МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И.С. ТУРГЕНЕВА»

Современные проблемы физико-математических наук

Материалы
IV Всероссийской научно-практической
конференции с международным участием
22 – 25 ноября 2018 г., г. Орёл

Часть 1

Под общ. ред. канд. физ.-мат. наук, доц. Т.Н. Можаровой

Орёл
ОГУ имени И.С. Тургенева
2018

УДК 51+53+681.3
ББК 22.1+22.3+32.81(072.8)
С56

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
ОГУ имени И.С. Тургенева
Протокол №3 от 25 октября 2018 г.

Редакционная коллегия:
Дорофеева В.И., кандидат физико-математических наук, доцент
Зарубин А.Н., доктор физико-математических наук, профессор
Можарова Т.Н., кандидат физико-математических наук, профессор
Марков О.И., доктор физико-математических наук, профессор
Селютин В.Д., доктор педагогических наук, профессор
Строев С.П., кандидат экономических наук, доцент
Тарасова О.В., доктор педагогических наук, профессор
Федяев Ю.С., кандидат физико-математических наук, доцент

С56 Современные проблемы физико-математических наук: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, (22-25 ноября 2018 г., г. Орёл): в 2 ч. Ч. 1 / под общ. ред. канд. физ.-мат. наук, доц. Т.Н. Можаровой. – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2018. – 447 с.

ISBN 978-5-9929-0677-6 (ч.1)
ISBN 978-5-9929-0675-2

В сборнике содержатся тексты докладов, прочитанных на IV Всероссийской научно-практической конференции, проходившей 22-25 ноября на базе физико-математического факультета Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева.

Материалы издаются в авторской редакции с незначительной технической корректурой.

Издание предназначено для студентов, преподавателей физико-математических направлений.

УДК 51+53+681.3
ББК 22.1+22.3+32.81(072.8)

ISBN 978-5-9929-0677-6 (ч.1)
ISBN 978-5-9929-0675-2

© ОГУ имени И.С. Тургенева», 2018
© Коллектив авторов, 2018

Оглавление

Предисловие 9
Математический анализ и дифференциальные уравнения 10
Абдурагимов Г.Э. Численное построение положительного решения краевой задачи для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка 10
Антоновская О.Г. К исследованию робастной квадратичной устойчивости динамических систем 12
Васильев В.Б., Деркач Р.Е., Тарасова О.А. О дискретных аппроксимациях для эллиптических краевых задач 16
Гималтдинова А.А., Аносова Е.П. О множестве нулей комбинации произведений цилиндрических функций 21
Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории электромагнитного взаимодействия физических маятников 24
Данилова Л.П., Вирченко Ю.П. Бифуркация гиббсовского распределения дихотомического случайного поля 28
Зарубин А.Н. О разрешимости в замкнутой форме интегро-функционального уравнения Абеля первого рода с запаздыванием и опережением 33
Зарубин А.Н. Об одном классе сингулярных интегро-функциональных уравнений с запаздыванием и опережением 37
Зарубин А.Н., Чаплыгина Е.В. Обобщенное интегро-функциональное уравнение Абеля второго рода с функциональным запаздыванием и опережением 43
Ивакина М.Г., Бельман С.А. Исследование динамической модели поведения социальной группы 47
Копаев А.В. О задаче о наклонной производной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в полуплоскости 49
Курбыко И.Ф., Левизов С.В. О свойствах линейных непрерывных операторов в пространстве мер на гильбертовом пространстве 53
Мельников Р.А., Саввина О.А., Черноусова Н.В. Обобщение случаев раскрытия неопределенностей в теории пределов 57
Можарова Т.Н. О разрешимости неоднородных операторных уравнений 61
Ноздрунов В.В. Об алгоритме решения обратной задачи группового анализа системы двух оду второго порядка, допускающих непрерывную точечную группу преобразований 64
Ситник С.М. Композиционный метод построения операторов преобразования 71
Соломатин О.Д. Характеристики оператора дифференцирования в пространстве целых функций 74
Соломатин О.Д. Характеристики роста решений дифференциально-операторного уравнения $\frac{du}{dt} = A(u)$ 76

Старцев С.Я. Необходимое условие интегрируемости по Дарбу для полудискретных автономных уравнений линейных по производным 79
Субботин А.В., Вирченко Ю.П. Описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля 83
Чернова О.В. Краевая задача для вещественной эллиптической системы 86
Яковлева Ю.О. Задача типа Гурса для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка 90

Алгебра, топология и геометрия 93
Агафонцев В.В. Позиционные нумерации в диофантовых равенствах 93
Дубровин Н.И. Непрерывные операторы на пространстве формальных рядов 101
Дубровина Т.В. Определители с биномиальными коэффициентами 103
Куценогий С.П., Попов Ю.С. Вырождения йордановых алгебр и «маргинальных» алгебр 107
Кытманов А.А., Осипов Н.Н., Тихомиров С.А. О числе компонент Эйна в пространствах модулей стабильных расслоений ранга 2 111
Мухаметьянов И.Т. Об одном семействе локально шестиугольных графов на элементах кольца z_n 114
Невский М.В., Ухалов А.Ю. Свойства 0/1-матриц порядка n, имеющих максимальный определитель 120
Платонов С.С. О некоторых задачах теории приближений функций на локально компактных группах Виленкина 124
Черкасова В.В. Об инвариантах поверхностей второго порядка в теории мультипликативного интеграла 128
Шумакова Е.О. Ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса 132

Методы дискретных особенностей в задачах математической физики 137
Иванисова О.В., Харсеева Е.А. Исследование формы свободной поверхности жидкости при колебаниях плавающего диска 137
Лекомцев Д.Г. Работа скважины в анизотропной неоднородной среде со степенным законом проницаемости 141
Федяев Ю.С. Исследование эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в анизотропной пористой среде 146

Физика конденсированного состояния. Наноструктуры и наноматериалы 151
Алиев А.А., Гасанов О.М., Мамедова Р.Ф., Джафаров Т.А. Электрофизические свойства твердых растворов $(SnSe)_{1-x}(ErSe)_x$ 151
Аринцына К.И., Марков О.И. Исследование монокристаллов висмута методом СКР 157
Атигаев А.С. Свойства тонких пленок оксида алюминия 161

Валиев В.К., Аббасов И.И., Гусейнов Дж.И., Адгезалова Х.А. Физико-химическое исследование сплавов системы $PbTe\text{-}Gd_2Te_3$ 166
Гусейнов Дж.И., Мамедова Р.Ф., Гасанов О.М., Аскеров Д.Дж. Магнитосопротивление сплавов системы $Gd_xSn_{1-x}Se$ 171
Комиссарова Л.Х., Марнаутов Н.А. Исследование наночастиц магнетита синтезированных методом соосаждения 176
Кудрин А.В., Крюков Р.Н., Ведь М.В., Лесников В.П. Физико-химические свойства слоёв разбавленного магнитного полупроводника (In,Fe)Sb, выращенных на GaAs 179
Нифтиев Н.Н. Электропроводность монокристаллов $FeGaInS_4$ в переменном электрическом поле 182
Турин В.О., Рахматов Б.А., Ким Ч.Х. Линейная «внешняя» компактная модель асимптотики тока стока в режиме насыщения для органического полевого транзистора 185
Турин В.О., Шкарлат Р.С., Поярков В.Н., Кшенский О.Н., Зебрев Г.И., Инигез Б., Шур М.С. Линейная «внешняя» компактная модель для асимптотики тока стока МОП-транзистора в режиме насыщения с учётом эффекта насыщения скорости носителей заряда 190
Turin V.O., Markov O.I., Poyarkov V.N. Aberration of light and matter wave 199
Филиппов В.В. Распределение электрического потенциала малых токовых зондов в анизотропных полупроводниках 208
Харламов В.Ф. Полупроводниковые материалы с равным нулю электрическим сопротивлением 213

Инженерные приложения физико-математических наук 216
Белых А.Е., Орлова А.А. Приложение алгебры логики к анализу и синтезу релейно-контактных схем 216
Болбенков А.В., Корогодин И.Е. Эффективные оценки в цифровой стеганографии: нижняя граница Крамера-Рао, метод максимального правдоподобия 220
Варенникова А.Ю., Чернов Н.Н. Способ определения нелинейности в неоднородной среде на основе измерения параметров второй гармоники акустической волны 225
Голубева О.И. Построение графа переходов последовательностной схемы 230
Данилкин Е.А. Моделирование распространения выбросов автомобильного транспорта 235
Едемский В.А., Соколовский Н.С. Циклотомические последовательности с высокой линейной сложностью над конечным полем 240
Кирюхина Г.А., Корогодин И.Е. Фильтр Винера и его практическая реализация в цифровых изображениях 245

Климов А.О., Иванов К.А. Моделирование теплового сопротивления мощного нитрид-галлиевого ПТБШ при наличии воздушных полостей 249
Кондратенко Л.А., Миронова Л.И. Новый метод исследования динамических процессов в существенно нелинейных механических системах 254
Корячкин В.П., Фроленкова Л.Ю., Гончаровский Д.А., Бодров В.К. Моделирование деформационного поведения сплошных сред с учетом их реологических характеристик 259
Лобанова В.А., Еременко В.Т. Алгоритм оценки качества результатов ректификации нефти аппаратом искусственных нейронных сетей с обучением 264
Матюхин С.И., Малый Д.О., Вишняков А.С. Компьютерное моделирование переходного теплового сопротивления силовых IGBT-модулей паяной конструкции 270
Миназетдинов Н.М. Двумерная задача об электрохимической обработке металлов с учётом кавитации 274
Никитина М.А., Вальков А.Ю. Матричный метод расчета полей упругих волн в вертикально-неоднородных средах 279
Петросянц М.Т., Толпаев В.А. Методика анализа динамики устьевых параметров скважины для обнаружения признаков процесса пескообразования на её забое 283
Преснецова В.Ю., Ромашин С.Н., Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С., Якушина С.И., Пресняков В.М., Захаров А.С., Титова Е.Ю., Шамрин А.В. Теоретическая оценка прочности тонкопленочных покрытий 286
Степанова Л.В., Фролов К.В. Конечно-элементный анализ смешанного деформирования на примере полудиска с разрезом 291
Тетерева А.А., Конюхова О.В. Мобильное приложение для корректировки маршрутов общественного транспорта в вечернее время 296
Титушкин Д.А., Матюхин С.И. Актуальные методы низкотемпературного спекания применительно к силовым полупроводниковым тиристорам и диодам 300
Якушина С.И., Шоркин В.С., Новичихина О.С. Метод расчета потенциалов нелокального взаимодействия разных материалов 306

Информатика и информационные технологии 312
Алексанян Г.К., Щербаков И.Д., Кучер А.И., Рябченко В.Ю. Разработка программного обеспечения для хранения и обработки данных в задачах электроимпедансной томографии 312
Беднаж В.А., Лаптева А.И., Нога Т.А. Веб-ориентированная информационная система для тренировки навыков ментальной арифметики 316
Ванюшкин А.С., Гращенко Л.А. Опыт автоматизированной разметки текстов ключевыми словами 320

Варгашкин В.Я. Методика выявления событий гравитационного микролинзирования на основе статистического анализа ахроматизма временных всплесков микроволнового реликтового излучения вселенной 325
Гращенко Л.А., Науменко Д.А. О продуктивности способов уникализации текстов 330
Гращенко Л.А., Федоров А.В. Количественные оценки качества доступных сервисов машинного перевода с китайского языка на русский 335
Гращенко Л.А., Черкасов Н.В. О некоторых статистических особенностях русскоязычных библиографических описаний 340
Дорофеева В.И., Емельянов Н.А. К вопросу реализации алгоритма распознавания поверхностей и препятствий 345
Желткова В.В., Бочаров Г.А. Математическое моделирование динамики ВИЧ-инфекции с разной степенью детализации 347
Korobeynikov A.V. Three-dimensional integer haar wavelets 351
Кучер А.И., Алексанян Г.К., Щербаков И.Д. Численное моделирование процесса мониторинга изменения проводимости грудной полости человека методом электроимпедансной томографии 356
Михеечев С.Н., Храмцов Н.С. Применение алгоритма SOVA в турбодекодировании 360
Михеечев С.Н., Шестов А.А. Исследование пропускной способности LDPC кода в аппаратной реализации 365
Петров А.А., Масина О.Н. Разработка алгоритмов стохастической оптимизации и их реализация на высокоуровневом языке программирования 370
Савинкова А.А., Бахметьев Б.А., Бочаров Г.А. Математическое моделирование многокомпонентного управления динамикой инфекции вируса иммунодефицита человека на основе антиретровирусных и гормональных воздействий 374
Таилова З.Р., Лугуев Т.С. Некоторые вопросы реализации интерактивных чат-ботов 379
Трусов С.И., Конюхова О.В. Методы проектирования взаимодействия пользователей с программной системой при разработке пользовательского интерфейса 382
Харечкин П.В., Науменко В.В., Дорофеев О.В., Копытов В.В. Технология обработки данных от распределенных информационных сенсоров 387
Хорошилов А.А., Садовников Д.А. Использование обобщенных синтагм для задач машинного перевода 392
Хорошилов А.А., Садовников Д.А. Метод формирования унифицированного семантического представления текстов для задач поиска в многоязычных хранилищах документов 396
Щербатых А.В. Элементы разработки программы компьютерного тестирования по математике для студентов СПО 402

Математические методы в экономике 405
Базилевский М.П. Метод наименьших модулей парных произведений в регрессионном анализе 405
Быкова А.А., Бельман С.А. Моделирование динамики потока педагогических кадров 410
Корниенко Д.В. Разработка средствами 1С отчета по дебиторской задолженности организации для диагностики ее кризисного состояния 413
Лискина Е.Ю. Прогнозирование продаж товара повседневного спроса в торговой сети 419
Прокуратова О.Н. Применение теории матричных игр с природой при подготовке будущих экономистов 424
Русских Т.Н., Музалевская А.М. Математическое обеспечение информационной системы поддержки принятия решений для потребителей и поставщиков платных медицинских услуг 427
Строев С.П., Гришин А.А. Модели поведенческого скоринга заемщиков банка 433
Чернобровкина И.И., Чернобровкина Ю.В. Применение метода экспертных систем для выбора банковского продукта 437
Шуметов В.Г. Факторные модели дисперсионного анализа в сельскохозяйственных исследованиях 440

Предисловие

В настоящем сборнике представлены материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» (СПФМН-2018), состоявшейся 22-25 ноября 2018 г. в Орле и объединившей участников из крупнейших университетов Москвы, Санкт-Петербурга, Ельца, Ставрополя, Самары, Кирова, а также стран ближнего и дальнего зарубежья.

Целью конференции являлось обсуждение фундаментальных и прикладных проблем современной математики, физики, информационных технологий, вопросов методики преподавания.

Работа конференции проводилась по следующим секциям:

1. Математический анализ и дифференциальные уравнения;
2. Алгебра, топология и геометрия;
3. Математические методы в экономике;
4. Методы дискретных особенностей в задачах математической физики;
5. Физика конденсированного состояния;
6. Наноструктуры и наноматериалы;
7. Информатика и информационные технологии;
8. Инженерные приложения физико-математических наук;
9. Методика преподавания математики, информатики, физики и астрономии в школе и вузе.

Благодарим всех авторов статей, докладчиков и участников за вклад в организацию нашей научно-практической конференции и ее успешное проведение.

Организационный и Программный комитеты

Математический анализ и дифференциальные уравнения

УДК 517.927

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г.Э. Абдурагимов, к.ф.-м.н., доц.
Дагестанский государственный университет
e-mail: *gusen_e@mail.ru*

В данной работе посредством численной реализации итерационного процесса, осуществляется построение положительного решения краевой задачи для одного нелинейного интегро – дифференциального уравнения второго порядка, существование и единственность которой ранее было установлено автором в работе [1].

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + 0{,}8(2t)^{1/4}\int_0^1 x(s)ds + \frac{1}{(t+1)^2}\left(\int_0^1 x(s)ds\right)^2 = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) - 9x'(0) = 0, \tag{2}$$

$$10x(0) - 99x'(0) - x'(1) = 0.$$

Сведем краевую задачу (1)-(2) к задаче Коши в интегральной форме

$$x(t) = -0{,}64\sqrt[4]{2}\frac{4}{9}t^{9/4}\int_0^1 x(s)ds + (\ln(1+t) - t)\left(\int_0^1 x(s)ds\right)^2 + \alpha(t+9), \tag{3}$$

где α – произвольное число, соответствующему начальному условию $x'(0) = \alpha$.

Опираясь на соответствующие априорные оценки [1] положительного решения задачи (1)-(2) и в силу достаточной малости составляющих (3), можно утверждать, что рассматриваемый итерационный процесс сходится.

При численной реализации метода простой итерации решения уравнения (3) для подсчета интеграла мы воспользовались квадратурной формулой трапеции с равномерной сеткой. Соответствующие итерационные расчеты осуществляем до тех пор, пока с необходимой точностью не найдем число α^*, обеспечивающее выполнение разностного аналога второго граничного условия краевой задачи (1)-(2).

В соответствии с вышеприведенной схемой, результат численных расчетов, полученный интерполированием сеточного решения задачи (1)-(2) (см. таблицу 1), представлен в виде графика положительного решения задачи (1)-(2) на рисунок 1.

Таблица 1 - Положительное решение задачи (1)-(2) при

t	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
x	1,16	1,16	1,15	1,13	1,10	1,05	0,99	0,92	0,83	0,73	0,62

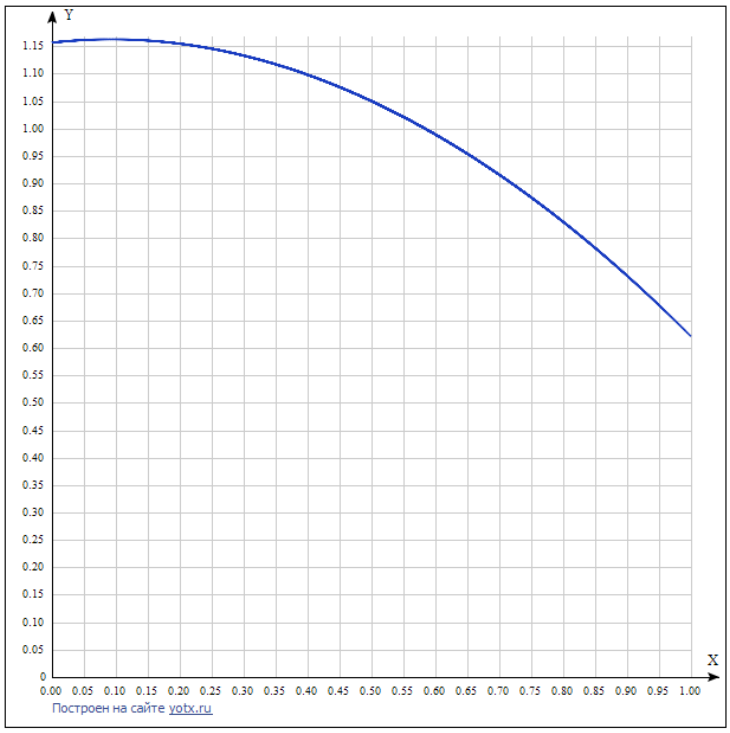


Рисунок 1 – График решения

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдурагимов, Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка / Г. Э. Абдурагимов // Известия вузов. Серия: Математика. – 2006. – №5. – С.3-7.

УДК 517.926

К ИССЛЕДОВАНИЮ РОБАСТНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О.Г. Антоновская, к.ф.-м. н., доц.
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет
e-mail: *olga.antonovsckaja@yandex.ru*

В работе получены достаточные условия робастной устойчивости на основе построения общей квадратичной функции Ляпунова для параметрически неопределенных семейств динамических систем. В качестве функции Ляпунова выбирается положительно определенная форма, которая является функцией Ляпунова для одной из систем семейства и удовлетворяет ограничению на ее первую производную в силу системы.

Ключевые слова: робастная устойчивость, параметрически неопределенная система, квадратичная функция Ляпунова.

Введение

Важное место в теории динамических систем занимает проблема робастной устойчивости, которая связана с получением условий устойчивости не одной конкретной системы, а целой совокупности систем с заданными ограничениями на их параметры [1-4]. В некоторых специальных случаях робастная устойчивость может быть установлена достаточно эффективно. Одним из таких случаев является случай интервальности параметров системы [1,3]. К такому семейству применима теорема Харитонова [5], согласно которой робастная устойчивость эквивалентна устойчивости четырех так называемых угловых матриц коэффициентов семейства систем [6]. Однако в общем случае, когда параметрическая неопределенность является более сложной, непосредственная проверка робастной устойчивости семейства систем также сложна, поэтому используется подход, основанный на определении достаточных условий робастной устойчивости: в частности, подход, основанный на построении общей квадратичной функции Ляпунова для неопределенных семейств (робастная квадратичная устойчивость) [6].

В настоящей статье предложена методика получения достаточных условия робастной устойчивости на основе построения общей квадратичной функции Ляпунова для параметрически неопределенных семейств динамических систем. В качестве функции Ляпунова выбирается положительно определенная квадратичная форма, которая является функцией Ляпунова для одной из систем семейства и удовлетворяет ограничению на ее первую производную в силу системы [7,8].

1. Постановка задачи

Рассмотрим параметрически неопределенную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(q)x_j \quad (i = 1,2,...,n), \tag{1}$$

где q – параметр, изменяющийся на некотором заданном множестве. И пусть при некотором значении параметра $q = q_0$ корни $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}x_i x_j \quad (K_{ij} = K_{ji}, i, j = 1,2,\ldots,n). \tag{2}$$

В силу системы (1) при $q = q_0$ найдем первую производную квадратичной формы (2)

$$\dot{V}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}(\dot{x}_i x_j + x_i \dot{x}_j) \tag{3}$$

(здесь $\dot{x}_i$ вычисляется из (1)). Тогда, согласно [7] квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1) при $q = q_0$, для которой максимальное значение первой производной (3) на заданной поверхности уровня $V(x_1, x_2, ..., x_n) = V_0$ равно δV_0 ($2 \max\limits_{i=1,n}\{Re\,\lambda_i\} \le \delta < 0$), тогда и только тогда, когда параметры (2) удовлетворяют уравнению

$$det(A_{km} - \delta K_{km})_{k,m=1}^{n} = 0, \tag{4}$$

в котором

$$A_{km} = \sum_{i=1}^{n}(K_{ik}a_{im}(q_0) + K_{im}a_{ik}(q_0)) \quad (k, m = 1,2,...,n). \tag{5}$$

Здесь величины A_{km} – коэффициенты квадратичной формы (3) при $q = q_0$, В дальнейшем будем предполагать, что построена квадратичная форма (2), которая является функцией Ляпунова для (1) при $q = q_0$,

Заметим, что уравнение (4)-(5) можно переписать в виде $P_n(\delta) = 0$, где

$$P_n(\delta) = \delta^n + a_1\delta^{n-1} + a_2\delta^{n-2} + ... + a_{n-1}\delta + a_n, \tag{6}$$

$$a_k = (-1)^k \frac{\sum_{i_1 < i_2 < ... < i_k} det\, K^{i_1, i_2, ..., i_k}}{det\, K}, a_n = (-1)^n \frac{det\, A}{det\, K}, \tag{7}$$

матрицы $K = (K_{ij})$, $A = (A_{ij})$, а матрица $K^{i_1, i_2, ..., i_k}$ получается из матрицы K заменой столбцов с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ на соответствующие столбцы матрицы A. Поскольку действительные корни (6)-(7) определяют значения величины $\dot{V}/V$ на поверхности уровня $V = V_0$, каждому из которых соответствуют координаты точек этой поверхности [9], в которых $\dot{V}/V = \delta$, то в случае, когда (2) является функцией Ляпунова, величина $a_n \neq 0$. Ведь a_n есть произведение всех корней (4), а максимальный действительный его корень удовлетворяет условию $2 \max\limits_{i=1,n}\{Re\,\lambda_i\} \le \delta < 0$.

Пусть значение параметра q изменилось. Тогда и коэффициенты системы изменятся на величины $\Delta a_{ij} = a_{ij}(q) - a_{ij}(q_0)\ \ (i,j = 1,2,\ldots,n)$, а сама система примет вид

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(q_0) + \Delta a_{ij}) x_j \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{8}$$

Тогда если считать функцию (2) неизменной, величины A_{km} преобразуются к виду $A_{km} + \Delta A_{km}$, где

$$\Delta A_{km} = \sum_{i=1}^{n} (K_{ik}\Delta a_{im} + K_{im}\Delta a_{ik})\ \ (k,m = 1,2,\ldots,n), \tag{9}$$

уравнение (4) примет вид

$$det(A_{km} + \Delta A_{km} - \delta K_{km})_{k,m=1}^{n} = 0, \tag{10}$$

а полином (6) –

$P_n^{\Delta}(\delta) = \delta^n + (a_1 + \Delta a_1)\delta^{n-1} + (a_2 + \Delta a_2)\delta^{n-2} + \ldots + (a_{n-1} + \Delta a_{n-1})\delta + a_n + \Delta a_n$,

где Δa_k представляют собой сумму произведений всех миноров до порядка k матрицы $\Delta A = (\Delta A_{ij})\ \ (i,j = 1,2,\ldots,n)$ на соответствующие им алгебраические дополнения из матрицы $K^{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. В частности, коэффициент Δa_n равен

$$\Delta a_n = (-1)^n \frac{1}{det\,K}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Delta A_{ij}A^{ij} + \sum_{i_1<i_2}\sum_{j_1<j_2}\begin{vmatrix}\Delta A_{i_1j_1} & \Delta A_{i_1j_2}\\ \Delta A_{i_2j_1} & \Delta A_{i_2j_2}\end{vmatrix} A_{j_1j_2}^{i_1i_2} + \ldots + det\,\Delta A\right), \tag{11}$$

где A^{ij} – алгебраическое дополнение элемента A_{ij} в матрице A, а $A_{j_1j_2}^{i_1i_2}$ – алгебраическое дополнение минора, построенного на строках с номерами i_1, i_2 и столбцах с номерами j_1, j_2 в матрице A. Задача состоит в определении условий, при которых функция Ляпунова, построенная для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова для системы (8).

2. Методика решения задачи

Функция Ляпунова (2), построенная для системы (1) будет оставаться функцией Ляпунова и для системы (8), если a_n при изменении параметра системы не поменяет знака, т.е. знаки величин a_n и $a_n + \Delta a_n$ будут совпадать. Но поскольку

$$|a_n + \Delta a_n| \geq |a_n| - |\Delta a_n|, \tag{12}$$

то $|a_n + \Delta a_n| > 0$, если будет положительной правая часть неравенства (12). Таким образом, будет иметь место следующее утверждение:

Лемма. Функция (2), являющаяся функцией Ляпунова для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова для системы (8), если

$$|\Delta a_n| < |a_n|, \tag{13}$$

где a_n и Δa_n ищутся в силу (7) и (11), а A_{km} и ΔA_{km} $(k,m = 1,2,\ldots,n)$ определены соотношениями (5) и (9) соответственно.

Т.е. устойчивость системы будет сохраняться при всех значениях параметра q, при которых имеет место условие (13).

Например, если квадратичная функция Ляпунова строится в соответствии с методикой работы [8], основанной на переходе к каноническим координатам и дающей функцию Ляпунова, удовлетворяющую условию $\max\limits_{V=V_0}(\dot{V}/V)=\delta$ ($2\max\limits_{i=1,n}\{Re\,\lambda_i\}\le\delta<0$), тогда все корни полинома (6) действительны, причем $\delta_1\le\delta_2\le\ldots\le\delta_n=\delta<0$. А значит

$$|\Delta a_n|=|\delta_1\delta_2\ldots\delta_n|\ge|\delta_n|^n=|\delta|^n,$$

т.е.

$$|a_n+\Delta a_n|\ge|a_n|-|\Delta a_n|\ge|\delta|^n-|\Delta a_n|.$$

Таким образом, в этом случае функция (2), построенная для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова дл системы (8), если

$$|\Delta a_n|<|\delta|^n, \qquad (14)$$

где Δa_n ищется в силу (11). Т.е. устойчивость системы будет сохраняться при все значениях параметра q, при которых имеет место условие (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука. – 2002. – 384 с.
2. Бесекерский В.А., Небылов А.В. Робастные системы автоматического управления. – М.: Наука. – 1983. – 239 с.
3. Оморов Р.О. Робастная устойчивость интервальных динамических систем // Проблемы автоматики и управления. – 2015. – № 1(28). – С. 23-28.
4. Александров А.Г. Запасы устойчивости и робастная устойчивость // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2010. – № 6 – С. 32-41.
5. Харитонов В.Л. Об устойчивости положения равновесия семейства систем // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Том 14. – № 11. – С. 2086-2088.
6. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П. С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. – М.: ЛЕНАНД. – 2014. – 560 с.
7. Антоновская О.Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Том 49. – № 9. – С. 1220-1224.
8. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Том 52. – № 3. – С. 275-281.
9. Антоновская О.Г. Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия вузов. Математика. – 2004. – № 2 (501). – С. 19-23.

