преобразование Фурье выглядит следующим образом

$$\widetilde{(\Delta_k^{(1)} u_d)}(\xi) = h^{-1}(e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)\tilde{u}_d(\xi).$$

Далее, для разделенной разности второго порядка мы имеем

$$(\Delta_k^{(2)} u_d)(\tilde{x}) = h^{-2}(u_d(x_1, \cdots, x_k + 2h, \cdots, x_m) -$$

$$-2u_d(x_1, \cdots, x_k + h, \cdots, x_m) + u_d(x_1, \cdots, x_k + h, \cdots, x_m))$$

для которой дискретное преобразование Фурье имеет вид

$$\widetilde{(\Delta_k^{(2)} u_d)}(\xi) = h^{-2}(e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)^2 \tilde{u}_d(\xi).$$

Таким образом, для дискретного лапласиана мы получим выражение

$$(\Delta_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{m} (\Delta_k^{(2)} u_d)(\tilde{x}),$$

так что

$$\widetilde{(\Delta_d u_d)}(\xi) = h^{-2} \sum_{k=1}^{m} (e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)^2 \tilde{u}_d(\xi).$$

Мы будем использовать дискретное преобразование Фурье для определения дискретных пространств Соболева–Слободецкого, которые очень удобны для изучения дискретных псевдодифференциальных уравнений. Обозначим $\zeta^2 = h^{-2} \sum\limits_{k=1}^{m} (e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)^2$ и введем следующее

О п р е д е л е н и е. Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$ состоит из дискретных функций $u_d(\tilde{x})$, для которых следующая норма

$$||u_d||_s = \left(\int\limits_{\hbar \mathbb{T}^m} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

конечна.

Далее, пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ – область, и $D_d = D \cap h\mathbb{Z}^m$ – дискретная область.

О п р е д е л е н и е. Пространство $H^s(D_d)$ состоит из дискретных функций пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{D_d}$. Норма в пространстве $H^s(D_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Пространство $H_0^s(D_d)$ состоит из дискретных функций u_d with с носителем в D_d, причем эти функции должны допускать продолжение на все пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Норма в пространстве $H_0^s(D_d)$ дается формулой

$$||u_d||_s^+ = \inf ||\ell u_d||_s,$$

где infimum берется по всевозможным продолжениям ℓ.

Фурье-образ пространства $H^s(D_d)$ обозначим $\widetilde{H}^s(D_d)$.

З а м е ч а н и е . Подобные пространства были детально изучены в работе [2]. Конечно, введенные нормы будут эквивалентны L_2-норме, но константы эквивалентности будут зависеть от h. Отметим, что в наших рассмотрениях все константы ниже не зависят от h.

Пусть $\widetilde{A}_d(\xi)$ – периодическая функция на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Такие функции мы называем символами. Как принято, мы определим дискретный псевдодифференциальный оператор посредством его символа.

О п р е д е л е н и е. Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d в дискретной области D_d называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^m} \int_{\hbar\mathbb{T}^m} \widetilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in D_d,$$

Оператор A_d называется эллиптическим, если

$$ess \inf_{\xi\in\hbar\mathbb{T}^m} |\widetilde{A}_d(\xi)| > 0.$$

З а м е ч а н и е . Можно ввести символ $\widetilde{A}_d(\tilde{x},\xi)$, зависящий от пространственной переменной $\tilde{x}$, и определить общий дискретный псевдодифференциальный оператор формулой

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^m} \int_{\hbar\mathbb{T}^m} \widetilde{A}_d(\tilde{x},\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in D_d,$$

Для исследования последних операторов и связанных с ними уравнений потребуется более тонкая и сложная техника.

О п р е д е л е н и е. Класс E_α состоит из символов, удовлетворяющих следующему условию

$$c_1(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \le |A_d(\xi)| \le c_2(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \tag{1}$$

с положительными постоянными c_1, c_2, не зависящими от h.

Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется порядком дискретного псевдодифференциального оператора A_d. Грубо говоря, порядок дискретного псевдодифференциального

оператора – это степень h, взятая со знаком «минус».

С учетом последнего определения легко доказать следующее свойство.

Л е м м а. Дискретный псевдодифференциальный оператор $A_d \in E_\alpha$ является линейным ограниченным оператором $H^s(h\mathbb{Z}^m) \to H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^m)$ с нормой, не зависящей от h.

2. Операторы и уравнения

С оператором A_d мы свяжем уравнение

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \tag{2}$$

которое ниже будет рассмотрено только для случая полупространства $D = \mathbb{R}^m_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, \cdots, x_m), x_m > 0\}$.

3. Периодическая факторизация

Обозначим $\Pi_\pm = \{(\xi', \xi_m \pm i\tau), \tau > 0\}, \xi = (\xi', \xi_m) \in \mathbb{T}^m$.

О п р е д е л е н и е. Периодической факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi) \in E_\alpha$ называется его представление в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,+}(\xi) A_{d,-}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\pm}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в полу-полосы $\hbar\Pi_\pm$ по последней переменной ξ_m при почти всех фиксированных $\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}$ и удовлетворяют оценкам

$$|A^{\pm 1}_{d,+}(\xi)| \le c_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm \frac{æ}{2}}, \quad |A^{\pm 1}_{d,-}(\xi)| \le c_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm \frac{\alpha - æ}{2}},$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h,

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left(\sum_{k=1}^{m-1} (e^{-ih\xi_k} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_m + i\tau)} - 1)^2 \right), \quad \xi_m + i\tau \in \hbar\Pi_\pm.$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической факторизации.

В некоторых простых случаях можно использовать топологическую формулу

$$æ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} d \arg A_d(\cdot, \xi_m),$$

где $A_d(\cdot, \xi_m)$ означает, что $\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}$ фиксировано, и интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Другими словами, нужно вычислить поделенное на 2π приращение аргумента символа $A_d(\xi)$, когда ξ_m меняется от $-\hbar\pi$ до $\hbar\pi$ при фиксированном ξ'.

4. Уравнения и разрешимость

Т е о р е м а 1. Если эллиптический символ $\tilde{A}_d(\xi) \in E_\alpha$ допускает периодическую факторизацию с индексом æ, так что $|æ - s| < 1/2$, то уравнение (2) имеет единственное решение в пространстве $H^s(hD_d)$ для любой правой части $v_d \in H^{s-\alpha}(hD_d)$,

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}^{-1}_{d,+}(\xi) P^{per}_{\xi'}(\tilde{A}^{-1}_{d,-}(\xi)\widetilde{\ell v_d}(\xi)).$$

З а м е ч а н и е . Нетрудно заключить, что решение не зависит от выбора продолжения ℓv_d.

Т е о р е м а 2. Пусть $æ - s = n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$. Тогда общее решение уравнения (2) в образах Фурье имеет следующий вид

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}^{-1}_{d,+}(\xi) X_n(\xi) P^{per}_{\xi'}(X_n^{-1}(\xi)\tilde{A}^{-1}_{d,-}(\xi)\widetilde{\ell v_d}(\xi)) + \tilde{A}^{-1}_{d,+}(\xi)\sum_{k=0}^{n-1} c_k(\xi')\hat{\zeta}^k_m,$$

$$(P^{per}_{\xi'}\tilde{u}_d)(\xi) \equiv \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_d(\xi) + \frac{1}{2\pi i} v.p. \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi', \eta_m)\,\mathrm{ctg}\,\frac{h(\xi_m - \eta_m)}{2} d\eta_m\right),$$

где $X_n(\xi)$ – произвольный многочлен степени n переменных $\hat{\zeta}_k = \hbar(e^{-ih\xi_k} - 1)$, $k = 1, \cdots, m$, удовлетворяющий условию (1), $c_j(\xi'), j = 0, 1, \cdots, n-1$, – произвольные функции из $H_{s_j}(h\mathbb{T}^{m-1}), s_j = s - æ + j - 1/2$.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект 1.7311.2017/БЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.— М.: Наука.— 1973.— 236 с.
2. Франк Л. С. Пространства сеточных функций // Матем. сборн.— 1971.—86.— 2.— С. 187–233.
3. Vasilyev V. B. Discreteness, periodicity, holomorphy, and factorization. In: Integral Methods in Science and Engineering. V.1. Theoretical Technique. C. Constanda, Dalla Riva, M., Lamberti, P.D., Musolino, P. (Eds.) Birkhäuser, 2017. P. 315–324.
4. Vasilyev V. B. The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, and discrete pseudo-differential operators // AIP Conf. Proc.—2017.—1863.— P. 140014.
5. Vasilyev V. B. On discrete boundary value problems // AIP Conf. Proc.—2017.— 1880. — P. 050010.

УДК 512.000

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ СПЕКТРАЛЬНО-ОБРАТИМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Ю. П. Вирченко, д.ф.-м.н., проф.
НИУ БелГУ
e-mail: *virch@bsu.edu.ru*
А. В. Субботин
НИУ БелГУ
e-mail: *subbotin@bsu.edu.ru*

Вводится понятие спектрально-обратимой динамической системы. Показано, что гамильтоновы системы являются спектрально-обратимыми. Аннонсируется теорема, которая утверждает, что каждая невырожденая спектрально обратимая динамическая система размерности $2n$ с фазовым пространством $\mathbb{R}^{2n}$ посредством замены переменных приводится к гамильтоновой системе.

Ключевые слова: Динамические системы, гамильтоновы системы, спектральная обратимость.

Пусть $\mathsf{F} : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ – биекция $\mathbb{R}^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Система дифференциальных уравнений

$$\dot{X}(t) = \mathsf{F}(X(t)) \tag{1}$$

определяет траектории $X(t) = \langle x_1(t), ..., x_{2n}(t)\rangle$ четномерной автономной динамической системы в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ ее состояний $X = \langle x_1, ..., x_{2n}\rangle$. В каждой точке $X \in \mathbb{R}^{2n}$ определена порождаемая невырожденным линейным преобразованием $\mathcal{G}(X) : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$, с помощью $2n \times 2n$-матрицы $\mathcal{G}(X) = (G_{ij}(X); i, j = 1 \div 2n)$,

$$G_{ij}(X) = \frac{\partial \mathsf{F}_i(X)}{\partial x_j}\,, \tag{2}$$

$\det \mathcal{G}(X) \neq 0$, соответствующая системе (1) линейная касательная динамическая система

$$\dot{\tilde{X}}(t) = [\mathcal{G}(X)]\tilde{X}(t)$$

с траекториями $\tilde{X}(t) = \langle \tilde{x}_1(t), ..., \tilde{x}_{2n}(t)\rangle$.

Определим подклассе спектрально-обратимых систем в классе всех систем вида (1).

О п р е д е л е н и е. [1] Пусть $\mathcal{G}$ – невырожденная четномерная матрица размерности $2n$, $\det G \neq 0$, обладающая невырожденным спектром $\{\lambda_1, ..., \lambda_{2n}\}$, то есть такая, что для всех $i, j = 1 \div 2n$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, если $i \neq j$. Матрицу $\mathcal{G}$ назовем спектрально-обратимой, если ее спектр обладает следующим свойством: для каждого $j = 1 \div 2n$ существует единственный номер j' такой, что $\lambda_{j'} = -\lambda_j$.

О п р е д е л е н и е. Динамическую систему (1) назовем спектрально-обратимой, если в каждой точке $X \in \mathbb{R}^{2n}$ соответствующая ей матрица $\mathcal{G}(X)$ является спектрально-обратимой.

Примером спектрально-обратимых систем являются т.н. гамильтоновы системы. Система (1) размерности $2n$ называется гамильтоновой, если при разложении ее фазового пространства векторов X декартово произведение $X = \langle P, Q\rangle$ пространств векторов $P = \langle p_1, ..., p_{2n}\rangle$ и $Q = \langle q_1, ..., q_{2n}\rangle$ размерности n, для нее найдется функция $H : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$ (гамильтониан системы) такая, что

$$\mathsf{F}(X) = \Big\langle -\frac{\partial H(X)}{\partial Q}\,, \frac{\partial H(X)}{\partial P}\Big\rangle\,, \qquad H(X) \equiv H(P, Q)\,.$$

Для гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(X)$ соответствующие ей генераторы $\mathcal{G}(X) \equiv \mathcal{G}(P, Q)$ касательных систем в каждой точке $X \in \mathbb{R}^{2n}$ имеют следующую блочную структуру

$$\mathcal{G}(X) = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^{+}(X) & -\mathcal{C}(X) \\ \mathcal{A}(X) & \mathcal{B}(X) \end{pmatrix} \tag{3}$$

с блоками в виде $n \times n$-матриц $\mathcal{A}(X)$, $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{C}(X)$. Здесь символом $+$ обозначено транспонирование матрицы $\mathcal{B}(X)$ и имеет место симметрия матриц $\mathcal{A}(X)$ и $\mathcal{C}(X)$. Явные выражения матричных элементов $A_{ij}(X)$, $B_{ij}(X)$, $C_{ij}(X)$, $i, j = 1 \div n$ этих матриц даются формулами

$$A_{ij}(X) = \frac{\partial^2 H(X)}{\partial p_i \partial p_j}\,, \quad B_{ij}(X) = \frac{\partial^2 H(X)}{\partial q_i \partial p_j}\,, \quad C_{ij}(X) = \frac{\partial^2 H(X)}{\partial q_i \partial q_j}\,, \; i, j = 1 \div n\,.$$

В связи с описанной блочной структурой матриц $\mathcal{G}(X)$ гамильтоновых систем, произвольные четномерные матрицы $\mathcal{G}$ размерности $2n$, имеющие аналогичный блочный вид

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^{+} & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix}\,, \tag{4}$$

где $n \times n$-блоки $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ симметричны, будем называть *гамильтоновыми матрицами*.

Спектральная обратимость гамильтоновых систем является следствием следующего утверждения.

Т е о р е м а 1. Каждая гамильтонова матрица (4) является спектрально-обратимой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Гамильтонова матрица (4) представима в форме $\mathcal{G} = \mathcal{J}\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ – симметричная матрица и

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}\,,$$

$\mathbf{1}$ – единичная $n \times n$-матрица. Так как $\mathcal{J}^{+} = -\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^2 = -\mathbf{1}$, то справедливы следующие равенства

$$\det(\lambda - \mathcal{G}) = \det(\lambda - \mathcal{J}\mathcal{K}) = \det(\lambda + (\mathcal{K}\mathcal{J})^{+}) =$$

$$= \det(\lambda + \mathcal{K}\mathcal{J}) = \det(-\lambda\mathcal{J} + \mathcal{K}) = \det(-\mathcal{J}\lambda - \mathcal{J}^2\mathcal{K}) = \det(\lambda + \mathcal{J}\mathcal{K}) = 0\,,$$

которая доказывает утверждение.

В настоящем сообщении мы аннонсируем следующий результат.

Т е о р е м а 2. Каждая спектрально-обратимая система (1) приводится заменой координат $X = \mathsf{V}(Y)$, $Y \in \mathbb{R}^{2n}$, осуществляемой посредством подходящего невырожденного отображения $\mathsf{V} : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ к гамильтоновой системе

$$\dot{Y} = \mathcal{W}^{-1}(Y)\mathsf{F}\big(\mathsf{V}(Y)\big)\,. \tag{5}$$

Доказательство этого утверждения основано на доказанной нами вещественной эквивалентности каждой спектрально-обратимой матрицы $\mathcal{G}$ некоторой гамильтоновой матрице $\mathcal{J}\mathcal{K}$. Это означает, что для каждой четномерной спектрально-обратимой матрицы $\mathcal{G}$ найдется вещественная невырожденная матрица $\mathcal{W}$ той же размерности такая, что матрица $\mathcal{W}\mathcal{J}\mathcal{K}\mathcal{W}^{-1}$ является гамильтоновой. Используя эту связь строятся пошагово непрерывные матриц-функции $\mathcal{W}(X)$ и $\mathcal{K}(X)$ с некоторым шагом последовательно по каждому координатному направлению в $\mathbb{R}^{2n}$, с последующим переходом к пределу, когда длина шага стремится к нулю. На каждом шаге построения на основе уже построенной матрицы $\mathcal{W}(X)$ и малого изменения $\mathcal{H}$ матрицы $\mathcal{G}(X)$ находятся малые изменения $\mathcal{S}$ и $\mathcal{L}(X)$ матриц $\mathcal{W}(X)$ и $\mathcal{K}(X)$ соответственно. Они находятся как соответственно решение и условие разрешимости *гомологического уравнения*

$$[\mathcal{S}(X), \mathcal{J}\mathcal{K}(X)] + \mathcal{W}(X)\mathcal{H}(X)\mathcal{W}^{-1}(X) = \mathcal{J}\mathcal{L}(X)\,.$$

На основе матриц-функций $\mathcal{W}(X)$ и $\mathcal{K}(X)$ отображение $\mathsf{F}(\cdot)$ представляется в виде контурного интеграла

$$\mathsf{F}_i(X) = \int\limits_0^X G_{ij}(Z)dZ_j = \int\limits_0^X \Big(\mathcal{W}(Z)\mathcal{J}\mathcal{K}(Z)\mathcal{W}^{-1}(Z)\Big)_{ij} dZ_j\,.$$

Затем пошагово строится замена переменных $\mathsf{V}(\cdot)$ на основе дискретизации этого контурного интеграла, когда в каждом слагаемом матрицы $\mathcal{W}(X)$ и $\mathcal{K}(X)$ являются фиксированными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Симметричность спектра линейных гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2011. – 24. — 17(112). – С.179-180.

УДК 519.9:517.956.6

ОБ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.Н. Зарубин, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *aleks_zarubin@mail.ru*

Построен алгоритм решения краевой задачи для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа с кратным функциональным запаздыванием и опережением.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, интегральное уравнение, разностное уравнение.

Алгоритмизация решений краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений математической физики [1]-[4], которые служат математическими моделями для многих прикладных задач [5], является актуальной проблемой выявления класса допустимых для вариации преобразований пространственных аргументов.

Ниже предлагается метод построения алгоритма вычисления регулярного решения краевой задачи для функционально-дифференциального гиперболо-параболического уравнения с кратным функциональным запаздыванием и опережением

$$L(A(x)u(x,y) - B(x)u(\alpha_1^2(x),y) + C(x)u(\alpha_2^2(x),y)) = 0, \qquad (1)$$

где $L \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - H(-y)\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - H(y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ – гиперболо-параболический оператор; $H(\xi)$ – функция Хевисайда; коэффициенты $A(x), B(x), C(x)$ – непрерывные достаточно гладкие функции; $\alpha_1(x) < x$, $\alpha_1'(x) > 1$ $(\alpha_1'(x) < 1)$ и $\alpha_2(x) > x$, $\alpha_2'(x) < 1$ $(\alpha_2'(x) > 1)$ – гомеоморфные растягивающе (сжимающе)-запаздывающее и сжимающе (растягивающе)-опережающее отображения сохраняющие ориентацию, являющиеся диффеоморфизмами класса $C^2(x_0, x_3)$, $x_0 = 0$, причем $\alpha_1(\alpha_2(x)) = \alpha_2(\alpha_1(x)) = x$, $x_n = \alpha_1(x_{n+1}), x_{n+1} = \alpha_2(x_n)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, 3, 4)$; $\alpha_j^0(x) = x$, $\alpha_j^k(x) = \alpha_j(\alpha_j^{k-1}(x))$ $(j = 1, 2; k = 1, 2, 3, 4)$.

1. Пусть $D = D^- \cup D^+ \cup I$ – гиперболо-параболическая область для уравнения (1) с линией изменения типа $I = \{(x,y): x_0 < x < x_3, y = 0\}$, где $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$ и $D^+ = D_0^+ \cup D_1 \cup D_2^+ \cup J = \{(x,y): x_0 < x < x_3, 0 < y < h\}$ $(0 < h \equiv const)$ – гиперболическая и параболическая части области D, причем

$$D_k^- = \{(x,y): -y < \alpha_1^k(x) < y + x_1, -x_1/2 < y < 0\} (k = 0, \pm 1, \pm 2, 3, 4);$$

$$D_k^+ = \{(x,y): x_k < x < x_{k+1}, 0 < y < h\} (k = 0, \pm 1, \pm 2, 3, 4);$$

$$J = J_1 \cup J_2,$$

а $J_k = \{(x, y): x = x_k, 0 < y < h\}\ (k = 1, 2).$

Пусть

$$D_k = D_k^- \cup D_k^+ \cup I_k, I_k = \{(x, y): x_k < x < x_{k+1}, y = 0\}\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, 3, 4);$$

$$\alpha_1^{-2}(x) = \alpha_2(\alpha_2(x)) = \alpha_2^2(x); \alpha_1^{-1}(x) = \alpha_2(x); \alpha_1^0(x) = x; \alpha_j^k(x) = \alpha_j(\alpha_j^{k-1}(x))$$

$$(j = 1, 2; k = 1, 2, 3, 4).$$

Тип функциональных отклонений очевиден из представлений

$$u(\alpha_1^2(x), y) = u(x - (x - \alpha_1^2(x)), y) = u(x - \tau_1(x), y),$$

$$u(\alpha_2^2(x), y) = u(x + (\alpha_2^2(x) - x), y) = u(x + \tau_2(x), y),$$

где $\tau_1(x) = x - \alpha_1^2(x) > 0$, $\tau_2(x) = \alpha_2^2(x) - x > 0.$

Задача Т. В области D найти решение $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \setminus J) \cap C^2(D \setminus (I \cup J))$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x_0, y) = u(x_3, y) = 0, 0 \le y \le h, \tag{1.1}$$

$$u(x, -\alpha_1^k(x)) = \Psi_k(x), x_k \le x \le \alpha_2^k(x_1/2)\ (k = 0, 1, 2), \tag{1.2}$$

$$\alpha_2^0(x_1/2) = x_1/2,\ \alpha_2^k(x_1/2) = \alpha_2(\alpha_2^{k-1}(x_1/2))\ (k = 1,\ 2),$$

$$u(x, y) = r(x, y), (x, y) \in \overline{D_{-2} \cup D_{-1}}, \tag{1.3}$$

$$u(x, y) = q(x, y), (x, y) \in \overline{D_3 \cup D_4}; \tag{1.4}$$

условиям сопряжения

$$u(x, 0-) = u(x, 0+) = \omega(x), x_0 \le x \le x_3, \tag{1.5}$$

$$u_y(x, 0-) = u_y(x, 0+) = \nu(x), x_0 < x < x_3, x \ne x_1, x_2; \tag{1.6}$$

условиям согласования

$$\Psi_0(x_0) = 0, r(x_k, y) = q(x_{3-k}, y) = 0\ (k = -2, -1, 0), \tag{1.7}$$

где $A(x),\ B(x), C(x), \Psi_k(x)\ (k = 0,1,2)$, $r(x, y), q(x, y), \alpha_1(x), \alpha_2(x)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции, а $\omega(x), \nu(x)$ - функции, подлежащие определению в процессе решения краевой задачи Т.

2. В терминах функций

$$u_k^{\pm}(x, y) = u(x, y), (x, y) \in D_k^{\pm} \quad (k = 0, 1, 2), \tag{2.1}$$

уравнение (1), с учетом (1.3), (1.4), можно записать в форме системы

$$L(R(x)\overline{u}^{\pm}(x, y) - \overline{\Phi}(x, y)) = 0, (x, y) \in D_0^{\pm}, \tag{2.2}$$

где

$$\overline{u}^{\pm}(x, y) = (u_0^{\pm}(x, y), u_1^{\pm}(\alpha_2(x), y), u_2^{\pm}(\alpha_2^2(x), y))^T, \tag{2.3}$$

$$R(x) = (R_0(x), R_1(x), R_2(x))^T, \tag{2.4}$$

причем

$$R_0(x) = (A(x),\ 0,\ C(x)),$$
$$R_1(x) = (0,\ A(\alpha_2(x)),\ 0),$$
$$R_2(x) = (-B(\alpha_2^2(x)),\ 0,\ A(\alpha_2^2(x))) -$$

первая, вторая и третья строки матрицы $R(x)$;

$$\overline{\Phi}(x,y) = (\Phi_0(x,y), \Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y))^T, \tag{2.5}$$

а

$$\Phi_0(x,y) = B(x)r(\alpha_1^2(x), y),$$
$$\Phi_1(x,y) = B(\alpha_2(x))r(\alpha_1(x), y) - C(\alpha_2(x))q(\alpha_2^3(x), y),$$
$$\Phi_2(x,y) = -C(\alpha_2^2(x))q(\alpha_2^4(x), y).$$

Обращая гиперболо-параболический оператор L, можно записать общее решение системы (2.2) в виде

$$R(x)\overline{u}^{\pm}(x,y) = \overline{\Phi}(x,y) + \overline{F}^{\pm}(x,y), (x,y) \in D_0^{\pm}, \tag{2.6}$$

где

$$\overline{F}^{\pm}(x,y) = (f_0^{\pm}(x,y), f_1^{\pm}(x,y), f_2^{\pm}(x,y))^T, \tag{2.7}$$

а

$$f_k^{\pm}(x,y) = (\exp(yH(y)\partial^2 / \partial x^2))(g_{1k}(x + yH(-y)) + g_{2k}(x - yH(-y))), \tag{2.8}$$

причем $g_{1k}(t),\ g_{2k}(t)\ (k = 0, 1, 2)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Если определитель $|R(x)| \neq 0,\ x_0 \le x \le x_1$, то система (2.6)-(2.8) имеет единственное решение

$$\overline{u}^{\pm}(x,y) = R^{-1}(x)(\overline{\Phi}(x,y) + \overline{F}^{\pm}(x,y)),\ (x,y) \in D_0^{\pm}, \tag{2.9}$$

где обратная матрица

$$R^{-1}(x) = (R_0^{-1}(x), R_1^{-1}(x), R_2^{-1}(x))^T, \tag{2.10}$$

а

$$R_0^{-1}(x)|R(x)| = (A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)), 0, -C(x)A(\alpha_2(x))),$$
$$R_1^{-1}(x)|R(x)| = (0,\ A(x)A(\alpha_2^2(x)) + C(x)B(\alpha_2^2(x)),\ 0),$$
$$R_2^{-1}(x)|R(x)| = (A(\alpha_2(x))B(\alpha_2^2(x)), 0, A(x)A(\alpha_2(x))) -$$

первая, вторая и третья строки обратной матрицы $R^{-1}(x)$;

$$|R(x)| = A(\alpha_2(x))[A(x)A(\alpha_2^2(x)) + C(x)B(\alpha_2^2(x))] \neq 0,\ x_0 \le x \le x_1.$$

Равенство (2.9)-(2.10) является общим решением системы (2.6)-(2.8) (а, значит, уравнения (1)), которое, в силу (2.3)-(2.5), можно записать в покомпонентном виде

$$u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x), y) = R_k^{-1}(x)(\overline{\Phi}(x,y) + \overline{F}^{\pm}(x,y)), (x,y) \in D_0^{\pm} \tag{2.11}$$

или

$$u_k^{\pm}(x,y) = R_k^{-1}(\alpha_1^k(x))(\overline{\Phi}(\alpha_1^k(x), y) + \overline{F}^{\pm}(\alpha_1^k(x), y)), (x,y) \in D_k^{\pm}\ (k = 0, 1, 2). \tag{2.12}$$

Из (2.11) (или (2.12)), в силу (1.1), (1.7), следует, что

$$u_k^{\pm}(x_{k+1}-0,y)=u_{k+1}^{\pm}(x_{k+1}+0,y)=0,\ 0\le y\le h\ \ (k=0,1), \tag{2.13}$$
$$u_{kx}^{\pm}(x_{k+1}-0,y)\ne u_{(k+1)x}^{\pm}(x_{k+1}+0,y),\ 0<y<h\ \ (k=0,1).$$

3. Теорема 1. Если $A(x), B(x), C(x), \alpha_1(x), \alpha_2(x)\in C[x_0,x_3]\cap C^2(x_0,x_3)$;
$\Psi_k(x)\in C[x_k,\alpha_2^k(x_1/2)]\cap C^2(x_k,\alpha_2^k(x_1/2))\ \ (k=0,1,2)$;
$r(x,y)\in C(\overline{D_{-1}\cup D_{-2}})\cap C^2(D_{-1}\cup D_{-2})$, $q(x,y)\in C(\overline{D_3\cup D_4})\cap C^2(D_3\cup D_4)$, абсолютно интегрируемы на своих промежутках**;**

$B(x_3)=C(x_0)=\Psi_0(x_0)=0, r(x_k,y)=q(x_{3-k},y)=0\ (k=-2,-1,0)$ и $\Psi_k'(x)$ при $x\to x_k\ (k=0,1,2)$ допускает интегрируемую особенность, то существует единственное решение задачи Т.

3.1 Единственность решения задачи Т в области D следует из того, что однородная задача Т имеет тривиальное решение. Доказательство этого факта основано на установление знакоопределенности интеграла

$$\beta=\int_{x_0}^{x_3}(A(x)\omega(x)-B(x)H(x-x_2)\omega(\alpha_1^2(x))+C(x)H(x_1-x)\omega(\alpha_2^2(x)))\times$$
$$\times(A(x)\nu(x)-B(x)H(x-x_2)\nu(\alpha_1^2(x))+C(x)H(x_1-x)\nu(\alpha_2^2(x)))dx,$$

аналогично тому, как это проводится для уравнения Трикоми [6], [7] ($\beta\le 0$ в D^+ и $\beta\ge 0$ в D^-).

3.2 Нахождение решения задачи Т в области $D=D_0\cup D_1\cup D_2\cup J$ связан с построением в области $D_0=D_0^+\cup D_0^-\cup I_0$ функций $u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x),y),(x,y)\in D_0^{\pm}$, удовлетворяющих условиям (1.1)-(1.7), (2.1), (2.13):

$$u_k^+(\alpha_2^k(x_0),y)=u_k^+(\alpha_2^k(x_1),y)=0,\ 0\le y\le h, \tag{3.1}$$
$$u_k^-(\alpha_2^k(x),-x)=\Psi_k(\alpha_2^k(x)),\ x_0\le x\le x_1/2, \tag{3.2}$$
$$u_k^-(\alpha_2^k(x),0-)=u_k^+(\alpha_2^k(x),0+)=\omega(\alpha_2^k(x)),\ x_0\le x\le x_1, \tag{3.3}$$
$$u_{ky}^-(\alpha_2^k(x),0-)=u_{ky}^+(\alpha_2^k(x),0+)=\nu(\alpha_2^k(x)),\ x_0<x<x_1, \tag{3.4}$$
$$\omega(\alpha_2^k(x_0))=\omega(\alpha_2^k(x_1))=\Psi_k(\alpha_2^k(x_0))=0\ (k=0,1,2). \tag{3.5}$$

Задача Коши. Найти в области D_0^- решение $u_k^-(\alpha_2^k(x),y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{D_0}^-)\cap C^2(D_0^-)$, удовлетворяющее условиям (3.3)- (3.5).

Лемма 1. Если $\omega(\alpha_2^k(x))\in C[x_0,x_1]\cap C^2(x_0,x_1)$; $\nu(\alpha_2^k(x))\in C^1(x_0,x_1)$; $\omega(\alpha_2^k(x_0))=\omega(\alpha_2^k(x_1))=0$, то существует единственное решение задачи Коши $u_k^-(\alpha_2^k(x),y)\in C(\overline{D_0}^-)\cap C^2(D_0^-)\ (k=0,1,2)$ вида

$$u_k^-(\alpha_2^k(x),y)=R_k^{-1}(x)\overline{\Phi}(x,y))+R_k^{-1}(x)\overline{F}^-(x,y),(x,y)\in D_0^-, \tag{3.6}$$

где

$$\overline{F}^-(x,y)=(f_0^-(x,y),\ f_1^-(x,y),\ f_2^-(x,y))^T, \tag{3.7}$$

а

$$f_k^-(x,y)=\frac{1}{2}\left[R_k(x+y)\overline{\omega}(x+y)+R_k(x-y)\overline{\omega}(x-y)-\Phi_k(x+y,0)-\Phi_k(x-y,0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}R_k(t)\overline{\nu}(t)dt-\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\Phi_{ky}(t,0)dt,\ x_0\le x\le x_1\ (k=0,1,2),$$

(3.8)

причем

$$\overline{\omega}(x)=(\omega(x),\ \omega(\alpha_2(x)),\omega(\alpha_2^2(x)))^T, \tag{3.9}$$

$$\overline{\nu}(x)=(\nu(x),\nu(\alpha_2(x)),\ \nu(\alpha_2^2(x)))^T. \tag{3.10}$$

Доказательство следует из (2.11) и условий (3.3)-(3.5).

Функциональное соотношение между $\omega(\alpha_2^k(x))$ и $\nu(\alpha_2^k(x))$, привнесенное из D_0^- на линию I_0 изменения типа уравнения (1), получим из (3.6)-(3.8) и условия (3.2):

$$\frac{d}{dx}(R_k(x)\overline{\omega}(x)-\Phi_k(x,0))=R_k(x)\overline{\nu}(x)-\Phi_{ky}(x,0)+$$

$$+2\frac{d}{dx}(R_k(x/2)\overline{\Psi}(x/2)-\Phi_k(x/2,-x/2)),$$

$$x_0<x<x_1\ (k=0,1,2), \tag{3.11}$$

где $\overline{\Psi}(x)=(\Psi_0(x),\Psi_1(\alpha_2(x)),\Psi_2(\alpha_2^2(x)))^T$.

Смешанная задача. В области D_0^+ найти решение $u_k^+(\alpha_2^k(x),y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{D}_0^+)\cap C^2(D_0^+)$, удовлетворяющее условиям (3.1), (3.3), (3.5).

Лемма 2. Если $\omega(\alpha_2^k(x))\in C[x_0,x_1]\cap C^2(x_0,x_1)$ и $\omega(\alpha_2^k(x_0))=\omega(\alpha_2^k(x_1))=0$, то существует единственное решение $u_k^+(\alpha_2^k(x),y)\in C(\overline{D}_0^+)\cap C^2(D_0^+)$ смешанной задачи вида

$$u_k^+\left(\alpha_2^k(x),y\right)=R_k^{-1}(x)\overline{\Phi}(x,y)+R_k^{-1}(x)\overline{F}^+(x,y),(x,y)\in D_0^+, \tag{3.12}$$

где

$$\overline{F}^+(x,y)=(f_0^+(x,y),f_1^+(x,y),f_2^+(x,y))^T, \tag{3.13}$$

а

$$f_k^+(x,y)=(\exp(y\partial^2/\partial x^2))(R_k(x)\overline{\omega}(x)-\Phi_k(x,0)), \tag{3.14}$$

причем $\overline{\omega}(x)$ определено в (3.9) и $k=0,1,2$.

Доказательство следует из (2.11) и условий (3.1), (3.3), (3.5).

Функциональное соотношение между $\omega(\alpha_2^k(x))$ и $\nu(\alpha_2^k(x))$, привнесенное из D_0^+ на линию I_0 изменения типа уравнения (1), получим из (3.12)-(3.14) и условия (3.4):

$$R_k(x)\overline{\nu}(x)-\Phi_{ky}(x,0)=\frac{d^2}{dx^2}(R_k(x)\overline{\omega}(x)-\Phi_k(x,0)), \tag{3.15}$$

$x_0 < x < x_1$ $(k = 0, 1, 2)$, а $\overline{\omega}(x), \overline{\nu}(x)$ определены в (3.9), (3.10).

3.3 Вопрос существования решения задачи Т в области $D_0 = D_0^+ \cup D_0^- \cup I_0$ сводится к разрешимости системы функциональных соотношений (3.11), (3.15), то есть к уравнению

$$(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx})(R_k(x)\overline{\omega}(x) - \Phi_k(x,0)) = -2\frac{d}{dx}(R_k(x/2)\overline{\Psi}(x/2) - \Phi(x/2,-x/2)),$$

$$x_0 < x < x_1 \ (k = 0, 1, 2),$$

решение которого, удовлетворяющего условию

$(R_k(x)\overline{\omega}(x) - \Phi_k(x,0))|_{x=x_0,x_1} = 0,$ имеет вид

$$R(x)\overline{\omega}(x) - \Phi_k(x,0) = 2\int_{x_0}^{x_1} K(x,\xi)\frac{d}{d\xi}(R_k(\xi/2)\overline{\Psi}(\xi/2) - \Phi(\xi/2,-\xi/2))d\xi, \tag{3.16}$$

$$x_0 < x < x_1 \ (k = 0, 1, 2),$$

где

$$K(x,\xi) = \begin{cases} e^x(e^\xi - 1)(e^{x_1 - x} - 1)/(e^\xi(e^{x_1} - 1)), \ \xi \le x; \\ (e^x - 1)(e^{x_1 - \xi} - 1)/(e^{x_1} - 1), \ \xi \ge x. \end{cases}$$

На основании свойств функций $\overline{\Psi}(x), A(x), B(x), C(x)$, из (3.16) имеем $\overline{\omega}(x) \in C[x_0, x_1] \cap C^2(x_0, x_1)$.

Равенство (3.11), после подстановки (3.16), дает представление для нахождения функции $\overline{\nu}(x) \in C^1(x_0, x_1)$.

Подстановка функций $\overline{\nu}(x), \overline{\omega}(x)$ в (3.8), (3.14) дает окончательный вид функциям $f_k^-(x,y), f_k^+(x,y),$ а вместе с ними функциям $\overline{F}^-(x,y), \overline{F}^+(x,y)$ из (3.7), (3.13) и, следовательно, решениям задачи Коши (3.6) в области D_0^- и смешанной задачи (3.12) в области D_0^+, то есть решению краевой задачи Т в области $D_0 = D_0^- \cup D_0^+ \cup I_0$ для уравнения (1), а, значит, в областях D_k $(k = 1, 2)$.

Таким образом, искомый алгоритм решения краевой задачи Т для уравнения (1) в области $D = D^- \cup D^+ \cup I$ определяется формулами (3.6) и (3.12) в областях D^- и D^+.

Замечание. Интегральную форму операторного выражения (3.14) можно найти, исходя из того, что любая [8] непрерывная финитная на промежутке $[x_0, x_1] = [0, x_1]$ функция

$$f(x) = (f(\xi), \delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)) = \int_{x_0}^{x_1} f(\xi)[\delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)]d\xi,$$

где дельта-функция Дирака $\delta(z) = \frac{1}{2x_1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp(i\lambda_m z), \ \lambda_m = m\pi / x_1.$

Поэтому,

$$(\exp(y\partial^2/\partial x^2))f(x)=\frac{1}{x_1}\int_{x_0}^{x_1} f(\xi)\sum_{m=1}^{+\infty}(\cos\lambda_m(\xi-x)-\cos\lambda_m(\xi+x))e^{-\lambda_m^2 y}\,d\xi.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – С.238-240.
2. Зарубин А.Н. О некоторых начально-краевых задачах для дифференциально – разностного уравнения смешанного типа // Докл.АН ССР. – 1996. – Т.346. – №6. – С.735-737.
3. Зарубин А.Н. Об алгоритме решения начально-краевой задачи для уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т.37. – №2. – С.184-187.
4. Моисеев Е.И., Зарубин А.Н. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т.37. – №9. – С.1212-1215.
5. Разгулин А.В. Задача управления преобразованием аргументов в функционально-дифференциальных уравнениях математической физики. – М.:МАКС Пресс,2006. – С.12-15.
6. Зарубин А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. – Орел: ОГУ, 1997. – С.128-130.
7. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. – М.: Наука, 1973. – С.280-285.
8. Агранович М.С. Обобщенные функции. – М.: МЦНМО, 2008. – С.6-7.

УДК 517.956.6

ОБ ОБЩЕМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ИТЕРИРОВАННЫМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ОПЕРЕЖЕНИЕМ

А. Н. Зарубин, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *aleks_zarubin@mail.ru*
Е. В. Чаплыгина, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *lena260581@yandex.ru*

Исследуется краевая задача Геллерстедта для уравнений смешанного типа с кратным функциональным запаздыванием и опережением. Построено общее решение уравнений.

Ключевые слова: задача Геллерстедта, оператор Геллерстедта, опережение, запаздывание, общее решение.

1. Постановка задачи

В эллиптико-гиперболической области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, где

$$D^+ = D_0^+ \cup D_1^+ \cup D_2^+ \cup J = \{(x,y) : x_0 < x < x_3, 0 < y < h\}\ (0 < h \equiv const)$$

и $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$ – эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_k^+ = \{(x,y) : x_k < x < x_{k+1}, 0 < y < h\}\ (k = 0, \pm1, \pm2, 3, 4),$$
$$D_k^- = \{(x,y) : (-y)^\alpha/\alpha < \alpha_1^k(x) < -(-y)^\alpha/\alpha + x_1,$$
$$0 < (-y)^\alpha/\alpha < x_1/2\}(k = 0, \pm1, \pm2, 3, 4),$$
$$I = \{(x,y) : x_0 < x < x_3, y = 0\},$$
$$J = J_1 \cup J_2,\ J_k = \{(x,y) : x = x_k, 0 < y < h\}\ (k = 1, 2), \alpha = (m+2)/2;$$

рассмотрим функционально-дифференциальные уравнения Геллерстедта

$$\mathbf{L}(A(x)U(x,y) - B(x)U(\alpha_1(x),y) + C(x)U(\alpha_2(\alpha_2(x)),y)) = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{L}(A(x)U(x,y) - B(x)U(\alpha_1(\alpha_1(x)),y) + C(x)U(\alpha_2(x),y)) = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{L}(A(x)U(\alpha_1(x),y) - B(x)U(\alpha_1(\alpha_1(x)),y) + C(x)U(\alpha_2(\alpha_2(x)),y)) = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{L}(A(x)U(\alpha_2(x),y) - B(x)U(\alpha_1(\alpha_1(x)),y) + C(x)U(\alpha_2(\alpha_2(x)),y)) = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{L} \equiv sgn(y)|y|^m\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Геллерстедта [1, с.186]; $0 < m \equiv const$; коэффициенты $A(x), B(x), C(x)$ – непрерывные достаточно гладкие функции; $\alpha_1(x) < x$, $\alpha_1'(x) > 1$ $(\alpha_1'(x) < 1)$ и $\alpha_2(x) > x$, $\alpha_2'(x) < 1$ $(\alpha_2'(x) > 1)$ – гомеоморфные растягивающе(сжимающе)–запаздывающее и сжимающе(растягивающе)–опережающее отображения сохраняющие ориентацию, являющиеся диффеоморфизмами класса $C^2(x_0, x_3)$, причем

$$\alpha_1(\alpha_2(x)) = x, \alpha_2(\alpha_1(x)) = x \quad (5)$$

и

$$x_n = \alpha_1(x_{n+1}), x_{n+1} = \alpha_2(x_n)\ (n = 0, \pm1, \pm2, 3, 4), \tag{6}$$

то есть $x_{-2} = \alpha_1^2(x_0) < x_{-1} = \alpha_1^1(x_0) < 0 = x_0 = \alpha_2^0(x_0) < x_1 = \alpha_2^1(x_0) < x_2 = \alpha_2^2(x_0) < x_3 = \alpha_2^3(x_0) < x_4 = \alpha_2^4(x_0) < x_5 = \alpha_2^5(x_0)$, если, в силу (5), (6),

$$\alpha_1^1(x_0) = \alpha_1(x_0) = x_{-1},\ \alpha_1^2(x_0) = \alpha_1(\alpha_1(x_0)) = \alpha_1(x_{-1}) = x_{-2},$$

$$\alpha_j^0(x_0) = x_0,\ \alpha_j^k(x_0) = \alpha_j(\alpha_j^{k-1}(x_0)) = x_k\ (j = 1, 2; k = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$, $I_k = \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, y = 0\}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, 3, 4)$, а $\alpha_1^{-2}(x) = \alpha_2(\alpha_2(x)), \alpha_1^{-1}(x) = \alpha_2(x)$, $\alpha_1^0(x) = x$, $\alpha_1^k(x) = \alpha_1(\alpha_1^{k-1}(x))$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Тип функциональных отклонений очевиден из представлений

$$\begin{gathered}
U(\alpha_1(\alpha_1(x)), y) = U(x - (x - \alpha_1(\alpha_1(x))), y) = U(x - \tau_1(x), y),\\
U(\alpha_2(\alpha_2(x)), y) = U(x + (\alpha_2(\alpha_2(x)) - x), y) = U(x + \tau_2(x), y),\\
U(\alpha_1(x), y) = U(x - (x - \alpha_1(x)), y) = U(x - \tau_3(x), y),\\
U(\alpha_2(x), y) = U(x + (\alpha_2(x) - x), y) = U(x + \tau_4(x), y),
\end{gathered}$$

где $\tau_1(x) = x - \alpha_1(\alpha_1(x)) > 0$, $\tau_2(x) = \alpha_2(\alpha_2(x)) - x > 0$, $\tau_3(x) = x - \alpha_1(x) > 0$, $\tau_4(x) = \alpha_2(x) - x > 0$.

З а д а ч а G . Найти в области D решение $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \setminus J) \cap \cap C^2(D \setminus (I \cup J))$ уравнений (1)–(4), удовлетворяющее условиям

$$U(x, h) = \varphi(x),\ x_0 \le x \le x_3, \tag{7}$$

$$U(x_0, y) = U(x_3, y) = 0,\ 0 \le y \le h, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
U(x, y)\Big|_{\alpha_1^k(x) = (-1)^k(-y)^\alpha/\alpha + k(2-k)x_1} = \psi_k(x),\\
(-1)^k \alpha_2^k(x_{k(2-k)}) \le (-1)^k x \le (-1)^k \alpha_2^k(x_1/2),
\end{gathered} \tag{9}$$

$$\alpha_2^0(x_1/2) = x_1/2,\ \alpha_2^1(x_1/2) = \alpha_2(x_1/2),\ \alpha_2^2(x_1/2) = \alpha_2(\alpha_2(x_1/2)),$$

$$U(x, y) = r(x, y),\ (x, y) \in \overline{D_{-2} \cup D_{-1}}, \tag{10}$$

$$U(x, y) = q(x, y),\ (x, y) \in \overline{D_3 \cup D_4}, \tag{11}$$

условиям сопряжения

$$U(x, 0-) = U(x, 0+) = \omega(x),\ x_0 \le x \le x_3, \tag{12}$$

$$U_y(x, 0-) = U_y(x, 0+) = \nu(x),\ x_0 < x < x_3,\ x \ne x_1, x_2, \tag{13}$$

условиям согласования

$$\begin{gathered}
\varphi(x_0) = \varphi(x_3) = \psi_0(x_0) = 0,\ \psi_1(x_2) = \psi_2(x_2),\\
r(x_k, y) = q(x_{3-k}, y) = 0\ (k = -2, -1, 0),
\end{gathered} \tag{14}$$

где $\varphi(x), \psi_k(x) (k = 0, 1, 2), r(x, y), q(x, y), \alpha_1(x), \alpha_2(x)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

2. Общее решение

Уравнения (1)–(4) в терминах функций

$$U_k^{\pm}(x,y) = U(x,y),\ (x,y) \in D_k^{\pm}\ (k = 0,1,2), \tag{15}$$

с учетом (10), (11), можно записать в форме системы

$$\mathbf{L}(R(x)\bar{U}^{\pm}(x,y) - \bar{\Phi}(x,y)) = 0,\ (x,y) \in D_0^{\pm}, \tag{16}$$

где

$$\bar{U}^{\pm}(x,y) = (U_0^{\pm}(x,y), U_1^{\pm}(\alpha_2(x),y), U_2^{\pm}(\alpha_2^2(x),y))^{\mathrm{T}}, \tag{17}$$

$$R(x) = (R_0(x), R_1(x), R_2(x))^{\mathrm{T}}, \tag{18}$$

$$\bar{\Phi}(x,y) = (\Phi_0(x,y), \Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y))^{\mathrm{T}}, \tag{19}$$

причем компоненты матриц $R(x)$ из (18) и $\bar{\Phi}(x,y)$ из (19) имеют вид:
1) для уравнения (1)

$$R_0(x) = (A(x), 0, C(x)), \Phi_0(x,y) = B(x)r(\alpha_1(x), y);$$
$$R_1(x) = (-B(\alpha_2(x)), A(\alpha_2(x)), 0), \Phi_1(x,y) = -C(\alpha_2(x))q(\alpha_2^3(x), y);$$
$$R_2(x) = (0, -B(\alpha_2^2(x)), A(\alpha_2^2(x))), \Phi_2(x,y) = -C(\alpha_2^2(x))q(\alpha_2^4(x), y);$$

2) для уравнения (2)

$$R_0(x) = (A(x), C(x), 0), \Phi_0(x,y) = B(x)r(\alpha_1^2(x), y);$$
$$R_1(x) = (0, A(\alpha_2(x)), C(\alpha_2(x))), \Phi_1(x,y) = B(\alpha_2(x))r(\alpha_1(x), y);$$
$$R_2(x) = (-B(\alpha_2^2(x)), 0, A(\alpha_2^2(x))), \Phi_2(x,y) = -C(\alpha_2^2(x))q(\alpha_2^3(x), y);$$

3) для уравнения (3)

$$R_0(x) = (0, 0, C(x)), \Phi_0(x,y) = B(x)r(\alpha_1^2(x), y) - A(x)r(\alpha_1(x), y);$$
$$R_1(x) = (A(\alpha_2(x)), 0, 0), \Phi_1(x,y) = B(\alpha_2(x))r(\alpha_1(x), y) - C(\alpha_2(x))q(\alpha_2^3(x), y);$$
$$R_2(x) = (-B(\alpha_2^2(x)), A(\alpha_2^2(x)), 0), \Phi_2(x,y) = -C(\alpha_2^2(x))q(\alpha_2^4(x), y);$$

4) для уравнения (4)

$$R_0(x) = (0, A(x), C(x)), \Phi_0(x,y) = B(x)r(\alpha_1^2(x), y);$$
$$R_1(x) = (0, 0, A(\alpha_2(x))), \Phi_1(x,y) = B(\alpha_2(x))r(\alpha_1(x), y) -$$
$$-C(\alpha_2(x))q(\alpha_2^3(x), y);$$
$$R_2(x) = (-B(\alpha_2^2(x)), 0, 0), \Phi_2(x,y) = -A(\alpha_2^2(x))q(\alpha_2^3(x), y) -$$
$$-C(\alpha_2^2(x))q(\alpha_2^4(x), y).$$

Обращая оператор Геллерстедта [2, с. 144], [3, с. 586], можно записать общее решение системы (16) в виде

$$R(x)\bar{U}^{\pm}(x,y) = \bar{\Phi}(x,y) + y\int_0^1 \bar{F}^{\pm}(x,y,t)[t(1-t)]^{(1-\alpha)/2\alpha}dt +$$
$$+\int_0^1 \bar{G}^{\pm}(x,y,t)[t(1-t)]^{-(1+\alpha)/2\alpha}dt, (x,y) \in D_0^{\pm}, \tag{20}$$

где

$$\bar{F}^{\pm}(x,y,t) = (f_0^{\pm}(x,y,t), f_1^{\pm}(x,y,t), f_2^{\pm}(x,y,t))^{\mathrm{T}},$$
$$\bar{G}^{\pm}(x,y,t) = (g_0^{\pm}(x,y,t), g_1^{\pm}(x,y,t), g_2^{\pm}(x,y,t))^{\mathrm{T}}, \tag{21}$$

а

$$f_k^{\pm}(x,y,t) = f_k^{\pm}(x + \sqrt{-sgn(y)}|y|^{\alpha}(2t-1)/\alpha), \tag{22}$$

$$g_k^{\pm}(x,y,t) = g_k^{\pm}(x + \sqrt{-sgn(y)}|y|^{\alpha}(2t-1)/\alpha), \tag{23}$$

причем $f_k^{\pm}(x,y,t), g_k^{\pm}(x,y,t)$ $(k = 0,1,2)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Если определитель $|R(x)| \neq 0, x_0 \leq x \leq x_1$, то система (20) имеет единственное решение

$$\bar{U}^{\pm}(x,y) = R^{-1}(x)[\bar{\Phi}(x,y) + y\int\limits_0^1 \bar{F}^{\pm}(x,y,t)[t(1-t)]^{(1-\alpha)/2\alpha}dt + \\ + \int\limits_0^1 \bar{G}^{\pm}(x,y,t)[t(1-t)]^{-(1+\alpha)/2\alpha}dt], (x,y) \in D_0^{\pm}, \tag{24}$$

где обратная матрица

$$R^{-1}(x) = (R_0^{-1}(x), R_1^{-1}(x), R_2^{-1}(x))^{\mathrm{T}}, \tag{25}$$

а ее компоненты:

1) для уравнения (1)

$$R_0^{-1}(x)|R(x)| = (A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)), -C(x)B(\alpha_2^2(x)), -C(x)A(\alpha_2(x))),$$
$$R_1^{-1}(x)|R(x)| = (B(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)), -A(x)A(\alpha_2^2(x)), -C(x)B(\alpha_2(x))),$$
$$R_2^{-1}(x)|R(x)| = (B(\alpha_2(x))B(\alpha_2^2(x)), A(x)B(\alpha_2^2(x)), A(x)A(\alpha_2(x)))$$

и

$$|R(x)| = A(x)A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)) + C(x)B(\alpha_2(x))B(\alpha_2^2(x));$$

2) для уравнения (2)

$$R_0^{-1}(x)|R(x)| = (A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)), -C(x)A(\alpha_2^2(x)), C(x)C(\alpha_2(x))),$$
$$R_1^{-1}(x)|R(x)| = (-B(\alpha_2^2(x))C(\alpha_2(x)), A(x)A(\alpha_2^2(x)), -A(x)C(\alpha_2(x))),$$
$$R_2^{-1}(x)|R(x)| = (B(\alpha_2^2(x))A(\alpha_2(x)), -B(\alpha_2^2(x))C(x), A(x)A(\alpha_2(x)))$$

и

$$|R(x)| = A(x)A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)) - C(x)C(\alpha_2(x))B(\alpha_2^2(x));$$

3) для уравнения (3)

$$R_0^{-1}(x)|R(x)| = (0, C(x)A(\alpha_2^2(x)), 0),$$
$$R_1^{-1}(x)|R(x)| = (0, C(x)B(\alpha_2^2(x)), C(x)A(\alpha_2(x))),$$
$$R_2^{-1}(x)|R(x)| = (A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)), 0, 0)$$

и

$$|R(x)| = C(x)A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x));$$

4) для уравнения (4)

$$R_0^{-1}(x)|R(x)| = (0, 0, A(x)A(\alpha_2(x))),$$
$$R_1^{-1}(x)|R(x)| = (-A(\alpha_2(x))B(\alpha_2^2(x)), C(x)B(\alpha_2^2(x)), 0),$$
$$R_2^{-1}(x)|R(x)| = (0, -A(x)B(\alpha_2^2(x)), 0)$$

и

$$|R(x)| = -A(x)A(\alpha_2(x))B(\alpha_2^2(x)).$$

Равенство (24) является общим решением системы (20) (а, значит, уравнений (1)–(4)), которое, в силу (17)–(20), (25), можно записать в покомпонентном виде

$$U_k^{\pm}(\alpha_2^k(x), y) = R_k^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, y) + yR_k^{-1}(x)\int\limits_0^1 \bar{F}^{\pm}(x, y, t)\times$$
$$\times[t(1-t)]^{(1-\alpha)/2\alpha}dt + R_k^{-1}(x)\int\limits_0^1 \bar{G}^{\pm}(x, y, t)[t(1-t)]^{-(1+\alpha)/2\alpha}dt, \quad (26)$$
$$(x, y) \in D_0^{\pm},$$

или

$$U_k^{\pm}(x, y) = R_k^{-1}(\alpha_1^k(x))\bar{\Phi}(\alpha_1^k(x), y) + yR_k^{-1}(\alpha_1^k(x))\int\limits_0^1 \bar{F}^{\pm}(\alpha_1^k(x), y, t)\times$$
$$\times[t(1-t)]^{(1-\alpha)/2\alpha}dt + R_k^{-1}(\alpha_1^k(x))\int\limits_0^1 \bar{G}^{\pm}(\alpha_1^k(x), y, t)[t(1-t)]^{-(1+\alpha)/2\alpha}dt, \quad (27)$$
$$(x, y) \in D_k^{\pm}\ (k = 0, 1, 2).$$

Из (26) (или (27)), в силу (14), следует, что

$$U_k^{\pm}(x_{k+1} - 0, y) = U_{k+1}^{\pm}(x_{k+1} + 0, y) = 0, 0 \le y \le h\ (k = 0, 1),$$
$$U_{kx}^{\pm}(x_{k+1} - 0, y) \ne U_{(k+1)x}^{\pm}(x_{k+1} + 0, y), 0 < y < h.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. — М.: Изд. АН СССР. — 1959.
2. Зарубин А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. — Орел: Изд. ОГУ. — 1997.
3. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. — М.: Наука. — 1973.

УДК 517.53

ИЗУЧЕНИЕ ПОНЯТИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Н.В. Клопов, магистрант
ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет
имени академика И.Г. Петровского»
e-mail: *nikolay2009-00@mail.ru*

В рамках данной статьи рассмотрено понятие комплексная интерполяция. Произведено изучение теоремы Штейн-Вайса.

Ключевые слова: комплексная плоскость, комплексная интерполяция, пространства Фока, пространства Лебега, теорема Штейн-Вайса.

Предположим, что w, w_0 и w_1 − положительные весовые функции на комплексной плоскости. Если $1 \le p_0 \le p_1 \le \infty$ и $0 \le \theta \le 1,$ то

$$\left[L^{p_0}\left(\mathrm{C}, w_0 dA\right), L^{p_1}\left(\mathrm{C}, w_1 dA\right) \right]_\theta = L^p\left(\mathrm{C}, w dA\right)$$

с равными нормами, где

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad w^{\frac{1}{p}} = w_0^{\frac{1-\theta}{p_0}} w_1^{\frac{\theta}{p_1}}.$$

Следует напомнить, что L^p_α − пространство измеримых по Лебегу функций f на комплексной плоскости, где функция $f(z)e^{\frac{-\alpha|z|^2}{2}}$ находится в $L^p\left(\mathrm{C}, dA\right)$ [3]. С унаследованной нормой F^p_α − замкнутое подпространство в L^p_α состоящее из целых функций.

Специализируясь на экспоненциальных весах, мы получаем следующий частный случай, теорему Штейн-Вайса о интерполяции.

Следствие 1. Предположим $1 \le p_0 \le p_1 \le \infty$ и $0 \le \theta \le 1$. Тогда для любых положительных параметров α и α_1, имеем

$$\left[L^{p_0}_{\alpha_0}, L^{p_1}_{\alpha_1} \right]_\theta = L^p_\alpha,$$

где

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \alpha = \alpha_0\left(1-\theta\right) + \alpha_1\theta.$$

Доказательство. Положим $L^p_\alpha = L^p\left(\mathrm{C}, d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}}\right)$, данное утверждение следует из интерполяционной теоремы Штейн-Вайса, где

$$\left[L^{p_0}_{\alpha_1}, L^{p_1}_{\alpha_2} \right]_\theta = \left[L^{p_0}\left(\mathrm{C}, d\lambda_{\frac{p_0\alpha_1}{2}}\right), L^{p_1}\left(\mathrm{C}, d\lambda_{\frac{p_1\alpha_2}{2}}\right) \right]_\theta = L^p\left(\mathrm{C}, d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}}\right) = L^p_\alpha,$$

где

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}, \qquad \alpha=\alpha_0(1-\theta)+\alpha_1\theta.$$

Это и доказывает искомый результат.

Хотя F_α^p − замкнутое подпространство в L_α^p, пространства Фока интерполируют таким образом, что сильно отличаются от содержащихся пространств L_α^p [1]. В некотором смысле, Лебег пространства L_α^p интерполировал «арифметически», тогда как пространства Фока F_α^p были интерполированы «геометрически».

Произведем рассмотрение случая, когда параметр веса α фиксирован [2].

Теорема 1. Предположим, что $1\le p_0\le p_1\le\infty$ и $0\le\theta\le 1$. Тогда,

$$\left[F_\alpha^{p_0},F_\alpha^{p_1}\right]_\theta=F_\alpha^p,$$

где

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}.$$

Доказательство. Включение

$$\left[F_\alpha^{p_0},F_\alpha^{p_1}\right]_\theta\subset F_\alpha^p$$

следует из определения комплексной интерполяции, где фактически каждый $F_\alpha^{p_k}$ является замкнутым подпространством в $L_\alpha^{p_k}$ и то, что $\left[L_\alpha^{p_0},L_\alpha^{p_1}\right]_\theta=L_\alpha^p$.

С другой стороны, если $f\in F_\alpha^p\subset L_\alpha^p$, то f является целым и из $\left[L_\alpha^{p_0},L_\alpha^{p_1}\right]_\theta=L_\alpha^p$ следует, что существует функция $F(z,\zeta)$ ($z\in\mathrm{C}$ и $0\le\mathrm{Re}\,\zeta\le 1$) и такая положительная константа C, что

1. $F(z,\theta)=f(z)\,\forall\, z\in\mathrm{C}$,
2. $\left\|F(\cdot,\zeta)\right\|_{p_0,\alpha}\le C\ \forall\ \mathrm{Re}\,\zeta=0$,
3. $\left\|F(\cdot,\zeta)\right\|_{p_1,\alpha}\le C\ \forall\ \mathrm{Re}\,\zeta=1$.

Введем функцию $G(z,\zeta)$ такую, что

$$G(z,\zeta)=\frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathrm{C}}F(w,\zeta)e^{\alpha z\bar{w}}e^{-\alpha|w|^2}\,dA(w).$$

Следовательно, получим,

1. $G(z,\theta)=f(z)\,\forall\, z\in\mathrm{C}$,
2. $\left\|G(\cdot,\zeta)\right\|_{p_0,\alpha}\le 2C\ \forall\ \mathrm{Re}\,\zeta=0$,
3. $\left\|G(\cdot,\zeta)\right\|_{p_1,\alpha}\le 2C\ \forall\ \mathrm{Re}\,\zeta=1$.

Поскольку каждая функция $z\mapsto G(z,\zeta)$ целая, то достаточно легко заметить что $f\in\left[F_\alpha^{p_0},F_\alpha^{p_1}\right]_\theta$. А это и есть доказательство теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда имеются различные весовые параметры. Заметим, что α является средним арифметическим α_0 и α_1 в следствии 1, но α является геометрическим средним α_0 и α_1 в следующей теореме.

Теорема 2. Предположим, что $1 \le p_0 \le p_1 \le \infty$ и $0 \le \theta \le 1$. Тогда, для любого положительного весового параметра α_0 и α_1, имеем

$$\left[F_{\alpha_0}^{p_0}, F_{\alpha_1}^{p_1} \right]_\theta = F_\alpha^p,$$

где

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \alpha = \alpha_0^{1-\theta} \alpha_1^{\theta}.$$

Доказательство. Для любого $\zeta \in \mathrm{C}$, рассмотрим оператор расширения S_ζ, который определяется формулой

$$S_\zeta f(z) = f\left(\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right)^{\frac{\zeta-\theta}{2}} z \right).$$

Данный оператор, согласно [3], является изометрией из $F_{\alpha_0}^{p_0}$ на $F_\alpha^{p_0}$, когда $\mathrm{Re}\,\zeta = 0$, и S_ζ является изометрией из $F_{\alpha_1}^{p_1}$ на $F_\alpha^{p_1}$, когда $\mathrm{Re}\,\zeta = 1$. Кроме того, оба $S_\zeta f$ и $S_\zeta^{-1} f$ аналитичны по ζ когда f аналитична. Поэтому, по абстрактной интерполяционной теореме Штейна, оператор S_θ должен быть изометрией из $\left[F_{\alpha_0}^{p_0}, F_{\alpha_1}^{p_1} \right]_\theta$ на $\left[F_\alpha^{p_0}, F_\alpha^{p_1} \right]_\theta$. Так как $S_\theta = I$ – тождественный оператор, получим

$$\left[F_{\alpha_0}^{p_0}, F_{\alpha_1}^{p_1} \right]_\theta = \left[F_\alpha^{p_0}, F_\alpha^{p_1} \right]_\theta = F_\alpha^p,$$

где последний шаг следует из теоремы 1.

Вследствие указанной выше интерполяционной теоремы получаем следующий резкий результат относительно действия проекции Фока на пространства L^p.

Теорема 3. Предположим, что $1 \le p \le \infty$. Тогда для любых положительных весовых параметров α, β, и γ имеем

1. $P_\alpha L_\beta^p \subset F_\gamma^p$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\alpha^2}{\gamma} \le 2\alpha - \beta$.

2. $P_\alpha L_\beta^p = F_\gamma^p$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\alpha^2}{\gamma} \le 2\alpha - \beta$.

Доказательство. Легко заметить, что необходимое условие для $P_\alpha L_\beta^p \subset F_\gamma^p, 1 \le p \le \infty$, заключается в том, что $2\alpha > \beta$. Поэтому для остальной части доказательства положим, что $2\alpha > \beta$.

Если $\frac{\alpha^2}{\gamma} \le 2\alpha - \beta$, то из [3] следует, что P_α отображает L^∞_β в F^∞_γ. Аналогичным образом, из теоремы Фубини и [3] заметим, что P_α отображает L^1_β в F^1_γ. По комплексной интерполяции P_α отображает L^p_β на F^p_β для всех $1 \le p \le \infty$.

Если $\frac{\alpha^2}{\gamma} = 2\alpha - \beta$ и $f \in F^p_\gamma$, то функция

$$g(z) = \frac{\alpha}{\gamma} f\left(\frac{\alpha}{\gamma} z\right) e^{(\beta-\alpha)|z|^2}$$

принадлежит L^p_β и $P_\alpha g = f$. Следовательно, $P_\alpha L^p_\beta = F^p_\gamma$ для $1 \le p \le \infty$ [4].

Если $\frac{\alpha^2}{\gamma} > 2\alpha - \beta$, то существует некоторое $\gamma' > \gamma$ такое, что $\frac{\alpha^2}{\gamma'} = 2\alpha - \beta$ (здесь было использовано предположение, что $2\alpha > \beta$). По тому, что было доказано в предыдущем абзаце, получим $P_\alpha L^p_\beta = F^p_{\gamma'}$. Поскольку F^p_γ строго содержится в $F^p_{\gamma'}$, мы видим, что P_α не может возможно отображать L^p_β в F^p_γ. Аналогичный аргумент показывает, что если $\frac{\alpha^2}{\gamma} < 2\alpha - \beta$, то $P_\alpha L^\infty_\beta \ne F^\infty_\gamma$. Это завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клопов Н.В., Беднаж В.А., Построение линейного оператора, решающего задачу кратной интерполяции в некоторых классах голоморфных в единичном круге функций // Актуальные вопросы и перспективы развития современной науки. – 2017. – II. – с. 34-40.
2. A. Grishin, A. Russakovskii, Free interpolation by entire functions. – J. Sov. Math. – 1990. – с. 267-275.
3. Kehe Zhu. Analysis on Fock Spaces. − Department of Mathematics and Statistics State University of New York Albany. − NY USA. – 2012. – 355 с.
4. M. Englis, Berezin transform on the harmonic Fock space. – J. Math. Anal. Appl. – 2010. – с. 75-97.

ГЛОБАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ТРЕХМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И НАБЛЮДАТЕЛЕМ

А.А. Козлов, к.ф.-м.н., доц.
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»
e-mail: *kozlovaa@tut.by*
А.Д. Бурак, магистрант
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»
e-mail: *burakad@inbox.ru*

Задача глобального управления показателями Ляпунова относится к теории управления асимптотическими инвариантами линейных систем, являющейся одним из разделов асимптотической теории дифференциальных уравнений. К настоящему времени бóльшая часть основных, полученных по данной теории, результатов для линейных нестационарных дифференциальных систем содержится в монографии [4].

В данной работе найдены достаточные условия глобальной управляемости показателй Ляпунова трехмерных линейных систем с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами и наблюдателем с помощью динамической обратной связи по выходу.

Пусть R^n – векторное евклидово пространство размерности n с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ для всякого $x \in \mathrm{R}^n$ (символ ^{T} означает операцию транспонирования); M_{mn} – пространство вещественных $(m \times n)-$матриц со спектральной операторной нормой $\|A\| = \max\limits_{x \neq 0} \|Ax\| / \|x\|$, т.е. нормой, индуцируемой евклидовыми нормами в пространствах R^m и R^n; $\mathrm{M}_n := \mathrm{M}_{nn}$.

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathrm{R}^n, \quad u \in \mathrm{R}^m, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с наблюдателем

$$y = C^T(t)x, \quad y \in \mathrm{R}^n. \tag{2}$$

Будем считать, что матричные функции $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$ принадлежат классу локально интегрируемых по Лебегу и интегрально ограниченных [1, с. 252] матричных функций, т.е. таких, что при всяком $t \geq 0$ справедливы соотношения

$$\int_t^{t+1} \|A(\tau)\| d\tau < +\infty, \quad \int_t^{t+1} \|B(\tau)\| d\tau < +\infty, \quad \int_t^{t+1} \|C(\tau)\| d\tau < +\infty$$

Предполагается, что система (1) обладает свойством равномерной полной управляемости (по Тонкову).

Определение 1 [2]. Система (1) называется равномерно вполне управляемой (по Тонкову), если существуют числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что для каждого $t_0 \geq 0$ и $x_0 \in \mathrm{R}^n$ найдется измеримое и ограниченное управление

$u:[t_0,t_0+\sigma]\to \mathrm{R}^m$ для всякого $t\in[t_0,t_0+\sigma]$, удовлетворяющее неравенству $\mathrm{P}u(t)\mathrm{P}\le \gamma\,\mathrm{P}x_0\mathrm{P}$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0)=x_0$ системы (1) в нуль на этом отрезке времени.

Будем также рассматривать систему (1) с наблюдателем (2) при $u\equiv 0$:

$$\dot{x}=A(t)x,\quad y=C^T(t)x,\quad x\in\mathrm{R}^n,\quad y\in\mathrm{R}^n,\quad t..0, \tag{3}$$

считая, что она обладает свойством равномерной полной наблюдаемости.

Определение 2 [3, с. 304]. Система (3) называется равномерно вполне наблюдаемой, если существует число $\sigma>0$ такое, что для всякого $t_0\ge 0$ каждый вектор начального состояния $x(t_0)=x_0\in\mathrm{R}^n$ может быть однозначно определен по наблюдению на отрезке времени $t\in[t_0,t_0+\sigma]$.

Построим по системе (1), (2) и выходу y новую систему

$$\dot{\hat{x}}=A(t)\hat{x}+V(t)(y(t)-C^T(t)\hat{x})+B(t)u,\quad \hat{x}\in\mathrm{R}^n, \tag{4}$$

где $\hat{x}(t)$ – оценка состояния системы (1), (2). Система (4) называется системой асимптотической оценки состояния (асимптотический идентификатор). Возьмем управление u в системе (4) в виде линейной обратной связи

$$u=U(t)\hat{x}. \tag{5}$$

Переписав систему (1), (2), (4) с управлением (5), получим $(2n)$-мерную систему

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\hat{x}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A(t) & B(t)U(t)\\ V(t)C^T(t) & A(t)+B(t)U(t)-V(t)C^T(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \hat{x}\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Пусть $\tilde{x}:=x-\hat{x}$. Невырожденной заменой переменных

$$\begin{pmatrix}x\\ \dot{\tilde{x}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & 0\\ E & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \hat{x}\end{pmatrix}$$

систему (6) приведем к виду

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\tilde{x}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A(t)+B(t)U(t) & -B(t)U(t)\\ 0 & A(t)-V(t)C^T(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \tilde{x}\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Определение 3 [4, с. 31]. Характеристическим показателем Ляпунова решения $x:[0;+\infty)\to\mathrm{R}^n$ однородной системы

$$\dot{x}=A(t)x,\quad t..0 \tag{8}$$

называется число, определяемое равенством

$$\lambda[x]=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\|x(t)\|,$$

где $\|x(t)\|$ – евклидова норма пространства R^n этого решения, вычисленная в точке t.

Пусть в системе (1) управление задано по принципу линейной обратной связи $u=U(t)x$, где $U(t)$ – измеримая и ограниченная $(m\times n)$ – матрица, тогда система (1) переходит в однородную замкнутую систему

$$\dot{x}=(A(t)+B(t)U(t))x,\quad x\in\mathrm{R}^n,\quad t..0, \tag{9}$$

обладающую конечным набором (спектром) характеристических показателей Ляпунова

$$\lambda_1(A+BU) \le \ldots \le \lambda_n(A+BU).$$

Определение 4 [2]. Задача о построении для системы (9) обратной связи $u = U(t)x$, обеспечивающей выполнение равенств

$$\lambda_i(A+BU) = \mu_i, \quad i = \overline{1,n}$$

для произвольных наперед заданных вещественных чисел $\mu_1 \le \ldots \le \mu_n$. называется задачей глобального управления показателями Ляпунова линейной системы (9).

На основании метода, предложенного В. Зайцевым [5], в данной работе решена задача построения для системы (7) таких измеримых и ограниченных на положительной полуоси управляющих воздействий $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$, которые бы обеспечивали для этой системы (а, следовательно, и для системы (1)) произвольный наперед заданный спектр характеристических показателей Ляпунова.

Таким образом, основным результатом данной работы является

Теорема 1. Пусть $n = 3$, $m = \{1,2,3\}$. Если линейная управляемая система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, линейная система (3) с наблюдателем (2) и такими же, как у системы (1), коэффициентами равномерно вполне наблюдаема, то характеристические показатели Ляпунова системы (7) глобально управляемы.

Благодарности. Представленная работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (№ Ф16М-006).

ЛИТЕРАТУРА

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
2. Тонков, Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизации линейной реккурентной системы / Е.Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, №10. – С. 1804-1813.
3. Красовский, Н. Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
4. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. – Минск: Беларус. навука, 2012. – 408 с.
5. Зайцев, В.А. К теории стабилизации управляемых систем: дис. … докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / В.А. Зайцев. – Ижевск, 2015. – 293 с.

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Д.В. Корниенко, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»
e-mail: *dmkornienko@mail.ru*

Здесь изучается граничная задача для линейной системы дифференциальных уравнений, записанная в виде дифференциально-операторного уравнения

$$aD_t u(t) + bBu(t) = f(t)$$

с условиями Коши по *t*. Такую краевую задачу для линейной системы дифференциальных уравнений (в том числе и в частных производных) будем называть задачей Коши.

Ключевые слова: граничные задачи, условия Коши, спектр оператора, эллиптические системы, системы дифференциальных уравнений в частных производных, базис.

Следуя работе [1, стр. 127], будем говорить, что M – оператор B обладает сильным B – свойством, если $B \in B_+ \cap B_-$, где

$$B_+ = \{B: \inf_{s\in S} ReB(s) > -\infty\},\ B_- = \{B: \sup_{s\in S} ReB(s) < +\infty\} \quad (*)$$

Свойства задача Коши для квазигиперболических систем первого и второго типа

Пусть $t \in V_t \equiv [T, 0]$, то есть $T_1 = T < 0$, $T_2 = 0$; $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$; $H_x = \mathcal{L}_2(V_t)$; $H = H_t \otimes H_x^2$. В гильбертовом пространстве $H = L_2(V)$ вектор-функций $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$ переменных t, x рассмотрим системы уравнений, записанных в форме дифференциально-операторных уравнений

$$aD_t u + bBu = f, \text{при } a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (1)$$

$$aD_t u + bBu = f, \text{при } a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

К операторным уравнениям (1), (2) присоединим граничные условия Коши по t вида:

$$u^1_{|t=T} = u^2_{|t=T} = 0 \quad (3)$$

Следует отметить, что рассматриваемые нами системы дифференциальных уравнений в частных производных, включают, например, линеаризованные уравнения акустики. В работе [2, стр. 47] изучены вопросы корректности задачи Коши для линеаризованных уравнений акустики, в том числе в линзообразной области. Исследование проводилось функциональными методами: выводились априорные оценки для сопряженных задач на основе формулы Грина; доказывалось совпадение слабых и сильных решений этих задач с помощью операторов осреднения. Отметим также работу [3], в которой получено в явной форме решение задачи Коши для одной гиперболической системы с постоянными коэффициентами специального вида в трехмерном пространстве. Однако спектральные свойства задачи Коши не исследовались.

Определение 1. Элемент $u \in \mathfrak{D}(L)$ будем называть обобщённым решением задачи (1)-(3) (либо (2)-(3)), если $Lu = \lambda u + f$ в H.

Обозначим через $L: H \to H$ дифференциальный оператор, сопоставляемый изучаемой задаче (1)-(3) (либо задаче (2)-(3)) в силу определения 1. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Зависимость структуры спектра оператора $L: H \to H$ от параметров задачи (1)-(3) (либо от параметров задачи (2)-(3)) следующая:

1. Если оператор B обладает сильным B – свойством, то резольвентное множество оператора L заполняет комплексную плоскость.

2. Если оператор B не обладает сильным B – свойством, то непрерывный спектр оператора L заполняет комплексную плоскость.

□ Пусть λ – произвольное комплексное число. Рассмотрим дифференциальный оператор $L: H \to H$, сопоставляемый задаче (2)-(3) в силу определения 1. Обозначим s – проекцию оператора L через L_s. Выпишем матрицу Грина оператора $L_s - \lambda$:

$$G_s(t,\tau,\lambda) = \begin{cases} A(t,\tau,\lambda), & \text{если } T \le \tau \le t \le 0; \\ 0, & \text{если } T \le t \le \tau \le 0. \end{cases}$$

Здесь

$$A(t,\tau,\lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right) - \dfrac{\lambda \sin\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right)}{\sqrt{b^2}} & -\dfrac{B\sin\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right)}{\sqrt{b^2}} \\ -\dfrac{B\sin\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right)}{\sqrt{b^2}} & \cos\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right) + \dfrac{\lambda \sin\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right)}{\sqrt{b^2}} \end{pmatrix},$$

0 – нулевая матрица; $b^2 = -B^2 - \lambda^2,\ B = B(s)$.

Для любого индекса $s \epsilon S$ и для любого числа $\lambda \in C$ знаменатель матрицы Грина оператора $L_s - \lambda$ отличен от нуля, то есть $\Delta_s(\lambda) \neq 0$. Поэтому точечный спектр оператора L есть пустое множество, то есть $P\varrho L \neq \varnothing$.

Оператор $(L_s - \lambda)^{-1}$ определён на конечных линейных комбинациях $\sum_{m,n,s} t^m \varphi_n^s$ элементов H. Системы $\{t^m : m = 0,1,2 \ldots\}$ и $\{\varphi_n^s :\ n = 1,2; s \in S\}$ полны в пространствах H_t и H_x^2 соответственно. Следовательно, система элементов $\{x^m \varphi_n^s : m = 0,1,2, \ldots; n = 1,2; s \in S\}$ полна в H. Доказательство этого проводится как в работах [4] и [5]. Таким образом, остаточный спектр оператора L – пустое множество: $R\varrho L = \varnothing$.

Если $\sup_s |ReB(s)| < \infty$, то для элементов $G_s^{i,j}(t,\tau,\lambda)$ матрицы Грина $G_s(t,\tau,\lambda)$ имеем $\sup_s \left|G_s^{i,j}\right|_{\mathcal{L}_2(W_t)} < \infty$. Воспользовавшись работой [4], получаем включение $\lambda \in \varrho L$.

Пусть последовательность $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\lim_{n\to\infty} ReB(s_n) = \infty$. Положим $u_n = u_n(t) = (L_{s_n} - \lambda)^{-1} e_2$. Тогда

$$u_n^1 = u_n^1(t) = -\frac{B(s_n)}{B^2(s_n) + \lambda^2}\left(\cos\sqrt{-b^2(s_n)}(t-T) - 1\right).$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\|u_n^1\|_{H_t}=\infty$, то $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{H_t^2}=\infty$. Далее имеем

$$\|(L-\lambda)^{-1}\|\geq\frac{\left\|(L-\lambda)^{-1}\varphi_2^{s_n}\right\|_H}{\left\|\varphi_2^{s_n}\right\|_H}\geq-\frac{C_1}{TC_2}\|u_n\|_{H_t^2}$$

В силу сделанного ранее допущения получаем включение $\lambda\in\mathrm{C}\varrho L$. Осталось заметить, что λ – произвольное комплексное число.

Обозначим теперь через $L:H\to H$ дифференциальный оператор, сопоставляемый задаче (1)-(3) в силу определения 1. Доказательство выписанной структуры спектра этого оператора проводится также, как и в случае оператора, порождённого задачей (2)-(3). Оно базируется на представлении матрицы Грина оператора $L_s-\lambda$:

$$G_s(t,\tau,\lambda)=e^{\lambda(t-\tau)}\begin{cases}\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(B(t-\tau)) & -\mathrm{sh}(B(t-\tau))\\ -\mathrm{sh}(B(t-\tau)) & \mathrm{ch}(B(t-\tau))\end{pmatrix}, & \text{если } T\leq\tau\leq t;\\ 0, & \text{если } t\leq\tau\leq 0.\end{cases}$$

Здесь $B=B(s)$, L_s является s-проекцией оператора L, порождённого задачей (1)-(3). ■

Пример 1. Для систем (1) и (2), в которых оператор B, порождённый операцией $B(D_x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|=2k-1}b_\alpha {D_x}^\alpha$, $b_\alpha\in R$, является оператором, задача Коши корректна, точнее $-\varrho L=\mathbb{C}$. С другой стороны, для M – эллиптического дифференциального оператора B задача Коши для систем (1) и (2) не корректна: $\mathrm{C}\varrho L=\mathbb{C}$; в этом случае корректна задача Дирихле.

Свойства задача Коши для квазиэллиптических системы первого и второго типа

Пусть $t\in V_t\equiv[0,T]$, то есть $T_1=0, T_2=T>0$; $H_t=\mathcal{L}_2(V_t)$; $H_x=\mathcal{L}_2(V_x)$; $H=H_t\otimes H_x^{\,2}$. В гильбертовом пространстве вектор-функций H рассмотрим системы уравнений, записанных в форме дифференциально-операторных уравнений

$$aD_tu+bBu=f,\text{ при } a=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$aD_tu+bBu=f,\text{ при } a=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}; \quad (5)$$

Начальные условия имеют такой же вид:

$$u^1_{|t=0}=u^2_{|t=0}=0 \quad (6)$$

Обозначим через $L:H\to H$ дифференциальный оператор, сопоставляемый изучаемой задаче в силу определения 1.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Зависимость структуры спектра оператора $L:H\to H$ от параметров задачи (4)-(6) (либо от параметров задачи (5)-(6)) следующая:

1. Если оператор iB обладает сильным B - свойством, то резольвентное множество оператора L заполняет комплексную плоскость.

2. Если оператор iB не обладает сильным B - свойством, то непрерывный спектр оператора L заполняет комплексную плоскость.

□ Изучим вначале структуру спектра дифференциального оператора $L: H \to H$, порождённого задачей (4)-(6). Пусть λ - произвольное комплексное число. Матрица Грина оператора $L_s - \lambda$ имеет вид:

$$G_s(t,\tau,\lambda) = e^{\lambda(t-\tau)}\begin{cases}\begin{pmatrix}\cos(B(t-\tau)) & \sin(B(t-\tau))\\ -\sin(B(t-\tau)) & \cos(B(t-\tau))\end{pmatrix}, & 0 \le \tau \le t;\\ 0, & t \le \tau \le T.\end{cases}$$

Здесь $B = B(s)$, L_s является s - проекцией оператора L. Так как $\Delta_s(\lambda) \neq 0$, то $P\varrho L = \emptyset$. Следовательно, оператор $(L_s - \lambda)^{-1}$ существует. Как и ранее устанавливаем, что оператор $(L_s - \lambda)^{-1}$ определён на множестве элементов, всюду плотном в H. Таким образом, остаточный спектр оператора L- пустое множество в силу произвольности числа λ, то есть $R\varrho L = \emptyset$.

Пусть последовательность $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\lim_{n\to\infty} ImB(s_n) = \infty$. Положим $u_n = u_n(t) = (L_{s_n} - \lambda)^{-1}e^{\lambda t}e_1$. Тогда

$$u_n^1 = u_n^1(t) = e^{\lambda t}\frac{\sin(Bt)}{B}.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\|u_n^1\|_{H_t} = \infty$, то $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{H_t} = \infty$. Далее имеем

$$\|(L - \lambda)^{-1}\| \ge \frac{\left\|(L - \lambda)^{-1}e^{\lambda t}\varphi_1^{s_n}\right\|_H}{\left\|e^{\lambda t}\varphi_1^{s_n}\right\|_H} \ge -\frac{C_1}{C_2}\frac{\|u_n\|_{H_t^2}}{\|e^{\lambda t}\|_{H_t}}.$$

В силу сделанного ранее допущения получаем включение $\lambda \in C\varrho L$.

Если $\sup_s|ImB(s_n)| < \infty$, то для элементов $G_s^{i,j}(t,\tau,\lambda)$ матрицы Грина $G_s(t,\tau,\lambda)$ имеем $\sup_s\left\|G_s^{i,j}\right\|_{\mathcal{L}_2(W_t)} < \infty$. Воспользовавшись результатами работ [1] и [3], получаем включение $\lambda \in \varrho L$. Так как λ - произвольное комплексное число, то первая часть теоремы доказана полностью.

Обозначим теперь через $L: H \to H$ дифференциальный оператор, сопоставляемый задаче (5)-(6) в силу определения 1. Доказательство оставшегося проводится как и выше; матрица Грина оператора $L_s - \lambda$ представима в виде:

$$G_s(t,\tau,\lambda) = \begin{cases} A(t,\tau,\lambda), & \text{если } 0 \le \tau \le t \le T;\\ 0, & \text{если } 0 \le t \le \tau \le T.\end{cases}$$

Здесь

$$A(t,\tau,\lambda) = \begin{pmatrix}\cos\big(b(t-\tau)\big) - \dfrac{\lambda\sin\big(b(t-\tau)\big)}{b} & \dfrac{\sin\big(b(t-\tau)\big)}{b}\\ -\dfrac{\sin\big(b(t-\tau)\big)}{b} & \cos\big(b(t-\tau)\big) + \dfrac{\lambda\sin\big(b(t-\tau)\big)}{b}\end{pmatrix},$$

0-нулевая матрица; $b = \sqrt{B^2 - \lambda^2}, B = B(s)$, L_s является s - проекцией оператора L. ■

Пример 2. Для систем (4) и (5), в которых оператор B, порождённый операцией $B(D_x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|=2k-1} b_\alpha D_x^{\alpha}$, $b_\alpha \in R$, является П- оператором, задача Коши не корректна, точнее - $C\varrho L = \mathbb{C}$. С другой стороны, для M - эллиптического дифференциального оператора B задача Коши для систем (4) и (5) корректна и более того: $\varrho L = \mathbb{C}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач – М.: Наука, 1980. – 207 с.
2. Дезин А.А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач. – М.: Наука-МАИК «Наука/Интерпериодика», 2000. – 175 с.
3. Жура Н.А., Ораевский А. Н. Задача Коши для одной гиперболической системы с постоянными коэффициентами // Докл. АН России-2004. – Т.396, №5 – С.590-594.
4. Корниенко Д.В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т.42, №1. – С. 91-100.
5. Корниенко Д.В. О спектре задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений // Дифференциальные уравнения – 2006. – Т.42, №8. – С.1063-1071.

УДК 517.983

ОБ ЭЛЕМЕНТАХ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОГО ПРОСТРАНСТВА H_α^β

Т.Н. Можарова, к.ф.-м.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

e-mail: *tatjana.mozharova@yandex.ru*

В данной работе приводится результат, полученный автором как вспомогательный при изучении условий аппроксимации решений операторного уравнения $\varphi(A)(x) = 0$. Однако рассматриваемое утверждение имеет и самостоятельное значение.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, линейный непрерывный оператор.

Пусть H – полная нормированная алгебра над полем комплексных чисел. A: $D(A) \to H$, $D(A) \subset H$, – замкнутый линейный неограниченный оператор и $D(A)$ – инвариантно относительно оператора A.

Ранее [1] было построено полное локально выпуклое пространство $H_\alpha^\beta \subset H$, на котором определен линейный непрерывный оператор

$$\varphi(A)(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} x_k A^k(x), \quad x \in D(A), \tag{1}$$

с характеристической функцией

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k, \ \{x_k\} \subset H, \tag{2}$$

целой векторнозначной со значениями в H.

Пространство H_α^β является проективным пределом нормированных пространств $H_{\alpha+\varepsilon_p}^\beta$ с нормами (3):

$$H_{\alpha+\varepsilon_p}^\beta = \left\{x \in D(A) : \left\|A^k(x)\right\| \le C(x,p)\left[\left(\alpha+\varepsilon_p\right)k\right]^{\beta k};\quad \forall k\right\},$$

где β, $a > 0$ – фиксированные, $\varepsilon_p > 0$,

$$\|x\|_p = \sup_k \left\{\frac{\left\|A^k(x)\right\|}{\left[\left(\alpha+\varepsilon_p\right)k\right]^{\beta k}}\right\} < \infty, \qquad \forall x \in H_{\alpha+\varepsilon_p}^\beta . \tag{3}$$

Полученные результаты справедливы и для скалярной характеристической функции $\varphi(t)$.

Пусть

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \ , \ c_k \in \boldsymbol{C},$$

целая скалярная функция порядок роста которой $\rho \le \frac{1}{\beta}$, а при $\rho = \frac{1}{\beta}$ тип $\sigma < \frac{\beta}{\alpha e}$,

$$\psi_\varphi(\lambda;t) = \frac{\varphi(\lambda)-\varphi(t)}{\lambda - t}, \tag{4}$$

где t – фиксированный комплексный параметр. Следовательно, $\psi_\varphi(\lambda;t)$, как функция λ, – целая, причем

$$\psi_\varphi(\lambda;t) \in \left[\frac{1}{\beta};\frac{\beta}{\alpha e}\right).$$

При фиксированном t такая функция определяет на H_α^β линейный непрерывный оператор

$$\psi_\varphi[A;t_0](x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[A^{n-1}(x) + t_0 A^{n-2}(x) + \ldots + t_0^{n-1} x\right], \tag{5}$$

$t_0 \in \mathbf{C}$.

Ряд (5) абсолютно сходится по норме в H $\forall x \in H_\alpha^\beta$.

Опираясь на свойства интерполирующей функции $\psi_\varphi[A;t](x)$ [1], докажем следующее утверждение:

Теорема. Для любого вектора $x \in H_\alpha^\beta$ и любой функции $\varphi \in \left[\frac{1}{\beta};\frac{\beta}{\alpha e}\right)$ справедлива формула:

$$x = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r} \frac{\psi_\varphi[A;t](x)}{\varphi(t)}\,dt + R_r(A)(x), \tag{6}$$

где $R_r(\lambda) \in \left[\frac{1}{\beta}; \frac{\beta}{\alpha e}\right)$ и для $|\lambda| < r$ определяется как

$$R_r(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{dt}{(t-\lambda)\varphi(t)}. \tag{7}$$

(Здесь $r > 0$ – любое, но такое, что окружность $|t| = r$ не проходит через нули функции $\varphi(t)$.)

Доказательство. Вычислим коэффициенты функции $R_r(\lambda)$.

$$B_m^{(r)} = \frac{1}{m!}\frac{d^m}{d\lambda^m}\left[R_r(\lambda)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{m!}\frac{d^m}{d\lambda^m}\left[\varphi(\lambda)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\frac{dt}{(t-\lambda)\varphi(t)}\right]_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{1}{m!}\left[\sum_{k=0}^{m} C_m^k \varphi^{(k)}(\lambda)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\frac{dt}{(t-\lambda)^{m-k+1}\varphi(t)}\right]_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{(m-k)!k!}\cdot c_k\cdot k!\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\frac{dt(m-k)!}{t^{m-k+1}\varphi(t)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} c_k \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\frac{dt}{t^{m-k+1}\varphi(t)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\frac{\sum\limits_{k=0}^{m} c_k t^k}{t^{m+1}\varphi(t)}dt.$$

Итак, имеем:

$$R_r(A)(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r}\frac{\sum\limits_{k=0}^{m} c_k t^k}{t^{m+1}\varphi(t)}dt\right\}A^m(x).$$

Обратимся к функции $\psi_\varphi[A;t](x)$ и представим ее рядом:

$$\psi_\varphi[A;t_0](x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n-1} A^k(x)t^{n-k-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=m+1}^{\infty} c_k t^{k-m-1}\right\}A^m(x).$$

Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[A^{n-1} + tA^{n-2} + \ldots + t^{n-1}E\right](x) = c_1A^0(x) + \left[c_2A(x) + c_2tA^0(x)\right] +$$

$$+ \left[c_3A^2(x) + c_3tA(x) + c_3t^2A^0(x)\right] + \ldots = \left[c_1t^0A^0(x) + c_2tA^0(x) + c_3t^2A^0(x) + \ldots\right] +$$

$$+\left[c_2 t^0 A(x)+c_3 tA(x)+c_4 t^2 A(x)+\ldots\right]+\ldots=A^0(x)\sum_{k=1}^{\infty}c_k t^{k-1}+A(x)\sum_{k=2}^{\infty}c_k t^{k-2}+$$

$$+\ldots+A^m(x)\sum_{k=m+1}^{\infty}c_k t^{k-m-1}+\ldots=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=m+1}^{\infty}c_k t^{k-m-1}\right\}A^m(x).$$

Перегруппировка членов двойного ряда возможна, так как ряды абсолютно сходятся.

Используя представление

$$\psi_\varphi[A;t](x)=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=m+1}^{\infty}c_k t^{k-m-1}\right\}A^m(x),$$

получаем:

$$x-\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r}\frac{\psi_\varphi[A;t](x)}{\varphi(t)}dt=x-\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r}\frac{\varphi(t)-\sum_{k=0}^{m}c_k t^k}{t^{m+1}\varphi(t)}dt\right\}A^m(x)=$$

$$=x-\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r}\frac{1}{t^{m+1}}dt\right\}A^m(x)+\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r}\frac{\sum_{k=0}^{m}c_k t^k}{t^{m+1}\varphi(t)}dt\right\}A^m(x)=$$

$$=x-x+\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r}\frac{\sum_{k=0}^{m}c_k t^k}{t^{m+1}\varphi(t)}dt\right\}A^m(x)=R_r(A)(x),\ \forall x\in H_\alpha^\beta.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можарова Т.Н. Об интерполирующей функции, порожденной целой вектор-нозначной функцией $\varphi(t)$ и линейным неограниченным оператором A //Continuum. Математика. Информатика. Образование. – 2016. – № 1(1) – С.31-36.

УДК 517.925

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ГРУППЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПО ПАРАМЕТРАМ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.В. Ноздрунов, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *v_noz@mail.ru*

Описывается алгоритм группового анализа по построению групп эквивалентности по параметрам для произвольной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, позволяющий минимизировать пространство параметров системы.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, непрерывная группа эквивалентности, непрерывные группы преобразований, дискретно-групповой анализ.

При моделировании и исследовании процессов и явлений в различных разделах нелинейной механики, а также в технических, экологических, экономических направлениях часто возникают системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с большим числом параметров.

Например, изучение динамики фазового перехода второго рода в кристаллических решетках приводит к исследованию системы, описывающей n-мерный «буш» [1]

$$y_i'' = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

где U – некоторая энергетическая функция (потенциальная энергия), которая может быть разложена в ряд по всем зависимым переменным y_i. Очевидно, система может быть представлена следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

где L – лагранжиан задачи, а q_i – обобщенные координаты.

Простейший двумерный «буш» получается, когда энергетическая функция имеет вид:

$$U = -k_1 y + k_2 y^2 + k_3 z^2 - \left(k_4 y^3 + k_5 y z^2\right),$$

и соответственно лагранжиан:

$$L = \frac{1}{2} y'^2 + \frac{1}{2} z'^2 + k_1 y - k_2 y^2 - k_3 z^2 + k_4 y^3 + k_5 y z^2.$$

При этом, двумерный «буш» описывается следующей системой двух обыкновенных автономных дифференциальных уравнений второго порядка с пятимерным пространством параметров $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$

$$\begin{cases} y'' = k_1 - 2k_2 y + 3k_4 y^2 + k_5 z^2, \\ z'' = -2k_3 z + 2k_5 yz. \end{cases} \quad (1)$$

Применение классических и современных методов группового анализа (симметрийных методов) при исследовании систем обыкновенных дифференциальных уравнений дает значительные результаты. К симметрийным методам исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений можно, например, отнести следующие: построение непрерывных групп эквивалентности, построение дискретных групп преобразований, поиск первых интегралов, поиск нелокальных симметрий. Но наличие многих параметров затрудняет применение классических и современных методов группового анализа для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегрирование в дальнейшем.

Таким образом, поиск групп эквивалентности является первым необходимым этапом группового анализа. Наличие групп эквивалентности позволяет, во-первых, привести систему к каноническому виду, то есть к системе с минимальной размерностью пространства параметров. В этом случае все оставшиеся параметры будут существенными. Параметр системы дифференциальных уравнений считается существенным, если данная система не допускает по нему непрерывную группу преобразований эквивалентности. И, во-вторых, позволяет изучить множественность канонических представлений системы, выбрав для исследования наиболее удобную и адекватную приложению. Минимальность размерности пространства параметров позволяет резко сократить трудоемкость классических алгоритмов группового анализа и является достаточно принципиальной при поиске дискретных групп [2]. Алгоритм приведения системы к каноническому виду реализован для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и опирается на построение непрерывной группы эквивалентности.

Рассмотрим произвольную систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} y'' = F(x, y, z, \bar{k}), \\ z'' = G(x, y, z, \bar{k}), \end{cases} \quad (2)$$

где $\bar{k} \in R^n$ – вектор параметров системы. Данная модель является многопараметрической. Система (1) является частным случаем системы (2).

Для системы (2) построим непрерывную группу эквивалентности по параметрам с инфинитезимальным оператором

$$X = \xi(x, y, z)\partial_x + \eta(x, y, z)\partial_y + \zeta(x, y, z)\partial_z + \sum_{i=1}^{n} A_i \partial_{k_i}. \quad (3)$$

Вычисляя продолжения оператора (3) и действуя на каждое уравнение системы, используя инфинитезимальный критерий инвариантности [3], получим систему двух определяющих уравнений, расщепляя которую по независимым переменным, получим переопределенную систему, состоящую из 15 урав-

нений. Решая данную систему, из первых 13 уравнений получаем координаты инфинитезимального оператора (3):

$$\xi(x,y,z)=c(x),$$
$$\eta(x,y,z)=\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_1\right)y+c_3z+d_1(x), \tag{4}$$
$$\zeta(x,y,z)=c_4y+\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_2\right)z+d_2(x),$$

где $c(x),d_1(x),d_2(x)$ – некоторые функции, c_1, c_2 , c_3 , c_4 – произвольные постоянные. Оставшиеся два уравнения определяющей системы представляют собой систему двух линейных уравнений в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n}A_iF_{k_i}-c_3G-\frac{1}{2}c'''(x)y-d_1''(x)+c(x)F_x+\left(\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_2\right)z+c_4y+d_2(x)\right)F_z+$$
$$+\left(\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_1\right)y+c_3z+d_1(x)\right)F_y+\left(\frac{3}{2}c'(x)-c_1\right)F=0,$$
$$\sum_{i=1}^{n}A_iG_{k_i}-c_4F-\frac{1}{2}c'''(x)z-d_2''(x)+c(x)G_x+\left(\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_2\right)z+c_4y+d_2(x)\right)G_z+ \tag{5}$$
$$+\left(\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_1\right)y+c_3z+d_1(x)\right)G_y+\left(\frac{3}{2}c'(x)-c_2\right)G=0.$$

Таким образом, для того, чтобы система (2) допускала непрерывную точечную группу эквивалентности, заданную оператором (3) необходимо и достаточно, чтобы была совместна система линейных уравнений в частных производных (5), при этом координаты оператора (3) имеют вид (4).

Для дальнейшего анализа полученной системы (5) и нахождения непрерывной группы эквивалентности необходимо конкретизировать вид правых частей уравнений системы (2).

В качестве примера рассмотрим систему (1) с пятимерным пространством параметров. Подставляя правые части системы (1) в уравнения системы (5) и расщепляя последние по независимым переменным y и z, получим переопределенную систему, решив которую, найдем координаты оператора (3):

$\xi(x,y,z)=2ax+c_0$, $\eta(x,y,z)=(a+c_1)y+d_1$, $\zeta(x,y,z)=(a+c_1)z,$,

$A_1=2d_1k_2-(3a-c_1)k_1$, $A_2=3d_1k_4-4ak_2$, $A_3=d_1k_5-4ak_3$, $A_4=-k_4(5a+c_1)$,

$A_5=-k_5(5a+c_1)$

где a, c_0, c_1, d_1 – произвольные постоянные.

Таким образом, система (1) допускает четырехмерную алгебру Ли с базисом:

$$X_1 = \partial_x,$$
$$X_2 = \partial_y + 2k_2\partial_{k_1} + 3k_4\partial_{k_2} + k_5\partial_{k_3},$$
$$X_3 = 2x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z - 3k_1\partial_{k_1} - 4k_2\partial_{k_2} - 4k_3\partial_{k_3} - 5k_4\partial_{k_4} - 5k_5\partial_{k_5},$$
$$X_4 = y\partial_y + z\partial_z + k_1\partial_{k_1} - k_4\partial_{k_4} - k_5\partial_{k_5}.$$

Используя соответствующие им непрерывные группы преобразований можно получить, например, следующие канонические представления системы (1) с двумерным пространством параметров:

$$\begin{cases} y'' = p_1 y^2 + z^2 - 2y, \\ z'' = -p_2 z + 2yz, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y'' = p_1 - 2y + p_2 y^2 + z^2, \\ z'' = 2yz, \end{cases}$$

где p_1, p_2 – существенные параметры системы. Если коэффициенты исходной системы (1) удовлетворяют соотношению $k_2^2 - 3k_1k_4 = 0$, то система (1) может быть приведена к следующему каноническому виду

$$\begin{cases} y'' = 3p_1 y^2 + z^2, \\ z'' = 2yz - 2z, \end{cases}$$

где p_1 – существенный параметр системы.

Используя найденную непрерывную группу эквивалентности и предложенный выше алгоритм, в общем случае систему (1) с пятимерным пространством параметров можно свести к системе с двумерным пространством параметров. Эти параметры будут являться существенными, а полученные модели каноническими.

Таким образом, исследование произвольных систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих параметры, необходимо начинать с построения для них группы эквивалентности по параметрам, используя описанный выше алгоритм, для минимизации пространства параметров данных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сахненко В.П., Чечин Г.М. Симметрийные правила отбора в нелинейной динамике атомных систем // ДАН, 1993. – Т. 330, № 3. – С.308 – 310.
2. Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Л.: Изд-во ЛИИАН, 1991. – 240 с.
3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 399 с.

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ж. А. Отарова
Каракалпакский государственный университет
e-mail: *j.otarova@mail.ru*

В данной работе для уравнения четвёртого порядка в прямоугольной области на основе спектрального метода доказаны теоремы единственности и существования решения поставленной задачи.

Ключевые слова: краевая задача, ряд Фурье, полнота, неоднородные условия.

В области $\Omega = \{ (x,t) : 0 < x < p, \ \ 0 < t < T \}$ рассматривается краевая задача для уравнения

$$u_{xxxx} + u_{tt} = f(x,t). \tag{1}$$

З а д а ч а A. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0) = \psi_1(x), \qquad 0 \le x \le p, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = \psi_2(x), \qquad 0 \le x \le p, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \varphi_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u_x(p,t) = \varphi_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$u_{xxx}(0,t) = \varphi_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

$$u_{xxx}(p,t) = \varphi_4(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{7}$$

Краевые задачи для уравнения (1) с однородными краевыми условиями изучены в работах [1, 3, 4, 5].

О п р е д е л е н и е. Функцию $u(x,t) \in C^{3,1}_{x,t}\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^{4,2}_{x,t}(\Omega)$ назовем регулярным решением задачи A при $f(x,t) \in C(\Omega)$, если она в области Ω удовлетворяет условиям (2)-(7) и уравнению (1).

Т е о р е м а 1. Если существует регулярное решение $u(x,t)$ задачи A, то оно единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи.

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t). \tag{8}$$

Известно, что функции

$$X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} cos\lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{p}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

образуют в $L_2(0,p)$ полную ортонормированную систему.

Следуя [2] рассмотрим функции

$$d_n(t) = \int_0^p u(x,t) X_n(x)\, dx, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{10}$$

На основании (10) введём функции

$$d_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{p-\varepsilon} u(x,t) \cdot X_n(x)\, dx, \quad 0 < \varepsilon < p, \tag{11}$$

причем $(\varepsilon,\, p-\varepsilon) \neq \emptyset$. Дифференцируя равенство (11) по t дважды, из соответствующего уравнения (1) получаем

$$d_{n,\varepsilon}{}''(t) = -\int_\varepsilon^{p-\varepsilon} u_{xxxx}(x,t) \cdot X_n(x)\, dx. \tag{12}$$

Правую часть (12) интегрируя четыре раза по частям, переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$, С учётом соответсвующих однородных условий (4)-(7), которые следуют из (8), получаем

$$d_n{}''(t) = -\lambda_n^4 \int_0^p u(x,t) X_n(x)\, dx, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

В последнем равенстве учитывая (10), имеем

$$d_n''(t) + \lambda_n^4 d_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, ...,$$

т.е. получаем обыкновенное дифференциальное уравнение. Решая его учитывая условия (2) и (3) имеем

$$\int_0^p u(x,t) X_n(x)\, dx = 0, \quad n = 0, 1, ... \tag{13}$$

Из (13) следует ортогональность $u(x,t)$ к полной системе (9). Следовательно $u(x,t) \equiv 0$. В силу (8), получаем, что $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, т.е. решение задачи единственно. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Если $f(x,t) \in C^{2,0}_{x,t}\left(\overline{\Omega}\right)$, $f_{xxx} \in L_2(\Omega)$, $f_x(0,t) = f_x(p,t) = 0$, $\forall\, t \in [0;T]$, и $\psi_3^{(4)}(x) \in C[0,p]$, $\psi_3^{(5)} \in L_2(0,p)$ и удовлетворяет условиям $\psi_3{}'(0) = \psi_3{}'(p) = 0$, $\psi_3{}'''(0) = \psi_3{}'''(p) = 0$; а $\psi_4^{(2)}(x) \in C[0,p]$, $\psi_4^{(3)}(x) \in L_2(0,p)$, и удовлетворяет условиям $\psi_4{}'(0) = \psi_4{}'(p) = 0$, тогда регулярное решение задачи A существует и $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}\left(\overline{\Omega}\right)$.

$\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$ определим ниже.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введём вспомогательную функцию

$$w(x,t)=x\cdot\varphi_1(t)+[\varphi_2(t)-\varphi_1(t)]\cdot\frac{x^2}{2p}-\frac{p^2}{8\pi^2}\left[\frac{p}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{p}x-x\right]\times$$

$$\times[\varphi_4(t)+\varphi_3(t)]+\frac{p^2}{2\pi^2}\left[\frac{p}{\pi}\sin\frac{\pi}{p}x-x+\frac{x^2}{p}\right]\cdot[\varphi_4(t)-\varphi_3(t)]. \qquad (14)$$

Ясно, что

$$w_x(0,t)=\varphi_1(t); \qquad w_x(p,t)=\varphi_2(t),$$
$$w_{xxx}(0,t)=\varphi_3(t); \qquad w_{xxx}(p,t)=\varphi_4(t).$$

Решение задачи ищем в виде суммы

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t), \qquad (15)$$

где, $v(x,t)$ −новая неизвестная функция. Таким образом, согласно (15) мы приходим к следующей задаче:

З а д а ч а $\widetilde{A}$. Найти в области Ω решение $v(x,t)$ уравнения

$$v_{xxxx}+v_{tt}=g(x,t), \qquad (16)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$v_x(0,t)=v_x(p,t)=0,\ 0\le t\le T,$$
$$v_{xxx}(0,t)=v_{xxx}(p,t)=0,\quad 0\le t\le T,$$
$$v(x,0)=\psi_3(x),0\le x\le p, \qquad (17)$$
$$v_t(x,0)=\psi_4(x),0\le x\le p, \qquad (18)$$

где

$$\psi_3(x)\equiv\psi_1(x)-w(x,0), \qquad 0\le x\le p,$$
$$\psi_4(x)\equiv\psi_2(x)-w_t(x,0), \qquad 0\le x\le p,$$

согласно (15).

Решение соответствующего однородного уравнения (16), ищем методом Фурье, оно имеет вид

$$v(x,t)=\left[a_0(0)\,t+b_0(0)+\int\limits_0^t(t-\tau)\,g_0(\tau)d\tau\right]\frac{1}{\sqrt{p}}+$$
$$+\sqrt{\tfrac{2}{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n(0)\cos\lambda_n^2t+b_n(0)\sin\lambda_n^2t+ \qquad (19)$$
$$+\tfrac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^t g_n(\tau)\cdot\sin\lambda_n^2(t-\tau)\,d\tau\Big]\cdot\cos\lambda_nx.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $a_n(0)$, $b_n(0)$ используются условия (17), (18).

$$a_0(0)=\frac{1}{\sqrt{p}}\int\limits_0^p\psi_4(x)dx, \qquad b_0(0)=\frac{1}{\sqrt{p}}\int\limits_0^p\psi_3(x)dx,$$

$$a_n(0) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p \psi_3(x) \cos \lambda_n x dx, \quad n = 1, 2, ...$$

$$b_n(0) = \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^p \psi_4(x) \cos \lambda_n x dx, \quad n = 1, 2, ...$$

Решение задачи представляется в виде (19), где $a_0(0)$, $b_0(0)$, $a_n(0)$, $b_n(0)$ определяются соответственно выше формулами.

Следовательно, мы построили формальное решение задачи $\widetilde{A}$ в области Ω, которое даётся формулой (19).

Л е м м а. $\forall t \in [0; T]$ при $n = 1, 2, ..$ справедливы оценки

$$|v_0(t)| \le C_1; \qquad |v_n(t)| \le [|a_n(0)| + |b_n(0)|] + \frac{\sqrt{T}}{\lambda_n^2} \|g_n\|_{L_2(0;T)},$$

$$|v_0'(t)| \le C_2; \quad |v_n'(t)| \le \lambda_n^2 [|a_n(0)| + |b_n(0)|] + \sqrt{T} \|g_n\|_{L_2(0;T)},$$

$$|v_0''(t)| \le C_3; \quad |v_n''(t)| \le \lambda_n^4 [|a_n(0)| + |b_n(0)|] + C\|g\|_{C(\overline{\Omega})} + \lambda_n^2 \sqrt{T} \|g_n\|_{L_2(0;T)},$$

где C_1, C_2, C_3—положительные постоянные.

З а м е ч а н и е . Из леммы следует, что $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,2}(\overline{\Omega})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аманов Д. Вольтерровость краевой задачи для уравнения четвертого порядка // Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы: Тр. межд. конф. 24—28 июня 2003. — Т.1.— Стерлитамак, 2003. — С. 78—82.
2. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. — Киев, 1999.— № 8 (35) — С. 1094—1100.
3. Отарова Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // Докл. АН РУЗ. Ташкент, 2008 — № 1.— С. 10—14.
4. Отарова Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнения четвертого порядка // Узб. мат. журн. — Ташкент, 2008. — №2. — С. 74—80.
5. Otarova J. A. Volterraness of boundary value problem for fourth order equation // The Journal of Arts and Science (Sakarya University Faculty of Arts and Science). — Sakarya, 2007. — №9. — P. 152 — 162.

УДК 51.01.510

МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

А.А. Русаков, к.ф.м.-н., д.п.н., проф.
ФГБОУ ВО «Московский технологический университет»
e-mail: *v.m.kafedra@yandex.ru*
В.Н. Чубариков, д.ф.-м.н., проф.
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
e-mail: *chubarik@mech.math.msu.su*

Основа методологии компьютерного моделирования – результаты фундаментальных исследований математики. В статье рассмотрены примеры подходов формирования фундаментальных понятий, лежащими в основе компьютерного моделирования, классиками математики 20 столетия: А.Н. Тихоновым, А.Н. Колмогоровым, А.Я. Хинчиным. Авторы считают, что при решении математических проблем составными частями компьютерного моделирования в математике являются математическое и вычислительное моделирование и программное обеспечение. Доказано, что единство трех составных частей компьютерного моделирования уже дало свои плоды в поисках истины и приводит к дальнейшему прогрессу в математике.

Ключевые слова: метод познания, математическая модель, компьютерное моделирование, вычислительный эксперимент, энтропия, задача об общем виде средней величины.

Составными частями компьютерного моделирования в математике являются математическое и вычислительное моделирование и программное обеспечение при решении математических проблем [1]. Здесь мы не будем касаться вопросов программного обеспечения, поскольку существуют стандартные системы компьютерной математики такие, как Matlab, Mathematica, Maple, MathCad, Statistika и др., которые могут обеспечить эту часть компьютерного моделирования.

В «Математической энциклопедии» А.Н. Тихонов в статье «Математическая модель» [2] определяет ее как приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики и как мощный метод познания внешнего мира, прогнозирования и управления. Сам процесс математического моделирования там подразделяется на четыре этапа.

Кратко их можно выразить так.

Первый этап – формулирование законов, связывающих основные объекты модели.

Второй этап – исследование математических задач, к которым приводят математические модели.

Третий этап – выяснение того, удовлетворяет ли принятая (гипотетическая) модель критерию практики, т.е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений.

Четвертый этап – последующий анализ модели в связи с накоплением

данных об изучаемых явлениях и модернизации модели.

В качестве типичного примера, иллюстрирующего характерные этапы в построении математической модели, А.Н. Тихонов приводит модель Солнечной системы. Первой здесь была модель Птолемея (2 век после Р.Х.), исходившая из положения, что планеты и Солнце совершают движение вокруг Земли (геоцентрическая модель). В 1543 г. Н. Коперник предложил принципиально новую модель вращения планет вокруг Солнца по окружностям (гелиоцентрическая система). И. Кеплер в начале 17 века сформулировал новые законы движения планет по эллиптическим орбитам. Во второй половине 17 века И. Ньютон предложил динамическую модель Солнечной системы, основанную на законе всемирного тяготения, которая явилась существенно новым шагом в развитии модели И. Кеплера. У. Ле-Верье в 1846 г. теоретически предсказал существование планеты Нептун на основе противоречия в движении планеты Уран в рассматриваемой ранее математической модели Солнечной системы. Аналогичным образом в 1930 г. была открыта планета Плутон.

Здесь выделены только важнейшие черты драматической истории создания математической модели Солнечной системы, которые появились задолго до появления компьютеров. Хотя в те времена использовались другие технические средства для вычислений, но полагаем, что и компьютерное моделирование следовало бы тут рассматривать в качестве таких средств, которые, быть может, гораздо быстрее привели к совершенствованию модели.

Тем не менее, отметим также, что компьютерное моделирование не является простым сведением к вычислительным моделям, соответствующим численному решению некоторого класса математических и прикладных задач, хотя эти модели занимают большое место в научных исследованиях.

Другой подход к созданию математической модели можно проследить в творчестве А.Н. Колмогорова [3]. В частности, решению математической задачи зачастую способствует подход, свойственный естественным наукам.

На наш взгляд, такому подходу присущи следующие элементы (см., например, [4], [5]):

- ✓ Во-первых, обоснование понятия происходит внутри определенной модели со своими границами применимости.
- ✓ Во-вторых, само понятие является элементом некоторой системы, в которой действуют свои законы, и им обязательно подчиняется рассматриваемое понятие.

Тем самым исследование требует, с одной стороны, облечения понятия в определенную математическую форму, т.е. построения определенной аксиоматической теории, а, с другой стороны, «экспериментального» (пусть даже этот эксперимент и умозрительный) подтверждения этой аксиоматической теории в границах действия аксиоматики, в частности, в пределах экспериментальной ошибки. Данный подход основан как на строго дедуктивном построении теории, так и на интуиции, здравом смысле при предложении аксиоматики, что в совокупности дает общий метод решения задачи.

Рассмотрим задачу об общем виде средней величины, решенную

А.Н. Колмогоровым.

Пусть $x = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ – набор положительных вещественных чисел.

Тогда $A(x) = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ называется средним арифметическим чисел $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$; $G(x) = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$ – средним геометрическим;

$H(x) = n \Big/ \left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n} \right)$ – средним гармоническим;

$A_r(x) = \left(\dfrac{x_1^r + x_2^r + ... + x_n^r}{n} \right)^{1/r}$ – средним степенным порядка r, r≠0.

А.Н. Колмогоров писал, что все известные средние M_n имеют вид

$$M_n = M(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = \psi\left(\frac{\varphi(x_1),\ \varphi(x_2),\ ...,\ \varphi(x_n)}{n} \right),$$

где φ – непрерывная строго монотонная функция, а ψ – обратная к ней.

Очевидно, что для среднего арифметического достаточно положить $\varphi(x) = x$, для среднего геометрического $\varphi(x) = \ln x$, для среднего гармонического $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, для среднего степенного порядка r ($r \neq 0$) $\varphi(x) = x^r$.

Далее А.Н. Колмогоров дал следующие четыре аксиомы среднего.

Пусть переменные $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ принимают любые значения из отрезка $[a, b]$.

Последовательность функций $\{M_n\}$ определяет правильный тип среднего, если удовлетворяются условия:

I. Каждая функция M_n непрерывна и строго монотонна по каждому переменному. Для определенности будем считать, что M_n монотонно возрастает по каждому переменному.

II. Каждая функция M_n является симметричной функцией от всех своих переменных.

III. Среднее от одинаковых значений всех переменных равно этому значению, т.е. $M(x,\ x,\ ...,\ x) = x$.

IV. Любую группу значений можно заменить их собственным средним, не меняя общего среднего, т.е.

$$M(x_1,\ ...,\ x_m,\ y_1,\ ...,\ y_n) = M_{m+n}(x,\ ...,\ x,\ y_1,\ ...,\ y_n),$$

где $x = M(x_1,\ ...,\ x_m)$.

А.Н. Колмогоров доказал, что при выполнении условий I-IV среднее $M(x_1,\ ...,\ x_n)$ имеет вид (1), где φ – непрерывная возрастающая на отрезке $[a, b]$ функция, а ψ – обратная к ней.

Итак, эти четыре аксиомы, как показал А.Н. Колмогоров, дают полное описание всех средних величин. Другими словами, они дают математическую модель общего вида среднего значения ряда величин.

Таким образом, формула А.Н. Колмогорова позволяет перейти к вычислительной модели, выбрав подходящую функцию φ, и этот выбор φ определяется в результате компьютерного моделирования. Например, такая модель осуществлена в работах [6,7].

Теперь рассмотрим математическую модель, но уже другого понятия, – понятия энтропии некоторой конечной полной системы событий $\Omega = \{A_1,\ ...,\ A_n\}$, отвечающей вероятностям $p_1,\ ...,\ p_n$ с условием $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ (см. А.Я. Хинчин [8]). В этом случае говорят, что задана схема Ω. В качестве удобной меры неопределенности или *энтропии* этой схемы определяют величину

$$H = H(A) = H(p_1,\ ...,\ p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k ,$$

где логарифмы берутся при произвольном, но во всех случаях одном и том же основании, причем, если некоторое $p_k = 0$, то $p_k \log p_k = 0$.

А.Я. Хинчин эту формулу с точностью до некоторого положительного множителя выводит из следующих аксиом.

I. Функция H непрерывна, неотрицательна и обращается в нуль только в том случае, когда из чисел $p_1,\ ...,\ p_n$ какое-нибудь одно равно 1 (остальные равны 0).

II. Функция H при данном n и любых $p_1,\ ...,\ p_n$ с условием $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ достигает максимального значения, если $p_1 = ... = p_n = \frac{1}{n}$.

III. Пусть схемы $A = \{A_1,\ ...,\ A_n\}$ с вероятностями $p_1,\ ...,\ p_n$ и $B = \{B_1,\ ...,\ B_m\}$ с вероятностями $q_1,\ ...,\ q_m$ взаимно независимы, т.е. вероятность совместного наступления событий A_k и B_l равна $p_k q_l$, где $1 \le k \le n,\ 1 \le l \le m$. Тогда

$$H(A + B) = H(A) + H(B).$$

IV. Добавление к данной схеме A одного невозможного события, а значит, и любого числа таких событий не изменяет энтропии,

$$H(p_1,\ ...,\ p_n,\ 0) = H(p_1,\ ...,\ p_n).$$

Полученная формула для функции H, позволяет перейти к вычислительной модели.

Наконец, перейдем к задаче о всевозможных разбиениях натурального числа *n* на натуральные слагаемые [3]. Их число обозначим через *p*(*n*). Расположив слагаемые в невозрастающем порядке, находим, что величина *p*(*n*) равна количеству решений в целых числах уравнения

$$n = x_1 + x_2 + ... + x_n,\ \ x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n \ge 0 .$$

То же самое число *p*(*n*) можно представить как количество решений в целых числах уравнения

$$n = 1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + ... + n \cdot y_n, \quad y_1, y_2, ..., y_n \geq 0,$$

если обозначим через y_k количество слагаемых k в предыдущем уравнении.

Например, первые десять значений функции разбиений суть таковы: $p(1)=1$, $p(2)=2$, $p(3)=3$, $p(4)=5$, $p(5)=7$, $p(6)=11$, $p(7)=15$, $p(8)=22$, $p(9)=30$, $p(10)=42$.

Приведем таблицу некоторых значений функции $p(n)$, показывающую достаточно быстрый порядок ее роста относительно n (таблица 1).

Первым шагом в исследовании функции $p(n)$ было получение при $n \to \infty$ асимптотической формулы вида

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi \left(\frac{2n}{3} \right)^{1/2} \right).$$

Нетрудное доказательство ее дано в книге [9].

Как пишет Дж. Литтлвуд: «с этой точки (формулы *(прим. авт.)*) и началась действительная атака на задачу… С этого момента и до самого конца Рамануджан настаивал, что на самом деле имеет место гораздо более сильное

Таблица 1 – Значения функции

n	$p(n)$	N	$p(n)$
5	7	60	966 467
10	42	65	2 012 558
15	176	70	4 087 968
20	627	75	8 118 264
25	1 958	80	15 796 476
30	5 604	85	30 167 357
35	1 4883	90	56 634 173
40	37 338	95	104 651 419
45	89 134	100	190 569 292
50	20 4226	200	3 972 999 029 388

утверждение, чем то, что было установлено: “должна существовать формула с ошибкой 0(1)”. Это было его важнейшим вкладом – и абсолютно по существу, и в высшей степени необычно. Проведенная скрупулезная проверка выявила необычные факты о $p(100)$ и $p(200)$».

Заметим, что в то время была известна таблица Мак-Магона, в которой он вычислил $p(n)$ для значений n до 200.

Современный вид формуле Рамануджана-Харди придал Радемахер, который нашел сходящийся ряд для $p(n)$.

Пусть

$$\psi_q(n) = \frac{q^{1/2}}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{dn}\left(\frac{sh\left(A\lambda_n / q\right)}{\lambda_n} \right), \quad A = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}},$$

$$L_q(n) = \sum_{\substack{p=1 \\ (p,q)=1}}^{q} \omega_{p,q} \exp\left(-\frac{2\pi i p n}{q} \right),$$

где $\omega_{p,q}$ – некоторый корень степени 24 из единицы.

Тогда имеем

$$p(n) = \sum_{q=1}^{\infty} L_q(n)\psi_q(n).$$

В книге [10] приведена таблица Рамануджана-Харди для вычисления $p(200)$, использующая восемь членов их формулы, которая дает ошибку 0,04. Она выглядит так:

+3972998993185,896
+36282,978
–87,555
+5,147
+0,071
+0,000
+0,043
3972999029388,004.

Отметим также некоторые арифметические свойства функции разбиений, найденные С. Рамануджаном [11]: для любого натурального числа m имеем, что $p(5m+4)$ делится на 5, $p(7m+5)$ делится на 7, $p(11m+6)$ делится на 11, $p(25m+24)$ делится на 25, $p(121m+116)$ делится на 121 и др.

В последнем примере вычислительный эксперимент Мак-Магона привел к построению математической модели, послужившей построению мощного кругового метода Харди-Литтлвуда-Рамануджана-Виноградова. Этот метод качественно преобразил лицо аналитической теории чисел в XX веке.

На наш взгляд, рассмотренные в единстве трех составных частей компьютерного моделирования, уже дало свои плоды в поисках истины, и приводит к дальнейшему прогрессу в математике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Русаков А.А., Чубариков В.Н. Теоретико-методологические основы компьютерного моделирования в математике Тезисы VIII международной конференции Математическое моделирование в образовании, науке и производстве г. Тирасполь, 3 – 5 октября 2013 г., **ПМР**, издательство Приднестровского университета, г. Тирасполь, 2013 – С.15-16.
2. Математическая энциклопедия. Т.3. – М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1982.
3. Kolmogorov A. Sur la notion de la moyenne. Atty Accad. naz. Lincei. Rend., 1930, 12, 9, 388-391 (Колмогоров А.Н. Об определении среднего. Избр. труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985. - 136-138).
4. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970. – 424 с.
5. Эндрюс Г. Теория разбиений. – М.: Наука, 1982.
6. Чубариков В.Н. О сложности некоторых арифметических объектов. Математические вопросы кибернетики, 2001, вып. 10. – 55-68.
7. Чубариков В.Н. Замечание к определению среднего. Вестник Моск. ун-та.

Сер. Мат. Мех., 2002, 1. – 30-33
8. Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей. Успехи матем. наук, 1953, т. VIII, вып. 3(55), 3-20 (Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей. Избр. труды по теории вероятностей. – М.: научное изд-во «ТВП», 1995. – 361-382).
9. Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел. – М.: Наука, 1971.
10. Collected Papers of Srinivasa Ramanujan Edited by G.H. Hardy, P.V. Seshu Aiyar and B.M. Wilson. New York. : Chelsea Publishing Company, 1927.
11. Литтлвуд Дж. Математическая смесь (гл. «Рецензия на собрание сочинений Рамануджана»). – М.: Наука, 1973.

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ КРИСТЕНСОНА-ЛЕВИ

Т.М. Сагателян
Национальный политехнический университет Армении
e-mail: *tigran.saghatelyan@gmail.com*

В работе рассматриваются вопросы сходимости двойных рядов Фурье по системе Кристенсона-Леви Ψ_a после исправлени значений функции на множестве малой меры.

Ключевые слова: система Кристенсона-Леви, двойные ряды Фурье, исправленные функции.

В работе рассматриваются вопросы сходимости двойных рядов Фурье по системе Кристенсона-Леви Ψ_a. Теперь напомним определение Кристенсона-Леви [1], [2].

Пусть $a \geq 2$ фиксированное целое число и $\omega_a = e^{\frac{2\pi}{a}i}$. Как и в классическом случае сперва определим обобщенную систему Радемахера:

Определение 1. Возьмем

$$\varphi_0^{(a)}(x) = \omega_a^k,\ x \in \left[\frac{k}{a}, \frac{k+1}{a}\right),\ k = 0,1,\dots,a-1$$

и для $n \geq 0$ положим

$$\varphi_n^{(a)}(x+1) = \varphi_n^{(a)}(x) = \varphi_0^{(a)}(a^n x).$$

Тогда обобщенная система Кристенсона-Леви порядка a определяется следующим образом:

Определение 2. Положим $\psi_0^{(a)}(x) = 1$. Если

$$n = \alpha_1 a^{n_1} + \dots + \alpha_s a^{n_s},\ n_1 > n_2 > \dots > n_s,\ s = 1,2\dots,$$

где $0 \leq \alpha_j < a$, $j = 1,2,\dots,s$ то

$$\psi_n^{(a)}(x) = \left(\varphi_{n_1}^{(a)}(x)\right)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \left(\varphi_{n_s}^{(a)}(x)\right)^{\alpha_s}.$$

Система Кристенсона-Леви $\Psi_a, a \geq 2$ является полной ортонормированной системой $L^2[0,1)$ (см.[1]). Отметим , что Ψ_2 является классической системой Уолша , а система Ψ_a является частным случаем системы Виленкина.

Основные свойства системы Ψ_a получены в работах Г. Кристенсона, П. Леви, Р. Пели, Ж. Файном, К. Ватари, Н.Виленкина, В. Юнга и другими математиками (см. [1]-[7])

Определение 3. Скажем, что все ненулевые члены в последовательности $\{d_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям, если из

$$k_2 \geq k_1,\ \ s_2 \geq s_1, k_2 + s_2 > k_1 + s_1, \mathcal{D}_{k_2,s_2} \neq 0, \mathcal{D}_{k_1,s_1} \neq 0,$$

следует, что $\mathcal{D}_{k_2,s_2} < \mathcal{D}_{k_1,s_1}$. Коэффициенты Фурье функции $f(t,\tau) \in L^1[0,1)^2$ по двойной ортонормированной системе $\left\{\psi_k^{(a)}(t)\psi_s^{(a)}(\tau)\right\}_{k,s=0}^{\infty}$ обозначим через

$$\mathcal{C}_{k,s}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(t,\tau)\psi_k^{(a)}(t)\psi_s^{(a)}(\tau)dtd\tau.$$

Положим

$$spec(f) = \{(k,s), \mathcal{C}_{k,s}(f) \neq 0, \qquad k,s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \}.$$

Прямоугольные и сферические частичные суммы двойного ряда Фурье по двойной системе $\{\psi_k(x)\psi_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ определяются соответственно следующим образом:

$$S_{N,M}(x,y,f) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{s=0}^{M} \mathcal{C}_{k,s}(f)\,\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y),$$

$$S_R(x,y,f) = \sum_{k^2+s^2\leq R^2} \mathcal{C}_{k,s}(f)\,\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y),$$

Скажем, что двойной ряд Фурье по системе Кристенсона-Леви Ψ_a сходится (равномерно, по $L^p(G)$ норме, почти всюду) к функции f по прямоугольникам или по Прингсхейму, если

$$\lim_{N,M\to\infty} S_{N,M}(x,y,f) = f(x,y)$$

(соответственно равномерно по $L^p(G)$ номере и почти всюду). Аналогичным образом определяется сходимость двойных рядов Фурье (равномерной, по $L^p(G)$ номере и почти всюду) в случае сферических и квадратных сумм.

Работа посвящена изучению равномерной сходимости двойных рядов Фурье по системе Ψ_a после исправления функции.

Следует отметить, что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н.Н. Лузину [8]. Им в 1912 г. был получен следующий знаменитый результат (С-свойство Лузина):

Теорема (Н.Н. Лузин). Для любой измеримой, почти всюду конечной на $[0,1]$ функции f и для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество E с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и непрерывная на $[0,1]$ функция g совпадающая с f на E.

В 1939 г . Д.Е. Меньшов [9] доказал , что тригонометрическая система обладает (усиленным C-свойством):

Теорема (Д.Е. Меньшов). Пусть f измеримая функция, конечная почти всюду на $[0,2\pi]$. Каково бы не было $\varepsilon > 0$ можно определить непрерывную функцию g, совпадающую с f на некотором множестве E, $|E| > 2\pi - \varepsilon$ и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0,2\pi]$.

В 1988 г. М.Г. Григорян [10], доказал что тригонометрическая система обладает усиленным L^1-свойством суммируемых функций. Оно состоит следующем.

Теорема (М.Г. Григорян). Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$, такое, что для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ можно найти функцию $g \in L^1[0,1]$ совпадающую с f на E ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней по $L^1[0,1]$ норме.

В работе [11] С. Епископосяном для одномерной системы Кристенсона-Леви получен следующий результат:

Теорема. Для любых чисел $0 < \varepsilon < 1$, $P \in \mathbb{N}$ и функции $f(x) \in L^p[0,1)$, существует функция $g(x) \in L^\infty[0,1)$ с mes$\{ x \in [0,1]: f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$ такая, что ее ряд Фурье по системе Кристенсона-Леви сходится к $g(x)$ равномерно на $[0,1)$, а последовательность коэффициентов $\{ |C_k(g)|, k \in spec(g)\}$ убывает.

В настоящей работе получены следующие результаты:

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ и для каждой функции $f \in L^0[0,1)^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^\infty[0,1)^2$, mes $\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ такую, что ее ряд Фурье по двойной системе Ψ_a по сферам сходится к ней равномерно на $[0,1)$, и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье по двойной системе Уолша внов полученной функции по модулю расположены в убывающем порядке по всем направлениям.

Теорема 2. Для любого $\varepsilon > 0$ и для каждой функции $f \in L^0[0,1)^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^\infty[0,1)^2$, mes $\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ такую, что ее ряд Фурье по двойной системе Ψ_a по прямоугольникам сходится к ней равномерно на $[0,1)$, и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье по двойной системе Ψ_a вновь полученной функции по модулю расположены в убивающем порядке по всем направлениям.

Отметим, что ряд классических результатов невозможно перенести с одномерного случая на двумерный. В этом случае даже разные (сферические, прямоугольные, квадратные) частичные суммы резко отличаются друг от друга по своим свойствам в таких вопросах, как сходимость в $L^p[0,2\pi]$, $p \geq 1$ и сходимость почти всюду.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chrestenson H.E. A class of generalized Walsh functions // Pacific Journal Mathematics. – 1955. – 45. – P.17-31.
2. Levy P. Sur une generalisation des fonotions orthogonales de Rademacher// Comment. math. helv. – 1944. – 16. – P.146-152.
3. Paley R. A remarkable system of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc. – 1932. – 34. – P.241-279.
4. Fine J. The generalized Walsh-functions // Trans. AMS. – 1950. – 69. – P. 66- 67.
5. Watari C. On generalized Walsh-Fourier series // Toh. Math. J. – 1958. – 10. – P.211-241.
6. Виленкин Н.Я. Об одном классе полных ортогональных систем // Известия АН СССР, сер. мат. – 1947. – 11. – С.363-400.
7. Young W. Mean convergence of generalized Walsh - Fourier series // Trans.Amer. Math. Soc. – 1976. – 218. – P.311-320.
8. Лузин Н.Н. К основной теореме интегрального исчисления// Матем. сб. – 1912. – 28. – 2. – С.266-294.
9. Menchoff D.E. Sur la convergence uniforme des series de Fourier // Матем. сб.- 1942. – 11. – 1-2. – С.67-96.
10. Grigorian M.G. On the convergence of Fourier series in the metric of L^1// Analysis Math. – 1991. – 17. – 3. – P.211 - 237.
11. Episkoposian S.A. Uniformly convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system // Siberian Mathematical Journal. – 2013. – 54. – 5. – P.810-816.

К ВОПРОСУ О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ОБОБЩЕННЫХ ЭКСПОНЕНТ В ПОЛНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О.Д. Соломатин, к.ф.-м.н, доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

В настоящей работе изучаются функции вида:

$$u(t) = f(tA)(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n (x_0) t^n, \quad x_0 \in H, \tag{1}$$

порожденные целой скалярной функцией

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

и оператором A (вообще говоря, неограниченным), действующим в полном метрическом пространстве H. Рассматриваются системы $\{u(\lambda_j) = f(\lambda_j A)(x_0)\}$ и найдены достаточные признаки полноты таких систем в пространстве H.

Пусть H – пространство Фреше над полем комплексных чисел, топология которого задается счетной системой полунорм $\{\|\cdot\|_p\}$, $p \in N$; A – линейный оператор (вообще говоря, неограниченный), действующий в пространстве H. Пусть, далее,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\quad a_n\neq 0\ -$$

целая скалярная функция порядка $\rho>0$ и типа $\sigma>0$.

Пусть $x_0\in H$ – фиксированный вектор, для которого выполнена следующая оценка:

$$\left\|A^n(x_0)\right\|_p\le\left(\alpha_p(x_0)+\varepsilon\right)^n n^{\beta(x_0)n},\quad \forall n>n_0(p,\varepsilon,x_0),\forall\varepsilon>0.$$

Рассмотрим ряд (1). Выясним, при каких t ряд (1) сходится в пространстве H. Для этого оценим нормы членов ряда:

$$\left\|a_n A^n(x_0)t^n\right\|_p\le C\left(\frac{(\sigma+\varepsilon)e\rho}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}\left(\alpha_p(x_0)+\varepsilon\right)^n n^{\beta(x_0)n}|t|^n,\quad \forall\varepsilon>0,\ C>0,\ x_0\in H.$$

Из этой оценки следует, что если операторный порядок вектора x_0, $\beta(x_0)\le\dfrac{1}{\rho}$, причем при $\beta(x_0)=\dfrac{1}{\rho}$ его операторный тип $\alpha(x_0)=0$, то ряд (1) сходится абсолютно в H при $|t|<\infty$ и определяет целую вектор-функцию $u(t)\colon C\to H$.

Функцию (1) будем называть обобщенной экспонентой, порожденной функцией f. В частности, при $f(z)=e^z$ получим классическую операторную экспоненту

$$e^{tA}(x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n(x_0)}{n!}t^n.$$

Операторная экспонента широко используется в теории операторных уравнений. Например, при определенных условиях она является решением следующего уравнения:

$$\frac{du}{dt}=A(u),\quad u(0)=x_0\in H.$$

В дальнейшем мы проводим исследование полноты системы вида $\left\{u(\lambda_j)\right\}$ (системы значений функции (1) в точках $\left\{\lambda_j\right\}$). Для описания множества $\left\{\lambda_j\right\}$ удобно использовать характеристики роста (p-порядки R_p и p-типы W_p) целой вектор-функции $f(tA)(x_0)=u(t)$. Эти характеристики вычисляются по формулам:

$$R_p=\frac{\rho}{1-\rho\beta_p(x_0)},\quad \beta_p(x_0)<\frac{1}{\rho},\quad \forall p,\quad R=\sup_{(p)}\left\{R_p\right\}=\frac{\rho}{1-\rho\beta(x_0)},\quad \beta(x_0)<\frac{1}{\rho}\ -$$

порядок функции $u(t)$,

$$W_p=\frac{1-\rho\beta_p(x_0)}{\rho}(\sigma\rho)^{\frac{\rho}{1-\rho\beta_p(x_0)}}\left(e\alpha_p(x_0)\right)^{\frac{\rho\beta_p(x_0)}{1-\rho\beta_p(x_0)}},\quad \beta_p(x_0)<\frac{1}{\rho},\quad W=\sup_{(p)}\left\{W_p\right\}\ -$$

тип функции $u(t)$.

В случае $\beta(x_0)=\frac{1}{\rho}$ и $\alpha(x_0)=0$ функция (1) имеет бесконечный порядок роста.

Теорема 1. Пусть:

а) В пространстве H определен линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор A;

б) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, $a_n\neq 0$ – целая скалярная функция порядка $\rho>0$ и типа $\sigma>0$;

в) Вектор $x_0\in H$ имеет операторный порядок $\beta(x_0)<\frac{1}{\rho}$;

г) $f(tA)(x_0)=u(t)$ – целая векторнозначная функция (1) порядка R со значениями в H.

Тогда для того, чтобы система $\{u(\lambda_j)\}$ была полна в H, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1. $x_0\in H$ – циклический вектор оператора A (вектор $x_0\in H$, для которого система $\{A^n(x_0)\}_1^{\infty}$ полна в H, называется циклическим вектором оператора A);

2. Показатель сходимости последовательности комплексных чисел $\{\lambda_j\}$

$$\tau>\frac{\rho}{1-\rho\beta(x_0)}=R.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть система $\{u(\lambda_j)\}$ полна, а вектор x_0 не является циклическим, то есть система $\{A^n(x_0)\}$ не полна в H. Тогда, в силу критерия Банаха, $\exists l_0\in H^*$, $l_0\neq 0$, такой, что $l_0\{A^n(x_0)\}=0$, $\forall n$. Следовательно,

$$\varphi_0(t)=l_0\{u(t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n l_0\{A^n(x_0)\}t^n\equiv 0,\quad |t|<\infty,$$

отсюда

$$\varphi_0(\lambda_j)=l_0\{u(\lambda_j)\}\equiv 0,\quad \forall j,\quad l_0\neq 0.$$

Но это означает, что система $\{u(\lambda_j)\}$ не полна в H. Полученное противоречие доказывает необходимость условия 1.

Пусть теперь система $\{u(\lambda_j)\}$ полна в H, а $\tau\le R$. Тогда, в силу известной теоремы единственности [1], существует функция

$$\varphi_0(t)=l_0\{u(\lambda)\}\neq 0,\quad l_0\in H^*,\quad l_0\neq 0,$$

такая, что $\varphi_0(\lambda_j)=l_0\{u(\lambda_j)\}=0$, $\forall j$. Но тогда система $\{u(\lambda_j)\}$ не полна в H, что и доказывает необходимость условия 2.

Достаточность. Пусть выполнены оба условия теоремы, а система $\left\{u\left(\lambda_j\right)\right\}$ не полна в H. Тогда, по критерию Банаха, $\exists l_1 \in H^*$, $l_1 \neq 0$, такой, что $l_1\left\{u\left(\lambda_j\right)\right\} = 0,\ \forall j$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_1(t) = l_1\left\{u(t)\right\} = l_1\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n\left(x_0\right)t^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n l_1\left\{A^n\left(x_0\right)\right\}t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad |t| < \infty .$$

Функция $\varphi_1(t)$ – целая скалярная, при этом справедлива оценка

$$\left|\varphi_1(t)\right| = \left|l_1\left\{u(t)\right\}\right| \le C\left\|u(t)\right\|_{p_1} \le C\exp\left\{\left(W_{p_1} + \varepsilon\right)|t|^{R_{p_1}}\right\},$$

где $R_{p_1} \le R$ и $W_{p_1} \le W$ – соответственно p_1-порядок и p_1-тип функции $u(t)$. Последнее неравенство показывает, что порядок роста функции $\varphi_1(t)$ не превосходит порядка роста R функции $u(t)$, причем $R = \dfrac{\rho}{1-\rho\beta\left(x_0\right)}$. В наших условиях $\varphi_1\left(\lambda_j\right) = 0,\ \forall j$ и показатель сходимости последовательности $\left\{\lambda_j\right\}$

$$\tau > \frac{\rho}{1-\rho\beta\left(x_0\right)} = R .$$

По теореме единственности для целой скалярной функции [1], отсюда следует, что $\varphi_1(t) \equiv 0$. Поэтому $l_1\left\{A^n\left(x_0\right)\right\} = 0,\ \forall n,\ l_1 \neq 0$, а это означает, что система $\left\{A^n\left(x_0\right)\right\}$ не полна в H, то есть вектор x_0 не является циклическим вектором оператора A. Полученное противоречие доказывает достаточность теоремы. Теорема доказана.

Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для полноты системы $\left\{u\left(\lambda_j\right)\right\}$ в пространстве H необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1. $x_0 \in H$ – циклический вектор оператора A;
2. Для последовательности $\left\{\lambda_j\right\}$ комплексных чисел справедливо неравенство

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{j}{\left|\lambda_j\right|^R} > WeR ,$$

где R и W соответственно порядок и тип функции $u(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 176 с.

ЦЕЛЫЕ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ КАК РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

О.Д. Соломатин, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = u(\lambda z;t) + z\cdot t;\quad u(t;z)\Big|_{t=0} = \cos z;\quad \frac{du}{dt}\Big|_{t=0} = 0;\quad \lambda\in C;\quad 0<|\lambda|\le 1.$$

Решение. Имеем: $m=2$. Начальные данные задачи

$$x_0 = \cos z \in H(C);\ x_1 = 0 \in H(C).$$

Неоднородная часть уравнения $f(t) = zt \in H(C)$. Оператор

$$Au(t;z) = u(t;\lambda z)$$

действует как оператор умножения переменной z на число λ. Будем искать решение задачи в пространстве $H(C)$ всех целых функций. Заметим, что пространство, в котором действует оператор A (определяемый уравнением), а, следовательно, и решаемая задача, имеет при операторном методе довольно широкую свободу выбора. Требуется лишь, чтобы начальные данные принадлежали выбранному пространству H, и в этом пространстве оператор A был определен.

По теореме, предложенной Громовым В.П. [3], [5] находим:

$$u(t;z) = u_0(t;x_0) + u_1(t;x_1) + u_r(t;f) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n(x_0)}{(2n)!}t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n(x_1)}{(2n+1)!}t^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\frac{(t-\varsigma)^{2n+1}}{(2n+1)!}A^n f(\varsigma)d\varsigma =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(\lambda^n z)}{(2n)!}t^{2n} + 0 + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\frac{(t-\varsigma)^{2n+1}}{(2n+1)!}\lambda^n z\varsigma d\varsigma =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^t(t-\varsigma)^{2n+1}\varsigma d\varsigma = \left[\begin{array}{l} u=\varsigma;\quad du=d\varsigma; \\ dv=(t-\varsigma)^{2n+1}d\varsigma;\quad \displaystyle v=-\frac{(t-\varsigma)^{2n+2}}{2n+2}\end{array}\right] = \\ \displaystyle = -\frac{\varsigma(t-\varsigma)^{2n+2}}{2n+2}\Big|_0^t + \int_0^t\frac{(t-\varsigma)^{2n+2}}{2n+2}d\varsigma = \int_0^t\frac{(t-\varsigma)^{2n+2}}{2n+2}d\varsigma\end{array}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(\lambda^n z)}{(2n)!}t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n z}{(2n+2)!}\int_0^t(t-\varsigma)^{2n+2}d\varsigma =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(\lambda^n z)}{(2n)!}t^{2n} + \frac{z}{\lambda}\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n+1}(t-\varsigma)^{2n+2}}{(2n+2)!}d\varsigma = \frac{z}{\lambda}\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\frac{2(n+1)}{2}}(t-\varsigma)^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}d\varsigma =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\lambda^n z\right)}{(2n)!} t^{2n} + \frac{z}{\lambda} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\lambda}(t-\varsigma)\right)^{2(n+1)}}{\left(2(n+1)\right)!} d\varsigma = \begin{bmatrix} n+1=k; & n=k-1; \\ k-1=0; & k=1 \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\lambda^n z\right)}{(2n)!} t^{2n} + \frac{z}{\lambda} \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\lambda}(t-\varsigma)\right)^{2k}}{(2k)!} d\varsigma =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\lambda^n z\right)}{(2n)!} t^{2n} + \frac{z}{\lambda} \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\lambda}(t-\varsigma)\right)^{2k}}{(2k)!} - 1 \right) d\varsigma = \left[ch\, t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\lambda^n z\right)}{(2n)!} t^{2n} + \frac{z}{\lambda} \int_0^t \left(ch\left(\sqrt{\lambda}(t-\varsigma)\right) - 1 \right) d\varsigma =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\lambda^n z\right)}{(2n)!} t^{2n} + \frac{z}{\lambda} \int_0^t ch\left(\sqrt{\lambda}(t-\varsigma)\right) d\varsigma - \frac{z}{\lambda} \int_0^t d\varsigma =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda}(t-\varsigma) = p; \\ -\sqrt{\lambda}\, d\varsigma = dp \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\lambda^n z\right)}{(2n)!} t^{2n} - \frac{z}{\lambda\sqrt{\lambda}} \int_{\sqrt{\lambda}\cdot t}^{0} ch\, p\, dp - \frac{zt}{\lambda} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\lambda^n z\right)}{(2n)!} t^{2n} + \frac{z}{\lambda\sqrt{\lambda}} sh\, p \Big|_0^{\sqrt{\lambda}\cdot t} - \frac{zt}{\lambda} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\lambda^n z\right)}{(2n)!} t^{2n} + \frac{z}{\lambda\sqrt{\lambda}} sh\left(\sqrt{\lambda}\cdot t\right) - \frac{zt}{\lambda}.$$

Итак, $u(t) = u(t;z)$ – целая векторнозначная функция со значениями в пространстве $H(C)$.

Найдем характеристики роста этой функции:

$$\beta_p(x_0) = \beta_p(\cos x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left\| A^n(\cos x) \right\|_p}{n \ln n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left\| \cos \lambda^n z \right\|_p}{n \ln n} = 0;$$

тогда

$$\rho_p(x_0) = \frac{m}{m - \beta_p(x_0)} = \frac{2}{2-0} = 1, \text{ то есть } \rho(x_0) = 1.$$

$$\alpha_p(x_0) = \alpha_p(\cos x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{\left\| A^n(\cos x) \right\|_p}}{n^{\beta_p(x_0)}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{\left\| \cos \lambda^n z \right\|_p}}{n^0} = 1;$$

то есть

$$\sigma_p(x_0) = \left(\frac{m - \beta_p(x_0)}{e} \right) \cdot \left(\alpha_p(x_0) \right)^{\frac{1}{m-\beta_p(x_0)}} \cdot \left(\frac{e}{m} \right)^{\frac{m}{m-\beta_p(x_0)}} = \frac{2-0}{e} \cdot 1^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{e}{2} = 1,$$

то есть $\sigma(x_0) = 1$.

Далее, найдем характеристики роста неоднородной части уравнения:

$$\beta_p(f)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\left\|\lambda^n z\right\|_p}{n\ln n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln|\lambda|+\ln\|z\|_p}{n\ln n}=0.$$

Значит,

$$\rho_p(f)=\frac{2}{2-0}=1;\quad \rho(f)=1;\quad \alpha_p(f)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt[n]{\left\|\lambda^n z\right\|_p}}{n^0}=|\lambda|.$$

Значит,

$$\sigma_p(f)=\frac{2}{e}\cdot|\lambda|\cdot\frac{e}{2}=|\lambda|;\quad \sigma(f)=\sup_{(p)}\{\sigma_p(f)\}=1.$$

Таким образом, $u(t)=u(t;z)$ – целая векторнозначная функция со значениями в пространстве $H(C)$ порядка роста $\rho_p(u(t))=\rho(u(t))=1$ и типа $\sigma_p(u(t))=\sigma(u(t))=1.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983.
2. Громов В.П., Мишин С.Н., Панюшкин С.В. Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения. – Орел: ГОУ ВПО «ОГУ», 2009.
3. Громов В.П. Аналитические решения дифференциально-операторных уравнений в локально выпуклых пространствах. – ДАН, 2004, том 394, № 3, с. 305-308.
4. Громов В.П. Порядок и тип линейного оператора и разложение в ряд по собственным функциям. – ДАН СССР, 1986, том 228, № 1, с. 27-31.
5. Громов В.П. Операторный метод решения линейных уравнений. Ученые записки лаборатории теории функций и функционального анализа ОГУ. Выпуск 3. – Орел: ГОУ ВПО «ОГУ», 2002, с. 4-36.
6. Громов В.П. Целые векторнозначные функции со значениями в локально выпуклом пространстве и их применение. Ученые записки лаборатории теории функций и функционального анализа ОГУ. Выпуск 4. – Орел: ГОУ ВПО «ОГУ», 2003, с. 4-24.
7. Громов В.П. Ряды экспонент с переменными коэффициентами и их применение для решения дифференциально-операторных уравнений. Ученые записки лаборатории теории функций и функционального анализа ОГУ. Выпуск 5. – Орел: ГОУ ВПО «ОГУ», 2005, с. 4-46.
8. Громов В.П., Соломатин О.Д. Логарифмический порядок и тип и характеристики роста целой функции бесконечного порядка. – Орел: ГОУ ВПО «ОГУ», 2007.
9. Соломатин О.Д. К вопросу о решении дифференциально-операторных уравнений в локально выпуклых пространствах. Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Естественные, технические и медицинские науки, № 2, 2007, с. 13-14.

УДК 517.957, 517.956.3, 514.763.8

THE DEGENERACY OF LAPLACE INVARIANTS FOR HYPERBOLIC SYSTEMS POSSESSING INTEGRALS

S. Ya. Startsev
Institute of Mathematics, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences
e-mail: *startsev@anrb.ru*

A direct generalization of Laplace invariants to the case of hyperbolic partial differential systems is considered. The proof of the following statement is given: the determinant of a Laplace invariant vanishes if the corresponding system admits an integral.

Key words: integral, conservation laws, Laplace invariants, nonlinear hyperbolic system of partial differential equation, Darboux integrability.

The Laplace method of cascade integration is a classical way for finding exact solutions to linear partial differential equations

$$u_{xy} = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u. \tag{1}$$

It is applicable if the sequence of the so-called Laplace invariants of (1) is terminated by zero. This method can also be applied to the linearizations of nonlinear scalar partial differential equations

$$u_{xy} = F(x,y,u,u_x,u_y) \tag{2}$$

as a test for Darboux integrability of (2) and as a way to construct higher symmetries of these equations (see, for example, [1, 2]).

The purpose of the present notes is to demonstrate some problems that arise when we try to generalize the Laplace invariants and the method of cascade integration to the case of systems (2). That is, generally speaking, we assume that u and F in (2) are n-dimensional vectors. We consider the case $n = 1$ first but write almost all formulae so that they remain valid for the case $n > 1$.

The mixed derivatives of u can be eliminated by using (2). Therefore, we can assume without loss of generality that all local objects associated with (2) are functions of the variables x, y, $u_0 := u$, $u_i := \partial^i u/\partial x^i$, $\bar{u}_j := \partial^j u/\partial y^j$. We henceforth understand functions as differential functions, i.e. they may depend on a finite number of the above variables. Let D_x and D_y denote the total derivatives with respect to x and y in virtue of (2). For any function g they are defined by formulae

$$D_x(g) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}u_1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial g}{\partial u_i}u_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial \bar{u}_i}D_y^{i-1}(F)\right), \tag{3}$$

$$D_y(g) = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u}\bar{u}_1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{u}_i}\bar{u}_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial u_i}D_x^{i-1}(F)\right). \tag{4}$$

Let us consider the differential operator

$$L = D_xD_y - F_{u_x}D_x - F_{u_y}D_y - F_u. \tag{5}$$

It can be written in the form

$$L = (D_y - F_{u_x}) \circ (D_x - F_{u_y}) - H_0, \qquad H_0 = F_u + F_{u_x}F_{u_y} - D_y(F_{u_y}), \tag{6}$$

where the symbol $\circ$ denotes the composition of operators. Using H_0, $b_0 = F_{u_y}$ and $L_0 = L$ as starting terms, we can construct the sequences of the functions H_i, b_i and the operators

$$L_i := (D_x - b_i) \circ (D_y - F_{u_x}) - H_{i-1} = (D_y - F_{u_x}) \circ (D_x - b_i) - H_i \tag{7}$$

such that the equalities

$$(D_x - b_i) \circ L_{i-1} = L_i \circ (D_x - b_{i-1}) \tag{8}$$

hold. It is easy to see that the formula

$$H_i = H_{i-1} + [D_y - F_{u_x}, D_x - b_i] \tag{9}$$

follows from (7), and (8) is equivalent to the relation

$$(D_x - b_i) \circ H_{i-1} = H_{i-1}(D_x - b_{i-1}) \tag{10}$$

for the recurrent calculation of b_i. Here $[A, B]$ denotes the commutator of operators A and B. The functions H_i are called Laplace x-invariants of (2).

In the scalar case, Eqs. (10) and (9) take the form $b_i = b_{i-1} + D_x(H_{i-1})/H_{i-1}$ and $H_i = H_{i-1} + D_x(F_{u_x}) - D_y(b_i)$. The operator equalities

$$L_{i-1} \circ \frac{1}{H_{i-1}}(D_y - F_{u_x}) = (D_y - F_{u_x}) \circ \frac{1}{H_{i-1}} L_i$$

allow us to construct symmetries of (2) (i.e. elements of $\ker L$) from the kernel of the operator $L_r = (D_y - F_{u_x}) \circ (D_x - b_r)$ in the case $H_r = 0$.

Now let us consider the case of systems. It is useful to recall some notation first. If g is a scalar function and z is a vector $(z^1, z^2, \ldots, z^n)^\top$, then by $g_z = \partial g/\partial z$ we denote the row $\big(\partial g/\partial z^1, \partial g/\partial z^2, \ldots, \partial g/\partial z^n\big)$. For any vector-valued function $G = (G^1, G^2, \ldots, G^\ell)^\top$, $G_z = \partial G/\partial z$ designates the $\ell \times n$ matrix with the rows G^1_z, $\ldots$, G^ℓ_z. Taking this standard notation into account, formulae (3)–(10) remain valid in the case when u and F in (2) are n-dimensional vectors. Equations (9), (10) take the form

$$H_i = H_{i-1} + D_x(F_{u_x}) + [F_{u_x}, b_i] - D_y(b_i),$$
$$D_x(H_{i-1}) - b_i H_{i-1} + H_{i-1} b_{i-1} = 0 \tag{11}$$

in this case. But the Laplace invariants H_i (as well as b_i) are $n \times n$ matrices now. Therefore, (11) may have no solution b_i if $\det(H_{i-1}) = 0$, and this solution is not unique even if it exists. Thus, we have problems with the existence and the uniqueness of the Laplace invariants in the case of systems. Some ways to deal with these problems were discussed in [2, 3].

D e f i n i t i o n. A function $w(x, y, u, u_1, \ldots, u_k)$, $w_{u_k} \neq 0$, is called an x-integral of system (2) if $D_y(w) = 0$. The number k is called the order of this integral.

In the scalar case, the Laplace invariants are interesting mainly in situations where (2) admits integrals. But the existence of an integral in the case of the systems guarantees $\det(H_r) = 0$ for some $r \geq 0$, and this leads to the aforementioned problems with the existence and the uniqueness of the Laplace invariants.

P r o p o s i t i o n. If system (2) admits an x-integral of order k, then $\det(H_r) = 0$ for some $r < k$.

This proposition was proved in [4] and then mentioned in some works. For example, it was used in [2] as one of arguments demonstrating that the direct generalization of the Laplace invariants is not completely satisfactory. But [4] is practically unavailable because it was published in Russian in a small number of copies and has no online version. The main motive for writing of the present notes is to make the proof of the above proposition freely available in English through arXiv (the exact reference is arXiv:1710.11068). This proof is a modification of the reasoning that was used in [1] for the scalar case.

P r o o f. For any function g we can consider the differential operator

$$g_* = \frac{\partial g}{\partial u} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{u}_i} D_y^i + \frac{\partial g}{\partial u_i} D_x^i \right),$$

i.e. g_* denotes the linearization (Frechét derivative) of g. It is not difficult to prove (see, for example, [5]) that

$$D_y \circ g_* - (D_y(g))_* = \sum_{i=0}^{p} \gamma_i D_x^i \circ L, \qquad D_x \circ g_* - (D_x(g))_* = \sum_{i=0}^{q} \bar{\gamma}_i D_y^i \circ L,$$

where γ_i and $\bar{\gamma}_i$ are n-dimensional rows components of which are functions. Therefore,

$$D_y \circ w_* = \sum_{i=0}^{p} \gamma_i D_x^i \circ L \tag{12}$$

if w is an x-integral.

Assume the contrary: let $\det(H_i) \neq 0$ for all $i < k$. Then for all $i \leq k$ we can define the operators by the following recurrent formulae

$$\hat{B}_0 = E, \quad \hat{B}_i = (D_x - b_i) \circ \hat{B}_{i-1},\ i > 0;$$

$$B_{-1} = E, \quad B_i = (D_x - b_i) \circ B_{i-1},\ i \geq 0.$$

Here E denotes the identity mapping ($n \times n$ identity matrix). Repeatedly using (8), we obtain the relation $\hat{B}_i \circ L = L_i \circ B_{i-1}$. Since $L_i \circ B_{i-1} = (D_y - F_{u_x}) \circ B_i - H_i B_{i-1}$ follows from (7), we obtain

$$D_y \circ B_i = F_{u_x} B_i + H_i B_{i-1} + \hat{B}_i \circ L. \tag{13}$$

Let w be an x-integral of order k. We can rewrite its linearization in the form $w_* = \sum_{i=0}^{k} \nu_i B_{i-1}$ and substitute this expression into (12). Then we apply the relation (13) and collect the coefficients at D_y and B_i. Since the operators D_y, B_i and operators of the form $D_x^j \circ L$ are linearly independent, the above operations give rise to the following chain of the relations

$$\nu_0 = 0, \qquad \nu_1 H_0 = 0, \qquad \nu_{i+1} H_i = -\left(D_y(\nu_i) + \nu_i F_{u_x}\right), \quad 0 < i < k.$$

This chain implies $\nu_i = 0$ for all $i \leq k$ if $\det(H_i) \neq 0$ for all $i < k$. But $w_* = 0$ contradicts the condition $w_{u_k} \neq 0$ which is contained in the definition of integrals.

A c k n o w l e d g m e n t s. The author thanks V.V. Sokolov for the suggestion to write this text.

REFERENCES

1. Anderson I. M., Kamran N. The variational bicomplex for hyperbolic second-order scalar partial differential equations in the plane // Duke Math. J. — 1997. — 87. — 2. — P. 265–319.
2. Zhiber A. V., Sokolov V. V. Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type // Russ. Math. Surv. — 2001. — 56. — 1. — P. 61–101.
3. Zhiber A. V., Startsev S. Ya. Integrals, Solutions, and Existence Problems for Laplace Transformations of Linear Hyperbolic Systems // Math. Notes. — 2003. — 74. — 6. — P. 803–811.
4. Startsev S. Ya. On Laplace invariants for systems of hyperbolic equations // in «Complex analysis, differential equations, numerical methods and applications». — V. 3. — Ufa: Institute of mathematics with computing centre of RAS. — 1996. — P. 144–154. (in Russian)
5. Sokolov V. V., Startsev S. Ya. Symmetries of nonlinear hyperbolic systems of the Toda chain type // Theoret. and Math. Phys. — 2008. — 155. — 2. — 802–811.

УДК 517.5

АППРОКСИМАЦИЯ ТАБЛИЧНЫХ ДАННЫХ ОБОБЩЕНИЯМИ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

В.А. Толпаев, д.ф.-м.н., проф.
ООО «Газпром проектирование» Ставропольский филиал
e-mail: *TolpaevVA@scnipigaz.ru*
К.С.Ахмедов, к.т.н.
АО «СевКавНИПИгаз»
e-mail: *AhmedovKS@scnipigaz.ru*
А.М. Кравцов, к.ф.-м.н.
АО «СевКавНИПИгаз»
e-mail: *KravcovAM@scnipigaz.ru*
М.Т. Петросянц, м.н.с.
АО «СевКавНИПИгаз»
e-mail: *PetrosyancMT@scnipigaz.ru*

Получены оценки для качества интерполяции функций многих переменных специальными агрегатами – обобщениями полиномов Бернштейна. Для предложенного способа интерполяции по многомерным данным, использующего аппроксимацию таблиц с помощью неявно заданной в ограниченном конусе функции нескольких вещественных переменных обобщениями полиномов Бернштейна, построены оценки и приведены иллюстрации для практического примера.

Ключевые слова: обобщения полиномов Бернштейна, теорема Вороновской, полиномиальная аппроксимация.

Введение числовой оценки качества аппроксимации табличных данных при различных способах построения аналитических выражений аппроксимантов, является практически важным и необходимым при выполнении вычислений с большими объемами данных в рамках решения задач компьютерной математики. Существенные результаты по оценке сложности описаний функций многих переменных были получены А.Н. Колмогоровым [1] и его учениками, позже А.Г. Витушкин [2] развил эти результаты. Вместе с тем, многие из полученных теоретических подходов к решению задач оценивания для многомерных таблиц большого объема не могут быть реализованы непосредственно в практических вычислениях. Основными трудностями в практической реализации методов являются их приложение к задачам обработки мультиколлинеарных данных в предположении о независимости переменных участвующих в формировании таблиц, применение алгоритмов осложняющих успешную реализацию на многопроцессорной вычислительной технике (трудности распараллеливания алгоритмов), высокие требования к точности представления данных (чувствительность алгоритмов).

Рассматриваемый в работе подход к решению задачи оценивания качества восстановления функции многих переменных, которая задана таблицей, позволяет, в значительной мере, преодолеть эти трудности. Для восстановления непрерывной на компакте функции предлагается использовать обобщения по-

линомов Бернштейна (ОПБ) [3]. Таблица представляет неявно заданную в конусе функцию $f(\mathbf{x})$: $\Omega \to \mathrm{R}^1$. Для приложений важным является случай непрерывной зависимости от данных, поэтому в дальнейших обсуждениях ограничимся случаем $f(\mathbf{x}) \in C_\Omega$. Значение функции определяются так, $f(\mathbf{x}) = 1$, если $\mathbf{x}$ строка таблицы. Построение приближения для $f(\mathbf{x})$ в виде последовательности ОПБ $\{\widehat{f}_N(\mathbf{x})\}$ по таблице данных осуществляется с помощью алгоритма предложенного в [3]. Предполагается, что таблица значений переменных нормирована, то есть все значения в таблице неотрицательны, а суммы по строкам таблицы равны единице.

Проведем оценку качества восстановления значений функции по значениям $\{\widehat{f}_N(\mathbf{x})\}$, для точек конуса Ω, не попадающих в таблицу. Пусть последовательность ОПБ $\{\widehat{f}_N(\mathbf{x})\}$, равномерно приближает функцию $f(\mathbf{x})$ в конусе Ω из R^n и для некоторого N имеет место

$$\left|\widehat{f}_N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\right| \le \varepsilon, \forall \mathbf{x} \in \Omega. \tag{1}$$

Для приближения (1) справедлива теорема типа теоремы Вороновской [4]. Сформулируем теорему без доказательства.

Теорема 1. Пусть ограниченная в конусе Ω функция $f(\mathbf{x})$ имеет второй дифференциал во внутренних точках Ω, тогда, для последовательности ОПБ $\{\widehat{f}_N(\mathbf{x})\}$, функции $f(\mathbf{x})$ справедлива асимптотика

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot \left(f(\mathbf{x}) - \widehat{f}_N(\mathbf{x})\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i^2}. \tag{2}$$

Для внутренней точки $\mathbf{x}^* \in \Omega$, принадлежащей графику функции $f(\mathbf{x})$ неявно заданной таблицей значений, выполняется условие

$$f(\mathbf{x}^*) = 1. \tag{3}$$

Пусть точка $\hat{\mathbf{x}}^* \in \Omega$ внутренняя точка конуса Ω такова, что верно

$$\hat{f}_N(\hat{\mathbf{x}}^*) = 1, \tag{4}$$

причем точки $\mathbf{x}^*$ и $\hat{\mathbf{x}}^*$ отличаются только в одной i – ой координате

$$\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, \ldots, x_i^*, \ldots, x_{n-1}, x_n), \hat{\mathbf{x}}^* = (x_1, x_2, \ldots, \hat{x}_i^*, \ldots, x_{n-1}, x_n). \tag{5}$$

В силу оценки $\left|\widehat{f}_N(\mathbf{x}^*) - f(\mathbf{x}^*)\right| \le \varepsilon$, на основании (3) и (4), можно утверждать, что $f(\mathbf{x}^*) = \hat{f}_N(\hat{\mathbf{x}}^*)$ и $\left|\widehat{f}_N(\mathbf{x}^*) - \hat{f}_N(\hat{\mathbf{x}}^*)\right| \le \varepsilon$. Для полинома $\widehat{f}_N(\mathbf{x})$ выполняется $C[N,f] \cdot \left|x_i^* - \hat{x}_i^*\right| \le \varepsilon$, с некоторой положительной константой С, вообще говоря, зависящей от N и f. Например, в качестве оценки для С можно принять на основании теоремы Лагранжа о конечных приращениях функции

$$C[N,f] = \left|\frac{\partial \widehat{f}_N(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right\|_{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,\xi,\ldots,x_{n-1},x_n)}, \tag{6}$$

где ξ зависит от $\mathbf{x}^*$ и $\hat{\mathbf{x}}^*$.

На основании (6) можно утверждать, что для восстановленного по таблице данных значения *i*-ой переменной выполняется оценка

$$\left|x_i^* - \hat{x}_i^*\right| \le \left(C[N, f]\right)^{-1} \varepsilon.$$

Далее рассмотрим случай, когда для табулированных данных необходимо восстановить значения двух переменных в строке таблицы. Предполагается, что функциональная зависимость, представленная таблицей, допускает такую возможность. Для нахождения оценок двух искомых значений *i*-ой и *j*-ой переменных в строке таблицы можно сформулировать следующую задачу

$$\begin{aligned} &\hat{f}_N\left(x_1,\ldots,\hat{x}_i^*,\ldots,\hat{x}_j^*,\ldots,x_n\right) \to \max, \\ &\hat{x}_i^* + \hat{x}_j^* + t = 1, \quad \hat{x}_i^* \ge 0, \quad \hat{x}_j^* \ge 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где *t* сумма известных значений переменных в строке таблицы (исключены значения $\hat{x}_i^*, \hat{x}_j^*$). Решение задачи очевидным образом существует, в силу ограниченности функции $\hat{f}_N(\mathbf{x}) \le 1$ в пересечении конуса Ω и гиперплоскости $x_i + x_j + t = 1$.

Решение этой задачи на условный экстремум может быть получено методом множителей Лагранжа и, следовательно, может быть найдено после решения системы уравнений

$$\frac{\partial \hat{f}_N(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial \hat{f}_N(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0. \tag{8}$$

Следует выбирать то решение системы уравнений, которое попадает в область

$$\hat{\mathbf{x}}^* = \left(x_1,\ldots,\hat{x}_i^*,\ldots,\hat{x}_j^*,\ldots,x_n\right) \in \Omega. \tag{9}$$

В силу оценки $\left|\hat{f}_N\left(\mathbf{x}^*\right) - f\left(\mathbf{x}^*\right)\right| \le \varepsilon$, на основании (3) и (4), можно утверждать, что $f\left(\mathbf{x}^*\right) = \hat{f}_N\left(\hat{\mathbf{x}}^*\right)$ и $\left|\hat{f}_N\left(\mathbf{x}^*\right) - \hat{f}_N\left(\hat{\mathbf{x}}^*\right)\right| \le \varepsilon$. Для приращения полинома $\Delta \hat{f}_N(\mathbf{x})$, как дифференцируемой функции двух переменных x_i, x_j, справедливо выражение

$$\Delta \hat{f}_N\left(\mathbf{x}^*\right) = \frac{\partial \hat{f}_N\left(\mathbf{x}^*\right)}{\partial x_i} \cdot \left(x_i^* - \hat{x}_i^*\right) + \frac{\partial \hat{f}_N\left(\mathbf{x}^*\right)}{\partial x_j} \cdot \left(x_j^* - \hat{x}_j^*\right) + \varepsilon_i \cdot \left(x_i^* - \hat{x}_i^*\right) + \varepsilon_j \cdot \left(x_j^* - \hat{x}_j^*\right), \tag{10}$$

где ε_1, ε_2 равномерно стремятся к нулю при условии, что $\left(x_i^* - \hat{x}_i^*\right)^2 + \left(x_j^* - \hat{x}_j^*\right)^2 \to 0$. То есть существуют положительные константы C_i и C_j, вообще говоря, зависящие от *N* и *f*, такие, что

$$C_i \cdot \left|x_i^* - \hat{x}_i^*\right| + C_j \cdot \left|x_j^* - \hat{x}_j^*\right| \le \varepsilon, \tag{11}$$

где

$$C_i[N,f]=\left\|\frac{\partial\widehat{f}_N(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right\|_{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_j,\ldots,x_n)},\quad C_j[N,f]=\left\|\frac{\partial\widehat{f}_N(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right\|_{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_j,\ldots,x_n)},$$

ξ_i и ξ_j зависят от N, $\mathbf{x}^*$ и $\hat{\mathbf{x}}^*$.

Воспользуемся для оценки качества восстановления значений переменных отсутствующих в таблице результатами Теоремы

$$C_i\cdot\left|x_i^*-\hat{x}_i^*\right|+C_j\cdot\left|x_j^*-\hat{x}_j^*\right|\sim\frac{1}{2N}\cdot\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i^2}\right|,\quad N\to\infty.$$

Таким образом, при подходящей точности представления данных в таблице и достаточно высокой степени ОПБ аппроксимирующего таблицу данных, представляется возможным восстанавливать значения отдельных ячеек или групп ячеек строки таблицы с точностью приемлемой для практических нужд, при условии, что данные в таблице связаны функциональной зависимостью, а не носят случайный характер.

В качестве иллюстрационного примера рассмотрим задачу о табулировании характеристик трехпоточной вихревой трубы. Техническое устройство, предназначенное для преобразования тепловой энергии газового потока, характеризуется избыточным давлением между входом и выходами трубы P, долей холодной фракции потока μ, превышением температуры горячего выхода T_h, снижением температуры холодного выхода T_c.

В таблице 1 приводятся экспериментальные данные для характеристик такого устройства [5]. В выделенных строках таблицы указаны значения, на которые понижается температура холодного потока в градусах Кельвина по сравнению с температурой входного потока, в ячейках, выделенных шрифтом, указаны значения, на которые увеличивается температура горячего потока в градусах Кельвина по сравнению с температурой входного потока.

Непрерывный характер зависимости между характеристиками технического устройства определяется физическими свойствами термодинамических процессов протекающих в нем. Аппроксимацию таблицы получим, следуя алгоритму [3]. Для контроля и оценки качества аппроксимаций выберем ряд ячеек таблицы и исключим эти данные из вычислений коэффициентов ОПБ. Контрольные ячейки в таблице отмечены штриховкой. Оставшиеся в таблице данные содержат 51 отсчет, поэтому актуальным является построение аппроксимаций степени не выше 4-6. При степени ОПБ равной четырем полином определяется значениями 70 коэффициентов, для 6 степени число коэффициентов вырастает до 210.

Таблица 1 – Характеристики трехпоточной вихревой трубы

Давление, P	Доля холодной фракции, μ						
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
1,4	34,4	33,3	31,1	**28,3**	24,4	20,0	15,6
	8,3	13,9	20,0	**28,3**	35,6	46,1	59,4
2	40,9	39,6	37,1	33,8	29,2	24,0	18,1
	9,8	16,4	24,0	33,3	42,6	54,6	69,5
3	50,4	48,7	45,7	41,6	**36,0**	29,7	21,9
	12,0	19,9	29,6	40,3	**52,3**	66,5	83,5
4	**56,9**	54,7	50,9	46,1	40,0	32,9	25,1
	13,2	21,9	32,4	43,9	57,1	72,5	91,2
5	61,6	59,0	54,8	49,4	43,0	35,4	26,9
	13,7	23,3	34,2	46,5	60,9	77,2	97,1
6	65,4	62,7	58,2	**52,7**	45,6	37,6	28,6
	14,1	24,3	35,8	**48,6**	63,9	81,0	102,1
7	68,6	65,8	61,4	55,7	48,0	39,6	**30,0**
	14,4	25,1	37,3	50,2	66,3	84,2	**106,3**
8	71,1	68,2	63,8	57,3	50,0	40,8	30,4
	14,4	25,4	38,1	51,8	67,9	86,1	107,9

Для построенного полинома определялось значение одного из четырех параметров по трем заданным значениям остальных параметров. Так для контрольной ячейки P = 1,4 и μ = 0,5 были получены результаты при различных степенях аппроксимирующего таблицу 1 полинома (таблица 2).

Таблица 2 – Оценки одного параметра

P	M	T_h	T_c
Контрольные значения параметров			
1,4	0,5	28,3	28,3
N=2			
1,4	0,44	27,4	25,5
N=4			
1,4	0,54	28,3	28,3
N=6			
1,4	0,5	28,3	28,3

При оценке двух значений параметров для N=2 и контрольной ячейки P=6 и μ=0,5 были получены значения температур 60,1/55,1, по полиному шестой степени были восстановлены значения температур 52,3/48,7.

Результаты расчетов иллюстрируют практическую применимость приведенных выше теоретических рассуждений. Заметим, что подобные рассуждения справедливы и в случае, когда число оцениваемых значений в строке таблицы больше двух. При этом важным является присутствие функциональной зависимости между переменными, значения которых задаются, и переменными, значения которых оцениваются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н. О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств // ДАН. – 1956. – 3. – 108 с.
2. Витушкин А.Г. Оценка сложности задачи табулированиия. – М.: Изд-во физ.-мат.лит. – 1959. – 229 с.
3. Толпаев В.А. Построение экономизированных приближений функций многих переменных / В.А. Толпаев, А.М. Кравцов, М.Т. Петросянц // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы II международной научно-практической конференции (24-27 ноября 2016 г., Орел) – Орел, 2016. – С. 70-74.
4. Вороновская Е. В. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С.Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. – 1932. – С.79-85
5. Электронный ресурс: www.airflow-expert.ru, дата актуализации 10.06.2016.

УДК 517.518.5

ПРИСПОСОБЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

С.Э. Усманов, PhD студент
Самаркандский государственный университет
e-mail: *usmanov-salim@mail.ru*

В этой работе рассмотрена задача о существовании припособленных систем координат для некоторых функций многих переменных. Доказано аналог теоремы Г. Щульца в случае внешнее произведение матрицы, состоящая из частных производных второго порядка функции, тождественно равно нулю.

Ключевые слова: приспособленные системы координат, многогранник Ньютона, высота функции, внешнее произведение матрицы.

1. Введение

Как известно, поведение одномерных осцилляторных интегралов выражается через порядок нуля первой производной фазовой функции [1]. Для кратных осцилляторных интегралов такой простой способ определения их поведения отсутствует.

Имеется гипотеза В.И. Арнольда [2] о том, что для кратных осцилляторных интегралов аналогом порядка нуля первой производной фазовой функции был бы расстояние от начало координат до многогранника Ньютона фазовой функции построенной в «подходящей» системе координат.

В работе [3] А.Н. Варченко получил частичное подтверждение этой гипотезы. Точнее, он доказал, что в двумерном случае существуют так называемые припособленные системы координат, удовлетворяющие условиям: дискретные характеристики многогранника Ньютона, построенного в этой системе координат, определяют главного члена асимптотического разложения осцилляторных интегралов.

С другой стороны, пример построенный А.Н. Варченко в той же работе показывает, что в трехмерном случае вообще говоря систем координат, обладающих такими свойствами не существуют.

Отсюда естественно возникают следующие вопросы:

Для каких классов функций многих переменных существуют аналог приспособленных систем координат?

Существуют ли конечные алгоритмы определения таких систем ?

Частичные решения этих задач предложены в работе [4] Г. Щульца, где доказано существование приспособленных систем координат для гладких выпуклых функций конечного линейного типа. Далее в работе [5] И.А. Икромова и А. Солеева получен аналог теоремы Г. Щульца для произвольных выпуклых аналитических функций. Причем указан алгоритм определения приспособленных систем координат. Следует отметит, что задача В.И. Арнольда в общем случае до сих пор остаётся открытой.

В этой работе предлагается решение этой задачи для частного класса невыпуклых функций. Мы рассмотрим класс функций, соответствующие градиентое отображение которых всюду имеет ранг не более один. Геометрически это означает, что ранг отображения Гаусса в каждой точке не более единицы. Иными словами в каждой точке гиперповерхности, определенной по графику функции, имеется не более одной ненулевой главной кривизны.

2. Формулировка основного результата

Сначала следуя [2] и [3] вводим некоторые обозначения. Пусть $N_0 \subset R_+ \subset R,$ соответственно множество всех неотрицательных целых, всех неотрицательных вещественных, и всех вещественных чисел . Допустим, что $K \in N_0^n$ некоторое множество. Многогранник Ньютона *N(K)* множества *K* определяется как выпуклая оболочка в R_+^n совокупности $\bigcup_{k\in K}\left(k + R_+^n\right).$

Пусть f гладкая функция, определенная в начале координат. Рассмотрим ряд Маклорена этой функции:

$$f_x \approx \sum_{k \in N_0^n} c_k x^k, c_k \in R,$$

где $k = (k_1, k_2, ..., k_n) \in N_0^n,\ x^k := x_1^{k_1} \cdot ... \cdot x_n^{k_n}$.

Носителем этого ряда т.е. носитель Тейлора называется следующее множество: $\mathrm{M}(f_x) = \{k \in N_0^n \setminus \{0\} : c_k \neq 0\}$.

Далее предполагается выполнение условия $\mathrm{M}(f_x) \neq 0$, что означает конечность типа этой функции в начале координат. Пусть в R^n фиксирована система координат и $\mathrm{K} := \mathrm{M}(f_x)$. Многогранник Ньютона функции f

обозначаемый через $\mathrm{N}(f_{\mathrm{x}})$ и определяется следующим образом: $\mathrm{N}(f_{\mathrm{x}}) := N(K)$.

Через f_x обозначим ряд Маклорена функции f в фиксированной системе координат в R^n. Пусть d координата пересечения прямой $x_1 = \ldots = x_n = d$, $d \in R$, с границей многогранника Ньютона. Это число будет называться расстоянием между многогранником Ньютона и началом координат. Расстояние обозначается через *d(x)*. Главной гранью многогранника Ньютона называется грань минимальной размерности, содержащей точку *(d (x),..., d (x))*.