УДК 517.954

О ДИСКРЕТНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В. Б. Васильев
Национальный исследовательский Белгородский государственный университет
e-mail: *vbv57@inbox.ru*
Р. Е. Деркач
Национальный исследовательский Белгородский государственный университет
e-mail: *Spartak959@rambler.ru*
О. А. Тарасова
Национальный исследовательский Белгородский государственный университет
e-mail: *tarasova-o@bsu.edu.ru*

Рассматриваются дискретные псевдодифференциальные уравнения и краевые задачи в дискретных аналогах пространств Соболева–Слободецкого. Такие конструкции представляют собой аппроксимации для континуальных уравнений и краевых задач. Для некоторых случаев дается сравнение дискретных решений с их континуальными аналогами.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор, периодический символ, периодическая факторизация, аппроксимация, дискретная краевая задача.

1. Введение

Мы исследуем разрешимость дискретных операторных уравнений

$$(A_d u_d)(x) = v_d(x), \quad x \in D_d, \tag{1}$$

для достаточно широкого класса операторов A_d в специальных пространствах дискретных функций, определенных в дискретной области D_d. В ряде случев к уравнению (1) приходится добавлять граничное условие, и тогда вопрос ставится о разрешисмости соответствующей дискретной краевой задачи. Дискретные уравнения (краевые задачи) будут играть роль аппроксимирующих конструкций для исходных континуальных аналогов.

2. Обозначения

Пусть $\mathbb{Z}^m$ - целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m$ - m-мерный куб, $h > 0, \hbar = h^{-1}$. Для функций u_d дискретного аргумента, определенных на $h\mathbb{Z}^m$, мы вводим дискретное преобразование Фурье

$$\tilde{u}_d(\xi) \equiv (F_d u_d)(\xi) = \sum_{x \in h\mathbb{Z}^m} u_d(x) e^{ix\cdot\xi} h^m, \quad , \xi \in \hbar\mathbb{T}^m.$$

Пусть $A_d(\xi)$ - периодическая функция в $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Оператор вида

$$(A_d u_d)(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{y \in h\mathbb{Z}^m} \int_{\hbar\mathbb{T}^m} A_d(\xi) e^{i(y-x)\cdot\xi} u_d(y) h^m d\xi, \quad x \in D_d,$$

$D_d = D \cap h\mathbb{Z}^m$, D - область в $\mathbb{R}^m$, мы называем дискретным псевдодифференциальным оператором в дискретной области D_d.

Одной из основных задач является описание условий однозначной разрешимости уравнения [1] в подходящих пространствах функций в дискретной области D_d и применение полученных результатов к построению подходящих аппроксимаций классических псевдодифференциальных уравнений [1]. Основная трудность заключается в том, что когда область представляет собой часть $\mathbb{R}^m$ (например, полупространство или конус), стандартного условия эллиптичности символа $A(\xi)$ уже недостаточно.Так, в случае полупространства в [3, 4, 5] были описаны условия разрешимости уравнения (1) в дискретных пространствах Соболева–Слободецкого $H^s(D_d)$.

В этой работе показана применимость полученных результатов для построения дискретных аппроксимаций для псевдодифференциального оператора с символом $A(\xi)$

$$u(x) \longmapsto \int\limits_D \int\limits_{\mathbb{R}^m} A(\xi) e^{i(y-x)\cdot\xi} u(y) dy d\xi, \quad x \in D,$$

Более конкретно, дано сравнение решений двух уравнений: континуального уравнения

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in D, \tag{2}$$

и уравнения (1) для достаточно гладкой правой части v.

Всюду ниже рассматриваетсяслучай $D = \mathbb{R}^m_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, ..., x_m), x_m > 0\}$ и æ – индекс факторизации символа $A(\xi)$ [1].

3. Периодическая факторизация

Мы рассматриваем символы $A_d(\xi)$, удовлетворяющие следующему условию

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \le |A_d(\xi)| \le c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

с положительными постоянными c_1, c_2, не зависящими от h, $\zeta^2 = h^{-2} \sum\limits_{k=1}^{m} (e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)^2$.

Обозначим $\xi = (\xi', \xi_m)$. Нижеследующее определение базируется на теории периодической задачи Римана [2] и позволяет описать структуру решения дискретного уравнения (1).

О п р е д е л е н и е. Периодической факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi)$ называется его представление в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,+}(\xi) A_{d,-}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\pm}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в полу-полосы $\hbar\Pi_\pm$ по последней переменной ξ_m при почти всех фиксированных $\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}$ и

удовлетворяют оценкам

$$|A^{\pm 1}_{d,+}(\xi)| \le c_1(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\pm\frac{æ}{2}}, \quad |A^{\pm 1}_{d,-}(\xi)| \le c_2(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\pm\frac{\alpha-æ}{2}},$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h,

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left(\sum_{k=1}^{m-1} (e^{-ih\xi_k}-1)^2 + (e^{-ih(\xi_m+i\tau)}-1)^2 \right), \quad \xi_m + i\tau \in \hbar\Pi_{\pm}.$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической факторизации.

4. Сравнение решений

Обозначим $S(\mathbb{R}^m)$ класс Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций, $H^s(D), H^s(D_d),$ – пространства Соболева–Слободецкого непрерывного и дискретного аргумента соответственно [1,2]. По заданному символу $A(\xi)$, удовлетворяющему условию

$$c_1(1+|\xi|)^{\alpha} \le |A(\xi)| \le c_2(1+|\xi|)^{\alpha},$$

строится символ $A_d(\xi)$ следующим образом: берется сужение $A(\xi)$ на $\hbar\mathbb{T}^m$ и периодически продолжается на все $\mathbb{R}^m$, обозначение $A_d(\xi) \equiv (Q_h A)(\xi)$. Для построения удобной аппроксимации правую часть выберем так. Обозначим ℓv – произвольное продолжение v с D на все $\mathbb{R}^m$. Вводим уравнение

$$(Q_h A)u_d = F_d^{-1} Q_h(\widetilde{\ell v}).$$

Т е о р е м а 1. Если $|æ - s| < 1/2, v \in S(\mathbb{R}^m)$, и элементы факторизации символа $A(\xi)$ бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}^m$,то сравнение решений уравнений (1) и (2) дается оценкой

$$|u(x) - u_d(x)| \le c\, h^k, `\ \ x \in D_d,$$

где постоянная c зависит только от функции v, k – произвольное положительное число.

Теоремы о существование и единственности решений уравнений (1) и (2) имеются в работах [1,2,3].

5. Краевые задачи

К сожалению, если условие Теоремы 1 $|æ - s| < 1/2$ нарушается, то уже нет единственности решения. Так, в частности, если $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$, то все решения однородного уравнения

$$(A_d u_d)(x) = 0, \quad x \in D_d, \tag{3}$$

выглядят следующим образом [3,4].

Т е о р е м а 2. При $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$ все решения уравнения (3) содержатся в формуле

$$\tilde{u}_d(\xi) = A^{-1}_{d,+}(\xi)\tilde{c}_d(\xi'), \quad \xi = (\xi', \xi_m),$$

где $c_d(x')$ – произвольная функция из пространства $H^{-3/2-\delta}(h\mathbb{Z}^{m-1})$.

6. Пример: задача Дирихле

В теореме 2 содержится утверждение о неединственности решения уравнения (3). Чтобы выделить единственное решение, требуются дополнительные условия. Чаще всего используется задание граничных условий. Проще всего выглядят дискретные аналоги условий Дирихле или Неймана. Рассмотрим здесь случай дискретных условий Дирихле. Потребуем, чтобы решение уравнения (3) удовлетворяло дискретному условию Дирихле

$$u_d|_{x_m=0} = g_d(x'), \quad x' \in h\mathbb{Z}^{m-1,} \tag{4}$$

где g_d – заданная функция дискретного аргумента на дискретной гиперплоскости Z^{m-1}.

Условие (4) в образах Фурье примет следующий вид

$$\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi', \xi_m) d\xi_m = \tilde{g}_d(\xi'), \quad \xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1},$$

что с учетом теоремы 2 приводит к следующему уравнению относительно $\tilde{c}_d(\xi')$

$$\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{c}_d(\xi') A^{-1}_{d,+}(\xi', \xi_m) d\xi_m = \tilde{g}_d(\xi'),$$

Обозначив еще

$$\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} A^{-1}_{d,+}(\xi', \xi_m) d\xi_m \equiv \tilde{b}_d(\xi'),$$

и предположив, что

$$\tilde{b}_d(\xi') \neq 0, \quad \forall \xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}, \tag{5}$$

легко найдем

$$\tilde{c}_d(\xi') = \tilde{b}_d^{-1}(\xi') \tilde{f}_d(\xi').$$

Тогда решение задачи (3)-(4) в образах Фурье принимает вид

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{b}_d^{-1}(\xi') \tilde{g}_d(\xi') A^{-1}_{d,+}(\xi', \xi_m)$$

Т е о р е м а 3. Дискретная краевая задача $(3)-(4)$ при выполнении условия (5) однозначно разрешима в пространстве $H^s(D_d)$ при любом граничном значении $g_d \in H^{s-1/2}(h\mathbb{Z}^{m-1})$.

Наличие граничного условия сильно затрудняет получение аналога теоремы 1 для краевой задачи (3)–(4) и ее континуального аналога задачи

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in D, \tag{5}$$

$$u|_{x_m=0} = g(x'), \quad x' \in \mathbb{R}^{m-1}, \tag{6}$$

где g_d строится с помощью $(m-1)$-мерного проектора Q_h.

Авторы рассчитывают получить некоторые оценки погрешностей для конкретных операторов A.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект № 1.7311.2017/8.9.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений // — М.: Наука, —1973.

2. Васильев А.В., Васильев В.Б. Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках // Дифференц. уравнения. — 2015.— Т.51. — №5.— С. 642-649.

3. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space // Math. Model. Anal.— 2018. —V. 23,— No 3. — P. 492–506.

4. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. On some discrete boundary value problems in canonical domains // Differential and Difference Equations and Applications.Springer Proc.Math. Stat. — V. 230. — Cham: Springer.— 2018.— P. 569–579.

5. Васильев В.Б. О разрешимости некоторых дискретных уравнений // Материалы международной конференции «Современные проблемы физико-математических наук».— Орел,— 23-26 ноября — 2017 г. — С.37-41.

УДК 517.584

О МНОЖЕСТВЕ НУЛЕЙ КОМБИНАЦИИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.А. Гималтдинова, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Уфимский государственный нефтяной технический университет»
e-mail: *g_alfira@mail.ru*
Е.П. Аносова
ФГБОУ ВО «Уфимский государственный нефтяной технический университет»
e-mail: *ae0809@mail.ru*

В работе исследуются функции, являющиеся суммой или разностью произведений функции Бесселя и модифицированной функции Бесселя с разными индексами. Изучается множество нулей таких функций. С помощью теоремы Штурма о разделении корней дифференциального уравнения доказано, что такая комбинация имеет счетное множество положительных нулей и счетное множество чисто мнимых нулей с положительной мнимой частью.

Ключевые слова: функция Бесселя, модифицированная функция Бесселя, множество нулей функции, теорема Штурма.

Введение

При исследовании краевых или спектральных задач (например, [1]) для уравнений смешанного типа со степенным вырождением возникает необходимость (при нахождении собственных значений) нахождения нулей функции вида

$$f_\nu(t) = J_\nu(t)I_{-\nu}(t) + I_\nu(t)J_{-\nu}(t),\ 0 < \nu < 1, \qquad (1)$$

при $\mathrm{Re}\, t > 0$, где $J_\nu(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν, $I_\nu(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν.

Изучению нулей комбинаций произведений цилиндрических функций посвящено относительно небольшое количество исследований. Например, в справочнике [2] приведены таблицы нескольких первых корней уравнения $J_\nu(x)N_\nu(kx) - J_\nu(kx)N_\nu(x) = 0$ для некоторых значений k и ν, а также первых корней уравнения $I_n(x)J_n'(x) - J_n(x)I_n'(x) = 0$ для $n = 0,1,2,3$.

В некоторых случаях комбинации произведений функций Бесселя представляют собой элементарные функции, и тогда вопрос об их корнях решается элементарно, например, [3, с. 91]:

$$J_\nu(z)Y_{\nu-1}(z) - Y_\nu(z)J_{\nu-1}(z) = \frac{z}{\pi z}, \quad I_\nu(z)I_{-\nu+1}(z) - I_{-\nu}(z)I_{\nu-1}(z) = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi z}.$$

В книге [4] приведен обзор работ, посвященных изучению нулей функций, содержащих произведения бесселевых функций, но функция (1) или аналогичные ей не исследованы.

В большой обзорной статье [5] приведены классические результаты по теории бесселевых функций, основные сведения о нулях функций Бесселя и их

производных и методах их вычисления. Описан метод Эйлера вычисления малых нулей функций Бесселя, метод Стокса вычисления больших нулей функций Бесселя, а также другие методы. Отмечено, что можно использовать теорему Штурма [6, с.136] о разделении нулей решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, и показано ее применение для функций Бесселя. Однако там не рассматриваются комбинации вида (1).

В [4, с.336] приведен ряд формул, позволяющих свести произведения бесселевых функций к обобщенной гипергеометрической функции, например,

$$J_{-\nu}(z)I_{\nu}(z)=\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\,{}_0F_3\left(1;1-\frac{\nu}{2},1+\frac{\nu}{2},\frac{1}{2};-\frac{z^4}{64}\right)- \\ -\frac{\sin(\pi\nu)}{2\pi(1-\nu^2)}\,{}_0F_3\left(1;\frac{3-\nu}{2},\frac{3+\nu}{2},\frac{3}{2};-\frac{z^4}{64}\right), \tag{2}$$

где ${}_0F_3(a;b,c,d;z)-$ обобщенная гипергеометрическая функция. С учетом формулы (2) функцию (1) можно привести к виду

$$f_{\nu}(t)=\frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\,{}_0F_3\left(1;1-\frac{\nu}{2},1+\frac{\nu}{2},\frac{1}{2};-\frac{t^4}{64}\right). \tag{3}$$

Однако обобщенная гипергеометрическая функция очень мало изучена, и в литературе нет утверждений о ее нулях.

Есть ряд работ, посвященных численным алгоритмам вычисления нулей бесселевых функций (например, [7]), однако и в этих работах не рассматриваются комбинации произведений цилиндрических функций. Кроме того, численные методы позволяют найти лишь конечное число нулей какой-либо функции.

Таким образом, в известных нам классических или современных работах нет каких-либо результатов о нулях функции (1).

Утверждения о нулях функций

Рассмотрим функцию $f^{(1)}_{\nu,\mu}=J_{\nu}(t)I_{-\mu}(t)+I_{\mu}(t)J_{-\nu}(t),\ \nu,\mu\in\mathbf{R},\ \nu,\mu\notin\mathbf{N}$.

Теорема. *Уравнение*

$$J_{\nu}(t)I_{-\mu}(t)+I_{\mu}(t)J_{-\nu}(t)=0 \tag{4}$$

имеет счетное множество действительных положительных корней и счетное множество чисто мнимых корней с положительной мнимой частью. При этом каждый положительный корень находится на интервале между двумя последовательными нулями функции $J_{\nu}(t)$ *(равно как и между двумя последовательными нулями функции* $J_{-\nu}(t)$*), а каждый чисто мнимый корень – между двумя последовательными нулями функции* $I_{\mu}(t)$ *(или* $I_{-\mu}(t)$*).*

Пример 1. Пусть требуется найти положительные нули функции

$$f_{1/2}(x)=J_{1/2}(x)I_{-1/2}(x)+I_{1/2}(x)J_{-1/2}(x).$$

На основании доказанной теоремы (где $\nu=\mu=1/2$) можем утверждать, что функция имеет счетное множество положительных нулей. Из известных

представлений [2, с. 198] бесселевых функций с полуцелым индексом в виде элементарных функций:

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\ J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,$$

можем выписать неотрицательные корни функции $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$: πk и $\pi/2+\pi k$ соответственно, где $k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$. Тогда первый положительный нуль функции $f_{1/2}(t)$ будет находиться на интервале $(\pi/2,\pi)$, второй – на интервале $(3\pi/2,2\pi)$, …, k-ый корень – на интервале $((k-1/2)\pi,k\pi)$.

С другой стороны, учитывая представления для модифицированных функций $I_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sh}x,\ I_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{ch}x$, функцию $f_{1/2}(x)$ можем записать в виде $f_{1/2}(x)=\frac{2}{\pi x}(\sin x\cdot\operatorname{ch}x+\cos x\cdot\operatorname{sh}x)$, то есть для нахождения нулей этой функции следует решить уравнение $\operatorname{tg}x=-\operatorname{th}x$. Корни последнего уравнения найдены в работе [8]: $x=0$, $x=\pm\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k+O(e^{-2\pi k})\right)$, $x=\pm i\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k+O(e^{-2\pi k})\right)$, $k\in\mathbf{N}$. Итак, положительные нули функции $f_{1/2}(x)$ задаются формулой $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k+O(e^{-2\pi k})$.

Замечание. Полученные в примере 1 результаты о нулях функции $f_{1/2}(x)$ дают новые сведения и об обобщенной гипергеометрической функции (3) при ν=1/2.

Пример 2. Аналогично можно найти положительные нули функции

$$\hat{f}_{1/2}(x)=J_{1/2}(x)I_{-1/2}(x)-I_{1/2}(x)J_{-1/2}(x).$$

Преобразуем функцию к виду $\hat{f}_{1/2}(x)=\frac{2}{\pi x}(\sin x\cdot\operatorname{ch}x-\cos x\cdot\operatorname{sh}x)$, тогда на основании результатов работы [9] можем записать положительные нули функции $\hat{f}_{1/2}(x)$: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k+O(e^{-2\pi k})$.

Пример 3. Оценить первый положительный корень функции $f_{1/4}(x)=J_{1/4}(x)I_{-1/4}(x)+I_{1/4}(x)J_{-1/4}(x)$.

Используя таблицу значений функций $J_{1/4}(x)$ и $J_{-1/4}(x)$, можно убедиться, что первый положительный корень функции $f_{1/4}(x)$ находится в интервале (2;2,7). В этом случае более точную оценку можно найти только с помощью численных алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гималтдинова А.А. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями перехода в прямоугольной области // Научные

ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2014. – № 19 (190). – С.5-16.
2. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
4. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
5. Керимов М.К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54. – № 9. – С.1387-1441.
6. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во иностр. литер., 1962 – 352 с.
7. Алгазин С.Д. О табулировании с высокой точностью нулей функции Бесселя // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Вып. 1. – С.132-141.
8. Гималтдинова А.А. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 460. – № 3. – С.260-265.
9. Гималтдинова А.А. Задача Неймана для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // Доклады Академии наук. – 2016. – Т.466. – № 1. – С.7-11.

УДК 531.36, 534.1

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФИЗИЧЕСКИХ МАЯТНИКОВ

С.О. Гладков, д.ф.-м.н., проф.
Московский Авиационный Институт (МАИ)
e-mail: *sglad51@mail.ru*
С.Б. Богданова, к.ф.-м.н., доц.
Московский Авиационный Институт (МАИ)
e-mail: *sonjaf@list.ru*

Вопрос, которому посвящается настоящая работа совсем не нов, и восходит еще ко временам Гюйгенса, который впервые обратил внимание на эффект синхронизации физических металлических маятников, висящих на некотором отдалении друг от друга. Позднее эффект синхронизации изучался в многочисленных работах (к примеру, см. [1] – [6]). Обратим внимание, что в некоторых источниках, например, в [5] и [6] модель синхронизации основана на предположении, что подстройка колебаний маятников друг к другу связана с «сухим трением», пропорциональным скорости движения маятника, что, по мнению авторов, определяется только внутренним строением механизма часов. В на-

стоящей работе мы не будем касаться внутреннего строения механизма часов, а подойдем к решению проблемы с принципиально иной физической точки зрения. На примере двух компланарных металлических маятников, точки подвеса которых находятся на одном горизонтальном уровне при фиксированном расстоянии b друг от друга, показана принципиальная возможность их синхронизации благодаря учету двух факторов: 1. Эффекту электромагнитного взаимодействия между ними и 2. Учету ЭМ излучения, приводящего к нелинейному затуханию. Получена система нелинейных динамических уравнений движения, и дана численная оценка времени синхронизации $t_{синхр}$. В качестве основных результатов отметим:

1. Благодаря предположению, что взаимодействие между маятниками носит дальнодействующий характер электромагнитной природы, получена система симметричных относительно перестановок $\varphi_1 \to \varphi_2$, $\varphi_2 \to \varphi_1$ и $\varphi_1 \to -\varphi_1$, $\varphi_2 \to -\varphi_2$ (φ_1, φ_2 показаны на рис.1) нелинейных дифференциальных уравнений, в которых с необходимостью учтен также эффект ЭМ излучения.

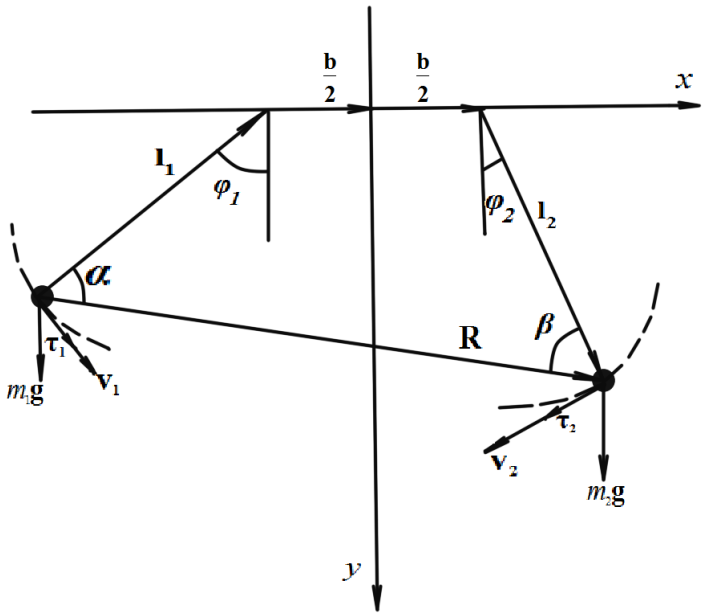


Рисунок 1 – Схематичная геометрия задачи

На основании этих двух физических факторов удалось строго математически описать весь процесс синхронизации.

2. Благодаря методам численного интегрирования показано, что в общем нелинейном случае эффект синхронизации наступает через время $t_{синхр} \approx \frac{50000}{\omega_0} \approx 5000c$, значения которого соответствуют экспериментально наблюдаемым временам и, в частности, эксперименту Гюйгенса. Процесс синхронизации в динамике показан на рис. 2 – 5.

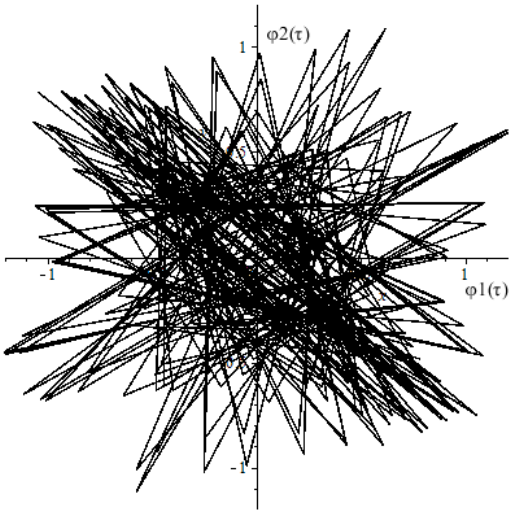


Рисунок 2 – Зависимость $\varphi_2(\varphi_1)$ на интервале времен $\tau \in [0,500]$

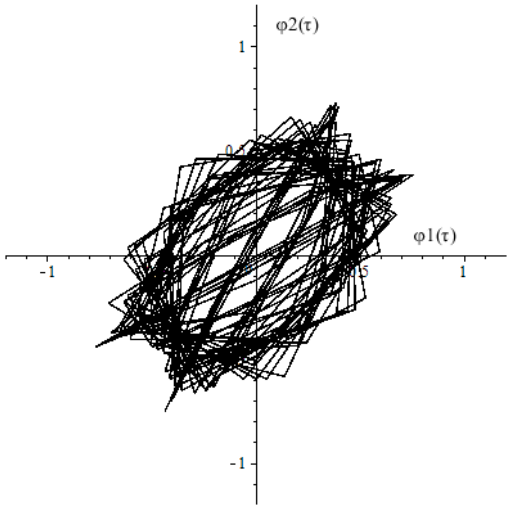


Рисунок 3 – Зависимость $\varphi_2(\varphi_1)$ на интервале времен $\tau \in [2000,3000]$

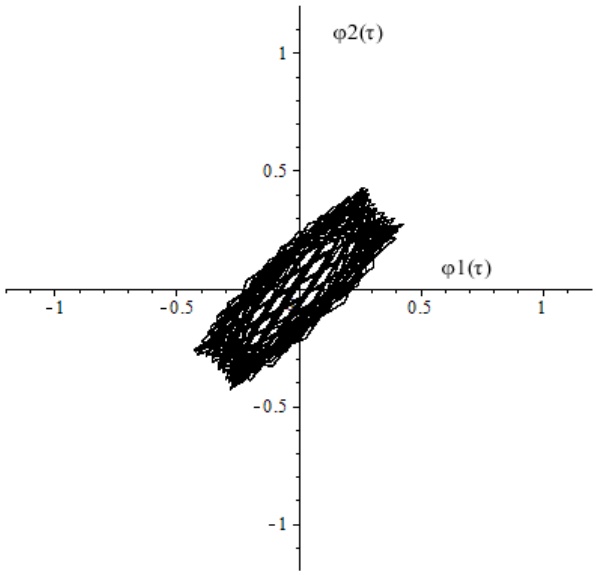


Рисунок 4 – Зависимость $\varphi_2(\varphi_1)$ на интервале времен $\tau \in [8000,9000]$

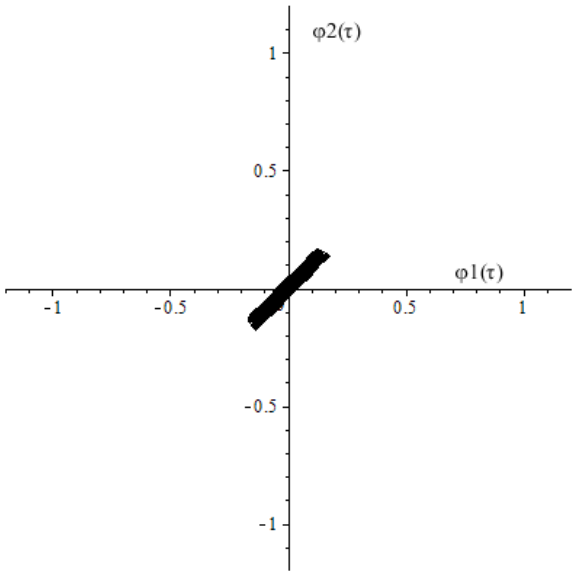


Рисунок 5 – Зависимость $\varphi_2 \approx \varphi_1$ на интервале времен $\tau \in [48000,49000]$

ЛИТЕРАТУРА

1. Yamada T., Fujisaka H. Stability theory of synchronized motion in coupled – oscillator system. The mapping approach // Progr. Theor. Phys. – 1983. – V. 70. – P. 1240-1248.
2. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. – 1990. – V. 64. – P. 821-824.
3. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. – 1997. – V. 78. – P. 4193-4196.
4. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука. – 1981. – 320 с.

5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматлит. – 1959. – 916 с.
6. Henrique M. Oliveria, Luis V. Melo. Huygens synchronization of two clocks // Scientific Reports. - July 2015. DOI: 10.1038/srep11548.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. – 1982. – 620 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука. – 1967. – 460с.
9. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Физматлит. – 1969. – 424 с.
10. Гладков С.О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // ЖТФ. – 2018. – Т. 88. – № 3. – С. 337-341.

УДК 517.987

БИФУРКАЦИЯ ГИББСОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИХОТОМИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Л. П. Данилова
НИУ БелГУ
e-mail: *lyuba-ost@mail.ru*
Ю. П. Вирченко, д.ф.-м.н., проф.
НИУ БелГУ
e-mail: *virch@bsu.edu.ru*

Изучается решеточная система статистической механики с дихотомическими случайными реализациями, называемая решеточным газом. Приводятся две теоремы, которые позволяют находить значения температуры и давления, при которых возможна бифуркация (фазовый переход) распределения вероятностей этой системы. Первая представляет собой обобщение теоремы Ли и Янга относительно необходимого для реализации бифуркации значения химического потенциала. Вторая указывает на то, что значение плотности $\rho = 1/2$ принадлежит интервалу скачка плотности при фазовом переходе.

Ключевые слова: решеточный газ, потенциал взаимодействия, гиббсовское распределение, статистическая сумма, скачок плотности, критическая температура.

1. Постановка задачи

Изучается решеточная система статистической механики, которая называется решеточным газом (см. [1]). Она представляет собой дихотомическое случайное стационарное поле $\{\rho(\mathbf{x}) = 0, 1; \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3\}$. Поле для систем такого типа определяется на расширяющейся последовательности конечных множеств $\Omega(\Lambda) = \{\langle n_1, n_2, n_3\rangle; n_j = 0 \div L; j = 1, 2, 3\}$, каждое из которых имеет $|\Omega(\Lambda)| = L^3$ числом элементов, где $L \in \mathbb{N}$ – размер. Распределение вероятностей вводится на основе функционала

$$\mathsf{H}[\rho] = -\mu \sum_{\mathbf{x}\in\Omega(\Lambda)} \rho(\mathbf{x}) + \sum_{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\subset\Omega(\Lambda)} U(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{y})\,, \tag{1}$$

который называется гамильтонианом. Здесь параметр $\mu \in \mathbb{R}$ – химический потенциал, $U(\mathbf{z})$ – центрально-симметричный суммируемый на $\mathbb{Z}^3$ потенциал,

$$\|U\| \equiv \sum_{0\neq\mathbf{z}\in\Lambda} |U(\mathbf{z})| < \infty\,, \quad U(0) = \infty\,. \tag{2}$$

Распределение вероятностей $\mathsf{P}[\rho(\mathbf{x})]$ Гиббса на каждом пространстве элементарных событий $\{\rho(\mathbf{x}) \in \{0, 1\} \,:\, \mathbf{x} \in \Omega(\Lambda)\}$ определяется формулой

$$\mathsf{P}[\rho(\mathbf{z})] = \Xi^{-1} \exp\Big(-T^{-1}\mathsf{H}[\rho]\Big)\,, \tag{3}$$

параметр T называется статистической температурой и функция

$$\Xi = \sum_{\rho(\mathbf{z})} \exp\Big(-T^{-1}\mathsf{H}[\rho]\Big)\,, \tag{4}$$

– статистической суммой. Математическое ожидание $\mathbb{E}\rho(\mathbf{x})$ – представляет плотность ρ решеточного газа, а на основе статистической суммы определяется термодинамическая функция – давление

$$P = T/|\Omega(\Lambda)|\ \ln\ Z\,. \tag{5}$$

Распределение вероятностей на всей решетке $\mathbb{Z}^3$ определяется *термодинамическим предельным переходом* $L \to \infty$ для значений математических ожиданий. Это распределение вероятностей бесконечной системы испытывает бифуркацию при изменении параметра T. Эта бифуркация, в частности, проявляется в наличии скачка функции $\rho(P)$ – зависимости плотности от давления P. Она представляет собой с физической точки зрения фазовый переход 1-го рода. В сообщении приводятся важные утверждения относительно значений параметров T, μ и P системы, при которых происходит фазовый переход.

2. Критическое значение μ

В монографии [1] приведена следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть

$$p(z,T) = \frac{T}{|\,\Omega|}\ \ln \sum_{\rho(\mathbf{z})} z^{|\rho(\mathbf{z})|} \exp\Big(-\frac{1}{T} \sum_{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\subset\,\Omega} U(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{y})\Big)\,, \tag{6}$$

$|\rho| = \sum\limits_{\mathbf{x}\in\,\Omega} \rho(\mathbf{x})$, $z = e^{\mu/T}$ и $\lambda^2(T) = \exp\Big[-\sum\limits_{\mathbf{x}\in\,\Lambda} U(\mathbf{x})/T\Big]$. Тогда функция $p(z,T)$ при каждом значении параметра $T > 0$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$p(z,T) = p\big([\lambda^2(T)z]^{-1},T\big) + T\ \ln\ z - \frac{1}{2}\|\widehat{U}\|\,. \tag{7}$$

Так как

$$\rho = T^{-1}z(dp/dz)\,, \tag{8}$$

то из приведенной теоремы

С л е д с т в и е 1. Пусть $\rho(z)$ – функция, определяемая (8). Эта функция удовлетворяет функциональному уравнению

$$\rho(z) + \rho\big([\lambda^2(T)z]^{-1}\big) = 1\,, \tag{9}$$

где, при наличии у нее скачков, нижнее и верхнее его значения определяются, соответственно, левой и правой производными в (8).

□ Уравнение (9) получается дифференцированием по z уравнения (7) как справа, так и слева в каждой точке z, с последующим использованием (8). ■

Давление $p(z,T)$ является непрерывной, монотонно возрастающей функцией от z при каждом фиксированном $T > 0$. Тогда наличие фазового перехода,

то есть скачка плотности ρ в зависимости от P соответствует наличию излома производной функции $p(z,T)$ при изменении z и, соответственно, наличию скачка у функции $\rho(z)$.

Ясно, что при температурах $T < T_c$, достаточно близких к T_c снизу, где T_c – критическая температура, при которой первые две производные зависимости P от ρ обращаются в нуль, имеется только один интервал постоянства давления P от ρ (скачок плотности в зависимости ρ от P). В связи с этим сформулируем следующее утверждение, в некотором смысле обобщает теорему Ли и Янга [2],[3] о значении химического потенциала μ, при котором происходит фазовый переход на случай, когда U может принимать произвольные значения.

Т е о р е м а 2. В интервале температур (T_c, T_*), в котором отсутствуют критические значения T, значение $z(T)$, при котором происходит скачок плотности равно $\lambda^{-1}(T)$.

□ Из равенства (6) следует, что если $\rho(z)$ при заданной температуре имеет скачок в какой-то точке $z(T)$, то она имеет также скачок в точке $[z(T)\lambda^2(T)]^{-1}$. Ввиду отсутствия критических точек в (T_c, T_*) скачок $\rho(z)$ может иметь место только в одной точке $z(T)$. Из условия единственности скачка, следует $z(T) = [z(T)\lambda^2(T)]^{-1}$. ■

Бифуркация распределения вероятностей при изменении T демонстрируется расположением нулей полиномов Ξ от z на комплексной плоскости z при $T > T_c$ и $T < T_c$, соответственно левый и правый рисунки.

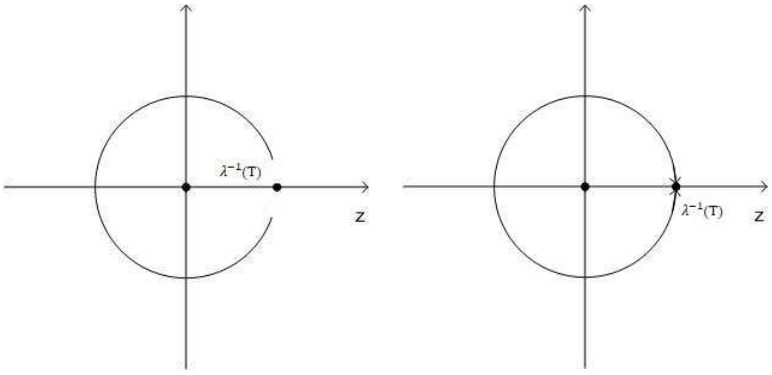


Рисунок 1 – Расположение нулей полиномов Ξ от z

3. Точка $p(T)$ фазового перехода

Т е о р е м а 3. При любой температуре $T < T_c$, при которой в системе имеется только один скачок функции $\rho(P)$ с крайними значениями $[\rho_-(T), \rho_+(T)]$, значение плотности $\rho = 1/2$ всегда принадлежит этому интервалу.

□ Согласно определению плотности решеточного газа, она определяется

математическим ожиданием

$$\rho = \mathbb{E}\rho(\mathbf{x}) = \Xi^{-1} \sum_{\rho(\mathbf{z})} \rho(\mathbf{x}) \exp\Big(- \mathsf{H}[\rho]/T\Big)\,, \tag{10}$$

После замены переменной суммирования – функции $\rho(\mathbf{x})$ на эквивалентную ей дихотомическую функцию $1-\rho(\mathbf{x})$, получаем

$$\rho = \Xi^{-1}\sum_{\rho(\mathbf{z})}(1-\rho(\mathbf{x}))\exp\Big(-\mathsf{H}[1-\rho]/T\Big) = 1-\Xi^{-1}\sum_{\rho(\mathbf{z})}\rho(\mathbf{x})\exp\Big(-\mathsf{H}[1-\rho]/T\Big)\,, \tag{11}$$

$$\Xi = \sum_{\rho(\mathbf{z})} \exp\Big(- \mathsf{H}[1-\rho]/T\Big)\,.$$

Согласно (1)

$$\mathsf{H}[1-\rho] = -\mu|\Omega(\Lambda)| + \mu\sum_{\mathbf{z}\in\Omega(\Lambda)}\rho(\mathbf{z}) + \sum_{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\subset\Omega(\Lambda)} U(\mathbf{x}-\mathbf{y})(1-\rho(\mathbf{x}))(1-\rho(\mathbf{y})) =$$

$$= -|\Omega(\Lambda)|\Big(\mu - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{y}\in\Omega(\Lambda)} U(\mathbf{y})\Big) + \Big(\mu - \sum_{\mathbf{y}\in\Omega(\Lambda)} U(\mathbf{z})\Big)\sum_{\mathbf{z}\in\Omega(\Lambda)}\rho(\mathbf{z}) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\subset\Omega(\Lambda)} U(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{y})\,.$$

При этом мы использовали периодические граничные условия при замене переменной суммирования $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ на $\mathbf{y}$ так чтобы они пробегали одну и ту область разрешенных значений $\Omega(\Lambda)$. Подставляя это выражение в (10), получим

$$\rho = 1 - \Xi^{-1}\sum_{\rho(\mathbf{z})}\rho(\mathbf{x})\exp\Big(|\Omega(\Lambda)|\Big[\mu - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{y}\in\Omega(\Lambda)} U(\mathbf{y})\Big]/T\Big)\times$$

$$\times\exp\Big(\Big[\mu - \sum_{\mathbf{y}\in\Omega(\Lambda)} U(\mathbf{y})\Big]\cdot\sum_{\mathbf{z}\in\Omega(\Lambda)}\rho(\mathbf{z})/T\Big)\ \times$$

$$\times\ \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\subset\Omega(\Lambda)} U(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{y})/T\Big)\,,$$

где статистическая сумма определяется равенством

$$\Xi = \sum_{\rho(\mathbf{z})}\exp\Big(|\Omega(\Lambda)|\Big[\mu - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{y}\in\Omega(\Lambda)} U(\mathbf{y})\Big]/T\Big)\ \times$$

$$\times\ \exp\Big(\Big[\mu - \sum_{\mathbf{y}\in\Omega(\Lambda)} U(\mathbf{y})\Big]\cdot\sum_{\mathbf{z}\in\Omega(\Lambda)}\rho(\mathbf{z})/T\Big)\ \times$$

$$\times\ \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\subset\Omega(\Lambda)} U(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{y})/T\Big)\,.$$

Так как, в условиях теоремы, согласно утверждению Теоремы 2, в точке фазового перехода выполняется

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{y} \in \Omega(\Lambda)} U(\mathbf{z}) \, ,$$

то из написанного выше равенства следует, что

$$\rho = 1 - \Xi^{-1} \sum_{\rho(\mathbf{z})} \rho(\mathbf{x}) \exp \Big(- \mu \sum_{\mathbf{z} \in \Omega(\Lambda)} \rho(\mathbf{z}) \Big) \; \times$$

$$\times \; \exp \Big(- \frac{1}{2} \sum_{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} \subset \Omega(\Lambda)} U(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{y}) / T \Big) \, ,$$

где статистическая сумма Ξ определяется равенством (11). Таким образом, мы получаем

$$\rho = 1 - \Xi^{-1} \sum_{\rho(\mathbf{z})} \rho(\mathbf{x}) \exp \Big(- \mathsf{H}[\rho]/T \Big) = 1 - \rho \, .$$

Следовательно, в точке фазового перехода $\rho = 1/2$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. – М.: Мир, 1971. – 368 с.
2. Yang C.N., Lee T.D. Statistical Theory of Equation of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation // Phys. Rev. – 1952. – 87. – P.404-409.
3. Yang C.N., Lee T.D. Statistical Theory of Equation of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model // Phys. Rev. – 1952. – 87. – P.410-419.

УДК 517.968.22

О РАЗРЕШИМОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ОПЕРЕЖЕНИЕМ

А.Н. Зарубин, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *aleks_zarubin@mail.ru*

Исследуется интегро-функциональное уравнение вольтерровского типа первого рода со степенными ядрами. Доказана однозначная разрешимость задачи.

Ключевые слова: интегральное уравнение, функциональное уравнение, интегральное уравнение Абеля первого рода, опережающе-запаздывающее уравнение.

1. Введение

Уравнению Абеля первого рода и его обобщениям посвящено много работ [1-3], ввиду важных прикладных возможностей [4-5].

Предлагаемая работа изучает интегро-функциональное уравнение Абеля первого рода с некарлемановскими сдвигами опережающе-запаздывающего типа вида

$$(\mathrm{V}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{n}} y)(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \int_{\alpha_1^k(x_0)}^{\alpha_1^k(x)} \frac{y(t)dt}{(\alpha_1^k(x)-t)^q} + \sum_{k=1}^{m} b_k(x) \int_{\alpha_2^k(x_0)}^{\alpha_2^k(x)} \frac{y(t)dt}{(\alpha_2^k(x)-t)^q} = f(x), \quad (1)$$

$$x_0 < x < x_{m+1};$$

$0 < q < 1$, где $a_k(x)\ (k = \overline{0,n})$, $b_k(x)\ (k = \overline{1,m})$, $f(x)$ – заданные функции класса $H_q(0 < q < 1)$ Гельдера, $y(t)$ – искомая функция, которая должна удовлетворять условию H_q; $n, m \in N; \alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – сохраняющие ориентацию взаимно-обратные диффеоморфизмы класса H_q, удовлетворяющие условиям: $\alpha_1(x) < x, \alpha_1'(x) > 1\ (\alpha_1'(x) < 1)$ и $\alpha_2(x) > x, \alpha_2'(x) < 1\ (\alpha_2'(x) > 1)$, то есть представляющие собой растягивающе (сжимающе)–запаздывающее и сжимающе (растягивающе)-опережающее отображения, для которых выполняются тождества

$$\alpha_{3-j}(\alpha_j(x)) = x\ (j = 1,2), \quad (2)$$

где x принадлежит области определения отображения $\alpha_j(x)$. Обозначим $x_0 = 0$ и зададим конечную последовательность x_n любым из следующих равносильных, вследствии тождества (2), равенств

$$x_n = \alpha_1(x_{n+1}), x_{n+1} = \alpha_2(x_n) \quad (3)$$

предполагая, что значения x_n определены и $\alpha_2(x_0) > 0$.

Например, если $n = \overline{-2,5}$, то ,в силу (3), $x_{-2} = \alpha_1^2(x_0) < x_1 = \alpha_1^1(x_0) < 0 = x_0 =$

$= \alpha_2^0(x_0) < x_1 = \alpha_2^1(x_0) < x_2 = \alpha_2^2(x_0) < x_3 = \alpha_2^3(x_0) < x_4 = \alpha_2^4(x_0) < x_5 = \alpha_2^5(x_0)$.

Здесь и далее обозначено $\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_j(\alpha_j(\ldots(\alpha_j(x))\ldots)}_{m\ раз}$, если $m > 0; \alpha_j^0(x) \equiv x;$

$\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_{j-3}(\alpha_{3-j}(\ldots(\alpha_{3-j}(x))\ldots)}_{-m\ раз}$, если $m < 0; j = 1,2.$

Тип функциональных отклонений очевиден из представленной

$$y(\alpha_1^k(x)) = y(x - (x - \alpha_1^k(x))) = y(x - \tau_1^k(x)),$$
$$y(\alpha_2^k(x)) = y(x + (\alpha_2^k(x) - x)) = y(x + \tau_2^k(x)),$$

где $\tau_1^k(x) = x - \alpha_1^k(x) > 0, \tau_2^k(x) = \alpha_2^k(x) - x > 0, k = 0,1,2...$

2. Постановка задачи

Не ограничивая общности и для наглядности, рассмотрим уравнение (1) при $n = 2, m = 2$ на промежутке $x_0 < x < x_3$.

Задача V_2^2. Найти на промежутке $x_0 < x < x_3$ решение $y(x)$ уравнения (1) из класса $H_q(0 < q < 1)$, удовлетворяющее условиям последействия и преддействия

$$y(x) = r(x), x \in [x_{-2}, x_0], \quad (4)$$
$$y(x) = \rho(x), x \in [x_3, x_5], \quad (5)$$

где $a_k(x)\ (k = 0,2), b_k(x)\ (k = 1,2), r(x), \rho(x), \alpha_1(x), \alpha_2(x)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

3.Однозначная разрешимость задачи V_2^2

Теорема 1. Если $a_k(x)\ (k = \overline{0,2}), b_k(x)\ (k = 1,2)\ r(x), \rho(x), \alpha_1(x),$ $\alpha_2(x) \in H_q[x_0, x_3](0 < q < 1)$, $\det R(x) \neq 0$ (см.(13)), то существует единственное решение задачи V_2^2.

Доказательство.

Обозначим

$$\Phi(\alpha_j^k(x)) = \int_{\alpha_j^k(x_0)}^{\alpha_j^k(x)} \frac{y(t)dt}{(\alpha_j^k(x) - t)^q},\ j = 1,2;\ k = 0,1,2. \quad (6)$$

Тогда интегро-функциональное уравнение (1) $(n, m = 2)$ принимает вид функционального относительно $\Phi(\alpha_j^k(x))$ уравнения

$$\sum_{k=0}^{2} a_k(x)\Phi(\alpha_1^k(x)) + \sum_{k=1}^{2} b_k(x)\Phi(\alpha_2^k(x)) = f(x), x_0 \le x \le x_3, \quad (7)$$

которое в терминах функций

$$\Phi_k(x) = \Phi(x), x_k < x < x_{k+1}\ (k = \overline{-2,5}), \quad (8)$$

с учетом (4)-(6), можно записать в форме матричного уравнения

$$R(x)\overline{\Phi}(x) - \overline{Q}(x) = \overline{F}(x), x_0 < x < x_1, \quad (9)$$

где

$$\overline{\Phi}(x) = (\Phi_0(x), \Phi_1(\alpha_2(x)), \Phi_2(\alpha_2^2(x))^T, \tag{10}$$

$$\overline{F}(x) = (f(x), f(\alpha_2(x)), f(\alpha_2^2(x))^T, \tag{11}$$

$$\overline{Q}(x) = (Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x))^T, \tag{12}$$

$$R(x) = (\overline{R}_0(x), \overline{R}_1(x), \overline{R}_2(x))^T, \tag{13}$$

причем компоненты матрицы $R(x)$ из (13) и $\overline{Q}(x)$ из (12) имеют вид:

$$\begin{cases} \overline{R}_0(x) = (a_0(x), b_1(x), b_2(x)), \\ \overline{R}_1(x) = (a_1(\alpha_2(x)), a_0(\alpha_2(x)), b_1(\alpha_2(x))), \\ \overline{R}_2(x) = (a_2(\alpha_2^2(x)), a_1(\alpha_2^2(x)), a_0(\alpha_2^2(x))); \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} Q_0(x) = -a_1(x)\Phi_{-1}^r(\alpha_1(x)) - a_2(x)\Phi_{-2}^r(\alpha_1^2(x)), \\ Q_1(x) = -a_2(\alpha_2(x))\Phi_{-1}^r(\alpha_1(x)) - b_2(\alpha_2(x))\Phi_3^\rho(\alpha_2^3(x)), \\ Q_2(x) = -b_1(\alpha_2^2(x)\Phi_3^\rho(\alpha_2^3(x)) - b_2(\alpha_2^2(x))\Phi_4^\rho(\alpha_2^4(x)); \end{cases} \tag{15}$$

причем

$$\Phi_{-1}^r(\alpha_1(x)) = \int_{\alpha_1(x_0)}^{\alpha_1(x)} \frac{r(t)dt}{(\alpha_1(x)-t)^q}, \ \Phi_{-2}^r(\alpha_1^2(x)) = \int_{\alpha_1^2(x_0)}^{\alpha_1^2(x)} \frac{r(t)dt}{(\alpha_1^2(x)-t)^q}, \tag{16}$$

$$\Phi_3^\rho(\alpha_2^3(x)) = \int_{\alpha_2^3(x_0)}^{\alpha_2^3(x)} \frac{\rho(t)dt}{(\alpha_2^3(x)-t)^q}, \ \Phi_4^\rho(\alpha_2^4(x)) = \int_{\alpha_2^4(x_0)}^{\alpha_2^4(x)} \frac{\rho(t)dt}{(\alpha_2^4(x)-t)^q}. \tag{17}$$

Уравнения (1) $(n,m=2)$ и (9) равносильны в следующем смысле . Всякому решению $y(x)$ уравнения (1) $(n,m=2)$ соответствует, в силу (6), (8), (10), решение $\overline{\Phi}(x)$ уравнения (9). Обратно, из всякого решения $\overline{\Phi}(x)$ уравнения (9) можно получить, в силу (6), решение $y(x)$ уравнения (1)$(n,m=2)$.

Действительно, если определитель $|R(x)| \neq 0, x_0 < x < x_1,$ то единственное решение задачи V_2 на промежутке $x_0 < x < x_1$ в терминах функций (6), (8), (10)-(17) может быть получено из (9) в форме

$$\overline{\Phi}(x) = R^{-1}(x)(\overline{Q}(x) + \overline{F}(x)), x_0 < x < x_1, \tag{18}$$

где обратная матрица

$$R^{-1}(x) = (\overline{R}_0^{-1}(x), \overline{R}_1^{-1}(x), \overline{R}_2^{-1}(x))^T \tag{19}$$

имеет компоненты

$$\overline{R}_0^{-1}(x)|R(x)| = (A_0(x), B_1(x), B_2(x)),$$

$$\overline{R}_1^{-1}(x)|R(x)| = (A_1(\alpha_2(x)), A_0(\alpha_2(x)), B_1(\alpha_2(x))),$$

$$\overline{R}_2^{-1}(x)|R(x)| = (A_2(\alpha_2^2(x)), A_1(\alpha_2^2(x)), A_0(\alpha_2^2(x))),$$

$$|R(x)| = \det R(x),$$

причем $A_0(\alpha_2^k(x))(k=0,1,2), A_1(\alpha_2^k(x))(k=1,2), A_2(\alpha_2^2(x)), B_1(\alpha_2^k(x))(k=0,1),$ $B_2(x)$ – алгебраические дополнения [6] соответственно элементов $a_0(\alpha_2^k(x)(k=0,1,2), a_1(\alpha_2^k(x))(k=1,2), a_2(\alpha_2^2(x)), b_1(\alpha_2(x))(k=0,1), b_2(x)$ матрицы $R(x).$

Решение (15) можно записать, согласно (10)-(12), (19), в покомпонетной форме

$$\Phi_k(\alpha_2^k(x)) = M_k(x) \equiv \overline{R}_k^{-1}(x)[\overline{Q}(x) + \overline{F}(x)], x_0 < x < x_1 (k=0,1,2),$$

или

$$\Phi(x) = \Phi_k(x) = M_k(\alpha_1^k(x)) \equiv \overline{R}_k^{-1}(\alpha_1^k(x))[\overline{Q}(\alpha_1^k(x)) + \overline{F}(\alpha_1^k(x))], x_k < x < x_{k+1} \quad (20)$$

$(k=0,1,2)$, где $\overline{R}_k^{-1}(x)$ – компоненты (строки) матрицы $R^{-1}(x)$ из (19) , а вектора $\overline{Q}(x), \overline{F}(x),$ имеют вид (11), (12).

Согласно (6), (20), для определения решения $y(x)$ задачи $V_2^?$ для уравнения (1) $(n,m=2)$ приходим к интегральному уравнению Абеля первого рода

$$\int_{x_k}^{x} \frac{y(t)dt}{(x-t)^q} = M_k(\alpha_1^k(x))), x_k < x < x_{k+1} (k=0,1,2), \quad (21)$$

которое, в силу [7] имеет единственное решение, определяемое формулой

$$y(x) = \frac{\sin(q\pi)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{x_k}^{x} \frac{M_k(\alpha_1^k(t))dt}{(x-t)^{1-q}}, x_k < x < x_{k+1} (k=0,1,2). \quad (22)$$

Если функции $M_k(\alpha_1^k(x)\,(k=0,1,2)$ дифференцируемы, то решение $y(x)$ может быть записано в форме

$$y(x) = \frac{\sin(q\pi)}{\pi} \left[\frac{M_k(\alpha_1^k(x_k))}{(x-x_k)^{1-q}} + \int_{x_k}^{x} \frac{[M_k(\alpha_1^k(t))]'dt}{(x-t)^{1-q}} \right], x_k < x < x_{k+1}, (k=0,1,2). \quad (23)$$

Аналогично [7] можно показать, что если $M_k(\alpha_1^k(x))(k=0,1,2)$ – гёльдеровские функции с показателем $\lambda > 1-q,$ то формула (22) представима в виде

$$y(x) = \frac{\sin(q\pi)}{\pi} [\frac{M_k(\alpha_1^k(x))}{(x-x_k)^{1-q}} + (1-q) \int_{x_k}^{x} \frac{M_k(\alpha_1^k(x)) - M_k(\alpha_1^k(t))}{(x-t)^{2-q}} dt],$$

$x_k < x < x_{k+1} (k=0,1,2).$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сакалюк К.Д. Обобщенное уравнение Абеля //ДАН СССР.1960.т.131,№4.-с.748-751.
2. Wolfersdorf W.E. Abelsche Jntegralgleichungen und Randwertprobleme für die verallgemeinerte Tricomi-Gleichung//Math. Nachr.1965,№27.-с.161-178.
3. Самко С.Г. Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши // ДАН СССР.1967.т.176,№5.-с.1019-1022.

4. Wolfersdorf W.E. Zur Theorie der Spielle über dem Einheitsquadrat mit Auzahlungs funktionen von der Form eines Schmetterlings. Wiss.zeit. Univ. Röstock,19.Math. Naturwiss.Reihe,6/7,1970.
5. Williams W.E. A class of integral equations // Proc.Cambr. Phil.Soc.1963.т.59.-p.p.589-597.
6. Щипачев В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа, 1985.-368с.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука,1977.-640 с.

УДК 517.968.22

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ОПЕРЕЖЕНИЕМ

А.Н. Зарубин, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева»
e-mail: *aleks_zarubin@mail.ru*

Исследуется нетеровость задачи для характеристического сингулярного опережающе-запаздывающего уравнения в классе непрерывных по Гельдеру функций.

Ключевые слова: функциональное уравнение, интегральное уравнение, сингулярное интегральное уравнение, опережающее-запаздывающее уравнение.

1. Введение

Многие краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных в своей реализации приводят к сингулярным интегро-функциональным уравнениям с карлемановским или некарлемановским сдвигом [1-6], гомеоморфно отображающим контур интегрирования на себя с сохранением или изменением ориентации.