Пусть f как выше, и пусть $x = (x_1,\ldots,x_n)$, фиксированная система координат в нуле в R^n. Обозначим через f_x ряд Маклорена функции f и $d(x)$ расстояние между началом координат и многогранником Ньютона $N(f_x)$. Рассмотрим величину $h(f) = sup\{d(x)\}$ где «supremum» берется относительно набора всех локальных гладких систем координат x в начале координат. Число *h(f)* называется высотой функции f [3]. Локальная система координат называется приспособленной к функции f если выполняется равенство $h(f) = d(x)$.

Из результатов А.Н. Варченко [3] следует, что в случае $n = 2$ главный член асимптотического разложения осцилляторного интеграла имеет вид $c|\lambda|^{-1/h(f)} \ln(2+|\lambda|)^m$, где $m = 1$ или $m = 0$ в зависимости от главной грани многогранника Ньютона в приспособленной системе координат. Иными словами, в двумерном случае главный член асимптотического разложения осцилляторного интеграла определяется многогранником Ньютона в приспособленной системе координат. Однако, как показывает пример А.Н. Варченко если $n \geq 3$, то вообще говоря, аналог таких систем координат не существует.

Пусть f гладкая функция, определенная в некоторой окрестности начала координат и она удовлетворяет условиям: $f(0) = 0$ а также $\nabla f(0) = 0$. Далее предполагаются, что все функции опеределены в достаточно малой окрестности нуля. Обозначается через $D^2 f(x)$ симметрическая квадратная матрица, состоящая из частных производных второго порядка функции f: $D^2 f(x) := \left\{ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right\}_{j,k=1}^{n}$, а также $D^2 f(x) \Lambda D^2 f(x)$ внешнее произведение матрицы $D^2 f(x)$ на саму себя т. е. внешний квадрат этой матрицы.

Основным результатом настоящей работы является следующая:

Теорема. Пусть f ненулевая, вещественно-аналитическая функция в окрестности U с R^n и удовлетворяет условиям: $f(0) = 0$ и $\nabla f(0) = 0$. Если для этой функции выполняется соотношение $D^2 f(x) \Lambda D^2 f(x) \equiv 0$, то существуют ортогональная матрица А и вещественно-аналитическая функция

g(y) в начале координат такие, что справедливо следующее равенство: $f(Ay) = y_1^h g(y)$, причем $g(0) \neq 0$, где h натуральное число и $h \geq 2$.

Замечание. Если функция f удовлетворяет условиям теоремы, то y является аналогом приспособленных систем координат для функции f.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорюк М.В. Метод перевала. – М.: Наука, 1977.
2. Арнольд В.И. Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера// УМН, 1973, т.28, вып.5,стр.17-44.
3. Варченко А.Н., Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов. //Функц. анал. и его прил. 1976, т. 10 вып. 3, стр. 13-38.
4. Schultz H, Convex Hypersurface of finite type and the asymptotics of their Fourier transforms// Indiana University Math. Journal, 40(8)(1991), 1267-1275.
5. I. Ikromov, A.Soleev. Newton polyhedra and oscillation index for convex phases. Lecture Note Computer Science, No 4194, pp.227-240. 2006.

УДК 517.9

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

О. В. Чернова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

e-mail: *volga@mail.ru*

В конечной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченной гладким контуром Γ рассматриваются эллиптические системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными старшими коэффициентами. В работе показана редукция таких систем к матричному аналогу систем типа Бельтрами.

Ключевые слова: эллиптическая система первого порядка, жорданова форма, класс Гельдера

Рассмотрим в конечной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченной гладким контуром Γ общую эллиптическую систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$A_1\frac{\partial U}{\partial x}+A_2\frac{\partial U}{\partial x}+a(z)U(z)+b(z)\overline{U(z)}=F(z),\quad z\in D,$$

где коэффициенты при старших членах – постоянные матрицы $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{l\times l}$, а $l\times l-$ матричные коэффициенты $a(z), b(z)$ принадлежат классу Гельдера $C^{\mu}(D)$ с показателем $0<\mu<1$. Под ее регулярным решением понимается комплексная $l-$вектор–функция $U=(U_1,...,U_l)\in C^1(D)$, удовлетворяющая этой системе тождественно. Очевидно, эта система $\mathbb{R}-$ линейна и в случае $b=0$ является $\mathbb{C}-$ линейной.

О п р е д е л е н и е. Данную систему считаем эллиптической, если $\forall\ \lambda(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, такого что λ_1 и λ_2 одновременно в нуль не обращаются выполнено

$$\det(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2)\neq 0.$$

В частности, это определение означает, что матрицы A_1, A_2 невырождены и матрица $A=-A_2^{-1}A_1$ не имеет вещественных собственных значений.

Умножая систему слева на $-A_2^{-1}$, с учетом переобозначений, ее всегда можно записать в эквивалентной форме

$$\frac{\partial U}{\partial y}-A\frac{\partial U}{\partial x}+a(z)U(z)+b(z)\overline{U(z)}=F(z). \tag{1}$$

Система (1) – это общая эллиптическая система, у которой старшие коэффициенты при производных постоянны, а матрица $A\in\mathbb{C}^{l\times l}$ не имеет вещественных собственных значений. Решениями системы являются $l-$вектор–функции $U=(U_1,\dots,U_l)$, из класса $C^{\mu}(\overline{D})\cap C^1(D),\ 0<\mu<\nu<1$.

Обозначим число собственных значений матрицы A (с учетом кратности), лежащих, соответственно, в верхней и нижней полуплоскости, l_1 и l_2, так что

[1]Работа выполнена при поддержке Гос. задания РФ № 1.7311.2017/БЧ

$l = l_1 + l_2$. Удобно множество всех собственных значений матрицы A записать в виде

$$\sigma = \sigma_1 \cup \overline{\sigma}_2, \tag{2}$$

где $\sigma_1(\overline{\sigma}_2)-$множество корней характеристического уравнения системы (1), лежащих в верхней (нижней) полуплоскости. Под чертой здесь понимается комплексное сопряжение, т.е. $\overline{\sigma}_2 = \{\nu \,|\, \overline{\nu} \in \sigma_2\}$.

Используя подходящую обратимую линейную подстановку систему (1) всегда можно преобразовать к эквивалентной системе, в которой $l_2 = 0$, т.е. когда все собственные значения матрицы A лежат в верхней полуплоскости. Такое преобразование опирается на следующее предложение.

Л е м м а. Существует такая обратимая $l \times l$ матрица B блочной структуры

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \overline{B_{12}} \\ B_{21} & \overline{B_{22}} \end{pmatrix}, \quad B_{ij} \in \mathbb{C}^{l_i \times l_j}, \tag{3}$$

что

$$B^{-1}AB = \widetilde{J}, \quad \widetilde{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \overline{J_2} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где матрицы $J_i \in \mathbb{C}^{l_i \times l_i}$ имеют жорданову форму и ее диагональные элементы составляют множество σ_i.

Рассмотрим $l-$компонентную комплекснозначную функцию $\widetilde{\phi} = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$. Удобно принять следующие обозначения ϕ_1-первые l_1 компонент $\widetilde{\phi}$, следующие l_2 компонент.

Т е о р е м а 1. Подстановка вида $\widetilde{\phi} = B^{-1}U = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$, или в блочной записи

$$U_i = B_{i1}\phi_1 + \overline{B_{i2}\phi_2}, \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

в обозначениях (3), (4) преобразует систему (1) к эквивалентной системе

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial x} + c(z)\phi(z) + d(z)\overline{\phi(z)} = F(z), \tag{6}$$

где $\phi = (\phi_1, \phi_2),\ F = (F_1, F_2)$, а матричные коэффициенты имеют вид

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \quad c(z) = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11}(z) & \widetilde{d}_{12}(z) \\ \overline{\widetilde{d}_{21}(z)} & \overline{\widetilde{c}_{22}(z)} \end{pmatrix}$$

$$d(z) = \begin{pmatrix} \widetilde{d}_{11}(z) & \widetilde{c}_{12}(z) \\ \overline{\widetilde{c}_{21}(z)} & \overline{\widetilde{d}_{22}(z)} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим подстановку $\widetilde{\phi} = B^{-1}U$ к системе (1). Умножив ее слева на B^{-1} и полагая $\widetilde{F} = B^{-1}F = (F_1, \overline{F}_2)$ получим

$$\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial y} - \widetilde{J}\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x} + \widetilde{a}(z)\widetilde{\phi}(z) + \widetilde{b}(z)\overline{\widetilde{\phi}(z)} = \widetilde{F}(z),$$

с коэффициентами

$$\widetilde{c}(z) = B^{-1}a(z)B = (\widetilde{c}_{ij})_1^2, \quad \widetilde{d}(z) = B^{-1}b(z)B = (\widetilde{d}_{ij})_1^2. \tag{8}$$

В соответствующей блочной записи она выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} - J_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \widetilde{c}_{11}(z)\phi_1(z) + \widetilde{c}_{12}(z)\overline{\phi_2(z)} + \widetilde{d}_{11}(z)\overline{\phi_1(z)} + \widetilde{d}_{12}(z)\phi_2(z) = F_1(z),$$

$$\frac{\partial \overline{\phi}_2}{\partial y} - \overline{J}_2\frac{\partial \overline{\phi}_2}{\partial x} + \widetilde{c}_{21}(z)\phi_1(z) + \widetilde{c}_{22}(z)\overline{\phi_2(z)} + \widetilde{d}_{21}(z)\overline{\phi_1(z)} + \widetilde{d}_{22}(z)\phi_2(z) = \overline{F_2(z)}.$$

Заменяя второе уравнение этой блочной системы комплексно сопряженным приходим к эллиптической системе (6) с коэффициентами (7).

Отметим, что матрица J системы (6) составлена из клеток Жордана с диагональными элементами из множеств σ_1 и σ_2, лежащих в верхней полуплоскости и фигурирующих в (2).

Большое количество работ (см. например, монографии [1]–[3]) посвящено эллиптическим системам первого порядка на плоскости. Для случая $c(z) = d(z) = F(z)$ система (6) была изучена Дуглисом [4] в рамках так называемых гиперкомплексных чисел. Эта система играет важную роль [5] при исследовании эллиптических систем второго и более высоких порядков.

В случае вещественных коэффициентов $A(z), a(z), b(z)$ и векторов U, F множества собственных значений σ_1 и σ_2 совпадают, так как с каждым комплексным корнем есть комплексно сопряженный той же кратности и, следовательно, число l четно. Удобно это число обозначить $2l$ и положить $\sigma_j = \sigma$. Кроме того, согласно [6], матрица $\widetilde{J}$ имеет блочную структуру $\mathrm{diag}(J, \overline{J})$, где $J \in \mathbb{C}^{l\times l}$, а матрицу B можно подчинить условию $B_{i2} = \overline{B_{i1}},\ i = 1, 2$, где $B \in \mathbb{C}^{2l\times l}$. А, значит, условия (3), (4) переходят в

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & \overline{B_1} \\ B_2 & \overline{B_2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{J} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \overline{J} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

и аналогично $\widetilde{F} = B^{-1}F = (F, \overline{F})$.

Так как матрицы $a(z)$ и $b(z)$ вещественны, то блочные строки матриц (8) комплексно сопряжены и, в частности, можно положить

$$\widetilde{a} = B^{-1}aB = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 & \widetilde{a}_2 \\ \overline{\widetilde{a}_1} & \overline{\widetilde{a}_2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{b} = B^{-1}bB = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 & \widetilde{b}_2 \\ \overline{\widetilde{b}_1} & \overline{\widetilde{b}_2} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Поэтому для вещественной системы (1) с $2l \times 2l-$матричными коэффициентами, где $\sigma-$множество корней ее характеристического уравнения в верхней полуплоскости, аналогом теоремы 1. будет следующий результат.

Т е о р е м а 2. Подстановка $2\widetilde{\phi} = B^{-1}U = (\phi, \overline{\phi})$, или в блочной записи, подстановка

$$U_i = \mathrm{Re}B_i\phi, \quad i = 1, 2,$$

в обозначениях (9), (10) преобразует систему (1) к эквивалентной системе (6) с $l \times l-$ матричными коэффициентами

$$c = \widetilde{a}_1 + \widetilde{b}_2, \quad d = \widetilde{a}_2 + \widetilde{b}_1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Боярский Б. В. First order elliptic systems. // N.-Y., Ac.Pr. — 1983.
2. Gilbert R. P., Buchanan J. L. Теория обобщенного аналитического вектора. // Annales Polon. Mathem. — 1966.— 17. — 3. — С. 281–320.
3. Wendland W. Elliptic systems in the plane. — Pitman, London etc.— 1979.
4. Douglis A. A function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. // Comm. Pure Appl. Math.— 1953.— 6.— С. 259–289.
5. Солдатов А. П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. АН СССР (сер.матем.)—1991.—55.—5.— С. 1070–1100.
6. Солдатов А. П., Чернова О. В. К теории эллиптических систем первого порядка. // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.—2009.—11.— С.73–77.

Алгебра, топология и геометрия

УДК 511.2

ЛЕММА «ABC» И ПОСЛЕДНЯЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

В.В. Агафонцев, к.т.н.
ФГБОУ ВО «Псковский государственный университет»
e-mail: *fon-valery-ag@yandex.ru*

В статье доказана лемма «ABC» о необходимом и достаточном условии выполнения трёхчленного диофантова равенства, членами которого являются натуральные числа в степенях, не меньших 2. На основании следствия из леммы «ABC» доказывается отсутствие решений в натуральных числах для уравнения Ферма любой нечётной степени.

Ключевые слова: лемма «ABC», Последняя теорема Ферма, позиционные системы счисления с целочисленным основанием, степенные диофантовы равенства.

В лемме «ABC» исследуются диофантовы равенства вида $A^x + B^y = C^z$, где $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $x, y, z \geq 2$, $(A, B, C)=1$. Методологическим базисом, на котором построено доказательство леммы «ABC», являются позиционные системы счисления или нумерации с произвольным целочисленным основанием.

Кратко об истории позиционных систем нумерации. С раннего детства, обучаясь чтению, письму и счёту, мы знакомимся с десятичной позиционной системой счисления. Такая нумерация пришла в арабские страны из Индии, о чём свидетельствуют слова сирийского христианского епископа Севируса Себокхта. В рукописи, датируемой 662 г. н.э., он пишет об «искусном методе индийского счисления при помощи 9 знаков, для восхваления которого нельзя найти достаточных слов» [1; С. 68]. Об индийском происхождении десятичной позиционной системы счисления свидетельствует и книга «Об индийском счёте» арабского математика аль-Хорезми (ок. 787 – ок. 850 гг. н.э.), переведённая на латынь в XII веке, названном «веком великих переводов» [2; С. 31]. В страны Европы десятичная позиционная система счисления пришла в начале XIII века, когда в 1202 году в своём научном труде – «Книге абака» – итальянский математик Леонардо Пизанский (ок. 1170-ок. 1250 гг.), известный также под именем Фибоначчи, описал эту нумерацию и показал её преимущества перед используемой в то время римской нумерацией [3; С. 261].

В век компьютеров и информационных технологий большое распространение получила двоичная нумерация. Её используют в устройствах хранения и обработки информации, построенных на базе физических элементов с двумя устойчивыми состояниями. Недостаток двоичной нумерации состоит в длинной записи чисел, поэтому в программной составляющей информационных технологий используют восьмеричную и шестнадцатеричную нумерации.

В принципе для записи различных количественных соотношений могут использоваться нумерации с *произвольным* целочисленным основанием. В этом случае между записью числа в *S*-нумерации и количественным эквивалентом устанавливается такое соответствие:

$(a_m a_{m-1}...a_1 a_0, a_{-1}...a_{-n})_S =$

$$= a_m \cdot S^m + a_{m-1} \cdot S^{m-1} + ... + a_1 \cdot S^1 + a_0 \cdot S^0 + a_{-1} \cdot S^{-1} + ... + a_{-n} \cdot S^{-n} = \sum_{-n}^{m} a_i \cdot S^i$$

Рассмотрим применение позиционных систем счисления с произвольным целочисленным основанием при исследовании диофантовых равенств вида $A^x + B^y = C^z$, где $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $x, y, z \geq 2$.

Для обеспечения целостности изложения повторим с некоторыми уточнениями и существенными дополнениями полное доказательство леммы ″АВС″, ранее представленной в [4] и [5].

Лемма «АВС». Необходимое и достаточное условие выполнения равенства

$$A^x + B^y = C^z, \qquad (1)$$

в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $x, y, z \geq 2$, $(A, B, C)=1$, представимо триадой равенств:

$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + ... + a_1 \cdot C + a_0$

$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + ... + b_1 \cdot C + b_0$

$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1$, *где* $i \in [1; z-1]; a_i, b_i, a_0, b_0 \in \mathbb{N} \leq C-1; a_0, b_0 \neq 0$.

Доказательство. Запишем правую и левую части равенства (1) в *C*-ричной позиционной системе счисления; получим:

$$(A^x)_c + (B^y)_c = (10...0)_c, \qquad (2)$$

где число нулей в правой части равенства (2) равно **z**.

Из равенства (2) следует необходимое условие его выполнения. Такое условие заключается:

а) во-первых, в том, что *C*-ричная запись каждого из чисел A^x и B^y должна содержать не более, чем **z** *C*-ричных разрядов, поэтому числа A^x и B^y в их *C*-ричной записи представимы так:

$$(A^x)_c = (a_{z-1} a_{z-2} ... a_1 a_0)_c; \quad (B^y)_c = (b_{z-1} b_{z-2} ... b_1 b_0)_c; \qquad (3)$$

по условию $(A, B, C) = 1$, следовательно, $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$;

б) во-вторых, в том, что поразрядные суммы *C*-ричных записей правой части равенств (3) должны удовлетворять таким соотношениям:

$$(a_0)_c + (b_0)_c = (10)_c; \quad (a_i)_c + (b_i)_c + 1 = (10)_c, \quad \text{где } i \in [1; z-1]. \qquad (4)$$

Исходя из равенств (3), учитывая позиционность *C*-ричной нумерации, числа A^x и B^y в их количественном эквиваленте представимы так:

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + ... + a_1 \cdot C + a_0; \quad B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + ... + b_1 \cdot C + b_0 \qquad (5)$$

Исходя из *C*-ричных равенств (4) и переходя к их количественному эквиваленту, получим:

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \text{ где } i \in [1; z-1]. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что выполнение равенств (5) и (6) является не только необходимым, но и достаточным условием выполнения равенства (1). Действительно, если предположить, что равенства (5) и (6) выполняются и сложить левые и правые части равенств (5) соответственно, а также учесть равенства (6), то получим равенство (1).

Примечание. Доказать необходимость выполнения равенств (6) можно, руководствуясь и такими рассуждениями. Подставим в равенство (1) выражения для A^x и B^y из равенств (5); учтём тождество

$$C^z = (C-1)\cdot C^{z-1} + (C-1)\cdot C^{z-2} + ... + (C-1)\cdot C + C$$

Получим:

$$\begin{aligned}&(a_{z-1} + b_{z-1})\cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2})\cdot C^{z-2} + ... + (a_1 + b_1)\cdot C + a_0 + b_0 = \\ &= (C-1)\cdot C^{z-1} + (C-1)\cdot C^{z-2} + ... + (C-1)\cdot C + C\end{aligned} \quad (7)$$

Очевидно, что равенство (7) выполнимо при

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \text{ где } i \in [1; z-1].$$

Лемма «ABC» доказана.

Убедимся в истинности леммы «ABC», рассмотрев следующие случаи:

1) $x = y = z = 2$; например: $8^2 + 15^2 = 17^2$, $20^2 + 21^2 = 29^2$;
2) $x = y = 2, z > 2$; например: $7^2 + 24^2 = 5^4$, $44^2 + 117^2 = 5^6$, $44^2 + 117^2 = 25^3$;
3) $x = 2; y, z > 2$ или $y = 2; x, z > 2$; например: $46^2 + 3^4 = 13^3$, $2^5 + 7^2 = 3^4$;
4) $x, y > 2; z = 2$; например: $2^3 + 1^k = 3^2$, где $k \in \mathbb{N}$; $6^3 + 5^4 = 29^2$.

Рассмотрим в качестве примера случай 3.

Для третьего случая ($x = 2; y, z > 2$ или $y = 2; x, z > 2$) необходимое и достаточное условие выполнения равенства (1) в соответствии с равенствами (5) и (6) запишется так:

а) на примере $x = 2, y = 4, z = 3$: $A^2 = a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0$; $B^4 = b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0$;

$$C = a_2 + b_2 + 1 = a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0$$

б) на примере $x = 5, y = 2, z = 4$: $A^5 = a_3 \cdot C^3 + a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0$;

$$B^2 = b_3 \cdot C^3 + b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0; \quad C = a_3 + b_3 + 1 = a_2 + b_2 + 1 = a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0$$

Пункту (а) удовлетворяет тройка чисел (46, 3, 13), в которой $46^2 + 3^4 = 13^3$. В этом случае $A^2 = 46^2 = 12 \cdot 13^2 + 6 \cdot 13 + 10$; $a_2 = 12, a_1 = 6, a_0 = 10$

$$B^4 = 3^4 = 0 \cdot 13^2 + 6 \cdot 13 + 3; \quad b_2 = 0, b_1 = 6, b_0 = 3$$

$$C = 12 + 0 + 1 = 6 + 6 + 1 = 10 + 3 = 13$$

Пункту (б) удовлетворяет тройка чисел (2, 7, 3), в которой $2^5 + 7^2 = 3^4$. В этом случае $A^5 = 2^5 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2$; $a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = 1, a_0 = 2$

$$B^2 = 7^2 = 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 1; \quad b_3 = 1, b_2 = 2, b_1 = 1, b_0 = 1$$

$$C = 1 + 1 + 1 = 0 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

Подобным образом можно убедиться в истинности леммы «ABC» для случаев 1, 2, 4.

Следствие из леммы «ABC»: необходимое условие выполнения равенства $A^x + B^y = C^z$, в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $x, y, z \geq 2$, $(A, B, C)=1$, представимо равенством

$$A^x + B^y = (C-1)\cdot C^{z-1} + C^{z-1} \quad (8)$$

Доказательство. Действительно, из необходимого и достаточного условия выполнения равенства $A^x + B^y = C^z$, представимого равенствами (5) и (6), следует:

$$A^x + B^y = (a_{z-1} + b_{z-1})\cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2})\cdot C^{z-2} + \ldots + (a_1 + b_1)\cdot C + a_0 + b_0 =$$
$$= (C-1)\cdot C^{z-1} + (C-1)\cdot C^{z-2} + \ldots + (C-1)\cdot C + C = (C-1)\cdot C^{z-1} + C^{z-1} \quad (9)$$

То есть, представляющая собой ряд по степеням C правая часть равенства (9) с необходимостью должна представляться суммой двух членов: первого – $(C-1)\cdot C^{z-1}$, являющегося старшим членом ряда, и второго – C^{z-1}, являющегося суммой всех остальных членов ряда, что и требовалось доказать.

Перейдём к теореме Ферма, которая в её современной трактовке звучит так: «не существует отличных от нуля целых чисел x, y и z, для которых $x^n + y^n = z^n$, где $n > 2$» [6; С. 11] либо «уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ не имеет целых положительных решений» [7; С. 7]. Не будем останавливаться на проблематичности этой теоремы, хорошо описанной в [8] и доказанной в [9].

Автор этой работы не относит себя к числу скептиков, склоняющихся к мнению о том, что Последняя теорема Ферма (ПТФ) была результатом редкого момента слабости математического гения XVII века. Свою точку зрения автор обосновал в работах [10, 11, 12]. С появлением гипотезы Эндрю Била (Andrew Beal), сформулированной им в 1993 году и гласящей: если $A^x + B^y = C^z$, где $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$ и $x, y, z > 2$, то A, B, C имеют общий делитель, появился новый интересный подход к исследованию степенных диофантовых уравнений вообще и Последней теоремы Ферма, в частности. Лемма «ABC» является некоторым стартовым этапом такого подхода. Отметим, что на базе леммы «ABC» и следствия из неё в работе [5] без использования метода бесконечного спуска и эйлеровской леммы о кубах представлено доказательство отсутствия решений в ненулевых положительных целых числах для уравнения $x^3 + y^3 = z^3$. Далее будем называть ненулевые положительные целые числа натуральными. Анализируя инструментарий этого доказательства, подобным образом можно выполнить доказательство для *всех* нечётных $n \geq 3$. Приведём такое доказательство.

Теорема. Уравнение

$$x^n + y^n = z^n \quad (10)$$

не имеет решений в натуральных числах для любых нечётных $n \geq 3$.

Доказательство. Предположим обратное: пусть уравнение (10) при некотором нечётном $n \geq 3$ имеет хотя бы одно решение в натуральных числах. Пусть это решение представляется натуральными числами A, B, C и выполняется такое равенство:

$$A^n + B^n = C^n \tag{11}$$

Числа A, B, C будем считать попарно взаимно простыми, т.е. $(A, B, C) = 1$. Очевидно, $A \neq B$, $A<C$, $B<C$. Тогда можно записать:

$$A = C - p\,;\quad B = C - q \tag{12}$$

Здесь p и q – натуральные числа. С учётом равенств (12) гипотетическое равенство (11) можно представить так:

$$(2C - n \cdot p - n \cdot q) \cdot C^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot C^{n-k} \cdot (p^k + q^k) = C^n \tag{13}$$

Здесь $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Разделим левую и правую часть равенства (13) на C^{n-1}. Для сохранения равенства (13) выражение, стоящее в нём под знаком суммы (Σ), должно нацело делиться на C^{n-1}. Из этого следует необходимость выполнения таких равенств:

$$\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot C^{n-k} \cdot (p^k + q^k) = l \cdot C^{n-1}, \text{ где } l \in \mathbb{N} \tag{14}$$

$$2C - n \cdot p - n \cdot q = C - l \tag{15}$$

Из равенства (15) получаем

$$l = n \cdot (p + q) - C \tag{16}$$

Докажем, что при $n = 2$ число l может быть только нечётным. Действительно, как известно [7; С. 17-20], при $n = 2$ уравнение (10) имеет примитивные решения (то есть, когда x, y, z являются взаимно простыми числами), в которых число z может быть только нечётным, а числа x, y имеют разную чётность. Тогда в равенстве (16) число C будет только нечётным, а в соответствии с равенствами (12) числа p, q будут иметь разную чётность, поэтому их сумма выразится нечётным числом. Следовательно, в равенстве (16) число l при $n = 2$ может быть только нечётным. Подкрепим сказанное несколькими примерами.

1) $3^2 + 4^2 = 5^2$. Пусть A= 3, B = 4, C = 5; тогда в соответствии с равенствами (12) p = 2, q = 1, а в соответствии с равенством (16) $\boldsymbol{l = 1}$.
2) $8^2 + 15^2 = 17^2$. Пусть A= 8, B = 15, C = 17; тогда в соответствии с равенствами (12) p = 9, q = 2, а в соответствии с равенством (16) $\boldsymbol{l = 5}$.
3) $7^2 + 24^2 = 25^2$. Пусть A= 7, B = 24, C = 25; тогда в соответствии с равенствами (12) p = 18, q = 1, а в соответствии с равенством (16) $\boldsymbol{l = 13}$.

Проверим на этих примерах истинность леммы «ABC». В соответствии с леммой «ABC» необходимое и достаточное условие выполнения равенства $A^2 + B^2 = C^2$ запишется так:

$$A^2 = a_1 \cdot C + a_0\,;\ B^2 = b_1 \cdot C + b_0\,;\ C = a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0$$

В первом примере: $A^2 = 3^2 = 1 \cdot 5 + 4$, где $a_1 = 1, a_0 = 4$;

$$B^2 = 4^2 = 3 \cdot 5 + 1, \text{ где } b_1 = 3, b_0 = 1\,;\ C = 1 + 3 + 1 = 4 + 1 = 5$$

Во втором примере: $A^2 = 8^2 = 3 \cdot 17 + 13$, где $a_1 = 3, a_0 = 13$;

$B^2 = 15^2 = 13 \cdot 17 + 4$, где $b_1 = 13, b_0 = 4$; $C = 3 + 13 + 1 = 13 + 4 = 17$

В третьем примере: $A^2 = 7^2 = 1 \cdot 25 + 24$, где $a_1 = 1, a_0 = 24$;

$B^2 = 24^2 = 23 \cdot 25 + 1$, где $b_1 = 23, b_0 = 1$; $C = 1 + 23 + 1 = 24 + 1 = 25$

Очевидно, во всех примерах справедлива лемма «ABC» и следствие из неё. В соответствии с ним необходимое условие выполнения равенства $A^2 + B^2 = C^2$, в котором *A, B, C*∈ ℕ; (*A, B, C*)=1, представимо равенством

$$A^2 + B^2 = (C-1) \cdot C + C$$

Докажем, что при любых нечётных $n \geq 3$ число l в равенстве (16) может быть только чётным. Действительно, исходя из свойства чёт-нечёт, все три числа *A, B, C* в равенстве (11) не могут быть нечётными, так как сумма или разность двух нечётных чисел чётна. Следовательно, одно и только одно из чисел *A, B, C* чётно. При этом возможны такие и только такие два случая:

- ✓ первый – числа *A, B* разной чётности, тогда число *C* будет *нечётным*;
- ✓ второй – числа *A, B* одной чётности (они *нечётны*), тогда число *C* будет *чётным*.

В первом случае, не ограничивая общности, будем считать число *A* чётным, а число *B* нечётным. Исходя из равенств (12), число *p* должно быть нечётным, а число *q* – чётным, поэтому число $(p+q)$ будет нечётным. Следовательно, в равенстве (16) при нечётных числах *n, (p+q)* и *C* число *l* может быть только чётным.

Во втором случае (в предположении, что *n*, *A* и *B* нечётны, а *C* чётно), исходя из равенств (12), числа *p* и *q* должны быть нечётными, поэтому число $(p+q)$ будет чётным. Следовательно, в равенстве (16) при нечётном *n* и чётных числах (*p*+*q*) и *C* число *l* может быть только чётным.

С учётом равенств (15), (14) и (13) гипотетическое равенство (11) запишется так:

$$A^n + B^n = (C-l) \cdot C^{n-1} + l \cdot C^{n-1} \qquad (17)$$

Выше было показано, что при любых нечётных $n \geq 3$ число l может быть только чётным. С другой стороны, в соответствии со следствием из леммы «ABC» необходимое условие выполнения равенства (11) при $x = y = z = n$ требует выполнения такого равенства:

$$A^n + B^n = (C-1) \cdot C^{n-1} + C^{n-1} \qquad (18)$$

Следовательно, в силу этого необходимого условия должно выполняться равенство $l = 1$. Но выполнение такого равенства невозможно, так как в силу представленного выше доказательства для любых нечётных $n \geq 3$ число l может быть только чётным, то есть кратным 2 и, значит, не меньшим 2. Поэтому в данном случае равенство $l = 1$ является противоречивым!

Итак, предполагая выполнимость равенства (11) при всех возможных вариантах чётности-нечётности натуральных чисел *A, B, C* и любом нечётном $n \geq 3$, через последовательность импликаций пришли к равенству, в котором чётное число должно быть равно 1, что является абсурдом. Поэтому предположение о выполнимости равенства (11), как решения уравнения (10), является

ложным. Следовательно, для любых нечётных $n \geq 3$ уравнение (10) не имеет решений в натуральных числах, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Депман И.Я. История арифметики: пособие для учителей. Изд. 2-е, испр. М.: Просвещение, 1965.
2. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. [Dahan-Dalmédico A., Peiffer J.] Пути и лабиринты. Очерки по истории математики / пер. с фр. А.А. Бряндинской. М.: Мир, 1986.
3. История математики с древнейших времён до начала XIX столетия: в 3 т. / под ред. А.П. Юшкевича, Т.1, М.: Наука, 1970.
4. Агафонцев В.В. Применение систем счисления в некоторых математических задачах // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации: материалы II междунар. научн.-практ. конф., Вологда, 16-18 февраля 2017г. / отв.ред. В.А.Тестов. Вологда: Изд-во Вологод. гос. ун-та, 2017. С. 47-50.
5. Агафонцев В.В. Лемма «A, B, C» в альтернативном доказательстве теоремы Эйлера // Математика, её приложения и математическое образование (МПМО'17): материалы VI междунар. конф., Улан-Удэ, Байкал, 26 июня - 1 июля 2017г. / отв.ред. Л.И.Назарова. Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2017. С. 14-18.
6. Постников М.М. Введение в теорию алгебраических чисел. М.: Наука, 1982.
7. Эдвардс Г. [Edwards H.] Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел / пер. с англ. В.Л.Калинина и А.И.Скопина / под ред. Б.Ф.Скубенко. М.: Мир, 1980.
8. Сингх С.[Singh S.] Великая теорема Ферма / пер. с англ. Ю.А.Данилова. М.: МЦНМО, 2000.
9. Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, Annals of Mathematics, 141: 3 (1995), pp. 443-551.
10. Агафонцев В.В. Великая теорема Ферма (необычный подход) // Инновации в науке: материалы X междунар. заочн. научн.-практ. конф., Новосибирск, 16 июля 2012г. / под ред. Я.А. Полонского. Новосибирск: Изд-во «Сибирская ассоциация консультантов», 2012. Ч.1. С. 6-10.
11. Агафонцев В.В. Последняя теорема Ферма (необычный подход) // Научный поиск в современном мире: материалы 2-й междунар. научн.-практ. конф., Москва, 20 декабря 2012г. М.: Изд-во Перо, 2012. Ч.1. С. 9-17.
12. Agafontsev V. Fermat's last theorem (the unusual approach), European applied sciences (Europäische Fachhochschule), ORT Publishing, Stuttgart, Germany, 1/1 (2013), pp. 42-48.

УДК 515.12

НОРМАЛЬНОСТЬ И КОЛЛЕКТИВНАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ПЛОТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРЯМЫХ

Д. П. Батуров, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *dbaturov@rambler.ru*

В этой статье рассматриваются топологические пространства, гомеоморфные плотным подпространствам произведений вещественных прямых. Пространства такого вида возникают в функциональном анализе: всякое локально выпуклое векторное топологическое пространство L, наделенное слабой топологией, гомеоморфно плотному подпространству произведения $\mathbf{R}^\tau$, где τ — алгебраическая размерность сопряженного пространства L' [3, Глава 2, §3]. Напомним, что топологическое пространство X называется нормальным, если все конечные подмножества в X замкнуты и для любых замкнутых непересекающихся подмножеств $A_1, A_2 \subset X$ существуют открытые непересекающиеся $U_1, U_2 \subset X$ такие, что $A_1 \subset U_1$, $A_2 \subset U_2$. Топологическое пространство X называется коллективно нормальным, если все конечные подмножества в X замкнуты и для любого дискретного семейства $\{A_t : t \in T\}$ замкнутых подмножеств в X существует семейство $\{U_t : t \in T\}$ открытых попарно непересекающихся подмножеств в X такое, что $A_t \subset U_t$ для любого $t \in T$. Понятие коллективно нормального пространства введено Бингом в работе [6], в которой построен первый пример нормального не коллективно нормального пространства.

В работе [2] доказано, что если X — нормальное плотное подпространство произведения $\mathbf{R}^{\aleph_1}$, то X коллективно нормально [2, Теорема 3] (см. также [4, Теорема 1]). Аналогичное утверждение для $\mathbf{R}^{\aleph_2}$ нельзя ни доказать ни опровергнуть в рамках системы аксиом ZFC. В предположении $\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$ в $\mathbf{R}^{\aleph_2}$ существует нормальное плотное подпространство X, содержащее несчетное замкнутое дискретное подмножество F [5, Теорема 2.1]. Тогда $\{\{a\} : a \in F\}$ — дискретное семейство замкнутых подмножеств в X, элементы которого нельзя разделить попарно непересекающимися открытыми множествами, т. к. X обладает свойством Суслина, т. е. X нормально, но не коллективно нормально. Как доказал Толл [7, Следствие 2.3], из условия $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ следует, что всякое нормальное пространство, характер которого не превосходит $2^{\aleph_0}$, обладающее свойством Суслина, является коллективно нормальным, поэтому в предположении $\aleph_2 \leq 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ всякое нормальное плотное подпространство в $\mathbf{R}^{\aleph_2}$ является коллективно нормальным.

Основным результатом настоящей статьи является теорема, в которой предполагается более слабое условие $\aleph_2 \cdot 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.

Т е о р е м а. Пусть $\aleph_2 \cdot 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. Тогда если X — нормальное плотное подпространство в $\mathbf{R}^{\aleph_2}$, то X коллективно нормально.

Заметим, что из условий этой теоремы не следует, что $\chi(X) \leq 2^{\aleph_0}$, поэтому она не вытекает из результата Толла.

Л е м м а. Если $\aleph_2 \cdot 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, то $(\aleph_2)^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Рассмотрим ординал ω_2. Семейство μ всех счетных подмножеств в ω_2 имеет мощность $(\aleph_2)^{\aleph_0}$. Для любого $A \in \mu$ существует $\alpha \in \omega_2$ такой, что $A \subset \alpha$, т. е. $\mu = \bigcup_{\alpha\in\omega_2} \mu_\alpha$, где μ_α — семейство всех счетных подмножеств в α. Тогда $|\mu_\alpha| \leq (\aleph_1)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ для любого $\alpha \in \omega_2$, поэтому $|\mu| \leq \aleph_2 \cdot 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Покажем, что всякое дискретное семейство $\{A_t : t \in T\}$ замкнутых подмножеств в X либо конечно, либо счетно, тогда, т. к. X нормально, попарно непересекающиеся открытые $U_t \subset X$, для которых $A_t \subset U_t$, можно выбрать по индукции, т. е. X является коллективно нормальным.

Предположим, $\{A_t : t \in T\}$ — дискретное семейство непустых замкнутых подмножеств в X, $|T| = \aleph_1$. Для каждого $t \in T$ зафиксируем точку $a_t \in A_t$, тогда $G = \{a_t : t \in T\}$ — дискретное замкнутое подпространство в X, $|G| = \aleph_1$. По условию X — плотное подпространство произведения $\mathbf{R}^B$, где B — некоторое множество мощности $\aleph_2$, X нормально, поэтому для любого $H \subset G$ существуют открытые непересекающиеся $U_1(H)$ и $U_2(H)$ в $\mathbf{R}^B$ такие, что $H \subset U_1(H)$, $G \setminus H \subset U_2(H)$, тогда существует счетное $C(H) \subset B$ такое, что $p_{C(H)}(U_1(H)) \cap p_{C(H)}(U_2(H)) = \emptyset$, где $p_{C(H)}$ — проецирование $\mathbf{R}^B$ на $\mathbf{R}^{C(H)}$ [1, Лемма 1.6.1].

Для любого счетного $C \subset B$ зафиксируем счетное плотное подмножество $\{r_1(C), r_2(C), \ldots\}$ в $\mathbf{R}^C$ и каждому $H \subset G$ поставим в соответствие упорядоченную пару $(C(H), D(H))$, где $D(H) = \{n : r_n(C(H)) \in U_1(H)\}$. Если $H_1, H_2 \subset G$ и $H_1 \neq H_2$ (т. е. существует $a \in (H_1 \setminus H_2) \cup (H_2 \setminus H_1)$), то $(C(H_1), D(H_1)) \neq (C(H_2), D(H_2))$: либо $C(H_1) \neq C(H_2)$, либо $C(H_1) = C(H_2) = C$, но в этом случае множество

$$(p_C(U_1(H_1)) \cap p_C(U_2(H_2))) \cup (p_C(U_1(H_2)) \cap p_C(U_2(H_1)))$$

открыто в $\mathbf{R}^C$ и содержит точку $p_C(a)$, т. е. непусто, поэтому существует n такое, что

$$r_n(C) \in (p_C(U_1(H_1)) \cap p_C(U_2(H_2))) \cup (p_C(U_1(H_2)) \cap p_C(U_2(H_1))),$$

тогда $n \in (D(H_1) \setminus D(H_2)) \cup (D(H_2) \setminus D(H_1))$, т. е. $D(H_1) \neq D(H_2)$.

Итак, мы получили инъективное отображение семейства всех подмножеств множества G (мощность этого семейства равна $2^{\aleph_1}$) в множество всех пар вида (C, D), где $D \subset \omega_0$, C — счетное подмножество множества B. Множество всех таких пар имеет мощность $(\aleph_2)^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = (\aleph_2)^{\aleph_0}$, таким образом $2^{\aleph_1} \leq (\aleph_2)^{\aleph_0}$, но по лемме $(\aleph_2)^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ — противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А. В. Топологические пространства функций. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
2. Батуров Д. П. Нормальность в плотных подмножествах функциональных пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математика, механика. 1988. №4. С. 63–65.
3. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967.
4. Baturov D. P. Normality in dense subspaces of products // Topol. Appl. 1990. V. 36. P. 111–116.
5. Baturov D. P. On closed discrete subsets of normal dense subspaces of products // Topol. Appl. 2015. V. 191. P. 28–36.
6. Bing R. H. Metrization of topological spaces // Can. J. Math. 1951. V. 3. P. 175–186.
7. Tall F. D. Normality versus collectionwise normality // K. Kunen, J. E. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984. P. 685–732.

УДК 514.763

О ПРОДОЛЖЕННЫХ СТРУКТУРАХ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ N-СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А. В. Букушева, к.пед.н.

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

e-mail: *bukusheva@list.ru*

Вводится понятие N-субриманова многообразия M контактного типа. С помощью внутренней связности, заданной на многообразии M, на распределении D многообразия M как на тотальном пространстве векторного расслоения (D, π, M) определяется почти контактная метрическая структура, названная в работе продолженной структурой. Доказывается, что среди продолженных структур не существует структуры Кенмоцу.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, N-субриманово многообразие контактного типа, распределение нулевой кривизны.

Введение

Под N-субримановым многообразием контактного типа понимается гладкое многообразие M размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, N, D)$, где: η — 1-форма, порождающая распределение $D : D = \ker \eta$, $\vec{\xi}$ — векторное поле, порождающее оснащение $D^{\perp}$ распределения $D : D^{\perp} = span(\vec{\xi})$, g — риманова метрика на многообразии M, относительно которой распределения D и $D^{\perp}$ взаимно ортогональны, $N : TM \to TM$ — эндоморфизм касательного расслоения, такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$. Мы также полагаем, что $\eta(\vec{\xi}) = 1$ и $g(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 1$. Используя конструкцию продолжения [2, 3, 4, 7, 8,

10] почти контактных метрических структур, мы определяем на тотальном пространстве D векторного расслоения (D, π, M) почти контактную метрическую структуру, названную в работе продолженной структурой. В работе доказывается, что среди продолженных структур не существует структуры Кенмоцу.

Во втором разделе работы приводятся необходимые для дальнейшего сведения о геометрии N-субримановых многообразий. Определяется внутренняя связность и тензор кривизны Схоутена. Третий раздел содержит основные результаты работы. В этом разделе определяется продолженная почти контактная метрическая структура, обсуждаются вопросы ее классификации.

1. N-субримановы многообразия контактного типа

Пусть M — гладкое многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, N, D)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$ и связанные соотношением $\eta(\vec{\xi}) = 1$. Внутренней линейной связностью ∇ [1, 5, 6, 8, 9] на N-субримановом многообразии называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$1)\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$;

$2)\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$,

$3)\nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

В работе используем адаптированные координаты. Карту $K(x^{\alpha})$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n; a, b, c = 1, ..., n-1; i, j, k = 2n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [11]. Пусть $P : TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $K(x^{\alpha})$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = span(\vec{e}_a)$.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A_a^{a'}\vec{e}_{a'}$, где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_{c'}^c \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_{c'}^c \vec{e}_a A_b^{c'}.$$

Кручением и кривизной внутренней связности назовем, соответственно, допустимые тензорные поля:

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],\ R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \\ = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = I - P$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$. Тензор $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$ носит название тензора кривизны

субриманова многообразия. Имеет место

П р е д л о ж е н и е 1. На N-субримановом многообразии существует единственная связность ∇ с нулевым кручением, такая, что

$$\nabla_{\vec{x}} g(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Коэффициенты внутренней метрической связности находятся по формулам $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$.

Наиболее просто устроены N-субримановы многообразия с нулевым тензором кривизны Схоутена. Многообразия с нулевым тензором кривизны Схоутена подробно изучались в случае контактного метрического многообразия в работе [11].

2. Продолженные почти контактные метрические структуры

Пусть M — гладкое многообразие размерности n с заданной на нем структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, N, D)$ N-субриманова многообразия. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(x^a, x^{n+a})$ такого, что $HD = Span(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_a \partial_{n+b}$. В случае, когда $G^a_b(x^a, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^a) x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. Пусть ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD, и $N : D \to D$ — поле допустимого тензора типа (1,1). N-продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D, π, M) определяемую разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, такую, что $\widetilde{HD} = HD \oplus Span(\vec{u})$, где $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{\varepsilon} - (N\vec{x})^v$, $\vec{\varepsilon} = \partial_n$, $\vec{x} \in D$, $(N\vec{x})^v$ — вертикальный лифт. Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{u}$ получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}$.

Под кручением N-продолженной связности будем понимать кручение исходной внутренней связности. Будем использовать следующее обозначение для N-продолженной связности: $\nabla^N = (\nabla, N)$, где ∇ — внутренняя связность. N-продолженную связность назовем метрической, если ∇ — внутренняя симметричная метрическая связность и выполняется равенство $\nabla^N_{\vec{\xi}} g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N^c_a g_{cb} - N^c_b g_{ac} = 0$.

Если не оговорено противное, на протяжении всей работы под связностью ∇ будет пониматься внутренняя симметричная метрическая связность.

Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$ определяют на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \\ + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b + N^a_b x^{n+b} dx^n)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необ-

ходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\vec{u} + x^{n+d}(2\omega_{ba}N^c_d + R^c_{bad})\partial_{n+c},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d}(\partial_n\Gamma^c_{ad} - \nabla_a N^c_d)\partial_{n+c},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab}\partial_{n+c},\ [\vec{u},\, \partial_{n+a}] = N^c_a\partial_{n+c}.$$

Определим на многообразии D почти контактную структуру $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = = \eta\circ\pi_*, D)$, полагая $J\vec{x}^h = \vec{x}^v$, $J\vec{x}^v = -\vec{x}^h$. Здесь $\pi : D \to M$ — естественная проекция, $\vec{u} = \partial_n$. Определим на многообразии D метрику $\tilde{g}$:

$$\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x}, \vec{y}),\ \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{u}) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{u}) = 0.$$

Имеют место следующие предложения.

П р е д л о ж е н и е 2. Структура $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta\circ\pi_*, \tilde{g}, D)$ является почти контактной метрической структурой.

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивита на многообразии D нулевой кривизны, тогда ее коэффициенты в адаптированных координатах получают следующее представление:

$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}$, $2\tilde{\Gamma}^{n+c}_{ab} = R^c_{bad}x^{n+d}$, $2\tilde{\Gamma}^n_{ab} = 2\omega_{ba} - \partial_n g_{ab}$, $2\tilde{\Gamma}^c_{a,n+b} = 2\tilde{\Gamma}^c_{n+b,a} = = g^{cd}N^e_0\omega_{ab}g_{eb}$,

$\tilde{\Gamma}^{n+c}_{a,n+b} = \Gamma^c_{ab}$, $2\tilde{\Gamma}^n_{a,n+b} = 2\tilde{\Gamma}^n_{n+b,a} = (\nabla_a N^e_0 - \partial_n\Gamma^e_{a0}x^{n+c})g_{eb}$, $2\tilde{\Gamma}^n_{n+a,n+b} = \partial_n g_{ab}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство предложения 3 основано на использовании равенств структурных уравнений, а также выражения для коэффициентов связности: $2\Gamma^m_{ij} = g^{km}(A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega^l_{kj}g_{li} + \Omega^l_{ki}g_{lj}) + \Omega^m_{ij}$, где $\Omega^n_{ab} = 2\omega_{ba}$, $\Omega^{n+c}_{ab} = 2N^c_0\omega_{ab}$, $\Omega^{n+c}_{a,n+b} = \Gamma^c_{ab}$, $\Omega^{n+c}_{an} = \partial_n\Gamma^c_{a0} - \nabla_a N^c_0$, $\Omega^{n+c}_{n,n+b} = N^c_b$. Здесь $N^e_0 = N^e_a x^{n+a}$, $\Gamma^e_{a0} = \Gamma^e_{ab}x^{n+b}$.

Т е о р е м а. Пусть M — N-субриманово многообразие с нулевым тензором кривизны Схоутена. Тогда на многообразии D не существует продолженной структуры Кенмоцу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [11], что почти контактная метрическая структура является структурой Кенмоцу тогда и только тогда, выполняется равенство $(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}J)\vec{y} = -\tilde{g}(\vec{x}, J\vec{y}) - \lambda(\vec{y})J\vec{x}$.

Проверяя последнее равенство, получаем, что в случае $\vec{x} = \vec{\varepsilon}_a$, $\vec{y} = \partial_{n+b}$ имеет место равенство: $\omega_{ab} + \partial_n g_{ab} = g_{ab}$, что не может выполняться для почти контактного метрического многообразия. Таким образом, утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букушева А. В. Об инфинитезимальных изометриях продолженных почти контактных метрических структур // Современные научные исследования и

инновации. — 2015. — №5-1(49). — С. 23–24.
2. Букушева А. В., Галаев С. В., Иванченко И. П. О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой // Механика. Математика. — 2011. — №13. — С. 10–14.
3. Букушева А. В., Галаев С. В. О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика. — 2005. — №7. — С. 12–14.
4. Букушева А. В. О некоторых классах почти параконтактных метрических многообразий // Механика. Математика. — 2013. — №15. — С. 8–11.
5. Букушева А. В. Применение Wolfram Language для выделения специальных классов почти контактных метрических структур // Компьютерные науки и информационные технологии : Материалы Междунар. науч. конф. — Саратов: Издат. центр. «Наука». — 2016. — С. 105–107.
6. Галаев С. В. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сборник. — 2016. — Т. 17. — №3(59).— С. 53–63.
7. Галаев С. В. Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой // Сиб. матем. жур. — 2016. — Т. 57. — №3. — С. 632–640.
8. Галаев С. В. Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15. — Вып. 3. — С. 258–264.
9. Галаев С. В. N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Матем. — 2017. — №3. — С. 1–10.
10. Галаев С. В. Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдоэрмитовой структурой // Вестник Башкирского университета. — 2016. — Т. 21. — №3. — С. 551–555.
11. Галаев С. В. Почти контактные метрические многообразия с распределением нулевой кривизны // Научные ведомости Белгородского Государственного университета. Серия: Математика. Физика. — 2017. — №6(255). — Вып. 46. — С. 36–43.

УДК 514.763

О ПРОДОЛЖЕННЫХ СТРУКТУРАХ КЕНМОЦУ НА СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С НУЛЕВЫМ ТЕНЗОРОМ КРИВИЗНЫ СХОУТЕНА

С. В. Галаев, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
e-mail: *sgalaev@mail.ru*

С помощью внутренней связности, заданной на субримановом многообразии M контактного типа с нулевым тензором кривизны Схоутена, на распределении D многообразия M как на тотальном пространстве векторного расслоения (D, π, M) определяется почти контактная метрическая структура, названная в работе продолженной структурой. Находятся условия, при которых продолженная структура является структурой Кенмоцу.

Ключевые слова: многообразие Кенмоцу, субриманово многообразие контактного типа, распределение нулевой кривизны.

Введение

Субримановы многообразия контактного типа, почти контактные метрические многообразия и многие другие классы многообразий с дополнительными структурами объединяет наличие у таких многообразий гладкого распределения коразмерности 1. На таком распределении разными способами [2-7, 10, 11] могут быть определены структуры, называемые продолженными структурами, соответствующие исходным структурам, изучение которых представляет определенный интерес как с точки зрения исследования структур, заданных на расслоенных пространствах, так и с точки зрения конкретных приложений в теоретической физике [7]. Процедура продолжения структур основана на использовании внутренней и продолженной связностей [1, 7-9, 12], а свойства продолженных структур — от свойств инвариантов указанных связностей. Основным инвариантом внутренней связности является тензор Схоутена, обращение в нуль которого существенно облегчает исследование продолженных структур [11]. В настоящей статье в качестве исходного многообразия рассматривается субриманово многообразие контактного типа с нулевым тензором кривизны Схоутена. На распределении такого многообразия определяется почти контактная метрическая структура, и находятся условия, при которых полученная структура является структурой Кенмоцу [13].

1. Продолженные структуры Кенмоцу

Под субримановым многообразием контактного типа понимается гладкое многообразие M размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где: η — 1-форма, порождающая распределение $D : D = \ker \eta$, $\vec{\xi}$ — векторное поле, порождающее оснащение $D^{\perp}$ распределения D : $D^{\perp} = span(\vec{\xi})$, g — риманова метрика на многообразии M, относительно которой распределения D и $D^{\perp}$ взаимно ортогональны. Мы также полагаем, что $\eta(\vec{\xi}) = 1$ и $g(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 1$.

Внутренней линейной связностью ∇ [1, 7-9, 12] на субримановом многообразии называется отображение

$$\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$1)\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$;

$2)\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$,

$3)\nabla_{\vec{x}}(\vec{y}+\vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Внутренняя связность определяет дифференцирование допустимых тензорных полей [7]. Вот так, например, определяется производная эндоморфизма φ распределения D : $(\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = \nabla_{\vec{x}}(\varphi\vec{y}) - \varphi(\nabla_{\vec{x}}\vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$.

На протяжении всей работы мы используем адаптированные координаты. Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n; a, b, c = 1, ..., n-1; i, j, k = 2n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [7]. Пусть $P : TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = span(\vec{e}_a)$.

Кручением и кривизной внутренней связности назовем, соответственно, допустимые тензорные поля:

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],\ R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \\ = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = I - P$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$. Тензор $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$ носит название тензора кривизны субриманова многообразия. Имеет место

П р е д л о ж е н и е 1. На субримановом многообразии существует единственная связность ∇ с нулевым кручением, такая, что

$$\nabla_{\vec{x}} g(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Коэффициенты внутренней метрической связности находятся по формулам

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Наиболее просто устроены субримановы многообразия с нулевым тензором кривизны Схоутена. Многообразия с нулевым тензором кривизны Схоутена подробно изучались в случае контактного метрического многообразия в рабо-

те [11].

Пусть, теперь D — распределение субриманова многообразия контактного типа. Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - \Gamma^b_{ac}x^{n+c}\partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}) = (A_i)$, определяют [7] на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc}x^{n+c}dx^b)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + x^{n+d}R^c_{bad}\partial_{n+c},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+d}\partial_n\Gamma^c_{ad}\partial_{n+c},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab}\partial_{n+c},$$

где R^c_{bad} — компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах [6, 7]:

$$R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{a||e||}\Gamma^e_{b]c}.$$

Имеет место

П р е д л о ж е н и е 2. [7]. Пусть ∇ — внутренняя связность с тензором кривизны Схоутена $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$. Тогда для всех $\vec{x},\vec{y}\in\Gamma(D)$ и $\vec{p}\in D$ имеют место следующие равенства:

$$[\vec{x}^h,\vec{y}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x},\vec{y}]^h - \{R(\vec{x},\vec{y})\vec{p}\}^v, \tag{1}$$

$$[\vec{x}^h,\vec{\xi}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x},\vec{\xi}]^h + \{P(\vec{x},\vec{p})\}^v, \tag{2}$$

$$[\vec{x}^h,\vec{y}^v] = (\nabla_{\vec{x}}\vec{y})^v, \tag{3}$$

$$[\vec{x}^v,\vec{\xi}^h] = [\vec{x},\vec{\xi}]^v. \tag{4}$$

Определим на многообразии D почти контактную структуру $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta\circ\pi_*, D)$, полагая $J\vec{x}^h = \vec{x}^v$, $J\vec{x}^v = -\vec{x}^h$. Здесь $\pi : D\to M$ — естественная проекция, $\vec{u} = \partial_n$. Определим, далее, на многообразии M метрику $\tilde{g}$, подчиняющуюся равенствам:

$$\tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v,\vec{y}^v) = g(\vec{x},\vec{y}),\ \tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{u}) = \tilde{g}(\vec{x}^v,\vec{u}) = 0.$$

Имеют место следующие предложения.

П р е д л о ж е н и е 3. Структура $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta\circ\pi_*, \tilde{g}, D)$ является почти контактной метрической структурой [11].

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с определением тензоров J, $\tilde{g}$ получаем:

1) $\tilde{g}(J\vec{x}^h, J\vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v,\vec{y}^v) = g(\vec{x},\vec{y}) = \tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{y}^h)$;

2) $\tilde{g}(J\vec{x}^v, J\vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{y}^h) = g(\vec{x},\vec{y}) = \tilde{g}(\vec{x}^v,\vec{y}^v)$.

Назовем почти контактную метрическую структуру $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta\circ\pi_*, \tilde{g}, D)$

продолженной структурой.

П р е д л о ж е н и е 4. Пусть $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивита на почти контактном метрическом многообразии D, тогда ее коэффициенты $\tilde{\Gamma}^m_{ij}$ в адаптированных координатах получают следующее представление:

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}, 2\tilde{\Gamma}^{n+c}_{ab} = R^c_{bad}x^{n+d}, 2\tilde{\Gamma}^n_{ab} = 2\omega_{ba} - \partial_n g_{ab}, 2\tilde{\Gamma}^c_{a,n+b} = 2\tilde{\Gamma}^c_{n+b,a} = \\ = -g^{cd}R^e_{adf}x^{n+f}g_{eb},$$

$$\tilde{\Gamma}^{n+c}_{a,n+b} = \Gamma^c_{ab}, 2\tilde{\Gamma}^n_{a,n+b} = 2\tilde{\Gamma}^n_{n+b,a} = \partial_n\Gamma^e_{ac}x^{n+c}g_{eb}, 2\tilde{\Gamma}^n_{n+a,n+b} = \partial_n g_{ab},$$

$$2\tilde{\Gamma}^c_{an} = 2\tilde{\Gamma}^c_{na} = g^{cd}(2\omega_{ad} + \partial_n g_{ad}), 2\tilde{\Gamma}^{n+c}_{an} = \partial_n\Gamma^c_{ad}x^{n+d} = -2\tilde{\Gamma}^{n+c}_{na},$$

$$2\tilde{\Gamma}^c_{n+a,n} = 2\tilde{\Gamma}^c_{n,n+a} = g^{cd}\partial_n\Gamma^e_{db}x^{n+b}g_{ae}, 2\tilde{\Gamma}^{n+c}_{n+a,n} = 2\tilde{\Gamma}^{n+c}_{n,n+a} = g^{cd}\partial_n g_{ad}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство предложения 4 основано на использовании равенств (1)-(4), а также выражения для коэффициентов связности: $2\Gamma^m_{ij} = g^{km}(A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega^l_{kj}g_{li} + \Omega^l_{ki}g_{lj}) + \Omega^m_{ij}$, где $\Omega^n_{ab} = 2\omega_{ba}$, $\Omega^{n+c}_{ab} = R^{n+c}_{ab}$, $\Omega^{n+c}_{a,n+b} = \Gamma^c_{ab}$, $\Omega^{n+c}_{an} = \partial_n\Gamma^c_{ab}x^{n+b}$.

В случае обращения в нуль тензора Схоутена субриманова многообразия M, приведенные выше выражения для коэффициентов связности $\tilde{\Gamma}^m_{ij}$ приобретут более простой вид:

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}, 2\tilde{\Gamma}^n_{ab} = 2\omega_{ba} - \partial_n g_{ab}, \tilde{\Gamma}^{n+c}_{a,n+b} = \Gamma^c_{ab}, 2\tilde{\Gamma}^n_{a,n+b} = 2\tilde{\Gamma}^n_{n+b,a} = \partial_n\Gamma^e_{ac}x^{n+c}g_{eb},$$

$$2\tilde{\Gamma}^n_{n+a,n+b} = \partial_n g_{ab}, 2\tilde{\Gamma}^c_{an} = 2\tilde{\Gamma}^c_{na} = g^{cd}(2\omega_{ad} + \partial_n g_{ad}), 2\tilde{\Gamma}^{n+c}_{an} = \partial_n\Gamma^c_{ad}x^{n+d} = \\ = -2\tilde{\Gamma}^{n+c}_{na},$$

$$2\tilde{\Gamma}^c_{n+a,n} = 2\tilde{\Gamma}^c_{n,n+a} = g^{cd}\partial_n\Gamma^e_{db}x^{n+b}g_{ae}, 2\tilde{\Gamma}^{n+c}_{n+a,n} = 2\tilde{\Gamma}^{n+c}_{n,n+a} = g^{cd}\partial_n g_{ad}.$$

Если для многообразия D с продолженной почти контактной метрической структурой выполняются условия

$$(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}J)\vec{y} = \tilde{g}(J\vec{x}, \vec{y})\vec{u} - \lambda(\vec{y})J\vec{x}, \tag{5}$$

то такое многообразие получает название многообразия Кенмоцу [13].

Т е о р е м а. Пусть M — субриманово многообразие с нулевым тензором кривизны Схоутена. Тогда многообразие D с продолженной почти контактной метрической структурой $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда распределение интегрируемо и выполняется равенство $L_{\vec{\xi}}g = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы сводится к вычислению производной $(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}J)\vec{y}$ для разных векторных полей адаптированного базиса. Так, в частности, получаем, что равенство $(\tilde{\nabla}_{\partial_{n+a}}J)\vec{\varepsilon}_b = 0$ влечет равенство $\partial_n g_{ab} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букушева А. В. Об инфинитезимальных изометриях продолженных почти контактных метрических структур // Современные научные исследования и инновации. — 2015. — №5-1(49). — С. 23–24.
2. Букушева А. В., Галаев С. В., Иванченко И. П. О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой // Механика. Математика. — 2011. — №13. — С. 10–14.
3. Букушева А. В., Галаев С. В. О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика. — 2005. — №7. — С. 12–14.
4. Букушева А. В. О некоторых классах почти параконтактных метрических многообразий // Механика. Математика. — 2013. — №15. — С. 8–11.
5. Букушева А. В. Применение Wolfram Language для выделения специальных классов почти контактных метрических структур // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. — Саратов: Издат. центр. «Наука». — 2016. — С. 105–107.
6. Галаев С. В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16. — Вып. 3. — С. 263–272.
7. Галаев С. В. Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой // Сиб. матем. жур. — 2016. — Т. 57. — №3. — С. 632–640.
8. Галаев С. В. Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15. — Вып. 3. — С. 258–264.
9. Галаев С. В. N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Матем. — 2017. — №3. — С. 1–10.
10. Галаев С. В. Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдоэрмитовой структурой // Вестник Башкирского университета. — 2016. — Т. 21. — №3. — С. 551–555.
11. Галаев С. В. Почти контактные метрические многообразия с распределением нулевой кривизны // Научные ведомости Белгородского Государственного университета. Серия: Математика. Физика. — 2017. — №6(255). — Вып. 46. — С. 36–43.
12. Галаев С. В. Связности, совместимые с допустимой почти симплектической структурой // Современные научные исследования и инновации. — 2015. — №7-1(51). — С. 17–19.
13. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. — 1972. — V. 24. — pp. 93–103.

УДК 514.17, 517.51

О СОВЕРШЕННЫХ СИМПЛЕКСАХ В $\mathbb{R}^5$

М. В. Невский, д.ф.-м.н., доц.
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
e-mail: *mnevsk55@yandex.ru*
А. Ю. Ухалов, к.ф.-м.н.
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
e-mail: *alex-uhalov@yandex.ru*

Пусть $Q_n = [0,1]^n$. Для n-мерного невырожденного симплекса S введём в рассмотрение величину $\xi(S) = \min\{\sigma > 0 : Q_n \subset \sigma S\}$. Здесь σS есть гомотетический образ S с центром гомотетии в центре тяжести S и коэффициентом гомотетии σ. Пусть $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. Симплекс $S \subset Q_n$ назван авторами совершенным, если куб Q_n вписан в симплекс $\xi_n S$. Известно, что такие симплексы существуют для $n = 1$ и $n = 3$. Точные значения ξ_n ранее были найдены для $n = 2$ и случая, когда $n+1$ — число Адамара; в последней ситуации $\xi_n = n$. В статье приводятся новые точные значения $\xi_5 = 5$ и $\xi_9 = 9$. Главный результат состоит в том, что в $\mathbb{R}^5$ существуют совершенные симплексы.

Ключевые слова: симплекс, куб, гомотетия, осевой диаметр, численные методы

Приведём основные обозначения. Всюду далее $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Положим $Q_n := [0,1]^n$. Если D — выпуклый многогранник, то $\mathrm{ver}(D)$ обозначает совокупность вершин D.

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Под σS будем понимать результат гомотетии S относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Через $d_i(S)$ обозначим максимальную длину отрезка, содержащегося в S и параллельного оси x_i. Величину $d_i(S)$ будем называть i-м осевым диаметром S. Введём в рассмотрение величину $\xi(S) := \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$. Равенство $\xi(S) = 1$ эквивалентно включению $Q_n \subset S$. Положим

$$\xi_n := \min\{\xi(S) : \ S - n\text{-мерный симплекс}, S \subset Q_n, \ \mathrm{vol}(S) \neq 0\}.$$

Через $\alpha(S)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$, для которого Q_n принадлежит трансляту симплекса σS.

Обозначим вершины симплекса S через $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $1 \leq j \leq n+1$, и рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $\Delta := \det(\mathbf{A})$, тогда $\mathrm{vol}(S) = \frac{|\Delta|}{n!}$. Пусть $\Delta_j(x)$ — определитель, который получается из Δ заменой j-й строки на строку $(x_1, \ldots, x_n, 1)$. Линейные многочлены $\lambda_j(x) := \frac{\Delta_j(x)}{\Delta}$ обладают свойством $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$, где δ_j^k — символ Кронекера. Коэффициенты λ_j составляют j-й столбец $\mathbf{A}^{-1}$. Положим $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$, т. е. будем считать $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$.

Любой многочлен степени ≤ 1 удовлетворяет равенству

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} p\left(x^{(j)}\right) \lambda_j(x).$$

Поэтому мы называем λ_j базисными многочленами Лагранжа, соответствующими S. Числа $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно S. Симплекс S задаётся каждой из систем неравенств $\lambda_j(x) \geq 0$ и $0 \leq \lambda_j(x) \leq 1$.

Различные формулы для введенных выше величин, а также их оценки ранее были получены первым автором. В этом пункте мы остановимся на некоторых из этих соотношений. Доказательства и ссылки на литературу приводятся в монографии [1]. Также в этой книге подробно освещается связь указанных числовых характеристик симплекса с проблематикой теории полиномиальной интерполяции функций многих переменных.

Для i-го осевого диаметра S выполняется равенство

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \,. \tag{1}$$

В S существует ровно один отрезок длины $d_i(S)$, параллельный оси x_i. Этот отрезок характеризуется тем, что каждая $(n-1)$-мерная грань S содержит по крайней мере один из его концов. Из (1) и свойств l_{ij} вытекает, что величина $d_i(S)^{-1}$ равна сумме положительных элементов i-й строки $\mathbf{A}^{-1}$ и одновременно равна сумме модулей отрицательных элементов этой строки.

Если $Q_n \not\subset S$, то

$$\xi(S) = (n+1) \max_{1 \leq k \leq n+1} \max_{x \in \mathrm{ver} Q_n} (-\lambda_k(x)) + 1.$$

Соотношение $\max\limits_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \ldots = \max\limits_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x))$ эквивалентно тому, что симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг куба Q_n.

Для любого невырожденного симплекса S справедливо равенство

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}. \tag{2}$$

Это красивое равенство имеет целый ряд важных следствий. Приведём здесь формулу для вычисления $\alpha(S)$ через коэффициенты многочленов λ_j :

$$\alpha(S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|.$$

Величина $\alpha(S)$ равна сумме положительных элементов верхних n строк матри-

цы $\mathbf{A}^{-1}$ и одновременно равна сумме модулей отрицательных элементов этих строк.

Всегда $\xi(S) \geq \alpha(S)$, причём равенство выполняется лишь в ситуации, когда симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг Q_n. Если $S \subset Q_n$, то $d_i(S) \leq 1$. Применяя (2), имеем в этом случае

$$\xi(S) \geq \alpha(S) \geq n. \tag{3}$$

Поэтому $\xi_n \geq n$. Если при данном n существует симплекс S, для которого $\xi(S) = n$, то для этого симплекса в силу (3) справедливо $\alpha(S) = \xi(S) = n$, а в силу (2) верно $d_i(S) = 1$. Для такого n будет выполняться $\xi_n = n$. Однако симплексы $S \subset Q_n$ с условием $\xi(S) = n$ существуют не при всех n.

К 2009 г. первым автором было установлено, что $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1$, $\xi_3 = 3$, $4 \leq \xi_4 \leq \frac{13}{3}$, $5 \leq \xi_5 \leq 5.5$, $6 \leq \xi_6 \leq 6.6$, $\xi_7 = 7$. Некоторые из этих оценок в дальнейшем удалось уточнить. При $n > 2$ выполняется $\xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1}$, поэтому $n \leq \xi_n < n + 1$. Эти и другие оценки систематизированы в [1].

Если $n + 1$ — число Адамара, т. е. существует матрица Адамара порядка $n + 1$, то $\xi_n = n$ (различные доказательства этого факта даются в [1] и [2]). Для этих и только этих n существует правильный симплекс, вписанный в Q_n таким образом, что его вершины находятся в вершинах куба. Этот симплекс имеет свойства $\xi(S) = \alpha(S) = n$, $d_i(S) = 1$.

Сначала первый автор предполагал, что равенство $\xi_n = n$ выполняется лишь в случае, когда $n+1$ — число Адамара. Однако в дальнейшем выяснилось, что это не так. Минимальное n, для которого $n+1$ не является числом Адамара и, тем не менее, $\xi_n = n$, равно 5; следующим таким числом является $n = 9$. Ниже мы укажем симплексы S с условием $S \subset Q_n \subset nS$ для нечётных $1 \leq n \leq 9$. Так как $\xi_2 = 2.34... > 2$, то при $n = 2$ симплексов с таким свойством не существует. Для чётных $n \geq 4$ вопрос о существовании симплексов $S \subset Q_n$, для которых $Q_n \subset nS$, не решён.

Невырожденный n-мерный симплекс S назовём совершенным, если $S \subset Q_n \subset \xi_n S$ и куб Q_n вписан в симплекс $\xi_n S$, т. е. граница $\xi_n S$ содержит все вершины куба.

Авторам известны лишь три значения n, при которых в $\mathbb{R}^n$ существуют совершенные симплексы, а именно $n = 1, 3, 5$; во всех этих случаях $\xi_n = n$. Случай $n = 1$ тривиален. Пусть $n = 3$, тогда $n + 1 = 4$ есть число Адамара. В Q_3 можно вписать правильный симплекс S, для которого $\xi(S) = \xi_3 = 3$, однако этот симплекс не является совершенным: хотя $Q_3 \subset 3S$, не все вершины куба принадлежат границе $3S$. Единственный с точностью до подобия трёхмерный совершенный симплекс имеет вершины $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$. См. подробнее [2]. Главный результат настоящей работы — существование совершенного симплекса в $\mathbb{R}^5$ и даже целого семейства таких симплексов. Предварительно приведём два вспомогательных результата, представляющих и

собственный интерес.

Назовём j-й гранью симплекса S его $(n-1)$-мерную грань, не содержащую вершину $x^{(j)}$, т. е. $(n-1)$-мерную грань, принадлежащую гиперплоскости с уранением $\lambda_j(x) = 0$. Под j-й гранью симплекса σS будем понимать $(n-1)$-мерную грань σS, параллельную j-й грани симплекса S.

Т е о р е м а 1. Пусть $S \subset Q_n$. Вершина v куба Q_n принадлежит j-й грани симплекса $\xi(S)S$ тогда и только тогда, когда

$$-\lambda_j(v) = \max_{1 \le k \le n+1, x \in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_k(x)).$$

Т е о р е м а 2. Если $S \subset Q_n \subset nS$, то центр тяжести симплекса S совпадает с центром куба Q_n.

Заметим, что из теоремы 2 легко получается неравенство $\xi_2 > 2$. Точное значение $\xi_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1$ вычисляется значительно более трудным путём, описанным в [1].

Приведём теперь утверждения, доказательства которых базируются на рассмотрении симплексов, обнаруженных вторым автором. Несмотря на то, что нами применялись, в том числе, и численные методы, все эти результаты являются точными и строго обоснованными.

Сначала обратимся к случаю $n = 5$. Рассмотрим семейство симплексов $R = R(s,t)$ с вершинами $\left(s, 1, \frac{1}{3}, 1, 1\right)$, $\left(s, 0, \frac{1}{3}, 1, 1\right)$, $\left(s, 2-3t, \frac{1}{3}, 0, 1\right)$, $\left(2-3s, t, 0, \frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(0, t, 1, \frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(1, t, 1, \frac{1}{3}, 0\right)$; $s, t \in \mathbb{R}$. Для симплекса R

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(s,t) = \begin{pmatrix} s & 1 & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ s & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ s & 2-3t & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 2-3s & t & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При любых s и t объем R равен $\frac{|\det(\mathbf{A})|}{5!} = \frac{1}{120}$. Если $s, t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, то $R \subset Q_5$.

Т е о р е м а 3. Пусть $s, t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, тогда куб Q_5 вписан в симплекс $5R$.

Из теоремы 3 сразу следует, что точное значение ξ_5 равно 5, а каждый симплекс $R(s,t)$ для $s, t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ является совершенным. Первое доказательство равенства $\xi_5 = 5$ было дано авторами в [2], где был отмечен лишь один (с точностью до подобия) совершенный симплекс. Указанное здесь семейство пятимерных совершенных симплексов описано в [3].

Теперь перейдём к случаю $n = 7$. Так как 8 есть число Адамара, то $\xi_7 = 7$. Существует правильный симплекс $S \subset Q_7$, такой что $\xi(S) = \xi_7 = 7$. Однако оказывается, что это свойство выполняется также и для некоторых симплексов, не являющихся правильными. В этом смысле случай $n = 7$ аналогичен случаю

$n = 3$.

Пусть $T = T(t)$ — симплекс с вершинами $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 1, t, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 1 - t, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 0, t, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 1 - t, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, t, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 1 - t, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$. Всегда $\mathrm{vol}(T(t)) = \frac{1}{630}$. Если $0 \leq t \leq 1$, то $T(t) \subset Q_7$.

Т е о р е м а 4. Для $t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ симплекс $7T(t)$ описан вокруг куба Q_7.

В заключение отметим девятимерный аналог этой теоремы. Пусть $S = S(t)$ — симплекс с вершинами $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 1, t, 1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 1, 1 - t, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 1, t, 0, 0, 1, 1)$, $(0, 1, 1, 0, 1 - t, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, t, 0, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 0, 1 - t, 1, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 0, t, 1, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1, 1 - t, 1, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$. Если $0 \leq t \leq 1$, то $S(t) \subset Q_9$. При всех t имеем $\mathrm{vol}(S(t)) = \frac{5}{1008}$.

Т е о р е м а 5. Для $t \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ симплекс $9S(t)$ описан вокруг куба Q_9.

Из теоремы 5 и сказанного выше следует, что точное значение ξ_9 равно 9. Дополнительный анализ показывает, что ни одно из семейств симплексов $T(t)$ и $S(t)$ не содержит совершенных (см. [3]).

Итак, наши результаты означают, что для каждого нечётного n из интервала $1 \leq n \leq 9$ верно равенство $\xi_n = n$. Это равенство также верно для бесконечного числа нечётных n, таких что $n + 1$ есть число Адамара. Вполне возможно, что $\xi_n = n$ для всех нечётных n. К моменту написания настоящего текста авторам не удалось доказать или опровергнуть данное предположение.

Как было отмечено, совершенные симплексы в $\mathbb{R}^n$ существуют по крайней мере при $n = 1, 3, 5$. Неясно, существуют ли совершенные симплексы при нечётных $n > 5$. Авторам также неизвестно, существуют ли такие симплексы в $\mathbb{R}^n$ хотя бы при одном чётном n. Отметим лишь, что при $n = 2$ совершенных симплексов не существует. Это следует из полного описания симплексов $S \subset Q_2$ с условием $\xi(S) = \xi_2$, приведённого в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Невский М. В. Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции. — Ярославль: ЯрГУ. — 2012. — 218 с.
2. Невский М. В., Ухалов А. Ю. Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24. — № 1. — С. 94–110.
3. Nevskii M., Ukhalov A. Perfect simplices in $\mathbb{R}^5$ // arXiv:1709.06068v3 [math.MG] 28 Sep 2017. — 25 pp. (http://arxiv.org/abs/1709.06068)

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА В ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.В. Черкасова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: cher_vl@mail.ru

В данной статье изложены способы нахождения средней кривизны двумерной поверхности качения с применением теории криволинейного мультипликативного интеграла.

Ключевые слова: криволинейный мультипликативный интеграл, средняя кривизна, инварианты двумерных поверхностей, первая квадратичная форма, коммутатор матриц.

Теория поверхностей представляет собой особой раздел дифференциальной геометрии, одной из задач которого является изучение различных характеристик поверхностей. В классической теории простая поверхность может быть получена из части плоскости путем растяжений, сжатий или изгибаний, в результате действия которых каждая точка плоскости переходит в определенную точку поверхности. Условие регулярности поверхности, является одним из необходимых в классической теории поверхностей, поскольку позволяет исключить поверхности более общего вида с самопересечениями, самоналеганиями и особыми точками, и даёт возможность ввести такие характеристики, как первая и вторая квадратичная формы, средняя и гауссова кривизны. Изучение внутренней геометрии регулярных поверхностей позволяет не только развивать теоретический аппарат данной теории, но и имеет ряд приложений, в частности в механике неголономных систем.

Одной из задач механики неголономных систем является задача о качении шара единичного радиуса по поверхности [1]. Ранее в статье [2] приведена постановка задачи, в которой вместе с качением шара анализируется изменение координат векторов жестко связанного с ним базиса. Исследование проводилось с применением криволинейного мультипликативного интеграла и позволило установить, что матрица перехода от начального положения репера к конечному представляет собой криволинейный мультипликативный интеграл вида:

$$Y = \overset{\frown}{\int\limits_{\gamma}} E + P_1(u,v)du + P_2(u,v)dv, \qquad (1)$$

где $P_1(u,v)$ и $P_2(u,v)$ – матрицы размерности 4×4, элементами которых являются функции $f(u,v) \in C^2(D)$, D – ограниченная плоская область с координатами (u, v), E – единичная матрица размерности 4×4, γ – замкнутая спрямляемая кривая на поверхности.

Основной характеристикой криволинейных мультипликативных интегралов такого вида (1) является кривизна, которая вычисляется по формуле:

$$K = \frac{\partial P_2}{\partial u} + \frac{\partial P_1}{\partial v} - [P_1, P_2], \qquad (2)$$

причем $[P_1, P_2] = P_1P_2 - P_2P_1$ – коммутатор матриц P_1 и P_2 [1].

Теорема: Кривизна криволинейного мультипликативного интеграла качения (1) имеет вид:

$$K = (2H - 1)\Phi([r_u \times r_v]) \tag{3}$$

где $H = \frac{1}{2}\frac{GL - 2MF + EN}{EG - F^2}$ – средняя кривизна поверхности заданной параметрическими уравнениями $\vec{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, $(\vec{r}''\vec{n})dt^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ – первая и вторая квадратичные формы поверхности, а матрицы P_1 и P_2 имеют вид:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\Phi(\vec{r}_u \times [\vec{r}_u \times \vec{r}_v]) + \Lambda_u,$$

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\Phi(\vec{r}_v \times [\vec{r}_u \times \vec{r}_v]) + \Lambda_v,$$

$$\Phi : x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y & 0 \\ -z & 0 & x & 0 \\ y & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) & 0 \end{pmatrix}$$

Полное доказательство данной теоремы приведено в статье [3].

Предположим, что поверхность качения представляет круговой цилиндр, заданный параметрическими уравнениями:

$$\vec{r} = (u\cos(v), u\sin(v), v),$$

где $-\pi \le u < \pi, -1 \le v \le 1$, и криволинейный мультипликативный интеграл (1) примет вид:

$$Y = \overset{\frown}{\int_\gamma} E + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & -\frac{u\cos v}{\sqrt{1+u^2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & 0 & -\frac{u\sin v}{\sqrt{1+u^2}} & 0 \\ \frac{u\cos v}{\sqrt{1+u^2}} & \frac{u\sin v}{\sqrt{1+u^2}} & 0 & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 & 0 \end{pmatrix} du +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin v\sqrt{1+u^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\cos v\sqrt{1+u^2} & 0 \\ -\sin v\sqrt{1+u^2} & \cos v\sqrt{1+u^2} & 0 & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 & 0 \end{pmatrix} dv.$$

На основании формулы (2), кривизна данного интеграла равна:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & u & \cos v & 0 \\ -u & 0 & \sin v & 0 \\ -\cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с положениями теории поверхностей первая и вторая квадратичные формы поверхности имеют вид: $ds^2 = du^2 + (1+u^2)dv^2$ и $(\vec{r}''\,\vec{n})dt^2 = -\frac{2}{\sqrt{1+u^2}}dudv$, причем средняя кривизна $H = 0$, тогда на основании формулы (3), получим матрицу

$$\widetilde{K} = -\Phi([r_u \times r_v]) = K.$$

Пусть поверхность качения представляет собой верхнюю часть сферы радиуса r, заданную уравнением $z = f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, тогда на основании формулы (3), кривизна мультипликативного интеграла равна:

$$K = \left(-\frac{2}{r}+1\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & 0 \\ -\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где интеграл качения

$$Y = \int_{\gamma}^{\frown} E + \begin{pmatrix} 0 & \frac{y}{r} & -\frac{-r^2+y^2}{r\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & 0 \\ -\frac{y}{r} & 0 & \frac{xy}{r\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & 0 \\ \frac{-r^2+y^2}{r\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & -\frac{xy}{r\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & 0 \end{pmatrix} dx +$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & -\frac{x}{r} & \frac{xy}{r\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & 0 \\ \frac{x}{r} & 0 & \frac{-r^2+x^2}{r\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & 0 \\ -\frac{xy}{r\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & -\frac{-r^2+x^2}{r\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} & 0 \end{pmatrix} dy.$$

Таким образом, вычисление кривизны криволинейного мультипликативного интеграла возможно по определению, либо с использованием формулы (3). Причем необходимо отметить, что для минимальных поверхностей она имеет более простой вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мантуров О.В. Мультипликативный интеграл // Итоги науки и техники Серия «Проблемы геометрии». – 1990. – Выпуск – №22. С. 167-215.
2. Черкасова В.В. О связностях, индуцированных качением шара по поверхности // Известия ВУЗов. Математика. – 2009. – Выпуск. – №11. С. 79-84.
3. Черкасова В.В. О вычислении кривизны криволинейного мультипликативного интеграла с помощью инвариантов поверхностей // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы II международной научно-практической конференции, 24-27 ноября 2016 г. – 2016. – С. 79-83.

Теория вероятностей и математическая статистика

УДК 519.2

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ИНДЕКСОВ В СХЕМЕ СЕРИЙ

А. А. Голдаева, к.ф.-м.н.
МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: *gold_ann@list.ru*
А. В. Лебедев, д.ф.-м.н.
МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: *avlebed@yandex.ru*

Классический экстремальный индекс θ является важной характеристикой асимптотического поведения максимумов в стационарных случайных последовательностях. Однако на практике существует также необходимость в изучении максимумов на более сложных структурах, чем множество натуральных чисел. А.В.Лебедевым (2015) даны обобщения экстремального индекса на схему серий со случайными длинами, которое позволяет работать с более широким классом стохастических структур. Для случаев, когда точного экстремального индекса не существует, введены частичные индексы (верхний и нижний, левый и правый). Оказывается, что в отличие от классического экстремального индекса, они могут принимать значения, большие единицы (что соответствует отрицательной зависимости случайных величин). В докладе рассмотрена новая модель, в которой левый и правый индексы принимают значения, большие единицы, в том числе могут быть равны между собой, но точного индекса не существует.

Ключевые слова: экстремальный индекс, схема серий, тяжелые хвосты, максимумы, копула.

Экстремальный индекс стационарной в узком смысле случайной последовательности $\{\xi_n\}$ определяется следующим образом [1, §3.7].

О п р е д е л е н и е. [1] Пусть ξ_n, $n \geq 1$, имеют распределение F и $M_n = \vee_{k=1}^{n} \xi_k$. Если для каждого $\tau > 0$ существует такая числовая последовательность $u_n(\tau)$, что $n\bar{F}(u_n(\tau)) \to \tau$ и $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(\tau)) \to e^{-\theta\tau}$, то θ называется экстремальным индексом.

При этом возможно любое значение $\theta \in [0, 1]$.

Однако на практике существует необходимость в изучении максимумов на более сложных структурах, чем множество натуральных чисел.

В работе [2] представлено новое обобщение экстремального индекса на схему серий со случайными длинами, которое позволяет работать с более широким классом стохастических структур.

Пусть задан набор случайных величин $\xi_{n,m}$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, с распределениями F_n (здесь n — номер серии, m — номер случайной величины в серии), а также последовательность целочисленных случайных величин (длин серий) $\nu_n \xrightarrow{P} +\infty$, $n \to \infty$, и $M_n = \vee_{m=1}^{\nu_n} \xi_{n,m}$.

[1] Далее через $\vee$ обозначается максимум.

О п р е д е л е н и е. [2] Пусть для каждого $s \in (0,1)$ существует такая последовательность $u_n(s)$, что $\mathbf{E}F_n^{\nu_n}(u_n(s)) \to s$, и $\mathbf{P}(M_n \le u_n(s)) \to \psi(s)$, $n \to \infty$. Тогда ψ назовем экстремальной функцией. Если $\psi(s) = s^\theta$, то θ назовем (точным) экстремальным индексом.

Оказывается, что максимумы по сериям могут расти асимптотически быстрее, чем максимумы независимых случайных величин, взятых в тех же количествах, что соответствует случаю $\psi(s) < s$, $s \in (0,1)$. Это весьма удивительное и неклассическое явление в теории экстремумов.

Будем исследовать асимптотическое поведение экстремальной функции при $s \to 0$ и $s \to 1$. Обозначим пределы

$$\theta_0 = \lim_{s \to 0+0} \log_s \psi(s), \quad \theta_1 = \lim_{s \to 1-0} \log_s \psi(s),$$

если они существуют, и назовем их левым и правым (частичными) экстремальными индексами соответственно.

В [2] был представлен пример с $\theta_0 > 1$, что невозможно в классическом случае. Оставался открытым вопрос, возможно ли в схеме серий достигнуть точного экстремального индекса $\theta > 1$. Для этого необходимо (но не достаточно) выполнения условия $\theta_0 = \theta_1 > 1$. Однако во всех примерах, рассмотренных в [2], имело место $\theta_1 \le 1$. Поэтому нашей задачей было построение примеров с $\theta_0, \theta_1 > 1$.

Рассмотрим серии зависимых случайных величин, заданных следующим образом.

Пусть $\eta_{n,m}$, $m \ge 1$, $n \ge 1$, независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, а случайные величины κ_n принимают значения от 1 до n равновероятно и не зависят от $\eta_{n,m}$, $1 \le m \le n$ (здесь n — номер серии, m — номер случайной величины в серии). Положим

$$\xi_{n,m}^0 = \begin{cases} \frac{\eta_{n,m}}{n}, & m \ne \kappa_n, \\ \eta_{n,m}, & m = \kappa_n. \end{cases}$$

Далее используем понятие копулы.

Копулой C называется функция многомерного распределения на $[0,1]^d$, $d \ge 2$, если все частные распределения являются равномерными на $[0,1]$. Согласно знаменитой теореме Скляра любая функция многомерного распределения H в $\mathbb{R}^d$ представима в виде

$$H(x_1, \dots x_d) = C(H_1(x_1), \dots H_d(x_d)),$$

где H_i, $1 \le i \le d$, — функции частных распределений. Таким образом, всякому многомерному распределению можно поставить в соответствие его копулу. Если частные распределения непрерывны, такое представление единственно.

[2] По сравнению с предыдущим определением мы делаем замену $s = e^{-\tau}$ и соответственно переопределяем функции u_n, $n \ge 1$.

В качестве учебника по копулам можно порекомендовать [3].

Обозначим копулу случайных величин $\xi^0_{n,m}$, $1 \le m \le n$, через C_n.

Введем также последовательность случайных длин серий $\nu_n \xrightarrow{P} +\infty$, $n \to \infty$. Будем предполагать, что длины серий ν_n удовлетворяют условию $\nu_n/n \to \zeta > 0$, $n \to \infty$, где ζ имеет распределение G с преобразованием Лапласа-Стилтьеса $\phi(u) = \mathbf{E}e^{-u\zeta}$.

Построим случайные величины $\xi_{n,m}$, $1 \le m \le \nu_n$, $n \ge 1$, равномерно распределенные на $[0,1]$ с копулами C_{ν_n}.

В терминологии [2] построенная модель относится к моделям с копулами. Будем для краткости обозначать ее модель $(*)$.

Т е о р е м а 1. В модели $(*)$ для экстремальной функции $\psi(s)$ верна формула

$$\psi(s) = \mathbf{E}(1 - \zeta\phi^{-1}(s))_+, \quad s \in (0,1].$$

Т е о р е м а 2. Пусть в модели $(*)$ распределение G удовлетворяет условию $1 - G(x) \sim Cx^{-\alpha}$ при $x \to +\infty$, $0 < \alpha < 1$, $C > 0$. Тогда

$$\theta_1 = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

З а м е ч а н и е . Известно, что наименьшее значение гамма-функции равно $\Gamma(1{,}46163...) = 0{,}88560...$ Следовательно, наибольшее значение экстремального индекса θ_1 достигается при $\alpha_{\max} = 0{,}53837...$ и равно $\theta_{1,\max} = 1/\Gamma(1{,}46163...) = 1{,}12918...$

На рис. 1 представлен график функции $\theta_1(\alpha) = 1/\Gamma(2-\alpha)$.

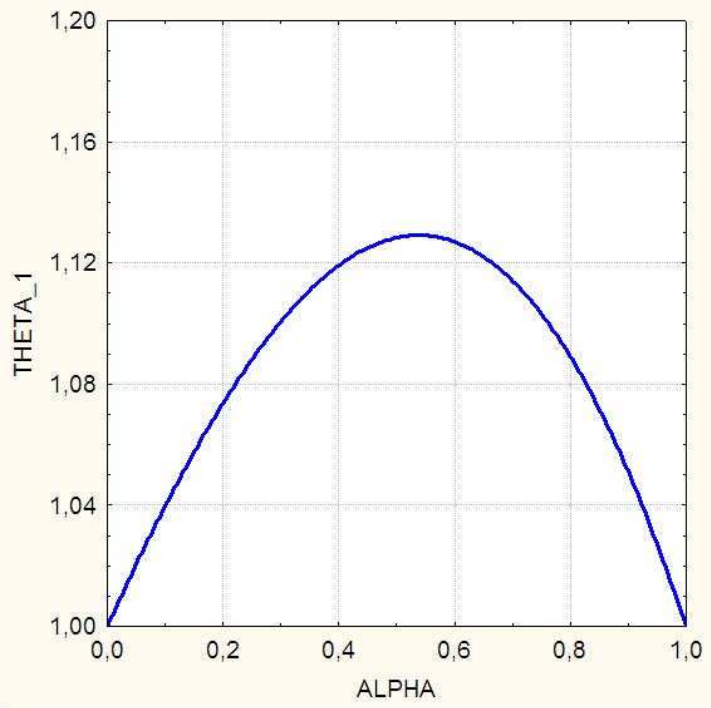


Рисунок 1 – График функции $\theta_1(\alpha)$

Т е о р е м а 3. Пусть в модели $(*)$ верно $\mu = \mathbf{E}\zeta < \infty$, тогда $\theta_1 = 1$.

Т е о р е м а 4. Пусть в модели $(*)$ распределение G удовлетворяет условию $G(x) \sim \exp\{-e^{a\sqrt{-\ln x}}\}$, $x \to 0+0$, $a > 0$. Тогда $\theta_0 = e^{a^2/2}$.

З а м е ч а н и е . Понятно, что для функций распределения G, убывающих в нуле быстрее, чем любые функции семейства $\exp\{-e^{a\sqrt{-\ln x}}\}$, $a > 0$, имеет место $\theta_0 = +\infty$, а для убывающих медленнее – $\theta_0 = 1$.

П р и м е р 1. Пусть ζ имеет устойчивое распределение с параметром $\alpha = 1/2$, $\phi(u) = e^{-\sqrt{u}}$, тогда $G(x) = 2(1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{x}}))$, $x > 0$. По теореме 1 получаем

$$\psi(s) = \Phi\Big(\frac{\ln s}{\sqrt{2}}\Big)(2 + \ln^2 s) + \sqrt{2}(\ln s)\varphi\Big(\frac{\ln s}{\sqrt{2}}\Big).$$

При этом

$$\theta_0 = +\infty, \quad \theta_1 = \frac{1}{\Gamma(3/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 1{,}128...$$

На рис. 2 представлен соответствующий график функции $\psi(s)$. Пунктиром показан график функции $s^{2/\sqrt{\pi}}$.

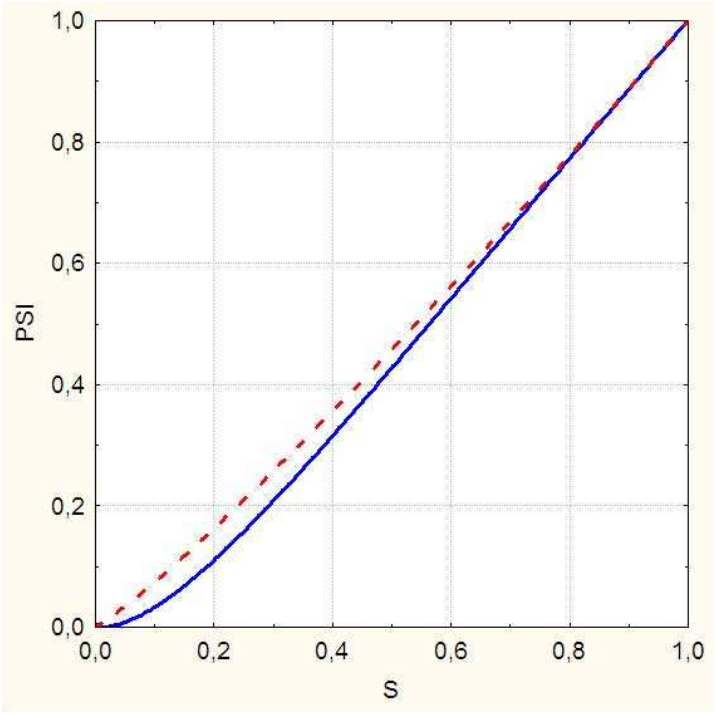


Рисунок 2 – Функция $\psi(s)$ в случае $\phi(u) = e^{-\sqrt{u}}$

Т е о р е м а 5. Если точный экстремальный индекс в модели $(*)$ существует, то он не может удовлетворять неравенству $1 < \theta \le \theta_{1,\max}$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий ситуацию, когда $\theta_0 = \theta_1 > 1$, но точного экстремального индекса θ не существует.

П р и м е р 2. Пусть ζ имеет функцию распределения вида

$$G(x) = \begin{cases} \exp\{-e^{a\sqrt{-\ln x}}\}, & 0 < x < 1, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x \ge 1, \end{cases}$$

где $a > 0$, $0 < \alpha < 1$, тогда

$$\theta_0 = e^{a^2/2}, \quad \theta_1 = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Возьмем $\alpha = 1/2$, тогда $\theta_1 = 2/\sqrt{\pi}$. Чтобы выполнялось $\theta_0 = \theta_1$, положим $a = \sqrt{2\ln\theta_1} = \sqrt{\ln(4/\pi)}$.

На рис. 3 представлены результаты моделирования $\psi(s)$ в этом случае, по точкам, соответствующим различным значениям $\tau = \phi^{-1}(s)$ от 1/50 до 50. Пунктиром показан график функции $s^{2/\sqrt{\pi}}$.

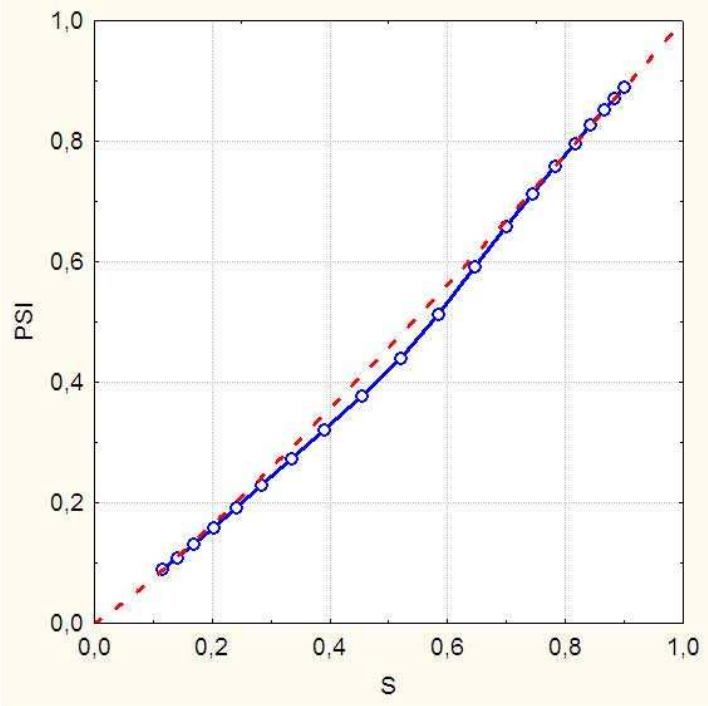


Рисунок 3 – Моделирование $\psi(s)$ к Примеру 2

Таким образом, продемонстрирована возможность любых $1 < \theta_0 \leq \infty$ и $1 < \theta_1 \leq \theta_{1,\max}$, однако вопрос о возможности точного экстремального индекса $\theta > 1$ остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х., Экстремумы случайных последовательностей и процессов. — М.: Мир. — 1989. — 392 с.
2. Лебедев А. В., Экстремальные индексы в схеме серий и их приложения // Информатика и ее применения. — 2015. — Т. 9. — N 3. — С. 39–54.
3. Nelsen R., An introduction to copulas. — Springer, New York, NY. — 2006. — 276 p.

УДК 519.2

ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ СРЕДНИХ МАКСИМУМОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ИЗВЕСТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ АСИММЕТРИИ И ЭКСЦЕССА

Д. В. Иванов
МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: *ashtynbamba@gmail.com*

Цель работы – определение верхних границ для среднего максимума из двух независимых одинаково распределённых случайных величин с известными коэффициентами асимметрии и эксцесса, а также исследование вопроса достижимости этих границ. Проводится оценка сверху для верхней границы с помощью неравенства Гёльдера, и для этой оценки формулируется условие достижимости. Кроме того, приводится оценка снизу для верхней границы. Автор также приводит сравнение двух подходов к оцениванию верхней границы среднего максимума.

Ключевые слова: средний максимум, неравенство Гёльдера, метод множителей Лагранжа, оценка, достижимость

В теории вероятностей и математической статистике используются различные числовые характеристики случайных величин. К ним можно отнести и средние максимумы. А именно, для случайной величины X определим

$$\mu_n(X) = \mathbf{E} \max\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad n \geq 1,$$

где $X_1, \ldots, X_n$ – независимые вероятностные копии X.

В современном мире средние максимумы находят применение в финансах, страховании, информационных технологиях и др. Так, в финансовой математике для оценки риска вложений используется мера $MINVaR$, введенная в [1], относящаяся к когерентным мерам риска $WVaR$. Фактически, $MINVaR_n(X) = \mu_n(-X)$, если $X -$ случайная доходность (логарифмическое приращение цены) актива. В теории страхования страховая премия, начисляемая на риск X по принципу Ванга, сводится к среднему максимуму $\mu_n(X)$ в случае дуально-степенной функции искажения $g(u) = 1 - (1-u)^n$ [2]. В теории массового обслуживания рассматривают модели с разделением поступающих заявок на несколько подзаявок и дальнейшим обслуживанием подзаявок в отдельных очередях. В моделях fork-join предполагается, что подзаявки от разных заявок обслуживаются без ограничений, в моделях split-merge подзаявки следующей заявки обслуживаются только после того, как обслужены все подзаявки предыдущей. В первом случае возникают максимумы времен пребывания (отклика), во втором – времен обслуживания. Подробнее об этом см. [3, 4]. В последнее время такие модели активно используются применительно к облачным технологиям [5].

Изучение границ средних максимумов имеет давнюю историю.

Еще в работах [6, 7] для стандартизованных случайных величин (с нулевым средним и единичной дисперсией) было получено неравенство:

$$0 < \mu_n(X) \leq \frac{n-1}{\sqrt{2n-1}}.$$

В работе [8] были найдены границы при условиях $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{E}|X|^p = 1$, $p > 1$. В обоих случаях верхние границы оказались достижимыми.

Однако верхних границ при известных четырех первых моментах до сих пор не было получено. Далее будем рассматривать случайные величины X с $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$ и известными коэффициентом асимметрии $\gamma_1 = \mathbf{E}X^3/(\mathbf{D}X)^{3/2}$ и коэффициентом эксцесса $\gamma_2 = \mathbf{E}X^4/(\mathbf{D}X)^2 - 3$.

Отметим, что любая случайная величина с конечными средним и дисперсией может быть стандартизована линейным (сдвиго-масштабным) преобразованием, при этом средние максимумы подвергаются тому же самому преобразованию и могут быть легко пересчитаны, а коэффициенты асимметрии и эксцесса не меняются.

Поскольку задача в общем виде является очень сложной, ограничимся пока случаем $n = 2$. Попробуем определить, в каких пределах может изменяться μ_2 при различных (γ_1, γ_2). Обозначим верхнюю границу μ_2 при заданных условиях через $\bar{\mu}_2$.

Т е о р е м а 1.

$$\bar{\mu}_2 \leqslant \inf_{c,d \in R} \left(-cd + \left(3 + \gamma_2 - 4c\gamma_1 + 6c^2 + c^4\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{14} \left((1-d)^{\frac{7}{3}} + (1+d)^{\frac{7}{3}} \right) \right)^{\frac{3}{4}} \right).$$

Доказательство основано на неравенстве Гёльдера применительно к $x(F)$ – функции, обратной к функции распределения случайной величины X.

З а м е ч а н и е .

1. Если минимум достигается в конечной точке (c, d), то $cd \geq 0$.

2. Для поиска минимума можно найти производные по c и d выражения под inf и приравнять их к нулю. Получим систему:

$$\begin{cases} 0 = -d + \dfrac{\left(\frac{3}{14}\left((1-d)^{\frac{7}{3}} + (1+d)^{\frac{7}{3}}\right)\right)^{\frac{3}{4}} (3c + c^3 - \gamma_1)}{(3 + 6c^2 + c^4 - 4c\gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{3}{4}}} \\ 0 = -c + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}} 7^{\frac{1}{4}} \dfrac{\left(-(1-d)^{\frac{4}{3}} + (1+d)^{\frac{4}{3}}\right)(3 + 6c^2 + c^4 - 4c\gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{1}{4}}}{4((1-d)^{\frac{7}{3}} + (1+d)^{\frac{7}{3}})^{\frac{1}{4}}} \end{cases}$$

Эта система не решается относительно (c, d), но решается относительно (γ_1, γ_2). То есть, по точке (c, d) можно определить, при каких (γ_1, γ_2) она является точкой минимума.

Последнее замечание позволяет предложить способ численного приближения оптимальных (c, d) по известным (γ_1, γ_2). Построим достаточно широкую сетку (c, d). Каждому узлу этой сетки будет соответствовать точка на плоскости (γ_1, γ_2). Объединение образов всех узлов сетки (c, d) заметает некоторое множество на плоскости (γ_1, γ_2). Возьмём несколько образов узлов, ближайших к

данной паре коэффициентов асимметрии и эксцесса – и рассмотрим новую, более мелкую, сетку из (c, d), ограниченную прообразами выбранных узлов. Далее, подобным же образом, итеративно получаем приближение для оптимальной пары (c, d).

Т е о р е м а 2. Граница из теоремы 1 достигается на распределении

$$F(x) = \frac{3\sqrt{3}}{10\sqrt{5}(1+3b^2)^4}\left(15\sqrt{15}b^3(1+b^2)^3 + \left(-\sqrt{15}b(1+b^2) + x\sqrt{1-2b^2+5b^4}\right)^3\right),$$

где

$$x \in \left[-\frac{\sqrt{5}(1-2b+3b^2)}{\sqrt{3}\sqrt{1-2b^2+5b^4}}, \frac{\sqrt{5}(1+2b+3b^2)}{\sqrt{3}\sqrt{1-2b^2+5b^4}}\right].$$

При этом

$$c = \frac{\sqrt{15}b(1+b^2)}{\sqrt{1-2b^2+5b^4}}, \quad d = \frac{b(3+b^2)}{1+3b^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{4\sqrt{5}b(3-8b^2+9b^4)}{3\sqrt{3}(1-2b^2+5b^4)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\gamma_2 = -\frac{2(19-396b^2+1066b^4-1020b^6+315b^8)}{21(1-2b^2+5b^4)^2},$$

$$\mu_2 = \frac{\sqrt{15}(1+7b^4)}{7(1+3b^2)\sqrt{1-2b^2+5b^4}}, \quad b \in R.$$

Эту же задачу можно решать методом вариационного исчисления. Рассмотрим следующую задачу Лагранжа:

$$\mu_2 = \int_0^1 2Fx(F)dF \to max,$$

$$\int_0^1 x(F)dF = 0, \quad \int_0^1 x^2(F)dF = 1, \quad \int_0^1 x^3(F)dF = \gamma_1, \quad \int_0^1 x^4(F)dF = \gamma_2 + 3.$$

Найдём экстремали методом Лагранжа:

$$L = 2\lambda_0 Fx + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4,$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}L = 2\lambda_0 F + \lambda_1 + 2\lambda_2 x + 3\lambda_3 x^2 + 4\lambda_4 x^3.$$

Отсюда вытекает, что функция распределения экстремали – кубический полином, а плотность, соответственно, является параболой. Рассмотрим вспомогательную случайную величину X_0 со значениями на $[0, 1]$ с квадратичной плотностью:

$$p_{X_0}(x) = ax^2 + bx + \frac{6-2a-3b}{6}, \quad x \in [0, 1],$$

где

$$\begin{cases} -\dfrac{6+4a}{3} \leqslant b \leqslant \dfrac{6-2a}{3}, \text{ при } -6 \leqslant a \leqslant 3; \\ \dfrac{-3a-\sqrt{3a(12-a)}}{3} \leqslant b \leqslant \dfrac{-3a+\sqrt{3a(12-a)}}{3}, \text{ при } 3 \leqslant a \leqslant 12, \end{cases}$$

в силу того, что плотность должна быть неотрицательной. Далее, коль скоро нас интересуют стандартизованные случайные величины, нужно взять

$$\mu_2(X) = \mu_2\left(\frac{X_0 - EX_0}{\sqrt{DX_0}}\right).$$

Вопрос об оптимальности класса распределений, полученного методом вариационного исчисления, остаётся открытым. Однако он может использоваться для получения следующей оценки:

Т е о р е м а 3.

$$\bar{\mu}_2 \geqslant -\frac{64a^2 + 42a(3b-1) + 63(b^2-20)}{126\sqrt{5(60 - 5a^2 + 4a - 10ab - 5b^2)}},$$

при

$$\gamma_1 = \frac{2\sqrt{5}(a+b)(-36 + a(5a-6) + 10ab + 5b^2)}{(60 - 5a^2 + 4a - 10ab - 5b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\gamma_2 = -6 + \frac{48(7a^2 + 48a - 1260)}{7(60 - 5a^2 + 4a - 10ab - 5b^2)^2} + \frac{432}{60 - 5a^2 + 4a - 10ab - 5b^2}.$$

На рис. 1 серым цветом представлена область возможных значений (γ_1, γ_2) из теоремы 3 (где работает оценка $\bar{\mu}_2$ снизу), а жирная линия – область возмож-

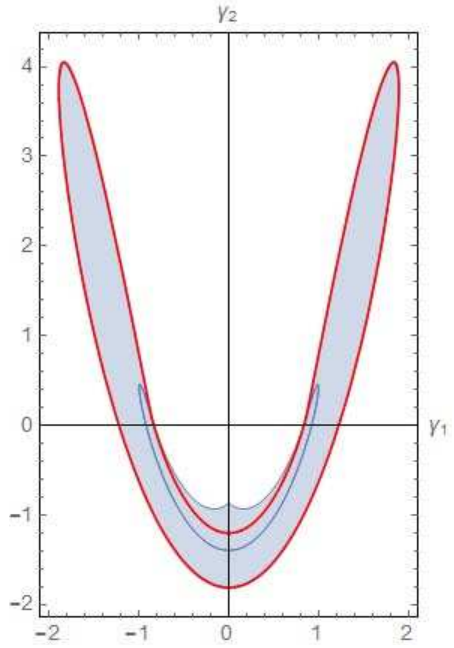


Рисунок 1 – Области действия теорем 2 и 3 в плоскости (γ_1, γ_2)

ных значений (γ_1, γ_2) из теоремы 2 (где $\bar{\mu}_2$ известно точно). Видно, что жирная линия частично совпадает с границей серой области, а частично заходит внутрь нее. Что происходит за пределами построенной области, пока непонятно, и является предметом дальнейших исследований.

Автор выражает свою признательность д.ф.-м.н. А.В. Лебедеву за идеи, замечания и предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cherny A., Weighted V@R and its properties // Finance and Stochastics. — 2006. — V. 10. — P. 367–393.
2. Ирхина Н. А., Принцип Ванга в математической теории страхования. Дисс. к.ф.-м.н. — М.: МГУ. — 2010. — 137 с.
3. Lebrecht A. S., Knottenbelt W. J., Response time approximations in fork-join queues // 23rd Annual UK Performance Engineering Workshop (UKPEW). — 2007. — 8 с.
4. Fiorini P. M., Lipsky L., Exact analysis of some split-merge queues // ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review. — 2015. — V. 43. — N 2. — P. 51–53.
5. Горбунова А. В., Зарядов И. С., Матюшенко С. И., Самуйлов К. Е., Шоргин С. Я., Аппроксимация времени отклика системы облачных вычислений // Информатика и ее применения. — 2015. — Т. 9. — Вып. 3. — С. 32–38.
6. Gumbel E. J., The maxima of the mean largest value and of the range // The Annals of Mathematical Statistics. — 1954. — V. 25. — P. 76–84.
7. Hartley H. O., David H. A., Universal bounds for mean range and extreme observation // The Annals of Mathematical Statistics. — 1954. — V. 25. — P. 85–99.
8. Arnold B. C., p-Norm bounds on the expectation of the maximum of possibly dependent sample // J. Multivariate Anal. — 1985. — V. 17. — P. 316–332.

УДК 519.2

О ВЗАИМОСВЯЗИ НЕКОТОРЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗАВИСИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ КОПУЛ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

А. В. Лебедев, д.ф.-м.н.
МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: *avlebed@yandex.ru*

Для копул экстремальных значений с известным коэффициентом верхней хвостовой зависимости найдены поточечные верхние и нижние границы, которые используются для установления верхних и нижних границ коэффициентов корреляции Спирмена и Кендалла. Показано, что во всех случаях верхние границы достигаются на копулах Маршалла–Олкина, а нижние — на копулах с кусочно-линейными функциями зависимости.

Ключевые слова: копулы экстремальных значений, коэффициент верхней хвостовой зависимости, коэффициент корреляции Спирмена, коэффициент корреляции Кендалла.

Копулой C называется функция многомерного распределения на $[0,1]^d$, $d \geq 2$, если все частные распределения являются равномерными на $[0,1]$. Согласно знаменитой теореме Скляра любая функция многомерного распределения в $\mathbb{R}^d$ представима в виде

$$F(x_1, \dots x_d) = C(F_1(x_1), \dots F_d(x_d)),$$

где F_i, $1 \leq i \leq d$, — функции частных распределений. Таким образом, всякому многомерному распределению можно поставить в соответствие его копулу. Если частные распределения непрерывны, такое представление единственно.

В качестве учебника по копулам можно порекомендовать [1].

Далее мы будем рассматривать только двумерные копулы $C(u,v)$ случайных векторов (X,Y) с непрерывными функциями распределения компонент F_X, F_Y, так что для совместной функции распределения X и Y существует и единственно представление

$$F(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)).$$

Копулу выживания $\hat{C}$ проще всего определить как копулу случайного вектора $(-X,-Y)$. С исходной копулой она связана формулой

$$\hat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v).$$

В теории надежности копулы могут описывать зависимость в поведении компонент сложных систем, обусловленную их взаимодействием или влиянием общих внешних факторов.

Рассмотрим классический пример. Пусть имеются две компоненты оборудования, которые могут выходить из строя под действием независимых факторов. Имеется также третий фактор, от которого могут выйти из строя одновременно обе компоненты. В предположении, что все факторы действуют с постоянной интенсивностью, возникает двумерное показательное распределение

Маршалла–Олкина [1, § 3.1.1]. Копула выживания этого распределения называется, соответственно, копулой Маршалла–Олкина и может быть представлена в виде

$$C(u,v) = \min\{u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}\}, \quad 0 \le \alpha, \beta \le 1. \tag{1}$$

Рассмотрим следующие коэффициенты зависимости, которые однозначно выражаются через копулы и не зависят от частных распределений случайных величин:

1. Коэффициент корреляции Спирмена ρ_S определяется как обычный коэффициент корреляции (Пирсона) случайных величин $U = F_X(X)$ и $V = F_Y(Y)$. С учетом их равномерного распределения на $[0,1]$, верно

$$\rho_S = 12\mathbf{E}UV - 3 = 12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)\,du\,dv - 3.$$

2. Коэффициент корреляции Кендалла τ_K определяется как

$$\tau_K = \mathbf{E}\,\mathrm{sign}(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)\,dC(u,v) - 1,$$

где (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) – независимые случайные вектора, распределенные как (X, Y).

3. Коэффициент верхней хвостовой зависимости λ_U определяется как

$$\lambda_U = \lim_{t\to 1-0} \mathbf{P}(X > F_X^{-1}(t) | Y > F_Y^{-1}(t)) = 2 - \lim_{t\to 1-0}\frac{1 - C(t,t)}{1-t}.$$

Далее для краткости вместо ρ_S, τ_K и λ_U будем писать ρ, τ и λ.

В частности, для копулы Маршалла–Олкина верно:

$$\rho = \frac{3\alpha\beta}{2\alpha - \alpha\beta + 2\beta}, \quad \tau = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \alpha\beta + \beta}, \quad \lambda = \min\{\alpha, \beta\}. \tag{2}$$

Копулами экстремальных значений называются копулы многомерных распределений экстремальных значений. Если взять покомпонентно максимум нескольких независимых одинаково распределенных случайных векторов с таким распределением, он будет иметь распределение того же типа (с точностью до сдвиго-масштабных преобразований компонент). Эти же распределения возникают в качестве предельных в схеме максимумов независимых одинаково распределенных случайных векторов (при линейной номировке).

Необходимым и достаточным условием принадлежности копулы к копулам экстремальных значений является тождество

$$C(u^s, v^s) = C^s(u,v), \quad \forall s > 0.$$

К копулам экстремальных значений, в частности, относятся копула Маршалла–Олкина (1) и копула Гумбеля

$$C(u,v) = \exp\left\{-\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{1/\theta}\right\}, \quad \theta \ge 1. \tag{3}$$

Для копулы Гумбеля верно

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta}, \quad \lambda = 2 - 2^{1/\theta}, \tag{4}$$

а ρ, к сожалению, не выражается в явном виде.

Одной из важных и интересных задач теории копул является установление взаимосвязи между различными коэффициентами зависимости. Классическая область возможных значений ρ и τ определяется неравенствами

$$\frac{3\tau - 1}{2} \le \rho \le \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2}, \quad \tau \ge 0,$$
$$\frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \le \rho \le \frac{1 + 3\tau}{2}, \quad \tau \le 0,$$

а для копул экстремальных значений верно $\rho, \tau \ge 0$ и выполняется неравенство Хатчинсона-Лаи, долго существовавшее как предположение и доказанное в [2]:

$$\sqrt{1 + 3\tau} - 1 \le \rho \le \min\{(3/2)\tau, 2\tau - \tau^2\}.$$

Современному уточнению этих результатов посвящены работы [3, 4].

Коэффициенту λ исторически уделялось меньше внимания. В работе [5] получены области возможных значений λ и τ для некоторых семейств копул экстремальных значений.

Автором найдены точные границы для ρ и τ при известном λ по всему классу копул экстремальных значений.

Т е о р е м а 1. Для любой копулы экстремальных значений с известным $\lambda \in [0, 1]$ верно

$$C(u, v) \ge \min\{u^{1-\lambda} v, u v^{1-\lambda}\} \tag{5}$$

и существуют такие $a, b \ge 0$, $a + b = \lambda$, что

$$C(u, v) \le \min\{u, v, u^{1-a} v^{1-b}\}, \tag{6}$$

причем эти оценки являются копулами экстремальных значений с тем же λ.

Т е о р е м а 2. Для любой копулы экстремальных значений с известным $\lambda \in [0, 1]$ верно

$$\frac{3\lambda}{4 - \lambda} \le \rho \le 1 - 16 \left(\frac{1 - \lambda}{4 - \lambda} \right)^2$$

и

$$\frac{\lambda}{2 - \lambda} \le \tau \le \lambda,$$

причем нижние границы достигаются на копулах Маршалла–Олкина (1) с $\alpha = \beta = \lambda$, а верхние — на копулах из правой части (6) с $a = b = \lambda/2$.

На рис. 1 и 2 сплошными линиями представлены границы из теоремы 2.

Для полноты картины, пунктиром показаны графики коэффициентов в случае популярной копулы Гумбеля (3), для которой из (4) получается

$$\tau = 1 - \log_2(2 - \lambda),$$

а значения ρ были оценены автором численно.

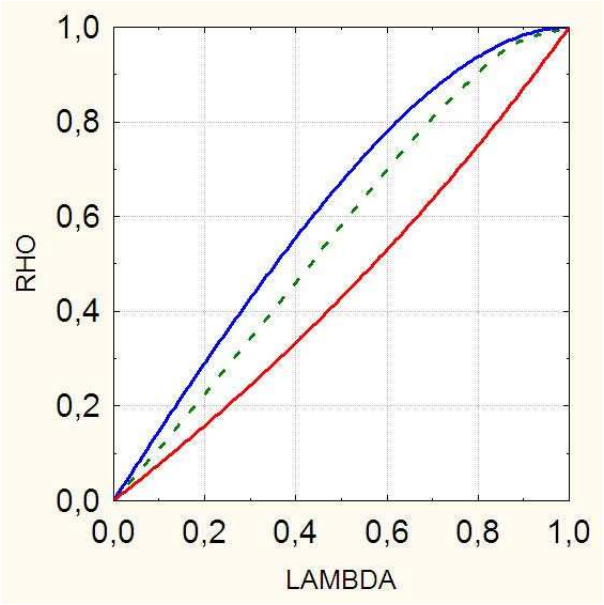


Рисунок 1 — Границы для ρ при известном λ

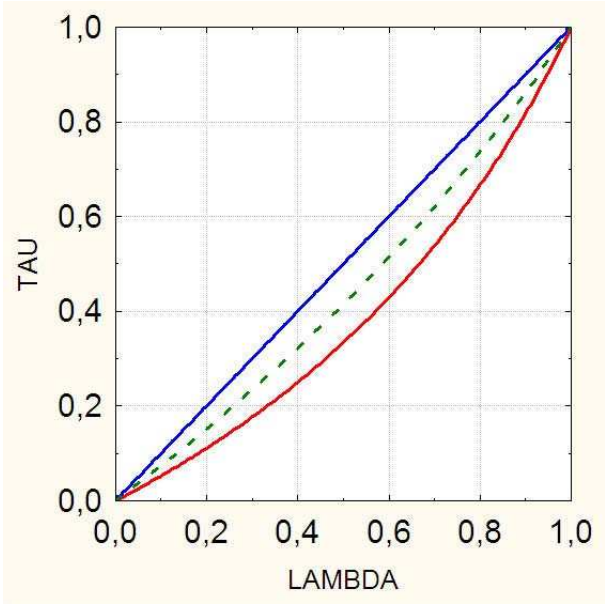


Рисунок 2 — Границы для τ при известном λ

ЛИТЕРАТУРА

1. Nelsen R., An introduction to copulas. — Springer, New York, NY. — 2006. — 276 p.
2. Hürlimann W., Hutchinson-Lai's conjecture for bivariate extreme value copulas // Statist. Probab. Lett. — 2003. — V. 61. — N. 2. — P. 191–198.
3. Trutschnig W., Schreyer M., Fernández-Sánchez J., Mass distributions of two-dimensional extreme-value copulas and related results // Extremes. — 2016. — V. 19. — N 3. — P. 405–427.
4. Schreyer M., Paulin R., Trutschnig W., On the exact region determined by Kendall's τ and Spearman's ρ // J. R. Statist. Soc. B. — 2017. — V. 79. — N 2. — P. 613–633.
5. Eschenburg P., Properties of extreme-value copulas. Diplomarbeit. — Technische Universität München. Fakultät für Mathematik. München. — 2013. — 182 p.

Методы дискретных особенностей в задачах математической физики

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ВИХРЕВЫХ ПЕТЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ЗАВИХРЕННОСТИ И РАСЧЕТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ

С.А. Дергачев
МГТУ имени Н.Э. Баумана
e-mail: *sadergachev@mail.ru*
Г.А. Щеглов, д.т.н., доц.
МГТУ имени Н.Э. Баумана
e-mail: *shcheglov_ga@bmstu.ru*

При численном моделировании трехмерных нестационарных процессов обтекания тел в безграничном объеме целесообразно использовать вихревые методы. В данных методах делается допущение о несжимаемости среды и особенности течения моделируются эволюцией завихренности в потоке. По известному полю завихренности вычисляются поле скоростей и давлений.

Наиболее распространены метод замкнутых вихревых рамок и метод вихревых элементов. В методе замкнутых вихревых рамок завихренность заключена в вихревых отрезках замкнутых в рамки. Рамки в потоке имеют общие границы и формируют вихревые пелены. Узлы пелены перемещаются по полю скорости. Интенсивность вихревых рамок определяется при их сходе с поверхности тела и в дальнейшем не меняется. Поверхность тела состоит из панелей. Вихревые пелены сходят с заранее заданной линии на поверхности тела.

В методе вихревых элементов-вортонов завихренность заключена в отдельных частицах, таких как отрезок, точка или эллипсоид. По теореме Гельмгольца вихревые линии должны быть замкнутыми, поэтому часть завихренности распределена в пространстве вокруг вортонов, так называемая дополнительная завихренность. Вихревые элементы также перемещаются по полю скорости, а сходят по всей поверхности тела с граней рамок, то есть задавать линии схода пелен не требуются.

В настоящей работе предлагается метод вихревых петель, позволяющий моделировать эволюцию завихренности ломанными линиями, узлы которых перемещаются по полю скорости, а в отрезках линии заключена завихренность. Для обеспечения устойчивости и адекватности расчета используются эмпирические алгоритмы перезамыкания, удаления шпилек [1], перераспределения узлов, алгоритм удаления узлов, попавших внутрь тела в результате погрешностей интегрирования.

Метод лишён ошибок, связанных с дополнительной завихренностью, что повышает точность расчета. Не требует априорного указания линий схода завихренности с поверхности тела, что очень важно при моделировании плохообтекаемых тел. Линии схода не связаны с методом разбиения поверхности на рамки, и определяются граничными условиями на поверхности тела для каждой петли [2].

В работе показана сходимость метода с экспериментальными данными об эволюции отдельных петель с учетом их перезамыкания, а также приведено сравнение распределения коэффициента давления и суммарных аэродинамических характеристик для таких тел как удлиненный цилиндр, сфера, крыло[3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Chorin A.J. Hairpin removal in vortex interactions II // Jour. of Comput. Phys., 1993. – №107. – P.1-9.
2. Weibmann S., Pinkall U. Filament-based smoke with vortex shedding and variational reconnection // ACM Transactions on Graphics, 2010. Vol. 29, No. 4, Article 115.
3. Дергачев С.А., Щеглов Г.А. Моделирование обтекания тел методом вихревых элементов с использованием замкнутых вихревых петель // Научный вестник МГТУ ГА, 2016. № 223(1). С.19-25.

УДК 532.5

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВИХРЕВЫХ СЛЕДОВ ЗА ВОЗДУШНЫМИ СУДАМИ

А.И. Желанников, д.т.н., проф.
ФГУП ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского
e-mail: *Zhelannikov@yandex.ru*

Большое значение в развитие метода дискретных вихрей и метода дискретных особенностей внёс симпозиум «Метод дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМФ), основателями которого были профессора Белоцерковский С.М., Гандель Ю.В. и Лифанов И.К. В данной статье показано развитие метода дискретных вихрей на задачи моделирования вихревых следов за воздушными судами. В статье решена конкретная практическая задача. С помощью разработанного расчётно-программного комплекса, были выполнены исследования по влиянию скорости бокового ветра на положение вихревого следа при взлёте и посадке воздушных судов различного класса. Определены опасные, с точки зрения «зависания» крыльевого вихря над центром взлётно-посадочной полосы (ВПП), скорости бокового ветра. При взлёте или посадке воздушных судов эти вихри могут представлять опасность для других самолётов.

Ключевые слова: вихревой след, взлёт и посадка, воздушное судно, боковой ветер.

1. Введение

Известно, что за летящими самолётами всегда образуется вихревой след. Этот след представляет собой поля возмущённых скоростей и давлений. В качестве примера, на рисунке 1 представлено поле возмущённых скоростей в сечении (X=0) перпендикулярном скорости полёта за самолётом Ил-76 при взлёте. Поле скоростей показано в реальном масштабе. Масштаб скорости показан внизу как линия 10 м/с, рисунок 1. Возникающие при полёте самолётов концевые вихри опускаются вниз, а под влиянием земли расходятся в стороны [2,6]. С течением времени вихри затухают и перестают представлять опасность для других самолётов. Но, в начальный период времени их образования, эти вихри представляют несомненную опасность для самолётов, попавших в эти вихри. Скорость расхождения вихрей может совпадать со скоростью бокового ветра. Тогда возникают условия для «зависания» вихря над центром взлётно-посадочной полосы. Такое «зависание» вихря также опасно для других самолётов.

С помощью расчётно-программного комплекса [8], блок-схема которого представлена на рисунке 2, были выполнены исследования по влиянию скорости бокового ветра на положение вихревого следа при взлёте и посадке воздушных судов. Были выполнены расчёты характеристик вихревого следа за различными воздушными судами различного полётного веса и при различных скоростях бокового ветра.

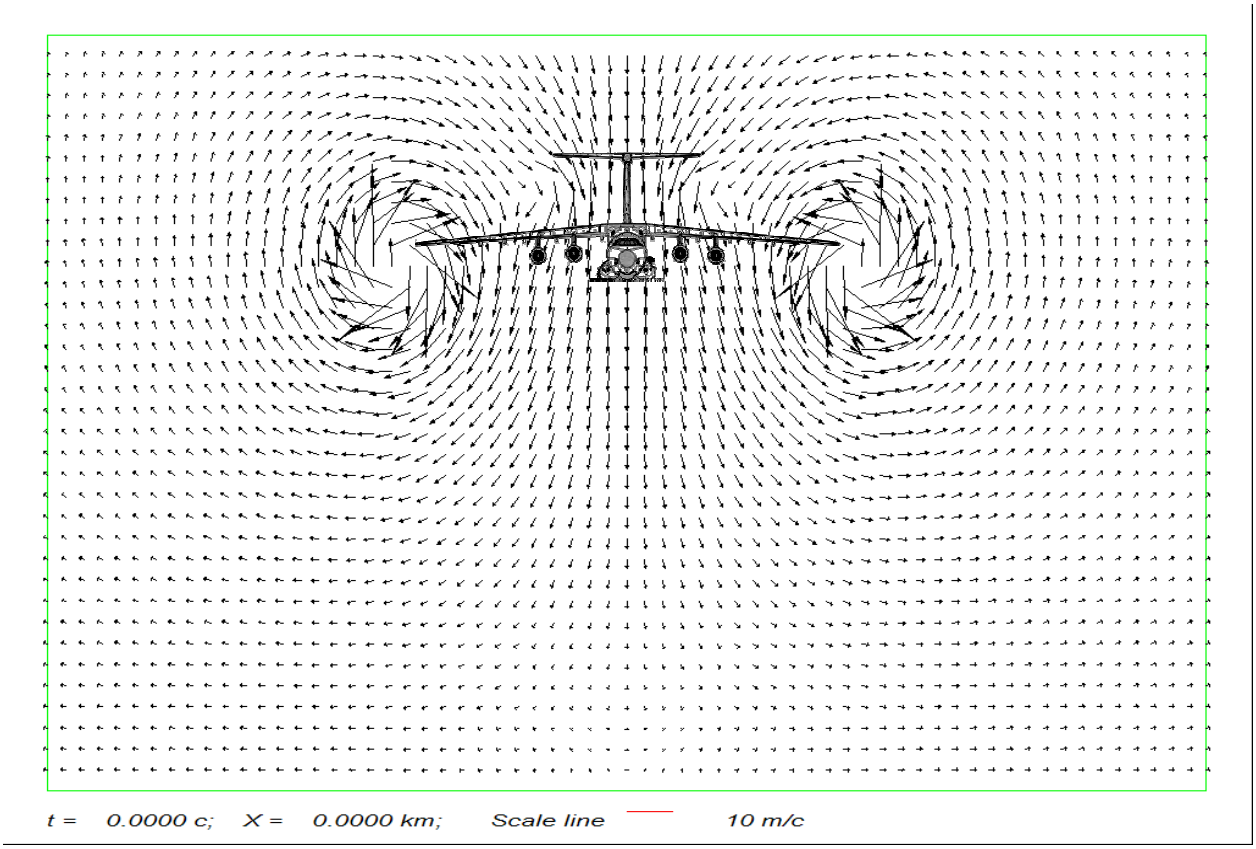


Рисунок 1 – Поле скоростей за самолётом Ил-76, X=0, V=240 км/ч, H=40 м

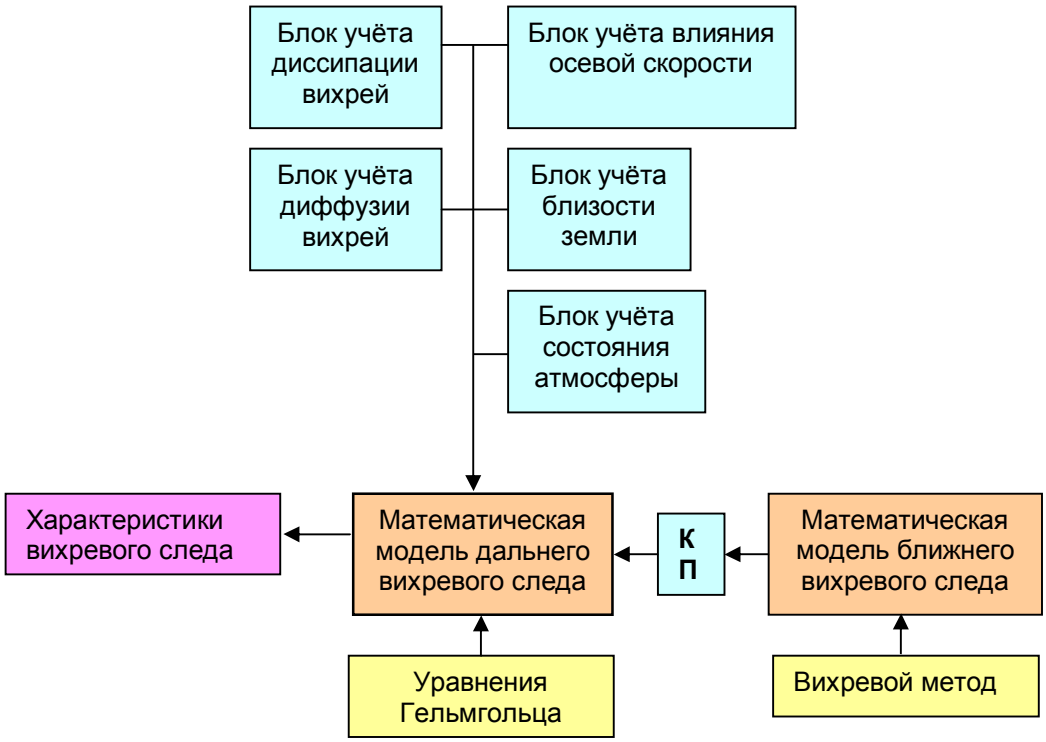


Рисунок 2 – Блок-схема расчётно-программного комплекса вихревой безопасности

2. Расчётно-программный комплекс для исследования вихревого следа за воздушными судами

Основу расчётно-программного комплекса составляют математическая модель ближнего вихревого следа и математическая модель дальнего вихревого следа [2,6]. Математическая модель ближнего вихревого следа базируется на вихревом методе, основы которого заложил ещё Н.Е. Жуковский. В разработанном комплексе используется экспериментально-аналитический подход к построению расчётной вихревой схемы, рисунок 3. П-образные вихри моделируют сход вихрей с концов крыла $Г_К$, стабилизатора $Г_С$ и закрылков $Г_З$. Их общая циркуляция, в соответствии с теоремой Стокса

$$Г=Г_К+Г_З+Г_С,$$

и определяется из теоремы Н.Е. Жуковского и равенства подъёмной силы Y_a и полётной массы самолёта G

$$Y_a=\rho V Г l=G.$$

Здесь ρ – плотность воздуха на высоте полёта самолёта, V – скорость полёта самолёта, l – размах крыла самолёта. Такой подход обоснован тем, что в реальных полётах все вихри, сошедшие с несущих и управляющих поверхностей самолёта с течением времени объединяются в два вихря, рисунок 3.

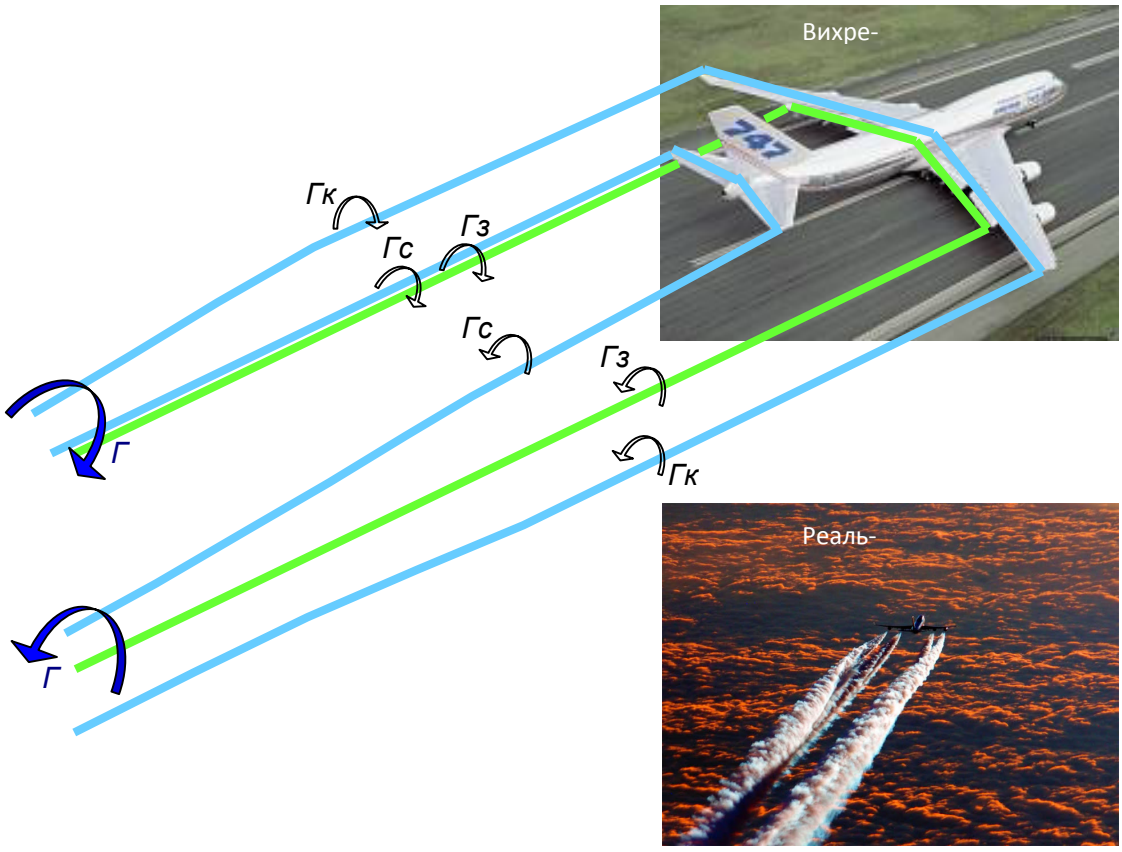


Рисунок 3 – Вихревая схема для расчёта вихревого следа

Далее, по специальной методике общая циркуляция $Г$, перераспределяется между крылом, закрылком и стабилизатором. Суть методики в следующем.

Вначале из условия балансировки в горизонтальном полёте или при взлёте (снижении) общая циркуляция Γ перераспределяется между крылом+закрылок и стабилизатором. Для этого из условия балансировки от общей подъёмной силы Y_a определяется доля подъёмной силы, приходящая на крыло+закрылок $Y_{кр}$ и доля подъёмной силы, приходящая на стабилизатор $Y_{ст}$. В соответствии с этими долями распределяется и циркуляция Γ. Получаем циркуляцию на крыле+закрылок $\Gamma_K+\Gamma_З$ и на стабилизаторе Γ_C. Далее, если это взлёт или посадка идёт дальнейшее перераспределение циркуляции. На этот раз между крылом и закрылком. Для этого воспользуемся специальными исследованиями, которые объединены в график, рисунок 4. На нём показаны зависимости доли циркуляции $\Gamma_K+\Gamma_З$ в процентах от угла отклонения закрылка при различных относительных длинах закрылков l.

После этого, данные из математической модели ближнего следа через преобразование на контрольной плоскости (КП) поступают в математическую модель дальнего следа, рисунок 2. В основе математической модели дальнего следа лежат уравнения Гельмгольца.

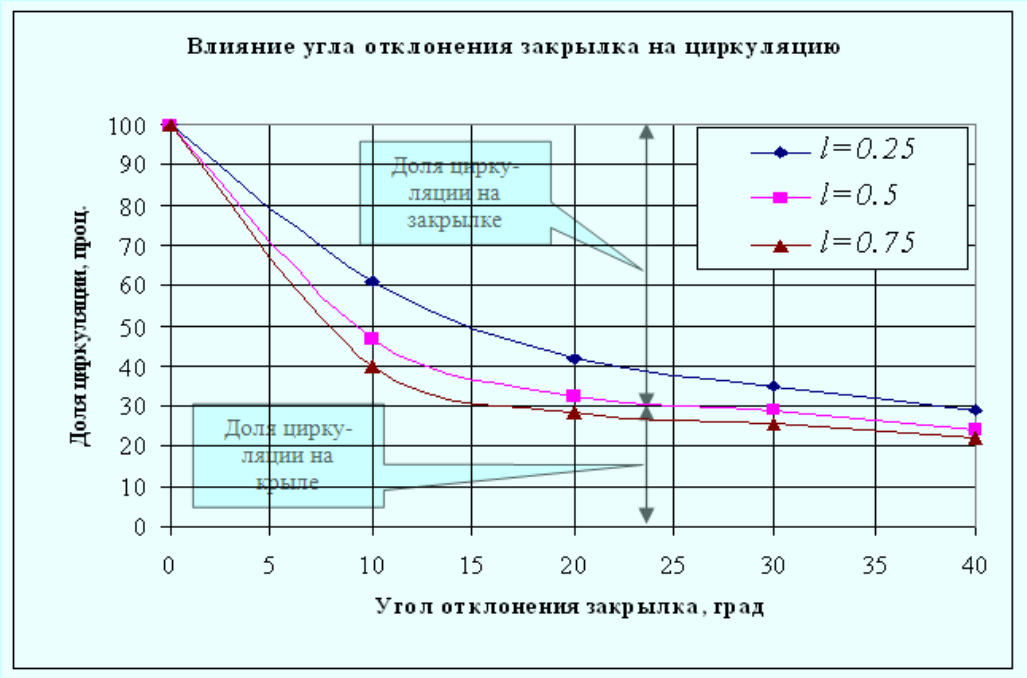


Рисунок 4 – Влияние угла отклонения закрылка на циркуляцию

Тогда для скоростей будут справедливы следующие формулы

$$W_{y(i)} = \frac{\Gamma_{+i}}{2\pi} \frac{z - z_i}{(y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \left[1 - e^{-\frac{(y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}{4\nu t}} \right]$$

$$W_{z(i)} = \frac{\Gamma_{+i}}{2\pi} \frac{y - y_i}{(y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \left[1 - e^{-\frac{(y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}{4\nu t}} \right]$$

В этих формулах y, z – координаты точки на плоскости, в которой вычисляются скорости, y_i, z_i – координаты вихрей, t время. За счёт второй части этих формул, т.е. за счёт e, учитываются диссипация и диффузия вихрей. Состояние атмосферы определяется коэффициентом ν, который в данной математической модели связан с приведённым числом Рейнольдса Re^*, следующим соотношением

$$\nu = \frac{Vl}{\mathrm{Re}^*}$$

Здесь V – скорость полёта самолёта, l – размах крыла. Приведённое число Рейнольдса Re^* в свою очередь связано с состоянием атмосферы. Эта связь получена на основе обработки экспериментальных данных [6].

Учёт поверхности земли в математической модели дальнего вихревого следа производится классически, т.е. за счёт введения зеркально отражённых, относительно земной поверхности, вихрей [1-3].

Учёт влияния осевой скорости в ядре вихря на характеристики дальнего вихревого следа в реальном полёте сводится к появлению дополнительного разряжения в ядре и дополнительных скоростей к центру вихрей. В разработанной математической модели дальнего вихревого следа учёт влияния осевой скорости производится за счёт размещения в центре вихря стока, интенсивность которого находится по экспериментальным данным [7].

Данный комплекс позволяет вести расчёт характеристик вихревого следа на математических моделях дальнего вихревого следа различного уровня. Например, для крейсерского режима полёта используется четырёх вихревая модель, рисунок 5, а для режимов взлёта и посадки, когда выпущены закрылки, шести вихревая модель, рисунок 6. На рисунках 5 и 6 чёрные точки, это двумерные вихри, сходящие с крыла циркуляции Γ_K, со стабилизатора циркуляции Γ_C и с закрылка циркуляции $\Gamma_З$. Стрелками показано направление вращения вихрей. Контуры самолётов и вихревые следы на рисунках 5 и 6 показаны в масштабе. Расстояние между началом стрелок 2 м. Масштаб скорости приведен внизу каждого графика, как 10 м/с.

3. Результаты расчёта

С помощью данного расчётно-программного комплекса, были выполнены исследования по влиянию скорости бокового ветра на положение вихревого следа при взлёте и посадке воздушных судов. Исследованы характеристики вихревого следа за различными воздушными судами различного полётного веса и при различных скоростях бокового ветра. Результаты расчётных исследований сведены к двум графическим таблицам, которыми удобно пользоваться, рисунок 7.

На первой (опасный боковой ветер) представлены результаты расчёта влияния полётного веса G самолётов и скорости бокового ветра W на «зависание» крыльевого вихря в центре ВПП. Верхняя кривая – максимальная скорость бокового ветра, при которой вихрь будет находиться в центре ВПП, нижняя – соответственно, минимальная скорость бокового ветра. Например, при взлёте

или посадке самолёта Ил-76 опасной будет скорость бокового ветра W=0.75-1.75 м/с. При этой скорости бокового ветра крыльевой вихрь от Ил-76, расположится точно в центре ВПП, и будет представлять опасность для других самолётов.

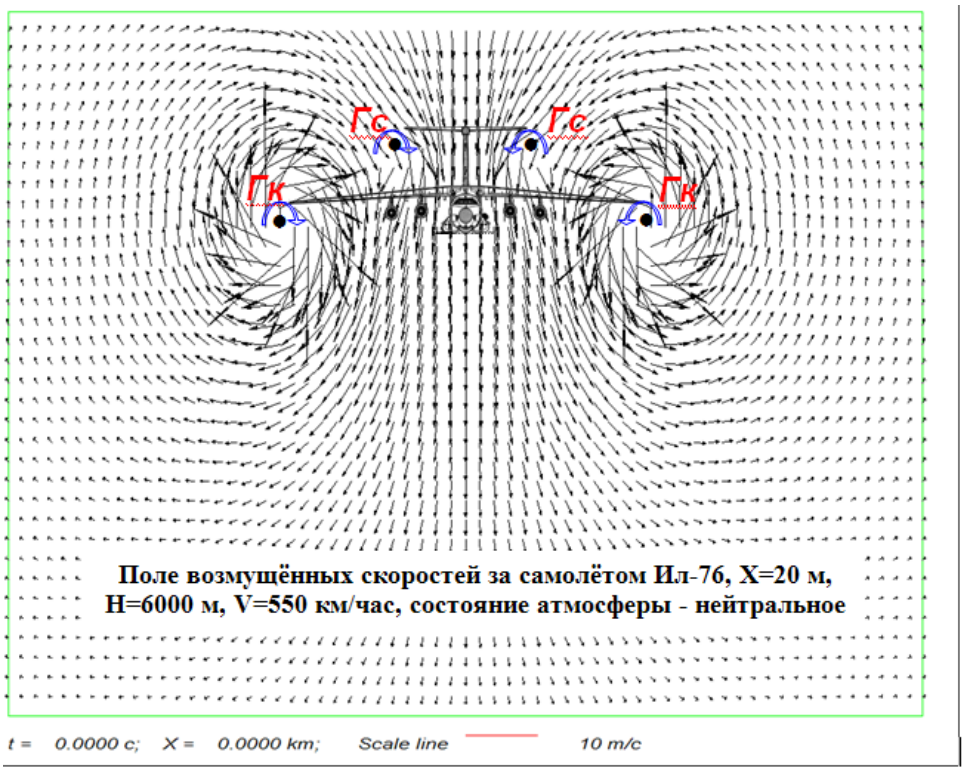


Рисунок 5 – Четырёх вихревая модель дальнего следа на примере полёта самолёта Ил-76 (крейсерский режим)

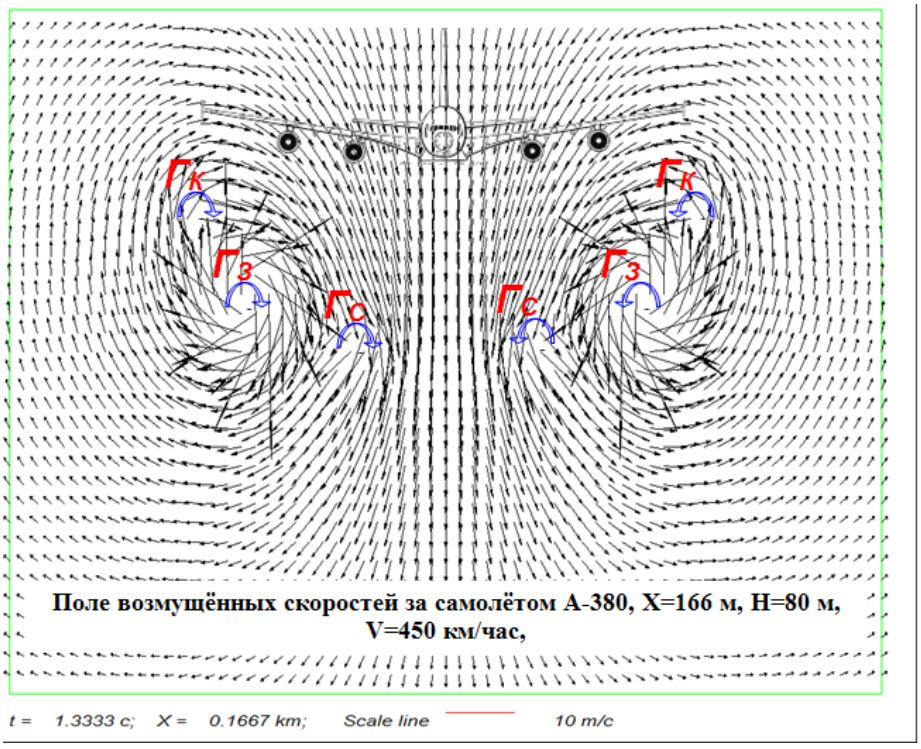


Рисунок 6 – Шести вихревая модель дальнего следа на примере полёта самолёта А-380 (режим взлёта)

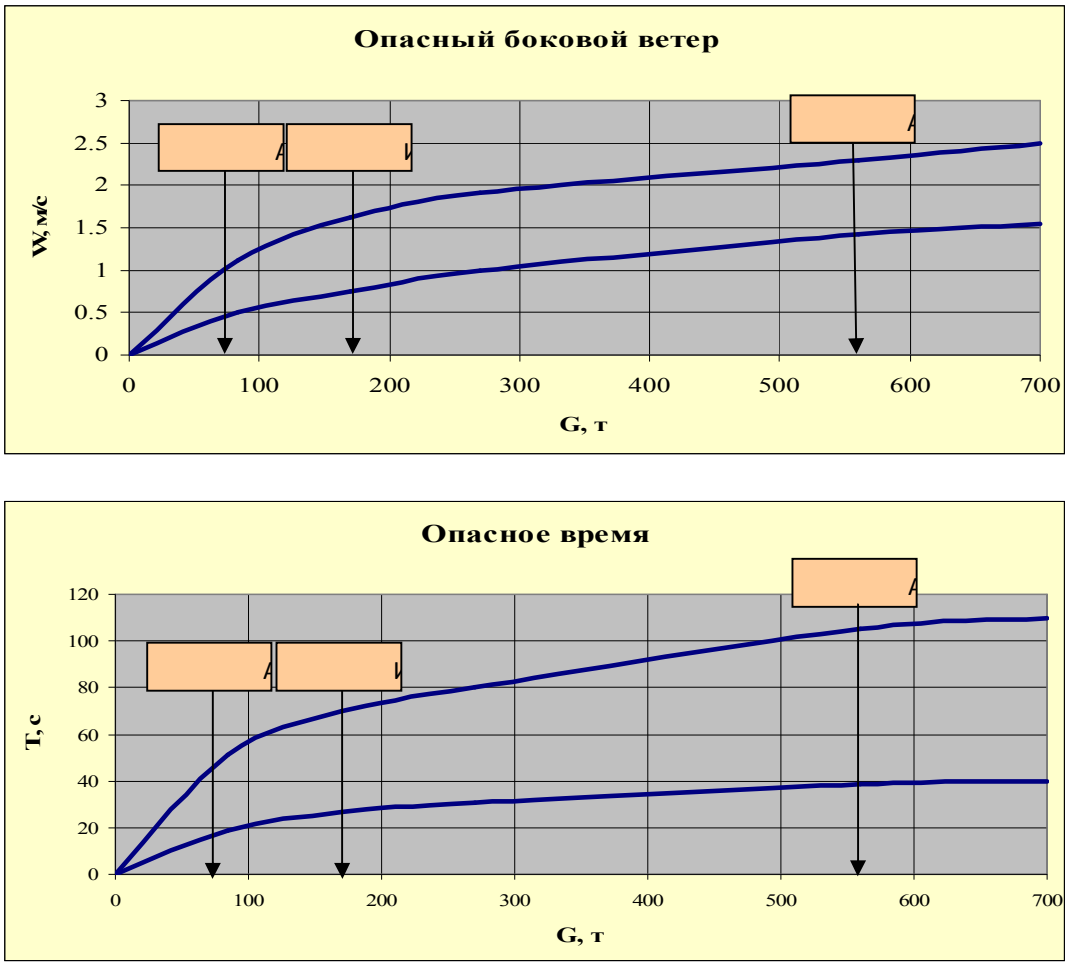


Рисунок 7 – Влиянию скорости бокового ветра на положение вихревого следа

По второй графической таблице (опасное время) можно определить время существования вихря над центром ВПП. Например, при взлёте или посадке самолёта Ил-76 крыльевой вихрь будет находиться над центром ВПП с 25 по 70 с после взлёта или посадки Ил-76. Аналогично, определятся опасный боковой ветер и время существования вихрей над центром ВПП при взлёте или посадке других самолётов. Для этого достаточно знать их полётный вес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аубакиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И., Ништ М.И. Нелинейная теория крыла и ее приложения. Алматы: Гылым, 1997. 448 с.
2. Аубакиров Т.О., Желанников А.И., Иванов П.Е., Ништ М.И. Спутные следы и их воздействие на летательные аппараты. Моделирование на ЭВМ. Алматы. 1999. 230 с.
3. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. - М.: Наука, 1978.
4. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. М.: Физматлит, 1995, 368 с.
5. Вышинский В.В., Судаков Г.Г. Вихревой след самолета в турбулентной атмосфере. Труды ЦАГИ, вып. 2667, 2006. 155 с.

6. Гиневский А.С., Желанников А.И. Вихревые следы самолётов. М.: Физматлит, 2008. 170 с.
7. Аубакиров Т.О., Дедеш В.Т., Желанников А.И., Замятин А.Н. Моделирование взаимодействия конденсационного и вихревого следов за воздушными судами. // Научный вестник МГТУ ГА, серия Аэромеханика и прочность, №125(1), 2015, с. 78-82.
8. Желанников А.И., Замятин А.Н. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015614783 «Расчетно-программный комплекс для системы вихревой безопасности», 2015.

УДК 532.5.013

МОДЕЛИ ВЯЗКОСТИ В МЕТОДЕ ВИХРЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

О.С. Коцур
МГТУ имени Н.Э. Баумана
e-mail: *oskotsur@gmail.com*
Г.А. Щеглов
МГТУ имени Н.Э. Баумана
e-mail: *shcheglov_ga@bmstu.ru*

Рассматривается метод вихревых элементов (МВЭ), предназначенный для моделирования течений несжимаемой жидкости с учетом вязкости. Приводятся три модели вязкости в МВЭ: метод диффузионной скорости (DVM), метод обмена интенсивностями (PSE) и гибридный DVM-PSE метод. Приводится пример расчета модельной задачи диффузии прямолинейной вихревой трубки в вязкой жидкости по методикам DVM и PSE, результаты сравниваются с известным аналитическим решением.

Ключевые слова: метод вихревых элементов, вязкая несжимаемая жидкость, метод обмена интенсивностями, PSE, диффузионная скорость, DVM.

Метод вихревых элементов (МВЭ) является лагранжевым методом вычислительной гидродинамики для решения задач в несжимаемой постановке. Метод основан на переходе к завихренности как к первичной величине вместо поля скорости, а также на представлении поля завихренности течения в виде суперпозиции базисных функций – вихревых элементов (ВЭ). МВЭ для невязких задач не требует сетки и поэтому представляется более эффективным для решения задач с подвижными границами (Fluid-Structure Interaction, FSI), чем известные сеточные методы, такие как метод контрольного объема.

Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости можно представить в форме уравнения эволюции завихренности

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{V} + \nu\Delta\boldsymbol{\omega} \qquad (1)$$

где $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x},t)$, $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{V}$ – поля скорости и завихренности соответственно, ν – коэффициент вязкости.

Представление поля завихренности в виде суперпозиции $\boldsymbol{\omega} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\omega}_k$ и последующая дискретизация позволяют перейти от уравнения в частных производных (1) к системе ОДУ относительно параметров вихревых элементов $\boldsymbol{\omega}_k$, переносимых полем скорости $\mathbf{V}$. В данной работе рассматривается модель симметричного вортона-отрезка [1]

$$\boldsymbol{\omega}_k(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\gamma}_k(t) \int_{-1}^{1} \delta(\mathbf{x} - (\mathbf{x}_k(t) + s\,\mathbf{h}_k(t)))ds$$

где $\boldsymbol{\gamma}_k(t)$ – векторный потенциал, определяющий ориентацию и интенсивность k-го ВЭ, $\mathbf{x}_k$ – маркер центра, $\mathbf{h}_k$ – вектор-отрезок ВЭ, который в процессе движения может менять свою длину и направление, $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция, заданная в трехмерном пространстве.

Для идеальной жидкости ($\nu = 0$) МВЭ подробно исследован и успешно применяется в ряде задач с подвижными границами с большим числом Рейнольдса [2, 3]. Наибольшую сложность представляет аппроксимация диффузионного члена $\nu\Delta\boldsymbol{\omega}$, отвечающего за вязкость.

Существует ряд подходов по учету вязкости (метод «случайных блужданий» (random walk), алгоритм расщепления (splitting) и др. [2]). В данной работе рассматривается три подхода: метод диффузионных скоростей (Diffusion Velocity Method, DVM), метод обмена интенсивностями (Particle Strength Exchange, PSE) и гибридный метод DVM-PSE.

Метод DVM состоит в представлении диффузионного члена $\nu\Delta\boldsymbol{\omega}$ в конвективной форме $-\nabla\cdot(\mathbf{V}_d \otimes \boldsymbol{\omega})$, где $\mathbf{V}_d$ – некоторое векторное поле, называемое диффузионной скоростью (скоростью Фридмана) [4]. Считая, что вихревые элементы перемещаются по полю $\mathbf{V} + \mathbf{V}_d$ (вместо $\mathbf{V}$), можно показать, что переносимая ими завихренность остается неизменной. При этом уравнение эволюции завихренности принимает вид как для идеальной жидкости и решается с помощью МВЭ. Однако диффузионную скорость $\mathbf{V}_d$ можно явно получить только в двухмерной, либо в осесимметричной постановке, поскольку в трехмерном случае представить оператор $\nu\Delta\boldsymbol{\omega}$ в конвективной форме не удается.

Метод PSE строится на аппроксимации диффузионного члена $\nu\Delta\boldsymbol{\omega}$ с помощью интегрального оператора вида:

$$Q^{\varepsilon}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\nu}{\varepsilon^2} \int_{\mathbf{R}^3} \eta_{\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{y})(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y},t) - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t))d\mathbf{y} \qquad (2)$$

где $\eta_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ – функция ядра, удовлетворяющая заданным моментным условиям [5], ε – параметр сглаживания. Условия и порядок сходимости в зависимости от ε и вида функции $\eta_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ также приведены в работе [5]. Интегральная аппроксимация (2) оказывается более удобной для дальнейшей дискретизации с помощью вортонов-отрезков и сведения (1) к системе ОДУ относительно параметров $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{h}_k$ и $\boldsymbol{\gamma}_k$ для каждого ВЭ. ВЭ при этом переносятся полем скорости

$\mathbf{V}$, но их интенсивности не остаются постоянными. Полученная ОДУ решается численно.

В работе [6] предлагается идея о гибридном DVM-PSE методе, объединяющем оба рассмотренных подхода. Он состоит в представлении диффузионного оператора $\nu\Delta\boldsymbol{\omega}$ в виде суммы векторов $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, где $\mathbf{A}=\nabla\cdot(-\mathbf{V}_d\phi)$ имеет конвективную форму с некоторой диффузионной скоростью $\boldsymbol{V}_d$, а $\mathbf{B}=\nu\Delta\boldsymbol{\omega}-\mathbf{A}$ остаток, который разрешается с помощью метода PSE. В работе [6] получены формы обеих составляющих $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ из расчета выделения «доминирующей» DVM-части (вектор $\mathbf{A}$) с использованием метода наименьших квадратов. Такая модель также позволяет перейти от уравнений (1) к системе ОДУ относительно параметров ВЭ, которая также решается численно.

Для демонстрации работы моделей вязкости DVM и PSE рассматривается простая модельная задача о диффузии бесконечной прямолинейной вихревой трубки в вязкой жидкости, для которой существует аналитическое решение. На рисунке 1 показан один слой, составленный из 1521 ВЭ, моделирующих сечение трубки радиуса 0.8 с заданным начальным распределение завихренности. Сопоставление расчетных циркуляций вокруг контрольных окружностей (см. рисунки 2 и 3) с аналитическими демонстрирует хорошее соответствие для обеих рассматриваемых моделей (максимальная ошибка циркуляций менее 2%). В дальнейшем планируется проведение верификации моделей вязкости на задачах с менее регулярным расположением ВЭ.

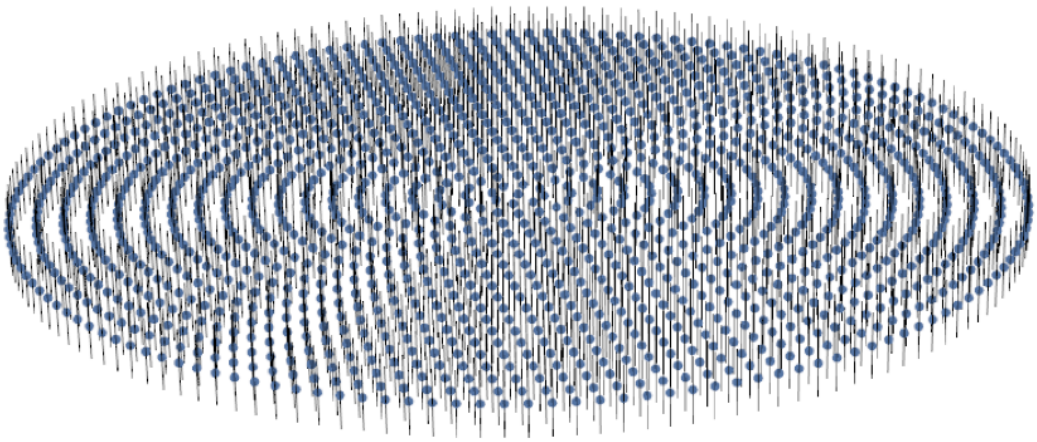


Рисунок 1 – Секция вихревой трубки, составленная из ВЭ (1521 ВЭ)

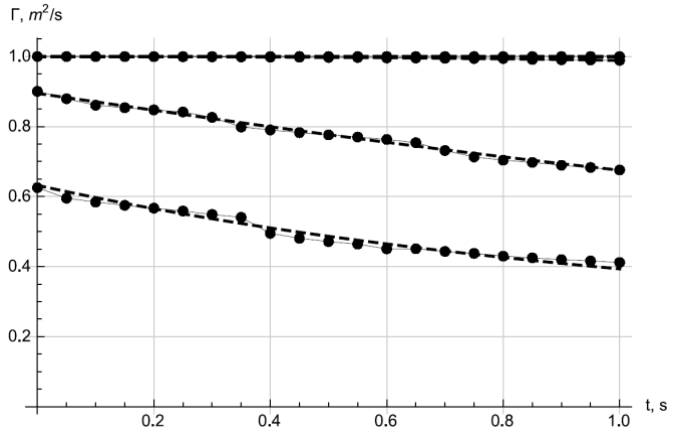


Рисунок 2 – Циркуляции по окружностям радиусов 0.6, 0.3, 0.2 (DVM). Точки – расчет МВЭ, штрих. – аналитический расчет

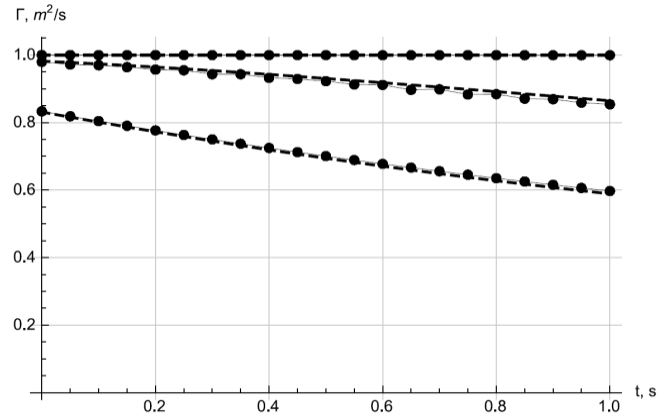


Рисунок 3 – Циркуляции по окружностям радиусов 0.8, 0.3, 0.27 (PSE). Точки – расчет МВЭ, штрих. – аналитический расчет

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Модель симметричного ворто- на-отрезка для численного моделирования пространственных течений идеальной несжимаемой среды // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. – 2008. – № 4. – С. 62–71.
2. Cottet G.H., Koumoutsakos P.D. Vortex methods: theory and practice. – Cambr.: CUP. – 2000. – 326 p.
3. Ермаков А.В., Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Численное моделирование вынужденных колебаний стержня в пространственном потоке // Вестник Пермского нац. иссл. политех. ун-та. Аэрокосмическая техника. – 2014. – № 4 (39). – С. 50-63.
4. Lacombe G., Mas-Gallic S. Presentation and Analysis of a Diffusion-Velocity Method // ESAIM: Proc. – 1999. – Vol. 7. – P. 225–233.
5. Degond P., Mas-Gallic S. The Weighted Particle Method for Convection-Diffusion Equations. Part 1: The Case of an Isotropic Viscosity // Mathematics of Computation. Oct. –1989. – Vol. 53(188). – P. 485-507.
6. Mycek P., Pinon G., Germain G. Formulation and analysis of a diffusion-velocity particle model for transport-dispersion equations // Computational and Applied Mathematics. – July 2016. – Vol. 35(2). – P. 447-473.

УДК 517.9

ON A NEW APPROACH TO VORTEX SHEET INTENSITY CALCULATION FOR FLOWS SIMULATION BY USING VORTEX METHODS

K. S. Kuzmina
Bauman Moscow State Technical University
e-mail: *kuz-ksen-serg@yandex.ru*
P. Ryatina
Ivannikov Institute for System Programming of RAS
e-mail: *evgeniya.ryatina@yandex.ru*

The hierarchy of numerical schemes is developed for the solution of the boundary integral equation which arises in 2D vortex method. The developed numerical schemes provide 1-st and 2-nd order of accuracy with respect to two different norms. The developed finite element-type schemes have nearly the same computational cost as the simplest scheme with piecewise-constant solution.

Key words: Vortex method, Boundary integral equation, Galerkin approach, Finite element method, Discontinuity extraction.

Introduction and problem statement

The rigid immovable airfoil in the flow in the most general case can be replaced with vortex sheet of unknown intensity. The no-slip or no-through boundary condition can be written down in form of integral equation of the first or the second kind [1]. The kernels of such equations have very different properties.

In the present paper the surface line of the airfoil is assumed to be approximated by polygon, the unknown vortex sheet intensity is approximated by piecewise-constant or piecewise-linear distribution, which can be continuous or discontinuous. Some numerical schemes are considered and estimations for their accuracy and computational cost are obtained.

As it was shown in [2], the accuracy of numerical solution becomes much higher if we solve the following integral equation of the 2-nd kind with bounded kernel (for smooth airfoil):

$$\frac{1}{2\pi}\oint_K \frac{\vec{n}(\vec{r})\cdot(\vec{r}-\vec{\xi})}{|\vec{r}-\vec{\xi}|^2}\gamma(\vec{\xi})\,dl_\xi - \frac{1}{2}\gamma(\vec{r}) = -\vec{\tau}(\vec{r})\cdot\left(\vec{V}_\infty + \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\vec{\Omega}(\vec{\xi})\times(\vec{r}-\vec{\xi})}{|\vec{r}-\vec{\xi}|^2}dS_\xi\right), \tag{1}$$

instead of singular integral equation of the 1-st kind (with Hilbert-type kernel), which is normally being solved in vortex methods [3].

Equation (1) has infinite set of solutions; in order to select the unique one, the additional equation should be added:

$$\oint_K \gamma(\vec{\xi})dl_\xi = \Gamma. \tag{2}$$

Numerical schemes for vortex sheet intensity computation

For numerical solution of the integral equations (1) with additional condition (2) the ideas of the Galerkin method [4] are used. According to this approach vortex sheet intensity distribution can be expressed as linear combination of some basis functions $\phi_k(\vec{r})$ with unknown coefficients, which can be found from the orthogonality condition of the residual $p(\vec{r})$ of the corresponding integral equation to projection functions $\psi_k(\vec{r})$:

$$\oint_K p(\vec{r})\psi_k(\vec{r})dl_r = 0. \tag{3}$$

Number of projection functions should be equal to number of unknown coefficients.

In order to estimate the accuracy of the numerical schemes the following measures are used:

- a measure $\|\Delta\gamma\|_{C^h}$, which allows the average values $\bar{\gamma}_i$ of computed vortex sheet intensity over the panels to be compared with average values of exact solution $\bar{\gamma}_i^*$:
$$\|\Delta\gamma\|_{C^h} = \max_i |\bar{\gamma}_i - \bar{\gamma}_i^*|;$$
- the traditional L_1 norm of the error:
$$\|\Delta\gamma\|_{L_1} = \oint_K |\gamma(s) - \gamma^*(s)|J(s)ds \approx \sum_{k=1}^{N} \int_{s_k}^{s_{k+1}} |\gamma(s) - \gamma^*(s)|J_k\, ds,$$
where $\gamma(s)$ is approximate solution, parameterized by arbitrary variable s whose change corresponds to motion along the panels; $J(s)$ is the Jakobian of such parametrization and J_k is its average value over the k-th panel; $\gamma^*(s)$ means the projection of the exact solution to the corresponding point of the panel; s_j is parameter value which corresponds to the beginning of the j-th panel.

In all schemes the system of linear algebraic equations is dense and non-symmetric, so the most suitable way to solve it is Gaussian elimination method.

1. Scheme with piecewise-constant solution

Introducing piecewise-constant basis functions $\phi_0^i(\vec{r})$, $i = 1, \ldots, N$:

$$\phi_0^i(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in K_i, \\ 0, & \vec{r} \notin K_i, \end{cases}$$

we construct solution as piecewise-constant function $\gamma(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \phi_0^i(\vec{r})$.

In this case the residual of integral equation (1) has the following form:

$$p(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} \left(\gamma_j \int_{K_j} Q_\tau(\vec{r}, \vec{\xi}) dl_\xi \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \phi_0^i(\vec{r}) - f_\tau(\vec{r}).$$

Choosing projection functions equal to the basis ones: $\psi_i(\vec{r}) = \phi_0^i(\vec{r})$, we obtain system of linear algebraic equations from condition (3), which is overdetermined; in order to regularize it the approach suggested by I.K. Lifanov [3] is used. Matrix of this system has size $(N+1) \times (N+1)$, so Gaussian elimination procedure has computational cost $(N+1)^3/3 \approx N^3/3$. Piecewise-constant approximation provides the 2-nd order of accuracy for average values of vortex sheet intensity over the panels and only the 1-st order of accuracy in L_1 norm.

2. Scheme with discontinuous piecewise-linear solution

The simplest way to improve accuracy is to approximate numerical solution by piecewise-linear solution over the panels instead of piecewise-constant one [6].

In addition to the earlier mentioned piecewise-constant basis functions $\phi_0^i(\vec{r})$, piecewise-linear basis functions $\phi_1^i(\vec{r})$ can be introduced, that vary from the value $-\frac{1}{2}$ to $\frac{1}{2}$ over the i-th panel and are equal to 0 over the other panels:

$$\phi_1^i(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{(\vec{r} - \vec{c}_i) \cdot \vec{\tau}_i}{L_i}, & \vec{r} \in K_i, \\ 0, & \vec{r} \notin K_i, \end{cases}$$

where $\vec{c}_i$ is center of the i-th panel.

Thus, the numerical solution is piecewise-linear discontinuous function which has the following form: $\gamma(\vec{r}) = \sum\limits_{i=1}^{N} \left(\gamma_i \phi_0^i(\vec{r}) + \delta_i \phi_1^i(\vec{r})\right)$, where γ_i and δ_i are unknown coefficients.

The projection functions are chosen to be equal to the basis ones: $\psi_k(\vec{r}) = \left\{\phi_0^i(\vec{r}),\, \phi_1^i(\vec{r})\right\}_{i=1}^{N}$. This numerical scheme provides the 2-nd order of accuracy both for $\|\Delta\gamma\|_{C^h}$ and $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$ errors, but the computational cost of this scheme is $(2N+1)^3/3 \approx 8N^3/3$ and it is 8 times higher than the previously considered piecewise-constant scheme.

3. Finite element type numerical scheme

Note that in the framework of the piecewise-linear scheme numerical solution was considered to be discontinuous at the every node of the surface line discretization. However, for smooth airfoils the exact solution for vortex sheet intensity is continuous. This fact makes it possible to implement principles of the finite element method (FEM) and consider linear shape functions $\hat{\phi}^i$ of the 1-st order (fig. 1) as basis and projection functions (the governing equation is being solved in the framework of tangent approach (1)).

Functions $\hat{\phi}^i$ can be expressed through the previously introduced functions ϕ_0^i

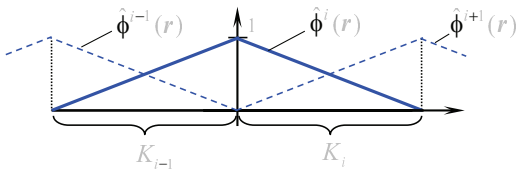


Figure 1 – Linear shape functions

and ϕ_1^i:

$$\hat{\phi}^i(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\phi_0^{i-1}(\vec{r}) + \phi_1^{i-1}(\vec{r}), & \vec{r} \in K_{i-1}, \\ \frac{1}{2}\phi_0^{i}(\vec{r}) - \phi_1^{i}(\vec{r}), & \vec{r} \in K_{i}. \end{cases} \tag{4}$$

The matrix size now is $(N+1) \times (N+1)$, so the computational cost of the solution procedure remains the same as for piecewise-constant scheme ($N^3/3$), but it provides the 2-nd order of accuracy for both errors $\|\Delta\gamma\|_{C^h}$ and $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$ in case of flow simulation around smooth airfoils. If the surface line of the airfoil has sharp edges or angle points, the exact solution is discontinuous and can be unbounded in proximity to these points, so the developed approach can't be applied.

4. FEM-type approach with discontinuities extraction

In order to simulate correctly the flow around non-smooth airfoils, the above described numerical scheme can be improved: the solution has discontinuities at angle points and sharp edges, their positions are known, and at the corresponding nodes two discontinuous basis functions $\tilde{\phi}_+$ and $\tilde{\phi}_-$ can be introduced instead of function $\hat{\phi}$ (4).

Let's consider that angle point corresponds to the node with index i, than $\tilde{\phi}_+^i$ and $\tilde{\phi}_-^i$ over the panels K_{i-1} and K_i adjoined the i-th node are shown in fig. 2.

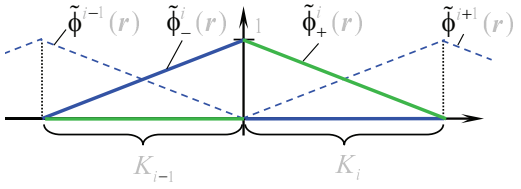


Figure 2 – Discontinuous basis functions in neighborhood of angle point

The numerical solution in this case has the form

$$\gamma(\vec{r}) = \sum_{i \notin D} \tilde{\gamma}_i \tilde{\phi}^i + \sum_{i \in D} \left(\tilde{\gamma}_i^- \tilde{\phi}_-^i + \tilde{\gamma}_i^+ \tilde{\phi}_+^i \right),$$

where D is the set of d nodes where vortex sheet intensity is discontinuous. Coefficients $\tilde{\gamma}_i^-$ and $\tilde{\gamma}_i^+$ mean limit values of the solution on both sides of such points.

The "modified" basis functions also can be expressed through the functions ϕ_0^i

and ϕ_1^i:

$$\tilde{\phi}_-^i(\vec{r}) = \frac{1}{2}\phi_0^{i-1}(\vec{r}) + \phi_1^{i-1}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in K_{i-1},$$
$$\tilde{\phi}_+^i(\vec{r}) = \frac{1}{2}\phi_0^{i}(\vec{r}) - \phi_1^{i}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in K_{i},$$

The other basis functions remain the same as in (4): $\tilde{\phi}^i(\vec{r}) = \hat{\phi}^i(\vec{r})$, $i \notin D$.

Projection functions are chosen to be equal to basis functions; every discontinuity extraction adds one extra unknown variable and in general case matrix of the corresponding linear system size is $(N + d + 1) \times (N + d + 1)$, where $d \ll N$, and computational cost of solution procedure remains nearly the same as earlier: $(N + d + 1)^3/3 \approx N^3/3$.

This scheme provides the 2-nd order of accuracy for both errors $\|\Delta\gamma\|_{C^h}$ and $\|\Delta\gamma\|_{L_1}$ in case of flow simulation around arbitrary airfoils.

Conclusions

The developed numerical schemes for boundary integral equation solution in vortex particles method provide 1-st and 2-nd order of accuracy with respect to average value of vortex sheet intensity over the panels and in L_1 norm. Expressions for the corresponding linear system coefficients are presented. In order to compute the integrals the exact analytical formulae [5] can be used.

The research is supported by Russian Science Foundation (proj. 17-79-20445).

REFERENCES

1. Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H. Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations. SANDIA REPORT (1996) SAND96-0583 UC-700. 52 p.
2. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Moreva V.S. Vortex Sheet Intensity Computation in Incompressible Flow Simulation Aound Airfoil by Using Vortex Methods // Matematicheskoye modelirovanie. 2017. V. 29. № 10. P. 20–34. (In russian).
3. Lifanov I.K. Singular Integral Equations and Discrete Vortices. Utrecht: VSP. 1996.
4. Cockburn B., Shu C.-W. Runge – Kutta Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // J. of Scientific Computing. 2001. V. 16. № 3. P. 173-261.
5. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Ryatina E.P. Exact analytical formulae for linearly distributed vortex and source sheets influence computation in 2D vortex methods. Journal of Physics: Conference Series. 2017. In press.
6. Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Ryatina E.P. Numerical scheme of the second order of accuracy for vortex methods for incompressible flow simulations around airfoils. Aviatsionnaya tehnika. 2017. V. 60. № 3.

УДК 517.9

ON A NEW APPROACH TO VORTEX SHEET INTENSITY CALCULATION FOR FLOWS SIMULATION BY USING VORTEX METHODS

I. K. Marchevsky, Ph.D., assoc.prof.
Bauman Moscow State Technical University
e-mail: *iliamarchevsky@mail.ru*
G. A. Shcheglov, Ph.D., Dr.Sc., prof.
Bauman Moscow State Technical University
e-mail: *shcheglov_ga@bmstu.ru*

The original numerical scheme is developed for vortex sheet intensity computation for 3D incompressible flow simulation using meshless Lagrangian vortex methods. It is based on tangential components of the velocity boundary condition satisfaction on the body surface instead of widespread condition for normal components. For the body triangulated surface the vortex layer intensity on the panels assumed to be piecewise-constant.

Key words: 3D incompressible flow, vortex method, tangential velocity, boundary condition, singularity exclusion.

Introduction and problem statement

The problem of 3D incompressible flow simulation around immovable body is considered. The governing equations are Navier — Stokes equations

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \nu \nabla^2 \vec{V} - \frac{\nabla p}{\rho_\infty},$$

with boundary conditions

$$\lim_{r \to \infty} \vec{V} = \vec{V}_\infty, \quad \lim_{r \to \infty} p = p_\infty, \quad \vec{V}(\vec{r},\, t)\Big|_{\vec{r} \in K} = \vec{0},$$

where $\vec{V}$ is flow velocity; p — pressure; $\rho_\infty = \mathrm{const}$ — density; ν — kinematic viscosity; $\vec{V}_\infty$ and p_∞ are parameters of the incident flow; K is body surface.

The viscosity assumed to be small, so according to L. Prandtl's theory it is possible to take its influence into account only as a cause of vorticity generation on body surface. The immovable body is simulated by the influence of vortex sheet with unknown intensity $\vec{\gamma}(\vec{r},\, t)$, which is placed on the body surface, $\vec{r} \in K$. The vorticity flux can be simulated if this vortex sheet is free; it means that at every time step this sheet is split into separate vortex elements which form vortex wake around the body. Vortex wake evolution can be simulated by using one of Lagrangian vortex element methods [1, 2].

Vorticity flux simulation is one of the most important problems is vortex sheet intensity computation. There are two fundamental approaches, which are based on elimination of the limit values of normal or tangential velocity components on the body surface [3]. These approaches can be called "N-scheme" and "T-scheme", respectively. For 2D flows "T-approach" is developed in [4].

The aim of the present research is development of the numerical algorithm for T-scheme in 3D case.