Данная работа посвящена изучению нетеровости характеристического сингулярного интегро-функционнального уравнения с некарлемановскими сдвигами опережающе - запаздывающего типа на разомкнутом контуре интегрирования (возникающего при решении обобщенной краевой задачи типа М [7] для смешанного эллиптико-гиперболического опережающе-запаздывающего уравнения) вида

$$A_0(x)\varphi(x)+A_1(x)\varphi(\alpha_1(x))+A_2(x)\varphi(\alpha_1^2(x))+B_1(x)\varphi(\alpha_2(x))+B_2(x)\varphi(\alpha_2^2(x))+$$
$$+\frac{C_0(x)}{\pi i}\int\limits_{\alpha_1^0(x_0)}^{\alpha_1^0(x_1)}\frac{\varphi(t)dt}{t-\alpha_1^0(x)}+\frac{C_1(x)}{\pi i}\int\limits_{\alpha_1^1(x_0)}^{\alpha_1^1(x_1)}\frac{\varphi(t)dt}{t-\alpha_1^1(x)}+\frac{C_2(x)}{\pi i}\int\limits_{\alpha_1^2(x_0)}^{\alpha_1^2(x_1)}\frac{\varphi(t)dt}{t-\alpha_1^2(x)}+ \qquad (1)$$
$$+\frac{D_1(x)}{\pi i}\int\limits_{\alpha_2^1(x_0)}^{\alpha_2^0(x_1)}\frac{\varphi(t)dt}{t-\alpha_2^1(x)}+\frac{D_2(x)}{\pi i}\int\limits_{\alpha_2^2(x_0)}^{\alpha_2^2(x_1)}\frac{\varphi(t)dt}{t-\alpha_2^2(x)}=f(x),\ x_0<x<x_3,$$

с начальными условиями по запаздыванию и опережению

$$\varphi(x)=0,\ x\in[x_{-2},x_0]=[\alpha_1^2(x_0),\alpha_1^0(x_0)], \tag{2}$$

$$\varphi(x)=0,\ x\in[x_3,x_5]=[\alpha_2^3(x_0),\alpha_2^5(x_0)], \tag{3}$$

где $A_n(x)\,(n=0,1,2), B_k(k=1,2), C_j(x)(j=0,1,2), D_m(x)\,(m=1,2), f(x)$ – заданные функции класса $H_\mu(0<\mu\le 1)$ Гельдера, $\varphi(t)$ – искомая функция, которая должна удовлетворять условию H_μ; $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – сохраняющие ориентацию взаимно-обратные диффеоморфизм класса H_μ, удовлетворяющие условиям: $\alpha_1(x)<x, \alpha_1'(x)>1 (\alpha_1'(x)<1)$ и $\alpha_2(x)>x, \alpha_2'(x)<1 (\alpha_2'(x)>1)$, то есть представляющие собой растягивающе (сжимающе) –запаздывающее и сжимающе (растягивающе)-опережающее отображения, для которых выполняется тождества

$$\alpha_{3-j}(\alpha_j(x))=x\,(j=1,2), \tag{4}$$

где x принадлежит области определения отображения $\alpha_j(x)$. Обозначим $x_0=0$ и зададим конечную последовательность x_n любым из следующих равносильных , вследствии тождества (4), равенств

$$x_n=\alpha_1(x_{n+1}), x_{n+1}=\alpha_2(x_n) \tag{5}$$

предполагая, что значения x_n определены и $\alpha_2(x_0)>0$.

Например, если $n=\overline{-2,5}$, то, в силу (5), $x_{-2}=\alpha_1^2(x_0)<x_{-1}=\alpha_1^1(x_0)<0=$
$=x_0=\alpha_2^0(x_0)<x_1=\alpha_2^1(x_0)<x_2=\alpha_2^2(x_0)<x_3=\alpha_2^3(x_0)<x_4=\alpha_2^4(x_0)<x_5=\alpha_2^5(x_0)$.

Здесь и далее обозначено

$$\alpha_j^m(x)\equiv\underbrace{\alpha_j(\alpha_j(\ldots(\alpha_j(x))\ldots))}_{m\ раз}, \text{ если } m>0, \alpha_j^0(x)\equiv x;$$

$$\alpha_j^m(x)\equiv\underbrace{\alpha_{3-j}(\alpha_{3-j}(\ldots(\alpha_{3-j}(x))\ldots))}_{-m\ раз}, \text{ если } m<0, j=1,2.$$

Тип функциональных отклонений очевиден из представлений

$$\varphi(\alpha_1^k(x))=\varphi(x-(x-\alpha_1^k(x)))=\varphi(x-\tau_1^k(x)),$$

$$\varphi(\alpha_2^k(x))=\varphi(x+(\alpha_2^k(x)-x))=\varphi(x+\tau_2^k(x)),$$

где $\tau_1^k(x)=x-\alpha_1^k(x)>0, \tau_2^k(x)=\alpha_2^k(x)-x>0, k=1,2,\ldots.$

2. Редукция сингулярного интегро-функционального уравнения к системе сингулярных интегральных уравнений. Нетеровость и индекс

Пусть

$$\varphi_k(x)=\varphi(x), x\in[x_k,x_{k+1}]=[\alpha_2^k(x_0),\alpha_2^k(x_1)]\,(k=\overline{-2,4}), \tag{6}$$

причем, согласно (7), (8),

$$\varphi_{-2}(x)=\varphi_{-1}(x)=\varphi_3(x)=\varphi_4(x)=0. \tag{7}$$

В терминах функций (6) , с учетом (7), произведем редукцию сингулярного интегро- функционального уравнения (1), определенного на промежутке $x_0<x<x_3$, к системе трёх сингулярных интегральных уравнений при $x_0<x<x_1$. С этой целью запишем уравнение (1) на отрезках

$[x_k, x_{k+1}] = [\alpha_2^k(x_0), \alpha_2^k(x_1)](k = 0,1,2)$, произведём замену x на $\alpha_2^k(x)$(x_k на $\alpha_2^k(x_k)$) $(k = 0,1,2)$ и учтем (6). В результате придем к системе

$$A_0(\alpha_2^k(x))\varphi_k(\alpha_2^k(x)) + A_1(\alpha_2^k(x))\varphi_{k-1}(\alpha_1^1(\alpha_2^k(x))) + A_2(\alpha_2^k(x))\varphi_{k-2}(\alpha_1^2(\alpha_2^k(x))) +$$

$$+ B_1(\alpha_2^k(x))\varphi_{k+1}(\alpha_2^{k+1}(x)) + B_2(\alpha_2^k(x))\varphi_{k+2}(\alpha_2^{k+2}(x)) +$$

$$+ \frac{C_0(\alpha_2^k(x))}{\pi i}\int\limits_{\alpha_1^0(\alpha_2^k(x_0))}^{\alpha_1^0(\alpha_2^k(x_1))} \frac{\varphi_k(t)dt}{t - \alpha_1^0(\alpha_2^k(x))} + \frac{C_1(\alpha_2^k(x))}{\pi i}\int\limits_{\alpha_1^1(\alpha_2^k(x_0))}^{\alpha_1^1(\alpha_2^k(x_1))} \frac{\varphi_{k-1}(t)dt}{t - \alpha_1^1(\alpha_2^k(x))} +$$

$$+ \frac{C_2(\alpha_2^k(x))}{\pi i}\int\limits_{\alpha_1^2(\alpha_2^k(x_0))}^{\alpha_1^2(\alpha_2^k(x_1))} \frac{\varphi_{k-2}(t)dt}{t - \alpha_1^2(\alpha_2^k(x))} + \frac{D_1(\alpha_2^k(x))}{\pi i}\int\limits_{\alpha_2^1(\alpha_2^k(x_0))}^{\alpha_2^1(\alpha_2^k(x_1))} \frac{\varphi_{k+1}(t)dt}{t - \alpha_2^1(\alpha_2^k(x))} +$$

$$+ \frac{D_2(\alpha_2^k(x))}{\pi i}\int\limits_{\alpha_2^2(\alpha_2^k(x_0))}^{\alpha_2^2(\alpha_2^k(x_1))} \frac{\varphi_{k+2}(t)dt}{t - \alpha_2^2(\alpha_2^k(x))} = f(\alpha_2^k(x)),\ x_0 < x < x_1\ (k = 0,1,2),$$

которую, в силу (7), (4)-(5), можно записать в форме

$$\begin{cases}
A_0(x)\varphi_0(x) + B_1(x)\varphi_1(\alpha_2(x)) + B_2(x)\varphi_2(\alpha_2^2(x)) + \\
\quad + \dfrac{C_0(x)}{\pi i}\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{\varphi_0(t)dt}{t - x} + \frac{D_1(x)}{\pi i}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\varphi_1(t)dt}{t - \alpha_2(x)} + \\
\quad + \dfrac{D_2(x)}{\pi i}\displaystyle\int_{x_2}^{x_3} \frac{\varphi_2(t)dt}{t - \alpha_2^2(x)} = f(x),\ x_0 < x < x_1; \\
A_1(\alpha_2(x))\varphi_0(x) + A_0(\alpha_2(x))\varphi_1(\alpha_2(x)) + B_1(\alpha_2(x))\varphi_2(\alpha_2^2(x)) + \\
\quad + \dfrac{C_1(\alpha_2(x))}{\pi i}\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{\varphi_0(t)dt}{t - x} + \frac{C_0(\alpha_2(x))}{\pi i}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\varphi_1(t)dt}{t - \alpha_2(x)} + \\
\quad + \dfrac{D_1(\alpha_2(x))}{\pi i}\displaystyle\int_{x_2}^{x_3} \frac{\varphi_2(t)dt}{t - \alpha_2^2(x)} = f(\alpha_2(x)),\ x_0 < x < x_1; \\
A_2(\alpha_2^2(x))\varphi_0(x) + A_1(\alpha_2^2(x))\varphi_1(\alpha_2(x)) + A_0(\alpha_2^2(x))\varphi_2(\alpha_2^2(x)) + \\
\quad + \dfrac{C_2(\alpha_2^2(x))}{\pi i}\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{\varphi_0(t)dt}{t - x} + \frac{C_1(\alpha_2^2(x))}{\pi i}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\varphi_1(t)dt}{t - \alpha_2(x)} + \\
\quad + \dfrac{C_0(\alpha_2^2(x))}{\pi i}\displaystyle\int_{x_2}^{x_3} \frac{\varphi_2(t)dt}{t - \alpha_2^2(x)} = f(\alpha_2^2(x)),\ x_0 < x < x_1;
\end{cases}$$

или

$$
\begin{cases}
A_0(x)\varphi_0(x)+B_1(x)\varphi_1(\alpha_2(x))+B_2(x)\varphi_2(\alpha_2^2(x))+ \\
\quad+\dfrac{C_0(x)}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_0(t)dt}{t-x}+\dfrac{D_1(x)}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_1(\alpha_2(t))(\alpha_2(t))'dt}{\alpha_2(t)-\alpha_2(x)}+ \\
\quad+\dfrac{D_2(x)}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_2(\alpha_2^2(t))(\alpha_2^2(t))'dt}{\alpha_2^2(t)-\alpha_2^2(x)}=f(x),\ x_0<x<x_1; \\
A_1(\alpha_2(x))\varphi_0(x)+A_0(\alpha_2(x))\varphi_1(\alpha_2(x))+B_1(\alpha_2(x))\varphi_2(\alpha_2^2(x))+ \\
\quad+\dfrac{C_1(\alpha_2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_0(t)dt}{t-x}+\dfrac{C_0(\alpha_2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_1(\alpha_2(t))(\alpha_2(t))'dt}{\alpha_2(t)-\alpha_2(x)}+ \\
\quad+\dfrac{D_1(\alpha_2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_2(\alpha_2^2(t))(\alpha_2^2(t))'dt}{\alpha_2^2(t)-\alpha_2^2(x)}=f(\alpha_2(x)),\ x_0<x<x_1; \\
A_2(\alpha_2^2(x))\varphi_0(x)+A_1(\alpha_2^2(x))\varphi_1(\alpha_2(x))+A_0(\alpha_2^2(x))\varphi_2(\alpha_2^2(x))+ \\
\quad+\dfrac{C_2(\alpha_2^2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_0(t)dt}{t-x}+\dfrac{C_1(\alpha_2^2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_1(\alpha_2(t))(\alpha_2(t))'dt}{\alpha_2(t)-\alpha_2(x)}+ \\
\quad+\dfrac{C_0(\alpha_2^2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_2(\alpha_2^2(t))(\alpha_2^2(t))'dt}{\alpha_2^2(t)-\alpha_2^2(x)}=f(\alpha_2^2(x)),\ x_0<x<x_1.
\end{cases}
\tag{8}
$$

Таким образом, если $\varphi(x)$ есть решение сингулярного интегро-функционального уравнения (1) на промежутке $x_0<x<x_3$, удовлетворяющее условиям по запаздыванию и опережению (2)-(3), то функции $\varphi_k(\alpha_2^k(x))\ (k=0,1,2)$, определенные на промежутке $x_0<x<x_1$, удовлетворяют системе (8) трех сингулярных интегральных уравнений без сдвигов. Очевидно, что если наоборот $\varphi_0(x),\varphi_1(\alpha_2(x)),\varphi_2(\alpha_2^2(x))$ – решения системы (8), то $\varphi_0(x)$ будет решением уравнения (1).

Пусть

$$
R_1(x,t)=\frac{1}{t-x}-\frac{(\alpha_2(t))'}{\alpha_2(t)-\alpha_2(x)},
$$

$$
R_2(x,t)=\frac{1}{t-x}-\frac{(\alpha_2^2(t))'}{\alpha_2^2(t)-\alpha_2^2(x)}.
\tag{9}
$$

Тогда система (8) примет вид

$$
\begin{cases}
A_0(x)\varphi_0(x)+B_1(x)\varphi_1(\alpha_2(x))+B_2(x)\varphi_2(\alpha_2^2(x))+ \\
\quad+\dfrac{C_0(x)}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_0(t)dt}{t-x}+\dfrac{D_1(x)}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_1(\alpha_2(t))dt}{t-x}+ \\
\quad+\dfrac{D_2(x)}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_2(\alpha_2^2(t))dt}{t-x}=f(x)+\dfrac{D_1(x)}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\varphi_1(\alpha_2(t))R_1(x,t)dt+ \\
\quad+\dfrac{D_2(x)}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\varphi_2(\alpha_2^2(t))R_2(x,t)dt,\ x_0<x<x_1; \\
A_1(\alpha_2(x))\varphi_0(x)+A_0(\alpha_2(x))\varphi_1(\alpha_2(x))+B_1(\alpha_2(x))\varphi_2(\alpha_2^2(x))+ \\
\quad+\dfrac{C_1(\alpha_2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_0(t)dt}{t-x}+\dfrac{C_0(\alpha_2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_1(\alpha_2(t))dt}{t-x}+ \\
\quad+\dfrac{D_1(\alpha_2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_2(\alpha_2^2(t))dt}{t-x}=f(\alpha_2(x))+\dfrac{C_0(\alpha_2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\varphi_1(\alpha_2(t))R_1(x,t)dt+ \\
\quad+\dfrac{D_1(\alpha_2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\varphi_2(\alpha_2^2(t)R_2(x,t)dt,\ x_0<x<x_1; \\
A_2(\alpha_2^2(x))\varphi_0(x)+A_1(\alpha_2^2(x))\varphi_1(\alpha_2(x))+A_0(\alpha_2^2(x))\varphi_2(\alpha_2(x))+ \\
\quad+\dfrac{C_2(\alpha_2^2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_0(t)dt}{t-x}+\dfrac{C_1(\alpha_2^2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_1(\alpha_2(t))dt}{t-x}+ \\
\quad+\dfrac{C_0(\alpha_2^2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\dfrac{\varphi_2(\alpha_2^2(t))dt}{t-x}=f(\alpha_2^2(x))+\dfrac{C_1(\alpha_2^2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\varphi_1(\alpha_2(t))R_1(x,t)dt+ \\
\quad+\dfrac{C_0(\alpha_2^2(x))}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\varphi_2(\alpha_2^2(t))R_2(x,t)dt,\ x_0<x<x_1.
\end{cases}
\tag{10}
$$

Систему (10) можно записать в форме одного матричного уравнения

$$
M(x)\overline{\varphi}(x)+\frac{N(x)}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\overline{\varphi}(t)dt}{t-x}=\overline{G}(x)\equiv\overline{F}(x)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{x_1}Q(x,t)\overline{\varphi}(t)dt,\ x_0<x<x_1, \tag{11}
$$

где $\overline{\varphi}(x)=(\varphi_0(x),\varphi_1(\alpha_2(x),\varphi_2(\alpha_2^2(x)))^T$, $\overline{F}(x)=(f(x),f(\alpha_2(x),f(\alpha_2^2(x)))^T$,

$$
M(x)=\begin{pmatrix} A_0(x) & B_1(x) & B_2(x) \\ A_1(\alpha_2(x)) & A_0(\alpha_2(x)) & B_1(\alpha_2(x)) \\ A_2(\alpha_2^2(x) & A_1(\alpha_2^2(x)) & A_0(\alpha_2^2(x)) \end{pmatrix},
$$

$$
N(x)=\begin{pmatrix} C_0(x) & D_1(x) & D_2(x) \\ C_1(\alpha_2(x)) & C_0(\alpha_2(x)) & D_1(\alpha_2(x)) \\ C_2(\alpha_2^2(x) & C_1(\alpha_2^2(x)) & C_0(\alpha_2^2(x)) \end{pmatrix},
$$

$$Q(x,t)=\begin{pmatrix} 0 & D_1(x)R_1(x,t) & D_2(x)R_2(x,t) \\ 0 & C_0(\alpha_2(x))R_1(x,t) & D_1(\alpha_2(x))R_2(x,t) \\ 0 & C_1(\alpha_2^2(x))R_1(x,t) & C_0(\alpha_2^2(x))R_2(x,t) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что (11) представляет собой полное сингулярное интегральное уравнение с выделенной характеристической частью. Аналогично [1,4] можно показать, что для ядер (9) справедлива оценка

$$\left|R_j(x,t)\right| \le \frac{L_j}{\left|x-t\right|^{1-\mu}}, \text{ где } 0 < L_j \equiv const\ (j=1,2).$$

Поэтому интегральный оператор, стоящий в правой части (11), вполне непрерывен в $H_\lambda, \lambda < \mu$.

Теорема 1. Для того чтобы оператор (11) был нетеровым, необходимо и достаточно выполнение всюду на $x_0 < x < x_1$ неравенств $\det[M(x) \pm N(x)] \neq 0$.

Теорема 2. Индекс нетерова оператора (11) вычисляется по формуле

$$Jnd\ \overline{G}(x) = \frac{1}{2\pi}\{\arg\frac{\det[M(x)-N(x)]}{\det[M(x)+N(x)]}\}, x_0 < x < x_1.$$

Как известно [1], уравнение (11) решается явно. После этого, учтя значение функции $\overline{G}(x)$, получим интегральное уравнение Фредгольма относительно $\overline{\varphi}(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.:Наука,1977.-640с.
2. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970.-380с.
3. Джураев А. Системы уравнений составного типа. М.:Наука,1971.-228с.
4. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977.-448с.
5. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. Об одном новом подходе к исследованию сингулярных интегральных уравнений со сдвигом // ДАН СССР. 1972. т.202 , №2.-с.273-276.
6. Чибрикова Л.И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций // Ученые записки Казанского университета. 1956.т.116,№4.- с.59-109.
7. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: АН СССР, 1959.- 164с.

УДК 517.968.22

ОБОБЩЕННОЕ ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ АБЕЛЯ ВТОРОГО РОДА С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ОПЕРЕЖЕНИЕМ

А.Н. Зарубин, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *aleks_zarubin@mail.ru*
Е.В. Чаплыгина, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *lena260581@yandex.ru*

Исследуется обобщенное интегро-функциональное уравнение Абеля второго рода в классе непрерывных по Гельдеру функций.

Ключевые слова: уравнение Абеля, запаздывание и опережение, интегральное уравнение, уравнение Вольтерра.

Многие задачи математической физики приводят к интегро-функциональным уравнениям с степенными ядрами. Подобные ядра появляются в ряде приложений, где приходится иметь дело с особенностями, являющимися характерным признаком для всякого рода источников и диполей (притяжения, тепла, упругих колебаний и т. д.).

Предлагаемая работа посвящена изучению интегро-функционального уравнения Абеля второго рода с некарлемановскими функциональными сдвигами опережающе-запаздывающего типа вида

$$A_0(x)\varphi(x)+A_1(x)\varphi(\alpha_1(x))+B_1(x)\varphi(\alpha_2(x))+$$
$$+C_0(x)\int\limits_{\alpha_1^0(x_0)}^{\alpha_1^0(x)}\frac{\varphi(t)dt}{(t-\alpha_1^0(x))^r}+C_1(x)\int\limits_{\alpha_1^1(x_0)}^{\alpha_1^1(x)}\frac{\varphi(t)dt}{(t-\alpha_1^1(x))^r}+ \qquad (1)$$
$$+D_1(x)\int\limits_{\alpha_2^1(x_0)}^{\alpha_2^1(x)}\frac{\varphi(t)dt}{(t-\alpha_2^1(x))^r}=f(x),\ x_0<x<x_2,0\le r<1,$$

с начальными условиями по запаздыванию и опережению

$$\varphi(x)=0,\ x\in[x_{-1},x_0]=[\alpha_1^1(x_0),\alpha_1^0(x_0)], \qquad (2)$$

$$\varphi(x)=0,\ x\in[x_2,x_3]=[\alpha_2^2(x_0),\alpha_2^3(x_0)], \qquad (3)$$

где $A_n(x)\,(n=0,1), B_1(x), C_k(x)(k=0,1), D_1(x), f(x)$ – заданные функции класса $H_\mu(0<\mu\le 1)$ Гельдера, $\varphi(t)$ – искомая функция, которая должна удовлетворять условию H_μ; $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – сохраняющие ориентацию взаимно-обратные диффеоморфизмы класса H_μ, удовлетворяющие условиям: $\alpha_1(x)<x,\alpha_1'(x)>1(\alpha_1'(x)<1)$ и $\alpha_2(x)>x,\alpha_2'(x)<1(\alpha_2'(x)>1)$, то есть представляющие собой растягивающе (сжимающе)–запаздывающее и сжимающе (растягивающе)-опережающее отображения, для которых выполняется тождества

$$\alpha_{3-j}(\alpha_j(x))=x(j=1,2), \qquad (4)$$

где x принадлежит области определения отображения $\alpha_j(x)$. Обозначим $x_0 = 0$ и зададим конечную последовательность x_n любым из следующих равносильных, вследствие тождества (4), равенств

$$x_n = \alpha_1(x_{n+1}), x_{n+1} = \alpha_2(x_n), \tag{5}$$

предполагая, что значения x_n определены и $\alpha_2(x_0) > 0$.

Например, если $n = \overline{-1,3}$, то, в силу (5),

$$x_{-1} = \alpha_1^1(x_0) < 0 = x_0 = \alpha_2^0(x_0) < x_1 = \alpha_2^1(x_0) < x_2 = \alpha_2^2(x_0) < x_3 = \alpha_2^3(x_0).$$

Здесь и далее обозначено

$$\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_j(\alpha_j(\ldots(\alpha_j(x))\ldots))}_{m\ раз}, \text{ если } m > 0, \alpha_j^0(x) \equiv x;$$

$$\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_{3-j}(\alpha_{3-j}(\ldots(\alpha_{3-j}(x))\ldots))}_{-m\ раз}, \text{ если } m < 0, j = 1,2.$$

Тип функциональных отклонений очевиден из представлений

$$\varphi(\alpha_1^k(x)) = \varphi(x - (x - \alpha_1^k(x))) = \varphi(x - \tau_1^k(x)),$$
$$\varphi(\alpha_2^k(x)) = \varphi(x + (\alpha_2^k(x) - x)) = \varphi(x + \tau_2^k(x)),$$

где $\tau_1^k(x) = x - \alpha_1^k(x) > 0, \tau_2^k(x) = \alpha_2^k(x) - x > 0, k = 1,2,...$

Пусть

$$\varphi_k(x) = \varphi(x), x \in [x_k, x_{k+1}] = [\alpha_2^k(x_0), \alpha_2^k(x_1)]\ (k = \overline{-1,3}), \tag{6}$$

причем, согласно (2), (3),

$$\varphi_{-1}(x) = \varphi_2(x) = 0. \tag{7}$$

В терминах функций (6), с учетом (7), сведем интегро-функциональное уравнение (1), определенное на промежутке $x_0 < x < x_2$, к системе двух интегральных уравнений при $x_0 < x < x_1$. Для этого запишем уравнение (1) на отрезках $[x_k, x_{k+1}] = [\alpha_2^k(x_0), \alpha_2^k(x_1)](k = 0,1)$ и сделаем замену x на $\alpha_2^k(x)$ (x_k на $\alpha_2^k(x_k)$) $(k = 0,1)$ и учтем (6). В результате придем к системе

$$A_0(\alpha_2^k(x))\varphi_k(\alpha_2^k(x)) + A_1(\alpha_2^k(x))\varphi_{k-1}(\alpha_1^1(\alpha_2^k(x))) +$$
$$+ B_1(\alpha_2^k(x))\varphi_{k+1}(\alpha_2^{k+1}(x)) +$$
$$+ C_0(\alpha_2^k(x)) \int_{\alpha_1^0(\alpha_2^k(x_0))}^{\alpha_1^0(\alpha_2^k(x))} \frac{\varphi_k(t)dt}{(t - \alpha_1^0(\alpha_2^k(x)))^r} + C_1(\alpha_2^k(x)) \int_{\alpha_1^1(\alpha_2^k(x_0))}^{\alpha_1^1(\alpha_2^k(x))} \frac{\varphi_{k-1}(t)dt}{(t - \alpha_1^1(\alpha_2^k(x)))^r} +$$
$$+ D_1(\alpha_2^k(x)) \int_{\alpha_2^1(\alpha_2^k(x_0))}^{\alpha_2^1(\alpha_2^k(x))} \frac{\varphi_{k+1}(t)dt}{(t - \alpha_2^1(\alpha_2^k(x)))^r} = f(\alpha_2^k(x)), x_0 < x < x_1\ (k = 0,1)$$

,

которую, в силу (7), (4)-(5), можно записать в форме

$$\begin{cases} A_0(x)\varphi_0(x)+B_1(x)\varphi_1(\alpha_2(x))+ \\ +C_0(x)\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\varphi_0(t)dt}{(t-x)^r}+D_1(x)\int\limits_{x_1}^{\alpha_2(x)}\dfrac{\varphi_1(t)dt}{(t-\alpha_2(x))^r}=f(x),\ x_0<x<x_1, \\ A_0(\alpha_2(x))\varphi_1(\alpha_2(x))+A_1(\alpha_2(x))\varphi_0(x)+ \\ \quad +C_1(\alpha_2(x))\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\varphi_0(t)dt}{(t-x)^r}+C_0(\alpha_2(x))\int\limits_{x_1}^{\alpha_2(x)}\dfrac{\varphi_1(t)dt}{(t-\alpha_2(x))^r}=f(\alpha_2(x)),\ x_0<x<x_1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} A_0(x)\varphi_0(x)+B_1(x)\varphi_1(\alpha_2(x))+ \\ +C_0(x)\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\varphi_0(t)dt}{(t-x)^r}+D_1(x)\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\varphi_1(\alpha_2(t))(\alpha_2(t))'dt}{(\alpha_2(t)-\alpha_2(x))^r}=f(x),\ x_0<x<x_1, \\ A_1(\alpha_2(x))\varphi_0(x)+A_0(\alpha_2(x))\varphi_1(\alpha_2(x))+ \\ +C_1(\alpha_2(x))\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\varphi_0(t)dt}{(t-x)^r}+C_0(\alpha_2(x))\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\varphi_1(\alpha_2(t))(\alpha_2(t))'dt}{(\alpha_2(t)-\alpha_2(x))^r}=f(\alpha_2(x)),\ x_0<x<x_1. \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, если $\varphi(x)$ есть решение уравнения (1) на промежутке $x_0<x<x_2$, удовлетворяющее условиям (2)-(3), то функции $\varphi_k(\alpha_2^k(x))\,(k=0,1)$, определенные на промежутке $x_0<x<x_1$, удовлетворяют системе (8). Очевидно, что если наоборот $\varphi_0(x),\varphi_1(\alpha_2(x))$ – решения системы (8), то $\varphi(x)$ будет решением уравнения (1).

Пусть

$$S(x,t)=\frac{1}{(t-x)^r}-\frac{(\alpha_2(t))'}{(\alpha_2(t)-\alpha_2(x))^r}. \tag{9}$$

Тогда система (8) примет вид

$$\begin{cases} A_0(x)\varphi_0(x)+B_1(x)\varphi_1(\alpha_2(x))+ \\ +C_0(x)\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\varphi_0(t)dt}{(t-x)^r}+D_1(x)\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\varphi_1(\alpha_2(t))dt}{(t-x)^r}= \\ =f(x)+D_1(x)\int\limits_{x_0}^{x}\varphi_1(\alpha_2(t))S(x,t)dt,x_0<x<x_1; \\ A_1(\alpha_2(x))\varphi_0(x)+A_0(\alpha_2(x))\varphi_1(\alpha_2(x))+ \\ +C_1(\alpha_2(x))\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\varphi_0(t)dt}{(t-x)^r}+C_0(\alpha_2(x))\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\varphi_1(\alpha_2(t))dt}{(t-x)^r}= \\ =f(\alpha_2(x))+C_0(\alpha_2(x))\int\limits_{x_0}^{x}\varphi_1(\alpha_2(t))S(x,t)dt,x_0<x<x_1. \end{cases} \tag{10}$$

Систему (10) можно записать в форме одного матричного уравнения

$$R(x)\overline{\varphi}(x)+P(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\overline{\varphi}(t)dt}{(t-x)^r}=\overline{G}(x)\equiv F(x)+\int_{x_0}^{x}Q(x,t)\overline{\varphi}(t)dt,\ x_0<x<x_1, \quad (11)$$

где

$$\overline{\varphi}(x)=(\varphi_0(x),\varphi_1(\alpha_2(x)))^T,\ \overline{F}(x)=(f(x),f(\alpha_2(x)))^T,$$

$$R(x)=\begin{pmatrix}A_0(x) & B_1(x)\\ A_1(\alpha_2(x)) & A_0(\alpha_2(x))\end{pmatrix},\ P(x)=\begin{pmatrix}C_0(x) & D_1(x)\\ C_1(\alpha_2(x)) & C_0(\alpha_2(x))\end{pmatrix},$$

$$Q(x,t)=\begin{pmatrix}0 & D_1(x)S(x,t)\\ 0 & C_0(\alpha_2(x))S(x,t)\end{pmatrix};$$

или

$$\overline{\varphi}(x)+P(x)\int_{x_0}^{x_1}\frac{\overline{\varphi}(t)dt}{(t-x)^r}=\overline{V}(x)\equiv R^{-1}(x)\overline{G}(x)\equiv\overline{F}(x)+\int_{x_0}^{x}Q(x,t)\overline{\varphi}(t)dt,\ x_0<x<x_1,$$

где

$$\overline{P}(x)=R^{-1}(x)P(x),$$
$$\overline{F}(x)=R^{-1}(x)F(x),$$
$$\overline{Q}(x,t)=R^{-1}(x)Q(x,t),$$

а $R^{-1}(x)-$ обратная матрица для $R(x)$.

Аналогично [1], можно показать, что для ядра (9) справедлива оценка

$$\left|S(x,t)\right|\le\frac{c}{\left|x-t\right|^{1-\mu}}.$$

Уравнение (11) решается явно, аналогично [2,3]. После этого, учитывая значение функции $\overline{G}(x)$, получим интегральное уравнение Вольтерра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука,1977. – 640 с.
2. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1975. - 303 с.
3. Мюнтц Г. Интегральные уравнения. М.: Изд-во «Ленинград». 1934. - 331 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ СОЦИАЛЬНОЙ ГРУППЫ

М.Г. Ивакина
ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»
e-mail: *marinaiv6214@gmail.com*
С.А. Бельман, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»
e-mail: *s.belman@rsu.edu.ru*

Пусть деятельность коллектива, изолированного от внешнего воздействия и состоящего из *n* субъектов, регулирует руководитель в зависимости от активности группы. Целью руководства является эффективная деятельность коллектива. Эффективным считаем такой режим деятельности группы, при котором её члены работают активно. В случае неэффективной деятельности руководитель начинает активизировать работу подчинённых [1].

Учитывая выше сказанное, предположим, что группа в момент времени t находится в состоянии M, которое не удовлетворяет требованиям руководителя, т.е. эффективность ее деятельности снизилась до значения y_1. В связи с этим руководитель оказывает на группу некоторое воздействие I с целью активизации ее деятельности до необходимого уровня y_2. В результате группа переходит в новое состояние H, которое является эффективным.

Таким образом, получаем

$$M + I = H. \qquad (1)$$

Данное равенство описывает переход системы из некоторого начального состояния M в конечное состояние H после воздействия на нее со стороны руководителя I.

Предположим, что начальное состояние системы в момент времени t описывается соотношением $M = ay(t)$. Регулирующее воздействие оказывается через один временной промежуток, поэтому $I = by(t+1)$. Реакция субъектов наблюдается через два временных промежутка. Тогда получаем, $H = cy(t+2)$, где $a < 0, b > 0, c > 0$ - коэффициенты пропорциональности.

Тогда (1) примет вид разностного уравнения

$$ay(t) + by(t+1) = cy(t+2). \qquad (2)$$

Согласно теории разностных уравнений [2] получен общий вид решений (2) в зависимости от характеристических значений [3].

Рассмотрим влияние значений параметров a, b и c на состояние системы.

К примеру, при $a = -300$, $b = 500$, $c = 400$ (рисунок 1) на некоторых промежутках решение имеет периодический вид. Т.е. если на неэффективную деятельность подействовать достаточно сильным воздействием руководителя, то это приведет к эффективной деятельности коллектива.

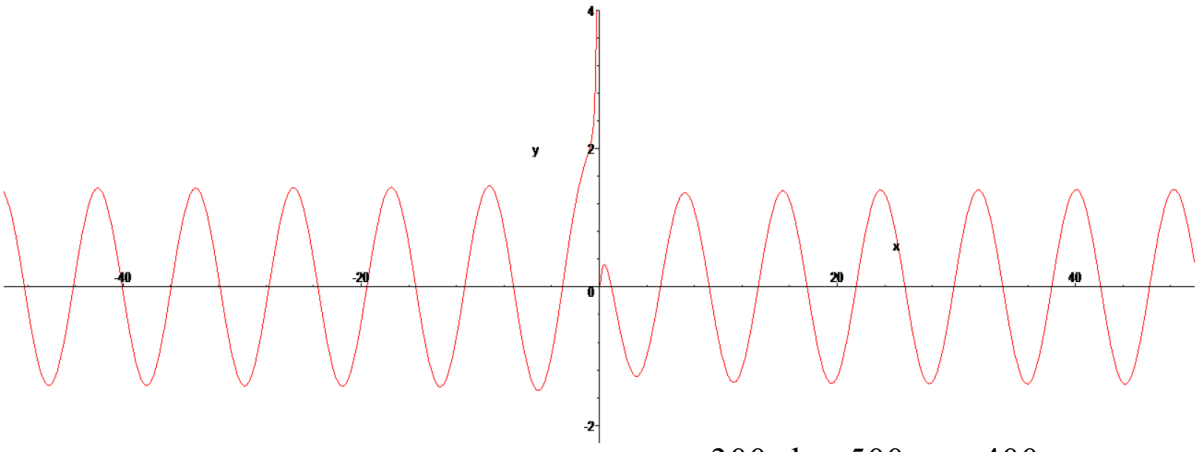


Рисунок 1 – Состояние системы при $a = -300$, $b = 500$, $c = 400$

При $a = -500$, $b = 300$, $c = 5$ (рисунок 2) решение не является периодическим. А именно, при чрезмерном воздействии руководителя ожидаемый эффект будет получен единожды, но с последующим непредсказуемым поведением социальной группы.

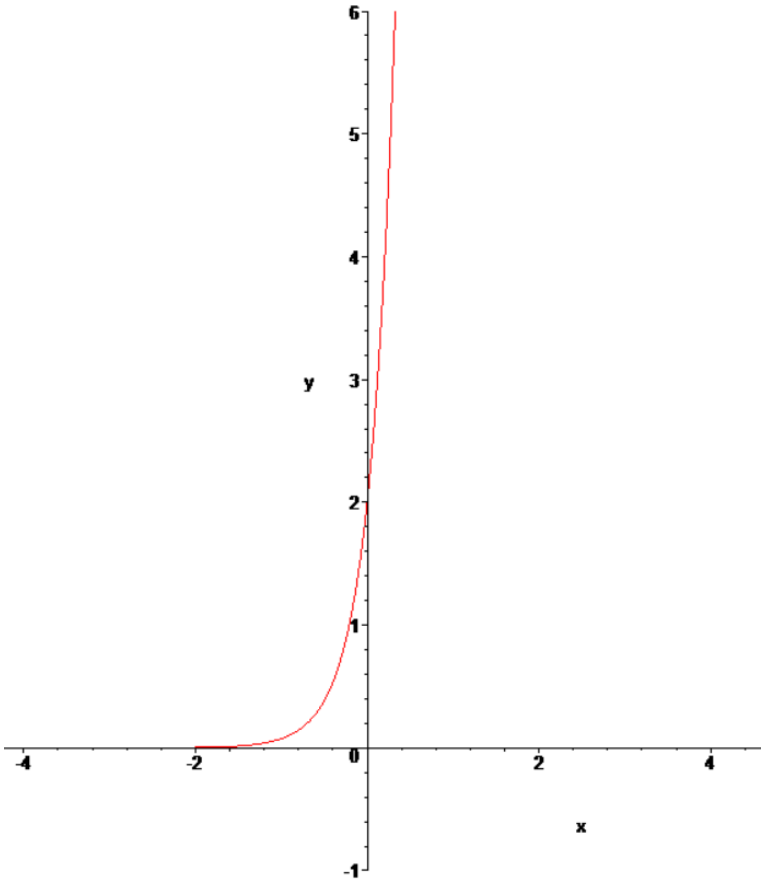


Рисунок 2 – Состояние системы при $a = -500$, $b = 300$, $c = 5$

Дальнейшая работа с математической моделью связана с подбором коэффициентов, наилучшим образом отражающих зависимость поведения группы от действий руководителя.

Таким образом, исследование позволит определить:

- условия стабильной работы социальной группы, функционирование которой происходит в соответствии с математической моделью;

- установить режим оптимальной активизации трудового коллектива
- изучить влияние внешних воздействий на деятельность социальной группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бельман С.А. Динамическая модель социальной группы // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т.17 – №4 – С. 19-20
2. Дергачев В.М., Лелявин С.Н. Дифференциальные и разностные уравнения. — М. : Русайнс, 2016. – 96 с.
3. Ивакина М.Г., Бельман С.А..Динамическая модель деятельности социальной группы // Геометрические методы в теории управления и математической физике. – 2018. – 88 с.

УДК 517.95

О ЗАДАЧЕ О НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А.В. Копаев, к.ф.-м.н, доц.
МГТУ имени Н.Э. Баумана

Многие проблемы прикладного характера (например, проблемы околозвукового течения сжимаемой среды) сводятся к решению дифференциальных уравнений смешанного типа (уравнению Трикоми, уравнению Чаплыгина и др.). Важной моделью уравнения смешанного типа является уравнение Лаврентьева-Бицадзе [1]. Решением различных краевых задач для этого уравнения в различных областях занимались многие математики. Отметим здесь Е. И. Моисеева, А. Н. Зарубина, К. Б. Сабитова, А. П. Солдатова. Мы решаем задачу о наклонной производной в полуплоскости. При этом областью эллиптичности также является полуплоскость, а областью гиперболичности – полоса. На одной из прямых, ограничивающих полосу, задана наклонная производная, а на другой прямой - границе раздела полосы и полуплоскости – решения сопрягаются краевыми условиями четвертого рода.

Введём следующие обозначения: $l_a = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : y = a\}$ – прямая, параллельная оси Ox ; $D_a^+ = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : y > a\}$ и $D_a^- = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : y < a\}$ - полуплоскости, на которые прямая l_a разбивает плоскость $\mathbb{R}^2$. В полуплоскости D_{-h}^+ $(h > 0)$ рассмотрим уравнение Лаврентьева – Бицадзе

$$U_{xx}'' + sgn(y)U_{yy}'' = 0 \qquad (1)$$

В полуплоскости D_0^+ - области эллиптичности уравнения (1) – положим $U(x;y) = U^+(x;y)$, а в полосе $G = D_0^- \cap D_{-h}^+ = \{((x;y) \in \mathbb{R}^2 : -h < y < 0)\}$ - области гиперболичности уравнения (1) - положим $U(x;y) = U^-(x;y)$.

Пусть $q(x)$ - функция, удовлетворяющая на числовой прямой условию Гёльдера (включая бесконечно удаленную точку) вместе с производной

$p(x) = q'(x)$ и пусть $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (φ - острый угол). Рассмотрим следующую задачу.

Найти функцию $U^+(x;y)$, гармоническую и ограниченную в полуплоскости D_0^+ и функцию $U^-(x;y)$, ограниченную и удовлетворяющую в полосе G уравнению

$$U''_{xx} - U''_{yy} = 0$$

по краевому условию

$$\frac{\partial U^-}{\partial x}(x;-h)\cos\varphi - \frac{\partial U^-}{\partial y}(x;-h)\sin\varphi = p(x) \qquad (2)$$

(по заданной на прямой l_{-h} наклонной производной в направлении, образующим с границей области угол φ) и по условиям сопряжения функций $U^+(x;y)$ и $U^-(x;y)$ на оси Ox

$$U^-(x;0) = U^+(x;0), \quad \frac{\partial U^-}{\partial y}(x;0) = k\frac{\partial U^+}{\partial y}(x;0) \ (k>0) \qquad (3)$$

Решим эту задачу. Представим функцию $U^-(x;y)$ по формуле Даламбера

$$U^-(x;y) = f(x+y) + g(x-y)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции.
Используя краевое условие (2) выразим одну из этих функций через другую. Получим

$$g(x) = \mu\, q(x-h) + \mu\, S + \lambda\, f(x-2h)$$

где S - произвольная постоянная,

$$\lambda = \frac{\sin\varphi - \cos\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{tg\,\varphi - 1}{tg\,\varphi + 1}\ (|\lambda| < 1), \qquad \mu = \frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

Так как функция $U^+(x;y)$ является гармонической и ограниченной в верхней полуплоскости, то в этой полуплоскости она представима интегралом Пуассона (с учетом первого из условий сопряжения (3))

$$U^+(x;y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi) + \lambda\, f(\xi-2h) + \mu\, q(\xi-h)}{(\xi-x)^2 + y^2}\,d\xi + \mu\, S$$

Продифференцировав последнее равенство по y и применив к полученному интегралу формулу интегрирования «по частям», получаем

$$\frac{\partial U^+}{\partial y}(x;y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(f'(\xi) + \lambda f'(\xi-2h) + \mu p(\xi-h))(\xi-x)d\xi}{(\xi-x)^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial U^+}{\partial y}(x;0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(f'(\xi) + \lambda f'(\xi-2h) + \mu p(\xi-h))d\xi}{\xi-x}$$

Здесь мы должны предположить, что функция $f'(x)$ удовлетворяет на числовой прямой условию Гёльдера (включая бесконечно удалённую точку). Теперь в силу второго из условий сопряжения (3) для нахождения неизвестной функции $f'(x)$ получаем сингулярное интегральное уравнение

$$f'(x) - \lambda f'(x-2h) - \mu p(x-h) = \frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\big(f'(\xi) + \lambda f'(\xi-2h) + \mu p(\xi-h)\big)d\xi}{\xi-x}$$

Рассмотрим два интеграла типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'(\xi\}d\xi}{\xi-z}=\begin{cases}F^+(z), Im\ z>0,\\ F^-(z), Im\ z<0\end{cases}\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(\xi)d\xi}{\xi-z}=\begin{cases}P^+(z), Im\ z>0,\\ P^-(z), Im\ z<0\end{cases}$$

Применяя формулы Сохоцкого для интеграла типа Коши, получим задачу о скачке на действительной оси:

$$F^+(x)(1-ki)-\lambda F^+(x-2h)(1+ki)-\mu P^+(x-h)(1+ki)=$$
$$=F^-(x)(1+ki)-\lambda F^-(x-2h)(1-ki)-\mu P^-(x-h)(1-ki)$$

Решая эту задачу, находим, что в верхней полуплоскости

$$F^+(z)-\lambda e^{i\psi}F^+(z-2h)=\ \mu e^{i\psi}P^+(z-h)+\frac{K}{1-ki} \tag{4}$$

а в нижней полуплоскости

$$F^-(z)-\lambda e^{-i\psi}\,F^-(z-2h)=\mu e^{-i\psi}\,P^-(z-h)+\frac{K}{1+ki} \tag{5}$$

где $K=\ K_1+\ i\,K_2$ - произвольная комплексная постоянная, а

$$\psi=\arg\frac{1+k\,i}{1-k\,i}=2\ arctg\ k$$

Решая функциональные уравнения (4) и (5), находим, что в верхней полуплоскости

$$F^+(z)=\mu\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m e^{i(m+1)\psi}P^+(z-(2m+1)h)+\frac{K}{(1-ki)(1-\lambda e^{i\psi})}$$

а в нижней полуплоскости

$$F^-(z)=\mu\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m e^{-i(m+1)\psi}P^-(z-(2m+1)h)+\frac{K}{(1+ki)(1-\lambda e^{-i\psi})}$$

Теперь мы можем найти функцию $f'(x)=F^+(x)-F^-(x)$ (используя формулы Сохоцкого):

$$f'(x)=\ \mu\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\cos(m+1)\psi\,p(x-(2m+1)h)+$$
$$+\frac{\mu}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\sin(m+1)\psi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(\xi)d\xi}{\xi-(x-(2m+1)h)}+$$
$$+\frac{2(iK_1-K_2)(k-k\lambda\cos\psi+\lambda\,sin\psi)}{(1+k^2)(1-2\lambda\cos\psi+\ \lambda^2)}$$

Так как $f'(x)$ - действительнозначная функция, то $K_1=0$. А так как функция $f(x)$ (первообразная для функции $f'(x)$) ограничена, то и $K_2=0$. Окончательно,

$$f'(x)=\mu\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\cos(m+1)\psi\ p(x-(2m+1)h)+$$
$$+\frac{\mu}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\sin(m+1)\psi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(\xi)d\xi}{\xi-(x-(2m+1)h)} \tag{6}$$

Проинтегрируем последнее равенство по x , а затем применив к каждому из интегралов в правой части полученного равенства формулу интегрирования «по частям», получим:

$$f(x) = \mu \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \cos(m+1)\psi\, q(x-(2m+1)h) + \\ + \frac{\mu}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \sin(m+1)\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi)d\xi}{\xi - (x-(2m+1)h)} + T$$

где T - произвольная (вещественная) постоянная. При этом в ходе преобразований мы должны предположить, что $p(\infty) = 0$ и

$$|p(x)| < \frac{A}{|x|^{\alpha}} \ (\alpha > 1, |x| > E)$$

Теперь мы можем найти искомую функцию $U^{-}(x;y)$:

$$U^{-}(x;y) = \mu \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \cos(m+1)\psi\, q(x+y-(2m+1)h) + \\ + \mu \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \cos m\psi\, q(x-y-(2m+1)h) + \\ + \frac{\mu}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \sin(m+1)\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi)d\xi}{\xi - (x+y-(2m+1)h)} + \\ + \frac{\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \sin m\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi)d\xi}{\xi - (x-y-(2m+1)h)} + C$$

где $C = (1+\lambda)T + \mu S$ - произвольная постоянная. Теперь для решения задачи о наклонной производной остается найти функцию $U^{+}(x;y)$ по краевому условию $U^{+}(x;0) = U^{-}(x;0)$ (интегралом Пуассона).

Рассмотрим еще частный случай задачи о наклонной производной при $\varphi = \frac{\pi}{4}$. В этом случае $\cos\varphi = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda = 0$, $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\psi = \frac{1-k^2}{1+k^2}$, $\sin\psi = \frac{2k}{1+k^2}$,

$$U^{-}(x;y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\, q(x+y-h) + q(x-y-h) + \right. \\ \left. + \frac{2k}{\pi(1+k^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi)d\xi}{\xi - (x+y-h)} \right) + C$$

Отметим, что эта формула была получена нами ранее в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. 1953. Т. 41. С. 3-59.
2. Алгазин О. Д., Копаев А. В. К задаче о наклонной производной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в полуплоскости //Математика и Математическое моделирование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. Журн. 2016. № 02. С. 1-8.

УДК 517.983

О СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ МЕР НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.Ф. Курбыко, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
e-mail: *levizov@rambler.ru*
С.В. Левизов, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
e-mail: *levizov@rambler.ru*

Доказывается, что если линейный непрерывный оператор, действующий из пространства основных мер в пространство обобщенных мер, определенных на бесконечномерном гильбертовом пространстве, коммутирует со свёрткой мер, тогда такой оператор представим в виде свёртки обобщенной меры с основной мерой.

Ключевые слова: линейные операторы, обобщённые функции, обобщённые меры, свёртка мер, преобразование Фурье, псевдодифференциальные операторы.

К настоящему времени опубликовано значительное количество работ, посвящённых исследованию линейных непрерывных операторов, определённых в пространствах мер и функций на бесконечномерном пространстве. Многие методы и результаты исследования таких бесконечномерных операторов и связанных с ними уравнений существенно отличаются от конечномерных (см., в частности, [1]-[4] и имеющуюся там библиографию). Эти отличия связаны с тем, что в бесконечномерном пространстве отсутствует аналог меры Лебега. Меры на таком пространстве нельзя отождествить с обобщёнными функциями. Фактически на данное обстоятельство впервые обратил внимание С.В. Фомин [5], указавший, что понятие распределения в смысле Шварца в бесконечномерном случае расщепляется. Поэтому появляются два вида распределений: обобщённые функции - линейные непрерывные функционалы на основном пространстве гладких мер и обобщенные меры - линейные непрерывные функционалы на основном пространстве гладких функций.

В настоящей работе изучаются линейные непрерывные операторы, коммутирующие со свёрткой в пространстве S гладких мер μ на бесконечномерном гильбертовом пространстве H, быстро убывающих по вариации вместе со всеми своими дифференциалами $d_h\mu$.

Известно [6, п. 5.13.3], что, если D - пространство Шварца основных функций на конечномерном пространстве R^n и $T: D \to D'$ - линейный непрерывный оператор, то следующие условия эквивалентны:

(1) оператор $T: D \to D'$ перестановочен со свёртками;

(2) существует распределение $L \in D'$ такое, что $Tf = L * f$ для всех $f \in D$. Здесь $L * f \in C^{\infty}$, $C^{\infty} \subset D'$ и свёртка определяется равенством $L * f(x) = L(t_x f)$, где $t_x f(y) = f(x - y)$. В статье доказывается бесконечномерный аналог этого утверждения для случая оператора, действующего из пространства основных мер S в пространство обобщённых мер $\widetilde{S}'$. Авторами построен пример бесконечномерного псевдодифференциального оператора и его представление в виде свёртки обобщённой меры с основной мерой. В статье используется, в основном, терминология работ [2], [3] и [7], частично приведённая ниже.

Через $H_1 \subset H$ обозначается пара бесконечномерных гильбертовых пространств со скалярными произведениями $(.,.)_1, (.,.)$, соответственно, связанных плотным вложением типа Гильберта-Шмидта; μ - комплекснозначная мера, определённая на σ – алгебре B борелевских подмножеств пространства H.

Определение 1 (С.В. Фомин). Мера μ называется дифференцируемой по подпространству H_1, если для любых $h \in H_1$ и $E \in \mathrm{B}$ существует конечный предел $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\mu(E + th) - \mu(E)}{t} = d_h \mu(E)$ и для каждого фиксированного $E \in \mathrm{B}$ отображение $h \to d_h \mu(E)$ представляет собой линейный непрерывный функционал на H_1. При этом отображение $h \to d_h \mu(E)$ называется производной меры μ на множестве E по подпространству H_1. Выражение $d_h \mu(\cdot)$ при каждом фиксированном $h \in H_1$ представляет собой функцию множества, определённую на B, которая называется дифференциалом меры μ по направлению h.

Определение 2. Пусть f - суммируемая по мере μ функция на H, произведением меры μ на функцию f называется мера $f\mu$, определённая равенством $f\mu(E) = \int\limits_E f(\xi) d\mu(\xi)$, $E \in \mathrm{B}$. Свёрткой функции f и меры μ называется функция, определённая равенством $f * \mu(x) = \int\limits_H f(x - \xi) d\mu(\xi)$, $x \in H$.

Определение 3. Пусть μ_1 и μ_2 - две меры на (H, B). Свёрткой мер μ_1 и μ_2 называется мера, определённая равенством $\mu_1 * \mu_2(E) = \int\limits_H \mu_1(E - x) d\mu_2(x)$, $E \in \mathrm{B}$.

Определение 4. Преобразованием Фурье меры μ называется функция $F[\mu]: H \to C^1$, определённая равенством $F[\mu](y) = \int\limits_H e^{i(x,y)} d\mu(y)$, $y \in H$.

Опишем теперь пространства основных мер и основных функций на бесконечномерном гильбертовом пространстве H и, соответственно, пространства обобщённых функций и обобщённых мер. Через S обозначается линейное пространство всех комплекснозначных мер μ на (H, B), бесконечно дифференцируемых по подпространству H_1, быстро убывающих по вариации вместе со всеми своими дифференциалами $d_{h^q} \mu$. Линейное пространство S наделяется локально выпуклой топологией t, задаваемой счётным семейством полунорм [3]:

$\|\mu\|_n = \sup_{|p|,|q|\le n;h,g} \mathrm{var}(g,f)^p d_{h^q}\mu$, где $n = 0,1,2,...$; $p = (p_1, p_2, ..., p_k)$; $q = (q_1, q_2, ..., q_m)$, $|p| = \sum_{i=1}^{k} p_i$; $|q| = \sum_{j=1}^{m} q_j$; p_i и q_j - целые неотрицательные числа; $h = (h_1, h_2, ..., h_m)$; $g = (g_1, g_2, ..., g_k)$; $q_i \in H_1$ и $h_j \in H_1$; $\|h_j\|_1 = \|q_i\|_1 = 1$. Здесь $d_{h^q}\mu$ - мера, полученная из меры μ дифференцированием q_1 раз по направлению h_1, q_2 раз по направлению h_2 и так далее; $(g,f)^p d_{h^q}\mu$ - мера, равная произведению меры $d_{h^q}\mu$ на функцию $(g,f)^p = \prod_{i=1}^{k} (g_i, f)^{p_i}$. Образ пространства S при отображении $F : \mu \to F[\mu]$ обозначается через $\widetilde{S}$. Линейное пространство $\widetilde{S}$ наделяется топологией t_f, индуцированной из S преобразованием Фурье, здесь $\|f\|_n = \|\mu\|_n, n = 0,1,2,...$ для $f = F[\mu], \mu \in S$. Элементы пространства S называются основными мерами, а элементы пространства $\widetilde{S}$ - основными функциями.

Через $\widetilde{S}'$ обозначается линейное пространство, сопряжённое к $(\widetilde{S}, t_f)$ и называется пространством обобщённых мер; через S' - пространство, сопряжённое к (S,t), называемое пространством обобщённых функций. Пространство $\widetilde{S}'$ рассматривается в слабой топологии $\sigma = \sigma(\widetilde{S}', \widetilde{S})$ пары линейных пространств $\widetilde{S}$ и $\widetilde{S}'$ в двойственности. Через (S,τ) обозначается пространство S в топологии τ, индуцированной вложением $S \subset (\widetilde{S}', \sigma)$.

Определение 5. Свёрткой основной меры μ с обобщённой мерой $Me \in \widetilde{S}'$ называется обобщенная мера $Me * \mu$, определённая равенством: $\langle Me * \mu, \varphi \rangle = \langle Me, \mu^- * \varphi \rangle, \varphi \in \widetilde{S}$. Здесь мера $\mu^- \in S$ и $\mu^-(E) = \mu(-E)$ для всякого $E \in \mathrm{B}$; функция $\mu^- * \varphi$ определяется равенством: $\mu^- * \varphi(x) = \int_H \varphi(x - z) d\mu^-(z), x \in H$.

Из последнего равенства следует, что для $\varphi = F[\nu]$ и $\nu \in S$ функция $\mu^- * \varphi = F[F[\mu]\nu]$. Поэтому $\mu^- * \varphi \in \widetilde{S}$ и отображение $\varphi \to \mu^- * \varphi$ непрерывно в $\widetilde{S}$. Следовательно, свёртка $Me * \mu \in \widetilde{S}'$ и корректно определена.

Теорема. Если $A : (S,\tau) \to (\widetilde{S}', \sigma)$ - линейный непрерывный оператор, то следующие условия эквивалентны:

(u1) оператор A коммутирует со свёрткой основных мер;

(u2) существует обобщённая мера $Me \in \widetilde{S}'$ такая, что $A\mu = Me * \mu$ для всех $\mu \in S$.