Integral equation for vortex sheet intensity

In case of immovable rigid body T-scheme leads to the integral equation

$$\frac{\vec{n}(\vec{r})}{4\pi} \times \left(\int\limits_K \frac{\vec{\gamma}(\vec{\xi},\, t) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|^3} \times \vec{n}(\vec{r}) dS_\xi \right) - \frac{\vec{\gamma}(\vec{r},\, t) \times \vec{n}(\vec{r})}{2} = \vec{f}(\vec{r},\, t), \quad \vec{r} \in K,$$

where

$$\vec{f}(\vec{r},\, t) = -\vec{n}(\vec{r}) \times \left(\vec{V}_\infty + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S(t)} \frac{\vec{\Omega}(\vec{\xi},\, t) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|^3} \, dS_\xi \right) \times \vec{n}(\vec{r})$$

is known vector function.

In order to find approximate solution of the integral equation, which kernel is unbounded when $|\vec{r} - \vec{\xi}\,| \to 0$, the following assumptions can be made:

1. Body surface is triangulated into N flat cells K_i with areas A_i and normal vectors $\vec{n}_i$, $i = 1, \ldots, N$.
2. The unknown vortex sheet intensity on the i-th cell is constant vector $\vec{\gamma}_i$, $i = 1, \ldots, N$, which lies in the plane of the i-th cell, i.e. $\vec{\gamma}_i \cdot \vec{n}_i = 0$.
3. The integral equation is satisfied on average over the cells.

The integral equation has infinite set of solutions; in order to select the unique solution we should satisfy additional condition for total vorticity (integral from the vorticity over the body surface): $\int\limits_K \vec{\gamma}(\vec{r},\, t) dS_r = \vec{0}$. The resulting system is overdetermined, it can be regularized by introducing the 'regularization vector' $\vec{R} = \left(R_1,\, R_2,\, R_3\right)^T$. The resulting linear system has the following form:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{4\pi A_i} \vec{\tau}_i^{(1)} \cdot \left(\sum_{j=1}^N \gamma_j^{(1)} \vec{\nu}_{ij}^{(1)} + \sum_{j=1}^N \gamma_j^{(2)} \vec{\nu}_{ij}^{(2)} \right) - \frac{\gamma_i^{(2)}}{2} + \vec{R} \cdot \vec{\tau}_i^{(2)} = \frac{b_i^{(1)}}{A_i}, \\
\frac{1}{4\pi A_i} \vec{\tau}_i^{(2)} \cdot \left(\sum_{j=1}^N \gamma_j^{(1)} \vec{\nu}_{ij}^{(1)} + \sum_{j=1}^N \gamma_j^{(2)} \vec{\nu}_{ij}^{(2)} \right) + \frac{\gamma_i^{(1)}}{2} + \vec{R} \cdot \vec{\tau}_i^{(1)} = \frac{b_i^{(2)}}{A_i}, \qquad (1) \\
\sum_{j=1}^N A_j \left(\gamma_j^{(1)} \vec{\tau}_j^{(1)} + \gamma_j^{(2)} \vec{\tau}_j^{(2)} \right) = 0, \qquad i = 1,\, \ldots,\, N.
\end{gathered}$$

The main problem for practical usage of the suggested approach is coefficients $\vec{\nu}_{ij}^{(k)}$ calculation for system (1):

$$\vec{\nu}_{ij}^{(k)} = \vec{\tau}_j^{(k)} \times \int\limits_{K_i} \left(\int\limits_{K_j} \frac{\vec{r} - \vec{\xi}}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|^3} dS_\xi \right) dS_r = \vec{\tau}_j^{(k)} \times \vec{I}_{ij}, \quad k = 1,\, 2, \quad i,\, j = 1,\, \ldots,\, N \qquad (2)$$

Integral $\vec{I}_{ij}$ is calculated over triangular cells K_i and K_j, where i-th cell we call 'control', j-th cell — 'influence' cell.

The inner integral in (2) over the influence cell K_j can be calculated exactly:

$$\vec{J}_j(\vec{r}) = \int\limits_{K_j} \frac{\vec{r} - \vec{\xi}}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|^3} dS_\xi = \Theta_j \vec{n}_j + \vec{\Psi}_j \times \vec{n}_j, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

where

$$\vec{\Psi}_j = \sum_{k=1}^{3} \ln\left(\frac{\left|\vec{s}_k\right|}{\left|\vec{s}_{k+1}\right|} \frac{1 + \vec{e}_k^{(j)} \cdot \vec{\sigma}_k}{1 + \vec{e}_k^{(j)} \cdot \vec{\sigma}_{k+1}} \right) \vec{e}_k,$$

and Θ_j is solid angle subtended by triangular cell K_j:

$$\Theta_j = 2 \arctan\left(\frac{\vec{s}_1 \vec{s}_2 \vec{s}_3}{\left|\vec{s}_1\right| \cdot \left|\vec{s}_2\right| \cdot \left|\vec{s}_3\right| + \left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2\right)\left|\vec{s}_3\right| + \left(\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3\right)\left|\vec{s}_1\right| + \left(\vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1\right)\left|\vec{s}_2\right|} \right),$$

here $\vec{s}_1 \vec{s}_2 \vec{s}_3$ denotes the scalar triple product of the vectors.

The outer integral in (2), $\vec{I}_{ij} = \int\limits_{K_i} \vec{J}_j(\vec{r})\, dS_r$ can't be simply expressed analytically in elementary functions, so the suitable way for its computation is Gaussian quadrature formula usage. It works perfectly if influence and control cells are far one from the other. However, for cells which have common edge or common vertex the corresponding integral is improper, so Gaussian quadratures become unsuitable. Direct numerical computation of improper integral is non-trivial problem, so for such cases semi-analytical approach is developed.

If the cells have common edge or common vertex, we need to exclude the singularity from the $\vec{J}_j(\vec{r})$ and write it down as sum of two terms:

$$\vec{J}_j(\vec{r}) = \vec{J}_j^{\,\mathrm{reg}}(\vec{r}) + \vec{J}_j^{\,\mathrm{sing}}(\vec{r}).$$

where $\vec{J}_j^{\,\mathrm{reg}}(\vec{r})$, which has the form

$$\vec{J}_j^{\,\mathrm{reg}}(\vec{r}) = \left(\Theta_j(\vec{r}) - \Theta_j^{\,\mathrm{sing}}(\vec{r})\right)\vec{n}_j + \left(\vec{\Psi}_j(\vec{r}) - \vec{\Psi}_j^{\,\mathrm{sing}}(\vec{r})\right) \times \vec{n}_j,$$

has no singularities and can be easily integrated numerically with high accuracy by using Gaussian quadrature formulae

$$\int\limits_{K_i} \vec{J}_j^{\,\mathrm{reg}}(\vec{r})\, dS_r \approx A_i \sum_{p=1}^{N_{GP}} \omega_p \vec{J}_j^{\,\mathrm{reg}}(\vec{\eta}_p).$$

For the improper (singular) integral

$$\int\limits_{K_i} \vec{J}_j^{\,\mathrm{sing}}(\vec{r})\, dS_r = \left(\int\limits_{K_i} \Theta_j^{\,\mathrm{sing}}(\vec{r})\, dS_r \right) \vec{n}_j + \left(\int\limits_{K_i} \vec{\Psi}_j^{\,\mathrm{sing}}(\vec{r}) dS_r \right) \times \vec{n}_j$$

exact analytical formulae are derived, which are presented in [5].

Numerical experiment

The developed semi-analytical numerical scheme makes it possible to use arbitrary triangular surface mesh even of very low quality. The corresponding linear system is being solved by using Gaussian elimination procedure. In the numerical examples shown below `Eigen` library, developed for C++, has been used [6]. In fig. 1 the results are shown for some test cases: flow around the sphere (with close to uniform mesh), flow around a weight (with mesh cells of very different size) and flow around a fish model (some mesh cells are very long and narrow). Red lines in the centers of cells shows the direction of vorticity in vortex sheet.

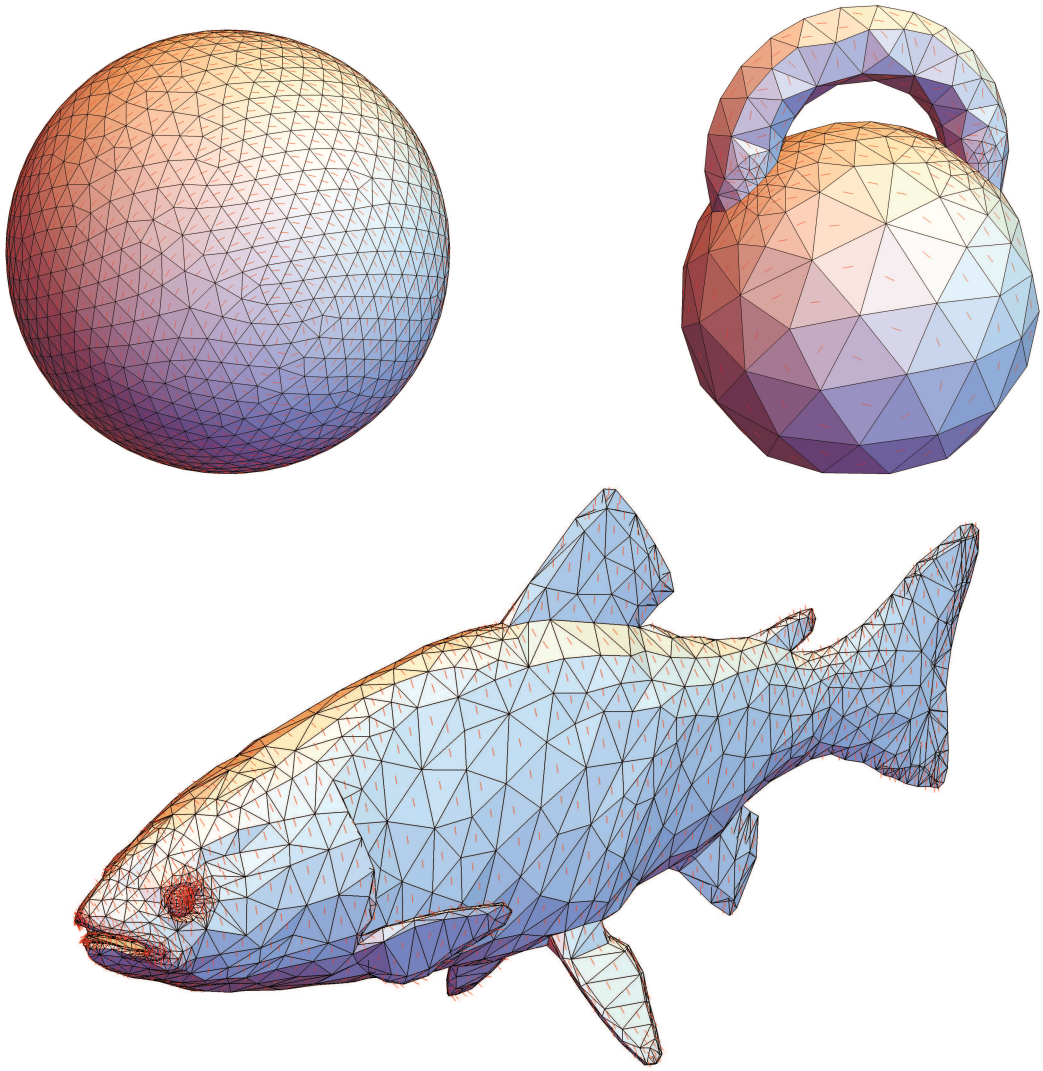


Figure 1 – Vortex sheet on the sphere (number of panels $N = 2814$); on the weight ($N = 636$) and on the fish ($N = 3194$)

Conclusions

The derived formulae for $\vec{I}_{ij}$ makes it possible to construct numerical procedure for solving of the discrete analogue of the integral equation for vortex sheet intensity calculation in the framework of 'tangent' approach. It allows to use arbitrary triangular

mesh on body surface and to refine mesh near sharp edges, that is especially important for flow around 3D wings simulation. Despite the fact that the dimension of the linear system in the developed numerical scheme is twice as large then in traditional implementations of vortex methods, its accuracy is much higher.

The research is supported by Russian Foundation for Basic Research (proj. 17-08-01468) and Russian President Grant for young PhD scientists (proj. MK-7431.2016.8).

REFERENCES

1. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. D. Vortex Methods: Theory and Practice. CUP, 2000.
2. Marchevsky I. K., Shcheglov G. A. 3D vortex structures dynamics simulation using vortex fragmentons // ECCOMAS 2012 — European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, e-Book Full Papers. Vienna, 2012. Pp. 5716–5735.
3. Kempka S. N., Glass M. W., Peery J. S., Strickland J. H. Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations // SANDIA Report SAND96-0583, UC-700, 1996.
4. Kuzmina K. S., Marchevskii I. K., Moreva V. S. Vortex sheet intensity computation in incompressibl flow simulation around airfoil by using vortex methods // Matematicheskoe modelirovanie. 2017. Vol. 29, No. 10. Pp. 20–34.
5. Marchevsky I. K., Shcheglov G. A. Efficient semi-analytical integration of vortex sheet influence in 3D vortex method // V Intern. conf. on Particle-Based Methods PARTICLES-2017. Hannover, 2017. Pp. 703–714.
6. Eigen library for linear algebra. http://eigen.tuxfamily.org.

УДК 532.546

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТРЕХМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В. Ф. Пивень, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева»
e-mail: *PivenVF@gmail.com*

Ставятся и исследуются стационарные граничные задачи (первая и вторая краевые задачи, задача сопряжения) трехмерной фильтрации в анизотропной пористой среде.

Ключевые слова: граничные задачи, фильтрация, анизотропная среда.

1. Стационарную трёхмерную фильтрацию несжимаемой жидкости в области D анизотропной и недеформируемой пористой среды с тензором проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ характеризуем обобщённым потенциалом φ, который

как функция декартовых координат точек пространства $M = (x_1, x_2, x_3) \in D$ удовлетворяет уравнению элиптического типа [1]

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial x_j}\right) = 0, \quad M \in D. \tag{1.1}$$

На коэффициенты K_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ уравнения (1.1) наложены определённые ограничения, обеспечивающие его эллиптичность. По повторяющемуся индексу проводится суммирование от 1 до 3.

Ограничимся случаем, когда анизотропная среда ортотропная ($K_{ij} = K_{ji}$). Выберем взаимно ортогональные координатные оси Ox_i, $i = 1, 2, 3$ вдоль главных направлений анизотропии, в которых тензор K принимает диагональный вид. Полагая среду неоднородной, представим K в виде

$$K_{ij}(M) = k_i\chi(M)\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{(нет суммирования по i)} \tag{1.2}$$

где k_i - $const > 0$, $\chi(M)$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция, δ_{ij} — символ Конекера ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$). Выполняя аффинное преобразование координат

$$\xi_i = \sqrt{\frac{k_0}{k_i}}x_i, \quad x_i = \sqrt{\frac{k_i}{k_0}}\xi_i \quad (k_0 = const > 0), \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.3}$$

уравнение (1.1) в области D' (D' - образ области D) приведём для обобщённого потенциала $\varphi(M')$, $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in D'$ к каноническому виду

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\chi(M')\frac{\partial\varphi(M')}{\partial\xi_i}\right) = 0, \quad M' \in D', \tag{1.4}$$

характерному для фильтрации в изотропной неоднородной пористой среде проницаемости $\chi(M')$.

Таким образом, исследование фильтрационных течений в области D анизотропной среды проницаемости (1.2) сводится к отысканию обобщённого потенциала $\varphi(M')$ течения в области D' изотропной среды, удовлетворяющего уравнению (1.4), которое также эллиптического типа.

2. Сформулируем в каноническом виде граничные задачи для $\varphi(M')$, $M' \in D'$, которые являются согласно преобразованиям (1.3) образами исходных (заданных) граничных задач для $\varphi(M)$, $M \in D$. Границы области D' — образы заданных границ области D. Исследуя задачи для $\varphi(M')$, находим затем на основании (1.3) решения исходных задач для $\varphi(M)$.

Пусть на границе σ_1' задано давление (функция $f_0(M')$), то есть имеет место краевое условие первого рода

$$\varphi^+(M') = f_0(M'), \quad M' \in \sigma_i'. \tag{2.1}$$

В случае непроницаемой границы σ'_2 имеем условие непротекания — однородное краевое условие второго рода

$$\left(\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n_{M'}}\right)^{+} = 0, \quad M' \in \sigma'_2, \tag{2.2}$$

($\vec{n}_{M'}$ - орт нормали к σ'_2 направлен во внутрь области D').

На границе Γ' сопряжения областей D'_1 и D'_2 ($D' = D'_1 \cup D'_2$), проницаемости среды в которых $k_1^0\chi(M')$ и $k_2^0\chi(M')$ (k_1^0, k_2^0 – $const > 0$), имеем условия непрерывности давления и расхода жидкости (условия сопряжения).

$$\varphi^{+}(M') = \varphi^{-}(M'), \quad k_1^0\left(\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n_{M'}}\right)^{+} = k_2^0\left(\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n_{M'}}\right)^{-}, \quad M' \in \Gamma', \tag{2.3}$$

(орт $\vec{n}_{M'} \in \Gamma'$ направлен в область D'_1).

Если область D' ограничена полностью либо частично сингулярной поверхностью $\sigma'_0 = \sigma'_{01} \cup \sigma'_{02}$, на которой проницаемость среды равна бесконечности ($\chi(M') = \infty$ на части σ'_{01}) и нулю ($\chi(M') = 0$ на части σ'_{02}), то имеем условия

$$\varphi^{+}(M') = 0, \quad M' \in \sigma'_{01}; \quad \left(\chi(M')\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n_{M'}}\right)^{+} = 0, \quad M' \in \sigma'_{02}. \tag{2.4}$$

Когда область D' содержит бесконечно удалённую точку, в которой отсутствуют источники (стоки) течения, то

$$\varphi(M') = O\Big(\frac{1}{\rho_{M'M'_0}}\Big),$$

$$\chi(M')|\nabla\varphi(M')| = O\Big(\frac{1}{\rho^2_{M'M'_0}}\Big) \quad \text{при} \quad \rho_{M'M'_0} \to \infty, \tag{2.5}$$

где $\rho_{M'M'_0} = \Big[\sum\limits_{i=1}^{3}(\xi_i - \xi_{0i})^2\Big]^{1/2}$ - расстояние между точками $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $M'_0 = (\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}) \in D'$.

Постановка граничных задач в каноническом виде заключается в следующем. Заданы источники (стоки) течения в области D' среды проницаемость (1.2) (задан обобщённый потенциал $\varphi_0(M')$). Найти обобщённый потенциал $\varphi(M')$, удовлетворяющий уравнению (1.4) и условию (2.1) (первая краевая задача) или условию (2.2) (вторая краевая задача) или условию (2.3) (задача сопряжения). Если область D' ограничена поверхностью σ'_0 и/или содержит бесконечно удалённую точку, то $\varphi_0(M')$ должен также удовлетворять условиям (2.4) и/или (2.5). В случае второй внутренней краевой задачи (область D' ограничена полностью

поверхностью σ_2') имеем условие ее разрешимости

$$\int\limits_{\sigma_2'} \chi(M') \frac{\partial \varphi(M')}{\partial n_{M'}} d\sigma_{M'} = 0, \tag{2.6}$$

означающее отсутствие потока жидкости через σ_2'.

3. В случае канонических границ (плоскость, эллипсоид) области D анизотропной однородной среды решения поставленных задач отыскиваются в конечном виде [1]. В общем случае границ к задачам применим обобщённые потенциалы двойных слоев с непрерывно распределенными плотностями вдоль граничных поверхностей σ_1', σ_2' и Γ', ядра которых выражаются через фундаментальные решения $\Phi(M', N')$ уравнения (1.4). Причём $\Phi(M', N')$ удовлетворяют условиям (2.4) и (2.5). Полагаем, что граничные поверхности гладкие и принадлежат к классу Ляпунова, вследствие чего на них существуют предельные значения потенциалов двойных слоёв. Пусть также заданный обобщенный потенциал $\varphi_0(M')$ удовлетворяют условию (2.6) в случае второй внутренней краевой задачи. Тогда решение первой ($\alpha = 1$) внутренней и второй ($\alpha = 2$) внешней и внутренней краевых задач, удовлетворяющих соответственно условию (2.1) и (2.2), а также условиям (2.4), (2.5) имеют вид

$$\varphi_\alpha(M') = \varphi_0(M') + \int\limits_{\sigma_\alpha'} \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n_{N'}} f_\alpha(N') d\sigma_{N'}, \alpha = 1, 2, M' \in D'.$$

Причем $f_1(M')$ и $f_2(M')$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$f_1(M') - 2 \int\limits_{\sigma_1'} \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n_{N'}} f_1(N') d\sigma_{N'} = \tag{3.1}$$

$$= 2\Big[f_0(M') - \varphi_0(M')\Big], \quad M' \in \sigma_1',$$

$$\int\limits_{\sigma_2'} \chi(N') \frac{\partial^2 \Phi(M', N')}{\partial n_{M'} \partial n_{N'}} f_2(N') d\sigma_{N'} = -\frac{\partial \varphi_0(M')}{\partial n_{M'}}, \quad M' \in \sigma_2', \tag{3.2}$$

где интеграл в (3.1) понимается в смысле его главного значения, а интеграл в (3.2) — в смысле конечной части по Адамару [2]. В случае первой внешней краевой задачи

$$\varphi_1(M') = \varphi_0(M') + \int\limits_{\sigma_i'} \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n_{N'}} f_1(N') d\sigma_{N'} +$$

$$+\Phi(M', M_0') \int\limits_{\sigma_i'} \chi(N') d\sigma_{N'}, \quad M' \in D', \quad M_0' \notin D',$$

где $f_1(M')$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f_1(M') + 2\int\limits_{\sigma_1'}\left[\chi(N')\frac{\partial\Phi(M',N')}{\partial n_{N'}} + \Phi(M',M_0')\right]f_1(N')d\sigma_{N'} = \tag{3.3}$$

$$= 2\Big[f_0(M') - \varphi_0(M')\Big], \quad M' \in \sigma_1'.$$

Решение задачи сопряжения, отвечающее условиям (2.3) – (2.5), имеет вид

$$\varphi_\nu(M') = \frac{1}{k_\nu^0}\Big[\varphi_0(M') +$$

$$+\int\limits_{\Gamma'}\chi(N')\frac{\partial\Phi(M',N')}{\partial n_{N'}}g(N')d\sigma_{N'}\Big], \quad M' \in D_\nu', \quad \nu = 1,2,$$

в котором $g(M')$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(M') - 2\lambda_k\int\limits_{\Gamma'}\chi(N')\frac{\partial\Phi(M',N')}{\partial n_{N'}}g(N')d\sigma_{N'} = 2\lambda_k\varphi_0(M'), \quad M' \in \Gamma' \tag{3.4}$$

$$\big(\lambda_k = (k_1^0 - k_2^0)/(k_1^0 + k_2^0), \quad \lambda_k \in (-1,1)\big).$$

Интеграл в уравнении (3.4) понимается в смысле его главного значения.

Итак, первая и вторая краевые задачи редуцируются к сингулярным интегральным уравнениям (3.1), (3.3) и (3.2), а задача сопряжения - к также сингулярному интегральному уравнению (3.4). Уравнения (3.1), (3.3) и (3.4) имеют слабую сингулярность и относятся к неоднородным интегральным уравнениям второго рода типа Фредгольма, а уравнение (3.2) — гиперсингулярное неодородное первого рода. Для решения этих уравнений можно применить численный метод дискретных особенностей [3].

Исследованные граничные задачи могут служить математическими моделями, например добычи флюидов (воды, нефти) из природных (анизотропных и неоднородных) пластов грунта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пивень В. Ф. Математические модели фильтрации жидкости. — Орел: Издательство ФГБОУ ВПО Орловский государственный университет. ПФ Картуш — 2015. — 408 с.
2. Адамар Ж. Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. — М.: Наука. — 1978. — 352 с.
3. Лифанов И. К. Методы сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: ТОО Янус. — 1996. — 520 с.

УДК 532.546

ДЕБИТ СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ В АНИЗОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ

В. Ф. Пивень, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева»
e-mail: *PivenVF@gmail.com*
Д. Г. Лекомцев
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева»
e-mail: *lekomtcevdg@yandex.ru*

Поставленная плоскопараллельная задача о дебите скважины в анизотропном неоднородном пласте грунта исследуется в случае степенного закона изменения проводимости. Исследовано влияние анизотропии и неоднородности грунта на дебит.

Ключевые слова: скважина, пористая среда, закон Дарси, анизотропный неоднородный пласт, прямолинейный контур питания, дебит, тензор проницаемости.

Многочисленые данные экспериментов демонстрируют, что реальные породы нефтяные породы-коллекторы и породы, слагающие водоносные горизонты, обладают сложной структурой. Свойства таких пород могут сильно изменяться от одной точки пласта к другой (неоднородность), и при этом одновременно зависеть от выбранного направления (анизотропия). Об этом свидетельствуют лабораторные исследования образцов горных пород [1, 2, 3, 4, 5], а также исследования скважин, пробуренных в грунтах со сложной геологической структуры [6, 7, 8]. Причем эти изменения могут носить сложный и мало предсказуемый характер, значительно изменяясь от одной точки среды к другой [9]. В пласте могут присутствовать тектонические сбросы, трещины и завесы, как естественного происхождения, так и образованные искусственно, например, в процессе гидроразрыва пласта или тампонажа скважины. Фильтрационные свойства слоистой горной породы в плоскости слоя, будут сильно отличаться от фильтрационных свойств в направлении перпендикулярном к этой плоскости, а в трещенноватых пористых средах течение флюида вдоль трещин будет преобладать над движением в других направлениях [10]. Эти факторы приводит к тому, что для пластов пород коллекторов с различными свойствами прогнозируемые и реальные характеристики могут сильно различаться [11].

Объёмы добычи флюидов (воды, нефти) постоянно растут, что требует ввода в строй новых скважин, в том числе пробуренных в пластах сложной геологической структуры. Этим обусловлена необходимость создания новых математических моделей фильтрационных течений в таких пластах. Примером месторождений с очень сложным строением могут служить Астраханское и Верхне-Салымское месторождения в России, или месторождение Тенгиз в Казахстане.

Совершенная эксплуатационная скважина дебита Q расположеной в горизонтальном пласте анизотропном и неоднородном пласте. Контур скважины -

окружность σ_C: $x^2+y^2 = R_C^2$ радиуса R_C. Полагаем, что жидкость несжимаемая и ее течение стационарное. Двумерное течение в анизотропно-неоднородном пористом слое (пласте грунта) проводимости $P = (P_{ij}) = H(K_{ij})$ (H – толщина слоя, (K_{ij}) $i, j = 1, 2$ – тензор его проницаемости) описываем обобщённым потенциалом φ и функцией тока ψ. φ и ψ – функции декартовых координат (x, y) плоскости основания слоя всюду в области D, за исключением изолированных особых точек этих функций, удовлетворяют системе уравнений [12].

$$P_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad P_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{1}$$

Уравнения (1) относится к эллиптическому типу, если коэффициенты отвечают условиям [13]

$$P_{11} > 0, \quad (P_{22} > 0), \quad D(P_S) = P_{11}P_{22} - (P_{12} + P_{21})^2/4 \tag{2}$$

где $D(P_S)$ – определитель симметричной части $P_S = (P + P^T)/2$ тензора P, $P^T = (P_{ji})$ -– транспонированный тензор. Трудность решения поставленной задачи обусловлена сложным видом основного уравнения (1). Исследование существенно упрощается, если преобразовать уравнение (1) к каноническому виду (уравнению Лапласа). Для этого осуществляется переход с физической плоскости $z = x + iy$ на вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ с использованием гомеоморфных (аффинных) преобразований (прямого и обратного) [14].

$$\zeta = z + \mu_0(z)\bar{z}, \quad z = \frac{\zeta - \mu_0(z)\bar{\zeta}}{1 - |\mu_0(z)|^2},$$

$$\left(\mu_0(z) = \frac{P_{22} - P_{11} - i(P_{12} + P_{21})}{P_{22} + P_{11} + 2\sqrt{D(P_S)}}, \quad |\mu_0(z) < 1|\right).$$

Для ряда частных случаев задача имеет аналитическое решение. В случае однородной анизотропной среды, когда контур питания σ_Π - прямая для случая одной скважины [15] или для прямолинейной батареи скважин, расположенной параллельно бесконечному прямолинейному контуру питания [16]. В неоднородной анизотропной среде аналитическое решение может быть получено в случае рассмотрения задачи о работе скважины в слое с раздельной анизотропией и неоднородностью. Когда его тензор проводимости моделируется степенной функцией одного переменного [17]. Аналитическое решение задачи о работе совершенной скважины с эллиптическим контуром питания, может быть получено в частном случае, когда на вспомогательной плоскости контур питания принимает форму окружности [18].

Аналитические решения частных задач можно использовать как тестовые. В случае произвольного контура питания задача о дебите скважины редуцирована к системе сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши и интегрального соотношения, которая решается численным методом дискретных особенностей. [19]. Данный метод численного решения задачи о работе скважины

в анизотропной среде можно использовать также в случае, если контуром питания является кусочно-гладким, например прямоугольным [18]. Исследована практическая сходимость решения задачи. Форма контура питания не оказывает принципиального воздействия на дебит скважины в анизотропном грунте [20] при условии, что контуры питания имеют равные площади. Анизотропия грунта сильно сказывается на дебите скважины, может его увеличивать или уменьшать по отношению к дебиту скважины в изотропном случае. Определяющее влияние дебита скважины оказывают диагональные элементы тензора проницаемости [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьмичев А. Н. Методика и результаты комплексных лабораторных исследований анизотропных фильтрационно-емкостных свойств коллекторов // Труды РГУ нефти и газа им. Губкина. — 2013. — № 3. — С. 44–51.
2. Арсеньев-Образцов С. С. Определение тензора коэффициентов проницаемости численным моделированием течения флюида на цифровой модели пористой среды // Труды РГУ нефти и газа им. Губкина. — 2015. — № 4. — С. 64–77.
3. Adams A., Permeability Anisotropy and Resistivity Anisotropy of Mechanically Compressed Mudrocks. — MASSACHUSSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY. — 2014. — 561 p.
4. Дмитриев Н. М., Мамедов М. Т., Максимов В. М. Фильтрация с предельным градиентом в анизотропных средах. Теория и эксперимент // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2011. — № 4(3). — С. 749–750.
5. Абросимов А. А. Применение рентгенотомографии для изучения фильтрационно-емкостных систем коллекторов нефти и газа // Труды РГУ нефти и газа им. Губкина. — 2015. — № 4. — С. 5–15.
6. Дашевский Ю. А. Изучение электрической анизотропии горных пород в скважинах методами стационарной геоэлектрики. — Учеб. пособие. — Новосибирск: Новосибирский государственный университет. — 2008. — 102 с.
7. Орлов И. Р. Особенности применения технологии разработки горизонтальными скважинами для анизотропных коллекторов с наличием естественной трещинности // Труды РГУ нефти и газа им. Губкина. — 2009. — № 1. — С. 104–115.
8. Морозов П. Е., Садовников Р. В., Хайруллин М. Х. Шамсиев М. Н. Оценка фильтрационных параметров пласта по данным нестационарных исследований горизонтальных скважин // Прикладная механика и техническая физика. — 2005. — Т.46. — № 2. — С. 109–114.

9. Хайн Н. Геология, разведка, бурение и добыча нефти. — М.: ЗАО «Олимп - Бизнес». — 2004. — 752 с.
10. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидромеханика: учебник для вузов. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. — 2003. — 480 с.
11. Назарова Л. Н. Влияние фильтрационно-емкостных свойств карбонатных коллекторов на величину коэффициента извлечения нефти // Труды РГУ нефти и газа им. Губкина. — 2014. — № 3. — С. 18–29.
12. Пивень В. Ф. Математические модели фильтрации жидкости. — Орел: Издательство ФГБОУ ВПО Орловский государственный университет, ПФ Картуш. — 2015. — 408 с.
13. Пивень В. Ф., Исследование двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном пористом слое // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. — 2017. — № 1. — С. 14–24.
14. Пивень В. Ф., Обобщенный сингулярный интеграл Коши для граничных задач двумерных течений в анизотропно-неоднородном слое пористой среды // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т.48. — № 9. — С. 1292–1307.
15. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. — 2012. — Т.47. — № 3. — С. 69–74.
16. Лекомцев Д. Г. Математическое моделирование работы батареи совершенных скважин в анизотропном грунте // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. — 2011. — № 1. — С. 94–102.
17. Лекомцев Д. Г., Математическое моделирование работы совершенной скважины в анизотропном неоднородном пласте грунта // Труды XVIII международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». — 2017. — С. 149–152.
18. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Вычислительная механика сплошных сред. — 2016. — Т.9. — № 4. — С. 389–399.
19. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперименти. — М.: ТОО Янус. — 1995. — 520 с.
20. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Исследование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. — 2014. — Т.59. — № 3. — С. 83–88.

УДК 519.6

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА МИНИМАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

С.Л. Ставцев, к.ф.-м.н., доц.
ИВМ РАН
e-mail: e-mail: sstass2000@mail.ru

В работе представлен модифицированный метод минимальных невязок для решения системы линейных уравнений, возникающей в задаче аэродинамики.

Ключевые слова: методы минимальных невязок, Крыловские подпространства, аэродинамика.

1. Введение

При решении ряда прикладных задач возникает необходимость решать систему линейных алгебраических уравнений [1, 2, 3]. При этом система может большой, матрица системы может занимать большую оперативную память, а время необходимое для решения системы может быть значительным. В этом случае могут быть использованы как прямые методы решения системы, например, основанные на LU разложении матрицы (вариация метода Гаусса в матричном виде) [4], так и итерационные [5, 6]. Преимущества итерационных методов в ряде случаев несомненны:

a) эти методы чаще всего требуют гораздо меньших вычислительных ресурсов: в отличие от метода Гаусса сложность алгоритма составляет не $O(N^3)$, а $O(N^2)$, а в ряде случаев [2,3] сложность может достигать $O(N\log(N))$;

b) операции, выполняемые с матрицей, сводятся к операции умножения матрицы на вектор, что позволяет строить эффективные параллельные алгоритмы, а также стоить методы решения с матрицей в специальном, малоранговом формате [2, 3].

К недостаткам итерационных методов относится медленная сходимость этих методов при решении некоторых прикладных задач, а также чаще всего невозможность получения решения с машинной точностью. Тем не менее, для большинства прикладных задач эффективность использования итерационных алгоритмов решения систем несомненна. Более того, при решении прикладных эффективность итерационных алгоритмов можно повысить, если учитывать специфику задачи.

2. Итерационный алгоритм

Для решения системы будем использовать проекционный метод минимальных невязок, использующие подпространства Крылова, который получил название GMRES [7] и который в разных вариациях описан в монографии [8]. Этот метод обладает хорошей сходимостью (по сравнению с остальными методами) и из-за использования подпространств Крылова имеет эффективную реализацию. Опишем суть этого метода.

Требуется решить систему

$$Ax = b\,. \tag{1}$$

Преположим, что после k итераций получим решение системы

$$x_k = x_0 + y_k, \tag{2}$$

где x_0 – начальное приближение итерационного алгоритма, тогда задача сводится к нахождению вектора y_k. На k-м шаге будем искать $y_k \in K_k$, $\dim(K_k) = k$, то есть в подпространстве размерности k.

Исходная задача (1), (2) эквивалентна решению системы

$$Ay = r_0, \tag{3}$$

где $y = x - x_0$, а $r_0 = b - Ax_0$ – начальная невязка системы, соответствующая приближению x_0. Будем искать $y_k \in K_k$ такое, чтобы минимизировать невязку на k-м шаге, т.е. величину $r_k = A(x - x_k)$ или $r_k = b - Ax_k$, или согласно (2) для системы (3)

$$r_k = r_0 - Ay_k. \tag{4}$$

Очевидно, что чем меньше r_k, тем ближе x_k к x. С другой стороны минимизация длины вектора означает, что $r_k \perp L_k$, где введено следующее подпространство $L_k = AK_k$ размерностью $\dim(L_k) = k$. Действительно, так как $y_k \in K_k$, то $Ay_k \in AK_k = L_k$.

Для построения $y_k \in K_k$, при котором минимизируется невязка $r_k \perp L_k = AK_k$ из (4), требуется найти базис $q_1,...,q_k$ пространства K_k. При этом в пространстве $L_k = AK_k$ соответствующим базисом будет система векторов $p_1 = Aq_1,..., p_k = Aq_k$. Так как минимизация r_k выполняется на пространстве L_k, то будем строить ортогональный базис $p_1,..., p_k$.

Если на каждом шаге итерации строить ортогональный базис $p_1,..., p_k$, то решение системы при $k > 100$ станет невозможным - слишком много времени потребуется на ортогонализацию. Для повышения эффективности метода воспользуемся произвольностью выбора пространства K_k. В качестве K_k выберем подпространства Крылова – то есть на k-м шаге выберем подпространство с базисом $q_1, q_2 = Aq_1,..., q_k = Aq_{k-1}$. Это приводит к тому, что переход от одной итерации к следующей выполняется с помощью небольшого числа операций. Действительно, по заданным $p_1,..., p_k$ и $q_1,..., q_k$ новый базисный вектор q_{k+1} из K_{k+1} должен удовлетворять условиям: $q_{k+1} \in K_{k+1}$, $q_{k+1} \notin K_k$, $p_{k+1} = Aq_{k+1} \perp L_k$.

В качестве начального вектора выбираем $q_1 = r_0$. Переход от одного итерационного шага к следующему выполняется следующим образом. Для $q_1,..., q_k$ знаем $p_1 = Aq_1,..., p_k = Aq_k$, после этого вычисляем $\tilde{p}_k = Ap_k$. Ортогонализуем $\tilde{p}_k$ относительно ортогонального базиса $p_1,..., p_k$, и в результате получаем p_{k+1} для следующего шага и при этом знаем q_{k+1}, где $p_{k+1} = Aq_{k+1}$. Ортогонализацию можно выполнить, например, с помощью модифицированно-устойчивой процедуры ортогонализации Грамма-Шмидта. Одновременно согласно процедуре ортогонализации строится вектор q_{k+1}.

Пусть β_i, $i=1,...,k$ - это координаты вектора r_0 в ортогональном базисе $p_1,...,p_k$ тогда в результате вышеописанной процедуры получаем, что в (4) $Ay_k \in L_k$, т.е.

$$Ay_k = \beta_1 p_1 + ... + \beta_k p_k . \quad (5)$$

Координаты β_i, $i=1,...,k$ расчитываются по формулам

$$\beta_i = \frac{r_0 \cdot p_i}{p_i \cdot p_i} . \quad (6)$$

Так как $p_1 = Aq_1,..., p_k = Aq_k$, то согласно (5) получаем

$$y_k = \beta_1 q_1 + ... + \beta_k q_k , \quad (7)$$

с координатами β_i, $i=1,...,k$, вычисляемыми по формуле (6). Т.о. из (7), (6) с учетом (2) получаем решение системы (1) на k-м шаге итерационного метода GMRES.

Число итераций метода решения системы определяется точностью решения ε и невязкой на k-м шаге, рассчитываемой по формулам (4) и (5).

При выполнении алгоритма требуется дополнительная оперативная память для хранения базисов $q_1,...,q_k$ и $p_1,...,p_k$.

Из структуры алгоритма видно, что для матрицы выполняется только операция умножения матрицы на вектор. Поэтому этот итерационный алгоритм в том числе можно применять для решения системы с матрицей в мозаично скелетонном формате. При этом достаточно только написать соответствующую процедуру для матрицы.

3. Модификация алгоритма

Пусть необходимо решать систему (1) несколько раз, причем с одной и той же матрицей A, но с разными правыми частями b_j, $j=1,...,p$. Примером такой задачи может быть задача аэродинамики, решаемая методом дискретных особенностей. Описание такой задачи приведено в работах [1, 2, 9]. В этой задаче систему уравнений необходимо решать на каждом временном шаге, в случае недеформируемого обтекаемого тела матрица системы не меняется, а правые части системы определяются вихревой пеленой формируемой за телом (рисунок 1). Заметим, что на каждом временном шаге правая часть слабо меняется по сравнению с правой частью предыдущего шага, поэтому решение системы будет слабо меняться при переходе от одного временного шага к следующему [10]. Малость изменения решения можно использовать для ускорения решения системы методом GMRES.

Пусть для некоторого временного шага, т.е. для некоторого b_t получено решение системы методом GMRES, т.е. построены базисы $q_{1t},...,q_{kt}$ и $p_{1t},...,p_{kt}$. Тогда для правой части b_{t+1} вычисляем невязку r_0, по формулам (6) вычисляем необходимые коорданаты β_i, $i=1,...,k$, тогда согласно (5) и (4) определяем невязку решения. Если полученное решение имеет недостаточную точность, то наборы базисных векторов $q_{1t},...,q_{kt}$ и $p_{1t},...,p_{kt}$ расширяются до

$q_{1t},...,q_{kt},...,q_{st}$ и $p_{1t},...,p_{kt},...,p_{st}$. Очевидно, что используя базисы с предыдущих итераций для новой правой части, мы получим гораздо меньшее число шагов, чем k. Новое число итераций определяется согласно невязке (5) и требуемой точности решения системы ε.

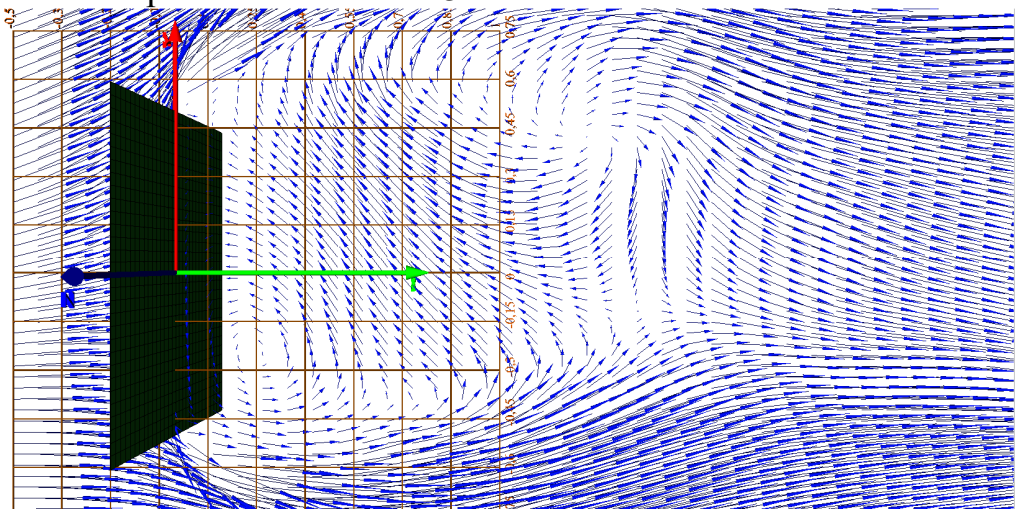


Рисунок 1 – Обтекание пластинки

4. Пример расчета

Рассмотрим задачу обтекания квадратной тонкой пластинки под углом атаки 5° (рисунок 1).

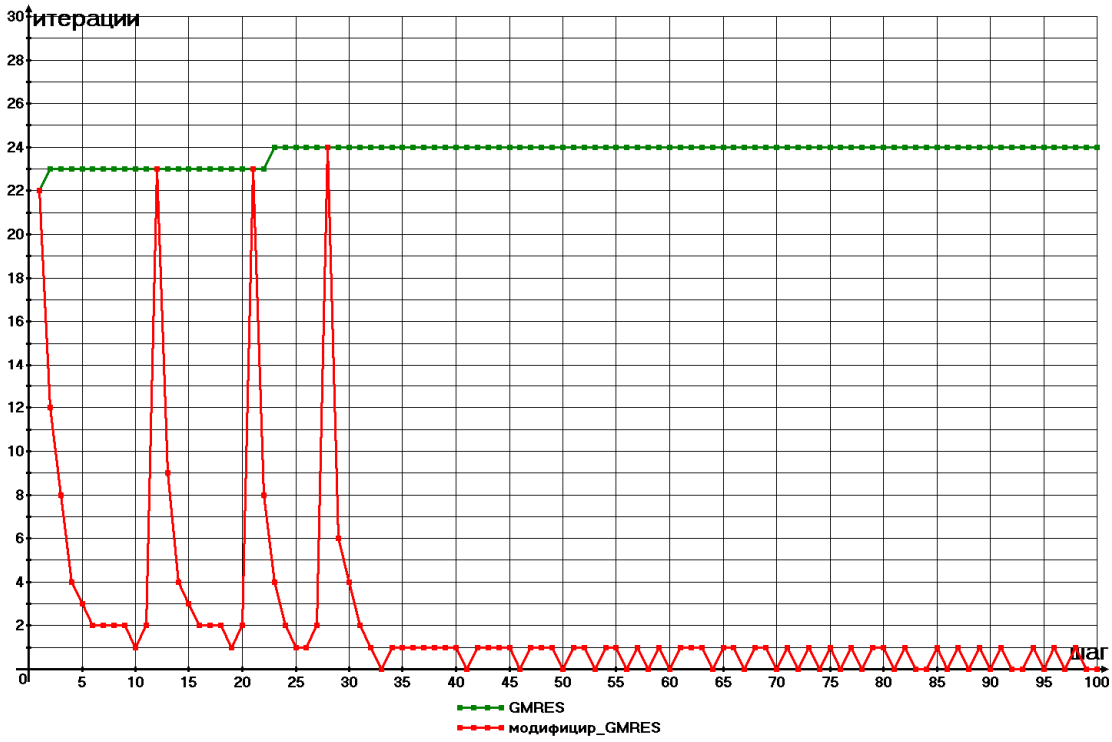


Рисунок 2 – Зависимость числа итераций от временного шага

На рисунке 2 показаны результаты применения прямого и модифицированного методов решения системы в задаче обтекания пластинки.

При решении задачи аэродинамики размерность базисов $q_{1t},...,q_{kt}$ и $p_{1t},...,p_{kt}$ на каждом последующем временном шаге расширялось, что приводило к увеличению памяти, необходимой для хранения этих векторов. Чтобы количество используемой памяти увеличивалось не сильно, применялись рестарты, т.е. на некоторых временных шагах базисные наборы считались заново, без использования базисов с предыдущих шагов.

Как видно из графиков, при использовании нового метода требуется гораздо меньшее число итераций.

Результаты получены при финансовой поддержке Программы Президиума I.33П и программы Отделения математических наук (ОМН-3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Stavtsev S.L. Application of the method of incomplete cross approximation to a nonstationary problem of vortex rings dynamics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. – 27. – P. – 303-320.
2. Ставцев С.Л. Применение малоранговых аппроксимаций к решению интегральных уравнений // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. – 2016 – 93. – 11. – С.42-49.
3. Ставцев С.Л. Применение малоранговых аппроксимаций к решению интегральных уравнений в задачах аэродинамики и электродинамики // В сборнике Современные проблемы физико-математических наук. Материалы II международной научно-практической конференции. – 2016. – С.98-107.
4. Stavtsev S.L. Block LU preconditioner for the electric field integral equation. // Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings (PIERS), Prague. – 2015. – P.1523-1527.
5. Ставцев С.Л. Итерационный подход к численному решению системы интегральных уравнений для краевых задач скалярного уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. – 2006 – 42 – 9. – С.1282-1290.
6. Stavtsev S.L., Tyrtyshnikov E.E. Application of mosaic-skeleton approximations for solving EFIE. // Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings (PIERS), Moscow, Russia – 2009. – P.1752-1755.
7. Saad Y., Martin H. GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. – 1986 – 7 – 3 – P. 856-869.
8. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. – М.: Издательский центр «Академия». – 2007. – 320 с.
9. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М.: Наука. – 1985. – 253 с.
10. Ставцев С.Л. Применение метода неполной крестовой аппроксимации к решению задач аэродинамики методом дискретных вихрей // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации – 2013. – 188 – С. 99-106.

УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА «РАЗНОЦВЕТНЫХ» ЖИДКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ, ОГРАНИЧЕННОМ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Ю.С. Федяев, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *FedyaevYS@gmail.com*

Ставится плоскопараллельная задача эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в анизотропном однородном слое пористой среды. Область фильтрации ограничена контуром питания или непроницаемой границей в виде прямой линии. Исследование задачи сведено к решению задачи Коши для системы дифференциальных уравнений. Изучена эволюция границы раздела жидкостей к эксплуатационной скважине.

Ключевые слова: анизотропная пористая среда, модель «разноцветных» жидкостей, контур питания, непроницаемая граница.

1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскопараллельную стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом анизотропном однородном слое пористой среды постоянной толщины с тензором проницаемости $K=\left(K_{ij}\right),\ i,j=1,2$. Течение жидкости характеризуют обобщённый потенциал φ и функция тока ψ, которые удовлетворяют всюду в области фильтрации D (за исключением особых точек течения) системе уравнений [1]:

$$\upsilon_x = K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \upsilon_y = K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1.1}$$

Здесь x, y – декартовы координаты в плоскости основания слоя, υ_x, υ_y – проекции скорости фильтрации. Компоненты тензора проницаемости слоя – постоянные величины. Они должны удовлетворять условиям:

$$K_{11}>0,\quad \left|K_s\right| = K_{11}K_{22}-\left(K_{12}+K_{21}\right)^2/4>0, \tag{1.2}$$

где $\left|K_s\right|$ – определитель симметричной части тензора K.

Поставим двумерную задачу эволюции границы раздела жидкостей Γ_t на физической плоскости $z=x+iy$. Полагаем, что область фильтрации D ограничивает контур питания L_1 или непроницаемая граница L_2, которые в общем случае будем обозначать L. Граница L является прямой линией и совпадает с осью Ox. Течение жидкости происходит в верхней полуплоскости ($y>0$). На границе L должно выполняться одно из условий [1]:

$$\varphi^+(z)=\text{const},\quad z\in L_1, \tag{1.3}$$

$$\psi^+(z)=\text{const},\quad z\in L_2. \tag{1.4}$$

Здесь знак «+» означает предельное значение функции при подходе к границе L со стороны орта нормали к ней. Нормаль направлена внутрь области D.

Граница Γ_t делит область фильтрации D на части D_1 и D_2 ($D = D_1 \cup D_2$). Воспользуемся моделью «разноцветных» жидкостей, согласно которой физические свойства жидкостей (вязкость, плотность) в областях D_1 и D_2 одинаковы. Граница Γ_t представляет собой линию «отмеченных» частиц жидкости.

Считаем, что положение границы Γ_t в плоскости z в любой момент времени $t > 0$ описывает параметрическое уравнение (s – параметр)

$$z = z(t,s) \quad (x = x(t,s), \quad y = y(t,s)), \quad z \in \Gamma_t, \tag{1.5}$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы Γ_t известно

$$z_0 = z(0,s) \quad (x_0 = x(0,s), \quad y_0 = y(0,s)), \quad z_0 \in \Gamma_0. \tag{1.6}$$

Дифференциальные уравнения движения границы Γ_t имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_x(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = \upsilon_y(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_t. \tag{1.7}$$

Задача эволюции границы Γ_t ставится в плоскости z следующим образом. Задано положение границ Γ_0, L, тензор проницаемости K. Необходимо найти положение границы Γ_t (1.5) при $t > 0$. Решение задачи состоит в интегрировании системы уравнений (1.1), (1.7) с учётом граничных условий (1.3), (1.4) и начальных условий (1.6).

2. Вспомогательная плоскость

Задачу эволюции границы раздела жидкостей сформулируем на вспомогательной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ [1]. Это позволяет значительно упростить систему уравнений (1), приведя её к каноническому виду. На плоскости ζ течение происходит в области D' ($D' = D_1' \cup D_2'$) и характеризуется обобщённым потенциалом $\varphi(\zeta)$ и функцией тока $\psi(\zeta)$. Область D' связана с областью D преобразованием

$$\zeta = z + \kappa\bar{z} \qquad \left(z = \left(\zeta - \kappa\bar{\zeta}\right)/J\right), \tag{2.1}$$

где $\kappa = \left[K_{22} - K_{11} - i(K_{12} + K_{21})\right] \Big/ \left(K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{|K_s|}\right)$ – комплексная константа, $J = 1 - |\kappa|^2$ – якобиан преобразования. Из условий (1.2) следует, что $|\kappa| < 1$.

На плоскости ζ уравнения (1.1) принимают канонический вид:

$$\upsilon_\xi = \sqrt{|K_s|}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \sqrt{|K_a|}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \quad \upsilon_\eta = -\sqrt{|K_a|}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \sqrt{|K_s|}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{\partial\psi}{\partial\xi}. \tag{2.2}$$

Здесь υ_ξ, υ_η – проекции скорости фильтрации на оси координат, $|K_a| = (K_{12} - K_{21})^2/4$ – определитель антисимметричной части тензора K.

Граница L преобразуется на ζ в прямую L', уравнение которой [2]

$$\zeta = e^{i\vartheta_0} \quad (\eta = \xi \operatorname{tg}\vartheta_0), \tag{2.3}$$

где $\operatorname{tg}\vartheta_0 = b/(1+a)$, ϑ_0 – угол наклона L' к оси $O\xi$, $a = \operatorname{Re}\kappa$, $b = \operatorname{Im}\kappa$.

Перейдём на плоскость $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$, используя конформное преобразование поворота на угол ϑ_0 против часовой стрелки.

$$\zeta_1 = \zeta e^{-i\vartheta_0} \quad \left(\zeta = \zeta_1 e^{i\vartheta_0}\right). \tag{2.4}$$

Граница L' (2.3) на плоскости ζ_1 совпадёт с осью $O\xi_1$. Граничные условия (1.3) и (1.4) примут вид:

$$\varphi^+(\zeta_1) = \text{const}, \quad \zeta_1 \in L_1', \tag{2.5}$$

$$\psi^+(\zeta_1) = \text{const}, \quad \zeta_1 \in L_2'. \tag{2.6}$$

Используя преобразования (2.1) и (2.4), уравнения для границы Γ_t (1.5) и её первоначального положения (1.6) запишем на плоскости ζ_1:

$$\zeta_1 = \zeta_1(t,s) \quad \left(\xi_1 = \xi_1(t,s), \quad \eta_1 = \eta_1(t,s)\right), \quad \zeta_1 \in \Gamma_t', \tag{2.7}$$

$$\zeta_{10} = \zeta_1(0,s) \quad \left(\xi_{10} = \xi_1(0,s), \quad \eta_{10} = \eta_1(0,s)\right), \quad \zeta_{10} \in \Gamma_0'. \tag{2.8}$$

где Γ_t' и Γ_0' – образы границ Γ_t и Γ_0.

Уравнения движения границы Γ_t' на плоскости ζ_1 имеют вид:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = J\upsilon_{1\xi}(\xi_1,\eta_1), \quad \frac{d\eta_1}{dt} = J\upsilon_{1\eta}(\xi_1,\eta_1), \quad (\xi_1,\eta_1) \in \Gamma_t'. \tag{2.9}$$

Таким образом, исследование эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей сводится к решению системы уравнений (2.2), (2.9) с учётом граничных условий (2.5), (2.6) и начальных условий (2.8). После того как решена задача на плоскости ζ_1, используя преобразования (2.1) и (2.4), найдём её решение на физической плоскости z.

3. Решение задачи

Фундаментальные решения уравнений (2.2) известны [3]. Они моделируют работу эксплуатационных и нагнетательных скважин в области фильтрации. Границу области фильтрации учтём с помощью теоремы сопряжения на прямой [2]. Систему уравнений (2.9) при начальном условии (2.8) решим численно. Считаем, что положение границы Γ_t' в каждый момент времени t_p, $p = 0, 1, 2, \ldots$ задаётся множеством точек M_i^p, $i = 1,2,\ldots,m$, координаты которых обозначим $\left\{\xi_{1i}^p, \eta_{1i}^p, \quad i = 1,2,\ldots,m\right\}$. Начальное условие (2.8) примет вид

$$\Gamma_0' : \left\{\xi_{1i}^0, \eta_{1i}^0, \quad i = 1,2,\ldots,m\right\}. \tag{3.1}$$

Точки M_i^0, $i = 1,2,\ldots,m$ разбивают Γ_0' равномерно по длине на m частей.

Дифференциальные уравнения движения границы (2.9) аппроксимируем следующим образом (метод Эйлера):

$$\xi_{1i}^{p+1} = \xi_{1i}^p + J\upsilon_{1\xi_i}\Delta t_{p+1}, \quad \eta_{1i}^{p+1} = \eta_{1i}^p + J\upsilon_{1\eta_i}\Delta t_{p+1}, \quad i = 1,2,\ldots,m. \tag{3.2}$$

Здесь $\Delta t_{p+1} = t_{p+1} - t_p$, $\upsilon_{1\xi_i} = \upsilon_{1\xi}\left(\xi_{1i}^p, \eta_{1i}^p\right)$, $\upsilon_{1\eta_i} = \upsilon_{1\eta}\left(\xi_{1i}^p, \eta_{1i}^p\right)$.

Решив уравнения (3.2) при $p = 0$ с начальным условием (3.1), получим положение границы Γ_t' в момент времени t_1. Повторяя алгоритм для $p = 1, 2, \ldots$, находим границы Γ_t' в последующие моменты времени.

4. Эволюция границы к скважине

Рассмотрим эволюцию границы раздела «разноцветных» жидкостей к скважине. Пусть на физической плоскости z эксплуатационная скважина дебита q расположена на расстоянии d от границы L в точке $z_c = id$ (см. рисунок 1). Её работу моделируем точечным стоком мощности $-q$ (q – модуль мощности).

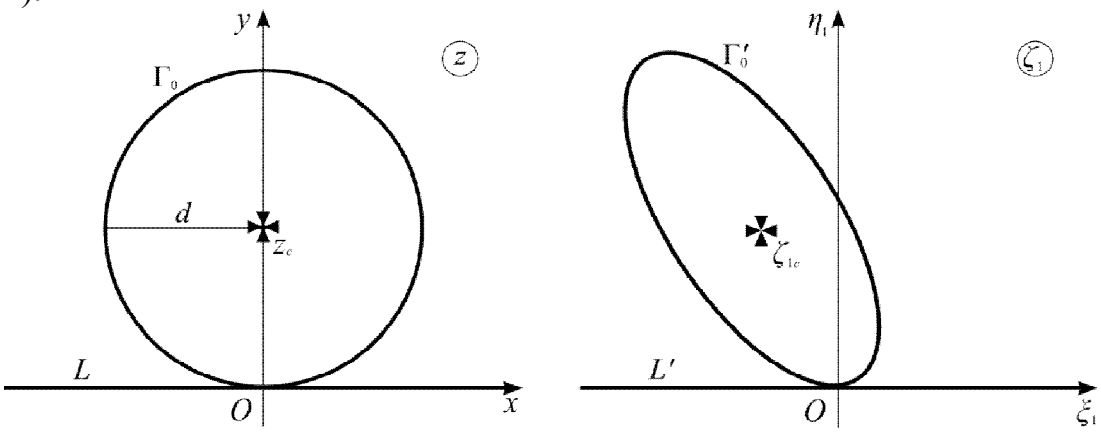


Рисунок 1 – Постановка задачи

Используя теорему сопряжения на прямой [2] и фундаментальное решение для стока [3], имеем обобщённый потенциал течения на плоскости ζ_1 в случае, когда область фильтрации ограничена контуром питания L_1

$$\varphi = -\frac{q}{2\pi\sqrt{|K_s|}}\left(\ln|\zeta_1 - \zeta_{1c}| - \ln|\zeta_1 - \overline{\zeta}_{1c}|\right), \qquad (4.1)$$

и в случае, когда область фильтрации ограничена непроницаемой границей L_2

$$\varphi = -\frac{q}{2\pi\sqrt{|K_s|}}\left(\ln|\zeta_1 - \zeta_{1c}| + \frac{|K_s| - |K_a|}{|K|}\ln|\zeta_1 - \overline{\zeta}_{1c}| + 2\frac{\sqrt{|K_s|}\sqrt{|K_a|}}{|K|}\arg(\zeta_1 - \overline{\zeta}_{1c})\right). \qquad (4.2)$$

Здесь $\zeta_{1c} = \xi_{1c} + i\eta_{1c}$ – точка расположения скважины, $|K| = |K_s| + |K_a|$ – определитель тензора проницаемости.

Рассмотрим случай, когда граница Γ_0 – окружность радиуса d, центр которой находится в точке расположения скважины. Уравнение окружности $x^2 + (y-d)^2 = d^2$. Согласно преобразованиям (2.1) и (2.4) на вспомогательной плоскости ζ_1 граница Γ_0' – эллипс (см. рисунок 1).

На рисунке 2 показано положение границы Γ_t в момент достижения скважины, когда область фильтрации ограничивает контур питания L_1, а на рисунке 3 – непроницаемая граница L_2. Расчёты проводились при $K_{11} = K_{22} = 1$, $K_{12} = 3/2$, $K_{21} = 0$. В случае контура питания прорыв жидкости происходит с его стороны, а в случае непроницаемой границы – с противоположной. Зависимость времени достижения границей Γ_t скважины от анизотропии слоя изучена в работе [4].

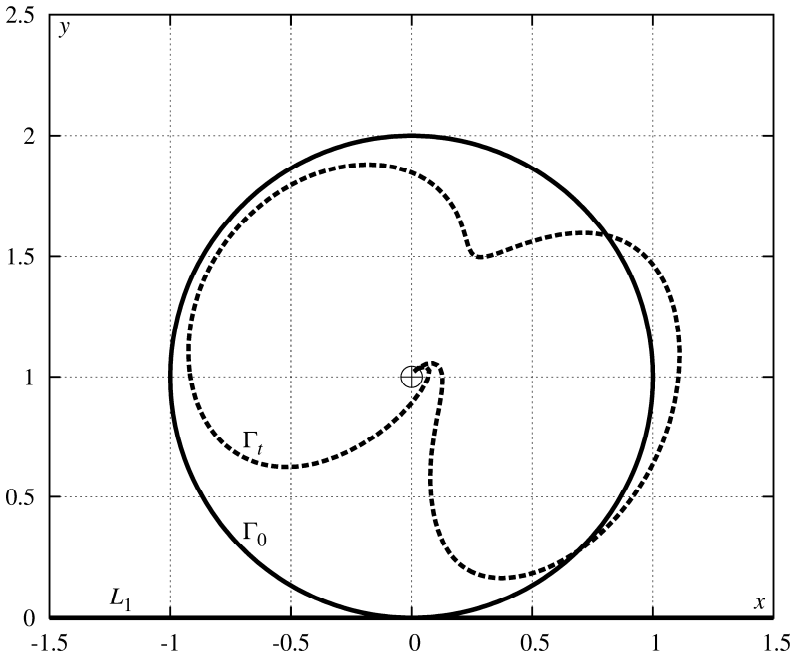


Рисунок 2 – Эволюция границы при наличии контур питания

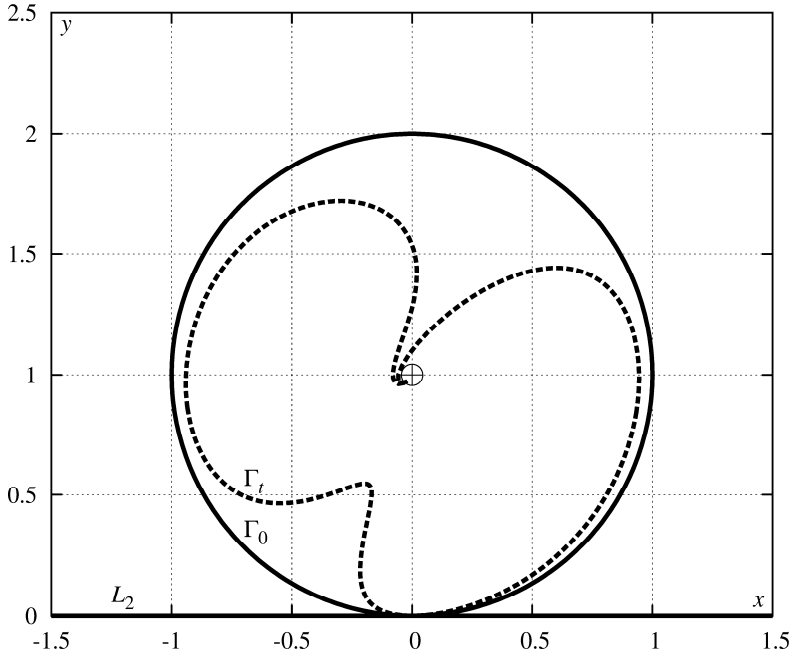


Рисунок 3 – Эволюция границы при наличии непроницаемой границы

Предложенный метод позволяет исследовать эволюцию произвольной границы раздела «разноцветных» жидкостей в анизотропном однородном слое пористой среды, ограниченном контуром питания или непроницаемой границей в виде прямой линии. Используя интеграл типа Коши, можно провести исследование эволюции границы для жидкостей различных вязкостей и плотностей. При этом численное решение получаемых интегральных уравнений выполняется методом дискретных особенностей [5]. Так в работе [6] исследована эволюция границы раздела жидкостей различных вязкостей к эксплуатационной скважине при наличии контура питания, а в работе [7] – при наличии непроницаемой границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пивень В.Ф. Математические модели фильтрации жидкости. – Орёл: Изд-во ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет», ПФ «Картуш». – 2015. – 408 с.
2. Пивень В.Ф. Исследование граничных задач плоскопараллельных течений жидкости в анизотропной пористой среде // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 9. – С. 1286-1297.
3. Пивень В.Ф Исследование двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном пористом слое // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2017. – № 1 (321). – С. 14-24.
4. Федяев Ю.С. Исследование эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в ограниченном анизотропном однородном слое пористой среды // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Естественные, технические и медицинские науки. – 2012. – № 6 (50). Часть I. – С. 78-83.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус». – 1995. – 520 с.
6. Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей в анизотропном слое пористой среды, ограниченном контуром питания // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Естественные, технические и медицинские науки. – 2013. – № 3 (53). – С. 95-101.
7. Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей в анизотропном слое пористой среды, ограниченном непроницаемой границей // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Естественные, технические и медицинские науки. – 2013. – № 6 (56). – С. 70-75.

Физика конденсированного состояния. Наноструктуры и наноматериалы

УДК 538.975:539.231

ЭЛЕКТРОХРОМНЫЙ ЭФФЕКТ В ГИДРИРОВАННЫХ ПЛЕНКАХ ПЕНТАОКСИДА ВАНАДИЯ

О.Я. Березина, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет»
e-mail: *berezina@petrsu.ru*
Д.С. Яковлева, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет»
e-mail: *darinaj@mail.ru*
С.В. Бурдюх
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Карельский научный центр Российской академии наук
e-mail: *burduch@gmail.com*

В работе рассматривается проявление электрохромных свойств тонких пленок гидратированного пентаоксида ванадия состава $V_2O_5 \cdot nH_2O$ с n = 1,6 – 1,8. Приводятся результаты исследования зависимости параметров электрохромного эффекта от толщины пленок и гидрирования в водородной плазме.

Ключевые слова: электрохромный эффект, пентаоксид ванадия, золь-гель метод, гидрирование, плазменная ионно-иммерсионная имплантация.

1. Введение

Электрохромизм – это явление обратимого изменения оптических свойств материала (светопропускания, цвета) под действием электрического поля. Электрохромные материалы относятся к хромогенным материалам, т.е. к материалам, в которых проявляются электро-, фото- или термохромные эффекты. Изучение физических свойств хромогенных материалов и протекающих в них электронных и ионных процессов лежит в русле такой актуальной в настоящее время области исследований физической электроники и физического материаловедения, которую можно назвать «умные материалы».

Ранее нами был обнаружен и описан внутренний электрохромный эффект (ВЭХЭ) [1-3] в тонких пленках гидратированного пентаоксида ванадия, заключающийся в обратимом изменении цвета пленки с темно-коричневого на ярко-красный при электрополевом воздействии. Изменение цвета пленки объясняется миграцией протонов H^+ в прикатодную область с последующим разрывом мостиковых V-O-V связей между октаэдрами в слоях оксидной фазы и образованием фрагментов высших поливанадиевых кислот. Особенность данного явления заключается в том, что оно протекает в отсутствие электролита, в отли-

чие от обычного электрохромного эффекта, когда изменение оптических свойств материала происходит в результате инжекции (экстракции) ионов из электролита. Это делает его перспективным для разработки технологий изготовления таких устройств, как «умные» стекла и «умная» бумага, гибкие дисплеи и тонкопленочные сенсоры.

Однако многие аспекты внутреннего ЭХЭ изучены недостаточно хорошо, в частности, не изучено влияние толщины пленки на стартовые параметры ЭХЭ, а также влияние гидрирования пленок ксерогеля на протекание в них электрохромного эффекта.

2. Методика эксперимента

Для получения пленок гидратированного V_2O_5 использовали золь-гель метод, который рассматривается как одна из наиболее перспективных технологий, обладающих целым рядом достоинств по сравнению с другими способами получения тонких пленок. В частности, данный метод является жидкофазным и низкотемпературным, что позволяет наносить покрытия на поверхности сложной топологии, а также на гибкие подложки, что важно для разработки устройств гибкой электроники.

Для изучения электрохромных свойств геля пентаоксида ванадия были изготовлены образцы двумя способами. Первый способ – расплавный, при котором порошок пентаоксида ванадия плавили в муфельной печи, при температуре 900°С, выдерживали в печи 1 час,затем расплав быстро выливали в дистиллированную воду, перемешивали и оставляли примерно на сутки. В результате образовывался темно-коричневый гель. Во втором случае гель пентаоксида ванадия был изготовлен с использованием перекиси водорода H_2O_2. При этом порошок пентаоксида ванадия высыпался непосредственно в перекись водорода при интенсивном перемешивании.

Далее готовый гель наносился тонким слоем на стеклянную подложку контактным способом с помощью капли раствора из пипетки с последующим равномерным распределением геля по подложке. Толщина пленок измерялась при помощи конфокального лазерного сканирующего микроскопа (KEYENCEVK 9710).

После нанесения геля образцы высушивались в течение 24 часов при комнатной температуре на открытом воздухе; при этом образовывалась плёнка ксерогеля коричневого цвета, т.е. геля с частично удаленной водой состава $V_2O_5 \cdot nH_2O$ ($n = 1,6 \div 1,8$) [4].

Гидрирование (легирование водородом) образцов осуществлялось в водородной плазме методом плазменной ионно-иммерсионной имплантации. Обрабатываемый образец находился в рабочей камере в контакте с водородной плазмой при давлении 4 Па. Для генерации плазмы в рабочей камере использовался плазменный источник с накаливаемым катодом. Имплантация ионов из плазмы осуществлялась при подаче на образец отрицательных высоковольтных импульсов 2 кВ с частотой 1,7 кГц и длительностью 5 мкс. Ток импульса $I_{imp} = 50$ мА, общее время обработки – $t = 30$ минут. При гидрировании часть

образца закрывалась маской – туда протоны не попадали. Доза облучения составляла примерно $3{,}5 \cdot 10^{17}$ см$^{-2}$.

Для электрических измерений готовые образцы помещались в электрохромную ячейку под прижимные точечные электроды. Расстояние между электродами составляло 3 мм.

3. Результаты и выводы

В образцах, изготовленным расплавным методом, в результате электрополевого воздействия пленка меняла свой цвет с коричневого на ярко-красный. Были определены стартовые значения параметров ЭХЭ для образцов разной толщины (таблица 1), такие как минимальное напряжение, необходимое для начала процесса окраски, и время наступления окраски.

Таблица 1 – Влияние толщины пленки образца на стартовое напряжение ЭХЭ

Толщина пленки d, мкм	U, В
1,60	20
1,95	10
2,29	10

Видно, что увеличение толщины пленки приводит к понижению минимального напряжения, необходимого для начала процесса окраски, что может объясняться большим количеством молекул воды, содержащимся в межслоевом пространстве пленки ксерогеля, что дает большее количество протонов, необходимое для изменения цвета пленки. Время начала окрашивания существенно не менялось и составляло 1-3 с.

В результате электрополевого воздействия вокруг отрицательного электрода появлялось круглое пятно (рисунок 1), которое быстро увеличивалось в размерах. Примерно через 2 минуты диаметр пятна достигал 3 мм, в дальнейшем скорость роста замедлялась. Однако, если увеличить напряжение на образце до 50 – 100 В, то пятно вновь начинало увеличиваться в диаметре с большой скоростью.

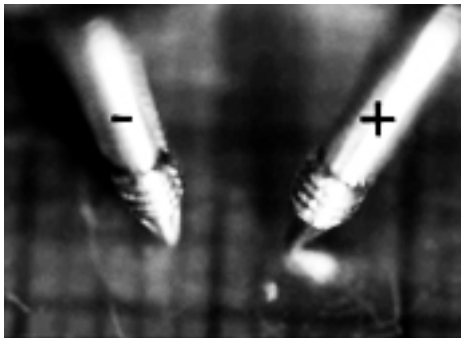


Рисунок 1 – Окрашенная область вокруг катода.
Пленка ксерогеля пентаоксида ванадия состава $V_2O_5 \cdot nH_2O$,
толщина пленки 1,95 мкм, расстояние между электродами d = 3 мм.
Стартовое напряжение U = 10 В, время наступления окраски t = 2 с

Для измерения скорости роста окрашенного пятна между электродами, расположенными на расстоянии 3 мм, подавалось напряжение 50 В. Система фотографировалась в течение 5 минут с интервалами 10-40 секунд (рисунок 2).

Для оценки возможности ускорения электрохромного окрашивания пленки пентаоксида ванадия гидрировались таким образом, что часть пленки была закрыта маской, и ионы водорода туда не проникали. Было замечено, что окрашивание протекает быстрее (рисунок 2) и при меньшем стартовом напряжении, если катод поместить на негидрированную часть пленки, а анод – на гидрированную.

На гидрированной пленке толщиной 2,05 мкм пятно диаметром 3 мм образовывалось под катодом уже при стартовом напряжении 5 В. При дальнейшем увеличении напряжения до 50 В пятно увеличивалось в диаметре.

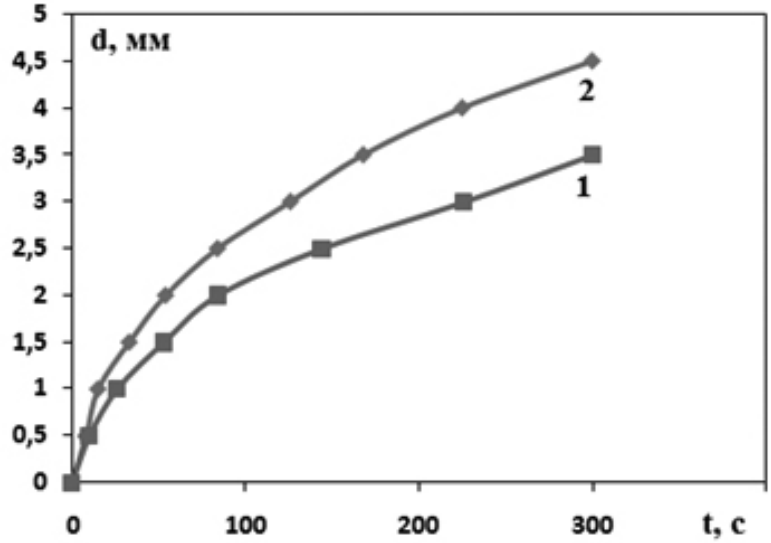


Рисунок 2 – Скорость электрохромного окрашивания пленки ксерогеля пентаоксида ванадия состава $V_2O_5 \cdot nH_2O$. 1 – оба электрода на негидрированной области; 2 – катод на негидрированной часть пленки, а анод – на гидрированной, пятно растет вокруг катода. Толщина пленки 2,05 мкм

В пленках, полученных из геля, изготовленного с помощью перекиси водорода, внутренний ЭХЭ не наблюдался. Однако после гидрирования электрохромные свойства пленок улучшались, и при аналогичном подключении в электрохромной ячейке вокруг катода появляется бледно-оранжевое пятно диаметром 1 мм. При этом стартовое напряжение составляло 50 В.

Таким образом, для наилучшего наблюдения ЭХЭ предпочтительно изготавливать образцы толщиной 2-3 мкм с помощью расплавной «золь-гель» технологии. Гидрирование в водородной плазме улучшает электрохромные свойства пленки ксерогеля, что может объясняться ростом ионной составляющей тока за счет увеличения концентрации протонов по сравнению с негидрированной пленкой. При этом происходит понижение pH-фактора и создаются благоприятные условия для образования фрагментов высших поливанадиевых кислот, придающих пленке красный цвет.

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития опорного университета ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет» на период 2017-2021 годов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казакова Е.Л. Внутренний электрохромный эффект в гидратированном пентаоксиде ванадия / Е.Л. Казакова, А.Л. Пергамент, Г.Б. Стефанович, Д.С. Гаврилова (Яковлева) // Конденсированные среды и межфазные границы. – 2001. – т. 3. – № 2. – с. 153-156.
2. Яковлева Д.С. Электрохромный эффект в гидратированном пентаоксиде ванадия. Дисс. на соискание ст. кандидата физ.-мат.. наук. Петрозаводск, 2015.
3. Yakovleva D. Internal electrochromism in vanadium pentoxide xerogel films / D. Yakovleva, A. Pergament, O. Berezina, P. Boriskov, D. Kirienko, V. Pikulev // Materials Science in Semiconductor Processing, 2016. – p. 79-85.
4. Livage J. Vanadium Pentoxide Gels / J. Livage // Chemistry of Materials. – 1991. – V. 3. – № 4. – pp. 578–593.
5. Захарова Г.С. Интеркаляционные соединения на основе ксерогеля оксида ванадия (V) / Г.С. Захарова, В.Л. Волков // Успехи химии. – 2003. – № 72 (4). – С. 346-362.

НАНОСТРУКТУРНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ, СВОЙСТВА И МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ

В.В. Гончаренко, магистрант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *vovaniii@rambler.ru*
И.Г. Шкурин, аспирант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный аграрный университет имени Н.В. Парахина»
e-mail: *smail410@yandex.ru*
Ю.А. Шкурина, магистрант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный аграрный университет имени Н.В. Парахина»
e-mail: *yulya.turzina@mail.ru*
Р.А. Ноздрачёв, бакалавр
ФГБОУ ВО «Орловский государственный аграрный университет имени Н.В.Парахина»
e-mail: rnozdrachev@bk.ru

Данная статья посвящена исследованию наноструктурных материалов. представлены данные по классификации наноматериалов и методах их создания.

Ключевые слова: нанотехнология, наноматериалы, классификация наноматериалов, структура наноматериалов, нанопорошки.

Нанотехнология это фундаментальная область науки и техники, позволяют конструировать (собирать) материалы с нанометровыми размерами струк-

турных составляющих (от 1 до 100 нм), путём контролируемого манипулирования отдельными атомами и молекулами – так называемая самосборка по принципу «снизу вверх».

Конструирование материалов на атомном и молекулярном уровне (нанофазных, нанокристаллических, супрамолекулярных) является предметом исследования порошковой металлургии, характеристики наноматериалов в значительной степени определяет величина атомного диаметра и способ создания. Для наноматериалов свойственно проявление необычные свойства и процессов, качественно новых эффектов, это обусловленные проявлением квантовых свойств вещества, чем меньше размер структурного фрагмента материала и ниже его температура, тем сильнее проявляются квантовые свойства этого материала этот критический размер для разных свойств (механических, электромагнитных, механических, оптических и др.) не одинаков. С уменьшением размера зерна, наблюдается изменение физических свойств материала, что дает возможность создания деталей с характеристиками которые не достигаются при использовании традиционных материалов.

Классифицировать наноматериалы можно по физической и химической составляющей. Физическая классификация, наибольший размер одного из структурных фрагментов меньше либо равен размеру, характерному для физического явления, предельные значения размеров структурных элементов для разных свойств и материалов не одинаковы. По химическому составу, атомной структуре, форме и размерам кристаллиты, как и границы раздела, могут различаться, и это различие оказывает значительное влияние на свойства наноструктурных материалов в целом. По форме кристаллитов наноструктурные материалы делятся на слоистые, волокнистые и равноосные, для которых толщина слоя, диаметр волок на или зерна меньше 100 нм. На рисунке 1 представлена классификация наноструктурных материалов по форме, составу, распределению структурных составляющих и способу получения.

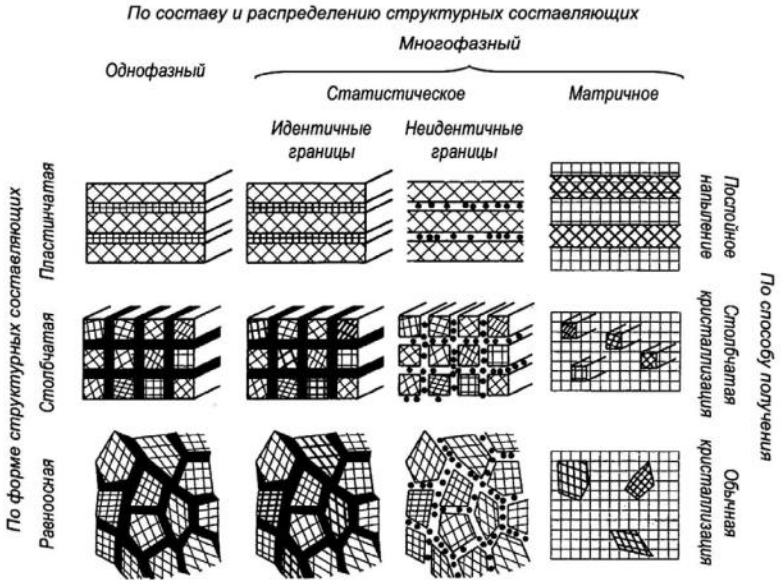


Рисунок 1 – Классификация наноструктурных материалов по форме, составу, распределению структурных составляющих и способу получения

По химическому составу кристаллитов можно выделить четыре группы наноструктурных материалов. Первой группа: материалы с одинаковым химическим составом кристаллитов и границ раздела (слоистые поликристаллические полимеры или чистые металлы с нанокристаллической равноосной структурой). Вторая группа: материалы с разным химическим составом (многослойные наноструктурные материалы с кристаллитами). Третья группа: материалы с различным химическим составом зерна и границ раздела. Четвертая группа: материалы, в которых слои, волокна или равноосные кристаллиты диспергированы в матрице другого состава (дисперсно упрочненные сплавы).

Так же можно выделить нанодисперсии (наноэмульсии или наножидкости), многослойные наноматериалы, наноструктурные покрытия и объемные наноструктурные материалы. Состоят из однородной среды диспергирования и наноразмерных включений, распределенных в этой среде и изолированных одно от другого. Расстояние между включениями может составлять от десятков нанометров до долей нанометров (для нанопорошков). Малые атомные агрегации (кластеры) являются промежуточным звеном между изолированными атомами и молекулами, с одной стороны, и массивным (объёмным) твёрдым телом, с другой стороны. Кластер представляет собой группу из небольшого (счётного) и, в общем случае, переменного числа взаимодействующих атомов (ионов, молекул).

Основные методы получения объемных нанокристаллических материалов представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Методы получения нанокристаллических материалов

Метод	Основные физические процессы	Получаемые материалы
Компактирование нанопорошков	Прессование и спекание; спекание под давлением	Металлические, керамика, композиционные, полимеры
Кристаллизация аморфных сплавов	Кристаллизация аморфных сплавов; интеграция аморфных порошков с последующей кристаллизацией	Аморфизирующиеся Металлические
Интенсивная пластическая деформация	Равноканальное угловое прессование; деформация кручением при высоких давлениях; всесторонняя ковка	Металлические
Формирование высокопористых структур	Слоистые гидроксиды; мезопористые молекулярные сита и др.	Композиционные, керамика, металлокерамика

Слоистые наноматериалы получают методами физического и химического осаждения из газовой фазы, электроосаждения, многократной прокатки и др. Для получения наноструктурных покрытий также используют разные методы: плазменное нанесение покрытий, физическое осаждение из газовой фазы, маг-

нетронное напыление, химическое осаждение из газовой фазы, электролитическое осаждение и др.

Наиболее распространенными являются традиционные методы порошковой технологии, т.е. различные виды прессования и спекания, модифицированные применительно к нанопорошкам. Модификация сводится к выбору оптимальных параметров компактирования и спекания нанопорошков. Такими параметрами являются давление прессования и способы его приложения, температурный режим спекания, среда и скорость проведения процесса. Компактирование нанопорошков можно проводить холодным статическим прессованием с односторонним или двухсторонним приложением давления; горячим аксиальным прессованием; холодным или горячим изостатическим прессованием в гидро или газостатах; формованием литьем из коллоидных гелей с последующим спеканием; магнитно импульсным, ударным и взрывным прессованием; ультразвуковым прессованием.

Основная трудность, возникающая при использовании нанопорошков для создания материалов (деталей, заготовок и т.д.) с минимальной пористостью, связана с интенсивным ростом кристалитов и остаточной пористостью структуры. Однако данные параметры можно контролировать, снизить скорость роста зерен кристаллов, за счет сокращая термического воздействия, а снизить пористость и повысить плотность материала используя высокое статическое или динамическое давления во время пресования. Одним из преимуществам порошковой металлургии является создания композитных материалов с особыми свойствами, а так же безотходность производства. Так же беспористые наноструктурированные материалы можно получить методом кристаллизации из аморфного состояния (пригоден только для сплавов которые можно закалить из расплава в аморфное состояние) и методом интенсивной пластической деформации (применим в основном, к пластически деформируемым материалам).

ЛИТЕРАТУРА

1. Булыгина Е.В., Макарчук В.В., Панфилов Ю.В., Оя Д.Р., Шахнов В.А. Наноразмерные структуры: классификация, формирование и исследование: Учебное пособие для Вузов. – М.: Сайн-Пресс, 2006. – Выпуск 1. – 80 с.
2. Поволоцкая А. В. Гибридные наноструктуры: синтез, морфология, функциональные свойства / А.В. Поволоцкая, А.В. Поволоцкий, А.А. Маньшина // Успехи химии. – 2015. – Т. 84 (6). – С. 579-600.
3. Гончаренко В.В. Полимерные композиционные материалы. Применение в АПК [Текст] / В.В. Гончаренко, И.Г. Шкурин, А.Н. Ховрин // Актуальные проблемы естественнонаучного образования, защиты окружающей среды и здоровья человека (Настоящее и будущее подготовки учащихся и студентов университетов области естественных наук). – Орел: ОГУ имени И.С. Тургенева», 2016. – С.92-94.
4. Шкурин И.Г. Применение композитных материалов для упрочнения рабочего корпуса [Текст] / И.Г. Шкурин // Наука без границ и языковых барьеров: материалы международной научно- практической конференции 19 апреля 2017 года. – Орел: ФГБОУ ВО Орловский ГАУ, 2017 – 85 с., С. 83-85.

УДК 517.987

ВИРИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ В ТЕОРИИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ПОРЯДОК-БЕСПОРЯДОК

Л. П. Данилова
НИУ БелГУ
e-mail: *lyuba-ost@mail.ru*
Ю. П. Вирченко, д.ф.-м.н, проф.
НИУ БелГУ
e-mail: *virch@bsu.edu.ru*

Вычисляется критическая точка фазового перехода в модели решеточного газа с притягивающим взаимодействием, которая, в частности, описывает термодинамику бинарных сплавов. Вычисление основано на разложении по плотности газа. Для анализа температурной зависимости коэффициентов разложения используется их разложение по порядку вхождения в каждый из них функции Урселла. В главном приближении, такой метод построения аппроксимаций приводит к уравнению состояния газа, аналогичному уравнению Ван-дер-Ваальса, которое обладает критической точкой по температуре.

Ключевые слова: решёточный газ, потенциал взаимодействия, вириальное разложение функции Урселла, критическая точка.

В рамках формализма равновесной статистической механики изучается модель решёточного газа. Эта модель представляется «фазовым пространством», состоящим из случайных подмножеств $\Omega \subset \Lambda$, где Λ – кубический «кристалл», состоящий из точек $\Lambda = \{\mathbf{x} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3 : n_j = 0, 1, 2, ..., L-1; j = 1, 2, 3\}$, $L \in \mathbb{N}$ – размер кристалла. Распределение вероятностей Гиббса $\mathsf{P}[\Omega]$ для случайных множеств Ω модели

$$\mathsf{P}[\Omega] = Z^{-1}\exp\Big(-\mathsf{H}[\Omega]/T\Big)\,,\ Z = \sum_{\Omega\subset\Lambda}\exp\Big(-\mathsf{H}[\Omega]/T\Big) \tag{1}$$

определяется гамильтонианом

$$\mathsf{H}[\Omega] = -\mu|\Omega| + \sum_{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\subset\Omega}\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,,\quad |\Omega|\geq 2$$

и полагается $\mathsf{H}[\Omega] = -\mu$ при $|\Omega| = 1$, $\mathsf{H}[\varnothing] = 0$, где Φ – суммируемый потенциал взаимодействия, $\sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^3}|\Phi(\mathbf{x})| < \infty$ такой, что $\Phi(0) = 0$.

Таким образом, уравнение состояния, связывающее давление газа $P = T\ln Z/|\Lambda|$ с его плотностью $\rho = (z/T)\partial P/\partial z$, $z \equiv e^{\mu/T}$ и температурой T (в энергетических единицах) определяется как неявная функция $P(\rho, T)$ на основе статистической суммы (1).

В настоящем сообщении предлагается использование степенных рядов по плотности газа для расчета функции $P(\rho, T)$ в виде т.н. вириального разложения

$$P/T = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(T)}{n!}\,\rho^n \tag{2}$$

так, что для коэффициентов $a_n(T)$ устанавливаются основные формулы посредством модифицированного высокотемпературного разложения. С этой целью модель решеточного газа «погружается» в класс непрерывных моделей статистической механики. Это достигается переопределением потенциала $\Phi(\mathbf{x}) \Rightarrow \tilde{\Phi}(\mathbf{x})$ так, что значение $\tilde{\Phi}(0)$ полагается равным ∞. В этом случае статистическая сумма Z, определенная (1), записывается в виде

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{\langle \mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n\rangle \in \Lambda^n} \exp\Big(-\frac{1}{T} \sum_{i<j}^{n} \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\Big) ,$$

что позволяет использовать для ее вычисления формализм вириального разложения [1] статистической механики непрерывных систем. При этом интегралы по непрерывно изменяющимся расположениям атомов заменяются на суммы по их расположениям в точках из Λ. Тогда, в так называемом термодинамическом пределе $|\Lambda| \to \infty$, имеем

$$P/T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{\langle \mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1}\rangle \in (\mathbb{Z}^3)^{(n-1)}} \Psi_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) , \tag{3}$$

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} \sum_{\langle \mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1}\rangle \in (\mathbb{Z}^3)^{(n-1)}} \Psi_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}) , \tag{4}$$

где т.н. функции Майера Ψ_n определяются формулой

$$\Psi_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) = \sum_{\Gamma_n} \prod_{\{i,j\}\in\Gamma_n} \tilde{\Psi}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) , \tag{5}$$

и $\Psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \tilde{\Psi}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \exp(-\tilde{\Phi}(\mathbf{x}-\mathbf{y})/T) - 1$ – функция Урселла. Суммирование в (5) производится по всем связным графам Γ_n с вершинами, помеченными индексами со значениями из $I_n \equiv \{1, ..., n\}$ и в каждом слагаемом суммы, каждый из сомножителей соответствует ребру $\{i, j\}$ графа Γ_n.

Нами доказана справедливость следующей формулы вида (2), определяющей решения уравнений (3),(4) (см. [2]),

$$P/T = \rho\Big(1 - \rho\frac{d}{d\rho} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(m+1)!}\, \gamma_{m+1}(T)\Big) , \tag{6}$$

$$\gamma_{m+1}(T) = \sum_{\Gamma_{m+1}}^{*} \sum_{\langle \mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_m\rangle \in (\mathbb{Z}^3)^m} \prod_{\{i,j\}\in\Gamma_{m+1}} \tilde{\Psi}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) , \tag{7}$$

где $\sum^*$ обозначает суммирование по всем связным графам с $(m+1)$-й помеченными вершинами, которые не содержат вершин сочленения. Для построения высокотемпературного разложения на основе ряда (6) необходимо вернуться к

модели с потенциалом Φ, что соответствует замене $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) - \delta_{\mathbf{x},0}$ в формуле (7). При такой замене, высокотемпературное разложение можно отождествить с разложением по порядку вхождения «новых» функций $\Psi(\mathbf{x})$ в коэффициенты $\gamma_{m+1}(T)$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда при перестройке ряда (6) в первых двух порядках указанного разложения получается уравнение состояния

$$P(\rho, T)/T = -\ln(1-\rho) - \frac{\rho^2}{2} \sum_{\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}) \,.$$

Такая функция $P(\rho, T)$ обладает точкой бифуркации (критической точкой по температуре), в которой $\partial P/\partial\rho = 0$, $\partial^2 P/\partial\rho^2 = 0$. Из этих уравнений получаются критические значения $\rho = 1/2$, $\sum_{\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}) = 1/4$.

Учет слагаемых в уравнение состояния (6) с порядком вхождения функции Урселла, равным двум, дает дополнительное слагаемое $P_2(\rho, T)$ в правой части (8):

$$P_2(\rho, T) = \frac{\rho^3 F'(\rho)(1 + \rho F'(\rho))}{2(1 - \rho F'(\rho))} \sum_{\mathbf{x}} \Psi^2(\mathbf{x}) \,,$$

где

$$F(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\xi^l}{l!} N_{l+1}$$

– производящая функция чисел N_m – количества связных графиков с $m \in \mathbb{N}$ помеченными вершинами, не содержащих вершин сочленения (см. [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Майер Дж., Гепперт-Майер М. Статистическая механика.— М.: Мир. — 1980. — 546 с.
2. Данилова Л. П., Вирченко Ю. П. О вириальном разложении уравнения состояния одноатомных газов // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. — 2017. — 46. — №6(255). — С.138-140.
3. Вирченко Ю. П., Остапенко Л. П. Задачи перечисления графов с помеченными вершинами // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. — 2016. — 44. — №17(214). — С.150-180.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ОСТЫВАЮЩЕМ МОНОКРИСТАЛЛЕ ВИСМУТА

О.И. Марков, д.ф.-м.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *O.I.Markov@mail.ru*

В статье представлены результаты компьютерного моделирования нестационарного температурного и градиентного полей в остывающем после выращивания монокристалле висмута, в стеклянном контейнере. Рассматриваются решения двумерных задач линейной теплопроводности в анизотропной среде с помощью метода конечных элементов в рамках программы ELCUT.

Ключевые слова: монокристалл висмута, нестационарное температурное поле, конвективный теплообмен, граничная задача.

Физические свойства полупроводниковых монокристаллов во многом определяются наличием в них дефектов. Известно, что плотность дислокаций в монокристаллах зависит от условий их выращивания. Совокупность дефектов в монокристаллах будет существенно различаться из-за особенностей технологии выращивания. Одним из основных механизмов появления дислокаций можно считать термические напряжения [1]. Причиной внутренних напряжений является разная температура отдельных областей кристалла и вследствие этого различие термических деформаций среды. Это обычное явление при искусственном выращивании кристаллов из расплавов. Термоупругие напряжения существуют во время выращивания кристалла, а также при его последующем охлаждении. Если при этом происходит пластическая релаксация термоупругих напряжений, то в кристалле появляются остаточные напряжения. При их достаточной величине и возникает пластическая деформация. В результате пластической деформации могут появляться различного вида дефекты: блоки, двойники, дислокации. По сравнению с предыдущей работой [2] при решении задачи учтено влияние контейнера в виде стеклянной трубки, а так же решена нестационарная задача теплопроводности. Экспериментально дефектная структура слитка висмута исследовалась в работах [3, 4]. Ряд наблюдаемых фактов нуждался в объяснении, в связи, с чем и предпринята эта работа.

Температурный градиент является необходимым условием возникновения внутри тела термических напряжений. Отсюда очевидна необходимость расчета температурного и теплового поля в кристалле при охлаждении после его выращивания. Коэффициенты теплоотдачи в данном случае представляют наибольшую неопределенность, но в данном расчете важен скорее качественный результат. Важно было выявить наличие областей с высокими градиентами температур. В связи с этим целью работы является исследование влияния процесса охлаждения слитка при охлаждении его нижней части на поле градиента температур и выявление области наибольшей неоднородности, оказывающей влияние на формирование внутренних дефектов.

При современных возможностях вычислительной техники наиболее привлекательным путем для решения задачи расчета температурных полей и градиентов температур в остывающем слитке является математическое моделирование. На сегодняшний день достаточно точный расчет теплового поля возмо-

жен при использовании численных методов, в частности, метода конечных элементов.

При постановке задачи используются следующие исходные посылки. Свойства сред: анизотропные материалы с постоянной теплопроводностью. Граничные условия: заданная начальная температура (270° С), заданный тепловой поток на границе, конвективного теплообмена (α=900 $Вт/м^2 град$), поверхности с постоянной наперёд неизвестной температурой. В процессе охлаждения слитка основной отвод теплоты происходит перпендикулярно к оси стеклянного контейнера. Соответственно, термические напряжения за счет радиального градиента температур намного больше, чем осевого, поэтому представляет интерес исследование температурного поля в поперечном сечении слитка.

В качестве материала слитка рассматривается висмут. Монокристаллы висмута обычно выращивались методом горизонтальной зонной перекристаллизации. Такая методика выращивания дает более высокий выход монокристаллов по сравнению с другими методами выращивания. Монокристаллы *Bi* выращивались в частично заполненных стеклянных трубках диаметром 2–3 см с затравкой. Поперечное сечение трубки и слитка висмута в виде сегмента круга диаметром 2 см (рисунок 1). Высота сегмента сечения слитка составляла 5 мм. После кристаллизации всего слитка стеклянная ампула со слитком монокристалла остывает при комнатной температуре. Благодаря конвективному теплообмену возникает радиальный отток тепла, примерно равномерно распределенный вдоль длины слитка. Наличие вакуума внутри стеклянной ампулы позволяет конвекцию внутри контейнера свести к нулю. Для расчета поля температур при охлаждении слитка примем следующие допущения:

1) слиток имеет вытянутую форму с длиной значительно большей поперечных размеров;

2) поперечное сечение слитка монокристалла представляет собой сегмент круга

3) отвод теплоты происходит перпендикулярно к оси цилиндрического стеклянного контейнера.

4) нулевой тепловой поток на торцах слитка

Температура в плоскости сегмента описывается нестационарным линейным уравнением теплопроводности в частных производных [5]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\chi\frac{\partial t}{\partial y}=c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau} \qquad (1)$$

Поскольку слиток находится в вакуумированной стеклянной трубке, то для описания адиабатической границы вдоль хорды сегмента задается плотность теплового потока равная нулю $q_n=0$. Предполагается, что радиационным теплообменом на этой границе можно пренебречь. Конвективный теплообмен по поверхности стеклянного контейнера определяется граничным условием:

$$q_n=\alpha(t-t_0), \qquad (2)$$

где α – коэффициент теплоотдачи; t_0 – температура окружающей среды.

В результате решения уравнения (1) с граничными условиями определяется искомое температурное поле для поперечного сечения слитка. Программа ELCUT может выполнять линейный нестационарный тепловой анализ в плоской постановке [6].

Результаты решения задачи в программе ELCUT приведены на следующих рисунках:

• на рисунке 1 приведены изотермы, полученные в первые 2-4 секунды в поперечном сечении слитка висмута, с вертикальной ориентацией тригональной плоскости, как видно, изотермы в слитке представляют собой практически правильные полуэллипсы;

• на рисунке 2 приведены изотермы в поперечном сечении слитка висмута с горизонтальной ориентацией тригональной плоскости, изотермы в слитке также близки к полуэллипсам с горизонтальным расположением большой оси;

• на рисунке 3 приведено распределение модуля градиента температуры в вертикальном направлении вдоль высоты сегмента (1,3) и горизонтальном направлении от середины хорды к ее концу (2, 4), номера кривых 1и 2 относятся к вертикальному расположению тригональной плоскости кристалла, номера 3 и 4 –к горизонтальному, (кривые 1и 3 в момент 2.4 с, кривая 2 -4.1 с , 4 – 3.5 с).

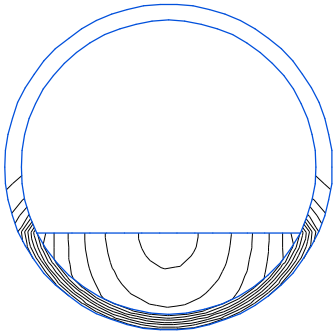


Рисунок 1 – Изотермы в поперечном сечении слитка висмута при вертикальном положении тригональной плоскости, перпендикулярной оси трубки

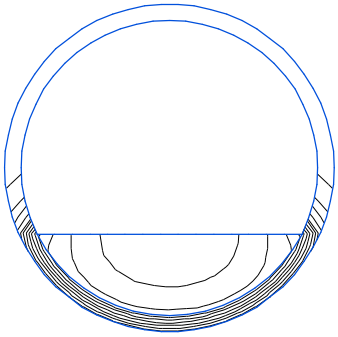


Рисунок 2 – Изотермы в поперечном сечении слитка висмута при горизонтальном положении тригональной плоскости

В данном случае максимальное значение модуля градиента температур достигается на границе слитка в области контакта со стеклянным контейнером. В этой области возможные наибольшие термонапряжения.

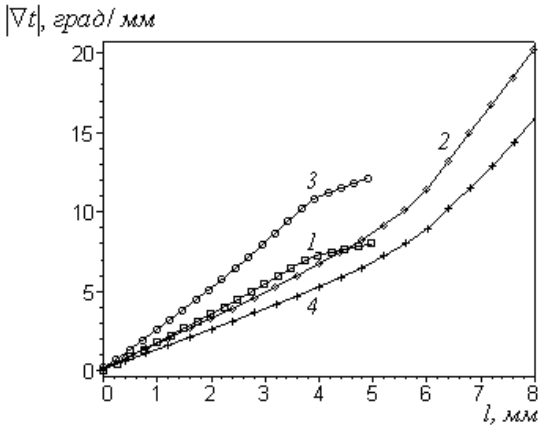


Рисунок 3 – Распределение модуля градиента температур вдоль высоты сегмента (1,3) и от середины хорды до ее конца (2, 4)

Кроме этого рассчитано температурное поле в случае, когда выращивание монокристаллов висмута проводилось по методу К.Г. Иванова [7] в целиком заполненных стеклянных трубочках диаметром 5 мм (рисунок 4).

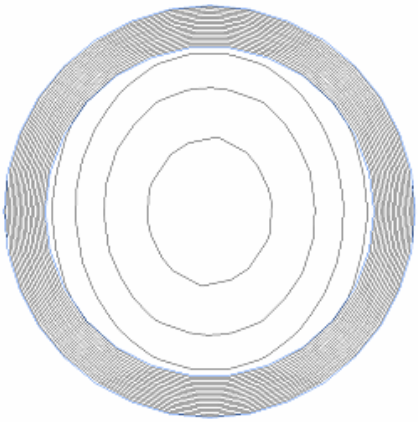


Рисунок 4 – Изотермы в поперечном сечении слитка висмута при вертикальном положении тригональной плоскости, перпендикулярной оси трубки

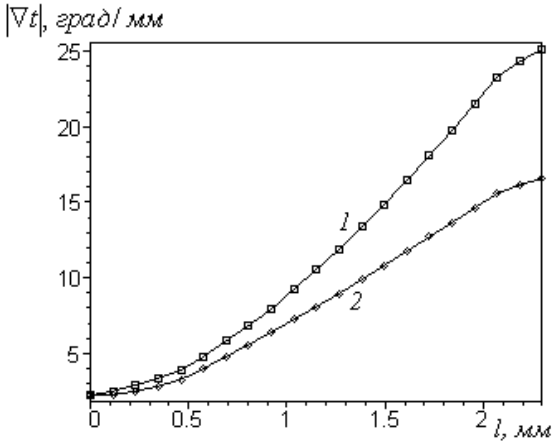


Рисунок 5 – Распределение модуля градиента температур вдоль тригональной оси(1) и перпендикулярно оси (2) в момент времени 0.25 с

Расчет показал, что при том же перепаде начальных температур слитка 270° С и среды 20° С в трубочках возможны большие градиенты температуры, а значит и термомеханические напряжения. При этом плотность дислокаций в кристаллах при этом способе выращивания меньше, чем в первом [3,4].

Полученные данные дают информацию о распределении температур и модуля градиента температур в остывающем слитке монокристалла висмута. Наибольшие градиенты температуры создаются в первые секунды начала охлаждения. Как выяснилось, влияние стеклянного контейнера на формирование температурного и градиентного полей оказалось весьма существенным. Наибольшие градиенты температуры создаются в направлении, перпендикулярном тригональной оси на границе с контейнером. На основе результатов расчетов могут быть подобраны такие условия, которые будут соответствовать наименьшим температурным напряжениям, а, следовательно, обеспечивать наилучшее качество кристалла. Осуществление рассмотренных вариантов неоднородных тепловых полей требует регулирования процесса выращивания в стадии режима охлаждения кристалла. По результатам физического моделирования выявлено, что в остывающем слитке существует область с повышенным значением модуля градиента температуры, что может привести к повышенным термомеханическим напряжениям и, при достижении предельных значений, возможностью образования дефектов. Сравнение двух способов выращивания монокристаллов висмута позволяет предположить, что термические напряжения при охлаждении не играют существенной роли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пунин Ю.А., Штукенберг А.Г. Автодеформационные дефекты кристаллов.СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. – 2008. – 318 с.

2. Марков О.И. Моделирование температурного поля в остывающем слитке. В сб. Избранные труды физико-математического факультета Орловского государственного университета. – Орел. – ОГУ. – 2016. – С.57-61.
3. Корчагин П.С., Марков О.И., Хрипунов Ю.В. Автодеформационные дефекты монокристаллов висмут-сурьма // Ученые записки ОГУ. – 2011. – №3(41). – С.61-66.
4. Корчагин П.С., Марков О.И., Хрипунов Ю.В. Исследование дефектов на поверхности монокристаллов висмута и сплавов висмут-сурьма // Ученые записки ОГУ. – 2011. – №5(43). – С.173-179.
5. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. Ч.1. – М.: Высшая школа, 1982. – 327 с.
6. Описание возможностей программы ELCUT // источник: http://elcut.ru.
7. Иванов К.Г., Крылов А.С., Калугина И.К. Выращивание монокристаллов висмут-сурьма // ПТЭ. – 1975. – №2. – С.225-226.

УДК 621.362+537.323

ХОЛЛОВСКАЯ ПОДВИЖНОСТЬ ЭЛЕКТРОНОВ В СПЛАВАХ $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Gd_{0.01}Te_x$

О.И. Марков, д.ф.-м.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *O.I.Markov@mail.ru*

В статье представлены результаты расчета холловской подвижности в сплавах висмут-сурьма с добавками теллура и гадолиния, полученных на основании экспериментально измеренных гальваномагнитных эффектов.

Ключевые слова: монокристаллы висмут-сурьма, эффект Холла, удельное сопротивление, подвижность электронов.

Сплавы висмута с сурьмой $Bi_{1-x}Sb_x$ образуют непрерывный ряд твердых растворов замещения. Исследования, проведенные Джейном [1], показали, что эти сплавы обладают полупроводниковыми свойствами, при содержании $0.05 \le x \le 0.4$ сурьмы в области температур ниже 150 К. Возможность плавной перестройки энергетического спектра сплавов висмут-сурьма [2], а также чувствительность свойств висмута и его сплавов к внешним воздействиям: изменению температуры, давления, магнитного и электрических полей позволили выдвинуть новые теоретические положения в физике твердого тела и развить новые экспериментальные методы. В настоящее время твердые растворы висмут - сурьмы хорошо известны в физике твердого тела как модельный материал, представляющий как теоретический, так и практический интерес. Возможность плавной перестройки энергетического спектра с изменением состава, а также чувствительность свойств сплавов висмут-сурьма к внешним воздействиям (изменению температуры, давления, магнитного поля) делают их прекрасным модельным материалом, имеющим как фундаментальный, так и прикладной интерес. Варьировать свойства сплавов висмут-сурьма в широкий пределах

можно использованием примесей. Легирование активными (донорными и акцепторными) примесями позволяет, изменяя уровень химического потенциала, делать актуальными те или иные группы носителей заряда и, тем самым, достичь оптимальной с точки зрения термоэлектрической эффективности концентрации носителей заряда. Однако при введении примесей в сплав могут изменяться механизмы рассеяния, что скажется на подвижности носителей, причем чаще всего это происходит нежелательным образом. Изменить соотношение вкладов различных групп носителей заряда, изменяя только их подвижности, можно введением пассивных примесей, вносящих конкурирующий механизм рассеяния носителей. Это можно сделать, например, с помощью спин - зависимого рассеяния введением в полупроводник магнитных примесей электронов проводимости, что повлияет на вклады различных групп носителей заряда. Незаполненные d-слои переходных и f-слои редкоземельных элементов также могут вести себя как эффективные ловушки электронов проводимости, что тоже повлияет на вклады различных групп носителей заряда. Другой возможностью изменения механизма рассеяния является введение в матрицу наноразмерных дефектов, которые вызовут селективное рассеяние отдельных групп носителей заряда, изменяя их вклад в явления переноса. С целью исследования возможностей реализации этих идей нами было решено использовать добавки гадолиния, как элемента имеющего один из самых больших магнитных моментов, в твердые растворы висмут-сурьма. Изучение влияния примеси гадолиния на кинетические свойства сплавов висмут-сурьма было начато с пионерской работы [3].

Известно, что монокристаллы сплавов висмут-сурьма являются самыми эффективными термоэлектриками [4,5] и используются в низкотемпературных каскадах охлаждающих устройств. Низкотемпературные охладители (T<200K) представляют интерес при создании криостатов фотоприемных устройств для внеатмосферной астрономии, космических аппаратов, применяемых при зондировании Земли и планет в инфракрасном диапазоне и др. В этих случаях преимущества термоэлектрических холодильников, как компактных, легкоуправляемых устройств, наиболее ощутимы.

Общая схема перестройки энергетического спектра дается в [2]. Влияние ее на термоэлектрические свойства сплавов висмут-сурьма изучалось многочисленными группами исследователей, в том числе и нами [6,7]. Легирование и его сплавов висмут-сурьмы теллуром позволяет менять положение уровня Ферми и исследовать изменение физических свойств сплавов, обусловленное его изменением.

С целью более подробного изучения тройных сплавов $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Gd_{0.01}$ изменения концентрации и подвижностей носителей заряда с изменением состава и температуры нами впервые исследовались четверные сплавы $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Gd_{0.01}Te_x$, с x=0, 0.001, 0.003, 0.005 и 0.01 ат. % Te. Технология получения и приготовления образцов монокристаллов подробно описывалась в работе [8]. Там же приводятся результаты исследования кинетических свойств перечисленных сплавов. В данной работе приведены результаты оценки подвижностей носителей заряда для указанных составов. Для расчета

использовалась простейшая двухзонная модель. Расчет производился на основе аппроксимации сплайнами экспериментальных данных по гальваномагнитным явлениям.

Экспериментальные зависимости компонент удельного сопротивления ρ_{11} и коэффициента Холла $R_{23,1}$ представлены на рисунках 1 и 2 соответственно. Сравнение кривых сплавов $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Gd_{0.01}Te_x$ и $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Te_x$ [6,7] показывают, что атомы гадолиния не являются активной примесью и не изменяет концентрацию носителей заряда, а зонная структура остается практически неизменной. Воздействие примеси гадолиния сводится к изменению механизма рассеяния.

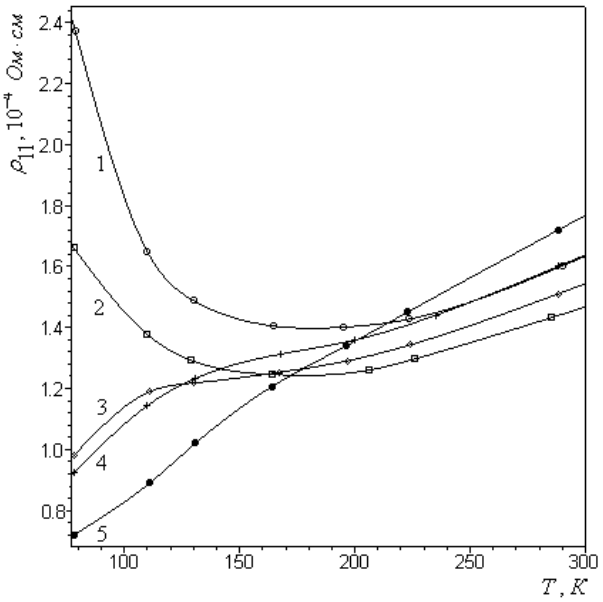


Рисунок 1 – Температурная зависимость компоненты удельного сопротивления ρ_{11} для сплавов $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Gd_{0.01}Te_x$ (кривая 1 при x=0, 2 – 0.001, 3 – 0.003. 4 – 0.005, 5 – 0.01)

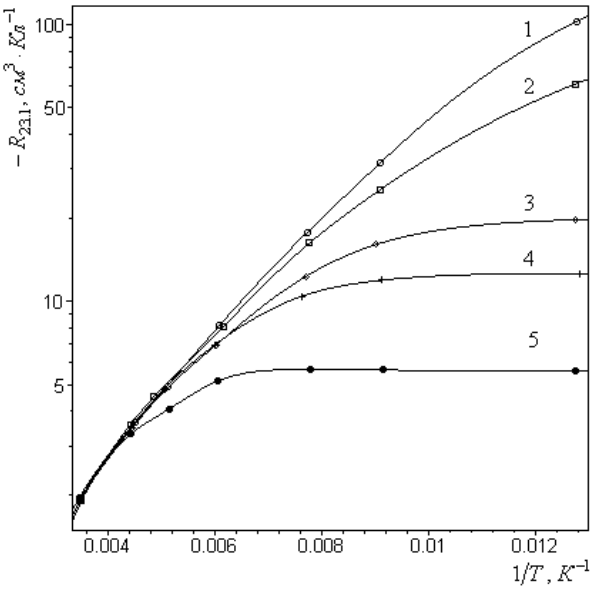


Рисунок 2 – Температурная зависимость компоненты постоянной Холла $R_{23,1}$ для сплавов $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Te_x$ (кривая 1 при x=0, 2 – 0.001, 3 – 0.003. 4 – 0.005, 5 – 0.01)

Из рисунка 1 видно, что зависимость ρ_{11} от температуры можно разбить на две области. Сплавы с содержанием Te 0, 0.001, 0.003 при низких температурах обладают полупроводниковыми свойствами и с повышением температуры переходят в полуметаллические. Компонента коэффициента Холла $R_{23,1}$ отрицательна во всем интервале температур и магнитных полей. На рисунке 2 хорошо выделены области «однозонности» для сплавов с x=0.03, 0.005 и 0.01 ат. %. Расчеты кинетических эффектов в «однозонном» состоянии значительно упрощаются. Это позволяет ограничиться при расчете этих сплавов одним типом носителей заряда. Оценка подвижности электронов может быть проведена на основе соотношения

$$u_{11} = \frac{R_{23,1}}{\rho_{11}} \qquad (1)$$

Соответствующие кривые приведены на рисунке 3.

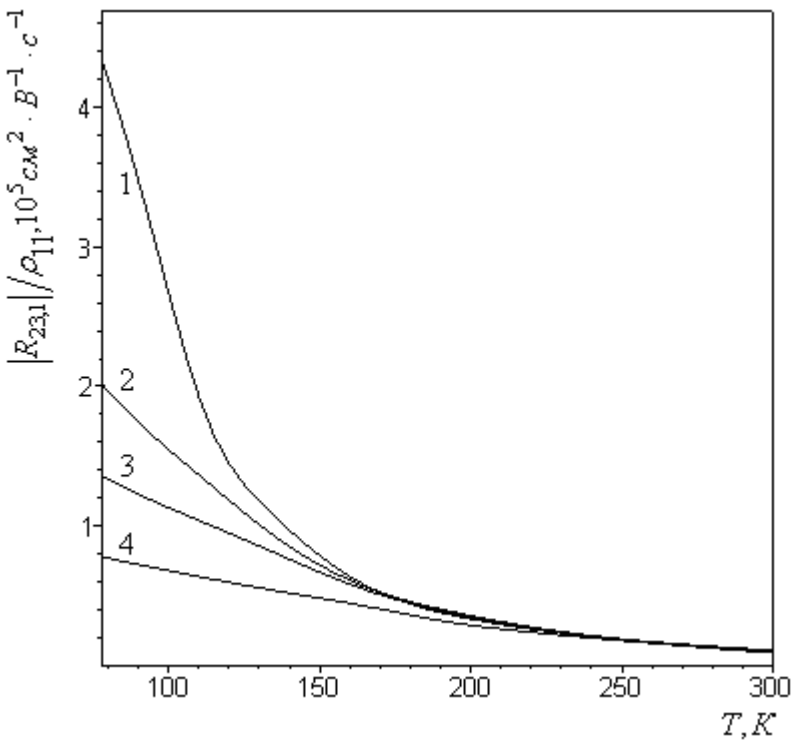


Рисунок 3 – Температурная зависимость отношения $|R_{23,1}|/\rho_{11}$ для сплавов $Bi_{88}Sb_{12}Gd_{0,01}Te_x$ с x=0 – кривая 1, x=0,003 – 2, x=0,005 – 3, x=0,01 – 4

Для собственного сплава $Bi_{88}Sb_{12}Gd_{0,01}$ (кривая 1) можно сделать оценку подвижности из соотношения в виде $|R_{23,1}|/\rho_{11} = u_1^- - u_1^+$. Поскольку подвижность электронов значительно больше подвижности дырок $u_1^- >> u_1^+$ [8, 9] то, используя отношение $|R_{23,1}|/\rho_{11}$ можно качественно судить некоторые закономерности поведения подвижности и для собственных сплавов. В области температур жидкого азота подвижность легированных теллуром сплавах зависит от температуры $\sim T^{-1}$ и от концентрации носителей заряда $\sim n^{-1}$. В области температур 240-300K, где вследствие перекрытия зон усиливается вырождение носителей зависимость от температуры $\sim T^{-2.86}$, что близко к часто приводимой зависимости $\sim T^{-5/2}$, что характерно для промежуточного вырождения электронов [10], а практическое совпадение кривых для собственного и легированных сплавов указывает, что подвижность носителей почти не зависит от их концентрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jain A. L. Temperature Dependence of the Electrical Properties of Bismuth-Antimony Alloys. // Phys. Rev. – 1959. – Vol.114. – №6. – P.1518-1528.
2. Брандт Н.Б., Чудинов С.М., Караваев В.Г. Исследование бесщелевого состояния индуцированного магнитным полем в сплавах висмут-сурьма// ЖЭТФ. – 1976. – т.70. – №6. – С.2296-2317.
3. Иванов Г.А., Панарин А.Ф., Марков О.И., Бочегов В.И.. Влияние редкоземельных элементов на электрические свойства сплавов висмут-сурьма. Ма-

териалы IV Всесоюзного симпозиума «Полупроводники с узкой запрещенной зоной и полуметаллы» Ч.3. – Львов. – 1975. – С.22.
4. Smith G.E., Wolf R. Thermoelectric Properties of Bismuth-Antimony Alloys. // J. Appl. Phys. – 1962. – Vol. 33. – №3. – P.841-846.
5. Goldsmid H.J. Bismuth-Antimony Alloys. // Physica Status Solidi (a). – 1970. – Vol.1. – №1. – P.7-28.
6. Марков О.И. Термоэлектрические свойства твердых растворов $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Te_x$. Известия ТулГУ. Серия. Физика. – Вып.4. – Тула.: Изд-во ТулГУ. – 2004. – С.81-86.
7. Марков О.И. Расчет характеристик носителей тока в сплавах $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{(1-x)}Te_x$. Труды международной конференции «Современные методы физико-математических наук». – ОГУ. – Орел. – 2006. – С.140-145.
8. Грабов В.М.Энергетический спектр и механизмы релаксации носителей заряда в легированных кристаллах висмута, сурьмы и сплавов висмут-сурьма. Дисс. … докт. физ. мат. наук. – СПб.: СПбГТУ. – 1999.
9. Марков О.И. Влияние примесей редкоземельных элементов и распределения компонентов на кинетические свойства и термоэлектрическую эффективность сплавов висмут-сурьма. Дисс… д-р физ. мат. наук./ ЮЗГУ. – Курск. – 2012.
10. Равич Ю.И., Ефимова Б.А., Смирнов И.А.. Методы исследования полупроводников в применении к халькогенидам свинца PbTe, PbSe, PbS. – М.: Наука. – 1968. – 383 с.

УДК 538.91

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ МОНОКРИСТАЛЛА ВИСМУТА С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННОГО МИКРОСКОПА

Л.Ф. Ставчикова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный аграрный университет имени Н.В. Парахина»
e-mail: *SLF.74@yandex.ru*

Проводились исследования поверхности монокристалла висмута для обнаружения макроскопических дефектов электронным микроскопом. Применялся настольный электронный микроскоп Hitachi TM-1000 (рисунок 1).

Все исследования проводились в лаборатории центра коллективного пользования Инновационного научно-исследовательского испытательного центра ФГБОУ ВО «Орловский государственный аграрный университет».

Изображение, получается, посредством регистрации электронов, рассеянных поверхностью образца в обратном направлении. Снимок образца проводиться при высокой степени увеличения, которая не доступна при работе с обычными оптическими микроскопами. Благодаря большей глубине резкости, удается получать стереоскопическое изображение.

Рисунок 1 – Настольный электронный микроскоп Hitachi TM-1000

Не требуется сложной настройки условий наблюдения и трудоемкой работы по подготовки образца.

В ходе анализа образцы облучаются пучком электронов с энергией 15 кэВ. При этом с поверхности вылетают вторичные электроны, отраженные электроны, а также тормозное и характеристическое рентгеновское излучение. Сравнение интенсивностей отраженных электронов в различных точках поверхности позволяет определить рельеф поверхности. По характеристическому излучению можно судить о составе поверхности.

Исследуемый в работе монокристалл висмута предоставлен Хрипуновым Ю.В и выращен Марковым О.И. в лаборатории полуметаллов РГПУ им. А.И.Герцена методом горизонтальной зонной перекристаллизации [1,2].

Предметом исследований выбраны поверхность скола по плоскости (111) и среза по базисной плоскости.

Анализ ЭМ-снимков поверхности монокристалла висмута, полученных с помощью настольного электронного микроскопа, показал наличие таких дефектов как террасы, двойники и дислокации.

На срезе монокристалла можно увидеть множество борозд, ступенек и различных размеров шероховатости.

Граница террас представляет собой ломаные линии, составляющие части которой имеют различную кристаллографическую ориентации. [3-6]. На ЭМ-снимках видно, что образующиеся пороги на границе террас имеют различную высоту. При этом на плоскости порогов наблюдается множество трещин в виде, так называемого, речного узора. Трещины располагаются в направлении перпендикулярном границе террасы. Протяженность трещин эквивалентна высоте порогов (рисунки 2,3).

При изучении деформации кристалла висмута было обнаружено, что разориентация материала в сбросе относительно материала вне сброса может достигать 90°. У их границ сбросов видны трещины. Установлено, что на развитие полос сброса сильное влияние оказывают поверхностные дефекты: вблизи поверхностных трещин происходит локализация пластической деформации, ведущая к образованию полос [7-9].

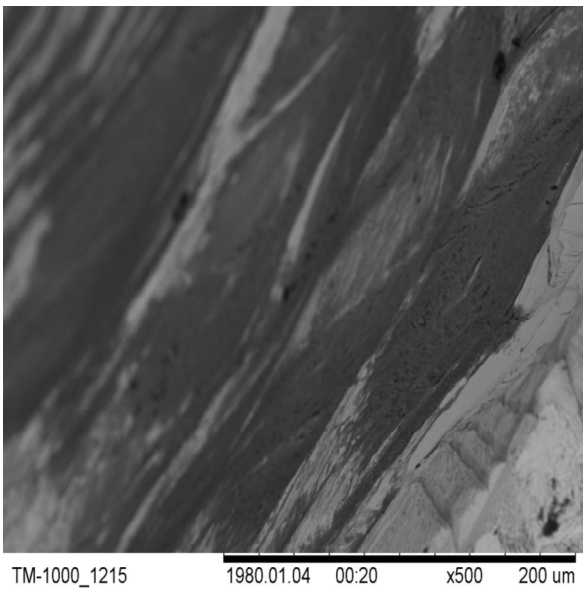


Рисунок 2 – ЭМ-изображение поверхности скола монокристалла висмута.
(режим обратно рассеянных электронов, увеличение микроскопа 500, видны террасы и двойники)

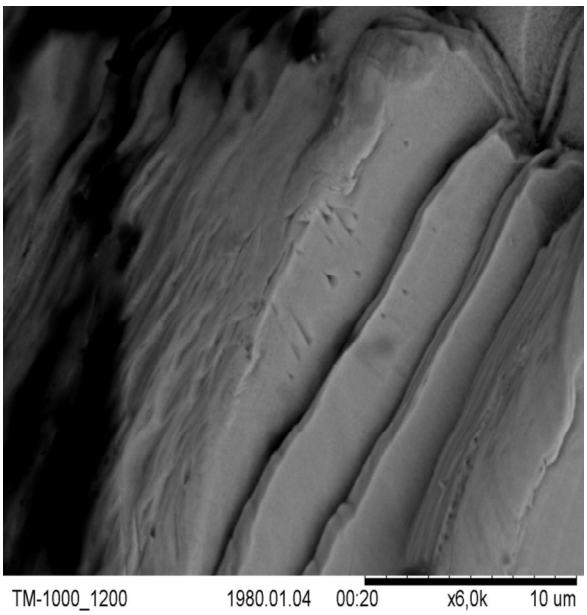


Рисунок 3 – ЭМ-изображение поверхности скола монокристалла висмута (режим обратно рассеянных электронов, увеличение микроскопа 6000)

Границы террас не являются прямыми, это связано с тем, что они не следуют строго по одному атомному ряду, а постоянно происходят переходы трещины в другие ряды, что может быть связано с дефектностью кристалла. Развитие хрупких трещин, происходит с большой скоростью, это должно было бы привести к образованию двух идеально плоских поверхностей (плоскостей слома). В некоторых случаях образуются зеркальные поверхности, однако большей частью на поверхности излома отчётливо выявляются неровности – так называемый, ручьистый (речной) узор (рисунок 4).

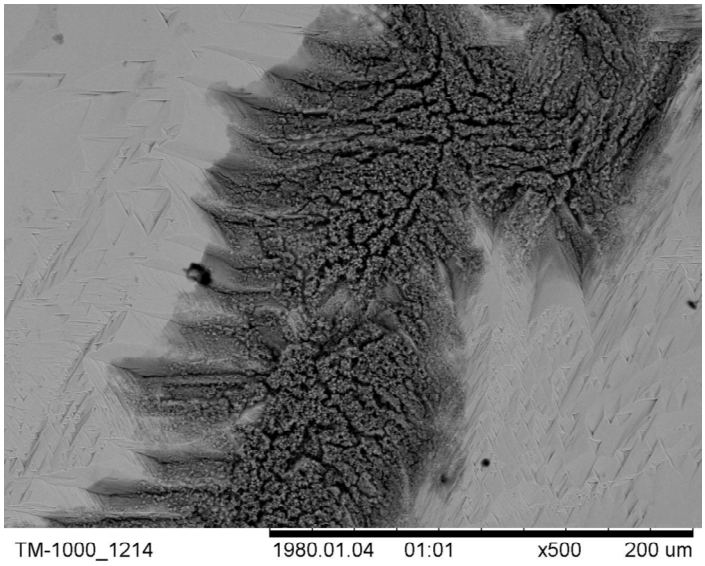


Рисунок 4 – ЭМ-изображение поверхности скола монокристалла висмута (режим обратно рассеянных электронов, увеличение микроскопа 500, виден рельеф «ручьистого узора»)

Одним из основных типов дефектов на поверхности монокристалла висмута являются дислокации [10,11]. Дислокациям на поверхности соответствуют ямки, которые называются ямками травления (рисунок 5). Их образование в районе выходов дислокаций на поверхности связано с тем, что область кристаллической решетки вблизи дислокации имеет избыток энергии, за счет чего облегчено удаление атомов с поверхности твердого тела на этих участках.

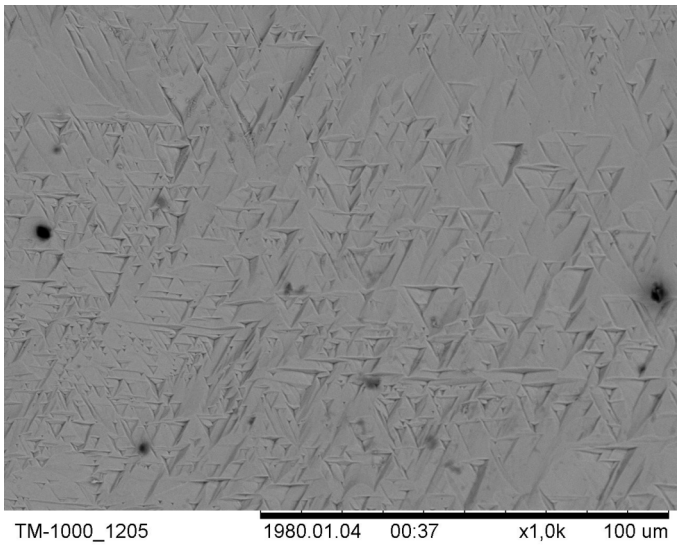


Рисунок 5 – ЭМ-изображение поверхности скола монокристалла висмута (режим обратно рассеянных электронов, увеличение микроскопа 1000, видны ямки травления)

Коллективное действие поверхностных дефектов меняет структуру поверхности. Даже в малых концентрациях дефекты играют решающую роль процессах, протекающих на поверхности. Выявление особенностей дефектообразования на поверхности кристаллов висмута дает возможность выяснить некоторые физические свойства, уточнить применение висмута в качестве функционального материала в высокотехнологичном производстве, создавать приборы с определенными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1.Марков О.И. Контроль состава ветвей термоэлементов на основе монокристаллов твердых растворов висмут-сурьма / О. И. Марков // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2008. – №4. – С.44-46.
2.Марков О.И. Контроль концентрации донорной примеси в и-ветви термоэлемента на основе монокристаллов твердых растворов висмут-сурьма / О.И. Марков // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2010. – №3. – С.42-44.
3.Корчагин П.С. Автодеформационные дефекты монокристаллов висмут-сурьма / П.С. Корчагин, О.И. Марков, Ю.В. Хрипунов // Учёные записки Орловского государственного университета. – 2011. – № 3(41). – С.61-66.
4.Хрипунов Ю.В., Об особенностях структуры поверхности монокристалла висмута / Ю.В. Хрипунов, О.И. Марков // Альманах современной науки и образования. – 2009. – №12(31). – Ч.1. – С.138-141.

5.Марков О.И. Контроль поверхности кристалла висмута после технологической обработки / О.И. Марков, Ю.В. Хрипунов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2011. – Вып.8. – С.56-59.
6. Марков О.И. Определение направлений дислокаций в монокристаллах висмута по ямкам травления / О.И. Марков, Ю.В. Хрипунов // Актуальные проблемы прочности. – Харьков. – 2011. – С. 351.
7. Идеальная и дислокационная структура кристаллов висмута / В.И. Чернобай, Г.А. Иванов, Г.Б. Багдуев, Т.В. Чернобай // Сб.«Полуметаллы и полупроводники». Л.: ЛГПИ им. А.И. Герцена. 1975. – С.37-43.
8.Хрипунов Ю. В. Топология поверхности скола монокристалла висмута // Материалы конференции ВНКСФ-15. Кемерово-Томск. – 2009. – С.784
9. Хрипунов Ю.В., Марков О.И. Об особенностях структуры поверхности монокристалла висмута/ Ю.В. Хрипунов, О.И. Марков / Альманах современной науки и образования. – Тамбов. – 2009 – Вып.12(31). – Ч.1. – С.138-141.
10.Хрипунов Ю.В. Реструктуризация поверхности среза кристалла висмута в атмосфере водорода / Ю.В. Хрипунов, О.И. Марков // Учёные записки ОГУ. Серия: естественные, технические и медицинские науки. – 2009. – Вып.4(34). – С.11-15.
11.Хрипунов Ю.В. Особенности дефектообразования на поверхности монокристалла висмута /Ю.В. Хрипунов, А.В. Сорокин, О.И. Марков, П.С. Корчагин, О.В. Аношина // Молодой ученый. – 2010. – Вып.5. – Т.1. – С. 22-26.

УДК 533.72

ОСОБЕННОСТИ ТЕПЛООБМЕНА В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ГАЗООБРАЗНЫХ СРЕДАХ

А.А. Трубаев, магистрант
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
e-mail: *трубаев@mail.ru*
Н.В. Малай, д.ф.-м.н., проф.
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
e-mail: *malay@bsu.edu.ru*

Получено приближенное решение задачи о теплообмене движущийся крупной нагретой твердой сферической частицы, внутри которой действуют неравномерно распределенные источники тепла при малых конечных значениях чисел Пекле и Рейнольдса. Задача решается методом сращиваемых асимптотических разложений по числу Рейнольдса. Построено поле температуры и найден полный поток тепла на поверхности частицы до первого порядка малости по числу Рейнольдса. Основным уравнением в задаче является уравнение конвективной теплопроводности, в котором поле скоростей вязкого обтекания считается известным из решения соответствующей гидродинамической задачи.

Ключевые слова: теплообмен сферической частицы

1. Введение

Теплообмен оказывает существенное влияние на процессы изменения состояния вещества, механические, тепловые, магнитные и другие свойства тел. Именно этим и объясняется такое интенсивное развитие теории теплообмена и то исключительно важное значение, которое уделяется ей в энергетике, химической технологии, авиастроении, медицине, сельском хозяйстве и природе [1].

В связи с развитием лазерной технологии значимость процесса теплообмена в производстве значительно возросло поскольку свойства тел существенным образом зависят от их теплового состояния, которые в свою очередь сами определяются условиями теплообмена.

При описании процесса теплообмена будем использовать термин «относительный перепад температуры». Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности между средней температурой поверхности частицы T_{iS} и температурой вдали от нее T_∞ к последней. Относительный перепад температуры считается значительным, если имеет место следующая оценка $(T_{iS} - T_\infty)/T_\infty \sim (1)$. В этом случае необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры, что существенно осложняет анализ системы газодинамических уравнений и сама вязкая газообразная среда называется неизотермической. Здесь и далее индексы «e» и «i» будем относить к газу и частице, индексом «s» – обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы равной T_{iS}, а индексом «∞» – обозначены средние значения физических величин, характеризующие газовую среду в невозмущенном потоке.

Нагрев поверхности частицы до температуры T_{iS} осуществляется за счет внутренних источников тепла неоднородно распределенных в ее объеме, плотность этих тепловых источников будем обозначать через q_i. Нагрев поверхности частицы может происходить разными способами, например, за счет выделения тепла при химических реакциях, за счет радиоактивного распада вещества частицы, за счет внешнего излучения и т.д. В частности, если на частицу падает поток электромагнитного излучения с длиной волны λ_0, интенсивностью I_0, то поглощаемая ей энергия равна $\pi R^2 I_0 K$, где R – радиус частицы, K – так называемый фактор поглощения.

2. Постановка задачи и граничные условия

Рассматривается установившейся процесс теплопереноса в потоке вязкой неизотермической газообразной среде с температурой T_∞, плотностью ρ_∞, теплопроводностью λ_∞ и вязкостью μ_∞, обтекающей твердую крупную нагретую сферическую частицу радиусом R. На большом расстоянии от частицы скорость потока равна U_∞.

Поскольку рассматривается теплообмен при $(T_{iS} - T_\infty)/T_\infty \sim (1)$, то необходимо сделать следующие физические допущения, реализуемые в большинстве прикладных задач:

Допущение 1. При описании свойств газообразной среды и частицы используется степенной вид зависимости вязкости, теплопроводности и плотности от температуры: $\mu_e = \mu_\infty t_e^\beta$, $\lambda_e = \lambda_\infty t_e^\alpha$, $\rho_e = \rho_\infty / t_e$, $\lambda_i = \lambda_o t_i^\chi$, где $\mu_\infty = \mu_e(T_\infty)$, $\lambda_\infty = \lambda_e(T_\infty)$, $\lambda_o = \lambda_i(T_\infty)$, $\rho_\infty = \rho_e(T_\infty)$, $t_e = T_e / T_\infty$, $t_i = T_i / T_\infty$, $0{,}5 \le \alpha,\ \beta \le 1,\ -1 \le \gamma \le 1$.

Допущение 2. Коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газообразной среды, что имеет место для большинства газообразных сред. Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью по углу θ в системе «частицы–газообразная среда» (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры) и, следовательно, вязкость связана только с температурой $t_{e0}(r)$, т.е. $\mu_e(t_e(r,\theta)) \approx \mu_\infty t_{e0}^\beta$, При этом $t_e(r,\theta) = t_{e0}(r) + \delta t_e(r,\theta)$, $\delta t_e(r,\theta) << t_{e0}(r)$, $\delta t_e(r,\theta)$, $t_{e0}(r)$ определяются из решения тепловой задачи. При таком допущении можно рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется с помощью граничных условий;

Допущение 3. Характерные значения времен установления распределения полей температуры и скорости течения в среде малы по сравнению с характерным временем ее нагрева. Будем считать, что в силу малости времени тепловой релаксации процесс теплопереноса в системе частица – газ протекают квазистационарно;

Допущение 4. Частица образована однородным и изотропным по своим свойством веществом.

С учетом указанных выше допущений решается следующая система уравнений, описывающая распределение температуры вне и внутри частицы

$$\rho_e c_p (U_e \nabla) T_e = div\left(\lambda_e \nabla T_e\right), \tag{1}$$

$$div\left(\lambda_i \nabla T_i\right) = -q_i, \tag{2}$$

Система уравнений (1) - (2) решалась со следующими граничными условиями в сферической системе координат. На поверхности частицы $(r = R)$ учитываются:

– равенства температур и непрерывность радиального потока тепла с учетом тепла, идущего на излучение

$$T_e = T_i, \quad -\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} - \sigma_0 \sigma_1 \left(T_i^4 - T_\infty^4\right), \tag{3}$$

– условие непроницаемости для нормальной и тепловое скольжение для касательной компонент массовой скорости

$$U_r^e = 0, \quad U_\theta^e = K_{TS} \frac{\nu_e}{R T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta}. \tag{4}$$

Рассмотрим граничные условия вдали от крупной частицы, т.е. в невозмущенном потоке $(r \to \infty)$

$$T_e = T_\infty. \tag{5}$$

Учтем конечность температуры в центре аэрозольной частицы, при $r \to 0$

$$T_i \neq \infty . \tag{6}$$

В приведенных выше уравнениях и граничных условиях для крупной частицы введены следующие обозначения: $U_r^e(y,\theta)$ и $U_\theta^e(y,\theta)$ – нормальная и касательная компоненты массовой скорости газа U_e, λ_e, λ_i – коэффициенты теплопроводности газа и частицы, σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана, σ_1 – интегральная степень черноты; c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, K_{TS} – коэффициент теплового скольжения, выражение для которого находится методами кинетической теории газов. При коэффициентах аккомодации тангенциального импульса α_τ и энергии α_E равных единице, газокинетический коэффициент $K_{TS} = 1.152$ (например [2,3]).

3. Поле температуры в окрестности нагретой сферической частицы. Поток тепла на поверхность частицы

При рассмотрении процесса теплообмена поле скорости считается заданной и может быть взято из работ [2-3].

Решение уравнения (1) находилось методом сращиваемых асимптотических разложений [4], а уравнения (2) – методом разделения переменных. Приведем явный вид первого приближения внутреннего разложения поля температуры в окрестности нагретой частицы, которое используется для нахождения полного потока тепла на поверхность частицы (числа Нуссельта)

$$t_e(y,\theta) = t_{eo}(y) + \varepsilon\, t_{e1}(y,\theta), \tag{7}$$

где $t_{e0} = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$, $t_{e1} = \frac{cos\,\theta}{t_{e0}^{\alpha}}\left[D_1 y + \frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega}{3}\left(\tau_3 + A_2\frac{\tau_2}{y} - A_1\frac{\tau_1}{y^3}\right)\right]$, $y = \frac{r}{R}$,

$$\tau_1(y) = (1-\ell)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n^{(1)}}{1+n}\ell^n - \frac{(1-\ell)^4}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n^{(2)}}{4+n}\ell^n\,, \quad \varepsilon = R_{e\infty} = (RU_\infty\rho_\infty)/\mu_\infty\,,$$

$$\tau_2(y) = \frac{1}{1-\ell}\left[1 + \ell\, ln\,\ell + \ell C_1^{(2)}(\ell - ln\,\ell) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{m+2}^{(2)}}{1+n}\ell^{n+2}\left(1 - \frac{n+1}{n+2}\ell\right)\right] +$$

$$+ (1-\ell)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n^{(3)}}{2+n}\ell^n - \frac{\omega_2(1-\ell)}{y^2}f(\lambda),\ \omega = \frac{\Gamma_0 c_p\mu_\infty}{\lambda_\infty},\ \ell = \frac{\Gamma_0}{y+\Gamma_0},\ \Delta_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{n}C_k^{(1)}\,,$$

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ell^n}{n+1}\left(\Delta_n^{(1)}\, ln\, y + \Omega_n^{(1)}\right) - \frac{(1-\ell)^3}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ell^n}{n+4}\left(\Delta_n^{(2)}\, ln\, y + \Omega_n^{(2)}\right),\ \Omega_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\Delta_k^{(1)}}{k+1}\,,$$

$$\tau_3(y) = \frac{1}{(1-\ell)^2}\left[\frac{1}{2} - 2\ell - \ell^2\, ln\,\ell + \ell^2 C_2^{(3)}\left(2\ell - ln\,\ell - \frac{\ell^2}{2}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{m+3}^{(3)}}{n+1}\ell^{n+3}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1 - 2\frac{n+1}{n+2}\ell + \frac{n+1}{n+3}\ell^2\right)\right] + (1-\ell)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n^{(4)}}{n+1}\ell^n - \omega_3\,\frac{(1-\ell)}{y^3}f(\lambda),\ \Omega_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\Delta_k^{(2)}}{k+4}\,,$$

$$\Delta_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{n}(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)C_k^{(1)},\ \Delta_n^{(3)} = \sum_{k=0}^{n}(n-k+1)C_k^{(2)},\ \Delta_n^{(4)} = \sum_{k=0}^{n}C_k^{(3)}.$$

Здесь постоянные D_1, Γ_0, Γ_1 определяются из граничных условий на поверхности частицы (3)–(4). В частности, среднее значение температуры поверхности частицы T_{iS} определяется из решения следующей трансцендентной системы уравнений

$$\begin{cases} t_{iS} = t_{eS}, \\ \dfrac{\ell^{(S)}}{1+\alpha}\dfrac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}}t_{eS} = \dfrac{R^2}{3\lambda_{iS}T_\infty}J_0 - \sigma_0\sigma_1\dfrac{RT_\infty^3}{\lambda_{iS}}\left(t_{iS}^4 - 1\right), \end{cases} \tag{8}$$

в котором $\lambda_{eS} = \lambda_\infty t_{eS}^{\alpha}$, $\lambda_{iS} = \lambda_0 t_{iS}^{\chi}$, $t_{iS} = t_{i0}\big|_{y=1}$, $t_{eS} = t_{e0}\big|_{y=1}$, $T_{iS} = t_{iS}T_{e\infty}$, $T_{eS} = t_{eS}T_{e\infty}$, $J_0 = \dfrac{1}{V}\int_V q_i(r,\theta)dV$, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $\ell^{(S)} = \dfrac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0}$. В (7) интегрирование ведется по всему объему неравномерно нагретой частицы.

Постоянные A_1, A_2 из граничных условий на поверхности частицы для массовой скорости. ω_2, ω_3 и значения коэффициентов $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$ и $C_n^{(3)}$ определяются из рекуррентных соотношений, которые приведены в работ [2-3].

Поскольку поле температуры получено, то можно найти теплообмен частицы со средой, который характеризуется числом Нуссельта. Проведенные в работе численные оценки (в качестве граничных условий на поверхности частицы для компонент массовой скорости использовались условия скольжения [2-3], формула (4)) показали существенно нелинейный характер зависимости полного потока тепла на поверхность частицы. Такой характер поведения обусловлен степенным видом зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности от температуры и вкладом движения среды, т.е. учет конвективного члена в уравнении конвективной теплопроводности (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Брюханов О.Н., Шевченко С.Н. Тепломассообмен. – М.: АСВ. – 2005. – 460 с.

2. Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р. Термофоретическое движение нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы //Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57. – № 2(336). – С. 164-174.

3. Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А. Фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы //Журнал техническая физика. – 2012. – Т. 82. – № 10. – С. 42-49.

4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкостей. – М.: Мир. – 1967. – 310 с.

Инженерные приложения физико-математических наук

УДК 539.37+517.968.23

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОЛЬЦА НЕРАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЁННЫМ МОМЕНТОМ

Д.И. Анпилогов, к.т.н., доц.
Запорожский национальный технический университет
e-mail: *anpilogov@ua.fm*
Н.В. Снижко, к.ф.-м.н., доц.
Запорожский национальный технический университет
e-mail: *snizhko.nataliia@gmail.com*

1. Введение

В работе методом комплексных потенциалов Мусхелишвили решена система дифференциальных уравнений в частных производных для области в форме кольца, известных [1] как первая основная граничная задача теории упругости. Кольцо моделирует элемент силовой установки, передающий вращательное движение, поэтому граничные условия сформулированы с учётом касательной нагрузки. Подобная задача рассматривалась в [2, 3]. Однако, нагрузка в этих работах считалась равномерно распределённой вдоль контура. Поэтому деформация носила сдвиговый характер. Физически реалистично считать нагрузку равномерно распределённой лишь в пределах углов, соответствующих креплениям кольца, и равной нулю вне этих пределов. Целью работы является решение соответствующей граничной задачи.

2. Основные обозначения

Пусть внутренний и внешний радиусы кольца равны R_1, R_2. Положение текущей точки на контуре будем характеризовать углом θ, $0 \le \theta \le 2\pi$. Пусть вдоль контура размещено N креплений угловым размером 2δ (рисунок 1), причём середины креплений описываются углами $\theta_m = m\Delta\theta$, $m = \overline{0, N-1}$, $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N}$. Для исключения перекрытия креплений по углу положим $N\delta < \pi$.

Пусть C означает долю, которую угловой размер крепления составляет от периода следования креплений: $C = \frac{2\delta}{\Delta\theta} = \frac{N\delta}{\pi}$. Тогда перекрытия креплений по углу не наступают при значениях $0 < C < 1$.

На рисунке 1 изображена также эпюра касательного напряжения, равного $T_0 = T_{01}$ для внутренней части контура и $T_0 = T_{02}$ для внешней части.

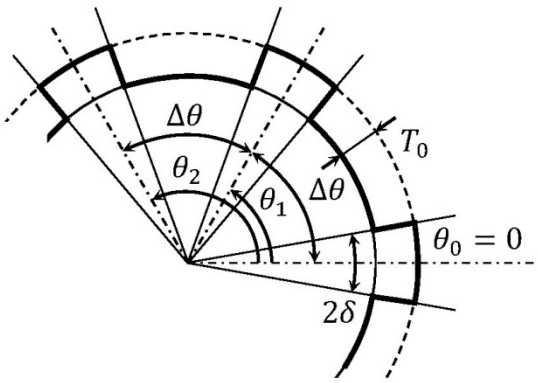


Рисунок 1 – К определению геометрических параметров задачи

В [3] показано, что учёт центробежных сил инерции сводится только к коррекции нормальной компоненты внешнего напряжения, и это не изменяет сдвигового характера деформации. Поэтому в настоящей работе нормальная компонента во внимание не принимается. Таким образом, объёмно распределённые силы отсутствуют, и задача может быть решена методом комплексных потенциалов в статической постановке.

Распределение внешнего напряжения по углу примем в виде

$$T(\theta) = T_0 \cdot t(\theta). \tag{1}$$

Здесь

$$t(\theta) = \sum_{m=0}^{N} \left\{ \sigma\left(\theta - \theta_m^-\right) - \sigma\left(\theta - \theta_m^+\right) \right\}, \tag{2}$$

где σ – функция Хевисайда, а точки разрыва $\theta_m^{\pm} = \theta_m \pm \delta$. Функция $t(\theta)$ тождественно равна единице внутри интервалов углов, соответствующих креплениям, и нулю вне этих интервалов.

Пусть толщина кольца равна h. Угол $d\theta$ опирается на дугу контура длиной $d\ell = R\,d\theta$ (индекс у радиуса опущен, т.к. эти вычисления одинаковы для внешней и внутренней частей контура). Элемент площади боковой поверхности $dS = h\,d\ell = Rh\,d\theta$. Элементарная сила $dF = T(\theta)dS = T(\theta)\cdot Rh\,d\theta$. Элементарный момент $dM = R\,dF = T(\theta)\cdot R^2 h\,d\theta$. С учётом значений функции (2) интегрирование последнего выражения приводит к результату $M = 2\pi C T_0 R^2 h$. Пусть $M_0 = \frac{M}{h}$ – внешний скручивающий момент в расчёте на единицу длины, отмеряемой в направлении перпендикуляра к плоскости кольца. Тогда $M_0 = 2\pi C T_0 R^2$. Именно такой момент прилагается отдельно к внутренней части контура, и отдельно к внешней (в статическом случае эти моменты должны быть уравновешены). Тогда

$$T_{01} = \frac{M_0}{2\pi C R_1^2}, \qquad T_{02} = \frac{M_0}{2\pi C R_2^2}.$$

Для определения функции (1) следует использовать эти значения вместо T_0.

Пусть $\gamma = \frac{R_1}{R_2}$ – доля, которую внутренний радиус составляет от внешнего. Тогда $T_{02} = \gamma^2 T_{01}$. Выполнение этого соотношения обеспечивает равенство нулю суммарного внешнего момента.

3. Граничные условия

В терминах комплексных потенциалов Φ, Ψ граничное условие [1, § 41, (23)] в форме Колосова-Мусхелишвили при отсутствии нормальной компоненты ($N = 0$) имеет вид ($j = 1,2$):

$$\left\{\Phi + \overline{\Phi} - e^{2i\theta}\left[\overline{z}\cdot\Phi' + \Psi\right]\right\}\Big|_{|z|=R_j} = -iT. \qquad (3)$$

Здесь касательная компонента $T = T_{0j}\cdot t(\theta),\ j = 1,2$.

4. Метод решения

Решение граничной задачи ищем в виде

$$\Phi(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \qquad \Psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a'_k z^k.$$

Подстановка этих выражений в (3) и последующее использование метода неопределённых коэффициентов при функциях $e^{ik\theta}$ позволяют найти коэффициенты a_k, a'_k, а следовательно – и решение граничной задачи. При этом для точек контура следует полагать $z = R_j e^{i\theta}$, $j = 1,2$. Такой подход требует разложения правой части (3) в комплексный ряд Фурье.

Функцию (2) разложим в ряд Фурье по углу θ на интервале $0 \le \theta \le 2\pi$. Очевидно, коэффициенты при синусах равны нулю, и поэтому

$$t(\theta) = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cos k\theta. \qquad (4)$$

Постоянная составляющая (интегральное среднее) c_0 равна отношению площади под графиком $t(\theta)$ к ширине интервала разложения:

$$c_0 = \frac{2\delta\cdot N}{2\pi} = C.$$

Коэффициенты при косинусах:

$$c_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t(\theta)\cos k\theta\, d\theta.$$

Ограничиваясь интегрированием вдоль тех интервалов, на которых $t(\theta) \ne 0$, имеем:

$$\pi c_k = \int_0^{\delta}\cos k\theta\, d\theta + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi}\cos k\theta\, d\theta + \sum_{m=1}^{N-1}\int_{\theta_m-\delta}^{\theta_m+\delta}\cos k\theta\, d\theta = \frac{2\sin k\delta}{k}\sum_{m=0}^{N-1}\cos k\theta_m.$$

Имеем $k\theta_m = k\cdot\frac{2\pi m}{N} = mx$, где временно обозначено $x = \frac{2k\pi}{N}$. Как известно,

$$\sum_{m=0}^{N-1}\cos mx=\begin{cases}N, & x=2\pi p,\ p\in Z;\\ 0, & x=2\pi p,\ p\notin Z.\end{cases}$$

Условие $x=2\pi p$ есть $k=Np$, тогда

$$c_k=\begin{cases}\dfrac{2N\sin k\delta}{k\pi}, & k=N,2N,\ldots;\\ 0, & k\neq 0,N,2N,\ldots.\end{cases}$$

Теперь разложение (4) построено. Преобразуем его к комплексной форме:

$$t(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}A_k e^{ik\theta}. \qquad (5)$$

Здесь с учётом (4): $A_0=c_0=C$, а также

$$A_k=A_{-k}=\frac{c_k}{2}=\begin{cases}\dfrac{N\sin k\delta}{k\pi}, & k=N,2N,\ldots;\\ 0, & k\neq 0,N,2N,\ldots.\end{cases}$$

Положим:

$$A'_k=-iT_{01}A_k, \qquad A''_k=-iT_{02}A_k.$$

Теперь (3) совпадает с [1, § 59, (2)], и можно использовать методику, изложенную в [1, § 59].

5. Решение граничной задачи

Компоненты u, v поля перемещений определяются как

$$2\mu(u+iv)=\kappa\varphi-z\overline{\varphi'}-\psi. \qquad (6)$$

Здесь μ – модуль сдвига материала; коэффициент $\kappa=3-4\sigma$ для состояния плоской деформации или $\kappa=\frac{3-\sigma}{1+\sigma}$ для плосконапряжённого состояния, σ – коэффициент Пуассона; $\varphi=\int\Phi\,dz$, $\psi=\int\Psi\,dz$.

Коэффициенты a_k и a'_k для различных значений k определяются соотношениями [1, § 59, (5), (6), (7'), (14) (16), (16')]. При этом коэффициенты a_0, a_1, a_{-1} вычисляются нетиповым образом и в нашем случае оказываются равными нулю: $a_0=a_1=a_{-1}=0$. Кроме того, нетиповым образом вычисляются коэффициенты a'_{-1}, a'_{-2}, a'_{-3}; в нашем случае $a'_{-1}=a'_{-3}=0$.

6. Приведение к безразмерному виду

Положение текущей точки области будем характеризовать числом

$$z=Re^{i\theta}=\rho R_2e^{i\theta}=\frac{\rho}{\gamma}R_1e^{i\theta}.$$

Здесь через $\rho=\frac{R}{R_2}$ обозначена доля, которую текущий радиус R составляет от внешнего радиуса R_2. Тогда $\gamma<\rho<1$. Величина ρ, таким образом, описывает безразмерный модуль текущего значения z.

Для приведения правой части (6) к безразмерному виду положим:

$$a_k = i \cdot \frac{M_0}{2\pi C R_1} \cdot \frac{1}{R_1^{k+1}} \cdot \alpha_k, \qquad a'_k = i \cdot \frac{M_0}{2\pi C R_1} \cdot \frac{1}{R_1^{k+1}} \cdot \alpha'_k.$$

Совместное использование этих соотношений и результатов [1, § 59] даёт:

$$\alpha_k = \begin{cases} A_k \cdot f_k(\gamma), & k = \pm 2, \pm 3, \ldots; \\ 0, & k = 0, \pm 1. \end{cases}$$

Здесь обозначено

$$f_k(\gamma) = \left(1 - \gamma^k\right) \cdot \frac{(1+k)\left(\gamma^{2k} - \gamma^{2k+2}\right) - \gamma^{3k} + \gamma^{k+2}}{\left(1 - k^2\right)\left(\gamma^{k-1} - \gamma^{k+1}\right)^2 - \left(1 - \gamma^{2k+2}\right)\left(\gamma^{2k-2} - 1\right)}.$$

Получаем также

$$\alpha'_k = \begin{cases} 0, & k = -3, -1; \\ C, & k = -2; \\ \alpha_{k+2} + \alpha_{-k-2} + A_{k+2}, & k \neq -3; -2; -1. \end{cases}$$

При делении (6) на $\frac{M_0}{2\pi C R_1}$ оказываются целесообразными замены

$$U = u \cdot \frac{4\pi\mu C R_1}{M_0}, \qquad V = v \cdot \frac{4\pi\mu C R_1}{M_0}.$$

В результате (6) принимает вид:

$$U + iV = i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\rho^{k+1}}{\gamma^{k+1}} e^{i\theta} \left(\frac{\kappa\alpha_k - \alpha'_k}{k+1} \cdot e^{ik\theta} + \alpha_k e^{-ik\theta} \right).$$

В этой сумме слагаемое с номером $k = 0$ с учётом приведенных выше значений коэффициентов α_k, α'_k равно

$$S_0 = -i \cdot \frac{\rho}{\gamma} \cdot e^{i\theta} \left(\alpha_2 + \alpha_{-2} + A_2\right).$$

Пара слагаемых с номерами $k = 1$ и $k = -1$ в сумме даёт:

$$S_{\pm 1} = -\frac{i}{2} \cdot \left(\frac{\rho}{\gamma}\right)^2 \cdot e^{2i\theta} \left(\alpha_3 + \alpha_{-3} + A_3\right).$$

Остальные пары слагаемых вычисляются типовым образом и могут быть накоплены в цикле. Безразмерные компоненты U, V перемещения точки с координатами $(\rho;\theta)$ возникают при отделении в накопленной сумме действительной и мнимой частей.

7. Результаты и обсуждение

Рассмотрим пример применения изложенной методики расчёта компонент поля перемещений. Зададимся параметрами $N = 3$, $\gamma = \frac{1}{2}$. По соображениям симметрии достаточно рассмотреть интервал углов $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. При этом угол $\theta = 0$ соответствует середине крепления (нагруженного участка), а угол $\theta = \frac{\pi}{3}$ – середине участка, свободного от внешних напряжений. При фиксированном

значении угла θ строим распределение смещений по радиусу в интервале $\gamma < \rho < 1$. Результат расчёта представлен на рисунке 2.

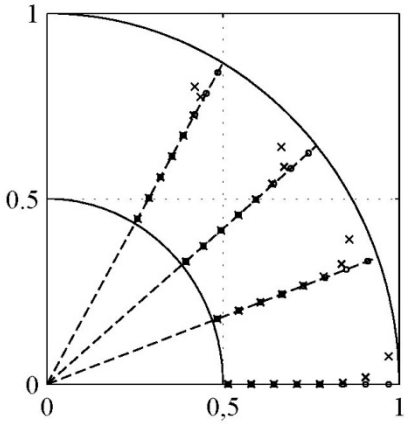


Рисунок 2 – Смещение внутренних точек области

Кружочками обозначены положения некоторых точек до деформирования, а крестиками – этих же точек после деформирования. Координаты каждой точки до деформирования вычислены как $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, а после деформирования – как

$$\begin{cases} x' = x + MU; \\ y' = y + MV. \end{cases}$$

Здесь масштабирующий множитель M смысловой нагрузки не несёт и подобран только для удобства визуального восприятия поля перемещений.

Как видим, перемещения точек вблизи зоны нагружения практически не имеют радиальных компонент; касательное внешнее усилие вызывает лишь угловые перемещения точек области. Похожая ситуация возникала и прежде, когда внешнее усилие было распределено по контуру равномерно [2, 3]. В этом случае напряжённо-деформированное состояние является чистым сдвигом.

Напротив, вблизи свободной части границы угловые перемещения точек заметно ослабляются, зато возникают существенные радиальные перемещения в направлении к центру. В этом случае напряжённо-деформированное состояние является состоянием сжатия в радиальном направлении.

8. Выводы

В настоящей работе методом комплексных потенциалов Мусхелишвили построено решение граничной задачи теории упругости для области в форме кольца, нагружаемого касательной нагрузкой, кусочно-постоянно распределённой вдоль контура. Такие граничные условия соответствуют техническим решениям при креплении различных элементов механических конструкций.

Проанализировано поле перемещений, и установлено, что напряжённо-деформированное состояние близко к сдвигу вблизи нагруженной части границы и к радиальному сжатию вблизи ненагруженной части границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука. – 1966. – 707 с.
2. Анпилогов Д.И. Оценка сдвиговой деформации приводной шестерни авиационного двигателя // Вестник двигателестроения. – 2014. – №1. – С. 25-27.
3. Anpilohov D., Snizhko N. The angular deformation of the ring with reference to the centrifugal forces // Lobachevskii J. of Math. – 2017. – V.38 – №1. – P. 395-399.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ГИПЕРКОНЕЧНОМЕРНОГО ВЕЙВЛЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

М.Ю. Здоровенко, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»
e-mail: *zdorovenko.s@mail.ru*
А.С. Серова
ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»
e-mail: *anastasya_serova@mail.ru*
Т.Г. Прозорова
ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»
e-mail: *tgprozorova@gmail.com*

В статье обсуждается проблема восстановления сигнала при гиперконечном вейвлетном преобразовании, а также проблема оптимальности значений параметров такого преобразования.

Ключевые слова: вейвлет-преобразование, табличная аппроксимация, параметры конечномерного вейвлетного преобразования, оптимальность параметров.

1. Введение

В последние годы бурно развиваются направления в науке и технике, связанные с числовой обработкой сигналов. Одним из перспективных методов анализа данных сегодня является вейвлетный анализ. Это обстоятельство актуализировало вопросы применения вейвлетного анализа в задачах, связанных с обработкой информации (очистка сигнала от помех, сжатие данных, выявление кратковременных и глобальных закономерностей, спектральный анализ составляющих сигнала, подавление избыточной информации, криптография, обработка мультимедийной информации и пр.) [1]. Для применения вычислительных методов в вейвлетном анализе актуальной становится проблема аппроксимации непрерывного оператора его дискретным аналогом. Эта проблема рассматривается с позиций инфинитезимального анализа [2-5].

Основные понятия и обозначения, используемые в настоящей работе, можно найти, например, в работах [4,5].

2. Гиперконечное вейвлетное преобразование

Под сигналом понимают функцию из пространства $L_2(R)$, а под материнским вейвлетом – функцию из пространства $L_2(R) \cap L_1(R)$, среднее значение ко-

торой равно нулю, то есть интеграл от которой по R равен нулю. Соответствующие материнскому вейвлету вейвлетные функции имеют вид

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Параметр a называется масштабирующим параметром, а b – параметром сдвига.

Непрерывное вейвлетное преобразование задается формулой 1.

$$(Wf)(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \cdot \int_R f(t) \cdot \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \qquad (1)$$

Дискретное вейвлетное преобразование получают из (1) при значениях параметров

$$a = \sigma^r; \qquad b = k\beta\sigma^r \qquad r,k \in \mathbf{Z}, \qquad \sigma,\beta \in R, \qquad \sigma > 1 \qquad (2)$$

Для таблицы F значений сигнала f в узлах Δl сетки с шагом Δ гиперконечное вейвлет-преобразование зададим формулой 3.

$$\mathbf{W}_\Delta[F](a,b) = \Delta \cdot \frac{1}{|a|^{1/2}} \cdot \overline{\sum_{l=-M}^{M} F(l) \cdot \psi\left(\frac{\Delta l - b}{a}\right)} \qquad (3)$$

Дискретизация параметров a и b в конечном вейвлет-преобразовании берется стандартной как в дискретном вейвлетном преобразовании (2).

Известно, что для произвольного вейвлета существует область значений параметров, для которых семейство

$$\Psi = \left(\psi_{a,b} \middle| (a,b) \in \left(R^* \times R\right)\right)$$

является жестким фреймом [6] с константой

$$C_\psi = 2\pi \int_{R^*} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi .$$

Это означает, что в точке непрерывности сигнал восстанавливается по формуле 4.

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{R^2} (Wf)(a,b)\psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{|a|^2} \qquad (4)$$

3. Восстановление сигнала

На практике возникает необходимость восстановить сигнал по таблице значений функции (1) в узлах сетки (2). Более того, часто сам сигнал преобразуется по формуле (3) и требуется восстановить сигнал по таблице значений функции (3) в узлах сетки (2). Рассмотрим значения оператора (3) на прямоугольнике $[0, A] \times [-B, B]$ в узлах сетки (2).

Обозначим через M максимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$a = \sigma^M \le A ,$$

а через N_m обозначим максимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$b = N_m \beta \sigma^m \le B$$

при каждом натуральном m не превосходящем M.

Составим таблицу Φ с элементами $\Phi(m,n)$, где m изменяется от 0 до M, n изменяется от $(-N_m)$ до N_m и принимает значение

$$\Phi(m,n) = \Delta \frac{1}{|\sigma|^{m/2}} \cdot \overline{\sum_{l=-M}^{M} F(l) \cdot \psi\left(\frac{\Delta l - n\beta\sigma^m}{\sigma^m}\right)} \qquad (5)$$

Таблицу Φ можно рассматривать как аппроксимацию таблицы значений оператора (1) в узлах сетки (2). По таблице Φ, используя дискретный аналог оператора (4), получаем «восстановленный» сигнал F_Δ:

$$F_\Delta(l) = \frac{1}{C_\psi} \sum_{m=0}^{M} \Delta_m \sum_{n=-N_m}^{N_m} \Delta_{mn} \Phi(m,n) \frac{1}{|\sigma|^{3m/2}} \psi\left(\frac{\Delta l - n\beta\sigma^m}{\sigma^m}\right),$$

где

$$\Delta_m = \sigma^{m+1} - \sigma^m = \sigma^m(\sigma - 1),$$

$$\Delta_{mn} = (n+1)\sigma^m\beta - n\sigma^m\beta = \sigma^m\beta.$$

Разница между таблицами F и F_Δ характеризует качество восстановления сигнала, квадрат ошибки восстановления сигнала определяется по формуле

$$\left\|F - F_\Delta\right\|_\Delta^2 = \Delta \sum_{l=-M}^{M} \left|F_\Delta(l) - F(l)\right|^2.$$

Выбирая шаги сеток так, чтобы выполнялись условия (6)

$$\Delta \to 0, \qquad \Delta N \to \infty, \qquad \Delta^2 N \quad \textit{ограничено}, \qquad (6)$$

следует определить значения параметров σ и β, при которых

$$\left\|F - F_\Delta\right\|_\Delta^2 \to 0.$$

Такие значения параметров σ и β, будем называть оптимальными.

Проблема состоит в том, что оптимальные значения указанных параметров для разных вейвлетов в общем случае, разные.

В исследовательской литературе значение σ, как правило, берется равным двум, β – равным единице. Однако данные значения не являются оптимальными в том смысле, что восстановленный сигнал отличается от исходного в большей мере, чем при других значениях параметров. Проблема локализации области значений параметров σ и β представляет одну из важных проблем при решении задачи о восстановлении сигнала. Нами разработан алгоритм, позволяющий с достаточной точностью определять значения указанных параметров, минимизирующих ошибку восстановления сигнала. Например, наши исследования показали, что наименьшая ошибка при восстановлении сигнала в случае вейвлетного преобразования Хаара

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \textit{при}\ 0 \le x < 0{,}5 \\ -1, & \textit{при}\ 0{,}5 \le x < 1, \\ 0, & \textit{при}\ \ x \notin [0;1) \end{cases}$$

$$\varphi_{a,b}(t)=\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)=\begin{cases}1, \ при & b\le t<b+0{,}5a\\ -1, при & b+0{,}5a\le t<b+a\\ 0, \ при & t\notin[b;b+a)\end{cases}$$

получается при σ=1,22, β=0,82, а для вейвлета «мексиканская шляпа»

$$\psi(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}\left(1-x^2\right)\cdot e^{-x^2/2}.$$

наименьшая ошибка получается при σ=1,2, β=0,8 [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике – М.: Солон-Р, – 2002. – 448 с.
2. Гордон Е. И. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Инфинитезимальный анализ. В 2 ч. Ч.2 – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, – 2001. – 247 с.
3. Здоровенко М. Ю. О гиперконечной аппроксимации преобразования Фурье – Деп. в ВИНИТИ, №691. – В94. – 1994. – 10 с.
4. Здоровенко М.Ю., Зимакина А.И. О некоторых свойствах гиперконечномерного вейвлет-преобразования // Общество, наука, инновации: материалы всероссийск. ежегодн. науч.-техн. конф. / НТК-2012. – Киров, 2012. – С. 1442-1445.
5. Здоровенко М.Ю. Аппроксимация вейвлетного преобразования его гиперконечным аналогом // Образование, ресурсы и технологии. – М: Московский университет им. С.Ю.Витте. – 2014. – №1(4). – С. 296-302.
6. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории – М: Техносфера. – 2006. – 280 с.
7. Прозорова Т.Г. Уточнение параметров дискретизации вейвлетного преобразования «мексиканская шляпа» // Общество, наука, инновации: материалы всероссийск. ежегодн. науч.-практич. конф. / НПК-2015. – Киров, 2015. – С. 1535-1539.

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ САПР ПОДВЕСКИ ТЯГОВОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ

С.Н. Злобин, к.т.н, доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *zsn2@rambler.ru*
О.В. Измеров
ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет»
e-mail: *izmerov@yandex.ru*
О.В. Дорофеев, к.т.н, доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *da_shy@inbox.ru*
С.О. Копылов
ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет»
e-mail: *kopylov.stepan@gmail.com*

О.С. Мазинский
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *panzersensei@yandex.ru*

Проведены исследования вариантов подвески тягового электродвигателя тепловозов. Установлено, что методика проектирования подвески не учитывает возможных изменений свойств ее деталей в условиях эксплуатации. Предложены и запатентованы конструкции подвески, обеспечивающие надежность работы независимо от условий эксплуатации.

Ключевые слова: локомотивы, автоматизация проектирования, подвеска тягового электродвигателя.

На большинстве грузовых тепловозов, эксплуатируемых РЖД, стоят коллекторные тяговые электродвигатели (ТЭД) с пружинной траверсной подвеской (рисунок 1).

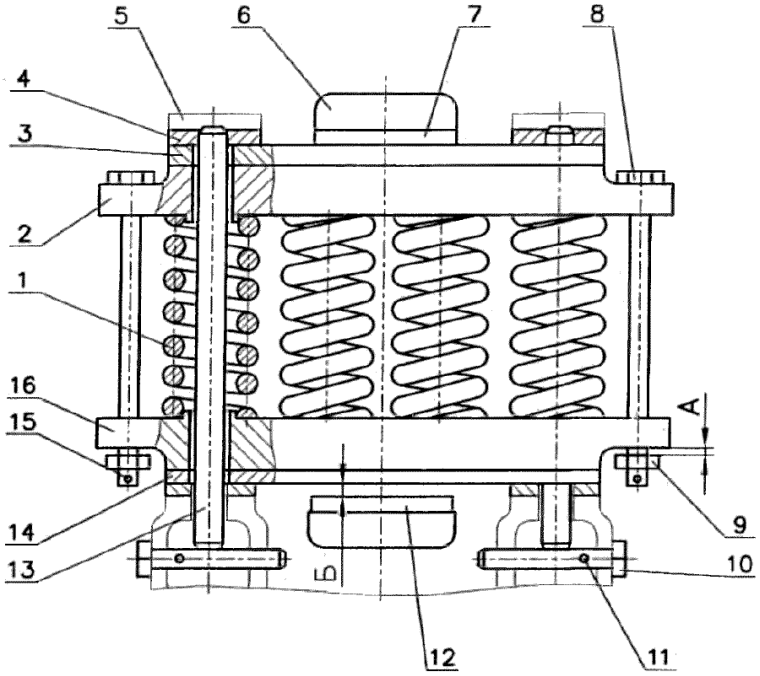
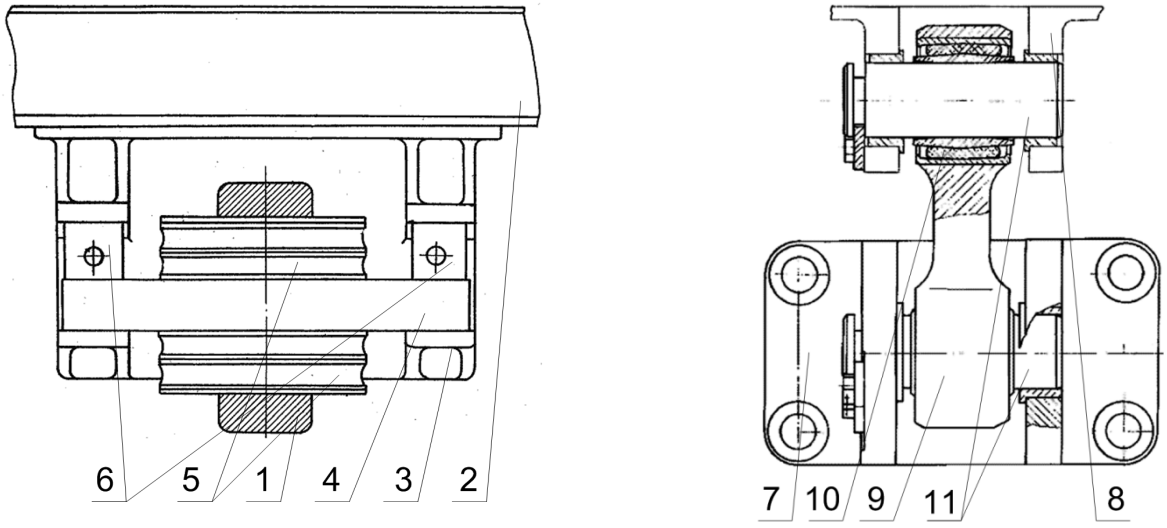


Рисунок 1 – Пружинная подвеска ТЭД тепловоза 2ТЭ25К:
1 – пружина; 2, 16 – обоймы; 3, 4, 7, 12, 14 – накладки; 5 – кронштейн подвески на раме тележки; 6 – носик верхний ТЭД; 8 – болт; 11, 15 – шплинты; 9 – гайка; 10 – валик; 13 – стержень; А – зазор между обоймой и гайкой; Б – зазор между накладками нижней обоймы и нижнего носика

Основным недостатком конструкции является значительный износ накладок. Плоские трущиеся поверхности невозможно защитить от пыли и влаги, появления ржавчины, их невозможно закрыть кожухом или чехлом для удержания смазки.

Внедрение в тяговой передаче грузовых тепловозов упругого зубчатого колеса сделало динамическую систему колесно-моторного блока некритичной к жесткости подвески ТЭД, что открыло возможности для ее модернизации. В качестве способов модернизации подвески были предложены резинометаллическая

траверса (РМТ) конструкции ВНИКТИ по авторскому свидетельству № 925718, показанная на рисунке 2 *а*, второго – подвеска «Серьга» (рисунок 2 *б*).



а *б*

Рисунок 2 – Исследованные варианты подвески ТЭД:
а – РМТ; *б* – «Серьга»;
1 – ТЭД; 2 – рама тележки; 3, 8 – кронштейны на раме; 4 – траверса;
5 – упругие элементы; 6 – прижимы; 7 – кронштейн на ТЭД; 9 – поводок;
10 – шарнир; 11 – валики

Испытания обоих вариантов подвески [1, 2] показали, что они обеспечивают удовлетворительные динамические качества колесно-моторного блока. В качестве основного варианта заводом-изготовителем была принята подвеска «Серьга», обеспечивающая меньшую трудоемкость монтажа и демонтажа подвески при выкатке колесно-моторного блока во время ремонта. Из-за ограничения габаритов подвески по высоте, диктуемых конструкцией тележки, оказалось невозможным обеспечить компенсацию поперечных перемещений только с помощью резинометаллических шарниров, включая сферические, и эти перемещения пришлось частично компенсировать за счет скольжения шарниров по валикам. В эксплуатации опытного тепловоза наблюдалось заклинивание шарниров на валиках и выдавливание резины из шарниров.

В связи с этим ВНИКТИ был предложен усовершенствованный вариант подвески (а.с. № 1759693), где параметры сайлентблоков связаны соотношением:

$$f \le \frac{1}{\dfrac{F\left(2l_в^2 \cdot Ж_р + 6L^2 \cdot Ж_р\right)}{Ж_0 \cdot l_в^2 \cdot Ж_р \cdot \Delta} + \dfrac{L}{l_в}},$$

где f – коэффициент трения скольжения подвески по внутреннему валику, F – суммарное усилие в подвеске от веса тягового электродвигателя и реактивного усилия от реализации силы тяги, кН, L – межцентровое расстояние по амортизаторам подвески, мм, $l_в$ – длина внутренней втулки амортизатора, мм, $Ж_р$ – радиальная жесткость амортизатора, кН/мм, $Ж_0$ – осевая жесткость амортизатора, кН/мм, а Δ – амплитуда поперечного перемещения колесной пары с электро-

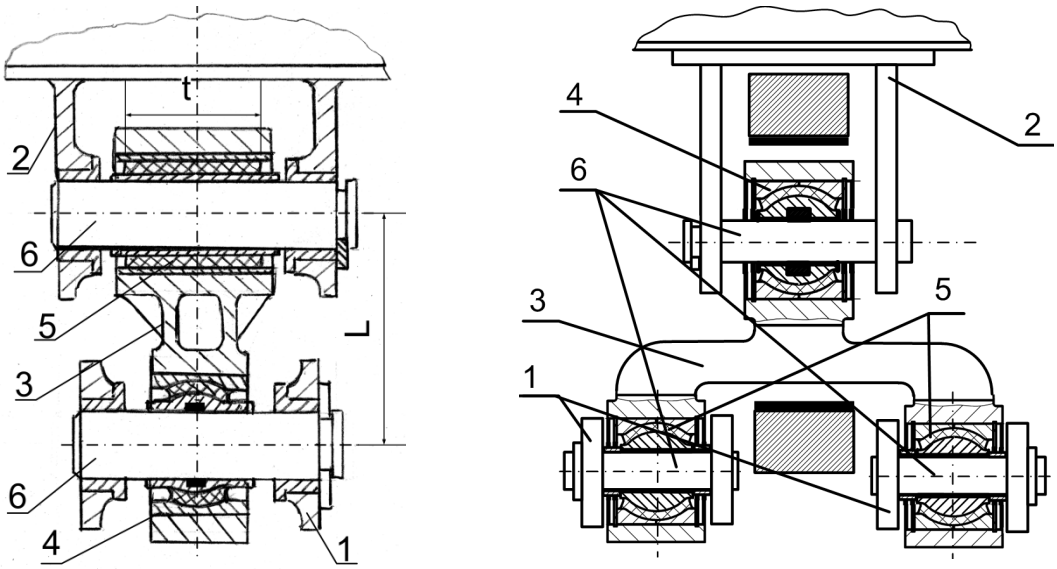
двигателем относительно рамы тележки, мм. Однако из-за загрязнения и коррозии поверхностей валиков коэффициент трения f может существенно меняться, что делает работу подвески ненадежной. Таким образом, автоматизация проектирования узла подвески затруднена из-за наличия существенно меняющихся в эксплуатации параметров.

Повышение достоверности моделирования работы подвески в процессе ее проектирования может быть достигнуто тремя способами: уточнением статистических характеристик параметров путем физического эксперимента, изменением конструктивной схемы таким образом, чтобы в расчетной схеме отсутствовали неопределенные параметры, и, наконец, изменением расчетной схемы таким образом, чтобы можно было пренебречь влиянием неопределенных параметров на работу узла, с выборов конструктивных элементов, реализующих условия измененной расчетной схемы. В рассматриваемом случае исследование коэффициента трения и характера износа втулки в эксплуатации неэффективно из-за длительного времени и затрат, а попытки исключить направляющие трения не дали результатов по условиям конструкции и требованиям технологии обслуживания и ремонта. Рассмотрим возможности сделать меняющиеся параметры деталей подвески не имеющими практического значения.