Доказательство. Докажем импликацию $(u1) \Rightarrow (u2)$. Рассмотрим последовательность гауссовских мер $\{\mu_n\}_{n \in N}$ на H, заданных своим преобразованием Фурье: $F[\mu_n](y) = \exp\{-(By, y)/2n^2\}$, где $B : H \to H$ - ядерный положительно определённый оператор. Для всех $n \in N$ мера $\mu_n \in S$ и так как $S \subset (\widetilde{S}', \sigma)$, то мера μ_n является линейным непрерывным функционалом на $(\widetilde{S}, t_f)$. Причём, последовательность $\{\mu_n\}_{n \in N}$ сходится к обобщённой мере δ в пространстве $(\widetilde{S}', \sigma)$, то есть $\langle \mu_n, F[\nu] \rangle = \int_H \{\int_H \exp\{i(x,y)\} d\nu(y)\} d\mu_n(x) \to F[\nu](0)$ при $n \to \infty$. В силу непрерывности операции свёртки получаем, что $\lim_{n \to \infty} (\mu_n * \mu) = \mu$ в пространстве $(\widetilde{S}', \sigma)$. Из сходи-

мости последовательности $\{\mu_n\}_{n\in N}$ в слабой топологии следует, что множество мер $\{\mu_n, n\in N\}$ ограничено в пространстве (S,τ). Так как согласно условию теоремы $A:(S,\tau)\to(\widetilde{S}',\sigma)$ - линейный непрерывный оператор, то множество $\{A\mu_n, n\in N\}$ ограничено в пространстве $(\widetilde{S}',\sigma)$. Пространство $(\widetilde{S},t_f)$ является полным счётно-нормированным пространством и, следовательно, представляет собой бочечное пространство. Из ограниченности множества $\{A\mu_n, n\in N\}$ в сопряжённом пространстве вытекает его относительная компактность в слабой топологии $\sigma=\sigma(\widetilde{S}',\widetilde{S})$ [6, т. 11.4] и, следовательно, наличие в нём слабой предельной точки, которую обозначим через Me. Теперь получаем, что мера $Me*\mu$ является предельной точкой последовательности $\{A\mu_n*\mu, n\in N\}$. Из условия $(u1)$ и непрерывности оператора $A:(S,\tau)\to(\widetilde{S}',\sigma)$ для всех $\mu\in S$ имеем: $A\mu=\lim\limits_{n\to\infty}A(\mu_n*\mu)=\lim\limits_{n\to\infty}(A\mu_n*\mu)=Me*\mu$. Импликация $(u1)\Rightarrow(u2)$ доказана.

Докажем импликацию $(u2)\Rightarrow(u1)$. Предположим, что существует обобщённая мера Me такая, что $A\mu=Me*\mu$ для всех $\mu\in S$. Пусть $\mu_1\in S$ и $\mu_2\in S$, тогда получим $A(\mu_1*\mu_2)=Me*(\mu_1*\mu_2)$ и $A\mu_1*\mu_2=(Me*\mu_1)*\mu_2$. Для $\varphi\in\widetilde{S}$ имеем: $(\mu_1*\mu_2)^-*\varphi=\mu_1^-*(\mu_2^-*\varphi)=F[F[\mu_1]\cdot F[\mu_2]]$; $\langle Me*(\mu_1*\mu_2),\varphi\rangle=\langle Me,(\mu_1*\mu_2)^-*\varphi\rangle$ и; $\langle(Me*\mu_1)*\mu_2,\varphi\rangle=\langle Me,\mu_1^-*(\mu_2^-*\varphi)\rangle$. Поэтому $(Me*\mu_1)*\mu_2=Me*(\mu_1*\mu_2)$ и оператор $A\mu=Me*\mu$ коммутирует со свёртками. Теорема доказана.

Пример. Пусть $A(D):S\to\widetilde{S}'$ - псевдодифференциальный оператор (ПДО с символом $a:H\to C^1$ класса W^∞ [7] такой, что $\langle A(D)\mu,\varphi\rangle=\langle\mu,F[aF^{-1}[\varphi]]\rangle$ для всех $\mu\in S$ и $\varphi\in\widetilde{S}$. Здесь обобщённая мера $F^{-1}[a]$ является свёртывателем для мер и поэтому $A(D)\mu=F^{-1}[a]*\mu$ для каждой меры $\mu\in S$. Отсюда следует, что ПДО $A(D):S\to\widetilde{S}'$ удовлетворяет условиям $(u1)$ и $(u2)$ одновременно. Отметим, что частным случаем ПДО $A(D)$, являются дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, которые изучались в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана // Известия РАН. Серия математика. – 2016. – Т.80. – № 6. – С. 141-172.
2. Смолянов О.Г. Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование по Шрёдингеру // ДАН СССР. – 1982. – Т. 263. – Вып. 3. – С. 558-561.
3. Угланов А.В. Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами для обобщённых мер на гильбертовом пространстве // Известия АН СССР. Серия математика. – 1975. – Т. 39. – № 2. – С. 438-468.
4. Хренников А.Ю. Суперанализ. – 2-е изд. – М.:Физматлит. –2005. – 288 с.
5. Фомин С.В. Обобщённые функции бесконечного числа переменных и их преобразования Фурье // Успехи матем. наук. – 1968. – Т. 23. – №2. – С. 215-216.

6. Эдвардс Р. – Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Наука. – 1969. – 1071 с.
7. Kurbyko I.F., Levizov S.V. On the Invertibility of Infinite-Dimensional Pseudodifferential Operators // Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – V. 126. – № 6. – P. 1607-1613.

УДК 517.1

ОБОБЩЕНИЕ СЛУЧАЕВ РАСКРЫТИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ В ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

Р.А. Мельников, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А.Бунина»
e-mail: *roman_elets_08@mail.ru*
О.А. Саввина, д.пед.н., проф.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А.Бунина»
e-mail: *oas5@mail.ru*
Н.В. Черноусова, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А.Бунина»
e-mail: *chernousovi@mail.ru*

В статье предложен один из возможных способов обобщения случаев раскрытия неопределенностей в теории пределов, упрощающих процесс их вычисления. В основу обобщения положены два принципа: 1) обобщение по математической природе происхождения (морфологическому строению) неопределенности; 2) по способу устранения.

Ключевые слова: предел, неопределенность, правило Лопиталя, теория рядов.

Главный предмет математического анализа – функциональная зависимость. Суть предмета понимаема только при полном осознании идеи предельного перехода: поведение функции вблизи данной точки характеризуется предельным значением функции в этой точке.

Теория пределов получила окончательное оформление в XIX веке благодаря работам О.Л. Коши и К. Вейерштрасса. Однако задолго до этого известные способы вычисления пределов были предложены И. Бернулли. Поскольку эти способы впервые были опубликованы в книге «Анализ бесконечно малых» Лопиталем, то несправедливо получили название «правил Лопиталя».

При вычислении пределов возникают различные случаи так называемых неопределенностей. Неудобство состоит в том, что для каждого из видов возникающих неопределенностей существуют свои способы и приемы устранения.

В таблице предложен вариант обобщения и систематизации имеющихся случаев неопределенностей по двум категориям:

- по математической природе происхождения (морфологическому строению) неопределенности;
- по способу устранения.

Таблица 1 – Возможные неопределенности и способы их устранения

Неопределенность	**Случаи пределов**	**Способ устранения неопределенности**	
		алгебраическими средствами	**средствами математического анализа (правила Лопиталя, теория рядов)**
1	**2**	**3.1**	**3.2**
$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$	Разложить на множители многочлены $f(x)$ и $g(x)$, сократить дробь на бесконечно малый сомножитель.	эффективно
	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{Q(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}$	Умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное выражению, содержащему иррациональность; применить формулу сокращенного умножения; разложить многочлены $Q(x), P(x)$ на множители; сократить дробь на бесконечно малый сомножитель.	нецелесообразно
	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}}{Q(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}}$	Умножить числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат разности (суммы); применить формулу сокращенного умножения; разложить многочлены $Q(x)$, $P(x)$ на множители; сократить дробь на бесконечно малый сомножитель.	нецелесообразно

$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и/или $g(x)$ – одна из функций: *sin x, arcsin x, tg x, arctg x* a^x-1, e^x-1, $1-\cos x$, *ln (1+x)*, $(1+x)^\alpha-1$	Заменить $f(x)$ и/или $g(x)$ на эквивалентную при $x\to\infty$ функцию. *Замечание*. Если $x\to x_0$, то замена $x-x_0=t\to 0$ приводит к указанным бесконечно малым функциям.	целесообразно, если применение замечательного предела вызывает затруднения
	$\lim\limits_{x\to a\,(a>0)}\frac{a^x-x^a}{x-a}$, $\lim\limits_{x\to a\,(a>0)}\frac{x^a-a^a}{x^\beta-a^\beta}$, $\lim\limits_{x\to a\,(a>0)}\frac{x^x-a^a}{x-a}$.	После выполнения алгебраических преобразований, приходим к результатам: $a^a\cdot\ln\frac{a}{e}$ $\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$ $a^a\cdot\ln(a\cdot e)$	правило Лопиталя более эффективно, чем алгебраические средства
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$	1) Если $\deg P(x)<\deg Q(x)$, то предел равен 0. 2) Если $\deg P(x)>\deg Q(x)$, то предел равен ∞. 3) Если $\deg P(x)=\deg Q(x)$, то предел равен отношению коэффициентов перед старшими степенями многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. 4) Если функции $P(x)$ и / или $Q(x)$ содержат факториал, то алгебраические средства не эффективны.	возможно применение правила Лопиталя в этом случае исследуют на сходимость соответствующий ряд. Если ряд сходится, то предел равен 0.

<table>
<tr><td>$0\cdot\infty$</td><td>$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$</td><td>Свести неопределенность к одному из видов
$\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1/g(x)}$
$\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{1/f(x)}$</td><td>возможно применение правил Лопиталя</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\infty-\infty$</td><td>$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}\right)$</td><td>Умножить и разделить данное выражение, на сопряженное ему.</td><td rowspan="2">нецелесообразно</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{P(x)}\pm\sqrt[3]{Q(x)}\right)$</td><td>Умножить и разделить на неполный квадрат разности (суммы); применить формулу сокращенного умножения.</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)$</td><td>Привести к общему знаменателю или преобразовать выражение к виду $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/g(x)}\right)$.</td><td>если функции $f(x)$ и $g(x)$ - функции различной природы, то разложить функции в степенные ряды в виде выражений с остаточными членами</td></tr>
<tr><td>1^{∞}</td><td rowspan="3">$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$</td><td>Выделить второй замечательный предел.</td><td rowspan="3">целесообразно, если применение второго замечательного предела затруднительно</td></tr>
<tr><td>0^0</td><td rowspan="2">Рассмотреть функцию $y=f(x)^{g(x)}$, прологарифмировать её по основанию e: $\ln y=g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)$. Найти предел $\lim\limits_{x\to x_0}\left\{g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)\right\}=k$, используя правило раскрытия неопределенности $0\cdot\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^k$.</td></tr>
<tr><td>∞^0</td></tr>
</table>

Для каждого из приведенных (в столбце 1) видов неопределенностей не только указаны наиболее часто встречаемые в практике случаи пределов (столбец 2), но и указаны конкретные алгебраические методы, позволяющие раскрыть неопределенность (столбец 3.1). В столбце 3.2 указана возможность устранения неопределенности по правилам Лопиталя или с помощью теории рядов, то есть уже средствами математического анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: «ЧеРо», 1997. – 624 с.
2. Мельников Р.А., Ельчанинова Г.Г. Изучение понятия «предел» на основе принципа бинарности // Традиции и инновации отечественной школы: актуальные вопросы введения федеральных государственных образовательных стандартов. Сборник научных статей Научно-практического семинара. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2013. – С. 252-258.

УДК 517.55

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.Н. Можарова, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *tatjana.mozharova@yandex.ru*

В данной работе рассматривается задача разрешимости неоднородного операторного уравнения $\varphi(A)(x) = y$, $\forall y \in H$, где A – линейный непрерывный оператор конечного порядка β и типа α, действующий в полном локально-выпуклом пространстве H.

Ключевые слова: линейный непрерывный оператор, операторное уравнение.

Пусть H – полное локально-выпуклое пространство с топологией, заданной счетной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}$, p = 1, 2, …, и A – линейный непрерывный оператор порядка $\beta \neq 0, \infty$, типа $\alpha < \infty$; $A(H) \subset H$.

Функцию

$$f(\lambda) = \sum_{k=o}^{\infty} x_k \lambda^k , \; x_k \in H,$$

удовлетворяющую условию

$$A[f(\lambda)] = \lambda f(\lambda) \text{ и } l_o\{f(\lambda)\} = 1, \quad l_o \in H^*,$$

назовем собственной вектор-функцией оператора A [1].

Пусть функция $f(\lambda)$ – целая векторнозначная, порядка ρ и типа σ. Известно [2], что в рассматриваемых условиях $\rho \geq \frac{1}{\beta}$ и $\sigma \geq \frac{\beta}{\alpha e}$. Далее предполагаем, что $\sigma_p < \sigma$, $\forall p$, и $\{x_k\}$ – полна в H. Рассмотрим выражение

$$\varphi_o(A)(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k(x),\ c_k \in \Re,$$

с характеристической функцией $\varphi_o(\lambda) = \sum_{k=o}^{\infty} c_k \lambda^k$, $c_k \in \Re$.

Пусть φ_o – целая функция, порядок роста которой не выше $\frac{1}{\beta}$, а при порядке, равном $\frac{1}{\beta}$, тип меньше $\frac{\beta}{\alpha e}$, т.е. $\varphi_o \in \left[\frac{1}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha e}\right)$. Ранее автором было показано [3], что в этих условиях $\varphi_o(A)$ – линейный непрерывный оператор, действующий из H в H. Заметим, что оператор $\varphi_o(A)$ действует на $f(\lambda)$ следующим образом:

$$\varphi_o(A)(f(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k(f(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k f(\lambda) = \varphi_o(\lambda) \cdot f(\lambda).$$

Поскольку $\varphi_o(A)(H) \subset H$, $[\varphi_o(A)]^*(H^*) \subset H^*$. Для пространства H^* автором была построена [4] функциональная реализация $P = [\rho; \sigma)$, такая что

$$[\varphi_o(A)]^* (\varphi) = \varphi_o \varphi,\ \ \forall \varphi \in P.$$

В этих условиях справедлива

Теорема.

Пусть H – полное локально-выпуклое пространство, топология которого задается бесконечной счетной системой норм $\{\| \cdot \|_p\}$, $p = 1, 2, \ldots$; A – линейный непрерывный оператор порядка $\beta \neq 0, \infty$, типа $\alpha < \infty$; $A(H) \subset H$. Его собственная целая вектор-функция $f(\lambda)$ имеет порядок роста ρ и тип σ.

Тогда уравнение

$$\varphi_o(A)(x) = y,\ y \in H,$$

с характеристической функцией $\varphi_o \in \left[\frac{1}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha e}\right)$ разрешимо в H, если имеет место одно из следующих условий:

1) $\rho > \frac{1}{\beta}$;

2) $\rho = \frac{1}{\beta}$, $\sigma = \infty$, $\sigma_p < \infty$, $\forall p$;

3) $\rho = \frac{1}{\beta}$, $\sigma_p < \frac{\beta}{\alpha e} \leq \sigma < \infty$, $\varphi_o \in \left[\frac{1}{\beta}; 0\right]$.

Доказательство.

Очевидно, доказательство разрешимости в пространстве H уравнения

$$\varphi_o(A)(x) = y, \quad y \in H,$$

сводится к доказательству эпиморфности в данных условиях оператора $\varphi_o(A)$. Для этого перейдем в сопряженное пространство H* и его функциональную реализацию P.

Оператор $[\varphi_o(A)]^*$ в пространстве $P \approx H^*$ работает, как оператор умножения на характеристическую функцию оператора $\varphi_o(A)$, т.е.

$$[\varphi_o(A)]^*(\varphi) = \varphi_o \varphi, \ \forall \varphi \in P.$$

Очевидно, что $N\left([\varphi_o(A)]^*\right) = \mathrm{Ker}\left([\varphi_o(A)]^*\right) = \{0\}$.

Покажем замкнутость образа оператора $[\varphi_o(A)]^* \quad R\left([\varphi_o(A)]^*\right)$.

$$\forall \psi_o \in \overline{R\left([\varphi_o(A)]^*\right)} \ \exists \varphi_n \in P: \ [\varphi_o(A)]^*(\varphi_n) = \psi_n = \varphi_o \varphi_n \to \psi_o, \quad n \to \infty.$$

В самом деле:

$$\psi_o = \lim_{n\to\infty} \psi_n = \lim_{n\to\infty} (\varphi_o \varphi_n) = \varphi_o \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_o \overline{\varphi}.$$

Осталось показать, что при каждом из условий теоремы $\psi_o \in P = [\rho; \sigma)$.

1) Пусть $\rho > \frac{1}{\beta}$ и пусть $\sigma_1 < \frac{\beta}{\alpha e} \le \sigma$, σ_1 – тип φ_o при порядке $\frac{1}{\beta}$, а $\sigma_2 <$ σ – тип $\overline{\varphi}$ при порядке ρ. Тогда

$$|\psi_o| = |\varphi_o \overline{\varphi}| \le C(\varepsilon)\, e^{(\sigma_1+\varepsilon)|\lambda|^{\frac{1}{\beta}}} \cdot e^{(\sigma_2+\varepsilon)|\lambda|^{\rho}} = C(\varepsilon) \cdot e^{|\lambda|^{\rho}\left(\sigma_2+\varepsilon+(\sigma_1+\varepsilon)|\lambda|^{\frac{1}{\beta}-\rho}\right)},$$

$\forall \varepsilon > 0$.

При больших значениях $|\lambda|$

$$|\psi_o| \le C(\varepsilon)\, e^{(\sigma_2+\varepsilon)|\lambda|^{\rho}} \cdot, \ \forall \varepsilon > 0,$$

т.е. $\psi_o \in P = [\rho; \sigma)$.

2) Пусть $\rho = \frac{1}{\beta}, \sigma = \infty$.

В данном случае $P = [\rho; \infty)$. Тогда

$$|\psi_o| = |\varphi_o \overline{\varphi}| \le C(\varepsilon)\, e^{(\sigma_1+\sigma_2+\varepsilon)|\lambda|^{\frac{1}{\beta}}} \cdot, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Так как $\sigma_1 < \infty$ и $\sigma_2 < \infty$, то $\psi_o \in P = [\rho; \infty)$.

3) Если $\rho = \frac{1}{\beta}, \sigma_p < \frac{\beta}{\alpha e} \le \sigma < \infty$, $\varphi_0 \in \left[\frac{1}{\beta}; 0\right]$, то

$$|\psi_o| = |\varphi_o \overline{\varphi}| \le C(\varepsilon)\, e^{\varepsilon|\lambda|^{\frac{1}{\beta}}} \cdot e^{(\sigma_1+\varepsilon)|\lambda|^{\frac{1}{\beta}}} = C(\varepsilon) \cdot e^{(\sigma_1+2\varepsilon)|\lambda|^{\frac{1}{\beta}}}.$$

Так как $\sigma_1 < \sigma$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $\psi_o \in P = [\rho; \sigma)$.

Теорема доказана.

В качестве следствия теоремы отметим одно из известных утверждений.

Пусть H=H($\Re$); $A = \frac{d}{dz}(\beta = 1, \alpha = 0)$; $f(\lambda) = e^{\lambda z}$ имеет порядок роста $\rho = 1$ и тип $\sigma = \infty$ ($\sigma_p < \infty, \forall p$).Для этого случая справедливо

Утверждение.

Уравнение

$$\varphi_0\left(\frac{d}{dz}\right)(F) = f; \forall f \in H(\Re),$$

с характеристической функцией $\varphi_0 \in [1;\infty)$ разрешимо в H($\Re$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Можарова Т.Н. Об интерполирующей функции, порожденной целой вектор-нозначной функцией φ(t) и линейным неограниченным оператором A // Continuum. Математика. Информатика. Образование. – Елец, 2016. – №1(1). С.31-36.
2. Громов В.П. Некоторые задачи разложения по собственным функциям линейных операторов // Исследования по теории операторов. – Уфа, 1988. – С.144-155.
3. Можарова Т.Н. О применимости и непрерывности операторов с переменными коэффициентами в локально-выпуклых пространствах // Научный альманах ОГУ. Серия: Естественные науки. – Орел, 2000. – С.22 –27.
4. Можарова Т.Н. Об одной функциональной реализации пространства линейных непрерывных функционалов // Избранные труды физико-математического факультета Орловского государственного университета. – Орел, 2018. – С.26-29.

УДК 517.925

ОБ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА СИСТЕМЫ ДВУХ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИХ НЕПРЕРЫВНУЮ ТОЧЕЧНУЮ ГРУППУ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В.В. Ноздрунов, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *v_noz@mail.ru*

В настоящей статье рассматривается алгоритм решения обратной задачи группового анализа по нахождению вида правой части системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с правыми частями не зависящими от первых производных

$$\begin{cases} y'' = F(x, y, z), \\ z'' = G(x, y, z), \end{cases} \tag{1}$$

допускающей некоторую непрерывную точечную группу преобразований, заданную инфинитезимальным оператором

$$X = \xi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + \zeta(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}, \tag{2}$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема. Нелинейная система (1) допускает точечный лиевский оператор (2), если и только если правые части этой системы удовлетворяют системе линейных уравнений в частных производных первого порядка относительно функций F и G

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_2\right)z + c_4 y + d_2(x)\right)F_z + \left(\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_1\right)y + c_3 z + d_1(x)\right)F_y + \\
&+\left(\frac{3}{2}c'(x)-c_1\right)F - c_3 G - \frac{1}{2}c'''(x)y - d_1''(x) + c(x)F_x = 0, \\
&\left(\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_2\right)z + c_4 y + d_2(x)\right)G_z + \left(\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_1\right)y + c_3 z + d_1(x)\right)G_y + \\
&+\left(\frac{3}{2}c'(x)-c_2\right)G - c_4 F - \frac{1}{2}c'''(x)z - d_2''(x) + c(x)G_x = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

при этом координаты инфинитезимального оператора имеют вид

$$\begin{aligned}
&\xi(x,y,z) = c(x), \\
&\eta(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}c'(x)+c_1\right)y + c_3 z + d_1(x), \\
&\zeta(x,y,z) = c_4 y + \left(\frac{1}{2}c'(x)+c_2\right)z + d_2(x).
\end{aligned} \tag{4}$$

где $c(x)$, $d_1(x)$, $d_2(x)$ – некоторые функции, c_1, c_2, c_3, c_4 – постоянные.

Доказательство. Используя формулы второго продолжения инфинитезимального оператора (2)

$$X_2 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial z} + \eta_1\frac{\partial}{\partial y'} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial z'} + \eta_2\frac{\partial}{\partial y''} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial z''},$$

координаты которого определяются формулами $\eta_1 = D_x[\eta] - y'D_x[\xi]$, $\zeta_1 = D_x[\zeta] - z'D_x[\xi]$, $\eta_2 = D_x[\eta_1] - y''D_x[\xi]$, $\zeta_2 = D_x[\zeta_1] - z''D_x[\xi]$, где $D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + z'\frac{\partial}{\partial z} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + z''\frac{\partial}{\partial z'} + \ldots$ - оператор полного дифференцирования, и используя условия инвариантности [1]

$$\begin{cases} \underset{2}{X}(y'' - F(x,y,z))\Big|_{y''=F(x,y,z)} = 0, \\ \underset{2}{X}(z'' - G(x,y,z))\Big|_{z''=G(x,y,z)} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

получим систему двух определяющих уравнений, расщепляя которую по независимым переменным, получим переопределенную систему 15 уравнений:

$$\begin{aligned} &\xi_{yy} = 0, \\ &\xi_{yz} = 0, \\ &\xi_{zz} = 0, \\ &\eta_{zz} = 0, \\ &\zeta_{yy} = 0, \\ &\eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0, \\ &\eta_{yz} - \xi_{xz} = 0, \\ &\zeta_{yz} - \xi_{xy} = 0, \\ &\zeta_{zz} - 2\xi_{xz} = 0, \\ &\eta_{xz} - \xi_{z}F = 0, \\ &\zeta_{xy} - \xi_{y}G = 0, \\ &2\eta_{xy} - \xi_{xx} - 3\xi_{y}F - \xi_{z}G = 0, \\ &2\zeta_{xz} - \xi_{xx} - \xi_{y}F - 3\xi_{z}G = 0, \\ &\xi F_x + \zeta F_z + \eta F_y + (2\xi_x - \eta_y)F - \eta_{xx} - \eta_z G = 0, \\ &\xi G_x + \zeta G_z + \eta G_y + (2\xi_x - \zeta_z)G - \zeta_{xx} - \zeta_y F = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Из первых тринадцати уравнений системы (6) легко найти координаты инфинитезимального оператора (2)

$$\begin{aligned} &\xi(x,y,z) = c(x), \\ &\eta(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}c'(x) + c_1\right)y + c_3 z + d_1(x), \\ &\zeta(x,y,z) = c_4 y + \left(\frac{1}{2}c'(x) + c_2\right)z + d_2(x). \end{aligned}$$

При этом оставшиеся два уравнения примут вид

$$\left(\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_2\right)z+c_4y+d_2(x)\right)F_z+\left(\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_1\right)y+c_3z+d_1(x)\right)F_y+$$

$$+\left(\frac{3}{2}c'(x)-c_1\right)F-c_3G-\frac{1}{2}c'''(x)y-d_1''(x)+c(x)F_x=0,$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_2\right)z+c_4y+d_2(x)\right)G_z+\left(\left(\frac{1}{2}c'(x)+c_1\right)y+c_3z+d_1(x)\right)G_y+$$

$$+\left(\frac{3}{2}c'(x)-c_2\right)G-c_4F-\frac{1}{2}c'''(x)z-d_2''(x)+c(x)G_x=0,$$

Теорема доказана.

Для дальнейшей реализации алгоритма обратной групповой задачи необходимо сделать конкретизирующие предположения в отношении исследуемого класса систем. Рассмотрим автономную систему

$$\begin{cases} y''=F(y,z,\bar{k}), \\ z''=G(y,z,\bar{k}), \end{cases} \tag{7}$$

Следствие. Автономная система (7) допускает непрерывную группу точечных преобразований, заданную оператором (2) с координатами

$$\begin{aligned} \xi(x,y,z)&=2ax+c_0, \\ \eta(x,y,z)&=(a+c)y+b_1z+d_1, \\ \zeta(x,y,z)&=b_2y+(a+c)z+d_2, \end{aligned} \tag{8}$$

где $a, b_1, b_2, c, c_0, d_1, d_2$ – произвольные постоянные, если правые части этой системы удовлетворяют системе линейных уравнений в частных производных первого порядка относительно функций F и G

$$\begin{cases} \left[(a+c)y+b_1z+d_1\right]\dfrac{\partial F}{\partial y}+\left[b_2y+(a+c)z+d_2\right]\dfrac{\partial F}{\partial z}=(c-3a)F+b_1G, \\ \left[(a+c)y+b_1z+d_1\right]\dfrac{\partial G}{\partial y}+\left[b_2y+(a+c)z+d_2\right]\dfrac{\partial G}{\partial z}=(c-3a)G+b_2F. \end{cases} \tag{9}$$

Действительно, так как система (7) является автономной, то система (3), которой должны удовлетворять правые части системы (7), для того что бы она допускала непрерывную группу преобразований, в простейшем случае не должна содержать выражения, зависящие от x. Сделаем реальное допущение: пусть коэффициенты системы (3) не зависят от x (не отрицая, что все коэффициенты могут иметь общий множитель, зависящий от x, и затем сокращаются на него), то есть для этого положим

$$\begin{aligned} &d_1(x)=d_1, \\ &d_2(x)=d_2, \\ &c'(x)=2a \quad \Rightarrow \quad c(x)=2ax+c_0. \end{aligned}$$

где a, c_0, d_1, d_2 – произвольные постоянные. Тогда система (3) примет вид (9), а координаты инфинитезимального оператора (4) вид (8). Следствие доказано.

Покажем возможности реализации алгоритмов обратной задачи группового анализа на примере автономной системы (7).

Пример 1. Пусть система (9) "развязана" по F и G, то есть $b_1 = b_2 = 0$, причем $a + c \neq 0$, тогда система (9) примет вид

$$\begin{cases} \left[(a+c)y + d_1\right]\dfrac{\partial F}{\partial y} + \left[(a+c)z + d_2\right]\dfrac{\partial F}{\partial z} = (c-3a)F, \\ \left[(a+c)y + d_1\right]\dfrac{\partial G}{\partial y} + \left[(a+c)z + d_2\right]\dfrac{\partial G}{\partial z} = (c-3a)G. \end{cases} \tag{10}$$

Каждое из уравнений системы является уравнением первого порядка в частных производных. Для первого уравнения системы (10) запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{dy}{(a+c)y + d_1} = \frac{dz}{(a+c)z + d_2} = \frac{dF}{(c-3a)F}. \tag{11}$$

Отсюда получаем два решения системы (11)

$$C_1 = \frac{(a+c)y + d_1}{(a+c)z + d_2},$$

$$C_2 = F\left((a+c)y + d_1\right)^{\frac{3a-c}{a+c}}.$$

Тогда общее решение первого уравнения системы (10) примет вид

$$F(y,z) = \left((a+c)y + d_1\right)^{\frac{c-3a}{a+c}} \Phi_1\left(\frac{(a+c)y + d_1}{(a+c)z + d_2}\right).$$

Аналогично находим решение второго уравнения системы (10)

$$G(y,z) = \left((a+c)z + d_2\right)^{\frac{c-3a}{a+c}} \Phi_2\left(\frac{(a+c)y + d_1}{(a+c)z + d_2}\right).$$

Таким образом, система (7), с правыми частями

$$\begin{cases} F(y,z) = ((a+c)y + d_1)^{\gamma}\, \Phi_1(u), \\ G(y,z) = ((a+c)z + d_2)^{\gamma}\, \Phi_2(u), \end{cases} \tag{12}$$

где $\gamma = \dfrac{c-3a}{c+a}$, $u = \dfrac{(a+c)y + d_1}{(a+c)z + d_2}$, $\Phi_1(u), \Phi_2(u)$ – произвольные функции своих аргументов, допускает непрерывную группу преобразований с инфинитезимальным оператором (2) с координатами (8), где $b_1 = b_2 = 0$ и $a + c \neq 0$.

Пример 2. Если на систему с правыми частями (12) наложить дополнительные условия, например, $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial y}$, то есть условие лагранжевости системы, то функциональный произвол можно уменьшить. В результате получим, что система с правыми частями (12) допускает непрерывную группу преобразований с инфинитезимальным оператором (2) с координатами (8), где $\gamma = \frac{c-3a}{c+a}$, $u = \frac{(a+c)y + d_1}{(a+c)z + d_2}$, $b_1 = b_2 = 0$, $a + c \neq 0$ и $\Phi_2(u) = (\gamma+1)\int u^{\gamma}\Phi_1(u)du - u^{\gamma+1}\Phi_1(u) + A_1$, где $\Phi_1(u)$ – произвольная функция своего аргумента, A_1 – произвольная постоянная.

Пример 3. Если в системе (9) положить $b_1 = b_2 = 0$ и $a + c = 0$, тогда система (9) примет вид

$$\begin{cases} d_1 \dfrac{\partial F}{\partial y} + d_2 \dfrac{\partial F}{\partial z} = -4aF, \\ d_1 \dfrac{\partial G}{\partial y} + d_2 \dfrac{\partial G}{\partial z} = -4aG. \end{cases} \tag{13}$$

Каждое из уравнений системы является уравнением первого порядка в частных производных. Для первого уравнения системы (13) запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{d_1} = \frac{dz}{d_2} = \frac{dF}{-4aF}. \tag{14}$$

Отсюда находим два решения данной системы

$$C_1 = d_2 y - d_1 z,$$

$$C_2 = F \exp\left(\frac{4a}{d_1} y\right).$$

Тогда общее решение первого уравнения системы (13) примет вид

$$F(y,z) = \exp\left(-\frac{4a}{d_1} y\right)\Phi_1\left(d_2 y - d_1 z\right).$$

Аналогично находим решение второго уравнения системы (13)

$$G(y,z) = \exp\left(-\frac{4a}{d_2} z\right)\Phi_2\left(d_2 y - d_1 z\right).$$

Таким образом, система (7), с правыми частями

$$\begin{cases} F(y,z) = \exp\left(-\dfrac{4a}{d_1}y\right)\Phi_1(u), \\ G(y,z) = \exp\left(-\dfrac{4a}{d_2}z\right)\Phi_2(u), \end{cases} \tag{15}$$

где $u = d_2 y - d_1 z$; $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$ – произвольные функции своих аргументов, допускает непрерывную группу преобразований с инфинитезимальным оператором (2) с координатами (8), где $b_1 = b_2 = 0$ и $a + c = 0$.

Пример 4. Если на систему с правыми частями (15) наложить дополнительные условия, например, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\partial G}{\partial y}$, то есть условие лагранжевости системы, то функциональный произвол можно уменьшить. В результате получим, что система с правыми частями (15) допускает непрерывную группу преобразований с инфинитезимальным оператором (2) с координатами (8),
где $u = d_2 y - d_1 z$, $b_1 = b_2 = 0$, $a + c = 0$ и

$$\Phi_2(u) = -\frac{4a}{d_2^2}\int \exp\left(-\frac{4a}{d_1 d_2}u\right)\Phi_1(u)du - \frac{d_1}{d_2}\exp\left(-\frac{4a}{d_1 d_2}u\right)\Phi_1(u) + A_1,$$

где $\Phi_1(u)$ – произвольная функция своего аргумента, A_1 – произвольная постоянная.

Таким образом, используя алгоритм решения обратной задачи группового анализа найдены системы (1), обладающие непрерывными точечными симметриями, и координаты соответствующих им инфинитезимальных операторов (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 399 с.

УДК 517.44

КОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С. М. Ситник
НИУ «БелГУ»
e-mail: *sitnik@bsu.edu.ru*

В докладе будет рассказано основное содержание монографии [1]. Эта монография составлена из докторской диссертации Валерия Вячеславовича Катрахова (1949–2010) и части докторской диссертации С.М.Ситника, защищённой в 2016 г. Следует отметить, что оба автора, учитель и его ученик, принадлежат школе известного Воронежского математика Ивана Александровича Киприянова, получившего фундаментальные результаты для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя по одной или части переменных.

Ключевые слова: операторы преобразования, интегральные преобразования, сингулярные дифференциальные уравнения, оператор Бесселя

В докладе будет рассказано основное содержание монографии [1]. Данная монография составлена из результатов, вошедших в докторские диссертации В. В. Катрахова (1989 г.) и С. М. Ситника (2016 г.). Результаты второго автора (ученика) развивают результаты первого автора (учителя). Надеюсь, что публикуемая книга будет способствовать более широкой известности результатов В. В. Катрахова, которые представляют существенный интерес для теории вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений, а также их разработке в русле идей и методов теории операторов преобразования. Кроме того, в книге отражён вклад Ивана Александровича Киприянова и созданной им Воронежской математической школы по сингулярным и вырождающимся дифференциальным уравнениям в развитие теории дифференциальных уравнений и теории функций.

Монография посвящена приложениям метода операторов преобразования к исследованию дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах. Особое внимание уделяется дифференциальным уравнениям в частных производных с операторами Бесселя. Монография содержит подробное введение в теорию операторов преобразования и достаточно обширный список литературы.

Теория операторов преобразования является хорошо разработанным самостоятельным разделом математики. Значительный вклад в эту теорию и её приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными внесли работы воронежского математика Валерия Вячеславовича Катрахова (1949–2010), ученика Ивана Александровича Киприянова. К числу важных результатов В. В. Катрахова следует отнести исследование весовых и спектральных задач для дифференциальных уравнений и систем с операторами Бесселя с использованием техники операторов преобразования. Им также совместно с И. А. Киприяновым были введены и изучены уравнения с псевдодифференциальными операторами, которые определялись через преобразование Ханкеля при помощи операторов преобразования Сонина и Пуассона. Особо следует выделить введённый В. В. Катраховым новый класс краевых задач для уравнения

Пуассона, решения которого могут иметь существенные особенности. На основе введённого им нового класса операторов преобразования, получаемых из известных операторов Сонина и Пуассона композициями с дробными интегралами Римана–Лиувилля, В. В. Катраховым были введены специальные функциональные пространства, содержащие функции с существенными особенностями, доказаны для них теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах. Для функций без особенностей указанные пространства сводятся к пространствам С. Л. Соболева, таким образом являясь их прямыми обобщениями. Для корректности задач с существенными особенностями В. В. Катраховым было предложено новое естественное краевое условие во внутренней точке области, которое заключается в задании предела свёртки решения с некоторым сглаживающим ядром типа ядра Пуассона. Мы предлагаем называть это новое краевое условие «K–следом» в честь В. В. Катрахова, который ввёл это условие и подробно изучил краевые задачи с ним. В терминах «K–следа» получается полная характеризация решений уравнения Лапласа с внутренней особой точкой, в том числе для решений с существенными особенностями в этой точке. Для данной задачи в указанных функциональных пространствах В. В. Катраховым была доказана корректность постановки, включая существование и единственность решения, априорные оценки. Этот результат обобщает теоремы о разрешимости эллиптических уравнений в классах С. Л. Соболева для гладких решений без особенностей. Кроме того, в последующих работах В. В. Катрахова с соавторами были рассмотрены обобщения новых краевых задач для уравнений с операторами Бесселя и сингулярным потенциалом, для областей в пространствах Лобачевского и случая угловых точек на границе области.

Приведём содержание книги по главам.

Предисловие редактора (А.Б. Муравник).

Предисловие автора (С.М. Ситник).

Глава 1. Введение (исторические сведения, функциональные пространства, специальные функции, интегральные преобразования).

Глава 2. Операторы преобразования Сонина–Пуассона–Дельсарта и их модификации.

Глава 3. Теория операторов преобразования Бушмана–Эрдейи.

Глава 4. Общие весовые краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений.

Глава 5. Новые краевые задачи для уравнения Пуассона с особенностями в изолированных точках.

Глава 6. Композиционный метод построения сплетающих соотношений между решениями дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

Глава 7. Приложения метода операторов преобразования к оценкам решений для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и

задаче Е.М.Ландиса.

Благодарности.

Валерий Вячеславович Катрахов: краткая биографическая справка.

Список литературы (около 650 ссылок).

ЛИТЕРАТУРА

1. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2018. — Том 64. — № 2. — С. 211–426.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

О.Д. Соломатин, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

Цель настоящей работы – исследование характеристик оператора дифференцирования в пространстве целых функций.

Остановимся вначале на самом пространстве $H(C)$, элементами которого являются целые функции. Для характеристики роста целой функции $f(z)$ вводится функция $M_f(r)=\max\limits_{|z|\le r}|f(z)|,\quad z\in C$. Скорость возрастания функции $M_f(r)$ есть важнейшая характеристика поведения целой функции. Пространство $H(C)$ есть линейное пространство с топологией равномерной сходимости на компактах:

$$\|f(z)\|_p=\max_{|z|\le p}|f(z)|,\quad p>0,\quad f(z)\in H(C).$$

Кроме того, так как на пространстве $H(C)$ определена система норм $\left\{\|\cdot\|_p\right\},\quad p\in P$, причем, если одновременно все $\|f(z)\|_p=0,\quad \forall p\quad\Rightarrow\quad f(z)\equiv 0$, то $H(C)$ – локально выпуклое пространство по определению. Заметим, что $H(C)$ – полное пространство, причем является проективным пределом:
$H(C)=\bigcap\limits_{R_n>0}H_{R_n}=\lim\limits_{R_n\to\infty}proj\,H_{R_n}, H(C)\subset H_{R_n}, H_{R_n}:\|f(z)\|_{R_n}=\max\limits_{|z|\le R_n}|f(z)|.$

Далее, в пространстве $H(C)$ рассмотрим оператор дифференцирования $A=\dfrac{d}{dz}: H(C)\to H(C)$. Оператор $A=\dfrac{d}{dz}$ – линейный в $H(C)$. Также несложно доказать непрерывность оператора $A=\dfrac{d}{dz}$ в пространстве $H(C)$, которая следует из его ограниченности.

Далее, норма оператора дифференцирования в пространстве $H(C)$ равна нулю: $\|A\|_p=\left\|\dfrac{d}{dz}\right\|_p=0,\quad \forall p,\quad \left\|\dfrac{d}{dz}\right\|=0$. Заметим, что при этом сам оператор не нулевой. Норма оператора характеризует степень сжатия или растяжения всего пространства.

Перейдем теперь к нахождению порядка и типа оператора дифференцирования в пространстве $H(C)$. p-порядки β_p и порядок β оператора $A=\dfrac{d}{dz}$ находим по формулам [2]:

$$\beta_p = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left\| A^n(x) \right\|_p}{n \ln n}; \quad \beta = \sup_{(p)} \left\{ \beta_p \right\}. \tag{1}$$

Если $\beta_p \neq 0, \infty$, то p-типы α_p и тип α оператора дифференцирования находим по формулам:

$$\alpha_p = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{\left\| A^n(x) \right\|_p}}{n^{\beta_p}}; \quad \alpha = \sup_{(p)} \left\{ \alpha_p \right\}. \tag{2}$$

Итак, проведем соответствующие вычисления.

$$\left\| A^n(x) \right\|_p = \left\| f^{(n)}(z) \right\|_p = \left\| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|t|=p+\delta} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} \right\|_p \leq$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|t|=p+\delta} \left\| \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} \right\|_p dt \leq C_{p;\delta} \left(\frac{2n}{e\delta} \right)^n \left\| f \right\|_{p+\delta}, \quad \forall f \in H(C).$$

Получена оценка сверху. Оценку снизу получим на функции $f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{n\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0.$

$$\left\| f_0^{(n)}(z) \right\|_p = \max_{|z|\leq p} \left| f_0^{(n)}(z) \right| \geq \left| f_0^{(n)}(0) \right| = \frac{n!}{n^{n\varepsilon}} \geq \left(\frac{n^{1-\varepsilon}}{e} \right)^n, \quad \forall n > n_0(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\beta_p = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left(C \left(\frac{2n}{e\delta} \right)^n \left\| f \right\|_{p+\delta} \right)}{n \ln n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{\ln C}{n \ln n} + \frac{n \ln \frac{2n}{e\delta}}{n \ln n} + \frac{\ln \left\| f \right\|_{p+\delta}}{n \ln n} \right) = 1,$$

следовательно, порядок оператора дифференцирования $\beta = 1$;

$$\alpha_p = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{C \left(\frac{2n}{e\delta} \right)^n \left\| f \right\|_{p+\delta}}}{n} = \frac{2}{e\delta}; \quad \delta > 0;$$

$$\alpha_p = \inf_{\delta>0} \left\{ \frac{2}{e\delta} \right\} = 0, \quad \forall p \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.$$

Далее, формулами (1) и (2) можно воспользоваться также для подсчета операторных p-порядков и операторных p-типов некоторого фиксированного элемента x, причем, конечно, $\beta(x) \leq \beta$ и $\alpha(x) \leq \alpha$, где β и α – соответственно порядок и тип оператора A.

В нашем случае, для оператора дифференцирования, действующего в пространстве $H(C)$, для некоторой фиксированной функции $f_0(z) \in H(C)$ порядка роста $\rho > 1$ и типа σ несложно вычислить ее характеристики роста

$$\beta_p(f_0)=\beta(f_0)=\frac{\rho-1}{\rho},\quad \alpha_p(f_0)=\alpha(f_0)=\frac{(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}}{e},\quad \forall p.$$

В частности, если $f(z)$ – целая функция экспоненциального типа, то $\beta_p(f)=\beta(f)=0,\quad \forall p.$ Это означает, что производные $f^{(n)}(z),\quad n\geq 0$ целой функции экспоненциального типа имеют нулевой рост в топологии пространства $H(C)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983.
2. Громов В.П. Порядок и тип линейного оператора и разложение в ряд по собственным функциям. – ДАН СССР, 1986, том 228, № 1, с. 27-31.

ХАРАКТЕРИСТИКИ РОСТА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ $\frac{du}{dt}=A(u)$

О.Д. Соломатин, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

В настоящей статье рассматривается уравнение вида $\frac{du}{dt}=A(u)$, в котором $u(t)$ – векторнозначная функция со значениями в полном локально выпуклом пространстве H, а также исследуются характеристики роста найденных решений. Приведены конкретные примеры.

Пусть H – полное локально выпуклое пространство, топология которого определяется системой норм $\{\|\cdot\|_p\},\ p\in P$, и пусть $A: H\to H$ – линейный непрерывный оператор. Рассмотрим уравнение

$$\frac{du}{dt}=A(u), \qquad (1)$$

в котором $u(t)$ – векторнозначная функция со значениями в пространстве H. Это однородное уравнение изучалось многими математиками (Э. Хилле, Р. Филлипсом, В.П. Громовым, К. Иосидой).

В.П. Громовым [1] описаны условия существования решения $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию

$$u(0)=x_0,\quad x_0\in H, \qquad (2)$$

а также указан вид этого решения.

Рассматривается так называемое множество M_0 начальных данных задачи (1)-(2):

$$M_0 = \left\{ x \in D_\infty (A): \quad \beta_p(x) \le 1; \quad \beta_p(x) = 1, \quad \alpha_p(x) < \infty, \forall p \right\},$$

где $\beta_p(x)$ и $\alpha_p(x)$ – соответственно операторный p - порядок и p - тип вектора $x \in H$ относительно оператора A [2], которое обеспечивает существование и единственность решения для всех $x \in M_0$. Решение задачи (1)-(2) является голоморфной вектор-функцией $u(t)$ со значениями в пространстве H и представляется в виде

$$u(t, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(x_0)}{n!} t^n . \qquad (3)$$

При этом, если $\beta_p(x_0) < 1, \quad \forall p$, то $u(t)$ – целая векторнозначная функция, p - порядки и p -типы роста которой

$$\rho_p(u) = \frac{1}{1 - \beta_p(x_0)}; \quad \sigma_p(u) = \left(1 - \beta_p(x_0)\right)^{\frac{1}{1-\beta_p(x_0)}}.$$

Если же хотя бы один $\beta_p(x_0) = 1$, то функция $u(t)$ голоморфная в круге $|t| < R$, причем $R = \dfrac{1}{\alpha(x_0) e}$, где $\alpha(x_0)$ – операторный тип вектора x_0.

Операторная экспонента (3) есть одно из обобщений экспоненциальной функции $u(t) = e^{tA}(x_0)$, которая широко используется в теории операторных уравнений. Например, при указанных выше условиях (M_0) она является решением уравнения (1). В работе автора [3] изучаются функции более общего вида

$$u(t) = f(tA)(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n(x_0) t^n, \quad x_0 \in H,$$

порожденные целой скалярной функцией $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, и оператором A (вообще говоря, неограниченным), действующим в полном метрическом пространстве H.

Приведем конкретные примеры.

1. Пусть $H = H(C)$ – пространство всех целых функций, $A = \dfrac{d}{dz}$ – оператор дифференцирования. Рассмотрим уравнение (1) с начальным условием $u(0) = \sin z \in H(C)$. Решение запишем в виде

$$u(t, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(x_0)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(z)}{n!} t^n = \sin(z + t).$$

Для вычисления $\beta_p(x_0)$ и $\alpha_p(x_0)$ воспользуемся формулами

$$\beta_p(x_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \left\| A^n(x_0) \right\|_p}{n \ln n}; \quad \alpha_p(x_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{\left\| A^n(x_0) \right\|_p}}{n^{\beta_p(x_0)}}.$$

В нашем случае $\beta_p(\sin z)=0,\quad \alpha_p(\sin z)=1$, следовательно,

$$\rho_p(u)=\rho(u)=1,\quad \sigma_p(u)=\sigma(u)=1,\quad \forall p.$$

2. $H=H(C),\ A=\dfrac{d}{dz},\ u(0)=e^{z^2}\in H(C)$. Решение уравнения (1)

$$u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n(u(0))}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(e^{z^2}\right)^{(n)}}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z,t)e^{z^2}.$$

Находим $\beta_p\left(e^{z^2}\right)=\dfrac{1}{2},\quad \alpha_p\left(e^{z^2}\right)=\sqrt{\dfrac{2}{e}}$, следовательно,

$$\rho_p(u)=\rho(u)=2,\quad \sigma_p(u)=\sigma(u)=\frac{1}{4},\quad \forall p.$$

3. Пусть $H=[p,q]$ – пространство целых функций порядка роста $\rho\le\dfrac{1}{p}$, а при порядке $\rho=\dfrac{1}{p}$ типа $\sigma\le a^{\frac{1}{p}}$, где $p>1$ – целое, $a>0$, $A=\dfrac{d}{dz}$, $u(0)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(az)^m}{\Gamma(pm+1)}=x_0$ – функция Миттаг-Леффлера.

Решение уравнения (1)

$$u(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(az)^m}{\Gamma(pm+1)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{ma^mz^{m-1}}{\Gamma(pm+1)}t+\ldots+\frac{\sum\limits_{m=n}^{\infty}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)a^mz^{m-n}}{\Gamma(pm+1)}t^n}{n!}+\ldots$$

Находим $\beta_p(x_0)=\dfrac{1-p}{p};\quad \alpha_p(x_0)=\dfrac{1}{e}\left(\dfrac{ea^{\frac{1}{p}}}{p}\right)^p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Громов В.П. Операторный метод решения линейных уравнений. Ученые записки лаборатории теории функций и функционального анализа ОГУ. Выпуск 3. – Орел: ГОУ ВПО «ОГУ», 2002, с. 4-36.
2. Громов В.П. Порядок и тип линейного оператора и разложение в ряд по собственным функциям. – ДАН СССР, 1986, том 228, № 1, с. 27-31.
3. Соломатин О.Д. О полноте системы обобщенных экспонент в пространстве Фреше. Ученые записки лаборатории теории функций и функционального анализа ОГУ. Выпуск 3. – Орел: ГОУ ВПО «ОГУ», 2002, с. 37-46.

УДК 517.929

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПО ДАРБУ ДЛЯ ПОЛУДИСКРЕТНЫХ АВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ПО ПРОИЗВОДНЫМ

С. Я. Старцев
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН
e-mail: *startsev@anrb.ru*

Рассмотрены цепочки дифференциальных уравнений вида $(u_{i+1})_x = a(u_i, u_{i+1})(u_i)_x + b(u_i, u_{i+1})$, где u зависит от дискретной переменной i и непрерывной переменной x. Показано, что из уже известных результатов нетрудно получить условие на функцию a, необходимое для интегрируемости по Дарбу вышеуказанной цепочки.

Ключевые слова: интегрируемость по Дарбу, дифференциально-разностные уравнения, разностные подстановки.

Один из классов интегрируемых уравнений вида

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

образован уравнениями, для каждого из которых существуют как дифференциальная подстановка вида $v = X(x, y, u, u_x, u_{xx}, \dots)$, так и подстановка вида $w = Y(x, y, u, u_y, u_{yy}, \dots)$, переводящие решения (1) в решения уравнений $v_y = 0$ и $w_x = 0$ соответственно. Такие уравнения называются интегрируемыми по Дарбу или уравнениями лиувиллевского типа, и почти полный их список можно найти в [1].

Цепочку дифференциальных уравнений вида

$$(u_{i+1})_x = F(u_i, u_{i+1}, (u_i)_x),$$

где неизвестная функция u зависит от целого числа i и вещественной переменной x, можно рассматривать как дифференциально-разностный аналог автономного уравнения (1). Среди таких цепочек также имеются интегрируемые по Дарбу, но, по сравнению с уравнениями вида (1), интегрируемые по Дарбу “полудискретные” уравнения менее изучены – известны лишь отдельные их примеры (см., например, [2]), а также результаты классификации для цепочек специального вида [3, 4].

Для того, чтобы дать строгое определение интегрируемости по Дарбу, нам потребуется ввести некоторые обозначения. В дальнейшем во всех формулах мы для краткости будем опускать индекс i и, в частности, будем записывать вышеуказанную цепочку в виде

$$(u_1)_x = F(u, u_1, u_x). \tag{2}$$

Мы будем предполагать, что $F_{u_x} \neq 0$ и, следовательно, уравнение (2) можно записать в виде

$$(u_{-1})_x = \tilde{F}(u, u_{-1}, u_x). \tag{3}$$

Производные $u_m^{(n)} := \partial^n u_{i+m}/\partial x^n$ от сдвигов u для любых ненулевых $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$ мы можем поэтому выразить в силу уравнений (2)–(3) через так называемые *динамические переменные* $u_l := u_{i+l}$, $u^{(k)} := \partial^k u_i/\partial x^k$. Запись $g[u]$ будет обозначать, что функция g зависит и конечного числа динамических переменных.

Через T мы обозначим оператор сдвига по i в силу уравнения (2). Этот оператор задается следующими правилами: $T(f(a,b,\dots)) = f(T(a),T(b),\dots)$ для любой функции f; $T(u_m) = u_{m+1}$; $T(u^{(n)}) = D^{n-1}(F)$ (то есть "смешанные" переменные $u_1^{(n)}$ выражаются через динамические переменные в силу уравнения (2)). Здесь

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + u^{(1)}\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(u^{(k+1)}\frac{\partial}{\partial u^{(k)}} + T^{(k-1)}(F)\frac{\partial}{\partial u_k} + T^{(1-k)}(\tilde{F})\frac{\partial}{\partial u_{-k}}\right),$$

то есть через D обозначен оператор полной производной по x в силу уравнений (2)–(3). Оператор обратного сдвига T^{-1} задается похожим образом.

О п р е д е л е н и е. Уравнение (2) называется интегрируемым по Дарбу, если для него найдутся функции $I[u]$ и $X[u]$, каждая из которых зависит хотя бы от одной из динамических переменных, такие что выполнены соотношения $D(I) = 0$ и $T(X) = X$. Функции $I[u]$ и $X[u]$ в этом случае называются соответственно i-интегралом и x-интегралом уравнения (2).

Нетрудно проверить (см., например, [5]), что x-интеграл не может зависеть от переменных u_j, а i-интеграл – от $u^{(j)}$. Стоит также заметить, что, несмотря на автономность уравнения (2), его интегралы могут, вообще говоря, явным образом зависеть зависеть от x и i. Но в данном тексте в качестве определения интегрируемости по Дарбу мы используем наличие именно автономных интегралов. Скорее всего при таком несколько ограничительном определении никакие интегрируемые по Дарбу случаи не будут потеряны (то есть если у (2) имеются интегралы, то среди них обязательно найдутся автономные), но, строго говоря, этот факт нуждается в обосновании.

В настоящей заметке мы будем рассматривать специальный подкласс уравнений (2), а именно – уравнения вида

$$(u_1)_x = a(u,u_1)u_x + b(u,u_1), \qquad a \neq 0, \tag{4}$$

и покажем, что из ранее полученных результатов вытекает следующее утверждение.

Т е о р е м а. Уравнение (4) интегрируемо по Дарбу только тогда, когда уравнение $(u_1)_x = a(u,u_1)u_x$ допускает x-интеграл вида

$$X = \frac{u^{(3)}}{u^{(1)}} - \frac{3}{2}\left(\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}\right)^2 + G(u)\left(u^{(1)}\right)^2. \tag{5}$$

Наличие у уравнения $(u_1)_x = a(u, u_1)u_x$ интеграла (5) задает достаточно конструктивное условие на функцию a. Действительно, подставив (5) в определяющее соотношение $T(X) = X$ и обозначив $a_u/a + a_{u_1}$ через A, мы видим, что $T(X) = X$ равносильно дифференциальному соотношению

$$A_u + aA_{u_1} - A^2/2 + G(u_1)a^2 - G(u) = 0,$$

из которого функция G (заранее нам неизвестная) может быть исключена. Хотя вышеприведенное условие не позволяет нам явным образом уточнить вид a, при попытках классификации уравнений вида (4) оно, возможно, окажется полезным в сочетании с другими условиями интегрируемости по Дарбу.