Изменим расчетную схему подвески, введя следующие условия: поперечные перемещения полностью компенсируются перемещением подвижного шарнира по валику, а перекос поводка под действием сил трения и сопротивление перекосу верхнего шарнира можно считать пренебрежимо малыми. Для реализации этих условий отношение длины t втулки неподвижного резинометаллического шарнира к расстоянию между осями шарниров L принимается равным

$$\frac{t}{L} \geq \frac{2}{3},$$

подвижный шарнир выполняется сферическим, и в расточке его втулки помещаются магниты, удерживающие смазочную жидкость с ферромагнитными наночастицами (рисунок 3 *а*). На предложенную конструкцию получен патент на изобретение [3]. Дальнейшим развитием конструкции является подвеска с тремя шарнирами (рисунок 3 *б*), которая позволяет обеспечить совместимость ТЭД для модернизированных и не модернизированных тележек, поскольку не требует срезать выступы на остове. На эту конструкцию авторами подана заявка на получение патента. Поскольку поверхности трения цилиндрические, то в подвижном шарнире можно закрыть поверхность валика резиновым кожухом и тем самым обеспечить защиту от влаги, загрязнений, высыхания и потери смазки, что дополнительно увеличивает срок службы узла.



а *б*

Рисунок 3 – Предлагаемые варианты подвески ТЭД:
а – по патенту РФ № 2549427; *б* – с обеспечением совместимости ТЭД;
1 – кронштейны на ТЭД; 2 – кронштейн на раме; 3 – поводок;
4 – подвижный шарнир; 5 – неподвижные шарниры; 6 – валики

Таким образом, для перехода от классических САПР, в которых выбор расчетных параметров в значительной степени остается за человеком, к интеллектуальным САПР (ИСАПР) при проектирования подвески ТЭД необходимо ввести процедуру проверки степени определенности значений параметров в расчетной схеме при изменении условий эксплуатации. Для этого в справочной базе данных значения параметров должны характеризоваться, помимо номинальных расчетных значений, законом распределения значений параметров для типичных предполагаемых условий производства и эксплуатации с указанием параметров распределения, а также статистической оценкой достоверности величин, полученных эмпирическим образом, с указанием ограничений внешних условий, для которых достоверность этих величин подтверждается.

В случае существенного вероятного изменения параметров необходимо изменение конструктивной схемы, чтобы работоспособность подвески практически не зависела от случайного разброса этих параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исследование динамики тягового электродвигателя с упругой резинометаллической подвеской на тепловозе 2ТЭ116: отчет ВНИТИ № И-72-80, гос. № 79017846. – Коломна, 1980. – 46 с.
2. Исследование динамики колесно-моторного блока с подвеской типа «Серьга»: отчет ВНИТИ № И-68-80. – Коломна, 1980.
3. Патент 2549427 Российская Федерация МПК, B61C 9/50. Узел подвешивания тягового электродвигателя / Пугачев А.А., Волохов С.Г., Измеров О.В., Воробьев В.И., Михальченко Г.С., Новиков В.Г.; заявитель и патентообладатель

ФГБОУ ВПО «Брянский государственный технический университет» – № 2014107284/11; заявл. 25.2.2014; опубл. 27.4.2015. Бюл. № 12.

УДК 532.5

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО И ВЯЗКОСТНОГО КЛИНА ПРИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ТРЕНИИ

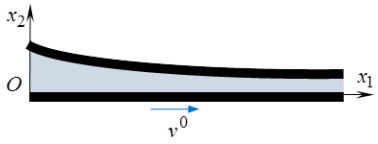
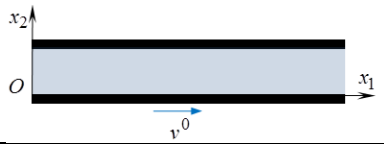
А.В. Корнаев, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *rusakor@inbox.ru*
Е.П. Корнаева, к.ф.-м.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *lenoks_box@mail.ru*

Наличие геометрического клина является одним из трех классических условий возникновения гидродинамической подъемной силы в движущейся жидкости [1]. В данной работе рассматривается возможность замены геометрического клина вязкостным клином [2].

Рассматривается двухмерное стационарное течение вязкой несжимаемой среды между жесткими поверхностями двух различных конфигураций: с параллельными поверхностями и с наклонными поверхностями. В обоих случаях верхняя поверхность неподвижна, а нижняя движется с постоянной скоростью v^0. В первом случае зазор изменяется по длине канала, а вязкость постоянна, во втором случае – наоборот, вязкость изменяется по длине канала, а зазор постоянен (таблица 1). Необходимо определить условия, при которых геометрический и вязкостный клин будут сопоставимы по результирующей подъемной силе. Постановка и решение соответствующих задач в сокращенном виде представлены в таблице 1. Судя по выражениям для функций давления (таблица 1), существует теоретическая возможность эквивалентного действия вязкостного и геометрического клина. Из таблицы 1 видно, что по форме записи функции первой компоненты поля скоростей и уравнения Рейнольдса [3] совпадают. Это связано с допущением об изменении вязкости только по длине канала. Очевидно, что при нулевой скорости нижней поверхности $v^0 = 0$ условие идентичности полей давлений для вязкостного и геометрического клина при заданной наперед форме последнего будет иметь вид $\mu = (h_0 / h)^3 \mu_0$.

Результаты численного тестирования разработанных моделей геометрического и вязкостного клина проводилось при следующих исходных данных. Рассматривалась область течения длиной $L_1 = 0.126$ м, зазором на левом торце $h(0) = h_0 = 10^{-4}$ м. Давление на левом и правом торце составляло соответственно: $p(0) = p_0 = 2 \cdot 10^5$ и $p(L_1) = p_1 = 1 \cdot 10^5$ Па. Вязкость смазочного материала

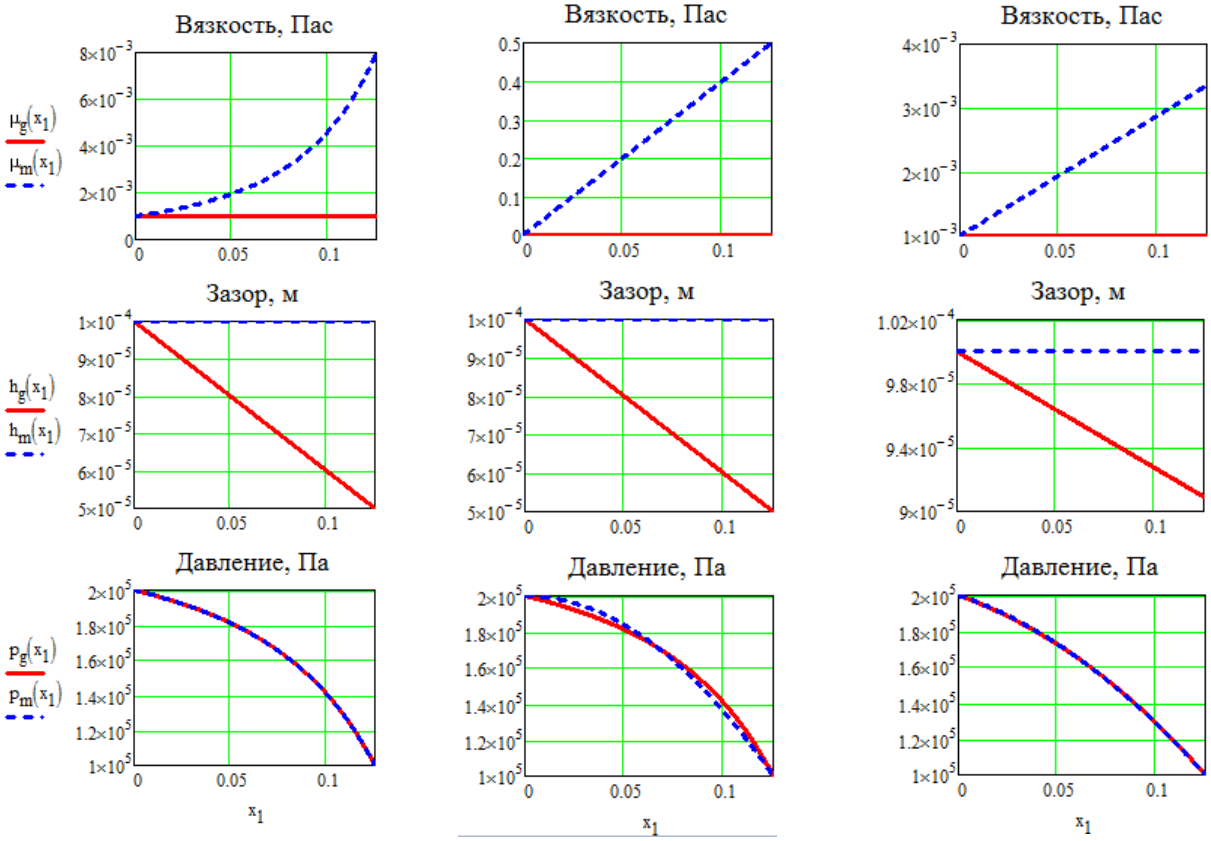
Таблица 1 – Постановка и решение задач о геометрическом и вязкостном клине

Порядок решения	Геометрический клин	Вязкостный клин
Область течения	$L_1 \times h(x_1)$. 	$L_1 \times h_0$. 
Концептуальная модель	$h = h(x_1)$; $\mu = \mu_0 = const$; $\vec{v} = [v_1 \quad v_2]$.	$h = h_0 = const$; $\mu = \mu(x_1)$; $\vec{v} = [v_1 \quad 0]$.
Математическая модель	Уравнения равновесия и условие несжимаемости	
	$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right); \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0; \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right); \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0; \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$
	Граничные условия $v_1\big\|_{x_2=0} = v^0, \quad v_1\big\|_{x_2=h} = 0, \quad v_2\big\|_{x_2=0} = v_2\big\|_{x_2=h} = 0,$ $p\big\|_{x_1=0} = p_0, \quad p\big\|_{x_1=L_1} = p_1.$	
Поле скоростей	$v_1 = \frac{\partial p}{\partial x_1}\frac{x_2}{2\mu}(x_2 - h) - \frac{v^0}{h}(x_2 - h).$	
Уравнение Рейнольдса	$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right] = 6v^0 \frac{\partial h}{\partial x_1}.$	
Поле давлений	$p = 6\mu v^0\left[G_1 - \frac{g_1}{g_2}G_2\right] + \frac{G_2}{g_2}(p_1 - p_0) + p_0,$ $G_1(x_1) = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{h^2}, \quad g_1 = \int_0^{L_1} \frac{dx_1}{h^2},$ $G_2(x_1) = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{h^3}, \quad g_2 = \int_0^{L_1} \frac{dx_1}{h^3}.$	$p = \frac{M_2}{m_2}(p_1 - p_0) + p_0,$ $M_2(x_1) = \int_0^{x_1} \mu dx_1, \quad m_2 = \int_0^{L_1} \mu dx_1.$

составила на подаче $\mu(0) = \mu_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ Па, скорость движения нижней стенки рассматривалась в двух вариантах: $v^0 = 0$ и $v^0 = 10$ м/с.

Частный случай с нулевой скоростью представлен на рисунке 1 (а). Из рисунка видно, что двойному перепаду высоты $h(0)/h(L_1) = 2$ для случая геометрического клина соответствует примерно восьмикратный перепад вязкости $\mu(L_1)/\mu(0) \approx 2^3$ для случая вязкостного клина. Случай, представленный на рисунке 1 (б) отличается линейным вязкостным клином, из-за чего необходимый перепад вязкости существенно возрос $\mu(L_1)/\mu(0) = 500$. Очевидно, что при не-

нулевой скорости v^0 необходимый перепад вязкости будет увеличиваться. В третьем случае (рисунок 1 (в)) с ненулевой скоростью $v^0 = 10$ м/с, но меньший геометрический клином $h(0)/h(L_1) = 1.1$, необходимый перепад вязкости составил $\mu(L_1)/\mu(0) = 3.35$.



а б в

Рисунок 1 – Результаты расчета для случаев геометрического (индекс «g») и вязкостного (индекс «m») клина при одинаковых значениях подъемной силы: для нулевой скорости $v^0 = 0$, двойного перепада высоты геометрического клина $h(0)/h(L_1) = 2$ и вязкостном клине вида $\mu = (h_0/h)^3 \mu_0$ (а); при той же скорости, том же геометрическом клине и линейном вязкостном клине $\mu(L_1)/\mu(0) = 500$ (б); при ненулевой скорости $v^0 = 10$ м/с, геометрическом клине $h(0)/h(L_1) = 1.1$ и линейном вязкостном клине $\mu(L_1)/\mu(0) = 3.35$ (в)

Можно сделать некоторые выводы. Вязкостный клин способен обеспечить ту же подъемную силу, что и геометрический клин. Для случая неподвижных поверхностей получено простое аналитическое решение для нелинейного вязкостного клина $\mu = (h_0/h)^3 \mu_0$. Для подшипников жидкостного трения вязкостный клин может быть эквивалентен геометрическому только при малых значениях эксцентриситета. В рассмотренных примерах (рисунок 1) приращение подъемной силы за счет гидродинамических эффектов геометрического и вязкостного клина не превысило 6% по сравнению с подъемной силой за счет перепада давлений.

Работа подготовлена в рамках выполнения гранта Президента РФ № 14.Z56.17.1643-МК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Hori. Hydrodynamic Lubrication. – Tokyo: Yokendo Ltd. – 2006. – 156p.
2. А.В. Корнаев, Е.П. Корнаева, Е.А. Машков. Применение метода контрольных объемов в решении задачи о сдвиговом течении жидкости сложной реологии // Известия Юго-западного государственного университета. – 2014. - №5. – С. 9-14.
3. Н.А. Слезкин. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Государственное издательство технико-технической литературы. – 1955. – 519с.

УДК 621.382.2/.3

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В СИЛОВЫХ IGBT-МОДУЛЯХ ПАЯНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Д.О. Малый
АО «Протон-Электротекс»
e-mail: *d.malyy@proton-electrotex.com*
С.И. Матюхин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sim1@mail.ru*
А.С. Вишняков
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sim1@mail.ru*
Е.А. Заночкин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *nighthuman@ya.ru*
А.Д. Петрухин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *alexeipetruhin@mail.ru*

Методами компьютерного моделирования теплопереноса в программной среде Comsol Multiphysics решена задача определения стационарного теплового сопротивления силовых IGBT-модулей паяной конструкции. Показано, что основной вклад в это сопротивление вносит DCB-керамика.

Ключевые слова: силовой полупроводниковый модуль, IGBT, паяная конструкция, теплоперенос, тепловое сопротивление, компьютерное моделирование, Comsol Multiphysics.

1. Введение

В настоящее время практически все типы преобразовательного оборудования мощностью от нескольких киловатт до единиц мегаватт разрабатываются и производятся с использованием силовых IGBT-модулей [1–5] (рисунок 1). Эти модули, как правило, имеют паяную конструкцию и представляют собой

многослойные структуры из различающихся материалов, одним из которых выступает непосредственно полупроводниковый элемент (рисунок 2).

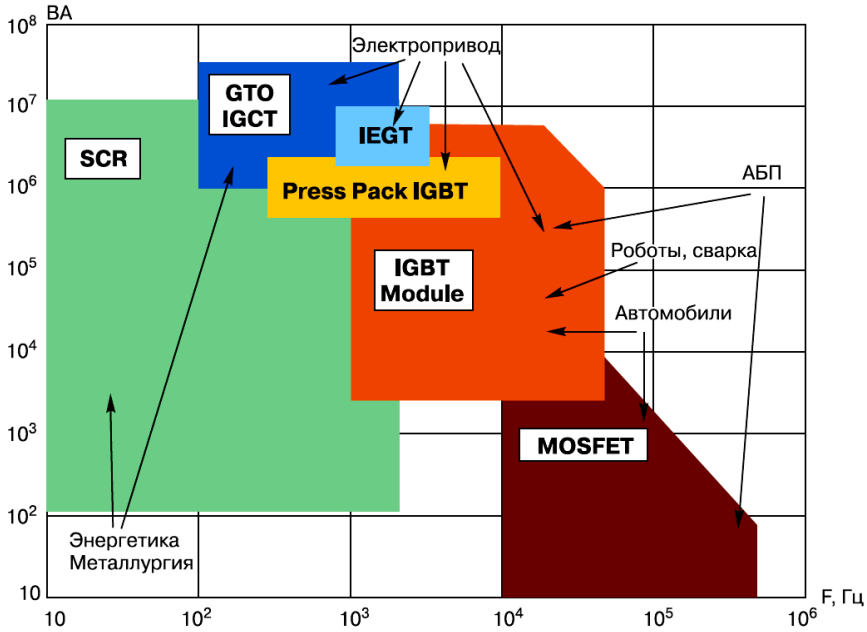


Рисунок 1 – Области применения управляемых приборов силовой электроники [5]

В процессе своей работы полупроводниковые элементы внутри модуля испытывают циклические изменения температуры. Из-за них материалы многослойной конструкции модуля с различными коэффициентами теплового расширения (КТР) получают высокие механические напряжения, которые с течением времени ведут к ухудшению термоконтакта между различными слоями.

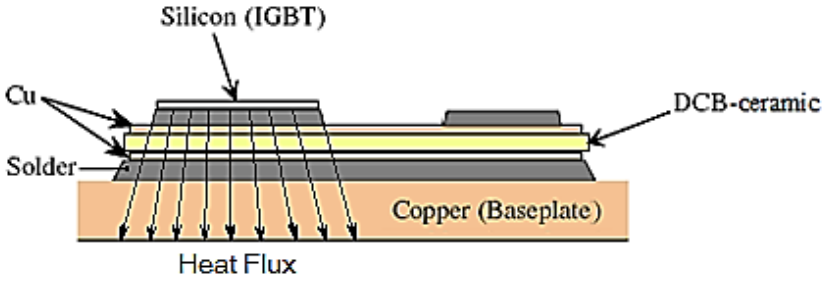


Рисунок 2 – Структура силового IGBT-модуля паяной конструкции

Далее развивается положительная обратная связь: увеличение теплового сопротивления приводит к увеличению температуры чипов; это увеличивает механические напряжения и деформацию слоёв; в свою очередь, увеличение деформации слоёв приводит к увеличению теплового сопротивления и т.д. Всё это вместе приводит к снижению эксплуатационных характеристик конечного изделия и, в конечном итоге, к его отказу.

На сегодняшний день термоциклоустойчивость стандартных IGBT-модулей с медным основанием составляет не более 10 тыс. циклов [5]. И существенное увеличение этой устойчивости представляет собой одну из главных проблем, которая стоит перед производителями модулей. Вторая проблема, возникающая при эксплуатации модулей и обусловленная нагреванием полупровод-

никовых чипов, связана с увеличением мощности, которая преобразуется при помощи этих чипов.

Очевидно, что увеличение этой мощности при заданной температуре корпуса и неизменном тепловом сопротивлении модуля будет приводить к росту температуры чипов и, как следствие, к снижению их эксплуатационных характеристик и потере работоспособности. Таким образом, увеличение коммутируемых токов и рабочих напряжений при проектировании модулей, как правило, должно быть сопряжено с решением ряда задач, связанных с их охлаждением и/или понижением их теплового сопротивления.

В настоящей работе задача определения теплового сопротивления была решена методами компьютерного моделирования теплопереноса для силовых IGBT-модулей паяной конструкции, выпускаемых АО «Протон-Электротекс» (г. Орёл).

2. Постановка задачи и результаты компьютерного моделирования

В качестве задания для моделирования выбиралась следующая задача:

1. При заданной тепловой мощности P_{tot}, выделяющейся в полупроводниковых IGBT-чипах модуля, и заданной температуре основания модуля T_C, путем численного решения уравнения теплопроводности необходимо найти распределение температуры в структуре модуля, изображенной на рисунке 2, и максимальное значение температуры чипов $T_{j\max}$.

2. Используя формулу

$$\frac{T_{j\max} - T_C}{R_{th}} = P_{tot}, \qquad (1)$$

найти тепловое сопротивление R_{th} модуля.

Для решения поставленной задачи была выбрана программная среда Comsol Multiphysics [6–7]. Результаты компьютерного моделирования теплопереноса, выполненного в этой программе, представлены на рисунке 3.

Как показывает этот рисунок, основной вклад в тепловое сопротивление изученного IGBT-модуля вносит DCB-керамика. Полное тепловое сопротивление R_{th} модуля оказалось равным 0,19 К/Вт, что хорошо согласуется с результатами измерений.

3. Заключение

Полученные результаты показывают, что компьютерное моделирование в программной среде Comsol Multiphysics является мощным методом решения сложных, многопараметрических задач [6], аналитическое или экспериментальное решение которых оказывается затруднительным. В частности, Comsol Multiphysics может с успехом использоваться для моделирования и анализа теплопереноса в многослойных структурах, примером которых являются силовые IGBT-модули паяной конструкции.

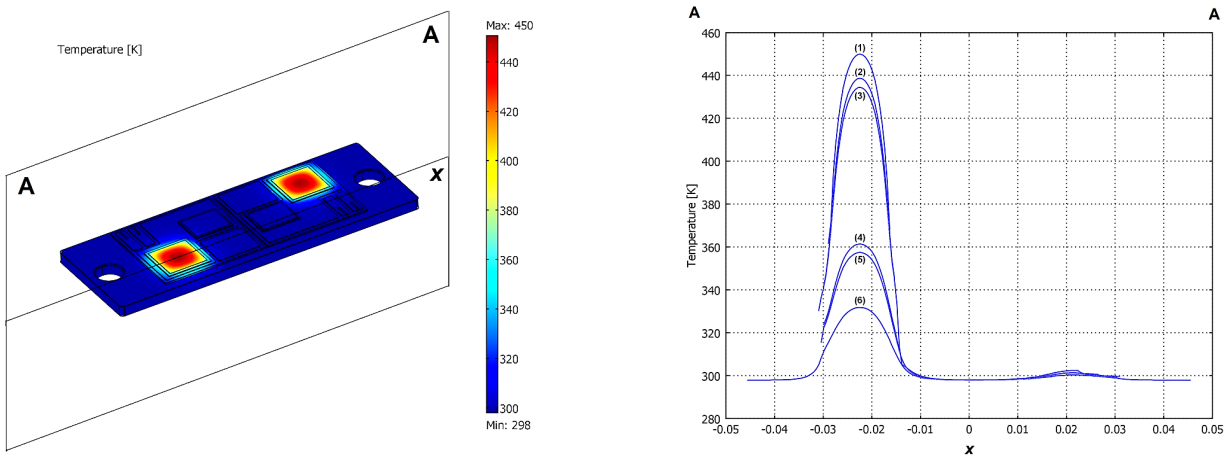


Рисунок 3 – Распределение температуры по сечению АА силового IGBT-модуля при номинальной нагрузке P_{tot} на границах слоев:
1 – «чип-припой»; 2 – «припой-металлизация DCB-керамики»;
3 – «металлизация-керамика»; 4 – «керамика-нижняя металлизация»;
5 – «нижняя металлизация-припой»; 6 – «припой-основание»

Компьютерное моделирование теплопереноса в IGBT-модулях, производимых АО «Протон-Электротекс» (г. Орёл), позволило рассчитать их стационарное тепловое сопротивление и показало, что основной вклад в это сопротивление вносит DCB-керамика. Этот вывод оказывается важным с точки зрения оптимизации конструкции этих модулей, а дальнейшее их исследование может быть направлено на изучение переходного (нестационарного) теплового сопротивления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Флоренцев С.Н. Современное состояние и прогноз развития приборов силовой электроники // Современные технологии автоматизации. – 2004. – №2. – С.20-30.
2. Евсеев Ю.А., Ковалев В.Д., Сурма А.М. Состояние и перспективы развития российской полупроводниковой элементной базы силовой электроники // Электро. – 2005. – №5. – С.2-14.
3. Minato T., Sato K. Future Trend of Si Power Device // IEICE Electronics Express. – 2014. – V.11. – №3. – P.1-17.
4. Jan Vobecky The Current Status of Power Semiconductors // Facta Universitatis. Series: Electronics and Energetics. – 2015. – V.28. – №2. – P.193-203.
5. Флоренцев С.Н. Силовые IGBT-модули – основа современного преобразовательного оборудования // Электронные компоненты. – 2002. – №6. – С.11-17.
6. Матюхин С.И., Макулевский Г.Р., Деев О.В. Современное программное обеспечение для моделирования в электронике // Информационные системы и технологии. – 2014. – №2 (82). – С.58-71.
7. Comsol Multiphysics User's Guide, - Comsol. – 2012. – 1292 p.

УДК 621.382.2/.3

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ СИЛОВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МОДУЛЕЙ ПАЯНОЙ КОНСТРУКЦИИ

С.И. Матюхин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sim1@mail.ru*
Д.О. Малый
АО «Протон-Электротекс»
e-mail: *d.malyy@proton-electrotex.com*
А.С. Вишняков
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sim1@mail.ru*

Методами компьютерного моделирования в программной среде Comsol Multiphysics решена задача предсказания термомехнических деформаций, связанных с тепловым воздействием при производстве силовых полупроводниковых модулей паяной конструкции. Показано, что эти деформации, возникающие из-за разницы температурных коэффициентов расширения материалов, не зависят от степени исходной деформации модулей и могут быть устранены путём предварительной формовки их основания.

Ключевые слова: силовой полупроводниковый модуль, паяная конструкция, термомеханические деформации, компьютерное моделирование, Comsol Multiphysics.

1. Введение

Одним из наиболее динамично развивающихся направлений мировой электроники в настоящее время является производство силовых полупроводниковых приборов (СПП) в модульном исполнении [1–5]. Так, силовые IGBT-модули широко используются в регулируемом тяговом и технологическом электроприводе, вторичных источниках питания, в металлургии, химии, машиностроении, связи, энергетике. Имея лучшие характеристики – малые мощности управления и коммутационные потери, высокие скорости коммутации и стойкость к перегрузкам, они практически вытеснили из этих областей не только силовые биполярные транзисторы, но и запираемые тиристоры (GTO) [5]. По типу конструкции силовые модули подразделяются на два вида [5]: достаточно новые модули прижимной конструкции, которые всё чаще используются в электроэнергетике, и традиционные паяные модули, которые рекомендуются для применения в промышленных электроприводах.

Силовые модули паяной конструкции представляют собой многослойные структуры из различающихся материалов, одним из которых выступает непосредственно полупроводниковый элемент (рисунок 1). Механические деформации и напряженное состояние материалов, которые возникают из-за разницы их температурных коэффициентов расширения (КТР) и теплового воздействия в ходе производства и эксплуатации паяных модулей, приводят к снижению эксплуатационных характеристик конечных изделий и, в конечном итоге, к их от-

казу [5–11]. Вследствие этого весьма актуальной является задача предсказания деформаций, возникающих при тепловом воздействии на модули.

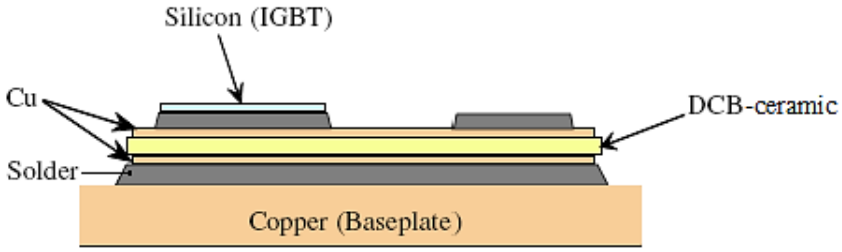


Рисунок 1 – Структура силового модуля паяной конструкции

В настоящей работе эта задача была решена методами компьютерного моделирования в программной среде Comsol Multiphysics [12–13] для силовых полупроводниковых модулей паяной конструкции, выпускаемых АО «Протон-Электротекс» (г. Орёл).

2. Постановка задачи и результаты компьютерного моделирования

Стандартными технологическими операциями, выполняемыми при пайке силовых полупроводниковых модулей, являются: 1) сборка многослойного пакета (рисунок 1) при комнатной температуре; 2) нагрев этого пакета до температуры плавления припоя; 3) охлаждение пакета до температуры отверждения припоя; 4) медленное охлаждение спаянного пакета до комнатной температуры и 5) выдержка готового изделия при комнатной температуре для релаксации припоя.

Таким образом, целью компьютерного моделирования стало решение следующей задачи. Многослойная конструкция силового модуля, изображенная на рисунке 1 (с плоским основанием или предварительно формованная), при температуре схватывания припоя приобретает жесткость между слоями и охлаждается до комнатной температуры. Благодаря различным КТР материалов конструкция при этом изгибается. Методами моделирования необходимо было: 1) изучить эволюцию деформации конструкции, 2) определить конечный профиль этой конструкции и 3) связать этот профиль с исходной деформацией основания.

Результаты моделирования деформаций, возникающих при охлаждении силового модуля паяной конструкции, представлены на рисунке 2. При этом оказалось, что эти результаты при одинаковых начальных условиях моделирования выглядят одинаково как для модулей с плоским основанием, так и для предварительно изогнутых (формованных) модулей с заданным радиусом кривизны основания.

Таким образом, компьютерное моделирование показало, что термомеханические деформации силовых модулей, возникающие из-за разницы температурных коэффициентов расширения материалов, не зависят от степени исходной деформации модулей и могут быть устранены путём предварительной формовки, т.е. изгиба их оснований в противоположную сторону.

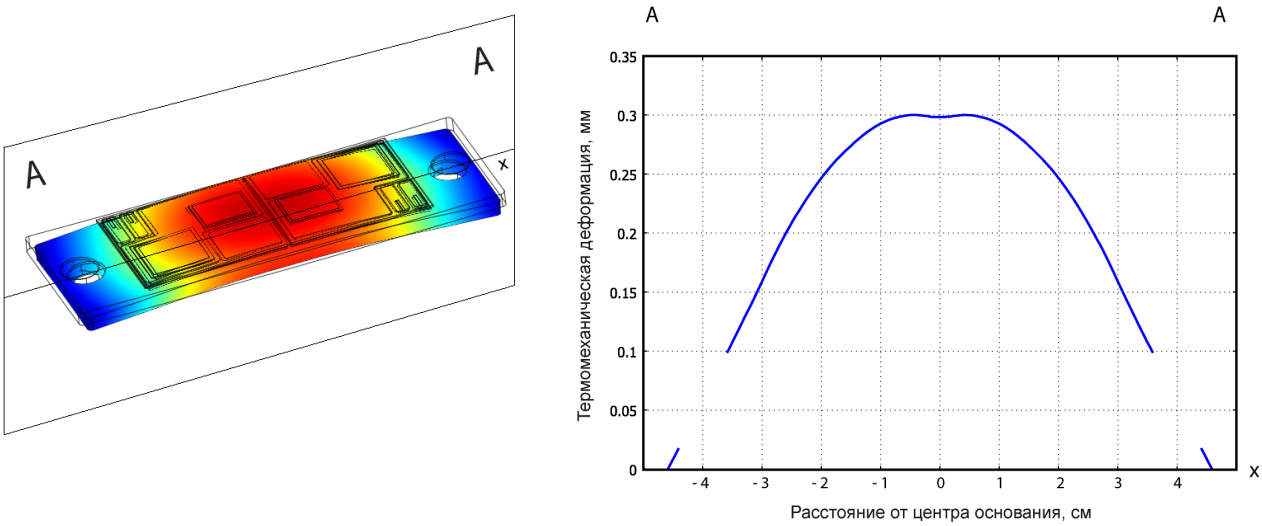


Рисунок 2 – Деформация нижней поверхности основания модуля, обусловленная его охлаждением от температуры схватывания припоя до комнатной температуры

3. Заключение

Полученные в настоящей работе результаты показывают, что компьютерное моделирование является мощным методом решения сложных, многопараметрических задач [12], аналитическое решение которых оказывается затруднительным, а экспериментальное – дорогим. В частности, компьютерное моделирование может с успехом использоваться для анализа и предварительных расчетов термомеханических деформаций, возникающих при тепловом воздействии на силовые полупроводниковые модули паяной конструкции.

Наиболее важным выводом работы является заключения о независимости величины этих деформаций от предварительного изгиба основания модулей. Это заключение позволяет, во-первых, предложить простой способ компенсации термомеханических деформаций путём предварительной формовки основания, а во-вторых, – получить универсальные, то есть не зависящие от радиуса кривизны основания зависимости величины термомеханических деформаций от толщины основания модуля, толщины припоя, толщины керамики и т.д.

Указанные зависимости планируется получить в ходе дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Флоренцев С.Н. Современное состояние и прогноз развития приборов силовой электроники // Современные технологии автоматизации. – 2004. – №2. – С.20-30.
2. Евсеев Ю.А., Ковалев В.Д., Сурма А.М. Состояние и перспективы развития российской полупроводниковой элементной базы силовой электроники // Электро. – 2005. – №5. – С.2-14.
3. Minato T., Sato K. Future Trend of Si Power Device // IEICE Electronics Express. – 2014. – V.11. – №3. – P.1-17.
4. Jan Vobecky The Current Status of Power Semiconductors // Facta Universitatis. Series: Electronics and Energetics. – 2015. – V.28. – №2. – P.193-203.

5. Флоренцев С.Н. Силовые IGBT-модули – основа современного преобразовательного оборудования // Электронные компоненты. – 2002. – №6. – С.11-17.
6. Исламгазина Л. Технологические методы повышения надежности силовых модулей // Технологии в электронной промышленности. – 2005. – №2. – С.58-60.
7. Bouarroudj M., Khatir Z., Ousten J.P., Badel F., Dupont L., Lefebvre S. Degradation behavior of 600 V–200 A IGBT modules under power cycling and high temperature environment conditions // Microelectronics Reliability. – 2007. – V.47. – P.1719-1724.
8. Morozumi A., Yamada K., Miyasaka T., Sumi S., Seki Y. Reliability of Power Cycling for IGBT Power Semiconductor Modules // IEEE Transactions on Industry Applications. – 2003. – V.39. – No.3. – P.665-671.
9. Ciappa M. Selected failure mechanisms of modern power modules // Microelectronics Reliability. – 2002. – V.42. – P.653–667.
10. Lu H., Bailey C., Yin C. Design for reliability of power electronics modules // Microelectronics Reliability. – 2009. – V.49. – P.1250–1255.
11. Busca C. Modeling lifetime of high power IGBTs in wind power applications - An overview // IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE). – 2011. – P.1408-1413.
12. Матюхин С.И., Макулевский Г.Р., Деев О.В. Современное программное обеспечение для моделирования в электронике // Информационные системы и технологии. – 2014. – №2 (82). – С.58-71.
13. Comsol Multiphysics User's Guide, – Comsol. – 2012. – 1292 p.

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОПОТЕРЬ ЗДАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕПЛОВИЗОРА

Н.С. Пономарев, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»
Т.С. Рогожина, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»

В данной работе описываются расчеты потерь тепла здания на основе измерений, полученных с использованием тепловизора. Приведена сравнительная характеристика теплопотерь оконного проема и наружной стены. Применяемый метод используется в таких областях, как медицина, техническое обслуживание зданий и сооружений, строительство объектов различного назначения.

Ключевые слова: теплопотери, тепловизор, тепловой неразрушающий контроль.

Неразрушающий контроль – контроль свойств и параметров объекта, при котором не должна быть нарушена пригодность объекта к использованию и эксплуатации. Тепловой неразрушающий контроль представляет собой исследование объектов посредством наблюдения (визуализации) неоднородностей в

тепловых потоках вызываемых внутренними дефектами [1, с. 20]. Развитие инфракрасной техники в последнее время значительно расширило область применения теплового контроля. Ниже приводятся области, в которых этот метод и инфракрасное оборудование нашли широкое применение:

- производство и контроль за технологическими процессами: печатные платы, сварные соединения, производство стали, цемента, стекольная, бумажная промышленность;
- техническое обслуживание и техническая диагностика электрического оборудования, бойлеров, паровых систем, механического оборудования, зданий и сооружений, газораспределительных систем, резервуаров с жидкими продуктами;
- медицина: заболевания кровообращения, онкология;
- мониторинг дорожного движения;
- борьба с лесными пожарами;
- биология;
- астрономия;
- военная техника.

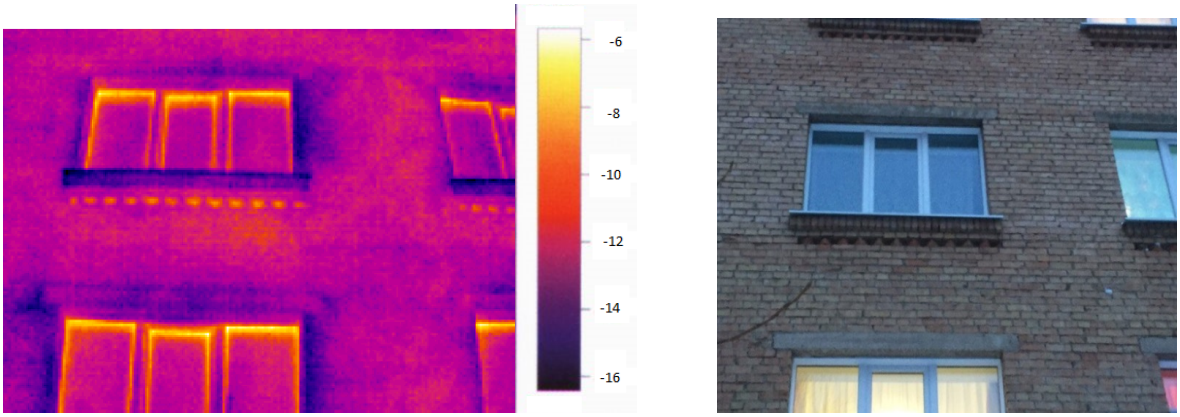
В настоящее время метод теплового неразрушающего контроля (ТНК) стал одним из самых востребованных в теплоэнергетике, строительстве и промышленном производстве. В России повышение интереса к тепловому контролю, во многом связано с принятием Федерального закона № 261 – ФЗ «Об энергосбережении», регламентирующим энергоаудит объектов с целью экономии ресурсов. Согласно данным в законе определениям, базовым методом контроля текущего состояния промышленных объектов является тепловой метод.

Среди приборов теплового контроля, самыми востребованными в настоящее время являются тепловизоры. Доля задач теплового контроля, решаемая с помощью тепловизоров настолько велика, что часто употребляется термин тепловизионный контроль. Тепловизор – устройство для наблюдения за распределением температуры исследуемой поверхности. Распределение температуры отображается на дисплее как цветовое поле, где определённой температуре соответствует определённый цвет. В большинстве моделей тепловизоров, информация записывается в память устройства и может быть обработана на компьютере при помощи специального программного обеспечения [2, с. 5].

Одной из основных функций тепловизора является визуализация распределения температуры, осуществляемая с помощью термограмм (тепловых изображений). Термограмма представляет собой изображения, каждый пиксель которого окрашивается определенным цветом (в зависимости от выбранной палитры и диапазона представления тепловизора или программного обеспечения для обработки тепловизионных данных). Тепловизоры позволяют быстро и надежно выявить точки аномального нагрева и потенциально проблемные участки при проведении технического обслуживания в строительстве, энергетике, производстве и других отраслях промышленности [3, с. 17].

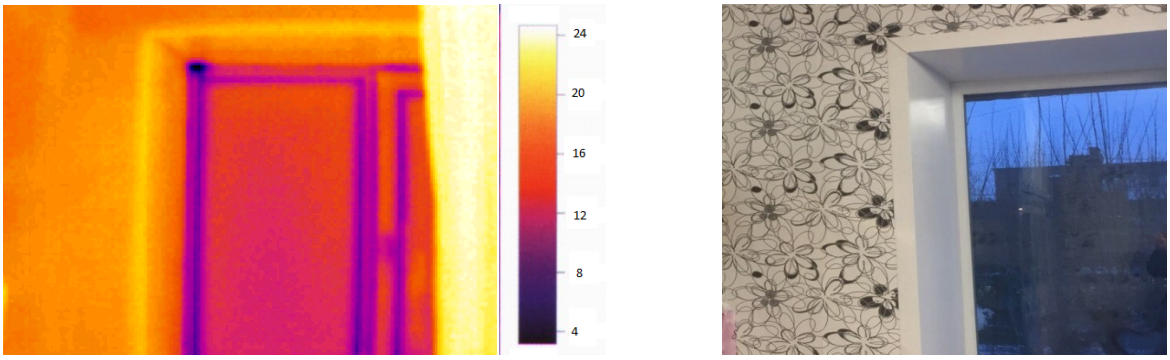
Целью нашей работы является экспериментальное определение потерь тепла здания через наружные стены и оконные проемы. С помощью тепловизора марки Testo 875-1 проведены измерения температуры воздуха снаружи (на-

водя прибор на снег), воздуха в здании (наводя прибор на внутреннюю перегородку), оконного стекла снаружи и внутри здания, наружной стены снаружи и внутри. Тепловизионные съёмки и фотографии соответствующих ограждающих конструкций представлены на рисунках 1 и 2. Значения температур в трёх различных точках поверхности и средняя температура по поверхности приведены в таблице 1.



а) *б*)

Рисунок 1 – Стена и оконный проём снаружи:
а) тепловизионная съёмка; *б*) фотография



а) *б)*

Рисунок 2 – Стена и оконный проём внутри:
а) тепловизионная съёмка; *б*) фотография

Таблица 1 – Значения съемки тепловизором

Наименование	t_1, °C	t_2, °C	t_3, °C	$t_{ср}$, °C
Температура воздуха снаружи	-15,2	-15,3	-15,2	-15,2
Температура воздуха внутри	24	24,1	23,4	23,8
Температура стекла снаружи	-13,1	-12,8	-13,4	-13,1
Температура стекла внутри	17,5	18,3	15,2	17
Температура стены снаружи	-13,9	-13,3	-13,6	-13,6
Температура стены внутри	20,1	19,5	19,8	19,8

Для стены, толщиной 70 см (68 см – кирпичная кладка, 2 см – штукатурка) значения коэффициентов теплопроводности для кирпича и штукатурки, соответственно, равны λ_1=0,56 Вт/(м·°С), λ_2=0,87 Вт/(м·°С). Для окна (однокамерный стеклопакет толщиной 16 мм) эта величина равна λ=0,31 Вт/(м·°С) [4, табл. Т1].

Результаты вычислений тепловых потерь приведены в таблице 2, где q, $q_л$, $q_{кон}$ – плотности теплового потока, проходящего через наружную стену (оконный проем), лучистого теплообмена и конвекции, соответственно; t_1, t_2, $t_ж$, $t_к$ – температуры стены внутри помещения, снаружи помещения, воздуха на улице и в помещении соответственно; λ – коэффициент теплопроводность материала; δ – толщина слоя материала; ε – степень черноты серого тела, ε = 0,9 – для красного кирпича ε = 0,92 – для стекла [5, табл. 1.53]; C_0 – коэффициент излучения абсолютно черного тела, $\frac{Вт}{м^2 \cdot К^4}$, C_0=5,67 $\frac{Вт}{м^2 \cdot К^4}$; $\alpha_ж$, $\alpha_к$ – коэффициенты теплоотдачи снаружи и внутри здания, соответственно.

Из приведённых результатов видно, что плотность теплового потока через оконный проём в 20,8 раз больше, чем через стену. На рис. 1 а видно, что под оконным проёмом наблюдается область стены с более высокой температурой.

Таблица 2 – Расчет теплопотерь для стены и оконного проема

Формула	Стена	Оконный проем
$q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}}$	28,0 Вт/м^2	583 Вт/м^2
$q_л = \varepsilon C_0 \left[\left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_ж}{100} \right)^4 \right]$	5,65 Вт/м^2	4,68 Вт/м^2
$q_{кон} = q - q_{изл}$	22,4 Вт/м^2	578,3 Вт/м^2
$\alpha_ж = \frac{q_{кон}}{t_2 - t_ж}$	14,0 Вт/(м^2·°С)	275,4 Вт/(м^2·°С)
$\alpha_к = \frac{q}{t_1 - t_к}$	7,0 Вт/(м^2·°С)	85,7 Вт/(м^2·°С)
$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_к} + \sum \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_ж}}$	0,689 Вт/(м^2·°С)	14,9 Вт/(м^2·°С)

Это объясняется тем, что внутри помещения в указанной области установлен радиатор отопления. Необходимо принять меры для уменьшения теплопотерь, например, установив теплоотражающий экран.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вавилов В.П. Инфракрасная термография и тепловой контроль. М.: ИД Спектр, 2009.
2. Нестерук Д.А., Вавилов В.П. Тепловой контроль и диагностика. Учебное пособие для подготовки специалистов I, II, III уровня. – Томск:, 2007. – 104 с.
3. Госсорг Ж. Инфракрасная термография. Основы, техника, применение. М.: Мир, 1988.

4. СП 50.13330.2012 Свод правил. Тепловая защита зданий. Актуализированная редакция взамен 23.02.2013.
5. Бухмиров В.В., Ракутина Д.В., Солнышкова Ю.С. Справочные материалы для решения задач по курсу «Тепломассообмен» / ГОУ ВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2009. – 102 с.

УДК 539.3

АДГЕЗИОННАЯ ПРОЧНОСТЬ ПОКРЫТИЙ РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА

В.Ю. Преснецова, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *alluvian@mail.ru*
Л.Ю. Фроленкова, д.т.н., зав. кафедрой машиностроения
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *Larafrolenkova@yandex.ru*
В.С. Шоркин, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *VShorkin@yandex.ru*
Е.А. Зенкин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
И.С. Морозов
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
Архипов Е. Р.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

Процесс резания материалов сопровождается износом режущего инструмента. Для повышения стойкости, долговечности, прочности на режущую часть инструмента наносят различные износостойкие покрытия. При этом, в условиях резания, необходимо обеспечить высокую степень адгезии покрытия к этой части инструмента. В работе представлены теоретические рассуждения, позволяющие выбрать режимы работы инструмента, сохраняющие целостность системы «покрытие-основа».

Ключевые слова: износостойкое покрытие, энергия адгезии, адгезионная прочность, касательное напряжение, сплошная упругая среда.

1. Введение

В настоящее время в машиностроении происходит постоянное усложнение конструкций, сокращение сроков и снижение затрат на изготовление изделий, увеличение номенклатуры. Это накладывает особые требования к стойкости инструмента. В процессе резания режущий инструмент работает в чрезвычайно тяжелых условиях. Основная нагрузка приходится на поверхность контакта – рабочую поверхность, что сопровождается частичным или полным износом инструмента. Одним из наиболее эффективных и перспективных технологических способов повышения стойкости, долговечности, прочности, а сле-

довательно, и надежности режущего инструмента является нанесение на его режущую часть износостойкого покрытия со специально подобранными для этого свойствами. При этом необходимо обеспечить высокую степень адгезии этого покрытия к режущей части инструмента. В этой связи теоретическое исследование адгезионных свойств материалов покрытия и основы, предсказание на их основе, для конкретных пар материалов, оценочных значений характеристик прочности адгезионного соединения является весьма актуальной задачей.

В работах [1 – 3] приведены расчетные формулы для вычисления энергии и сил адгезии, несплошности адгезионного контакта, их зависимости от температуры. При сдвиге покрытия относительно основы оценка прочности адгезионного соединения производится по условию равенства энергии упругих деформаций в сдвиговом покрытии энергии его адгезии [4]. По энергии адгезии и энергии упругих деформаций, выраженной через действующие классические напряжения, можно оценить их предельную допустимую величину, не приводящую к отрыву или срезу покрытия. В данной работе предложено для описания упругих свойств покрытия использовать микрополярную теорию упругости.

2. Теоретические положения

Максимально допустимое касательное напряжения $\tau_{\max}$ построено на основе классического представления о связи напряжений и деформаций имеет вид:

$$\frac{h\tau_{\max}^2}{2\mu} = F_a, \tag{1}$$

где h – толщина покрытия; μ – параметр Ламэ; F_a – энергия адгезии, вычисленная, с помощью формулы [1]:

$$F_a = \frac{W_{p(1)}W_{p(2)}(k_{(1)} + k_{(2)})^2}{W_{p(1)}{k_{(2)}}^2 + W_{p(2)}{k_{(1)}}^2};\ \ k_{(j)} = \frac{\nu_{(j)}}{1-\nu_{(j)}}, \tag{2}$$

где $\nu_{(j)}$ – коэффициент Пуассона для материала тела.

Данная формула совпадает с известной [5], при условии: $\nu_{(j)} = 0{,}25$.

Из-за наличия приповерхностного электрического поля с напряженностью $E \sim 10^9$ *В/м* (для каждого конкретного материала эта величина может быть оценена физическими методами [6, 7]) поверхность металлической основы обладает ориентирующим влиянием. Соединение материала покрытия с основой приводит к тому, что его атомы или молекулы продолжают атомную решетку (структуру) основы. Атомы приобретают ориентацию, отличную от их ориентации в структуре материала, вдали от поверхности адгезионного контакта. Иными словами, атомы оказываются повернутыми ориентирующим полем материала основы распределенными вдоль поверхности контакта моментами на определенный угол ω. При этом совершается работа против внутренних сил и моментов материала покрытия. В поверхностном слое этого материала, даже при отсутствии внешних воздействий, развивается напряженное состояние, концентрируется определенная энергия Δ упругих деформаций, которая не учтена при построении выражения (1). С учетом вышесказанного выражение (1) приобретает вид:

$$\frac{h\tau_{\max}^2}{2\mu} + \Delta = F_a . \tag{3}$$

Тогда при оценке $\tau_{\max}$ оказывается:

$$\tau^*_{\max} = \sqrt{\frac{2\mu(F_a - \Delta)}{h}} < \tau_{\max} = \sqrt{\frac{2\mu F_a}{h}} . \tag{4}$$

Данное неравенство показывает, что расчет, основанный на классических представлениях об упругих свойствах поверхностного слоя материала, дает завышенные значения допустимых касательных напряжений.

В данной работе предлагается для оценки величин μ и Δ использовать микрополярную теорию упругости [8]. Она опирается на представления о том, что частица сплошной упругой среды обладает шестью степенями свободы (в классическом случае – три). Для описания ее движения используются вектора перемещения $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ и малого угла поворота $\vec{\omega}(\vec{r})$ ($\vec{r}$ – радиус вектор центра масс частицы). Для вычисления объемной плотности энергии упругих деформаций w можно использовать следующие выражение [3, 9]:

$$w = \frac{\mu+\alpha}{2}\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \frac{\mu-\alpha}{2}\gamma_{ij}\gamma_{ji} + \frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}\gamma_{nn} + \frac{\gamma+\varepsilon}{2}\kappa_{ij}\kappa_{ij} + \\ + \frac{\gamma-\varepsilon}{2}\kappa_{ij}\kappa_{ji} + \frac{\beta}{2}\kappa_{kk}\kappa_{nn}, \tag{5}$$

где λ, μ – классические константы, коэффициенты Ламэ; α, β, γ, ε – дополнительные константы (определяются экспериментально или теоретически на основании физических соображений); $\gamma_{ij} = u_{i,j} - \in_{kji}\omega_k$; $\kappa_{ij} = \omega_{i,j}$ – тензоры деформаций материала ($\in_{kji}$ – трехиндексный символ Леви-Чивита; индекс после запятой означает дифференцирование по координате с соответствующим номером; u_i, ω_i – компоненты векторов $\vec{u}, \vec{\omega}$ в ортонормированном базисе $\vec{e}_i$ декартовой системы координат x_i).

В выражении (5) осуществляется суммирование по повторяющемуся индексу.

Выражение (5) с учетом внутренних напряжений σ_{ij} и моментов μ_{ij} (при постоянной температуре) записанных через тензоры деформаций:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \gamma_{ij}} = 2\mu\gamma_{(ij)} + 2\alpha\gamma_{\langle ij\rangle} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij},$$

$$\mu_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \kappa_{ij}} = 2\gamma\kappa_{(ij)} + 2\varepsilon\kappa_{\langle ij\rangle} + \beta\kappa_{kk}\delta_{ij}, \tag{6}$$

приобретает вид:

$$w = \mu^*\sigma_{(ij)}\sigma_{(ij)} + \alpha^*\sigma_{\langle ij\rangle}\sigma_{\langle ij\rangle} + \frac{\lambda^*}{2}\sigma_{kk}\sigma_{nn} + \gamma^*\mu_{(ij)}\mu_{(ij)} + \\ + \varepsilon^*\mu_{\langle ij\rangle}\mu_{\langle ij\rangle} + \frac{\beta^*}{2}\mu_{kk}\mu_{nn}, \tag{7}$$

где круглые скобки означают симметричную часть; угловые скобки – антисим-

метричную часть соответствующего тензора; δ_{ij} – символ Кронекера;

$$\mu^* = \frac{1}{4\mu};\ \ \alpha^* = \frac{1}{4\alpha};\ \ \gamma^* = \frac{1}{4\gamma};\ \ \varepsilon^* = \frac{1}{4\varepsilon};\ \ \lambda^* = -\frac{\lambda}{6\mu K};\ \ \beta^* = -\frac{\beta}{6\gamma\Omega};$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu;\ \ \Omega = \beta + \frac{2}{3}\gamma. \qquad (8)$$

Первое слагаемое в выражении (7) полностью соответствует классическим представлениям об объемной плотности энергии упругих деформаций. Далее, при оценке роли суммы остальных слагаемых, полагаем, что напряжения $\sigma_{(ij)}$ совпадают со своими классическими значениями. При плоском сдвиге векторы перемещений и микровращений приобретают вид:

$$\vec{u} = (u_1(x_2), 0, 0);\quad \vec{\omega} = (0, 0, \omega_3(x_2)). \qquad (9)$$

Ось Ox_1 направлена вдоль плоскости контакта покрытия и основы в направлении действия параллельного ей касательного напряжения $\tau \equiv \tau_1$, ось Ox_2 направлена перпендикулярно плоскости контакта. Сдвиг происходит в плоскости x_1Ox_2. В результате в рассмотрении оказываются лишь следующие величины:

$$\gamma_{12} = u_{1,2} + \omega_3;\ \ \kappa_{32} = \omega_{3,2};\ \ \gamma_{(12)} = \frac{1}{2}u_{1,2};\ \ \gamma_{\langle 12\rangle} = \frac{1}{2}u_{1,2} + \omega_3;$$

$$\kappa_{(32)} = \frac{1}{2}\omega_{3,2};\ \ \kappa_{\langle 23\rangle} = \frac{1}{2}\omega_{3,2}. \qquad (10)$$

Уравнения равновесия в напряжениях в рамках рассматриваемой модели среды имеют в общем случае вид:

$$\sigma_{ij,i} = 0;\quad \mu_{ij,i} + \in_{ijk}\sigma_{ik} = 0. \qquad (11)$$

На основании (11) (для плоского случая чистого сдвига), выразив второе уравнение в перемещениях, можно получить:

$$\sigma_{21,2} = 0;\quad (\gamma + \varepsilon)\omega_{3,22} + 2\alpha u_{1,2} - 4\alpha\omega_3 = 0. \qquad (12)$$

Краевыми условиями для них являются соотношения:

$$\sigma_{21}(h) = \tau;\ \ \mu_{23}(h) = 0;\ \ u_1(0) = 0;\ \ \omega_3(0) = \omega^0 \qquad (13)$$

Первое выражение (12) с учетом первого из краевых условий (13) позволяет считать, что, в рамках рассматриваемой модели касательное напряжение, сдвигающее покрытие, распределено по его толщине h равномерно и равно действующему сдвиговому напряжению на поверхности (как и при использовании классической модели линейно-упругой среды):

$$\sigma_{21} = \tau. \qquad (14)$$

Этот результат, а также соотношения (6), связывающие внутренние напряжения и деформации, и последнее из соотношений (13) позволяют сделать вывод о том, что распределения перемещений $u_1(x_2)$ и поворотов $\omega_3(x_2)$, а также их производных по толщине покрытия отличны от нуля. На основании (7) и (8) с учетом (6) этот вывод приводит к утверждению о том, что энергию упругих деформации W, сосредоточенную под единицей площади поверхности покрытия, можно записать в виде:

$$W = \frac{h\tau^2}{2\mu} + \frac{\alpha}{2}\int_0^h \left(\frac{1}{2}u_{1,2}(x_2) + \omega_3(x_2)\right)^2 dx_2 + \frac{\gamma+\varepsilon}{2}\int_0^h \left(\omega_{3,2}(x_2)\right)^2 dx_2 . \quad (15)$$

Сравнивая его с левой частью равенства (3) можно убедиться, что

$$\Delta = \frac{\alpha}{2}\int_0^h \left(\frac{1}{2}u_{1,2}(x_2) + \omega_3(x_2)\right)^2 dx_2 + \frac{\gamma+\varepsilon}{2}\int_0^h \left(\omega_{3,2}(x_2)\right)^2 dx_2 . \quad (16)$$

Из вышесказанного следует, что классическая оценка энергии адгезии меньше по сравнению с той, которую можно делать, приравняв (16) величине F_a. При достаточно больших значениях α и $\gamma+\varepsilon$ классическими оценками $\tau_{\max}$ пользоваться нельзя. В работе [10] для значений напряженности $E \sim 10^9$ *В/м* сделаны оценки: $\alpha \approx 10^8$ *н/м*^{2}; $\gamma+\varepsilon \approx 10^6$ *Дж/м*. Для покрытия с толщиной $h \approx 10^{-4}$ *м*, $u_1 \approx 10^{-6}$ *м*, $\omega \approx 10^{-3}$ *рад* значение величины Δ может оказаться соизмеримым с величиной F_a, имеющей порядок 1 *Дж/м*^{2}. Расчет $\tau_{\max}$ на основании классических представлений может привести к значительным погрешностям. Это подтверждает необходимость учета изложенных выше взглядов при расчете режимов резания инструментами с покрытиями.

Заключение

В работе представлено теоретическое обоснование необходимости использования при оценке величины максимально допустимых касательных напряжений в покрытиях режущих инструментов представлений об упругих свойствах материалов, применяемых микрополярной теорией упругости.

Работа выполнялась в рамках базовой части Государственного задания на 2017 – 2019 гг., код проекта 1.5265.2017/БЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шоркин В. С., Фроленкова Л. Ю., Азаров А. С. Учет влияния тройного взаимодействия частиц среды на поверхностные и адгезионные свойства твердых тел // Материаловедение. – 2011. – № 2. – С. 2-7.
2. Vitkovsky I. V., Frolenkova L. Yu., Shorkin V. S. Adhesion-Diffusion Formation of a Multilayer Wall for the Liquid Metal Flow Channel of a Fusion Reactor Blanket // Technical Physics. – 2012. – Vol. 57. – № 7. – P. 1013-1018.
3. Фроленкова Л. Ю., Шоркин В. С. Теоретическая оценка адгезионных свойств покрытий режущего инструмента / Л. Ю. Фроленкова, В. С. Шоркин // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2012. – № 8. – С. 22-25.
4. Шоркин В.С., Батищев А.Н., Кузнецов Ю.А. Анализ напряженного состояния износостойких покрытий восстановленных деталей // Механизация и электрификация сельского хозяйства, 2003. –№ 3. – С. 28-30.
5. Зимон А. Д. Адгезия пленок и покрытий. – М.: Химия, 1977. – 352 с.
6. Партенский М. Б. Самосогласованная электронная теория металлической поверхности // Успехи физических наук. – 1979. – Т. 128. – Вып. 1. – С. 69-106.
7. Вакилов А. Н., Мамонова М. В., Прудников В. В. Адгезия металлов и полу-

проводников в рамках диэлектрического формализма // Физика твердого тела. – 1997. – Т. 39. – № 6. – С. 964-967.
8. Кувшинскии Е. В., Аэро Э. Л. Континуальная теория асимметричной упругости. Учет внутреннего вращения // ФТТ. – 1963. –Т. 5.– Вып. 9. – С. 251-264.
9. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
10. Ромашин С. Н., Седов А. В., Хорошилова М. В., Шоркин В. С. Влияние электоростатического поля на механические свойства диэлектрика // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2012. – № 1 (291). – С. 3-9.

УДК 621.382 + 608.2

ОСОБЕННОСТИ КОНТАКТНОГО СОЕДИНЕНИЯ СИЛОВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ ПОСРЕДСТВОМ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОГО СПЕКАНИЯ СЕРЕБРА, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А.М. Сурма
АО «Протон-Электротекс»
e-mail: *a.surma@proton-electrotex.com*
Д.А. Титушкин
АО «Протон-Электротекс»
d.titushkin@proton-electrotex.com
С.И. Матюхин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева»
e-mail: *sim1@mail.ru*
С. Остапенко
Ultrasonic Technologies, Inc.
e-mail: *sergei.ostapenko@ultrasonictech.com*

Исследованы контактные соединения, созданные низкотемпературным спеканием серебра, между кремниевой тиристорной структурой и молибденовым диском с шероховатой поверхностью. Показано, что повышенная шероховатость приводит к заметному увеличению контактного сопротивления соединения. Выявление таких соединений возможно методом RUV (Resonance Ultrasonic Vibration).

Ключевые слова: силовые полупроводниковые приборы, тиристоры, низкотемпературное спекание, синтеринг.

1. Введение

Одной из актуальных технологий, позволяющей повысить надежность и ресурс внутренних соединений в силовых полупроводниковых приборах, является низкотемпературное соединение на серебросодержащие слои (синтериг) [1-4]. В производстве мощных однокристальных тиристоров и диодов эта технология применяется для соединения кремниевого элемента большого размера (10 – 100 мм и более) с молибденовым диском – термокомпенсатором. Опыт

применения технологии синтеринга в производстве таких приборов показывает такие преимущества, как повышенная циклостойкость [3, 4], уменьшенное тепловое сопротивление [2 – 4], увеличенные значения ударного тока [1], а также улучшенные характеристики обратного восстановления и выключения [5].

Необходимость создания надежного соединения на такой большой площади (10 – 100см^2 и более) порождает, однако, ряд специфических проблем. В [6] было показано, что большое значение имеет шероховатость поверхности молибденового диска. Увеличенная шероховатость может привести к вариации пористости шва по площади соединения, формируемого в процессе синтеринга, из-за неравномерности распределения давления.

Было исследовано соединение полупроводниковых тиристорных элементов с молибденовыми дисками, поверхность которых имела следующие показатели шероховатости: Rz = 4,6 мкм, Rmax = 9,54 мкм. На рисунке 1 показаны результаты SEM (Scanning electron microscope) анализа полученного шва [6].

Из рисунка видно, что достаточно большой уровень шероховатости молибденового диска приводит к разнотолщинности шва (от 25 до 15 мкм), что сказывается на его плотности и пористости. Оценка показала, что имеет место существенный разброс плотности шва (от 83.1 до 92.9 %) и, соответственно, разброс пористости (от 16,9 до 7,1%).

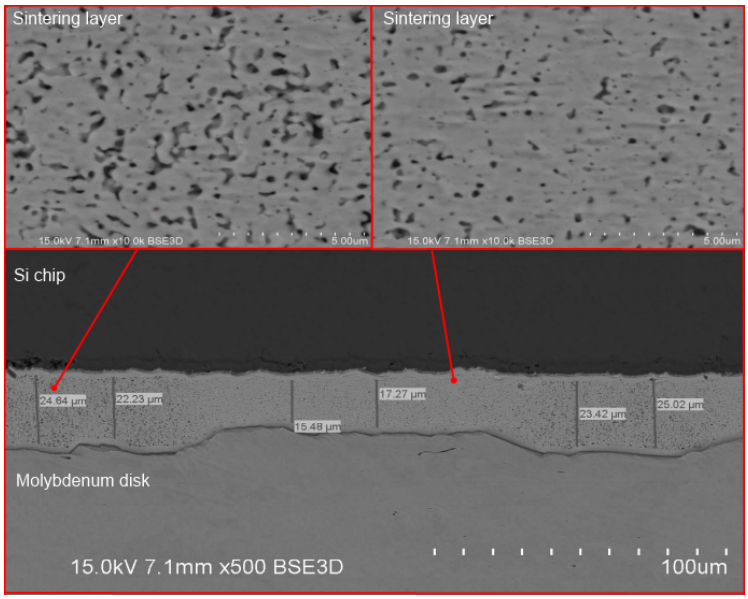


Рисунок 1 – SEM анализ полученного в процессе синтеринга соединения кремниевой пластины и молибденового диска с повышенной шероховатостью

Дальнейшие исследования, результаты которых приведены в настоящей работе, показали, что такой шов обладает существенными отклонениями по электропроводности (контактному сопротивлению) в сравнении с однородным по плотности.

2. Экспериментальные образцы и измерения

Были сформированы две группы экспериментальных образцов.

Группа А. Тиристорные образцы диаметром 100 мм, с площадью катода около 54 см^2, сформированы соединением кремниевых тиристорных элемен-

тов с молибденовыми дисками толшиной 4 мм, поверхность которых имела повышенную шероховатость: Rz = 4,6 мкм, Rmax = 9,54 мкм. Синтеринг проходил на серебросодержащих плёнках Argomax 8010 толщиной 65 мкм в режимаж 20 МПа и 235 ^{o}C (толщина серебросодержащего шва после синтеринга в пределах 20 мкм). Образцы этой группы аналогичны исследованным в [6].

Группа B. Аналогичные группе A кремниевые тиристорные элементы соединены с молибденовыми дисками меньшей шероховатости (Rz = 1,4 мкм, Rmax = 2,9 мкм). Режим синтеринга аналогичен описанному для группы A.

На экспериментальных образцах было измерено импульсное падение напряжения во включенном состоянии (V_{TM}) при анодном токе I_{TM}=6300 A. Результаты приведены в таблице 1.

Из данных табл. 1 следует, что значения U_{TM} для образцов группы A существенно больше (в среднем на 0.27 В), чем для образцов группы B. Учитывая, что измерения проводились при плотности тока через соединение около 100 А/см^2, эти отличия не могут быть объяснены вариациями толщины шва и его пористости для образцов группы A.

Отличия в V_{TM}, таким образом, могут быть объяснены только изменением контактных сопротивлений интерфейсов «кремниевый элемент – материал синтер-шва», «материал синтер-шва – молибден». Проведенные методом УЗ микроскопии исследования не выявили, однако, участков деламинации на этих интефейсах, а также каких либо других значимых отличий между образцами групп A и B. Также не выявили деламинации соединения проведенные на части образцов механические «крэш-тесты».

Таблица 1 – Результаты измерения импульсного падения напряжения

No образца	Группа	U_{TM} [V]
1/16395	B	1.58
3/16395	B	1.42
4/16395	B	1.46
7/16395	B	1.52
8/16395	B	1.48
10/16395	B	1.47
5/16395	A	1.70
1/90299	A	1.78
4/90299	A	1.74
7/90299	A	1.74
10/90299	A	1.79

Полученные результаты можно интерпретировать следующим образом. Соединительный шов для образцов группы A состоит из «мозаики» локальных областей с низкой и высокой пористостью синтер-материала. В областях с низкой пористостью шов обладает наименьшей эластичностью (наибольшими значениями модуля Юнга), в областях с высокой пористостью эластичность шва выше. Следовательно, при остывании образца после проведения синтеринга, механические напряжения сдвига локализуются в областях с меньшей пористостью. Это может приводить к «мозаичной» деламинации локальных участков

интерфейсов с поверхностью кремния или молибдена, расположенных в этих областях. Размер каждого такого участка мал (менее 100мкм), а их распределение по площади близко к равномерному, соответственно распределению выступов на поверхности молибденового диска. Суммарная площадь деламинированных участков, тем не менее, может быть достаточно большой.

Вследствие этих особенностей ни УЗ микроскопия, ни механические тесты не выявляют изменения состояния интерфейсов. Для выявления такого состояния интерфейсов нами был опробован метод RUV (Resonance Ultrasonic Vibration) [7, 8].

RUV метод основан на измерении резонансных ультразвуковых колебаний, генерируемых в проверяемом объекте. Для количественного контроля все образцы должны иметь одинаковый размер и форму. Данный метод включает количественный анализ трех параметров, которые характеризуют резонансную кривую - амплитуду, полосу пропускания и положение пика в частотном масштабе. RUV чувствителен к дефектам кристаллов, таким как расслаивание, трещины и остаточные напряжения.

На рисунке 2 показано соотношение между положением одного из характерных пиков RUV спектра и значениями V_{TM} для образцов A и B. Из рисунка видна достаточно хорошая корреляция между этими характеристиками.

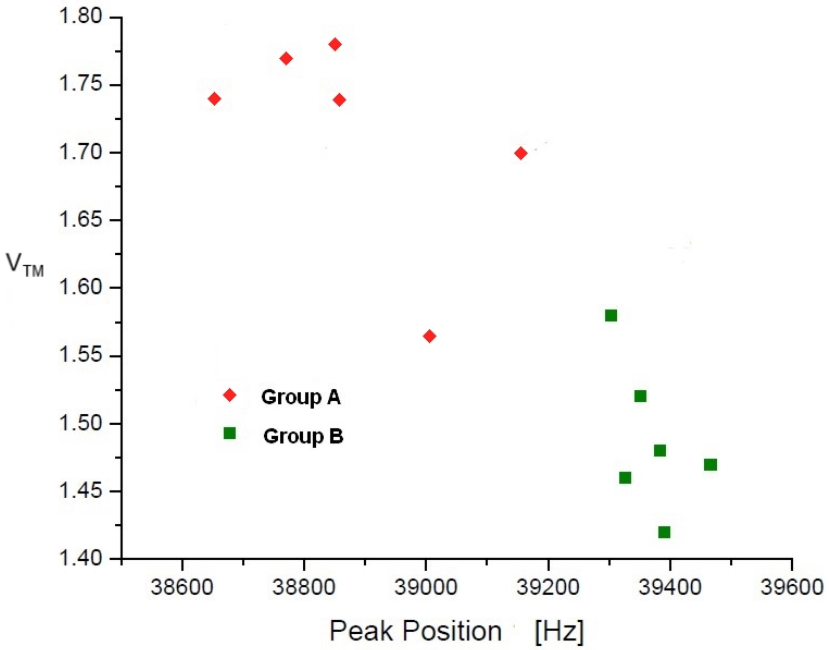


Рисунок 2 – Зависимость значений V_{TM} и положений пика в частотном масштабе

Если исходить из предложенной выше модели возникновения увеличенного контактного сопротивления на образцах группы A, то эта корреляция имеет простое объяснение: действительно, вследствие изменения упругих свойств шва с «мозаичной микро-деламинацией», положения резонансных пиков спектра RUV должны изменяться. При этом, так как общая эластичность шва при «мозаичной микро-деламинации» увеличивается, следует ожидать смещения

положения резонансных пиков в область меньшей частоты, что и было зафиксировано в эксперименте.

3. Заключение

В настоящей работе исследованы контактные соединения, созданные синтерингом серебра между кремниевой тиристорной структурой и молибденовым диском с шероховатой поверхностью. Показано, что повышенная шероховатость поверхности молибденового диска приводит к заметному повышению V_{TM} тиристора за счет увеличения контактного сопротивления соединения. Показана возможность применения метода RUV (Resonance Ultrasonic Vibration) для выявления соединений с повышенным контактным сопротивлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwarzbauer H. Novel Large Area Joining Technique for Improved Power Device Performance // IEEE Transactions on Industrial Applications. – V.27 (1). – 1991. – P.93-95.
2. Chernikov A., Stavtsev A., Surma A. Features of wafer - Mo joining by sintering of silver paste for large area silicon devices // Proc. EPE'2013. – Lille. – 2013.
3. Scheuermann U., Wiedl P. Low Temperature Joining Technology - A High Reliability Alternative to Solder Contacts // Workshop on Metal Ceramic Composites for Functional Application. – Vienna. – 1997. – P.181-192.
4. Göbl C., Beckedahl P., Braml H. Low temperature sinter technology Die attachment for automotive power electronic applications // Proc. Automotive Power Electronics.- Paris. –2006.
5. Titushkin D., Surma A. New ways to produce fast power thyristors // Bodo's Power Systems. – 2015. – №8. – P.28-29.
6. Titushkin D., Surma A., Stavtsev A., Stavtsev K. Low temperature silver sintering improves reliability of power semiconductors // Power Electronics Europe. – 2017. – Issue 2. – P.25-27.
7. Dallas W., Polupan O., Ostapenko S. Resonance ultrasonic vibrations for crack detection in photovoltaic silicon wafers // Measurements Science and Technology. – 2007. – V.18. – P.852-858.
8. Belyaev A., Polupan O., Dallas W., Ostapenko S., Hess D., Wohlgemuth J. Crack detection and Analyses Using Resonance Ultrasonic Vibrations in Full-Size Crystalline Silicon Wafers // Applied Physics Letters. – 2006. – V.88. –P.111907.

УДК 622.279:681

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ВИРТУАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТОКА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

В.А. Толпаев, д.ф.-м.н., проф.
ООО «Газпром проектирование»
e-mail: *v.a.tolpaev@mail.ru*
К.С. Ахмедов, к.т.н.
ООО «Газпром проектирование»
e-mail: *kurban2000@mail.ru*
А.В. Колесников, к.т.н.
ООО «Газпром проектирование»
С.А. Гоголева
ООО «Газпром проектирование»
e-mail: *GogolevaSA@scnipigaz.ru*

Предлагается новый метод исследования осесомметричных фильтрационных течений нефти (газа) к скважине – метод виртуальных поверхностей тока. Предложенный метод позволяет исследовать осесимметричные потоки флюидов к скважинам в условиях, когда фильтрация подчиняется общему нелинейному закону Барри-Конвея, а также его частным случаям – законам Дарси либо Форхгеймера. Метод виртуальных поверхностей тока применен к расчетам дебитов газовых скважин, расположенных в куполе осесимметричного пласта, а также к расчету дебита несовершенной по степени вскрытия пласта скважины. На конкретных примерах рассмотрены границы применимости классической плоскорадиальной модели притока газа к скважине.

Ключевые слова: осесимметричная модель притока газа, дебит, закон Дарси, закон Форхгеймера, закон Барри-Конвея, газогидродинамические исследования скважин, плоскорадиальная модель притока газа.

Введение

Важный класс практических проблем теории фильтрации представляют задачи расчета осесимметричных притоков нефти (газа) к вертикальным скважинам. Например, задача расчета дебита несовершенной по степени вскрытия плоскопараллельного пласта скважины, притока флюида к вертикальной скважине с горизонтальной трещиной гидроразрыва, расчет дебита скважины, расположенной в куполе осесимметричного пласта и др. Для фильтрации, подчиняющейся линейному закону Дарси, известны аналитические решения перечисленных задач. Но для фильтрации, подчиняющейся квадратичному закону Форхгеймера, или более общему закону Барри-Конвея [1-4], аналитических решений этих задач в известной авторам литературе не встречалось. Кроме того, на практике при расчете дебитов скважин, эксплуатирующих осесимметричные пласты с переменной толщиной, чаще всего прибегают к упрощению путем перехода к плановой плоскорадиальной модели фильтрации в пласте с некоторой осреднённой толщиной. При этом точность моделирования осесимметричной фильтрации плоскорадиальными течениями в пластах с осреднённой толщиной, как правило, не оценивается.

Целью данной статьи является, во-первых, разработка аналитических методов расчета фильтрационных течений к скважинам, расположенным в куполах осесимметричных пластов переменной толщины, ограниченных непроницаемыми подошвой и кровлей. Во-вторых, сравнение результатов расчета с аналогичными данными, получаемыми в упрощенной классической плоскорадиальной постановке с оценкой точности плоскорадиального моделирования.

1. Общие положения. Задание виртуальных поверхностей тока однопараметрическим семейством в декартовых координатах

Все расчеты осесимметричных течений к скважинам будем выполнять в декартовых координатах, ось z в которых совместим с осью симметрии пласта и скважины и направим её вертикально вверх. Начало отсчета на оси z совместим с напорной горизонтальной поверхностью пластовых вод, вдоль которой направим ось x (рисунок 1).

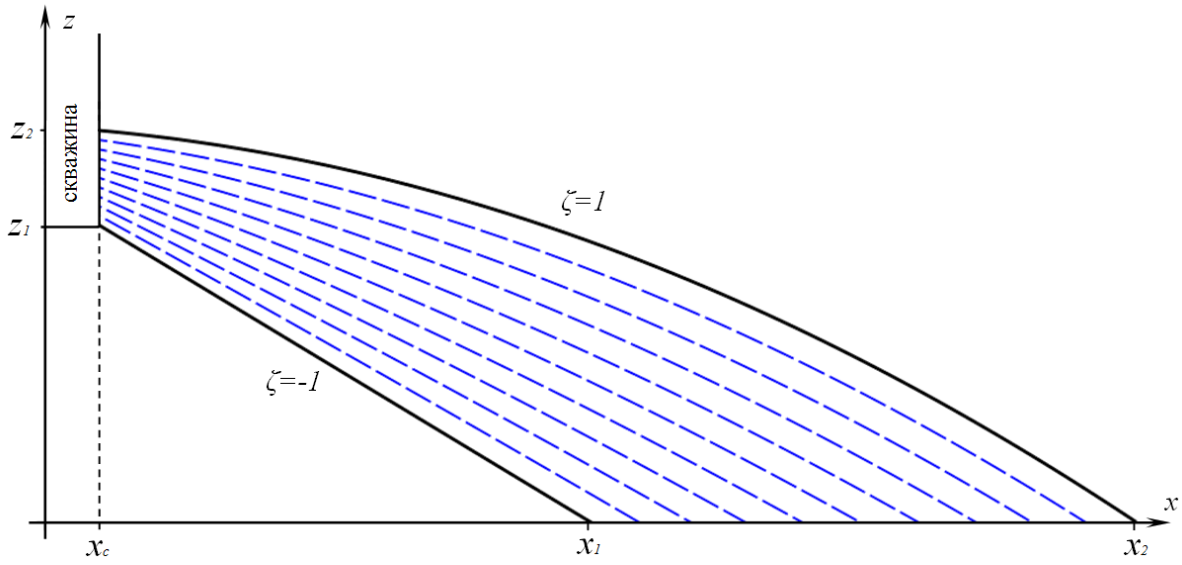


Рисунок 1 – Правая половина вертикального сечения осесимметричного пласта и скважины, расположенной в его куполе. Подошва пласта соответствует параметру $\zeta = -1$, а кровля – параметру $\zeta = 1$. Пунктирные линии – сечения виртуальных поверхностей тока плоскостью xOz

Рассматриваем напорный режим фильтрации, создаваемый давлением пластовых вод, при котором пьезометрическая поверхность в каждой точке области фильтрации расположена выше кровли продуктивного пласта.

Идея расчета притока нефти (газа) к вертикальной скважине, расположенной в куполе осесимметричного пласта, методом виртуальных поверхностей тока (ВПТ) заключается в следующем. По заданным в плоскости xOz уравнениям $\varphi_1(x,z)=0$ и $\varphi_2(x,z)=0$ непроницаемых соответственно подошвы и кровли пласта строится некоторое однопараметрическое семейство кривых. Оно задается либо уравнением явного вида $z=\Psi(x,\zeta)$, либо уравнением неявного вида $f(x,z,\zeta)=0$ с безразмерным параметром ζ, изменяющимся в пределах $-1\le\zeta\le 1$. Это однопараметрическое в плоскости xOz семейство кривых при-

меняется для задания виртуальных (т.е. воображаемых) поверхностей тока нефти (газа) к вертикальной скважине. Причем при крайних значениях параметра ζ должны получаться заданные уравнения подошвы и кровли пласта.

Построить такие однопараметрические семейства кривых можно, например, с помощью уравнения

$$f(x,z,\zeta)=\alpha_1(\zeta)\cdot\varphi_1(x,z)+\alpha_2(\zeta)\cdot\varphi_2(x,z)=0\,, \qquad (1)$$

либо, если в плоскости xOz заданы явные уравнения подошвы $z=\varphi_1(x)$ и кровли $z=\varphi_2(x)$ осесимметричного пласта, то с помощью уравнения

$$z=\Psi(x,\zeta)\equiv\alpha_1(\zeta)\cdot\varphi_1(x)+\alpha_2(\zeta)\cdot\varphi_2(x). \qquad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) $\alpha_1(\zeta)$ и $\alpha_2(\zeta)$ – некоторые заранее выбранные положительные функции, называемые далее функциями смешения, удовлетворяющие требованию $\alpha_1(\zeta)+\alpha_2(\zeta)\equiv 1$ и граничным условиям $\alpha_1(-1)=1$, $\alpha_1(+1)=0$, $\alpha_2(-1)=0$ и $\alpha_2(+1)=1$. Требование $\alpha_1(\zeta)+\alpha_2(\zeta)\equiv 1$ с геометрической точки зрения означает, что все ВПТ с монотонным ростом значений параметра ζ распределяются между подошвой и кровлей пласта строго упорядоченно соответственно значениям ζ и без взаимных пересечений. Можно привести целый ряд примеров возможных наборов таких функций смешения. Наиболее естественным из всех возможных наборов представляется равномерное распределение плотности поверхностей тока по толщине пласта, которое дают функции смешения

$$\alpha_1(\zeta)=\frac{1-\zeta}{2}\quad\text{и}\quad\alpha_2(\zeta)=\frac{1+\zeta}{2}. \qquad (3)$$

В частности, на рисунке 1 приведены ВПТ в осесимметричном пласте переменной толщины с подошвой $z=\varphi_1(x)=z_1\cdot\left(1-\dfrac{x}{x_1}\right)$ и кровлей $z=\varphi_2(x)=z_2\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{x_2^2}\right)$, которые были построены с применением указанных функций смешения. Реальные фильтрационные течения в осесимметричных пластах почти всюду будут иметь поверхности тока по форме близкие к системе однопараметрических поверхностей $\zeta=\text{const}$.

Отрезок $[x_1,\,x_2]$ оси x-ов на рисунке 1 определяет ширину участка напора (с известным на нём давлением питания $p_{\text{п}}$) в области фильтрации, а отрезок $[z_1,\,z_2]$ оси z определяет приближенное значение длины $H_{ск}=z_2-z_1$ эксплуатационной колонны скважины в куполе осесимметричного пласта. Точное значение длины $H_{ск}=z_2^*-z_1^*$ эксплуатационной колонны скважины в куполе осесимметричного пласта находится с помощью равенств $z_1^*=\varphi_1(x_c)$ и $z_2^*=\varphi_2(x_c)$. Однако, ввиду того, что радиус скважины x_c значительно меньше типовых размеров x_1 и x_2 области фильтрации, можно считать, что z_1^* и z_2^*

фактически совпадают со значениями $z_1 = \varphi_1(0)$ и $z_2 = \varphi_2(0)$, что и позволяет считать длину $H_{ск} = z_2^* - z_1^* \cong z_2 - z_1$.

Заметим, что если в пласте каким-то способом построить либо по уравнению (1), либо по уравнению (2), бесконечно тонкие непроницаемые однопараметрические поверхности $\zeta = \text{const}$, то фильтрационное течение действительно будет идти по выбранным виртуальным поверхностям тока. Однако внесение в пласт системы непроницаемых для фильтрационного течения поверхностей увеличит фильтрационное сопротивление пласта. Как следствие, величина дебита скважины, поток к которой пойдет по заданным непроницаемым поверхностям, уменьшится. Таким образом, фактический дебит $Q_{\text{факт}}$ скважины будет немного (примерно на 1…5%) больше того значения Q, которое будет вычислено с применением метода виртуальных поверхностей тока, т.е. $Q \le Q_{\text{факт}}$.

2. Поле скоростей в осесимметричных фильтрационных потоках жидкости (газа)

Перейдем теперь к описанию, с позиций закона сохранения массы, поля $\vec{v}(x,\zeta)$ скоростей фильтрации жидкости (газа) к нефтяным и газовым скважинам. При этом исходим из того, что система ВПТ задана либо уравнением неявного вида (1) либо уравнением явного вида (2) с функциями смешения (3). Очевидно, что вектора $\vec{v}(x,\zeta)$ скоростей фильтрации в плоскости xOz будут располагаться на касательных прямых к кривым $z = \Psi(x,\zeta)$, задающим виртуальные поверхности тока. Касательный к кривой $z = \Psi(x,\zeta)$ вектор $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x}$ в декартовом базисе имеет разложение

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial \Psi(x,\zeta)}{\partial x}\cdot\vec{k} = \vec{i} + \left[\frac{1-\zeta}{2}\cdot\varphi_1'(x) + \frac{1+\zeta}{2}\cdot\varphi_2'(x)\right]\cdot\vec{k}, \qquad (4)$$

а его модуль $\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right| = H(x,\zeta)$ равен

$$H(x,\zeta) = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right| = \sqrt{1+\left[\frac{\partial \Psi(x,\zeta)}{\partial x}\right]^2} = \sqrt{1+\left[\frac{1-\zeta}{2}\cdot\varphi_1'(x) + \frac{1+\zeta}{2}\cdot\varphi_2'(x)\right]^2}. \qquad (5)$$

Единичный касательный к кривым $z = \Psi(x,\zeta)$ вектор, направленный в сторону возрастания абсциссы x, определяется выражением

$$\vec{e}(x,\zeta) = \frac{1}{H(x,\zeta)}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \frac{\vec{i} + \dfrac{\partial \Psi(x,\zeta)}{\partial x}\cdot\vec{k}}{H(x,\zeta)} = \frac{\vec{i} + \left[\dfrac{1-\zeta}{2}\cdot\varphi_1'(x) + \dfrac{1+\zeta}{2}\cdot\varphi_2'(x)\right]\cdot\vec{k}}{H(x,\zeta)}. \qquad (6)$$

Если модуль вектора скорости фильтрации обозначить через $v(x,\zeta)$, то, учитывая направленность вектора скорости фильтрации к скважине, т.е. в сто-

рону, противоположную $\vec{e}(x,\zeta)$, для самого вектора скорости фильтрации получим представление

$$\vec{v}(x,\zeta) = -v(x,\zeta)\cdot\vec{e}(x,\zeta). \tag{7}$$

При фильтрации жидкости (газа) к нефтяным (газовым) скважинам, расположенным в куполах осесимметричных пластов, масса dM движущегося флюида через любое поперечное сечение виртуального слоя, ограниченного непроницаемыми поверхностями тока ζ и $\zeta + d\zeta$, должна оставаться постоянной. Подсчитаем поток массовой скорости $\rho(x,\zeta)\cdot\vec{v}(x,\zeta)$ через круговую цилиндрическую поверхность с зафиксированным радиусом $x = const$, заключенную внутри виртуального слоя течения $[\zeta,\ \zeta + d\zeta]$. Площадь dS такой круговой цилиндрической поверхности равна

$$dS = 2\pi\cdot x\cdot\frac{\partial\Psi(x,\zeta)}{\partial\zeta}\cdot d\zeta = \pi\cdot x\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\cdot d\zeta\,. \tag{8}$$

За единицу времени через сечение dS рассматриваемой цилиндрической поверхности будет протекать масса $d\,M$ флюида, равная скалярному произведению $dM = \left(\rho(x,\zeta)\cdot\vec{v}(x,\zeta),-\vec{i}\right)\cdot dS$, т.е. с учетом формул (7) и (8)

$$\begin{aligned} dM &= \frac{2\pi\cdot x\cdot\rho(x,\zeta)\cdot v(x,\zeta)}{H(x,\zeta)}\cdot\frac{\partial\Psi(x,\zeta)}{\partial\zeta}\cdot d\zeta = \\ &= \pi\cdot x\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\cdot\frac{\rho(x,\zeta)\cdot v(x,\zeta)}{H(x,\zeta)}\cdot d\zeta\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Из уравнения (9) вытекает, что скорость фильтрации флюида в виртуальном слое, ограниченном непроницаемыми поверхностями ζ и $\zeta + d\zeta$, равна

$$v(x,\zeta) = \frac{H(x,\zeta)\cdot d\,M}{2\pi\cdot x\cdot\rho(x,\zeta)\cdot\dfrac{\partial\Psi(x,\zeta)}{\partial\zeta}\ \cdot d\zeta} = \frac{H(x,\zeta)\cdot d\,M}{\pi\cdot x\cdot\rho(x,\zeta)\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\ \cdot d\zeta}. \tag{10}$$

При фильтрации нефти с достаточной для практики точностью можно считать плотность $\rho(x,\zeta) = const$ постоянной величиной, вследствие чего дробь $\dfrac{d\,M}{\rho(x,\zeta)}$ в (10) будет равна объемному потоку $d\,Q = \dfrac{d\,M}{\rho(x,\zeta)}$ в виртуальном слое течения. Тогда скорость фильтрации нефти в виртуальном слое течения $[\zeta,\ \zeta + d\zeta]$ будет равна

$$v(x,\zeta) = \frac{H(x,\zeta)}{2\pi\cdot x\cdot\dfrac{\partial\Psi(x,\zeta)}{\partial\zeta}}\cdot\frac{d\,Q}{d\zeta} = \frac{H(x,\zeta)}{\pi\cdot x\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]}\cdot\frac{d\,Q}{d\zeta}. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь фильтрацию реального газа. Как известно, плотность ρ реального газа рассчитывается по уравнению состояния [5]

$$\rho = \zeta_z\cdot\rho_{am}\cdot\frac{p}{p_{am}} \tag{12}$$

где

$$\zeta_г = \frac{T_{am} \cdot z_{am}}{T_{пл} \cdot z_{пл}} = const. \tag{13}$$

В формулах (12) и (13)

ρ – плотность газа, кг/м^3;

p – абсолютное давление, МПа;

ρ_{am} и z_{am} значение плотности природного газа и фактора сжимаемости z_{am} при нормальных атмосферных условиях: p_{am} = 760 мм рт. ст. = 0,101325 МПа ,

$T_{am} = 20°C = 293{,}15\,K$;

$T_{\text{пл}}$ и $z_{пл}$ температура и фактор сжимаемости при пластовых условиях.

Подставляя теперь в уравнение (10) плотность газа (12), относительно его скорости фильтрации в виртуальном слое течения $[\zeta, \zeta + d\zeta]$ получим выражение

$$v(x,\zeta) = \frac{H(x,\zeta) \cdot p_{am} \cdot dM}{2\pi \cdot x \cdot \zeta_г \cdot \rho_{am} \cdot p(x,\zeta) \cdot \dfrac{\partial \Psi(x,\zeta)}{\partial \zeta} \cdot d\zeta} = \frac{H(x,\zeta) \cdot p_{am} \cdot dM}{\pi \cdot x \cdot \zeta_г \cdot \rho_{am} \cdot p(x,\zeta) \cdot [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] \cdot d\zeta}. \tag{14}$$

Учитывая, что $\dfrac{dM}{\rho_{am}} = dQ$ определяет вклад виртуального слоя тока $[\zeta, \zeta + d\zeta]$ в объемный дебит газодобывающей скважины, рассчитываемый для нормальных атмосферных условий, для скорости фильтрации газа в виртуальном слое $[\zeta, \zeta + d\zeta]$ получим выражение

$$v(x,\zeta) = \frac{H(x,\zeta) \cdot p_{am}}{2\pi \cdot x \cdot \zeta_г \cdot p(x,\zeta) \cdot \dfrac{\partial \Psi(x,\zeta)}{\partial \zeta}} \cdot \frac{dQ}{d\zeta} = \frac{H(x,\zeta) \cdot p_{am}}{\pi \cdot x \cdot \zeta_г \cdot p(x,\zeta) \cdot [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]} \cdot \frac{dQ}{d\zeta}. \tag{15}$$

3. Дифференциальные уравнения осесимметричной фильтрации жидкости (газа)

Формулы (11) и (15) дают распределение поля скоростей фильтрации к нефтяным и газовым скважинам с позиций закона сохранения массы движущегося флюида.

С другой стороны, поле скоростей фильтрации $\vec{v}(x,\zeta)$ должно удовлетворять экспериментальному закону, связывающему его с полем давлений $p(x,\zeta)$. Такой закон согласно современным представлениям о фильтрации в пористых средах, дается уравнением Барри-Конвея [1-4]

$$-\,grad\,p = f(\mathrm{Re})\cdot\frac{\mu\cdot\vec{v}}{k}, \qquad (16)$$

где k – коэффициент проницаемости пористой среды при достаточно малых значениях чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho\cdot v\cdot\sqrt{k}}{\mu}$, не превышающих некоторого критического значения $\mathrm{Re}_{кр}$; коэффициент μ – динамическая вязкость флюида, ρ – плотность флюида, а $f(\mathrm{Re})$ – поправочный множитель, устанавливаемый экспериментальным путем и учитывающий отклонение реального режима фильтрации от линейного закона Дарси. С приемлемой точностью для диапазона практических значений чисел Рейнольдса поправочный множитель $f(\mathrm{Re})$ можно представить в полиномиальном виде [4]

$$f(\mathrm{Re}) = 1 + c_1\cdot\mathrm{Re} + c_2\cdot\mathrm{Re}^2 + c_3\cdot\mathrm{Re}^3 + \ldots + c_n\cdot\mathrm{Re}^n, \qquad (17)$$

где c_1, c_2, …, c_n наряду с проницаемостью k и пористостью m являются материальными коэффициентами пористой среды, характеризующими поровое пространство. Подчеркнем, что из общего нелинейного закона фильтрации (16) вытекают как частные случаи все известные законы. Так, если в уравнении (16) функция $f(\mathrm{Re})\equiv 1$, получим классический закон линейной фильтрации – закон Дарси [6]. Если же функция $f(\mathrm{Re})$ линейно зависит от числа Рейнольдса $f(\mathrm{Re}) = 1 + c_1\cdot\mathrm{Re}$, получим другой классический частный случай – закон нелинейной фильтрации Форхгеймера [6]

$$-\,grad\,p = \left(1 + c_1\cdot\frac{\rho\cdot v\cdot\sqrt{k}}{\mu}\right)\cdot\frac{\mu\cdot\vec{v}}{k} = \frac{\mu\cdot\vec{v}}{k} + c_1\cdot\frac{\rho\cdot v}{\sqrt{k}}\cdot\vec{v}. \qquad (18)$$

Число Рейнольдса Re, как видно из (10), будет рассчитываться по формуле

$$\mathrm{Re} = \frac{H(x,\zeta)\cdot\sqrt{k}\cdot d\,M}{2\pi\cdot\mu\cdot x\cdot\dfrac{\partial\Psi(x,\zeta)}{\partial\zeta}\cdot d\zeta} = \frac{H(x,\zeta)\cdot\sqrt{k}\cdot d\,M}{\pi\cdot\mu\cdot x\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\cdot d\zeta}. \qquad (19)$$

При фильтрации нефти $d\,M = \rho\cdot d\,Q$, где $d\,Q$ объемный поток флюида в виртуальном слое $[\zeta,\ \zeta + d\zeta]$. Поэтому число Рейнольдса в случае фильтрации нефти будет рассчитываться по формуле

$$\mathrm{Re} = \frac{H(x,\zeta)\cdot\sqrt{k}\cdot\rho}{2\pi\cdot\mu\cdot x\cdot\dfrac{\partial\Psi(x,\zeta)}{\partial\zeta}}\cdot\frac{d\,Q}{d\zeta} = \frac{H(x,\zeta)\cdot\sqrt{k}\cdot\rho}{\pi\cdot\mu\cdot x\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]}\cdot\frac{d\,Q}{d\zeta}. \qquad (20)$$

В случае фильтрации реального газа массовый поток связан с объемным потоком $d\,Q$ (рассчитанном на нормальные атмосферные условия) формулой $d\,M = \rho_{am}\cdot d\,Q$. Поэтому при фильтрации реального газа для числа Рейнольдса в виртуальном слое течения $[\zeta,\ \zeta + d\zeta]$ получим выражение

$$\mathrm{Re}=\frac{H(x,\zeta)\cdot\sqrt{k}\cdot\rho_{am}}{2\pi\cdot\mu\cdot x\cdot\dfrac{\partial\Psi(x,\zeta)}{\partial\zeta}}\cdot\frac{dQ}{d\zeta}=\frac{H(x,\zeta)\cdot\sqrt{k}\cdot\rho_{am}}{\pi\cdot\mu\cdot x\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]}\cdot\frac{dQ}{d\zeta}. \qquad (21)$$

Для исследуемых осесимметричных фильтрационных течений закон Барри-Конвея (16) запишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial s}=f(\mathrm{Re})\cdot\frac{\mu\cdot v}{k}, \qquad (22)$$

где $\dfrac{\partial p}{\partial s}>0$ – производная от давления по меридианной дуге s, отсчитываемой от оси симметрии скважины. С учетом общеизвестной формулы для дифференциала дуги, получаем

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dz)^2}=\sqrt{1+\left[\frac{1-\zeta}{2}\cdot\varphi_1'(x)+\frac{1+\zeta}{2}\cdot\varphi_2'(x)\right]^2}\cdot dx=H(x,\zeta)\cdot dx. \qquad (23)$$

С учетом (23) уравнение (22) принимает вид

$$\frac{1}{H(x,\zeta)}\cdot\frac{\partial p(x,\zeta)}{\partial x}=f(\mathrm{Re})\cdot\frac{\mu\cdot v(x,\zeta)}{k}. \qquad (24)$$

После подстановки в (24) соответствующих выражений для скорости фильтрации нефти (11) и для фильтрации газа (15), придем к следующим дифференциальным уравнениям.

Для фильтрации нефти

$$\frac{\partial p(x,\zeta)}{\partial x}=f(\mathrm{Re})\cdot\frac{\mu\cdot H^2(x,\zeta)}{2\pi\cdot k\cdot x\cdot\dfrac{\partial\Psi(x,\zeta)}{\partial\zeta}}\cdot\frac{dQ}{d\zeta}= \qquad (25)$$

$$=f(\mathrm{Re})\cdot\frac{\mu\cdot H^2(x,\zeta)}{\pi\cdot k\cdot x\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]}\cdot\frac{dQ}{d\zeta}.$$

Для фильтрации реального газа

$$\frac{\partial p(x,\zeta)}{\partial x}=f(\mathrm{Re})\cdot\frac{\mu\cdot H^2(x,\zeta)\cdot p_{am}}{2\pi\cdot k\cdot x\cdot\zeta_z\cdot p(x,\zeta)\cdot\dfrac{\partial\Psi(x,\zeta)}{\partial\zeta}}\cdot\frac{dQ}{d\zeta}= \qquad (26)$$

$$=f(\mathrm{Re})\cdot\frac{\mu\cdot H^2(x,\zeta)\cdot p_{am}}{\pi\cdot k\cdot x\cdot\zeta_z\cdot p(x,\zeta)\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]}\cdot\frac{dQ}{d\zeta}.$$

Подчеркнем, что поскольку числа Рейнольдса, согласно формулам (20) и (21), не зависят от $p(x,\zeta)$, то относительно функции давления уравнения (25) и (26) являются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными. Интегрирование каждого из этих уравнений должно выполняться совместно с граничными условиями

$$\begin{cases} p\big|_{x=x_c} = p_c, \\ p\big|_{x=x_n^*} = p_{\text{п}}. \end{cases} \tag{27}$$

В граничных условиях (27) $x_c = r_c$ – радиус скважины, а $x_{\text{п}}^*$ – абсцисса точки пересечения виртуальной поверхности $\zeta = const$ с напорной поверхностью $z = 0$ пластовых вод (поверхностью питания). Далее, p_c – заданное давление на поверхности скважины (забойное давление), а $p_{\text{п}}$ – заданное давление на напорной поверхности. В случае задания ВПТ уравнением явного вида (2) координата $x_{\text{п}}^*$ точки пересечения виртуальной поверхности $\zeta = const$ с поверхностью питания $z = 0$ будет находиться из решения алгебраического уравнения

$$\frac{1-\zeta}{2} \cdot \varphi_1\left(x_{\text{п}}^*\right) + \frac{1+\zeta}{2} \cdot \varphi_2\left(x_{\text{п}}^*\right) = 0, \tag{28}$$

откуда видно, что $x_{\text{п}}^*$ является функцией параметра ζ.

4. Расчет дебита газовой скважины, расположенной в куполе осесимметричного пласта, в случае фильтрации по закону Барри-Конвея

Проанализируем подробнее задачу о фильтрации реального газа к скважине, расположенной в куполе осесимметричного пласта. Интегрируя уравнение (26) совместно с граничными условиями (28) получаем следующее уравнение для вклада dQ виртуального слоя тока $[\zeta;\ \zeta + d\zeta]$ в объемный дебит газодобывающей скважины:

$$p_n^2 - p_c^2 = \frac{dQ}{d\zeta} \cdot \frac{2 \cdot \mu \cdot p_{am}}{\pi \cdot k \cdot \zeta_{\text{г}}} \cdot \int_{x_c}^{x_n^*} f(\text{Re}) \cdot \frac{H^2(x,\zeta)}{x \cdot [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]}\, dx. \tag{29}$$

Уравнение (29), с учетом формул (17) и (21) для множителя $f(\text{Re})$, в развернутом виде относительно $\dfrac{dQ}{d\zeta}$ будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\pi \cdot k \cdot \zeta_{\text{г}} \cdot \left(p_n^2 - p_c^2\right)}{2 \cdot \mu \cdot p_{am}} = \frac{dQ}{d\zeta} \cdot \left[A_0\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right) + A_1\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right) \cdot \frac{dQ}{d\zeta} + \right.$$
$$\left. + A_2\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right) \cdot \left(\frac{dQ}{d\zeta}\right)^2 + \ldots + A_n\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right) \cdot \left(\frac{dQ}{d\zeta}\right)^n \right]. \tag{30}$$

В формуле (30) коэффициенты $A_0\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right)$, $A_1\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right)$, …, $A_n\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right)$ от указанных переменных вычисляются с помощью следующих интегралов:

$$\begin{cases} A_0\left(x_c, x_п^*, \zeta\right) = \int\limits_{x_c}^{x_n^*} \frac{H^2(x,\zeta)\cdot dx}{x\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]} \\ A_1\left(x_c, x_п^*, \zeta\right) = \frac{c_1\cdot\sqrt{k}\cdot\rho_{am}}{\pi\cdot\mu}\cdot\int\limits_{x_c}^{x_n^*} \frac{H^3(x,\zeta)\cdot dx}{x^2\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]^2} \\ A_2\left(x_c, x_п^*, \zeta\right) = \frac{c_2\cdot k\cdot\rho_{am}^2}{\pi^2\cdot\mu^2}\cdot\int\limits_{x_c}^{x_n^*} \frac{H^4(x,\zeta)\cdot dx}{x^3\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]^3} \\ A_3\left(x_c, x_п^*, \zeta\right) = \frac{c_3\cdot k\cdot\sqrt{k}\cdot\rho_{ат}^3}{\pi^3\cdot\mu^3}\cdot\int\limits_{x_c}^{x_n^*} \frac{H^5(x,\zeta)\cdot dx}{x^4\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]^4} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n\left(x_c, x_п^*, \zeta\right) = \frac{c_n\cdot k^{\frac{n}{2}}\cdot\rho_{ат}^n}{\pi^n\cdot\mu^n}\cdot\int\limits_{x_c}^{x_n^*} \frac{H^{n+2}(x,\zeta)\cdot dx}{x^{n+1}\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]^{n+1}} \end{cases} \qquad (31)$$

Решая алгебраическое относительно $\frac{dQ}{d\zeta}$ уравнение (30), в окончательном виде получим выражение типа

$$\frac{dQ}{d\zeta} = F\left(p_n^2 - p_c^2, x_c, x_п^*, \zeta\right), \qquad (32)$$

которое представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции расхода $Q = Q(\zeta)$. Принимая расход Q на подошве $\zeta = -1$ осесимметричного пласта равным нулю $Q(-1) = 0$, дебит скважины получим как значение функции расхода $Q(+1)$. Поэтому окончательное выражение для дебита газодобывающей скважины в куполе осесимметричного пласта получается после интегрирования (32) в виде следующей формулы:

$$Q = \int\limits_{-1}^{+1} F\left(p_n^2 - p_c^2, x_c, x_п^*, \zeta\right) d\zeta\,. \qquad (33)$$

В решении задачи о фильтрации к скважине нефти получаем аналогичную (33) формулу, с той лишь разницей, что в подынтегральном выражении вместо разности квадратов $p_n^2 - p_c^2$ будет разность первых степеней $p_n - p_c$.

5. Расчет дебита газодобывающей скважины при линейном режиме фильтрации по закону Дарси

Исследуем частный случай, когда фильтрация газа к скважине, расположенной в куполе осесимметричного пласта, подчиняется линейному закону Дарси. Тогда, как уже отмечалось, $f(\mathrm{Re}) \equiv 1$, а материальные коэффициенты пористой среды $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Поэтому уравнение (30) принимает вид

$$\frac{\pi \cdot k \cdot \zeta_г \cdot \left(p_n^2 - p_c^2\right)}{2 \cdot \mu \cdot p_{am}} = \frac{dQ}{d\zeta} \cdot A_0\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right) = \frac{dQ}{d\zeta} \cdot \int_{x_c}^{x_n^*} \frac{H^2(x,\zeta) \cdot dx}{x \cdot \left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right]}.$$

Из последнего выражения находим, что вклад dQ от виртуальной трубки тока толщиной $d\zeta$ в общий дебит скважины равен

$$\frac{dQ}{d\zeta} = \frac{\pi \cdot k \cdot \zeta_г \cdot \left(p_n^2 - p_c^2\right)}{2 \cdot \mu \cdot p_{am} \cdot \int_{x_c}^{x_n^*} \frac{H^2(x,\zeta) \cdot dx}{x \cdot \left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right]}}. \qquad (34)$$

Интегрируя правые части уравнения (34) по всем виртуальным слоям тока, для дебита совершенной по степени вскрытия пласта газодобывающей скважины, работающей в условиях справедливости линейного закона Дарси, получаем следующую универсальную расчетную формулу, пригодную для любого осесиммеричного пласта:

$$Q = \frac{\pi \cdot k \cdot \zeta_г \cdot \left(p_n^2 - p_c^2\right)}{2 \cdot \mu \cdot p_{am}} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{d\zeta}{\int_{x_c}^{x_n^*} \frac{H^2(x,\zeta) \cdot dx}{x \cdot \left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right]}}. \qquad (35)$$

Заметим, что из формулы (35) вытекает вывод об инвариантности уравнения притока газа к скважине при условии справедливости линейного закона Дарси. Как для скважины в куполе осесимметричного пласта, так и для скважины с плоскорадиальным притоком газа общий вид уравнения притока один и тот же: $p_n^2 - p_c^2 = A \cdot Q$. Отличия – в формулах для расчета коэффициента фильтрационного сопротивления A и, соответственно, в разных интерпретациях этого коэффициента.

6. Расчет дебита газодобывающей скважины при нелинейном режиме фильтрации по двучленному закону Форхгеймера

Исследуем теперь другой важный частный случай, когда фильтрация газа к скважине, расположенной в куполе осесимметричного пласта, подчиняется двучленному закону Форхгеймера. В этом случае, как уже отмечалось, $f(\mathrm{Re}) = 1 + c_1 \cdot \mathrm{Re}$, а другие материальные коэффициенты пористой среды $c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0$. Поэтому уравнение (30) принимает вид

$$\frac{\pi \cdot k \cdot \zeta_г \cdot \left(p_n^2 - p_c^2\right)}{2 \cdot \mu \cdot p_{am}} = \frac{dQ}{d\zeta} \cdot \left[A_0\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right) + A_1\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right) \cdot \frac{dQ}{d\zeta} \right]. \qquad (36)$$

Решая квадратное относительно $\frac{dQ}{d\zeta}$ уравнение (36) находим следующее выражение:

$$\frac{dQ}{d\zeta}=\frac{\sqrt{A_0^2\left(x_c,x_{\text{п}}^*,\zeta\right)+\dfrac{2\cdot\pi\cdot k\cdot\zeta_{\text{г}}\cdot A_1\left(x_c,x_{\text{п}}^*,\zeta\right)\cdot\left(p_n^2-p_c^2\right)}{\mu\cdot p_{am}}}-A_0\left(x_c,x_{\text{п}}^*,\zeta\right)}{2\cdot A_1\left(x_c,x_{\text{п}}^*,\zeta\right)}. \quad (37)$$

При решении квадратного уравнения (36) выбран корень, дающий при нулевой депрессии на пласт $p_n^2-p_c^2=0$ поток, равный нулю в каждом виртуальном слое. Окончательное выражение для дебита газодобывающей скважины в куполе осесимметричного пласта, когда фильтрация подчиняется закону Форхгеймера, получается после интегрирования (37) по параметру ζ. В результате получаем следующую универсальную формулу для расчета дебита газовой скважины, расположенной в куполе осесимметричного пласта общего вида, и фильтрация в котором подчиняется закону Форхгеймера:

$$Q=\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{A_0^2\left(x_c,x_{\text{п}}^*,\zeta\right)+\dfrac{2\cdot\pi\cdot k\cdot\zeta_{\text{г}}\cdot A_1\left(x_c,x_{\text{п}}^*,\zeta\right)\cdot\left(p_n^2-p_c^2\right)}{\mu\cdot p_{am}}}-A_0\left(x_c,x_{\text{п}}^*,\zeta\right)}{2\cdot A_1\left(x_c,x_{\text{п}}^*,\zeta\right)}d\zeta. \quad (38)$$

Коэффициенты $A_0\left(x_c,x_{\text{п}}^*,\zeta\right)$ и $A_1\left(x_c,x_{\text{п}}^*,\zeta\right)$ в (38) вычисляются по формулам (31).

7. Расчет дебита газодобывающей скважины при фильтрации, подчиняющейся общему закону Барри-Конвея, в условиях плоскорадиального притока

Применим ещё формулы (30) и (31) к расчету дебита совершенной вертикальной газовой скважины, эксплуатирующей круговой плоскопараллельный однородный пласт с толщиной b и расположенной в центре пласта. Осесимметричный приток газа к такой скважине принимает частный вид плоскорадиального течения. Подошва рассматриваемого пласта представляет плоскость $z=\varphi_1(x)=0$, а кровля – параллельную ей плоскость $z=\varphi_2(x)=b$. Радиус скважины x_c обозначим как r_c, а радиус контура питания $x_{\text{п}}^*$ как $x_{\text{п}}^*=R$. Тогда, как легко видеть согласно формуле (5), $H(x,\zeta)=1$, $\varphi_2(x)-\varphi_1(x)=b$, а коэффициенты $A_0\left(x_c,x_{\text{п}}^*,\zeta\right)$, $A_1\left(x_c,x_{\text{п}}^*,\zeta\right)$, …, $A_n\left(x_c,x_{\text{п}}^*,\zeta\right)$ оказываются постоянными и равными следующим значениям:

$$\begin{cases} A_0\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right) = \dfrac{1}{b} \cdot \ell n\left(\dfrac{R}{r_c}\right) \\ A_1\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right) = \dfrac{c_1 \cdot \rho_{am} \cdot \sqrt{k}}{\pi \cdot \mu \cdot b^2} \cdot \left(\dfrac{1}{r_c} - \dfrac{1}{R}\right) \\ A_2\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right) = \dfrac{c_2 \cdot k \cdot \rho_{am}^2}{2\pi^2 \cdot \mu^2 \cdot b^3} \cdot \left(\dfrac{1}{r_c^2} - \dfrac{1}{R^2}\right) \\ A_3\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right) = \dfrac{c_3 \cdot k \cdot \sqrt{k} \cdot \rho_{\text{ат}}^3}{3\pi^3 \cdot \mu^3 \cdot b^4} \cdot \left(\dfrac{1}{r_c^3} - \dfrac{1}{R^3}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n\left(x_c, x_{\text{п}}^*, \zeta\right) = \dfrac{c_n \cdot k^{\frac{n}{2}} \cdot \rho_{\text{ат}}^n}{n \cdot \pi^n \cdot \mu^n \cdot b^{n+1}} \cdot \left(\dfrac{1}{r_c^n} - \dfrac{1}{R^n}\right) \end{cases} \quad (39)$$

Поэтому уравнение (30) в рассматриваемой плоскорадиальной модели притока газа является уравнением, в правой части которого постоянные коэффициенты

$$\frac{\pi \cdot k \cdot \zeta_{\text{г}} \cdot \left(p_n^2 - p_c^2\right)}{2 \cdot \mu \cdot p_{am}} = \frac{dQ}{d\zeta} \cdot \left[A_0 + A_1 \cdot \frac{dQ}{d\zeta} + A_2 \cdot \left(\frac{dQ}{d\zeta}\right)^2 + \ldots + A_n \cdot \left(\frac{dQ}{d\zeta}\right)^n\right]. \quad (40)$$

В левой части уравнения (40) тоже стоит постоянная величина $\dfrac{\pi \cdot k \cdot \zeta_{\text{г}} \cdot \left(p_n^2 - p_c^2\right)}{2 \cdot \mu \cdot p_{am}}$. Поэтому производная от искомой функции $Q = Q(\zeta)$ в уравнении (40) будет постоянной $\dfrac{dQ}{d\zeta} = const$. Поскольку, как уже говорилось, функция расхода $Q = Q(\zeta)$ на подошве $\zeta = -1$ пласта равна нулю $Q(-1) = 0$, а на кровле $Q(+1) = Q^*$, где Q^* искомый дебит скважины, то для функции расхода получаем следующее выражение: $Q = Q(\zeta) = \dfrac{1+\zeta}{2} \cdot Q^*$. После подстановки функции расхода в уравнение (40), получим следующее уравнение плоскорадиального притока газа к центральной совершенной скважине, фильтрация к которой подчиняется универсальному общему закону Барри-Конвея

$$p_n^2 - p_c^2 = \frac{\mu \cdot p_{am}}{\pi \cdot k \cdot \zeta_{\text{г}}} \cdot \left(A_0 \cdot Q + \frac{1}{2} \cdot A_1 \cdot Q^2 + \frac{1}{4} \cdot A_2 \cdot Q^3 + \ldots + \frac{1}{2^n} \cdot A_n \cdot Q^{n+1}\right). \quad (41)$$

(В уравнении (41) при записи дебита скважины Q^* знак «звездочка», ради соблюдения стандартности обозначений, опущен). Легко видеть, что из общей формулы (41) как частные случаи вытекают известные формулы. Формула Дюпюи [5, 6] для дебита скважины при выполнении линейного закона Дарси, ко-

где $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0$. А также двучленная формула [5, 6] притока при выполнении квадратичного закона Форхгеймера, когда $c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0$.

Снова вернемся к общему виду (33) уравнения притока газа к скважине в куполе осесимметричного пласта. После вычисления интеграла в правой части формулы (33) придём к функции типа $Q = \Phi\left(p_n^2 - p_c^2\right)$. Если обратную к ней функцию $p_n^2 - p_c^2 = \Phi^{-1}(Q) = \varphi(Q)$, очевидно, удовлетворяющую по физическому смыслу условию $\varphi(0) = 0$, обозначающему равенство дебита нулю при нулевой депрессии, разложить в ряд по степеням Q, то получим

$$p_n^2 - p_c^2 = A \cdot Q + B \cdot Q^{\,2} + C \cdot Q^{\,3} + D \cdot Q^{\,4} + \ldots. \qquad (42)$$

В силу сложности вычисления интегралов типа (31), можно рекомендовать аппроксимировать уравнение притока газа к скважинам в искривленных пластах уравнением вида (42), которое, как выше доказано, становится точным в условиях плоскорадиального течения. Коэффициенты A, B, C, D, … последнего рекомендуется находить по результатам газогидродинамических исследований скважин [6]. При этом вопрос о физической интерпретации коэффициентов A, B, C, D, … теряет смысл в силу отсутствия полного набора необходимых исходных данных. Реальная гидродинамическая модель всего пласта будет представлять собой набор коэффициентов A, B, C, D, … в уравнениях (42) притока газа к каждой скважине, эксплуатирующей данный пласт. При таком подходе к построению гидродинамической модели всего пласта важной практической проблемой становится задача оптимального выбора технологических режимов работы скважин исходя из заданного набора коэффициентов A, B, C, D, … в уравнениях притока газа к эксплуатационным скважинам.

8. Примеры применения метода ВПТ к расчету дебитов газодобывающих скважин

Как уже отмечалось, на практике при расчете дебитов эксплуатационных скважин, расположенных в куполах осесимметричных пластов, часто прибегают к плановой плоскорадиальной модели притока. Поэтому представляет интерес оценка точности моделирования осесимметричной фильтрации плоскорадиальными течениями, постоянная толщина модельных пластов в которых определяется по некоторым правилам осреднения. Обратимся к рассмотрению примеров фильтрационного расчета осесимметричных течений к скважинам.

В качестве 1-го примера рассмотрим сферический пласт постоянной толщины, радиус подошвы которого R_1, а кровли R_2. Виртуальные поверхности тока в таком пласте в плоскости *xOz* зададим однопараметрическим семейством окружностей

$$z = \Psi(x, \zeta) \equiv \sqrt{R^2(\zeta) - x^2}\,, \qquad (43)$$

где $R(\zeta) = \dfrac{1-\zeta}{2} \cdot R_1 + \dfrac{1+\zeta}{2} \cdot R_2 = \dfrac{R_1 + R_2}{2} + \dfrac{R_2 - R_1}{2} \cdot \zeta$ и, естественно, $0 < R_1 < R_2$.

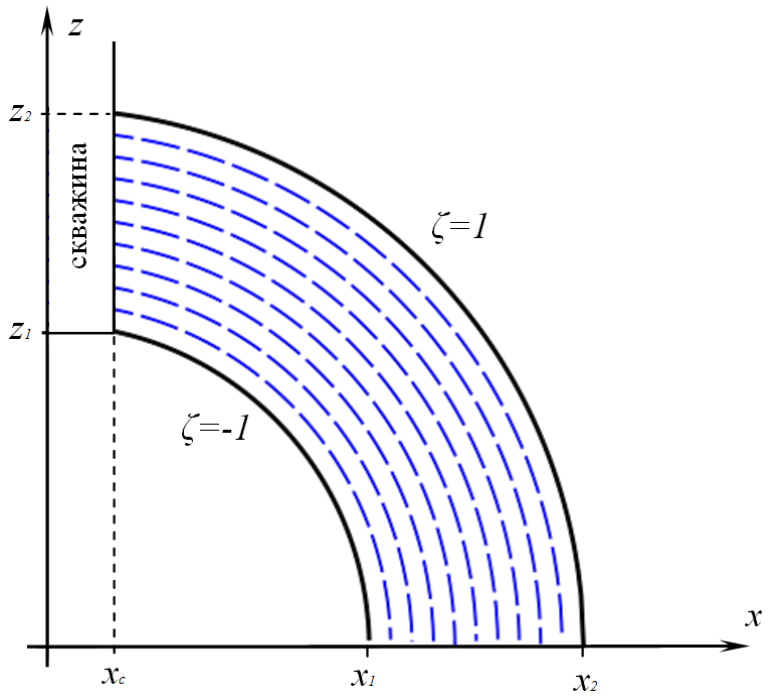


Рисунок 2 – Система виртуальных поверхностей тока
в сферическом пласте

Подчеркнем, что почти всюду, за исключением небольшой зоны, непосредственно примыкающей к боковой поверхности скважины, ВПТ совпадают с естественными линиями тока. Поэтому в данном случае дебит скважины, рассчитанный методом ВПТ, должен с большой точностью совпадать с реальным значением. Будем рассматривать линейную фильтрацию по закону Дарси, поэтому дебит рассчитаем по формуле (35). Для сферического пласта согласно формуле (5)

$$H(x,\zeta)=\sqrt{1+\left[\frac{\partial\Psi(x,\zeta)}{\partial x}\right]^2}=\sqrt{\frac{R^2(\zeta)}{R^2(\zeta)-x^2}}\,. \tag{44}$$

Поэтому

$$\int_{x_c}^{x_n^*}\frac{H^2(x,\zeta)\cdot dx}{x\cdot\dfrac{\partial\Psi(x,\zeta)}{\partial\zeta}}=\int_{x_c}^{R(\zeta)}\frac{2R(\zeta)\cdot dx}{x\cdot(R_2-R_1)\cdot\sqrt{R^2(\zeta)-x^2}}= \tag{45}$$

$$=\frac{2}{R_2-R_1}\cdot\ell n\left(\frac{R(\zeta)+\sqrt{R^2(\zeta)-x_c^2}}{x_c}\right)\cong\frac{2}{R_2-R_1}\cdot\ell n\left(\frac{2\cdot R(\zeta)}{x_c}\right).$$

Далее,

$$\int_{-1}^{1}\frac{d\zeta}{\int_{x_c}^{x_n^*}\frac{H^2(x,\zeta)\cdot dx}{x\cdot\frac{\partial\Psi(x,\zeta)}{\partial\zeta}}}=\int_{-1}^{1}\frac{d\zeta}{\frac{2}{R_2-R_1}\cdot\ell n\left[\frac{(R_2-R_1)\cdot\zeta+(R_1+R_2)}{x_c}\right]}=\frac{x_c}{2}\cdot\int_{\frac{2R_1}{x_c}}^{\frac{2R_2}{x_c}}\frac{d\tau}{\ell n\,\tau}.$$

Теперь по формуле (35) находим, что дебит газодобывающей скважины, расположенной в куполе сферического пласта и работающей в условиях справедливости линейного закона Дарси, по методу ВПТ равен следующему значению:

$$Q_{ВПТ}=\frac{\pi\cdot k\cdot x_c\cdot\zeta_г\cdot\left(p_n^2-p_c^2\right)}{2\cdot\mu\cdot p_{am}}\cdot\int_{\frac{2R_1}{x_c}}^{\frac{2R_2}{x_c}}\frac{d\tau}{\ell n\,\tau}. \qquad (46)$$

Для приближенного вычисления интеграла в последней формуле функцию $\ell n\,\tau$ на отрезке интегрирования $\left[\frac{2R_1}{x_c},\frac{2R_2}{x_c}\right]$ заменим её линейным интерполянтом $\ell n\,\tau\cong\ell n\left(\frac{2R_1}{x_c}\right)+\frac{\tau\cdot x_c-2\cdot R_1}{2\cdot(R_2-R_1)}\cdot\ell n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$. В результате найдем следующую, полученную по методу ВПТ, приближенную формулу для дебита скважины в куполе сферического пласта:

$$Q_{ВПТ}=\frac{\pi\cdot k\cdot(R_2-R_1)\cdot\zeta_г\cdot\left(p_n^2-p_c^2\right)}{\mu\cdot p_{am}}\cdot\frac{1}{\ell n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\cdot\ell n\left[\frac{\ell n\left(\frac{2R_2}{x_c}\right)}{\ell n\left(\frac{2R_1}{x_c}\right)}\right]. \qquad (47)$$

Ранее точное решение задачи о дебите скважины в куполе сферического пласта для закона Дарси как задачи математической физики было дано в [7, 8]. Точное значение дебита Q такой скважины находится по формуле

$$Q=\frac{\pi\cdot k\cdot(R_2-R_1)\cdot\zeta_г\cdot\left(p_n^2-p_c^2\right)}{\mu\cdot p_{am}\cdot\ln\left[\frac{R_1+R_2}{2\cdot x_c}+\sqrt{\left(\frac{R_1+R_2}{2\cdot x_c}\right)^2-1}\right]}. \qquad (48)$$

В результате проектирования сферического пласта на плоскость можно перейти к плановой плоскорадиальной модели фильтрации в пласте с толщиной $b=R_2-R_1$. Дебит Q_0 скважины с таким же радиусом x_c и с радиусом контура питания, допустим, равным радиусу серединной поверхности $R_{\text{п}}=0{,}5\cdot(R_2+R_1)$ сферического пласта, будет определяться по хорошо известной формуле Дюпюи

$$Q_0 = \frac{\pi \cdot k \cdot (R_2 - R_1) \cdot \zeta_г \cdot \left(p_n^2 - p_c^2\right)}{\mu \cdot p_{am} \cdot \ell n\left(\frac{R_2 + R_1}{2 \cdot x_c}\right)} \quad . \qquad (49)$$

С помощью формул (47) и (48) в рассматриваемом примере можно оценить относительную погрешность $\varepsilon,\% = \frac{Q_{ВПТ} - Q}{Q} \cdot 100\%$ дебита скважины, рассчитанного по методу ВПТ. Результаты расчетов относительной погрешности дебита скважины с радиусом $x_c = 0{,}1$ м, расположенной в куполе сферического пласта, по методу ВПТ для разных толщин b и разных радиусов R_1 подошвы пласта представлены графически на рисунке 3.

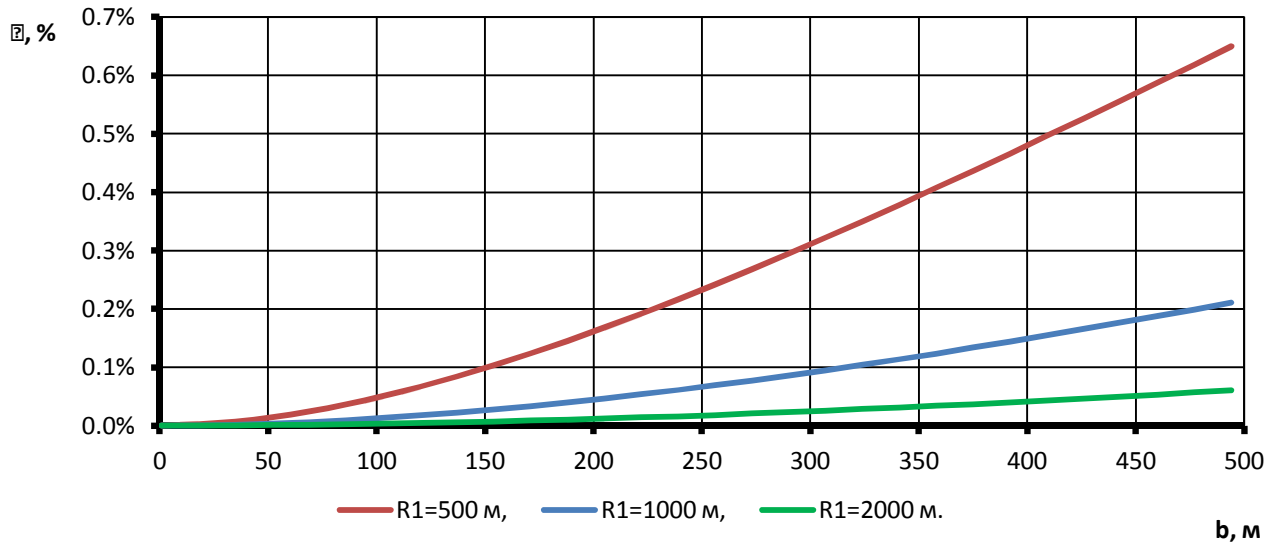


Рисунок 3 – Относительные погрешности расчета дебита скважины в сферическом пласте методом ВПТ

Как видно из графиков на рисунке 3, метод ВПТ дает результаты, фактически совпадающие с точным значением дебита скважины. Это свидетельствует о достоверности фильтрационных расчетов, получаемых по методу ВПТ.

С помощью другой пары формул (48) и (49) получаем возможность оценить относительную погрешность $\beta,\% = \frac{Q_0 - Q}{Q} \cdot 100\%$ дебита скважины в сферическом пласте, рассчитываемом с помощью классической плановой плоскорадиальной модели фильтрации. Расчеты дебита скважины проводились для таких же, как и выше, исходных данных $x_c = 0{,}1$ м, b и R_1. Результаты относительной погрешности $\beta,\%$ классического метода плановой плоскорадиальной модели фильтрации представлены графически на рисунке 4.

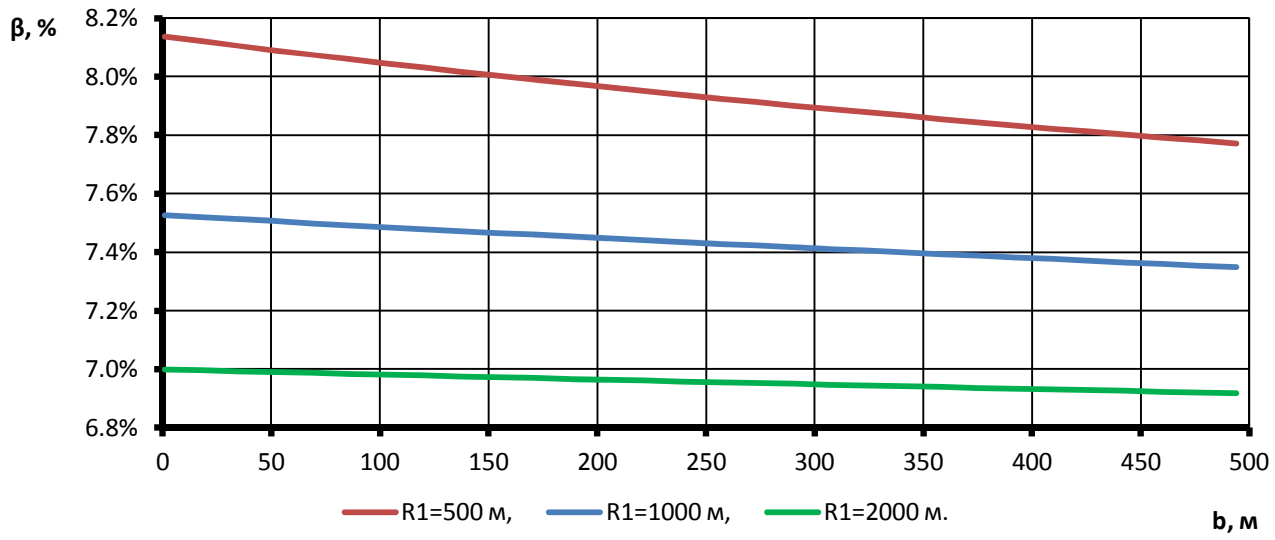


Рисунок 4 – Относительные погрешности расчета дебита скважины в сферическом пласте классическим методом плановой плоскорадиальной модели фильтрации

Из сопоставления данных графиков на рисунках 3 и 4 видно, что минимальная погрешность 6,85% расчета дебита скважины по классическому методу плановой модели фильтрации больше максимальной погрешности результата по методу ВПТ 0,66% в 10,4 раза. А максимальная погрешность 8,2% расчета дебита по методу плановой модели фильтрации больше минимальной по методу ВПТ 0,05% в 164 раза. Этот факт говорит о том, что если поиск точного аналитического решения вызывает затруднения, то вместо классического метода плановой фильтрации в расчетах дебитов скважин по соображениям точности целесообразнее применять метод ВПТ.

В качестве 2-го примера применения метода ВПТ рассмотрим задачу расчета дебита газодобывающей скважины при линейном режиме фильтрации в круговых конических пластах с постоянной и переменной толщиной. Подошва и кровля в таких пластах задаются соответственно уравнениями

$$z = \varphi_1(x) = z_1 - (x - x_c)\cdot tg\,\alpha\,, \quad \text{где} \quad tg\,\alpha = \frac{z_1}{x_1 - x_c} \tag{50}$$

и

$$z = \varphi_2(x) = z_2 - (x - x_c)\cdot tg\,\beta\,, \quad \text{где} \quad tg\,\beta = \frac{z_2}{x_2 - x_c}\,. \tag{51}$$

На рисунке 5 показано сечение правой половины кругового конусообразного пласта и система виртуальных поверхностей тока фильтрационного течения к скважине.

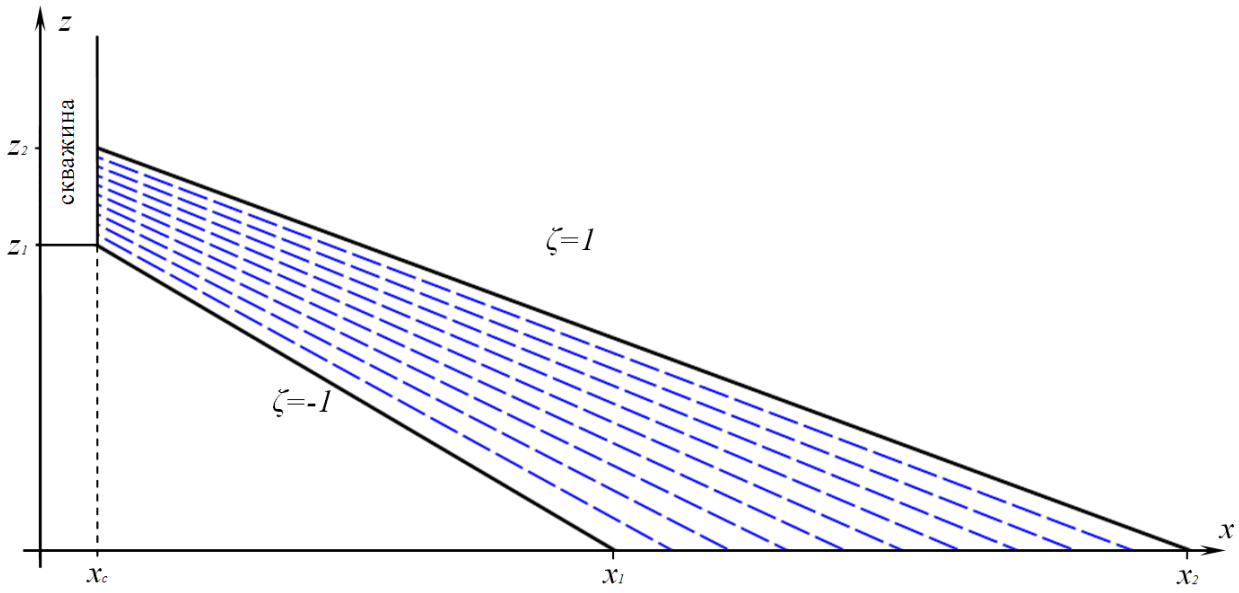


Рисунок 5 – Правая половина вертикального сечения кругового конусообразного пласта и скважины, расположенной в его куполе; $b = z_2 - z_1$ – длина эксплуатационной части колонны скважины

Дебит скважины, представленной на рисунке 5, вычисляем по общей формуле (35). Функция $H(x,\zeta)$ для конусообразного пласта согласно (5), (50) и (51) будет выражаться формулой

$$H(x,\zeta) = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\cdot(A + B\cdot\zeta)^2}\,, \tag{52}$$

где A и B постоянные безразмерные параметры

$$A = tg\,\beta + tg\,\alpha\;; \qquad B = tg\,\beta - tg\,\alpha\,. \tag{53}$$

Далее, корень x_n^* уравнения (28) оказывается, как легко проверить, равным

$$x_{\text{п}}^* = x_c + \frac{(z_2 + z_1) + \zeta\cdot(z_2 - z_1)}{A + B\cdot\zeta}. \tag{54}$$

Подынтегральная функция $\dfrac{H^2(x,\zeta)}{x\cdot[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]}$ в общей формуле (35), как легко проверить, имеет выражение

$$\frac{H^2(x,\zeta)}{x\cdot[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]} = \frac{\alpha(\zeta)}{x} + \frac{\beta(\zeta)}{(z_2 - z_1) - B\cdot(x - x_c)}, \tag{55}$$

где

$$\alpha(\zeta) = \frac{1 + \frac{1}{4}\cdot(A + B\cdot\zeta)^2}{(z_2 - z_1) + B\cdot x_c}\,;\; \beta(\zeta) = \alpha(\zeta)\cdot B = \frac{\left[1 + \frac{1}{4}\cdot(A + B\cdot\zeta)^2\right]\cdot B}{(z_2 - z_1) + B\cdot x_c}. \tag{56}$$

Поэтому интеграл $\int\limits_{x_c}^{x_{\text{п}}^*} \frac{H^2(x,\zeta)\,dx}{x\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]}$ оказывается равным выражению

$$\int\limits_{x_c}^{x_{\text{п}}^*} \frac{H^2(x,\zeta)\,dx}{x\cdot[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]} = \alpha(\zeta)\cdot \ell n \left| \frac{x_{\text{п}}^*(\zeta)}{x_c} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1 - B\cdot\left[x_{\text{п}}^*(\zeta) - x_c\right]} \right|. \quad (57)$$

Далее, согласно общей формуле (35), вычислим интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d\zeta}{\int\limits_{x_c}^{x_n^*} \frac{H^2(x,\zeta)}{x\cdot[z_2(x)-z_1(x)]}\,dx}$. Имеем,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{d\zeta}{\int\limits_{x_c}^{x_n^*} \frac{H^2(x,\zeta)}{x\cdot[z_2(x)-z_1(x)]}\,dx} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\zeta}{\alpha(\zeta)\cdot \ell n \left| \frac{x_{\text{п}}^*(\zeta)}{x_c} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1 - B\cdot\left[x_{\text{п}}^*(\zeta) - x_c\right]} \right|} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\zeta}{\alpha(\zeta)\cdot \ell n F(\zeta)}, \quad (58)$$

где после подстановки выражения (54) для $x_{\text{п}}^*(\zeta)$ и тождественных преобразований, получим, что

$$F(\zeta) = \left[1 + \frac{(z_2 + z_1) + \zeta\cdot(z_2 - z_1)}{x_c\cdot(A + B\cdot\zeta)}\right]\cdot\left[\frac{(z_2 - z_1)\cdot(A + B\cdot\zeta)}{A\cdot(z_2 - z_1) - B\cdot(z_2 + z_1)}\right]. \quad (59)$$

Наконец, по формулам (35) и (59) вычисляется дебит скважины

$$Q = \frac{\pi\cdot k\cdot\zeta_{\text{г}}\cdot\left(p_n^2 - p_c^2\right)}{2\cdot\mu\cdot p_{am}} \cdot \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\zeta}{\alpha(\zeta)\cdot \ell n F(\zeta)}. \quad (60)$$

Выведем еще формулы для дебита скважины в частном случае – случае кругового конического пласта постоянной толщины. В этом случае кровля пласта параллельна его подошве. Условие параллельности приводит к равенству $tg\,\alpha = \frac{z_1}{x_1 - x_c} = tg\,\beta = \frac{z_2}{x_2 - x_c}$. С учетом последнего коэффициент $B = tg\,\beta - tg\,\alpha = 0$, коэффициент $A = tg\,\beta + tg\,\alpha = 2\cdot tg\,\beta$, коэффициент $\alpha(\zeta) = \frac{1 + tg^2\,\beta}{(z_2 - z_1)} = const$, функция $F(\zeta) = \left[1 + \frac{(z_2 + z_1) + \zeta\cdot(z_2 - z_1)}{A\cdot x_c}\right]$. Поэтому формула (60) для дебита скважины примет, после дополнительных тождественных преобразований, более простой вид

$$Q = \frac{\pi \cdot k \cdot \zeta_г \cdot x_c \cdot \sin 2\beta \cdot \left(p_n^2 - p_c^2\right)}{2 \cdot \mu \cdot p_{am}} \cdot \int_{1+\frac{2 \cdot z_1}{A}}^{1+\frac{2 \cdot z_2}{A}} \frac{d\xi}{\ell n\, \xi}. \qquad (61)$$

Монотонную подынтегральную функцию $\frac{1}{\ell n \xi}$ в формуле (61), как показали расчеты, можно с высокой точностью заменить её квадратичной интерполяцией. В результате после приближенного вычисления интеграла $\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\ell n \xi}$ получим следующую высокоточную приближенную формулу для расчета дебита скважины в куполе кругового конического пласта с постоянной толщиной $H_{\text{пл}} = (x_2 - x_1) \cdot \sin\beta = (z_2 - z_1) \cdot \cos\beta$:

$$Q \cong \frac{\pi \cdot k \cdot \zeta_г \cdot H_{\text{пл}} \cdot \cos\beta \cdot \left(p_n^2 - p_c^2\right)}{6 \cdot \mu \cdot p_{am}} \cdot \left[\frac{1}{\ell n \left(\frac{x_1}{x_c} \right)} + \frac{4}{\ell n \left(\frac{x_1 + x_2}{2 \cdot x_c} \right)} + \frac{1}{\ell n \left(\frac{x_2}{x_c} \right)} \right]. \qquad (62)$$

Обратимся теперь к методу планового плоскорадиального моделирования притока газа к скважине в куполе кругового конического пласта постоянной толщины. Для этого спроектируем пласт и скважину на горизонтальную плоскость зеркала подошвенных вод и примем в качестве радиуса R контура питания на плановом изображении пласта среднее арифметическое $R = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Применяя далее классическую формулу Дюпюи, для дебита Q_0 скважины в круговом коническом пласте по плоскорадиальной модели притока получим значение

$$Q_0 = \frac{\pi \cdot k \cdot \zeta_г \cdot H_{\text{пл}} \cdot \left(p_n^2 - p_c^2\right)}{\mu \cdot p_{am} \cdot \cos\beta \cdot \ell n \left(\frac{x_1 + x_2}{2 \cdot x_c} \right)}. \qquad (63)$$

Для проверки точности расчетов дебита скважины в исследуемом случае по приближенной формуле (62) проводились сравнения расчетов с расчетами по формуле (61). Результаты расчетов представлены в графическом виде на рисунке 6.

Точная (61) и приближенная (62) формулы для расчета дебитов в круговых конических пластах постоянной толщины применялись для оценки точности плоскорадиального моделирования притоков газа к скважине. Для кругового конического пласта с толщиной $H_{\text{пл}} = 10$ м расчеты безразмерного дебита по формуле (62) проводились для следующих исходных данных: $x_c = 0{,}1$ *м*, $x_1 = 100$ *м*. Дебиты скважины в куполе кругового конического пласта рассчитывались для разных углов наклона подошвы к горизонтальной поверхности

пластовых вод. Для углов наклона, не превышающих $\approx 16°$, выявлена возможность применения в расчетах дебитов скважин классической плоскорадиальной модели притока.

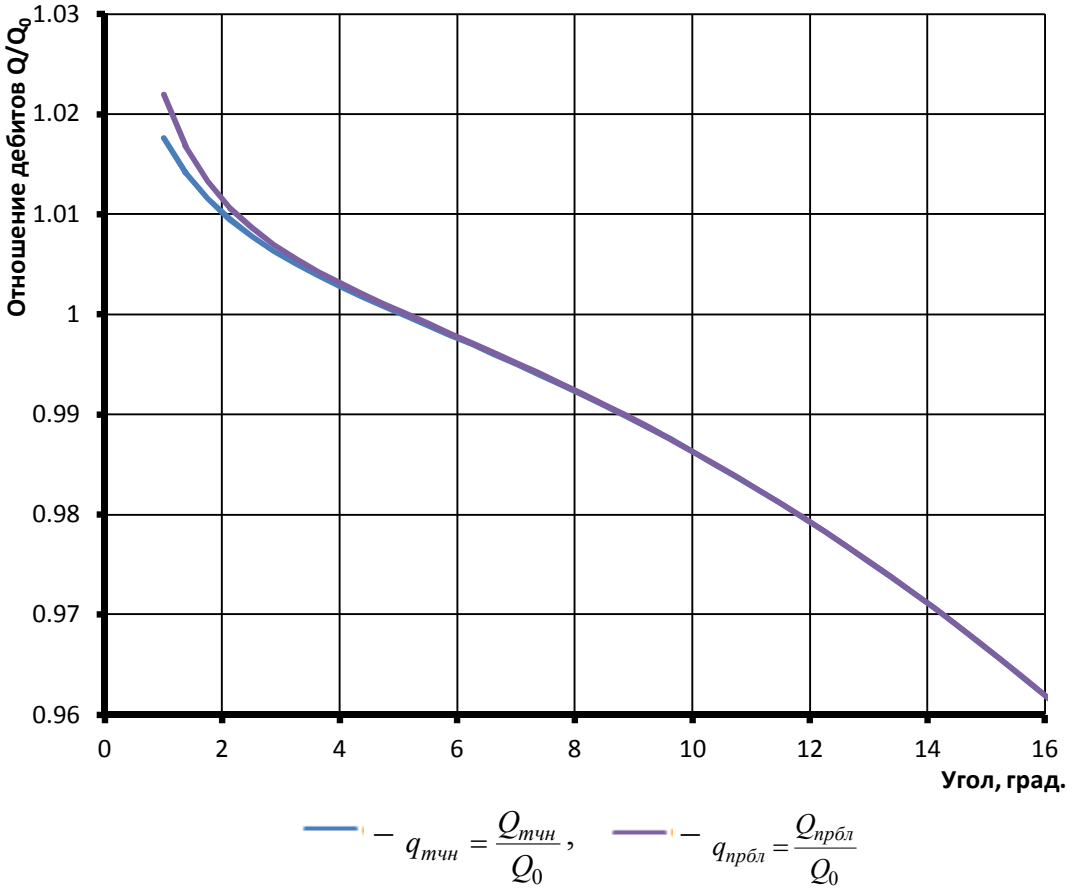


Рисунок 6 – Зависимость безразмерного дебита скважины в куполе кругового конического пласта постоянной толщины от угла наклона подошвы к горизонтальной поверхности пластовых вод, рассчитанная по точной формуле (61) и по приближенной формуле (62)

Из фактически совпавших друг с другом графиков на рисунке 6 видно, что приближенная формула (62) практически может быть принята в качестве точной.
Для углов наклона, больших $\approx 20°$, относительная погрешность применения в расчетах дебитов скважины классической плоскорадиальной модели притока газа составляет $\geq 6\%$ – рисунок 7.

Результаты расчетов в виде графиков на рисунке 7, во-первых, еще раз подтвердили высокую точность приближенной формулы (62). Во-вторых, они наглядно подтверждают, что если точное аналитическое решение задачи о дебите скважины в осесимметричном пласте вызывает большие математические трудности, то в расчетах дебитов скважин по соображениям точности нужно отдавать предпочтение более надежному методу ВПТ, а не классической плоскорадиальной модели.

В качестве 3-го примера применения метода ВПТ рассмотрим задачу расчета дебита несовершенной по степени вскрытия плоскопараллельного пласта газодобывающей скважины, работающей в условиях линейного режима

фильтрации. Приток газа к несовершенной скважине будем схематизировать при помощи ВПТ в виде плоскорадиального притока, переходящего, как показано на рисунке 8, на некоторой круговой цилиндрической поверхности с радиусом x_0 в осесимметричный поток.

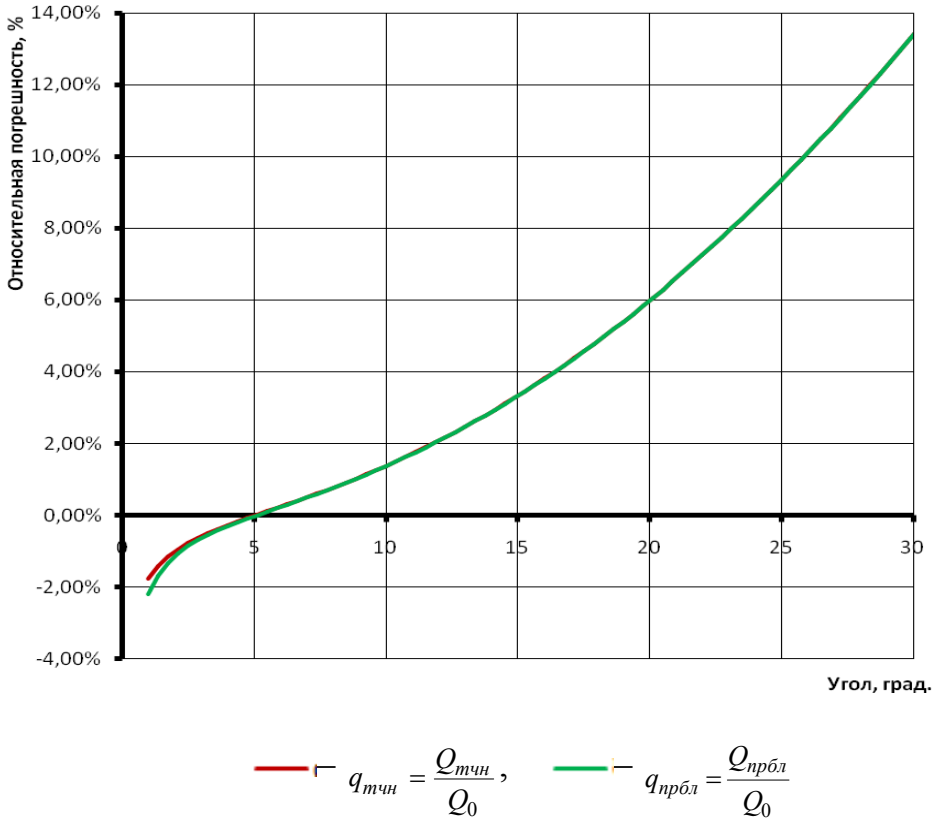


Рисунок 7 – Относительные погрешности применения классической плоскорадиальной модели притока газа к скважине в куполе кругового конического пласта постоянной толщины от угла наклона подошвы к горизонтальной поверхности пластовых вод

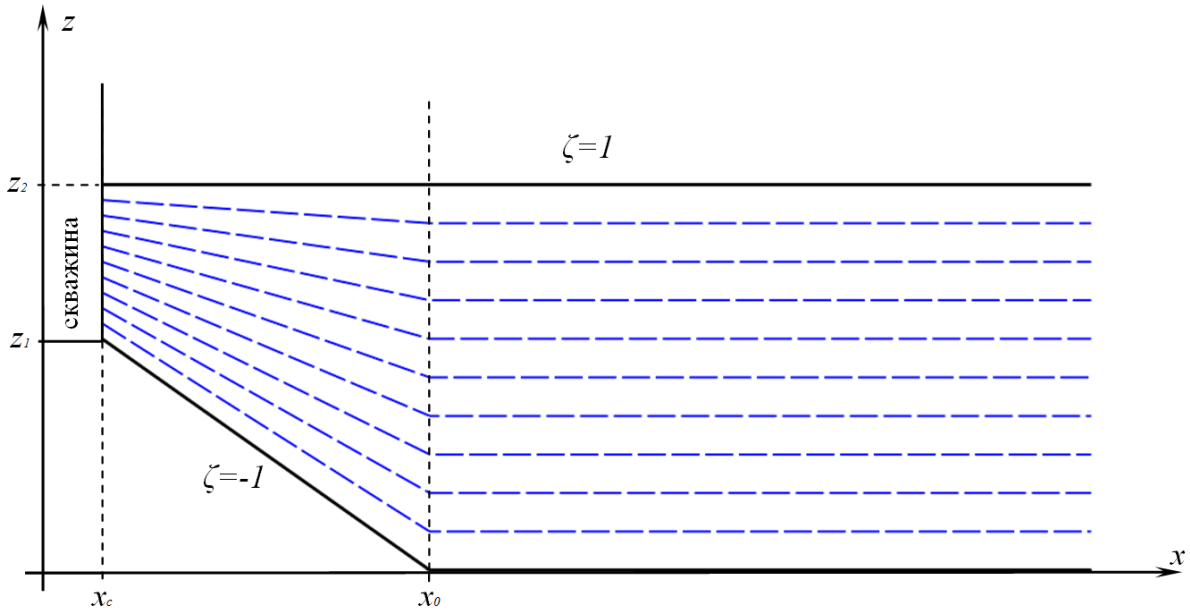


Рисунок 8 – «Мягкая» система виртуальных поверхностей тока к несовершенной по степени вскрытия плоскопараллельного пласта скважине с непроницаемым дном, заданная уравнением (64), предусматривающая возмож-

ность геометрической деформации ВПТ за счет изменения управляющего параметра x_0. Здесь $z_2 = b$ – толщина пласта, $z_2 - z_1 = \ell$ – вскрытие пласта скважиной, $z_1 = b - \ell$

Виртуальные поверхности тока к несовершенной по степени вскрытия плоскопараллельного пласта скважине, зададим следующим «мягким» однопараметрическим семейством кривых

$$z = \begin{cases} \dfrac{1-\zeta}{2} \cdot z_1 \cdot \left(1 - \dfrac{x - x_c}{x_0 - x_c}\right) + \dfrac{1+\zeta}{2} \cdot z_2, \ \text{если} \ \ x_c \le x \le x_0, \\ \dfrac{1+\zeta}{2} \cdot z_2, \ \text{если} \ \ x_0 < x \le x_n^*, \end{cases} \tag{64}$$

В понятие «мягкого» однопараметрического семейством кривых вкладывается тот смысл, что параметр (радиус) x_0 не фиксируется, его можно менять, за счет чего будет деформироваться система ВПТ. При значении радиуса x_0, при котором виртуальная система поверхностей тока будет больше всего в геометрическом смысле приближаться к реальным поверхностям тока, рассчитываемый методом ВПТ дебит скважины будет наибольшим. Поэтому этот параметр далее будет находиться из условия максимума вычисленного методом ВПТ дебита $Q_{\text{ВПТ}}(\text{x}_0)$ несовершенной скважины, т.е. из уравнения $\dfrac{d\,Q_{\text{ВПТ}}(\text{x}_0)}{d\,\text{x}_0} = 0$.

Для расчета дебита несовершенной скважины, который определяется осесимметричной частью притока на участке от x_c до x_0, снова применяем формулу (35). Приведем результат вычислений без промежуточных математических выкладок. Дебит Q_I несовершенной скважины по осесимметричному участку от x_c до x_0 оказывается равным

$$Q_I = -\frac{\pi \cdot k \cdot x^* \cdot \zeta_\varepsilon \cdot \left(p_I^2 - p_c^2\right)}{\mu \cdot p_{am}} \cdot \Phi\left(x_c, x_0, z_1, z_2\right) \cdot arctg\left(\frac{z_1}{x_0 - x_c}\right), \tag{65}$$

где

$$\Phi\left(x_c, x_0, z_1, z_2\right) = \frac{1}{\dfrac{\left(x_0 - x_c\right)}{z_1} \cdot \ell n\left(\dfrac{x_0}{x_c}\right) + \dfrac{z_1}{x_0 - x_c} \cdot \left[\ell n\left(\dfrac{z_2}{z_2 - z_1}\right)\right]} \cdot \frac{x_0 - x_c}{z_1}. \tag{66}$$

В формуле (65) p_c – давление на забое несовершенной скважины, а p_I – некоторое, пока неизвестное давление на круговой цилиндрической границе x_0 раздела плоскорадиального и осесимметричного потоков.

Для расчета притока Q_{II} газа к круговой цилиндрической границе x_0, который моделируется в приятой схеме течения как плоскорадиальный на участке от x_0 до круговой цилиндрической поверхности питания $x_{II} = R$, воспользуемся классической формулой Дюпюи

$$Q_{II} = \frac{\pi \cdot k \cdot z_2 \cdot \zeta_г \cdot \left(p_n^2 - p_I^2\right)}{\mu \cdot p_{am} \cdot \ell n\left(\dfrac{R_{\text{П}}}{x_0}\right)}. \qquad (67)$$

Поскольку, по соображениям закона сохранения массы, потоки Q_I и Q_{II} должны быть равны, получаем уравнение $Q_I = Q_{II}$, из которого и находим неизвестное значение давления p_I на круговой цилиндрической границе x_0. Решая это уравнение и подставляя затем найденное значение p_I либо в (65), либо в (67), в обоих случаях приходим к следующей окончательной формуле. Дебит несовершенной скважины $Q_{\text{ВПТ}}$, вычисленный по методу ВПТ, равен

$$Q_{ВПТ} = \frac{\pi \cdot k \cdot z_2 \cdot \zeta_г \cdot \left(p_n^2 - p_c^2\right)}{\mu \cdot p_{am} \cdot (1+\gamma) \cdot \ell n\left(\dfrac{R_{\text{П}}}{x_0}\right)} \qquad (68)$$

Безразмерный параметр γ в (68) вычисляется по формулам

$$\gamma = -\frac{z_2}{\ell n\left(\dfrac{R_{П}}{x_0}\right) \cdot x^* \cdot \Phi(x_c, x_0, z_1, z_2) \cdot arctg\left(\dfrac{z_1}{x_0 - x_c}\right)} \quad \text{и} \quad x^* \equiv x_c + \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right) \cdot (x_0 - x_c). \qquad (69)$$

Остается указать способ расчета геометрического параметра x_0 примененного в расчетах «мягкой» системы ВПТ. Из уравнения $\dfrac{d\,Q_{\text{ВПТ}}(\text{x}_0)}{d\,\text{x}_0} = 0$, которое решалось численными методами, получено следующее выражение для параметра x_0:

$$x_0 = -2{,}81667 \cdot \ell + 3{,}11944 \cdot b. \qquad (70)$$

В литературе по подземной гидродинамике известна формула Маскета [6] для расчета дебита несовершенной скважины. Поэтому для подтверждения достоверности расчетов по предлагаемому методу ВПТ проводились сравнения расчетов дебита $Q_{\text{ВПТ}}$ несовершенной скважины по формулам (68), (66), (69), (70) и дебита $Q_{\text{М}}$ по хорошо известной формуле Маскета. Расчеты относительных погрешностей $\varepsilon, \% = \dfrac{Q_{\text{М}} - Q_{\text{ВПТ}}}{Q_{\text{М}}} \cdot 100\%$ для разных толщин b пластов проводились для скважины с радиусом $r_c = x_c = 0{,}1$ м и радиусом контура питания $x_{\text{П}} = R = 1000$ м. Результаты расчетов представлены на рисунке 9.

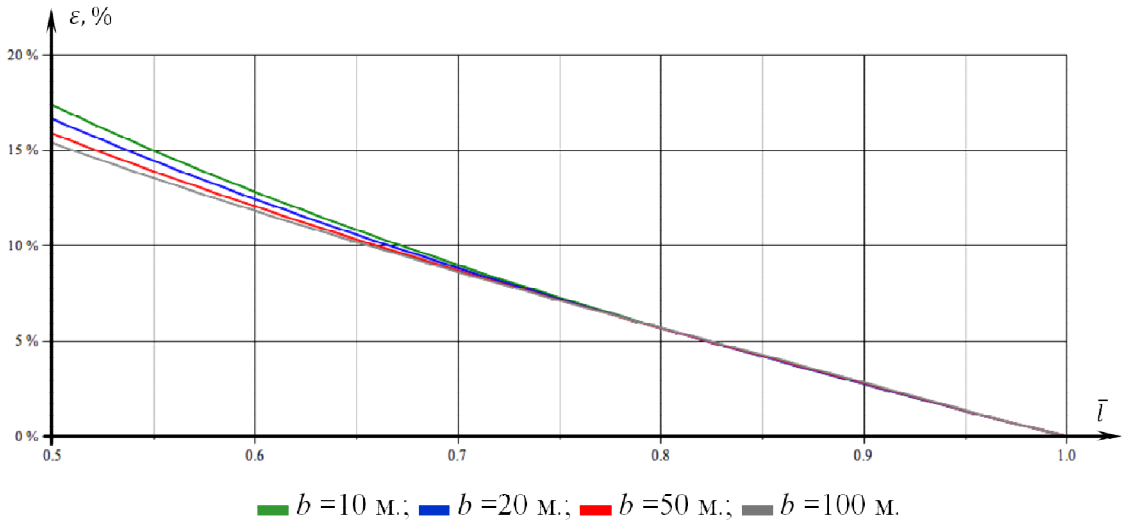


Рисунок 9 – Относительные погрешности расчета дебита несовершенной скважины методом ВПТ для разных толщин пласта и разных относительных вскрытий $\bar{\ell} = \dfrac{\ell}{b}$ в сравнении с дебитом по формуле Маскета

Графики убеждают в приемлемой для практики точности расчетов по методу ВПТ в случаях, когда относительное вскрытие пласта $\bar{\ell} \geq 0{,}5$. Точность метода ВПТ можно было бы повысить, если бы применять не один x_0, а два или три управляющих геометрией ВПТ параметра. Однако сейчас стояла задача подтвердить, что результаты расчетов по методу ВПТ достоверны, что и видно из рисунка 9.

Применим ещё формулу (68) для исследования зависимости дебита скважины от степени вскрытия пласта для скважины с радиусом $r_c = x_c = 0{,}1$ м и радиусом контура питания $x_{\text{П}} = R = 1000$ м при разных толщинах пласта.

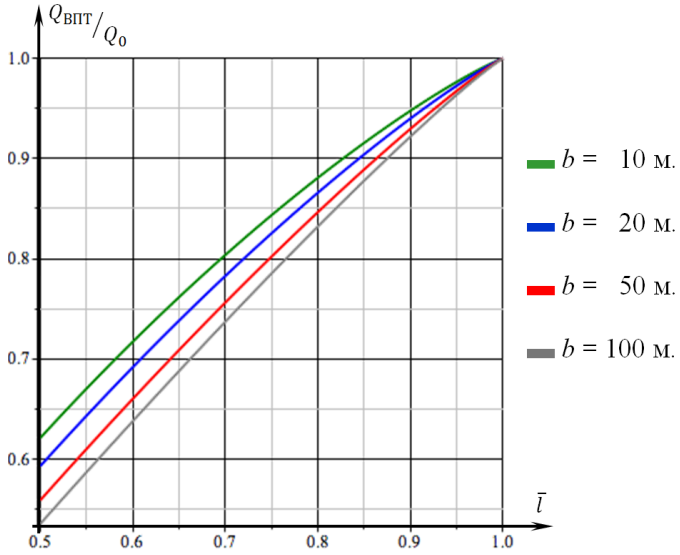


Рисунок 10 – Зависимости дебита скважины от степени относительного вскрытия пласта $\bar{\ell} = \dfrac{\ell}{b}$, вычисленные по методу ВПТ

Для этого вычислим отношения $\frac{Q_{\text{ВПТ}}}{Q_0}$, где Q_0 – дебит совершенной скважины, вычисляемый по формуле Дюпюи. Результаты расчетов для относительных вскрытий $\bar{\ell} \geq 0{,}5$ представлены графически на рисунке 10. Качественно результаты рисунка 10 совпадают с аналогичными, приведенными в [10] на рисунке 120, что снова подтверждает достоверность расчетов по предлагаемому методу ВПТ.

Заключение

Предложен новый метод исследования линейной и нелинейной осесимметричной фильтрации к нефте- и газодобывающим скважинам – метод виртуальных поверхностей тока (ВПТ). В качестве приложения метода ВПТ рассмотрены задачи расчета дебитов вертикальных скважин, располагающихся в куполах осесимметричных пластов постоянной и переменной толщины.

Доказано, во-первых, что уравнение осесимметричного притока нефти (газа) в условиях линейного режима фильтрации по закону Дарси имеет форму, совпадающую с формой классической плоскорадиальной модели. Отличия – в формулах расчета коэффициента фильтрационного сопротивления.

Во-вторых, что уравнение осесимметричного притока нефти (газа) в условиях нелинейных режимов фильтрации (по законам Форхгеймера или более общим – законам Барри-Конвея), имеют форму, отличающуюся от привычной классической плоскорадиальной модели притока.

В-третьих, что уточненная форма осесимметричного притока нефти (газа) получается из классической двучленной формы путем добавления в её правой части дополнительных слагаемых, содержащих 3-ю, 4-ю и др. степеней дебита скважины. Коэффициенты уточненного уравнения притока рекомендуется находить по результатам газогидродинамических исследований скважин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barree, R.D. Beyond beta factors: a complete model for Darcy, Forchheimer and trans-Forchheimer flow in porous media. [Текст] / Barree, R.D., Conway M.W. // Paper SPE 89325 presented at the 2004 annual technical conference and exhibition, Houston, Texas 26–29 Sept 2004.
2. Barree, R.D. Reply to Discussion of "Beyond Beta Factors: A Complete Model for Darcy, Forchheimer, and Trans-Forchheimer Flow in Porous Media" [Текст] / Barree, R.D., Conway M.W. //– Journal of Petroleum Technology, Aug. 2005. – Pp. 73–74.
3. Jambhekar, V.A. Forchheimer Porous-media Flow Models – Numerical Investigation and Comparison with Experimental Data [Текст] : Master's Thesis. – Stuttgart, 2011. – 85 p.
4. Толпаев В. А., Ахмедов К. С., Гоголева С. А. Нелинейные законы фильтрации однокомпонентных флюидов при больших скоростях потоков // Известия ВУЗов. Нефть и газ. – 2015 – №5. С. 83-89.

5. Инструкция по комплексному исследованию газовых и газоконденсатных пластов и скважин. Под ред. Зотова Г. А. и Алиева З. С. М., «Недра», 1980, - 301 с.
6. Басниев, К. С. Нефтегазовая гидромеханика [Текст] / К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг. – Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
7. Толпаев В.А., Ледовской В.И. Оценки точности расчёта дебитов скважин в искривлённых пластах // НТЖ «Нефтепромысловое дело», 2004 г. №12, С. 9-13.
8. Толпаев В. А., Ледовской В. И. Расчёт дебита нефтедобывающей скважины, расположенной в куполе осесимметричного пласта // НТЖ «Нефтепромысловое дело», 2005 г. №1, С. 20-23.
9. Щелкачев В.Н., Лапук Б.Б. Подземная гидравлика. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 736 с.

УДК 532

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ ТЕПЛА В СИСТЕМАХ НАГРУЖЕННЫХ ПУЛЬСИРУЮЩИМИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА НА ПРИМЕРЕ ГАЗОТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ

В.А. Толпаев, д.ф.-м.н., проф.
ООО «Газпром проектирование» Ставропольский филиал
e-mail: *TolpaevVA@scnipigaz.ru*
К.С.Ахмедов, к.т.н.
АО «СевКавНИПИгаз»
e-mail: *AhmedovKS@scnipigaz.ru*
А.М. Кравцов, к.ф.-м.н.
АО «СевКавНИПИгаз»
e-mail: *KravcovAM@scnipigaz.ru*
М.Т. Петросянц, м.н.с.
АО «СевКавНИПИгаз»
e-mail: *PetrosyancMT@scnipigaz.ru*

В работе предложена квазистационарная модель распространения тепла от проложенного под землей газопровода. В предположении о гармоническом во времени характере тепловых пульсаций получены распределения теплового потока на дневной поверхности. Приведено сравнение со статической моделью распространения тепла от газопровода.

Ключевые слова: промышленные динамические системы, тепловые пульсации, тепловое загрязнение, сосредоточенный источник тепла.

В промышленных установках нефтегазодобывающей, нефтегазоперерабатывающей и химической промышленности работающих в динамических режимах возникают периодически изменяющиеся во времени температурные на-

грузки. Колебания температуры обусловлено особенностями режимов эксплуатации оборудования, периодичностью в работах, выполняемых на оборудовании. Распределение температурной нагрузки технологического оборудования в пространстве может носить различный характер по степени локализации, если тепловое поле источника локализовано в узкой зоне, то принято говорить о сосредоточенных источниках тепла. Присутствие тепловых колебаний в технических системах можно обнаружить в ряде случаев и без проведения инструментальных измерений, например, при подземной прокладке газопроводов, на аэрофотосъемке участков газопроводов под сельхозугодиями в весеннее время года всходы посевов выглядят более зелеными и густыми, а в зимнее время на проекции газопровода на дневную поверхность земли присутствуют проталины характерной формы в снежном покрове земли. Воздействие газопровода на окружающую природу носит локальный, сосредоточенный характер в силу его малых размеров по сравнению с деталями природного ландшафта, но мощность излучения газопровода сопоставима с мощностью природных источников тепла, а иногда и превосходит их. Несомненный научный интерес представляет оценка энергетических характеристик тепловых процессов протекающих в таких системах. Прежде всего, такого рода оценки необходимы при анализе тепловых потерь в технологических системах с целью повышения эффективности их работы, а также, при анализе экологической ситуаций при проведении природоохранных мероприятий с целью уменьшения тепловых загрязнений окружающей среды.

По результатам замеров давлений на действующих газопроводах можно оценить частоту и интенсивность температурных колебаний. Так из замеров давлений представленных на рисунке 1 графиком данных замерного узла МГ «Уренгой-Новопсков» в 2-х км от выхода из КС [1] следует, что колебания можно приближенно считать гармоническими и частотный параметр может варьироваться в диапазоне от 0.01 до 0.3 Гц. Амплитуда колебаний может достигать 1-2%, для температуры это означает наличие колебаний в несколько градусов.

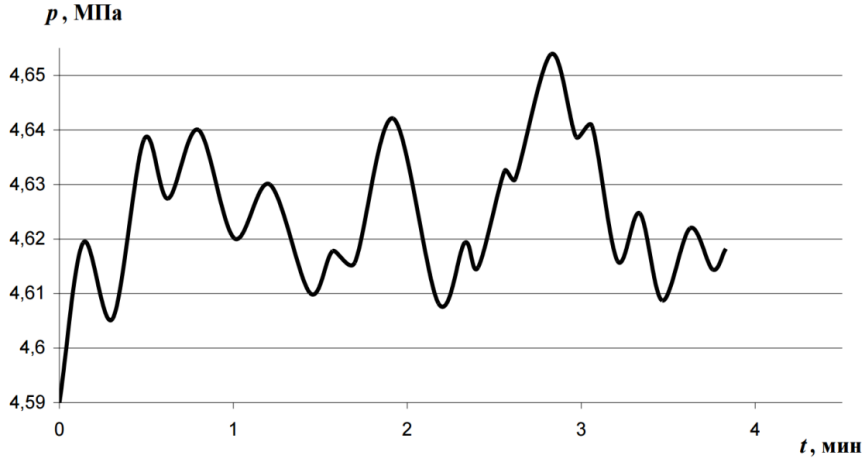


Рисунок 1 – Изменение давления в магистральном газопроводе во времени по данным замерного узла

Рассмотрим следующую модель теплового излучения газопровода. Выберем декартову систему координат так, чтобы ось ординат была направлена от дневной поверхности вглубь земли, ось абсцисс направим вдоль поверхности земли, а ось аппликат будет иметь направление вдоль оси трубопровода. Пусть глубина укладки трубы h, м, будем считать, что диаметр трубы d, м, намного меньше глубины ее укладки $d << h$. В этом случае, примем также допущение о неизменности характера температурного поля вдоль всей длины трубопровода, тогда решение задачи о распределении температуры в грунте от температурных пульсаций природного газа внутри трубы может быть описано решением двумерного уравнения теплопроводности

$$\lambda \Delta T(x,y,t) = \rho c \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t}, \tag{1}$$

подчиненным условиям постоянства температуры на дневной поверхности

$$T(x,0,t) = T_0. \tag{2}$$

Решение для сосредоточенного источника может быть в этом случае представлено выражением, содержащим функции МакДональда [2], и записывается в виде

$$T(x,y,t) = q_0 \cdot \mathrm{Re}\left(e^{i\omega t}\left(K_0\left(\kappa\sqrt{x^2+(y-h)^2} \right) - K_0\left(\kappa\sqrt{x^2+(y+h)^2} \right)\right)\right) + T_0 + g_0 \cdot y \tag{3}$$

где q_0 – интенсивность источника тепла, λ – коэффициент теплопередачи грунта, $\kappa 2 = c \cdot \rho \cdot \omega \cdot i / \lambda$, c – удельная теплоемкость грунта, ρ – плотность грунта, ω – частота температурных колебаний, T_0 – температура на поверхности грунта, g_0 – температурный градиент в грунте.

Для стационарного источника интенсивности q_0 выражение для поля температур имеет вид

$$T(x,y,t) = \frac{q_0}{2\pi} \cdot \mathrm{Re}\left(\ln\left(\frac{y+h+ix}{y-h+ix} \right)\right) + T_0 + g_0 \cdot y. \tag{4}$$

Найдем тепловой поток от сосредоточенного пульсирующего с частотой ω источника тепла через дневную поверхность

$$q(x) = \lambda \frac{\partial}{\partial y} T(x,y)\Big|_{y=0} = \mathrm{Re}\left(2\lambda\kappa h q_0 \frac{K_1\left(\kappa\sqrt{x^2+h^2}\right)}{\sqrt{x^2+h^2}} e^{i\omega t} \right). \tag{5}$$

Найдем установившийся полный тепловой поток от сосредоточенного пульсирующего источника через дневную поверхность $Q = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x)dx$.

Интеграл вычисляется точно $Q = \mathrm{Re}\left(2\pi\lambda\kappa q_0 e^{i\omega t - \kappa h}\right)$.

Полученная формула вполне согласуется с известным результатом для одномерной задачи, когда пульсирующий тепловой поток через поверхность F, с температурной амплитудой t_m, имеет среднее за полупериод τ/2 значение [3, с.79]:

$$Q_{t=\frac{\tau}{2}} = 0.8 \cdot \sqrt{\lambda c \rho \tau} F t_m . \quad (6)$$

Тепловой поток от стационарного во времени сосредоточенного источника тепла расположенного на глубине h определяется выражением

$$q(x) = \lambda \frac{\partial}{\partial y} T(x, y)\Big|_{y=0} = \frac{\lambda q_0 h}{\pi\left(h^2 + x^2\right)}. \quad (7)$$

Сравнивая значения для теплового потока от пульсирующего сосредоточенного источника и стационарного сосредоточенного источника тепла заметим, что максимальное за период теплового колебания значение теплового потока $\left|2\lambda\kappa q_0 K_1(\kappa h)\right|$ для небольших глубин укладки $h < 2/|k|$ превосходит значение стационарного теплового потока $\frac{\lambda q_0}{\pi h}$. Таким образом для точного оценивания распределения потока тепла на дневной поверхности вблизи магистральных газопроводов необходимо учитывать динамический характер тепловой нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харионовский В.В. Надежность и ресурс конструкций газопроводов. – М.: Недра, 2000. – 467 с.
2. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и таблицами, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Физ.-мат. лит. – 1979. – 832 с.
3. Кутателадзе С.С., Боришанский В.М. Справочник по теплопередаче. – М.: Госэнергоиздат. – 1958. – 417 с.

УДК 621.382.323

ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ЗАВИСИМОСТИ ТОКА СТОКА МОП-ТРАНЗИСТОРА В РЕЖИМЕ НАСЫЩЕНИЯ ОТ НАПРЯЖЕНИЯ НА СТОКЕ С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЙ ИСТОКА И СТОКА

В. О. Турин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *voturin@mail.ru*
Р. С. Шкарлат
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *shkarlatroman@ya.ru*
Г. И. Зебрев
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
e-mail: *gizebrev@mephi.ru*
М. С. Шур
Ренсселаеровский политехнический институт, г. Трой, Нью-Йорк, США
e-mail: *shurm@rpi.edu*
Б. Инигез
Университет Ровира и Вирджинии, г. Тарагона, Испания
e-mail: *benjamin.iniguez@urv.cat*

На основе линейной (с постоянным значением дифференциальной проводимости канала МОП-транзистора) «внутренней» (для случая нулевых сопротивлений истока и стока) компактной модели зависимости тока стока МОП-транзистора в режиме насыщения от «внутреннего» напряжения между стоком и истоком разработана линейная «внешняя» (с аналитическим учетом сопротивлений истока и стока) компактная модель зависимости тока стока МОП-транзистора от «внешнего» напряжения между стоком и истоком в режиме насыщения.

Ключевые слова: МОП-транзистор, режим насыщения, ток и напряжение насыщения, дифференциальная проводимость в режиме насыщения, сопротивления истока и стока, компактное моделирование, «внутренняя» и «внешняя» компактная модель МОП-транзистора.

Будем рассматривать простейшую компактную модель длинноканального МОП-транзистора — классическую модель Шокли [1]. Модель Шокли не учитывает эффект насыщения дрейфовой скорости носителей в сильном электрическом поле и является «внутренней» моделью, т.е. не учитывает аналитически сопротивления истока R_S и стока R_D. Компактное моделирование МОП-транзистора с учетом эффекта насыщения дрейфовой скорости носителей в сильном электрическом поле и с корректным учетом выходной проводимости в режиме насыщения с монотонным ее убыванием от максимального значения в линейном режиме до минимального значения в режиме насыщения рассматривается в работах [2, 3]. Настоящая работа направлена на развитие подходов к аналитическому учету сопротивлений контактов при компактном моделировании транзистора, что должно привести к обобщению ранее разработанной «внутренней» модели [2, 3] на «внешний» случай (с учетом сопротивлений истока и стока).

Пороговое напряжение на затворе обозначим как V_{th}. V_{GS} — напряжение

затвор-исток; V_{DS} — напряжение сток-исток; W — ширина затвора; L — длина канала транзистора; $C_{ox} = \epsilon\epsilon_0/d$ - емкость МОП-конденсатора, приходящаяся на единицу площади, где d — толщина подзатворного окисла; ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость подзатворного окисла, $\epsilon_0 = 8,85\times$ 10 $^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная. Удельная крутизна МОП-транзистора определяется уравнением $\beta = \mu C_{ox} W/L$. В уравнениях, для краткости, мы будем использовать центрированное напряжение на затворе:

$$V_{GT} = V_{GS} - V_{th}. \tag{1}$$

Мы будем использовать заглавные буквы в индексах напряжений в случае «внутренней» модели. Для «внешней» модели ($R_S \neq 0$ и/или $R_D \neq 0$) мы будем использовать в подстрочных индексах строчные буквы.

Напряжения насыщения МОП-транзистора из-за электростатической отсечки канала определяется уравнением:

$$V_{SAT} = \alpha\ V_{GT}. \tag{2}$$

Здесь α — безразмерный параметр, связанный, в общем случае, со значением напряжения на подложке транзистора.

Уравнение для тока насыщения:

$$I_{SAT} = \frac{\alpha\ \beta}{2}\ V_{GT}^2. \tag{3}$$

Крутизна МОП-транзистора в режиме насыщения определяется следующим уравнением:

$$g_{m\,SAT} = \frac{\partial I_{SAT}}{\partial V_{GS}} = \alpha\ \beta\ V_{GT}. \tag{4}$$

Определим параметр $b_{m\,SAT}$ следующим образом:

$$b_{m\,SAT} = \frac{\partial V_{SAT}}{\partial V_{GS}} = \alpha. \tag{5}$$

В BSIM3/4 моделях, являющихся современным промышленным стандартом, зависимость тока стока в режиме насыщения от «внутреннего» напряжения между стоком и истоком V_{DS} аппроксимируется линейной зависимостью [4]:

$$I_{ASY} = I_{SAT} \cdot (1 + \lambda \cdot (V_{DS} - V_{SAT})). \tag{6}$$

При этом, дифференциальная проводимость в режиме насыщения определяется уравнением:

$$g_{ASY} = \frac{\partial I_{ASY}}{\partial V_{DS}} = \lambda\ I_{SAT}. \tag{7}$$

Между «внутренним» и «внешним» напряжениями на затворе и на стоке выполняются соотношения:

$$V_{GT} = V_{gt} - I\ R_S, \tag{8}$$

$$V_{DS} = V_{ds} - I\ R_T, \tag{9}$$

где суммарное сопротивление контактов МОП-транзистора:

$$R_T = R_S + R_D, \tag{10}$$

а I — ток, текущий через транзистор.

Подставляя V_{GT}, определяемое уравнением (8), в уравнение для тока насыщения (3), и обозначая ток насыщения как I_{sat}, получаем уравнение:

$$I_{sat} = I_{SAT}(V_{gt} - I_{sat}\ R_S) = \frac{\alpha\ \beta}{2} \cdot (V_{gt} - I_{sat}\ R_S)^2. \tag{11}$$

Это уравнение преобразуется в квадратное уравнение:

$$\frac{\alpha\ \beta}{2}\ R_S^2\ I_{sat}^2 - (\alpha\ \beta\ V_{gt} + 1)\ I_{sat} + \frac{\alpha\ \beta}{2}\ V_{gt}^2 = 0. \tag{12}$$

Решение этого уравнения определяет зависимость тока насыщения МОП-транзистора с учетом сопротивления истока R_S от «внешнего» центрированного напряжения на затворе V_{gt} [5]:

$$I_{sat} = \frac{\alpha\ \beta\ V_{gt}^2}{1 + \alpha\ \beta\ R_S\ V_{gt} + \sqrt{1 + 2\ \alpha\ \beta\ R_S\ V_{gt}}}. \tag{13}$$

Отметим, что сопротивление стока R_D не входит в это уравнение.

Теперь легко можно рассчитать и «внешнее» напряжение насыщения:

$$V_{sat} = V_{SAT}(V_{gt} - I_{sat}\ R_S) + I_{sat} \cdot R_T \tag{14}$$

или, в более удобной для расчетов форме:

$$V_{sat} = \alpha V_{gt} + I_{sat} \cdot ((1 - \alpha)\ R_S + R_D). \tag{15}$$

Подставляя «внутреннее» центрированное напряжение на затворе V_{GT}, выраженное с помощью уравнения (8), и «внутреннее» напряжение между стоком и истоком V_{DS}, выраженное с помощью уравнения (9), в уравнение для асимптоты тока стока в режиме насыщения (6), и обозначая ток, текущий при этом через транзистор как I_{asy}, получаем уравнение:

$$I_{asy} = I_{SAT}(V_{gt} - I_{asy}\ R_S) \cdot (1 + \lambda \cdot (V_{ds} - I_{asy}\ R_T - V_{SAT}(V_{gt} - I_{asy}\ R_S))). \tag{16}$$

Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$I_{asy} = \frac{I_{SAT}(V_{gt} - I_{asy}\ R_S) \cdot (1 + \lambda \cdot (V_{ds} - V_{SAT}(V_{gt} - I_{asy}\ R_S)))}{1 + g_{ASY}(V_{gt} - I_{asy}\ R_S)\ R_T}. \tag{17}$$

Отметим, что, по своему определению, зависимость I_{asy} от V_{ds}, при заданном V_{gt}, проходит через «точку насыщения» (I_{sat}, V_{sat}), рассчитываемую по уравнениям (13) и (15) при заданном V_{gt} .

Продифференцируем уравнение (17) для I_{asy} по «внешнему» напряжению V_{ds}, чтобы найти уравнение для «внешней» дифференциальной проводимости МОП-транзистора g_{asy} в режиме насыщения:

$$g_{asy} = \frac{\partial I_{asy}}{\partial V_{ds}} = I_{asy} \cdot \left(\frac{\partial I_{SAT}/\partial V_{ds}}{I_{SAT} \cdot (1 + g_{ASY} R_T)} + \frac{\lambda \cdot (1 - \partial V_{SAT}/\partial V_{ds})}{1 + \lambda \cdot (V_{ds} - V_{SAT})} \right). \quad (18)$$

Здесь

$$\frac{\partial I_{SAT}}{\partial V_{ds}} = \frac{\partial I_{SAT}}{\partial V_{GT}} \cdot \frac{\partial V_{GT}}{\partial V_{ds}} = g_{m\,SAT} \cdot (-R_S \frac{\partial I_{asy}}{\partial V_{ds}}) = -R_S \; g_{m\,SAT} \; g_{asy} \quad (19)$$

и

$$\frac{\partial V_{SAT}}{\partial V_{ds}} = \frac{\partial V_{SAT}}{\partial V_{GT}} \cdot \frac{\partial V_{GT}}{\partial V_{ds}} = b_{m\,SAT} \cdot (-R_S \frac{\partial I_{asy}}{\partial V_{ds}}) = -R_S \; b_{m\,SAT} \; g_{asy}. \quad (20)$$

Здесь аргументом всех функций V_{SAT}, I_{SAT}, $g_{m\,SAT}$, $b_{m\,SAT}$ и g_{ASY} является $V_{GT} = V_{gt} - I_{asy} \; R_S$.

Для построения линейной аппроксимации зависимости тока стока от «внешнего» напряжения между истоком и стоком V_{ds} в режиме насыщения нам необходимо знать значение дифференциальной проводимости МОП-транзистора с учетом сопротивлений истока и стока g_{asy} в «точке насыщения» (обозначим эту величину как g_{sat}), где $I_{asy} = I_{sat}$ и $V_{ds} = V_{sat}$, при том, что I_{sat} и V_{sat} задаются уравнениями (13) и (15). Соответственно, уравнение (18) для «точки насыщения» переписывается следующим образом:

$$g_{sat} = \frac{\partial I_{SAT}/\partial V_{ds} + g_{ASY} \cdot (1 - \partial V_{SAT}/\partial V_{ds})}{1 + g_{ASY} \; R_T}. \quad (21)$$

Здесь

$$\frac{\partial I_{SAT}}{\partial V_{ds}} = -R_S \cdot g_{m\,SAT} \cdot g_{sat}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial V_{SAT}}{\partial V_{ds}} = -R_S \cdot b_{m\,SAT} \cdot g_{sat} \quad (23)$$

и аргументом всех функций V_{SAT}, I_{SAT}, g_{ASY}, $g_{m\,SAT}$ и $b_{m\,SAT}$ является $V_{GT} = V_{gt} - I_{sat} \; R_S$.

Подставляя уравнения (22) и (23) в уравнение (21), после некоторых преобразований, получим уравнение для g_{sat} в удобной для анализа форме:

$$\frac{1}{g_{sat}} = \frac{1}{g_{ASY}} + R_D \; + R_S \cdot \left(1 - b_{m\,SAT} + \frac{g_{m\,SAT}}{g_{ASY}} \right). \quad (24)$$

Это уравнение можно переписать в более удобной для расчетов форме:

$$\frac{1}{g_{sat}} = \frac{1}{\lambda I_{sat}} + R_D \; + R_S \cdot \left(1 - \alpha + \frac{2}{\lambda \cdot (V_{gt} - I_{sat} R_S)} \right). \quad (25)$$

Анализ уравнения для g_{sat} показывает, что выходное сопротивление МОП-транзистора в режиме насыщения можно трактовать как «внутреннее» сопротивление канала $(\lambda I_{sat})^{-1}$ включенное последовательно с сопротивлением стока R_D и с трансформированным сопротивлением истока R_S^*, определяемым уравнением:

$$R_S^* = R_S \cdot \left(1 - \alpha + \frac{2}{\lambda \cdot (V_{gt} - I_{sat} R_S)}\right). \tag{26}$$

Окончательно, для линейной аппроксимации зависимости тока стока от «внешнего» напряжения между истоком и стоком V_{ds}, при заданном «внешнем» центрированном напряжении на затворе V_{gt}, в режиме насыщения, с учетом сопротивлений истока и стока имеем:

$$I_{asy\ lin} = I_{sat} \cdot (1 + \lambda_{sat} \cdot (V_{ds} - V_{sat})). \tag{27}$$

Здесь λ_{sat} определяется уравнением

$$\frac{1}{\lambda_{sat}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{2\ I_{sat}\ R_S}{V_{gt} - I_{sat} R_S}\right) + I_{sat} \cdot ((1 - \alpha) R_S + R_D). \tag{28}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Shockley W. A unipolar field effect transistor // Proc. IRE. — 1952. — T. 40. — №11. — С. 1365 – 1376.
2. Turin V. O., Sedov A. V., Zebrev G. I. [и др.]. Intrinsic compact MOSFET model with correct account of positive differential conductance after saturation. // SPIE Proceedings. — 2010. — T. 75211H: International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2009. — С. 1–9.
3. Turin V. O., Zebrev G. I., Makarov S. V. [и др.] The correct account of nonzero differential conductance in the saturation regime in the MOSFET compact model. // International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. — 2014. — №27. — С. 863–874.
4. Зебрев Г. И. Физические основы кремниевой наноэлектроники: Учебное пособие. — М.: МИФИ. — 2008. — 288 с.
5. Fjeldly T. A., Ytterdal T., Shur M. S. Introduction to Device Modeling and Circuit Simulation — New York: John Wiley and Sons. — 1997. — 409 с.

УДК 621.382.323

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОКА НАСЫЩЕНИЯ ОРГАНИЧЕСКОГО ПОЛЕВОГО ТРАНЗИСТОРА С УЧЕТОМ КОНТАКТНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

В. О. Турин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *voturin@mail.ru*
Б. А. Рахматов
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *badriddin.rakhmatov.91@mail.ru*
Г. И. Зебрев
НИЯУ «МИФИ»
e-mail: *gizebrev@mephi.ru*
Ч. Х. Ким
Институт науки и технологии Кванджу, г. Кванджу, Республика Корея
e-mail: *chkim@gist.ac.kr*
М. С. Шур
Ренсселаеровский политехнический институт, г. Трой, Нью-Йорк, США
e-mail: *shurm@rpi.edu*
Б. Инигез
Университет Ровира и Вирджинии, г. Тарагона, Испания
e-mail: *benjamin.iniguez@urv.cat*

Проведено моделирование методом бисекции тока насыщения органического полевого транзистора с учетом сопротивлений истока и стока. Представлены зависимости тока насыщения в зависимости от «внешнего» напряжения на затворе, центрированного на пороговое напряжение, и «внешнего» напряжения насыщения. Проведены расчеты тока насыщения методом итераций при различном числе итераций. Проведено компактное моделирование тока насыщения в рамках предложенного ранее подхода [1], с использованием начального тока насыщения, полученного методом итераций при различном числе итераций. Показано, что при использовании в уравнении для компактного моделирования начального значения тока насыщения равного нулю (соответствующего нулевой итерации), получается хорошее совпадение с методом бисекции в широком диапазоне напряжений на затворе.

Ключевые слова: органический полевой транзистор, режим насыщения, ток и напряжение насыщения, сопротивления истока и стока, компактное моделирование, «внешняя» компактная модель, моделирование методом бисекции, метод итераций.

В работе [1] предложен подход к компактному моделированию тока стока органического полевого транзистора (ОПТ) в надпороговом режиме с корректным учетом выходной проводимости в режиме насыщения с монотонным ее убыванием от максимального значения в линейном режиме до минимального значения в режиме насыщения [4], [5] и с аналитическим учетом сопротивлений истока и стока. В [1] было получено уравнение, определяющее зависимость тока насыщения от «внешнего» (с учетом сопротивлений истока и стока) центрированного напряжения на затворе неявным образом. На основе этого уравнения была предложена итерационная процедура для моделирования тока насыщения

ОПТ. В нашей статье ток насыщения на нулевой итерации мы полагаем равным нулю. Линеаризацией уравнения для тока насыщения в [1] было получено уравнение для компактного моделирования тока насыщения с использование начального значения тока насыщения, определяемого за выбранное число итераций. В частности, в [1] использовалось начальное значение тока насыщения, соответствующего результату первой итерации.

В нашей статье мы численно моделируем ток насыщения ОПТ с учетом сопротивлений истока и стока методом бисекции с хорошей точностью, для верификации как итерационного моделирования с разным числом итераций, так и компактного моделирования, при использовании в нем начального значения тока насыщения, полученного методом итераций при разном числе итераций.

В нашей работе мы используем параметры модели ОПТ с длиной канала $L = 40$ мкм и шириной затвора $W = 1000$ мкм из работы [3] ($\gamma = 0,91$, $V_{th} = -12$ В, $\mu_{FET} = 0,13$ см^2/Вс при $V_{GS} = -50$ В, $\alpha_S = 0,46$, $m = 1,8$, $C_i = 3,3$ нФ/см^2), за исключением контактных сопротивлений и параметра λ. Значение λ = 0,0025 В$^{-1}$ и суммарное сопротивление контактов R_T = 2,4 МОм ($R_S = R_D$ = 1,2 МОм) были выбраны достаточно большими для более четкой демонстрации влияния этих параметров на результаты моделирования. Исходя из этих данных было рассчитано значение $V_{aa} = 358$ В. Отметим, что за основу в [3] используется компактная модель ОПТ, предложенная в работе [2] и разработанная на основе компактной модели MOSFET Level 1 для длинноканального МОП-транзистора.

Напряжение насыщения для ОПТ определяется уравнением:

$$V_{SAT} = \alpha_S \cdot V_{GT}. \tag{1}$$

При этом, ток насыщения ОПТ полагается равным:

$$I_{SAT} = g_{CH} \cdot V_{SAT}. \tag{2}$$

Здесь g_{CH} - дифференциальная проводимость канала ОПТ в линейном режиме и $K = W/L \cdot C_i$:

$$g_{CH} = K \cdot \mu_{FET} \cdot V_{GT} = K \cdot \frac{\mu_0}{V_{aa}^{\gamma}} \cdot V_{GT}^{\gamma+1}. \tag{3}$$

Крутизна полевого транзистора в режиме насыщения, в модели без учета наличия дифференциальной проводимости в режиме насыщения, определяется следующим уравнением:

$$g_{mSAT} = \frac{\partial I_{SAT}}{\partial V_{GS}} = \alpha_S \cdot K \cdot \frac{\mu_0}{V_{aa}^{\gamma}}(\gamma + 2) \cdot V_{GT}^{\gamma+1}. \tag{4}$$

Между «внешними» и «внутренними» напряжениями на стоке и затворе выполняются соотношения:

$$V_{ds} = V_{DS} + I \cdot R_T, \tag{5}$$

$$V_{gt} = V_{GT} + I \cdot R_S. \tag{6}$$

Уравнение, определяющее зависимость тока насыщения от «внешнего» центрированного напряжения на затворе V_{gt} неявным образом [1]:

$$I_{sat} = I_{SAT}(V_{gt} - I_{sat} \cdot R_S) = \alpha_S \cdot K \cdot \frac{\mu_0}{V_{aa}^{\gamma}} \cdot (V_{gt} - I_{sat} \cdot R_S)^{\gamma+2}. \tag{7}$$

Именно это уравнение мы решаем методом бисекции. Это уравнение используется и для вычисления тока насыщения методом итераций [1]:

$$I_{sat\ i+1} = I_{SAT}(V_{gt} - I_{sat\ i} \cdot R_S) = \alpha_S \cdot K \cdot \frac{\mu_0}{V_{aa}^{\gamma}} \cdot (V_{gt} - I_{sat\ i} \cdot R_S)^{\gamma+2}. \tag{8}$$

За значение тока насыщения при нулевой итерации возьмем нулевое значение тока насыщения:

$$I_{sat\ 0} = 0. \tag{9}$$

Для первой итерации имеем:

$$I_{sat\ 1} = I_{SAT}(V_{gt}) = \alpha_S \cdot K \cdot \frac{\mu_0}{V_{aa}^{\gamma}} \cdot (V_{gt})^{\gamma+2}. \tag{10}$$

Для второй итерации имеем:

$$I_{sat\ 2} = I_{SAT}(V_{gt} - I_{SAT}(V_{gt}) \cdot R_S). \tag{11}$$

Для получения уравнения для компактного моделирования, уравнение (7) линеаризуется и ток насыщения явно выражается [1]:

$$I_{sat\ CM} = \frac{I_{SAT}(V_{gt} - I_{sat\ i} \cdot R_S) + g_{mSAT}(V_{gt} - I_{sat\ i} \cdot R_S) \cdot I_{sat\ i} \cdot R_S}{1 + g_{mSAT}(V_{gt} - I_{sat\ i} \cdot R_S) \cdot R_S}. \tag{12}$$

Взяв за начальное значение $I_{sat\ 0} = 0$, имеем:

$$\boxed{I_{sat\ CM\ 0} = \frac{I_{SAT}(V_{gt})}{1 + g_{mSAT}(V_{gt}) \cdot R_S}.} \tag{13}$$

Если за начальное значение мы возьмем $I_{sat\ 1} = I_{SAT}(V_{gt}) = \alpha_S \cdot K \cdot \frac{\mu_0}{V_{aa}^{\gamma}} \cdot V_{gt}^{\gamma+2}$, у нас получится:

$$I_{sat\ CM\ 1} = \frac{I_{SAT}(V_{gt} - I_{sat\ 1} \cdot R_S) + g_{mSAT}(V_{gt} - I_{sat\ 1} \cdot R_S) \cdot I_{sat\ 1} \cdot R_S}{1 + g_{mSAT}(V_{gt} - I_{sat\ 1} \cdot R_S) \cdot R_S}. \tag{14}$$

Именно это уравнение использовалось для расчетов в статье [1].

Если за начальное значение мы возьмем $I_{sat\ 2} = I_{SAT}(V_{gt} - I_{SAT}(V_{gt}) \cdot R_S)$, у нас получится:

$$I_{sat\ CM\ 2} = \frac{I_{SAT}(V_{gt} - I_{sat\ 2} \cdot R_S) + g_{mSAT}(V_{gt} - I_{sat\ 2} \cdot R_S) \cdot I_{sat\ 2} \cdot R_S}{1 + g_{mSAT}(V_{gt} - I_{sat\ 2} \cdot R_S) \cdot R_S}. \tag{15}$$

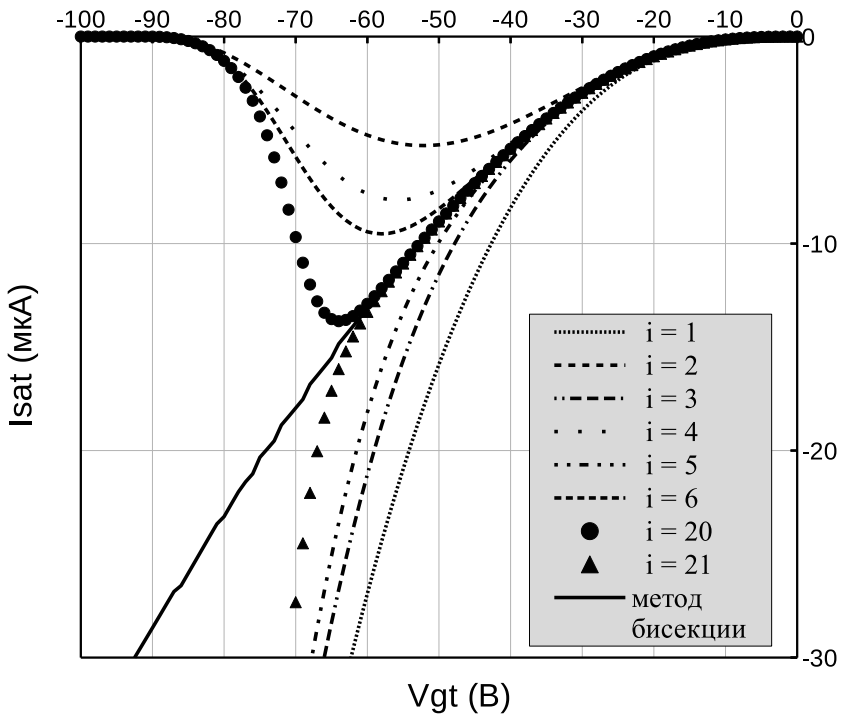


Рисунок 1 – Зависимости тока насыщения в зависимости от «внешнего» центрированного напряжения на затворе V_{gt}, полученные методом итераций при различном числе итераций ($i = 1..6, 20, 21$) в сравнении с методом бисекции (сплошная линия)

«Внешнее» напряжение насыщения ОПТ легко рассчитать:

$$V_{sat} = V_{SAT}(V_{gt} - I_{sat} \cdot R_S) + I_{sat} \cdot R_T = \alpha_S \cdot (V_{gt} - I_{sat} \cdot R_S) + I_{sat} \cdot R_T. \quad (16)$$

Здесь мы можем использовать для «внешнего» тока насыщения значение, полученное любым обсуждавшимся ранее методом: методом бисекции, итераций или с использованием уравнения для компактного моделирования.

Рисунок 1 представляет зависимости тока насыщения в зависимости от «внешнего» центрированного напряжения на затворе V_{gt}, полученные методом итераций при различном числе итераций ($i = 1..6, 20, 21$) в сравнении с методом бисекции (сплошная линия). Видно, что четное количество итераций, начиная с некоторого напряжения на затворе, приводит к резкому уменьшению до нуля расчетного значения тока насыщения. При нечетном количестве итераций наблюдается некоторое увеличение расчетного значения тока насыщения в сравнении с методом бисекции.

Рисунок 2 представляет зависимости тока насыщения в зависимости от «внешнего» центрированного напряжения на затворе V_{gt}, полученные компактным моделированием с начальным значением тока насыщения, полученным методом итераций с различном числом итераций ($i = 0, 1, 2, 20, 21$) в сравнении с методом бисекции (сплошная линия). Компактное моделирование с использованием уравнения (13) ($i = 0$) представлено звездочками $*$, с использованием

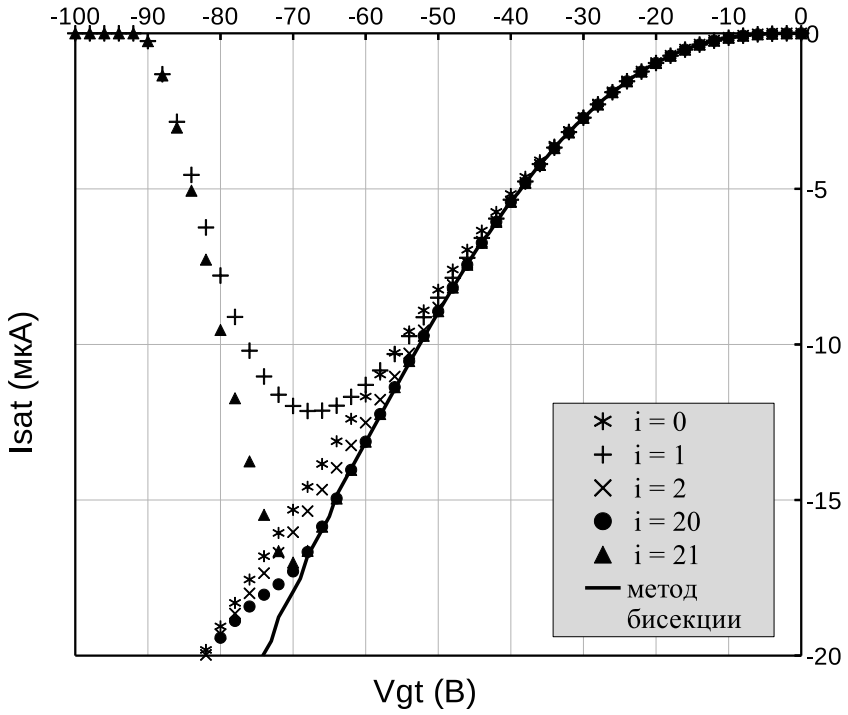


Рисунок 2 – Зависимости тока насыщения в зависимости от «внешнего» центрированного напряжения на затворе V_{gt}, полученные компактным моделированием с начальным значением тока насыщения, полученным методом итераций с различном числом итераций ($i = 0, 1, 2, 20, 21$) в сравнении с методом бисекции (сплошная линия)

уравнения (14) ($i = 1$) - плюсами $+$, с использованием уравнения (15) ($i = 2$) - знаком умножения $\times$, с использованием уравнения (7) с начальным значением тока насыщения, полученным методом итераций при $i = 20$ - кружками $\bullet$, с использованием уравнения (7) с начальными значение тока насыщения, полученным методом итераций при $i = 21$ - треугольниками ▲. Все зависимости в достаточно большом диапазоне напряжений на затворе хорошо совпадают с расчетом методом бисекции.

Сравнение результатов расчета тока насыщения методом итераций, при заданном количестве итераций i, (рисунок 1) и методом компактного моделирования (рисунок 2), с использованием начального значения для тока насыщения, полученным методом итераций при том же количестве итераций i, позволяет сделать вывод, что компактное моделирование дает хорошую точность в существенно более широком диапазоне напряжений на затворе, чем соответствующий итерационный расчет.

При этом, из рисунка 2 видно, что, при взятии за начальную точку при компактном моделировании тока насыщения результатов расчета тока насыщения методом итераций при нечетном значении количества итераций ($i = 1$ и 21), мы получаем падение тока насыщения до нулевого значения начиная с некоторо-

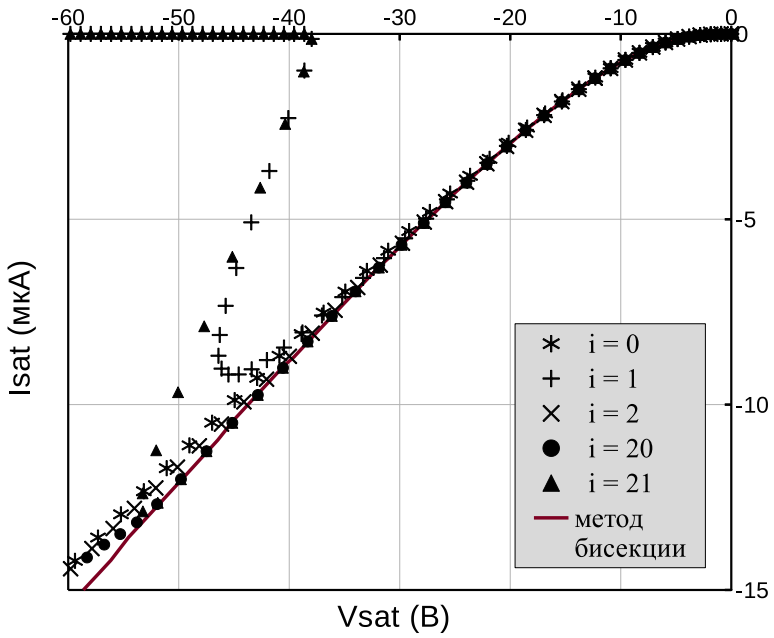


Рисунок 3 – Зависимости тока насыщения в зависимости от напряжения насыщения, полученные компактным моделированием с начальным значением тока насыщения, полученным методом итераций с различном числом итераций ($i = 0, 1, 2, 20, 21$) в сравнении с методом бисекции (сплошная линия)

го значения напряжения на затворе. При четных значениях количества итераций ($i = \ 0, \ 2$ и 20), качественный вид зависимости тока насыщения при компактном моделировании не отличается от результатов моделирования методом бисекции.

Рисунок 3 представляет зависимости тока насыщения в зависимости от «внешнего» напряжения насыщения V_{sat}, полученные компактным моделированием с начальным значением тока насыщения, полученным методом итераций с различном числом итераций ($i = 0, 1, 2, 20, 21$) в сравнении с методом бисекции (сплошная линия). Уравнения и символы, использованные для расчета и представления результатов, соответствуют описанию используемых уравнений и символов на рисунке 2.

Наши расчеты показывают, что даже нулевая итерация $i = 0$, что соответствует нулевому начальному значению тока насыщения, взятая за начальную точку при компактном моделировании тока стока (уравнение (13)), дает приемлемую точность для достаточно большого диапазона напряжений на затворе и качественно верный вид зависимости тока насыщения от напряжения на затворе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турин В. О., Рахматов Б. А., Зебрев Г. И., Инигез Б., Шур М. С. Учет сопротивлений истока и стока в режиме насыщения при моделировании надпорогового тока в «улучшенной» компактной модели органического полевого

транзистора. // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы II международной научно-практической конференции. 24 – 27 ноября 2016 г., Орел — 2016. — С. 135–51.
2. Estrada M., Cerdeira A., Puigdollers J. [и др.] Accurate modeling and parameter extraction method for organic TFTs. // Solid-State Electronics. — 2015. — №2. — С. 1009 – 1016.
3. Kim C. H., Castro-Carranza A., Estrada M. [и др.] A compact model for organic field-effect transistors with improved output asymptotic behaviors. // IEEE Trans. Electron Devices. — 2013. — Т. 60. — №3. — С. 1136–1141.
4. Turin V. O., Rakhmatov B. A., Kim C. H. , Iñiguez B. An approach to organic field-effect transistor above-threshold drains current compact modeling that provides monotonic decrease of the output conductance with drain bias increasing. // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2016. — Т. 151. — №1. — С. 1–5.
5. Turin V. O., Zebrev G. I., Makarov S. V. [и др.] The correct account of nonzero differential conductance in the saturation regime in the MOSFET compact model. // International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. — 2014. — №27. — С. 863–874.

УДК 539.3

МЕТОД РАСЧЕТА ПОТЕНЦИАЛОВ НЕЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАЗНЫХ МАТЕРИАЛОВ

С.И. Якушина, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева»
e-mail: *Jakushina@rambler.ru*
В.С. Шоркин, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева»
e-mail: *VShorkin@yandex.ru*
Сами Аль Шатеби
e-mail: *VShorkin@yandex.ru*

Предложен метод расчета материальных параметров эмпирических функций, описывающих потенциалы парных и тройных взаимодействий частиц сплошных упругих материалов в рамках нелокальной математической модели, построенной для описания их адгезии. Метод базируется на информации о значениях модулей Юнга и сдвига контактирующих материалов и их твердых растворов. Модули Юнга и сдвига твердого раствора определяются на основании модели осреднения Рейса.

Ключевые слова: адгезия, прочность, нелокальная теория упругости, потенциал межчастичного взаимодействия, твердый раствор.

1. Введение

В настоящее время получили широкое распространение новые материалы, функциональные и эксплуатационные свойства которых формируются путем соответствующего конструирования их структуры, подбора элементов, составляющих ее. В одних случаях новый материал является гомогенной средой – сплав, твердый раствор со специально подобранным составом, в других случаях это композиционный материал – гетерогенная среда со структурой, определенной функциональным назначением (слоистая структура, дисперсионная среда – однородная среда со специально подобранными включениями и т.д).

Изделия из создаваемых материалов являются элементами разного рода конструкций, находящимися в контакте с другими элементами тех же или других конструкций. Этот контакт может быть подвижным или неподвижным, в том числе и адгезионным. В адгезионном контакте должны быть и гомогенные элементы гетерогенных композиционных материалов. В одних случаях адгезия элементов конструкций является желательным явлением, например, в композиционных материалах. В других случаях адгезия играет отрицательную роль. Для успешного управления процессом адгезии необходимо выявить связь явления со свойствами участвующих в нем материалов и определить, количественные характеристики этой связи.

В настоящее время описание контактных взаимодействий подобным образом осуществляется на основании математических моделей, предложенных в работах [1–3]. В них адгезионные силы взаимодействия двух тел описываются с помощью представления о дальнодействующих поверхностно распределенных силах. Учет адгезии возможен, если известны вид их потенциала поверхностей и значения параметров, индивидуализирующих его для каждой пары взаимо-

действия материалов. В [1–3] рекомендуется применять потенциал Maugis-Dugdale. В основу построения его формы положена форма потенциала Lennard-Jones, которая заменяется ступенчатой. Используется и сам потенциал в форме Lennard-Jones. Параметры потенциала Lennard-Jones и его ступенчатого аналога определяются через поверхностную энергию этих тел, параметры истинного потенциала Lennard-Jones и геометрию контактирующих тел путем суммирования всех парных взаимодействий атомов, принадлежащих этим телам.

Адгезионное взаимодействие связано с проявлением сил Кулона и Ван-дер-Ваальса при межчастичных взаимодействиях [4,5]. Учитывая межчастичный характер взаимодействия твердых тел, его потенциальную энергию можно представить в виде суммы потенциальных взаимодействий всех пар, троек и т.д. частиц, составляющих эти тела [6]. Если тройные взаимодействия имеют флуктуационную природу [7, 11, 12], то их можно описать, используя групповые разложения, с помощью функций Майера для парных взаимодействий [13].

В соответствии с работами [14, 15] упругое поведение твердого материала предлагается моделировать на основании представления о нелокальном парном, тройном и т.д. (в зависимости от необходимости) потенциальном взаимодействии элементарных бесконечно малых частиц сплошной упругой среды как в отсчетном, не подверженном внешним термомеханическим воздействиям, состоянии, так и в текущем состоянии, когда эти воздействия есть. В этих же работах предложен метод расчета параметров эмпирических потенциалов межчастичных взаимодействий. Однако этот метод требует использования данных дорогостоящих экспериментов по определению нелинейного дисперсионного закона распространения акустических волн в однородных материалах и не дает возможности определить параметры потенциалов взаимодействия разных материалов. Предлагаемый далее метод лишен этих недостатков.

2. Теоретические положения

Также как и для дискретных точечных систем [16], потенциалы парных и тройных взаимодействий описываются эмпирическими функциями с параметрами, характерными для исследуемого материала или пары материалов. Эти функции отвечают условиям термодинамичности системы. Для выполнения первого требования допускается, что – частичные потенциалы $d^n\Psi^{(n)}$ взаимодействия n частиц (как одного, так и разных материалов) являются бесконечно малыми величинами n-го порядка по отношению к объемам $\Delta V_{j(\alpha)} = dV_{j(\alpha)} \to 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$.

$$d^n\Psi^{(n)} = \Phi^{(n)} dV_{1(\alpha)} dV_{2(\beta)} ... dV_{n(\gamma)}.$$

Также как и для дискретных точечных систем [11], потенциалы парных и тройных взаимодействий систем бесконечно малых частиц из одного материала, образующих сплошное твердое тело, должны удовлетворять условие устойчивости конкретной конфигурации системы частиц.

Потенциалы взаимодействия групп частиц, принадлежащих телам из разных материалов, а также самих тел, могут, как удовлетворять, так и не удовле-

творять условию устойчивости. В первом случае это соответствует наличию адгезии, во втором – ее отсутствию.

Эмпирические зависимости $\Phi^{(2)}$ и $\Phi^{(3)}$ соответственно потенциалов парных и тройных взаимодействий частиц выражаются равенствами:

$$\Phi^{(2)}_{i(\alpha)j(\beta)} = \Phi^{(2)}_{0(\alpha\beta)} \Psi_{i(\alpha)j(\beta)},$$

$$\Phi^{(3)}_{1(k)2(p)3(q)} = \Phi^{(3)}_{0(kpq)} \Psi_{1(k)2(p)} \Psi_{2(p)3(q)} \Psi_{3(q)1(k)},$$

$$\Psi_{i(j)g(s)}\left(\eta_{i(j)g(s)}\right) = e^{-2\eta_{i(j)g(s)}} - 2e^{-\eta_{i(j)g(s)}}, \quad \eta_{i(j)g(s)} = \beta_{(js)} L_{i(j)g(s)}.$$

Установлена связь между параметрами потенциалов и характеристиками упругого состояния материала:

$$0.92 \cdot 10^3 \left(\Phi^{(2)}_{0(pp)} \Big/ \beta^{3}_{(pp)} \right) = 4\mu_{(p)} + 45\lambda_{(p)}, \tag{1}$$

$$6.63\left(\Phi^{(3)}_{0(ppp)} \Big/ \beta^{6}_{(pp)} \right) = \lambda_{(p)} - \mu_{(p)}, \tag{2}$$

где $\lambda_{(p)}$ и $\mu_{(p)}$ – параметры Ламе материала с номером (p).

$$\lambda_{(p)} = \frac{\nu_{(p)} E_{(p)}}{(1+\nu_{(p)})(1-2\nu_{(p)})}, \ \mu_{(p)} = \frac{E_{(p)}}{2(1+\nu_{(p)})}, \ \nu_{(p)} = \frac{E_{(p)}}{2G_{(p)}} - 1, \tag{3}$$

где $\nu_{(p)}$ – коэффициент Пуассона, $G_{(p)}$ – модуль сдвига.

Из всех возможных двух и трех частичных взаимодействий реализуются только те, которые можно описать на основании теории Ван-дер-ваальсовых сил и их флуктуаций [7, 11,]. Тогда, в соответствии с [16, 17] с помощью групповых разложений Майера можно установить связь между потенциалами парного и тройного взаимодействий [18]. С учетом (1) и (2) эта связь представлена в виде

$$\beta_{(pp)} = \left[\frac{\left| \Phi^{(2)}_{0(pp)} \Big/ \beta^{3}_{(pp)} \right|^3}{(kT)^2 \left| \Phi^{(3)}_{0(ppp)} \Big/ \beta^{6}_{(pp)} \right|} \right]^{1/6}, \tag{4}$$

где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура.

Твердый раствор, составленный из компонент $B_{(p)}$ и $B_{(n)}$ с номерами n и p, $(n \neq p)$ и объемными концентрациями $c_{(p)} = c$ и $c_{(n)} = 1 - c$, состоящий из гомогенных частиц $\langle dB \rangle$, рассматривается как однородная изотропная линейно упругая среда. Ее модули Юнга $\langle E \rangle$ и сдвига $\langle G \rangle$ выражаются через модули его составляющих в соответствии по модели Рейса [19]– равенства нормальных и касательных напряжений в частицах $dB_{(n)}$ и $dB_{(p)}$, составляющих частицу $\langle dB \rangle$.

$$\frac{1}{\langle E \rangle} = \frac{1-c}{E_{(n)}} + \frac{c}{E_{(p)}}, \quad \frac{1}{\langle G \rangle} = \frac{1-c}{G_{(n)}} + \frac{c}{G_{(p)}}. \tag{5}$$

Используя найденные с помощью (5) концентрационные зависимости для $\langle E \rangle$ и $\langle G \rangle$ на основании выражений (3), связывающих $\langle E \rangle$ и $\langle G \rangle$ с $\langle \nu \rangle$, $\langle \lambda \rangle$ и

$\langle\mu\rangle$ определяются концентрационные зависимости для $\left(\frac{\langle\Phi_0^{(2)}\rangle}{\langle\beta\rangle^3}\right)$ и $\left(\frac{\langle\Phi_0^{(3)}\rangle}{\langle\beta\rangle^6}\right)$ по формулам, структурно совпадающим с (1) и (2). После этого, по формуле (4), записанной для твердого раствора, определяется концентрационная зависимость для параметра $\langle\beta\rangle$, а затем зависимости от концентрации с величин $\langle\Phi_0^{(2)}\rangle$ и $\langle\Phi_0^{(3)}\rangle$.

Для определения взаимодействия частиц, принадлежащих двум телам $B_{(p)}$ и $B_{(n)}$ из разных материалов получены следующие равенства.

$$\langle\Phi_0^{(2)}\rangle = (1-c)^2\Phi_{0\,(1\,1)}^{(2)} + 2c(1-c)\Phi_{0\,(1\,2)}^{(2)} + c^2\Phi_{0\,(2\,2)}^{(2)}, \tag{6}$$

$$\left(\frac{\langle\Phi_0^{(2)}\rangle}{\langle\beta\rangle^3}\right) = (1-c)^2\left(\frac{\Phi_{0\,(11)}^{(2)}}{\beta_{(11)}^3}\right) + 2c(1-c)\left(\frac{\Phi_{0\,(12)}^{(2)}}{\beta_{(12)}^3}\right) + c^2\left(\frac{\Phi_{0\,(22)}^{(2)}}{\beta_{(22)}^3}\right), \tag{7}$$

$$\langle\Phi_0^{3}\rangle = (1-c)^3\Phi_{0\,(111)}^{(3)} + 3c(1-c)^2\Phi_{0\,(112)}^{(3)} + 3c^2(1-c)\Phi_{0\,(122)}^{(3)} + c^3\Phi_{0(222)}^{(3)}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\langle\Phi_0^{(3)}\rangle}{\langle\beta\rangle^6}\right) &= (1-c)^3\left(\frac{\Phi_{0(111)}^{(3)}}{\beta_{(11)}^6}\right) + 3c(1-c)^2\left(\frac{\Phi_{0\,(112)}^{(3)}}{\beta_{(11)}^3\beta_{(12)}^3}\right) + \\ &+ 3c^2(1-c)\left(\frac{\Phi_{0\,(122)}^{(3)}}{\beta_{(12)}^3\beta_{(22)}^3}\right) + c^3\left(\frac{\Phi_{0(222)}^{(3)}}{\beta_{(22)}^6}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

Правые части выражений (6) – (9) представляют собой полиномы второй и третьей степени. Учитывая это, концентрационные зависимости для левых частей равенств (6) – (9) на отрезке $0 < c < 1$ аппроксимируются полиномами тех же степеней, что и полиномы правых частей. Сравнение коэффициентов левых и правых полиномов равенств (6) – (9) дает возможность определить значения неизвестных параметров $\Phi_{0\,(1\,2)}^{(2)}$, $\beta_{(12)}$, $\Phi_{0\,(112)}^{(3)}$, $\Phi_{0(122)}^{(3)}$, характеризующих эмпирические потенциалы парного и тройного взаимодействий частиц состоящих из разных материалов тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$.

Предложенный метод использован для расчета энергии адгезии нескольких пар различных материалов с учетом и без учета тройных межчастичных взаимодействий и электронного газа в металлах в соответствии с теорией [14].

Заключение

В работе для проведения теоретической оценки величины энергии адгезии предложен удобный для применения в инженерной практике метод расчета параметров функций, аппроксимирующих зависимость от расстояния потенциалов парного и тройного взаимодействия частиц тел, состоящих из разных однородных, изотропных, линейно упругих материалов. Для проведения расче-

тов достаточно информации о значениях модулей Юнга и сдвига контактирующих материалов, которые либо известны из справочной литературы, либо достаточно просто определить в классических экспериментах по стандартной методике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson K.L. Adhesion and friction between a smooth elastic spherical asperity and plane surface / K.L. Johnson // Proceeding of the Royal Society London. – 1997. – Series A. – V. 453. – P. 163-179.
2. Maugis D. Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids / D. Maugis // Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2000. – 425 p.
3. Горячева И.Г. Адгезионное взаимодействие упругих тел / И.Г. Горячева, Ю.Ю. Маховская // Журнал прикладной математики и механики. – 2001. – Вып. 6. – № 2. – С. 273-282.
4. Дерягин Б.В. Электрическая теория адгезии (прилипания) пленок к твердым поверхностям и ее экспериментальное обоснование / Б.В. Дерягин, Н.П. Кротова // Успехи физических наук. – 1948. – Т. XXXVI. – Вып. 3. – С. 387-406.
5. Бараш Ю.С. Силы Ван-дер-Ваальса / Ю.С. Бараш. – М.: Наука, 1988. – 344 с.
6. Ruelle D. Statistical mechanics: Rigorous results / D. Ruelle // New York, Amsterdam: V. A. Benjamin, Inc., 1969. – 219 p.
11. Литинский Г.Б. Межмолекулярные взаимодействия: «физические» или «химические»? / Г.Б. Литинский // Вісник Харківского національного університету. Хімія. – 2010. – № 895. – Вып. 18(4). – С. 26-30.
12. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука 1989. – Т. 3. – 768 с.
13. Майер Дж. Статистическая механика / Дж. Майер, М. Гепперт – Майер. – М.: Мир, 1980. – 544 с.
14. Shorkin V.S. Nonlinear Dispersion Properties of High-Frequency Waves in the Gradient Theory of Elasticity / V.S. Shorkin // Mechanics of Solids. – 2011. – V. 6. – P. 898-912.
15. Romashin S. N. Method for calculating the characteristics of elastic state media with internal degrees of freedom / S.N.Romashin, V.Yu. Presnetsova, L.Yu. Frolenkova, V.S. Shorkin // Advanced Structured Materials, 2016. – Vol. 42. – P. 363-376.
16. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1989. – Т. 3. – 768 с.
17. Жирифалько Л. Статистическая физика твердого тела / Л. Жирифалько. – М.: Мир, 1975. – 384 с.
18. Ромашин С.Н. Определение потенциалов нелокального взаимодействия частиц упругой среды / С.Н. Ромашин, В.С. Шоркин // Труды X Всероссийской научной конференции им. Ю.И. Неймарка, г. Нижний Новгород, 26 – 29 сентября 2016 г. – Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2016. – С. 646-654
19. Reuss A. Berechung der Fliessgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitatsbedingung / A. Reuss // Z. Angew. Math. Und Mech. – 1929. – V 9. – № 1. – P. 49-58.

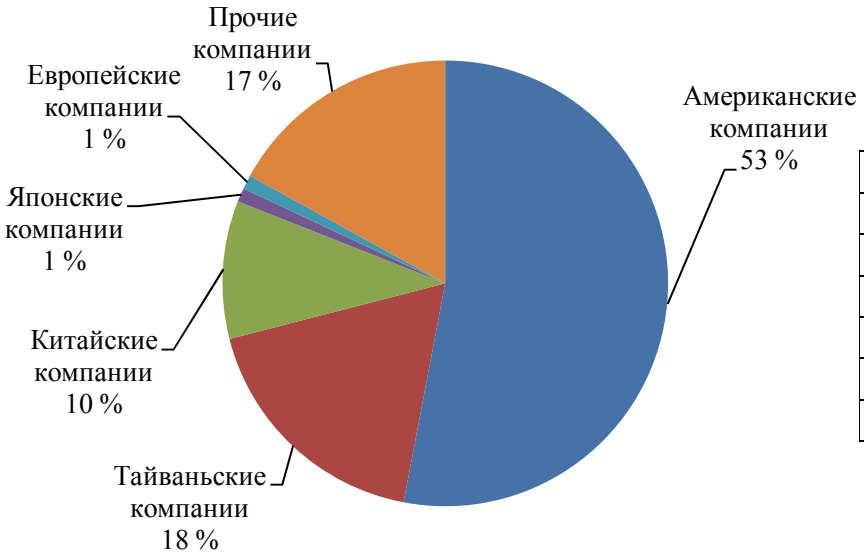
Информатика
и информационные технологии

ПОДХОД К АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЦЕССА РАСПОЗНАВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТОПОЛОГИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МИКРОСХЕМ

И.М. Булаев
ФГКУ ВПО Академия ФСО России
e-mail: *iliabulaev57@gmail.com*

Ключевые слова: интегральная микросхема, базовый матричный кристалл, цифровое изображение, матрица переходных вероятностей.

Роль изделий микроэлектроники в создании современных автоматизированных систем непрерывно возрастает. Поскольку значительная доля интегральных микросхем (ИМС) [1], эксплуатируемых в России, производится на территории или под контролем эвентуального противника (распределение долей дохода рынка ИМС в 2016 году представлено на рисунке 1) существует объективная необходимость организации системы мероприятий, направленных на верификацию элементной базы иностранного производства и оборудования, выполненного на ее основе, с целью выявления недокументированных узлов и (или) функциональных особенностей.



	2010
США	69 %
Тайвань	17 %
Китай	5 %
Европа	4 %
Япония	1 %
Прочие	4 %

Рисунок 1 – Доля дохода компаний, производящих ИМС от общемирового рынка в 2016 (90,4 млрд. долларов США) в сравнении с показателями 2010 года, источник – *IC Insights, 2017*

Особенности технологии изготовления ИМС [5,6] (высокая степень интеграции и постоянно уменьшающаяся топологическая норма) обусловили возможность несанкционированного внесения изменений в логику их работы.

Обобщая, можно выделить следующие типы потенциально вредоносных воздействий на ИМС [3,4]:

– подделка – фиктивная замена оригинального чипа;
– запекание – высокотемпературное воздействие на ИМС в течение непродолжительного времени с целью сокращения срока ее эксплуатации;
– добавление дополнительных транзисторов – формирование в кристалле ИМС дополнительных транзисторов во время проектирования или производства ИМС с потенциально опасными функциями;
– разрыв соединений – разъединение линий коммутации топологии ИМС с целью увеличения нагрузки на оставшиеся линии коммутации;
– изменение коммутации – добавление дополнительных соединений, формирующих на основе имеющихся элементов топологии ИМС потенциально вредоносные узлы.

С точки зрения полноты результатов анализа, наиболее эффективным способом проверки ИМС на предмет наличия недокументированных узлов является обратное проектирование [2,7].

Процесс аппаратного обратного проектирования ИМС, может включать следующие этапы [7]:

1. Декапсуляция кристалла ИМС.
2. Послойное травление кристалла ИМС и фотографирование слоев кристалла ИМС с достаточным для анализа разрешением.
3. Предварительная обработка и склейка отдельных изображений кристалла ИМС в панорамное изображение.
4. Определение расположения функциональных элементов топологии.
5. Восстановление соединений между элементами топологии.
6. Интерпретация полученных схем в виде принципиальной электрической схемы.
7. Восстановление функциональной схемы устройства.
8. Получение и сравнение откликов на тестовые последовательности ИМС и полученной схемы.

Широкое распространения заказных ИМС на КМОП логике (на рисунке 2 представлена классификация КМОП ИМС), топология которых зачастую составляет коммерческую тайну и не раскрывается конечным потребителям, а также значительное количество логических элементов в ИМС обуславливают необходимость автоматизации распознавания элементов топологии ИМС по их цифровым изображениям (ЦИ) в процессе аппаратного обратного проектирования.

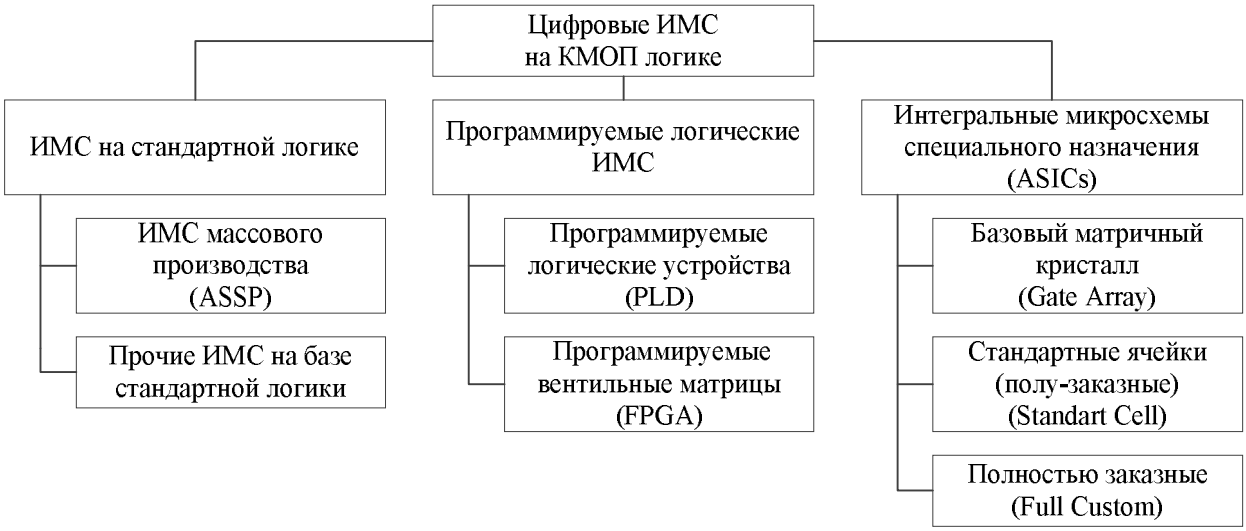


Рисунок 2 – Классификация интегральных микросхем, выполненных на комплементарной металл-оксид-полупроводник логике

Топология ИМС на базовом матричном кристалле (БМК) строится на повторяющейся последовательности одинаковых полупроводниковых областей (стандартных ячеек БМК) путем их соединения металлическими линиями коммутации – формировании функциональных ячеек БМК и линий межэлементной коммутации.

К общим свойствам БМК следует отнести:

– повторение базовых ячеек БМК на всей поверхности ИМС, отведенной для него;
– физическая структура БМК состоит из небольшого количества разнообразных химических соединений, каждое из которых имеет свой, отличный от остальных цвет на ЦИ;
– в структуре БМК определены пространственные позиции контактных площадок для всех вышележащих слоев металлизации кристалла.

При этом, зная физическую структуру БМК, для восстановления топологии ИМС достаточно детектировать и распознавать рисунок, образуемый металлические линии коммутацииф для каждого функционального элемента и линии межэлементной коммутации. На рисунке 3 представлено последовательное преобразование представления элемента топологии БМК ИМС.

Вышесказанное позволяет сделать вывод о том, что обнаружение пространственных координат всех стандартных ячеек БМК на ЦИ кристалла ИМС позволит однозначно установить координаты контактных площадок для слоев металлизации. При дальнейшей обработке ЦИ учет позиций БМК позволяет снизить требования к качеству описания ЦИ за счет снижения количества градаций цвета в ЦИ (до двух в идеальном случае), что позволяет привести задачу распознавания функциональных элементов топологии ИМС к тривиальному виду.

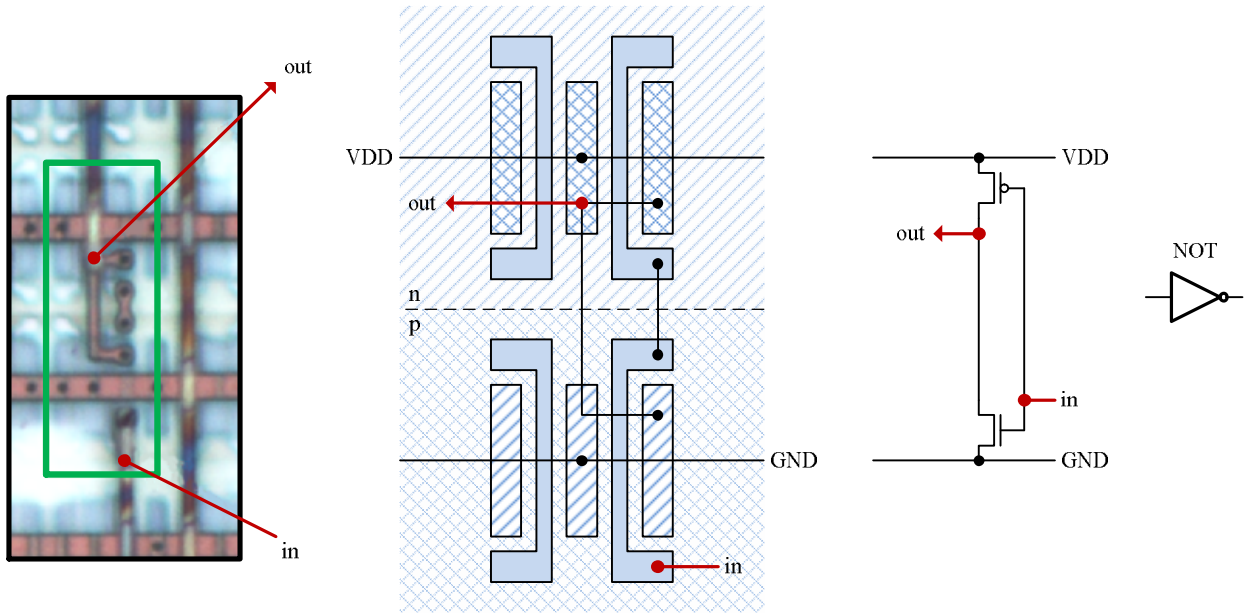


Рисунок 3 – Последовательное преобразование представления элемента топологии БМК ИМС от ЦИ до элемента цифровой логики

Рассмотренные особенности взаимного геометрического расположения БМК ИМС и особенности элементов БМК при формировании их ЦИ позволили сделать вывод о целесообразности использования математического аппарата Марковских случайных полей [8] как для сегментации, так и для восстановления областей ЦИ топологии ИМС, искаженных шумами, в том числе и импульсными.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ РФ 17021–88 Микросхемы интегральные. Термины и определения.
2. Sharma, S. Surveillance of integrated circuit for Hardware Trojan and remedies to protect from the Trojan / S. Sharma, V. Tejaswi, G. Ramyasri, A. Surendar // Research Journal of Pharmaceutical, Biological and Chemical Sciences, 2017 – № 8(2) – С. 317–326.
3. Beaumon, M. Hardware Trojans – Prevention, Detection, Countermeasures (A Literature Review) / M. Beaumon, B. Hopkins, T. Newby – Defence Science and Technology Organization, Edinburg, 2011. – 37 с.
4. Becker, G.T. Stealthy Dopant-Level Hardware Trojans / G. T. Becker, F. Regazzoni, C. Paar, W. P. Burleson // Cryptographic Hardware and Embedded Systems. – 2013 – С. 197–214.
5. Kaelsin, H. Digital Integrated Circuit Design From VLSI Architectures to CMOS Fabrication / H. Kaelsin. – Cambridge University Press, New York, 2008. – 879 с.
6. Harris, D. M. CMOS VLSI Design A Circuit and Systems Perspective 4-th edition / D. M. Harris, N.H.E. Weste. – Addison-Wesley, 2011. – 840 с.
7. Лучинин, В. В. Реинжиниринг кристаллов интегральных схем / В. В. Лучинин, И. М. Садовая // Петербургский Журнал Электроники. – 2009. – № 2 – С. 5–40.

8. Баруча-Рид, А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения / А. Т. Баруча-Рид – Москва : Наука, 1969. – 512 с.

УДК 37.014

ОБЩЕСТВЕННАЯ ИНИЦИАТИВА В РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Я.А. Ваграменко, д.т.н., проф.
Академия информатизации образования,
«Институт управления образованием РАО»
e-mail: *ninforao@gmail.com*
А.А. Русаков, к.ф.м.-н., д.п.н., проф.
ФГБОУ ВО «Московский технологический университет»
e-mail: *vmkafedra@yandex.ru*

Представлен обзор научных и инновационных мероприятий Академии информатизации образования, а также приведены результаты взаимодействия с учреждениями образования.

Ключевые слова: математика, информатизация образования, информационные ресурсы, информатика.

Информационные технологии входят в перечень пяти приоритетных направлений стратегического развития, выделенных руководством нашей страны. Развитию цифровой отрасли – ключевой для процессов модернизации – уделяется первостепенное внимание на государственном уровне.

Понятно, что естественнонаучное образование, как и наука в целом, не является гарантом разумного и устойчивого развития общества. Однако сегодня мы сознаем, что в XXI веке роль знаний станет определяющей, что успешными и благополучными смогут стать только те общества, которые научатся ценить и развивать интеллект, а также эффективно использовать этот потенциал в интересах всех его членов. Именно поэтому очень хочется надеяться, что сегодня не повторятся ошибки прошлых лет и веков, а российское образование вместе со всей страной не погрузятся во тьму.

Научно-общественное объединение Межрегиональная общественная организация «Академия информатизации образования» (МОО «АИО») зарегистрирована Министерством юстиции РФ в 1996 г. (свидетельство о регистрации №5927 от 03 апреля 1996 г., ИНН 7702177241, ОГРН 1037700168219).

В соответствии с Уставом, «основные цели деятельности Академии информатизации образования – консолидация интеллектуальных сил и материальных средств для создания условий эффективного использования научного потенциала в решении проблем информатизации образования [1- 6].

Академия информатизации образования поддерживает тесные творческие связи с зарубежными коллегами. После обсуждения на конференции АИО 2013 года, Академия член Международного союза общественных академий наук (МС ОАН создан в 1997 г.). В апреле 2013 года президент АИО был приглашен

для участия в работе отчетно-выборной конференции этого Союза, на которой состоялось избрание Президента Международного союза общественных академий. Им стал известный деятель образования – Михаил Петрович Карпенко - президент Современной гуманитарной академии, которая широко и разнообразно использует информационные технологии в дистанционном обучении, имеет для этого сеть филиалов по всей России и за рубежом, а также собственный спутниковый телеканал. В этом году совместно с академией компьютерных наук проводим полноценную юридическую аккредитацию союза. Целями этого Союза являются: консолидация и (при определенных условиях) координация общественного сектора науки; обеспечение тесного взаимодействия и взаимосвязи как между общественными академиями наук (ОАН), так и с государственными академиями наук, НИИ, учебными заведениями в интересах повышения эффективности научной деятельности в мировом сообществе; комплексное решение приоритетных задач развития национальной и мировой

На фотографии мы видим Президентов Карпенко М.П. (МС ОАН) и Вараменко Я.А. (МОО АИО) в окружении коллег, 2013 год

системы образования; укрепление взаимодействия научных сообществ и научных школ разных стран; развитие прогрессивных форм организации научной деятельности, рационального использования научного потенциала и финансовых ресурсов; объединение научных сил и широких слоев общественности на основе идей прогресса мировой цивилизации. МС ОАН имеет свои представительства в Финляндии, Бельгии, Швеции и др.

Для развития международного сотрудничества в соответствии с Уставом АИО в состав Академии избраны иностранные члены из США (3 человека), Украины (12 человек), Казахстана(3 человека), Болгарии (3 человека), Венгрии (2 человека), Приднестровской Молдавской республики (4 человека), Индии (1 человек), Белоруссии (2 человека), Латвии (1 человек), Польши (5 человек), Израиля (2 человека), Таджикистана (1 человек), Узбекистана (1 человек), Китая (1 человек).

Количество иностранных членов АИО увеличилось в последнее время также за счет развития наших контактов по другим направлениям. Так, подали заявления и были приняты в АИО в 2012 году ректор университета в г. Плоцк профессор Збигнев П. Крушевский (Высшая школа им. Павла Влодковица в Плоцке), который является сенатором сейма ПНР. Из Краковского университета известный методист профессор, доктор педагогических наук Мачей Григорьевич Клякля, директор Института Повышения Квалификации и Переквалификации профессор Кадров Жабовски Ежи Рышард Ян, г. Плоцк.

Мачей Клякля, Збигнев Крушевский, Ярослав Ваграменко, Ян Жабовски, Александр Русаков

Интересную статью, пришедшую из Польши, мы рекомендовали в наш журнал «Педагогическая информатика». В Венгрии нашу академию представляет Гашпар Андраш.

В рамках взаимодействия с учеными всего мира развивается сотрудничество с Международным научным сообществом «Анализ, его приложения, и вычислительный анализ» (ISAAC). Действительные члены Академии Розов Н.Х., Русаков А.А., Чубариков В.Н. вошли в состав оргкомитета, руководили секциями и сделали пленарный и секционные доклады в августе 2011 года на 8 Международном Конгрессе ISAAC, который былорганизован Университетом Дружбы Народов, Математическим институтом им. В.А. Стеклова, Российской академии наук, Московским государственным университетом им. М.В. Ломоносова.

9 конгресс ISAAC прошел в г. Краков (Польша) в августе 2013 года, где с пленарным докладом на конгрессе выступил член президиума АИО А.А. Русаков, он же являлся и руководителем секции. Член нашей Академии профессор Митюшев В.И. был Председателем оргкомитета конгресса.

Для заинтересованных коллег, в июле 2018 года в г. Краков (Польша)

состоится конгресс, на котором представлена секция прикладной математики (Session related to Applied Mathematics (PDE, Complex Analysis, Inverse Problems) within the conference will be organized), организатор конгресса член нашей Академии профессор Митюшев В.И.

Prof. Vladimir Mityushev AkademiaPedagogika w Krakowie, Polska, 2013

В мероприятиях проводимых за рубежом Академия выходит на контакты с зарубежными школами, что дает свой полезный эффект в смысле обмена опытом. В апреле 2012 года делегация АИО (Ваграменко Я.А., Русаков А.А.) принимала активное участие в конференции «Евроматематика – 2012», которая проходила в г. София (Болгария), и в работе жюри молодежного конкурса научных работ учащихся из Европы.

Члены Академии выступают в школах Приднестровья, на педагогическом факультете университета им. Т.Г. Шевченко (ПМР), проводя линию информатизации обучения с использованием современных информационных систем. Академия информатизации образования продолжает сотрудничество с

Профессора Миронов М.В., Стамов И.Г., ректор Берилл С.И., президент АИО Ваграменко Я.А., Митюшев В.И., Русаков А.А. (слева направо), 2013

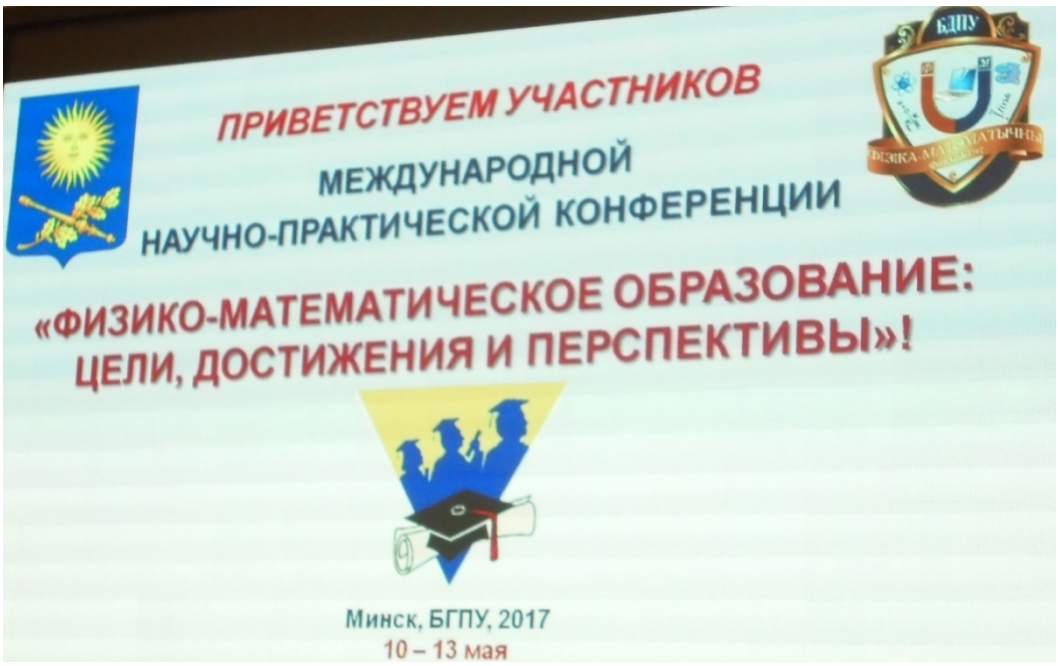
Министерством образования и университетом Приднестровья, целью, которого является формирование единого с Россией информационного образовательного пространства. В октябре 2013 года, по приглашению действительного члена академии, ректора университета профессора С.И. Берилла состоялся важный визит в г. Тирасполь делегации Академии в составе трех профессоров: Вагра-менко Я.А., Русакова А.А., Митюшева В.В. (Польша, Краков). Выступление президента АИО транслировалось по республиканскому телевидению. Мы по-лагаем, что разработанные совместно направления информатизации образова-ния будут реализовываться в порядке осуществления других мероприятий на-правленных на тесное взаимодействие Приднестровья с Россией. Надо сказать, что Приднестровье высоко оценивает участие АИО в модернизации образова-ния, президент Я.А. Ваграменко награжден государственной наградой Придне-стровской Молдавской республики.

В 2016 году Приднестровско-му государственному университету им. Т.Г. Шевченко исполнилось 85 лет, важное событие для ПМР, уни-верситет системообразующее учре-ждение республики. Совместно с руководством ПМР и руководством университета Вагра менко Я.А., Роберт И.В., Русаков А.А. участво-вали в юбилейных выставке и пре-зентации ПГУ им. Т.Г. Шевченко в Государственной думе РФ.

Вице-президент МОО «АИО», академик РАО Роберт Ирена Веньяминовна выступает на юбилейных меро-приятиях в ГД РФ

Наша делегация в составе главный ученый академик-секре-тарь президиума Русаков А.А. и ее действительные члены Казачонок В.В. (профессор БГУ, Минск), Каракозов С.Д. (проректор МПГУ, Москва) в мае посетила город Минск. 10-13 мая 2017 года работала Междуна-родная научно-практическая конференция **«Физико-математическое образо-вание: цели, достижения и перспективы»**, которая традиционно проходит на базе физико-математического факультета БГПУ. С приветственным словом к участникам встречи обратился ректор БГПУ, профессор Александр Иванович Жук. Александр Иванович отметил значимую роль учителей физики, математи-ки, информатики в формировании интеллектуального потенциала страны.

С пленарными докладами на заседании конференции выступили: доктор



педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и информатики начальной школы Людмила Леонидовна Босова и доктор педагогических наук, профессор Сергей Дмитриевич Каракозов («О подходах к модернизации математической подготовки педагогических кадров в Российской Федерации»; МПГУ), доктор педагогических наук, профессор Александр Александрович Русаков («Методологические проблемы обучения математике»; Московский технологический университет» (МИРЭА)), доктор педагогических наук, профессор Виктор Владимирович Казачонок (Белорусский государственный университет, Минск) и доктор педагогических наук, профессор Александр Александрович Русаков (Московский технологический университет» (МИРЭА)) «О развитии теории обучения математике в работах И.А. Новик и ее научной школы». Методика как и любая наука, имеет свою методологическую основу, Но по сути среди

потока научных исследований отсутствуют работы по различным проблемам обучения математике. Здесь уместно отметить не потерявшую актуальность и в настоящее время докторскую диссертацию **Новик И.А.** на тему «Формирование методической культуры учителя математики в пединституте». **З**ащита докторской диссертации состоялась в Академии педагогических наук СССР по специальности 13.02.02 – теория и методика обучения математике в 1990 году. Педагогическая школа Ирины Александровны Новик хорошо известна в России своими фундаментальными исследованиями отраженными в различных публикациях. На конференции мы отмечали творческий юбилей ее 55-летний педагогической деятельности, зачитали и вручили подписанный президентом адрес Академии информатизации образования.

Ежегодная отчетно-выборная Международная научно-практическая конференция «Информатизация образования - 2017» Академии проходила в г. Чебоксары. Главным застрельщиком и организатором была Чувашская общественная организация «Чувашское отделение МОО АИО» во главе с председателем научного совета отделения профессором Натальей Викторовной Сафроновой, и организаторы:

Министерство образования и молодежной политики Чувашской Республики
МОО «Академия информатизации образования»
ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
Институт управления образованием РАО
Академия компьютерных наук
ОО «Чувашское региональное отделение Академии информатизации образования»

В выступлениях Чувашского отделении рассматривались вопросы оценки индивидуальных достижений школьников, использующих ЭОР при подготовке к дистанционной олимпиаде «Инфознайка», которая уже много лет позволяет готовить будущих талантливых специалистов в области ИКТ.

В работе конференции отражены современные проблемы внедрения средств компьютерных и мобильных технологий в учебно-воспитательный процесс общей и профессиональной школ. Коллеги поделились достижениями и опытом работы в отделениях МОО АИО.

В шестой раз в этом году Коваленко М.И. организовала работу симпозиума: Международный научно-методический симпозиум «Электронные ресурсы в непрерывном образовании» («ЭРНО-2017»), который работал в г. Адлер.

Одной из новаций последних десятилетий является введение электронного обучения в образовательных организациях различных типов, в основе которого лежит использование технологий дистанционного и смешанного обучения. Реализация образовательного процесса, основанного на использовании этих технологий, предусматривает использование электронных образовательных ресурсов (ЭОР) различных типов, что делает актуальным рассмотрение методик их создания, использования, оценки качества, именно поэтому Академией информатизации образования в 2010 году было принято решение о проведении Научно-методического симпозиума «Электронные ресурсы в непрерывном образовании».

Целью проведения симпозиума является обсуждение актуальных вопросов, связанных стратегическим партнерством между академическим и корпоративным секторами образования различных регионов в области разработки и использования ЭОР, способствующих повышению уровня компетентности и конкурентоспособности специалистов различных отраслей в условиях формирования системы непрерывного образования.

Полные сведения о прошедших конференциях АИО, а также труды конференций, представлены на сайте Академии информатизации образования: www.acinform.ru. Для обмена мнениями о направлениях и результатах деятельности в области информатизации образования, Академией информатизации образования, совместно с Академией компьютерных наук организован электронный форум: www.foracad.ru.

В 2015-2017 гг. Академия информатизации образования совместно с Академией компьютерных наук предприняли новое начинание – организацию ежемесячных научных чтений на тему «Актуальные проблемы реализации электронного образования и дистанционного обучения». Это мероприятие привлекло к себе внимание многих специалистов образования из Москвы, Санкт-Петербурга, других регионов России. В частности, докладчиками выступали профессора и доценты из различных университетов Москвы и Санкт-Петербурга, Красноярска, Ростова-на-Дону, Брянска, Рязани, Нижневартовска, Волгограда, Чебоксар, Казани, Коблинца (Германия). Мы в АИО полагаем, что развитие электронного образования требует в настоящее время создания новых дидактических средств, информационных средств с выраженными признаками искусственного интеллекта, обеспечения возможностей действенного контроля качества обучения. Надо отметить, что в АИО неизбежность продвижения поэтому направлению прогнозировалась начиная с 2000 года. Более того, мы накапливали соответствующий опыт реализации онлайн - обучения, отражаемый в трудах наших конференций, в том числе с учетом образовательных технологий, успешно реализуемых в некоторых немногочисленных Российских университетах и региональных образовательных системах, типа кластеров «Вуз–школа». В последнее время мы наблюдаем, что в государственных вузах проблема он-лайн - образования наконец выдвинута в числе первоочередных. Об этом свидетельствует организация Национального портала открытых онлайн-курсов и значительное вложение средств в создание таких курсов. Однако, это еще не означает, что только представлением различных курсов на раздачу можно обеспечить вхождение в эту новую цифровую технологию обучения без включения в администрирование, квалификацию, психолого-педагогический базис высокоинтеллектуальных средств персонификации и коллективизации учебного процесса. В том варианте, который реализуется на упомянутом портале, мы видим пока что запоздалое повторение того, что имеет место в известной системе «Курсера».

Именно на рассмотрении перспектив развития онлайн-обучения ориентированы наши ежемесячные чтения. Тематика и состав докладчиков на этих чтениях с сентября 2016 г. по апрель 2017 г. представлены ниже в таблице:

п/п	Тема доклада	Докладчик
	«Повышение эффективности управления в электронном образовании»	Симонов А. В., к.пед.н, начальник отдела инноваций в образовании Государственного института информационных технологий и коммуникаций (ИНФОРМИКА)
	«Формирование многомерного алгоритмического мышления на телесно-ментальной основе: поведение в сети»	Пак Н.И., д. пед. н, кандидат ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой информатики и вычислительной техники Красноярского государственного педагогического университета. (дистанционно), Степанова Т.А., к.пед.н, доцент Красноярского государственного педагогического университета. (дистанционно)
	«Информационное обеспечение дистанционной подготовки кадров МЧС»	Безвесильная А. А., к.пед.н,, доцент, зав.кафедрой информационных технологий Академии гражданской защиты МЧС
	«Администрирование практики в условиях электронного обучения»	Чмыхова Е.В., к.соц.н., доцент, директор Института когнитивной нейрологии ЧОУ ВО СГА
	«Опыт применения элементов электронного обучения при реализации образовательных программ в МПГУ»	Маняхина В.Г., МПГУ
	«Об опыте проведения государственной итоговой аттестации в режиме видеоконференции»	Завражная Е.А., МПГУ
Семинар № 14 (28 марта 2017 г.): Опыт реализации электронного обучения в вузе и школе		
	«Виртуальная площадка информационного взаимодействия школы и вуза» (живое участие).	Шестопалова О.А., к.пед.н., заместитель директора школы г. Нижневартовск, Глебова Л. Г., методист школы г. Нижневартовск
	«Интерактивные интернет-решения для организации образовательного процесса всех форм обучения»	Горшков Г.С., к.т.н., доцент, IT проректор Московской академии финансово - юридиче-

		ской академии
	«Информационные ресурсы педагогического вуза в открытом образовательном пространстве региона: проект ВГСПУ «Мирознай»	Сергеев А. Н., д.пед.н., профессор, зав. кафедрой Информатики и методики преподавания информатики ВГСПУ, Штыров А. В., к.пед.н., доцент кафедры физики, методики преподавания физики, ИКТ ВГСПУ
Семинар № 13 (15 февраля 2017 г.): Формирование информационного ресурса цифрового обучения		
10	«Квест технологии в подготовке кадров для управления информационными ресурсами» (доклад по телемосту)	Крамаров С. О., директор Института информационных систем ЧОУ ВО «Южный университет (ИУБиП)», д.ф.-м. н., профессор (г.Ростов-на-Дону)
11	«Формирование информационной среды компьютерного класса в обеспечение креативной деятельности студентов колледжа» (доклад по телемосту)	Афонин А. Н., преподаватель информационных технологий профессионально-педагогического колледжа (г. Новозыбков, Брянской области)
12	«Информационные образовательные ресурсы и вторая IT-революция»	Рыжов В. А., к.ф.-м.н., доцент. МГУ им. М.В. Ломоносова, директор по стратегическому развитию «2reallife»
13	«Подходы к созданию автоматического актуализатора учебного материала»	Карпенко М. П., д.т.н., профессор. Президент Академии компьютерных наук. Президент Современной гуманитарной академии
Семинар № 12 (22 декабря 2016 г.): Критерии и средства оценки качества цифровой образовательной среды		
14	«Экспериментальные исследования критериев качества цифровой образовательной среды»	Карпенко М. П., д.т.н., профессор, Президент Академии компьютерных наук. Президент Современной гуманитарной академии
15	«Повышение качества подготовки учители информатики в кластере «школа-вуз»	Пак Н. И., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой информатики и вычислительной техники Красноярского государственного педагогического университета

16	«Информационно-образовательная среда как педагогическая категория»	Роберт И. В., заведующий Центром информатизации образования ФГБНУ «Институт управления образованием Российской академии образования», академик РАО, д.пед.н., профессор
17	«Системное использование электронных технологий в университете – основной стратегический ресурс для повышения качества образования»	Тихомиров В. П., Президент Консорциума Электронный университет, председатель Экспертного совета Государственной думы по IT-обучению в образовании и науке, Заслуженный деятель науки РФ, д.э.н., профессор
Семинар № 11 (22 ноября 2016 г.): Проблемы электронного обучения: социологический аспект		
18	«Проблемы качества электронного обучения: социологический аспект»	Гостев А.Н. заведующий кафедрой «Социология» Современной гуманитарной академии, доктор социологических наук, профессор
19	«Культура управления электронным обучением социологии»	Коростелева Л. Ю. доцент кафедры «Социология» Современной гуманитарной академии, к.соц.н.
20	«Культура управления электронным обучением социологии»	Переверзева Н. Ю. доцент кафедры «Социология» Современной гуманитарной академии, к.филос.н.
21	«Интерактивные технологии для обеспечения инклюзивности дистанционного образования»	Софронова Н.В. профессор кафедры информатики и вычислительной техники «Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева», д.пед.н., профессор.
Семинар № 10 (20 сентября 2016 г.): Философские аспекты реализации дистанционных образовательных технологий, электронного обучения		
22	«Философско-методологические аспекты развития информатизации образования»	Роберт И.В. заведующий Центром информатизации образования ФГБНУ «Институт управления образованием Российской академии образо-

		вания», академик РАО, д.пед.н., профессор
23	«Перспективы развития дистанционного образования: философские аспекты»	Брызгалина Е.В. заведующий кафедрой философии образования философского факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, к.филос.н., доцент
24	«Философия и образование в условиях современной компьютеризации общества»	Никифоров А.Л. главный научный сотрудник Института философии РАН, д.филос.н, профессор
25	«Информатизация образования: философские проблемы и стратегические приоритеты»	Колин К.К. главный научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" РАН, Президент Аналитического центра стратегических исследований "СОКОЛ"
26	«О трансформации информации в знания»	Бешенков С.А. главный научный сотрудник ФГБУ «Институт управления образованием РАО», д.пед. н. профессор, Миндзаева Э.В., ведущий научный сотрудник ФГБНУ «Институт управления образованием РАО», к.пед.н., доцент
27	«Новая образовательная парадигма: постнеклассический период»	Делокаров К.Х., профессор кафедры социологии РАНХ И ГС при Президенте РФ, д.ф. н., профессор

В этом году создан при АКН и Академии информатизации образования Аттестационный совет по приему к защите и проведения процедур защиты научных докладов и диссертаций на соискание степени PhD. М.П. Карпенко предложил поддержать инициативу президента АИО Я.А. Ваграменко о создании совета, поддержал кандидатуры председателя Аттестационного совета Сухомлина Владимира Александровича, д.т.н, профессор Московский государственный университет М.В. Ломоносова, и заместителя председателя совета Чернышенко Сергея Викторовича, д. биол. н., профессора, профессора университета Кобленц Ландау.

В Академическом аттестационном совете при Академии информатизации образования и Академии компьютерных наук 3 октября 2017 г. состоялась защита докладов на соискание степени Доктор философии (PhD):

1) Защита доклада соискателем Яламовым Георгием Юрьевичем. Тема «Педагогико-технологические основания формирования информационно-образовательной среды развития интеллектуальных возможностей обучающегося». Рецензент Федосов Александр Юрьевич, доктор педагогических наук, профессор кафедры РГСУ, доцент.

2) Защита доклада соискателем Широковой Мариной Евгеньевной. Тема «Функции и задачи библиотеки в информационно-образоваательной среде вуза». Рецензент Карпенко Михаил Петрович, доктор технических наук, профессор, президент АКН.

Защита докладов на соискание степени Доктор философии (PhD), - общественная научная оценка идей наших коллег, мы намечаем и выдвигаем лучшие успешные работы.

Деятельность Академии информатизации образования - это значительный фрагмент истории просвещенной России, отражение становления и развития одного из лидеров информатизации образования, свято хранящего и продолжающего лучшие традиции современной академической науки в единстве с повседневной педагогической практикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеев Ф.С., Русаков А.А. Уверенные шаги на трудном пути создания информационного общества и реализации новых конструктивных идей в интеллектуально-культурной среде // Ученые записки Орловского государственного университета. Научный журнал. – 2011. - №3. – С.5-11.
2. Русаков А.А. Деятельность Академии информатизации образования по развитию отечественного и международного образовательного пространства Информатизация образования и науки №4 (24)/2014, стр.119-127.
3. Русаков А.А. Академия информатизации образования в отечественном и международном образовательном пространстве // Педагогическая информатика №4, 2014 – С.81-91.
4. Дробышев Ю.А., Дробышева И.В., Русаков А.А., Русакова В.Н. О реализации новых конструктивных идей на пути создания информационного общества // Вестник Калужского университета (научный журнал) №2, 2011, КГУ им. К.Э. Циалковского, 248023 Калуга, ул. Разина, 26. С 88 -95
5. Ваграменко Я.А., Русаков А.А. Об инновационной и научной деятельности академии информатизации образования // Труды международной научно-практической конференции «Информатизация образования - 2016» г.Сочи. Издательство Современный гуманитарный университет, 2016 – 550с. С.10-25.
6. Русаков А.А. Математика и информатика в непрерывном образовании // Сборник материалов международной научно-практической конференции «Информатизация образования - 2017» Чебоксары 15-17 июня 2017. Отв. ред Н.В. Сафонова. – Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2017, с. 520. – С. 50-62.

О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ДЛИН ТЕКСТОВ В КОЛЛЕКЦИЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ СТАТЕЙ

А.С. Ванюшкин
ФГБОУ ВО «Псковский государственный университет»
e-mail: *alexmandr@mail.ru*
Л.А. Гращенко, к.ф.-м.н.
ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»
e-mail: *graschenko@mail.ru*

В статье рассматриваются распределения длин текстов в естественных коллекциях аналитических статей, для которых применимо и актуально автоматическое извлечение ключевых слов, для обоснования выбора и создания соответствующих исследовательских корпусов на основе полученных оценок. Обзор представленных в открытом доступе коллекций текстов аналитической направленности показал, что распределения их длин описываются преимущественно логнормальным законом, а практические границы зоны рассеяния ограничены пределами 400-2500 слов.

Ключевые слова: коллекции текстов, извлечение ключевых слов, естественное распределение длин, обработка текстов на естественных языках.

Вследствие роста объемов ежегодно продуцируемой текстовой информации возникает потребность в увеличении состава и сложности программных решений в области обработки текстов на естественных языках, в основе которых лежит ряд базовых методов и алгоритмов. В их числе – алгоритмы автоматического извлечения ключевых слов (КС) и фраз. Данная задача всесторонне рассматривалась на протяжении последних шестидесяти лет. Но вследствие того, что до сих пор не разработана удовлетворительная методика выделения ключевых слов человеком, нетривиальной является и разработка алгоритмов автоматического извлечения КС. Поэтому в настоящее время усилия исследователей направлены на развитие обучаемых гибридных технологий извлечения КС, настройка которых предполагает использование разнообразных лингвистических ресурсов. Здесь большое значение на результативность разработок оказывает корректность формирования обучающих и контрольных (тестовых) выборок.

Так, зачастую представляемые авторами алгоритмов извлечения КС результаты их тестирования значительно отличаются от оценок, получаемых другими исследователями. Причина – использование разных контрольных выборок при оценке алгоритмов. Независимое тестирование алгоритмов извлечения КС порой затруднено отсутствием реализаций или исходных текстов алгоритмов в общем доступе. Частично эта проблема решается проведением соревнований, когда организаторами предлагается единый тестовый корпус для всех участников. При этом количество доступных и широко апробированных корпусов для задачи извлечения КС невелико (10-20), критерии их формирования недостаточно методологически проработаны. Остается открытым вопрос относительно переносимости результатов работы алгоритмов на другие языки. Заметим, что большинство известных результатов получено для английского языка, и прави-

ла их интерпретации для славянских языков, прежде всего для русского, не установлены [1].

Действительно, предварительные эмпирические данные показывают, что для граф-ориентированных алгоритмов с увеличением размеров текстов может снижаться точность выделения ключевых слов [2]. Следовательно, результативность алгоритмов выделения ключевых слов зависит от вида и параметров закона распределения длин текстов (в словах), составляющих исследовательский корпус. Вероятно, некоторое влияние также оказывает гомогенность корпуса по жанру и сложности текстов (рисунок 1).

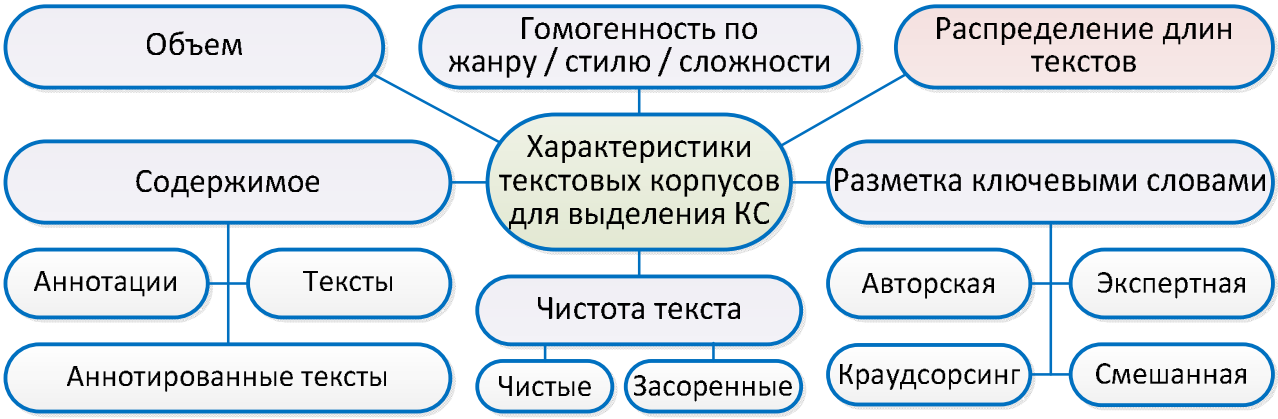


Рисунок 1 – Характеристики исследовательских корпусов для извлечения ключевых слов

Отдельного обсуждения заслуживают такие характеристики экспериментальных корпусов, как объем, наличие и способ разметки КС (авторство и количество размечающих), тематика и вид текстов (аннотации, полные статьи). Здесь стоит отметить, что качество разметки корпуса ключевыми словами, осуществляемой авторами текстов, привлеченными экспертами или добровольцами (на основе краудсорсинга), определяется объемом выборки. Чем она больше, тем сложнее организовать адекватную разметку.

Но прежде необходимо исследовать существующие естественные коллекции текстов, для которых актуальна задача извлечения ключевых слов, на предмет вида и параметров распределения длин (в словах). Для этого в качестве информационно-статистической базы выбраны шесть веб-сайтов, содержащих объемные коллекции аналитических статей различных тематик на английском языке. Данный выбор обусловлен предположением, что именно тематические тексты с элементами аналитики являются одним из основных объектов приложения процедур извлечения КС.

Вопрос естественного распределения и оптимальных длин текстов рассматривался многими исследователями. Больше всего работ посвящено размерам постов в блогах, для которых длины текстов описываются распределениями с толстыми хвостами. Это справедливо и по отношению к пользовательским комментариям, сообщениям электронной почты, так и к длинам текстов, хранящихся на компьютерах пользователей. В целом длины статей англоязычной версии Википедии распределены по логнормальному закону [2].

Выбор ресурсов также определялся доступностью массовой загрузки веб-страниц с сайтов, так как доступ к архивам зачастую не предоставляется, а сайты имеют защиту от роботизированной загрузки. После загрузки коллекций и корпусов автоматически производились парсинг страниц и извлечение открытого текста (plain text), далее выполнялась токенизация и подсчет количества слов в каждой статье.

Для выбранных коллекций строились гистограммы и по критерию хи-квадрат Пирсона оценивались функции плотности распределения длин текстов с помощью пакетов прикладного статистического программного обеспечения Statistica и EasyFit. Заметим, что указанный критерий чувствителен к выбору числа k интервалов группирования выборки для построения гистограммы [4]. Вычисление k возможно различными способами, что приводит к широкому диапазону его возможных значений. Для ожидаемого нормального распределения обычно используют формулу Старджесса (Sturges), но для размера выборки более 200 элементов или иных распределений она слабо применима [3].

В данной работе для унификации расчета количества интервалов при построении гистограмм использовалась формула Фридмана-Диаконис (Fridman-Diakonis), которая выдает значения, согласованные с рекомендациями по стандартизации Р 50.1.033-2001:

$$h = 2(IQ)n^{-\frac{1}{3}} \quad (1)$$

где h – длина интервала, (IQ) – разница между верхним и нижним квартилем, n – размер выборки. При этом по критерию Пирсона (Pearson's chi-squared test, p-value = 0.05) удовлетворительные результаты согласия получить удалось не во всех случаях. Выдвинутые гипотезы были подтверждены за счет вариации k в небольших пределах относительно рассчитанного значения. Для повышения точности оценки вида и параметров функций плотности распределения необходимы дальнейшие исследования. Например, для решения схожих задач применяется алгоритм Левенберга-Марквардта (Levenberg-Marquardt).

В таблице 1 представлена общая информация и статистические характеристики рассмотренных коллекций текстов (в словах).

Таблица 1 – Статистические характеристики коллекций аналитических статей

№	Источник	Объем	Среднее	Мин.	Макс.	СКО	Период публикации
1	project-syndicate.org	1163	873,3	612	1721	108,9	01.15-12.15
2	ndtv.com	736	1112,5	274	2650	309,9	01.15-12.15
3	americanthinker.com	2268	1212,2	473	3703	410,4	01.15-02.15
4	townhall.com	905	839,5	217	2960	283,9	07.15-12.16
5	theguardian.com/science	897	948,7	66	2848	411,2	01.15-12.16
6	theguardian.com/commentisfree	14529	874,6	79	3045	278,8	01.15-12.16

Размеры коллекций варьируются от 736 до 14529 статей, а составляющие их публикации охватывают период 2015-16 гг. Средние значения длин статей варьируются в пределах 839-1212 слов.

На рисунке 2 приведены гистограммы и функции, аппроксимирующие плотности распределения длин текстов в рассматриваемых коллекциях.

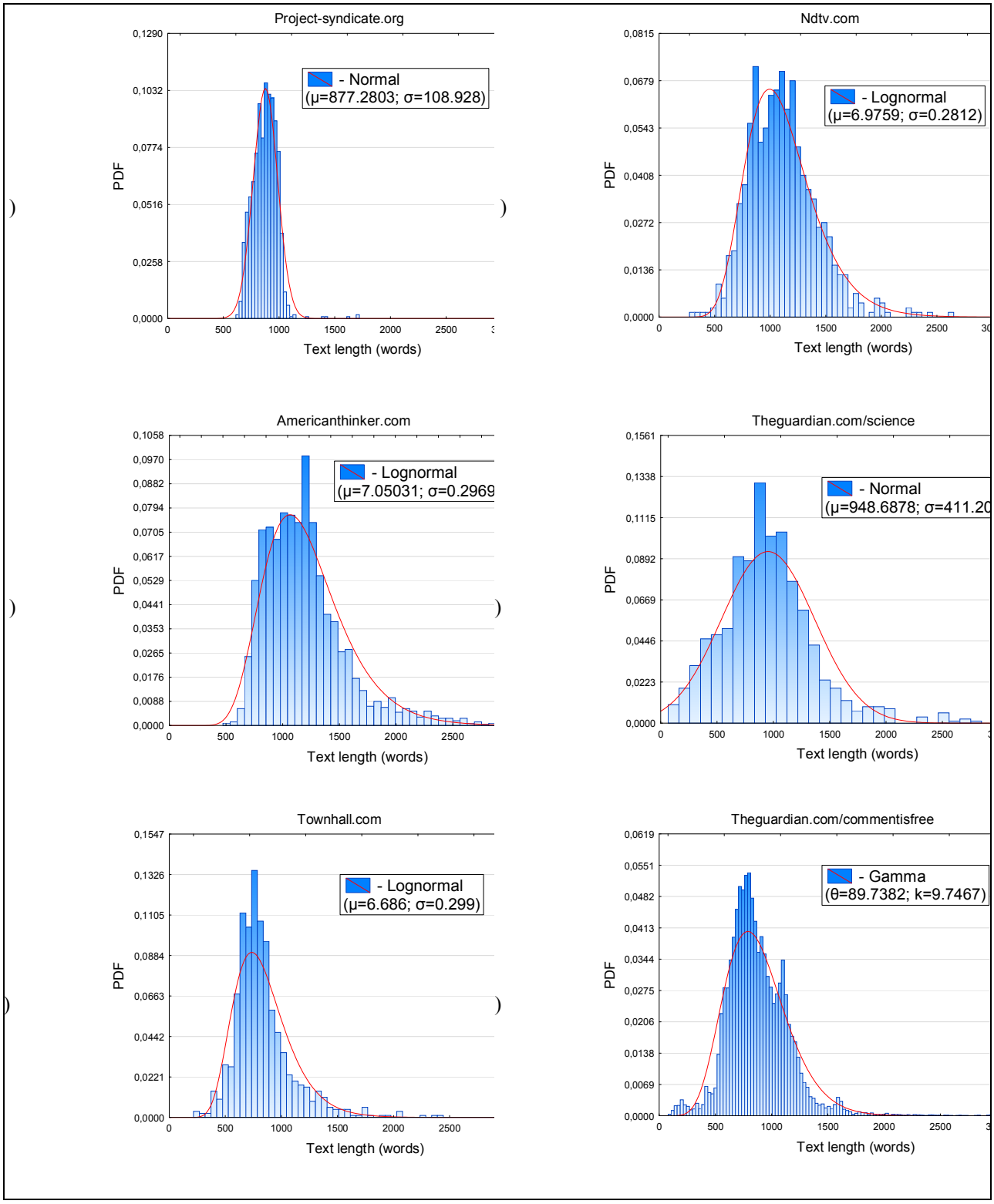


Рисунок 2 – Гистограммы длин текстов в коллекциях аналитических статей

Как видно из приведенных графиков, большинство коллекций аналитических статей могут быть описаны близким к нормальному или логнормальному законам распределения длин текстов. Стоит указать на возможные редакционные ограничения в длине публикуемых статей, в частности на ресурсе project-syndicate.org (рисунок 2, «а») существует рекомендация для авторов соблюдать длину около 1000 слов. При этом практические границы зон рассеяний составляют от 400 до 2500 слов.

По итогам выполненных оценок были рассмотрены 12 общедоступных исследовательских корпусов (test and trial), найденные средствами поисковых систем, относительно которых имеются данные об апробации в опубликованных исследованиях. Они значительно отличаются друг от друга, как распределениями длин текстов, так и другими показателями (размер, тематика, авторство разметки). Так, разброс средних длин текстов для некоторых пар составляет три порядка (таблица 2).

Таблица 2 – Статистические характеристики длин текстов корпусов

	Название	Объем	Среднее	Мин.	Макс.	СКО
1	DUC-2001	307	769,1	141	2505	435,1
2	Inspec	2000	125,9	15	510	59,9
3	GENIA	1999	221,2	50	549	66,5
4	NUS	211	6731,7	1379	13145	2370,6
5	NLM-500	500	4805	436	24316	2943,3
6	WIKI-20	20	5487,8	2768	15127	2773,4
7	FAO-30	30	19714,3	3326	70982	16101,6
8	FAO-780	779	30106,5	1224	255966	31076,5
9	KRAPIVIN	2304	7572,8	144	15197	2092,3
10	CiteULike	180	6454,1	878	23516	3408,9
11	SemEval-2010	244	7669,1	988	13573	2061,9
12	500N-KPCrowd-v1.1	447	425,9	38	1478	311,7

Использование текстов длиной в десятки и сотни тысяч слов (№№ 7,8) ставит под сомнение возможность и смысл использования алгоритмов выделения КС на всей их длине, без предварительного деления на смысловые части. Напротив, аннотации (№№ 2,3,12) по своей сути содержат больший процент ключевых слов, чем тексты длиной в несколько тысяч слов. Поэтому применимость большей части рассмотренных корпусов (за исключением №1) в качестве тестовых сомнительна.

Для независимого тестирования известных алгоритмов выделения ключевых слов, поддержки исследований по их адаптации для русского языка предполагается создание англо-русского параллельного корпуса аналитической направленности с указанным диапазоном длин (400-2500 слов). Дальнейшая исследовательская работа будет направлена на его корректную разметку КС и ввод в научный оборот путем размещения в открытом доступе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ванюшкин А.С., Гращенко Л.А. Методы и алгоритмы извлечения ключевых слов // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2016. –№ 19. – С. 85–93.
2. Ванюшкин А.С., Гращенко Л.А. Оценка алгоритмов извлечения ключевых слов: инструментарий и ресурсы // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2017. –№ 20. – С. 95–102.
3. Hyndman R.J. The problem with Sturges' rule for constructing histograms // URL: robjhyndman.com/papers/sturges.pdf.
4. Lemeshko B.Y., Postovalov S.N. Limit distributions of the Pearson $\chi 2$ and likelihood ratio statistics and their dependence on the mode of data grouping // Industrial laboratory. – 1998. – Vol. 64. – Iss. 5. – pp. 344–351.

УДК 681.518+004.4'2+631.2

ERSY CONTROL: ИМПОРТОЗАМЕЩАЮЩАЯ ПРОГРАММНАЯ ПЛАТФОРМА АСУТП. АВТОМАТИЗАЦИЯ КРУПНЫХ ОБЪЕКТОВ АПК

И.Е. Ермаков
ООО «Метасистемы», ООО «Базис Инжиниринг Групп»
e-mail: *ie@iermakov.ru*
Н.В. Плынский
ООО «Базис Инжиниринг Групп»

В статье разобраны сильные и слабые сторон доминирующего подхода к построению систем АСУТП, в контексте других видов систем управления. Представлена программная платформа ERSY Control, предназначенная для решений промышленной автоматизации (АСУТП/ICS). Отражён опыт использования Оберон-систем как основы для создания подобных прикладных платформ. Платформа включает средства разработки и исполнения для подсистемы ввода-вывода (сопряжения с ПЛК различных производителей), (под)системы управления (СУ/CS), подсистемы человеко-машинного интерфейса (ЧМИ/HMI). В процессе разработки — подсистема сбора и архивации данных (БДРВ/RTDB). Платформа применяется для автоматизации крупных объектов агропромышленного комплекса.

Ключевые слова: промышленная автоматизация, АСУТП, SCADA, платформа, импортозамещение, автоматизация в сельском хозяйстве, элеватор. зерносушильный комплекс, Оберон, Компонентный Паскаль, Блэкбокс.

1. Системы управления и промышленная автоматизация: подходы и проблемы

Системы управления реального времени – это обширный класс задач, со своими особенностями и особыми требованиями к квалификации разработчиков и к качеству систем. На наших глазах управляющие системы из области специализированных (бортовые, промышленные) или обособленных малозначимых (простая бытовая техника предыдущих поколений) становятся действи-

тельно вездесущими и критично значимыми (массовый транспорт, коммунальные системы, здания, медицина, так называемый IoT – Internet Of Things). Любой сбой таких систем становится всё более болезненным или смертельным для окружающих, а любая уязвимость незамедлительно используется преступным миром или противником в гибридном противостоянии. В связи с очевидным началом новой Холодной войны встаёт во весь рост так называемая проблема цифрового суверенитета [1, 11].

Проблема надёжности требует совершенствования методов и инструментов разработки, о чём мы поведём речь далее. Проблема цифрового суверенитета требует решения задач импортозамещения – как в сфере оборудования, так и в сфере программного обеспечения (ПО). Если говорить об отрасли АСУТП, то на рынке присутствует не один десяток ПЛК отечественного производства, однако требуется их перевод на российскую элементную базу (которая имеется). В сфере программного обеспечения – отечественных SCADA-систем – имеется большой выбор, но их «ахиллесовой пятой» является традиционная для АСУТП привязка к ОС Microsoft Windows.

Мир систем управления можно условно сегментировать и по типу решаемых задач, и по способу их решения. При этом интересующая нас отрасль промышленной автоматизации обладает как выраженной спецификой задач, так и устоявшимся, особым по отношению к остальной программной инженерии, способом их решения. Но сначала коснёмся других сегментов.

Сегмент ответственных встроенных и бортовых систем реального времени включает в себя широкий спектр задач (бортовое авиационное, космическое и корабельное ПО, диспетчерские системы воздушного транспорта, ПО медицинского оборудования и т. п.). Особенности: разработка оборудования и программного обеспечения под конкретное изделие; программирование с помощью универсальных языков программирования, со всеми их архитектурными подходами; управляющее ПО включает большое количество параллельных алгоритмов, богатый набор структур данных, сложные математические вычисления [2]. Языки программирования 3GL могут дополняться языками повышенного уровня – 4GL, DSL, CASE [3, 4]. Т.е. можно говорить, что этот класс задач относится к миру программной инженерии, использует её подходы и инструменты. Также в этом сегменте имеется традиция (к сожалению, не доминирующая) применения высоконадёжных, качественных языков программирования, таких как Modula-2 и Ada [5, 6], в последнее время – Oberon-07 (например, на БПЛА [7]).

Второй сегмент – бытовые встроенные системы, программирование микроконтроллеров и т. п. Эти задачи также решаются программированием. Однако ограничения дешёвых микроконтроллеров и традиции «творческого лихачества» обусловили доминирование плохих практик, характерных для раннего этапа развития ИТ (чрезмерная экономия ресурсов ценой отказа от хорошего структурирования данных и алгоритмов; применение языка C, не обеспечивающего контроль памяти и строгую типизацию; отсутствие модульности и абстракции). Увы, плохие практики этого сегмента всегда просачивались и в сферу более ответственных систем (транспорт [8], медицина). Тенденции вроде

Internet Of Things «развиваются» в худших традициях этой сферы. Новой формой безответственного безумия стало проникновение в сферу встроенного ПО скриптовых языков из сферы Web-программирования (Python, JavaScript).

Перейдём, наконец, к предмету данной статьи – сфере промышленной автоматизации, АСУТП. Отдельные задачи и решения этого сегмента могут походить на первые два, но в основном, бесспорно, мир АСУТП отличается от мира программной инженерии. Решения промышленной автоматизации предполагают сборку систем из конфигурируемых аппаратных модулей (ПЛК; модули ввода-вывода) и программных модулей (группы правил на языках МЭК; OPC-серверы; сборка и конфигурирование ЧМИ в SCADA-системах). Основная часть логики управления укладывается в простой рабочий цикл «опрос входов – применение правил – вычисление выходов», асинхронно выполняемых алгоритмов управления мало или нет вообще. Исторически такая управляющая логика исполнялась схемно, релейным способом (или на полупроводниковых логических схемах). Переход к программируемым контроллерам связан не только с ростом сложности процессов, а и с экономическими соображениями – компактностью, удешевлением, упрощением разработки, гибкостью перенастройки. Однако подход, мышление во многом перенеслись.

Возможность модульной сборки «из кубиков», конечно, упрощает процесс создания систем, повышает надёжность – и может быть засчитана «в плюс» миру АСУТП. Однако рассмотрим и вытекающие из этого проблемы:

1) Отсутствие средств формализации, абстракции-обобщения и повторного использования, которые являются центральными для программной инженерии (в частности, ООП). В традиционных инструментах АСУТП, по факту, нет нормальной возможности определить некоторую логику управления в обобщённом параметризуемом виде и использовать её многократно для каждого повторяющегося (или отличающегося параметрически) узла системы. Если объект включает, например, 60 транспортёров, то нередки случаи, когда инженер просто введёт 60 копий правил для управления ими.

Конечно, всё не так удручающе. Например, достойная российская система MasterSCADA позиционируется как объектно-ориентированная – и подразумевает унификацию и параметризацию компонентов.

Однако по мере роста сложности и требваний к гибкости управления неизбежно проявляет себя закономерность п. 2.

2) За определённым порогом сложности задачи проще её запрограммировать на языке программирования, чем продолжать использовать конфигурирование и сборку на пользовательском уровне. Эта закономерность проявляет себя тем, что во всех продуктах рано или поздно появляются скриптовые языки. Однако качество эти языков удручающее (чаще всего нечто С-образное, нередко – Visual Basic for Application), что связано с тем, что разработчики SCADA-систем не являются специалистами по проектированию языков программирования. Отрицательным примером здесь может являться, например, Siemens Simatic WinCC, с его эклектикой средств, многогигабайтным размером и «дырявым» С-образным скриптовым языком.

Таким образом, наряду с перспективностью высокоуровневого, сборочного подхода мы имеем и букет непреодолённых проблем, касающихся как надёжности и безопасности, так и возможности гибкой, расширяемой разработки, интенсивного повторного использования однократно разработанной логики – как в рамках одного объекта, так и между объектами. Нам представляется, что корень этих проблем можно выразить так. Инструменты промышленной автоматизации пытаются до последнего не дать инженеру программировать, и даже, когда он уже «почти программирует», – обеспечивать психотерапию: «Не волнуйтесь, это не настоящее программирование, а всего лишь написание небольшого скрипта». Хотя гораздо перспективнее для современного инженера АСУТП освоить основные принципы надёжного программирования и разработки программных систем.

На наш взгляд, пришла пора объединить лучшее из сферы АСУТП и из сферы сложных систем управления. А именно: взяв за основу некоторую современную систему программирования и времени выполнения (с поддержкой компонентной модели и метапрограммирования в рантайме), разработать прикладной объектно-ориентированный (ОО) каркас (фрэймворк) для АСУТП, предоставить разработчику языковые и визуальные инструменты сборки системы управления из сущностей данного каркаса.

Подобные решения в отрасли вызревают – и в качестве основы часто берётся JavaVM или .NET Framework. Однако эти платформы имеют очевидные проблемы, ограничивающие их применение в ответственных системах реального времени. Альтернативным решением является использование какой-либо из Оберон-систем – как обладающей всеми свойствами JVM или .NET (и являющейся их прародителем, не будем забывать), но при этом на порядок более компактной и детерминированной. В этом качестве нами выбрана система Компонентный Паскаль/Блэкбокс (КП/ББ).

2. Платформа ERSY Control – структура и возможности

Платформа ERSY Control является прикладным решением на базе системы программирования и исполнения КП/ББ, которое реализовано как ОО-фреймворк и набор визуальных инструментов для программиста, встраиваемых в графическую среду КП/ББ [9].

В структуре платформы (естественным для отрасли АСУТП образом) можно выделить три горизонтальных слоя:

- ERSY Control IO – подсистема ввода-вывода (сопряжение с различными ПЛК; генерация простой защитной логики, исполняемой на ПЛК; пространство тегов, независимое от используемых ПЛК);
- ERSY Control Server – подсистема управления (СУ/CS), исполняемая на встраиваемом ПК под управлением ОС Unix-семейства. Разработка управляющей логики выполняется сборочно-конфигурационным программированием на основе абстракций ОО-фреймворка;
- ERSY Control HMI – подсистема человеко-машинного интерфейса (ЧМИ/HMI). Инструмент позволяет удобно разрабатывать графические элементы для визуализации, с использованием векторной независимой от

разрешения устройств графики, а затем собирать мнемосхемы и формы управления, связывая их с обработчиками и событиями управляющего сервера.

Также можно выделить вертикальный компонент, связанный со всеми горизонтальными слоями, — подсистему сбора, архивации и анализа данных (БДРВ/RTDB). В настоящее время эта подсистема на стадии разработки.

Платформу ERSY Control можно отнести к классу распределённых КАСДУ/SCADA-систем, имеющих средства разработки управляющей логики (так называемые интегрированные SoftLogic SCADA). При этом мы избегаем термина SCADA, поскольку его содержание расплывчато: в нём объединены достаточно разные задачи сбора/архивирования данных и организации интерфейса с оператором, при этом неоднозначен вопрос относительно включения или не включения в это понятие управляющей логики.

В 2016-2017 годах на основе платформы нами внедрены АСУТП крупных объектов агропромышленного комплекса [10]. При этом удалось агрегировать разнородное унаследованное оборудование (разнотипные ПЛК и шкафы управления), оперативно разворачивать и модернизировать систему в буквальном смысле слова «в поле», обеспечивать гибкую логику управления техпроцессами. Освоенный класс задач — управление потоковыми сыпучими производствами. Удалось абстрагировать данные задачи и получить единую библиотеку компонентов BigAgroLib.

3. Выводы

ERSY Control является перспективным решением, обеспечивающим надёжность, гибкость, переносимость, накопление повторно используемых обобщённых компонентов для задач АСУТП, что даёт возможность развития в сторону повышения интеллектуальности алгоритмов. Решение полностью вписывается в стратегии импортозамещения, цифрового суверенитета и цифровой экономики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухарин В.В. Компоненты цифрового суверенитета Российской Федерации как техническая основа информационной безопасности. // Вестник МГИМО-Университета. – 2016. – №6 (51) [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.vestnik.mgimo.ru/contents/6-51-2016
2. Басс Л., Клементс П., Кацман Р. Архитектура программного обеспечения на практике. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2006. – 575 с.
3. Калентьев А. А., Тюгашев А. А. ИПИ/CALS технологии в жизненном цикле комплексных программ управления. – Самара: СНЦ РАН, 2006. – 285 с.
4. Тюгашев А.А., Ильин И.А., Ермаков И.Е. Пути повышения надежности и качества программного обеспечения в космической отрасли // Управление большими системами. Выпуск 39. – М.: ИПУ РАН, 2012. – С. 288-299.
5. Янг С. Алгоритмические языки реального времени. Конструирование и разработка. – М.: Мир, 1985. – 400 с.

6. Антамошкин А. Н., Колташев А. А. Технологические аспекты создания бортового программного обеспечения спутников связи. // Вестник СибГАУ им. акам. М. Ф. Решетнева. Вып. 6 – Красноярск: СибГАУ, 2005.
7. Ширяев А. В. Компилятор O7 // Доклад на конференции День Оберона 2017, ИЯИ РАН. Видео и презентация доклада. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://oberoncore.ru/oberonday/2017
8. Toyota: 81 514 нарушений в коде. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://habrahabr.ru/company/pvs-studio/blog/310862/
9. Ермаков И. Е. АСУТП в КП/ББ на платформе ERSY Control // Доклад на конференции День Оберона 2017, ИЯИ РАН. Видео и презентация доклада. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://oberoncore.ru/oberonday/2017
10. Оберон и промышленная автоматизация в агропроме [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.inr.ac.ru/~info21/oberon_innovation/oberonAgro.htm
11. Темиргалеев Е. Э. Блэкбокс-Оберон — оптимальное решение для современных задач ИТ-образования. // См. данный сборник.

УДК 519.25

РАЗРАБОТКА КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТИ ПСИХОЛОГИИ

В.И. Зиборов
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»
e-mail: *slavon_elets@mail.ru*

В данной статье предлагается компьютерная программа для решения профессиональных прикладных задач психологов при помощи непараметрических статистических методов. Разработанная программа имеет ряд положительных особенностей при организации учебного процесса при решении профессионально-прикладных задач: позволяет минимизировать временные затраты на решение задач; сокращает количество ошибок и упрощает процесс поиска результата, что сказывается на более рациональном использовании учебного времени; усиливает мотивацию у студентов.

Ключевые слова: математическая статистика, программный продукт, психология, непараметрические статистические методы, информационные технологии.

Введение

Современные компьютерные технологии охватывают практически всю жизнедеятельность людей. Для решения прикладных задач часто используют прикладное программное обеспечение, которое упрощает процесс решения и минимизирует временные затраты на поиск результата. В настоящее время создано множество программ для статистической обработки результатов, каждая из которых имеет свои преимущества, недостатки и сферу применения. Такие универсальные статистические пакеты программ как STADIA, SPSS, STATISTICA, SYSTAT, STATGRAPHICS PLUS обладают исчерпывающим на-

бором самых современных и эффективных методов анализа данных. Но перечисленные статистические пакеты относятся к наукоемкому программному обеспечению, являются лицензионным продуктом, поэтому цена их часто недоступна индивидуальному пользователю. Кроме того, универсальные статистические пакеты имеют большое количество методов анализа, количество функций, достаточное для широкого применения, но они ориентированы на пользователя, владеющего методами математической статистики на профессиональном уровне [1].

Такие области науки как экономика, социология, психология и др. наиболее нуждаются в программном обеспечении при решении профессионально-прикладных задач, основанных на применении методов математической статистики. Для решения профессионально-прикладных задач используется большой спектр статистических методов. Наиболее востребованными с одной стороны, доступными и результативными с другой, являются непараметрические критерии различий, позволяющие оценить степень статистической достоверности различий между разнообразными показателями. Преимущество непараметрических методов заключается в том, во-первых, для них не требуется предварительной проверки о виде исходного распределения, во-вторых, возможно их применение для номинальных и ранговых переменных. Данные факторы особенно значимы для гуманитарных областей знания, в частности, психологии.

Все отмеченное выше определило актуальность исследования и позволило сформулировать авторскую цель: разработка программного обеспечения для оценки динамики изменений психологических показателей на основе непараметрических методов статистики.

Методы и технологии

В ходе разработки была создана программа «Статистические критерии различий» для использования на персональном компьютере (ПК). Данная программа была реализована в интегрированной среде разработки Microsoft Visual Studio 2012 Express при использовании объектно-ориентированного языка программирования C#. Минимальные системные требования для запуска приложения на ПК: одноядерный процессор; операционная система Windows XP и выше; 512МБ оперативной памяти. Подключение к сети Интернет не требуется. Программу можно запускать со съёмных носителей, так как не требуется установки на операционную систему. Объем памяти, занимаемой программой, составляет несколько десятков Кб.

При запуске приложения открывается начальное окно, интерфейс которого представлен на рисунке 1.

Интерфейс данного приложения прост и понятен даже для неуверенных пользователей ПК. После запуска программы для решения задачи пользователю необходимо выбрать критерий и заполнить данные.

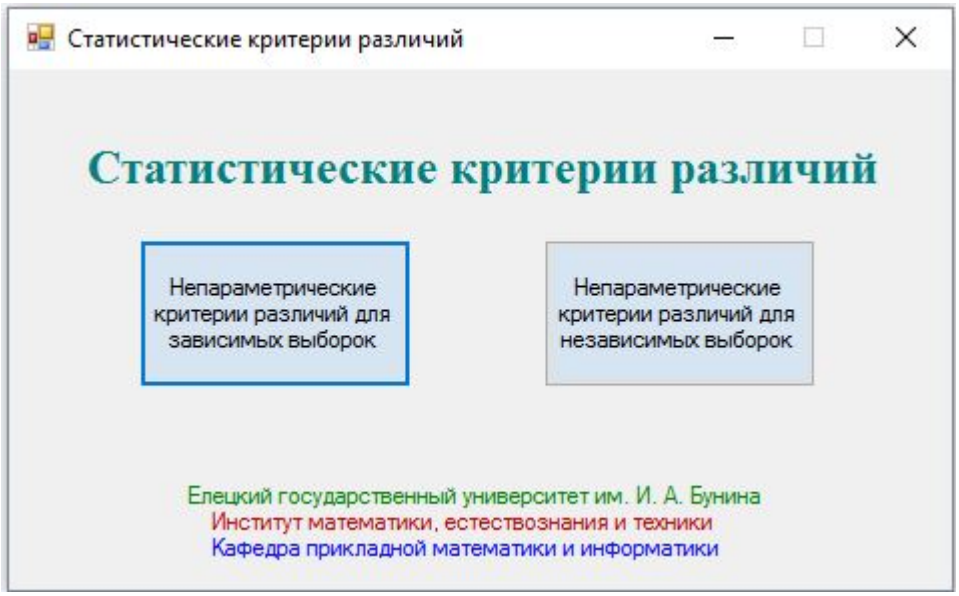


Рисунок 1 – Интерфейс приложения

В практической деятельности психолога чаще используются непараметрические критерии различий, как мы уже отмечали выше, так как они доступны и более результативны. Эти критерии позволяют оценить степень статистической достоверности различий между разнообразными показателями. Функционал данного программного продукта заключается в следующем:

a) Для непараметрических критериев различий для зависимых выборок: вводятся данные «до» и «после»; вычисляется «сдвиг» — величина разности между уровнями тревожности одного и того же участника «после» и «до» тренинга; проводится подсчет нулевых, положительных и отрицательных сдвигов; по сумме сдвигов ищется величина $G_{эмп}$ и $G_{кр}$ ($T_{эмп}$ и $T_{кр}$); по «оси значимости» определятся в какую зону (значимости/незначимости) попало $G_{эмп}$ ($T_{эмп}$); ранжирование и подсчет нетипичных сдвигов для Т – критерия Вилкоксона (рисунок 2).
b) Для непараметрических критериев различий для независимых выборок: вводятся данные «X» и «Y»; рассчитывается инверсия «X/Y» и инверсия «Y/X»; ищется сумма инверсий; принимается за $U_{эмп}$ – минимальная из сумм инверсий; по «оси значимости» определятся в какую зону попало $U_{эмп}$ ($Q_{эмп}$).

Продемонстрируем работу программы для решения конкретной профессиональной прикладной задачи.

Задача [2]. Психолог проводит с школьниками младших классов коррекционную работу по формированию навыков внимания, используя для оценки результатов корректурную пробу. Задача состоит в том, чтобы определить, будет ли уменьшаться количество ошибок внимания у школьниками младших классов после специальных коррекционных упражнений? Для решения задачи психолог у 19 детей определяет количество ошибок при выполнении корректурной пробы до и после коррекционных упражнений. Экспериментальные данные представлены ниже:

«До экспериментального воздействия»: 24, 12, 42, 30, 40, 55, 50, 52, 50, 22, 33, 78, 79, 25, 28, 16, 17, 12, 15;

```
void tTest(int[] shift, bool sign)
{
    int temp;
    for (int i = 0; i < shift.Length - 1; i++)
        for (int j = i + 1; j < shift.Length; j++)
            if (Math.Abs(shift[i]) > Math.Abs(shift[j]))
            {
                temp = shift[i];
                shift[i] = shift[j];
                shift[j] = temp;
            }
    int k = 0, f, count = 0, sum = 0;
    bool isCalc = false;
    double Temp = 0;
    while (shift[k] == 0 && k < shift.Length - 1)
        k++;

    f = Math.Abs(shift[k]);
    for (int i = k; i < shift.Length; i++)
    {
        if (f != Math.Abs(shift[i]))
        {
            if (isCalc)
            {
                Temp += ((double)sum) / count;
            }
            count = 0;
            sum = 0;
            f = Math.Abs(shift[i]);
            isCalc = false;
        }
        if (sign == (shift[i] > 0))
        {
            isCalc = true;
        }
        count++;
        sum += i + 1;
    }
```

Рисунок 2 – Фрагмент кода программы

«После экспериментального воздействия»: 22, 12, 41, 31, 32, 44, 50, 32, 32, 21, 34, 56, 78, 23, 22, 12, 16, 18, 25.

Решение. Для решение данной задачи воспользуемся Т–критерием Вилкоксона. Алгоритм решения с применением разработанной компьютерной программы состоит в следующем:

1. Формулировка нулевой и альтернативной гипотезы;
2. Запуск программы;
3. Выбор критерия;
4. Определение количества испытуемых;
5. Ввод эмпирических данных из условия;
6. Определение уровня значимости;
7. Проверка введенных данных и нажатие кнопки «Вычислить». После нажатия кнопки «Вычислить» в строке Результат мы видим надпись «Отклоняем гипотезу H_0» (рисунок 3).

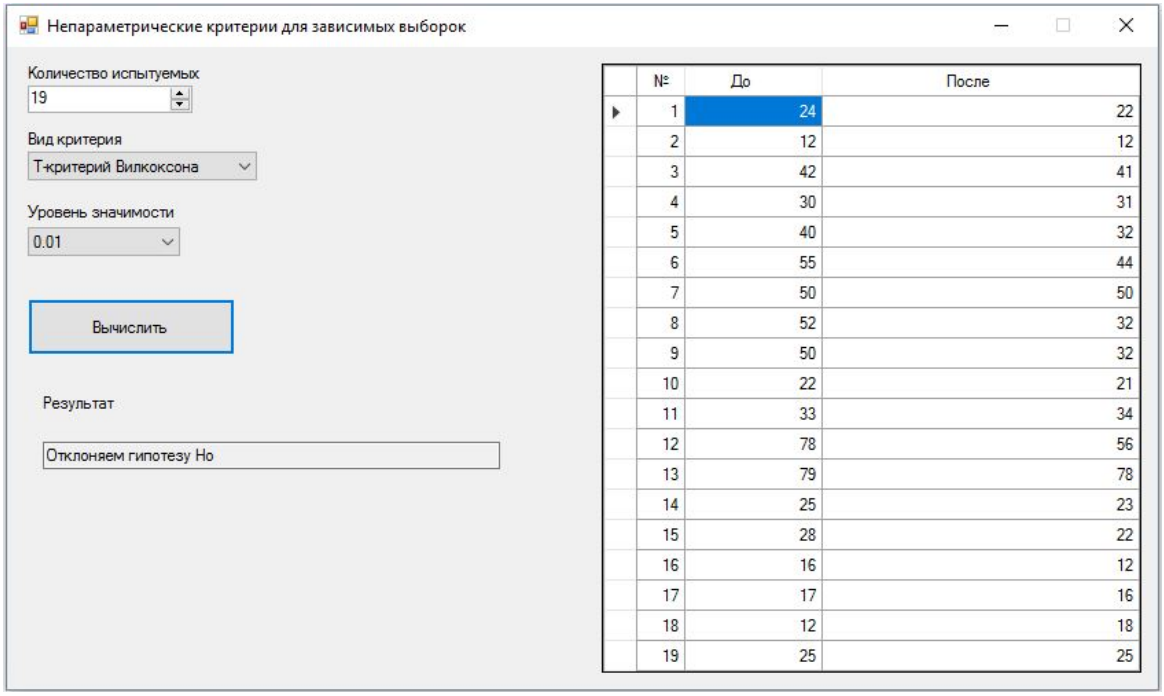


Рисунок 3 – Результат выполнения программы

Полученный результат означает, что величина $T_{эмп}$ попала в зону значимости. Можно утверждать, что зафиксированные в эксперименте изменения неслучайны и значимы на 1% уровне. В данном конкретном эксперименте должна быть принята гипотеза H_1 о наличии значимых различий, а гипотеза H_0— отклонена. Математическое решение данной задачи предполагало множество процедур, таких как проведения ранжирования, проверки ранжирования, определения эмпирического значения критерия, поиск и нахождение критического значения критерия, принятия статистического решения. Однако благодаря представленному приложению, решение задачи заняло пару минут и не потребовало никаких усилий при математических вычислениях.

Заключение

Применение разработанной программы имеет ряд положительных особенностей в ходе организации учебного процесса при решении профессионально-прикладных задач: позволяет минимизировать временные затраты на решение задач; сокращает количество ошибок и упрощает процесс поиска результата, что сказывается на более рациональном использовании учебного времени; усиливает мотивацию у студентов. Кроме того представленный программный продукт имеет ряд качественных характеристик: удобен и легок в эксплуатации; мобилен (может быть установлен на различных моделях компьютеров и операционных системах), эффективен и модифицируем (расширение функций обработки, спектра критериев и т.п.). Разработанное приложение в настоящее время активно применяется в учебном процессе ЕГУ им. И.А. Бунина по направлению подготовки «Психология». Студенты-бакалавры с помощью данного приложения успешно и эффективно решают профессионально-прикладные задачи. Это доказывает необходимость и результативность применения разработанного компьютерного продукта в учебной деятельности.

Данное приложение может применяться также как в исследовательской деятельности студентов при написании курсовых, выпускных квалификационных работ, научных статей, при прохождении всех видов практик, так и в научно-практической деятельности ученых-психологов при решении профессиональных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дворяткина С. Н., Зиборов В. И. Синергетический эффект использования ИКТ в математическом образовании студентов // Ярославский педагогический вестник. – 2017. – №4. – С. 114-117.
2. Ермолаев О. Ю. Математическая статистика для психологов: Учебник. – 2-е изд., испр. – М.: Московский психолого-социальный институт: Флинта, 2003. – 336 с.
3. Сидоренко Е. В. Метод математической обработки в психологии. – СПб. ОО «Речь», 2000. – 350 с.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ УЧЕТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЛЕНОВ ТРУБЧЕВСКОЙ РАЙОННОЙ ОБЩЕСТВЕННОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОРГАНИЗАЦИИ «ФАКЕЛ»

Н.И. Кирющенкова
e-mail: *podolnikova.nadezhda@yandex.ru*
Е.В. Лебедева, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *lev0678@yandex.ru*

Студенческое самоуправление – одно из самых эффективных направлений социального развития молодежи. Современные образовательные учреждения не могут существовать и развиваться в изолированной от общества среде, его целей, задач, состояния на определенном этапе развития. Студенческое самоуправление дает новые возможности для становления и самоопределения личности, проявления общественной инициативы, появления новых идей молодежи в различных сферах жизни общества.

Одной из основных форм организации воспитательной работы в Государственном бюджетном профессиональном образовательном учреждении (ГБПОУ) «Трубчевский профессионально-педагогический колледж» Брянской области является студенческое самоуправление, важнейшая миссия которого – формирование высоконравственных, творчески работающих профессионалов – граждан России. Такое формирование невозможно без собственно-активной позиции студенчества, когда оно не просто добросовестно выполняет предложенные поручения, определенные планом воспитательной работы учебного заведения, а само видит насущные социальные проблемы и ищет их пути решения.

Для разрешения данной проблемной ситуации в Трубчевском профессионально-педагогическом колледже 16 лет назад была создана по инициативе студентов общественная студенческая организация «Факел». Как юридическое

лицо 22 февраля 2001 года она была зарегистрирована в Управлении Министерства Юстиции РФ по Брянской области. Структура организации и порядок работы «Факела» определяется Уставом, принятым учредительной конференцией Трубчевской районной общественной студенческой организации «Факел» 28 ноября 2000 года. Количество членов организации на данный момент составляет 80 человек, в возрасте от 14 до 30 лет. Деятельность организации освещается в собственном ежемесячном печатном органе «Твоя газета».

В последние годы студенческие и молодежные организации и объединения развиваются быстрыми темпами, постоянно меняется их состав, что тянет за собой проблему постоянно возрастающего количества информации. Чтобы решить возникающую проблему организации могут прибегать к разным способам, но наиболее эффективным является разработка информационной системы. С такой проблемой столкнулась и студенческая организация «Факел».

Процесс обработки информации об учете деятельности членов организации до настоящего времени, выполняется вручную. В связи с этим фактором и отсутствием подходящего программного продукта было принято решение разработать соответствующую информационную систему учета деятельности ТРОСО «Факел».

В рамках данной информационной системы планируется автоматизировать основную деятельность работы ТРОСО «Факел» с учетом существующих ГОСТов и жизненного цикла ИС: процесс учета движения численности организации, который будет включать в себя следующие функции:

– учет вступивших в организацию членов за определенный период;
– ведение картотеки всех членов организации за определенный период;
– учет мероприятий, проводимых ТРОСО «Факел».

Такой сложный процесс бизнес-моделирования может реализовываться с использование различных методик, которые отличаются своим подходом к представлению моделируемой организации. В соответствии с различными представлениями об организации методики делятся на объектные и функциональные (структурные). Основным отличием функциональной методики от объектной методики заключается в четком отделении функций от самих данных. Наиболее известными функциональными методиками является методики IDEF и BPMN. Модели в нотации IDEF0 предназначены для высокоуровневого описания бизнеса организации в функциональном аспекте. Данная модель представлена на рисунке 1-2 (для большей точности была проведена двухуровневая детализация).

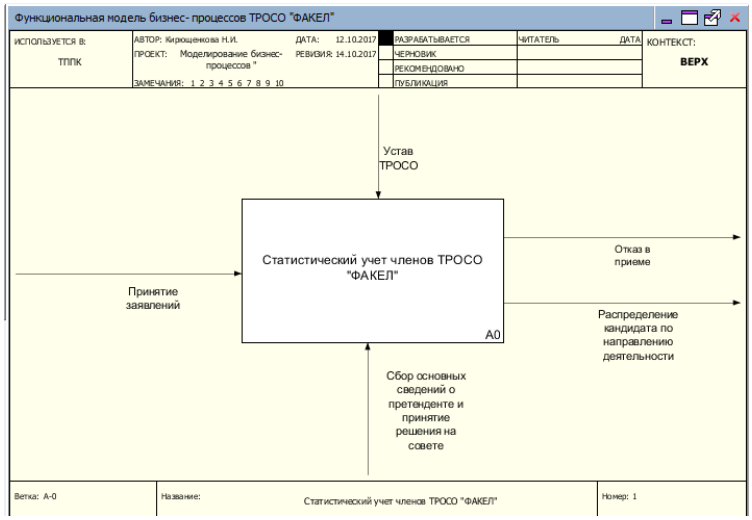


Рисунок 1– Функциональная модель бизнес-процессов (1 уровень)

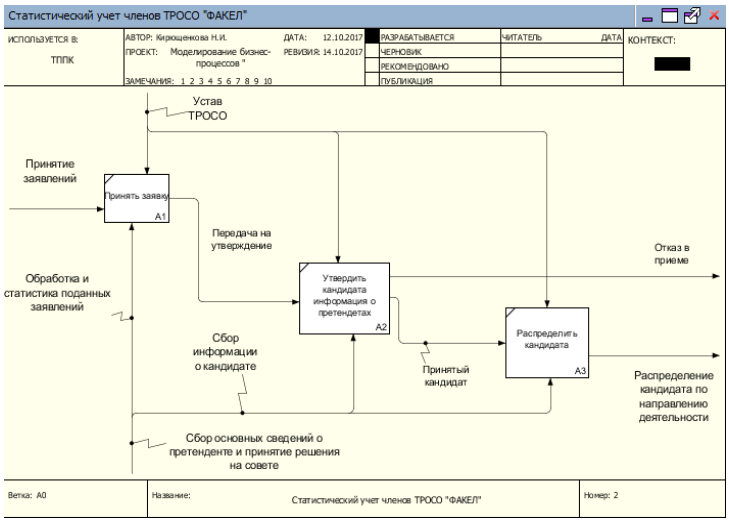


Рисунок 2 – Функциональная модель бизнес-процессов (2 уровень)

BPMN сегодня является самым простым и гибким языком моделирования процессов. Простота достигается за счет наглядности, так как BPMN для описания использует условные обозначения, которые представлены в виде диаграмм и блок-схем. Целью функциональной методики потоков данных является построение модели рассматриваемой системы в виде диаграммы потоков данных (Data Flow Diagram, сокращенно DFD), которая обеспечивает правильное описание выходов при заданном воздействии на вход системы. Диаграммы потоков данных являются основным средством моделирования функциональных требований к проектируемой информационной системе Данная диаграмма представлена на рисунке 3.

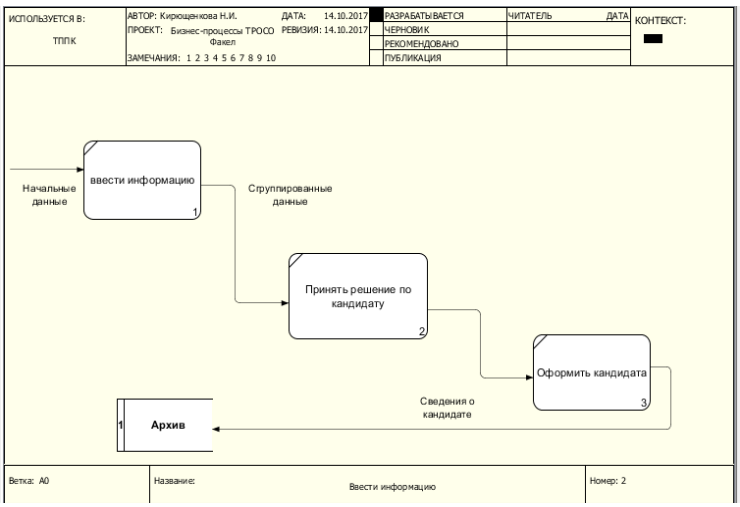


Рисунок 3 – Диаграмма описания потоков данных

Объектно-ориентированная методика применяет объектную декомпозицию, при этом статическая структура изображается в терминах объектов и связей между ними, а поведение системы описывается в терминах обмена сообщениями между этими объектами.

Целью объектно-ориентированной методики является построение бизнес-модели организации, которая позволяет перейти от модели сценариев использования к модели, определяющей отдельные объекты, которые в свою очередь участвуют в реализации бизнес-функций.

В качестве языка моделирования объектного подхода применяется унифицированный язык моделирования UML, который включает в себя стандартный набор диаграмм для моделирования, то есть графическое представление множества элементов, изображающееся зачастую в виде связного графа. Наиболее известными и популярными на сегодняшний день графическими нотациями описания процессов являются IDEF0, IDEF3, EPC, DFD, графоаналитические схемы информационного взаимодействия (ГАС), BPMN и язык UML.

Нотация BPMN (Business Process Model and Notation, нотация и модель бизнес-процессов) предназначена для описания диаграмм бизнес-процессов, понятных как техническим специалистам, так и бизнес-пользователям. Для моделирования процессов, которые протекают на каждом этапе учета движения численности организации будем использовать нотацию BPMN 2.0.

Спецификация BPMN 2.0 регламентирует следующие типы диаграмм бизнес-процессов:

1. Диаграммы оркестровки (схемы потока работ) – это схема, которая показывает очередность выполнения операций процесса.
2. Диаграммы взаимодействия участников одного или нескольких бизнес-процессов (Collaboration).
3. Диаграммы диалогов (Conversation), которые служат для отображения информационного обмена сообщениями, сгруппированными по темам обсуждения.

4. Диаграммы хореографии (Choreography), которые служат для отображения последовательности процедур обмена сообщениями между двумя и более участниками.

В ходе исследования для моделирования процессов были применены основные диаграммы:

– диаграмма взаимодействия (Collaboration), которая показывает обмен сообщениями между двумя и более участниками. Данный вид диаграмм применяется для отображения состава и последовательности выполнения двух и более процессов в виде пулов с указанием взаимодействий между ними через потоки сообщений;
– диаграмма оркестровки, которая показывает последовательность и логику выполнения заданий в рамках одного процесса. Так же как и на диаграмме изображается взаимодействие между частным, рассматриваемым процессом и другими процессами или участниками, которые в свою очередь отображены в виде свернутых пулов.

Для проектируемой системы процесс взаимодействия ТРОСО «Факел» и членов данной организации представлен на рисунке 4.

Как видно из рисунка 4 данная диаграмма отображает процесс обработки учет движения студенческой молодежи и мероприятий, изображенный в виде 2 пулов (зоны ответственности), и связывающие их потоки сообщений. В каждом пуле подробно и последовательно указаны действия каждого из участников.

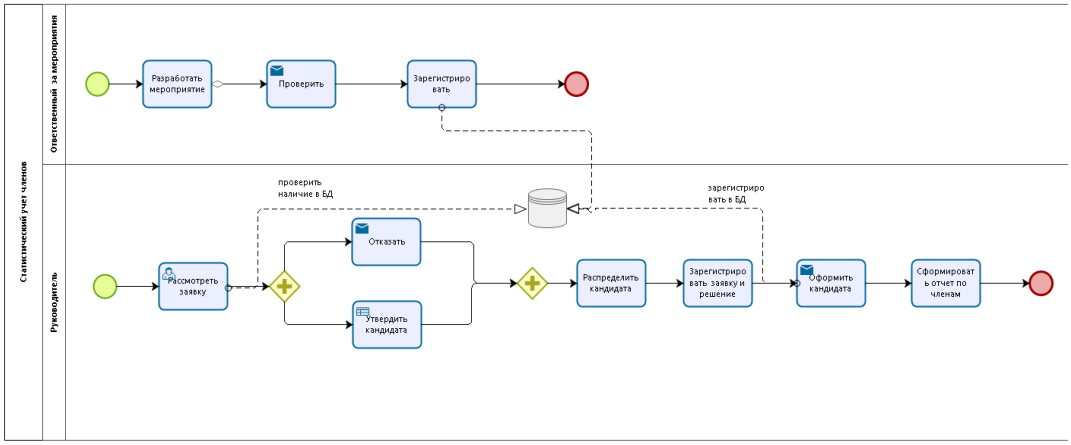


Рисунок 4 – Диаграмма взаимодействия

В пуле содержатся две дорожки, отображающие действия руководителя и ответственного за мероприятия ТРОСО «Факел». Чтение процесса всегда начинается со стартового события (зеленого кружка). После стартового события – начала работы, руководитель рассматривает поступившие заявки (операция, указанная в прямоугольнике). Заявки на вступление в общественную организацию поступают через потоки сообщений к руководителю ТРОСО, руководитель рассматривает заявку – ищет кандидатов в БД, отказывает или утверждает кандидата, распределяет его и лишь затем регистрирует в БД, оформляет и формирует отчет по членам ТРОСО «Факел».

Для деятельности ТРОСО «Факел» можно выделить 2 диаграммы оркестровки: регистрация мероприятия ответственным сотрудником ТРОСО «Факел»

(рисунок 5) и стадии прохождения заявки со стороны руководителя ТРОСО «Факел» (рисунок 6).

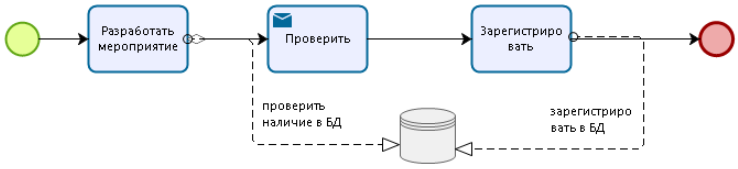


Рисунок 5 – Диаграмма оркестровки
с точки зрения ответственного сотрудника за мероприятия

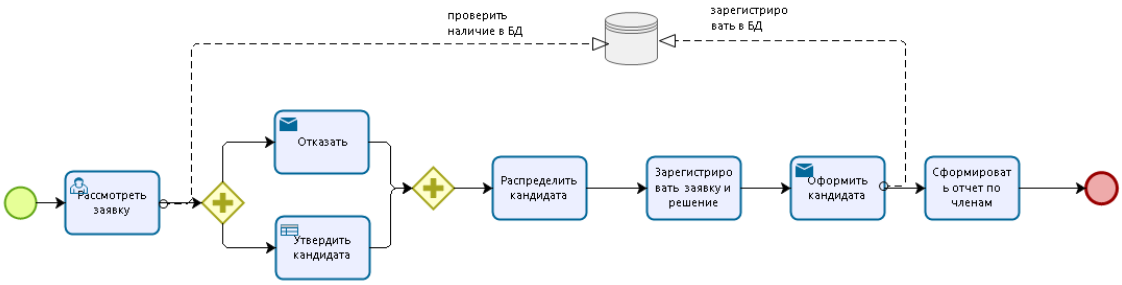


Рисунок 6 – Диаграмма оркестровки с точки зрения руководителя

Схемы взаимодействия показывают обмен сообщениями между двумя и более участниками. Участники по отдельности управляют своими бизнес-процессами, у каждого есть свой владелец. Для изображения участников на схеме взаимодействия обычно используют графический элемент пул. Взаимодействие между участниками осуществляется при помощи потоков сообщений. Следует учитывать, что схема определяет лишь наличие потока сообщений, но не детализирует его содержимое. На схеме показываются только операции, которые участвуют в обмене сообщениями. Пул, изображающий участника, может быть пустым, не иметь внутри себя ни одной операции. В этом случае, такой процесс называется «черный ящик». Потоки сообщений могут изображаться только между пулами.

Определив бизнес-процессы взаимодействия ТРОСО «Факел» и студента, а также порядок действия принятия решения, можно приступать к проектированию системы.

Таким образом, разработанная система позволит членам ТРОСО «Факел» оперативно получать информацию, как о составе организации, так и о проводимых мероприятиях в колледже, городе Трубчевск и Брянской области.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 34.601–90 «Автоматизированные системы. Стадии создания». – Электронный ресурс «Корпоративные хранилища данных. Интеграция систем. Проектная документация». URL: http://www.prj-exp.ru/gost/gost_34–601–90.php
2. Белов В.В. Проектирование информационных систем: учеб. для вузов / В.В. Белов, В. И. Чистякова. – М.: Академия, 2015. – 352 с.
3. Исаев Г.Н. Проектирование информационных систем: Учебное пособие / Г.Н. Исаев. – М .: Омега-Л, 2013. – 424 с.

4. Йордан Э. Объектно-ориентированный анализ и проектирование систем / Э. Йордан. – М.: Лори, 2014. – 264 с.
5. Гома Х. UML. Проектирование систем реального времени, параллельных и распределенных приложений / Х. Гома. / пер. с англ. – М.: ДМК Пресс, 2016. – 700 с.
6. Дастин Э. Тестирование программного обеспечения. Внедрение, управление и автоматизация / Э. Дастин, Д. Рэшка, Д. Пол. /пер. с англ. М. Павлов. – М.: Лори, 2013. – 567 с.
7. Дубейковский В.И. Эффективное моделирование с Allfusion Process Modeler 4.1.4 и Allfusion PM [Текст] / В.И. Дубейковский. – СПБ.: «ДИАЛОГ-МИФИ», 2007. – 384 с.
8. Орлов С.А. Теория и практика программирования: учебник для вузов. Стандарт 3-го поколения / С.А. Орлов. – СПб.: Питер, 2014. – 688с.
9. Палюх Б.В. Применение современных информационных технологий для разработки информационных систем: Учеб.пособие [Текст] / Б.В. Палюх, В.В. Алексеев, А.Ю. Клюшин, С.В. Котлинский. – 1-е изд. – Тверь: ТГТУ, 2010. – 176 с.
10. Реутов А.П. Автоматизированные информационные системы: методы построения и исследования / А.П. Реутов, М.В. Черняков, С.Н. Замуруев. – М.: Радиотехника, 2010. – 328 с.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ПОТОКОВ УПЛОТНЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ СООБЩЕНИЙ МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАННОГО ЦИФРОВОГО ПОТОКА

А.Ю. Куликов, К.Е. Петров

Рассмотрены особенности имитационного моделирования цифровых потоков уплотненных источников сообщений, передаваемых на выходе мультиплексоров, используемых на магистральных линиях связи. Предложена процедура случайного разыгрывания статистических свойств источников сообщений, описываемых математическим аппаратом цепей Маркова, учитывающая ограничения на область значений двоичных двумерных случайных величин.

Ключевые слова: источник сообщений, случайная величина, цепь Маркова, имитационная модель.

Развитие современных телекоммуникационных систем (ТКС) характеризуется значительным увеличением информационного обмена, широким применением технологий временного уплотнения, позволяющих объединить в едином мультиплексированном цифровом потоке (МЦП) сообщения различных источников сообщений (ИС). Известные ограничения на частотно-временные и энергетические ресурсы [1] определяют необходимость разработки и применения новых методов передачи информации, обеспечивающие скорости передачи информации в МЦП, близкие к пропускной способности каналов связи.

С целью формирования единых подходов к формированию единых подходов к синтезу процедур принятия решения о структуре кадра МЦП в систе-

мах управления (СУ) структурой кадра МЦП, рассмотрим вопросы моделирования МЦП. Одним из подходов к исследованию свойств МЦП является имитационное моделирование, предполагающее возможность организации вычислительного эксперимента [2], в ходе которого симулируются реализации двоичных случайных процессов, представляющие собой цифровые потоки уплотняемых в МЦП ИС.

В качестве существенных свойств указанных ЦП обычно [3] используют их статистические характеристики, описываемые цепями Маркова [4]. При этом в ходе вычислительного эксперимента в качестве точек факторного пространства выступают совокупности значений рядов распределений многомерных двоичных случайных величин (ДСВ) [5]. В работе [6] рассмотрен способ симуляции двоичных случайных последовательностей (ДСП), основанный на формировании ДСП с использованием математического аппарата сложных цепей Маркова (ЦМ), и метода обратной функции, обеспечивающего симуляцию ДСП за счет преобразования равномерного закона распределения (РЗР) в требуемое путем задания соответствующего отображения. Схема алгоритма, реализующего указанный способ, представлена на рисунке 1.

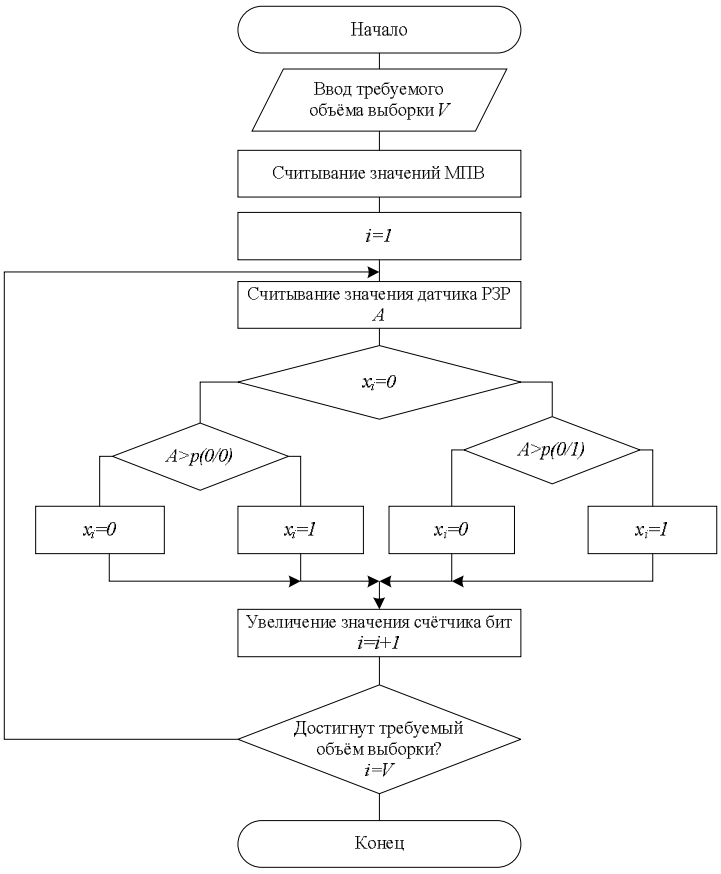


Рисунок 1 – Схема алгоритма генерации простого двоичного марковского процесса

Рассмотрим особенности реализации указанного способа. При использовании ЦМ отображение задается в виде матрицы переходных вероятностей (МПВ). В отличии от задач симуляции одномерных распределений, особенностью симуляции ДСП на основе ЦМ является векторный характер получаемых распределений. Иными словами, в зависимости от заданной связности двоич-

ной ЦМ, требуется определить ряд распределения двоичных комбинаций соответствующей длины. Затем на основе информации относительно значений вероятностей двоичных комбинаций несложно вычислить значения элементов МПВ цепи, требующихся для организации процесса симуляции ДСП.

Однако, при проведении вычислительных экспериментов, значения вероятностей двоичных векторов, составляющих в совокупности ряды распределений симулируемых ДСП, как правило, априорно неизвестны. Соответствующие численные значения требуется получать на основе некоторой исходной информации, характеризующей исследуемый случайный процесс при низкой степени его агрегирования.

Кроме того, в ряде случаев при моделировании двоичных векторов задание МПВ не приводит к требуемому результату. Иными словами, использование некоторой совокупности значений МПВ симулирует ДСП с рядом распределения, не соответствующим требуемому. Известные результаты теории марковских процессов не позволяют объяснить природу такого явления, но относят симулируемый процесс к так называемым неэргодическим.

В работе [7] обоснованы и получены зависимости, объясняющие и количественно характеризующие соотношения между областями значений одномерных и двумерных двоичных случайных величин. Показано, что область значений переходной вероятности $p(0/0)$ определяется выражениями (1,2), а для вероятностей двумерных ДСВ справедливо выражение (3).

$$p(0/0)_{\min} = \begin{cases} 0, \text{ при } p(0) < 0,5 \\ \dfrac{p(0) - p(1)}{p(0)}, \text{ при } p(0) < 0,5 \end{cases} \quad (1)$$

$$p(0/0)_{\max} = 1 \quad (2)$$

$$p(01) = p(10) \quad (3)$$

Это позволяет организовать процесс разыгрывания значений МПВ односвязной двоичной цепи Маркова на основе алгоритма, представленного на рисунке 2.

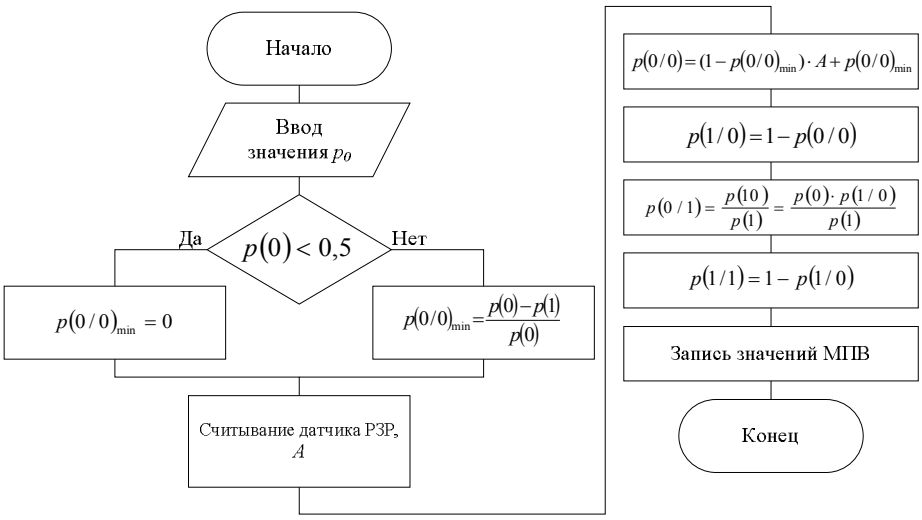


Рисунок 2 – Схема алгоритма генерации значений МПВ

Таким образом, алгоритм, представленный на рисунке 2, позволяет обеспечить при организации вычислительного эксперимента по исследованию характеристик МЦП, как случайный характер симулируемых реализаций сообщений уплотняемых ИС, так и сходимость их статистических свойств к требуемым значениям. Совокупность алгоритмов, представленных на рисунке 1 и рисунке 2, позволяет организовать одно испытание вычислительного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев В.А. Передача сообщений / В.А. Григорьев, С.В. Григорьев. – С-Петербург: ВУС, 2002. – 255 с.
2. Джонсон Н. Статистика и планирование экспериментов в науке и технике / Пер. с англ. под ред. Э. К. Лецкого. – М.: Мир. 1977. – 611 с.
3. Близнюк В.И. Математическая модель дискретного канала связи с динамическим мультиплексированием / В.И. Близнюк, М.Ю. Конышев, С.В. Захаркин, С.В. Харченко, Р.Р. Марченков // Известия института инженерной физики. – Серпухов, 2014. Вып.4 (№34). С.71−75.
4. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
5. Петров К.Е. Метод симуляции двоичных случайных последовательностей с заданными статистическими свойствами // К.Е. Петров, М.Ю. Конышев, Г.А. Ермишин, А.А. Двилянский / Информационные системы и технологии. – 2016. – №4 (96). – С. 28−35.
6. Петров, К.Е. Алгоритм сжатия ряда распределения двоичных многомерных случайных величин // Петров К.Е., Конышев М. Ю., Двилянский А.А., Ермишин Г. А. / Промышленные АСУ и контролеры. 2016. – N8. С. 47–50.
7. Близнюк В.И. Симуляция двоичных Марковских процессов при статистическом моделировании ДКС / В.И. Близнюк, М.Ю. Конышев, П.О. Кукшин, А.В. Панкратов // Сборник Информационно-технического и математического моделирования систем. – Москва. – 2013. – С. 36-41.

РАЗРАБОТКА 3D МОДЕЛИ ДЛЯ ИНТЕРАКТИВНОГО ИЗУЧЕНИЯ АНАТОМО-ФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ СТРОЕНИЯ И ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЕРДЦА

А.А. Моисеенко

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

e-mail: *aleks-zcl@yandex.ru*

В работе рассматривается процесс создания 3-х мерной общей анатомической модели сердца средствами пакета трехмерной графики Zbrush4R7. Эта модель может быть использована при изучения анатомо-физических особенностей строения и функционирования сердца.

Одним из направлений модернизации российского педагогического образования является создание системы открытого образования, основанного на ис-

пользовании информационных образовательных технологий дистанционного обучения и формирование единой информационной образовательной среды на базе использования новых информационных технологий и, в частности, разработка современных электронных методов обучения. Наиболее эффективный способ внедрения новых информационных технологий в образовательный процесс является применение интерактивных 3D моделей и динамических flash-презентаций. Активное восприятие нового учебного материала, повышается за счет наглядности его представления и способствует более прочному усвоению учащимися теоретических основ биологии и анатомии. Это также позволяет широко использовать методы активного, обучения в организации творческой работы учащихся [1].

В настоящее время компьютерная графика используются повсеместно, 3D моделирование помогает визуализировать объекты, которые в дальнейшем используются в обучении, в кинематографе, компьютерных играх, широко используются в медицине и других науках. Относительно классических наук, история нескольких десятков лет является незначимым периодом времени, однако для наук, развивающихся вместе с развитием технологий, этот период времени, является весьма значительным и богатым на события периодом. Это связано со стремительным развитием новейших технологий, и как следствие их развития развивается и компьютерная графика. Создавая 3D модель, в первую очередь необходимо четко сформулировать цель с которой она в дальнейшем будет использоваться и исходя из этого определиться с уровнем детализации. Среди школьников часто наблюдается трудности в усвоении знаний в области анатомо-физиологических особенностях строения и функционирования сердца, однако для школьного курса, модель не должна быть слишком сложной для понимания, тогда как для более направленной аудитории нужна максимальная точность.

Для создания модели сердца была использована программа компании Pixologic – Zbrush [2]. Отличительной особенностью данного ПО является имитация процесса трехмерной лепки – скульптинг.

Прежде чем приступить к скульптингу создадим основу модели (каркас) при помощи ZSphere рисунок 1.

Далее используя клавиши навигации создаем из ZSphere нечто напоминающее наше сердце. Для предпросмотра (рисунок 3) пользуемся горячей клавишей A.

В режиме предпросмотра редактировать полигоны нельзя, поэтому убедившись что каркас нас устраивает создаем полигональную сетку. Для этого переходим во вкладку Adaptive Skin (рисунок 4) и после небольших настроек нажимаем на кнопку Make Adaptive Skin, для того чтобы преобразовать каркас в полигональную сетку.

На данном этапе каркас создан и теперь у нас есть lowpoly (низкополигональная) модель. Используя различные кисти, такие как “Move”, “ClayTubes”, “Smooth” и т.д. придаем грубому каркасу, более правильные черты. Для увеличения количества полигонов используем сочетание клавиш ctrl+D или во вкладке “Geometry”.

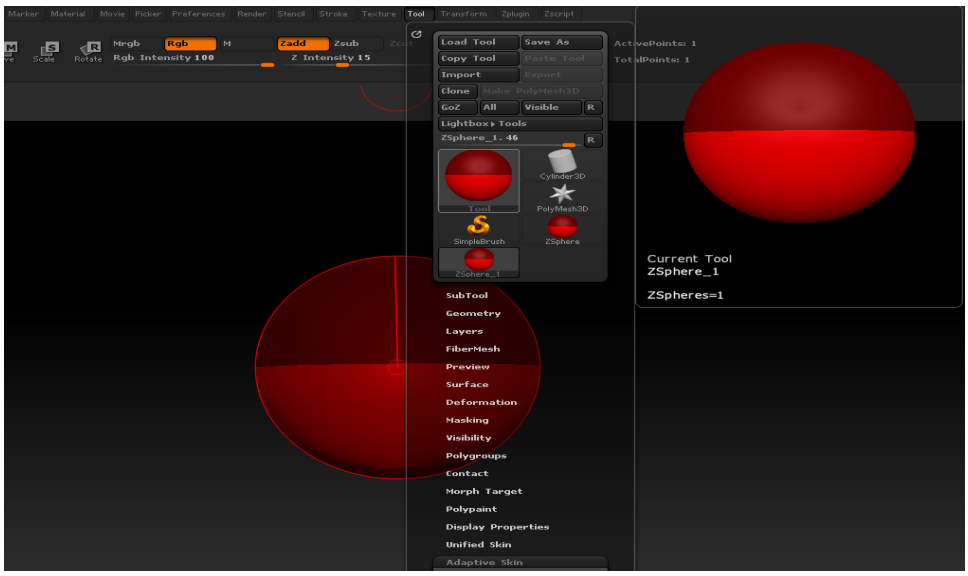


Рисунок 1 – Создание каркаса

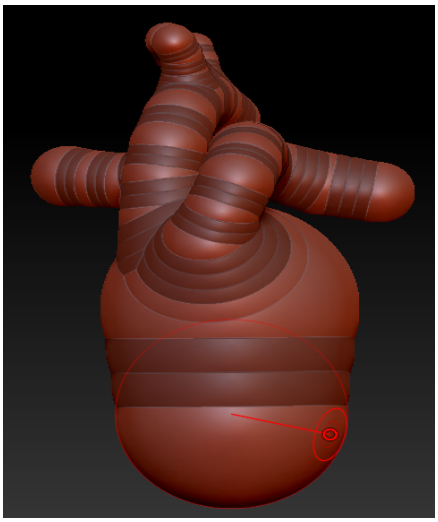


Рисунок 2 – Создание каркаса

Рисунок 3 – Предпросмотр

Рисунок 4 – Создание сетки

На данном этапе стенки сердца очень тонки, добавим объем при помощи “Extract” из вкладки “SubTool”.

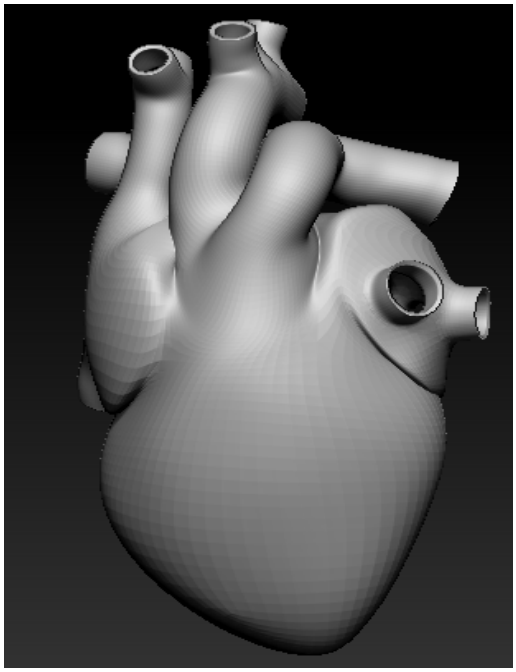


Рисунок 5 – Конечный этап создания

С помощью кисти “Curve Tube” создаем коронарные вены. Выбранная кисть создает трубку заданного радиуса по заданному сплайну. Воспользуемся инструментом “DynaMesh” из вкладки “Geometry” для создания одной геометрии из наших вен.

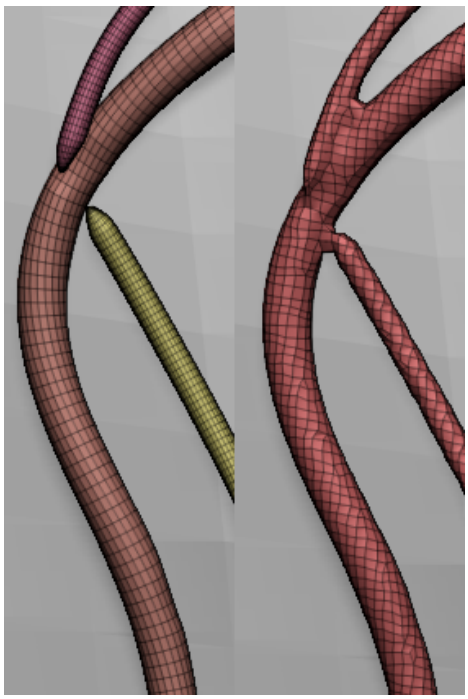


Рисунок 6 – Применение “DynaMesh”

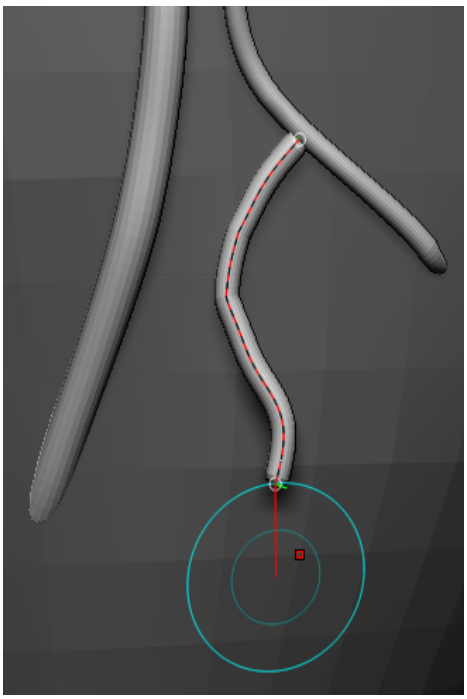


Рисунок 7 – Создание коронарных вен

На рисунке 6 наблюдается незначительное ухудшение качества, данный результат был получен при разрешении 512 в настройках “DynaMesh”. Разрешение 512 означает, что наш объект вписывается в воображаемый куб стороны

которого состоят из 512 полигонов. Для большей детальности разрешение можно увеличить.

В данной статье была решена задача создания анатомической 3D модели сердца, с целью проведения интерактивных презентаций для изучения анатомо-физиологических особенностей строения и функционирования сердца. Модель демонстрирует основное строение сердца: левое/правое предсердие, легочные артерии, дугу аорты, сонную артерию, подключичную артерию, плечеголовную артерию, полые и легочные вены. С результатом выполнения задачи можно ознакомиться ниже на рисунке 8 или в открытом доступе по ссылке https://sketchfab.com/models/60b5299ec20d4193b07203c1903d23c1.

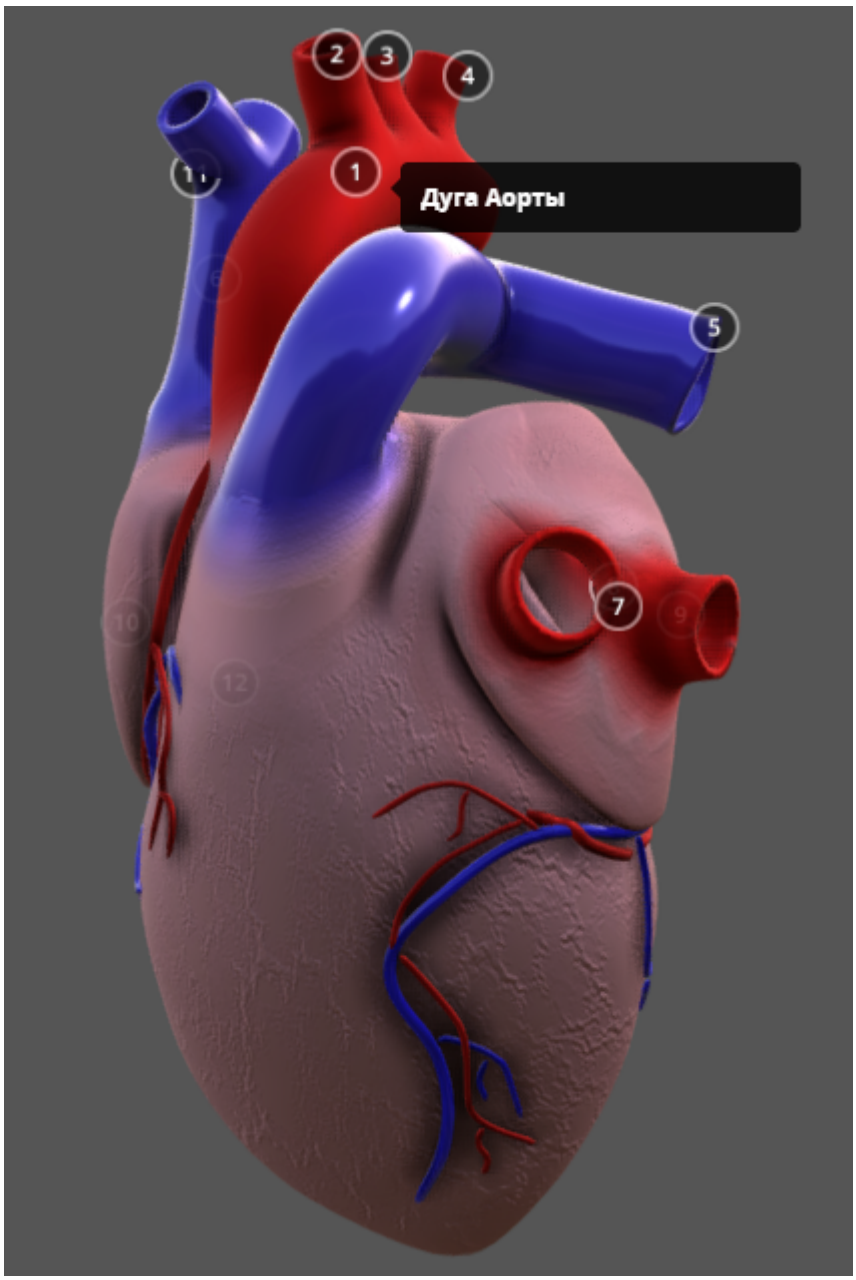


Рисунок 8 – Анатомическая модель сердца

ЛИТЕРАТУРА

1. Федяева Т.В., Федяев Ю.С., Моисеенко А.А. Использование интерактивных средств обучения в современной школе // Актуальные проблемы естествен-

нонаучного образования, защиты окружающей среды и здоровья человека (Настоящее и будущее подготовки учащихся и студентов университетов в области естественных наук). – Орел: ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», 2017. – С. 188-190.
2. ZBrush – The all-in-one-digital sculpting solution [Электронный ресурс] // Pixologic. – 2017. – URL: http://pixologic.com/ (дата обращения: 30.09.2017).

УДК 004.932.2

ПОДХОДЫ К РАЗРАБОТКЕ МОДЕЛИ РАСПОЗНАВАНИЯ СЖАТОГО НЕПОДВИЖНОГО ГРАФИЧЕСКОГО СООБЩЕНИЯ ФОРМАТА JPEG

А.М. Ревякин
ГКОУ ВПО «Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации»
e-mail: *dronrev@mail.ru*

В настоящей статье описаны подходы к разработке модели распознавания сжатого неподвижного графического сообщения (НГС) формата JPEG, основные этапы экспериментов, которые позволили сделать вывод о том, что контент в сжатых НГС формата JPEG непосредственно влияет на распределение значений коэффициентов ДКП, что, в свою очередь, позволяет делать выводы о чувствительности частотной области НГС к изменению контента и в этой связи с большой долей вероятности распознавать контент НГС при анализе его частотной области.

Ключевые слова: контент, сжатые неподвижные графические сообщения (НГС), частотная область, уровень коэффициентов, статистические характеристики коэффициентов.

Современные искусственные системы, при помощи которых осуществляют обнаружение, отслеживание и классификацию объектов по признакам, присущим контенту (содержательная часть сообщений, сведений [п. 3.24 ГОСТ Р 43.0.7.-2011]), получают информацию непосредственно из неподвижных графических сообщений (НГС) – файлов, содержащих графические изображения. Стандартные процедуры считывания графических файлов реализуются всеми современными программными платформами. Для реализации процедуры классификации НГС по типу контента, предлагается реализовать метод определения контента НГС, основанного на анализе частотной области (на уровне коэффициентов) [6].

Графически НГС можно рассматривать как совокупность пространственных волн, где оси x и y с шириной и высотой изображения, а по оси z откладывается значение цвета соответствующего пикселя. Математически, НГС можно представить как вещественную двумерную функцию двух переменных x и y, $I(x, y)$, а для легкости преобразований фильтрации и обработки она представляется в матричном виде:

$$I(x,y)=\begin{bmatrix} I(0,0) & I(0,1) & \dots & I(0,W-1) \\ I(1,0) & I(1,1) & \dots & I(1,W-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I(H-1,0) & I(H-1,1) & \dots & I(H-1,W-1) \end{bmatrix} \quad (1)$$

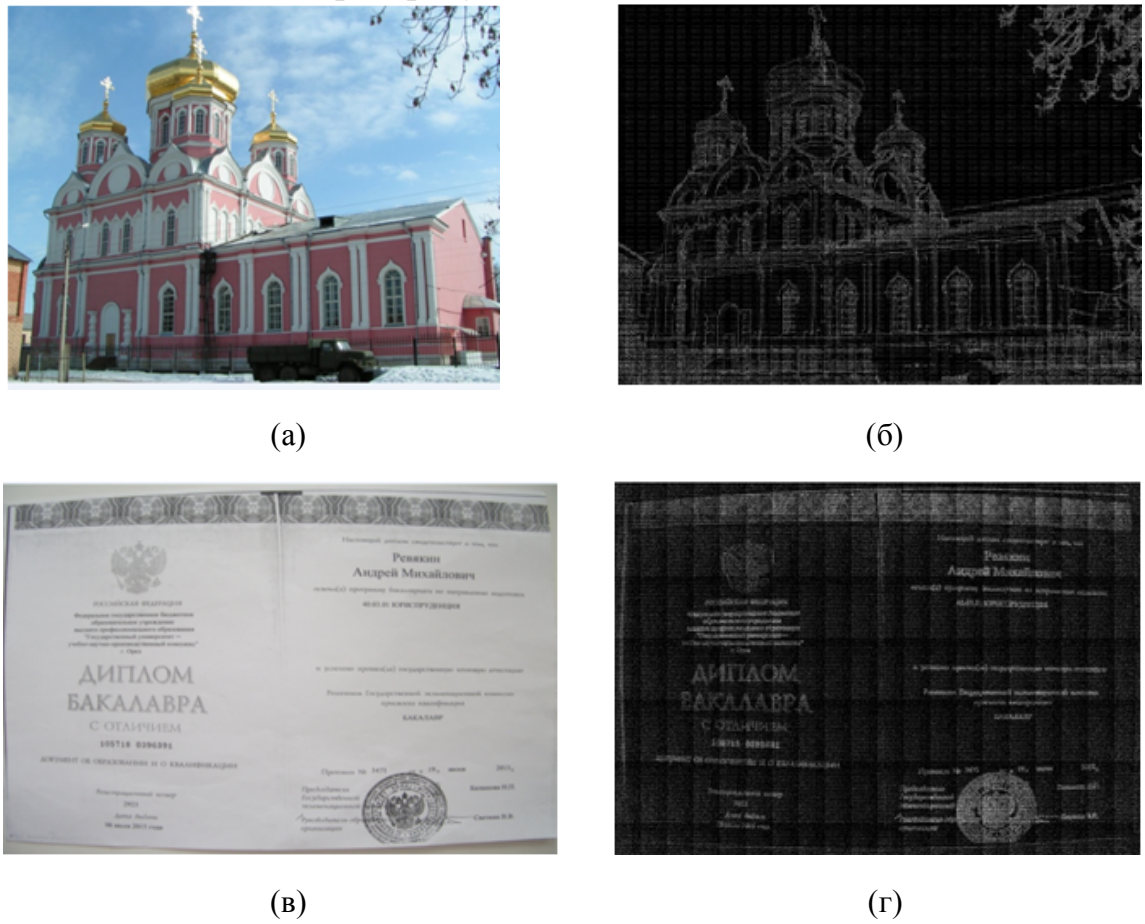
где H – высота изображения, W – ширина изображения. Чтобы сократить объем данных, требуемых для представления цифрового изображения, используется сжатие результатов преобразования изображения, то есть из массива данных удаляется избыточность. С математической точки зрения – это преобразование $I(x,y)$ в статистически некоррелированный массив. Самым распространенным форматом цифровых неподвижных изображений, циркулирующих в глобальной сети, является формат сжатия с потерями *JPEG* (*JPEG ISO/IEC* 10918-1 *ITU-T Recommendation T*.81). Он основан на квантовании и статистическом кодировании коэффициентов дискретно-косинусного преобразования (ДКП, *Discrete Cosine Transform*), являющегося разновидностью дискретного преобразования Фурье. С помощью ДКП реализуется перевод матрицы пикселей цветового пространства *YCrCb* в матрицу частотных коэффициентов соответствующего размера, которые успешно хранят особенности исходного изображения, то есть позволяет переходить от пространственного представления изображения к его спектральному представлению и обратно. Отбрасывая наименее значимые «гармоники», добиваются баланса между качеством изображения и степенью сжатия.

На первых этапах обработки информация не подвергается сжатию с потерями, но производится подготовка данных к этой процедуре. Для реализации процедуры сжатия полученные после этапа ДКП значения коэффициентов в блоках размером *8×8* делятся на соответствующее значения элементов матрицы округления (таблицы квантования) и в дальнейшем округляются до ближайшего целого числа. Таблица квантования берется из спецификации, где представлены оптимальные таблицы с опорой на психовизульный порог для изображений с восьмибитовой яркостью и оттенками, либо задается разработчиком программного обеспечения (например, цифровых фотоаппаратов). Для коэффициентов ДКП компоненты *Y* применяется одна таблица, для двух других компонент (*Cr, Cb*) – другая. Этот процесс играет в алгоритме сжатия *JPEG* ключевую роль. При его выполнении удаляются высокие частоты, к которым человеческий глаз наименее восприимчив. Использованные при сжатии таблицы квантования записываются в заголовок файла, чтобы декомпрессор при декодировании смог востановить коэффициенты ДКП. От выбора матрицы квантования зависит баланс между степенью сжатия НГС и его качеством после преобразованию в карту пикселей. Соответственно, чем больше потери при сжатии, тем меньше визуальное качество получаемого при последующем декодировании сжатого НГС. При больших значениях фактора качества, отвечающего за степень сжатия, и используемого при расчете элементов таблиц квантования, потери в низких частотах могут быть так велики, что изображение на карте пикселей может

распадаться на квадраты или вызвать «эффект Гиббса» (резкие переходы цвета вокруг контура, образующие своеобразный «нимб»).

Контент в сжатых НГС формата *JPEG* непосредственно влияет на распределение значений коэффициентов ДКП, что позволило предположить, что тип содержимого НГС (текст, шум, пейзаж, портрет и т.д.) можно оценивать не только на уровне карты пикселей, но и на уроне коэффициентов ДКП, как одного из эффективных средств уменьшения избыточности и сохранения самых важных особенностей НГС.

Так как основную информацию о контенте сжатого изображения несут коэффициенты ДКП яркостной составляющей *Y*, то предлагается строить изображения на основе карты коэффициентов ДКП именно данной цветовой составляющей. Используются значения коэффициентов после декодирования кода Хаффмана НГС формата *JPEG* до процедуры деквантования. При этом значения коэффициентов ДКП для большей наглядности берутся по модулю и увеличиваются в несколько раз (рисунок 1).



(а) (б)

(в) (г)

Рисунок 1 – *а*, *в* – сжатые НГС, преобразованные в карту пикселей цветовой схемы *RGB; б, г* – изображения в оттенках серого карты коэффициентов ДКП составляющей *Y* сжатых НГС *а* и *в*

Приведенные рисунки демонстрируют определенную корреляцию между пространственным и частотным представлением НГС. Если проводить распознавание контента НГС на уровне коэффициентов ДКП (рисунок 2), то возмож-

но снизить количество операций, связанных с преобразованием сжатого НГС в цветовое пространство *RGB*.

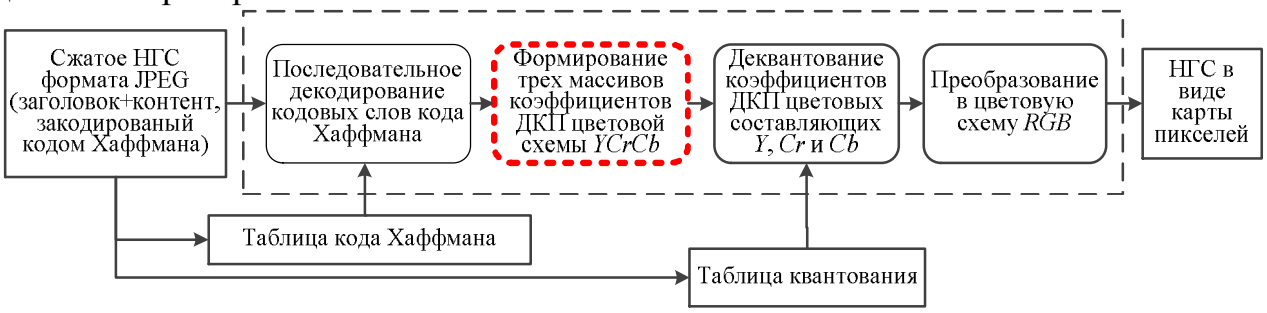
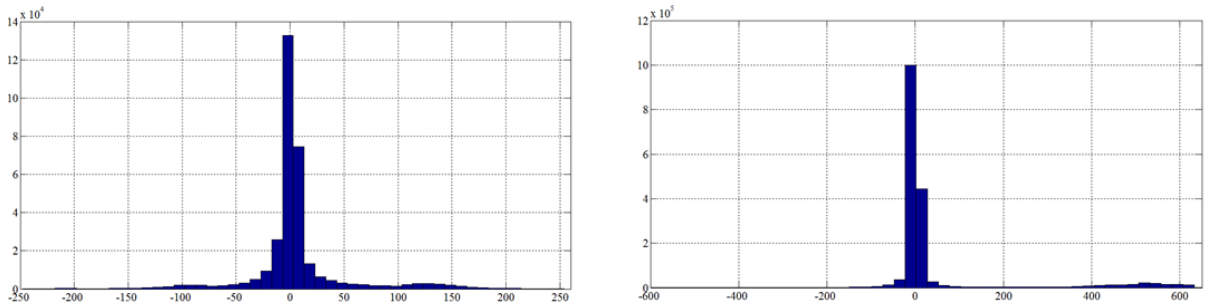


Рисунок 2 – Основные процедуры при восстановлении сжатого НГС в соответствии с алгоритмом *JPEG*

Распределение коэффициентов ДКП традиционно описывается функцией Лапласа [6]. Гистограммы, построенные на основе значений ДКП (с исключением значений равных 0, 1 и – 1) цветовых составляющих *Y* двух сжатых НГС с разным контентом, показаны на рисунке 3.



а) *б*)

Рисунок 3 – Гистограммы коэффициентов ДКП составляющей *Y* сжатых НГС, представленных на рисунках *а*) и *3*) соответственно

Из гистограмм видно, что у разных классов НГС отличия наблюдаются в центральной области распределений, но в большей степени на их «хвостах». С точки зрения основных статистических характеристик, описывающих распределение случайной величины, центральные моменты высоких порядков *S*, характеризуют большие, но маловероятные значения случайной величины:

$$\mu_s[X] = M\left[\dot{X}^s\right] = M\left[(X - m_x)^S\right], \qquad (2)$$

Если в качестве случайной величины *X* рассматривать множество значений коэффициентов ДКП яркостной составляющей *Y*, исключая множество коэффициентов со значением 0, то в этом случае на «хвостах» распределений (гистограммы на рисунке 2) и находятся большие, но маловероятные значения случайной величины.

Для обучения классификатора с целью распознавания контента сжатых НГС на основе различий статистических характеристик в частотной области между НГС с разным контентом была сформирована обучающая выборка, включающая 4353 НГС с контентом «пейзажи» и 1084 НГС, содержащих текстовую информацию. В рамках экспериментов от каждого НГС формировался

вектор центральных моментов длиной 10, при этом вычислялись моменты порядков со 2 по 10 включительно (центральный момент первого порядка не используется, так как его значение равно нулю).

На основе вычисленных векторов были сформированы двумерные массивы признаков априорного словаря, с приведенными значениями к безразмерным величинам и единому диапазону изменений [0, 1] с помощью процедуры нормирования.

Известно, что при классификации описанных типов изображений в многомерном признаковом пространстве наиболее предпочтительной с точки зрения разделимости объектов на классы является оценка расстояния на основе метрики Махаланобиса [10, 11].

То есть для определения принадлежности НГС к какому-либо классу необходимо подсчитать расстояние Махаланобиса от распознаваемого образа до эталонов каждого класса и выбрать класс, для которого это расстояние минимально.

Измерив расстояние Махаланобиса между центрами двух классов НГС при использовании каждого признака в отдельности, приходим к выводу о том, что вышеописанный подход актуален для решения задачи оценки информативности признаков априорного словаря. Деление на классы происходит эффективней с увеличением расстояния Махаланобиса ввиду большей информативности анализируемого признака.

Измерения показали увеличение расстояния Махаланобиса при использовании в качестве признаков моментов более высоких порядков (рисунок 4), что позволяет добиться значительной разделимости классов.

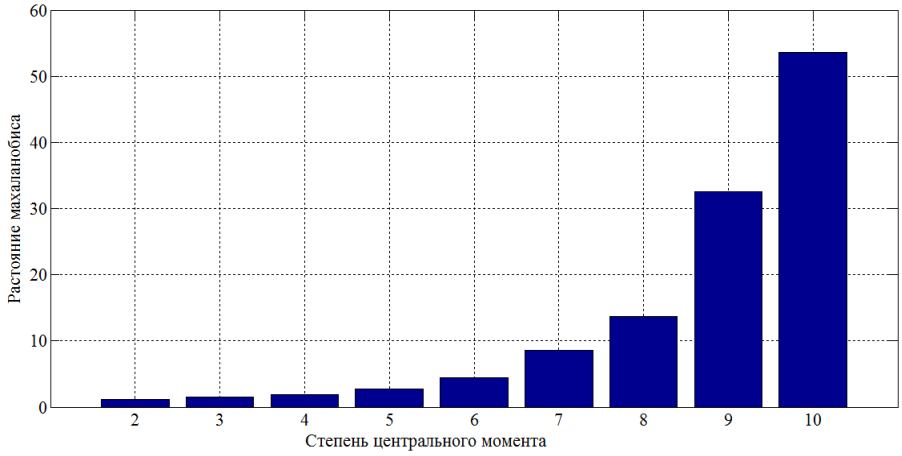


Рисунок 4 – Расстояние Махаланобиса между классами сжатых НГС в зависимости от используемого признака (центрального момента степени *s*)

Адекватная математическая модель изображения формата JPEG, учитывающая в полной мере статистические характеристики распределения коэффициентов ДКП, позволит сделать выводы о чувствительности частотной области НГС к изменению контента, а значит с большой долей вероятности распознавать контент НГС при анализе частотной области. Система, построенная на основе такой модели, позволит существенно повысить уровень автоматизации процедур контроля содержимого сжатых НГС, сократить временные затраты на

обработку, и в целом составить основу для построения системы анализа контента сжатых НГС в условиях их априорной семантической неопределенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штанчаев Х. Б. Математическая модель представления изображения в системах распознавания образов. // Интернет-журнал «Мир науки» ISSN 2309-4265 http://mir-nauki.com/Выпуск 2 - 2015 апрель – июнь http://mir-nauki.com/issue-2-2015.html URL статьи: http://mir-nauki.com/PDF/29TMN215.pdf
2. Разинков Е.В.. Математическое моделирование стенографических объектов // Ученые записки казанского университета. – 2011. – Т.153. – кн.4. – С.180
3. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. 2005. Цифровая обработка изображений. – Москва: Техносфера. – 1072 с.
4. Замарин А. И., Сазонов К. В.. Способ распознавания контентного содержания сообщений графических форматов / Патент на изобретение RU № 2479028. – 2013. – Бюл. № 10 от 10.04.2013.
5. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. – Москва: Техносфера. –2006 – 616 с.
6. Ревякин А.М., Скурнович А.В. Распознавание контента сжатых неподвижных графических сообщений на уровне коэффициентов дискретного косинусного преобразования // Новые информационные технологии в автоматизированных системах: материалы двадцатого научно-практического семинара. – Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2017. – С. 23-28.
7. Natarajan T., Rao K., Ahmed N. Discrete Cosine Transform. IEEE Transaction on Computers, – 1974. – vol. 1, pp. 90-93.
8. Ackerman M. R.. Algorithms for the Bregman k-Median Problem. – A dissertation submitted to the Department of Computer Science University of Paderborn. – 2009. – 220 p.
9. Вентцель Е. С.. Теория вероятностей. –Москва: Наука. – 1969. – 576 с.
10. Mahalanobis, Prasanta Chandra. 1936. On the generalised distance in statistics. – Proceedings of the National Institute of Sciences of India 2 (1) – pp. 49–55.
11. Хачумов М. В. Расстояния, метрики и кластерный анализ // Искусственный интеллект и принятие решений. – №1. – 2012. С.81–89.
12. Горелик А. Л., Скрипкин В. А.. Методы распознавания. Учебное пособие для вузов. Изд. 4. – Москва: Букинист. – 2004. − 262 с.

УДК 004.65

О ВЛИЯНИИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРАВИЛ ФОРМИРОВАНИЯ РЕЛЯЦИОННЫХ ОТНОШЕНИЙ ИЗ СВЯЗЕЙ ER-МОДЕЛИ НА НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ЭТИХ ОТНОШЕНИЙ

О. А. Рюмшина
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева»
e-mail: *comadu@rambler.ru*

Статья посвящена анализу влияния применения правил перехода от связей er-модели к набору взаимосвязанных отношений реляционной модели на нормальные формы таких отношений.

Ключевые слова: информационная система, er-модель, реляционная модель, нормальные формы.

Главной целью проектирования информационных систем является создание эффективного продукта, наиболее точно и адекватно отражающего описываемую предметную область и не содержащего фактических и логических противоречий. Поскольку основа любой информационной системы — это хранилище актуальной информации, реализованное посредством базы данных, то требование эффективности, непротиворечивости и целостности направлено прежде всего на её внутреннюю логическую структуру. При этом качество логической структуры данных не в последнюю очередь связано с выбором методологии проектирования на всех его основных этапах. Поскольку проектирование осуществляется путём последовательного прохождения этапов различной степени общности — от общего плана к подробной детализации — важно, чтобы переход от одного этапа к другому был логичным и обоснованным. Традиционно на концептуальном уровне представления данных используется модель er-диаграмм, на логическом — реляционная модель. Однако в большинстве случаев переход между этими двумя этапами отсутствует как таковой: er-диаграмма предметной области существует «сама по себе», а предварительный набор отношений формируется фактически интуитивно и в дальнейшем подвергается нормализации с целью выявления недостатков — аномалий, вызываемых определёнными видами зависимостей между атрибутами. Многих из описанных трудностей можно избежать, применяя правила перехода от связей между сущностями в er-диаграмме к набору взаимосвязанных реляционных отношений. Некоторые основные правила первоначально сформулированы и описаны (с недочётами) ([1], [2], [3]), дополнены и доработаны ([4] – [7]).

Качество реляционных таблиц определяется отсутствием в них тех зависимостей, которые могут послужить источником аномалий и спровоцировать нарушение целостности данных и связей. В настоящей статье проводится анализ эффективности применения правил перехода от er-модели к реляционной, в том числе в аспекте соответствия получившихся отношений требуемым нормальным формам.

Ниже представлен анализ соответствия отношений, получающихся из

er-диаграмм согласно правилам [4] – [7], последовательным нормальным формам. Далее будем называть отношения *объектными*, если они соответствуют сущностям, и *связующими*, если описывают связь между сущностями.

Отношение будет находиться в 1НФ, если оно, прежде всего, удовлетворяет требованию единственности значений атрибутов кортежа. Поскольку на уровне описания сущностей каждому экземпляру сущности, как правило, соответствует единственный набор значений атрибутов, то для объектных отношений, получаемых по правилам, 1НФ соблюдается автоматически. Для связующих отношений такой однозначности нет. Тем не менее, учёт нестатических связей (бинарных и, в общем случае, n-арных [5], [6]) позволяет автоматически получить 1НФ в тривиальных случаях.

Как известно, одной из самых «вредных» зависимостей между атрибутами отношения является частичная функциональная зависимость (ЧФЗ), устраняемая переходом к 2НФ. Применение правил перехода в типовых случаях полностью исключает ЧФЗ в отношениях. Можно показать на примере из [1], стр. 152-160: если при проектировании в рамках er-модели наряду с сущностью ПРЕПОДАВАТЕЛЬ выделить в качестве сущностей также ПРЕДМЕТ и ГРУППУ (несмотря на отсутствие у последних набора атрибутов в данном примере, в реальных предметных областях по большей части данные объекты имеют более подробное описание), то имеем ситуацию статической тернарной связи. Раскрывая её по соответствующему правилу, получаем объектное отношение ПРЕПОДАВАТЕЛЬ (ФИО, Должн, Оклад, Стаж, Д_Стаж) (а также ещё два для предмета и группы, если они описаны более чем одним атрибутом, — в нашем случае они просто не формируются) и связующее НАГРУЗКА (ФИО, Предм, Группа, ВидЗан). Таким образом, описанная в примере ЧФЗ полностью исключена. Однако существуют ситуации более сложно организованной связи. В качестве примера можно привести связь по семантике *ЗАКАЗ* между сущностями ТОВАР и ПОСТАВЩИК, если заказ, формируемый как единое целое для конкретного поставщика на конкретную дату, включает в себя несколько позиций товара. В этом случае правило не обладает достаточной степенью детализации, и полученное отношение необходимо донормализовать до 2НФ.

Другую опасную зависимость — транзитивную (ТЗ) — в общем случае можно понимать как функциональную зависимость между неключевыми атрибутами, и с ней дело обстоит сложнее. Поскольку такая зависимость обычно инкапсулирована внутри сущности, правила её не «видят», а следовательно, не могут устранить. В приведённом выше примере такая зависимость наблюдается между атрибутами единой сущности ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Должн → Оклад, Стаж → Д_Стаж. Таким образом, правила формирования отношений не устраняют ТЗ: получившиеся отношения нужно исследовать на предмет ТЗ и, при необходимости, донормализовывать до 3НФ.

В большинстве случаев для отношений достаточно 3НФ. В более сложных

ситуациях необходима проверка на соответствие нормальным формам высших порядков.

Ситуация, когда отношение будет находиться в 3НФ, но не в НФБК, может возникать, если отношение имеет два (или более) потенциальных ключа, причём составных, и существует функциональная зависимость отдельных атрибутов потенциальных ключей от неключевых атрибутов. Такая зависимость не является транзитивной, а значит, ситуация отличается от 3НФ. На практике такие отношения встречаются достаточно редко, а для всех прочих отношений 3НФ и НФБК эквивалентны. Таким образом, применяя правила перехода, риск получить отношения, не соответствующие НФБК, минимален и касается только связующих отношений, но тем не менее, полученные по правилам связующие отношения рекомендуется дополнительно проверять на наличие описанных зависимостей.

Нетривиальная многозначная зависимость (МЗ), исключения которой требует 4НФ, возможна только в отношениях, содержащих атрибуты, связанные как M:M, однако она никогда не возникнет, т. к. правила для бинарной связи M:M при переходе к реляционным отношениям «разбивают» эту связь на две 1:M, таким образом исключая нетривиальные МЗ. Связующие отношения будут содержать только тривиальные МЗ — между атрибутами составного ключа.

Что касается нетривиальных зависимостей соединения (ЗС), то, исходя из того, что отношения получены в результате применения правил, а не путём декомпозиции из предыдущих нормальных форм, наличие таковых может обнаружиться лишь в связующих отношениях, полученных из n-арной (например, тернарной) связи. Если связующее отношение, удовлетворяя 4НФ, содержит нетривиальные ЗС (которые могут определяться семантикой предметной области), оно должно содержать только те допустимые наборы данных (кортежи), которые соответствуют имеющимся ограничениям. Например, для сущностей УЧИТЕЛЬ, КЛАСС, ПРЕДМЕТ, состоящих в тернарной связи, будет получено связующее отношение НАГРУЗКА, отвечающее на вопрос «Кто из учителей какой предмет ведёт и в каких классах?»: очевидно, что при внесении данных туда должны попасть только те предметы, которые могут вестись в этих классах. Поэтому для того, чтобы обеспечить полный контроль целостности вносимых данных, возможно, потребуется декомпозиция такого отношения до 5НФ.

Из всего вышесказанного следует, что применение правил формирования реляционных отношений из er-диаграмм существенно облегчает процедуру нормализации отношений. Правила перехода позволяют избежать так называемого «интуитивного проектирования», а следовательно, избавиться от многих недостатков и проблем, с ним связанных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хомоненко А.Д. Базы данных [Текст]: учебник для ВУЗов./ А. Д. Хомоненко, В. М. Цыганков, М. Г. Мальцев. — СПб.: «Корона принт», 2006 — 736 с.
2. Зеленков Ю.А. Введение в базы данных [Электронный ресурс]./ URL: http://www.mstu.edu.ru/study/materials/zelenkov/toc.html
3. Кузнецов С.Д. Основы современных баз данных [Электронный ресурс]./ URL: http://citforum.ru/database/osbd/contents.shtml
4. Рюмшина О.А. Рекурсивная связь в моделируемой предметной области и особенности её реляционного представления [Текст] // Учёные записки Орловского государственного университета, Серия «Естественные, технические и медицинские науки», 2015. ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет», Орёл. — С. 79-81.
5. Рюмшина О.А. Об особенностях преобразования бинарных связей er-модели в реляционное представление [Текст] // Моделирование и наукоёмкие информационные технологии в технических и социально-экономических системах. Труды IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. — Новокузнецк, 2016. — С. 276-280.
6. Рюмшина О.А. Об особенностях интерпретации исключающей категориальной связи при моделировании предметной области [Текст] // Современные проблемы физико-математических наук. Труды II Международной научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математичских наук» — под общ. ред. Т.Н. Можаровой. — Орёл: 2016. — Стр. 190-195.
7. Рюмшина О.А. N-арные связи в er-модели: аспекты их выделения и преобразования в реляционное представление[Текст] // Избранные труды физико-математического факультета Орловского государственного университета им. И.С. Тургенева. — под общ. ред. Т.Н. Можаровой. — Орёл: 2017.

СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ТРЕХМЕРНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО ЗРЕНИЯ НА БАЗЕ ТЕРРИТОРИАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ ДАТЧИКОВ

М.М. Фролов
ФГБУ ВПО «ЮЗГУ»
М.И. Труфанов
ФГБУН Центр информационных технологий в проектировании РАН

В условиях развития мобильных подвижных систем и транспортных роботов актуальным является создание систем технического зрения для анализа объектов рабочей сцены в трехмерном пространстве, использующих визуальные данные с нескольких территориально распределенных оптико-электронных датчиков, объединенных в единую систему технического зрения.

Традиционные методы решения задачи трехмерного техничего зрения базируются на использовании конструктивно единой бинокулярной системы технического зрения, состоящей из двух предварительно откалиброванных оптико-электронных датчиков. Отличительной особенностью предложенной системы является размещение оптико-электронных датчиков в различных местах рабочей сцены.

Структурно-функциональная организация предложенной системы представлена на рисунке 1.

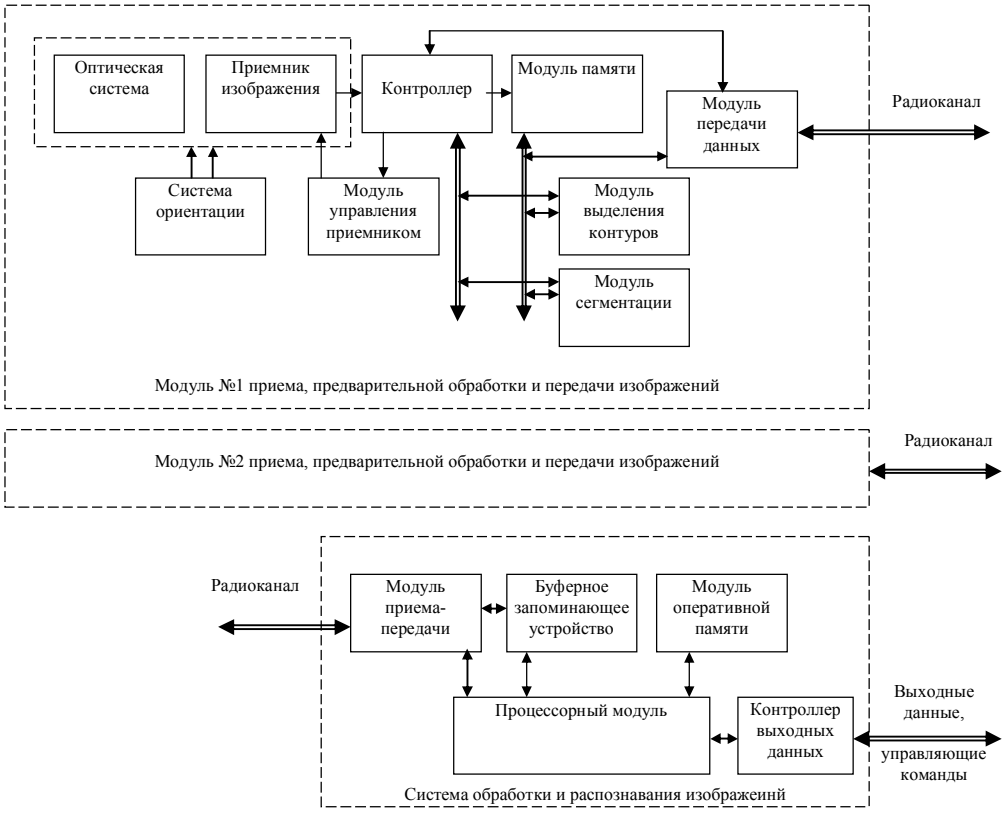


Рисунок 1 – Структурно-функциональная организация системы технического зрения

Система состоит из: двух модулей приема, предварительной обработки и передачи изображений, территориально размещенных в различных местах рабочей сцены и системы обработки и распознавания изображений. Каждый модуль приема, обработки и передачи изображений состоит из оптической системы, приемника изображений, модуля управления параметрами приемника изображения, модуля выделения контуров, модуля сегментации, контроллера, модуля памяти, модуля передачи данных по радиоканалу на частоте 2.4 ГГц и управляющего модуля с системой ориентации оптико-электронного датчика. Система обработки и распознавания изображений состоит из модуля приема-передачи, буферного запоминающего устройства, модудя оперативной памяти, процессорного модуля.

Система функционирует следующим образом. Изображение анализируемого объекта рабочей сцены, наблюдаемое с позиции первого оптико-элекронного датчика поступает в модуль приема, предварительной обработки и передачи изображений, которые обеспечивает подстройку яркости изображения, первичное выделение контуров объекта и передает найденные контура и исходное изображение через модуль передачи данных в систему обработки и распознавания изображений. Получая указанные данные система обьработки и распознавания изображений производит оценку дальности до объекта относительно первого оптико-электронного датчика и его примерное местоположение подает управляющую команду второму модуля приема, предварительной обработки и передачи изображений на последовательные ориентацию оптико-электронного датчика и поиска объекта, наблюдаемого с первого оптико-электронного датчика. При нахождении объекта обеспечивается предварительная обработка его изображения и передача данных об объекте и ориентации оптико-электронного датчика в систему обработки и ориентации изображений. Таким образом, в системе обработки и распознавания изображений на данном этапе хранятся два кадра изображения, полученные с известных позиций оптико-электронных датчиков, с одним и тем же наблюдаемым объектом. Процессорный модуль производит на основе анализа данных кадров сопоставление общих точек и фрагментов изобрьажений объекта и на основе решения системы уравнений определяет местоположение объекта в трехмерной системе координат рабочей сцены.

Предложенное решение обеспечивает на базе двух и более территориально-распределенных оптико-электронных датчиков реализовать вычисление параметров объектов и их местоположение в трехмерном пространстве. Практическая значимость предложенного подхода заключается в возможности построения системы для ориентации мобильных транспортных роботов и их интеллектуального управления в рамках задач автоматической транспортировки грузов на складах, в крупных цехах и других промышленных объектах.

ОЦЕНКА ТОНАЛЬНОСТИ ТЕКСТА НА ОСНОВЕ ТЕХНОЛОГИИ WORD2VEC

Г. А. Черных, к.ф.-м.н.
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: *german.ch@chgerman.com*

Приводится описание алгоритма оценки эмоциональной направленности текстов русского языка, построенного с использованием технологии анализа семантики естественных языков Word2Vec, источника тональных слов WordNet-Affect и морфологического словаря OpenCorpora. Оценка тональности производится по шести эмоциональным категориям. Алгоритм основан на выявлении слов, семантически близких к тональным. Применяется обучение без учителя.

Ключевые слова: Тональность текста, эмоциональная окраска текста, семантическая близость, родственный контекст, дистрибутивная семантика, Word2Vec, WordNet-Affect, OpenCorpora.

Введение

Задача автоматической оценки тональности или эмоциональной окрашенности текста в настоящее время определяет одно из быстроразвивающихся направлений исследований в области IT-технологий. Цели разработок носят преимущественно прикладной характер. К сферам применения относятся, в частности, маркетинг, политология, социология и медицина. В большинстве случаев достаточно оценки по бинарной шкале, либо выявления самого факта тональности текста без отнесения к эмоциональным категориям. Из существующих методов оценки ввиду своей доступности наибольшее распространение получили технологии, основанные на обучении с учителем, где требуется наличие предварительно размеченных текстовых баз.

Алгоритм, представляемый в настоящей работе, разработан с целью построения временных рядов, несущих информацию о динамике изменения критериев различных эмоциональных категорий по текстам большого объема. Результаты планируется использовать для получения размеченных текстовых баз для создании системы глубокого обучения с учителем, предназначенной для оценки тональности. Кроме того, параллельное исследование тональной динамики и соответствующих лингвистических данных само по себе представляет большой интерес.

Оценка тональности может быть основана на вычислении частоты следования в тексте слов или словосочетаний, имеющих явную тональную окраску. Однако такой способ не эффективен в виду малого количества словоформ, однозначно относимых к эмоциональным категориям. Технология Word2Vec [1, 2], по мнению ее разработчиков, позволяет оценивать семантическую близость слов на основе анализа контекста. Следовательно, появляется возможность определения эмоциональной окраски слов, не являющихся явно тональными, но семантически близких к последним. При этом одни и те же слова, употребляемые в различных контекстах, могут иметь разную тональность, и, таким образом, быть одновременно отнесены к нескольким эмоциональным категориям. Описываемый ниже алгоритм основан на оценке семантической близости слов текста к

словам, принадлежащим разным тональным категориям.

1. Описание алгоритма

В результате применения предлагаемого алгоритма к тексту определяются количественные критерии тональности слов (или сочетаний слов) для нескольких эмоциональных категорий. Таким образом, в распоряжении исследователя появляются временные ряды, отражающие динамику изменения тональности в тексте, которые могут быть подвергнуты дальнейшему анализу различными методами в зависимости от задачи.

Основные этапы вычисления критериев тональности:

- получение групп словоформ, имеющих однозначную тональность;
- формирование эмоционально окрашенных текстовых баз при помощи и в соответствии с имеющимися тональными группами;
- вычисление векторных представлений слов посредством Word2Vec по каждой сформированной текстовой базе в отдельности;
- определение критериев тональности слов по степени близости их векторных представлений к векторным представлениям тональных словоформ, принадлежащим тональным группам соответствующих эмоциональных категорий.

Технология Word2Vec разработана в корпорации Google, группой, возглавляемой Томашем Миколовым в 2013-м году с целью анализа семантики естественных языков. В процессе обучения инструмента Word2Vec строятся векторные представления слов с использованием относительно больших текстовых баз. Слова со сходным контекстом получают близкие координаты на n-мерной гиперсфере единичного радиуса и считаются семантически родственными. Таким образом, семантическое сходство слов проявляется в близости их векторных представлений в смысле косинусного расстояния. Существует бесплатное программное обеспечение с открытым исходным кодом как для формирования векторных представлений, так и для оценки семантической близости слов.

Для работы алгоритма оценки тональности необходимы группы слов, имеющих явно выраженную эмоциональную окраску. В качестве источника выбран открытый лексический ресурс WordNet-Affect [3, 4], созданный сотрудниками Лаборатории обработки естественного языка Технического Университета Молдовы на базе семантического лексикона английского языка WordNet. Ресурс представлен шестью эмоциональными категориями: радость, страх, гнев, печаль, отвращение, удивление.

В WordNet-Affect слова содержатся в виде лемм (нормализованных основных форм слов). С целью получения по леммам различных словоформ (морфоформ) использовался открытый корпус русского языка OpenCorpora [5], содержащий морфологический словарь, где на настоящий момент имеется 389415

лемм и 5100165 словоформ. Для работы с OpenCorpora использовалась ранее разработанная автором данной статьи библиотека функций, применявшаяся ранее для постобработки распознанного по речи текста с целью коррекции ошибок [6]. Необходимо отметить, что одна и та же словоформа может быть представителем различных морфологических единиц, то есть, имеет место неоднозначность. Но прямой необходимости в подавлении неоднозначности, в процессе которого решения принимаются на основе окружения слов, в текущей задаче нет, поскольку технология Word2Vec основана на анализе контекста. Таким образом, посредством использования морфологического словаря OpenCorpora и ресурса WordNet-Affect были сформированы группы тональных словоформ шести эмоциональных категорий.

Вышеупомянутые группы применены для обработки массива текстов большого объема (использован источник lib.ru [7]) с целью выделения и группировки в соответствии с принадлежностью к эмоциональным категориям предложений, имеющих в своем составе тональные словоформы. Получено шесть текстовых баз (по количеству категорий WordNet-Affect), претендующих на наличие разных типов тональности.

По каждой из баз построены векторные представления посредством технологии Word2Vec. При этом предлоги и устойчивые словосочетания, использующиеся в качестве предлогов, объединялись со следующими за ними по тексту словоформами. Шесть полученных таким образом векторных представлений и применялись для оценки эмоциональной окраски отдельных слов или словосочетаний посредством определения шести критериев тональности.

Метод вычисления количественного критерия эмоциональной окрашенности слова в зависимости от категории тональности состоит в следующем. С использованием векторных представлений находится n слов, ближайших к заданному слову, в смысле косинусного расстояния. Найденные слова нумеруются в порядке возрастания удаленности от исходного слова. Тогда величина критерия определяется выражением

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{k},$$

где $\alpha_k = 1$, если слово с номером k принадлежит соответствующей базе тональных словоформ, и $\alpha_k = 0$ в противном случае. Численное значение параметра n выбиралось, исходя из эмпирической оценки максимального количества словоформ, которые могут образовывать группы семантически близких слов. Результаты получены для $n = 20$. Слову, не имевшему векторного представления (не представленного в соответствующей Word2Vec-модели), присваивалось нулевое значение. Поскольку оценка тональности по одному слову малоэффективна, построенные числовые ряды сглаживались методом скользящего среднего, что, однако, можно считать частью процедуры постобработки результатов. Парамет-

ры Word2Vec устанавливались в соответствии с рекомендациями разработчиков.

2. Результаты

Доступных текстовых баз, которые бы позволили провести объективную количественную оценку эффективности предложенного алгоритма в настоящее время не существует. Однако, на основе уже проведенных экспериментов можно сделать вывод о достаточно хороших перспективах развития и применения алгоритма. Методика была проверена на художественных текстах и продемонстрировала свою способность к выделению тональных интервалов всех рассматриваемых эмоциональных категорий. На рис. 1 приведен пример временных рядов для трех превалирующих эмоций на интервале в 700 слов начала романа Ф. Достоевского «Преступление и наказание», сглаженных методом скользящего среднего с длиной интервала 50 слов. К факторам, свидетельствующим в пользу

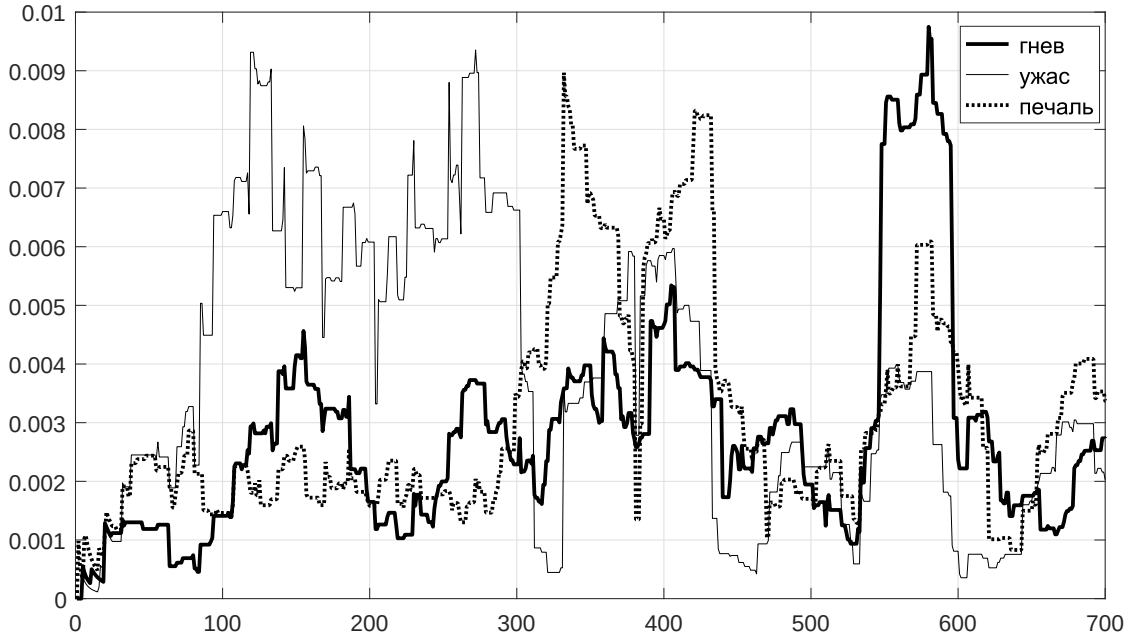


Рисунок 1 – Динамика изменения тональности

работоспособности алгоритма относится стабильность полученных данных при варьировании параметров и значительное превосходство качества результатов по сравнению с оценками тональности посредством использования лишь тональных словоформ, полученных из WordNet-Affect (без применения Word2Vec).

Заключение

Представленный в настоящей работе алгоритм, по мнению автора, является перспективным инструментом оценки тональности. Ближайшими направлениями развития и повышения точности метода являются следующие: работа с биграммами, как объектами анализа тональности; разрешение морфологической

неоднозначности словоформ; учет контекста для динамического отнесения слов к тональным категориям. Стратегическим задачами являются анализ тональной динамики текстов большого объема и создание качественной системы оценки тональности по нескольким эмоциональным категориям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mikolov T. and etc. Efficient Estimation of Word Representations in Vector Space. // Proceedings of Workshop at ICLR. — 2013.
2. Mikolov T. and etc. Distributed Representations of Words and Phrases and their Compositionality. // Proceedings of NIPS. — 2013.
3. Sokolova M. , Bobicev V. Classification of Emotion Words in Russian and Romanian Languages. // Proceedings of RANLP-2009 conference, Borovets, Bulgaria. — 2009. — pp. 415–419.
4. Лаборатория обработки естественного языка. // [Электронный ресурс]. URL: http://lilu.fcim.utm.md/resourcesRoRuWNA_ru.html (дата обращения: 21.10.2017).
5. Открытый корпус русского языка. // [Электронный ресурс]. URL: http://www.opencorpora.org (дата обращения: 21.10.2017).
6. Levin K. and etc. Automated closed captioning for Russian live broadcasting. // 16th Annual Conference of the International Speech Communication Association (Interspeech), Singapore. — 2014. — pp. 1438–1442.
7. Библиотека Максима Мошкова. // [Электронный ресурс]. URL: http://lib.ru (дата обращения: 21.10.2017).

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ О «БЕЗОКОННОМ» РАСПИСАНИИ К НАХОЖДЕНИЮ ПОТОКА В СЕТИ

А.З. Якубов, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»
e-mail: *yakubovaz@mail.ru*
С.Д. Нисрединов
ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»
e-mail: *yakubovaz@mail.ru*

Задачу о «безоконном» расписании сформулируем в виде задачи дефрагментации матрицы. Дана матрица из 7 столбцов и k строк, каждый столбец которой содержит перестановку из чисел 1, 2,...,n и множество повторяющихся нулей, а каждая строка содержит либо 3, либо 4, либо 7 ненулевых элементов (причем все ненулевые элементы в каждой строке попарно различны). Матрица считается дефрагментированной, если все ненулевые элементы в строке расположены слитно, друг за другом. Требуется выяснить вопрос существования дефрагментированной матрицы исходных размеров, удовлетворяющей следующим условиям:

1) в любой линии (т.е. в столбце или строке) искомой матрицы количество экземпляров каждого числа такое же, что и в соответствующей линии исходной матрицы;

2) в каждой строке искомой матрицы все ненулевые элементы располагаются слитно, друг за другом.

Исходную матрицу будем обозначать через M, дефрагментированный вариант матрицы M обозначим через M*. Множество строк исходной матрицы, содержащих в точности q ненулевых элементов, будем обозначать через $M^{(q)}$, q=3, 4, 7.

Решение этой задачи разбивается на три части:

1) выделение трансверсали (подмножества различных представителей каждого ненулевого элемента из каждой строки $M^{(4)}$ и $M^{(7)}$ по одному) в матрице M;
2) разбиение оставшегося множества 3-х элементных строк, образованных из $M^{(4)}$ и 6-ти элементных строк из $M^{(7)}$ после выделения трансверсали и $M^{(3)}$ на два подмножества с равным (по 3) количеством ненулевых представителей в каждом;
3) размещение первого полученного подмножества в первых трех столбцах, а второго подмножества в последних трёх столбцах матрицы M* таким образом, чтобы каждый столбец содержал перестановку 1,2,…n.

Для того чтобы связать вопрос существования трансверсали в исходной матрице и дефрагментируемость матрицы при выбранной трансверсали введем транспортную сеть T(M) с потоковыми ограничениями [a, b] на дугах, где a – нижнее, b – верхнее ограничение и построенную по матрице M. Введем следующие обозначения для транспортной сети: кроме источника S и стока T, вводятся n вершин $x_1, x_2,\ldots, x_n$, соотнесенные числам 1, 2, ... n; k вершин $y_1, y_2,\ldots, y_k$ соответствующие строкам матрицы M; $k-|M^{(3)}|$ вершин $z_1, z_2,\ldots, z_{k-|M(3)|}$ соответствующие строкам множеств $M^{(4)}$ и $M^{(7)}$.

Для наглядности приведем транспортную сеть T(M) на схеме (рисунок 1) (поток по дуге y_t ---T может быть либо насыщенным, либо равным 0):

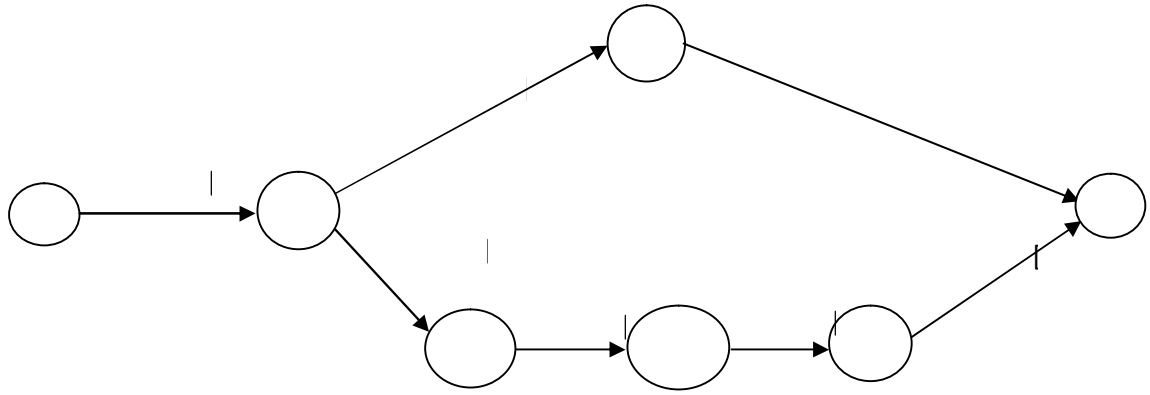


Рисунок 1 – Транспортная сеть T(M)

Отметим, что если допустимый поток в сети T(M) существует, то его величина равна 4*n и через каждую вершину z_i протекает в точности одна единица потока. Доказана следующая теорема.

Теорема. Дефрагментируемость матрицы M равносильно существованию допустимого потока в транспортной сети T(M).

Заметим, что аналогичная проблема для матрицы из 4 столбцов, где ищется разбиение 4-х и 2-х элементных множеств на двухэлементные подмножества была решена полиномиальными методами в [2] путем введения понятия «бездефектного» потока и построением эйлерова цикла в двудольном графе образованном соответствующими вершинами.

В нашем случае нахождение полиномиального алгоритма не представляется возможным, так как задача разбиения 6-ти и 3-х элементных множеств на два 3-х элементных подмножества с выполнением условий 1) и 2) является NP-полной [3]. Можно предложить алгоритм, являющийся вариантом полного перебора. Для построения потока нам необходимо пометить дуги (y_t,T) метками 0 или 3, означающими величину потока. Сумма квадратов натуральных чисел дающих в сумме 3 меньше чем 9, а равенство возможно, только если одно из чисел равно 3 , а оставшееся равно 0. Следовательно, если мы будем искать допустимый поток в сети при условии $\sum_{i=1}^{2m} P^2(y_i, T) = 9m$, где $P(y_i, T)$ – поток по дуге (y_t,T), а $2m = |M^{(q)}|$ мы найдем искомый поток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубов А.З. Моделирование безоконного расписания потоковыми методами. Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Материалы XII Международной научной конференции. Владикавказский научный центр Российской академии наук, Южный математический институт, Северо-Осетинский государственный университет имени К.Л. Хет
2. агурова, Южный федеральный университет. 2015. С. 239-240..
3. Магомедов А.М. Связность матрицы перестановок в случае четырех столбцов. Деп. в ВИНИТИ, 8700-В-87.

4. Магомедов А.М. Об одной специальной рёберной 2-раскраске // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Информатика. Телекоммуникации. Управление. Раздел: Математическое моделирование: методы, алгоритмы, технологии. 2011. No 2(120). С. 156–159.
5. Оре О. Теория графов. – М.: Мир, 1990. – 336 с.

Математические методы в экономике

УДК 51-77

АЛГОРИТМЫ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ НА ОСНОВЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ДЕМПСТЕРА-ШЕЙФЕРА

А.А. Евсеев, аспирант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *andrylast@yandex.ru*
В.Г. Шуметов, д.э.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный аграрный университет имени Н.В. Парахина»
e-mail: *shumetov@list.ru*

Рассмотрены основные положения метода ДШ/МАИ, представляющего собой интеграцию метода МАИ и теории свидетельств Демпстера-Шейфера, который позволяет осуществлять поддержку принятия решений по многим критериям в условиях неполноты, неточности и неопределенности экспертной информации. Приведен пример оценки риска принятия решения в рамках инновационного проекта.

Ключевые слова: риск, неопределенность, метод анализа иерархий, теория свидетельств Демстера-Шейфера, инновационный проект.

Для решения многокритериальных задач принятия решений на основе экспертных оценок применение метода анализа иерархий (МАИ), разработанного специалистом в области исследования операций Т. Саати, позволяет получить адекватные результаты за приемлемые сроки. Суть метода заключается в разложении сложной задачи на простые составляющие компоненты и последующей обработке суждений лица, принимающего решение (ЛПР). В рамках метода производятся последовательные парные сравнения предпочтения одного элемента перед другим, основываясь на субъективных суждениях экспертов по шкале относительной важности.

К недостаткам МАИ следует отнести необходимость построения значительного числа матриц парных сравнений и отсутствие возможности учета неопределенности в суждениях. Кроме того, при поиске оптимального решения ЛПР не всегда имеет возможность выполнить парные сравнения между всеми альтернативами решений, что является необходимым условием для применения МАИ и практически всех его модификаций. Также, при решении многокритериальных задач принятия решений информация об альтернативах решений зачастую бывает неполной, поскольку во многом имеют место временные рамки, неточности экспертных знаний, специфические особенности отдельных критериев и т.д.

Учитывая перечисленные недостатки, исследователи-аналитики разносторонне модифицируют МАИ, что дает возможность его широкого применения в различных предметных сферах. К числу таких модификаций следует отнести метод ДШ/МАИ, совмещающий инструментарий МАИ и математический аппарат теории свидетельств Демпстера-Шейфера. Подобная модификация позволяет осуществлять решение многокритериальных задач принятия решений в условиях неполноты, неточности и риска инновационных проектов.

Многокритериальные задачи принятия решений в условиях неопределенности и неполноты информации многими экспертами решаются с применением двухшаговой процедуры. Первый шаг подразумевает применение эвристических правил или механизма обучения для заполнения отсутствующих значений матрицы, позволяя сформировать многокритериальную задачу с полной информацией, после чего, на втором шаге, используются стандартные методы решения таких задач. Главным отличием метода ДШ/МАИ от такой двухшаговой процедуры является возможность решать многокритериальные задачи принятия решений непосредственно, используя имеющиеся неполные экспертные оценки альтернатив по критериям.

Обозначим общие понятия теории свидетельств Демпстера-Шейфера, необходимые для формализации метода ДШ/МАИ.

Полное множество взаимоисключающих событий названо фреймом различения Θ. Возможными гипотезами в ТДШ являются все возможные подмножества Θ, их количество равно $\left|2^{\Theta}\right|$.

Базовым распределением доверия называется функция $m: 2^{\Theta} \to [0,1]$, удовлетворяющая двум аксиомам: доверие к пустому множеству равно нулю $(m(\varnothing) = 0)$; сумма доверий для всех подмножеств фрейма Θ равна единице: $\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1$.

Величина $m(A)$ показывает долю или порцию доверия к гипотезе $A \subseteq \Theta$. Любое подмножество A фрейма Θ, для которого выполняется условие $m(A) > 0$, называется фокальным элементом.

Полным доверием называется функция $Bel: 2^{\Theta} \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим аксиомам: доверие к пустому множеству равно нулю: $Bel(\varnothing) = 0$; доверие к фрейму Θ равно единице: $Bel(\Theta) = 1$; $Bel(A) + Bel(\neg A) \le 1$.

Величина $Bel(A)$ вычисляется как сумма доверий по всем подмножествам $A: Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$ и показывает полное доверие к $A \subseteq \Theta$.

Символ «$\neg A$» в определении функции полного доверия означает «не A», а величина доверия $Bel(\neg A)$ показывает уровень сомнения в гипотезе A и вычисляется по формуле: $Bel(\neg A) = \sum_{\substack{B \subseteq \Theta \\ A \cap B = \varnothing}} m(B)$

Правдоподобием называется функция $Pls: 2^{\Theta} \to [0,1]$, где $Pls(A)$ отражает величину максимального значения доверия, которое, в зависимости от возможности, может быть назначено $A \subseteq \Theta : Pls(A) = 1 - Bel(\neg A)$.

Функции $Bel(A)$ и $Pls(A)$ интерпретируются как нижние и верхние вероятности появления гипотезы А в том смысле, что предполагается существование некоторой истинной вероятности $p(A)$ появления гипотезы A, такой что $Bel(A) \le p(A) \le Pls(A)$. Интервал $[Bel(A), Pls(A)]$ определяется, как доверительный интервал.

Следующие два неравенства: $Bel(A) + Bel(\neg A) \le 1$, $Pls(A) + Pls(\neg A) \ge 1$, $A \subseteq \Theta$ показывают главное отличие теорию Демпстера-Шейфера от традиционного байесовского подхода, в котором вероятность $p(A)$ события A удовлетворяет условию $p(A) + p(\neg A) = 1$. В случае, когда каждое подмножество A состоит только из одного элемента, получим $Bel(A) = Pls(A) = m(A)$, следовательно, в этом случае выполняется $Bel(A) + Bel(\neg A) = 1$.

В случае если требуется агрегирование независимых доверий касательно одинаковых гипотез, применяется правило Демпстера, в соответствии с которым значение агрегированных доверий к гипотезам рассчитываются путем вычисления ортогональных сумм $m_1 \oplus m_2(A) = \frac{1}{K} \sum_{X \cap Y = A} m_1(X) m_2(Y)$, где $K = \sum_{X \cap Y \neq \varnothing} m_1(X) m_2(Y) = 1 - \sum_{X \cap Y = \varnothing} m_1(X) m_2(Y)$ – нормировочная константа, которая интерпретируется как мера конфликта между доверями m_1 и m_2; X, Y – фокальные элементы доверий m_1 и m_2 соответственно.

Применение свойства ассоциативности правила Демпстера $(m_1 \oplus m_2) \oplus m_3 = m_1 \oplus (m_2 \oplus m_3)$ позволяет произвести агрегирование трех и более независимых доверий.

Опишем процесс постановки задачи определения доверительных интервалов для множества альтернатив решений и последующее ранжирование альтернатив по множеству критериев в рамках метода ДШ/МАИ.

Пусть дано:

$A = \{A_i \mid i = 1,...,n\}$ – множество альтернатив решений;

$C = \{C_j \mid j = 1,...,q\}$ – множество критериев решений.

Требуется:

1) найти значения доверий к альтернативам;
2) определить границы доверительных интервалов для альтернатив;
3) проранжировать альтернативы.

В отличие от МАИ, в котором парные сравнения осуществляются между отдельными альтернативами, в методе ДШ/МАИ производится поочередное сравнение всех групп альтернатив решений с фреймом различения для каждого из критериев. Эксперт-аналитик определяет степень «благоприятного знания» для каждой из групп альтернатив, причем количество групп альтернатив отражает количество имеющихся у эксперта знаний по данному критерию.

Соответственно, ко всем отнесенным к одной группе альтернативам эксперт выражает равную степень доверия, не имея достаточных знаний для их различения. Для агрегирования весов альтернатив по множеству критериев в методе ДШ/МАИ используется правило Демпстера, в то время как в МАИ применяются дистрибутивный и идеальный методы.

Применение метода ДШ/МАИ для поиска лучшего выбора предполагает выполнение следующих действий:

1) представить задачу многокритериального принятия решения в виде иерархической структуры;
2) определить предпочтения экспертов, выделив наиболее предпочтительные подмножества альтернатив из всего множества альтернатив, согласно заданным критериям;
3) рассчитать вектор приоритета критериев;
4) определить степень превосходства выделенных групп альтернатив;
5) вычислить базовые вероятности соответствующих групп альтернатив;
6) произвести базовых вероятностей выделенных подгрупп по всем критериям с помощью правила Демпстера;
7) вычислить функции доверия и правдоподобия и построить интервалы доверия по результирующим базовым вероятностям выделенных групп;
8) произвести ранжирование групп альтернатив.

Рассмотрим пример поиска лучшего выбора. Предположим, ЛПР необходимо произвести выбор инновационного проекта среди имеющихся шести альтернатив по пяти критериям: стоимость проекта (K_1), рентабельность инвестиций (K_2), срок окупаемости бюджетных средств (K_3), доля участия государства в инвестиционном проекте (K_4), риски инвестиционного проекта (K_5).

Согласно условию задачи, имеется множество альтернатив $\Theta = \{A,B,C,D,E,F\}$ и множество критериев $K = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\}$. В соответствии с заданным критерием $K_j \in K$, выделяем из множества критериев K группу альтернатив $A_i \subseteq \Theta$ из множества альтернатив Θ. Для критерия K_1: $\{B,D,F\}$, $\{A,C\}$, $\{E\}$, Θ; для критерия K_2: $\{A,F\}$, $\{B,E\}$, $\{D\}$, $\{C\}$, Θ; для критерия K_3: $\{D\}$, $\{B,C\}$, $\{A,E,F\}$, Θ; для критерия K_4: $\{A,B,E\}$, $\{C,D,F\}$, Θ; для критерия K_5: $\{A\}$, $\{B,F\}$, $\{C,D\}$, $\{E\}$, Θ.

Предположим, веса критериев равны 0,279, 0,201, 0,164, 0,082, 0,274 соответственно. Определяем степени предпочтения выбранных групп альтернатив по каждому из критериев в заданной шкале отношений (1÷9), где крайние значения шкалы 1 и 9 означают соответственно «очень слабое доверие» и «абсолютное доверие». Для критерия K_1: $\{B,D,F\}$=7, $\{A,C\}$=2, $\{E\}$=5, Θ; для критерия K_2: $\{A,F\}$=4, $\{B,E\}$=3, $\{D\}$=9, $\{C\}$=1, Θ; для критерия K_3: $\{D\}$=2, $\{B,C\}$=3, $\{A,E,F\}$=6, Θ; для критерия K_4: $\{A,B,E\}$=4, $\{C,D,F\}$=6, Θ; для критерия K_5: $\{A\}$=4, $\{B,F\}$=7, $\{C,D\}$=3, $\{E\}$=6, Θ.

Основные массы вероятности выделенных подмножеств исходного множества альтернатив, по каждому из критериев, вычисляются следующим обра-

зом: $m(A_k)_j = \dfrac{b_k}{\sum\limits_{i=1}^{d} b_i + \sqrt{d}}$; $m(\Theta)_j = \dfrac{\sqrt{d}}{\sum\limits_{i=1}^{d} b_i + \sqrt{d}}$, где $A_k \subseteq \Theta$ – выделенная k-ая группа альтернатив по j-му критерию; d – общее число выделенных групп альтернатив по j-му критерию. Коэффициент b определяется из выражения $b_k = x_k \cdot \omega_j$, где x_k – степень предпочтения выделенной k-той группы альтернатив по j-му критерию; ω_j – вес (приоритет) j-го критерия, $j = \overline{1,4}$.

Определим для каждой группы альтернатив основные массы вероятности выделенных подмножеств исходного множеств альтернатив Θ. Для критерия K_1: $m_1(\{B,D,F\}) = 0{,}346$, $m_1(\{A,C\}) = 0{,}099$, $m_1(\{E\}) = 0{,}247$, $m_1(\Theta) = 0{,}307$; для критерия K_2: $m_2(\{A,F\}) = 0{,}148$, $m_2(\{B,E\}) = 0{,}111$, $m_2(\{D\}) = 0{,}334$, $m_2(\{C\}) = 0{,}037$, $m_2(\Theta) = 0{,}369$; для критерия K_3: $m_3(\{D\}) = 0{,}093$, $m_3(\{B,C\}) = 0{,}139$, $m_3(\{A,E,F\}) = 0{,}278$, $m_3(\Theta) = 0{,}490$; для критерия K_4: $m_4(\{A,B,E\}) = 0{,}147$, $m_4(\{C,D,F\}) = 0{,}220$, $m_4(\Theta) = 0{,}633$; для критерия K_5: $m_5(\{A\}) = 0{,}147$, $m_5(\{B,F\}) = 0{,}256$, $m_5(\{C,D\}) = 0{,}110$, $m_5(\{E\}) = 0{,}220$, $m_5(\Theta) = 0{,}267$.

Произведем агрегирование значений масс вероятностей, используя правило Демпстера. Комбинированные базовые вероятности будут иметь вид: $\{A\} = 0{,}064$; $\{B\} = 0{,}065$; $\{C\} = 0{,}044$; $\{D\} = 0{,}104$; $\{E\} = 0{,}075$; $\{AC\} = 0{,}015$; $\{AF\} = 0{,}023$; $\{BE\} = 0{,}017$; $\{BF\} = 0{,}040$; $\{CD\} = 0{,}017$; $\{ABE\} = 0{,}023$; $\{BDF\} = 0{,}054$; $\{CDF\} = 0{,}034$; $\{\Theta\} = 0{,}321$.

Используя значения комбинированных базовых вероятностей, рассчитаем функции доверия $Bel(\{A_i\})$ и правдоподобия $Pl(\{A_i\})$ для каждой альтернативы. Получим следующие значения: $Bel(\{A\})$=0,064, $Pl(\{A\})$=0,287; $Bel(\{B\})$ =0,065, $Pl(\{B\})$=0,288; $Bel(C)$=0,044, $Pl(\{C\})$=0,268; $Bel(\{D\})$=0,104, $Pl(\{D\})$ =0,328; $Bel(\{E\})$=0,103, $Pl(\{E\})$=0,327; $Bel(F)$=0,075, $Pl(\{F\})$=0,328.

Чтобы установить степень превосходства исходных альтернатив, используем коэффициент пессимизма: $\gamma = bel(\{A_k\}) + (1-\gamma) \cdot pl(\{A_k\})$, где $\gamma \in [0,1]$ – коэффициент пессимизма; $\{A_k\}$ – k-ая подгруппа альтернатив, $k = \overline{1,n}$; n - число выделенных подмножеств альтернатив.

В итоге получаем следующую ранжировку альтернатив: $D \succ E \succ F \succ B \succ A \succ C$.

Задачей последующих исследований является разработка информационной технологии, поддерживающей данные алгоритмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганцева Е.А., Каладзе В.А., Поляков А.М. Формирование экспертного вывода на основе теории свидетельств // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2015. – Том 11. – №1. – С. 42-46.
2. Евсеев А.А. ИТ сравнительной оценки инновационных проектов в условиях неопределенности исходной информации // Новая экономика: институты, ин-

струменты, тренды. Материалы международ. н.-практ. конф. 16-18 апреля 2017 года. – Орёл: ПФ «Картуш». – 2017. – С. 313-316.
3. Коваленко И.И., Швец А.В. Метод экспертного оценивания сценариев. – Николаев: Изд-во ЧГУ им. Петра Могилы. – 2012. – 156 с.
4. Уткин Л.В., Симанова Н.В. Обобщение метода анализа иерархий для принятия решений при неточных сравнениях с использованием теории Демпстера-Шейфера // Известия ОрелГТУ. Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии: информационные системы и технологии. – 2007. – № 4. – С. 223-227.

УДК 330.4

МОДЕЛИ ИНТЕРНЕТ ТОРГОВЛИ НА БАЗЕ УРАВНЕНИЙ ФЕРМЕНТАТИВНОЙ КИНЕТИКИ

В.Н. Никишов, к.ф.-м.н., доц.
ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
e-mail: *tsh-sea05@ya.ru*
В.О. Левченко
ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
e-mail: *vadlev83@yandex.ru*

Ключевые слова: математическая модель, электронная коммерция, ферментативная кинетика, интернет-магазин.

Существует определенная аналогия между процессами электронной коммерции и процессами ферментативной кинетики и каталической химии. Подобно ферментам, выполняющим роль высокоэффективных катализаторов биологических процессов, – аналогичную роль выполняют и интернет-каналы электронной коммерции, они значительно ускоряют процесс выбора и оплаты товара.

Пусть $c(t)$ – численное значение товара во всех корзинах – SE, а $p(t)$ – численное значение оплаченного товара P всеми интернет пользователями, тогда изменение $p(t)$ во времени пропорционально количеству товара в корзинах $c(t)$ с коэффициентом пропорциональности k_2 и может быть описано уравнением следующего вида:

$$\frac{dp}{dt} = k_2 c(t).$$

В дальнейшем будем считать, что в начальный момент времени все интернет-каналы E заняты и численное значение E обозначим как $e(t)$. Количество товара выставляемого на продажу S в момент времени t равно $s(t)$ [3].

Как было отмечено выше основными уравнениями данной модели электронной коммерции являются уравнения для $s(t)$, $c(t)$, $e(t)$, $p(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dc}{dt} &= k_1 e(t)\cdot s(t) - (k_{-1} + k_2)c(t);\\
\frac{ds}{dt} &= -k_1 e(t)\cdot s(t) + k_{-1}c(t);\\
\frac{de}{dt} &= -k_1 e(t)\cdot s(t) + (k_{-1} + k_2)c(t);\\
\frac{dp}{dt} &= k_2 c(t).
\end{aligned} \qquad (1)$$

С начальными условиями: $s(0) = s_0; c(0) = 0$.

Правые части системы уравнений (1) являются нелинейными функциями, решение в аналитическом виде не существует, но возможно численное решение системы, например, методом Рунге-Кутта 4-го порядка.

В системе MATCHAD существует встроенная функция RKFIXED(y,x1,x2,kol,D), реализующая метод Рунге-Кутта 4-го порядка.

Здесь y – вектор начальных условий размерности n, где n число дифференциальных уравнений. Для системы (1) n=4.

X1, X2 – граничные точки интервала, на котором ищется решение дифференциальных уравнений. В данном случае x1=0 и x2=T, где T – время анализа, например, T=30 (дней). Начальные условия, заданные в векторе y – это значение решения в точке x1.

Kol – число точек (не считая начальной точки), в которых ищется приближенное (численное) решение. При помощи этого параметра определяется число строк (1+KOL) в матрице Z, возвращаемой функцией RKFIXED.

D(x,y) – функция, возвращающая значение в виде вектора из n элементов, содержащих первые производные неизвестных функций. В данном случае это просто правые части системы (1) [4].

Наиболее трудная часть решения системы нелинейных дифференциальных уравнений состоит в определении функции D(x,y), которая содержит вектор первых производных от неизвестных функций. В случае системы (1) таких трудностей не возникает, так как правые части уже содержат необходимый вектор первых производных от неизвестных функций $c(t)$ и $s(t)$.

Положим вектор $x = \begin{pmatrix} c(t) \\ s(t) \\ e(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$.

Тогда D(x,y) запишется в виде:

$$D(t,x) := \begin{bmatrix} kp1 \cdot x_2 \cdot x_1 - (km1 + k2) \cdot x_0 \\ -kp1 \cdot x_2 \cdot x_1 + (km1) \cdot x_0 \\ -kp1 \cdot x_2 \cdot x_1 + (km1 + k2) \cdot x_0 \\ k2 \cdot x_0 \end{bmatrix}.$$

Вызываем функцию RKFIXED:

$$Z := rkfixed(x,0,30,300,D).$$

Получим решения, содержащие в векторе Z. Первый столбец – это точки, в которых ищется приближенное решение, а остальные столбцы содержат значения приближенных решений $c(t)$, $s(t)$, $e(t)$, $p(t)$ в этих точках.

В целях иллюстрации метода примем следующие значения параметров системы $k_1 = 0.01$; $k_{-1} = 0.1$; $k_2 = 0.2$.

Пусть количество доступных каналов в начальный момент времени равно $e(0) = 10$, задано нулевое начальное состояние корзин $c(0) = 0$ и исходное состояние склада $s(0) = 100$.

Проведение численного решения дает следующие значения искомых величин $c(t)$, $s(t)$, $e(t)$, $p(t)$ на интервале 1 месяц=30 дней.

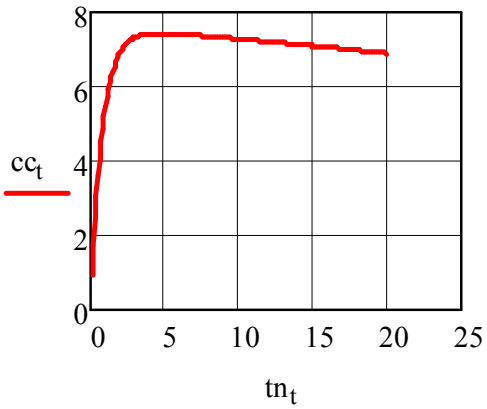


Рисунок 1 – Состояние корзин $c(t)$ в течение месяца

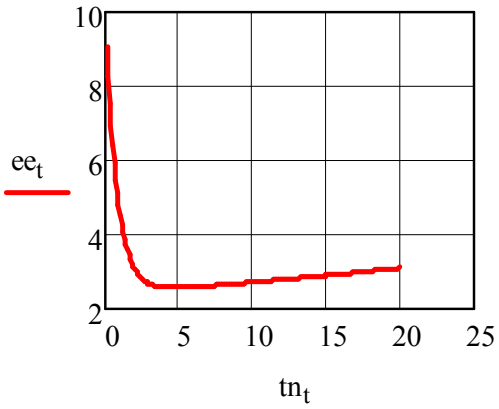


Рисунок 2 – Наличие числа свободных каналов $e(t)$ в течение месяца

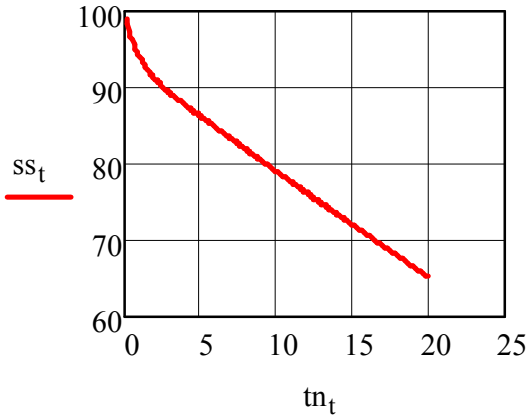


Рисунок 3 – Наличие товара на складе $s(t)$ в течение месяца

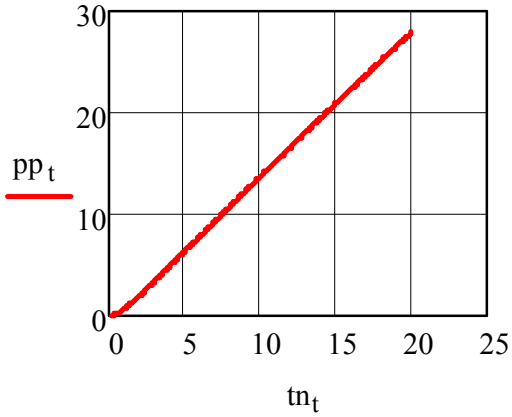


Рисунок 4 – Количество продаж $p(t)$ в течение месяца

Основные недостатки данной модели заключаются в следующем:

1) Эффективность работы интернет-магазина в современных условиях не определяется наличием свободных каналов $e(t)$, так как технические возможности сайтов позволяют обслуживать одновременно большое количество посетителей. Наоборот, работа более эффективно при большем количестве занятых каналов.
2) Товарные возможности сайта также практически неограниченны, то есть, $s(0)$ фактически можно считать равным бесконечности.
3) Рассматриваемая одно продуктовая модель товарного склада интернет-магазина крайне ограничена, так как при существующем сегодня широком товарном наборе это слишком ограничительное условие.
4) Нет возможности оценить параметры k_1, k_{-1}, k_2, так как они задаются извне и здесь нет той возможности в виде закона действующих масс, которая существует в ферментативной кинетике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мюррей Дж. Математическая биология. Том 1. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 776с.
2. J.D. Murray. Asymptotic Analysis. Springer – Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, second edition, 1984.
3. Левченко В.О., Никишов В.Н. Математическая модель электронной коммерции // Математика, экономика и управление. 2015. Т. 1. № 3. С. 80-83.
4. Кудрявцев Е.М. Mathcad 11: Полное руководство по русской версии / Е.М. Кудрявцев. – М.: ДМК-Пресс, 2009. – 593 с.

УДК 378.14.015.62; 378.147.88

МОДЕЛЬ ПРОФЕССИОНАЛЬНО ЗНАЧИМЫХ КАЧЕСТВ БУДУЩИХ ЭКОНОМИСТОВ

С.В. Мишина

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»

e-mail: *skornienko2009@mail.ru*

Формирование профессионально значимых качеств будущего экономиста в современных исследованиях (Г.В. Петрук [8], А.Н. Картежникова [5], О.А. Кудряшов [6], О.В. Жиронкина [3] и др.) рассматривается как достаточно актуальная задача профессиональной подготовки, реализуемой в контексте установок Европейской рамки квалификации EQF [2], Национальной рамки квалификаций Российской Федерации [7], Профессионального стандарта «Бухгалтер» [10], а также ФГОС ВО по направлению подготовки 38.03.01 Экономика [11].

Профессионально значимые качества будущего бакалавра являются частью структуры профессиональной компетентности, соотносятся с личностным уровнем продуктивного отражения профессиональной деятельности. Вместе с тем, как показало исследование ФГОС ВО, в описании целевых ориентаций и соответственно результатов профессиональной подготовки, что выражено в понятии компетенции, профессионально значимые качества будущего бакалавра экономики представлены косвенно и не в полной мере соотносятся с требованиями соответствующего профессионального стандарта.

Моделирование в образовательной деятельности представляет собой метод проектирования идеального состояния объекта, а также поиск оптимального способа приведения текущего состояния объекта к требованиям идеального состояния.

В контексте решения проблемы формирования профессионально значимых качеств будущих экономистов моделирование образовательной деятельности обладает специфическими признаками, которые детерминированы особенностями данной целевой установки. Во-первых, профессионально значимые качества в контексте требований ФГОС ВО, разрабатываемых на их основе образовательными организациями высшего образования ООП не являются нормативными, хотя контекстно являются основой профессиональной компетентности будущего экономиста. Во-вторых, поскольку они описывают личностный уровень профессиональной деятельности индивида, не являются инструментальными новообразованиями, формирование которых может носить локальный характер, их развитие требует системности в проектируемой образовательной деятельности, длительности, а также учета того, что результат данной деятельности в разрезе обучения студентов по программе бакалавриата будет носить незавершенный характер, поскольку формирование личности профессионала является непрерывным процессом, ключевую роль в котором играет именно профессиональная деятельность.

Эти специфические факторы обусловливают цель, методологию проектируемой модели, а также ключевой механизм ее реализации.

Так, целью данной модели уместно рассматривать следующую установку: формирование профессионально значимых качеств будущего экономиста в структуре его профессиональной компетентности.

Организационно-педагогические условия реализации данной модели возможно определить так: во-первых, системный характер деятельности по формированию профессионально значимых качеств будущего экономиста, что предполагает задействование потенциала образовательной и воспитательной деятельности, аудиторной и внеаудиторной работы студентов, а также практик; во-вторых, консолидация усилий образовательной организации высшего образования и социальных партнеров, возможных работодателей, в достижении цели обеспечения качественного конкурентоспособного образования; в-третьих, возможность стратегического и оперативного управления деятельностью по формированию профессионально значимых качеств будущих экономистов.

Комплекс данных организационно-педагогических условий коррелирует с методологией проектируемой модели, основу которой составляют корпус

подходов (системного, средового, контекстного, компетентностного, деятельностного, личностно-ориентированного, социально-ориентированного, практико-ориентированного) и принципов (системности, непрерывности, интеграции узкопрофессионального (экономического), гуманитарного и фундаментального образования, обучения в деятельности, привлечения социального, личностного и профессионального контекстов, единства формального, неформального и информального образования).

Реализация данных условий и методологии в системе профессиональной подготовке будущих экономистов сопряжено с поиском ключевого механизма, в качестве которого был определен скрытый куррикулум.

Поясним данный выбор, а также авторскую позицию в данном вопросе.

Понятие скрытого куррикулума активно разрабатывается в европейской философии и социологии образования (Б. Бернстайн, П. Бурдье, Ф. Джексон, Дж. Дуглас, П. Фрейре, М. Эппла, М. Янг). Дословно под скрытым куррикулумом подразумевается скрытая, неявная программа, учебный план. Скрытый куррикулум является каналом распространения образовательных воздействий, выходящих за рамки образовательных стандартов, учебных планов. В качестве предмета распространения выступают ценности, социальные установки, традиции, определенные инновации и пр., которые определяют прежде всего личностное развитие, специфику протекания процессов социализации и профессиональной идентификации обучающихся.

Часто в трудах зарубежных философов и социологов образования скрытый куррикулум маркирован отрицательной смысловой нагрузкой, поскольку выступает механизмом воздействия на содержание личностного развития без «уведомления» обучающихся, тем самым предполагается нарушение свобод личности.

В отечественной философско-образовательной мысли представлена позиция, прежде всего в работах А.А. Полонникова [9], В.Г. Калашникова [4], согласно которой скрытый куррикулум представляет собой метафору, объединяющую инновационную деятельность, выходящую за рамки предписанных образовательных воздействий: «С учетом каналов распространения информации о «hidden curriculum», позволяет нам рассматривать данную категорию как продуктивную метафору, кросскультурная трансмиссия которой породи- ла многочисленные и качественно отличные образовательные инновации, выходящие в ряде случаев за рамки собственно педагогического производства. В этом качестве она не является простым добавлением к педагогическому лексикону, частным лингвистическим новообразованием, а выступает в роли специфической номинации образовательной реальности, иначе, чем это было принято раньше, организующей педагогический порядок» [9, с. 168].

В современной образовательной теории и практике присутствует и другая точка зрения на природу и функционал скрытого куррикулума. Скрытый куррикулум – это вполне технологическое и методическое решение задач, выходящих за рамки формальных государственных стандартов, планов, программ. В качестве примера можно привести воспитание лидерских качеств у американских школьников и студентов посредством скрытого куррикулума в системе

образования США (А.П. Гулов [1]). Фактически, в данном случае скрытый куррикулум представляет собой учебный план, который содержит указание на реализацию тех или иных аспектов формируемого новообразования в структуре учебных предметов, содержание которых определено традиционным учебным планом. Особенность данной версии скрытого куррикулума выступает четкая детализация и системность: в рамках какого предмета, при изучении какой темы должен быть озвучен аспект формируемого новообразования.

Не отрицая значимость и научную обоснованность философско-образовательной и социологической трактовки скрытого куррикулума, более перспективным в технологическом и методическом плане применительно к проблеме настоящего исследования мы рассматриваем вторую трактовку. Поскольку система формирования профессионально значимых качеств будущего экономиста является сверхнормативной задачей (ФГОС ВО предполагает частичную реализацию данной задачи профессиональной подготовки), решение которой требует системности и длительного характера образовательного воздействия, наиболее эффективным механизмом в настоящей работе рассматривается именно скрытый куррикулум в его технологическом и методическом значении.

Реализация скрытого куррикулума по формированию профессионально значимых качеств будущих экономистов является прежде всего преобразованием образовательной деятельности.

На наш взгляд, для легитимации данного механизма, а также с целью осуществления оперативного и стратегического управления данной деятельностью необходимо реализовать данную идею в виде проекта на уровне образовательной организации высшего образования либо на уровне ее структурного подразделения.

Для управления реализацией скрытого куррикулума с позиции целевой аудитории обучающихся эффективным будет внедрение инструмента, совмещающего элементы портфолио и индивидуального образовательного маршрута. Также данный инструмент позволит проводить мониторинг реализации задач по формированию профессионально значимых качеств будущих экономистов.

Построение скрытого куррикулума формирования профессионально значимых качеств будущих экономистов базируется на структуре данных качеств и включает в себя определение места в профессиональной подготовке, то есть соотнесение с формами образовательной деятельности, содержания и технологии.

В исследовании автором было установлено, что структура профессионально значимых качеств будущих экономистов включает в себя качества-отношения; индивидуально-личностные качества; специальные способности и качества; социально-личностные качества.

Качества-отношения представляют собой профессиональную мотивацию, профессиональные ценности, гражданскую позицию студента – будущего экономиста. Формирование данных качеств-отношений эффективно в форме аудиторной и самостоятельной работы в процессе изучения таких дисциплин, как социология, основы социального государства, история, право, философия и пр.,

а также в процессе организации воспитательной (кураторские часы) и научно-исследовательской (организация участия в профессиональных конкурсах, олимпиадах) деятельности студентов. Общая установка выбора технологического инструментария предполагает артикулирование активных и интерактивных технологий.

Индивидуально-личностные качества суммируют способности, соотносимые с профессиональной пригодностью индивида для экономической профессиональной деятельности. В формировании данных качеств ведущее значение играет воспитательная деятельность, реализуемая в форме кураторских часов посредством применения тренинговых технологий, функционирования студенческих объединений просоциальной направленности посредством проведения различных акций. Ключевым принципом отбора технологического инструментария для формирования данных качеств выступает принцип субъект-субъектного взаимодействия с привлечением социального и личностного контекстов.

Специальные способности и качества обусловлены особенностями профессиональной деятельности экономиста. Их формирование возможно исключительно за счет аудиторной и самостоятельной работы по таким дисциплинам, как экономика труда, ценообразование, экономика фирмы, бухгалтерский финансовый учет, налоги и налогообложение. Также огромным потенциалом в формировании данных качеств обладает научно-исследовательская деятельность студентов и практики (в последнем случае требуется согласование действий с базами прохождения практик). Основными технологиями в реализации данной задачи выступают имитационные, проектные технологии, технологии обучения в действии.

Социально-личностные качества детерминируют основные сферы профессионального взаимодействия будущего экономиста. Их формирование отчасти возможно в форме аудиторной работы по таким дисциплинам, как основы принятия управленческих решений, организационное поведение. Возможно формировать эти качества на кураторских часах посредством применения тренинговых технологий, организации специальных семинаров. Однако большим потенциалом в данном отношении обладает именно организация практик, что требует проработки ключевых позиций с социальными партнерами – будущими работодателями.

В проектируемой модели оценка результативности предполагает соотнесение сформированных профессионально значимых качеств по критериям нормативности и сверхнормативности. Нормативные качества обеспечивают профессиональную деятельность будущего экономиста на достаточном уровне, который соотносится с предписываемыми ему должностными обязанностями. Сверхнормативные качества способствуют успешной и эффективной профессиональной деятельности.

Следует отметить, что конечным результатом проектируемой модели является не столько сформированные профессионально значимые качества будущего экономиста, но прежде всего сформированная профессиональная компетентность обучающихся, позволяющая бакалаврам экономики быть конкурен-

тоспособными, востребованными на современном рынке труда. Данная модель обладает значимостью для образовательной организации высшего образования либо его структурного подразделения, поскольку на уровне образовательной деятельности внедрение данной модели переводит образовательную организацию в режим инновационного развития. Также применение скрытого куррикулума в качестве инструментальной основы данной модели обладает эвристическим потенциалом в плане диссеминации данного актуального опыта образовательной деятельности и переноса наиболее удачных практик в область подготовки будущих профессионалов других сфер, отличных от экономической.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулов А.П. Нравственное воспитание школьников в системе образования США [Электронный ресурс] / А.П. Гулов // Интерактивный научно-методический журнал «Сообщество учителей английского языка». - 2014. - № 5. – Режим доступа: http://tea4er.ru/home/volume5/3554-2014-03-31-16-01-05.
2. Европейская рамка квалификации EQF (в переводе национального офиса программы TEMPUS) [Электронный ресурс] / Национальный офис TEMPUS в Российской Федерации. – 2016. – Режим доступа: http://www.tempus-russia.ru
3. Жиронкина О.В. Формирование профессионально значимых качеств будущих экономистов в процессе изучения общеобразовательных дисциплин [Текст]: автореферат дис. ... кандидата педагогических наук: 13.00.08 / Ольга Валерьевна Жиронкина. – Кемерово, 2003. – 18 с.
4. Калашников В.Г. Явные и скрытые контексты образования в образовательной среде [Текст] / В.Г. Калашников // Психология. Журнал Высшей школы экономики. – 2015. – Т. 12. – № 1. – С. 90–104.
5. Картежникова А.Н. Контекстный подход к обучению математике как средство развития профессионально значимых качеств будущих экономистов-менеджеров [Текст]: автореферат дис. ... кандидата педагогических наук: 13.00.02 / Анна Николаевна Картежникова. – Омск, 2005. – 22 с.
6. Кудряшов О.А. Формирование профессионально значимых качеств информатика-экономиста [Текст]: автореферат дис. ... кандидата педагогических наук: 13.00.08 / Олег Александрович Кудряшов. – Ставрополь, 2004. – 21 с.
7. Национальная рамка квалификаций Российской Федерации [Текст]: Рекомендации / О.Ф. Батрова, В.И. Блинов, И.А. Волошина [и др.] – М.: Федеральный институт развития образования, 2008. – 14 с.
8. Петрук Г.В. Формирование профессионально важных качеств экономистов-менеджеров в системе самостоятельной работы студентов [Текст]: автореферат дис. ... кандидата педагогических наук: 13.00.08 / Галина Владимировна Петрук. – Владивосток, 2012. – 23 с.
9. Полонников А.А. «Hidden curriculum» и продуктивность образования [Текст] / А.А. Полонников // Вестник Томского государственного университета. – 2012. – № 6. – С. 165-169.

10. Профессиональный стандарт «Бухгалтер» [Электронный ресурс]: утвержден приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от «22» декабря 2014 г. №1061н. – Режим доступа:http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140795/#dst100009
11. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата) [Электронный ресурс]: утвержден приказом Министерства образования и науки РФ от 12 ноября 2015 г. № 1327. – Режим доступа:http://fgosvo.ru/uploadfiles/fgosvob/380301.pdf

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДЛЯ МОДЕЛИ РИЧАРДСОНА

Е.Н. Руренко, к.ф.-м.н., доц.
Вятский государственный университет
e-mail: *rurenko@bk.ru*

Рассматривается задача оптимального управления для нелинейной модели Ричардсона гонки вооружений. Изучена структура оптимального управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, нелинейная управляемая система дифференциальных уравнений, принцип максимума Понтрягина, точки переключения.

Для модели Ричардсона гонки вооружений $[1]$ с управлением и нестационарными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= ux_2 - b_1(t)x_1 \\ \dot{x_2} &= a(t)x_1 - b_2(t)x_2\ ,\ t \in [0,T] \\ x_1(0) &= x_{10} > 0, x_2(0) = x_{20} > 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где управление $u = u(t)$ – измеримая функция, подчиненная ограничению

$$0 < p_0 \le u \le p_1$$

$a(t), b_1(t), b_2(t)$ – положительные гладкие функции, рассматривается задача минимизации терминального функционала

$$\phi\big(\bar{x}(T)\big) = \alpha x_1(T) + \beta\ x_2(T),$$

где $|\alpha|+|\beta|>0$, $T>0$.

Ставится вопрос об изучении структуры оптимального управления в рассматриваемой задаче.

Сделаем в системе (1) замену переменных

$$x_1 = \xi_1 e^{-\int_0^t b_1(s)ds}$$
$$x_2 = \xi_2 e^{-\int_0^t b_2(s)ds}.$$

Получим систему

$$\begin{aligned} \dot{\xi_1} &= u\xi_2 e^{-v(t)} \\ \dot{\xi_2} &= a(t)\xi_1 e^{v(t)},\ t \in [0,T] \\ \xi_1(0) &= x_{10}, \xi_2(0) = x_{20}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где

$$v(t) = \int_0^t (b_2\,(\mathrm{s}) - b_1(s))ds. \qquad (3)$$

Минимизируемый функционал в новых переменных будет иметь вид

$$\phi_1\left(\bar{\xi}(T)\right) = \alpha_1\xi_1(T) + \beta_1\,\xi_2(T),$$

где $\alpha_1 = \alpha e^{-\int_0^T b_1(s)ds}$, $\beta_1 = \beta e^{-\int_0^T b_2(s)ds}$.

Функция Понтрягина для системы (2) имеет вид (см. [2]):

$$H = \psi_1 u\xi_2 e^{-v(t)} + \psi_2 a(t)\xi_1 e^{v(t)}, \qquad (4)$$

при этом сопряженные функции ψ_1(t), ψ_2(t) удовлетворяют сопряженной системе

$$\dot{\psi}_1 = -a(t)\psi_2 e^{v(t)}$$
$$\dot{\psi}_2 = -u(t)\psi_1 e^{-v(t)}. \qquad (5)$$

Условия трансверсальности имеют вид

$$\psi_1(T) = -\alpha_1, \psi_2(T) = -\beta_1. \qquad (6)$$

Решение системы (2) записывается в виде [3, стр.78]

$$\begin{pmatrix}\xi_1(t)\\ \xi_2(t)\end{pmatrix} = \Omega_0^t \begin{pmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{pmatrix}, \qquad (7)$$

где Ω_0^t –матрицант для системы (2), то есть является суммой матричного ряда:

$$\Omega_0^t = E + \int_0^t R(t_1)dt_1 + \int_0^t R(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} R(t_2)dt_2 + \cdots \qquad (8)$$

в котором (см. (2))

$$R(t) = \begin{pmatrix}0 & u(t)e^{-v(t)}\\ a(t)e^{v(t)} & 0\end{pmatrix},$$

u(t) – произвольное допустимое управление на [0, T].

Так как в $R(t)$ ненулевые элементы положительны, то элементы матрицанта положительны, поскольку уже первые два слагаемых в (8) дают матрицу с положительными элементами. Начальные условия в (1) положительные. Поэтому из (7) будем иметь

$$\xi_2(t) > 0.$$

В силу принципа максимума Л.С.Понтрягина [2] из (4) следует, что оптимальное управление $u(t) = p_1$, если $\psi_1(t) > 0$ и $u(t) = p_0$, если $\psi_1(t) < 0$.

Изучим вопрос об оценке количества нулей переменной $\psi_1(t)$.

Отметим, что функция $\psi_1(t)$ не может тождественно равняться нулю на $[0, T]$, это связано с тем, что, если $\psi_1(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, то и $\psi_2(t) \equiv 0$ на $[0, T]$ (см. (5)). А это невозможно (см. (6)) , так как $|\alpha|+|\beta|>0$.

Продифференцируем первое уравнение в системе (5)

$$\ddot{\psi}_1 = -a'(t)\psi_2 e^{v(t)} - a(t)\dot{\psi}_2 e^{v(t)} - a(t)\psi_2 e^{v(t)} v'(t).$$

Подставим сюда $\dot{\psi}_2$ из второго уравнения системы (5) и ψ_2 из первого уравнения системы (5), получим дифференциальное уравнение второго порядка для переменной ψ_1

$$\ddot{\psi}_1 - \left(v'(t) + \frac{a'(t)}{a(t)}\right)\dot{\psi}_1 - u(t)a(t)\psi_1 = 0\,, \qquad (9)$$

где из (3)

$$v'(t) = b_2(t) - b_1(t).$$

Следующая теорема обобщает один результат из [4, стр.164,165], доказательство ее ведется по той же схеме.

Теорема. Если в уравнении

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (10)$$

функция $p(x)$ непрерывна на $[a,b]$, функция $q(x)$ измеримая, ограниченная по модулю на $[a,b]$, причем

$$q(x) < 0 \quad \text{при } a \le x \le b, \qquad (11)$$

то нетривиальное решение $y(x)$ уравнения (10) является неколеблющимся на отрезке $[a,b]$, то есть имеет не более одного нуля.

Доказательство теоремы. Покажем, что каковы бы ни было нетривиальное решение $y(x)$ уравнения (10) и точка τ из $[a,b]$, произведение

$$g(x) = e^{\int_\tau^x p(s)ds} y(x)y'(x)$$

строго возрастает на $[a,b]$.

В самом деле,

$$\frac{dg(x)}{dx} = e^{\int_\tau^x p(s)ds}(p(x)y(x)y'(\text{x}) + y'^2(x) + y(x)y''(x)),$$

откуда в силу (10) имеем

$$\frac{dg(x)}{dx} = e^{\int_\tau^x p(s)ds}\,(y'^2(x) - q(x)y^2\,(x)). \qquad (12)$$

Так как y(x) и y'(x) не могут одновременно обращаться в нуль, в силу (11) и (12) имеем . $g'(x) > 0$. В силу того, что абсолютно непрерывная функция строго возрастает, если ее производная почти везде положительна на $[a,b]$, функция $g(x)$ строго возрастает на $[a,b]$.

Теперь, если в некоторой точке τ из $[a,b]$ имеем $y(\tau) = 0$, а потому $y(\tau)y'(\tau) = 0$, то для любого $\chi > \tau$ выполняется неравенство $y(\chi)y'(\chi) > 0$, а потому $y(\chi) \neq 0$. Отсюда следует утверждение теоремы.

В силу доказанной теоремы, нетривиальное решение $\psi_1(t)$ уравнения (9) имеет не более одного корня на [0, T].

Из вышеизложенного получаем, что оптимальное кусочно-непрерывное управление в рассматриваемой задаче принимает только свои граничные значения (то есть либо p_0 , либо p_1) и имеет не более одной точки переключения.

Приношу благодарность М. С. Никольскому за постановку задачи и советы по оформлению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1.Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов. - М.: Логос. - 2001. - 296 с.
2.Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления.- Минск : изд-во Наука и техника.- 1974. - 272 с.
3.Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости.- М.: Изд-во Моск. ун-та. - 1998.- 480 с.
4.Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Изд-во ИЛ.- 1953.- Т.1.- 363 с.

МОНИТОРИНГ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЗДРАВООХРАНЕНИЯ ОРЛОВСКОЙ ОБЛАСТИ В РАЗРЕЗЕ СИНТЕТИЧЕСКИХ КАТЕГОРИЙ «РЕСУРСЫ-РЕЗУЛЬТАТ»[1]

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и администрации Орловской области в рамках научного проекта «Математическое обеспечение мониторинга эффективности деятельности региональных систем здравоохранения и обязательного медицинского страхования» №16-12-57005

Т.Н. Русских, к.э.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *trusskih@rambler.ru*
С.П. Строев, к.э.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *stroewsp@mail.ru*

Эффективное управление системой здравоохранения предусматривает проведение сравнительного анализа эффективности функционирования ее региональных подсистем. В статье описывается методика построения типологии подсистем здравоохранения по уровню эффективности их функционирования с использованием нечетких кластерных процедур. Приводятся эмпирические результаты мониторинга эффективности на примере системы здравоохранения Орловской области.

Ключевые слова: система здравоохранения, мониторинг, эффективность, синтетическая категория, типология.

В современных условиях развития системы здравоохранения достаточно актуальной является задача мониторинга эффективности функционирования ее региональных подсистем. Комплексный мониторинг эффективности деятельности региональной системы здравоохранения, на наш взгляд, должен проводиться на различных уровнях ее организации, в частности, в разрезе субъектов РФ, в разрезе муниципальных образований субъекта.

В отличие от многих подходов авторов к оценке эффективности деятельности системы здравоохранения, базирующихся на соотношении результата и затрат ресурсов, в основу оценки эффективности положим трехкомпонентный подход: ресурсы – процесс – результат. Таким образом, «ресурсы системы здравоохранения», «процесс оказания медицинских услуг», «результат предоставления медицинских услуг» рассматриваются в качестве базовых синтетических категорий эффективности функционирования систем здравоохранения. Для каждой синтетической категории эффективности необходимо задать перечень частных критериев эффективности.

Предлагаемая методика мониторинга эффективности функционирования подсистем здравоохранения включает реализацию следующих этапов [2, 3, 4]:

1. Разработка иерархической структуры синтетических категорий, частных критериев для оценки эффективности деятельности региональных подсистем здравоохранения.

2. Первичная статистическая обработка данных. С целью содержательной интерпретации результатов типологизации в рассмотрение наряду с эталонным

объектом [1, 3] были введены два дополнительных объекта кластеризации: «объект-лидер» и «объект-аутсайдер» с наибольшими, наименьшими значениями показателей в зависимости от их направленности влияния на эффективность (унифицированными единичными и нулевыми значениями соответственно).

3. Графический анализ структуры данных с использованием методов понижения размерности.

4. Реализация метода нечетких *k*-средних по совокупности статистических показателей частных критериев. Входными параметрами для кластерных алгоритмов являются число кластеров, метрика и критерий останова. Число кластеров и их центроиды следует задавать, основываясь на результатах графического анализа структуры данных.

5. Анализ качества построенных нечетких разбиений, выбор оптимальной типологии. В рамках развития авторской методики построения типологий субъектов по уровню эффективности функционирования подсистем здравоохранения [1, 3] в работах [2, 4] для определения оптимального числа типологических групп был предложен расчет индекса Хие-Бени [5].

6. Формирование рейтинга субъектов по уровню эффективности деятельности подсистем здравоохранения.

7. Построение карты (матрицы) общей эффективности деятельности подсистем здравоохранения.

В работах [1, 3] авторами настоящей статьи проведен мониторинг эффективности подсистем здравоохранения на уровне муниципальных районов Орловской области. В последующих исследованиях [2, 4] в рамках развития предложенной методики построены типологии субъектов ЦФО по группам частных критериев синтетических категорий эффективности, а также проведен анализ эффективности функционирования системы здравоохранения Орловской области. С целью обеспечения единого подхода и сравнительного анализа эмпирических результатов мониторинга эффективности функционирования подсистем здравоохранения на уровне субъектов РФ, на уровне муниципальных образований Орловской области, согласно предложенной методике были построены типологии муниципальных районов Орловской области по данным 2015 года в разрезе синтетических категорий «ресурсы-результат». В качестве частных критериев синтетической категории «ресурсы» рассматривались показатели ресурсной обеспеченности подсистем (обеспеченность врачами, обеспеченность средним медицинским персоналом, обеспеченность участковыми терапевтами, педиатрами на 10000 населения, обеспеченность населения койками различного профиля на 10000 населения и др.), синтетической категории «результат» – показатели заболеваемости населения субъектов кластеризации (заболеваемость населения, детского населения, заболеваемость злокачественными новообразованиями, болезнями системы кровообращения и др.).

Графический анализ пространства признаков, анализ функционала качества нечеткого разбиения субъектов на кластеры, расчет индекса Хие-Бени позволили определить оптимальное число кластеров. В системе компьютерной математики Maple 15 авторами программно реализована процедура построения разбиения объектов по методу нечетких *k*-средних, а также расчет индекса Хие-

Бени. Для нечеткой кластеризации субъектов ЦФО в разрезе синтетических категорий «ресурсы», «результат» оптимальное число кластеров оказалось равным 3, для муниципальных районов Орловской области оптимальное число кластеров по группе частных критериев «ресурсы» и «результат» составило 4 и 5 соответственно.

На основе результатов нечеткой кластеризации были построены рейтинги подсистем здравоохранения на различных уровнях [2, 4]. В данной работе опустим подробное изложение результатов нечеткой кластеризации и построения рейтинга, более подробно остановимся на рассмотрении итоговых результатов мониторинга – построении карты эффективности.

Проводить итоговый анализ эффективности будем с точки зрения положения рейтинга субъекта по отношению к рейтингу эталонного субъекта. По каждой синтетической категории совокупность субъектов была разбита на две группы [2]:

1. Типологическая группа (1) (далее ТГ(1)) – уровень не ниже среднего (рейтинги субъектов выше рейтинга эталонного субъекта);
2. Типологическая группа (2) (далее ТГ(2)) – уровень ниже среднего (рейтинги субъектов выше рейтинга эталонного субъекта).

В таблице 1 приведено разбиение субъектов ЦФО на типологические группы в разрезе компонент «ресурсы - результат». С учетом введенных выше обозначений типологическая группа (i, j) соответствует группе, в которой субъект по ресурсной обеспеченности относится к группе i, по уровню процесса оказания медицинских услуг – к группе j.

Таблица 1 – Матрица разбиения субъектов ЦФО на типологические группы в разрезе синтетических категорий «ресурсы – результат»

Ресурсы	Результат	
	ТГ(1) – уровень заболеваемости ниже среднего	ТГ (2) – уровень заболеваемости не ниже среднего
ТГ (1) – уровень обеспеченности не ниже среднего	ТГ(1,1) – области: Белгородская, Брянская, Рязанская, Курская, Смоленская	ТГ(1,2) – области: Ивановская, Ярославская, Костромская, Орловская
ТГ (2) – уровень обеспеченности ниже среднего	ТГ(2,1) – области: Воронежская, Калужская, Липецкая, Тамбовская, Московская, Тульская	ТГ(2,2) – области: Владимирская, Тверская

Согласно построенным типологическим группам в разрезе синтетических категорий «ресурсы-результат», приведенным в таблице 1, заключаем, что Орловская область характеризуется низким уровнем медико-социальной эффективности. При уровне ресурсной обеспеченности выше среднего (рейтинг Орловской области в списке областей ЦФО равен 5 [2]) Орловская область имеет высокие показатели заболеваемости. Это свидетельствует о неэффективности использования, в первую очередь, трудовых ресурсов. Для более детального анализа эффективности функционирования региональной подсистемы следует, как отмечалось выше, провести мониторинг эффективности в разрезе муници-

пальных районов Орловской области, и выявить районы-лидеры и районы-аутсайдеры.

В таблице 2 приведено построенное разбиение муниципальных районов Орловской области.

Таблица 2 – Матрица разбиения муниципальных районов Орловской области на типологические группы в разрезе синтетических категорий «ресурсы – результат»

Ресурсы	Результат	
	ТГ(1) – уровень заболеваемости ниже среднего	ТГ (2) – уровень заболеваемости не ниже среднего
ТГ (1) – уровень обеспеченности не ниже среднего	ТГ(1,1) – районы: Новодеревеньковский, Болховский, Дмитровский, Должанский, Колпнянский	ТГ(1,2) – районы: Ливенский, Хотынецкий, Шаблыкинский, Знаменский, Сосковский, Залегощенский, Мценский
ТГ (2) – уровень обеспеченности ниже среднего	ТГ(2,1) – районы: Корсаковский, Малоархангельский, Кромской, Свердловский, Покровский, Краснозоренский, Верховский, Орловский	ТГ(2,2) – районы: Троснянский, Новосильский, Урицкий, Глазуновский

Согласно результатам кластеризации Ливенский, Хотынецкий, Шаблыкинский, Знаменский, Сосковский, Залегощенский, Мценский районы имеют высокие уровни заболеваемости несмотря на среднюю и высокую обеспеченность медицинскими кадрами. В то же время одной из причин высоких показателей заболеваемости населения в Троснянском, Новосильском, Урицком, Глазуновском районах может являться низкая обеспеченность медицинскими кадрами. О высокой эффективности использования трудовых ресурсов (при низком уровне обеспеченности медицинскими кадрами) свидетельствует низкий и ниже среднего уровни заболеваемости в таких районах, как Корсаковский, Малоархангельский, Кромской, Свердловский, Покровский, Краснозоренский, Верховский, Орловский. В дальнейшем авторами планируется провести анализ медико-социальной эффективности в разрезе отдельных классов болезней.

Полученные эмпирические результаты мониторинга эффективности могут способствовать разработке рекомендаций по выбору оптимальной траектории развития системы здравоохранения как на уровне муниципальных районов, так и в разрезе субъектов РФ, с целью повышения эффективности функционирования системы здравоохранения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Русских Т.Н. Оценка эффективности деятельности подсистем здравоохранения муниципальных образований субъекта РФ / Т.Н. Русских, В.И. Тинякова, С.П. Строев // Экономика устойчивого развития. – 2017. – № 1 (29). – С. 241-246.
2. Русских Т.Н. Типологизация субъектов РФ по уровню эффективности функционирования систем здравоохранения с использованием нечетких кластерных процедур / Т.Н. Русских, В.И. Тинякова, С.П. Строев // Учет и статистика. – 2017. – № 3. – С. 43-52.

3. Русских Т.Н. Построение рейтинга муниципальных районов Орловской области по показателям деятельности медицинских учреждений / Русских Т.Н., Строев С.П. // Современные проблемы физико-математических наук: материалы II междунар. науч.-практ. конф. / под общ. ред. Т.Н. Можаровой. – Орел: ОГУ, 2016. – С.230-237.
4. Russkikh T. Mathematical support for efficiency monitoring of the care subsystem at the regional level / T. Russkikh, V. Tinyakova, S. Stroev // 25th International Scientific Conference on Economic and Social Development - XXVII International Social Congress (ISC-2017), 30th-31st October, 2017. – Pp. 679-686.
5. Xie X.L., Beni G.A. Validity measure for fuzzy clustering. IEEE Trans. PAMI, 1991. – no. 3(8). – Pp. 841–846.

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ПРИ НЕЙРОННО-СЕТЕВОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

И.И. Чернобровкина, к.пед.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *iichernobrovkina@yandex.ru*
Ю.В. Чернобровкина, аспирант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *nikeli2009@yandex.ru*

В данной статье пойдет речь о применении парадигмы ГА + НС (генетические алгоритмы + нейронные сети) для решения задачи прогнозирования на примере прогнозирования величины прожиточного минимума.

Ключевые слова: генетические алгоритмы, нейронные сети, прогнозирование, корреляция.

В настоящее время для решения задач, возникающих в различных сферах деятельности человека, часто применятся технологии искусственного интеллекта, например генетические алгоритмы, нейронные сети.

Генетический алгоритм – это один из методов оптимизации. Схематично его работу можно представить блок-схемой, приведенной на рисунке 1.

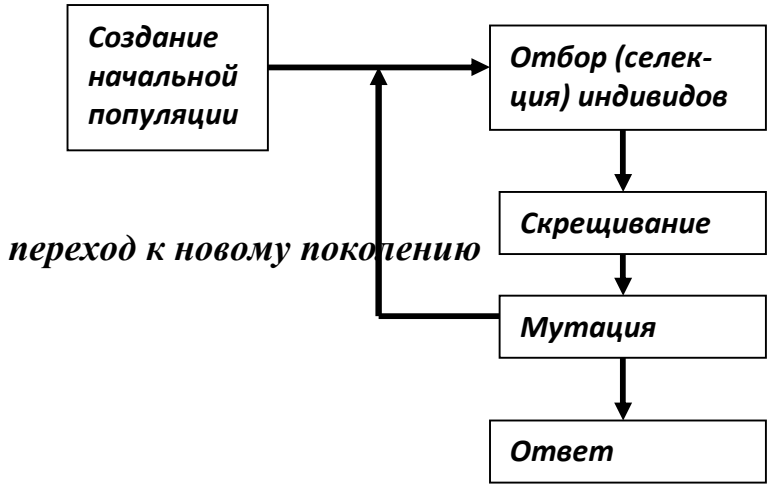


Рисунок 1 – Блок-схема работы генетического алгоритма

Согласно приведенной блок-схеме работа генетического алгоритма происходит следующим образом:

1) создание начальной популяции, т.е. некоторого набора решений задачи. Как правило, это делается случайным образом. При этом генерируется исходная популяция входных тестовых данных;
2) отбор, т.е. выбор двух индивидов, которые будут скрещены для производства следующего поколения. Отбор строки определяется ее жизнеспособностью по сравнению с другими строками популяции;
3) скрещивание. Скрещивание может происходить любым из возможных способов, описанных в литературе [1,2];
4) мутация. Используется для борьбы с постоянной потерей генных комбинаций в генетических алгоритмах [1].

После прохождения всех вышеперечисленных шагов старая популяция частично или полностью уничтожается и переходят к рассмотрению следующего поколения. Процессы отбора, скрещивания и мутации повторяются уже для этой популяции и т. д. Таким образом, в каждом последующем поколении возникают новые решения исходной задачи.

Генетические алгоритмы возможно использовать для обучения нейронных сетей. В данном случае целевой функции задачи оптимизации будет являться суммарная среднеквадратическая ошибка нейронной сети. Популяции будут состоять из значений весовых коэффициентов нейронной сети. Алгоритм будет состоять в следующем:

1) Создание начальной популяции: особь популяции представляется соответствующими весами из N особей $[W_1(0),...,W_i(0),...,W_N(0)]$. Вычисляется индекс пригодности (Fitness Index) при данной наборе весовых коэфициентов и оценивается качество прогнозирования: $FI(W_i) = C - E(W_i) \rightarrow \max$, где C – константа.
2) Отбор: происходит с использованием вероятностного механизма. Обозначим P_i - вероятность выбора i-ой особи, тогда $P_i = \dfrac{FI(W_i(0))}{\sum_{i=1}^{N} FI(W_i(0))}$
3) При скрещивании возможно различных механизмов [1,2].
4) Вероятность мутации обычно выбирается небольшая – в пределах 1-5%.

Для решения задачи построения прогнозной нейронно-сетевой модели прогнозирования величины прожиточного минимума были использованы данные комитета государственной статистики г. Орла.

В работе [3] были отобраны факторы, влияющие на величину прожиточного минимума. Отбор произведен с применением корреляционного анализа с использованием пакет STATISTICA, установленный уровень значимости – 0,05.

Модель имеет вид:

$$Y = F(X_1, X_2, \ldots, X_6),$$

где Y – размер среднего прожиточного минимума на душу населения; X_1 – производство потребительских товаров; X_2 – расходы консолидированного бюджета области; X_3 – оборот розничной торговли; X_4 – численность официально за-

регистрированных в службе занятости безработных; X_5 – номинальная среднемесячная зарплата одного работника; X_6 – денежные доходы, использованные на покупку товаров и оплату услуг.

Для построения модели использована программа NeuroSolutions. Наилучшей моделью многослойного персептрона, обученного классическим образом с применением алгоритма обратного распространения ошибки явилась модель со следующими параметрами: 1 скрытый слой, передаточная функция – сигмоид. Результаты тестирования сети представлены на рисунке 2.

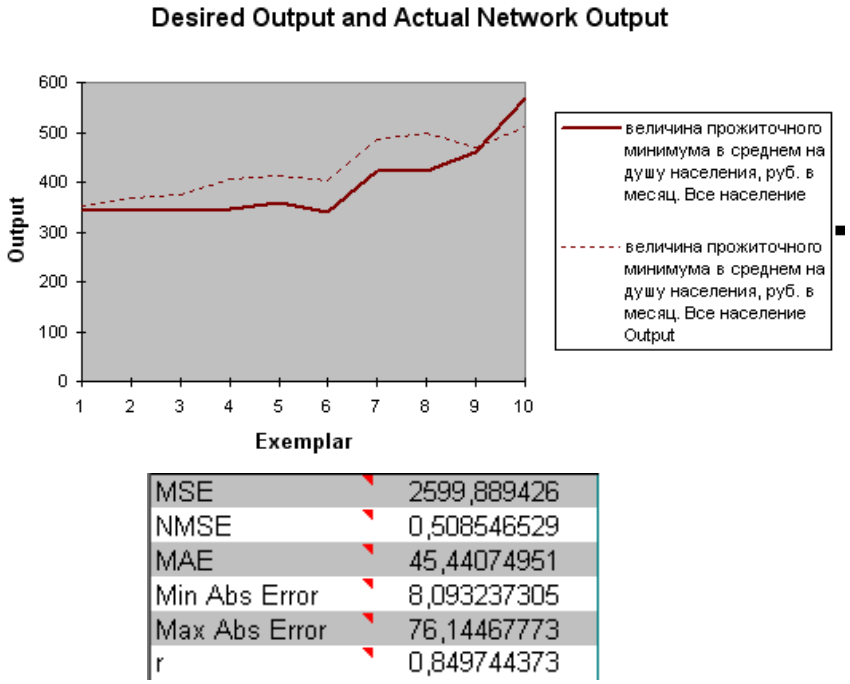


Рисунок 2 – Результаты тестирования сети, обученной с применением алгоритма обратного распространения ошибки

Ошибка модели составила 11,7%.

Наилучшей моделью многослойного персептрона, обученного с применением генетического, явилась модель с двумя скрытых слоя. Результаты тестирования сети представлены на рисунке 3.

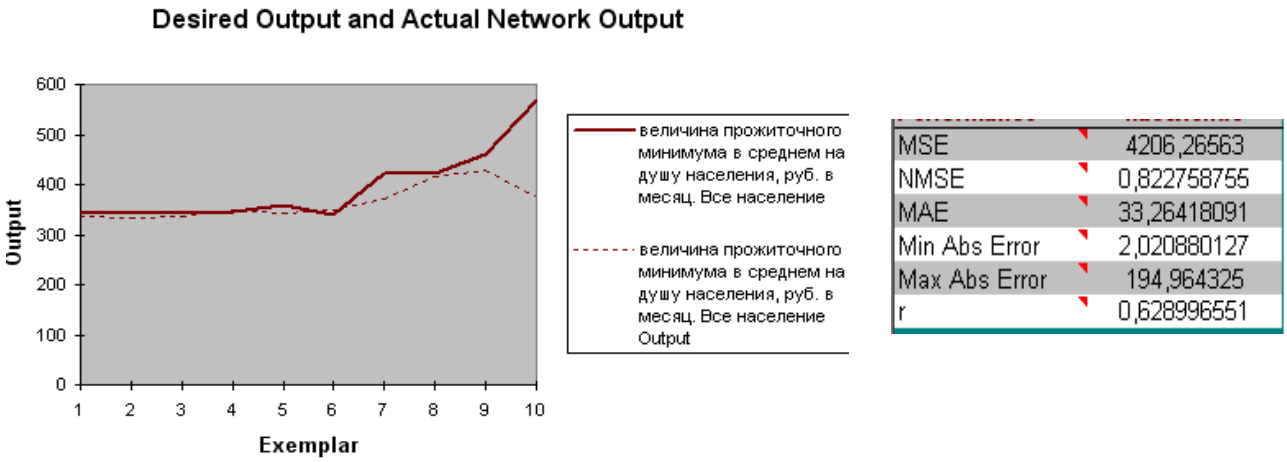


Рисунок 3 – Результаты тестирования сети, обученной с применением генетического алгоритма

Ошибка модели составила 6,7%.

Отметим, что в результате эксперимента строилось большое количество моделей и примерно в 80% случаев обучение с помощью генетического алгоритма давало результат лучший, чем при обучении с применением алгоритма обратного распространения ошибки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладков Л.А. Генетические алгоритмы [Электронный ресурс] : учеб. / Л.А. Гладков, В.В. Курейчик, В.М. Курейчик. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2010. — 368 с. Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2163
2. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Пер.с польск. И. Д. Рудинского. – М.: Горячая линия-Телеком. – 2013. – 384 с.
3. Чернобровкина И.И. Преимущества обучения нейронных сетей с помощью генетических алгоритмов // Вестник науки. Сборник научных работ преподавателей, аспирантов и студентов физико-математического факультета. – 2010. – Выпуск 9. – Орел: ГОУ ВПО «ОГУ». – С.172 – 176.

Методика преподавания математики, информатики, физики и астрономии в школе и вузе

УДК 51.092

ИВАН МАТВЕЕВИЧ ВИНОГРАДОВ И АНДРЕЙ ПЕТРОВИЧ КИСЕЛЕВ У ИСТОКОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Авдеев И.Ф., к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *ivan_avd@ mail.ru*
Авдеев Ф.С., д.пед.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *ivan_avd@ mail.ru*
Авдеева Т.К., д.пед.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *ivan_avd@ mail.ru*

В статье рассматриваются факты об участии академика И.М. Виноградова и педагога-математика А.П. Киселева в академических боях по математике, которые явились прототипами математических олимпиад для школьников в нашей стране.

Ключевые слова: олимпиада по математике, академический бой, академик И.М. Виноградов, педагог-математик А.П. Киселев.

Андрею Петровичу Киселеву (1852-1940), уроженцу города Мценска Орловской области, в этом 2017 году исполняется 165 лет со дня рождения, в связи с этим мы публикуем интересные факты из его жизни, связанные с зарождением математических олимпиад.

Официально крупная математическая олимпиада в нашей стране впервые была проведена в Ленинграде в 1934 году, которая была организована благодаря стараниям, прежде всего, Б.Н. Дьедоне, а также О.К. Житомирского, В.А. Тартаковского, Д.К. Фаддеева, Г.М. Фихтенгольца [4].

Проводилась она в несколько этапов: открытый – заочный, после него письменный очный этап и завершающий очный этап. Заметим, что участвовали в этой олимпиаде только старшеклассники. События, о которых пойдет речь, произошли на год раньше: октябрьский номер газеты «Ленинские Искры» вышел под заголовком «Академическим боем встретим 15-летие КОМСОЛОЛА». Академик И.М. Виноградов и профессор Киселев помогут провести академический бой» [2, с. 38].

Иван Матвеевич Виноградов (1891-1983), известный русский математик, в 1929 году был избран действительным членом Академии наук СССР, а в

1932-1934 году председатель Физико-математической ассоциации АН СССР, директор физико-математического института АН СССР (Ленинград). В беседе с корреспондентом (статья «Выйти из боя победителем») Иван Матвеевич говорил: «Я горячо поддерживаю инициативу чапаевских пионеров и газеты «Ленинские Искры» о проведении академбоя по математике. Не зная математики, нельзя построить домну, станцию, завод. Значит пионерам надо добиться, чтобы математика стала ведущей дисциплиной в школе. Готовясь к академбою, ребята не должны заниматься зубрежкой. Пионер и школьник должен помнить: всякая теорема должна быть глубоко изучена и продумана. Нам не нужно таких «бойцов», которые вызубрили бы все формулы, а существа их не поняли. Подготовка к бою должна сопровождаться помощью педагогов и более одаренных ребят-математиков отстающим ребятам. Бой, по-моему, должен проходить так:

Сначала надо ребятам предложить задачи, которые закрепляли бы знания теории, а потом переходить к более трудным, комбинированным, которые требуют смелости и изобретательности. Не надо ребят пугать большими задачами, а давать им короткие задачи, но такие, которые потребовали бы для решения их большой мысли и вдумчивости. Я с истинным удовольствием приму участие в академбое. … Мы, академики, охотно поможем подрастающему поколению овладеть математикой» [2, с.38].

Наш земляк Андрей Петрович Киселев, назван в газете профессором, вероятно, народная молва права: своим трудом на благо школьной математики, он это заслужил. Начиная с 1884 года, когда вышел его первый учебник «Систематический курс арифметики», до 1974 года учебники, написанные А.П. Киселевым, были действующими сначала в русской, а затем в советской школе. Без малого 100 лет по его книгам училась математике вся наша страна. По своему образованию и призванию Андрей Петрович был школьным учителем математики. И, хотя в 1933 году Андрей Петрович перешагнул 80-летний рубеж, он писал «Надо приветствовать начинание чапаевского пионертряда и газеты «Ленинские Искры». Академбои по математике несомненно послужат стимулом для углубленного изучения этой науки. Академбои – думаю – обнаружат не одну тысячу даровитых ребят, может быть будущих Эйлеров. Я даю обязательство просмотреть вопросник академбоя по математике. Если будет создано жюри (а его, по-моему, надо создать) я, несмотря на загруженность, все же уделю время для работы в нем. Мои книги по алгебре, арифметике и геометрии вы можете встретить в любой школе, библиотеке, читальне. Сейчас я пишу третью часть алгебры. Все это для вас, ребята. Даю обязательство к началу академбоя окончить третью часть алгебры. Я был бы очень рад, если бы редакция «Ленинских Искр» устроила мне встречу с лучшими ребятами-математиками. Мне интересно узнать от них, какие недостатки имеют мои учебники. И чтобы на этой встрече были и педагоги по математике».

Ответ редакции профессору Киселеву: «Редакция приветствует ваше предложение и в первых числах ноября будет слет ребят-математиков для встречи с вами» [2. с. 38].

Заметим, что в академбое участвовали и учащиеся фабрично-заводских училищ (ФЗУ). Так в этой газете «Ленинские Искры» они писали. «Наши пио-

неры базы радио-завода «Коминтерн» вместе с педагогами и школьниками по группе 224 ФЗС сейчас проводят подготовку. Преподаватель по математике Борис Яковлевич Дорн помог нам выявить сильных ребят. Из них мы уже организовали шесть бригад. Они будут помогать отстающим ребятам по математике. …. Наша база и школа, где мы учимся, поставили перед собой задачу проведением академического боя уничтожить отставание ребят по математике» [2, с. 38].

Как видим, проблему математического образования решали и ученые-математики, и педагоги-математики, и авторы школьных учебников математики, и школьники, а форму активизации деятельности на этом поприще помогла найти практика и история математики. Это различного рода состязания, соревнования, или, как в нашем случае, академические бои, начала которых установить трудно. Например, уже в XVI веке проводились математические поединки, один из которых состоялся 12 февраля 1535 года. На поле уравнений «скрестили шпаги» Никколо Тарталья (1499-1557) и Антонио Марио Фиоре (XVI в.). Победил сильнейший – Н. Тарталья [3, с.86].

1933 год был знаменательным для А.П. Киселева: он был награжден орденом Трудового Красного Знамени. Газета «Известия» от 26 декабря 1933 г. писала «…За плодотворную педагогическую деятельность Президиум ЦИК СССР постановил: наградить орденом Трудового Красного Знамени тов. Андрея Петровича Киселева, старейшего преподавателя математики и автора учебников, служивших десятки лет одним из основных пособий для обучения математике» [1, с.196].

Как мы уже отмечали, математические олимпиады идут в нашей стране с 1934 года, и в этом заслуга отечественных математиков.

1935 год – математическая олимпиада в Москве, в ее оргкомитете А.Н. Колмогоров, П.С. Александров, Л.А. Люстерник, Л.Г. Шнирельман, В.Ф. Каган, С.А. Яновская.

1967 г. олимпиада получила статус Всесоюзной, с 1959 г. начинается история Международных математических олимпиад.

А кто готовил школьников к математическим олимпиадам?

– Учебники А.П. Киселева, где была приведена продуманная система задач, рассматривались всевозможные способы их решения, в отдельных случаях дополнительный материал помещался в приложении к основному тексту учебника [5].
– Педагоги, не одно поколение которых, учились по Киселеву, а затем учили по нему ребят.

В заключение приведем более подробную информацию об исторических персоналиях нашей статьи.

Основные даты жизни и деятельности академика Ивана Матвеевича Виноградова

1891 г. – Родился 14 сентября в селе Милолюб ныне Великолукского района Псковской области.

1903-1910 г. – Учился в Великолукском реальном училище.

1910 г. – Поступил на математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета.
1914 г. – Окончил математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета.
1915 г. – Оставлен при Петербургском университете для подготовки к профессорскому званию.
1918-1920 гг. – Доцент, профессор Пермского университета.
1920-1929 гг. – Профессор Ленинградского политехнического института.
1920-1932 гг. – Преподаватель, профессор физико-математического факультета Ленинградского государственного университета.
1928-1929 гг. – Член редколлегии «Журнала Ленинградского физико-математического общества.
1929 г. – Избран действительным членом Академии наук СССР.
1930-1932 гг. – Директор Демографического института (Ленинград).
1932-1934 гг. – Председатель Физико-математической ассоциации АН СССР Директор Физико-математического института АН СССР (Ленинград).
1934-1941 гг. – Директор и заведующий Отделом теории чисел Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР (Москва).
1936-1938 гг. – Редактор серии «Математика в монографиях. Серия обзоров».
1937-1948 гг. – Член редколлегии журнала «Известия Академии наук СССР. Отделение математических и естественных наук. Серия математическая».
1938 г. – Избран почетным иностранным членом Амстердамского математического общества (Нидерланды).
1939 г. – Избран почетным членом Лондонского математического общества (Англия).
1941 г. – Присуждена Сталинская премия СССР (диплом №1) за работу «Новый метод в аналитической теории чисел», опубликованную в 1937 г.
1942 г. – Избран иностранным членом Лондонского Королевского общества. Избран почетным иностранным членом Американского философского общества в Филадельфии.
1944 г. – Награжден орденом Ленина за выдающуюся многолетнюю плодотворную научную и педагогическую деятельность в области математики.
Избран почетным членом Московского общества испытателей природы.
1944-1947 гг. – Проректор, заведующий кафедрой математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.
1944-1983 гг. – Директор и заведующий Отделом теории чисел Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР (Москва).
1945 г. – Присвоено звание Героя Социалистического труда с вручением ордена Ленина и Золотой медали «Серп и Молот» за выдающиеся научные заслуги в области математики, разработку мощных аналитических методов теории чисел и за многолетнюю плодотворную работу по подготовке кадров математиков.
1946 г. – Избран иностранным членом-корреспондентом Академии наук Института Франции (Парижская АН).
Командирован в Англию на юбилейные торжества, посвященные памяти И. Ньютона.

1947 г. – Избран почетным иностранным членом Американской академии искусств и наук в Бостоне.
Избран иностранным членом Королевской Академии наук Дании.
Избран почетным членом Индийского математического общества.
1948-1983 гг. – Редактор, с 1950 г. главный редактор журнала «Известия Академии наук СССР. Серия математическая».
1949-1954 гг. – Член Бюро Отделения физико-математических наук Академии наук СССР.
1950 г. – Присуждена почетная степень доктора философии университета в Осло (Норвегия).
Командирован как глава советской делегации в Венгрию на I конгресс венгерских математиков.
Избран почетным членом Венгерской Академии наук.
Избран членом-корреспондентом Германской Академии наук в Берлине (ГДР).
1951 г. – Избран почетным членом Московского математического общества.
1953 г. – Избран почетным членом Академии наук Армянской ССР.
Награжден орденом Ленина за выслугу лет и безупречную работу.
1956 г. – Командирован в Англию на Генеральную ассамблею Международного математического союза и Международный конгресс математиков.
1957-1964 гг. – Председатель секции «Математика и механика» Комитета по Ленинским премиям в области науки и техники при Совете Министров СССР.
1958 г. – Избран иностранным членом Национальной академии деи Линчей в Риме.
1958-1961 гг. – Председатель экспертной комиссии по присуждению премии имени П.Л. Чебышева при АН СССР.
1958-1983 гг. Председатель бюро Национального комитета советских математиков.
1959 г. – Избран иностранным членом Сербской Академии наук и искусств.
1960 г. – Избран членом Королевского института Великобритании.
1961 г. – Награжден орденом Ленина за выдающиеся заслуги в области математики в связи с 70-летием со дня рождения.
1962 г. – Избран членом Немецкой Академии естествоиспытателей «Леопольдина» (ГДР).
1963-1983 гг. – Член Бюро отделения математики АН СССР.
1964-1983 гг. – Член секции «Математика и механика» Комитета по Ленинским и Государственным премиям СССР в области науки и техники при Совете Министров СССР.
1969-1983 гг. – Редактор «Математической энциклопедии».
1970 г. – Награжден юбилейной медалью «За доблестный труд. В ознаменование 100-летия со дня рождения Владимира Ильича Ленина».
1971 г. – Награжден второй Золотой медали «Серп и Молот» за выдающиеся заслуги в развитии и организации советской математической науки и в связи с 80-летием со дня рождения.
Присуждена Золотая медаль имени М.В. Ломоносова за выдающиеся работы в области математики за 1970 год.

1972 г. – Присуждена Ленинская премия за монографию «Метод тригонометрических сумм в теории чисел».
1974 г. – Избран почетным членом Академии наук Грузинской ССР.
1975 г. – Награжден орденом Ленина за заслуги в развитии советской науки и в связи с 250-летием Академии наук СССР.
1981 г. – Награжден орденом Октябрьской Революции, Золотой медалью «За заслуги перед наукой и человечеством» Чехословацкой АН.
1983 г. – Присуждена Государственная премия СССР.
1983 г. – Скончался 20 марта в Москве [2].

Основные даты жизни и деятельности Андрея Петровича Киселева
1852 г. – 30 ноября (по старому стилю) родился в г. Мценске орловской области, крещен в Воскресенской церкви.
1861-1865 гг. – Ученик малого народного училища г. Мценска.
1865 г. – Ученик уездного училища г. Мценска.
1865-1871 гг. – Ученик Орловской мужской гимназии.
1871 г. – 16 июля окончил Орловскую мужскую гимназию с золотой медалью.
1871-1876 гг. – Студент физико-математического факультета Императорского Санкт-Петербургского университета.
1874 г. – 13 ноября повенчан первым браком с дочерью митавского гражданина Эдуарда Шульца, девицею Мариею.
1876 г. – 15 января окончил Императорский Санкт-Петербургский университет со степенью кандидата физико-математического факультета по математическому разряду.
1876 г. – 27 января выдано свидетельство №553 на звание учителя гимназии и прогимназии по предметам физики и математики.
1876 г. – 9 февраля родился сын Владимир.
1876 г. – 11 августа предложением Г. управляющего Харьковским учебным округом за № 3813 определен в Воронежское реальное училище исправляющим должность учителя математики, механики и черчения.
1876 г. – 13 сентября педагогическим советом Воронежского реального училища избран в члены хозяйственного комитета.
1876 г. – 24 ноября предложением г. управляющего Харьковским учебным округом за № 5749 утвержден в должности учителя Воронежского реального училища по предметам математики, механики и черчения.
1878 г. – 15 октября родилась дочь Елена.
1879 г. – 6 октября предложением г. попечителя Харьковского учебного округа за № 4379 приглашен сверх прямых обязанностей по Воронежскому реальному училищу преподавателем физики по найму в Михайловскую воронежскую гимназию.
1879 г. – 5 декабря предложением г. попечителя Харьковского учебного округа за № 8616 получил из специальных средств Воронежского реального училища сто рублей в пособие на поездку в Санкт-Петербург для принятия участия в 6-ом съезде естествоиспытателей и врачей.
1880 г. – 31 мая родилась дочь Надежда.

1883 г. – 10 марта Указом Правительствующего сената за № 17 произведен в коллежские асессоры со старшинством.
1883 г. – 20 апреля родился сын Борис.
1883 г. – 22 декабря предложением г. попечителя Харьковского учебного округа за № 9369 назначен сверх прямых обязанностей по Воронежскому реальному училищу председателем педагогического и непременным членом попечительского советов женской гимназии, открытой в Воронеже Гоголь-Яновской.
1884 г. – 31 августа Указом Правительствующего сената за № 90 произведен за выслугу лет в надворные советники со старшинством.
1885 г. – 29 июня родилась дочь Мария.
1886 г. – 27 августа Указом Правительствующего сената за № 104 произведен за выслугу лет в коллежские советники со старшинством.
1886 г. – 28 декабря всемилостивейшее пожалован орденом Св. Станислава 3-й степени.
1890 г. – 10 июля предложением г. управляющего Харьковским учебным округом за № 4551 вследствие прошения уволен от должности председателя педагогического совета женской гимназии, содержимой в г. Воронеже Гоголь-Яновской.
1891 г. – 3 июля предложением г. попечителя Харьковского учебного округа за № 4410 перемещен на должность учителя математики и физики в Курскую мужскую гимназию.
1891 г. – 13 августа предложением г. управляющего Харьковским учебным округом за № 5495 перемещен на должность учителя математики в Харьковское реальное училище.
1891 г. – 20 декабря Указом Правительствующего сената за № 135 произведен в статские советники со старшинством.
1892 г. – 11 октября высочайшим приказом о чинах гражданских военного ведомства определен в Михайловский Воронежский кадетский корпус штатным преподавателем математики и физики.
1894 г. – 30 августа всемилостивейшее пожалован орденом Св. Анны 3-й степени.
1896 г. – 14 мая всемилостивейшее пожалован орденом Св. Станислава 2-й степени.
1896 г. – 17 марта награжден серебряной медалью в память царствования Императора Александра III на основании приказа по Военному ведомству 1860 года за № 60.
1899 г. – всемилостивейшее пожалован орденом Св. Анны 2-й степени.
1901 г. – 24 декабря – двадцатипятилетие педагогической деятельности, выход в отставку.
1911-1912 гг. – участие в работе 1-го Всероссийского съезда преподавателей математики.
1918-1921 гг. – преподаватель математики Ямской школы взрослых в городе Воронеже.
1921-1924 гг. – преподаватель математики в Высшей военно-педагогической школе Ленинграда.

1924 г. – персональный пенсионер города Ленинграда.
1925 г. – главрук Смольнинских военных курсов.
1926 г. – преподаватель математики в Ленинградской школе военных сообщений.
1933 г. – 26 декабря – награжден орденом Трудового Красного Знамени.
1940 г. – 8 ноября – умер. Похоронен на Волковом кладбище на «Литераторских мостках» в Ленинграде [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеев Ф.С., Авдеева Т.К. Андрей Петрович Киселев. – Орел: Издательство Орловской государственной телерадиовещательной компании, 2002.
2. Иван Матвеевич Виноградов. – М.: ООО «Издательство «РМП», 2011.
3. Малаховский В.С. Избранные главы истории математики: Учеб. издание / В.С. Малаховский. – Калининград: ФГУИПП «Янтарный сказ», 2002.
4. Математики рассказывают. Предисловие В.А. Садовничево, составление В.Б. Кузнецовой, подготовка текстов Н.Н. Бонч-Осмоловской, К.И. Кийченко, Д.В. Радзишевского, М.В. Радзишевской, Д.Б. Спорова, В.Ф. Тейдер, примечания Н.А. Панькова. – М.: «Минувшее», 2005.
5. Элементарная геометрия. Для средних учебных заведений. С приложением большого количества упражнений и статьи: Главные методы решения геометрических задач на построение. Изд. 21-е, перераб. – М.: Пг. «Наследство Салаевых», 1916.

О ВКЛАДЕ ПРОФЕССОРА М.И. ЗАЙКИНА В ТЕОРИЮ ШКОЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

А.А. Аксёнов, д.пед.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *aksenovaa@inbox.ru*

В современной теории и методике обучения математике ряд учёных не довольствуется одним термином «система школьных математических задач» даже с учётом всего многообразия обучающих, развивающих и воспитывающих функций, которые заключают в себе различные системы. Помимо этого, многие исследователи выделяют различные разновидности систем в зависимости от особенностей взаимосвязей и взаимозависимостей задач, их составляющих. Наиболее целостные результаты в этом направлении исследований получены в Арзамасском филиале Нижегородского государственного университета имени Н.И. Лобачевского группой исследователей под руководством профессора М.И. Зайкина (в настоящее время лабораторией руководит д.п.н., профессор И.В. Фролов). Основные положения этих исследований изложены в трудах [2, 3]. В частности, в контексте специфики взаимозависимостей и взаимосвязей за-

дач, составляющих единую задачную конструкцию (термин предложен М.И. Зайкиным), авторы этих работ выделяют следующие разновидности их систем:
1) серии математических задач;
2) вариации математических задач;
3) окрестности обращённых математических задач;
4) циклы математических задач;
5) цепочки математических задач.

I. Охарактеризуем эти разновидности задачных конструкций.

1. Под серией школьных математических задач понимается следующее: задачи образуют серию, если для них «… способ взаимосвязи задач совокупности есть главное в характеристике серии как задачной конструкции… При самом первом рассмотрении остановимся на двух особенностях, свойственных совокупностям задач, относимых к сериям:
– внешней схожести, выражающейся в одинаковой форме записи каждой задачи серии: использование одинакового или похожего сюжета, числового или буквенного выражения, уравнения, неравенства, функции, геометрической фигуры или конфигурации и т. п.;
– внутренней идентичности, определяющейся схожестью решения каждой из задач серии, которая может проявляться в использовании одной и той же формулы, тождества, преобразования, алгоритма, схемы рассуждения, какого-либо вида познавательной деятельности, метода (способа) решения и т. п.
Очевидно, эти особенности и должны входить в основное дефинитное содержание рассматриваемого понятия» [3, с. 36].

2. Вариации школьных математических задач как некая их совокупность получаются с помощью варьирования некоторой исходной задачи, что и обусловливает специфическое название этой задачной конструкции. Само варьирование может быть выполнено самыми разными способами. В частности, в работе [3, с. 63-76] исследуются различные подходы к выполнению этой процедуры, предложенные рядом исследователей. Например, точка зрения всемирно известного педагога–математика Д. Пойа, согласно которой выделены следующие основные способы варьирования математической задачи: замена термина его определением; переформулировка задачи; разложение и составление новых комбинаций; введение вспомогательного элемента; использование аналогии, обобщение задачи; специализация условия задачи.

3. Под обращением задачи понимается составление задачи, обратной к данной посредством перемены местами её условия и требования в случае, когда такая вариация приводит к появлению задачи, которая может быть решена в традиционном понимании этой процедуры.

4. Циклы задач – разновидность их конструкций, получившая свою известность и признание у исследователей и учителей математики раньше, чем появились представленные выше задачные конструкции. Единой точки зрения на сущность цикла математических задач в методике обучения математике нет. Например, А.Я. Блох рассматривал циклы заданий двух групп: задания, рассматриваемые при первоначальном знакомстве с новым материалом; задания по уже изученному материалу, вкраплённые в состав другого материала. Г.В. До-

рофеев предлагает каждую задачу рассматривать с учётом наличия некоторого множества задач, связанных с ней по содержанию, методам рассуждений и совокупности используемых в её решении понятий.

5. Цепочки задач – это отдельная разновидность задачных конструкций, суть которой в том, что в сюжетной составляющей условия (или в фабуле задачи) каждой из задач данной цепочки имеет место некоторая общность, но решение каждой задачи реализуется с помощью различного математического аппарата.

II. Покажем, что все перечисленные выше задачные конструкции могут быть диалектически выведены из исходного конструктивного основания выполняемого исследования – категории "задача", если применять её не к отдельной задаче, которая может быть частью некоего множества задач, а изначально сразу к некоторой совокупности задач.

В соответствии с исследованиями Ю.М. Колягина, В.И. Крупича и А.В. Брушлинского [1, 4, 5, 6] можно утверждать, что формулировка школьных математических задач содержит не более трёх компонентов: условие (A), требование (B) и искомое (E) (для задач на доказательство). Если принимать во внимание фабулу задачи, которая реализуется главным образом за счёт своеобразно заданного условия (но может быть задействовано и требование с искомым), получим такую разновидность задачных конструкций, как серии задач. В случае, когда в формулировке задач целенаправленно изменяется и условие, и требование (если это необходимо – совместно с искомым), получим такую задачную конструкцию, как вариации задач. Частным случаем изменения условия и требования (и искомого) является частичная или полная перемена местами конкретных данных, составляющих эти компоненты формулировки задачи. Так получается конструкция, названная окрестностью обращённых задач.

Теперь примем во внимание не только формулировку, но и своеобразие решения школьных математических задач, выраженного как собственно способом решения задачи (D), так и её теоретическим базисом (C) (также в соответствии с исследованиями Ю.М. Колягина, В.И. Крупича и А.В. Брушлинского). Если задачи данной совокупности таковы, что в работе над ними (за исключением, может быть одной, первой задачи) использование результата решения других задач (компонент E – искомое в задаче) становится частью их решения, они составляют цикл задач. Также цикл задач образуется, если в задачах некоторой совокупности реализуется одна и та же идея решения, которая заключена в таком компоненте, как способ решения задачи (D), лишь как следствие этого может быть задействован и теоретический базис задачи (C). Заметим, что при этом связь с компонентами формулировки задачи не учитывается, то есть в этом случае цикл задач основывается только на своеобразии процесса решения.

Иная ситуация имеет место, если учитывается формулировка задачи (практически во всех своих компонентах) и процесс решения (с акцентом и на способ решения, и на теоретический базис задачи). Если варьируется формулировка (главным образом за счёт сюжетной линии задачи или её фабулы), но неизменным остаётся способ и теоретический базис решения, получается одна из интерпретаций цепочки задач. Можно, наоборот, варьировать решение задачи,

практически не изменяя её формулировки, – это другая интерпретация цепочки задач. Варьирование решения можно выполнять и за счёт его способа, и за счёт теоретического базиса задачи, и с помощью обоих этих компонентов. Однако это, пожалуй, лишь частные случаи задачной конструкции, названной цепочкой задач. Выделять их как конструкции особой разновидности нет смысла, поскольку их уже выделено немало. Этот аргумент тем более справедлив с учётом того, что помимо пяти задачных конструкций, представленных в этой статье, существуют ещё многие другие разновидности систем школьных математических задач, и всем им необходимо найти своё место в учебном процессе, поэтому выделять ещё какие-либо отдельные задачные конструкции, не имеющие принципиального отличия от уже выявленных, нецелесообразно. Если варьировать и формулировку задачи, и её решение, то, в общем случае, пожалуй, не останется какого-либо обобщающего фактора, соединяющего соответствующий набор задач в некоторую новую их задачную конструкцию.

Итак, обосновано, что серии, вариации, окрестности, циклы и цепочки школьных математических задач могут быть диалектически выведены из конструктивного основания разрабатываемой теории. (В этом процессе не учитывалось основное отношение в задаче (R), поскольку оно определяется только для уже составленной задачи, следовательно, не влияет на процесс получения новых задач из исходной задачи.)

Методологический и теоретико-методический смысл обоснованного тезиса состоит в том, что пять рассмотренных разновидностей школьных математических задач могут и должны занять достойное место в общей теории школьных математических задач, описывающей не только всё разнообразие самих задач, но и то, как их специфика влияет на сущность процесса обучения школьников общему умению работать над задачей. Иными словами, результаты исследований научной школы М.И. Зайкина вносят существенный вклад также и в становление общей теории школьных математических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брушлинский А.В. Психология мышления и кибернетика. М.: Мысль, 1970. 202 с.
2. Зайкин М.И. Зайкин М.И. Цепочки, циклы и системы математических задач. Монография / М.И. Зайкин, С.В. Арюткина, Р.М. Зайкин / Под ред. М.И. Зайкина. Арзамас: АГПИ, 2013. 135с.
3. Зайкин М.И. Зайкин М.И., Егулемова Н.Н., Абрамова О.М. Серии, вариации и окрестности математических задач: Монография / Под общ. ред. М.И. Зайкина, Арзамасский филиал ННГУ. Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2014, 149 с.
4. Колягин Ю.М. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч. I. М.: Просвещение, 1977. 110 с.
5. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч. II. М.: Просвещение, 1977. 144 с.
6. Крупич В.И. Крупич В.И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. Монография. М.: Прометей, 1995. 166 с.

УДК 378.14

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛЕКЦИОННЫХ ДЕМОНСТРАЦИЙ ПРИ ПОДГОТОВКЕ УЧИТЕЛЯ ФИЗИКИ

Б.И. Бешевли, к.т.н., доц.
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
e-mail: *beshevli@mail.ru*
И.Н. Пустынникова, к.пед.н., доц.
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
e-mail: *irina1070pin@mail.ru*

Главным компонентом воспитания учащихся является формирование научного мышления, которое во многом определяет социальный и научно-технический прогресс. Научное мышление в широком смысле слова – это система норм, выработанных в течение многовекового развития науки, инвариантных для всех эпох существования развитого научного знания, которые противостоят позициям «здравого смысла», как проявления обыденного сознания.

Российский философ Н.А. Бердяев указывал, что «Научное знание – это такое знание, для достижения которого человек использует материал опыта и законы логики. Каждый новый элемент знания выводится из предыдущего с той же неизбежностью, с какой поезд проходит станции в указанной на карте последовательности». Проблема содержания курса естественных наук и, в частности, физики, была актуальной всегда, а сегодня – особенно. Физика, это не только совокупность конкретных научных результатов, поясняющих природу явлений, но и развитие специфического взгляда на природу, научного мировоззрения, отношения к действительности, не имеющее аналогов в других сферах интеллектуальной деятельности. Поэтому физика, как наука о наиболее общих, простейших законах природы, является экспериментальной наукой, а её законы базируются на фактах, установленных опытным путем. Поскольку между наукой физикой и учебным предметом физикой существует тесная взаимосвязь, процесс обучения физике заключается в последовательном формировании новых для учеников физических понятий и теорий на основе немногих фундаментальных положений, которые опираются на опыт. Вполне естественно, что и преподавание физики следует проводить с использованием физических экспериментов. Поэтому при планировании учебного процесса, при разработке уроков, учитель должен думать не только о том, что нужно объяснить на уроке, но и о том, как с помощью различных опытов по физике использовать урок с его содержанием и методами для того, чтобы формировать личность ученика с четким мировоззрением, твердыми взглядами, высокими моральными качествами.

Это положение, в частности, реализуется при проведении лекционных демонстраций. Учебный эксперимент по физике – это воспроизведение с помощью специальных приборов физического явления в условиях, наиболее удобных для его изучения. Он служит одновременно источником знаний, методом обучения и видом наглядности, являясь отражением научного метода изучения физических явлений. Изучить учебники, вызубрить определения, форму-

лировки, формулы – еще не значит усвоить физику. Настоящее образование человек получает лишь тогда, когда сам активно ищет ответы на возникающие лично у него вопросы. Учебный физический эксперимент должен затрагивать эмоции обучаемых, пробуждая их познавательную активность. Созданный с помощью эксперимента положительный эмоциональный фон способствует более качественному восприятию излагаемого на занятии материала. Познание начинается с удивления, а продолжается через деятельность. Обучать – это значит постоянно использовать приемы и методы, стимулирующие самостоятельный поиск, с помощью которого обучающийся находит, открывает для себя новые знания. Применение физического эксперимента позволяет заинтересовать обучаемых, активизировать их мышление, способствует формированию более глубоких и прочных знаний по физике, развивает у них наблюдательность, образное мышление, умение делать обобщения на основе наблюдаемых фактов.

В процессе обучения учащиеся приобретают следующие конкретные умения: наблюдать и анализировать явления, свойства веществ и тел; выполнять измерения физических величин; находить функциональные зависимости между физическими величинами; работать с физическими приборами; наблюдать взаимосвязь между различными природными явлениями; выдвигать гипотезы, обсуждать результаты эксперимента; аргументировано участвовать в дискуссии; делать выводы.

Эффективность лекционного курса физики в значительной мере определяется лекционными демонстрациями, которые являются частью курса и важным дидактическим приемом. Демонстрационный эксперимент, как метод обучения, принадлежит к иллюстративным методам. Для получения максимального эффекта от применения лекционной демонстрации необходима органическая взаимосвязь учебного эксперимента с изучаемым материалом.

Влияние лекционных демонстраций на объем знаний студентов и действенность этих знаний изучались многими исследователями [1, 2].

Можно выделить основные виды лекционных демонстраций.

1. Для иллюстрации объяснений учителя. Практика свидетельствует, что эффективность усвоения учебного материала значительно повышается, если объяснение учителя сопровождается демонстрацией опытов. Ведь в ходе демонстрации учитель имеет возможность руководить познавательной деятельностью учеников, акцентировать внимание на фактах, наиболее важных для понимания сути учебного материала.

2. Для активизации познавательного интереса к физическим явлениям и теориям. Эффективный демонстрационный эксперимент может быть своеобразным толчком к активной познавательной деятельности учеников, особенно, если он носит проблемный характер. (Например, демонстрация плавания стальной иглы на поверхности воды создает проблемную ситуацию, которая может быть положена в основу изучения свойств поверхностного слоя жидкости).

3. Для иллюстрации применения изучаемых физических явлений и теорий в технике, технологиях и быту. Демонстрация таких опытов является необходимой не только для иллюстрации связей физики с тех-

никой, но и для подготовки учеников к жизни в условиях современного технократического общества. Ознакомление с объектами технико-технологического характера способствует формированию мотивации к изучению физики, позволяет углубить и систематизировать знания учеников о ранее изученных физических явлениях.

4. Для проверки предположений, выдвинутых учениками в ходе обсуждения учебного материала. В данном случае значительно повышается активность учащихся во время урока, они вовлекаются в процесс не только рассмотрения вопросов, которые предлагает учитель, но и выдвигают свои варианты решения проблемы, которые могут быть проверены экспериментальным путём.

Следует различать два вида лекционных демонстраций: реальный физический эксперимент и компьютерное моделирование. Оба эти вида эксперимента, осуществляя принцип наглядности, обеспечивают понимание и качественное усвоение учебного материала, являются основой для активной познавательной деятельности обучаемых. Они обеспечивают приобретение жизненно и профессионально значимых умений и навыков, реализовывая тем самым принцип политехнизма.

Несмотря на то, что в демонстрационном эксперименте учитель является главным действующим лицом, который организует и проводит демонстрацию опытов, необходимо активно привлекать учеников, как к проведению демонстраций, так и к объяснению демонстрируемых явлений.

При демонстрации эксперимента и его пояснении необходимо соблюдать основные требования, предъявляемые к формированию научного мышления. В частности, доказательность теоретических положений должна опираться на факты, полученные на основе опыта и строгую логику обоснования утверждения. В науке общепринятым суждением и обоснованием считается только то, что доказано строго логично и подтверждается многократными экспериментами, которые дают достоверные научные факты. Опыт – высший судья в физике. Опыт дает новое научное знание – научный факт. Например, до постановки опыта Эрстеда, о связи электрических и магнитных явлений было неизвестно. Однако теперь опыт Эрстеда не оставляет никаких сомнений в том, что электрические и магнитные явления взаимосвязаны.

Другая сторона научного эксперимента заключается в том, что опыт подтверждает или опровергает общепринятые утверждения, то есть служит средством доказательности научной гипотезы, превращая её в незыблемый научный факт. Так, опыты Герца показали справедливость теоретического предсказания Максвелла о существовании электромагнитных волн.

Первым этапом учебного физического эксперимента является формирование чувственно-наглядных образов, служащих материалом для создания представлений о физических явлениях.

Как правило, ученики еще до изучения определенного понятия имеют некоторый набор чувственно-наглядных образов, полученных в процессе предварительного обучения. Этот чувственный опыт носит или неупорядоченный ха-

рактер (жизненный опыт), или его было недостаточно, чтобы усвоить и закрепить понятие.

Следовательно, целью лекционной демонстрации является обогащение чувственных знаний учащихся, создание наглядных образов и развитие образного мышления.

При демонстрации эксперимента необходимо обратить внимание на то, чтобы наиболее отчетливо выступала сущность изучаемого явления. Несущественные и вспомогательные детали, вторичные явления должны быть сведены к минимуму, то есть, должны быть скрыты от взгляда учеников. После формирования чувственно-наглядного образа переходят к моделированию реальных условий для организации предметной познавательной репродуктивной деятельности школьников с целью усвоения понятия. Объясняют ученикам необходимость и теоретическую важность введенного понятия, обосновывают его связи с другими, ранее изученными понятиями. При проведении эксперимента школьники осуществляют различные умственные операции – сравнение, анализ, синтез, и другие, которые приводят к закреплению и углублению знаний об изучаемом понятии.

После формирования и усвоения изучаемого понятия переходят к наиболее сложной части лекционного эксперимента – дают возможность учащимся применять полученные знания в незнакомых условиях, что требует от них осуществления творческой деятельности, т.е. переходят от репродуктивного к продуктивному усвоению информации. При выполнении подобных экспериментальных задач ученики уже должны иметь систему сложившихся на некотором уровне понятий, иметь достаточно развитое мышление.

Эксперимент должен быть максимально приближен к реальным практическим ситуациям и приводить к познанию конкретного понятия, формируя представление о сложности реального мира. Ученики при выполнении подобных работ должны применять те знания, которые необходимы в данной ситуации, научиться отличать существенное от несущественного, уметь по возможности устранить эти несущественные побочные явления, или учесть их, добиться решения поставленной задачи наиболее эффективными методами и, таким образом, изучить конкретное явление в его целостности. При проведении физического эксперимента необходимо иметь ввиду, что любое физическое явление должно рассматриваться системно, целостно. При таком подходе познаются не только все элементы системы, но и их связи и отношения в условиях функционирования всей системы. Следует учесть, что между частями и целым существует сложная функциональная зависимость. Поэтому для развития научного мышления у учащихся с использованием лекционного эксперимента необходимо проводить изучение отдельных частей явления без разрушения целого.

В науке и практике существует множество примеров того, что игнорирование целостного подхода к изучению объекта приводило к нежелательным последствиям. Например, отсутствие внимания к такому фактору, как зависимость сопротивления от протекающего тока, не позволяет учителю провести достаточно убедительную демонстрацию справедливости закона Ома, если в качестве резисторов он будет использовать лампочки накаливания.

Компьютерное моделирование физического эксперимента имеет определённые преимущества, по сравнению с реальным экспериментом. Являясь яркой иллюстрацией физических законов и явлений, компьютерные модели позволяют воспроизводить их тонкие детали, которые могут ускользнуть при реальном эксперименте. Компьютерное моделирование позволяет изменять временной масштаб, рассматривать поэтапно реальные явления природы, варьировать в широких пределах параметры и условия экспериментов, моделировать ситуации, не реализуемые в реальном учебном физическом эксперименте.

Однако данный эксперимент обладает и рядом существенных недостатков. В частности, он использует математические модели, в результате чего исследуется не реальное явление природы, а его упрощённая теоретическая модель, что во многом снижает эффект исследования природного явления. Поэтому использование компьютерного моделирования ни в коем случае не должно вытеснять реальный эксперимент из учебного процесса. Применение компьютерных моделей является оправданным лишь при неукоснительном соблюдении принципа соответствия модельного и натурного эксперимента, причем в реальных условиях наблюдать явление в аудитории либо невозможно (реакция термоядерного синтеза, исследование космического пространства и т.д.); либо возникает необходимость в ускорении (замедлении) протекания явлений; либо в учебном заведении отсутствует необходимое оборудование.

В этом случае использование компьютерного моделирования при обучении является, конечно же, оправданным.

На кафедре общей физики и дидактики физики Донецкого национального университета разработан и много лет читается курс «Методика и техника лекционных демонстраций» для студентов педагогического направления физико-технического факультета. Основной целью данного курса является формирование у студентов навыков использования лекционных демонстраций при рассмотрении физических явлений и понятий при проведении уроков физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Н.С., Егоров Г.С., Лебедев В.В. Лекционный эксперимент в университетском курсе общей физики – состояние, тенденции, проблемы // Физическое образование в вузах. Серия «Б», 1996. Т.2 №3.
2. Осадчук Л.А. Методика преподавания физики. Киев, «Вища школа», 1984.
3. Физика в лекционных демонстрациях: учеб. пособие /А.Ф.Галкин [и др.]; Владим. гос. ун-т имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых. – Владимир Изд-во ВлГУ, 2012. – 130 с.

УДК 372.851

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MAPLE ДЛЯ СОЗДАНИЯ АНИМАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

А. А. Бондарь, к.ф.-м.н.
Уральский государственный педагогический университет
e-mail: *a.-bondar@mail.ru*

В настоящее время широкое распространение получают интерактивные средства обучения на базе современных систем компьютерной математики, которые облегчают решение сложных математических задач и делают его достаточно интересным и наглядным. В статье рассматриваются способы создания анимации в программной среде Maple. Приводятся примеры использования анимации при решении задач с параметром функционально-графическим методом.

Ключевые слова: анимация графиков в среде Maple, функционально-графический метод решения задач с параметрами

Одним из важнейших на сегодняшний день принципов обучения математике в школе является принцип наглядности. В связи с этим на уроках стали чаще использоваться программные среды, позволяющие выполнять построения на компьютере, демонстрирующие зависимости между фигурами.

Одной из таких сред является система компьютерной алгебра Maple. Она имеет очень широкие возможности и в частности позволяет создавать анимационные картинки, которые могу быть продемонстрированы без установки самой программной среды.

Последние годы задание 18 второй части профильного ЕГЭ является задачей с параметром. Одним из основных методов решения такого типа задач является функционально-графический метод. Основной его успешного применения является наглядный динамический чертеж, который позволяет построить среда Maple.

Рассмотрим примеры использования программы Maple для решения задач №18 профильного ЕГЭ. Все чертежи, выполнены в среде Maple являются анимированными, и могут быть сохранены и воспроизведены на компьютере стандартными средствами.

П р и м е р 1. Найти все значения параметра a, при которых любое решение неравенства

$$x^2+y^2+a^2\le 2a\,(x-y)-4x-6y+6a+3 \qquad (1)$$

удовлетворяло бы неравенству $x+y\le 5$.

Решение. Преобразуем неравенство (1) и выделим полные квадраты при переменных x, y и параметре a:

$$x^2+y^2+a^2\le 2a\,(x-y)-4x-6y+6a+3$$
$$x^2+y^2+a^2\le 2ax-2ay-4x-6y+6a+3$$
$$x^2+2x\,(2-a)+(2-a)^2+y^2+2y\,(a+3)+(a+3)^2\le a^2+8a+16$$

$$(x+2-a)^2+(y+a+3)^2 \le (a+4)^2. \qquad (2)$$

Последнее неравенство задает множество точек плоскости лежащих в круге с центром $(a-2;-a-3)$ радиуса $|a+4|$.

Используя команду animate пакета plots программы Maple создадим анимацию, в которой построим множество всех окружностей ограничивающих круги (2):

$$animate(implicitplot,[(x+2-a)^2+(y+a+3)^2=(a+4)^2, \\ x=-22..15,y=-18..20],a=-12..5).$$

Используя полученную анимацию можно заметить, что множество всех центров $(a-2;-a-3)$, полученных кругов расположены на одной прямой. Для нахождения уравнения это прямой достаточно выбрать два произвольных различных значения параметра a и составить уравнение прямой проходящей через две точки. При $a=2$ центром круга является точка $(0;-5)$, при $a=-3$ – точка $(-5;0)$. Уравнение прямой проходящей через эти точки имеет вид $y=-x-5$.

Неравенство $x+y\le 5$ задает множество точек нижней полуплоскости, границей которой является прямая $y=-x+5$. Используя команды:

$$f1:=animate(implicitplot,[(x+2-a)^2+(y+a+3)^2=(a+4)^2, \\ x=-22..15,y=-18..20],a=-12..5,trace=6)$$

$$f2:=plot(-x-5,x=-22..15,y=-18..20, \\ color=orange,linestyle=Dash);$$

$$f3:=implicitplot(y<=-x+5,x=-22..15,y=-18..20, \\ coloring=[”SteelBlue”DarkGreen”],filledregions);$$

$$display(f1,f2,f3)$$

построим все найденные множества в одной системе координат (рисунок 1).

Как видно из построения, линия, на которой лежат центы кругов параллельна границе области. Таким образом, расстояние от центра всех полученных кругов до границы области есть величина постоянная, обозначим её ρ. Условие задачи будет выполнено если радиусы кругов не будет превосходить величины ρ. Расстояние ρ может быть найдено используя треугольники, которые отсекают линии $y=-x+5$ и $y=-x-5$ от координатных осей; $\rho=2\cdot 5\sqrt{5}=10\sqrt{2}$. Получаем неравенство $|a+4|\le 10\sqrt{2}$, решением которого является отрезок $-4-10\sqrt{2}\le a\le -4+10\sqrt{2}$.

Ответ: $\left[-4-10\sqrt{2};-4+10\sqrt{2}\right]$.

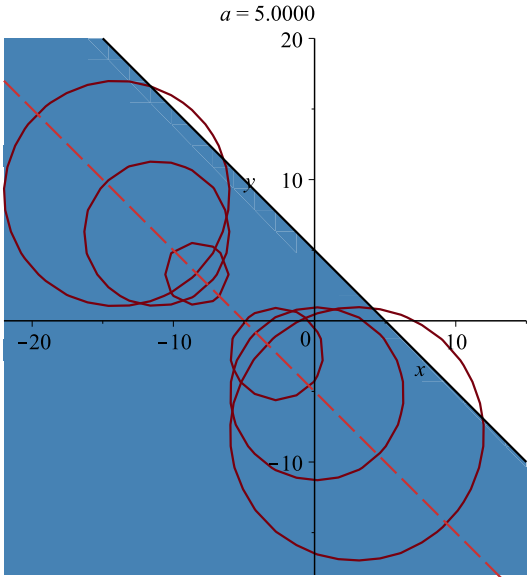


Рисунок 1 – Иллюстрация к примеру 1

П р и м е р 2. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x-5y+5|=52, \\ y-2=a\,(x-5)\,; \end{cases} \tag{3}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Первое уравнение системы равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-5y+5\geq 0, \\ x^2+5x+y^2-y-(x-5y+5)=52, \end{cases} \\ \begin{cases} x-5y+5<0, \\ x^2+5x+y^2-y+(x-5y+5)=52, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\leq \frac{1}{5}x+1, \\ x^2+4x+y^2+4y=57, \end{cases} \\ \begin{cases} y>\frac{1}{5}x+1, \\ x^2+6x+y^2-6y=47, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} I & \begin{cases} y\leq \frac{1}{5}x+1, \\ (x+2)^2+(y+2)^2=65, \end{cases} \\ III & \begin{cases} y>\frac{1}{5}x+1, \\ (x+3)^2+(y-3)^2=65. \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенства I и III задают соответственно нижнюю и верхнюю полуплоскости, границей которых является прямая $y=\frac{1}{5}x+1$. Уравнения II и IV задают окружности радиуса $\sqrt{65}$, центры которых находятся в точках $(-2;-2)$ и $(-3;3)$ соответственно.

Уравнения $y-2=a\,(x-5)$ задает пучок прямых проходящих через точку с координатами $(5;2)$.

Построим графики частей окружностей II и IV, ограниченные полуплоскостями I и III и создадим анимацию всех прямых $y-2=a\,(x-5)$ в зависимости от параметра a:

$$f1 := animate(plot, [a*(x-5)+2, x=-12..10, y=-11..12],$$
$$a=9..-3, frames=150, trace=[10,105,120]);$$

$$f2 := pointplot([[5,2]], color=[red]);$$

$$p := proc(x,y)\ if\ y \le \frac{1}{5}x+1\ then\ (x+2)^2+(y+2)^2-65$$
$$else\ (3+x)^2+(y-3)^2-65\ end\ if\ end\ proc;$$

$$f3 := implicitplot(p, -12..10, -11..12, color=black);$$

$$f4 := plot((1/5)*x+1, x=-12..10, linestyle=Dash, color=black);$$

$$display(f1, f2, f3, f4).$$

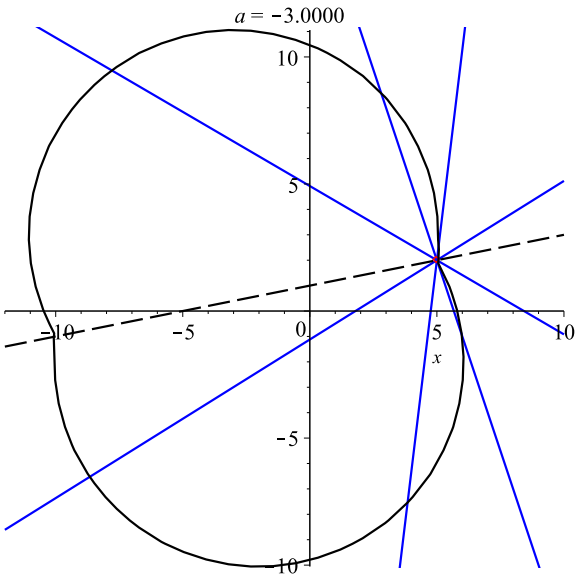


Рисунок 2 – Иллюстрация к примеру 2

Исходя из рисунка 2, непосредственной проверкой, убеждаемся, что точка$(2;5)$ (центр пучка прямых) принадлежит окружностям II и IV:

$$(5+2)^2+(2+2)^2=65-\text{ истина},\quad (5+3)^2+(2-3)^2=65-\text{ истина}\ .$$

Таким образом, исходная система при любых значениях параметра a имеет по крайней мере одно решение. Значит нужно найти значения параметра, при которых система имеет единственное решение, отличное от $(2;5)$. Для этого нужно выяснить при каких a прямая $y-2=a\,(x-5)$ пересекает только одну

из окружностей. Найдем пограничные значения, при которых прямая касается каждой из окружностей. Для этого потребуем, чтобы системы

$$\begin{cases} y = a\,(x-5)+2, \\ (x+2)^2+(y+2)^2 = 65, \end{cases} \quad \begin{cases} y = a\,(x-5)+2, \\ (x+3)^2+(y-3)^2 = 65, \end{cases} \tag{4}$$

имели единственное решение.

Системы (4) равносильны квадратным уравнениям:

$$(a^2+1)x^2-(10a^2-8a-4)x+25a^2-40a-45=0,$$
$$(a^2+1)x^2-(10a^2+2a-6)x+25a^2+10a-55=0.$$

Дискриминанты, которых, соответственное равны

$$D_1 = 64a^2+224a+196 = 4\,(4a+7)^2\,,$$
$$D_2 = 4a^2-64a+256 = 4\,(a-8)^2\,.$$

Таким образом, системы (4) имеют единственное решение при $a=-\frac{7}{4}$ и $a=8$ соответственно. При этих значениях параметра прямая $y-2=a\,(x-5)$ касается окружностей II и IV в точке $(5;2)$ и пересекает другую окружность, поэтому исходная система имеет ровно два решения. Из построения очевидно, что исходная система будет иметь два решения и при всех значениях a из интервала $\left(-\frac{7}{4};8\right)$. Окончательно получаем

Ответ: $a \in \left[-\frac{7}{4};8\right)$.

После создания анимации в программной среде Maple имеется возможность сохранить её в формате gif. Для этого необходимо выполнить команду “ПКМ→Export→GIF” и выбрать желаемое расположение файла. В дальнейшем полученную таким образом анимацию можно использовать без установки программной среды Maple.

ЛИТЕРАТУРА

1. Худенко В. Н., Симонова А. А., Персичкина Е. А. Использование анимации в среде геогебра в преподавании математики // Современные тенденции развития науки и технологий. — 2014. — 4. — 8. — С. 125–128.
2. Сосновская Г. В., Климец И. В., Персичкина Е. А. Использование динамической геометрической среды Geogebra при решении задач с параметрами // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы II Всероссийской научно-методической конференции. Красноярск, 2013. — С. 281–283.
3. Дистанционная обучающая система для подготовки к государственным экзаменам “РЕШУ ЕГЭ” [Электронный ресурс]. 2017. Дата обновления: 24.09.2017. URL: http://решуегэ.рф (дата обращения: 24.09.2017).

ОБУЧЕНИЕ МЕТОДАМ БЫСТРОГО СЧЁТА В РАМКАХ РЕАЛИЗАЦИИ ФГОС

К.В. Бурцева, учитель математики
МБОУ лицей № 22 г. Орла
e-mail: *burtsevakv@mail.ru*

В наш век – век новых технологий и развития компьютерной техники, разговор об устном счете может показаться неуместным, однако и по сей день гибкость ума является предметом гордости людей, а способность, производить в уме вычисления вызывает откровенное удивление.

«Различие между теми людьми, кто добивается в математике многого, и теми, кто достигает малого, состоит не в мозге, с которым они рождаются, а в том, как они его используют».
(БИЛЛ ХЕНДЛИ «Считайте в уме как компьютер»)

Всегда математика была и остается одним из важных предметов в школе – математические знания необходимы всем людям. Не всякий ребёнок, обучаясь в школе, знает, кем он станет в будущем, но каждый понимает, что математика необходима для решения многих повседневных задач: калькуляция ремонтных работ, строительство на дачном участке, оплата за коммунальные услуги, расчет семейного бюджета и т.д.

А как же технические достижения?! Они были бы попросту невозможны, если бы не наука о числах.

В наш век высоких технологий и повсеместного использования компьютера умение быстро и правильно производить в уме достаточно сложные вычисления ни в коем случае не утратило своей актуальности. Гибкость ума является предметом гордости людей, а способность, например, быстро производить в уме вычисления вызывает откровенное удивление.

Каждый наблюдал ситуацию, когда человек мучается, с тем чтобы правильно отсчитать сдачу, или пробует высчитать среднее арифметическое своих оценок, или мучается вычислением в столбик сложного примера на контрольной работе, когда до звонка остались считанные минуты.

Такие навыки помогут человеку в учебе, в быту, в профессиональной деятельности. Кроме того, быстрый счет – настоящая гимнастика для ума, приучающая в самых сложных жизненных ситуациях находить в кратчайшее время хорошие и нестандартные решения.

Идеи устного счета не новы, но основательно забыты благодаря развитию современных технологий. Так что новое, это, как говориться, – хорошо забытое старое.

Незаметно для себя мы утрачиваем навыки быстрого и точного счета и порой с большим опозданием понимаем, что это наше слабое место. Однако умение быстро считать в уме является неоспоримым преимуществом и достоинством того, кто таковым умением обладает. Человек, легко оперирующий цифрами, никогда не окажется обманутым при расчетах. Но самое главное,

способности к вычислениям постоянно будут поддерживать в хорошей форме и развивать его умственные способности, что особенно важно в период обучения.

Приёмы быстрого счета развивают память. Это касается не только математики, но и других предметов, которые изучаются в школе. Приемы устного счета нужно повторять систематически.

Нижеперечисленные способы быстрого устного счета рассчитаны на ум «обычного» человека и не требуют уникальных способностей. Главное – более или менее продолжительная тренировка.

Наша задача – научиться работать с двузначными, а иногда и – с трехзначными числами. Этого для экономии времени на уроке достаточно.

Наши далекие предки постоянно сталкивались с необходимостью делить и обменивать вещи, продукты, делать запасы. Так человек постепенно учился считать. Для счета использовали пальцы рук, ног, камешки и другие предметы. Позже появились изображения чисел. Одним из первых способов «записи» чисел, сохранившемся и поныне, были зарубки на палке. В Древнем Вавилоне записывали числа, выдавливая значки палочкой на глиняной дощечке. Сейчас мы пользуемся арабскими цифрами, нам это привычно. Люди научились складывать и вычитать, умножать и делить, причем способы вычислений не всегда были удобны и понятны.

В древней литературе упоминаются такие способы умножения, как «загибанием», «ладьей», «решеткой», «задом наперед», «ромбом», «треугольником» и многие другие.

Современные школьники не любят считать в столбик, использовать калькулятор на уроках математики не допустимо. Многие ученики пытаются считать устно, но это также не всегда приводит к правильному ответу. В результате было принято решение научить детей новым методам устного счета.

Дополнительные способы умножения могут помочь современному школьнику на уроках математики и физики. На уроках школьникам постоянно предлагаются новые, нестандартные способы счета, помогающие облегчить их вычислительную практику.

1. Умножение на 11.

Умножать на 11 чуть сложнее, чем умножать на 10. Закономерность здесь такая: $53 \times 11 = 583$.

Шаг 1 – складываем 2 цифры двузначного числа: 5+3=8.

Шаг 2 – помещаем результат между двумя числами двузначного числа: 583.

$59 \times 11 = 649$.

Шаг 1 – 5+9=14.

Шаг 2 – Перекидываем единицу налево, если сумма на предыдущем шаге оказалась больше 9: 5+1=6 (справа остается второй символ, в данном случае это четверка)

Шаг 3 – на первый символ мы единицу уже перекинули, получили 6. Далее у нас осталась 4, которую ставим в центр, и дописываем 9: 649.

2. Умножение на 5.

Большинство людей очень просто запоминают таблицу умножения на 5, но, когда приходится иметь дело с большими числами, сделать это становится слож-

нее. Для того чтобы умножить любое число на 5, нужно разделить это число на 2, а затем умножить на 10.

$2682 \times 5 = 2682 : 2 \times 10 = 1341 \times 10 = 13410$

$5887 \times 5 = 5887 : 2 \times 10 = 2943{,}5 \times 10 = 29435$

3. Деление на 5.

Операция обратная умножению на 5, необходимо умножить исходное число на 2 и разделить на 10.

$195 : 5 = 195 \times 2 : 10 = 390 : 10 = 39$

$2976 : 5 = 2976 \times 2 : 10 = 5952 : 10 = 595{,}2$

4. Умножение на 4.

Это очень простой приём, хотя очевидный лишь для некоторых. Хитрость в том, что нужно просто умножить на 2, а затем опять умножить на 2.

$58 \times 4 = 58 \times 2 \times 2 = 116 \times 2 = 232$

$145 \times 4 = 145 \times 2 \times 2 = 290 \times 2 = 580$

5. Сложное умножение.

Если необходимо умножить большие числа, причем одно из них четное, то можно просто перегруппировать их чтобы получить ответ.

$32 \times 125 = 16 \times 250 = 8 \times 500 = 4000$

$28 \times 15 = 14 \times 30 = 7 \times 60 = 420$

6. Подсчет процентов.

Если необходимо вычислить процент от числа кратный 10 (10%, 20%, 30% и т.д.) нужно разделить исходное число на 10 и умножить на 1, 2, 3 и т.д.

20 % от $560 - 560 : 10 \times 2 = 56 \times 2 = 112$

60% от $350 - 350 : 10 \times 6 = 35 \times 6 = 70 \times 3 = 210$

7. Округление.

При сложении нескольких чисел можно использовать метод округления одного или нескольких чисел до десятков или сотен.

$97 + 44 + 89 = 100 + 44 + 100 - 3 - 11 = 244 - 14 = 230$

$288 + 58 = 290 + 60 - 2 - 2 = 350 - 4 = 346$

8. Умножение с использованием распределительных свойств.

В учебнике математики за 5 класс есть тема: «Свойства умножения», в частности распределительные свойства умножения, относительно сложения и вычитания. Этим свойствам уделяется немного времени, а зря. Они сильно облегчают процесс вычисления.

$147 \times 8 = (150 - 3) \times 8 = 150 \times 8 - 3 \times 8 = 1200 - 24 = 1176$

$257 \times 9 = (250 + 7) \times 9 = 250 \times 9 + 7 \times 9 = 2250 + 63 = 2313$

9. Умножение на число, состоящее только из цифр 9.

Этот прием основан на распределительном свойстве умножения относительно вычитания, представляя 9 как разность 10 и 1, 99 – 100 и 1 и т.д.

Шаг 1. Умножаем это число на 10 (100, 1000 и т.д.).

Шаг 2. Вычитаем из результата само число.

$84 \times 9 = 84 \times (10 - 1) = 84 \times 10 - 84 \times 1 = 840 - 84 = 756$

$154 \times 999 = 154 \times (1000 - 1) = 154000 - 154 = 153846$

10. Деление с использованием распределительных свойств.

Если использование распределительных свойств умножения еще встречается на уроках математики, то о распределительных свойствах деления относительно сложения и вычитания многие дети даже не знают. Эти свойства позволяют делить довольно большие числа.

$696 : 6 = (600 + 90 + 6) : 6 = 600 : 6 + 90 : 6 + 6 : 6 = 100 + 15 + 1 = 116$

$700065 : 5 = (700000 + 65) : 5 = 700000 : 5 + 65 : 5 = 140000 + 13 = 140013$

11. Умножение чисел, у которых число десятков одинаково, а сумма единиц равна 10.

Шаг 1. Число десятков умножить на число, которое больше на 1.

Шаг 2. Записывают результат и приписывают к нему справа двузначный результат произведения единиц ($1 \times 9 = 09$).

Умножим 303 на 307:

1) $30 \times (30 + 1) = 900 + 30 = 930$

2) $3 \times 7 = 21$

Записываем первый результат, а справа – второй: $= 93021$.

$23 \times 27 = (2 \times 3)(3 \times 7) = 621$

$61 \times 69 = (6 \times 7)(1 \times 9) = 4209$

Необходимым условием успешной работы, так или иначе связанной с вычислениями, является владение культурой счета. Основу культуры счета составляют вычислительные навыки, совершенствование которых возможно только в практической деятельности.

Счет является простым и легким делом только тогда, когда владеешь особыми приемами и навыками. Каждый ученик может улучшить вычислительные навыки с использованием приемов быстрого счета. Устный счет развивает механическую память, быстроту реакции, умение сосредоточиться, а поиски и обоснование новых приемов служат формированию логических умений. Вот так простые устные упражнения на каждом уроке могут развить каждого из нас.

ЛИТЕРАТУРА

1. Депман И.Я., Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5-6 кл. сред. шк. – М.: Просвещение. – 1989. – 287 с.
2. Игнатьев Е.И. В царстве смекалки. – 4-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. – 1984. – 192 с.
3. Зимовец К.А., Пащенко В.А. Интересные приемы устных вычислений. – Начальная школа. – 1990. – №6. – С.44-46.
4. Перельман Я.И. Живая математика. – Екатеринбург: Тезис. – 1994. – 314 с.
5. Ткачева М.В. Домашняя математика. – М.: Просвещение. – 1993. – 209 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИЧНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПОДХОДА ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

А.Л. Бухтиярова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *abuhtiyarova@mail.ru*

Для того чтобы процесс обучения математики был успешным и способствовал развитию и воспитанию ребенка, следует ставить на первое место его особенность, неповторимость индивидуальности и его личности. Каждый ребенок имеет различия, свои таланты, трудности, интересы и желания, поэтому наиболее важным при обучении становится умение учителя обучать и воспитывать детей в соответствии с их интересами и особенностями.

В методике преподавания математики есть три ключевых вопроса: что преподавать, как преподавать, зачем преподавать? Ранее общество нацеливало педагогическую общественность, что главное в образовании обучение, передача информации, но сегодня ставится иная главная составляющая в образовании – развитие. Личностно-ориентированный подход является одним из направлений развития.

Личностно-ориентированные технологии обучения, воспитания и развития ученика противопоставляют бездушному подходу к ребенку атмосферу любви, заботы, сотрудничества, создают условия для творчества и самоактуализации личности.

Личностно ориентированный подход к ученикам, включает:

- отказ от ориентировки на среднего ученика;
- поиск лучших качеств личности, умение видеть в каждом ученике уникальную личность, уважать ее, понимать, принимать, верить в нее;
- применение психолого-педагогической диагностики личности (интересы, способности, направленность, качества характера, особенности мыслительных процессов);
- создание для ребенка ситуации успеха, одобрения, поддержки, доброжелательности;
- исключение прямого принуждения;
- предоставление возможности и помощи детям в реализации себя в положительной деятельности.

Дидактическое обеспечение личностно-ориентированного процесса имеет основные требования:

- при изложении учебного материала нужно помнить, что он должен обеспечивать выявление содержания субъективного опыта ученика, включая его предшествующее обучение;
- получаемые знания должны быть направлены не только на расширение их объема, структурирование, интегрирование, обобщение предметного содержания, но и на преобразование личного опыта каждого учащегося,
- в ходе обучения необходимо постоянно согласовать опыт учащегося с научным содержанием задаваемых заданий;

- активное стимулирование учащегося к самооценосной образовательной деятельности должно обеспечить ему возможность самообразования, саморазвития, самовыражения в ходе овладения знаниями;
- учебный материал стоит организовывать таким образом, чтобы учащийся имел возможность выбора при выполнении заданий, решения задач;
- необходимость стимулирования учащихся к самостоятельному выбору и исполнению наиболее значимых для них способов проработки учебного материала;
- при введении знаний о приемах выполнения учебных действий необходимо выделять общелогические и специфические предметные приемы учебной работы с учетом их функций в личностном развитии;
- нужно обеспечить контроль и оценку не только результата, но главным образом процесса учения, то есть тех трансформаций, которые осуществляет учащийся, усваивая учебный материал;
- образовательный материал должен обеспечивать построение, реализацию, рефлексию, оценку учения как субъективной деятельности.

На практике сложно осуществить индивидуальный личностный подход к каждому ученику? Как изловчиться развивать личность каждого ребенка в соответствии с его природными способностями? К сожалению, однозначного и простого ответа на эти вопросы нельзя определить. На все это влияют такие факторы, как: личность учителя, индивидуальность ученика, специфика среды, в которой проходит обучение. Как же поддержать интерес детей к такой сложной науке, как математика? Необходимо тщательно продумывать объяснение нового материала, чтобы это было понятно и доступно для каждого ученика. Важно, чтобы они не просто слушали объяснение - лекцию, а являлись соучастниками открытия, доказательства, важного вывода, чтобы уже во время объяснения новой темы ученики почувствовали себя творцами. На этапе изучения новой темы, очень важно уделить каждому ученику свое внимание, опираться на более подготовленных к логическим рассуждениям сильных учеников, не забывая о слабых, задавать им вопросы, подталкивать к верным выводам. Только тогда, когда каждый ученик примет участие в рассмотрении новой темы, он будет по другому к ней относиться. Даже самую сложную науку можно изложить легко и понятно, уловив правильный подход. Для более успешного изучения, очень важно поставить ученика в ситуацию успеха. Это значит, что он должен почувствовать радость победы над задачей, почувствовал уверенность в себе, в своих знаниях и захотел дальше проявлять свою любознательность и заниматься математикой. Ведь, как правило, людям нравиться заниматься тем, что у них хорошо получается.

Бесспорно, личностно ориентированный подход к ученикам требует дифференцированного отношения к каждому ученику. Можно при проведении уроков условно разделить учеников на слабых, средних и сильных. Группы эти мобильные; задания выдаются или разные для разных групп, или часть заданий для всех, другая часть – для второй и третьей групп, и, наконец, самые сложные задания – для третьей группы.

Личностно-ориентированный подход целесообразнее применять на таких типах урока, как:

- открытие нового знания;
- урок совершенствования знаний;
- контроль знаний;
- урок обобщения знаний.

Для наиболее успешной реализации, используются следующие технологии.

На формирование знания изучаемого материала:

- нахождение пропущенного слова в формулировке определения, правила, аксиомы, теоремы, свойства;
- выбор правильной формулировки;
- определение истинности утверждения;
- нахождение в тексте ключевых слов и ориентиров;
- составление вопросов к тексту, рисунку, графику, схеме;
- нахождение материала по теме в дополнительной литературе.

На формирование понимания изученного материала:

- приведение примеров и контрпримеров к указанному высказыванию;
- комментирование или составление алгоритма решения какого-либо задания;
- прочтение словами схемы, свойства, рисунка и т. д.;
- описание основной идеи выполнения задания;
- выяснение связи между заданием и темой или с другим заданием;
- подведение итогов выполненной работы.

На формирование умений и навыков:

- выполнение практической работы;
- выполнение действия по алгоритму, правилу, образцу и т.д.;
- решение типовых задач, используя изученный алгоритм;
- расчленение задачи на подзадачи;
- проведение работы над ошибками;
- оценка результатов решения задания;
- выделение для себя из процесса решения новых знаний.

На развитие творчества:

- придумать и сделать иллюстрацию (модель) понятия, правила;
- выполнение практической работы исследовательского характера;
- придумать стихотворение, сказку, ребус или кроссворд;
- решение задач с недостающими или с избыточными данными;
- составление собственной задачи;
- разработка сообщения на семинар, конференцию или урок.

Как пример использования личностно-ориентированного обучения можно привести использование технологии «обучение в сотрудничестве». Для этого учеников следует поделить на группы разного уровня знаний или одноуровневые. Следует делить на группы так, что бы в каждой из них присутствовал лидер, ученик-координатор.

Для усвоения нового материала возможны два варианта организации работы. После вступительного объяснения:

1 вариант. Каждой группе предлагается одна (своя) проблема или одна серия вопросов, на которые должна ответить эта группа. Разбираются каждый с конкретным вопросом своей темы, затем идет общее обсуждение каждого вопроса так, чтобы любой ученик группы мог понять весь материал. Во время обсуждения учителю можно задавать любые вопросы. Когда команда готова, спрашивается любой ученик этой группы.

2 вариант. Учащимся предлагаются одинаковые задания по изучаемому материалу для всех групп. Каждый ученик в группе выполняет свое задание, но кроме консультации с учителем может осуществлять консультации с «экспертами» по этому вопросу из других команд. А затем общее обсуждение всех вопросов в своей команде. Проверка по усмотрению.

После завершения работы всеми группами организуется либо общее обсуждение работы (если задание было одинаковым для всех), либо рассмотрение заданий каждой группы, если задания разные.

Личностно-ориентированное обучение – способ организации обучения, в процессе которого обеспечивается всемерный учёт возможностей и способностей обучаемых, и создаются необходимые условия для развития их индивидуальных способностей.

Использование личностно-ориентированного метода в обучении позволяет проявить творчество учителя и ученика, повысить эффективность восприятия учебного материала, качество обучения учащихся, совершенствовать педагогическое мастерство учителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии. – М.: Народное образование. – 1998. – 256 с.
2. Сериков В.В. Личностно-ориентированное образование // Педагогика. – 1994. – №5.
3. Фирсов В.В. Дифференциация обучение на основе обязательных результатов обучения. – М.: Народное образование. – 1994. – 256 с.
4. Кравченко Т.В. Технология уровневой дифференциации в личностно ориентированном обучении математике // Математика в школе. – 2007. – №1.
5. Малова И.Е., Руденкова Н.М. Как «увидеть» на уроке математики личностно-ориентированное обучение? // Математика в школе. – 2007. – №4.

СРЕДА КОМПЬЮТЕРНОГО КЛАССА КОЛЛЕДЖА КАК РЕСУРС ФОРМИРОВАНИЯ ОБЩИХ КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ IT-СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Я.А. Ваграменко
ФГБНУ «Институт управления образованием РАО»
А.Н. Афонин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

Использование мобильных и персональных компьютеров (ПК) в профессиональной и повседневной жизни человека потребовала определенных изменений в системе образования личности. Появление и модернизация федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) обуславливает специфику деятельности современного специалиста, который всё больше привязан к телекоммуникационным технологиям. Основой современного ФГОС является системно-деятельностный подход, целью которого, является вовлечение обучающегося в определенный вид учебной деятельности. Эта учебная деятельность, которую выполняет сам ученик — делает его компетентным, то есть способным понять и воспроизвести определенный жизненный процесс. С развитием Интернет и появлением текстовых, визуальных, аудио и видео информационных ресурсов у каждого человека, в том числе и у обучающихся, появилась возможность исследовать определенный объект или процесс, посредством изучения его подробного описания на различных сайтах или через просмотр видеосюжета в онлайн. Такая компетенция проникает в самого юного любознательного ученика, который обзавелся смартфоном или ПК. С уверенностью можно сказать, что большинство начинаний такого ученика, обязательно будут проходить этап предварительного Интернет-исследования рассматриваемой предметной области. Рассмотрим ФГОСы по специальностям компьютерной направленности:

В требованиях к результатам освоения ППССЗ обучающийся специалист должен обладать следующими общими компетенциями напрямую связанными с работой за компьютером:

– 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах» – специальность техник-программист: ОК 4, ОК 5, ОК 6, ОК 9 [6].
– 10.02.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» – специальность техник по защите информации: ОК 2, ОК 4, ОК 5, ОК 6, ОК9 – дублируют предыдущую специальность и ОК 11, ОК 12 [7].

Причем для современного общества характерно применение пятой компетенции для достижения четвертой.

Итак мы видим что начало общих а впоследствии и профессиональных компетенций ФГОС прокладывают сами технологии, но задача преподавателя ИКТ дисциплин в среде компьютерного класса превратить процесс случайно-исследовательский и новаторский в процесс системный и алгоритмически отработанный.

Для достижения этой учебной цели в методическом багаже современного преподавателя есть масса технологий, методов, средств и приемов обучения,

которые позволят использовать среду компьютерного класса как ресурс формирования общих и профессиональных компетенций.

Рассмотрим ОК 4 более подробно: «Осуществлять поиск… информации необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач».

Едва ли сегодня среднестатистический студент пойдет в библиотеку и будет копаться в бумажных томах литературных источников? Он скорее откроет Google или Яндекс и посмотрит, что по интересующему его вопросу предложит всемирная сеть Интернет-ресурсов. А предложит она не мало.

Как среда компьютерного класса позволит усовершенствовать процесс поиска?

1. Поможет студентам научиться формировать правильные поисковые запросы.

Задания, выполняемые на уроках должны подразумевать наличие сложных поисковых запросов с последующим их составлением и анализом. В среде компьютерного класса эту деятельность актуально реализовывать посредством использования элементов поиска в Интернет, как в индивидуальной, так и групповой работе [1].

2. Обеспечит наличием собственных электронных ресурсов компьютерного класса. Не плохим подспорьем для формирования данной компетенции будет и наличие (в сетевом или локальном варианте) электронной библиотеки по изучаемой дисциплине или МДК (ПМ). Со временем наиболее нужная часть этой библиотеки плавно перекочует на собственные носители студентов, и пополнит их личные информационные накопления.

3. Работа в этой среде позволит накопить определенный практический опыт осуществления подобной деятельности. Как показывает практика, только многократное выполнение схожих заданий позволяет сформировать требуемые умения и навыки на должном уровне. Этого же мнения придерживаются и исследователи К.Д. Исманова, О.С. Абдуллаева, Д.А. Шокиров в своей статье: «Овладению умением способствует многократное повторение действий» [5].

Вторая значимая половина ОК 4 гласит «Осуществлять … использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач».

В среде компьютерного класса для формирования этой компетенции можно определить достаточно широкий перечень использования информации: изменения, кодирования, декодирования, обработка, передача, удаление, создание, накопление и др. В статье [3] авторы предлагают широкий перечень как самих видов электронных ресурсов так и приводят примеры практической реализации использования этих информационных ресурсов для подготовки и проведения уроков в среде компьютерного класса.

Проанализируем ОК 5. Следует отметить, что наличие компьютеров в классе уже подразумевает наличие информационно-коммуникационных технологий. Вот только ключевым словом компетенции является слово «использовать». Поэтому реализация компетенции ОК 5 в среде компьютерного класса требует ответа на вопрос: «Как и каким образом использовать информационно-коммуникационные технологии в среде компьютерного класса?».

В контексте нашего исследования можно сформулировать следующие ответы:

1. Как перечень информационных ресурсов этой среды.

Среда компьютерного класса, объединенная локальной сетью и выходом в Интернет может обеспечить каждого обучающегося в этом класса всеми необходимыми учебными информационными ресурсами: Интернет-ресурсами, локальными ресурсами, расположенными на выделенном сервере или общедоступном сетевом диске, ресурсами предоставляемыми преподавателем или учащимися класса.

2. Как средство информационного взаимодействия.

С помощью компьютерного класса можно организовывать различные способы информационного взаимодействия между участниками учебного процесса: студент-студент, учитель-студенты, студенты-учитель, компьютер-студенты. Все это можно осуществлять в специализированно-профессиональных формах с использованием ПК. Наиболее распространенные это обмен сообщениями, использование разделяемых файлов, чат, посещение профессиональных форумов, демонстрация одного ПК всем участникам образовательного процесса, в том числе наиболее популярная на сегодняшний день форма работы с использованием социальной сети «Вконтакте».

3. Как учебную информационную инфраструктуру.

Компьютерный класс может содержать дополнительное выделенное информационное пространство общего доступа, или может имитировать производственный отдел некого предприятия, в котором группа компьютерных рабочих мест объединена в свою инфраструктуру. Компьютерный класс это «веточка» локального дерева сетевой инфраструктуры колледжа. Как аналог сетевой инфраструктуры некого производственного отдела предприятия. Такая инфраструктура имеет четко пронумерованные компьютерные рабочие места учащихся – «листики» дерева, серверные сетевые диски – «плоды» нашего сетевого дерева, предоставляющие информационные ресурсы в общий доступ. Также существует возможность организации взаимодействия с другими компьютерами других компьютерных классов колледжа.

Объединяя эти ответы в единое целое, мы получаем информационное пространство среды компьютерного класса колледжа.

Исследуя ОК 6. следует обратить внимание на главную мысль компетенции – «…эффективно общаться…». В контексте деятельности IT-специалиста такое эффективное общение будет осуществляться в первую очередь посредством персонального компьютера и всех его возможностей информационного взаимодействия. Фомы этого общения были описаны в рамках исследования предшествующей компетенции. Что свидетельствует о взаимопроникновении и взаимодействии общих и профессиональных компетенций.

IT-специальности основываются на применении компьютеров, развитие которых происходит очень стремительно и технологии не отстают от них.

Почему наблюдается столь стремительное развитие ПК и технологий на них основанных? Можно выделить следующие основные предпосылки:

– это относительная дешевизна компьютеров и их окупаемость для профессиональных задач и задач бизнеса;
– простой интерфейс взаимодействия пользователя с ПК, посредством оконно-диалоговой системы и интуитивно понятной и развитой системы подсказок и всплывающих меню;
– возможность взаимодействовать с компьютером без посредников и ограничений;
– высокая скорость и мобильность обработки информации;
– надежность и простота обслуживания, основанные на магистрально-модульном принципе построения компьютеров и возможности замены неисправных компонентов;
– расширяемость и совместимость компьютеров – ПК может быть сконфигурирован в зависимости от поставленных задач и расширен дополнительным оборудованием (периферийными устройствами);
– наличие широкого спектра программного обеспечения для большинства сфер человеческой жизнедеятельности;
– возможность разработки нового ПО в зависимости от насущных потребностей.

Количество и сложность исполняемых задач компьютерам постоянно возрастает, растет и требовательность пользователей. Они хотят быстрей выполнять свои профессиональные и бытовые задания, смотреть он-лайн фильмы, играть все более красочные и мощные игры. Удовлетворять постоянно растущие потребности современного пользователя ПК можно только посредством повышения производительности ПК. А за ней следом идет и возможность обновления и развития используемых технологий, а также рождение новых, для обеспечения должной функциональности и применяемости ПК. Именно на адаптацию обучающихся к быстрой смене технологий в профессиональной деятельности и нацелена ОК 9.

Поэтому в рамках занятий в среде компьютерного класса важно осваивать не конкретные работы с программами или средами, а выделять особенности технологичных действий, формировать модели применения ПП и тогда незначительные изменения в программах и эволюция технологий не повлияют на объем и усвояемость учебного материала.

Следующие две общие компетенции, прописанные в ФГОС, для техников по защите информации значительно пересекаются с профессиональными компетенциями техников-программистов.

ОК 11 требует от будущего it-специалиста владения основными методами и средствами разработки ПО. Конечно, теоретические основы методов и средств разработки можно освоить и на лекциях без использования ПК. Но чтобы этими методами овладеть нужно как минимум написать программу (по хорошему и не одну) по каждому осваиваемому методу. И делать нужно это для каждого возможного (изучаемого и применяемого в колледже в рамках учебных дисциплин и профессиональных модулей) средства. Другими словами научить детей разрабатывать и программировать программы и приложения. Сде-

лать это возможно только в среде компьютерного класса, требуется для этого подбирать специфические методы обучения способствующие эффективному усвоению полученных практических навыков студентами. Примером может служить технология предложенная А.Ю. Милютиным: «Изучение программирования конкретных приложений ведется на трех уровнях: 1. “Делай, как я”, 2. “Делай лучше”, 3. “Делай сам”» [4, с. 20].

Согласно определению автоматизированной информационной системы (АИС) – «совокупность программно-аппаратных средств, предназначенных для автоматизации деятельности, связанной с хранением, передачей и обработкой информации» [8] подавляющее большинство современных автоматизированных систем базируется на ПК. Значит как минимум для нормальной его работы IT –специалист должен быть знаком с компонентами компьютера, мог при необходимости выявить сбой в технических средствах и устранить его. Далее такой специалист должен установить операционную систему, так как без неё компьютер это просто набор аппаратного железа. А уже после этого он должен выполнять инсталляцию, настройку и регламентные работы в этой автоматизированной системе. Поэтому для освоения ОК 12 в рамках занятий в среде компьютерного класса студенты должны освоить принципы работы и состав основных компонентов ПК, по возможности осуществить сборку ПК. В статье [3] авторы предлагают использовать виртуальную сборку ПК для лучшего усвоения профессиональных навыков входящих в состав формируемой компетенции. Не мене простое занятие это выбор, установка и сопровождение подходящей операционной системы. Эффективно формировать эту часть компетенции возможно посредством использования хостовых виртуальных машин, пример их использования описан в статье [2].

Остальные работы будут связаны со спецификой профессиональной деятельности и будут зависимы от конкретных возможностей используемого программного продукта и масштабности предприятия. В целом при должном уровне компетентности описанных этапов освоения автоматизированной системы и под чутким руководством старшего техника или интернет заключительный этап требуемой компетенции тоже будет освоен весьма успешно.

В IT-специальности среда компьютерного класса это практически будущее место работы такого специалиста. Согласно определению ресурса из Википедии – «все, что используется целевым образом, в том числе это может быть все, что используется при целевой деятельности человека…» [9] это та среда, где в ближайшем обозримом будущем it- специалист будет выполнять свою целевую и направленную профессиональную деятельность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афонин А.Н. Использование возможностей сети Интернет в среде компьютерного класса // Электронные ресурсы в непрерывном образовании: труды V Международного научно-методического симпозиума «ЭРНО-2016»(Анапа). – Ростов на Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – С.83-86.
2. Афонин А.Н. Проекты, реализуемые в среде компьютерного класса // Педа-

гогическая информатика. – 2016. – № 2. – С.19-25.
3. Ваграменко Я.А., Яламов Г.Ю., Афонин А.Н. Формирование информационной среды компьютерного класса, обеспечивающей креативную деятельность студентов колледжа // Педагогическая информатика. – 2017. – № 1. – С. 25-36.
4. Милютин А.Ю. «Из опыта преподавания программирования» // Деятельностные технологии как средство развития общих и профессиональных компетенций обучающихся: Сборник статей по обобщению опыта применения деятельностных технологий обучения преподавателями колледжа. – Новозыбков: ГБОУ СПО «Новозыбковский профессионально-педагогический колледж». – 2015. – 40 с.
5. Исманова К.Д., Абдуллаева О.С., Шокиров Д.А. Этапы процесса формирования учебных умений у учащихся колледжей // Молодой ученый. – 2015. – №12. – С.753-755.
6. ФГОС СПО по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах [Электронный ресурс] // (дата обращения: 27.10.2017); http://base.garant.ru/70731880/#ixzz4wmlhb0GK.
7. ФГОС СПО по специальности 10.02.03 Информационная безопасность автоматизированных систем [Электронный ресурс] // (дата обращения:27.10.2017); http://www.tolgas.ru/sveden/eduStandarts/10.02.03%20SPIB.pdf.
8. Автоматизированная информационная система [Электронный ресурс]//(дата обращения: 27.10.2017); https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/334809.
9. Ресурс [Электронный ресурс] // (дата обращения: 27.10.2017); https://ru.wikipedia.org/wiki/Ресурс

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МУЛЬТИМЕДИА ТЕХНОЛОГИЙ НА УРОКАХ ФИЗИКИ

Е.Д. Ваккер, студент
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»
e-mail: *evakker96@mail.ru*

Физика считается одним из сложнейших предметов в школе. На сегодняшней день ситуация такова, что каждый проводимый урок несет в себе огромное количество новой информации, которую ученик должен не только понять, но и уметь использовать. Но стоит отметить, что применение компьютерных технологий дает возможность учителям создать более комфортные условия для усвоения учениками нового материала.

В начале этого учебного года мы проходили производственную практику в школе, после которой я поняла, что для ученика стандартный комбинированный урок не интересен, поэтому главная задача педагога состоит в умении заинтересовать и мотивировать учащегося к обучению. А сделать это возможно при помощи современных технологий, которые позволяют повысить наглядность, расширяют возможности демонстрации опытов, которые затруднительно или невозможно провести в учебном заведении, а, следовательно, делают урок более содержательным и интересным. Использование персонального компьютера, проекта и интерактивной доски эффективно на всех этапах процесса обучения:

- объяснение нового материала;
- повторение ранее изученного;
- закрепление знаний;
- контроль знаний, умений и навыков.

Для проведения уроков учитель может использовать различные возможности компьютерных технологий, например, для демонстрации иллюстраций текстов, формул, редких фотографий, схем, для иллюстрации методики решения задач разного уровня сложности, демонстрации фрагментов видеофильмов.

На уроке физики применяются следующие элементы мультимедиа: презентации, видеоролики и фрагменты из фильмов, анимации, моделирующее физические явления, электронные учебники.

Наиболее эффективным и чаще всего применяемым в школе средством мультимедиа является презентация, используя которую в ходе урока у учителя появляется возможность акцентировать внимание учащихся на главных аспектах изучаемого материала путем внедрения в урок анимации и различных видеофрагментов. Презентация позволяет учителю сочетать разнообразные средства обучения, которые способствуют более глубокому и осознанному усвоению изучаемого материала, экономии времени на уроке, насыщению его информацией. Одно из главных преимуществ презентации состоит в том, что учитель, заранее продумывая структуру урока и исходя из особенностей класса, имеет возможность подобрать определенные видео материалы, графические изображения, с одной стороны, а с другой – представить часть материала в виде текста, тем самым добиваясь максимального учебного эффекта. Когда помимо

устного материала одновременно используются мультимедиа презентации, на уроке усиливается взаимодействия между учителем и учеником, при котором поощряется стремление учащегося высказывать мысли «своими словами», что повышает заинтересованность учащихся в получении более высокого результата. Уроки такого плана вызывают больший интерес у школьников, так по своему содержанию они становятся более интересными и зрелищными. Краткие текстовые вставки на слайдах позволяют сократить время рассмотрения основных пунктов темы, тем самым высвобождая больше время на практическую часть урока. Преимущество использования презентации состоит в то, что учитель может выставить ее на сайт, что позволяет учащимся в любой момент восполнить свои знания.

Все мы знаем, что многие школы не имеют в наличии оборудования, необходимого для проведения экспериментов, поэтому у учащихся возникают трудности при изучении явлений, которые не могут быть продемонстрированы. Многие изучаемые физические понятия и законы требуют от учеников достаточно хорошо развитых умений абстрагирования, обобщения изучаемого материала, поэтому не все способны мысленно их представить, и в такой ситуации на помощь учителю приходят электронные средства обучения, использующие звуковые и визуальные эффекты, что способствует лучшему усвоению информации.

Так, при изучении темы «Состав атомного ядра. Изотопы. Ядерные силы» будет полезно посмотреть видеофрагмент «Ядерные силы». Это учебный фильм советских времен, в котором рассматривается состав ядра, сильные и слабые электрические взаимодействия.

Из данного видеофрагмента учащиеся узнают, что ядра любых элементов состоят из протонов и нейтронов, которые в итоге были названы нуклонами, что между протонами действуют электромагнитные силы отталкивания, которым противодействуют ядерные силы превышающие электромагнитные в миллионы раз, что существуют сильные и слабые электрические взаимодействия, гравитационные и электромагнитные. К слабым взаимодействиям относиться распад частиц и их превращения в ядрах атомов, сильное взаимодействие является ответственным за силы притяжения межу протонами, гравитационное взаимодействие – определяет движение и взаимодействие космических тел, электромагнитное взаимодействие – влияет на структуру тел, строение атомов и молекул.

При использовании видео не стоит забывать о том, что учитель является главным действующем лицом на уроке, а, следовательно, использование таких средств мультимедиа должно быть разумным, поэтому во время показа всегда можно и нужно делать паузы, сопровождаемые комментариями учителя. После просмотра следует обсудить увиденное, вспомнить наиболее важные аспекты и повторить их, после чего преступить к обсуждению вопросов.

Когда учитель на своих уроках преподносит учащимся материал не только в виде текста, но и с использованием видеороликов, или анимации, учитывая психолого-возрастные особенности учащегося, это способствует повышению эмоционально-психологического фона в классе. Можно сказать, что гораздо

легче усваивать материал, преподнесенный в аудиовизуальной и интерактивной форме, нежели в текстовой.

Например при изучении темы «Импульс тела. Закон сохранения импульса», на уроке целесообразно использовать несколько анимаций и роликов:

1. Два пластилиновых шарика движутся навстречу друг другу. После столкновения можно заметить, что они стали двигаться как единое целое.

По окончанию ролика учитель вместе с учениками анализирует уведенное, рассматриваются и приводятся другие случаи, после чего делается вывод о том, что при неупругом ударе механическая энергия системы частично или полностью переходит во внутреннюю энергию тел (происходит их нагревание) [3].

2. Два резиновых мячика движутся навстречу друг другу. После столкновения они отталкиваются и продолжают движение в противоположных направлениях. В данной демонстрации должно быть рассмотрено 2 ситуации:

a) На экран выводиться анимация, в которой два мячика движутся на встречу друг другу с одинаковой скоростью, их массы отличаться в два раза, которые после столкновения продолжают свое движение, но уже в противоположные стороны. После просмотра делается вывод о том, что при столкновении тел, которые движутся с одинаковыми скоростями, масса которых отличается в два раза, тело с большей массой приобретает меньшую скорость, тело с меньшей массой приобретает большую скорость [3].
b) На экран выводить анимация, где два одинаковых мячика, скорости, которых отличаются в два раза, движутся в одном направлении, т.е. один мяч догоняет другой. После просмотра делается вывод о том, что при движении двух одинаковых тел, скорости которых отличаются в два раза, тело, которое догоняло другое, приобретет меньшую скорость, чем второе [3].

Таким образом, если при подаче материала учитель использует несколько способов его объяснения, происходит переключение уровней восприятия, что позволяет максимально долго удерживать внимание учеников на предмете, избегая их перенапряжения в ходе урока.

Когда в школе я услышала понятие «Электронный учебник», то задалась вопросом в чем же состоит его отличие от школьного учебника? Оказывается, электронный учебник представляет собой комплект обучающих, контролирующих, моделирующих и других программ, размешенных в компьютере. В нем отражено научное содержание учебной дисциплины, чаще всего его содержание дополняет материал, изложенный в учебном пособии, его удобно использовать при поиске нужной информации.

Использование компьютерного тестирования повышает эффективность учебного процесса, активизирует познавательную деятельность школьников. Тесты могут представлять собой варианты карточек с вопросами, ответы на которые ученик записывает в тетради или на специальном бланке ответов.

В школе я провела тест по теме «Кинематика», который был сделан в форме презентации, учащимся нужно было выбрать правильный ответ и записать его в тетради с подробным решением.

1. Тело падает с некоторой высоты. В момент падения на землю его скорость 30 м/с. Найдите высоту, с которой падает тело. (g=10 м/с^2)?

A) 41 м.
B) 42 м.
C) 45 м.
D) 43 м.
E) 44 м.

2. Тело движется равномерно по окружности. Как изменится его центростремительное ускорение при уменьшении скорости равномерного движения в 2 раза и увеличении радиуса окружности в 4 раза?

A) Не изменится.
B) Увеличится в 4 раза.
C) Уменьшится в 2 раза.
C) Увеличится в 8 раз.
E) Уменьшится в 16 раз.

3. Какая сила заставляет падать все тела на поверхность земли?

A) Вес тела.
B) Сила трения.
C) Сила давления.
D) Сила тяготения.
E) Сила упругости.

4. Скорость яблока, упавшего с дерева, в момент падения на землю 10 м/с. С какой высоты упало яблоко?

A) 5 м.
B) 1 м.
C) 4 м.
D) 2 м.
E) 9 м.

5. Камень брошен горизонтально со скоростью 5 м/с. Через 0.8 с он упал на землю. С какой начальной высоты был брошен камень?

A) 2.1 м.
B) 3.2 м.
C) 4.1 м.
D) 8.1 м.
E) 4.6 м.

6. Ускорение тела, равномерно движущегося по окружности, называется...

A) Криволинейное.
B) Относительное.
C) Центробежное.
D) Центростремительное.
E) Равнопеременное.

7. Автомобиль движется по закруглению дороги радиусом 100 м со скоростью 54 км/ч. Какова величина центростремительного ускорения автомобиля?

A) 1.25 м/с2.
B) 2.25 м/с2.
C) 3.25 м/с2.
D) 4.25 м/с2.

8. Тело движется по дуге окружности, радиус которой 50 м. Найдите линейную скорость движения тела, если угловая скорость равна 3.14 рад/с.

A) 157 м/с.
B) 15.7 м/с.
C) 7.9 м/с.
D) 14.4 м/с.
E) 17.1 м/с.

9. Во сколько раз надо увеличить начальную скорость брошенного вверх тела, чтобы максимальная высота подъема увеличилась в 4 раза?

A) В 4 раза.
B) В 6 раз.
C) В 16 раз [2].
D) В 2 раза.
E) В 8 раз.

Подобные задания способствуют развитию у учащихся вычислительных навыков, логического мышления, умению решать задачи по схемам или алгоритмам. Можно сказать, что систематическое применение тестовых заданий разных видов на уроках позволяет быстро и достаточно достоверно оценивать успешность обучения.

Проанализировав и испытав на практике разные виды использования мультимедиа на уроках физики, с уверенностью можно сказать, что их применение позволяет стимулировать интерес учащихся к физике, и, в конечном счете, повысить качество знаний по этому предмету.

ЛИТЕРАТУРА

1. https://www.youtube.com/
2. Универсальные поурочные разработки по физике: 9 класс. – 2-е изд., переаб. и доп, Волков В.А. – М.:ВАКО, 2010.– 368 с.
3. Физика. 9 кл.: учебник / А.В. Перышкин, Е.М. Гутник. – М.: Дрофа, 2014. – 319 с.

УДК 37.02:519.85

ВОСПРОИЗВОДЯЩИЕ, ЧАСТИЧНО-ПОИСКОВЫЕ, ТВОРЧЕСКИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЯХ

В.С. Вакульчик, к.пед.н., доц.

Полоцкий государственный университет

e-mail: *vaculchik@tut.by*

В исследовании выделены три формы самостоятельной работы студентов (СРС): воспроизводящие, частично-поисковые и творческие. Представлены содержательно-методические аспекты их проектирования. Для каждой из названных форм указаны виды СРС, которые позволяют реализовать воспроизводящие, частично-поисковые и творческие самостоятельной работы в процессе обучения математике. Представлены соответствующие методические средства организации самостоятельной познавательной деятельности студентов, обеспечивающие достижение решения задачи формирования их познавательной самостоятельности. Результаты исследований носят практико-ориентированный характер, могут быть полезны начинающим преподавателям, аспирантам.

Ключевые слова: процесс обучения математике, самостоятельная работа студентов, познавательная самостоятельность, учебно-методический комплекс.

Актуальность и значимость выделенной к исследованию проблемы обуславливается необходимостью проектирования и реализации математической подготовки студентов технических специальностей как целостного процесса освоения и овладения студентами социально-личностными, академическими и профессиональными компетенциями. В этой связи, требуется отдельная корректировка всех компонентов процесса обучения математике и, в частности, организации и управления самостоятельной познавательной деятельностью.

Как известно, психологами (А.М. Матюшкин [1], С.Л. Рубинштейн [2] и др.) экспериментально доказано, что мышление человека как психический процесс протекает на двух уровнях мышления: репродуктивном и продуктивном. Соответственно двум уровням мышления (В.П. Беспалько [3], П.И. Пидкасистый [4] и др.) выделяют следующие три уровня познавательной самостоятельности: репродуктивный, частично-поисковый, учебно-творческий. На этом основании определяют четыре типа самостоятельных работ студентов (СРС). Репродуктивному уровню соответствуют воспроизводящие и реконструктивные самостоятельные работы студентов. Частично-поисковому вариативные или эвристические СРС, а учебно-творческому – творческие или исследовательские самостоятельные работы. Автором предлагается использовать упрощенную классификацию СРС, согласованную с уровнями познавательной самостоятельности, разделив их на воспроизводящие, частично-поисковые и творческие. Предлагаемая типология позволяет, в условиях реального процесса учитывать соотношение воспроизводящих и творческих процессов при проведении самостоятельной работы и строить эту работу в условиях дифференцированного подхода, реализуемого через методику деления студенческой аудитории на три типологические группы, согласованные с уровнями познавательной самостоятельности студентов.

Выполнение требований стандарта по формированию соответствующих декларируемых компетенций не представляется возможным без формирования у студентов познавательной самостоятельности репродуктивного уровня. Овладение студентами навыками и умениями выделенного уровня возможно при методически грамотном и эрудированном подходе к этому со стороны педагога, а также при наличии специально подобранной системы заданий. Важным возможным содержательно-методическим направлением решения поставленной задачи представляется разработка заданий минимально-базового уровня для осуществления контроля стандарта математических знаний. Названные задания требуют от студентов самостоятельной познавательной деятельности воспроизводящего характера. Предлагаемый методический подход позволяет, с одной стороны, унифицировать требования лектора и ассистента к математическим знаниям минимального уровня, с другой стороны, студенты, зная о жестком требовании достижения выделенного базового уровня, заранее готовятся к выполнению его заданий, внимательно относятся к получению необходимых знаний, умений и навыков на лекционных и практических занятиях. Необходимо подчеркнуть, что типовые задачи указанного уровня выдаются лектором, обязательно включаются в содержание и структуру аудиторных занятий, текущих контрольных мероприятий. Как показывает анализ имеющегося опыта, важным условием, обеспечивающим реальность овладения математической информацией студентами на требуемом базовом уровне, является свободное владение ими таблицами эквивалентных функций, производных и интегралов.

Самостоятельные работы воспроизводящего характера как раз формируют у студентов познавательную самостоятельность репродуктивного уровня, необходимую для овладения базовым уровнем. Они выполняются на основе образца, подробной инструкции, известного алгоритма. К воспроизводящим

СРС относятся такие их виды как выполнение упражнений по образцу; решение задач, аналогичных обучающим задачам, представленным преподавателем во время лекционных и практических занятий, в учебно-методических комплексах (УМК) и других источниках. Воспроизводящий характер носят СРС на заполнение таблиц, схем, несложных тестов после изучения материала, выполнение контрольных работ, заданий минимально-базового уровня, аналогичных нулевому варианту, имеющемуся в УМК и т.п. Характерной чертой этих работ является то, что сам способ, принцип решения заданий представлены в готовом виде. Воспроизводящие СРС выполняют функцию накопления сведений, закрепления способов деятельности. Они создают необходимые условия для перехода к выполнению заданий, требующих от обучающегося познавательной самостоятельности и активности более высокого уровня. Познавательная деятельность осуществляется на репродуктивном уровне и направлена на усвоение готовых знаний, воспроизведение уже усвоенных практических методов, освоение и овладение студентами минимально необходимыми социально-личностными, академическими и профессиональными компетенциями. Нельзя недооценивать роли воспроизводящих самостоятельных работ. Они важны, особенно, при введении новых понятий, для формирования первоначальных представлений о новой математической теории, для отработки основных навыков и умений по данной теме, необходимых для решения определенного класса задач, а также подготовки к выполнению частично-поисковых и творческих СРС. Самостоятельность обучающегося проявляется в узнавании, осмыслении и запоминании материала, включает в себя умение делать выписки из различных источников, решать задачи на базовом уровне, предполагает прочное знание таблиц, основных правил и т.п. Основной целью включения воспроизводящих СРС в процесс обучения математике является формирование и закрепление у обучающихся опорных навыков решения заданий базового уровня. Указанные задания выделены в спроектированных нами по всем разделам высшей математики учебно-методических комплексах ([5], [6], [7] и др.).

В ходе частично-поисковых самостоятельных работ усваивается не только готовая информация, но идет продуктивный процесс поиска новой информации, требующий привлечения ранее приобретенных знаний, умений и навыков, установления внутри-предметных и межпредметных связей. К частично-поисковым СРС отнесем составление плана, конспектирование теоретического материала, отведенного для самостоятельного изучения, структурирование математического материала, аналитический поиск ответа на вопросы преподавателя во время эвристической беседы или решения новой задачи, подготовку фрагмента лекции, выполнение заданий прикладного уровня, внеаудиторных контрольных работ и т.п. В результате применения СРС выделенного типа приобретается опыт поисковой деятельности, что подготавливает обучающегося к решению нетрадиционных задач, сложных задач прикладного характера, к научно-исследовательской работе, т.е. к творческой познавательной деятельности. Познавательная деятельность протекает, как преобразующе-воспроизводящая на частично-поисковом уровне познавательной самостоятельности и направлена на усвоение информации из самых разных источников. Самостоятельное по-

знание осуществляется через активное восприятие информации, так как обучающийся, отыскивает особый, своеобразный путь, сотканный из различных элементов тех познавательных навыков и умений, которые закрепились в опыте прежней, ранее выполненной самостоятельной деятельности частично-поискового характера.

Самый высокий уровень познавательной самостоятельности представляет собой творчество, связанное с поиском новых, иногда нестандартных принципов и методов решений поставленной проблемы. В основе СРС творческого характера лежит исследовательский метод обучения, сущность которого состоит в организации поисковой, творческой деятельности на уровне учебно-творческой познавательной самостоятельности по решению новых для них проблем. К творческим самостоятельным работам отнесем выполнение аудиторных и внеаудиторных СРС на творческом уровне, выполнение сложных задач прикладного характера во внеаудиторных контрольных работах, на экзамене, участие в олимпиадах, конференциях, НИРС и т.п. Самостоятельные работы такого рода требуют от обучающегося анализа нестандартных ситуаций, получения новой информации. Студент должен самостоятельно осуществить выбор средств и методов решения поставленных перед ним задач. Отличительной особенностью творческих СРС является творческий поиск, выбор способа деятельности и открытие обучающимся новых для себя знаний. При этом происходит продуктивный процесс получения новой информации, приобретается опыт творческой деятельности, процессуальная сторона познавательной самостоятельности формируется на высоком продуктивном уровне. Обучающиеся осознают, что научная работа, наряду с учебной, является составной частью подготовки будущего специалиста, что нельзя добиться заметных успехов в любой сфере деятельности без опоры на упорный труд и соответствующие научные знания, на специальную технологию умственного труда.

В педагогической практике обучения математике на технических специальностях весьма важно умело использовать все выделенные формы СРС. При этом учебный процесс необходимо строить так, чтобы осуществлялся постепенный переход от воспроизводящих самостоятельных работ к частично-поисковым и творческим, в зависимости от темы, дидактических целей и задач, состава аудитории и т.п. Как показывает опыт и проведенные экспериментальные исследования, постепенное, последовательное, планомерное вовлечение обучающегося в познавательную самостоятельную деятельность всех уровней позволяет добиться того, что все обучающиеся работают на максимальном для себя уровне самостоятельности и своих возможностей. Выбрав формы и виды СРС, преподаватель подбирает методы и методические приемы использования этих работ на каждом конкретном занятии. В результате, получаем такое обучение математике, где СРС выступает не как случайное событие в учебном процессе, а как научно организованная система самостоятельной работы студентов. Внедрение в учебный процесс самостоятельной работы студентов, обеспечивающей научную организацию изучения каждого отдельного модуля курса «Математика», эффективный контроль позволяют последовательно и це-

ленаправленно вовлекать студентов в активную, ритмичную самостоятельную познавательную деятельность в соответствии с их интересами и способностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матюшкин А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении / А.М. Матюшкин – М.: Педагогика, 1972. – 208 с.
2. Рубинштейн С.Л. Принципы и пути развития психики / С.Л. Рубинштейн – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 354 с.
3. Беспалько В.П. Слагаемые педагогической технологии / В.П. Беспалько – М: Педагогика, 1989. – 192 с.
4. Пидкасистый, П.И. Самостоятельная деятельность школьников в обучении / П.И. Пидкасистый – М.: Педагогика, 1980. – 240 с.
5. Вакульчик В.С., Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной учебн.-метод. комплекс для студ. техн. спец. / В.С. Вакульчик – Новополоцк : ПГУ, 2007. – 352 с.
6. Вакульчик В.С., Яско Ф.Ф., Жак В.А., Завистовская Т.И., Мателенок А.П. Определенный интеграл. Функции нескольких переменных. учеб.-метод. комплекс для студентов техн. спец. / В.С. Вакульчик [и др.]; под общ. ред. В.С. Вакульчик – Новополоцк: ПГУ, 2011. – 244 с.
7. Вакульчик В.С., Жак В.А.,Завистовская Т.И., Мателенок А.П. Элементы векторной алгебры. Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве: учеб.-метод. комплекс для студ. техн. спец. / В. С. Вакульчик [и др.]; под общ. ред. В. С. Вакульчик – Новополоцк: ПГУ, 2009. – 220 с.

УДК 378

ФОРМИРОВАНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ У БУДУЩИХ БАКАЛАВРОВ ЭКОНОМИКИ

Д.А. Власов, к.п.н., доц.
ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова»
e-mail: *DAV495@gmail.com*
А.В. Синчуков, к.п.н., доц.
ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова»
e-mail: *AVSinchukov@gmail.com*

В центре внимания статьи методы и модели теории игр, являющиеся элементами нового содержания математической подготовки будущего бакалавра экономики. Установлена связь категорий «Теоретико-игровая модель», «Теоретико-игровое моделирование», «Оптимальная стратегия», «Цена игры» с формированием модельных представлений о конфликтных ситуациях у будущих бакалаврах экономики и инновационными компонентами профессиональной компетентности будущего бакалавра экономики, связанными с принятием оптимальных решений в условиях риска и неопределенности.

Ключевые слова: бакалавр экономики, конфликтная ситуация, математическая подготовка, методическая система, моделирование, содержание обучения, теории игр.

Одним их направлений функционирования и развития методической системы прикладной математической подготовки будущего бакалавра экономики [1] в экономическом университете является актуализация содержания обучения [2], структурными элементами которого являются различные методы моделирования и прогнозирования экономики, в том числе методы и модели теории игр. Новым и востребованным элементом содержания математической подготовки будущего бакалавра экономики в экономическом университете выступает теория игр – раздел исследования операций, позволяющий принимать оптимальные решения в условиях риска и неопределенности, анализировать различные социально-экономические ситуации, характеризующиеся конфликтом, систематическое изучение которого положено в монографии Джон фон Неймана и Оскара Моргенштерна [3].

В условиях информатизации и математизации экономики и экономических исследований, многообразия количественных отношений между экономическими агентами, распространение теоретико-игровых методов и моделей в практику экономических исследование, включение теории игр в методическую системы математической подготовки позволяет акцентировать внимание будущих бакалавров экономики на новые подходы в области математического и имитационного моделирования. Принимая во внимание практическую реализацию интеграции информационных и педагогических технологий [4] в системе прикладной математической подготовки бакалавра экономики в экономическом университете позволяет в учебном процессе строить и исследовать теоретико-игровые модели анализа конфликтных ситуаций, количественно оценивать риски различной природы [5] и формировать модельные представления о конфликтных ситуациях.

Приведем исследование равновесия Нэша в биматричных играх в качестве примера реализации интеграции информационных и педагогических технологий. Его многоаспектное изучение на факультете математической экономики, статистики и информатики Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова стало возможным благодаря внедрению в учебный процесс в рамках учебных дисциплин «Теория игр» и «Теория принятия решений» новой технологии моделирования и визуализации Wolfram Demonstration Project и других Wolfram-технологий.

Среди результатов содержательного и методического анализа теоретико-игровых моделей приведем систему типовых задач, направленную на формирование модельных представлений о конфликтных ситуациях. Созданная система типовых задач имеет особое значение для развития инновационных компонентов профессиональной компетентности, связанных с принятием оптимальных решений в условиях риска и неопределенности.

Типовая задача 1. «Формализация конфликтной ситуации в виде теоретико-игровой модели».

Типовая задача 2. «Уточнение вида теоретико-игровой модели конфликтной ситуации в соответствии с общей классификацией теоретико-игровых моделей».

Типовая задача 3. «Подбор конфликтной ситуации под заранее заданную теоретико-игровую модель».

Типовая задача 4. «Учет особенностей информационной среды при анализе теоретико-игровой модели конфликтной ситуации».

Типовая задача 5. «Выбор критерия оптимальности при анализе конфликтной ситуации».

Типовая задача 6. «Выбор и реализация метода внутримодельного исследования теоретико-игровой модели конфликтной ситуации».

Типовая задача 7. «Содержательная трактовка полученного результата исследования теоретико-игровой модели конфликтной ситуации» (оптимальная стратегия, множество оптимальных стратегий, цена игры, нижняя цена игры, верхняя цена игры, равновесное состояние, оценка ожидаемого дохода, риска, эффективности и т.д.).

В практике реализации перечисленных типовых задач нами использованы элементы проектного метода с применением сервисов компьютерной математики [8], а также достижения в области педагогического проектирования новых учебных курсов [9]. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом тесно связаны с традиционными методами оптимизации [10], однако открывают новые возможности в формировании модельных представлений о конфликтных ситуациях, необходимых будущим бакалаврам экономики для продуктивной работы в условиях развития цифровой экономики в РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов Д. А., Синчуков А. В. Стратегия развития методической системы математической подготовки бакалавров [Текст] // Наука и школа. – 2012. – № 5. – С. 61-65.
2. Власов Д. А., Синчуков А. В. Новое содержание прикладной математической подготовки бакалавра [Текст] // Преподаватель XXI век. – 2013. – Т. 1 – № 1. – С. 71-79.
3. Neumann J. von., Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior. [Текст] – Princeton: Princeton Univ. Press, 1944. – 625 p.
4. Власов Д. А., Синчуков А. В. Интеграция информационных и педагогических технологий в системе математической подготовки бакалавра экономики [Текст] // Современная математика и концепции инновационного математического образования. – 2016. – Т. 3. – № 1. – С. 208-212.
5. Тихомиров Н. П., Тихомирова Т. М. Риск-анализ в экономике. [Текст] – М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2010. – 318 с.
6. Власов Д. А., Синчуков А. В. Равновесие Нэша в биматричных играх: технология моделирования и визуализации Wolfram Demonstration Project [Текст] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2016. – Т. 12. – № 4. – С. 209-216.

7. Власов Д. А., Синчуков А. В. Теория игр в системе прикладной математической подготовки бакалавра экономики [Текст] // Ярославский педагогический вестник. – 2017. – № 3. – С. 112-116.
8. Муханов С. А., Муханова А. А. Проектный метод при обучении математике в вузе с использованием сервисов компьютерной математики // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. [Текст] – 2013. – № 15. – С. 208-211.
9. Муханов С. А., Нижников А. И. Проектирование учебного курса. [Текст] // Педагогическая информатика. – 2014. – № 4. – С. 39-46.
10. Лабскер Л. Г., Бабешко Л. О. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом. [Текст] – М.: Дело, 2001. – 464 с.

ПРОБЛЕМНОЕ ОБУЧЕНИЕ КАК УСЛОВИЕ ТВОРЧЕСКОГО ОСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ

Е.С. Волченкова
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»
МБОУ Гимназия г. Ливны
e-mail: *zhenya.manankova@mail.ru*

Современная российская школа предполагает использование таких образовательных технологий и программ, которые будут вызывать у ребенка достаточный интерес к процессу обучения. Решение этой задачи требует взаимосвязи академических знаний и практических умений.

Главный, интересующий вопрос любого учителя, – как сделать уроки математики интересными, запоминающимися и нескучными для детей? Важное значение имеют типы уроков и какие технологии и методы обучения на них применяются. В данной статье я хочу остановиться более подробно на проблемном методе обучения математике.

Развитие интеллекта и творческих способностей, формирование прочных знаний – вот основная цель проблемного обучения.

Технология проблемного обучения строится на основе продуктивного, творческого мышления и «стартом» такого мышления является проблемная ситуация. Проблемные ситуации в основном создаются в процессе обучения учителем, но особенно ценно, когда инициатива исходит от самих учащихся, а учителю остается лишь превратить возникший у них вопрос в проблемную ситуацию. Важно помнить, что, то неизвестное, которое нужно «открыть» для себя ученику при разрешении проблемной ситуации, должно способствовать формированию действительно важных знаний и умений; задание должно вызывать у ученика интерес.

На своих уроках математики в 5 классе я стараюсь сочетать традиционный метод обучения с проблемным методом. Так же в своей работе использую разные методы и приемы работы: работа по строгому алгоритму, самостоятельная работа с учебником, фронтальная работа, работа в парах, индивидуальная работа, самопроверка, взаимопроверка.

В своей работе организацию учебного процесса стараюсь выстроить по принципу проблемности, чтобы отношение учащихся к осознанию проблемы было вдумчивым и более осмысленным.

Например, при изучении темы «Распределительное свойство умножения относительно сложения» в 5 классе можно рассмотреть следующие задачи:

Задача №1. В ботаническом саду посажены деревья в 15 рядов. На каждом ряду посажено по 7 слив и по 8 вишен. Сколько деревьев посажено в ботаническом саду?

Решение.

1 способ.

(7+ 8) ·15 = 225;

2 способ.

7 ·15 + 8 ·15 = 225.

Ответ: 225 деревьев.

Задача №2. Велосипедист и мотоциклист одновременно выехали навстречу друг другу из двух разных пунктов. Скорость велосипедиста 12 км/ч, а скорость мотоциклиста 50 км/ч. Через 2 часа они встретились. Какое расстояние между пунктами, из которых выехали велосипедист и мотоциклист?

Решение.

1 способ.

(12 + 50) ·2 = 124;

2 способ.

12 · 2 + 50 ·2 = 124.

Ответ: 124 км.

В результате сравнения решения данных задач учащиеся должны прийти к следующим выводам:

- 1-й способ решения всех задач одинаков, 2-й – тоже.
- выражения, полученные при решении задач, отличаются друг от друга только числовыми данными;
- выражения, полученные при решении задачи №1 и № 2 1-м и 2-м способами, отличаются друг от друга числом арифметических действий и порядком действий;
- числовые значения выражений, полученные при решении задачи №1 2-мя способами, одинаковы.

Можно сделать такую запись:

(7+ 8) ·15 = 7 ·15 + 8 ·15.

(12 + 50) ·2 = 12 · 2 + 50 ·2.

Далее предлагаем ученикам заменить одинаковые цифры в полученных выражениях одинаковыми буквами. В результате получено два одинаковых выражения:

(а + в) ·с = ас + вс.

Ученики сначала сами, а затем с моей помощью формулируют этот закон словесно и на примерах новый закон умножения: распределительный закон умножения относительно сложения.

Благодаря этому примеру ученики убеждаются в нужности этого закона: он облегчает вычисления.

Ситуация, когда ученик приходит в затруднение при решении какой либо задачи, приводит к пониманию, что у него недостаточно знаний для решения подобного примера и как следствие вызывает интерес к приобретению новых знаний.

Таким образом, основываясь на своем достаточно небольшом педагогическом опыте, могу сказать, что проблемные уроки эффективны и нравятся детям. Я считаю, что проблемное обучение необходимо, так как оно формирует творчески развитую личность, заставляет мыслить логически, находить решения самых различных проблемных ситуаций, планировать и делать самостоятельных выводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шафигулина Л.Р. Проблемное и игровое обучение. – Волгоград: Учитель, 2009. – 89 с.
2. Чуракова Р.Г. Практические задачи по математике. – М.: Академкнига, 2007. – 112 с.
3. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Математика: 5 класс: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана – Граф, 2013. – 304 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРОБЛЕМНОГО ОБУЧЕНИЯ НА ЗАНЯТИЯХ ФИЗИКЕ

Л.В. Воробьева, магистрант
Северо-кавказский федеральный университет
e-mail: *laravorob@yandex.ru*

Современный социальный заказ системе образования связан с формированием у выпускников личностных качеств, которые позволили бы ему реализовать свои способности, достичь поставленных жизненных целей. Выпускники должны владеть основами современной физики, уметь ориентироваться в научно-технической литературе, самостоятельно и быстро находить нужные сведения, уметь применять свои знания на практике. В связи с этим, главной целью преподавателя сегодня является формирование необходимого обучающемуся набора компетенций, которые позволили бы ему стать успешным членом общества.

В процессе своей педагогической деятельности, я применяю элементы проблемного обучения на уроках физики, что считаю одним их эффективных путей достижения этой цели.

Проблемное обучение – система следующих действий: организация проблемных ситуаций, формулировка проблем, оказание помощи обучающимся в их решении, проверка этих решений и руководство процессом систематизации и закрепления приобретенных знаний.

Таким образом, сущность технологии проблемного обучения заключается

в создании проблемных ситуаций, осознании, принятии и разрешении этих ситуаций обучающимися при их максимальной самостоятельности.

Центральным элементом проблемного обучения считается проблемная ситуация, основу которой составляет противоречие, приводящее к возникновению проблемы. Она содержится в таком задании, для выполнения которого нет готовых средств, знаний недостаточно и это вызывает необходимость усвоения новых знаний и способов его выполнения. При этом возникает противоречие между знанием и незнанием, что является исходным моментом появления проблемы.

Чтобы студент включился в решение проблемы, она должна находиться в зоне ближайшего развития. После принятия проблемы к решению и ее четкой формулировки, отделяющей известное от неизвестного, проблемная ситуация превращается в проблемную задачу. В процессе ее решения происходит приобретение и усвоение недостающих знаний и способов деятельности.

Проблемная – это поисковая задача, не имеющая стандартного решения. Она является единицей содержания проблемного обучения, которое в свою очередь, представляет собой систему проблемных задач. В качестве проблемных могут выступать количественные и качественные задачи, демонстрационные и лабораторные опыты, экспериментальные и практические задания, для выполнения которых учащиеся должны самостоятельно приобрести новые знания или способы деятельности. При этом необходимо анализировать теоретические или экспериментальные проблемы, высказывать суждения о возможных подходах к их решению, предлагать конкретные методы и приемы решения, строить предположения и догадки, проявлять и развивать интуицию и т. д.

Таким образом, системы проблемных задач, которые используются при развивающем обучении физике, разрабатываются на основе анализа проблемных ситуаций.

Проблемные ситуации можно рассматривать как способы обострения противоречий в сознании обучающихся при изучении физики. Какие же противоречия могут возникнуть в процессе обучения физике?

На уроках физики для образования проблемных ситуаций можно использовать три вида противоречий:

- между научными знаниями и жизненным опытом учащихся;
- процесса познания, иными словами, между ранее усвоенными и новыми знаниями. Они появляются потому, что на каждом этапе обучения физические явления и объекты изучаются на определенном уровне и на новом этапе может существовать несоответствие новых и ранее усвоенных знаний;
- реального мира, объективной действительности, которые отражены в курсе физики средней школы.

При обучении физике существуют и другие приемы создания проблемных ситуаций: изложение различных точек зрения на одну и ту же проблему; использование исследовательских и конструкторских заданий и различных способов их решения; решение задач с избыточными и недостающими данными, с неопределенным условием и др.

Для организации проблемного обучения необходимо использовать зада-

ния, содержащие противоречия, на основании которых организуется проблемная ситуация. В связи с этим существенное значение имеет формулировка заданий, позволяющая включить учащихся в активную мыслительную деятельность. Так, при изучении относительности механического движения учащимся может быть предложена качественная задача: «Почему верхние спицы быстро катящегося колеса «сливаются», в то время как нижние видны раздельно?».

В такой формулировке задача не содержит противоречия. Однако это задание можно представить в следующем виде: «Велосипедист во время движения заметил, что все спицы колеса движутся с одинаковой скоростью. А наблюдатель, находящийся на обочине дороги, увидел, что верхние спицы «сливаются», а нижние видны раздельно, т.е. движутся с различной скоростью. Так одинаковы или различны скорости спиц колеса?». Становится очевидным, что в такой формулировке задание содержит противоречие и возможно создание проблемной ситуации.

Элементы проблемного обучения могут быть включены в структуру каждого урока физики на любом его этапе: при актуализации опорных знаний, формировании новых знаний и способов деятельности, их систематизации и обобщении и др. Так, на этапе изучения нового материала одним из условий реализации такой возможности является применение системы методов проблемного обучения: проблемного изложения, частично-поискового (эвристического) и исследовательского методов.

Создавая проблемную ситуацию надо помнить, что задание должно быть выполнимым обучающимися. Оно должно заставить их задуматься над поставленной проблемой, задачей, провести аналогии с уже изученными процессами и явлениями, вспомнить пройденный материал. На практическом занятии проблемой можно сделать выбор модели, описывающей явление или процесс, для решения задачи. Обучающиеся должны при анализе условия определить, какие можно сделать упрощения, какими воздействиями на рассматриваемую физическую систему можно пренебречь (например, пренебречь влиянием внешних тел, считать объекты системы материальными точками и т. п.), а какие наоборот необходимо учитывать. Результатом должен быть обоснованный выбор модели, к которой применим изученный ранее или изучаемый физический закон. Очень полезен при проблемном обучении метод аналогий. Обучающиеся должны освоить его, так как этот метод очень хорошо развивает творческую мыслительную деятельность и является основой многих открытий науки. Попутно обучающиеся осваивают метод теоретических рассуждений, в процессе которых происходит переход от посылок к выводам, т. е. метод дедукции. Это важнейший для специалистов технического профиля метод теоретического познания, основанный на правилах логики. Метод аналогий удобен при проблемном обучении на практических занятиях. Например, аналогия динамических характеристик поступательного и вращательного движения (масса m и момент инерции I, равнодействующая всех сил F и момент сил M), электродинамических характеристик (смещение x и заряд q, скорость v и сила тока I, ускорение a и изменение силы тока I/t, масса m и индуктивность L) и т. д. На лабораторном занятии можно поставить проблему получить, а затем опытным путем подтвер-

дить правильность и правомерность использования той или иной формулы. Например, пользуясь уже известной обучающимся формулой периода колебания пружинного маятника, получить формулу Томпсона , собрать схему колебательного контура и, проведя необходимые измерения, убедиться в совпадении результатов теоретических и эмпирических исследований. Такова принципиальная схема организации процесса продуктивного, творческого усвоения нового знания и нового способа действия. Активность мышления и интерес обучающихся возникают в проблемной ситуации даже в том случае, если проблему ставит и решает преподаватель. Но высший уровень активности обучающихся достигается тогда, когда они сами формулируют проблему, выдвигают предположения, обосновывают гипотезу, доказывают ее и проверяют правильность решения.

Так например, обучающемуся предлагается найти решение проблемы потерь электроэнергии на предприятии в конкретном цехе с определенным количеством электрооборудования различными способами и с различных точек зрения, а именно социальной, технической и финансовой.

Определить социальную значимость вопроса, расход и экономию электроэнергии, оценить затраты и экономию в денежном выражении.

Обучающийся решает поставленные задачи и делает соответствующие выводы, предлагая решение вопроса экономии электроэнергии и расходов на нее. Преимуществом проблемного обучения профессиональным дисциплинам является мотивация, конкретность целей и задач, реальность, наглядность, которые облегчают освоение содержания понятий, представлений и усвоения технических научных знаний и умений.

Эти знания получены не для воспроизведения, а в процессе реальной деятельности для решения конкретной проблемы в отличие от знаний традиционной формы обучения, которая не является оптимальной особенно для профессионального образования.

Проблемное обучение формирует глубокое понимание, прочность знаний, твердость позиции, развитие, коммуникабельность и самовыражение, что повышает качество образования в условиях ФГОС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беспалько В.П. Слагаемые педагогической технологии / В.П. Беспалько – М.: Педагогика, 1989. – 191 с.
2. Разумовский В.Г. Развитие творческих способностей учащихся в процессе обучения физике / В.Г. Разумовский. – М.: Просвещение, 1975. – 272 с.
3. Цыркун, И.И. Методическая инноватика / И.И. Цыркун. – Минск: БГПУ, 1996. – 152 с.
4. Щукина Г.И. Проблема познавательного интереса в педагогике / Г.И. Щукина. – М.: Просвещение, 1971. – 24 с.
5. Кириллова Г.Д. Теория и практика урока в условиях развивающего обучения / Г.Д. Кириллова. – М.: Просвещение, 1980. – 159 с.
6. Самыгин С. И. Психология и педагогика: Учебное пособие / С.И. Самыгин, Л.Д. Столяренко. – М.: КноРус, 2012. – 480 с.

7. Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения / И. Я. Лернер. – М.: Педагогика, 1981. – 186 с.
8. Вербицкий А.А. Активное обучение в высшей школе: комплексный подход: Метод. пособие. – М.: Высш. шк.,1991. – 207 с.
9. Брушлинский А.В. Психология мышления и проблемное обучение. – М.: Знание, 1983. – 98 с.
10. Вербицкий А.А., Ильязова М.Д. Инварианты профессионализма: проблемы формирования: монография / А.А. Вербицкий, М.Д. Ильязова. – М.: Логос, 2011. – 288 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ Н.В. БУГАЕВА

М.С. Гаврилова, студент
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»
e-mail: *gavrilovamasha95@gmail.com*

Учебные книги по геометрии Н.В. Бугаева представляют большой интерес для педагогов и историков. Они выдержали несколько переизданий до революции 1917 г. Учебники Н.В. Бугаева обладают рядом методических достоинств, которые не потеряли актуальности и в наши дни.

Ключевые слова: учебник Н.В. Бугаева, методические особенности дореволюционного учебника геометрии.

Общепризнанным является факт, что при изучении геометрии школьники испытывают больше трудностей, чем при изучении алгебры. А так было не всегда. В дореволюционной школе, напротив, учебный курс геометрии лучше усваивался и был более любимым гимназистами, чем арифметика и алгебра. Это можно объяснить тем, что первые геометрические представления дети получали как в школе, так и дома, особенно в сельской местности, наблюдая за работой своих родителей и оказывая помощь им, тем самым они приобретали опыт взаимодействия с реальными геометрическими объектами. К сожалению, в настоящее время единственным источником приобретения опыта в области геометрии остается лишь школа. Поэтому очень важно обращаться к дореволюционному опыту преподавания этого предмета.

В настоящее время исследователи проявляют оправданный интерес к методическому наследию А.П. Киселева (1852-1940), его учебники публикуются и используются в отдельных школах (Екатеринбург). Однако до революции существовали и другие хорошие учебники по геометрии, среди которых достойное место занимают книги, принадлежащие перу Н.В. Бугаева (1837-1903).

Первое издание «Начальная геометрия» Н.В. Бугаева вышло в свет в 1883 году, оно содержало в себе планиметрию. Вскоре, в том же 1883 году, вышло ее продолжение, содержащее стереометрию [1], [2].

Н.В. Бугаев отделяет систематическое изложение теории от упражнений. В книгах приводится теоретический материал, представленный определениями и теоремами с доказательствами, а также небольшое число задач с подробными

решениями. Задач, предназначенных для самостоятельного решения, автор в книгу не поместил, предполагая, по-видимому, в будущем составить задачник [4, с.183].

Содержание книги представлено преимущественно системой теоретических фактов (определений и теорем с доказательствами). Всего в обеих книгах по геометрии приведено (и доказано) более 260 теорем. Содержание и уровень изложения геометрии Н.В. Бугаева говорит, что ею представлен серьезный систематический курс, выходящий за рамки скромно заявленного названия – «Начальная геометрия».

В традициях дореволюционного курса геометрии Николай Василевич уделяет большое значение теории и задачам на построение, а также использует теорию пределов.

Необычной для того времени, и, несомненно, полезной явилась включенная в учебник планиметрии дополнительна глава «Общие способы доказательств геометрических теорем и приемы решения геометрических задач», в которой автор разъясняет суть понятий: аксиома, теорема, доказательство, состав теоремы, обратная теорема, противоположная теорема, иллюстрируя эти понятия конкретными примерами (§§ 140-141). Здесь же автор подробно разъясняет способы доказательства «геометрических» теорем – синтетический и аналитический (§142) [4, с.184].

Н.В. Бугаев делает важные методические замечания о преимуществах и недостатках каждого из методов:

«Способ аналитический вернее ведет к доказательству данной теоремы, ибо от данной теоремы легче переходить к его ближайшему основанию или следствию.

Хотя анализ лучше синтеза объясняет, почему выбран тот или другой путь доказательства теоремы, однако неопределенность при доказательствах не устраняется вполне в том смысле, что при последовательных заменах одного предложения другим, мы не всегда можем дойти до предложения нам известного, ибо иногда не видно, какое из следствий или какое из оснований данного предложения нужно выбрать для того, чтобы его доказать…

Анализ, как и все логические приемы, только облегчает и помогает находить доказательство данного предложения, но не всегда необходимо ведет к доказательству» [1, с.211].

В следующем параграфе (§143) Николай Васильевич разъяснил суть еще одного метода доказательства – «доказательства от противного или способа приведения к нелепости». В нем он уточнил, что данный метод есть частный случай более общего метода – анализа.

Обратив внимание читателя на то, что убедительности доказательств существенно способствует «самое чувственное созерцание», автор описывает приемы, имеющие место в геометрии (§144):

«К числу приемов, имеющих место в геометрии, принадлежат: способ наложения, способ пропорциональности и способ пределов»[1].

Выделение Н.В. Бугаевым этих трех способов представляет немалый методический интерес, поскольку через эти общие «приёмы» изучения устанавли-

вается дополнительная преемственность между планиметрией и стереометрией [4,с.185].

Понятие предела в дореволюционной средней школе изучалось в курсе планиметрии. Следуя программе, Николай Васильевич приводит определение предела перед изучением темы: «Длина окружности», а также в этом разделе планиметрии автор делает важное обобщение, вводя понятие «способ предела».

Данное определение нельзя назвать безупречным, но сама идея обратить внимание учеников на этот способ выглядит методически привлекательно, поскольку она получит дальнейшее развитие при изучении объемов и поверхностей круглых тел. В других дореволюционных учебниках геометрии этому важному обстоятельству не придавалось такого значения [4,с.186].

При описании аналитического и синтетического способов решения геометрических задач, Николай Васильевич делает акцент на то, что в случае применения анализа для решения задач, необходимо делать проверку, которою может заменить синтез.

«Совместное применение синтеза и анализа – говорит Бугаев, – дает средство избегнуть тех ошибок, которые могут получиться при применении только одного из этих методов решения» [1,с.214].

Что касается содержания курса стереометрии, который представлен в учебнике Н.В. Бугаева, то он полностью отвечает традициям того времени. В начале вводятся основные понятия и факты стереометрии, затем рассматриваются все виды многогранников и доказываются формулы для вычисления их объемов, а заканчивается главой, которая посвящена круглым телам.

Особенностью книги является добавление нового пункта «Симметрические многогранники» [2, с.60-63]. Здесь автор вводит следующие определения: симметричные точки, плоскость симметрии, симметричные прямые, симметричные плоскости, симметричные многогранники и другие, а также доказывает теоремы. Причем, стереометрия рассматривается не относительно прямой, а относительно плоскости.

Раздел планиметрии «Начальной геометрии» Н.В. Бугаева состоит из 16 глав:

I. Основные геометрические понятия.
II. Прямые и ломаные линии.
III. Углы.
IV. Перпендикуляры и наклонная.
V. Треугольники.
VI. Параллельные линии.
VII. Многоугольники.
VIII. Окружность.
IX. Геометрические задачи, относящиеся к предыдущим главам, и геометрические инструменты, основанные на свойстве прямой линии и круга.
X. Пропорциональные линии. Подобные треугольники и подобные многоугольники.
XI. Пропорциональные линии к кругу.

XII. Задачи, относящиеся к главам X и XI, и вспомогательные геометрические инструменты, устройство которых основано на свойстве пропорциональных линий.
XIII. Правильные вписанные и описанные многоугольники.
XIV. Способ пределов. Определение длины окружности.
XV. Измерение площадей плоских фигур.
XVI. Общие способы доказательств геометрически теорем и приемы решения геометрических задач.

Методической особенностью учебника Николая Васильевича является то, что в начале изучения курса геометрии до VIII главы включительно, учащимся предлагается лишь теория. Для изучения задач отведена самостоятельная IX глава. Данная глава состоит из трех параграфов. Первый из них – (§69) поясняет, что такое чертеж и черчение. Автор обращает внимание на то, что для черчения необходимы геометрические инструменты, которые, в свою очередь, делятся на основные и вспомогательные. К основным относятся карандаш, циркуль, линейка, а к вспомогательным – наугольник (чертежный треугольник), транспортир, масштаб, пантограф, пропорциональный и делительный циркуль. «Их употребляют при черчении для ускорения и облегчения геометрических построений»[1,с.88]. Параграфы (§§70,71) посвящены основным и вспомогательным инструментам, в них Н.В. Бугаев более подробно описывает сущность данных инструментов, широко используя наглядность. И, наконец, после вводного материала, следующий параграф посвящен решению задач. Здесь представлено 20 задач с подробными решениями, чертежами и выводами.

В главах X и XI предлагаются новые темы, а в XII главе представлен разбор решений задач. Здесь Н.В. Бугаев рассматривает всего девять задач, где для четвертой он приводит несколько способов её решения. Автор хотел донести до учащихся, что геометрические задачи не всегда решаются одним способом, чаще всего они имеют несколько решений. Такие задания направлены на развитие логического мышления. Задача 9* является последней в этой главе, и она является задачей повышенной сложности. Николай Васильевич непросто разъяснил решение, но и описал последовательность шагов построения. Помимо задач, автор снова обращает внимание учащихся на вспомогательные геометрические приборы, для того, чтобы объяснить ребятам, где и с такими инструментами они могут столкнуться в повседневной жизни.

Завершается весь курс рассмотрением решения задачи: «Разделить данную линию АВ в крайнем и среднем отношении» [1,с.215]. Данная задача подчеркивает связь логики и геометрии.

Отличительной чертой «Начальной геометрии» является то, что задачи рассматриваются не сразу при изучении теории, а после определенных изученных тем. Благодаря такому подходу, учащиеся воспроизводят в памяти весь пройденный материал, отбирают необходимую теорию для того, чтобы решать задачи.

Надо заметить, что после выхода первой части «Начальной геометрии» появилось много критики и замечаний в адрес её автора. Скорее всего, Николай Васильевич не стал бороться за учебник геометрии, поэтому он не редактиро-

вался и не переиздавался. Тем не менее, в 1901г. обе части «Начальной геометрии» Н.В. Бугаева получили добро от Министерства народного просвещения и вошли в Каталог в качестве «допущенных»[3, с.27].

Таким образом, учебники Николая Васильевича можно включить в методическую копилку современного учителя математики. Несомненный интерес представляет теоретическая часть учебника, в которой все теоремы приводятся с развернутыми доказательствами (иногда приводится сразу несколько способов доказательств) Учебники богаты иллюстрациями, а также насыщенны всевозможными примерами. Характерной чертой его учебников является компактное представление задач и их подробный разбор. В целом, учебники геометрии Н.В. Бугаева содержали ряд оригинальных методических идей, которые, к большому сожалению, не были по достоинству оценены в то время**.**

ЛИТЕРАТУРА

1.Бугаев Н.В. Начальная геометрия. Планиметрия. М. – 1883.
2.Бугаев Н.В. Начальная геометрия. Стереометрия. М. –1883.
3.Второе дополнение к каталогу учебных руководств и пособий, рекомендованных, одобренных и допущенных для употребления средних учебных заведениях ведомства Министерства народного просвещения. СПб. – 1901. – 61 с.
4.Колягин Ю.М., Саввина О.А. Математики – педагоги России. Забытые имена. Книга 4. Николай Васильевич Бугаев. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина. – 2009. – 276 с.

УДК 377

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ В ОРГАНИЗАЦИЯХ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

И.С. Гомбоева, к.пед.н.
ГПОУ «Приаргунский государственный колледж»
e-mail: *gomboevai@mail.ru*

В статье рассматриваются вопросы преподавания информатики в организациях среднего профессионального образования. Показано, что содержание дисциплины обусловливается профилем получаемой профессии или специальности. В качестве методов, позволяющих выстраивать обучение в контексте будущей профессиональной деятельности, предлагается использовать метод проектов и профессионально ориентированные задания.

Ключевые слова: информатика, информационная модель, метод проектов, профессионально ориентированные задания.

В образовательных организациях среднего профессионального образования обучающиеся наряду с профессией и специальностью получают среднее общее образование. Информатика относится к общеобразовательным учебным дисциплинам предметной области «Математика и информатика», особенностью преподавания которых в училищах, техникумах, колледжах является приклад-

ной характер. В этой связи, преподавание дисциплины выстраивается в контексте будущей профессиональной деятельности.

Содержание дисциплины «Информатика» имеет свои особенности и зависит от того, к какому профилю относится профессия или специальность СПО. Для специальностей гуманитарного профиля предмет изучается на базовом уровне ФГОС среднего общего образования. Освоение профессий СПО и специальностей СПО технического, естественнонаучного и социально-экономического профилей профессионального образования также предполагает изучение информатики на базовом уровне ФГОС среднего общего образования, но некоторые темы изучаются более углубленно с учетом специфики осваиваемой профессии или специальности.

Учебная дисциплина «Информатика» включает следующие разделы [4]:

- информационная деятельность человека;
- информация и информационные процессы;
- информационные структуры (электронные таблицы и базы данных);
- средства информационных и коммуникационных технологий (ИКТ);
- технологии создания и преобразования информационных объектов;
- телекоммуникационные технологии.

Содержание учебной дисциплины построено таким образом, что позволяет реализовать изучение информатики не только на разных уровнях, для различных профилей, но также обеспечить межпредметную связь с другими образовательными областями.

Базовый уровень изучения информатики предполагает освоение учебного материала всеми обучающимися. На данном уровне осуществляется обобщение и систематизация материала информатики основой школы. При этом особое внимание уделяется изучению учебного материала, имеющего практическую ориентацию и направленного на формирование у обучающихся общей информационной компетентности, а также готовности к комплексному использованию информационных технологий. В процессе освоения учебной дисциплины «Информатика» учитывается специфика получаемых профессий и специальностей СПО, что предполагает углубленное изучение отдельных тем, активное использование различных средств ИКТ, увеличение количества практических занятий, различных видов аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы, направленных на подготовку обучающихся к выполнению будущей профессиональной деятельности с использованием ИКТ.

На практических занятиях и во время выполнения внеаудиторной самостоятельной работы внимание обучающихся акцентируется на использовании различных средств поиска информации с привлечением Интернета, средств масс-медиа, учебной и специальной литературы. При этом особое внимание уделяется правильному оформлению и представлению результатов. Все это направлено на формирование у обучающихся умений самостоятельно и избирательно применять различные программные средства ИКТ, а также дополнительное цифровое оборудование (цифровые камеры, сканеры, принтеры, графические планшеты и др.), пользоваться комплексными способами обработки и представления информации [4].

Практическая направленность изучаемого материала и возможность его применения в будущей профессиональной деятельности может осуществляться посредством использования профессионально ориентированных заданий [1], а также метода проектов.

По мнению Э.Ф. Зеера, основой целью метода проектов является интеграция профессиональной подготовки обучаемых по разным учебным дисциплинам с целью обеспечения междисциплинарности, а также тесного взаимодействия в обучении теории и практики. Дидактическая ценность метода проектов состоит в использовании самостоятельной проектировочной деятельности обучающихся, выступающей в качестве основного средства их профессионального развития [2].

Так, например, обучающимся в качестве проектного задания можно предложить разработку и представление информационной модели собственного вымышленного предприятия [3]. Алгоритм моделирования проекта выглядит следующим образом:

1. Создание рекламного ролика предприятия (программы презентационной графики, программы видеомонтажа).
2. Описание предприятия (текстовый процессор).
3. Начисление заработной платы сотрудникам предприятия (табличный процессор).
4. Разработка информационного буклета (настольная издательская система).
5. Формулировка любой задачи и составление программы для ее решения (язык программирования).
6. База данных по кадрам, товарам и др., состоящая из таблиц, форм, запросов, отчетов (система управления базами данных).
7. Сайт предприятия (язык разметки гипертекста HTML).

Для профессии «Повар, кондитер» можно предложить следующие темы проектов: информационная модель предприятия «Кафе-мороженое», «Ресторан азиатской кухни», «Фабрика по производству кондитерских изделий», «Цех по производству пельменей», «Сеть магазинов по продаже хлебобулочных изделий», «Пекарня», «Кафе быстрого питания», «Школьная столовая» и др.

Для специальности «Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта»: информационная модель предприятия «Станция технического обслуживания автомобилей», «Автозаправочная станция», «Магазин автозапчастей», «Склад автозапчастей», «Автомойка», «Сеть автостоянок» и др.

Для специальности «Агрономия»: информационная модель предприятия «Семенная станция», «Селекционная станция», «Крестьянско-фермерское хозяйство», «Магазин по продаже семян», «Овощеводческая компания», «Цветоводческое хозяйство», «Тепличное хозяйство», «Плодово-ягодный питомник», «Ботанический сад» и др.

Итак, специфика дисциплины «Информатика» состоит в многоплановости ее социального контекста, в связи с чем в училищах, техникумах, колледжах ее преподавание осуществляется в русле будущей профессиональной деятельности. В качестве методов обучения целесообразно использовать метод проектов, а также профессионально ориентированные задания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гомбоева И.С. Профессионально ориентированные задания по информатике для профессии «Повар, кондитер» // Педагогическая информатика. – 2016. – № 2. – С. 51-56.
2. Зеер Э.Ф. Проблемы развития профессионально-педагогического образования // Казанский педагогический журнал. – 2014. – № 2 (103). – С. 9-22.
3. Малясова С.В. Разноуровневые задания для контрольных работ по информатике. Часть II // Информатика в школе: Приложение к журналу «Информатика и образование». – 2008. – № 2. – 96 с.
4. Цветкова М.С. Примерная программа общеобразовательной учебной дисциплины «Информатика» для профессиональных образовательных организаций / М.С. Цветкова, И.Ю. Хлобыстова. – М.: Издательский центр «Академия», 2015. – 27 с.

УДК 372.851

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ДЕЛОВЫХ ИГР В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ-ЮРИСТОВ[1]

С.Н. Дворяткина, д.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»
e-mail: *sobdvor@yelets.lipetsk.ru*
А.М. Лопухин, студент
ФГАОУ ВО «Московский государственный институт международных отношений (университет) Министерства иностранных дел Российской Федерации»
e-mail: *ars4044@mail.ru*

В статье предлагается решение проблемы актуализации эффективных дидактических средств обучения математике студентов юридических направлений подготовки. Целью исследования явилась разработка технологии организации и проведения деловой игры по математике для студентов-юристов и оценка ее эффективности. Методологическим основанием в контексте структурно-процессуального и содержательно-информационного обеспечения проектирования технологии выступил синтез подходов, среди которых наиболее значимыми были определены деятельностный, контекстный, технологический и синергетический. Представлены отдельные элементы всех этапов разработанной технологии на примере деловой игры «Судебный процесс по правовому регулированию игорного бизнеса». Полученные результаты открывают возможность для дальнейшего выявления и исследования синергетических эффектов у будущих юристов (мотивационный, когнитивный, профессиональный, экономический), эффективной реализации разработанной технологии с целью дальнейшего повышения уровня профессионализма посредством совершенствования профессио-

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-18-10304)

нальных компетенций в области судебного судопроизводства и правотворчества с применением математических методов.

Ключевые слова: активные методы, обучение математике, технология проектирования деловой игры, синергетические эффекты.

Введение

Уровень современного высшего образования должен соответствовать технологическому прогрессу, запросам экономики и социальной сферы, обеспечивать его дальнейшее совершенствование. Однако лавинообразное накоплении информации во всех сферах жизни общества не в состоянии дать обучаемому в высшем учебном заведении такой запас знаний, который он смог бы в дальнейшем эффективно применять в профессиональной деятельности. Идеология передачи «готовых знаний и умений» сменяется идеологией формирования профессиональных компетенций. На первое место выдвигается самостоятельность, самоорганизация, инициатива, креативное мышление, готовность к разумному риску. Перед высшим учебным заведением стоит задача создания насыщенной профессионально-развивающей среды обучения, которая позволит студенту выработать способность свободно ориентироваться в постоянно обновляющемся информационном пространстве.

В связи с изложенным, главными принципами организации образовательного процесса становятся принцип совместной деятельности, диалогического общения, игрового или имитационного моделирования, т. е. принципы и методы активного обучения. Акцент переносится с передачи предметного содержания на индивидуальный опыт воспитанников, на их мотивы и потребности, а также на усиление прикладной и профессиональной направленности содержания обучения, на междисциплинарную интеграцию. Наиболее эффективным и широко используемым дидактическим механизмом реализации данных требований является деловая игра. Игры, в которых моделируется профессиональная деятельность, выступают организующим стержнем, вокруг которого интенсивно накапливаются и закрепляются знания, развиваются социальные навыки, формируется опыт профессиональной деятельности. Сама логика имитации профессиональной деятельности порождает потребность в новых знаниях через стимулирование большого количества идей и способов их реализаций. Поэтому деловые игры способны обогатить высшее образование динамичными методами обучения, отражающими реальность, усилить дидактический потенциал образовательной среды.

В настоящее время собран огромный методический опыт внедрения деловых игр в практику высшего образования экономистов [9; 11], менеджеров [12], медиков [7], педагогов [10], юристов [1; 2; 8] и др. направлений подготовки. Однако тематика деловых игр в высшей школе ограничивается примерами моделируемых ситуаций на профильном учебном материале. Учитывая огромный развивающий потенциал математики, а также ее важную роль в формировании широкого спектра компетенций по всем направлениям подготовки, актуальным является исследование возможностей деловых игр в обучении математике на нематематических факультетах.

Анализ литературных источников позволил заключить, что наименее изученной областью разработки и применения деловых игр в обучении математике является юридический профиль. О роли математических методов в юриспруденции, важности математической подготовки будущего правоведа в формировании профессиональной и общей культуры ранее нами было отмечено в работе [6]. Поиск нерассмотренных подходов определил цель исследования – разработать технологию организации и проведения деловой игры по математике для студентов-юристов и оценить ее эффективность.

Методология

Методологическим основанием в контексте структурно-процессуального и содержательно-информационного обеспечения проектирования технологии организации и проведения деловой игры по математике для студентов-юристов выступает синтез подходов, среди которых наиболее значимыми являются деятельностный, контекстный, технологический и синергетический.

Наиболее изученным методологическим подходом, осуществляемым в деловых играх, является деятельностный подход (Л.С. Выготский, Е.В. Гильбо, Селевко Г.К., Платов В.Я., Г.П. Щедровицкий и др.). Согласно деятельностному подходу, деловая игра должна быть разработана с учетом зоны ближайшего развития личности, при этом необходимо ориентироваться не столько на наличный уровень развития, сколько на перспективно более высокий. Благодаря личностной вовлеченности обучаемых в процесс обучения через игру в наибольшей степени можно наблюдать мотивационный эффект, который возникает благодаря деятельностному характеру деловой игры.

Контекстный подход служит концептуальной основой для трансформации ведущей учебно-познавательной деятельности обучаемых в учебно-профессиональную деятельность с соответствующей сменой потребностей и мотивов, целей, поступков, средств, предметов и результатов. Одним из условий этого, по А.А. Вербицкому, является включение в учебный процесс различных элементов будущей профессиональной деятельности, в том числе деловых игр. Деловая игра является формой воссоздания предметного и социального содержания будущей профессиональной деятельности специалиста, моделирования условий, содержания, систему отношений, характерных для данной деятельности. Предметный и социальный контекст активизирует мышление студента, вводит его в состояние проблемной или творческой ситуации, обеспечивает личностное включение обучающегося в процессы овладения будущей профессиональной деятельностью. Тем самым роль контектсного подхода при проектировании технологии внедрения деловых игр в процесс обучения состоит в получении когнитивного и профессионального эффектов.

Ряд исследователей (К.А. Баринов, И.П. Евграфов, А.И. Осадчий и др.) отводят значимую роль в проектировании деловых игр технологическому подходу. Данный подход эффективен для проектирования компьютерной обучающей системы для реализации деловых игр. Технические возможности обеспечивают деловой игре насыщенную интерактивность и активность усвоения учебного материала, посредством следующих преимуществ: быстродействие,

способность накапливать и хранить большой объем данных, точность, наглядность получаемой информации, возможность проведения игры в режиме диалога «человек – ПК», возможность имитации внешних изменений и др. Большинство имеющихся деловых игр, разработанных с применением компьютерных средств, могут быть использованы для коллективного или индивидуального обучения, иметь сетевой вариант использования и применяться для развития навыков профессиональной работы в конкретной сфере деятельности. Разработка и внедрение деловых игр на основе технологического подхода позволяет наблюдать явный экономический эффект, критерии оценки которого нами выделены в работе [5].

На наш взгляд, наиболее продуктивным методологическим положением решения проблемы разработки технологии организации и проведения деловой игры по математике для студентов-юристов, ориентированной на получение мотивационного, когнитивного и профессионального эффектов, составили идеи и принципы синергетического подхода. С позиций синергетического подхода процесс обучения заключается в создании условий, при которых становится возможным приобретение знаний самими обучающимися, его активное и продуктивное творчество. Научить обучаемых нелинейно мыслить путем динамичной смены ситуативных условий, активизировать процессы саморазвития и самоорганизации при интенсивном восприятии учебной информации становится возможным в процессе решения реальных практических задач в виртуальном контексте. Таким образом, деловая игра, основанная атрибутах синергии, – открытом обучении, немедленной обратной связи, соединении теории и практики, интеграции различных областей знания (в нашем случае математики и юриспруденции) – обеспечивает значимый рост эффективности деятельности за счет наблюдаемого системного учебного эффекта.

В настоящее время существует несколько подходов для определения деловой игры. В данной статье под деловой игрой будем понимать социально-обучающую модель, которая направлена на достижение цели, имитирует условия, содержание, отношения, динамику и особенности той или иной профессиональной деятельности. Деловая игра позволяет в достаточной мере воспроизводить (моделировать) деятельность специалистов, выявлять проблемы, оценивать каждый вариант, принимать решение и определять механизм его реализации в соответствии с ситуацией, сложившейся на конкретном предприятии, фирме и т. п.

Результаты

Технология организации и успешное проведение деловой игры требуют подробного описания всех ее этапов. Методика организации и проведения деловой игры включает четыре этапа.

1-й этап – организационно-методический. Задачами данного этапа являются: а) выбор модели игры; б) постановка проблемы и определение цели; в) формирование плана игры; г) конструирование сценария деловой игры; д) установление правил игры; е) разработка ролевых инструкций для участников игры.

При выборе модели деловой игры важным аспектом является направленность, профиль обучения студентов. Участники деловой игры должны иметь представление о той профессиональной области, в которой в дальнейшем будут применены полученные навыки. Для студентов-юристов мы предлагаем модель «Судебный процесс по правовому регулированию игорного бизнеса», т.к. судебному разбирательству отводится центральная роль в юридической практике.

Проблема правового регулирования игорной деятельности в России и других странах с целью определения негативных социально-правовых последствий при неправильной организации азартных игр в настоящее время является наиболее сложной и актуальной. В условиях сохраняющихся пробелов в законодательстве, не позволяющих эффективно бороться с рассматриваемым негативным проявлением, особую актуальность приобретает вопрос о гражданско-правовой ответственности за нарушения в сфере организации игр, хотя такие нарушения могут повлечь как административную, так и уголовную ответственность. Одним из таких пробелов, на наш взгляд, является ключевое понятие «азартная игра», закрепленная российским законодательством (Федеральный закон № 244-ФЗ «О государственном регулировании деятельности по организации и проведению азартных игр и о внесении изменений в некоторые законодательные акты Российской Федерации»).

В связи с этим целью и задачами деловой игры «Судебный процесс по правовому регулированию игорного бизнеса» будут следующие: выявить научные и практические проблемы, связанные с правовым регулированием отношений в области азартных игр в России; уточнить на основе математических методов понятие «азартная игра» с дальнейшей классификацией для установления возможностей правовой защиты их участников; проиллюстрировать на математических задачах примеры игр, зависящие от интеллектуальных и иных умений игроков, и игр, зависящие от случая; внести предложения по совершенствованию правового регулирования в сфере организации и проведения азартных игр, используя математические методы.

В основу сценария положена конфликтная ситуация, связанная с невыплатой выигрыша игорным домом участнику игры на основании его обвинения в мошенничестве. В качестве примере можно привести реальное дело покериста Фила Айви против казино Crockfords, рассмотрение которого было доведено до Верховного суда Великобритании. Заведение обвинило игрока в мошенничестве, который якобы использует метод обмана казино — математику. Данное обстоятельство послужило основанием о нарушении договора между участниками, гласящее, что Фил Айви нарушил правила азартных игр, получив превосходство в игре, обладающей преимуществом игорного дома.

Для обеспечения судебного процесса рекомендуется разделить студенческую группу на две части, каждая из которых будет представлять одну из конфликтующих сторон, с разработкой для них ролевых инструкций.

2-й этап – инструментально-подготовительный – включает подбор подходящих технических и математических средств поддержки процесса деловой игры. В распоряжении студентов все возможные информационные

источники (тексты нормативных актов, справочные правовые системы), ИКТ, Интернет и т.д.

Доказательную базу истца о нарушении договора рекомендуется построить на существующих пробелах в определении «азартная игра». С гражданско-правовой точки зрения законодательное определение азартной игры (ст. 4, ФЗ №244) следует понимать как некоторое обязательство, в силу которого организаторы обещают одному из участников получение определённого выигрыша, независимого как от случая, так и от умения, ловкости и других способностей участников игр. Таким образом, ФЗ отождествляет азартные игры с играми, основанными на риске, но не игры, основанные на случае, и тем более не раскрывает содержание каждого элемента понятия азартной игры. Законодательное определение игры не отвечает на главный вопрос: «Основана ли игра на риске или исключительно на умении, ловкости?». Данные неточности и двойственности в законодательстве могут служить основанием о принятии судебного решения в ту или иную сторону.

Например, в такой популярной игре как «Блэк-джек присутствует риск, так как правила игры не дают права отыграть проигранное (игра составляет один единственный кон). Но так как карты раздаются в случайном порядке, то здесь имеет место и случай. В тоже время игра в «Крэпс» состоит из нескольких туров, но здесь также имеется определенный риск. Для проверки закономерности или случайности выигрыша в самую справедливую игру, представим математическое доказательство.

Игрок бросает две кости и подсчитывает сумму выпавших очков. Он оказывается в выигрыше, если выпала комбинация 7 или 11. Если выпадает крэпс (2, 3 или 12) – значит, ставка проиграла. Комбинации 4, 5, 6, 8, 9 10 — это Come point. Если в первый раз выпадет Come point, то игрок бросает кости до повторного выпадения комбинации 7, игрок выигрывает. Если этого не происходит — значит, проигрыш.

Решение. Введем события: A ={ выигрыш игрока}; A_2 ={ набранная сумма равна 2}; A_3 ={ набранная сумма равна 3}; …; A_{12} ={ набранная сумма равна 12}; B ={выпадение Come point}.

Определим вероятность выигрыша после первого бросания: $P(A_7) + P(A_{11}) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} \approx 0{,}22$.

Вычислим условные вероятности выпадения Come point, при условии, что при первом броске выпал Come point: $P(B/A_4) = \frac{3}{9}$; $P\left(\frac{B}{A_5}\right) = \frac{4}{10}$; $P\left(\frac{B}{A_6}\right) = \frac{5}{11}$; $P\left(\frac{B}{A_8}\right) = \frac{5}{11}$; $P\left(\frac{B}{A_9}\right) = \frac{4}{10}$; $P\left(\frac{B}{A_{10}}\right) = \frac{3}{9}$.

Определяем вероятность выпадения Come point: $P(B) = P(A_4)P\left(\frac{B}{A_4}\right) + P(A_5)P(B/A_5) + P(A_6)P(B/A_6) + P(A_8)P(B/A_8) + P(A_9)P(B/A_9) + P(A_{10})P(B/A_{10}) \approx 0{,}27$.

Тогда искомая вероятность выигрыша равна: $P(A) = P(B) + P(A_7) + P(A_{11}) \approx 0{,}49$.

Следовательно, данная игра также основана на случае. К азартным играм следует отнести также игры «Баккара», «Война Казино». Однако другие игры, например, «Преферанс» или другие покерные вариации к азартным не относятся. Несмотря на то, что частично риск проигрыша присутствует, выигрыш зави-

сит не столько от случайной раздачи карт, сколько от умений игрока ориентироваться в самой игре, его интеллектуальных и мыслительных способностей.

В качестве математических средств поддержки процесса деловой игры студентам можно предложить серию аналогичных задач, с целью установления случайного/неслучайного характера популярных игр казино и математической проверки вероятности выигрыша в этих играх. Данные решения могут быть использованы в процессе судебного заседания в качестве доказательной базы.

3-й этап – содержательно-организационный — проведение деловой игры, которая разворачивается в групповое скоординированное действие. Каждое утверждение любой из сторон судебного разбирательства должно сопровождаться ссылкой на нормативные документы или представлять аргументы на основе математической доказательной базы (см. п. 2).

Итогом рассмотренного заседания, может быть реальный научно-практический результат, направленный на уточнение на основе математических методов понятия «азартная игра» с соответствующей коррекцией в действующем законодательстве. Азартная игра – это соглашение о выигрыше, **о**снованное на риске и заключенное между двумя или несколькими лицами, как физическими, так и юридическими, по правилам, установленным игорным заведением, исход которого зависит от случая, на наступление которого стороны не имеют возможность оказывать воздействие [4].

4-й этап – контрольно-оценочный. Задачами данного этапа являются: создание соответствующих методов для оценки и контроля формирования новых компетенций в процессе деловой игры; оценка синергетических эффектов.

Процесс оценки результатов учебно-деловой игры обычно осуществляет преподаватель, однако возможно при этом и участие самих субъектов деловой игры. При оценке деятельности применяются как формализованные критерии, так свободная форма отображения этих результатов. В оценке результатов учебно-деловой игры возможно использование анкетирования, графических форм, содержательного анализа игровой деятельности студентов.

Проведение занятий по математике для студентов-юристов в форме судебных процессов существенно повышает активность студентов, мотивацию к изучению математики, формирует навыки социального общения, закрепляют профессиональные компетенции в области судебного судопроизводства и правотворчества. Все это — синергетический эффект, который студенты получают «бонусом» к содержанию учебной дисциплины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арестова Е.Н., Костюк М.Ф. Деловая игра «Задержание и допрос подозреваемого» как вид интерактивного обучения по дисциплине «Уголовный процесс» // В сборнике: Интерактивные подходы к обеспечению образовательной деятельности в учреждениях высшего и среднего образования. Москва, 2017. С. 23-28.

2. Бахтамова Н.Г., Толстова А.Е. Использование деловых игр при преподавании профильных юридических дисциплин // Вестник Санкт-Петербургской юридической академии. 2017. № 2 (35). С. 105-108.
3. Вербицкий А.А. Психолого-педагогические особенности деловой игры как формы знаково-контекстного обучения / А.А. Вербицкий // Игровое моделирование: методология и практика. - Новосибирск: Наука, 1987. 21 с.
4. Дворяткина С.Н., Лопухин А.М. Логико-математический анализ понятия азартная игра по законодательствам республики Армения и Российской Федерации // Труды международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах и школах». Ереван: Астхик Гратун, 2015. С. 254-259.
5. Дворяткина С.Н., Зиборов В.И. Синергетический эффект как результат применения ИКТ в математическом образовании студентов // Ярославский педагогический вестник. Серия «Психолого-педагогические науки». 2017. №4. С.114-117.
6. Лопухин А.М., Орлов С.Ю. К вопросу о целесообразности применения математических методов в юридических науках в контексте синергетического подхода //Вопросы Российского и международного права, 2016. №9. С. 63-74.
7. Морозов Д.А., Алексеева Е.И., Аверьянов А.П., Горемыкин И.В., Филиппов Ю.В., Городков С.Ю., Пименова Е.С., Чистякова Е.Г. Деловые игры в формировании профессиональных компетенций врача-педиатра // Медицинское образование и ВУЗовская наука. 2016. № 1 (8). С. 40-42.
8. Пчелкина Е.В., Казаков И.Г. Учебная деловая игра «Юридический квест» как вид интерактивного обучения, реализующий компетентностный подход: опыт разработки // Право и глобальный социум. 2017. № 1(6). С. 63-71.
9. Пядина Т.И., Царева И.А. Деловая игра как метод обучения экономическим дисциплинам // Синергия Наук. 2017. № 14. С. 700-705.
10. Ромадина О.Г., Соловьева М.С. Возможности технологии «Деловая игра» для формирования профессиональных компетенций будущих учителей математики и информатики // Вопросы современной науки и практики. 2017. № 2 (64). С. 140-145.
11. Стеблецова О.В. Деловые игры при изучении дисциплины «Аудит» у бакалавров направления «Экономика»/ В сборнике: Инновации в образовании. Материалы VII Международной научно-практической конференции. 2015. С. 331-333.
12. Широкова Л.В., Астафьева И.А., Семенова В.В. Практикум по менеджменту: деловые игры, кейсы, тесты, практические задания: Учебное пособие. Москва, 2017. 14 с.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ У СТУДЕНТОВ ПО ФИЗИКЕ

В.М. Дронов, к.ф.-м.н.
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»
e-mail: *vladi-dronov@mail.ru*

Ключевые слова: качество образования, научно-исследовательская работа, кейс.

Основной задачей современного образования является подготовка высококвалифицированных выпускников, способных в кратчайшие сроки войти в экономику страны. Согласно современным требованиям выпускники должны овладеть определёнными компетенциями по своему направлению подготовки, поэтому, задача повышения качества образования была и остается актуальной.

Цель работы исследовать некоторые методы повышения качества подготовки студентов по физике и предложить наилучшие.

На фоне уменьшения общего количества часов по физике и сокращения лабораторных работ и практических занятий для инженерно-строительных специальностей, происходит снижение и общего уровня поступивших студентов. Дополнительно к этому снижается уровень мотивации студентов для подготовки к занятиям и самостоятельной работе по предмету.

Одним из методов увеличения качества знаний и формирования необходимых компетенций является привлечение студентов к научной и проектной деятельности. Положительными моментами этого метода, является увеличение времени на самостоятельное изучение материала, глубокое исследование тем, решаемой проблемы, дополнительное время общения с преподавателем, руководителем проекта, знакомство с новыми разработками в исследуемой области, работа с приборами. При этом происходит и дополнительная мотивация студента, он приобретает опыт научной и прикладной работы и формирует, так называемое «портфолио» для будущего работодателя.

Этот метод также хорош тем, что студенты частично с ним знакомы со школы, под названием «проектная» или «исследовательская» деятельность, когда школьники выступают на школьных, школьных городских конференциях, по результатам своего исследования. При этом исследование могло быть по предметам, не связанным, обязательно с физикой или естествознанием. Например, первокурсники указали, что принимали участие в проектах по истории, химии, английскому, обществознанию. Анализ опроса показал, что 50% первокурсников участвовали в школьной исследовательской деятельности и примерно столько же опрошенных хотели бы участвовать в научно-исследовательской работе в вузе. В то же время почти такая же часть студентов вообще не хотела бы заниматься такой деятельностью. При этом, 30% опрошенных считают, что начинать заниматься наукой следует с младших курсов, а 30% уже с 3-4 курса.

Научно-проектная деятельность студента, не считая курсовых и дипломных работ, должна быть частью учебного процесса, но в то же время такая работа подразумевает, в случае с инженерными специальностями, наличие совре-

менной материально-технической базы кафедры или вуза, свободного времени у преподавателей, ведь необходимо выделить время для консультаций и проведение исследований. Необходимо также предусмотреть возможность научить студентов пользоваться приборами и оборудованием так, чтобы не привести к его поломке, что не только исключит возможность исследований студента, но и может, например, сорвать план исследовательской работы кафедры. Студенты, занимающиеся научной работой, как правило отлично успевают по всем предметам.

Существует ещё один метод подготовки, который получил название «кейс» метод [1]. Из опроса первокурсников только 5% слышали и примерно представляют о данном методе обучения. Данная технология чаще используется в гуманитарных направлениях подготовки, для решения управленческих, экономических, психологических задач и других. Этот метод в какой-то мере стал популярным и используется и в естественнонаучных дисциплинах, в том числе и по физике. Например, тесты ОГЭ задания 20-21 по физике. Однако если разобрать эту методику, по его определению, то мы приходим к выводу, что кейсом в физике может быть обычная задача, в которой есть начальные условия и необходимо найти какую-то физическую величину [2]. Кейсом по физике могут выступать и лабораторные работы, которые включают в себя не только теорию и начальные сведения о законах и процессах, но и приборы, установки, устройства, необходимые в работе. И если, кроме обычных задач и лабораторных, перед студентами ставить задачу по использованию теории и лабораторного оборудования для нахождения каких-либо физических параметров, то данный подход заставит студентов глубже понять физические законы и их применение. Такую задачу можно ставить и перед одним студентом, двумя или перед группой. Причем на одной экспериментальной установке можно ставить несколько разных задач.

В качестве примера можно привести лабораторную работу по исследованию закона динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека, где, например, требуется подтвердить линейность уравнения и найти момент силы трения в зависимости от момента инерции. После выполнения работы можно предложить студентам вывести формулу для времени движения груза с любой высоты и любой массы. Определить зависимость этого времени от момента инерции маятника, а затем проверить результат на установке и объяснить, если формула, теоретически выведенная студентами, экспериментально не подтвердится. При таком подходе у студентов формируются: аналитические навыки – вывод формулы, практические навыки – проверка результата, коммуникативные и социальные навыки в работе с другими студентами [3]. Результатом работы будет более глубокое понимание материала данной темы.

Выводы: Повышение качества образования по физике у студентов можно проводить с их привлечением к научно-исследовательской деятельности и постановкой лабораторно-практических задач, которые можно назвать кейс методом. Затруднения в выполнении этого могут быть связаны с уменьшением часов и необходимостью контроля преподавателем и его консультаций, наличием необходимых приборов и лабораторного оборудования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлова Е.И. Кейс и кейс-метод: общие понятия / Е.И. Михайлова / Маркетинг. – 1999. – №1. – С.107-111
2. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии: Учебное пособие.– М.: Народное образование,1998. – 256 с.
3. Смолянинова, О.Г. Инновационные технологии обучения студентов на основе метода Case Study // Инновации в российском образовании: сб. – М.: ВПО, 2000.

ЗНАКОМСТВО СТУДЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ С МОДЕЛИРОВАНИЕМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

Д.В. Елаховский, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»
e-mail: *elahovsky@mail.ru*

Использование различных физических явлений в формировании среды обитания людей в помещениях различного предназначения вызывает необходимость более детального рассмотрения некоторых из них по сравнению с базовым курсом общей физики. Именно это обстоятельство повышает мотивационную составляющую физического образования студентов строительной специальности университет, а ее реализация осуществляется за счет привлечении элементов строительной физики, одним из элементов которой является архитектурная климатология [1], [2]. К числу упомянутых явлений относится теплопроводность, так как теплофизические параметры строительных ограждений во многом формируются благодаря их теплопроводящим и теплоизоляционным свойствам. Изменяющиеся (даже в течении суток) условия эксплуатации зданий при расчете температурных полей ограждений предопределяет использование уравнений нестационарной теплопроводности, решение которых требуют учет начальных и граничных условий, что затрудняет аналитические решения. Практика проектирования зачастую имеет дело с двухмерными температурными полями ограждений, практическая реализация которых достаточно сложна и поэтому весьма перспективным представляется использование моделирования реальных тепловых процессов [3].

Реализация такого процесса включает его две разновидности. Чисто геометрическое моделирование предполагает воспроизводство теплового процесса на модели, геометрически подобной натуре, но с более удобными геометрическими размерами и соответствующими температурами на внешних поверхностях, а также использование достаточно большого количество термопар. В отличие от геометрического моделирования его физическая разновидность использует при описании модели отличный от реального физический процесс, математическое описание которого тождественно тепловому процессу. В этой связи наиболее удобным с точки зрения технического обеспечения считается электротепловое моделирование тепловых процессов. Это связано с тем, что,

во-первых, уравнение Фурье для теплопроводности $j=-\lambda\frac{\partial T}{\partial n}$ по форме записи аналогично уравнению закона Ома в дифференциальной форме $j^{э}=-\gamma\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, во-вторых, условие теплового баланса $\oint q_n dS=0$ созвучно первому правилу Кирхгофа $\oint j_n dS=0$. Кромя того, законы последовательного и параллельного соединения тепловых сопротивлений эквивалентны законам соединения электрических сопротивлений [2]. Следовательно, процессы теплопроводности и электропроводности, имея различную физическую природу, описываются одинаковыми по форме уравнениями, которые отличаются размерностью входящих в них величин.

Рассмотрим одномерную стационарную задачу т.е.T=f(x). В этом случае температуры T (x) и тепловые потоки j (x) есть определенные функции координат точки наблюдения M (x). Внутри ограждений эти функции удовлетворяют двум основным уравнениям – закону Фурье:$q=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}$ и условию теплового баланса для любой замкнутой поверхности. Кроме того, на границах с воздушными средами с постоянными температурами $T_в$ и $T_н$ должно выполняться условие непрерывности плотности теплового потока:

$$j=\alpha_в(T_в-T_{ст.в}) = \alpha_н(T_{ст.н}- T_н) \qquad (2)$$

где $T_{ст.в}$ и $T_{ст.н.}$ – соответственно температуры внутренней и внешней стен ограждения, $\alpha_в$ и $\alpha_н$ – коэффициенты теплоотдачи. В общем случае теплопроводность является заданной функцией координат натуры: λ = f (x). Смоделируем многослойную плиту в виде набора пластин 5 (рисунок 1) из электропроводящего материала с различными значениями проводимости, геометрически подобную плите.

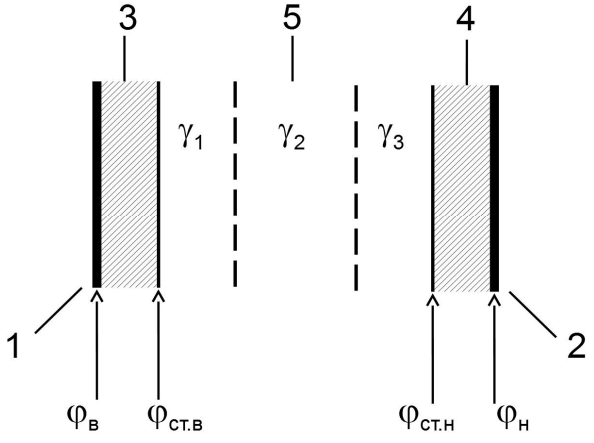


Рисунок 1 – Схематичное изображение модели
1, 2 – шины, моделирующие температуру внутри и вне помещения,
3, 4 – контактные сопротивления,
5 – слои, с различной удельной проводимостью

Помещая начало координат 0^* на модели в точку, сходственную началу координат 0 натуры (центр или граница областей с разными свойствами), из

геометрического подобия получим:

$$\frac{x^*}{x} = K_L = const \qquad (3)$$

K_L – безразмерный масштабный множитель.

Электропроводность γ (x*) в разных областях модели подберем так, чтобы

$$\frac{\gamma(x^*)}{\lambda(x)} = K_\lambda = \text{const} \qquad (4)$$

Масштабный множитель K_λ – величина, размерная $[K_\lambda]$ = град/В^2.

Для полного подобия модели и натуры необходимо на модели воспроизвести граничные условия, подобные (2). Постоянство температур внутри ($T_в$) и вне помещения ($T_н$) можно смоделировать с помощью шин 1 и 2 из материала высокой проводимости (металла) с потенциалами $\varphi_в$ и $\varphi_н$ соответственно. Для воспроизводства условий теплоотдачи на границах ограждения между шинами и границами модели необходимо создать контактные сопротивления единицы площади $R^*_{кон.в}$ и $R^*_{кон.н}$ (Ом/м^2) с помощью тонкого слоя материала между шиной и поверхностью модели толщиной δ* с плохой проводимостью γ* и потенциалов $\varphi_{ст.в}$ и $\varphi_{ст.н}$. Если $\frac{1}{R^*_{конт}} = \frac{\gamma^*}{\delta^*} = \Gamma_{конт}$, и при этом плотность тока постоянна, то для левой границы модели имеем: $j^э = \Gamma_{конт}(\varphi_в - \varphi_{н\ ст.в})$, где $\Gamma_{конт}$ – электрическая проводимость, отнесенная к единице площади, что соответствует граничному условию, аналогичному (2).

Из определения $\Gamma_{конт}$ следует, что для подобия модели и натуры необходимо, чтобы:

$$\frac{\Gamma_{конт}}{\alpha} = \frac{K_\lambda}{K_L} = \text{const.} \qquad (5)$$

Зададим теперь значения потенциалов $\varphi_в$ и $\varphi_н$ на шинах модели пропорциональными температурам $T_в$ и $T_н$ воздуха внутри и вне помещения. Тогда из подобия уравнений теплопроводности и электропроводности следует, что и внутри во всех сходственных точках будет сохраняться та же пропорциональность, т.е. устанавливается связь температуры и потенциала в сходственных точках модели и натуры:

$$\frac{\varphi(x^*)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi_{ср}}{T_{ср}} = K_T \qquad (6)$$

где $[K_T]$ = В/град. – размерный масштабный множитель. Так как во все уравнения теплопроводности и электропроводности входят не сами потенциалы и температуры, а только их разности, то множитель K_T является масштабом преобразования величин Δφ и ΔT, Поэтому начало отсчета T = 0 и φ = 0 в натуре и на модели можно выбирать независимо, т. е. в эксперименте использовать любую заземленную точку электрической схемы модели.

Рассмотрим с учетом сделанных масштабных преобразований уравнение

$$j^э = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x^*} = -\frac{K_\lambda K_T}{K_L} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (7)$$

Отношение $K_q = \frac{K_\lambda K_T}{K_L}$ как следует из вышесказанного, имеет размерность, соответствующую отношению размерности плотности электрического тока к размерности плотности теплового потока. Разделив полученное равенство на K_q, получаем эквивалентное соотношение

$$\frac{j^э}{K_q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \tag{8}$$

которое полностью совпадает с уравнением Фурье, если $\frac{j^э}{K_q} = j$. Отсюда следует, что при соблюдении введенных пропорциональностей K_L, K_λ, K_T распределение токов в сходственных точках модели прямо пропорционально распределению тепловых потоков в рассматриваемой стенке.

$$\frac{j^э(x^*)}{j(x)} = K_q = \text{const} \tag{9}$$

масштабным множителем $K_q = K_\lambda K_T / K_L$.

На выполненной модели с помощью специальных щупов измеряется распределение потенциалов $\varphi(x^*)$ в различных точках и пересчитывается распределение температуры в сходственных точках натуры с помощью соотношения

$$T(x) = \frac{\varphi(x^*)}{K_T} + T_0$$

где T_0 – температура в точке ограждения, сходственной заземленной точке модели.

Аналогичная ситуация при использовании плоских и объемных моделей. В этом случае (для объемной модели):

$$T(x,y,z) = \frac{\varphi(x^*, y^*, z^*)}{K_T} + T_0$$

При моделировании нестационарных тепловых задач необходимо учитывать не только тепловые сопротивления, но и теплоемкость участков натуры. Поэтому при моделировании нестационарная электрическая модель должна содержать как электрические сопротивления, так и электроемкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Елаховский Д.В. Повышение мотивационной составляющей физического образования студентов строительной специальности вуза // Физическое образование в вуза. – 2013. – т.19. – №4. – С.74.
2. Елаховский Д. В. Элементы архитектурной климатологии как фрагменты физического образования студентов строительной специальности университетов // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2015. – № 5 (май). – С. 86–90. – URL: http://e-koncept.ru/2015/15146.htm.
3. Тодес О.М. Курс лекций и заданий по строительной физике. – Ленинград. 1972. – 126 с.

К ВОПРОСУ ОБ АДАПТАЦИИ ФИЗИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ К ПРЕДПОЛАГАЕМОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВСТРОИТЕЛЬНЫХ ФАКУЛЬТЕТОВ УНИВЕРСИТЕТА

Д.В. Елаховский, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»
e-mail: *elahovsky@mail.ru*

Анализ проблем преподавания физики на технических факультетах университета, озвученный на различных конференциях, позволяет судить, с одной стороны, о низком уровне физико-математической подготовки абитуриентов (что доказывается результатами сдачи ЕГЭ), а с другой – об отсутствии понимания у студентов роли физических знаний в их дальнейшей профессиональной деятельности в качестве инженеров и технологов. Следует также упомянуть о резком, а порой катастрофическом снижении числа аудиторных часов, выделяемых на изучение физики на технических факультетах университета. И как результат – снижение эффективности процесса обучения, отсутствие необходимых стимулов к изучению физики, вследствие чего снижается роль мотивационной составляющей данного процесса. Ситуация усугубляется тем обстоятельством, что в рекомендованной студентам литературе отсутствует, как правило, связь физических законов с предполагаемой профессиональной деятельностью будущих строителей. Сказанное делает жизненно важной активизацию процесса физического образования и поиска новых форм её реализации. Проблему повышения мотивационной составляющей физического образования на строительном факультете можно условно представить в виде двух фрагментов. Первый из них связан с тем обстоятельством, что курс физики является базовой дисциплиной для изучения целого ряда учебных предметов, входящих в учебный план строительного факультета: теоретическая механика, сопромат, гидродинамика, теплотехника, электротехника. Данные курсы роднит с физикой одинаковый понятийный аппарат и использование при описании соответствующих процессов тех же самых объективных законов природы, которые рассматриваются в учебниках по курсу общей физики. Всё это позволяет предположить, что программа курса общей физики способна облегчить процесс усвоения программы перечисленных выше предметов. С другой стороны, преподавателям этих дисциплин знания, приобретённые студентами в рамках их физического образования (которое может быть определённым образом адаптировано в интересах указанных дисциплин) позволят больше времени уделить описанию практического использования теоретических аспектов

Вторая составляющая решения обозначенной проблемы может быть связана с попыткой адаптации физического образования к предполагаемой профессиональной деятельностью выпускников университета. И в этом случае видятся две возможности. Наиболее простая (но менее эффективная) связана с максимально возможным количеством примеров (в рамках соответствующего раздела курса физики) применимости физических законов при проектировании зданий разнообразного предназначения и их практической реализации.

Вторая возможность решения указанной проблемы требует более серьёзного изменения методического обеспечения курса физики. И здесь примером служит медицинский факультет, в котором переход от традиционного курса «Общей физики» к курсу «Медицинской и биологической физики» в большей степени увязывает роль физических законов в функционировании отдельных органов человека и всего организма в целом. Аналогичная ситуация в инженерно-строительных институтах, в которых традиционно используется курс строительной физики, но при сохранении фундаментальных положений физической науки акцент сделан на их роль при формировании комфортной среды проживания людей как на этапе проектирования зданий, так и непосредственно при его реализации. Применительно к строительным факультетам университетов в [1] было предложено изменение традиционного методического обеспечения курса физики за счет включения базовых положений строительной физики, связанных с обеспечением комфортного пребывания людей в помещениях различного предназначения. Её основными разделами являются архитектурная климатология, архитектурная акустика и архитектурная светотехника. Естественно, что в основе упомянутых составляющих курса строительной физики лежат соответствующие разделы общей физики: молекулярная физика, колебания и волны, оптика, – ибо основные явления и соответствующие им законы лежат в основе решения упомянутых проблем.

В частности, фрагментарное включение такого раздела строительной физики, как архитектурная акустика, неразрывно связанная с распространением звуковых волн внутри помещений с учетом их проникновения через строительные ограждения, позволяет понять логику строительных норм, обеспечивающих достоверность речевой и музыкальной информации (слуховой комфорт помещений). В театрах, концертных залах, лекционных аудиториях необходимо обеспечить чёткое восприятие слов и музыки в любом месте нахождения слушателей, при этом звук как носитель такой информации должен доходить до «потребителя» в неискажённом виде. Другой важной задачей архитектурной акустики и соответственно другим компонентом «слухового комфорта» являются вопросы звукоизоляции и предотвращения вредных воздействий производственных и бытовых шумов. Развитие новых видов транспортных средств, а также новых производств, функционирование которых связано с повышенным уровнем шумов, вызвало необходимость решения проблемы шумоподавления, поставив её в один ряд с проблемами очистки воды и недр от промышленных загрязнений.

Архитектурная климатология, как один из разделов строительной физики, неразрывно связана с задачами формирования в помещениях микроклимата, отвечающего требованиям теплового комфорта, качество которого должно соответствовать совокупности технологических и гигиенических требований. При эксплуатации зданий определяющим является тепловой режим помещений, от которого зависит ощущение теплового комфорта людей, нормальное протекание производственных процессов, состояние и долговечность конструкций зданий и его оборудования. Тепловая обстановка в помещениях определяется совместным действием ряда факторов: температуры, подвижности и влажности

воздуха, наличия воздушных потоков, распределения параметров воздушной среды в плане и по высоте, а также радиационного излучения окружающих поверхностей, зависящего от их температуры, геометрии и радиационных свойств. Следует отметить взаимное влияние указанных факторов при формировании тепловой обстановки помещений Фильтрация воздуха и увлажнение конструкций могут в несколько раз увеличить теплопотери помещений в зимнее время, в то же время создание благоприятной воздушной среды в помещении требует организации его воздухообмена и влагообмена с наружной средой. При проектировании параметров воздушной среды и требуемых для их реализации ограждающих конструкций зданий необходимо учитывать функциональные процессы, протекающие в конкретном помещении, а также наружные условия их эксплуатации. Как и в случае архитектурной акустики, решение указанных задач связано с использованием соответствующих физических явлений и их законов.

При практическом рассмотрении вышесказанного необходимый теоретический материал излагается в рамках лекционного курса физики, и в более подробном варианте представлен в методических пособиях [2,3], а разбор конкретных ситуаций осуществляется в рамках практического занятия с использованием разработанного сборника задач [4]. Указанная модификация методического обеспечения физического образования студентов-строителей предполагает не только изменение лекционного курса, но и переработку практического фрагмента учебного плана, а также привлечение новых форм приложения теоретического материала к конкретным ситуациям проектирования физической среды помещений. В первом случае речь идет об использовании в рамках практического занятия не только задач, имеющих политехническое и производственное содержание, но и рассмотрение вопросов формирования физической среды помещений, включающих климатическую и акустическую составляющие и обеспечивающих комфортное пребывание человека. Именно это обстоятельство в большей степени соответствует предполагаемой профессиональной деятельности будущих строителей. Говоря о новых формах практического использования теоретического лекционного материала курса физики, то речь идет об использовании расчетно-графических работах, по примеру работ, используемых, например, в курсе инженерной геодезии или автомобильных дорог. В отличие от практического занятия, в рамках которого рассматриваются частные случаи оценки теплофизических и акустических свойств используемых в строительстве материалов, расчетно-графическая работа (аналог курсовой работы) предусматривает более полную оценку состояния климатической и акустической среды конкретного помещения с учетом широкого спектра используемых материалов и климатических особенностей указанного региона. Естественно, что задание на выполнение указанной расчетно-графической работы каждому студенту выдается после лекционного рассмотрения теоретического раздела данной проблематики и разбора конкретных задач в рамках практического занятия. Предлагаемые задания позволяют ознакомиться с методами тепловых и акустических расчетов строительных ограждений, связанных с процессами распространения тепловой и звуковой энергии внутри помещений и с

определением тепловых потерь зданий и отдельных помещений, а также с количественными оценками переноса влаги через ограждения и возможностью конденсации пара на ее внутренней поверхности. Расчеты такого рода позволяют прогнозировать благоприятные условия жизнедеятельности людей в помещениях различного предназначения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Елаховский Д.В. Повышение мотивационной составляющей физического образования студентов строительной специальности вуза // Физическое образование в вузах. – 2013. Т.19. – №4. – С.74.
2. Елаховский Д.В., Малиненко И.А. Физические основы архитектурной климатологии. – Учебное пособие. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГу. – 2008. – 102 с.
3. Елаховский Д.В., Малиненко И.А. Физические основы архитектурной акустики. – Учебное пособие. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГу. – 2008. – 130 с.
4. Елаховский Д.В., Малиненко И.А. Строительная физика: сборник задач для студентов строительной специальности. – Учебное пособие. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГу 2016. – 35 с.

СООТНОШЕНИЕ ВИРТУАЛЬНОГО И РЕАЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФИЗИКИ В ШКОЛЕ

Д.И. Заикин, студент
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»
e-mail: *zaikin.zaikin1997@yandex.ru*

Моя педагогическая деятельность связана с обучением детей такому предмету как физика, который является одним из интереснейших в школе. Физика – это наука, которая изучает явления природы, строение материи и законы ее движения. Физика как отдельный предмет изучается в различных учебных заведениям уже несколько столетий, но последние десятилетия многое изменилось в образовательном процессе: произошел переход от доски, карточек и заданий, которые были написаны от руки, к компьютерам, мультимедийным проекторам, принтерам, ксероксам, интерактивным доскам. Теперь учителю, на мой взгляд, легче проводить занятия и меньше затрачивается сил и времени для того, чтобы приготовится к уроку.

Среди всех учебных дисциплин физика – один из наиболее поддающихся компьютеризации предметов. Компьютер успешно применяется, например, для облегчения работы с вычислениями. Также его можно использовать и для изучения теоретического материала, в качестве средства моделирования и визуализации и т.д. Выбор зависит от целей и дидактических задач, которые поставил учитель перед собой перед проведением урока [1].

Обучая детей физике в сельской школе, я стал замечать, что у детей не очень выражен интерес к ее изучению. Одна из возможных причин этого явления – дефицит оборудования, не позволяющий демонстрировать опыты (которые всегда привлекают учащихся), да и сам предмет не является легким. По-

этому возникает вопрос: насколько целесообразно использовать новые дидактические возможности компьютера для повышения интереса к физике?

Целью моей работы стало соотношение виртуального и реального физического эксперимента в школе.

Рассмотрим, какие возможности нам дает использование презентаций на уроках изучения нового материала. При изучении нового материала слайды вместе с демонстрационным экспериментом позволяют более полно формировать образы изучаемых предметов и явлений, в процессе их использования учитель с помощью умело подобранных вопросов и заданий возбуждает и направляет мысль учащихся к новым для себя открытиям. Затем в процессе урока использование презентации закрепляет и систематизирует у учащихся новые знания, помогает сформировать первоначальные умения.

В процессе обучения физике традиционно используются видеоматериалы, иллюстрирующие те процессы, которые невозможно показать учащимся с помощью школьного оборудования. Однако с помощью компьютера демонстрировать видеоматериалы стало значительно удобнее. В любой момент можно остановить кадр для зарисовки или пояснения непонятных опытов для учащихся.

Если нельзя провести так скажем «живой» опыт (ввиду его опасности или из-за отсутствия подходящего оборудования), то можно провести виртуальный эксперимент на компьютерной модели. Особенности виртуального эксперимента определяют эффективность его применения на уроках физики:

- можно «исследовать» явление даже в тех случаях, когда проведение реального эксперимента затруднено или небезопасно;
- можно останавливать и возобновлять эксперимент с целью анализа промежуточных результатов и возможного изменения его хода;
- можно задавать необходимые условия проведения эксперимента и его параметры, а также безопасность и сохранность компонентов экспериментальной установки.

Выделяют следующие виды виртуального физического эксперимента:

- виртуальный эксперимент, который проводит учитель;
- фронтальные лабораторные работы, выполняемые учащимися на компьютере;
- внеклассные физические опыты, в том числе домашние экспериментальные виртуальные задания [2].

После того, как виртуальный эксперимент проведен, имеет смысл предложить учащимся 1-2 эксперимента в реальных условиях. Такие эксперименты позволяют учащимся глубже вникнуть в смысл происходящего на экране.

С помощью специальных программ по физике можно делать и лабораторные работы. Такая лабораторная работа получается достаточно наглядная, интересная и эффективная. Их можно выполнять как в классе, так и задавая как домашнее задание. Подбирая для каждого ученика индивидуальное задание, в итоге можно получить большой результат при выполнении работы.

Также можно заранее проанализировать ход лабораторной работы по компьютерной модели перед выполнением работы с приборами. Всё это помогает выработке исследовательских навыков, побуждает учащихся к поиску различных закономерностей в изучаемых процессах и явлениях.

Рассмотрим в качестве примера виртуальную лабораторную работу, которую можно задавать учащимся в виде домашнего задания, изменяя параметры для каждого учащегося.

Название работы: определение цены деления цилиндра (мензурки).

Цели лабораторной работы:

– определение цены деления шкалы приборов,
– умение пользоваться приборами, измерение объема тела с помощью цилиндра.

Приборы и материалы:

Мензурка, стакан с водой, тонкая нить, твердое тело неправильной формы.

Ход работы:

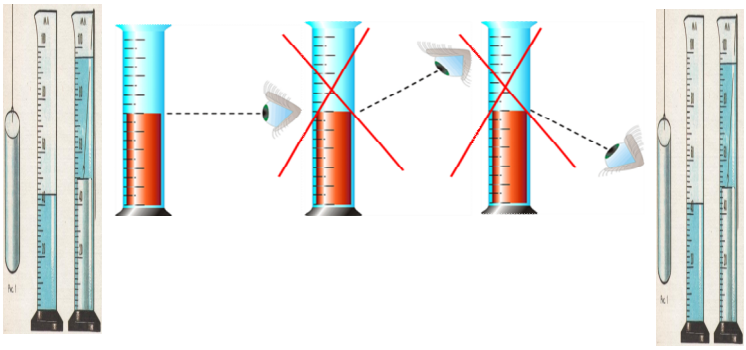


Рисунок 1 – Иллюстрация опыта

1. Изучить правила измерения уровня жидкости.

Задание 1. Определение цены деления цилиндра (мензурки)

1. Внимательно рассмотрев цилиндр или мензурку, обратите внимание на шкалу. Рассмотрев запись на шкале, запишите в тетрадь максимальный объем цилиндра и в каких единицах измеряется объем.

Например 800 мл или 600 см^3

2. Определите цену деления цилиндра

$$d = \frac{d_2 - d_1}{n},$$

где d_1 – первое деление с числом, d_2 – второе рядом стоящее деление с большим числом, n – количество промежуточных делений.

2. Определите инструментальную погрешность измерения – половина цены деления прибора. $\Delta d = d/2$. Запишите значения в тетрадь.

3. Налейте в цилиндр воду, определите объем налитой воды, без учета и с учетом погрешности измерения;

Например: $V_1 = 250$ мл, $\Delta d = 5$ мл

$$V = V_1 \pm \Delta d$$

$$V = 250 \pm 5 \text{ мл.}$$

Запишите значения в тетрадь.

Заполните таблицу.

Максимальный объем цилиндра (мл).

Цена деления цилиндра (мл).

Погрешность измерения (мл).

Результат измерения с погрешностью (мл).

Сделайте вывод.

Демонстрационные эксперименты позволяют не только проверять на сколько ученик понял тему, но и помогают при изучении новой темы.

Рассмотрим в качестве примера тему «Диффузия». Диффузия – это процесс взаимного проникновения молекул или атомов одного вещества между молекулами или атомами другого, приводящий к самопроизвольному выравниванию их концентраций по всему занимаемому объёму.

В жидкостях мы можем наблюдать процесс диффузии, но, как правило, он довольно длительный (например, диффузия воды и раствора медного купороса, результаты реакции мы увидим только через неделю, а окончание эксперимента – через месяц). В твердых телах диффузия протекает еще медленнее. Использование компьютерных технологий поможет продемонстрировать такие эксперименты на одном уроке, что является огромным плюсом при освоении знаний по этим темам.

В 7-9 классах у учащихся появляются трудности при изучении движения тела, движущегося в подвижной системе отсчета относительно неподвижной. Но с помощью компьютера мы можем предоставить наглядный видеоматериал, с помощью программы задавая определённые параметры движения в различных системах отсчета.

Применение компьютера как нового средства изучения физики убедило меня, что важная задача – создание заинтересованности у обучающихся физикой – может быть с его помощью достигнута. Компьютерные материалы – это важная часть средств обучения физике

Использование компьютера на уроках физики позволяет решать следующие дидактические задачи:

- способствует возникновению интереса учащегося к предмету и процессу обучения;
- развивает навыки самостоятельной работы для нахождения нужной информации в короткие сроки;
- позволяет экономить время преподавателя и учащихся при обработке больших объёмов математической информации.
- Совмещая компьютерные технологии и демонстрационный эксперимент в образовательном процессе, можно:
- развивать творческое мышление учащихся;
- развивать коммуникативные способности при выполнении совместных проектов учителя с учениками, в ходе проведения компьютерных деловых игр;

- формировать умения в принятии самостоятельных решений в сложной ситуации (в ходе компьютерных экспериментов на основе моделирующих программ, при работе с программами-тренажерами).

Однако не стоит забывать, что никакой виртуальный опыт не может и не должен заменить настоящий эксперимент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захарова И.Г. Информационные технологии в образовании. Серия: высшее профессиональное образование. – М.: Академия, 2010.
2. Киселев Г.М. Информационные технологии в педагогическом образовании. Учебник для бакалавров [Электронный ресурс] / Г.М. Киселев, Р.В. Бочкова. – М.: Дашков и Ко, 2012. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=112219.

АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Е.В. Закалкина, к.э.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *zakalkin@mail.ru*
Н.П. Еремеева, к.э.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *1sent@mail.ru*

Вычислительная математика в настоящее время широко используются в различных областях знаний. Грамотное использование вычислительной техники, правильный выбор методов и алгоритмов решения прикладных задач позволяет быстро найти верное решение с наименьшими временными и трудовыми затратами.

Преподавание дисциплины студентам инженерно-технических специальностей состоит в том, чтобы продемонстрировать специфику методов вычислительной математики, общности ее понятий и представлений в решении возникающих проблем. В ходе изучения рассматриваются численные методы решения наиболее часто встречающихся в инженерной практике математических задач.

В результате изучения дисциплины и формирования соответствующих компетенций студент должен знать основные понятия и методы вычислительной математики, уметь применять численные методы для решения прикладных задач, осуществлять постановку задачи и выбирать методы их решения, реализовать на ЭВМ основные численные методы, владеть численными методами исследования математических моделей задач, возникающих в инженерной практике. Большое внимание следует уделить самостоятельной работе студентов, которая способствует углублению и расширению знаний, полученных на лекциях, практических занятиях и лабораторных работах.

Для студентов направлений «Информационные системы», «Прикладная информатика» и «Программная инженерия» данная дисциплина входит в вариативную часть образовательной программы бакалавра. Изучение «Вычислительной математики» базируется на уже пройденных на младших курсах дисциплинах, таких как «Информатика и программирование», «Математика» и др.

Курс «Вычислительной математики» включает лекции, практические занятия, лабораторные работы и типовой расчет. Обучение студентов на данных направлениях должно предусматривать их профессиональную направленность, возможность работы программистами. Поэтому целесообразно не только изучить численные методы решения задач, итерационные формулы, условия сходимости и окончания итерационных процессов, но и предоставить возможность написания собственных программ, реализующих численные методы с помощью уже изученных языков программирования. На практических занятиях студенты рассматривают методы решения нелинейных уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, интерполирование функций, методы обработки экспериментальных данных, численное интегрирование, численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных, и реализуют их с помощью прикладных пакетов программ, таких как Excel, MathCad или SmathStudio [1]. На лабораторных работах используют полученные знания при программировании изученных численных методов.

Рассмотрим, например, изучение численных методов решения нелинейных уравнений. В течение двух практических занятий студенты отделяют корни уравнений, находят решение методом деления отрезка пополам, методом хорд, касательных и методом простой итерации, проверяя при необходимости условие сходимости итерационного процесса. При этом на первом занятии используются электронные таблицы Excel, на втором применяется математическая среда MathCad. И только после этого на лабораторной работе перед ними стоит задача разработки программы с интерфейсом, которая дает возможность строить график, отделять корни уравнения и уточнять их всеми изученными методами на каждом из выделенных отрезков (рисунок 1). Для тестирования программы используются условия задач, решенных на практических занятиях.

Аналогично проходит изучение методов обработки экспериментальных данных (рисунок 2) и других численных методов, где на практических занятиях все вычисления выполняются с помощью пакетов прикладных программ, а на лабораторной работе полученные знания обобщаются.

Таким образом, студенты имеют возможность решения каждой задачи несколькими способами. Применение каждого из способов имеет свою особенность. Некоторые методы сопровождаются построением таблиц, поэтому логично использование Excel. Возможности электронных таблиц также позволяют не тратить время на проведение однотипных расчетов, например, при реализации итерационных процессов. При численном решении дифференциальных уравнений в частных производных ссылки на ячейки в формуле наглядно демонстрируют используемые в выражении слои сеточной функции.

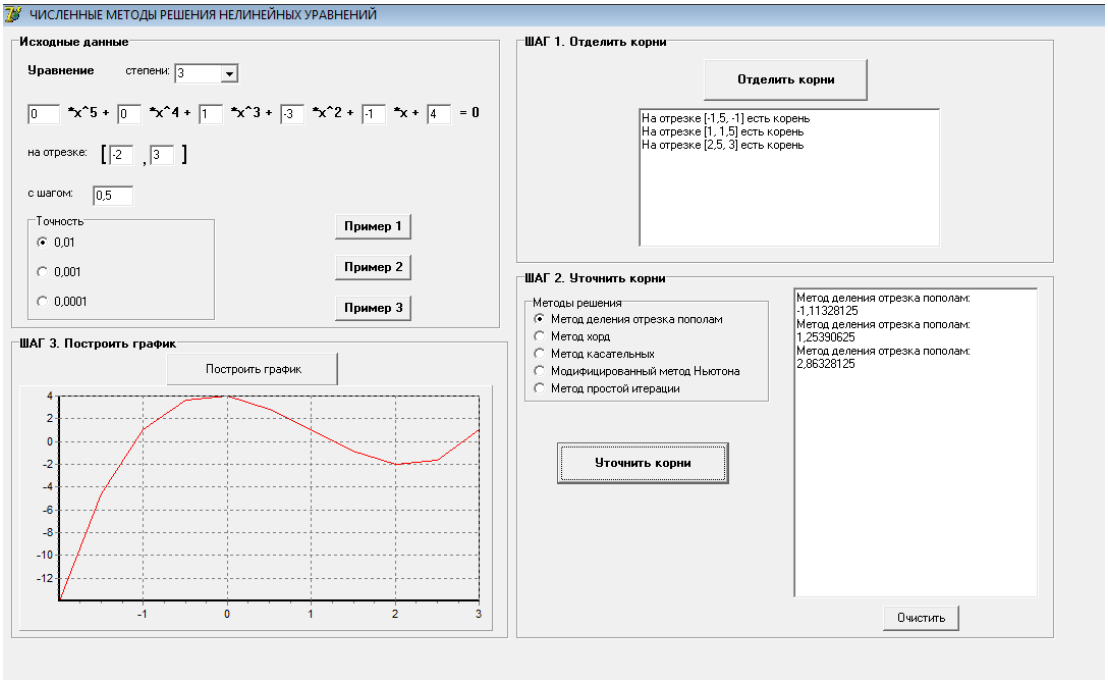


Рисунок 1 – Пример интерфейса программы расчета корней нелинейного уравнения

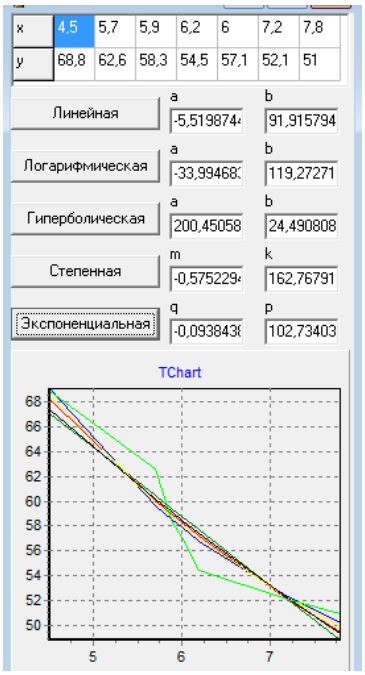


Рисунок 2 – Пример интерфейса программы расчета коэффициентов линейной и нелинейной регрессии

Математические пакеты в большей степени используются для получения решения с помощью встроенных функций и графической интерпретации решения. При написании программы студенты демонстрируют степень усвоения алгоритма метода, навыки составления программ, а также могут проявить свои индивидуальные способности.

Для правильной организации самостоятельной работы студентов необходимы ее рациональное планирование и контроль. Так в начале каждой лекции

используются небольшие тестовые задачи по материалам предыдущей лекции. Контроль над выполнением лабораторной работы включает самостоятельное оформление отчета и ответы на дополнительные вопросы. При этом помимо лучшего усвоения материала решается задача контроля работы студентов, полноты и качества преподавания материала, осуществляется обратная связь в цепи образовательного процесса. Анализ полученных результатов позволяет оценить эффективность всех этапов и внести необходимые коррективы непосредственно в процессе обучения.

Выполнение типового расчета позволяет студенту обобщить знания, полученные на лекциях, а также применить умения и навыки, приобретенные за время выполнения практических и лабораторных работ. Учитывая, что студенты с большим интересом решают задачи, имеющие не абстрактное математическое содержание, а носящие прикладной характер, для типового расчета дается готовая математическая модель, описывающая какое-либо физическое явление, инженерную задачу или технологический процесс, или предлагается построить эмпирическую формулу для реальных статистических или экспериментальных данных. Студенту необходимо выбрать и обосновать численный метод решения и реализовать его.

Обучение студентов будет успешным, если они будут точно представлять себе цель работы, знать способы ее выполнения, критерии оценки и формы отчетности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремеева Н. П., Закалкина Е.В. Методы вычислительной математики в расчетах на ЭВМ: учебное пособие / Н.П. Еремеева, Е.В. Закалкина. – Орел: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2017. – 70 с.

УДК 372.851

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ СТУДЕНТОВ-ГУМАНИТАРИЕВ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

М.А. Кислякова
ФГБОУ ВПО «Тихоокеанский государственный университет»
e-mail: *rabota2486@ya.ru*

В статье приведены примеры математических игр, которые способствуют повышению мотивации студентов-гуманитариев к изучению математических дисциплин.

Ключевые слова: математические игры, мотивация к изучению математики, студенты-гуманитарии.

Современный уровень развития математики позволяет использовать математические методы для познания и описания гуманитарных объектов. Однако, под влиянием негативного опыта, полученного на школьной ступени обуче-

ния, студенты социогуманитарных профилей испытывают крайнее нежелание осваивать курсы математических дисциплин в высшем образовании [2,4].

В связи с чем, в методике обучения математике студентов-гуманитариев первостепенной является задача повышения мотивации к изучению математических дисциплин.

Как показано в работах М.Б. Аржаник, С.И. Бордаченко, Т.А. Гавазы, Р.М. Зайкина, Р.И. Остапенко и др. отчасти эта проблема решается с помощью применения профессионально ориентированных заданий при обучении математике. Однако профессионально-ориентированные задания по математике предпочтительно использовать для развития математических компетенций на старших курсах или в магистратуре, когда студенты уже овладели базовыми математическими умениями [1].

На первом курсе, необходимо использовать такое средство, которое бы активизировало мотивационные компоненты личности при изучении материала курса высшей математики. Опытным путем было выявлена эффективная роль математических игр.

Под игрой в дидактике понимается «форма учебно-воспитательной деятельности, имитирующая те или иные практические ситуации, игра является одним из средств активизации учебного процесса, способствует умственному развитию» [3, с. 93].

Под математическими играми, в свою очередь, будем понимать «учебные ситуации, имитирующие необходимость математического описания или обоснования в ситуации соревнования». Студентов вначале знакомят с правилами игры и просят дать ответ на вопрос: кто выиграет? Как правило, студенты говорят, что шансов поровну и предугадать невозможно. Затем, студентам предлагается попарно несколько раз сыграть в игру и по результатам собственных наблюдений сделать вывод о возможных выигрышных стратегиях.

Предлагаем следующие математические игры, которые можно включить в математические дисциплины «Математика», «Основы математической обработки информации», «Высшая математика», «Математика и информационные технологии», «Математические и статистические методы обработки научных данных» при обучении студентов социогуманитарных профилей.

1. Игра со спичками. «Перед игроками лежит 21 спичка. Каждому из двух игроков разрешается по очереди брать либо 1, либо 2, либо 4 спички. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Какова выигрышная стратегия?» [7].

2. Справедлива ли игра? «Вы делаете ставку на какое то число (от 1 до 6), выбрасываются три игральных кубика, если на одном из них выпало загаданное вами число, вам возвращается первоначальная ставка плюс еще столько же, если на двух кубиках, то возвращается ставка плюс выигрыш – удвоенный размер ставки, если сразу на трех – то вы получаете ставку плюс размер ее утроенный размер. Справедлива ли эта игра?» [5].

3. Дилемма заключенных. «Вам и Вашему соседу по парте предлагают признаться в списывании контрольной работы и «заложить» своего одногруппника. Реальных доказательств у преподавателя нет (только подозрения,

что задачи в контрольной были решены одинаково и сделано ряд похожих ошибок). Поэтому если оба промолчат, то получат по одной дополнительной задаче. Если оба признаются, обоим дадут по три дополнительных задачи. Если один признается, а другой нет, то признавшегося – отпустят и зачтут результаты контрольной, а упорствующий будет переписывать контрольную, да еще и получит усложненный вариант. Друг с другом одногруппники не общаются. Что делать каждому из них?».

4. Феномен Базермана: как продать 20 долларов за 204? Небольшая адаптация к российским студентам.

«Один из студентов показывает сто рублевую купюру всей группе и сообщает, что отдаст сто рублей студенту, который даст за нее больше всего денег. Правда, есть небольшое условие. Человек, который был сразу за победителем, должен будет отдать одногруппнику ту сумму, которую он был готов отдать за сто рублей».

5. Проблема Джона Смита. «Одинаковы ли шансы на успех у трех человек, если первому надо получить хотя бы одну шестерку при бросании игральной кости 6 раз, второму – не менее двух шестерок при 12 бросаниях, а третьему – не менее трех шестерок при 18 бросаниях?».

6. Интуиция или математика? «Играют три студента. Один вкладывает в два конверта две суммы (в одной 100 рублей, в другой двести) и отдает двум другим студентам не сообщая где и сколько денег в каждом конверте. Двое других студентов берут конверты и тайком друг от друга смотрят, сколько в них денег. Затем один говорит другому: «Поменяемся конвертами?». Стоит ли второму соглашаться?».

7. Чтобы делилось на семь. «Двое играют в такую игру: по очереди слева направо пишут цифры 20-значного числа. Задача первого игрока (он записывает 1-ю, 3-ю, 5-ю и т.д. цифры) – сделать так, чтобы итоговое число не делилось на семь, второго чтобы делилось. У кого из игроков больше шансов на выигрыш и почему?» [5].

Опыт проведения математических игр показывает, что студенты становятся более осознанными, они могут определить, где есть необходимость применения математического аппарата; активизируют свои знания и умения по математике, там, где этого требует ситуация; проявляют себя как активные участники, отстаивают свое мнение, опираясь на математические законы и факты. Применение математических игр в каждом учебном модуле способствует повышению мотивации к дальнейшему изучению математического аппарата, к мобилизации внутренних когнитивных и рефлексивных механизмов деятельности студентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайкин Р.М. Что же следует понимать под профессионально ориентированным обучением математике студентов-гуманитариев? / Р.М. Зайкин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2013. – № 5 (2). – С. 69-72.

2. Кислякова М.А. Возможности и структура педагогического потенциала математических дисциплин в подготовке бакалавров гуманитарных направлений / М. А. Кислякова/ Вестник КГПУ им. Астафьева. – 2016. – № 1. – С. 57-60.
3. Коджаспирова Г.М. Словарь по педагогике / Г.М. Кождаспирова, А.Ю. Коджаспиров. – Москва: ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2005. – 448 с.
4. Поличка А.Е. Реализация педагогического потенциала математических дисциплин в подготовке бакалавров гуманитарных направлений / А.Е. Поличка, М.А. Кислякова // Педагогическая образование и наука. – 2016. – № 2. – С. 114-116.
5. Полуэктов П. Озадачник: 133 вопроса на знание логики, математики и физики / П. Полуэктов, Н. Полуэктов. – М.: Альпина Паблишер, 2017. – 286 с.
6. Щербакова М.А. Проблема определения целей и содержания учебного предмета «Математика» для студентов гуманитарных специальностей // Вестн. Томского гос. Пед. Ун-та. – 2012. – Вып. 2 (117). – С. 175-179.
7. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики / А. Шень. – 2-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2008. – 40 с.

УДК 53

ДИДАКТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ГОТОВНОСТИ К АНАЛИЗУ ПРОБЛЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

И.В. Корогодина, к.пед.н.
Академия ФСО России
e-mail: *ekorogodin@yandex.ru*
Б.Д Цуканов, к.пед.н, доц.
Академия ФСО России
e-mail: *tsbd@yandex.ru*

Радиопередающая аппаратура стала фактором биосферы и требует определенного уровня культуры в обращении с ней. В особой степени это относится к специалистам по радиосвязи, которые должны быть компетентными в вопросах биологического действия радиочастотных излучений, методологии оценки и экспериментального измерения нормируемых параметров электромагнитных полей, анализу электромагнитной обстановки на ПРТО и прилегающей территории, обеспечению электромагнитной безопасности персонала и гражданского населения. Подготовка специалистов по эксплуатации средств радиосвязи направлена на формирование профессиональных компетенций, базирующихся на фундаментальных знаниях об электромагнитных полях и волнах и практических умениях по выбору и использованию соответствующих средств измерений.

Ключевые слова: профессиональное обучение, готовность к деятельности, электромагнитная безопасность, дидактическая модель, электромагнитный мониторинг.

Современный этап научно-технического прогресса в значительной степени связан с развитием информационно-коммуникационных систем. Среди них

особое положение занимают средства радиосвязи. Это обусловлено их преимуществами по сравнению с системами связи, построенными на использовании передающих линий, снижением стоимости оборудования и доступностью для личной мобильной связи. Вместе с тем, применение сотовой связи делает необходимым нахождение человека в зоне действия передатчиков базовых станций и вплотную приближает его к антенне мобильного терминала.

Одновременно с этим возрастает количество радиовещательных станций, число телевизионных каналов, радаров, радиомаяков, точек радиодоступа. Все это относится к категории передающих радиотехнических объектов (ПРТО) и оказывает влияние на электромагнитный фон, в условиях которого проживает или работает человек. Одна только информация о десятках роутеров с функцией *Wi– Fi* на дисплее смартфона может повергнуть неподготовленного человека в состояние радиофобии и заставить его довериться шарлатанам, предлагающим средства защиты от радиоизлучений в виде брелоков, наклеек, карт, электронных блоков и других совершенно бесполезных изделий.

Принимая во внимание все большую озабоченность общества состоянием электромагнитной безопасности (ЭМБ), актуальным стал вопрос о готовности выпускников технических вузов к исследованию полей и анализу проблем ЭМБ.

В соответствии с Законом «Об образовании в РФ» профессиональное обучение направлено на приобретение лицами различного возраста профессиональной компетенции, в том числе для работы с конкретным оборудованием, технологиями, аппаратно-программными и иными профессиональными средствами, в том числе и являющихся источниками ЭМИ [1].

В отечественной психолого-педагогической науке понятие «готовность» используется очень широко и в разных сочетаниях для обозначения и исследования ее различных форм: готовность к труду (Е.П. Ильин, С.Я. Батышев, М.Н. Скаткин и др.); готовность к военной службе (М.М. Драгомиров, М.И. Дьяченко и др.); готовность будущих специалистов к профессиональной деятельности (Т.А. Воробьева, М.И. Дьяченко и др.); готовность к профессиональной деятельности военных специалистов (С.В. Середенко, Б.Д. Цуканов). Большое внимание проблеме готовности к деятельности уделяется в исследованиях по вопросам компетенций и компетентности специалистов [2, 3].

В научно-методической литературе по вопросам методологии (И.А. Зимняя, М.И. Дьяченко, Л.А. Кандыбович) достаточно широко исследуется проблема готовности личности к деятельности, в структуру которой принято вносить:

– знания, умения и навыки, необходимые для выполнения конкретной деятельности;
– способности к данному виду деятельности, достаточный уровень развития мышления, памяти, воли;
– положительное восприятие осуществляемой деятельности;
– соответствующие требованиям деятельности темперамент, физическое и эмоциональное состояние.

Обобщая общепринятые подходы в определение понятия «готовность к деятельности», под готовностью к исследованию полей и анализу проблем

электромагнитной безопасности будем понимать личностное образование, формирующееся в процессе изучения естественнонаучных и инженерных дисциплин и характеризующееся высоким уровнем овладения знаниями о характеристиках и свойствах ЭМП и реализующееся в компонентах профессиональной деятельности по защите персонала от опасного воздействия ЭМП.

Ее формирование начинается при обучении в вузе, продолжается в последующей профессиональной деятельности и детерминируется следующими условиями:

- наличием мотивов к активному и осознанному получению знаний о источниках и биологическом действии ЭМП;
- разработанностью принципов формирования готовности к применению знаний по теории ЭМП, их согласованность с компонентами профессиональных компетенций будущих инженеров;
- представлением о готовности к исследованию полей и анализу проблем ЭМБ как многоуровневом образовании, возникающем в ходе последовательного формирования ее составляющих – мотивов; системы знаний, умений и навыков; приемов деятельности; общей и военной культуры, стремления к саморазвитию.

Эффективное решение задач по формированию готовности будущих инженеров к определенным видам деятельности предполагает наличие системы целеполагания, согласованности действий профессорско-преподавательского состава, создание определенных педагогических и организационных условий учебной деятельности, системы контроля и коррекции развития требуемых качеств личности. Все названные элементы при объединении в организованную систему образуют дидактическую модель подготовки специалиста (рисунок 1).

Все компоненты модели формирования готовности специалиста к исследованию ЭМП и проблем ЭМБ взаимодействуют друг с другом непосредственно, через модель специалиста и модель его деятельности. Важно отметить, что модель деятельности является своего рода эталоном формирования профессионально важных качеств специалиста, в том числе и по ЭМБ, что позволяет на основе общих целей и содержания образования сформулировать дидактические цели и определить содержание образовательного процесса, реализуемые в образовательных учебных программах дисциплин естественнонаучного цикла.

Основой представленной дидактической модели стали положения системно-деятельностного и личностно-ориентированного подходов к обучению и положения теории управления педагогическими системами, которые позволили показать целесообразность вычленения в ней: модели специалиста (кого готовить?), модели учебных дисциплин (чему учить?), модели организации процесса обучения (как учить?), модели обучающегося (кого учить?) и модели обучающего (кому учить?).

Модель специалиста отражает требования к составу и уровню развития профессионально важных качеств выпускника, имеющих отношение к формированию и развитию готовности к исследованию полей и анализу проблем электромагнитной безопасности.

Рисунок 1 – Дидактическая модель формирования готовности к исследованию ЭМП и ЭМБ

Модель учебной дисциплины строится на основе Государственного образовательного стандарта и включает в себя учебные и воспитательные цели, требования к освоению содержания дисциплины, особенности содержания профессионально-ориентированной системы знаний, навыков и умений, относящихся к описанию характеристик и свойств ЭМП и ЭМВ, а также дидактические требования к образовательному процессу: научность содержания и мето-

дов, системность, последовательность обучения, преемственность, доступность, наглядность и т. д.

В модели организации процесса обучения учитываются особенности реализации преподавателем методики учебной деятельности: методы обучения, способы подачи учебного материала, реализация возможностей технологии обучения, управляющие воздействия на обучающихся, использование средств визуализации информации.

Модель обучающего отражает особенности квалификации преподавателя, его общую и профессиональную культуру, владение современными средствами предъявления учебной информации и технологиями обучения.

Модель обучающегося представляет собой образ личности курсанта (слушателя) с заданными качествами, которая позволяет преподавателю анализировать и учитывать в своей учебной деятельности особенности индивидуальных качеств обучающегося, исходный и достигнутый уровни познавательных умений, уровень освоения специальных знаний и умений, динамику сформированности готовности к исследованию полей и анализу проблем электромагнитной безопасности как профессионального качества.

Таким образом, представленная дидактическая модель формирования готовности к исследованию ЭМП и ЭМБ полностью отвечает педагогическим требованиям, обеспечивая качественное усвоение знаний и формирование умений и навыков для проведения электромагнитного мониторинга объектов связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» N 273-ФЗ от 29 декабря 2012 года / https://dokumenty24.ru.
2. Середенко С.В. Формирование готовности к военно-профессиональной деятельности выпускников военных учебных заведений связи: Автореф. дисс. … канд. пед. наук. – М., 1997. – 17 с.
3. Цуканов Б.Д. Формирование профессионально важных качеств специалиста при изучении физики в военном вузе: Автореф. дисс. … канд. пед. наук. – Елец, 2005. – 22 с.

УДК 53

СТРУКТУРА ЗНАНИЙ СПЕЦИАЛИСТА В РАМКАХ КОМПЕТЕНТНОСТНОГО ПОДХОДА

И.В. Корогодина, к.пед.н.
Академия ФСО России
e-mail: *ekorogodin@yandex.ru*

В статье проводится анализ возможностей дисциплины «Физика» при реализации компетентностного подхода в системе подготовки современного инженера. Описывается структура знаний специалиста как системы общекультурных и профессиональных компетенций. Обосновывается система методов и средств обеспечения профессиональной направленности предметных занятий.

Ключевые слова: компетентностный подход, общекультурные и профессиональные компетенции, профессионализация физического образования, инженерное образование.

Высокий темп развития современных технологий порождает насущную необходимость решать проблему об эффективности применения знаний выпускников высших учебных заведений в их будущей профессиональной деятельности. В этой связи важным направлением реформирования выступает работа по повышению качества инженерного образования.

Введение в нашей стране новых образовательных стандартов требует от преподавателей высшей школы осознания того, что вместо знаниевого подхода к образовательной деятельности, ориентирующего на основании определенной системы знаний, умений, навыков, следует руководствоваться компетентностным подходом. В его основе лежит идея о том, что обучающийся должен не вообще получать образование, а достигнуть некоторого уровня компетентности как в способах жизнедеятельности в человеческом обществе (общекультурные компетенции – ОК), так и в профессиональном плане (профессиональные компетенции – ПК).

В соответствии с компетентностным подходом изучение физики приобретает новые возможности не только по изучению явлений действительности, но и решает познавательные задачи, учит решать коммуникативные проблемы, а также обеспечивает профессиональный выбор обучающегося. В узком смысле под профессиональной компетентностью целесообразно понимать систему профессионально важных качеств (знаний, навыков, умений), мировоззренческих позиций, ценностных установок и психологических особенностей, необходимых выпускнику инженерного вуза для успешного выполнения должностных обязанностей на производстве. В этой связи инновации в обучении физике должны быть направлены на теоретическую и практическую подготовку, а также на развитие профессионально важных способностей. В качестве интегративных характеристик составляющих ПК используются компетенции, представляющие своего рода стандарты деятельности специалиста, отраженные, в том числе, в учебной программе дисциплины «Физика».

Постановке целей преподавания курса физики и оптимизации содержания дисциплины по подготовке специалистов заданной квалификации и профиля

предшествует разработка концептуальной модели специалиста и определение технологии (механизма) ее формирования (рисунок 1).

Особое значение в структуре знаний специалиста отводится фундаментализации инженерного образования. Она определяется местом фундаментальных знаний в общей системе знаний, что выражается в увеличении объема и роли дисциплин общенаучного цикла (в первую очередь – физики); в перестройке цикла общеинженерных дисциплин, путем усиления внимания к методологическим, мировоззренческим и социальным проблемам; в изучении отдельных закономерностей, явлений и понятий на базе основных идей и принципов; в обеспечении методологической культуры специалиста, включающей методы познавательной, профессиональной, коммуникативной и аксиологической деятельности.

Анализ результатов обучения позволяет утверждать, что фундаментальная подготовка будущих специалистов, в основе которой лежат твердые физические знания, обеспечивает у них умения решать инженерные задачи комплексного характера на основе синтеза знаний специальных учебных дисциплин технического вуза. Факторы компетентности являются здесь «подтвержденным критерием», то есть они получаются в результате анализа ключевых аспектов поведения или навыков, которые отличают эффективное выполнение работы от менее эффективного, для чего, в первую очередь, определяется каким набором компетенций должен обладать специалист.

Рисунок 1 – Структура знаний специалиста

Особое положение физики в системе формирования ПК специалиста определяется тем, что, во-первых, она является одной из дисциплин, с которых начинается вхождение в вузовский образовательный процесс; во-вторых, содержательное многообразие физики позволяет реализовать идею профессиональной направленности всех видов занятий на кафедре от лекций до учебно-исследовательских работ; в-третьих, вузовский курс физики обладает большим воспитательным потенциалом.

В этой связи в составе дисциплин, изучаемых студентами технических вузов на первом этапе обучения в высшей школе, физике отводится достаточно большое количество времени, а на преподавателей в значительной степени возлагается задача обучения студентов учебным умениям в процессе освоения предметного материала. Профессорско-преподавательский состав кафедры закладывает у обучающихся курсантов базовые знания о вузе, вузовском образовательном процессе, учебно-познавательной деятельности, приемах эффективной работы с источниками информации, методах запоминания. При этом очень важным является формирование у студентов на материале физики ОК и ПК, отражающих специфику инженерной деятельности, а именно умение работать с печатными и электронными справочниками, научными изданиями пр.

Таким образом, ориентация на компетентностный подход при формировании структуры знаний специалиста делает оправданным переход от форм и методов, ориентированных на овладение системой готового знания, к технологиям формирования деятельности обучающихся, связанной с возможностью использования ее в условиях требований, которые складываются на рынке труда.

УДК 378.14

ФОРМИРОВАНИЕ САМООБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В УСЛОВИЯХ СОВРЕМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ОБУЧЕНИЯ

Т.С. Максимова, к.пед.н., доц.
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»
e-mail: *T.S.Maximova@yandex.ru*

В статье определено место и роль самообразовательной компетентности в структуре профессиональной компетентности будущего инженера. Определены педагогические условия применения активных методов обучения. Рассмотрены возможности использования метода проектов и метода кейсов при формировании самообразовательной компетентности студентов технических вузов при изучении ими линейной алгебры.

Ключевые слова: профессиональная компетентность, самообразовательная компетентность, линейная алгебра, активное обучение, проект, кейс, самостоятельная работа.

В современных условиях основной целью высшего технического образования является подготовка квалифицированных специалистов соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособных на рынке труда. От специалистов

технического профиля помимо специальных знаний требуется умение ориентироваться в информационных потоках, быть мобильным, осваивать и разрабатывать новые технологии, самообучаться, самостоятельно находить и использовать недостающие знания. Способность к самообразованию является характерной чертой современного инженера.

Вопросам самообразования школьников и студентов посвящены работы А.П. Авдеева, А.Я. Айзенберга, В.П. Бондаренко, Е.П. Голубева, И.И. Колбаско, М.Г. Кузьминой, И.Ф. Медведева, Ю.А. Панасенко, А.Е. Пасекунова, Б.Ф. Райского, Н.И. Пидкасистого, Г.Н. Серикова, Н.Н. Тулькибаевой и др.

Следует отметить, что значительная часть исследований касается профессионального образования. Они предполагают разработку методических рекомендаций для организации и управления самостоятельной работой студентов, формирования у них опыта самообразовательной деятельности, формирования самообразовательных умений в теории и практике профессионального образования. Остаются недостаточно разработанными вопросы формирования самообразовательной компетентности студентов при обучении высшей математике в условиях современных технологий обучения.

Самообразовательная компетентность является одной из составляющих профессиональной компетентности. Она предполагает наличие у специалиста технического профиля готовности и способности осуществлять самообразование в процессе решения профессиональных задач и реализации профессиональных функций.

Инженерными можно назвать задачи, которые возникают в процессе создания и функционирования организационных, экономических, социальных систем, что значительно расширяет границы предмета инженерной деятельности. Грамотный инженер – это профессионал, знающий не только технологию и организацию производства в соответствующей отрасли, но и аспекты экономики, юриспруденции, норм охраны труда. При этом он должен постоянно развиваться и совершенствоваться. Это требует дополнения целей обучения высшей математике в вузе умениями, которые обеспечат студентам в их будущей профессиональной деятельности возможность осуществлять самообразование.

Инженерное дело тесно переплетается с наукой, опираясь на постулаты фундаментальной науки и результаты прикладных исследований. Специалист инженерного профиля должен обладать фундаментальными знаниями по техническим дисциплинам, иметь знания в области естественных наук, математики и в соответствующем узкоспециальном направлении.

К разновидностям инженерной деятельности относятся проектно-изыскательная, производственно-технологическая, управленческая, экспериментально-исследовательская, монтажно-наладочная и эксплуатационная деятельности. Каждому виду профессиональной деятельности соответствуют свои инженерные задачи. В ходе решения этих задач инженер, как правило, осуществляет интерпретацию исходных данных, постановку задачи, составление плана ее решения, его реализацию и анализ полученного решения. Поэтому при обучении высшей математике будущего инженера необходимо учить осуществлять каждый из этапов решения инженерной задачи, стимулируя его при этом

проявлять самостоятельность, целеустремленность, коммуникабельность и другие личностные качества.

Реализация компетентностного подхода при обучении математике в техническом вузе предполагает ориентацию всех компонентов учебного процесса на формирование компетенций, необходимых будущему выпускнику для осуществления профессиональной деятельности. Составляющими профессиональной компетентности будущего инженера являются:

- профессиональные знания – знания из профессиональной области, знания в области естественных наук, математики.
- профессиональные умения – умения соответствующие проектно-изыскательной, производственно-технологической, управленческой, экспериментально-исследовательской, монтажно-наладочной и эксплуатационной видам деятельности;
- профессионально значимые личностные качества – психологические, социальные, нравственные.

Также, по нашему мнению, к профессионально значимым знаниям относятся знания о методах и технологиях научного поиска, знания о способах решения задач и о специальных приемах мыслительной деятельности, направленных на открытие новых способов действий и знаний. К профессионально значимым умениям относятся умения организовывать свою деятельность, умение работать с различными источниками информации, умения, способствующие продвижению при осуществлении плана решения задачи, умения анализировать и оценивать свою деятельность, умения сотрудничать с другими участниками процесса поиска. Перечисленные знания и умения носят самообразовательный характер. Формирование самообразовательной компетентности в структуре профессиональной компетентности будущего специалиста технического профиля при изучении высшей математики связано с созданием условий для овладения студентами самообразовательными знаниями и формированием у них самообразовательных умений.

Компетентностный подход ориентирует процесс обучения математике на личностный результат каждого студента и требует создания условий, при которых студенты смогут проявить не только интеллектуальную и познавательную активность, но и личностную, социальную позицию, свою индивидуальность. Последнее становится возможным благодаря проектированию активной модели обучения высшей математике.

Применение методов активного обучения в учебном процессе по высшей математике, ориентированном на формирование самообразовательной компетентности будущих инженеров, должно опираться на следующие принципы.

Принцип проблемности лежит в основе разработки профессионально-ориентированных заданий и ситуаций по высшей математике. Они могут требовать выявить и разрешить противоречия, найти недостающую информацию, провести исследование ситуации и т. д. Проблемность содержания выступает объективной предпосылкой самостоятельности мышления студентов.

Принцип диалогического взаимодействия участников учебного процесса является необходимым условием совместного продвижения студентов к откры-

тию новых знаний и способов действий при разрешении проблемы. Задача педагога при этом создание оптимальных условий для перехода внешнего диалога во внутренний, стимулирующий механизмы самостоятельного открытия.

Принцип вариативности предполагает возможность опоры на разнообразный материал и способы его обработки, что обеспечивает возможность построения студентами индивидуальных траекторий развития.

Индивидуальный подход позволит ощутить успех при самостоятельном выполнении заданий каждому студенту.

Одним из современных методов активного обучения, является метод проектов. Эта педагогическая технология, направленная на применение имеющихся знаний и приобретение новых путем самообразования, будет способствовать формированию самообразовательной компетентности.

При изучении линейной алгебры преподавателем может быть сформулирована тема исследовательского проекта: «Применение матриц второго и третьего порядка: линейные преобразования на плоскости и в пространстве». Целью данного проекта является – выявление и изучение геометрических объектов, которые соответствуют матрицам второго и третьего порядка, интерпретация действий над матрицами с точки зрения линейных преобразований. Организация самостоятельной работы студентов предполагает разбиение студентов на группы и распределение обязанностей участников.

На следующем этапе происходит анализ проблемы каждой группой, исследование различных источников информации, выделение промежуточных проблем, разработка вариантов решения каждой группой. Студенты учаться сотрудничать в процессе нахождения путей решения проблемы. Роль преподавателя заключается в проведении консультаций, управлении самостоятельной работой студентов.

Демонстрация учасниками каждой группы полученных результатов сопровождается обсуждением с последующей коррекцией результатов, выявлением сильных и слабых сторон разработанных решений.

Одной из современных форм активного обучения является проблемно-ситуативное обучение с использованием кейсов. Овладение самообразовательными умениями становится результатом активной самостоятельной деятельности студентов по разрешению противоречий в предложенных ситуациях.

При изучении линейной алгебры студентам может быть предложен кейс, который представляет ситуацию, требующую анализа и пояснения, а также применения информационно-коммуникационных технологий при ее разрешении. Кейс содержит список литературы, инструкцию для применения программы Mathcad.

Для заданной статически неопределенной рамы с указанными размерами и нагрузкой комбинированием метода сил и метода перемещений (разделы строительной механики) составлена система:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}'z_3 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}'x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}'z_3 + \Delta_{2p} = 0, \\ r_{31}'x_1 + r_{32}'x_2 + r_{33}z_3 + r_{3p} = 0, \end{cases}$$

где x_1, x_2 – реакции в узле, z_3 – угол поворота узла [1]. Единичные и грузовые коэффициенты системы линейных уравнений определены с помощью единичных и грузовых эпюр методами строительной механики и заданы в условии.

Цель работы с кейсом – проанализировать ситуацию (пояснить смысл каждого уравнения в системе, установить связь между данными на рисунке и в системе); решить систему по формулам Крамера, применив программу Mathcad; пояснить найденное решение.

Для работы с кейсом студенты разбиваются на группы. Предполагается публичная защита вариантов разрешения ситуации с последующим оппонированием. При оценивании проведенной работы учитывается как вклад каждого участника в разрешении проблемы, так и участие в обсуждении.

Результатом организованной таким образом самостоятельной работы являются полученные каждым студентом образовательные продукты в виде решения проблемы, а также алгоритма действий по выполнению задания.

Таким образом, использование современных технологий при обучении линейной алгебры в техническом вузе стимулирует познавательную самостоятельность студентов, интерес к изучению дисциплины, что положительно сказывается на формировании самообразовательной компетентности студентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крепак В.Н., Мирошниченко В.П., Романов П.П. Прикладные задачи по высшей математике в строительстве: Учеб. пособие. – К.: УМК ВО, 1989. – 256 с.

УДК 37.02:519.85

ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОСТИ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ РАЗДЕЛА «ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА» У СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

А.П. Мателенок
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»
e-mail: *Kyznetsova@tut.by*

Научно-методическое проектирование практических занятий имеет целью теоретическое развитие и конкретизацию, максимальное использование и внедрение в реальный процесс обучения математике студентов отдельных специальностей концептуальных разработок педагогической теории (Ю.К. Бабанский, В.П. Беспалько, Н.В. Бровка, В.В. Казаченок, В.А. Козаков, П. И. Образцов, Б.В. Пальчевский, П.И. Пидкасистый, И.А. Новик, А.С. Роботова,

А.А. Столяр, А.П. Сманцер, И.И. Цыркун, И.Э. Унт, М.В. Ушакова и др.), а также достижений педагогической практики. Методологическую основу решения обозначенной задачи будут составлять: разумная и научно обоснованная интеграция различных видов практических занятий по математике с опорой на модульный, деятельностный, дифференцированный, когнитивно-визуальный, системный подходы к обучению математике и дидактические возможности информационных технологий, в соответствии с поставленной целью: развитие навыков познавательной самостоятельности [1].

Мы разделяем мнение Голеновой И.А. в том, что традиционная методика проведения практических занятий, как правило, включает опрос студентов, решение типовой задачи преподавателем, решение студентами задач, общих для всей группы, на доске или в конспектах, с последующей проверкой. На занятиях большая часть времени уходит на ответы студентов по конспектам. Таким образом, при данной форме учебных занятий главными недостатками являются слабая мыслительная активность студентов, недостаточный интерес к познанию, вынужденно одинаковый темп работы студентов. Как правило, знания студентов часто остаются формальными, а более сложные вопросы так и остаются не раскрытыми, в то время как именно на практических занятиях могут быть реализованы большие возможности для активизации учебного процесса [2, с. 81].

В этой связи выделены дидактические требования, позволяющие повысить эффективность практических занятий по математике и составляющие основу проектируемой методики: «осознание педагогом диалектического характера обучения, из которого вытекает, что нет, и не может быть, универсальной структуры обучения, способной разрешить все дидактические задачи в равной мере эффективно» [3, с. 69]; «стремление обеспечить возможное разнообразие форм и методов преподавания и учения» [3, с. 71], а также «современная система обучения должна представлять собой целостную систему, в которой разумным образом сочетаются все формы и методы обучения при определяющей роли в ней самостоятельной работы студентов» [4, с. 10].

В процессе исследования и проектирования компонента «Практические занятия» также выявлены принципы и критерии, разработанные в монографии [5] под ред. П.И. Образцова, а также Я.И. Груденовым в [6]. Они определяют содержательную составляющую рассматриваемого компонента, а также формы, методы представления математической информации, требующие специальных методических средств организации активной самостоятельной познавательной деятельности студентов.

В монографии под редакцией П. И. Образцова установлены критерии отбора содержания учебной дисциплины, которые являются ориентировочной основой при определении содержания математической информации для проектируемых практических занятий: «целостное отражение в содержании обучения задач формирования всесторонне развитой личности; высокая научная и практическая значимость содержания; соответствие сложности содержания реальным учебным возможностям обучающихся; соответствие объема содержания имеющемуся времени на изучение данного предмета; соответствие содержания

имеющейся технологической (учебно-методической) и материально-технической базам образовательного учреждения» [5, с.45].

В этой же монографии определен следующий алгоритм организационных действий преподавателя при проектировании и конструировании профессионально-ориентированной технологии обучения: 1) определение диагностических целей обучения, описание в измеримых параметрах ожидаемого дидактического результата; 2) обоснование содержания обучения в контексте будущей профессиональной деятельности специалиста; 3) выявление структуры содержания учебного материала, его информационной емкости, а также системы смысловых связей между его элементами; 4) определение требуемых уровней усвоения изучаемого материала и исходных уровней обученности студентов; 5) разработка процессуальной стороны обучения: представление профессионального опыта подлежащего усвоению обучающимися в виде системы познавательных и практических задач; 6) поиск специальных дидактических процедур усвоения этого опыта, выбор организационных форм, методов, средств индивидуальной и коллективной учебной деятельности; 7) выявление логики организации педагогического взаимодействия с обучающимися на уровне субъект-субъектных отношений с целью переноса осваиваемого опыта на новые сферы деятельности; 8) выбор процедур контроля и измерения качества усвоения программы обучения, а также способов индивидуальной коррекции учебной деятельности [5, с.38].

С учетом указанных критериев и алгоритма остановимся подробнее на проектировании для практических занятий содержательно-методической, оргуправленческой, контрольно-корректирующей деятельности преподавателя в процессе организации познавательной деятельности студентов на примере изучения учебного модуля «Элементы векторной алгебры».

1. Определение диагностических целей обучения этого модуля, описание в измеримых параметрах ожидаемого дидактического результата осуществляется с использованием таблицы «Дидактические цели обучения», которая приведена в УМК (в узком смысле) [7, с. 10].

2. Обоснованность содержания обучения в контексте будущей профессиональной деятельности специалиста подтверждается тем, что «Элементы векторной алгебры» – модуль, который обязательно включается в процесс подготовки будущих инженеров. Использование векторов не только открывает новые возможности применения аппарата векторной алгебры в физике, механике и т.д., но и упрощает решение многих задач самой математики.

3. Выявление структуры содержания учебного материала, его информационной емкости, а также системы смысловых связей между его элементами реализуется посредством графической схемы, представленной также в УМК (в узком смысле) [7, с.13].

4. Определение требуемых уровней усвоения изучаемого материала и исходных уровней обученности студентов выполняется с использованием информационного поля УМК (в узком смысле), которое позволяет студенту выбирать свою траекторию обучения в каждом модуле. Студент практически ставится в условия, когда обязательно необходимо овладеть выделенной математической

информацией хотя бы на базовом уровне. Поэтому УМК содержит в себе возможности самоконтроля, а также уровневого контроля знаний. Студенты, работающие на I уровне сложности, потенциально могут претендовать на получение на экзамене оценки «4-5»; работающие на II уровне – оценки «6-8»; работающие на III уровне – оценки «9-10». Трехуровневая тестовая среда УМК создает условия для перехода студентов от заданий, требующих воспроизводящей мыслительной деятельности к заданиям, требующим познавательной деятельности преобразующе-воспроизводящего или творческого характера. Задания I уровня представляют собой базовые знания, которые должен получить каждый студент, обучающийся на данной специальности, т.е. это те знания, без усвоения которых нельзя двигаться к изучению следующей темы. Задания II уровня представляют собой задачи, которые надо решить, используя материал прошлых тем и глубокое понимание материала, задания III уровня – это творческие задания, которые требуют не только отличного знания и понимания темы, но определенной доли смекалки и знаний из других отраслей наук [8, с.44].

5. Разработка и проектирование процессуального аспекта организации практических занятий в модуле основывается на системе учебных и практических задач, обучающих, тестовых заданий трехуровневых по форме, нулевых вариантов с приведенными решениями из УМК (в узком смысле), а также применением других компонент УМК (в широком смысле).

6. Поиск специальных дидактических процедур усвоения, выбор организационных форм, методов, средств индивидуальной и коллективной учебной деятельности позволил нам выявить, что оптимальной методической формой для организации познавательной деятельности студентов при изучении выделенного раздела высшей математики является «работа в малых группах или командах». Это обусловлено тем, что времени на изучение раздела «Элементы векторной алгебры» учебной программой отводится очень мало, порядка 8-10 часов аудиторных занятий. Усвоить, вместе с тем, предстоит большой по объему и важный для овладения дальнейших тем самой математики и других дисциплин материал. В связи с этим, вся группа разбивается на 5-6 команд по 5 человек, с учетом возможностей студентов. Каждая группа получает варианты для самостоятельной подготовки. В процессе организации всех практических занятий по векторной алгебре, группы сохраняются и работают по своему варианту, с одной особенностью: на каждой из трех пар практических занятий, отведенных на эту тему, от группы отчитывается один студент, выбранный преподавателем, и по его докладу оценивается результат всей группы. Таким образом, создается предпосылка для выполнения заданий всем коллективом и более сильные студенты объясняют материал, более слабым. Активизируется самостоятельная познавательная деятельность студентов, она проектируется на основе УМК (в узком смысле), в котором содержится достаточное количество обучающих задач, способствующих выполнению заданий команды. Более того, в процессе практических занятий используются специальные методические средства, оптимизирующие самостоятельную работу и познавательную деятельность студентов в целом: графические схемы и информационные таблицы.

Заметим, что работа в малых группах дает следующие преимущества: студенты с разным уровнем подготовки имеют возможность участвовать в работе, формируются навыки сотрудничества, межличностного общения (в частности, умение активно слушать, вырабатывать общий взгляд, разрешать возникающие расхождение мнений). Выбранная организационная форма способствует формированию у студентов таких академических компетенций как способность генерировать новые идеи, овладевать навыками устной и письменной коммуникации, уметь работать с учебной, справочной и научной литературой. Существенное влияние эта форма оказывает на формирование многих социально-личностных компетенций. Работу в малых группах следует применять в том случае, если есть возможность учесть следующие параметры: дефицит времени аудиторного занятия; стабильность состава; наличие необходимых знаний и умений в созданной малой группе для решения поставленной задачи; разнородность и креативность интеллектуального уровня студентов, входящих в группу; способность студентов к самоконтролю; способность группы к самостоятельной подготовке к занятию [9].

7. Оргуправленческая деятельность преподавателя и педагогическое взаимодействие с обучающимися на уровне субъект - субъектных отношений на практических занятиях в данном модуле носит, в основном, консультационный, направляющий, рекомендательный, координирующий, регламентирующий, контролирующий характер.

8. Контрольно-корректирующая деятельность преподавателя, выбор процедур контроля и измерения качества усвоения программы обучения, а также способов индивидуальной коррекции учебной деятельности осуществляется в соответствии с этапами, спроектированными в компоненте УМК (в широком смысле) – «Систематический контроль знаний» [1]. При этом предполагается написание контрольной работы по изученной теме. Итоговая оценка каждого студента на выходе из модуля определяется с помощью среднеарифметического между оценкой группы и результатом контрольной работы.

С помощью разработанных научно-методических положений и методических средств на практических занятиях могут быть задействованы особые методы управления образовательной деятельностью, что оказывает влияние на активность обучаемых, их саморегуляцию в обучении. Алгоритм последовательности проектирования практических занятий служит методическим ориентиром для реализации содержательно-методической, оргуправленческой, контрольно-корректирующей деятельности преподавателя. Грамотное использование методов активного обучения способствует переходу обучающихся на более высокие уровни познавательной деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вакульчик В.С. Содержательно-методический и оргуправленческий аспекты проектирования и функционирования систематического контроля как важной компоненты УМК в процессе обучения математике студентов технических специальностей / В.С. Вакульчик, А.П. Мателенок// Вестник ВГУ им П. М. Машерова. - 2015.- №2-3(86-87). – С.108-117.

2. Голѐнова И. А. Обзор различных подходов к обучению математике и естественным наукам студентов медицинских вузов / И. А. Голѐнова // Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі : збірник наукових праць / Видавничий відділ НМетАУ. – Кривий Ріг, 2012. – Випуск VII. – С. 48–54.
3. Бабанский Ю.К. Оптимизация процесса обучения: общедидактический аспект / Ю.К. Бабанский. – М.: Педагогика, 1977. – 252 с.
4. Вакульчик В.С. Формы и методы организации самостоятельной работы студентов по высшей математике в техническом вузе: автореф. дисс. … канд.пед.наук: 13.00.02 /В.С. Вакульчик; БГПУ им. М.Танка, Минск, –1996. – 20 с.
5. Образцов П.И.Технологии подготовки специалистов в системе профессионального образования. Монография. / Под ред. П.И. Образцова. – Орел: ОГУ, 2011. – 338 с.
6. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: кн. Для учителя / Я.И. Груденов. – М.:Просвещение, 1990.-224с.
7. Элементы векторной алгебры. Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве : учеб.-метод. комплекс длястудентов техн. спец. / В. С. Вакульчик [и др.]; под общ. ред. В. С. Вакульчик. – Новополоцк: ПГУ, 2009. – 220 с.
8. Вакульчик В.С., Дидактические основы проектирования УМК по курсу «Математика» для технических специальностей. Сб. мат. Межд. науч. конф. «Информатизация обучения математике и информатике: педагогические аспекты», посвященной 85-летию БГУ – Минск, 2006. – С.41-45.
9. Иванова О. М. Работа в малых группах как интерактивный метод обучения физике / О.М. Иванова, Д. Э. Валуйский, О. А. Свекольников // Молодой ученый. – 2015. – №2. – С.30-36.

УДК 378.147

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОГО ПОДХОДА В КУРСАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ФИЗИКИ

Е.В. Мошкина, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»
e-mail: *emoshkina@yandex.ru*
Е.Л. Казакова, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»
e-mail: *elionkaz@yandex.ru*
М.М. Кручек, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»
e-mail: *kruchek@psu.karelia.ru*
О.В. Сергеева, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»
e-mail: *osergeeva@petrsu.ru*

Обсуждаются результаты работы по анализу, согласованию и корректировке тематической взаимосвязанности и временной согласованности изложения разделов курсов рабочих программ по дисциплинам «Математический анализ» и «Физика».

Ключевые слова: общая физика, математический анализ, рабочие программы, междисциплинарное взаимодействие.

В соответствии со Стратегией инновационного развития России до 2020 г. поставлена задача создания инженерного корпуса, способного обеспечить устойчивый рост российской экономики. Быстрое развитие промышленного производства, опирающееся на внедрение в практику новейших научных разработок, привело к возрастанию потребности в инженерных кадрах высокой квалификации. Решение этих глобальных задач сопряжено с определенными проблемами, с которыми сталкивается преподаватели высшей школы. В последние годы обострилась проблема адаптации вчерашних школьников к новой для них образовательной среде вуза. Это создает определенные трудности педагогического и психологического характера, приводит к увеличению числа студентов младших курсов, имеющих академические задолженности. Решение этих проблем возможно путем совершенствования процесса преподавания цикла естественно-научных дисциплин на младших курсах инженерных специальностей бакалавриата за счет оптимизации междисциплинарного, прикладного и интерактивного подходов в образовательном процессе.

Владение культурой физического мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, выявление сущности физических закономерностей, явлений и процессов невозможно без использования математического аппарата. Поэтому очевидно, что качественное физическое и техническое образование невозможно без хорошей математической подготовки и проблема межпредметных связей всегда находится в центре внимания педагогики высшей школы в силу естественной взаимосвязи этих дисциплин. Не секрет, что иногда из-за слабой подготовки по физике и математике студенты младших курсов перестают видеть связи между этими дисциплинами, у них возникают трудности в восприятии учебного материала и притупляется интерес к их изучению. Программы по физике должны быть составлены так, чтобы они учитывали уровень компетенций по математике. Верно также и обратное утверждение. Не случайно выдающийся физик Н.И. Кожевников и научно-методический совет по физике обращали внимание на то, что решение данной проблемы может быть найдено в более тщательном согласовании программ математики и физики, чтобы эти дисциплины были бы тесно связаны, взаимно дополняя и углубляя друг друга [1]. Дидактические принципы научности и систематичности знаний требуют расположения отдельных предметов в учебном плане подготовки бакалавров таким образом, чтобы изучение одной дисциплины могло опираться на знания, излагаемые в других дисциплинах [2].

Авторы данной работы, преподающие студентам первого курса физико-технического института (ФТИ) Петрозаводского государственного университета (ПетрГУ) дисциплины «Математический анализ» и «Физика», провели ана-

лиз рабочих программ этих дисциплин с целью согласования изучаемых разделов для формирования базового математического аппарата, необходимого в курсе физики. Была проведена работа по корректировке рабочих программ для обеспечения тематической взаимосвязанности и временной согласованности изложения разделов курсов, что нашло отражение в предлагаемых тематических и календарных планах. Еще одним моментом, побудившим к корректировке рабочих программ, является то, что обучение математическому анализу традиционно направлено на изложение фундаментальной математики при недостаточном внимании к ее приложениям, в результате чего студенты не видят согласованности и взаимного дополнения математических и специальных профессиональных знаний, считают изучение математики формальным делом, и в итоге теряют интерес к изучаемому материалу.

Процессы согласования рабочих программ дисциплин «Математический анализ» и «Физика» проводились по следующим направлениям:

- установление временного соответствия изучаемых понятий (согласование календарных планов по математическому анализу и физике);
- установление понятийного согласования курсов: употребление одинаковых понятий, формул и обозначений при изучении математического анализа и физики, использование «перекрестных» ссылок между дисциплинами.

Так, студенты инженерных направлений подготовки ФТИ ПетрГУ изучают курс физики в 1-3 семестрах, а математический анализ – в 1-2 семестрах. Раздел «Механика и молекулярная физика», читаемый в первом семестре, требует у вчерашних абитуриентов знания основ дифференциального исчисления, владения методами дифференцирования, понимания физического смысла производной и дифференциала, знания основных простейших методов нахождения первообразной. Несмотря на то, что эти вопросы входят в программу средней школы по математике, их понимание, как правило, является поверхностным, твердые вычислительные навыки не сформированы. Курс «Математический анализ» традиционно начинается с теории пределов, без которой невозможно грамотное изложение математического анализа. Для того, чтобы подготовить студентов к восприятию содержания раздела «Механика и молекулярная физика», мы предлагаем, во-первых, интенсивное чтение лекций по математическому анализу в начале семестра, во-вторых, «циклический» характер изложения материала, при котором сначала дается необходимый минимум понятий по темам «производные и дифференциалы», «интегралы», а затем, возвращаясь в начало этих тем, более глубоко изучаются свойства производной, дифференциала, первообразной, определенного интеграла.

В разделе «Электромагнетизм», который читается студентам во втором семестре, для описания электромагнитного поля используется аппарат векторного анализа. Уже на первых лекциях по электростатике возникает необходимость знакомства студентов с основными понятиями векторного анализа: поток вектора, дифференциальные операции в скалярных и векторных полях (градиент, производная по направлению, дивергенция, ротор). В курсе «Математический анализ» понятия векторного анализа вводятся в середине семестра, как этого требует логика изложения материала. При изучении электромагнетизма

также можно использовать «циклический» характер изложения материала, а именно, при обобщении изученного материала в конце семестра в теме «теория и уравнения Максвелла для электромагнитного поля» предлагается вернуться к описанию свойств поля на более «высоком» математическом уровне.

Авторы также разработали темы творческих заданий, выполняя которые студенты первого курса подбирают, изучают физические, прикладные задачи, знакомятся с историческими фактами различных открытий ученых в математике и физике, инженерно-технической области, их обоснованием средствами математики. В качестве примера укажем следующие: уравнение переноса, движение тела переменной массы, математическая теорема Остроградского-Гаусса и электростатическая теорема Гаусса, определение потенциальной энергии по периоду колебаний, Кеплерова задача, резонансный случай вынужденных колебаний. Выполняя такие задания, обучающиеся с удовлетворением замечают, что абстрактные математические формулы и уравнения имеют реальное воплощение в физических процессах. Причём одни и те же математические понятия, формулы и уравнения можно применять к изучению самых разнообразных по своему конкретному содержанию физических явлений. Это способствует повышению интереса студентов к изучению курса математического анализа и демонстрирует им роль математики как фундаментальной науки. Таким образом, внутрипредметная и межпредметная интеграция знаний способствует формированию у студентов опыта самостоятельной творческой работы, выражающегося в приобретении навыков переноса полученных знаний, умений и навыков к решению новых задач, комбинировании ранее известных способов деятельности для решения новых проблем.

Междисциплинарный подход и «комплементарность», реализуемые в курсах «Математический анализ» и «Физика», формируют умения осознанно пользоваться заданной математической моделью, в частности, формулой, алгоритмом, оценивать возможный результат моделирования физического явления, активизирует самостоятельную творческую работу студентов. В конечном итоге, все это способствует формированию способности применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности инженера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожевников Н.М. «Комплементарность» физики и математики в учебных программах общенаучных дисциплин // Физическое образование в вузах. – 2008. – Т.14. – №1. – С.3-10.
2. Васильев Н.А., Грабов В.М., Рыжов И.В., Тюканов А.С. О современной математике для физического образования // Материалы XIII международной конференции ФССО-15. – 2015. – Т.2.– С.322-323.

ОСОБЕННОСТИ ПОДГОТОВКИ К УРОКАМ ГЕОМЕТРИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СРЕДСТВ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Г.Н. Никонова, учитель математики и информатики и ИКТ
МБОУ «СОШ№2» г. Скопина Рязанской области
e-mail: *nikonova,galina2010@yandex.ru*

Дистанционное обучение – взаимодействие учителя и учащихся между собой на расстоянии, отражающее все присущие учебному процессу компоненты (цели, содержание, методы, организационные формы, средства обучения) и реализуемое специфичными средствами Интернет-технологий или другими средствами, предусматривающими интерактивность [4].

Дистанционное обучение может быть применено при:

- обучении детей с ОВЗ;
- надомном обучении;
- длительной болезни учащихся;
- технологии «перевернутый класс»;
- самоподготовке и углубленном изучении предмета, а также подготовке к ГИА.

Дистанционное обучение имеет ряд преимуществ:

- индивидуальный темп изучения материала;
- независимость от расстояния и территориального нахождения преподавателя и учащегося;
- способствование развитию и активизации самостоятельной познавательной деятельности;
- повышение мотивации обучающегося;
- возможность отслеживать степень успеваемости учащегося.

Однако имеется и ряд недостатков, например, увеличение времени подготовки преподавателя к учебному занятию.

Марчук Н.Ю. отмечает, что применение дистанционного обучения может быть эффективным только при условии высокой квалификации педагогических работников, их готовности к значительной трудоемкости подобной работы и понимании не только организационных и технологических, но и психолого-педагогических особенностей этой деятельности [3].

При подготовке к урокам, в том числе и при применении дистанционных технологий, следует выделить несколько этапов.

Первым этапом является изучение возрастных и психологических особенностей учащихся. Если говорить о геометрии в основной школе, то согласно исследованиям, в 7-9-х классах учащиеся постепенно приступают к самостоятельной постановке учебных задач и к самостоятельной оценке своих решений, каждый ученик становится индивидуальным субъектом учения. [1] Таким образом, элементы дистанционного обучения отвечают требованиям психологических особенностей данной группы учащихся.

Вторым этапом является дидактический анализ теоретического и практического материала темы. Одним из видов представления теоретического мате-

риала является «древо понятий». Рекомендуется разместить его в начале курса, снабдить гиперссылками, переходя по которым, учащиеся могут поэтапно изучать теорию курса.

При анализе практического материала необходимо установить соответствие между теоретическим материалом и практическими задачами, выделить новые типы заданий, выявить функции каждой задачи, подобрать задания, максимально иллюстрирующие применение теории, составить контрольную работу, при чем при дистанционном обучении не требуется многовариантность, достаточно отобрать необходимые задания и включить функцию рандомного подбора заданий. При отборе задач необходимо продумать способ обратной связи с учащимся и возможность проверки задачи при имеющихся возможностях дистанционного обучения.

Третьим этапом является составление тематического планирования. Все темы занятий курса должны быть связаны друг с другом и логично вытекать одна из другой.

На четвертом этапе происходит отбор списка задач и теоретического материала для каждой отдельной группы обучения, соответствующих целям и задачам конкретного курса.

И на заключительном этапе необходимо обратить внимание на каждый конкретный урок, подобрать наглядный материал, обеспечить логическую связку этапов занятия.

Следует заметить, что, как правило, в отличие от обычных занятий, создавая дистанционный курс преподаватель пользуется им не один год, внося лишь незначительные изменения.

При организации дистанционного обучения, в частности дистанционных курсов, можно использовать различные виды работ и представления материала:

- видеолекции;
- теоретические лекции;
- практические и интерактивные задания;
- тестирование;
- групповые формы работы;
- дополнительный материал.

При создании видеолекций следует помнить, что необходимо включить в нее максимальное количество наглядного материала. Видеолекции можно представить в виде «живой съемки» объяснения материала учителем, в виде вебинаров и онлайн-занятий (например, с использованием Skype), либо различного вида анимации, озвученных преподавателем. Видеолекции монтируются в обычных видеоредакторов (Windows Live, Movavi, SonyVegas и т.д).

Дистанционные технологии требуют от педагога четких представлений о том, как будет организован курс, о структуре, содержании, дизайне курса, интерактивных возможностях курса, способах взаимодействия с обучающимися, оценивании результатов их деятельности и т.д. Это значительно отличается от традиционных форм обучения, поэтому механистический перенос содержания

учебников и практикумов в дистанционную форму, как правило, дает отрицательный результат и формирует негативный опыт у участников. [2]

Теоретический материал должен содержать не только текст учебника, но и включать в себя различные чертежи, иллюстрации, анимацию, ссылки на дополнительный и интересный материал

Для создания анимации можно использовать такие программные продукты, как Microsoft GifAnimator, надстройку iSpring для презентаций в MS Power Point и др. Для выполнения чертежей предназначены такие программы, как Geometria, Geometry Expressions, Geogebra и др.

Выполнение практических задач может быть реализовано различными способами. Первый, самый простой способ, решение учащимися поставленной задачи в тетради с последующим сканированием (фотографированием) и отправкой преподавателю. Другой способ – оформление решения задачи средствами офисных программ. Еще один вариант дает возможность использования приложения Geogebra как Web-сервис, где учащийся может самостоятельно построить геометрический чертеж и решить учебную задачу. Также преподаватель при помощи различных приложений (например, Microsoft Remote Desktop) может удаленно подключиться к рабочему компьютеру учащегося и проконтролировать выполнение задания.

В конце каждого занятия рекомендуется проводить небольшое тестирование для контроля усвоения учащимися пройденного материала. В тестирование могут быть включены задания различного вида, в зависимости от системы дистанционного обучения, в которой реализован курс. Например, в СДО Moodle используются следующие виды вопросов: выбор правильного ответа (верно/неверно, множественный или однозначный выбор), вычисляемый числовой или краткий символьный ответ, задания на соответствие, эссе, задания на порядок действий и др.

Для совместной деятельности группе учащихся можно предложить заполнение и редактирование глоссария, а также организовать форум или чат для обсуждения возникших вопросов.

Резюмируя, можно сказать, что подготовка к урокам при использовании дистанционных средств обучения несомненно требует большего количества времени, чем занятия в обычной форме. Однако, анализируя преимущества данной технологии, можно сказать, что необходимо ориентироваться на потребности сегодняшнего быстро меняющегося мира, организовывать обучение в соответствии с современными требованиями и совершенствовать навыки применения информационно-коммуникационных технологий и инноваций в области преподавания предмета, что безусловно позволит добиться высоких образовательных результатов, значительно расширить информационное образовательное пространство, возможности активизации деятельности школьников, обеспечит развитие познавательного интереса к предмету и школьному образованию в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айсмонтас Б.Б., канд. пед. наук, доцент. Электронный учебник «Педагогическая психология».

2. Дистанционное обучение: реалии и перспективы. Мат-лы I региональной научно-практической конференции. – СПб: ГБУ ДПО «СПбЦОКОиИТ», 2016. – 113 с.
3. Марчук Н.Ю. Психолого-педагогические особенности дистанционного обучения // Педагогическое образование в России, 2013, № 4, С. 78 – 85.
4. Полат Е.С. Теория и практика дистанционного обучения: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учебн. Заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 416 с.

УДК 511.13

ЗАДАЧИ НА ПРОСТЫЕ И СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В КЛАССАХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Н.В. Первых, магистрант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sendd-99@mail.ru*

В статье рассматриваются вопросы методики обучения учащихся экономического профиля умению решать задачи на простые и сложные проценты с экономическим содержанием. Особенное внимание в статье уделено задачам, связанным с различными финансовыми операциями.

Ключевые слова: задачи с экономическим содержанием, процент, простые и сложные проценты.

Интеграцию математического и экономического знания в процессе обучения математики можно эффективно осуществить через специально составленную систему задач.

Именно через задачи можно показать применение математических знаний для познания реального мира, познакомить учащихся с методами решения задач в науке и практической деятельности.

С «экономическими» задачами, например, приходится иметь дело при оформлении в банке сберегательного вклада или кредита, покупке товаров в рассрочку, при выплате пени, налога, страховании и т. д. Решать такие задачи школьники учатся на уроках математики.

Заметим, что использование задач с экономическим содержанием на уроках и внеклассной работе по математике создает условия для:

1) разъяснения учащимся сущности экономических терминов, часто употребляемых в задачах;
2) формирования у учеников некоторых представлений об экономике страны;
3) воспитания у школьников бережного отношения к национальному богатству страны;
4) ознакомления учащихся с применением некоторых математических методов в экономике.

Задачи простейшего вида на проценты рассматриваются в курсе математики 5 класса, затем при изучении пропорции в 6 классе. В 7 классе новые зада-

чи на проценты не изучаются, а лишь повторяются известные типы задач из курса математики 5-6 классов. В 8 классе, при изучении химии, предлагаются для решения задачи на смеси, сплавы, концентрацию, процентное содержание, и, как показывает практика, учащиеся испытывают затруднения, при решении таких задач, на это следует обратить внимание учителю математики при организации повторения темы «Проценты».

К сожалению, на изучение темы «Проценты» в курсе математики отводится немного часов, хотя этот раздел является неотъемлемой частью при сдаче ОГЭ и ЕГЭ. В 2015 году в задания ЕГЭ была добавлена экономическая задача на сложные проценты. В нашей статье мы подробно рассмотрим задачи на использование этих понятий.

При решении задач на проценты для школьников экономического, да и других профилей, необходимо знать базовые понятия о проценте, которые даются в 5-6 классах.

Что такое проценты в математике? Нужно запомнить – что такое один процент. Это понятие - и есть главный ключ к решению задач на проценты, да и к работе с процентами вообще.

Один процент – это одна сотая часть числа.

Из курса математики 5 и 6 класса известно как найти процент от числа, и число по его проценту. Однако, при решении задач государственного итогового экзамена на проценты необходимо еще различать как начисляются простые и сложные проценты. Разберемся в этом более подробно и рассмотрим некоторые примеры.

Простые проценты – это метод начисления, при котором сумма процентов определяется в течение всего периода, исходя из первоначальной величины долга, независимо от количества периодов начисления и их длительности. Простой процент – это процент, который по вкладу начисляется в конце срока. Например, открыт вклад на год, с выплатой процентов в конце срока вклада.

Увеличение вклада S_0 по схеме простых процентов характеризуется тем, что суммы процентов в течение всего срока хранения определяются исходя только из первоначальной суммы вклада независимо от срока хранения и количества периодов начисления процентов. Пусть вкладчик открыл счет и положил на него S_0 рублей. Банк обязуется выплачивать в конце каждого года i % от первоначальной суммы S_0. Тогда по истечении одного года сумма начисленных процентов составит $\frac{s_0 i}{100}$ руб., и величина вклада станет равной

$$S_1 = S_0\left(1 + \frac{i}{100}\right). \quad (1)$$

Величину i называют годовой процентной ставкой. Если оставить вклад еще на год, то начисление процентной ставки производится на первоначальный вклад S_0 и не производится на величину $\frac{s_0 i}{100}$. То есть, через n лет сумма начисленных процентов составит $П_п = \frac{nS_0 i}{100}$ руб., а величина вклада вместе с процентами составит

$$S_n = S_0\left(1 + \frac{ni}{100}\right). \quad (2)$$

Отношение $\frac{S_n}{S_0}$ называют коэффициентом наращивания простых процентов [1].

Сложные проценты – это метод расчета процентов, при котором начисления происходят на первоначальную сумму вклада (долга) и на прирост вклада (долга), т.е. сумму процентов, начисленных после первого периода начисления. Таким образом, база для начисления сложных процентов (в отличие от простых) будет увеличиваться с каждым периодом начисления.

Мы говорим, что имеем дело со сложными процентами в том случае, когда величина в конце каждого этапа времени испытывает изменение на определенное число процентов, причем каждый раз начисление процентов происходит по отношению к тому значению рассматриваемой величины, которое образовалось в конце предыдущего этапа времени.

Выведем формулу для расчета сложных процентов. Допустим, что вкладчик открыл сберегательный вклад на сумму S_0рублей сроком на n лет, а ставка банковского процента составляет i % от суммы вклада на текущий период. Тогда по истечении первого года сумма начисленных банком процентов составит $S_0 \cdot \frac{i}{100}$ рублей и на счете вкладчика будет

$$S_1 = S_0 + S_0 \cdot \frac{i}{100} \text{ рублей} \quad (3)$$

По прошествии второго года банк начислит i % уже на сумму S_1 рублей и поэтому она увеличится на $S_1 \cdot \frac{i}{100}$, а в конце второго года на счете окажется $S_2 = S_1 + S_1 \cdot \frac{i}{100} = S_1\left(1 + \frac{i}{100}\right)$ рублей.

На основании равенства (1) получим, что

$$S_2 = S_1\left(1 + \frac{i}{100}\right) = \left(S_0 + S_0\frac{i}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right) = S_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2 \quad (4)$$

В конце третьего года банк вновь начислит i % уже на сумму S_2 рублей, а поэтому к концу года на счете вкладчика будет лежать уже $S_3 = S_2\left(1 + \frac{i}{100}\right)$ рублей, причем с учетом (2) $S_3 = S_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^3$.

Аналогично можно показать, что по прошествии n лет сумма денег на счете вкладчика достигает величины

$$S_n = S_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n \quad (5)$$

Как видно из этой формулы, рост первоначальной суммы вклада по методу сложных процентов – это процесс, развивающийся по законам геометрической прогрессии, первый член которой равен S_0, а знаменатель равен $\left(1 + \frac{i}{100}\right)$ [2].

Рассмотрим примеры задач, которые полезно рассмотреть с учащимися для закрепления понятий сложных и простых процентов.

Пример 1. Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк 3/4 от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет пол-

ного погашения кредита он внес в банк сумму на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Решение: Пусть S_0 – сумма кредита, i – процент годовых по кредиту. В конце первого года фермер должен банку $S_0\left(1+\frac{i}{100}\right)$ рублей, а после частичной уплаты $\frac{1}{4}S_0\left(1+\frac{i}{100}\right)$ – рублей. К концу второго года фермер должен банку $\frac{1}{4}S_0\left(1+\frac{i}{100}\right)^2$ рублей, что по условию задачи составило $1{,}21S_0$ рублей. Таким образом, получаем уравнение тогда $\frac{1}{4}S_0\left(1+\frac{i}{100}\right)^2 = 1{,}21S_0$, тогда $i = 120\%$.

Ответ: 120% годовых по кредиту в данном банке.

Пример 2. На бирже ценных бумаг акции одной фирмы продавались по цене 400000 рублей. После непредвиденных осложнений фирма вынуждена была дважды понизить цену на свои акции на один и тот же процент. В результате акции начали продавать по цене 282240 рублей. Найдите процент уценки.

Решение: Пусть $A_0 = 400000$, а $A_n = 28240$. Цена акций понижалась два раза, т.е. $n = 2$. Процент уценки равен x. По смыслу задачи $x > 0$. Применим формулу «сложных процентов» $A_n = A_0\left(1-\frac{x}{100}\right)^n$, т.е.

$$282240 = 400000\left(1-\frac{x}{100}\right)^2$$
$$0{,}7056 = (1-0{,}01x)^2$$
$$\sqrt{0.7056} = \sqrt{(1-0{,}01x)^2}$$
$$|0{,}84| = |1-0{,}01x|$$
$$1-0{,}01x = 0{,}84 \quad \textit{или} \quad 1-0{,}01x = -0{,}84$$
$$-0{,}01x = -0{,}16 \qquad -0{,}01x = -1{,}84$$
$$x = 16 \qquad x = 184$$

Значение $x = 184$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 16 %.

Пример 3. Если положить на вклад «Молодежный» некоторую сумму денег, то ежегодно она увеличивается на 12% от имеющейся на вкладе суммы. Вкладчик собирается положить на этот вклад деньги на два года подряд и не пополнять и не снимать их со счета. Сколько рублей надо положить вкладчику, чтобы через два года вложенная сумма увеличилась на 1272 рубля?

Решение: Применим формулу «сложных процентов» $A_n = A_0\left(1+\frac{x}{100}\right)^n$, где $A_n = A_0 + 1272$; $x = 12$; $n = 2$. Следовательно

$$A_0 + 1272 = A_0(1+0{,}12)^2$$
$$A_0 + 1272 = 1{,}2544A_0$$
$$0{,}2544A_0 = 1272$$
$$A_0 = 5000$$

Вкладчик должен положить 5000 рублей.

Ответ: 5000 рублей.

Пример 4. Цену товара снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько всего процентов снизили первоначальную цену?

Решение: Если величина A_0 изменяется на первом этапе на $t_1\%$, на втором – $t_2\%$ и далее до $t_n\%$, то окончательное значение этой величины равна

$$A_n = A_0\left(1+\frac{t_1}{100}\right)\left(1+\frac{t_2}{100}\right)\ldots\left(1+\frac{t_n}{100}\right).$$

Формула записана для случая, когда происходит на каждом этапе возрастание на определенный процент. Если на каждом этапе происходит снижение на определенный процент, то окончательное значение A_n равно

$$A_n = A_0\left(1-\frac{t_1}{100}\right)\left(1-\frac{t_2}{100}\right)\ldots\left(1-\frac{t_n}{100}\right).$$

Воспользуемся этой формулой:

$t_1 = 20\%$; $t_2 = 15\%$; $t_3 = 10\%$; A_0 – первоначальная цена товара; A_n – цена товара после трех «уценок»:

$A_3 = A_0(1-0{,}2)(1-0{,}15)(1-0{,}1).$

$A_3 = A_0 \cdot 0{,}612$

Следовательно, новая цена составляет 61,2% от первоначальной цены (100%), которая снижена на 100% - 61,2% =38,8%.

Ответ: на 38,8 %

ЛИТЕРАТУРА

1. Захарова А.Е. Несколько задач «про цены» // Математика в школе, 2002,№8.
2. Хужаниёзова Г. С., Умирзоков Ж. А. Экономические задачи на уроках математики // Молодой ученый. – 2016. – №10. – С. 1314-1317.

УДК 372.851

ФОРМИРОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ НАВЫКОВ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ В ПРОЦЕССЕ ПОИСКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Д.И. Печикина, студент
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А.Бунина»
e-mail: *bibigonochka@mail.ru*

В данной статье рассматривается возможный способ формирования и развития навыков самостоятельной деятельности учеников на примере поиска решения текстовых алгебраических задач. Приводятся обоснования тому аспекту, что навыки самостоятельной деятельности возможно сформировать и развить только при систематическом решении такого рода задач. В статье рассмотрен пример алгоритмического решения задачи на движение учениками 8 класса на уроках алгебры.

Ключевые слова: текстовые алгебраические задачи, поиск решения задачи, самостоятельная деятельность школьников.

Современное общество постоянно подвергается различного рода изменением, которые касаются всех сфер жизни человека, будь то социальная или любая другая. Процесс модернизации не оставил в стороне и образовательную сферу жизни людей.

За последние пять-десять лет процесс образования претерпел огромное количество изменений и доработок. Основные нововведения связаны с введением федеральных стандартов нового поколения и изменениями в едином государственном экзамене для девятых и одиннадцатых классов.

В результате перед современной школой появился ряд новых задач. На наш взгляд, одна из основных задач заключается в подготовке конкурентоспособных выпускников, которые имеют хороший багаж знаний, креативно мыслят и умеют самостоятельно добывать и применять знания на практике. Предприятиям требуются ответственные и предприимчивые работники, способные к непрерывному развитию и самообразованию. В связи с этим главной целью индивидуального человеческого прогресса становится развитие самостоятельности и полное раскрытие возможностей и способностей личности.

Крайне важно каждому ребенку научиться быть самостоятельным, уметь быстро и точно принимать решения, причем задача учителя сделать так, чтобы ребенок умел применять эти действия не только при решении каких-либо математических задач, но и при решении жизненных ситуаций.

Как и у всех студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, четвертый курс начался традиционно – с прохождения производственной практики в школе. В ходе практики я проводила различные виды уроков в 8 классе МБОУ «СШ №10 с углубленным изучением отдельных предметов», изучала психологические особенности учеников и т.п. Первое что стоит отметить: ученики 8 класса – это подростки в возрасте от 13-15 лет, а этот возраст – самое время для формирования различных личностных качеств. Поэтому будущее учеников напрямую зависит от усилий школы и учителя: насколько хорошо они поспособствуют развитию активности и самостоятельности учащихся в обучении.

Как нам кажется, основная ошибка многих учителей заключается в стремлении дать обучающимся знания и научить их сдавать единый государственный экзамен. В результате получается, что дети умеют решать определенный перечень задач представленных в КИМах.

Неблагополучие обучения, в основном, состоит в неумении школьников самостоятельно работать, в неумении выработать умения самостоятельного учебного труда. Но и содержание обучения должно быть целесообразным.

В ходе педагогической практики было выявлено, что в образовательном процессе почти не удалятся внимание текстовым задачам, которые как раз являются одним из действенных «орудий» формирования самостоятельности учеников [3].

Итоги контрольной работы по результатам повторения пройденного материала за 7 класс: из 26 писавших контрольную работу всего три ученика решили задачу, а еще два – попробовали составить модель для решения текстовой задачи, причем предложенные им задачи имели I степень проблемности, т.е.

решаются они при помощи использования алгоритма [1]. После проведения работы над ошибками сделала вывод: большинство учеников знают общий алгоритм решения текстовых задач, но не всегда умеют его применить. Формирование навыков поиска решения задачи и моделирования условия происходит еще в начальных классах. Однако, в среднем звене ученикам все реже предлагают решать текстовые задачи, а если и предлагают, то для сокращения времени на решение задачи учеников не обязывают составлять модель решения задачи. Что способствует неосознанности выбора решения, а иногда и полному непониманию, непринятию задачи. Появляются вопросы: как и откуда появилось то или иное действие? Можно сказать «не понято – забыто». Встретив незнакомую знакомую задачную ситуацию, подростки поступили согласно своему возрасту и знаниям – обошли возникшее препятствие, не просто не решили задачу, а даже и не стали решать текстовую задачу.

На наш взгляд, каждого ученика нужно не только обучать алгоритмичности решения, но и познакомить с задачами II степени проблемности, а затем, развив в них способности к осознанному поиску решения задачи, сформировав в некоторой степени познавательную самостоятельность, познакомить с задачами III степени проблемности.

Выполнив анализ результатов контрольной работы в двух классах, мной было принято решение провести небольшой эксперимент. В 8Г классе прорешивались номера по учебнику Ю.Н. Макарычева [2], а в 8А классе, к этим номерам добавляла одну текстовую задачу. Стоит отметить, что успеваемость в этих двух классов практически на одном уровне. Всего пару недель этакого «эксперимента» - и текстовые задачи у 8А класса больше не вызывали неосознанных затруднений, «страха». Ребята записывали домашнее задание с уверенностью, так как уже сейчас 78% учащихся из класса выработали навыки поиска решения такого вида задач, а самое главное свели это к некой схеме.

Рассмотрим пример задачи, предложенной школьникам на самостоятельной работе. И выполним математический и методический разбор этой задачи.

Задача. Пешеход рассчитывал, что, двигаясь с определенной скоростью, намеченный путь он пройдет за 2,5 ч. Но он шел со скоростью, превышающей намеченную на 1 км/ч, поэтому прошел путь за 2 ч. Найдите длину пути.

После прочтения задачи было предложено составить модель решения данной задачи. Сначала учащиеся заполняют таблицу принятия задачи (таблица 1).

Таблица 1 – Таблица принятия задачи

	Скорость,v	Время, t	Путь, s
Планировал		2,5	
	□ на 1		‖
Прошел		2	

В задаче рассматривается два случая: первый случай – планируемый результат, а второй – реальный результат прохождения пути.

Теперь необходимо «перевоплотить» таблицу принятия задачи в таблицу – модель решения (таблица 2), введя переменную.

В ходе заполнения таблицы учащимся задавались методические вопросы:

1. Какая формула используется при решении этой задачи?

Предполагаемый ответ учеников: $s = vt$, где s – пройденный путь, t – время, потраченное на дорогу, а v – скорость, с которой шел пешеход.

2. Какие данные нам известны в условиях задачи?

Предполагаемые ответы учеников:

- по условию задачи нам известны и предполагаемое время движения, и время, затраченное на дорогу;
- известна разница между предполагаемой и действительной скоростями;
- известно, что пройденный путь равен планируемому.

Поэтому возможно установить сравнения, которые приведут к уравнению.

3. Как найти путь, зная наши данные?

Предполагаемый ответ учеников: используя формулу нахождения пути, и наши внесенные данные, получим две формулы для нахождения пути.

Таблица 2 – Таблица модель решения

	v, км/ч	t, ч	S, км
Планировал	*X*	*2,5*	*2,5x*
Прошел	*x + 1*	*2*	*2(x – 1)*

4. Составим и решим уравнение.

Основываясь, на что путь в обоих случаях

$$2{,}5x = 2(x + 1)$$
$$2{,}5x = 2x + 2$$
$$2{,}5x - 2x = 2$$
$$0{,}5x = 2$$
$$x = 4 \ (км/ч)$$

Получим окончательный ответ.

Рассмотренная задача имеет две задачные ситуации, соединенные явной связью. Сложность задачи равна 4 [1]. Она, можно так сказать, традиционная по структуре.

В результате данного эксперимента можно с уверенностью утверждать, что при систематическом и методически правильном обучении поиску решения текстовых алгебраических происходит непрерывное и последовательное формирование и развитие самостоятельности школьников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крупич В.И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. – М.: Прометей, 1995. – 210 с.
2. Учебник Алгебра 8 класс. учеб. для общеобразоват. организацией прил. на элект. Носителе / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А.Теляковского – М.: Просвящение, 2013 год – 287 с.

3. Черноусова Н.В. Развитие познавательной самостоятельности студентов педагогических факультетов в процессе поиска решения текстовых алгебраических задач:дис. канд.пед.наук/ Черноусова Н.В. – М., 1999. – 170 с.

РАЗРАБОТКА СБОРНИКА ЗАДАЧ МЕЖПРЕДМЕТНОГО СОДЕРЖАНИЯ НА ОСНОВЕ ФИЗИКИ ПО КУРСУ «КОНЦЕПЦИИ СОВРЕМЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ»

Т.С. Рогожина, к.ф.-м.н., доц.
Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
e-mail: *tatiana1703t@mail.ru*
Г.С. Шиманская, ассистент
Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
e-mail: *galya.shimanskaya@list.ru*

В настоящее время на базе кафедры «Строительная физика и химия» проводится работа по созданию сборника межпредметных задач естественнонаучного содержания на основе физики. Работа ведётся в рамках совершенствования учебно-методического обеспечения курса «Концепции современного естествознания». Также предполагает возможность использования данного материала в курсах «Физика», «Биофизика» и в работе научных кружков.

Ключевые слова: концепции современного естествознания, методика преподавания «КСЕ», задачи межпредметного содержания по курсу «КСЕ».

Естественнонаучные знания и основанные на них передовые технологии формируют образ жизни современного человека, и человек не может дистанцироваться от фундаментальных знаний об окружающем мире, не рискуя оказаться некомпетентным как в профессиональной, так и повседневной деятельности. Синтез научных знаний на основе системы естественных наук, а именно, физики, химии, биологии, геологии, астрономии отражается в курсе «Концепции современного естествознания» («КСЕ»), который предназначен для студентов не технических специальностей. Целью «КСЕ» является создание у студентов целостного представления об окружающем мире и человеке в нём, а также формирование естественнонаучного мировоззрения.

Ведущими идеями курса являются: идея единства, целостности и системной организации природы; идея взаимозависимости человека и природы; идея гармонизации связи «природа — человек». Система обучения строится на следующих принципах, определяющих содержание курса: принцип связи обучения с жизнью; принцип систематичности и последовательности обучения; принцип научности; принцип доступности; принцип сознательности и творческой активности студентов; принцип наглядности.

Решение задач по «КСЕ» – это хороший способ применения полученных знаний на практике. Причем, с одной стороны, сам процесс решения помогает

более глубоко и сознательно понять явление, с другой – знание природного явления есть непременное условие умения решать задачи.

Дополнение курса «КСЕ» решением задач естественнонаучного содержания, на основе вышеизложенных идей и принципов, поможет сформировать модель курса, в основе которой всестороннее, глубокое изучение материального мира, естественнонаучной картины мира, что позволяет сформировать научное диалектическое мировоззрение, креативное мышление и вызвать интерес к познанию природы.

Разрабатываемое пособие представляет собой сборник задач межпредметного содержания, посвященных интеграции предметов естестеннонаучного цикла – физики, химии, биологии, геологии, астрономии. Условия задач содержат обширный познавательный материал, анализ различных природных явлений, а также постановку проблемы, требующей научного объяснения, для решения которой достаточно знаний, приобретенных в школьных курсах по перечисленным предметам и в лекционном курсе по «КСЕ». Задачи адресованы всем, кто интересуется объяснением различных природных явлений и феноменов с научной точки зрения, направлены на развитие познавательного интереса, на организацию как самостоятельной, так и коллективной деятельности студентов.

Физика рассматривается в качестве основы для реализации естественнонаучных знаний при решении межпредметных задач. Её понятия, законы и теории являются исходными при систематизации и обобщении естественнонаучных знаний, средством осмысления ведущих идей курса. Они определяют логику развития содержания учебного пособия.

Макромир описывает классическая механика Ньютона. Микромир – молекулярно-кинетическая и электронная теории. Два вида существования материи – вещество и поле – электродинамика Максвелла. Современное представление о свете, информации, новых видах энергии – квантовая теория света. Молекулярно-кинетическая, электронная теории изучаются такими естественными науками, как физика и химия. Классическая механика Ньютона описывает самые простые формы движения материи. Однако на этой основе строятся более сложные формы: химическая и биологическая. Связь биологических теорий и физических происходит на функциональном уровне. Для описания функционирования клетки, гена используются физические законы и принципы. Химия применила основные идеи электронной теории вещества для объяснения механизмов химических реакций, протекающих как в неживой, так и в живой природе.

Природа едина и не знает наук, придуманных человечеством для её изучения. В современном естествознании переплетаются два противоположных процесса: непрерывной дифференциации естествознания и интеграции обособленных наук. Наше учебное пособие строится на интегральном представлении наук изучающих природу. Решение задач даёт возможность студенту самому не только проверить свои знания, но и тренирует его в умении прикладывать теоретические знания к решению практических задач. Для преподавателя задачи являются одним из наиболее эффективных способов проверить, насколько глу-

боко понимает студент предмет, не являются ли его знания только накоплением заученного наизусть материала. При обучении решению задач естественнонаучного содержания развивается глубокое творческое мышление.

Большинство задач составлены так, что в их основе лежат небольшие проблемы, и студент должен на основании изученных законов, полученных в различных естественнонаучных областях проанализировать и объяснить заданное явление. Явления выбраны так, чтобы они имели либо научный, либо практический интерес, и при этом учитывали уровень знаний студентов, который должен быть достаточным для выполнения задания.

Сборник содержит, как качественные задачи, так и задачи на вычисления. Это необходимо для того, чтобы студенты научились конкретно представлять себе масштабы физических величин, с которыми можно встретиться в природе. Степень глубины научного понимания природы характеризуется также умением применять наиболее общие, фундаментальные законы к анализу конкретных явлений. Подбор задач в пособии отличается от традиционного. Исключены задачи, ничего не добавляющие к сути явления, служащие только для закрепления формул.

Пример задачи и ее решения

Считая, что в среднем сердце совершает одно сокращение в секунду, найдите среднюю мощность сердца. Объем крови, проталкиваемой за одно сокращение – 60 *мл*, плотность крови $1{,}05 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$, скорость, сообщаемая крови – $0{,}5 \frac{м}{с}$, давление, которое сердце оказывает на кровь при выталкивании – $13 \cdot 10^3$ *Па*. Продолжительность сердечного сокращения 0,2 *с*. Схема строения сердца приведена на рисунке 1.

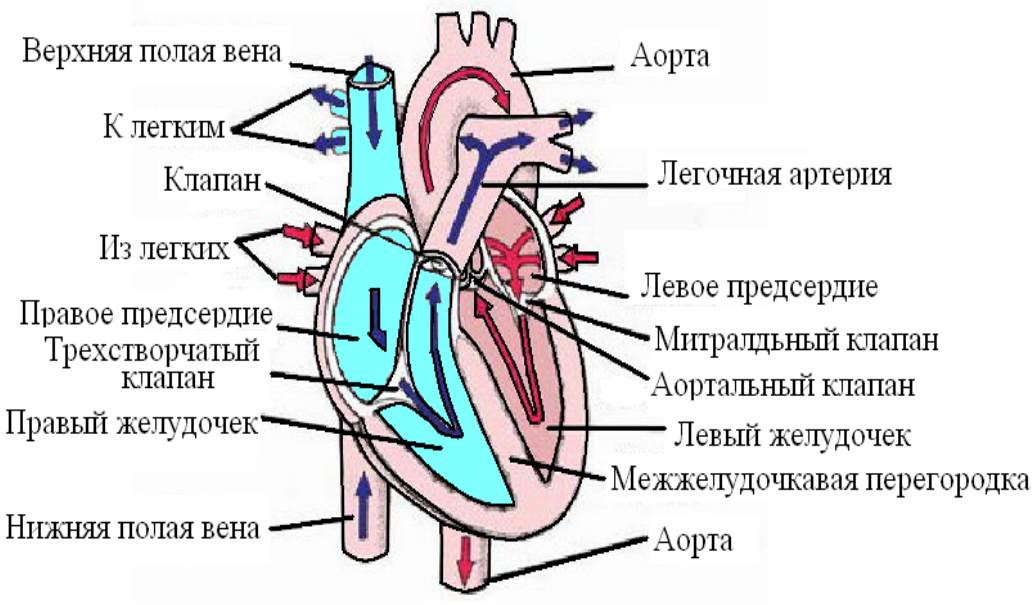


Рисунок 1 – Внутреннее строение сердца человека

На основе текста задачи записываются начальные условия в буквенном обозначении, на данном этапе особенно важно понимание явления, которое рассматривается в данной задаче, а также правильное определение буквенного обозначения и размерности величины. Особое внимание стоит уделить необходимости перевода всех расчетных единиц в систему СИ, чтобы результат был корректным. В таблице 1 приведена запись начального условия для рассматриваемой задачи.

Таблица 1 – Условие задачи

Дано	Название величины и ее единицы измерения
t=0,2 *с*	Продолжительность сердечного сокращения (с)
$V_0 = 60мл = 6 \cdot 10^{-5}\ м^3$	Объем крови, проталкиваемой за одно сокращение (единицей объема в СИ является кубический метр, потому необходим перевод)
$\rho = 1{,}05 \cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}$	Плотность крови $\left(\frac{кг}{м^3}\right)$
$v = 0{,}5\frac{м}{с}$	Скорость, сообщаемая крови $\left(\frac{м}{с}\right)$
P=13·10^3 *Па.*	Давление, которое сердце оказывает на кровь при выталкивании (*Па*)
N-?	Искомая величина – средняя мощность сердца (*Вт*)

Решение задачи начинается с ее анализа, работа, совершаемая сердцем, затрачивается на преодоление сил давления и сообщение крови кинетической энергии.

Рассчитаем работу $A_л$, совершаемую при однократном сокращении левого желудочка. Она состоит из работы по продавливанию крови в аорту A_1 и работы по сообщению порции крови кинетической энергии A_2.

$$A_1 = Fl\ ,$$

где F – сила, с которой сердце выдавливает кровь, l – расстояние, на которое оно кровь продавливает в аорту. Изобразим этот участок аорты в виде цилиндра (рисунок 2).

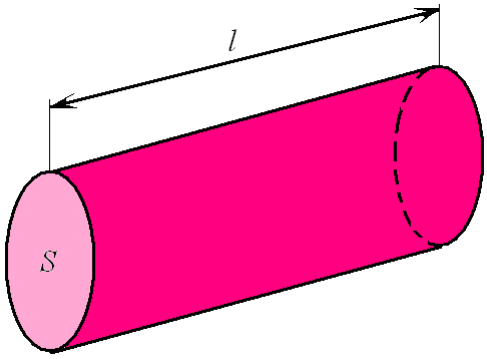


Рисунок 2 – Участок аорты

Силу можно записать как

$$F = PS,$$

где P – давление, S - площадь сечения аорты. Тогда:

$$A_1 = PSl,$$

где $Sl = V_0$ – объем вытолкнутой крови. В результате имеем:

$$A_1 = PV_0.$$

Кроме этого этому объему крови сообщается кинетическая энергия:

$$A_2 = E_k = \frac{mv^2}{2},$$

$$m = \rho V_0, \text{ тогда } A_2 = \frac{\rho V_0 v^2}{2}.$$

Таким образом, работа левого желудочка при сокращении:

$$A_Л = A_1 + A_2 = PV_0 + \frac{\rho V_0 v^2}{2}.$$

Работа правого желудочка составляет 0,2 от работы левого, поэтому работа всего сердца при однократном сокращении

$$A = A_л + 0{,}2A_л = 1{,}2V_0\left(P + \frac{\rho v^2}{2}\right).$$

Полученная формула справедлива как для покоя, так и для активного состояния организма. Эти состояния отличаются разной скоростью кровотока.

Подставим в последнюю формулу числовые значения, найдем $A \approx 1$ *Дж*. Мощность равна:

$$N = \frac{A}{t}.$$

Подставим найденную работу и время, за которое она совершается в формулу, получим, что мощность сердца равна 3,3 *Вт*.

Ответ: 3,3 *Вт*.

Авторы рассчитывают на то, что читатель будет пытаться самостоятельно решать предложенные задачи, а если самостоятельное решение окажется невозможным, к каждой задаче прилагается подробное объяснение или решение, в котором студент сможет обнаружить много интересного. Поэтому простое чтение пособия вызовет интерес у всех, кто интересуется естественными науками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарасова М.А., Рогожина Т.С., Мосин Ю.В. Технология формирования межпредметных связей // Тезисы докладов научно-методической школы семинара по проблеме «Физика в системе инженерного образования стран ЕвроАзЭс» 30июня–02июля. – 2008г. – Москва.
2. Тарасова М.А. Методологический подход к формированию межпредметных связей естественных наук. – Орел: ООО «Полиграфическая фирма «Картуш». – 2010. – 46 с.
3. Рогожина Т.С. Межпредметные задачи естественнонаучного содержания. – Орел: ОрелГТУ. – 2010. – 68 с.

УДК 372.851+51-7

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

А.А. Русаков, к.ф.м.-н., д.пед.н., проф.
ФГБОУ ВО «Московский технологический университет»
e-mail: *v.m.kafedra@yandex.ru*
В.Н. Русакова, к.п.н., доцент
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *v.n.rusakova@yandex.ru*

В статье рассматривается методика использования типовых расчетов по математике при обучении студентов естественнонаучных направлений подготовки. Приводится пример типового расчета по теме «Численное решение систем линейных уравнений».

Ключевые слова: типовой расчет по математике, численные методы, методика обучения математике.

Направленность современного российского общества на получение академического (а не профессионального) образования, ставящая на первое место интеллектуальное развитие, ориентацию в окружающем мире, формирование мировоззрения и т.п., отодвигает на второй план собственно подготовку к будущей профессии. Между тем, студентам естественнонаучных направлений подготовки, при изучении математики требуются не только теоретические сведения и общая (традиционная) практическая подготовка, но и тренировка навыков численных представлений результатов экспериментов, расчетов типовых задач, расчетов с различными оценками точности вычислений, выполнение типовых расчетов с использованием стандартных систем компьютерной математики таких, как MATLAB, Mathematica, Maple, MathCad, MSExcel.

Количество аудиторных часов, отводимых на изучение математических дисциплин для таких направлений подготовки, не позволяет оттачивать эти умения в ходе контактной работы.

В связи с вышесказанным, особое место в курсе математической подготовки бакалавров и специалистов занимает система типовых расчетов, аналогичная принятой в технических вузах [1].

Впервые о такой организации самостоятельной работы рассказал авторам Л.Д. Кудрявцев, вспоминая о своей работе заведующим кафедрой высшей математики на «Физтехе». Студентам прикладных специальностей предлагались индивидуальные домашние задания большого объема, на решение которых отводилось до нескольких недель.

Подобная организация учебного процесса позволяет выработать необходимые практические навыки при редких консультациях преподавателя, без дополнительных затрат аудиторного времени. А учитывая объективную сложность и объем численных методов решения задач можно предложить студентам по одному типовому расчету за дисциплинарный модуль.

В качестве примера рассмотрим модуль «Линейная алгебра», который

традиционно изучается в 1 семестре и включает, в том числе, точное решение систем линейных уравнений тремя методами: по формулам Крамера, методом обратной матрицы и методом Гаусса.

Предлагая студентам 1 курса типовой расчет по численному решению систем n линейных уравнений с n неизвестными, не следует ставить целью – изучить большое количество таких методов. Важным может оказаться обоснование применения численных методов и демонстрация их практического применения в области интересов их будущей специальности.

На первом этапе достаточно познакомить студентов с методикой новой для них работы, когда они не просто повторяют изученный на практике способ решения задачи, а должны самостоятельно изучить предлагаемый справочный теоретический материал и усвоить алгоритм типового расчета по разобранным примерам. Поэтому остановимся на методе последовательного исключения неизвестных Гаусса. Приведем материал типового расчета по этой теме, предлагавшийся студентам специальностей 20.03.01 – Техносферная безопасмность и 04.03.01 – Химия в рамках изучения дисциплины «Математика» в Орловском государственном университете им. И.С. Тургенева.

Типовой расчет №1 «Численное решение систем линейных уравнений»

Большое количество практических задач приводит к решению систем линейных уравнений. Например, математическую модель, определяющую процесс динамического деформирования двухкомпонентной пористой среды, состоящей из упругопластической компоненты и газа (цементобетона) можно свести к однородной системе двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными ω_1 и ω_2 (см. [2]):

$$\begin{cases} \left(\left(\lambda + \dfrac{(1-m)^2}{m}\right)R_0 + \mu - \rho_{11}c^2\right)\omega_1 + \left((1-m)R_0 - \rho_{12}c^2\right)\omega_2 = 0; \\ \left((1-m)R_0 - \rho_{12}c^2\right)\omega_1 + \left(mR_0 - \rho_{22}c^2\right)\omega_2 = 0. \end{cases}$$

К решению систем линейных уравнений сводятся многие химические задачи, например, анализ смесей, расчет равновесий многокомпонентных систем, расчет материальных и тепловых балансов[3], [4]. В частности, когда рассматриваются свойства смесей компонентов, имеющие аддитивный характер. Так, если измерить оптическую плотность раствора на M различных длинах волн, то можно получить систему из M линейных уравнений с M неизвестными концентрациями и использовать ее для их расчета (см. [4]):

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}c_1 + \varepsilon_{12}c_2 + \ldots + \varepsilon_{1M}c_M = \dfrac{D_1}{I}; \\ \varepsilon_{21}c_1 + \varepsilon_{22}c_2 + \ldots + \varepsilon_{2M}c_M = \dfrac{D_2}{I}; \\ \ldots \\ \varepsilon_{M1}c_1 + \varepsilon_{M2}c_2 + \ldots + \varepsilon_{MM}c_M = \dfrac{D_M}{I}. \end{cases}$$

Очевидно, что решение полученных по результатам экспериментов систем далеко не всегда может быть вычислено точно. Поэтому применяются численные методы.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Для численного решения системы (1), рассмотренные на лекциях методы не подходят. Так при использовании формул Крамера потребуется вычислить n+1 определитель, к тому же такие вычисления могут привести к большим погрешностям округления.

Известные в настоящее время многочисленные приближенные методы решения систем линейных алгебраических уравнений распадаются на две большие группы: прямые методы и методы итераций.

Прямые методы всегда гарантируют получение решения, если оно существуют, однако, для больших n требуется большое количество операций, и возникает опасность накопления погрешностей.

Этого недостатка лишены итерационные методы, но зато они не всегда сходятся и могут применяться лишь для систем определенных классов.

Среди прямых методов наиболее распространенным является метод исключения Гаусса и его модификации. Наиболее распространенными итерационными методами является метод простых итераций Якоби и метод Зейделя[5].

Далее приводятся теоретические сведения о методе последовательного исключения неизвестных Гаусса (схема единственного деления и с выбором главного элемента по столбцу) и решения типовых задач метода (см., например, [5, стр.37-45], [6, стр.102-105]), после чего предлагаются варианты индивидуальных заданий.

Задание. С точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, найти решение системы уравнений (2) методом последовательного исключения неизвестных Гаусса, используя) схему единственного деления и б) решение с выбором главного элемента по столбцу.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3; \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4, \end{cases} \quad (2)$$

где матрица системы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ и столбец свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ приведены в таблице 1. Полученные результаты сравните.

Таблица 1 – Варианты типового расчета

Вариант 1.	Вариант 2
$\begin{pmatrix} 0,45 & 0,22 & 1,26 & 3,11 \\ 0,51 & 0,34 & 0,50 & 0,21 \\ 1,32 & -1,70 & 0,11 & -1,12 \\ 0,65 & 0,23 & -0,16 & 0,33 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1,28 \\ -2,02 \\ 1,30 \\ 0,91 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,44 & 0,12 & -1,25 & -2,21 \\ 0,41 & -0,44 & 0,58 & 0,33 \\ 1,42 & 0,70 & 0,54 & -0,12 \\ 0,25 & 0,13 & -0,46 & 0,23 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1,38 \\ 0,03 \\ 1,32 \\ 0,41 \end{pmatrix}$
Вариант 3.	Вариант 4.
$\begin{pmatrix} 1,40 & 0,42 & 2,26 & 3,12 \\ 0,31 & -0,24 & 0,50 & 0,21 \\ 1,32 & -1,75 & 0,33 & -1,32 \\ 2,55 & 0,27 & -1,16 & 0,23 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1,33 \\ -1,02 \\ -1,52 \\ 0,21 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,33 & -1,21 & 1,30 & -1,11 \\ 1,31 & 2,32 & 1,56 & 0,25 \\ 1,42 & -2,70 & -0,10 & 1,26 \\ 0,35 & -0,24 & -0,15 & 0,16 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1,27 \\ -2,00 \\ 1,40 \\ 0,75 \end{pmatrix}$
Вариант 5.	Вариант 6.
$\begin{pmatrix} 1,11 & -1,31 & -1,10 & -1,01 \\ 2,21 & 1,52 & 1,26 & -1,15 \\ 1,32 & -1,66 & -0,15 & 3,11 \\ 0,55 & -0,33 & 0,16 & 1,12 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1,03 \\ -1,24 \\ -1,44 \\ 0,35 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,33 & 1,29 & -1,07 & 1,71 \\ 1,27 & -0,22 & 1,26 & 2,25 \\ 1,41 & 2,37 & -1,13 & 1,16 \\ 3,35 & 0,27 & -1,15 & -0,12 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1,07 \\ -2,55 \\ 2,47 \\ -1,75 \end{pmatrix}$
Вариант 7.	Вариант 8.
$\begin{pmatrix} 1,23 & 1,36 & 1,12 & -1,24 \\ 3,01 & 0,51 & 1,44 & 3,25 \\ 1,45 & -2,27 & -2,23 & 1,46 \\ 2,15 & -0,25 & -5,25 & -0,17 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3,17 \\ -0,55 \\ 0,29 \\ -1,85 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,71 & 2,21 & 1,05 & 1,88 \\ 1,31 & -4,25 & 1,26 & 1,25 \\ 0,43 & 0,27 & -2,13 & -1,16 \\ 3,15 & 0,57 & -1,15 & 1,12 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3,21 \\ -3,01 \\ -2,27 \\ 1,35 \end{pmatrix}$
Вариант 9.	Вариант 10.
$\begin{pmatrix} 1,03 & 1,29 & -1,06 & -1,70 \\ 1,20 & 2,22 & 1,06 & 2,05 \\ 1,40 & -2,39 & -1,03 & -1,06 \\ 1,05 & 0,29 & -1,30 & -0,17 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3,54 \\ 1,55 \\ 0,22 \\ -1,84 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4,21 & -1,09 & 1,05 & 1,41 \\ 1,25 & -0,32 & 1,06 & 2,35 \\ 2,11 & 0,37 & 2,15 & -1,15 \\ 3,22 & 0,55 & -1,35 & -1,13 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2,08 \\ -2,05 \\ 3,14 \\ -1,77 \end{pmatrix}$
Вариант 11.	Вариант 12.
$\begin{pmatrix} 1,33 & -1,25 & -1,19 & 2,21 \\ 1,07 & 0,24 & 1,25 & 2,28 \\ 1,01 & -1,88 & -1,15 & -1,19 \\ 1,25 & 0,24 & 1,18 & -0,72 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -5,00 \\ -2,35 \\ 1,40 \\ 1,75 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,56 & 1,22 & -0,07 & 0,72 \\ 0,20 & 0,24 & -1,27 & 0,25 \\ 1,51 & 2,36 & -1,17 & -0,11 \\ 0,39 & -0,28 & -1,97 & 0,55 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1,00 \\ 2,00 \\ 3,03 \\ -0,05 \end{pmatrix}$
Вариант 13.	Вариант 14.
$\begin{pmatrix} 1,23 & 0,22 & -1,27 & 0,21 \\ 1,25 & -0,24 & 1,25 & 0,23 \\ 1,27 & 0,26 & -1,23 & -0,25 \\ 1,29 & -0,28 & 1,21 & -0,27 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1,29 \\ -1,27 \\ 1,25 \\ -1,23 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,13 & 1,19 & -1,17 & 1,11 \\ 1,14 & -1,18 & 1,16 & -1,13 \\ 4,15 & 2,17 & -1,15 & 1,15 \\ 3,16 & 0,16 & -1,14 & -1,17 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1,07 \\ -2,55 \\ 2,47 \\ -1,75 \end{pmatrix}$
Вариант 15.	Вариант 16.
$\begin{pmatrix} 8,55 & 9,29 & -8,07 & 7,71 \\ 6,21 & -5,22 & 8,25 & 5,23 \\ 7,41 & -3,33 & -6,13 & 7,16 \\ 8,35 & -7,27 & -7,23 & -8,12 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -5,05 \\ -2,45 \\ 9,41 \\ -8,70 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,13 & 0,55 & -1,00 & 1,83 \\ 1,17 & -0,22 & 1,25 & -0,27 \\ 1,15 & 2,33 & -4,13 & 1,13 \\ 0,14 & -0,01 & -1,65 & -0,44 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1,53 \\ -2,53 \\ 2,53 \\ 1,53 \end{pmatrix}$

Как писал в книге «Современная математика и ее преподавание» Л.Д. Кудрявцев: «В результате приобретенных в процессе обучения математических знаний и интуиции у учащегося появляется то, что обычно называется математической культурой. Ее уровень после завершения обучения в высшем учебном заведении должен обеспечить умение разбираться в математических методах, необходимых для работы по специальности, но не изучавшихся в вузе, умение читать нужную для этого литературу, умение самостоятельно продолжать свое математическое образование» [7, с.114].

Внедрение типовых расчетов в методическую систему обучения студентов естественнонаучных направлений подготовки, без сомнения, – один из путей повышения математической культуры студентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Русаков А.А. Методические подходы к совершенствованию математического образования студентов технических специальностей // Педагогическая информатика, №6, 2011 – с.45-55.
2. Методика расчета скорости ударных волн в цементобетонных аэродромных покрытиях как аспект обеспечения безопасности полетов // Комплексные проблемы техносферной безопасности : материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Воронеж : ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2014. – Ч.III. – 256 с. ;http://pandia.ru/text/80/072/9907.php
3. Численные методы, наиболее часто применяемые при решении физико-химических задач : Учебно-методическое пособие для студентов/ Сост. А.Р. Кобелева. – Пермь : Пермский государственный технический университет, 2012 // http://pdnr.ru/a8013.html
4. Щербаков И.Н. Задачи, сводимые к решению систем линейных уравнений. Свойства смесей веществ // Численные методы и программирование.Материалы к лекционному курсу : кафедра физхимии ЮФУ (РГУ) ; http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/Source/NumMethods/Sys_lin_eq_use.html
5. Гладких О.Б., Прокуратова О.Н. Введение в численные методы: Учебно-методическое пособие. – Елец: Изд. ЕГУ им. И.А. Бунина, 2008. – 140 с.
6. Бут Э.Д. Численные методы / Перевод с английского Т.М. Тер-Микаэляна, под ред. В.М. Курочкина. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 240 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание / С предисловием П.С. Александрова : Учебное пособие для вузов. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 176 с.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ВЛИЯНИЯ КОНТРОЛИРУЕМЫХ ФАКТОРОВ В ПЕДАГОГИКЕ

В.Д. Селютин, д.пед.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: selutin_v_d@mail.ru

В данной работе рассматриваются способы осуществления оценок меры влияния контролируемых условий опыта на средние значения исследуемых в педагогике случайных величин.

Ключевые слова: статистическая гипотеза, критерий, факторная дисперсия, остаточная дисперсия, групповые средние, уровень значимости.

Достоверность результатов педагогических исследований обеспечивается экспериментальной проверкой выводов и положений проведенных теоретических построений [4]. Педагогический эксперимент, имеющий целью проверку соответствующей гипотезы или ее частей, как бы помещает разработанную теорию в практическое поле, в котором эффективно обнаруживаются как позитивные, так и негативные моменты теории. При проведении педагогических исследований, так же, как и естественнонаучных, наиболее распространенным способом обработки экспериментальных данных является проверка статистических гипотез. При этом применяются параметрические или непараметрические критерии [1].

Параметрические критерии как функции параметров выборочной совокупности применяют в тех случаях, когда есть основания считать, что исследуемые статистические признаки подчиняются нормальному закону распределения. Вопрос о том, каковы эти основания, как правило, не выясняется. А ведь по высокому счету ответ на этот вопрос должен быть получен путем выдвижения и проверки самостоятельной гипотезы о виде распределения генеральной совокупности. Критерии для проверки подобных гипотез принято называть критериями согласия. Чтобы избежать проверки двух гипотез, многие исследователи прибегают к непараметрическим критериям. В этих случаях нет необходимости опираться на предположение о виде распределения генеральной совокупности и использовать его параметры. Достаточно использовать совокупность наблюдаемых значений изучаемого признака (случайной величины) вместе с их частотами. Примером может служить критерий Смирнова, а также критерий Колмогорова, однако исследователи – педагоги применяют их сравнительно редко.

Наиболее часто исследователи используют критерий однородности «Хи-квадрат», строящийся на основе частного случая так называемой статистики Пирсона. Другая ее разновидность приводит к построению критерия знаков.

Для проверки гипотез о различии в центральных тенденциях изучаемого свойства объектов двух генеральных совокупностей исследователи часто применяют медианный критерий. Упомянутые выше критерии применимы лишь в тех ситуациях, когда выборки являются независимыми. Однако так бывает далеко не всегда. В ряде случаев при математической обработке результатов педагогических исследований приходится иметь дело с зависимыми выборками.

Это происходит, когда одна случайная величина характеризует состояние изучаемого свойства объектов генеральной совокупности при первичном измерении, а другая случайная величина характеризует состояние этого же свойства объектов в той же генеральной совокупности при вторичном измерении. Получаются зависимые выборки. Известный критерий Макнамары позволяет осуществить проверку статитсической значимости различий зависимых выборок.

Гораздо реже используются методы дисперсионного анализа. Между тем дисперсионный анализ дает мощные средства для выявления влияния различных факторов на исследуемые случайные величины.

Представление общей дисперсии в виде суммы дисперсий, обусловленных воздействием контролируемых и неконтролируемых условий опыта, позволяет произвести оценку меры влияния выделенных факторов на среднее значение изучаемой случайной величины.

Имея определенный набор экспериментальных данных, исследователь путем «расщепления» общей дисперсии выборки на слагаемые, выражающие воздействие факторов и остаточную дисперсию, может вполне успешно проверить значимость влияния факторов по отдельности и в комбинациях [3].

Пусть, например, применяя выборочный метод, проверяется влияние использования динамических компьютерных моделей на развитие интереса школьников к изучению геометрии [2]. При проведении педагогического эксперимента были выделены три вида использования динамических компьютерных моделей: F_1 – создание пространственных конструкций, F_2 – разработка инструментов для изменения пространственного положения, F_3 – построение заданий на основе использования готовых чертежей.

Данные об повышении (+) и снижении (–) интереса школьников к изучению геометрии в условных единицах приведены в таблице 1. Выясним на уровне значимости 0,05 существенность влияния фактора F (использование динамических компьютерных моделей) на случайную величину ξ (интерес к изучению геометрии).

Таблица 1 – Состояние интереса к изучению геометрии в условных единицах

Номер испытания	Типы технологии (уровни фактора F)		
	F_1	F_2	F_3
1	9	–9	–8
2	7	–5	–7
3	6	–3	2
4	2	1	5
Групповые средние	6	–4	–2

Для этого сначала найдем общую и факторную суммы квадратов отклонений, учитывая, что число уровней фактора $p = 3$, число испытаний на каждом уровне q=4:

$$Q = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2 - \frac{1}{pq}\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} x_{ij}\right)^2 = ((9^2 + 7^2 + 6^2 + 2^2 + (-9)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 +$$

$$+1^2 + (-8)^2 + (-7)^2 + 2^2 + 5^2)) - \frac{1}{3\cdot 4}(9 + 7 + 6 + 2 + (-9) + (-5) + (-3) + 1 +$$

$$+ (-8) + (-7) + 2 + 5)^2 \approx 428.$$

$$Q_F = \frac{1}{q}\cdot\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{q} x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{pq}\cdot\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} x_{ij}\right)^2 = \frac{1}{4}((9 + 7 + 6 + 2)^2 + ((-9) + (-5) + (-3) +$$

$$+1))^2 + ((-8) + (-7) + 2 + 5))^2 - \frac{1}{3\cdot 4}(9 + 7 + 6 + 2 + (-9) + (-5) + (-3) + 1 + (-8) + (-7)$$

$$+2 + 5)^2 \approx 224.$$

Вычислим остаточную сумму квадратов отклонений:

$$Q_o = Q - Q_F = 428 - 224 = 204.$$

Вычислим факторную дисперсию

$$s_F^2 = \frac{Q_F}{p-1} = \frac{224}{3-1} = 112,$$

а также остаточную дисперсию

$$s_o^2 = \frac{Q_o}{p(q-1)} = \frac{204}{3(4-1)} \approx 22{,}67.$$

Сравним факторную и остаточную дисперсии с помощью критерия Фишера-Снедекора. Для этого сначала найдем наблюдаемое значение критерия: $\frac{s_F^2}{s_o^2} = \frac{112}{22{,}67} \approx 4{,}94$. Учитывая, что число степеней свободы числителя равен 2, а знаменателя равен 9 и что уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, по таблице критических точек Фишера-Снедекора находим критическую точку 4,26.

Видим, что наблюдаемое значение критерия больше критического значения: 4,94 > 4,26. Поэтому заключаем, что групповые средние «в целом» различаются статистически значимо. Делаем вывод, что влияние использования динамических компьютерных моделей (фактора F) на интерес к изучению геометрии (случайную величину ξ) существенно. Действительно, существенное различие групповых средних означает большое рассеяние их вокруг общей средней, что объясняется большим воздействием фактора F на исследуемую случайную величину ξ.

Если в дополнение к фактору F требуется испытать влияние на случайную величину ξ еще одного фактора Φ, то необходимо учитывать, что ее дисперсия, наряду со случайными флуктуациями, обусловлена совместным действием факторов при каждой паре уровней. Чтобы выявить компоненту дисперсии $D_{F\Phi}\xi$, обусловленную совместным воздействием факторов F и Φ, необходимо найти $Q_{F\Phi}$ – сумму квадратов центральных отклонений для блоков.

Пусть например, экспериментально исследовалось влияние на успешность (ξ) усвоения студентами физики двух факторов: F – темперамент студентов, Φ – условия воспитания. Уровни факторов: F_1 – холерический темперамент, F_2 – сангвинический, F_3 – флегматический, F_4 – меланхолический; Φ_1 – воспитанные в авторитарном стиле, Φ_2 – воспитанные в демократическом стиле. В каждую из подгрупп входило 5 студентов, экзаменационные оценки которых приведены в таблице 2. Выясним, оказывают ли влияние эти факторы на успешность усвоения физики.

Таблица 2 – Экзаменационные оценки студентов

		Темперамент			
		F_1	F_2	F_3	F_4
Условия воспитания	Φ_1	5	4	2	3
		4	3	4	3
		2	5	4	5
		3	2	4	4
		4	4	4	4
	Φ_2	4	3	3	4
		2	5	4	2
		3	4	5	5
		5	5	4	4
		3	4	4	3

Зададим уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Вычислим общую сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений от общей средней:

$$Q = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}^2 - \frac{1}{npr}\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}\right)^2 =$$

$$=(5^2 + 4^2 + \ldots + 3^2) - \frac{1}{5\cdot 2\cdot 4}(5 + 4 + \ldots + 3)^2 = 589 - \frac{1}{40}\cdot 149^2 \approx 33{,}9.$$

Затем вычислим факторные суммы квадратов отклонений групповых средних от общей средней:

$$Q_F = \frac{1}{nr}\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}\right)^2 - \frac{1}{npr}\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{5\cdot 2}((5 + 4 + 2 + 3 + 4) + (4 + 2 + 3 + 5 + 3))^2 + ((4 + 3 + 5 + 2 + 4) +$$

$$+ (3 + 5 + 4 + 5 + 4))^2 + ((2 + 4 + 4 + 4 + 4) + (3 + 4 + 5 + 4 + 4))^2 +$$

$$+ ((3 + 3 + 5 + 4 + 4) + (4 + 2 + 5 + 4 + 3))^2 - \frac{1}{40}\cdot 149^2 = \frac{1}{10}(35^2 + 39^2 +$$

$$+ 38^2 + 37^2) - \frac{1}{40}\cdot 149^2 = \frac{1}{10}\cdot 5559 - \frac{1}{40}\cdot 149^2 \approx 0{,}88.$$

$$Q_\Phi = \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}\right)^2 - \frac{1}{npr}\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{5\cdot 4}((5+4+2+3+4)+(4+3+5+2+4)+(2+4+4+4+4)+$$
$$+(3+3++5+4+4))^2+((4+2+3+5+3)+(3+5+4+5+4))+$$
$$+(3+4+5+4+4)+(4+2+5+4+3))^2-\frac{1}{40}\cdot 149^2 = \frac{1}{20}(73^2+76^2)-$$
$$-\frac{1}{40}\cdot 149^2 \approx 0{,}0.$$

$$Q_{F\Phi} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2 - \frac{1}{nr}\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2 - \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2 +$$
$$+\frac{1}{npr}\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}x_{ijk}\right)^2$$

$$Q_{F\Phi} = \frac{1}{5}((5+4+2+3+4)^2+(4+2+3+5+3)^2+(4+3+5+2+4)^2+$$
$$+(3+5+4+5+4)^2+(2+4+4+4+4)^2+(3+4+5+4+4)^2+$$
$$+(3+3+5+4+4)^2+(4+2+5+4+3)^2)-\frac{1}{5\cdot 2}(35^2+39^2+38^2+$$
$$+37^2)-\frac{1}{5\cdot 4}(73^2+76^2)+\frac{1}{40}\cdot 149^2 \approx 8{,}5.$$

Остаточная сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от своей средней равна:

$$Q_o = Q - Q_F - Q_F - Q_{F\Phi} = 33{,}9 - 0{,}88 - 0{,}0 - 8{,}5 = 24{,}5.$$

Найдем исправленные дисперсии:

$$s^2 = \frac{33{,}9}{5\cdot 4\cdot 2-1} \approx 0{,}87; \quad s_F^2 = \frac{0{,}88}{4-1} \approx 0{,}29; \quad s_\Phi^2 = \frac{0{,}0}{2-1} = 0;$$

$$s_{F\Phi}^2 = \frac{8{,}5}{(4-1)(2-1)} \approx 2{,}8; \quad s_o^2 = \frac{24{,}5}{4\cdot 2(5-1)} \approx 0{,}77.$$

Поскольку оказалось $s_F^2 < s_o^2$, то фактор F влияет на ξ незначительно. Аналогично $s_\Phi^2 < s_o^2$, поэтому фактор Φ незначительно влияет на ξ. А вот для сравнения $s_{F\Phi}^2$ придется применить критерий Фишера-Снедекора:

$$\frac{s_{F\Phi}^2}{s_o^2} = \frac{2{,}8}{0{,}77} \approx 3{,}63; \; k_{кр} = k_{кр}(0{,}05;\, 3;\, 32) = 2{,}8.$$

Поскольку 3,63 > 2,8, то делаем вывод, что совокупное воздействие факторов F и Φ оказывает существенное влияние на ξ. Таким образом, по отдельности действие факторов F и Φ незначительно, а совокупное их влияние существенно.

Анализ исследовательских работ по педагогическим наукам позволяет сделать вывод о широких возможностях использования методов дисперсионного анализа для выявления влияния различных факторов на проверяемые случайные величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдыкаримов Б.А. Математические методы в педагогике: Учеб. пособие / В.В. Адищев, В.В. Егоров, Э.Г. Скибицкий // Новосибирск: Новосибирское книжное издательство, 2008. – 122 с.
2. Бакуров А.Н. Динамические компьютерные модели как средство совершенствования процесса обучения стереометрии в средней школе: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Бакуров Александр Николаевич. – Орёл, 2013. – 23 с.
3. Селютин В.Д. Основы корреляционно-регрессионного и дисперсионного анализа: учебно-методическое пособие / В.Д. Селютин, Л.А. Терехова. – Орел: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2016. – 76 с.
4. Уман А.И. Самостоятельная работа аспиранта над кандидатской диссертацией // Самостоятельная деятельность в образовательном пространстве современного вуза: Материалы конф. – Орел: ГОУ ВПО «ОГУ», 2010. – С.97-102.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЕТЕВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СЕРВИСОВ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ КАК НЕОБХОДИМОЕ ТРЕБОВАНИЕ РЕАЛИЗАЦИИ ФГОС ООО

Т.А. Симанева, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *simanevata@mail.ru*
Н.А. Бородина, ассистент
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *nataborodina@yandex.ru*

В статье рассмотрены основные возможности использования сетевых образовательных ресурсов в обучении информатике. Рассмотрен пример сетевого взаимодействия учитель – ученик на этапе дистанционного контроля знаний.

Ключевые слова: федеральный государственный образовательный стандарт, сервис LearningApps.org, интерактивные упражнения.

В соответствии с требованиями ФГОС ООО информационно-образовательная среда образовательного учреждения предполагает наличия таких компонентов, как: комплекс цифровых образовательных ресурсов, компьютеров, информационного оборудования, коммуникационных каналов, современных педагогических технологий. В документе указывается, что данная среда должна обеспечивать возможность проектирования индивидуальной и групповой деятельности учащихся, мониторинг и фиксацию хода и результатов образовательного процесса, современные процедуры создания, хранения и представления информации, а также дистанционное взаимодействие всех участников образовательного процесса [2].

Таким образом, учитель в своей педагогической деятельности должен активно использовать все возможности современной информационно-

образовательной среды для достижения метапредметных, предметных и личностных результатов обучения учащихся информатике.

Федеральный государственный стандарт высшего образования и стандарт «Педагог» [1] определяет ряд требований к уровню ИКТ – компетентности педагога. Современный учитель-предметник должен уметь:

- применять информационные технологии для разных форм образовательной деятельности (коллективной, групповой, индивидуальной);
- планировать проектную деятельность с учетом возможностей ИКТ;
- использовать интерактивные методы обучения на основе использования средств ИКТ;
- использовать доступные ресурсы Интернета;
- использовать дистанционные ресурсы при подготовке домашних заданий;
- готовить задания и тесты в электронном виде.

Также отметим, что особенностью ФГОС ООО является системно-деятельностный подход в обучении, который требует формирования практических умений применения теории. Учащиеся должны уметь искать необходимые данные, организовывать, обрабатывать, анализировать и оценивать информацию в соответствии со своими целями, в том числе и средствами ИКТ технологий.

Современным инструментальным средством позволяющим реализовать необходимый уровень ИКТ – компетенции учителя – предметника и осуществлять системно – деятельностный подход в обучении учащихся являются программные средства сервиса Веб 2.0. Принципиальной особенностью данного сервиса является возможность создавать информационный контент любым пользователям, в том числе преподавателям и ученикам. Сервисы Веб 2.0, а именно социальный сетевой сервис LearningApps.org – был создан для поддержки обучения и процесса преподавания с помощью интерактивных модулей. Интерактивные модули можно применять как в групповой, так и в индивидуальной работе учащихся. Содержание интерактивного модуля обеспечивается мотивационными игровыми, соревновательными, исследовательскими элементами. Примерами приложений создаваемых в сервисе LearningApps.org это - игры, тренажеры, интерактивные упражнения. Анализ дидактических возможностей интерактивных модулей данного сервиса позволяет выделить основные виды занятий с их применением:

- лекции (аудио, видео, текстовая);
- практические и лабораторные занятия;
- проекты (индивидуальные, групповые, исследовательские, творческие, информационные);
- индивидуальные и домашние задания;
- самостоятельная работа;
- тестирование;
- зачеты;
- игры.

Рассмотрим более подробно возможности сетевого сервиса LearningApps.org в организации учебного процесса. Данный сервис позволяет подбирать из базы интерактивных заданий или создавать самому необходимые упражнения по соответствующей учебной дисциплине, используя графику, аудио- и видеоматериалы для вашего компьютера или доступные в интернете, встраивать выбранные или разработанные материалы на сайт, блог. Ссылки на ресурс можно также размещать в облаке или пересылать по электронной почте. Сервис основан на работе с шаблонами (заготовками) для создания упражнений. В начале работы необходимо зарегистрироваться или зайти в свой аккаунт.

Воспользоваться уже имеющимися приложениями по интересующей нас тематике или дисциплине можно, нажав вкладку «Все упражнения», далее перейти в категорию «Информатика» (рисунок 1).

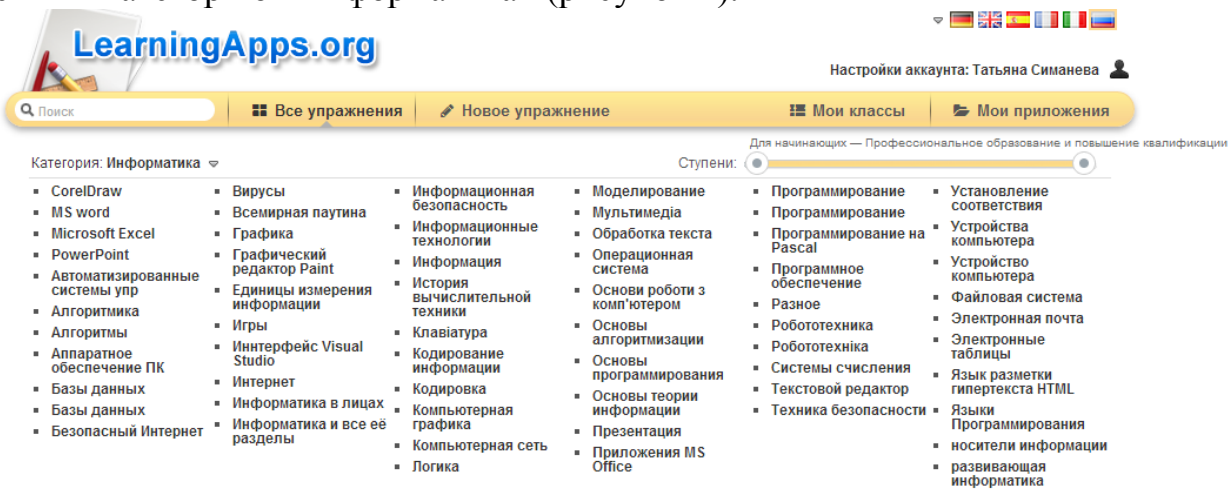


Рисунок 1 – Вкладка категории Информатика

Далее можно просмотреть уже созданные приложения, а также на базе понравившегося упражнения создать подобное, нажав на кнопку «Создать подобное приложение» (рисунок 2)

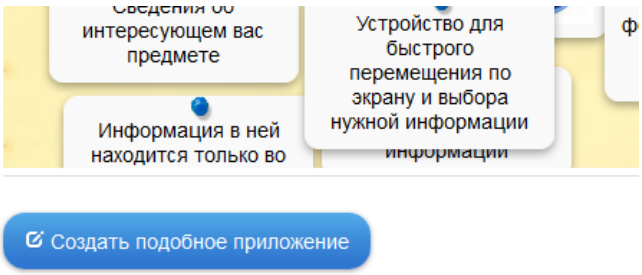


Рисунок 2 – Создание подобного приложения

В открывшемся окне вводятся соответствующие изменения с учетом тематики создаваемого интерактивного задания. После введенных изменений нажать кнопку «Установить и показать в предварительном просмотре». После просмотра можно «Вновь настроить» и внести изменения, либо «Сохранить приложение» (рисунок 3) в своем аккаунте.

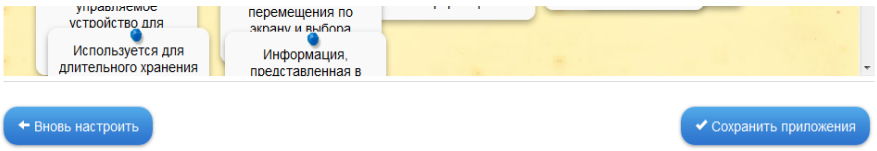


Рисунок 3 – Сохранение приложения в своем аккаунте

Второй способ для создания собственных интерактивных упражнений – нажать на вкладку «Новое упражнение», и воспользоваться списком шаблонов, предлагаемым сервисом для разработки заданий (рисунок 4), игр (рисунок 5).

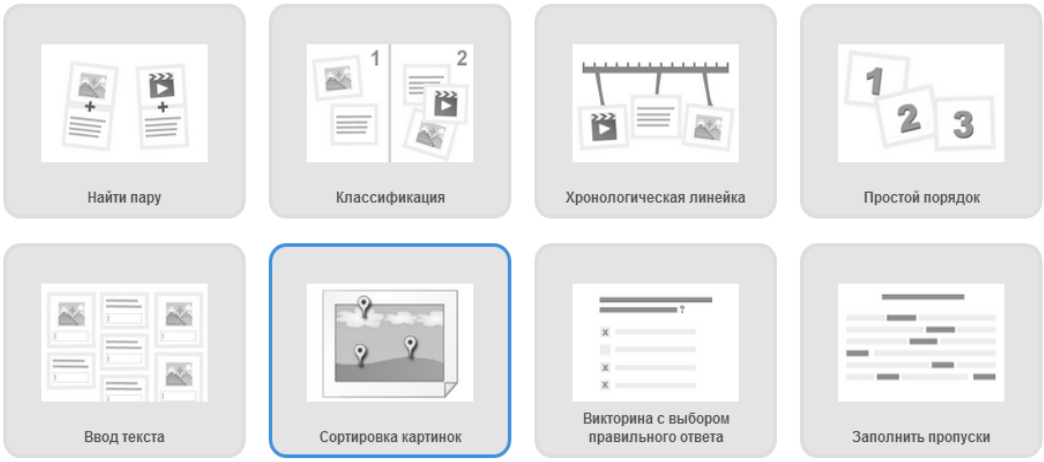


Рисунок 4 – Шаблоны заданий

Игровая база LearningApps.org обширна и включает шаблоны для создания игры «Парочки», пазл «Угадайка», игры «Кто хочет стать миллионером», кроссворда и многих других.

Все шаблоны условно можно классифицировать по шести группам:

- «Последовательность». Эта группа содержит шаблоны приложений, в которых необходимо установить правильную последовательность.

Рисунок 5 – Шаблоны игр

- «Заполнение». В этой группе шаблонов задания построены на заполнении определенных форм путем введения ответов с клавиатуры.

- «Распределение». Шаблоны заданий на определение соответствия, отнесения к той или иной группе.
- «Выбор». Группа приложений, построенных на выборе правильных ответов из перечня альтернативных вариантов.
- «Онлайн-игры». Особенность этих шаблонов заключается в том, что выполнение упражнений организовано как соревнование ученика с другими пользователями или с компьютером.
- «Инструменты». Эта группа содержит приложения, позволяющие учителю создавать качественные электронные наглядные пособия, аудиоматериалы, а также дистанционно общаться с учениками и коллегами.

Например, выбирая шаблон «Хронологическая линейка» можно создать приложение, которое можно использовать в учебном процессе для подготовки учащимися исследовательских проектов с активным использованием интернет ресурсов, или как одно из заданий в образовательном веб-квесте (найти сведения об ученых, выполнить упражнение и создать на его основе презентацию). Заполняем поля шаблона, вводим необходимую информацию (рисунок 6).

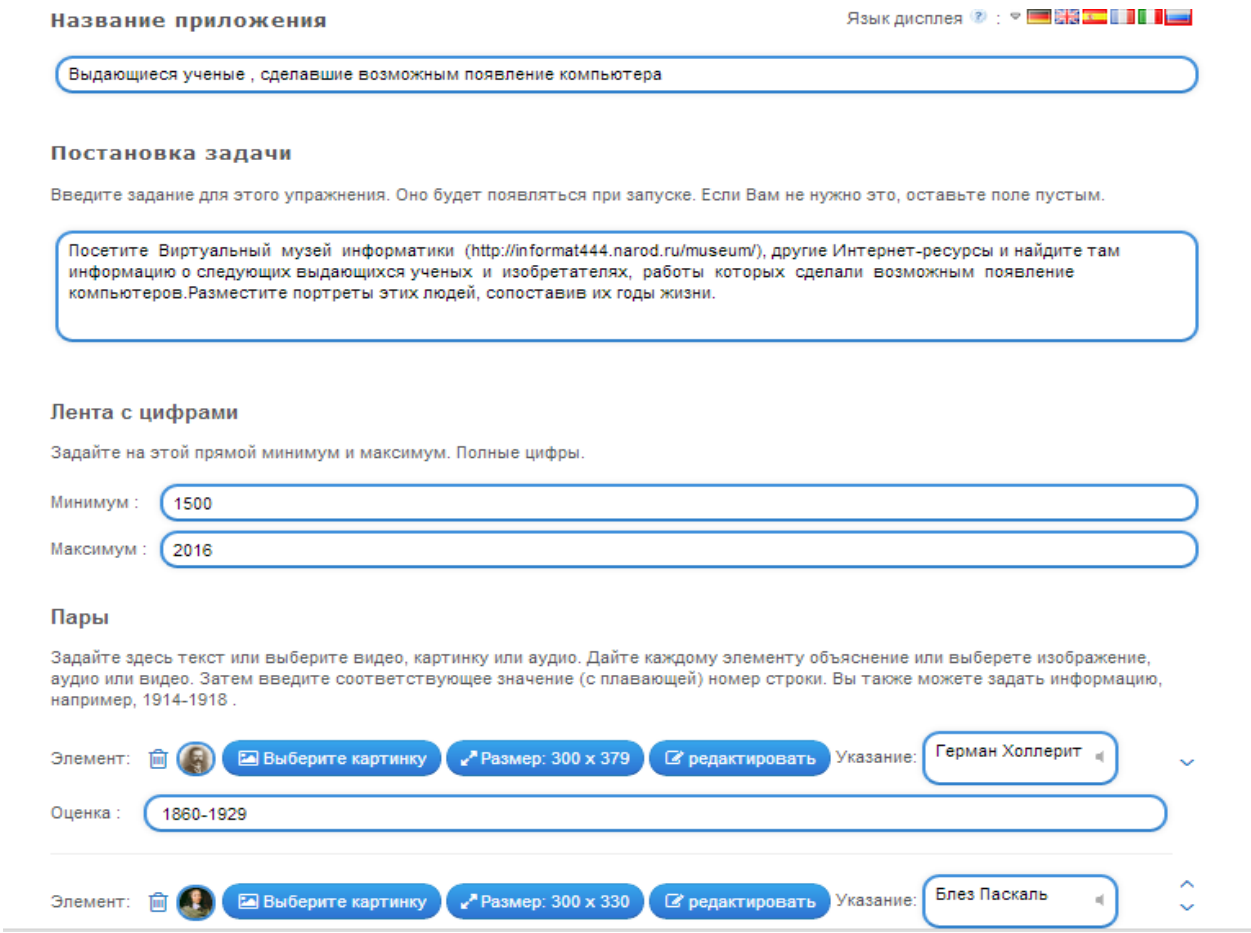


Рисунок 6 – Заполнение полей шаблона

После того, как работа с приложением завершена, его следует сохранить, но перед этим стоит посмотреть готовый вариант в предварительном просмотре, нажав на кнопку «Установить и показать в предварительном просмотре». Если содержимое приложения не устраивает, нажав на кнопку «Вновь настро-

ить», вводим изменения в приложении. В случае, если изменений в работе не требуется, нажимаем на кнопку «Сохранить приложение».

Полученное приложение на экране выглядит следующим образом (рисунок 7).

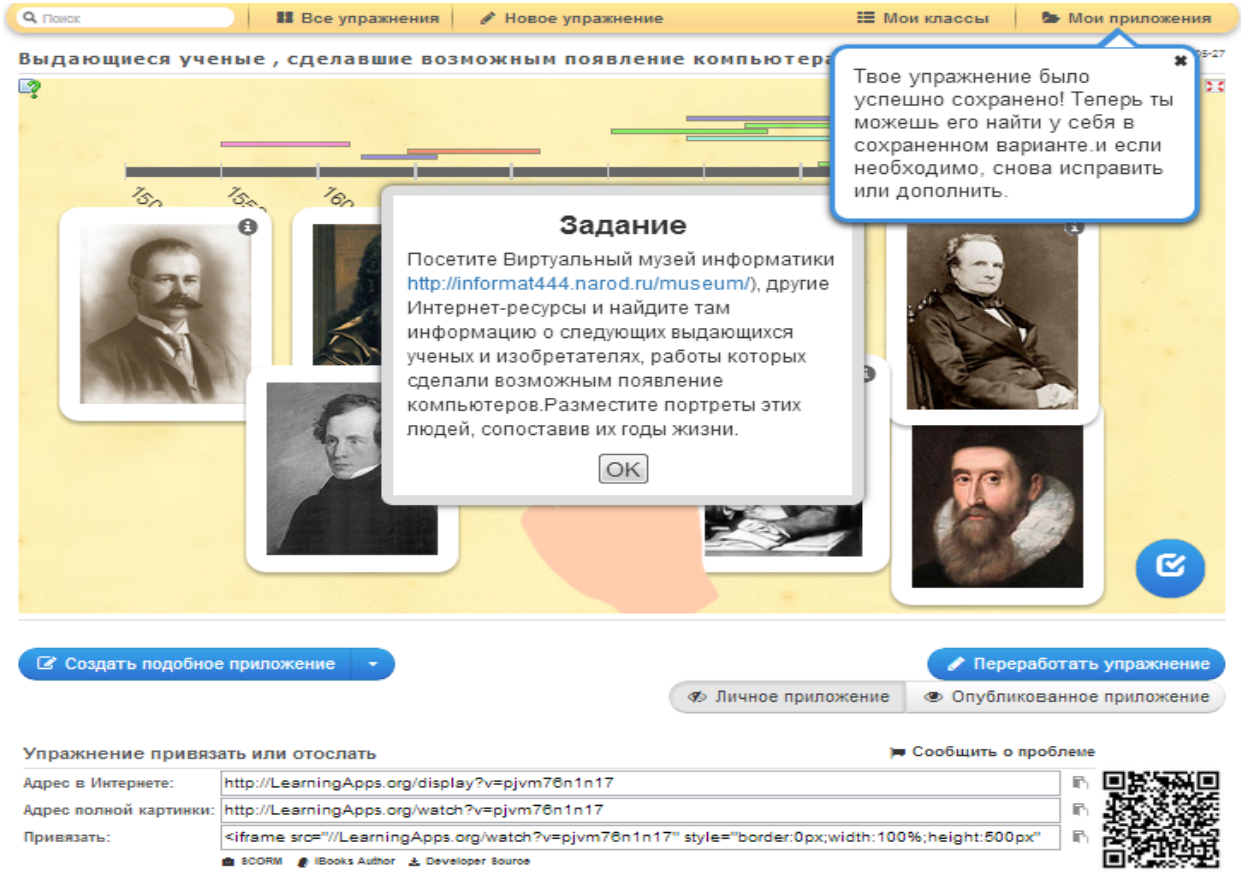


Рисунок 7 – Вид созданного приложения

Обратите внимание, на панель кнопок «Упражнение привязать или отослать», которая содержит:

- ссылку в Интернете на данное упражнение, что позволяет вам высылать ссылку на ресурс по почте или указывать на сайте;
- ссылку на упражнение в режиме «На весь экран», пройдя по такой ссылки, ученик откроет упражнение без лишних панелей кнопок;
- код (строка «Привязать») для встраивания упражнения в блог или сайт;
- qr-код ссылки на упражнения, что позволит ученику выполнить задание на планшете или смартфоне, предварительно сфотографировав qr-код с доски или листа бумаги;
- возможность загрузить на локальный компьютер данное упражнение в формате SCORM – для загрузки в систему дистанционного обучения и использования на компьютере без Интернета, iBook Author – для использования на iPad упражнения без Интернета, Developer Source – для изменения на уровне языка программирования.

Кроме того, возможности сервиса LearningApps.org позволяют учителю зарегистрировать на этом сайте своих учеников, после чего каждый из них заходит в личный аккаунт по паролю, чтобы взаимодействовать в режиме реаль-

ного времени с учителем и одноклассниками. Это может быть реализовано дистанционно или прямо на уроке. Для этого заходим в раздел «Мои классы» (рисунок 8), если список нужно создавать заново или добавить новый класс, то воспользуйтесь кнопкой «Создать новый класс».

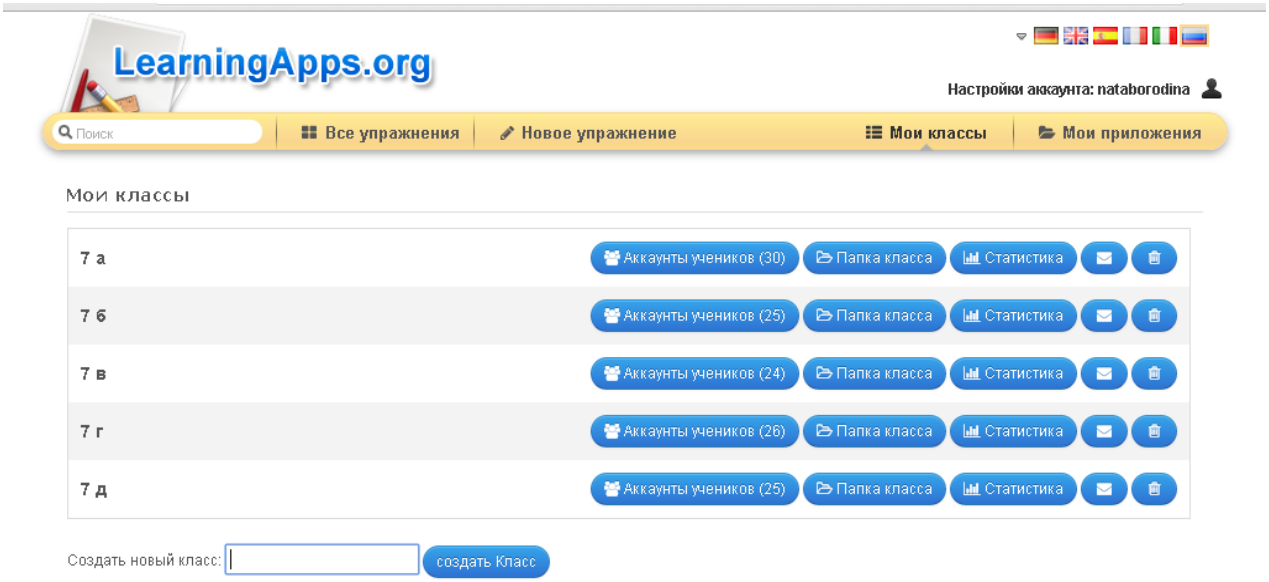


Рисунок 8 – Раздел «Мои классы»

Допустим, создадим новый класс 7 «А». В поле «Создать новый класс» вводим имя класса и нажимаем кнопку «Создать класс». Ваш новый класс появится в списке ваших классов. Далее необходимо нажать кнопку «Аккаунты учеников». Открывается новое окно в котором вам нужно нажать кнопку «Создать новые аккаунты для учеников». Введите список учащихся, заполнив поля «Имя» и «Фамилия», а затем компьютер сам сгенерирует логин и пароль для каждого из учащихся. Если у вас есть уже набранный список класса, то его можно скопировать и вставить этот список в специальное окно «Импорт», после чего нажать кнопку «Импорт имен». После заполнения списка нажмите кнопку «Сохранить». После сохранения справа внизу появится кнопка «Аккаунт/Распечатать список паролей». При помощи этой кнопки можно вывести на печать все пароли и логины для учащихся и раздать их ученикам.

Вверху окна класса находятся две кнопки «Статистика» и «Папка класса». В «Папка класса» можно загрузить упражнение для выполнения учениками, а кнопкой «Статистика» можно контролировать выполнение учениками этого задания.

Рассмотрим подробно, как загрузить созданное вами задание в папку класса.

Выбираем кнопку «Мои приложения». Затем выбираем нужное вам задание. Нажимаем кнопку «Мои классы» и выбираем папку того класса, в который собираетесь загрузить это приложение. Далее в окне появляется кнопка «Добавить приложение», щелкнув по ней, загрузятся все выбранные вами задания. Выберите нужное задание из списка и щелкните по нему двойным щелчком. Задание загрузится в папку, и ученики смогут приступить к его выполнению.

Зайдя, под своим логином и паролем учащейся увидит кнопку «Моя классная комната». Щелкнув по ней, он найдет выложенное вами задание.

Учитель может проверить статистику выполнения учениками опубликованных вами заданий. Нажмите на кнопку «Статистика» и появится следующее окно (рисунок 9).

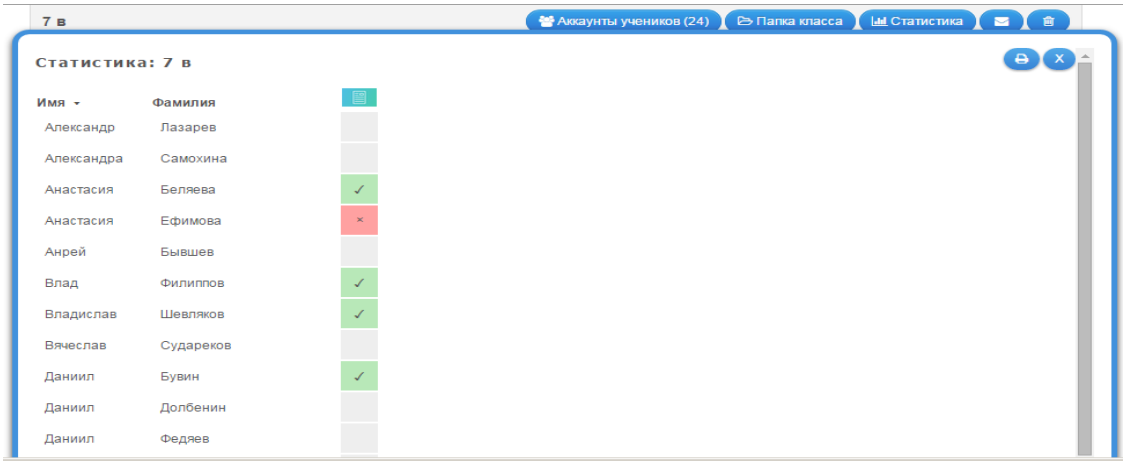


Рисунок 9 – Окно статистика

Где зеленой галочкой будет отмечено успешное прохождение задания, а красный крестик свидетельствует о неудачном опыте. В этом случае можно предложить ученику еще раз попытаться пройти данное задание. Причем, при наведении курсора мыши на галочку или крестик будет показана дата и время выполнения задания (если это важно). Данный отчет можно распечатать в правом верхнем углу находится кнопки «Печать» и «Закрыть».

Так же можно проверить историю выполнения всех ваших заданий учеником, а так же узнать о его неудачных попытках, если они были. Для этого надо нажать кнопку «Аккаунты учеников» и выбрать из списка нужного ученика, затем нажать в последнем столбце кнопку Activities (рисунок 10).

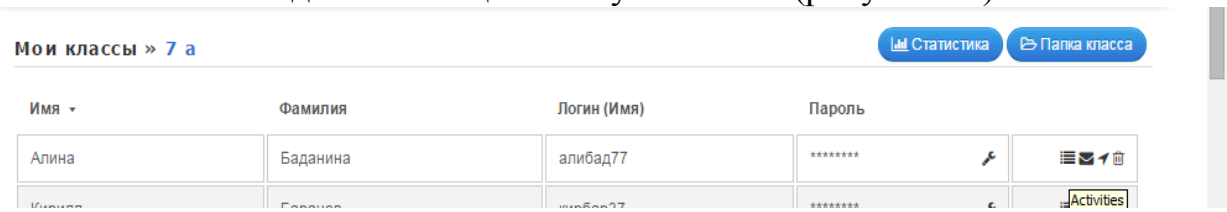


Рисунок 10 – Окно «Аккаунты учеников»

Появится отчет (рисунок 11), из которого видно, что с двумя из предложенных заданий данная ученица не справилась, а третье получилось выполнить только со второй попытки. Так же вы сможете написать сообщение любому из учеников при помощи кнопки «Отправить сообщение этому пользователю».

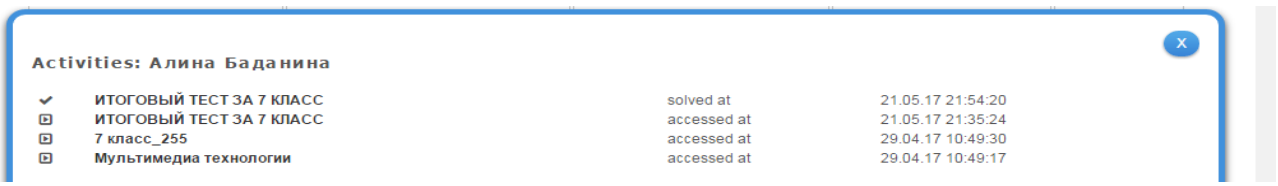


Рисунок 11 – Окно отчета ученика

Недостатком данной программы является то, что если ученики выполняют ваши задания в школе, то вы сможете видеть процент правильных ответов и сможете их оценить, а если они выполняют эти упражнения удаленно (например, дома), то вы можете наблюдать только статистику - выполнил ученик задание или нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Профессиональный стандарт «Педагог» (педагогическая деятельность в дошкольном, начальном общем, основном общем, среднем общем образовании) (воспитатель, учитель)». Утвержден приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 года №544н. http:// rosmintrud.ru/docs/mintrud/orders/cument/129.
2. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5-9 кл). http://минобрнауки.рф/документы/938.

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ-ПРЕДМЕТНИКА ПРИ ИЗУЧЕНИИ МОДУЛЯ «МУЛЬТИМЕДИЙНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧИТЕЛЯ» В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ ТРЕБОВАНИЙ ФГОС ВО

Т.А. Симанева, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева»
e-mail: *simanevata@mail.ru*

В статье рассматриваются вопросы совершенствования профессионально-методической подготовки бакалавров педагогического образования в области изучения и использования мультимедийных технологий в современной информационно-образовательной среде школы. Предлагается программа модуля, раскрывается его значимость для формирования информационно-коммуникационной компетентности будущих учителей предметников.

Ключевые слова: федеральный государственный образовательный стандарт, ИКТ-компетентность, мультимедийные технологии, бакалавр педагогического образования.

В настоящее время в школах РФ осуществляется повсеместный переход образовательных учреждений на новый федеральный государственный образовательный стандарт. Особенностью ФГОС общего образования является его ориентированность на системно-деятельностный подход в обучении, обеспечивающий активную учебно-познавательную деятельность учащихся, а также широкое использование средств и технологий ИКТ в учебной, проектной и внеурочной деятельности школьника для формирования и развития его ИКТ-компетентности.

Свидетельством тому, являются:

- формулирование требований к метапредметным результатам освоения образовательной программы, где указывается необходимость отражать формиро-

вание и развитие компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий не только в учебной, но и в учебно-исследовательской, проектной деятельности;

- конкретные указания на формирование умений учащихся пользоваться средствами ИКТ при изучении учебных дисциплин, а также на широкое применение различных источников информации, в том числе расположенных в сети Интернет;
- программа развития универсальных учебных действий, в которой подчеркивается необходимость формирования и развития ИКТ-компетентности обучающихся в области использования ИКТ на уровне общего пользования, включая владение информационно-коммуникационными технологиями, поиском, построением и передачей информации, презентацией выполненных работ, основами информационной безопасности, умением безопасного использования средств ИКТ и сети Интернет [5].

Таким образом, внедрение ФГОС изменяют не только условия профессиональной деятельности учителя-предметника, но и его содержание. Будущему бакалавру педагогического образования предстоит работать в новой информационной среде общеобразовательного учреждения, самому проектировать и реализовывать современный учебный процесс с использованием ИКТ-технологий.

Начальная подготовка учителей-предметников к использованию средств ИКТ при разработке и проведении уроков начинается в рамках изучения дисциплин «Информационные технологии», «Теория и методика обучения информатике» и ряда других [4]. Внедрение ФГОС ВО и стандарты общего образования предполагают дальнейшее совершенствование профессионально-методической подготовки будущих учителей в области использования современных информационно-коммуникационных технологий.

При анализе требований к основной образовательной программе в условиях ФГОС можно заметить, что учителю-предметнику необходимо разработать рабочую программу по дисциплине, которая должна содержать:

- описание содержания, видов и форм организации учебной деятельности по формированию и развитию ИКТ-компетенций при изучении данного предмета;
- перечень и описание основных элементов ИКТ-компетенций и инструментов их использования при изучении курса;
- планируемые результаты формирования и развития компетентности обучающихся в области использования информационно-коммуникационных технологий, подготовки индивидуального проекта, выполняемого в процессе обучения в рамках данного предмета или на межпредметной основе [5].

Согласно требованиям профессионального стандарта «Педагог», все учителя-предметники должны уметь пользоваться компьютерными технологиями и программными продуктами, которые рекомендованы для поддержки преподавания той или иной дисциплины [3].

Анализ предложенных, цифровые образовательные ресурсов (электронные учебники, справочники, энциклопедии, тестирующие и моделирующие

программы и др.) показывает, что практически все они разрабатываются на основе мультимедийных технологий.

Под мультимедийной технологией (ММТ) мы понимаем технологию, которая обозначает порядок разработки, функционирования и применения средств обработки информации различных видов. Говоря о различных аспектах использования ММТ в образовании, рассматривают использование технического компьютерно-ориентированного средства обучения «нового» поколения, которому присущи характерные признаки:

- ✓ возможность объединения информации, представленной в разных формах (текст, звук, графика, видео, анимация);
- ✓ интерактивный режим работы с информацией [1].

Педагогические исследования, посвященные разработке методических основ проектирования, создания и использования мультимедийных учебных программ и мультимедийных учебных комплексов отмечают, что использование средств ММТ:

- позволяет повысить интенсивность и эффективность процесса обучения;
- создаёт условия для самообразования и дистанционного образования;
- в сочетании с телекоммуникационными технологиями решает проблему доступа к новым источникам разнообразной по содержанию и форме представления информации [2].

В силу специфики своей профессиональной деятельности учителю-предметнику приходится постоянно иметь дело с мультимедийными технологиями, он сталкивается с ними при подготовке к урокам, учебно-исследовательской или внеурочной деятельности. Проанализировав деятельности учителя в школе, можно выделить основные виды деятельности, требующие формирования и развития ИКТ-компетенций в области использования мультимедийных технологий и программных продуктов:

- подготовка презентаций для изложения теоретического материала во время урока;
- разработка дидактических материалов;
- разработка контрольно-измерительных материалов и их последующее представление в интерактивном виде;
- подбор и оформление материалов для внеклассных мероприятий по предмету и мероприятий воспитательного характера;
- работа с интерактивными устройствами (интерактивная доска, система голосования, электронные учебники) при проведении уроков и внеклассных мероприятий;
- создание и поддержка персонального сайта или блога учителя;
- разработка инновационных методов обучения на основе ментальных карт и образовательных квестов.

Все это накладывает определенные коррективы на профессиональную и методическую подготовку будущих учителей-предметников в области мультимедийных технологий и методике проектирования учебного процесса с их использованием.

В связи с этим, одним из приоритетных направлений совершенствования профессионально-методической подготовки бакалавров педагогического образования является изучение новых и углубление имеющихся знаний в области мультимедийных технологий и соответствующих программных продуктов, а также их использование при проектировании и организации учебной, учебно-исследовательской, проектной и внеурочной деятельности в современной информационно-образовательной среде школы. Именно это приводит к необходимости введения образовательного модуля «Мультимедийные технологии в профессиональной деятельности учителя» в рамках бакалавриата как дисциплины по выбору.

Предлагаемый модуль «Мультимедийные технологии в профессиональной деятельности учителя» отвечает требованиям, предъявляемым к образовательным программам бакалавриата, и охватывает практически все виды деятельности современного учителя-предметника, где необходимо использование технологий мультимедиа, которые составляют основу формирования ИКТ - компетентности будущего бакалавра педагогического образования.

Цель дисциплины – развить и углубить систему знаний, умений и компетенций в области средств для создания мультимедийных продуктов, проектирования и реализации образовательного процесса с их использованием.

Учебно-тематический план модуля, рассчитан на 72 часа, из них лекции – 12 часов, лабораторные работы – 24 часа, самостоятельные работы – 36 часов. Форма контроля по дисциплине – зачет.

Содержание курса «Мультимедиа технологии в профессиональной деятельности учителя» состоит из следующих тем:

Создание дидактических и презентационных материалов для уроков.

Создание презентационных материалов для уроков средствами MO PowerPoint. Создание тестовых приложений для уроков средствами MO PowerPoint. Разработка интерактивных презентаций с помощью онлайн-сервиса Prezi.com. Проектирование урока с использованием презентационной графики.

Разработка интерактивных упражнений средствами онлайн – сервиса LearningApps.org. Способы создания онлайн-приложений, примеры интерактивных заданий и упражнений. Проектирование стандартного и нестандартного урока с использованием созданных мультимедийных приложений. Возможность дистанционного обучения с помощью сервиса LearningApps.org. работа с «Моим классом».

Создание и обработка графической, звуковой и видеоинформации. Создание видеоинструкций при помощи программ видеозахвата. Обработка видеофрагментов, видеомонтаж видеофильмов. Проектирование урока с использованием созданных видео и аудиоресурсов.

Создание ментальных карт и их использование в профессиональной деятельности учителя. Онлайн-сервисы, позволяющие создавать ментальные карты. Разработка ментальной карты в среде MindMeister. Применение ментальной карты для создания технологической карты урока. Использование ментальной карты для организации закрепления, проверки и контроля знаний учащихся в процессе обучения. Ментальная карта, как средство для реализации современ-

ных педагогических технологий, на примере технологии критического мышления. Использование ментальной карты как средство реализации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся в информационно-образовательной среде.

Разработка персонального сайта и блога учителя-предметника. Создание персонального сайта и блога учителя в онлайновом сервисе. Использование сайта или блога для организации образовательных веб-квестов. Проектирование ролевой игры, с использованием веб-квестов. Использование сайта и блога учителя для дистанционного образования.

Апробация предлагаемого модуля проводилась на базе ОГУ им. И.С. Тургенева в рамках модульного курса для бакалавров 44.03.01 Педагогическое образование, двойной профиль подготовки «Информатика» и «Математика», «Физика» и «Математика» проводилась в 2016-2017 учебном году. Контроль по итогам изучения модуля, проводился в форме учебно-исследовательского проекта «Программно-методическая разработка темы по математике, физике или информатике с ИКТ-поддержкой на основе использования изученных мультимедийных технологий». Темы проектов были определены студентами самостоятельно на первом практическом занятии в соответствии со своими предпочтениями. Теоретический материал преподносился учащимся в виде мастер классов по изучаемой мультимедийной технологии. На практическом занятии создавались мультимедийные программные продукты по выбранной студентами тематике, и осуществлялось проектирование уроков на основе разработанных интерактивных дидактических модулей.

В результате проектной деятельности студенты разработали систему уроков по выбранной теме, которые отличаются не только актуальным содержанием, но и инновационными методами и формами представления материала. Оценка выполнения учебно-исследовательского проекта осуществлялась в процессе его защиты. Итоговое анкетирование будущих учителей-предметников показывает возрастание желание применять полученные в рамках модуля знания в профессиональной деятельности, готовность проектировать и проводить урок с применением средств мультимедийных технологий, использовать мультимедийные программные продукты для разработки нестандартных уроков в виде ролевых игр (веб-квесты), внеклассных мероприятий по предмету. Таким, образом, студенты, прошедшие подготовку по модулю «Мультимедийные технологии в профессиональной деятельности учителя», отмечают высокую степень заинтересованности в изучаемом предмете и как следствие высокое качество обученности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев С. Г., Гриншкун В. В. Мультимедиа в образовании. http://www.ido.rudn.ru/Open/multimedia/
2. Информационные и коммуникационные технологии в образовании / И. В. Роберт [и др.]. -М.: Дрофа , 2008. -312, [1] с.: табл. -(Высшее педагогическое образование). -Библиогр.: с. 267-269.

3. Профессиональный стандарт «Педагог» (педагогическая деятельность в дошкольном, начальном общем, основном общем, среднем общем образовании) (воспитатель, учитель)». Утвержден приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 года №544н. http:// rosmintrud.ru/docs/mintrud/orders/cument/129
4. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100 Педагогическое образование (квалификация (степень) «бакалавр») (утв. Приказом Министерства образования и науки РФ от 22 декабря 2009 года № 788) (с изменениями от 31 мая 2011 года), http:// docs.cntd.ru/document/902200015
5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. http://минобрнау-ки.рф/документы/938

УДК 51 (07)

РЕАЛИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ 44.04.01 ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ПРОФИЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ НА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ ФГБОУ ВО «ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И.С.ТУРГЕНЕВА»

О.В. Тарасова, д.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева»,
e-mail: *Tarasova_orel@mail.ru*

В статье идет речь о структуре, принципах построения основной образовательной программы 44.04.01 Педагогическое образование, профиль Математическое образование, реализуемой в ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

Ключевые слова: процесс обучения в вузе, магистр, модульное обучение, методика обучения математике.

Основная образовательная программа подготовки магистра по направлению 44.04.01 Педагогическое образование (направленность/профиль Математическое образование) составлена на основе федерального государственного стандарта высшего образования (Приказ Министерства образования и науки России №1505 от 21 ноября 2014 г.).

Целью образовательной программы по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование (направленность/профиль Математическое образование) является методическое обеспечение реализации ФГОС ВО по данному направлению, качественная подготовка высококвалифицированных конкурентоспособных педагогических кадров для школы, СПО, вуза; подготовка магистров в области преподавательской деятельности на основе сочетания передовых инновационных технологий с научно-практической деятельностью, наце-

ленная на реализацию приоритетных направлений развития системы образования в Российской Федерации.

Программа является одним из первоочередных мероприятий, направленных на реализацию Концепции развития математического образования в РФ. В указанной Концепции констатируется факт, что «в Российской Федерации не хватает учителей и преподавателей образовательных организаций высшего образования, которые могут качественно преподавать математику, учитывая, развивая и формируя учебные и жизненные интересы различных групп обучающихся». Разработанная основная образовательная программа подготовки магистра ориентирована на решение поставленной государством проблемы подготовки педагогических кадров.

Программа нацелена на специализированную подготовку магистра в области содержания и технологий математического образования. Содержание образовательной программы предусматривает формирование готовности магистра к исследованию проблем математического образования, моделированию и прогнозированию образовательных процессов. Магистрант востребован как учитель, подготовленный для работы в различных типах учебных заведений, включая профильную школу, а также как преподаватель средних специальных и высших учебных заведений.

Принципы построения программы:

1) усиление роли проектно-исследовательской деятельности при сохранении ведущей роли фундаментального образования;
2) возможность использования модульной технологии;
3) усиление роли практики в познании;
4) развитие электронного обучения;
5) развитие сетевых форм сотрудничества;
6) высокие требования к материально-техническому (в том числе – лабораторному) обеспечению.

Программа учитывает потребности будущих специалистов в математических знаниях и методах изучения и обучения.

Программа имеет 8-летний опыт реализации, благодаря которому складываются эффективные механизмы обоснованного обновления содержания математического образования.

С учётом принятия модульной системы построения программы учебные дисциплины сгруппированы следующим образом:

1. Модуль фундаментальных математических дисциплин (Проективная геометрия, Функциональный анализ, Функциональные способы решения задач элементарной математики, Неевклидовы геометрии).
2. Модуль историко-методологических дисциплин (Методология и методы научного исследования, История математического образования и педагогических идей в русской школе, История и методология математики, Становление и развитие обучения высшей математике в отечественной средней школе).
3. Методико-математический модуль (Методика преподавания математики в вузе, Методика организации и проведения элективных курсов по ма-

тематике, Методика организации и проведения кружковых занятий по математике, Самостоятельная деятельность в профессиональном образовании).

4. Практико-ориентированный математический модуль (Методика организации дистанционного обучения математике в средней школе, Методика и технология обучения математике в классах с профильным изучением предмета, Методика организации обучения по подготовке к итоговой аттестации за курс математики средней школы, Инклюзивное образование в вузе (Адаптационная специализированная дисциплина), Методика обучения геометрии в профильной школе с применением математических компьютерных пакетов).
5. Модуль ИКТ в образовании (Информационные технологии в профессиональной деятельности, Системы компьютерной математики, Изучение вопросов элементарной математики и методики преподавания математики с привлечением цифровых образовательных ресурсов).
6. Коммуникативный модуль (Современные проблемы науки и образования, Инновационные процессы в образовании, Деловой иностранный язык, Педагогика и психология профилизации общеобразовательной и высшей школы, Профессиональные коммуникации).

В результате обучения по образовательной программе магистр подготовлен к педагогической, научно-исследовательской, проектной и методической деятельности, требующей углубленной фундаментальной и профессиональной подготовки в области математического образования.

Выпускник, получивший степень магистра, готов решать образовательные и исследовательские задачи, ориентированные на научно-исследовательскую работу в предметной области знаний и образовании; использовать современные технологии сбора, обработки и интерпретации полученных экспериментальных данных; владеть современными методами исследований, которые применяются в области математического образования; конструировать, реализовывать и анализировать результаты процесса обучения в соответствующей области в различных типах учебных заведений, включая профильную школу, а также средние специальные и высшие учебные заведения; проектировать и реализовывать в практике обучения новое учебное содержание учебных предметов; диагностировать уровень обучаемости учащихся, затруднений, возникающих в процессе обучения, а также математических способностей; определять стратегию индивидуальной коррекции или развития учащихся в процессе обучения; осуществлять корректирующую или развивающую деятельность в процессе работы с отдельными учащимися или группами учащихся при изучении физико-математического содержания.

Выпускник магистратуры соответствует квалификационным требованиям, профессиональным стандартам, в результате прохождения практики приобретает опыт применения педагогических знаний. Подготовка, получаемая в результате обучения, способствует интеллектуальному росту и соответствует требованиям, предъявляемым к педагогической деятельности в общеобразовательных организациях.

Содержание основной образовательной программы подготовки магистра обеспечивает возможность обучения в аспирантуре по специальности 13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания (математика).

Важнейшей проблемой, от решения которой существенно зависит достижение современного качества образования во всех образовательных организациях, является повышение профессионально-кадрового потенциала системы образования в Орловской области. Сохраняющееся длительные годы значительное отставание уровня оплаты труда педагогов в образовательных организациях от работников во многих сферах, где требуется аналогичный уровень квалификации, привело к общему снижению престижа педагогического труда. Это стало причиной существенного сокращения прихода в образовательные организации молодых кадров, их слабого закрепления и профессионального роста.

В настоящее время продолжается тенденция увеличения среднего возраста учителей. Увеличивается доля работающих учителей пенсионного возраста на фоне снижения доли молодых в общем количестве работающих учителей.

При реализации программы важно наличие общедоступных информационных ресурсов, необходимых для реализации учебных программ математического образования, в том числе в электронном формате, инструментов деятельности обучающихся и педагогов, применение современных технологий образовательного процесса.

Особое внимание уделяется вопросу повышения качества работы преподавателей математики, обеспечение им возможности обращаться к лучшим образцам российского и мирового математического образования, достижениям педагогической науки и современным образовательным технологиям, созданию и реализации ими собственных педагогических подходов и авторских программ.

Реализация программы нацелена на совместное взаимодействие студентов и преподавателей в выполнении методико-математических исследований.

В программе увеличено количество курсов и число часов на их изучение, позволяющих на высоком уровне продолжить изучение элементарной математики, которая является фундаментом для проведения образовательной деятельности. В программу включены курсы, обеспечивающие обучение детей с выдающимися способностями и детей с ограниченными возможностями здоровья.

В процесс разработки и реализации данной образовательной программы включены работодатели, педагоги высшей квалификационной категории. Ведущие преподаватели программы сотрудничают с БУ ОО ДПО «Институт развития образования», с БУ Орловской области «Региональный центр оценки качества образования». Сотрудничество заключается в проведении курса повышения квалификации учителей, руководстве региональными экспериментальными площадками, работе в качестве экспертов в региональной предметной комиссии при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного и среднего общего образования.

Повышение привлекательности образовательной программы осуществляется за счет роста качества образовательного процесса. Качество образовательного процесса определяется нами следующими составляющими:

1) Качество потенциала обучающихся. Реализация осуществляется в процессе организации профориентационной работы, в том числе и работа преподавателей в качестве учителей Университетского Лицея. Увеличение количества участников проектно-исследовательской деятельности, увеличение количества участников олимпиад и конкурсов различных уровней, повышение уровня содержания и разнообразия портфолио научно-исследовательской деятельности магистрантов. Формирование проектной деятельности студентов осуществляется в процессе подготовки курсовых работ по ключевым дисциплинам курса обучения; при проведении научно-исследовательской работы в процессе написания Выпускной квалификационной работы; в период всех видов практик (практик по получению первичных профессиональных умений и навыков, опыта профессиональной деятельности, производственной и преддипломной практик).

2) Качество потенциала педагогического состава. Все преподаватели, работающие на данной программе, имеют степень кандидата и/или доктора наук. Они активно принимают участие в современных направлениях методико-математических исследований, среди них есть председатель предметной экзаменационной комиссии по математике, старшие эксперты ЕГЭ и ОГЭ, преподаватели, совмещающие работу и в школе, и в вузе.

3) Качество образовательной программы. С педагогической точки зрения оно характеризуется полнотой усвоения магистрантами знаний, предусмотренных ООП, сформированностью всего комплекса компетенций, предусмотренного стандартом, специальных и метапредметных умений в результате применения современных технологий, методов и форм обучения. Результаты государственного экзамена и защиты магистерских диссертаций свидетельствуют о высоком уровне подготовки магистрантов. Продвижение этого показателя возможно также благодаря осуществлению поэтапного повышения профессионального уровня преподавателей, реализующих данную образовательную программу.

4) Качество средств образовательного процесса и технологий. Улучшение компьютерного обеспечения учебного процесса, обеспечение библиотечным фондом, высокая квалификация преподавателей. Использование инновационных технологий (проблемное обучение, обучение в сотрудничестве, технология решения исследовательских задач, информационно-коммуникационные технологии).

5) Качество управления образовательным процессом. Оно регулируется коррекцией процесса обучения в соответствии с изменяющимися условиями образовательной среды.

Меры, направленные на повышение качества по всем указанным составляющим, обеспечивают повышение привлекательности образовательной программы и направлены на процесс формирования качества образования.

Предлагаемые изменения нацелены на сохранение системы математического образования педагогов, ориентированы на сохранение преемственности с действующей системой, её совершенствование в плане модернизации, развитие непрерывного математического образования и разработку объективных критериев оценки качества математической подготовки магистров.

БЛЭКБОКС-ОБЕРОН – ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СОВРЕМЕННЫХ ЗАДАЧ ИТ-ОБРАЗОВАНИЯ

Е.Э. Темиргалеев
ООО «Метасистемы»
e-mail: *temirgaleevee@yandex.ru*

1. Вызовы современности

Почти 30 лет назад специалисты обозначили вызов перехода к новому этапу общественно-исторического развития, в котором лидерство принадлежит производителям новых технологий. «Эпоха господства индустрии на исходе. Впереди новая, информационная эра» [1]. Сегодня он явно отражён в государственной стратегии развития информационного общества на 2017-2030 годы. В число ключевых она включает задачи обеспечения лидерства российских технологий, импортозамещения в сфере аппаратного и программного обеспечения, подготовки квалифицированных кадров [2]. Актуальность импортозамещения многократно усиливается состоянием новой холодной войны, развёрнутой совокупным Западом против нашей страны. Проникновение информационных технологий во все сферы практической деятельности человека фактически ставит основы алгоритмического мышления и программирования на один уровень с базовыми математическими знаниями, необходимыми широкому кругу специалистов. Таким образом, задача обучения программированию непрофессионалов становится не менее важной, нежели подготовка профессиональных кадров, способных решать задачи импортозамещения и вывода российской ИТ-отрасли в мировые лидеры. Члены Правительства оценивают потребность в кадрах в сотни тысяч специалистов, и этот вызов непосредственно адресован российской системе ИТ-образования.

2. Оптимальная стартовая позиция

Если мы серьёзно подходим к задаче импортозамещения, «создания российского общесистемного и прикладного ПО» [2], то «российские» смартфоны, собранные на китайских конструкторах, или «российские» линуксы, созданные на основе свободного ПО, не являются положительными примерами её решения. Возражение по линукс-системам: современное ПО, в том числе и свободное, страдает проблемой чрезвычайной сложности, что делает сверхсложной и затратной задачу поиска потенциально вредоносных закладок, а также задачу его последующего самостоятельного сопровождения. Аппаратное обеспечение в этом вопросе уже давно догнало программное. Показательным примером внедрения «дополнительной функциональности» в оборудование является Intel

Management Engine, дающая возможность полностью скомпрометировать систему [3].

Никлаус Вирт, эксперт мирового уровня, ставит проблему избыточной сложности на первое место. При этом он отмечает, что для компаний при капитализме зарабатывание денег – основная цель, поэтому для них естественно не заботиться о прогрессе. Задача развития лежит на академической среде, и тьюринговский лауреат удручён тем, что она свою основную миссию фактически игнорирует. «Хотелось бы, чтобы университеты не только давали знания, но и учили людей критически мыслить и адекватно оценивать те или иные явления. Вместо этого они просто следуют за большими компаниями и слепо принимают их продукты как инструменты для работы и обучения» [4]. В статье «Долой «жирные» программы» Вирт указывает, что одной из причин громоздкости ПО является стремление производителя как можно скорее выдать продукт с целью захвата позиций на рынке [5].

Здесь нужно добавить, что информационные технологии в этом плане не выбиваются из общих закономерностей современной экономической системы. Никола Тесла, описывая в дневниках свою работу у Эдисона, отмечал, что последний пренебрегал качеством проектирования в угоду скорости выполнения заказа, потому что это был единственный критерий, доступный оценке ничего не понимающих в электротехнике заказчиков. «Чем скорее будет результат, тем прочнее деловая репутация Эдисона и всей его компании» [6]. Пример подобной погони за выгодой, препятствующей движению в основном направлении, даёт и сфера искусства. Это, например, видно из отзывов немецкой и английской прессы о советском фильме «Поликушка» (1919) по одноимённому рассказу Льва Толстого: «Как все, что идёт из России, и этот фильм обращается непосредственно к душе человека»; «Если бы кинематографическое искусство с самого начала не было отклонено коммерческими соображениями от своего правильного пути, если бы оно было подлинном народным искусством, тогда кинематография уже давно начала бы с того, что показано здесь» [7].

Эстетическое чувство, стремление к прекрасному вовсе не чуждо научной и инженерной деятельности. Так, Эдсгер Дейкстра говорил о своей личной уверенности в том, что очень часто наиболее привлекательное решение является одновременно и самым эффективным [8], а Никлаус Вирт о прямой связи между качеством, точностью и совершенством работы и моральным удовлетворением от неё [9]. Такой целостный подход к собственной деятельности близок к русской культурной традиции с её стремлением к Правде, которая не может быть ни уродлива, ни лжива, ни несправедлива, и имеет колоссальное воспитующее, образовательное значение. Вирт говорит об этом в своей тьюринговской лекции – «обучение путем подачи хорошего примера часто – самый эффективный, а иногда – и единственно возможный метод» [10].

Знаменитый Паскаль целенаправленно создавался не только как язык для системного и прикладного программирования, но и как обеспечивающий возможности математического доказательства правильности программ (структурное программирование) и обучения программированию. Последующая работа по его усовершенствованию учитывает опыт создания рабочих станций – Ли-

лит (1977-1981) и Церера (1984-1990), включающий разработку системного и прикладного ПО для них. Язык Модула-2, созданный на основе Паскаля и дополненный средствами модульного программирования, необходимыми для коллективной работы, был единым для написания всего ПО в проекте Лилит. Этот сознательно выбранный курс – использовать один язык – не только показал свою состоятельность, но и оказался решающим фактором успешного завершения проекта в краткий срок. Аналогичным образом для проекта Церера появился язык программирования Оберон, объединивший структурный и модульный подходы с объектно-ориентированным. Он стал проще своих предшественников Модулы-2 и Паскаля. Оберон Вирт называет самым большим своим достижением, подчёркивая, что он не просто проповедует важность простоты, но и применяет этот принцип на практике [4].

Создание персональной рабочей станции было ключевой целью проекта Лилит и передовым исследовательским направлением своего времени (коммерческие аналоги появились на рынке спустя пять лет после ввода в эксплуатацию первых машин «Лилит»). В контексте проекта новой рабочей станции Церера на первое место вышел проект её операционной системы Оберон с графическим (новым для того времени) интерфейсом пользователя. Основная цель – выделить ключевые принципы, чтобы не просто получить современную систему для научного и промышленного применения, но и компактную ясную конструкцию, которая может быть объяснена как в целом, так и во всех деталях в рамках одного учебника. Результат, не считая ввода в эксплуатацию новых рабочих станций с расширяемым (концепция компонентно-ориентированного программирования) комплектом основного системного и прикладного ПО, – книга средних размеров «Project Oberon. The Design of an Operating System and Compiler» (1992), с исчёрпывающим описанием системы, процесса её создания и исходными текстами программ.

Несмотря на заявление в интервью 2005 года о том, что плыть против течения стало очень тяжело [4], Вирт продолжает исследовательскую работу, не меняя направления движения, и в 2013 году выпускает второе издание книги – «Project Oberon. The Design of an Operating System, a Compiler, and a Computer». Один из основных мотивов – всё возрастающий интерес общественности к разработке небольших систем с нуля ради безопасности от вредоносных закладок, которые легко прятать в недрах существующих огромных и сверхсложных систем. Для обеспечения работоспособности системы (Церера и её микропроцессор за 30 лет морально устарели) книга дополнена полным описанием компьютера на языке описания аппаратуры Verilog. Аппаратное обеспечение – RISC-процессор и его окружение – создано Виртом с учениками и имеет простую, ясную конструкцию. Замена CISC-процессора NS32032 на RISC привела к серьёзному упрощению и прояснению полностью переписанных глав книги о компиляторе и загрузчике. Упрощающую ревизию прошёл и язык Оберон. [11] К полученному результату замечательно подходят слова Дейкстры о красоте эффективного решения, которые хорошо дополняются словами нашего классика Алексея Толстого о его поиске:

Правда всё та же! Средь мрака ненастного

Верьте чудесной звезде вдохновения,
Дружно гребите во имя прекрасного
Против течения!

Подробная история системы Оберон дана для того, чтобы явно указать на вложенный в её создание многолетний опыт специалиста мирового уровня в области информатики Никлауса Вирта и его учеников, объединяющий в себе и признанные наукой теоретические разработки, и практическую результативность, и образовательную деятельность. На этом мы основываем следующий тезис: свободно доступные исходные тексты аппаратного и программного обеспечения системы Оберон с детальным описанием процесса их создания с нуля являются оптимальной базой для подготовки отечественных ИТ-специалистов и решения задач импортозамещения.

3. «Информатика-21» и система Блэкбокс

Международный общественный научно-образовательный проект «Информатика-21» появился в 2002 году с отмеченной в начале задачей обучения программированию непрофессионалов – физиков, химиков, инженеров, лингвистов и т. д., которые всё более интенсивно применяют компьютеры в процессе своей деятельности. Возрастающая сложность решаемых ими задач с одной стороны говорит о необходимости освоения современных методов программирования, с другой предъявляет более жёсткие (нежели для ИТ-профессионалов) требования к инструментарию в плане его простоты и низкого порога вхождения. То же самое верно и для обучения школьников основам алгоритмического мышления.

Проект ставит целью консолидацию усилий специалистов науки, образования, промышленности и сферы информационных технологий для формирования общих базовых курсов программирования, начиная со средней школы и заканчивая третьим курсом университетов независимо от специализации. Преподавание основ ИТ в виде современных технологий и методов программирования должно дополнить единую общую систему преподавания основ математики в новой информационной эре.

В качестве единой технологической базы «Информатика-21» предлагает систему Блэкбокс, отталкиваясь от спецкурса «Введение в современное программирование» на физфаке МГУ (с февраля 2001 г.) и занятий со школьниками в лицее г. Троицк (с осени 2001 г.).

Система Блэкбокс – вариант системы Оберон, созданный учениками Вирта и адаптированный для работы в распространённых операционных системах (сегодня существуют сборки для Windows/Linux). Язык программирования системы – Компонентный Паскаль, современный наследник Паскаля по прямой, идущей через Оберон линии. Компонентный – подчёркивает ориентацию на соответствующий подход в программировании. Это очень гибкая, легко настраиваемая среда, расширяемая новыми компонентами, создаваемыми на основе уже существующих или с нуля. В сочетании с минималистичностью и простотой освоения она лучше других подходит для образовательных целей.

«Информатика-21» поддерживает сейчас три сборки Блэкбокс – школьную и университетскую, формируемые на основе базовой. Школьная содержит полное введение для учителя, русифицирована – меню, документация, сообщения компилятора об ошибках, ключевые слова. Словарь ключевых слов можно настроить на другой язык, возможность работы с оригинальной английской документацией и ключевыми словами сохранена. Включает исполнителя-черепашку, примеры решения задач, в т. ч. ЕГЭ.

В 2010-2012 гг. из печати вышло несколько книг, ориентированных на использование учебных сборок Блэкбокс. Это выполненные участниками проекта переводы книг Вирта – исправленный и усовершенствованный перевод книги «Алгоритмы и структуры данных» (решения задач включены в школьную сборку), учебник «Конструирование компиляторов», первое издание «Проекта Оберон». Также – оригинальные учебники по программированию Виталия Потопахина. Некоторые методические материалы по учебным курсам доступны на сайте проекта (http://www.inr.ac.ru/~info21/).

Применяется система Блэкбокс в российской науке и промышленности. В частности, для вычислений в области ядерной физики, биофизики, в атомной отрасли, при разработке беспилотных летательных аппаратов, для автоматизации в АПК (см. статью Ермакова И. Е. «ERSY CONTROL: ИМПОРТОЗАМЕЩАЮЩАЯ ПРОГРАММНАЯ ПЛАТФОРМА АСУТП. АВТОМАТИЗАЦИЯ КРУПНЫХ ОБЪЕКТОВ АПК» в данном сборнике). С 2014 года в Москве регулярно проходят семинары по обмену опытом [12].

Важно ещё раз подчеркнуть, что любая сборка, как и оригинальная система, может быть легко расширена и настроена учителем под любые нужды. На сайте проекта приведены экспериментальный вариант рисующей зверушки на кабардинском диалекте адыгского (черкесского) языка (пример настройки ключевых слов на национальный язык), бета-версия исполнителя «Робот». Чем шире будет активно практикующее сообщество, тем богаче будут общие возможности, – «Информатика-21» рада приветствовать новых участников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кургинян С.Е., Аутеншлюс Б.Р., Гончаров П.С., Громыко Ю.В., Сундиев И.Ю., Овчинский В.С. ПОСТПЕРЕСТРОЙКА: концептуальная модель развития нашего общества, политических партий и общественных организаций. – М.: Политиздат. – 1990. – 93 с.
2. Стратегия развития информационного общества в Российской Федерации на 2017-2030 годы. Утверждена Указом Президента Российской Федерации от 9 мая 2017 г. №203.
3. Нефёдова М. Эксперты Positive Technologies нашли способ частичного отключения Intel ME // URL: https://xakep.ru/2017/08/30/intel-me-hap/
4. Попов А., Самсонов Н. Эксперт мирового масштаба // Эксперт-Сибирь. – 2005. – №40. – с. 28-32.
5. Вирт Н. «Долой «жирные» программы». // Открытые системы. – 1996. – №06.
6. Дагаев Д.В. Сопрограммы и кооперативная многозадачность // Доклад на семинаре «День Оберона 2017» // URL: http://oberoncore.ru/oberonday/2017

7. Гращенкова И.Н. Кино Серебряного века. – М. – 2005. – 432 с.
8. NATO Software Engineering Conference 1969.
9. Пешио К. Никлаус Вирт о культуре разработки ПО. // Открытые системы. – 1998. – №01.
10. Вирт Н. От разработки языков программирования к конструированию компьютеров. // Пер. с англ. Левин Б. Я. // «Микропроцессорные средства и системы». – 1989. – №4.
11. Wirth N, Gutknecht J. Project Oberon. The Design of an Operating System, a Compiler, and a Computer. – 2013 // URL: https://www.inf.ethz.ch/personal/wirth/ProjectOberon/
12. ИА Красная Весна. В Москве прошел международный семинар «День Оберона 2017». // URL: http://rossaprimavera.ru/news/1b5ede06

УДК 53

ДЕЛЕНИЕ НА ЗОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО И АПЕРТУРНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

Б.Д. Цуканов, к.пед.н, доц.
Академия ФСО России
e-mail: *tsbd@yandex.ru*
И.В. Корогодина, к.пед.н.
Академия ФСО России
e-mail: *ekorogodin@yandex.ru*

Методология оценки и экспериментального измерения нормируемых параметров электромагнитных полей (ЭМП) радиотехнических объектов строится с учетом структуры поля, создаваемого антенной, и использует специальные понятия – ближнее и дальнее поле, ближняя и дальняя зоны излучателя. Изначально эти понятия использовались в электродинамике и теории антенн, в исследованиях и учебниках по электромагнитной совместимости, а позднее вошли в содержание учебных пособий и публикаций по электромагнитной безопасности, документы по организации мониторинга электромагнитной обстановки.

Ключевые слова: линейная и апертурная антенны, ближняя и дальняя зоны излучателя, критерии деления, область реактивного поля, модель трех зон.

Взаимодействие переменных ЭМП с веществом зависит от расстояния до источника поля – излучающей антенны. Все антенны удобно разделить на две большие группы: линейные и апертурные. Линейная антенна – тонкий металлический провод с изменяющимся током или узкая щель в металлической пластине, между краями которой создано переменное электрическое поле. Апертурная антенна имеет раскрыв – апертуру – поверхность, через которую излучается волна. Применяются также антенные решетки – сложные антенные системы из линейных или апертурных излучателей.

Деление ЭМП антенны на зоны основано на соотношении между расстоянием r от антенны до точки, в которой регистрируется сигнал, и длиной волны λ.

В сферической системе координат поле дипольного излучателя длиной $l << \lambda$, расположенного вдоль оси Z, с изменяющимся током I_0 обладает симметрией относительно оси Z, при этом магнитные силовые линии имеют форму концентрических окружностей с центрами на оси Z, а электрические силовые линии лежат в меридиональных плоскостях. Характеризуется такое поле векторами напряженностей $\vec{E}$ и $\vec{H}$, проекции которых E_r, E_θ, H_φ рассчитываются по формулам классической электродинамики и определяются следующими выражениями [1]:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{k^2 l I_0}{4\pi\omega\varepsilon\varepsilon_0 r}\left[\frac{1}{kr}\cos(\omega t - kr) + \left(\frac{1}{k^2 r^2} - 1\right)\sin(\omega t - kr)\right]\cos\theta \\ E_\theta &= \frac{k^2 l I_0}{4\pi\omega\varepsilon\varepsilon_0 r}\left[\frac{1}{kr}\cos(\omega t - kr) + \left(\frac{1}{k^2 r^2} - 1\right)\sin(\omega t - kr)\right]\sin\theta \\ H_\varphi &= \frac{k l I_0}{4\pi r}\left[\frac{1}{kr}\cos(\omega t - kr) - \cos(\omega t - kr)\right]\sin\theta \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Анализируя эти выражения, замечаем, что фазы колебаний E_r, E_θ, H_φ одинаковы в точках, равноудаленных от источника, однако у разных компонент поля эти фазы различны, и они по-разному зависят от расстояния r. Есть составляющие поля, значения которых обратно пропорциональны r, r^2 и r^3. Компоненты, пропорциональные $1/r^2$ и $1/r^3$ преобладают при малых значениях r, но при больших главную роль играют слагаемые, пропорциональные $1/r$. По этой причине пространство вокруг излучателя удобно разделить на области – зоны, где одна из компонент является преобладающей.

Критерии для деления пространства на зоны (рисунок 1) и определения границы между ними могут быть разными.

Самый простой способ – выбрать в качестве границы совокупность точек пространства, для которых значения составляющих, определяемых множителями $1/kr$ и $1/kr^2$ одинаковы.

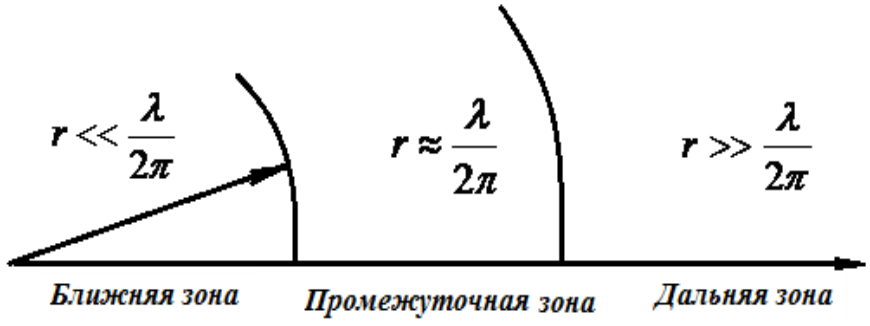


Рисунок 1 – Зоны ЭМП элементарного излучателя

Получаем выражение

$$\frac{1}{kr} = \frac{1}{k^2 r^2} \qquad \text{или} \qquad k \cdot r = 1.$$

Отсюда находим, что

$$r = \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}. \tag{2}$$

Получили критерий, который используют для деления пространства на две зоны:

$$\left.\begin{aligned} r \le \frac{\lambda}{2\pi} &- \text{ближняя зона}, \\ r > \frac{\lambda}{2\pi} &- \text{дальняя зона}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

или на три зоны:

$$\left.\begin{aligned} r << \frac{\lambda}{2\pi} &- \text{ближняя зона}, \\ r \approx \frac{\lambda}{2\pi} &- \text{промежуточная зона}, \\ r >> \frac{\lambda}{2\pi} &- \text{дальняя зона}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Существуют и другие подходы к делению пространства на зоны. В качестве границы зон можно принять расстояние, на котором волновое сопротивление перестает меняться и становится постоянным и равным волновому сопротивлению вакуума $\rho = 377$ Ом (рисунок 2).

В соответствии с этим будем рассматривать особенности ЭМП в ближней, промежуточной (переходной) и дальней зонах.

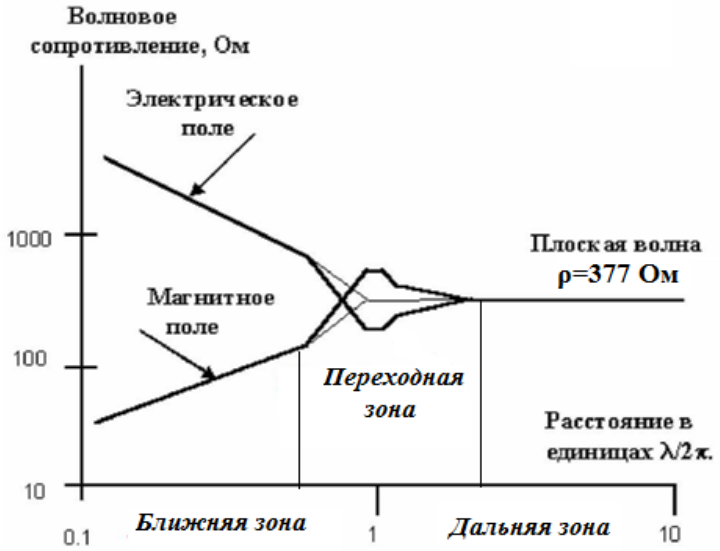


Рисунок 2 – Волновое сопротивление в разных зонах

Ближняя зона (зона индукции), где нет переноса энергии, нет распространения волны ($ППЭ_{\text{сред}} = 0$), а электрическая и магнитная составляющие ЭМП рассматриваются независимо. Существует в области $0 < r << \lambda/2\pi$. Встречаются также названия – область статического поля, область реактивного поля, квазистационарная область, зона Рэлея. Между электрическим и магнитным полями нет однозначной зависимости, поэтому измерение поля в ближней зоне ведется отдельно для электрической и магнитной составляющих. Как правило, по энергии и воздействию на окружающие тела одна из них преобладает над другой. Примерами, когда преобладает магнитная составляющая, служат источники поля в виде мощных трансформаторов или соленоидов. Электрическая составляющая преобладает над магнитной в высоковольтных конденсаторах. Такое поле называют реактивным, потому что имеет место передача энергии от излучателя к полю и обратно, но нет переноса энергии в пространстве.

Промежуточная зона (переходная зона). Границы зоны $r \approx \lambda/2\pi$. Применяются другие названия: ближнее радиационное поле, излучающее поле, область интерференции, область Френеля. ЭМП носит волновой характер, но бегущая волна еще не сформирована. Существует множество волновых потоков, которые могут усиливать друг друга в одних местах, и ослаблять в других, образуя интерференционные максимумы и минимумы (стоячие волны). Эти процессы могут возникать около источника ЭМП, а также около близких к источнику предметов, отражающих ЭМВ. Структура поля в промежуточной зоне сильно зависит от формы, размера и типа антенны. Основная характеристика зоны – суммарная плотность потоков энергии.

Дальняя зона (волновая зона, поле излучения) с границей $r >> \lambda/2\pi$. Величины E, H, $ППЭ$ взаимосвязаны и изменяются синфазно. $ППЭ_{\text{сред}} \neq 0$. При этом происходит перенос энергии, и потому характеристикой зоны излучения является интенсивность $I = ППЭ_{\text{сред}}$.

Выражения (4) используются, когда линейные размеры излучателя (антенны) имеет много меньше длины волны $l << \lambda$. Примером могут служить антенны мобильных телефонов. Если же в качестве излучателя применяется антенна, максимальный линейный размер которой соизмерим с длиной волны ($L = l_{\max}$) или больше ($L \geq \lambda$), то используют неравенства:

$$\left.\begin{aligned} & r \leq \frac{L^2}{2\lambda} - \text{ближняя зона}, \\ & \frac{L^2}{2\lambda} < r < \frac{2L^2}{\lambda} - \text{промежуточная зона}, \\ & r > \frac{2L^2}{\lambda} - \text{дальняя зона}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Когда значения границ зон, рассчитанные по формулам (4) и (5), заметно отличаются, то выбирают большее из них.

Соотношения (5) используются также для апертурных антенн, поскольку применяются они в диапазонах, где длина волны меньше линейных размеров антенны [2].

В ближней зоне (зоне индукции) ЭМВ еще не сформирована, нет однозначной зависимости между ее электрической (E) и магнитной (H) составляющими ($\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E \neq \sqrt{\mu\mu_0}H$), их колебания смещены по фазе на $\pi/2$. При этом на вещество может воздействовать только электрическое или только магнитное поле либо оба поля одновременно с разной интенсивностью. Для оценки биологического действия ЭМП в ближней зоне используются средние квадратичные значения напряженностей E и H.

При удалении от антенны интенсивность индуктивной, и особенно электростатической составляющих уменьшается с разной скоростью, и на уровне границы $r = \lambda/2\pi$ влияние электростатической, индуктивной и излучающей компонент поля становится одинаковым – переход в промежуточную зону. Поле в этой зоне называют излучающим или ближним волновым. Наличие потоков энергии позволяет измерять интенсивность $I = ППЭ_{\text{сред}}$. Однако при малых размерах объекта ($D << \lambda$), электрическое и магнитное поля воздействуют на объект, возбуждая в нем токи независимо друг от друга. Потому для оценки нагревания объекта, надо найти токи, возбуждаемые электрическим и магнитным полями отдельно, а затем по суммарному току рассчитать выделяемую в объекте теплоту.

На расстоянии $r >> \lambda/2\pi$ от антенны – в дальней (волновой) зоне значение имеет только переменное ЭМП в виде классической сферической волны, которая распространяется во все стороны от источника ЭМП. В такой волне амплитуды полей убывают по гиперболическому закону ($H_0 \sim 1/r$, $E_0 \sim 1/r$), по направлению векторы напряженности электрического и магнитного полей перпендикулярны друг другу и образуют правую тройку с вектором скорости распространения волны, а их модули связаны соотношением ($\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$).

Распространение ЭМВ сопровождается переносом энергии ЭМП в направлении распространения волн, а их тепловое и специфическое воздействие на живые вещества оценивается по плотности потока энергии $ППЭ_{\text{сред}}$. В системах радиосвязи прием электромагнитных колебаний происходит на расстояниях $r >> \lambda$, т. е. в дальней зоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муромцев Ю.Т. Электродинамика и распространение радиоволн: учебное пособие / Д.Ю. Муромцев, Ю.Т. Зырянов, П.А. Федюнин и др. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012– 200 с.
2. Маслов О.Н. Электромагнитная совместимость и безопасность инфокоммуникационных систем. Учебное пособие / О.Н. Маслов. – Самара: ООО «Офорт», 2009. – 386 с.

УДК 53

К ВОПРОСУ О ПРОФЕССИОНАЛИЗАЦИИ ФИЗИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Б.Д. Цуканов, к.пед.н., доц.
Академия ФСО России
e-mail: *tsbd@yandex.ru*
И.В. Корогодина, к.пед.н.
Академия ФСО России
e-mail: *ekorogodin@yandex.ru*
И.Е. Корогодин
Академия ФСО России

Современные задачи, стоящие перед высшим профессиональным образованием, требуют пересмотра подходов преподавания физики в инженерном вузе. В рамках компетентностного подхода изменяется отношение к оценке результатов обучения и направленность на освоение практико-ориентированных видов познавательной деятельности. Выстраивание преподавания курса физики на развитие профессиональных компетенций образует основу формирования готовности будущих выпускников к освоению вузовских образовательных программ.

Ключевые слова: профессиональная подготовка, профессионально-ориентированные задачи, готовность к профессиональной деятельности, готовность к освоению физических принципов защиты информации.

Одной из важнейших задач педагогики высшей школы является выстраивание такой системы профессиональной подготовки, в которой приобретаемые студентами знания, умения и навыки служат главной цели формирования у обучающихся готовности к их применению в решении профессионально-ориентированных задач, которая рассматривается как система, имеющая трехкомпонентную структуру. Обычно в ее составе выделяются мотивационный, теоретический и практический компоненты (А.К. Маркова, Г.А. Бокарева, Л.А. Кандыбович, М.И. Дьяченко, Л.Г. Лаптев).

Мотивационный компонент строится на положительном и обязательно активном отношении обучающихся к выбранной деятельности и формирует убеждение в важности осуществления этой деятельности и значимости ее результатов. Теоретический компонент готовности требует наличия определенных стандартами деятельности профессиональных знаний. Практический компонент отражает направленность на реализацию соответствующих характеристик в процессуально-деятельностной форме, т. е. предусматривает овладение будущими специалистами на основе теоретических знаний общепрофессиональными и специальными профессиональными компетенциями.

При формировании готовности к выполнению профессиональной деятельности специалистов в сфере инфокоммуникационных систем особую роль играют знания о физических принципах защиты информации (ФПЗИ). Действительно, при интенсивном развитии техники связи расширяются масштабы использования новых физических эффектов и явлений. Возникает потребность в пересмотре подходов на преподавание курса физики технического вуза, которое должно гарантировать получение студентами системы фундаментальных знаний

и быть направленным на практико-ориентированные виды их познавательной деятельности, формирующие профессиональные компетенции. Этой задаче отвечает дидактическая модель формирования готовности обучающихся к освоению ФПЗИ (рисунок 1).

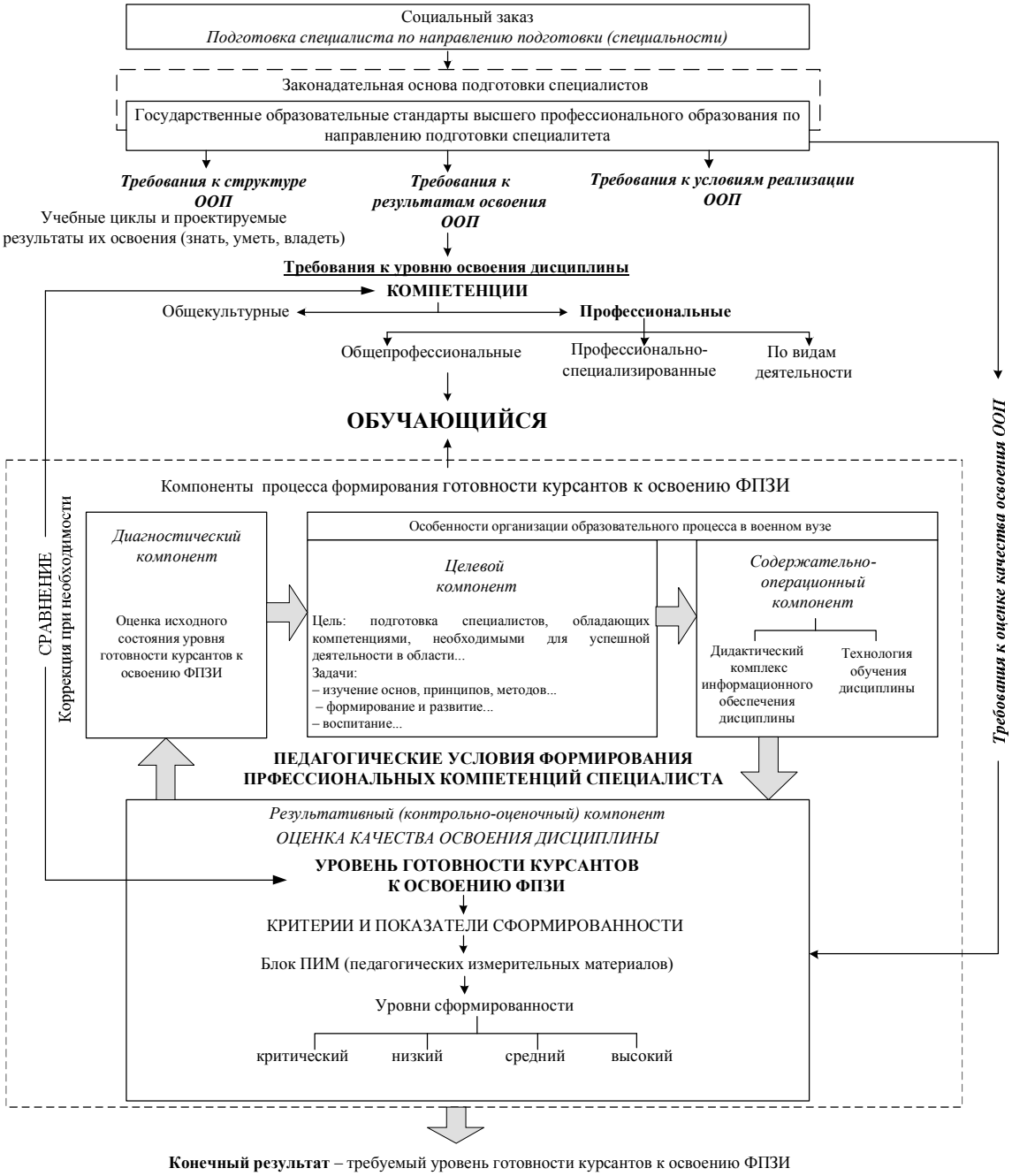


Рисунок 1 – Дидактическая модель формирования готовности обучающихся к освоению ФПЗИ

Иерархическое построение и взаимосвязи структурных элементов дидактической модели показывают процесс формирования готовности курсантов к освоению ФПЗИ, позволяющий на основе комплекса требований осуществить начальную диагностику, постановку целей, определение содержательно-операционного аппарата и проверку на выходе соответствия результатов начальным условиям, осуществляя при необходимости коррекцию на любом из этапов обучения.

Важным элементом представленной модели является профессионализация физического образования, которая может быть реализована в ходе выполнения творческих заданий, которые всегда вызывают живой интерес у обучающихся. Так, в ходе изложения учебного материала темы "Взаимодействие электромагнитных волн с веществом" важно подчеркнуть, что основной характеристикой, которая влияет на качество передаваемой информации, является окружающая среда. С целью ограничения доступа к передаваемым сведениям и увеличением скорости передачи данных целесообразным будет использование оптического волокна, которое представляет собой волновод круглого сечения, изготовленного из диэлектрических материалов, прозрачных для волн оптического диапазона. Общая длина оптических волокон в линиях связи исчисляется сотнями миллионов километров, а их диаметр составляет всего лишь несколько микрометров. Свет распространяет к них благодаря явлениям полного внутреннего отражения и рефракции.

Для демонстрации принципа действия ступенчатого оптоволокна нужно использовать световод, имеющий достаточно большие размеры, в котором визуально можно наблюдать световые лучи за счет рассеяния на неоднородностях структуры прозрачного материала (рисунок 2).

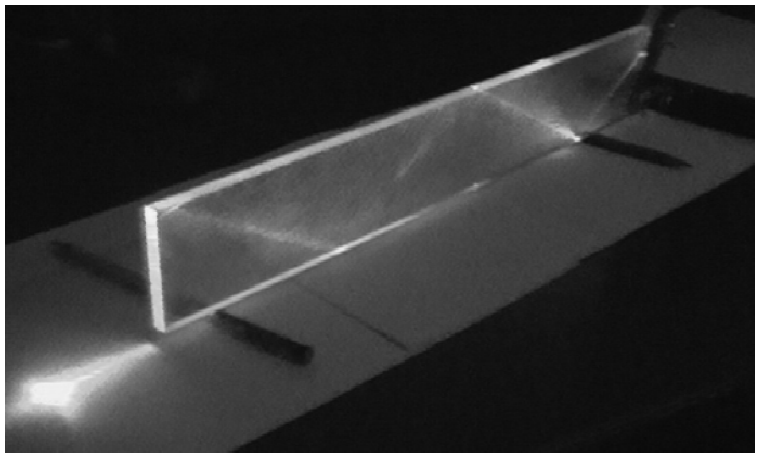


Рисунок 2 – Модель световода с включенным лазером

Опыт 1. Наблюдение формы лазерного луча в ступенчатом световоде и передачи энергии по световоду. Лазерный луч вводится в световод через торец. Наблюдается отражение в точках падения лучей и яркое пятно на выходе.

Опыт 2. Определение граничных условий. Если в точке падения приложить ватку, смоченную водой, то граничные условия изменятся: $i_{пр} = 66{,}9^{o}$ (прежнее значение $i_{пр} = 43{,}6^{o}$). Теперь условие полного отражения не выполняется, лазерный луч проникает из полистирола в воду, а затем в воздух – ватка ярко освещена.

Опыт 3. Оценка возможности утечки информационного сигнала из оптоволокна. На верхнюю кромку световода устанавливается такой же световод. Если граничные кромки сухие, условие полного отражения выполняется. При нанесении воды наблюдаем переход части луча во второй световод – получается безразрывное ответвление информационного сигнала.

Установка для демонстрации принципа действия ступенчатого оптоволокна содержит такие элементы новизны, как:

– возможность наблюдения хода лучей в прозрачном твердом веществе;
– быстрая замена источника света (лазера);
– наблюдаются явления, используемые в профессиональной технике, но недоступные для визуального восприятия.

Изготовление и эксплуатация моделей реальных устройств имеет важное значение для осознания обучающихся роли фундаментальных знаний по физике в успешном освоении принципов функционирования систем связи.

Готовность к применению естественнонаучных знаний в ходе освоения физических принципов защиты информации выступает как цель и результат фундаментальной подготовки специалистов в сфере инфокоммуникационных систем.

Образовательный процесс, в котором возникает естественная преемственность в освоении курса физики и специальных дисциплин, является важным средством в подготовке квалифицированного профессионала в собласти защиты информации. Увеличение профессиональной направленности в изложении традиционных вопросов курса физики выступает одним из основных условием целенаправленной системы по подготовке специалиста в сфере инфокоммуникационных систем.

О ПРИНЦИПАХ ПРЕПОДАВАНИЯ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХ КУРСОВ СЛУШАТЕЛЯМ ГУМАНИТАРНЫХ И МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫХ ПРОФИЛЕЙ ПОДГОТОВКИ

Г. А. Черных, к.ф.-м.н.
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: *german.ch@chgerman.com*

Суммируется опыт автора в чтении курсов естественно-научного характера на факультете свободных искусств и наук СПбГУ. С использованием примеров перечислены ключевые факторы, влияющие на эффективность обучения студентов гуманитарных и междисциплинарных профилей подготовки.

Ключевые слова: принципы преподавания, междисциплинарный, гуманитарный, естественно-научный

Автор настоящей работы имеет достаточно большой опыт разработки и чтения курсов естественно-научной направленности. Научная и педагогическая деятельность в начале карьеры была связана с физическим факультетом, и далее проводилась преимущественно на факультете свободных искусств и наук [1] Санкт-Петербургского государственного университета. В рамках образовательной программы факультета сосуществуют как сугубо гуманитарные, так и небольшое количество естественно-научных профилей подготовки. Исключительной особенностью факультета в целом является принцип либерального образования, позволяющий, в частности, студентам самим формировать часть пакета посещаемых курсов. Ввиду специфики факультета, а также некоторых объективных особенностей, связанных с набором абитуриентов, подавляющая часть студентов имеет низкий уровень подготовки по естественно-научным школьным дисциплинам, однако имеются и положительные моменты. В целом аудиторию можно охарактеризовать следующими качествами:

- слабая физико-математическая подготовка;
- низкий уровень заинтересованности в понимании математического формализма;
- высокая мотивация к освоению материала;
- неплохой уровень общей культуры.

Часто единственной мотивацией к освоению курса является получение положительной оценки, что наблюдается на обязательных не профильных курсах, удовлетворяющих так называемому требованию широты образования. В качестве примера можно привести читаемый автором курс «Концепции современного естествознания. Мир глазами физика», посещаемый преимущественно студентами-гуманитариями. В подобных случаях успехом уже можно считать проявление интереса к материалу, курса.

С учетом описанной выше специфики аудитории ключевыми факторами, кардинально влияющими на восприимчивость студентов к материалу являются:

- раскрытие фундаментальной роли математики в естественно-научном познании;

- применение визуализационных материалов: компьютерных моделей, видео, презентаций с анимацией и пр.;
- разносторонний взгляд на объясняемые сущности;
- образная (метафорическая) интерпретация материла;
- использование отсылок к философским концепциям;
- необычный, запоминающийся взгляд на известный материал;
- использование материала, не относящегося напрямую к курсу, но имеющего концептуальный характер.

Поскольку все естественные науки, в той или иной степени, используют математику, то даже в рамках курсов, обходящихся без математических выражений, важно повысить значимость математики в глазах студентов именно как фундаментальной области человеческого знания. По мнению автора (в качестве единомышленника можно привести Роджера Пенроуза [2]), математика является не только языком, инструментом или так называемой «царицей всех наук», но, образно говоря, представляет собой метафизику, как не только создаваемую в умах, но и открываемую область знания. Кроме того, открываемая «объективная реальность» математики неразрывно связана с логическими способностями человека, как познающего (творящего) мир субъекта. К примеру, сенсационным для слушателей фактом является теорема Геделя о неполноте символических логик и следствия из нее, по-сути, являющиеся поворотным пунктом в формировании мировоззрения.

Главным принципом преподавания следует считать неформальный подход к объяснению различного рода объектов и понятий, использование любых способов объяснения, моделей, сравнений и пр., но не противоречащих излагаемой сути, а наоборот, подчеркивающих и дополняющих последнюю. Важную роль здесь играет объяснение мотивации и логики людей, открывших (придумавших) ту или иную сущность, необходимость или «неизбежность» появления именно конкретного изучаемого объекта. Даже элементарные понятия часто требуют подобного объяснения. К примеру, привычная формула скорости прямолинейного равномерного движения, появляющаяся в начальных классах «as is», вызывает интерес, если попросить студента придумать более простой критерий быстроты движения.

Визуализация излагаемого материала, не являясь самоцелью, часто бывает единственным эффективным средством обратить внимание на важность или суть некоторого явления, помогает снять психологический барьер восприятия, обусловленный имеющимся страхом, недооценкой важности изучаемого объекта и пр. В распоряжении автора имеется комплекс специально разработанных им демонстрационных компьютерных моделей. В качестве примера можно привести модель маятника с возможностью включения (отключения) диссипации и энергетической подпитки, обращения времени и др. События, сменяющие

устойчивое поведением маятника после операции обращения времени, как правило, вызывают «культурный шок» и шлейф последующих обсуждений. Другим примером является теория собственных значений и векторов матриц, а также особых точек динамических систем. Формальных определений соответствующих понятий, даже при наличии необходимых пояснений, часто недостаточно для охвата студентом картины в целом, которая легко возникает после наглядных экспериментов с деформацией пространства посредством матриц.

Правильное разностороннее объяснение материла, отражающее суть объекта или явления, автор считает обязательным. При этом существуют области знания с чрезвычайной концентрацией математического формализма, обилием терминологии. Если, к примеру, теория алгоритмов и рекурсивных функций допускает изящную интерпретацию практически без выхода за рамки собственно предмета, то теория групп кажется весьма искусственной. В последнем случае автор считает допустимым применение различных метафорических конструкций с возможной претензией на философское обоснование, которые позволили бы взглянуть студенту на изучаемые объекты другими глазами. В частности, определение группы можно интерпретировать и обосновать своего рода началом «творения мира». Студентам предлагается мысленный эксперимент по конструированию простейшего «мира». Очень быстро появляется осознание того, что «мир» должен состоять из объектов и связей. Появляется концепция множества и закона композиции, как простейшей связи, не приводящей к появлению объектов новой природы. Возникает понимание о простейших типах действия (однозначности, бездействия, обратного действия), что собственно, и приводит к понятию группы. Иногда лишь небольшое образное сравнение может значительно повысить интерес к изучаемому объекту. Так, например, одно из созданных автором видео об аттракторе Лоренца [3, 4] (аттрактор Лоренца в качестве черной дыры) удостоилось специального приза «Роскосмос» в рамках российской части международного конкурса научной фотографии ESPC-2015 [5]. Подобная практика, очевидно, таит опасность ухода в некоторую степень псевдонаучности, но поступая разумно и соблюдая чувство меры, можно вывести слушателей на качественно новый уровень восприятия и мотивации к освоению материала.

Важнейшем фактором, как подчеркивалось выше, является неформальный подход, что на практике может выражаться в демонстрации необычных примеров. Однако, необходимо подчеркнуть, что «необычность» должна проявляться не в демонстрации шоу, а в экспериментах, нацеленных на показ глубинной сути явления. Формулировка теоремы Ляпунова (о ляпуновских показателях), к примеру, традиционно тяжела для восприятия. Но демонстрация компьютерной модели, позволяющей наблюдать деформацию «микроскопического» сферического фазового объема и превращения его в эллипсоид значительно упрощает задачу преподавателя. Или, скажем, в вышеупомянутом примере с матрицами имеет смысл в начале работать с вещественными собственными значениями,

что в общем случае приводит к растяжениям и сжатиям вдоль двух направлений на плоскости, а потом задать вопрос о том, каковы будут деформации в случае мнимых или комплексных собственных значений. Осознание результата студентом, который до этого к комплексным числам относился, как некоторой фикции (странной выдумке математиков), может привести к некоторому переосмыслению, появлению интереса.

Использование материала, непосредственно не относящегося к содержанию курса, но имеющего важное концептуальное значение, не только привлекает внимание слушателей, но и помогает формировать целостную картину объектов и явлений, выйти за рамки формализма. В качестве примера можно привести модель клеточного автомата «игра жизнь», демонстрируемую автором в рамках курса «практикум по MATLAB». Незначительными вариациями правил в этой игре можно получить либо хаотическое поведение, либо стагнацию после заполнения всего поля клеточными структурами. Два противоположных типа поведения в данной модели определяются жизнеспособностью объекта, либо в отрыве от системы, либо в тесном окружении, что в общем случае (в других моделях сложных систем, физических системах, обществе) может быть описано парами терминов: хаос, порядок; анархия, тоталитаризм, и т.п.

Сформулированные в настоящей работе принципы образуют неразрывный комплекс условий успешности естественно-научных курсов, читаемых студентам гуманитарных и междисциплинарных профилей подготовки, где творческая активная позиция самого преподавателя является решающим фактором. Безусловно, универсальных рецептов для построения конкретных примеров не существует, что должно мотивировать преподавателя к самообразованию, направленному на расширение доступной области знания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Факультет свободных искусств и наук СПбГУ. // [Электронный ресурс]. URL: http://artesliberales.spbu.ru (дата обращения: 29.10.2017).
2. Roger Penrose. // [Электронный ресурс]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Roger_Penrose (дата обращения: 29.10.2017).
3. Lorentz Chaos. // [Электронный ресурс]. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lorenz_chaos_1.ogv (дата обращения: 29.10.2017).
4. Аттрактор Лоренца в качестве черной дыры. // [Электронный ресурс]. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lorentz_Chaos_as_black_hole.ogv (дата обращения: 29.10.2017).
5. Европейский конкурс научных фотографий 2015 // [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikimedia.org/wiki/Европейский_конкурс_научных_фотографий_2015. (дата обращения: 29.10.2017).

О МЕТОДИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ ПРОВЕДЕНИЯ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ИНФОРМАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ»

Ю.В. Чижикова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *detkovayv@mail.ru*

Ключевые слова: методика обучения, информационная безопасность, дидактические приемы.

В современных образовательных стандартах высшего образования многих направлений подготовки присутствуют общепрофессиональные компетенции связанные с информационной безопасностью. Например, компетенция ОПК-2 (способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности) стандарта ФГОС ВО направления подготовки 01.03.01 Математика. Поэтому дисциплина «Информационная безопасность» входит в учебные планы многих направлений подготовки таких укрупненных групп как 010000, 020000, 090000.

Преподавание данной дисциплины сопряжено с определенными трудностями, связанными с тем, что некоторые разделы и темы дисциплины требуют специфических технических и юридических знаний, которыми студенты не обладают в полной мере. Это может быть связано, как с преподаванием дисциплины на ранних курсах, так и с профилем направлений, которые не подразумевают углубленное изучение определенных тем.

Как и многие дисциплины, «Информационная безопасность» предполагает определенное количество лекционных, практических и/или лабораторных занятий.

Теоретического материала по теме информационной безопасности, или, например, защиты информации достаточно много. Книги, учебные пособия и статьи, хорошо описывают не только тему в целом, но и подробно и глубоко рассматривают ее отдельные разделы, например, такие как: безопасность в компьютерных сетях, криптография, межсетевые экраны и др. Таким образом, можно сказать, что недостатка в теоретическом материале и доступе к нему не возникает.

Однако, достаточно остро, стоит проблема технического и методического сопровождения лабораторных занятий по дисциплине. В связи с чем, многие рабочие программы по данному предмету предусматривают только практические занятия, а имеющийся лабораторный практикум зачастую сводится лишь к рассмотрению сервиса шифрование и не затрагивает большинство других программно-технических сервисов безопасности.

Рассмотрим возможные пути решения сложившейся ситуации. Лабораторные и практические работы призваны на практике закреплять знания полученные в рамках изучения теоретического материала. Поэтому приведем мето-

дику проведения лекционной и практической/лабораторной части дисциплины отдельно. Первая часть статьи будет посвящена примерной тематике разделов дисциплины и методическим рекомендациям по ведению лекций. Содержание и пути решения проблемы проведения лабораторных работ будут рассмотрены во второй части статьи.

Как уже было отмечено ранее, недостатка в методической литературе по предмету не возникает. При этом, можно выделить центральную книгу, которую можно встретить в основе многих пособий по информационной безопасности. Это книга «Основы информационной безопасности» автора В.А. Галатенко. Особенно хорошо, по мнению автора статьи, в ней описаны темы, затрагивающие законодательный, административный и процедурный уровни информационной безопасности.

Приведем примерные разделы и темы, которые можно рассмотреть в рамках дисциплины.

Раздел 1. Основные понятия информационной безопасности. Темы раздела: введение; определение информационной безопасности; составляющие информационной безопасности; угрозы информационной безопасности; неформальная модель нарушителя; меры противодействия угрозам безопасности.

Раздел 2. Законодательный уровень информационной безопасности.

Раздел 3. Административный уровень информационной безопасности. Темы раздела: политика безопасности; программа безопасности.

Раздел 4. Процедурный уровень информационной безопасности.

Раздел 5. Программно-технический уровень информационной безопасности. Темы раздела: идентификация и аутентификация; управление доступом; протоколирование и аудит; шифрование; контроль целостности; анализ защищенности; экранирование; тунелирование.

Рассмотрим приведенные разделы и темы подробнее, указав некоторые рекомендации, замечания и советы.

Определений информационной безопасности в теоретических источника можно найти достаточно много, как в самом широком, так и в более узком смысле. Но, самым емки, и по сути отражающим содержание предмета, можно назвать следующее определение. Информационная безопасность – защищенность информации и поддерживающей инфраструктуры от случайных или преднамеренных воздействий естественного или искусственного характера, которые могут нанести неприемлемый ущерб субъектам информационных отношений. Таким образом, правильный подход к проблемам информационной безопасности начинается с выявления субъектов информационных отношений и интересов этих субъектов в информационной сфере [1].

Угрозы информационной безопасности рекомендуется рассматривать с точки зрения их классификации по составляющим информационной безопасности: угрозы целостности, угрозы доступности, угрозы конфиденциальности. Перед рассмотрением перечня типовых угроз, можно попросить студентов назвать топ 5 самых распространенных, по их мнению, угроз с точки зрения частоты реализации и размеров нанесенного ущерба. Это позволит оживить аудиторию и привлечь ее внимание к рассматриваемой теме. Тема угроз рекоменду-

ется как одна из возможных для проведения занятие в интерактивной форме, такой как, вопрос - ответ, так как студенты явно сталкивались как минимум с одной из угроз на практике и имеют свой личный опыт в рамках данной темы. В данной теме акцентируется внимание на том, что угрозы, как и все в информационной безопасности, зависят от интересов субъектов информационных отношений (и от того, какой ущерб является для них неприемлемым). Перечень угроз, оценки вероятности их реализации, а также модель нарушителя служат основой для анализа риска и формулирования требований к системе защиты. [1]

В теме меры противодействия угрозам безопасности приводятся четыре основных уровня обеспечение информационной безопасности: законодательный, административный, процедурный и программно-технический. В данной теме акцентируется внимание на том, что обеспечение информационной безопасности это задача комплексная, основанная на применении мер каждого уровня, не считая какой либо из них приоритетным или лишним. Каждый необходим и каждый выполняет свой круг задач.

Дальнейший материал можно рассматривать в рамках перечисленных уровней защиты информационной безопасности.

На законодательном уровне рекомендуется рассмотреть следующие законы и нормативно-правовые акты. В рамках нормативных актов общего назначения: конституция РФ, гражданский и уголовный кодексы РФ, закон о государственной тайне. Закон «Об информации, информационных технологиях и о защите информации», который можно назвать центральным среди российских законов, затрагивающих вопросы информационной безопасности (статья 16). Закон «О персональных данных», с ним мы сталкиваемся во многих областях нашей жизни, везде, где требуется обработка наших персональных данных. Закон, в частности, формулирует требования по их защите (статья 19). Закон «Об электронной подписи». В качестве практического закрепления материала можно предложить студентам получить сертификат электронной цифровой подписи. Практическое использование электронной подписи можно продемонстрировать на примере сайта госуслуг. Для направлений подготовки связанных с разработкой программного обеспечения, в раздел рекомендуется внести тему защиты авторского права на программные продукты.

В рамках законодательного уровня обязательно рассмотрение темы стандартов информационной безопасности. Студенты должны различать оценочные стандарты и спецификации. В качестве примера оценочного стандарты рекомендуется рассмотреть международный оценочный стандарт «Общие критерии», принятый в РФ в качестве ГОСТа. Тема будет одной из самых сложных для восприятия, поэтому желательно вооружиться наглядным материалом.

Для административного уровня центральными являются понятия политики и программы безопасности. Под политикой безопасности понимается набор документированных решений принимаемых руководством организации. Рекомендуется привести типовую структуру документа политики безопасности. Закрепление данного материала следует также провести в рамках практических занятий. Например, изучение различных примеров документов политик безопасности, а затем разработка собственной политики для верхнего и среднего

уровней. В связи со сложностью выполняемой работы ее можно проводить в рамках малых групп, что также является формой интерактивной работы студентов.

На процедурном уровне информационной безопасности выделяют следующие классы мер: управление персоналом, физическая защита, поддержание работоспособности, реагирование на нарушение режима безопасности, планирование восстановительных работ. Для данного уровня необходимо отметить важность ежедневных, рутинных мероприятий, направленных на поддержание работоспособности систем [1].

Программно-технический уровень является самым большим и занимает практически половину лекционного материла. Центральное понятие уровня – сервис безопасности. Фактически каждый сервис можно рассматривать как самостоятельную тему раздела.

При рассмотрении сервиса идентификация и аутентификация можно выделить парольную аутентификацию, рассмотрев многоразовые и одноразовые пароли, а также аутентификацию с помощью биометрических данных. Парольная аутентификация самая знакомая с практической точки зрения тема для студентов, и этим необходимо пользоваться. Рассмотрение темы можно провесит в формате интерактивного занятия (вопрос-ответ), максимально задействовав аудиторию. Надежность парольной защиты определяется требованиями, предъявляемыми к паролям. Все требования представляют собой средство защиты от определенного способа взлома пароля. Лекция будет более интересной и информационной если требования к паролям будут выводится из определенного способа атаки на пароль.[2] Например, из атаки полный перебор пароля вытекает требование задания минимальной длины безопасного пароля. Для одноразовых паролей желательно рассмотреть основные алгоритмы их формирования и способы доставки. Здесь у студентов также наблюдается практический опыт, а следовательно, при рассмотрении вопроса, также можно будет задействовать аудиторию. Биометрическая аутентификация все больше входит в нашу жизнь, становится доступной и уже не является чем-то фантастическим.

В рамках сервиса управления доступом рекомендуется рассмотреть дискреционную, мандатную (Белла-ЛаПадуля) и ролевую модели доступа, а также средства разграничения доступа.

В теме протоколирование и аудит следует отметить, что зачастую сервис от атак не защищает, но предоставляет средства для последующего разбора ситуации, а также является мощным сдерживающим фактором. Обнаружение попытки нарушения информационной безопасности и предоставление средств для автоматического реагирования на нее – функция активного.

Сервис шифрование не может обойтись без упоминание более общей науки криптографии. Криптография предоставляет средства для разных сервисов безопасности, таких как: шифрование, аутентификация, контроль целостности, технологии электронной цифровой подписи.

Сервис анализа защищенности предназначен для выявления уязвимых мест с целью их оперативной ликвидации. Таким образом, большую и важную тему антивирусной защиты можно рассмотреть в рамках данного сервиса. Это

также одна из тем курса, в которой студенты обладают собственным практическим опытом.

При рассмотрении сервиса экранирование важно отметить, что экран – это средство разграничения доступа клиентов из одного множества к серверам из другого множества, а задача экранирования формулируется как защита внутренней области от, потенциально враждебной, внешней. При этом межсетевые экранные являются самым распространенным средством экранирования, и на их рассмотрение отводится большая часть темы.

При рассмотрении сервиса тунелирование важно отметить, что его суть состоит в том, чтобы «упаковать» передаваемую порцию данных, вместе со служебными полями, в новый «конверт» для передачи ее в среде потенциально враждебной или изначально не пригодной. Виртуальные частные сети (VPN) являются самым распространенным средством сервиса тунелирование, и на их рассмотрение отводится большая часть темы.

В завершении раздала программно-технического уровня информационной безопасности следует отметить что, надежную защиту можно сформировать расположив сервисы безопасности в комплексную эшелонированную защиту. Поможет в этом сервис управление, который можно отнести к числу инфраструктурных сервисов, обеспечивающих нормальную работу компонентов и средств безопасности.

Примерный практический и лабораторный практикум, позволяющий закрепить теоретический материал указанных разделов и тем курса, будет рассмотрен во второй части статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галатенко В.А. Основы информационной безопасности – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ). – 2016. – 266 с.
2. Амелин Р.В. Информационная безопасность. Электронный учебник. – URL: http://nto.immpu.sgu.ru/system/files/3/__77037.pdf

УДК 372.851

ОБЕСПЕЧЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ В СИСТЕМЕ ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ[1]

С.В. Щербатых, д.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»
e-mail: *shcherserg@mail.ru*
К.Г. Лыкова
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»
e-mail: *ksli1024@mail.ru*

В статье рассматриваются современные тенденции реализации непрерывности в программах школьного курса математики в условиях реформирования и модернизации системы образования. Делается вывод о том, что непрерывное образование большей частью базируется на современных информационных технологиях.

Ключевые слова: непрерывность образования, преемственность, информационные ресурсы, информационные технологии, школьный курс математики.

Информационное общество переживает период стремительного трансформирования большинства сфер жизни общества, динамичного развития потока всевозможной информации, создания ранее неизвестных научных направлений и течений, изменения общенаучных приоритетов и постепенного обновления средств информационных технологий.

В образовании ярко прослеживается тенденция, в связи с которой существенно повышается ценность человеческого капитала, продуктивность и эффективность учебного процесса, что в свою очередь приводит к усилению важности своевременной и качественной подготовки будущих выпускников школ с учетом соблюдения системой непрерывного образования преемственности, открытости и доступности обучения.

Основополагающим положением в государственной образовательной политики РФ выступает принцип непрерывности обучения, характеризующийся устойчивостью, стремительностью и высоким уровнем адаптивности за счет активной сознательной учебной деятельности обучающихся, направленной на получение знаний, умений, их практическое применение, развитие качественно-полезных способностей в процессе будущего профессионального становления как конкурентоспособной личности, востребованной в обществе [4].

Согласно Федеральному закону «Об образовании в РФ» создаются необходимые условия не только для непрерывного образования на всех ступенях обучения, но и для постоянного расширения научных знаний, повышения качества образования, его инновационности, совершенствования организационных механизмов и инфраструктур, отвечающих за равною долю доступности обра-

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (отделение гуманитарных и общественных наук). Проект 17-36-01004 «Теоретико-методические основы реализации непрерывности и преемственности в развитии стохастической линии школьного курса математики в русле идей системно-деятельностного подхода».

зовательных услуг всем желающим [4]. Постоянное обновление научных знаний ставит перед системой образования задачу установления стратегии развития личности школьника в современных экономических, социально-культурных условиях, формирования потребности к приобретению новых знаний [6, с. 5].

Проблемы непрерывного образования продолжительное время находятся в центре научных дискуссий в связи с тем, что [5]:

- нынешнее информационное общество характеризуется как «общество, базирующееся именно на знаниях»: знания, спрос на их постоянное расширение, умения их находить и применять в разрешении конкретной ситуации, вот решающие факторы, определяющие не только конкурентоспособность выпускника, но и эффективность всего рынка труда;
- нестабильная социально-экономическая среда, предполагающая от человека навыки быстрой адаптации в стремительно изменяющихся условиях социума.

Система непрерывного образования представляет собой целостный процесс обучения, отвечающий за поступательный характер становления индивидуального потенциала обучающегося и комплексного обогащения его интеллектуальных и творческих способностей в процессе перехода от одной ступени обучения к последующей в рамках образовательной системы, реализующейся в разнообразнейших учебных заведениях. Ведущая позиция отводится именно школьному образованию, формирующему основы многогранного развития личности ребенка и подготавливающему опору для последующего продолжения обучения и самообразования. Таким образом, ставится задача не просто обучать ребенка на протяжении определенного периода, а сделать так, чтобы он сам желал учиться.

Целостность всего непрерывного и преемственного образования поясняется тем, что каждая ступень обучения трактуется как элемент системы, отвечающая либо за уже полученные и применяемые знания, умения и навыки, либо за их подготовку для обучения на следующем этапе. Изменение хотя бы одного компонента приводят к преобразованию всей системы. В свою очередь целостность системы определяется интеграцией составляющих элементов в единое целое, но уже с новыми параметрами и характеристиками.

Центральное место в непрерывном образовании отведено именно школьнику, его индивидуальным склонностям, интересам и способностям. К критериям, определяющим систему непрерывного образования, относят преемственность между различными этапами и уровнями образования; многовариативность образовательных программ; открытость; гибкость обучения; широкий спектр разнообразных методик, содержания и средств обучения; самостоятельный выбор обучающимися учебных предметов; стимулирование мотивационной готовности школьников к обучению и т.д. Выполнение принципа преемственности в образовательных программах позволяет учащимся беспрепятственно перемещаться в образовательном пространстве, а именно переходить с одной программы на другую без каких-либо значительных затруднений, с учетом

сквозной стандартизации, подчиняющейся единым целям системы непрерывного образования.

Развитие системы непрерывного образования заключается именно в непрерывности процессов в системах общего среднего, начального, среднего, высшего и прочего образования, эффективность которых представлена грамотно продуманными системными связями между различными этапами обучения. Существенное значение при подготовке старшеклассников отводится системности форм, средств и методов обучения: информационно-коммуникационному, технологическому, материально-техническому и научному обеспечению [5].

Одной из стратегических идей системы непрерывного образования является обеспечение условий, отвечающих заявленным требованиям со стороны общества, государства и рынка труда о предоставлении качественного образования в результате проектирования новых институциональных механизмов регулирования образовательной сферы, совершенствующих структуру, содержание и практическую направленность образовательных программ [4]. В то же время показателем оценки высокого уровня подготовки школьников выступает информационная деятельность в качестве важнейшего фактора, обуславливающего успешность учебного процесса. Основой информационного обеспечения старшеклассников в школьном курсе математике является ориентация на эффективное применение информационных ресурсов, новейших технических средств и программных продуктов информационных технологий, позволяющих создавать оптимальные условия развития и совершенствования личности учеников на период прохождения ими обучения. Например, среди многочисленного количества информационных ресурсов для объяснения темы «Нормальное распределение» будут крайне полезны такие онлайн-сервисы как интерактивная модель доски Гальтона [2], [3], наглядно демонстрирующая функциональный потенциал прибора, выполняющая вычисление числа шаров в ячейках и построение столбчатых гистограмм (рис. 1, рис. 2).

Непрерывное образование ставит своей задачей содействие в проектировании для школьников индивидуальной образовательной траектории, отвечающей именно их личностным особенностям и склонностям для последующего духовного, интеллектуального и социально-эмоционального роста. С практической стороны осуществляется постепенный переход от одной ступени образования к другой, в основе реализации которого заложены преемственные связи: между дисциплинами разных направленностей, между дисциплинами одной направленности, внутри одного предмета, интегрирующие их в единое образовательное пространство.

Реализация непрерывного образования осуществляется по трем основным направлениям: изучение основных образовательных программ школьного курса математики; обучение в дополнительных образовательных учреждениях или внеклассная работа; самостоятельная индивидуальная познавательная активность обучающегося. Каждое из трех направлений подразумевает повышение уровня знаний и развитие навыков обучающегося, т. е. описывает вектор развития или «вектор движения вверх».

каково среднее значение случайной величины X и площадь гауссовой кривой, если 18 рядов, а количество шаров: a. 1343, b. 581.

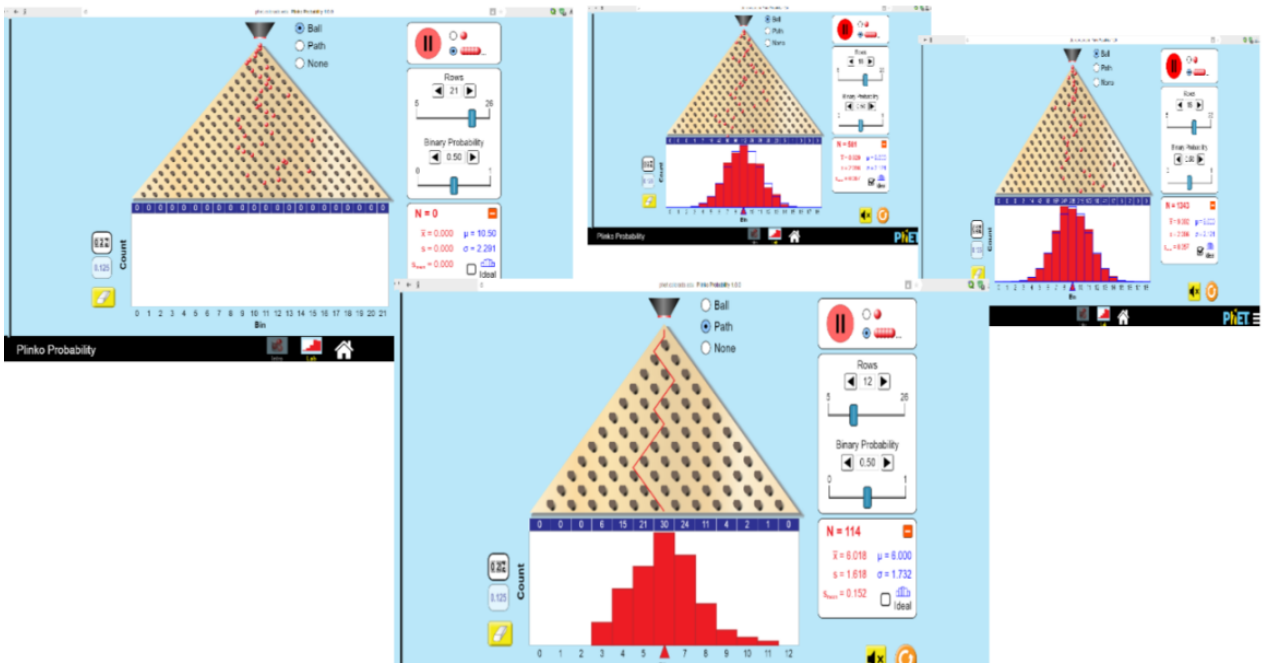


Рисунок 1 – Демонстрация нормального распределения на доске Гальтона

сколько было выпущено шаров, если математическое ожидание равно 18,87, дисперсия – 3,04, а число рядов 37;

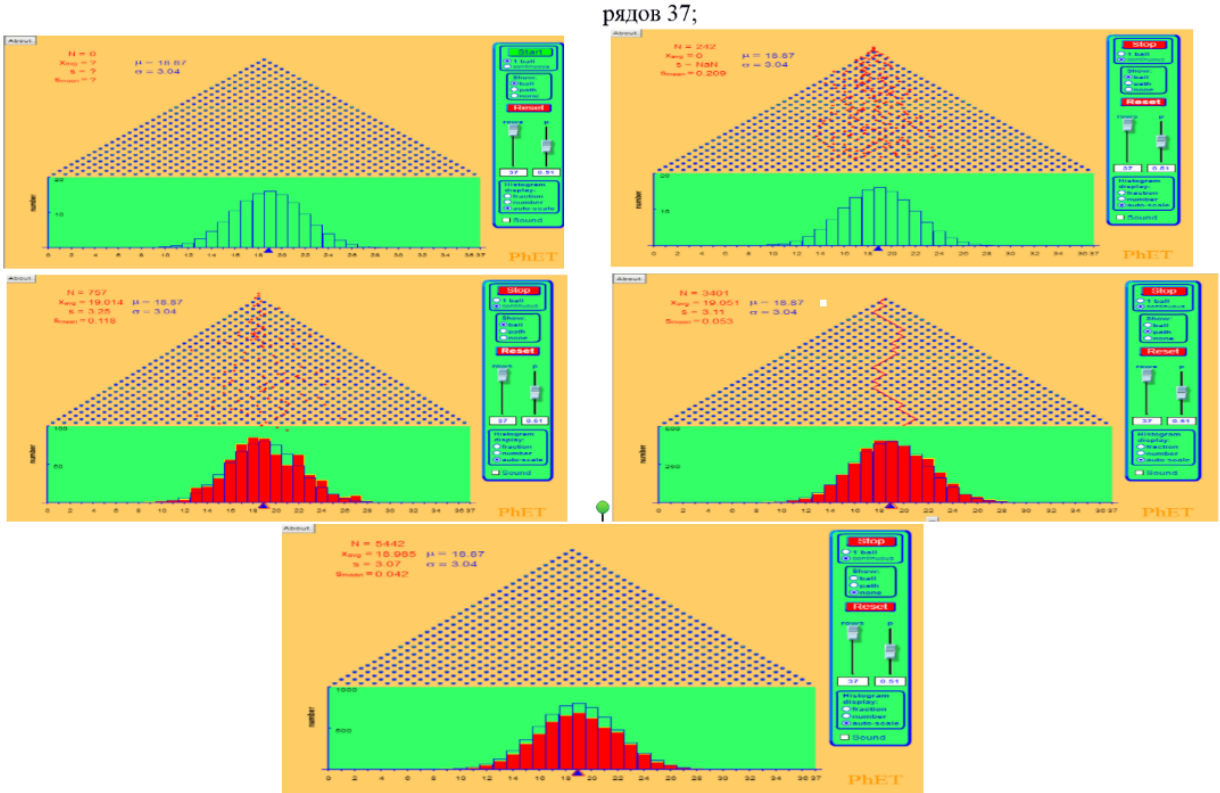


Рисунок 2 – Модель доски Гальтона

В сложившейся ситуации образования проблема непрерывности может быть решена путем проектирования взаимосвязанных сетей учебно-воспитательных учреждений, составляющих единое образовательное простран-

ство взаимодополняющих и взаимообуславливающих программ с ярко выраженной преемственностью [1, с. 20]

Важно отметить, что качество образования напрямую зависит от компетентности учительского состава. Классические методы обучения в системе непрерывного образования были вытеснены интерактивными методами, ориентированными на созидательность, актуализацию личностных качеств профессиональной готовности, формирование творческой, продуктивной, научно-исследовательской деятельности, устраняющей пассивность обучения.

Таким образом, развитие системы непрерывного образования предполагает последовательное совершенствование и творческое развитие личностных качеств, способностей, профессиональных умений и навыков школьников, дополнение и применение их на практике, расширение научного кругозора, повышение общего уровня культуры, духовно-нравственного обогащения личности школьника. В то время как опережающий характер эволюционного развития науки, техники и практики предъявляет все новые и новые требования к выпускникам на пути их профессионального становления, к их способностям быстро и точно реагировать на преобразуемые социальные процессы и явления, к объективной самооценки осуществляемых действий, к решимости изменяться, преображаться и корректировать осуществляемою деятельность, к умениям творчески и нестандартно решать возникающие проблемы в сложившихся обстоятельствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асмолов А.Г. Непрерывное образование: риски и ценности России в условиях неопределенности // Федеральный справочник. Образование в России. – 2016. – № 11. – С. 19- 21.
2. Демонстрация нормального распределения на доске Гальтона [Электронный ресурс] – Режим доступа. URL.: http://web-in-math.blogspot.ru/2012/02/blog-post_27.html
3. Модель доски Гальтона [Электронный ресурс] – Режим доступа. URL.: https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_en.html
4. Федеральный закон от 29.12.2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».
5. Харисова Л.А. Непрерывное общее образование: проблемы и факторы развития // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 3: Педагогика и психология. – 2017. – № 1 (193). – С. 57-61.
6. Шленов Ю.В., Бетин О.И., Юрьев В.М. и др. Концепция развития системы непрерывного образования России (проект для обсуждения) // Психолого-педагогический журнал «Гаудеамус». Тамбов, 2004. № 1 (5). С. 5-22.