Доказательство. В работе [2] было доказано, что для любого интегрируемого по Дарбу уравнения вида (2) существует оператор $R = \sum_{k=0}^{r} c_k[u]T^k$, такой что $u_t = R(\omega)$ является симметрией этого уравнения для любого $\omega \in \ker D$. Покажем, что коэффициенты c_k оператора R не могут зависеть от производных u по x. Предположим противное: пусть коэффициенты R зависят от $u^{(j)}$ для некоторого $j > 0$. Через l обозначим наибольшее число, для которого $(c_l)_{u^{(j)}} \neq 0$. В качестве ω возьмем i-интеграл, такой чтобы порядок m старшей из переменных вида u_q, от которых этот интеграл зависит, был выше порядков таких переменных, содержащихся в коэффициентах оператора R. (Поскольку оператор T переводит i-интегралы снова в i-интегралы, мы всегда можем построить такой i-интеграл.) Тогда $(R(\omega))_{u^{(j)}u_{m+l}} = (c_l)_{u^{(j)}}\omega_{u_m} \neq 0$. Но это противоречит тому, что, как показано в [5], для любой симметрии $u_t = s[u]$ уравнения (2) функция $s[u]$ распадается на сумму двух слагаемых, одно из которых зависит только от сдвигов, а другое – только от производных u, то есть

$$s[u] = \hat{s}(u_p, u_{p+1}, \dots, u_{-1}, u, u_1, \dots, u_k) + \bar{s}(u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)}).$$

Таким образом, коэффициенты оператора R не зависят от производных и симметрия $u_t = R(\omega)$ для любого $\omega \in \ker D$ имеет вид

$$u_t = f(u_p, u_{p+1}, \dots, u_{-1}, u, u_1, \dots, u_k). \tag{6}$$

Для дальнейших рассуждений удобно записать (4) в виде

$$D(\varphi(u, u_1)) = \psi(u, u_1), \tag{7}$$

взяв в качестве φ какое-нибудь решение уравнения $\varphi_u + a\varphi_{u_1} = 0$. Нетрудно убедиться, что любой i-интеграл уравнения (7) выражается через функцию $\varphi(u, u_1)$ и ее сдвиги. Действительно, любой i-интеграл (также как и любую функцию от сдвигов u) можно записать в виде $I(u_\ell, \varphi(u_\ell, u_{\ell+1}), \varphi(u_{\ell+1}, u_{\ell+2}), \dots)$. Учитывая что $D(\varphi(u_j, u_{j+1})) = \psi(u_j, u_{j+1})$ для всех j в силу (7), получаем $D(I) = I_{u_\ell}D(u_\ell) + \dots$, где многоточием обозначены слагаемые, не зависящие от производных u. А поскольку $D(u_\ell)$ зависит от u_x, равенство $D(I) = 0$ может выполняться лишь в случае $I_{u_\ell} = 0$.

В работе [6] было доказано, что любая симметрия вида (6) уравнения (7) переводится подстановкой $v = \varphi(u, u_1)$ в некоторое уравнение такого же вида. Но, учитывая, что любой i-интеграл можно записать в переменных $v_j := \varphi(u_j, u_{j+1})$, мы видим, что симметрия $u_t = R(\omega)$ может допускать подстановку $v = \varphi(u, u_1)$ для произвольного i-интеграла ω лишь в том случае если коэффициенты композиции $(\varphi_{u_1} T + \varphi_u) \circ R$ операторов R и $\varphi_{u_1} T + \varphi_u$ также выражаются в переменных v_j. А это, в свою очередь, означает, что подстановка $v = \varphi(u, u_1)$ допускается уравнением

$$u_t = R(\xi(\varphi(u_\ell, u_{\ell+1}), \varphi(u_{\ell+1}, u_{\ell+2}), \dots))$$

для любого ℓ и любой функции ξ, зависящей от любого конечного числа аргументов. В работе [4] было доказано, что подстановка обладает свойством, указанным в предыдущем предложении, тогда и только тогда, когда уравнение $(u_1)_x = -\frac{\varphi_u(u,u_1)}{\varphi_{u_1}(u,u_1)} u_x$ допускает x-интеграл вида (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые уравнения лиувиллевского типа // УМН. — 2001. — Т. 56. — № 1(337). — С. 63–106.
2. Адлер В. Е., Старцев С. Я. О дискретных аналогах уравнения Лиувилля // ТМФ. — 1999. — Т. 121. — № 2. — С. 271–285.
3. Habibullin I. T., Zheltukhina N., Pekcan A. Complete list of Darboux integrable chains of the form $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$ // J. Math. Phys. — 2009. — V. 50. — № 10. — Paper 102710, 23 pages.
4. Старцев С. Я. Интегрируемые по Дарбу дифференциально-разностные уравнения, допускающие интеграл первого порядка // Уфимский матем. журнал. — 2012. — Т. 4. — № 3. — С. 161–176.
5. Старцев С. Я. Необходимые условия интегрируемости по Дарбу для дифференциально-разностных уравнений специального вида // Уфимский матем. журнал. — 2011. — Т. 3. — № 1. — С. 80–84.
6. Ямилов Р. И. Обратимые замены переменных, порожденные преобразованиями Беклунда // ТМФ. — 1990. — Т. 85. — № 3. — С. 368–375.

УДК 517.987

ОПИСАНИЕ КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДИВЕРГЕНТНОГО ТИПА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

А. В. Субботин
НИУ БелГУ
e-mail: *subbotin@bsu.edu.ru*
Ю. П. Вирченко , д.ф.-м.н., проф.
НИУ БелГУ
e-mail: *virch@bsu.edu.ru*

Дается описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля на $\mathbb{R}^3$, инвариантных относительно пространственных трансляций и трансляций времени, а также преобразующихся ковариантным образом при вращениях $\mathbb{R}^3$.

Ключевые слова: векторное поле, эволюционное уравнение, закон локального сохранения, плотность потока векторного поля, унимодальнсть.

1. Постановка задачи

В статье изучается задача построения адекватного уравнения для описания эволюции векторного унимодального поля $\mathbf{p}$. Уравнение такого типа может быть использовано для описания эволюции неравновесных состояний сферически симметричных сегнетоэлектриков. При этом значения поля $\mathbf{p}$ представляют плотность электрического момента среды. Задача заключается в описании класса $\mathfrak{K}$ всех дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathsf{L}[\mathbf{p}]\,, \tag{1}$$

где $\mathsf{L}[\mathbf{p}]$ – дифференциальный, вообще говоря, нелинейный оператор второго порядка. Выбор того конкретного уравнения из этого класса всех допустимых уравнений того, которое может быть использовано в неравновесной термодинамике сегнетоэлектриков, представляет, конечно же, чисто физическую проблему. Формулировка задачи заключает в себе список требований, предъявляемых к оператору $\mathsf{L}[\cdot]$. Эти требования аналогичны тем, которые были использованы в [1] при решении аналогичной задачи относительно псевдовекторного поля. Эти требования состоят в следующем.

1. Оператор $\mathsf{L}[\cdot]$, осуществляющий отображение $\mathsf{L} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, должен иметь дивергентный тип, т.е.

$$\mathsf{L}_j[\mathbf{p}] = \nabla_k \mathsf{S}_{jk}[\mathbf{p}]\,, \qquad j = 1,2,3\,, \tag{2}$$

где $\mathsf{S}_{jk}[\mathbf{p}]$, $j,k = 1,2,3$ – дифференциальный оператор 1-го порядка. Здесь и далее по парам повторяющихся индексов производится суммирование по всем допустимым значениям.

2. Оператор $\mathsf{L}_j[\cdot]$ инвариантен относительно действия группы трансляций $\mathbb{R}^3$, на котором определяется поле $\mathbf{p}$.

3. Оператор $\mathsf{L}_j[\cdot]$ инвариантен относительно трансляций времени.

4. Значения оператора $\mathsf{L}_j[\cdot]$ представляют векторное поле на $\mathbb{R}^3$ и, соответственно, значения оператора $S_{jk}[\mathbf{p}]$ представляют тензорное поле. Тензор $S_{jk}[\mathbf{p}]$ мы будем называть плотностью потока поля $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Диффенренциальный оператор $\mathsf{S}_{jk}[\mathbf{p}]$ в общем виде предсталяется формулой

$$\mathsf{S}_{jk}[\mathbf{p}] = A_{jk}[\mathbf{p}] + T_{jklm}[\mathbf{p}]\nabla_l p_m \,. \tag{3}$$

Ввиду необходимости выполнения требований 2-4, значения $A_{jk}[\mathbf{p}]$ и $T_{jklm}[\mathbf{p}]$ представляют собой полиномы относительно вектора $\mathbf{p}$ с коэффициентами, которые являются диффренцируемыми функциями от $\mathbf{p}^2$, не зависящими от времени t и радиус-вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. При этом, согласно требованию 4, эти коэффициенты являются тензорами, соответственно 2-го и 4-го ранга.

Введем следующее дополнительное требование, которое как раз должно отражать тот факт, конструируемое уравнение предназначено для описания эволюции сферически симметричных сегнетоэлектриков.

5. Полиномы $A_{jk}[\mathbf{p}]$ и $T_{jklm}[\mathbf{p}]$ в виде произвольных линейных комбинаций

$$A_{jk}[\mathbf{p}] = \sum_{\alpha=1}^{n} a^{(\alpha)}(\mathbf{p}^2) A^{(\alpha)}_{jk}[\mathbf{p}] \,, \quad T_{jklm}[\mathbf{p}] = \sum_{\alpha=1}^{m} t(\mathbf{p}^2) T^{(\alpha)}_{jklm}[\mathbf{p}] \,, \tag{4}$$

по базисам, которые состоят из линейно независимых мономов в тензорной алгебре с образующими: вектор p_j и универсальный тензор второго ранга δ_{jk}; являющихся тензорами, соответственно, 2-го и 4-го ранга.

Таким образом, задача об описании класса $\mathfrak{K}$ сводится к алгебраической задаче описания всех элементов указанных базисов для конструирования полиномов $A_{jk}[\mathbf{p}]$ и $T_{jklm}[\mathbf{p}]$ таких, что дифференциальные операторы $\nabla_k T^{(\alpha)}_{jklm} \nabla_l p_m$, $\alpha = 1 \div m$ линейно независимы.

В заключение описанной постановки задачи укажем, что имеется альтернативный подход в задаче математической физики, направленной на конструирование уравнений, описывающих эволюцию конденсированных сред, который основан на т.н. гамильтоновом формализме (см., например, [2]). Авторы надеются подход, развиваемый в настоящем сообщении, окажется значительно более простым в применении к конкретным физическим задачам.

2. Описание класса $\mathfrak{K}$

Перечислим все элементы $A^{(\alpha)}[\mathbf{p}]$ и $T^{(\alpha)}_{jklm}[\mathbf{p}]$. Такое перечисление дается следующим утверждением.

Л е м м а 1. Размерности линейных пространств полиномов $A_{jk}[\mathbf{p}]$ и $T_{jklm}[\mathbf{p}]$ равны, соответственно, 2 и 10. Базисы в этих пространствах состоят, соответственно, из следующих списков мономов: δ_{jk}, $p_j p_k$ и

$$\delta_{jk}\delta_{lm}, \quad \delta_{jl}\delta_{km}, \quad \delta_{jm}\delta_{kl}, \quad p_j p_k p_l p_m$$

$$\delta_{jk}p_lp_m, \quad \delta_{jl}p_kp_m, \quad \delta_{jm}p_kp_l, \quad \delta_{kl}p_jp_m, \quad \delta_{km}p_jp_l, \quad \delta_{lm}p_jp_k.$$

Отсюда следует

Л е м м а 2. Тензоры $T^{(\alpha)}_{jklm}$, $\alpha = 1 \div 10$, даваемые следующим списком, линейно независимы:

$$\delta_{jk}(\nabla,\mathbf{p}), \quad \nabla_j p_k, \quad \nabla_k p_j, \quad p_jp_kp_m(\mathbf{p},\nabla)p_m,$$
$$\delta_{jk}p_m(\mathbf{p},\nabla)p_m, \quad p_kp_l\nabla_j p_l, \quad p_k(\mathbf{p},\nabla)p_j\,, \quad p_j(\mathbf{p},\nabla)p_k\,, \quad p_jp_l\nabla_k p_l, \quad p_jp_k(\nabla,\mathbf{p}).$$

Т е о р е м а 1. Класс операторов $\mathsf{L}[\mathbf{p}] = \nabla_k S_{jk}[\mathbf{p}]$ всех элементов класса $\mathfrak{K}$ эволюционных уравнений, удовлетворяющих требованиям 1-5, представляется формулой

$$\mathsf{L}_j[\mathbf{p}] = \nabla_j a(\mathbf{p}^2) + \nabla_k b(\mathbf{p}^2)p_jp_k + \nabla_j\Big[c_1(\mathbf{p}^2)(\nabla,\mathbf{p}) + c_2(\mathbf{p}^2)(\mathbf{p},\nabla)\mathbf{p}^2\Big] +$$
$$+\nabla_k\Big[c_3(\mathbf{p}^2)\nabla_j p_k + c_4(\mathbf{p}^2)\nabla_k p_j + c_5(\mathbf{p}^2)p_k(\mathbf{p},\nabla)p_j + c_6(\mathbf{p}^2)p_j(\mathbf{p},\nabla)p_k +$$
$$+c_7(\mathbf{p}^2)p_jp_k(\nabla,\mathbf{p}) + c_8(\mathbf{p}^2)p_jp_k(\mathbf{p},\nabla)\mathbf{p}^2 + c_9(\mathbf{p}^2)p_k\nabla_j\mathbf{p}^2 + c_{10}(\mathbf{p}^2)p_j\nabla_k\mathbf{p}^2\Big]. \quad (5)$$

3. Описание класса $\mathfrak{K}_0$.

О п р е д е л е н и е. Поле $p_j(\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^3$ назовем унимодальным, если оно обладает свойством $\mathbf{p}^2(\mathbf{x}) = p^2 = \text{const}$.

Введем в рассмотрение класс $\mathfrak{K}_0$ – подкласс класса $\mathfrak{K}$ таких уравнений, которые сохраняют унимодальность поля $p_j(\mathbf{x})$ в процессе эволюции. Для описания всех возможных уравнений этого класса, нужно: во-первых, в формуле (5) все коэффициенты $a, b, c^{(\alpha)}, \alpha = 1 \div 7$ положить постоянными; во-вторых, положить $c_2 = c_8 = c_9 = c_{10} = 0$, при этом слагаемые с c_1 и c_3 объединятся в одно; в третьих, доказать линейную независимость всех получившихся в результате первых двух операций слагаемых. Тогда получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Класс операторов $\mathsf{L}[\mathbf{p}] = \nabla_k S_{jk}[\mathbf{p}]$ всех элементов класса $\mathfrak{K}_0$ эволюционных уравнений, удовлетворяющих требованиям 1-5, представляется формулой

$$\mathsf{L}_j[\mathbf{p}] = b\nabla_k p_jp_k + c_3\nabla_j(\nabla,\mathbf{p}) + c_4\Delta p_j +$$
$$+\nabla_k\Big[c_5p_k(\mathbf{p},\nabla)p_j + c_6p_j(\mathbf{p},\nabla)p_k + c_7p_jp_k(\nabla,\mathbf{p})\Big]. \quad (6)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вирченко Ю.П., Чурсин Д.А. Плотность потока магнитного момента сферически симметричного магнетика // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & physics. – 2015. – №11(208); 39. – С.191-196.

2. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. Гамильтонов подход в теории конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией // Физика элементарных частиц и атомного ядра.– 1996. – 27. – 2. – С.431-492.

УДК 517.9

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[1]

О. В. Чернова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

e-mail: *volga@mail.ru*

В конечной области $D \in \mathbb{C}$ рассматривается вещественная эллиптическая система l линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными старшими коэффициентами. В работе установлен критерий фредгольмовой и найдена формула индекса.

Ключевые слова: эллиптическая система первого порядка, задача Римана-Гильберта, класс Гельдера, фредгольмов оператор

Пусть область D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ конечна, ограничена гладким контуром Γ, составленным из простых контуров Γ_i, $i = 1, \ldots, m$, где для определенности Γ_m охватывает остальные контуры и $\Gamma \in C^{1,\nu}$. Последнее означает, что производная гладкой параметризации кривой принадлежит классу Гельдера с показателем $0 < \nu < 1$ [1].

Аналогично [3] обозначим l_1 и l_2 число собственных значений матрицы A системы (1) (с учетом кратности), лежащих соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, при этом $l = l_1 + l_2$, а $\widetilde{\sigma} = \sigma_1 \cup \overline{\sigma_2}-$множество всех собственных значений. Для вещественной матрицы A сформулируем лемму, аналогичную лемме [3].

Л е м м а. Пусть матрица A вещественна, тогда $l_1 = l_2$ и, следовательно, число $l-$четно. Множества σ_1 и σ_2 совпадают, так как с каждым комплексным корнем есть комплексно сопряженный той же кратности. Тогда существуют такие обратимые $2l \times 2l$ матрицы B, J блочной структуры

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \overline{B}_{12} \\ B_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad B_{ij} \in \mathbb{C}^{l\times l}, \quad J_i \in \mathbb{C}^{l\times l},\ i, j = 1, 2,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект №1.7311.2017/8.9.).

подчиненные условиям $J_1 = J_2, B_{i1} = B_{i2}$, что выполнено

$$B^{-1}AB = \widetilde{J}, \quad \widetilde{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \overline{J}_2 \end{pmatrix}.$$

С учетом леммы удобно обозначить число собственных значений вещественной матрицы A через $2l$ и положить $\sigma-$множество корней характеристического уравнения этой системы в верхней полуплоскости. Кроме того, отметим, что согласно лемме, матрицы B и $\widetilde{J}$ примут вид

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 & \overline{B}_1 \\ B_2 & \overline{B}_2 \end{pmatrix} = (B, \overline{B}), \quad \text{где матрица–столбец} \quad B \in \mathbb{C}^{2l\times l},$$

$$\widetilde{B}A\widetilde{B}^{-1} = \widetilde{J} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \overline{J} \end{pmatrix},$$

где матрица $J \in \mathbb{C}^{l\times l}$ записана в жордановой форме, и ее диагональные элементы составляют множество σ.

Рассмотрим в области D вещественную эллиптическую систему первого порядка

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} - A\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + a(x,y)U(x,y) = F(x,y), \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{2l\times 2l}$, $2l \times 2l-$матричный коэффициент a и $2l-$компонентный вектор F вещественны. Удобно $2l-$компонентное вещественное решение U системы (1) представить в следующем виде $U = (U_1, U_2)$, где $U_i, i = 1, 2$ есть $l-$компонентные векторы.

Для системы (1) рассмотрим задачу Римана–Гильберта, заданную краевым условием

$$C(t)U(t)^+|_\Gamma = f(t), \quad t \in \Gamma \tag{2}$$

где $l \times 2l-$матрица–функция $C(t)$ класса $C^\nu(\Gamma)$ есть матрица–строка $C = (C_j)$, составленная из комплекснозначных матриц C_j, $j = 1, 2$ порядка $l \times l$ и $+$ означает граничное значение функции U на Γ.

Пусть

$$L_A = \frac{\partial U}{\partial y} - A\frac{\partial U}{\partial x}$$

дифференциальный оператор, который действует в классе $2l-$вектор–функций U и определяется вещественной $2l \times 2l$ матрицей A. Предполагая, что

$$a \in C^\mu(\overline{D}),\ F \in C^\mu(\overline{D}),\ f \in C^\mu(\Gamma), \quad 0 < \mu < \nu < 1, \tag{3}$$

задачу (1)–(2) будем рассматривать в классе

$$C_A^\mu(\overline{D}) = \{U \in C^1(D) \cap C^\mu(\overline{D}), L_A \in C^\mu(\overline{D})\}. \tag{4}$$

В области D задачу (1)–(2) будем называть фредгольмовой, если фредгольмов ее оператор, ставящий каждому решению U в соответствие пару (F, f) и действующий $C_A^\mu(\overline{D}) \to C^\mu(\overline{D}) \times C^\mu(\Gamma)$.

Теорема. *Пусть область D конечна, контур Γ класса $C^{1,\nu}$ состоит из объединения простых контуров Γ_i, $1 \le i \le m$, где для определенности Γ_m охватывает остальные контуры. Тогда в предположении (3), условие обратимости $l \times l-$ матрицы–функции*

$$G(t) = C_1(t)B_1 + C_2(t)B_2 \tag{5}$$

необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (1)–(2) в классе (4) и ее индекс дается формулой

$$æ = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\pi}[\arg \det G]_{\Gamma_i} + (2-m)l,$$

где приращение $[\ ]_{\Gamma_i}$ вдоль Γ_i берется в направлении, оставляющем область D слева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $2l-$вектор–функция $\widetilde{\phi}$ имеет вид $\widetilde{\phi} = (\phi, \overline{\phi})$. Аналогично положим

$$\widetilde{F}_0 = \widetilde{B}^{-1}2F = (2F_0, 2\overline{F}_0).$$

Согласно теореме 2 из [3] линейная подстановка $2U = \widetilde{B}\widetilde{\phi}$, или в блочной записи, подстановка

$$U_i = \mathrm{Re}B_i\phi, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

где $2l \times 2l$ матрица $\widetilde{B} = (B, \overline{B})$ рассмотрена выше, преобразует систему (1) к эквивалентной системе

$$\frac{\partial\phi(z)}{\partial y} - J\frac{\partial\phi(z)}{\partial x} + c(z)\phi(z) + d(z)\overline{\phi(z)} = F_0(z), \tag{7}$$

относительно $l-$вектор–функции $\phi(z)$. Здесь комплексные $l \times l-$матричные коэффициенты $c, d \in C^{\mu}(\overline{D})$ имеют явный вид

$$c = \widetilde{a}_{11}, \quad d = \widetilde{a}_{12},$$

где

$$\widetilde{a} = \widetilde{B}^{-1}a\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix}$$

есть $2l \times 2l-$комплекснозначная матрица, а $l-$вектор–функция F_0 принадлежит классу $C^{\mu}(\overline{D})$.

Подставляя замену (6) в левую часть краевого условия (2) получим:

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & \overline{B}_1 \\ B_2 & \overline{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \overline{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1B_1 + C_2B_2 & C_1\overline{B}_1 + C_2\overline{B}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ \overline{\phi} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (C_1B_1 + C_2B_2)\phi + (C_1\overline{B}_1 + C_2\overline{B}_2)\overline{\phi} \end{pmatrix} = 2\mathrm{Re}\,(C_1B_1 + C_2B_2)\phi.$$

Окончательно, с учетом (5), краевое условие примет вид

$$\operatorname{Re} G(t)\phi(t)^{+}|_{\Gamma} = f_0(t), \tag{8}$$

где удобно переобозначить $f(t)/2$ через $f_0(t)$.

Заметим что, если $2l-$вектор–функция U принадлежит классу (4) то $l-$вектор–функция ϕ принадлежит аналогичному классу

$$C_J^{\mu}(\overline{D}) = \{\phi \in C^1(D) \cap C^{\mu}(\overline{D}), L_J\phi \in C^{\mu}(\overline{D})\}, \quad L_J = \frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial x},$$

зависящему от J.

Таким образом, можно говорить, что исходная задача (1)–(2) в классе $C_A^{\mu}(\overline{D})$ эквивалентна задаче (7)–(8) в классе $C_J^{\mu}(\overline{D})$.

Далее, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1 [2], убеждаемся в справедливости теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 2017. — Т. 63. — С. 1–189.

2. Солдатов А. П., Чернова О. В. Задача Римана-Гильберта для эллиптических систем первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН, М. — 2018. —Т. 149. — С. 95-102.

3. Чернова О. В. Эллиптические системы первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами // Материалы III Международной научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математических наук». — 2017. — С. 109–112.

УДК 517.956

ЗАДАЧА ТИПА ГУРСА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ю. О. Яковлева, к.ф.-м.н., доц.
Самарский государственный технический университет
e-mail: *julia.yakovleva@mail.ru*

В статье рассмотрена характеристическая задача типа Гурса для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка. Регулярное решение задачи типа Гурса для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка получено в явном виде. Сформулирована теорема о корректности по Адамару постановки характеристической задачи для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка.

Ключевые слова: задача типа Гурса, система гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка, некратные характеристики, регулярное решение, корректность по Адамару.

В плоскости независимых переменных $(x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R})$ рассмотрим одну систему гиперболических уравнений третьего порядка

$$U_{xxy} - AU_{xyy} = 0,$$

где $U(x,y) = (u^1(x,y), u^2(x,y))^\top$ – двумерная вектор-функция, A –постоянная матрица второго порядка с различными действительными собственными значениями $\lambda_1,\ \lambda_2$.

Существует квадратная матрица второго порядка [1]

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

такая, что $T^{-1}AT = \Lambda_A$, где

$$\Lambda_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Указанная система имеет две кратные $x = 0,\ y = 0$ характеристики и две различные $y + \lambda_1 x = 0,\ y + \lambda_2 x = 0,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \neq 0$.

Задача G: Найти регулярное решение $U\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ указанной системы уравнений, удовлетворяющее условиям:

$$U\,(x,\,0) = T\alpha(x),$$

$$U\,(0,\,y) = T\beta(y),$$

$$U\,(x,\,-\lambda_i x) = T\gamma(x),$$

где $\alpha(x) = (\alpha^1(x), \alpha^2(x))^\top$, $\beta(y) = (\beta^1(y), \beta^2(y))^\top$, $\gamma(x) = (\gamma^1(x), \gamma^2(x))^\top$, $\alpha^i(x),\ \beta^i(y),\ \gamma^i(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $i = 1,\,2$.

Регулярным решением задачи G будем называть вектор-функцию $U\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, имеющую в плоскости независимых переменных $(x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R})$ все непрерывные частные производные, входящие в систему, и удовлетворящую указанной системе и условиям задачи G в обычном смысле.

Если $x \in I_c$, $I_c = [a, b]$, $c = \frac{a+b}{2}$ и отрезок I_c имеет центральную симметрию: $\forall x \in I_c$, $2c - x \in I_c$, то известно [2], что для любой функции $f(x)$ справедливо

$$f_{c,\,od}(x) = \frac{f(x) - f(2c-x)}{2},\ f_{c,\,ev}(x) = \frac{f(x) + f(2c-x)}{2},$$
$$f(x) = f_{c,\,od}(x) + f_{c,\,ev}(x).$$

При $c = 0$ обозначим $f_{od}(x)$, $f_{ev}(x)$ нечетную и четную части функции $f(x)$ соответственно.

Т е о р е м а. Если $\gamma^1_{od}(x) = \alpha^1_{od}(x) - \beta^1_{od}(\lambda_1 x)$, $\gamma^2_{od}(x) = \alpha^2_{od}(x) - \beta^2_{od}(\lambda_2 x)$, то задача G корректна по Адамару.

Выполнив замену

$$U = TW,\ W(x,y) = (w^1(x,y), w^2(x,y))^\top$$

при $\det T \neq 0$, совершим переход к системе вида:

$$W_{xxy} - \Lambda_A W_{xyy} = 0.$$

Следовательно, получим систему из двух гиперболических уравнений третьего порядка, каждое из которых имеет некратные характеристики:

$$w^1_{xxy} - \lambda_1 w^1_{xyy} = 0,$$
$$w^2_{xxx} - \lambda_2 w^2_{xyy} = 0.$$

Согласно исследованиям, приведенным в работе [3], регулярное решение задачи G для каждого уравнения полученной системы может быть получено в явном виде.

Тогда вектор-функция $W(x,y) = (w^1(x,y), w^2(x,y))^\top$ имеет вид:

$$w^1(x,y) = \alpha^1(x) + \beta^1(y) - \frac{1}{2}\alpha^1(0) + \frac{1}{2}\left[\alpha^1_{ev}(\frac{1}{\lambda_1}y + x) - \alpha^1_{ev}(\frac{1}{\lambda_1}x) - \alpha^1_{ev}(\frac{1}{\lambda_1}y)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\beta^1_{ev}(y + \lambda_1 x) - \beta^1_{ev}(x) - \beta^1_{ev}(y)\right] - \frac{1}{2}\left[\gamma^1_{ev}(\frac{1}{\lambda_1}y + x) - \gamma^1_{ev}(\frac{1}{\lambda_1}x) - \gamma^1_{ev}(\frac{1}{\lambda_1}y)\right],$$
$$w^2(x,y) = \alpha^2(x) + \beta^2(y) - \frac{1}{2}\alpha^2(0) + \frac{1}{2}\left[\alpha^2_{ev}(\frac{1}{\lambda_2}y + x) - \alpha^2_{ev}(\frac{1}{\lambda_2}x) - \alpha^2_{ev}(\frac{1}{\lambda_2}y)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\beta^2_{ev}(y + \lambda_2 x) - \beta^2_{ev}(x) - \beta^2_{ev}(y)\right] - \frac{1}{2}\left[\gamma^2_{ev}(\frac{1}{\lambda_2}y + x) - \gamma^2_{ev}(\frac{1}{\lambda_2}x) - \gamma^2_{ev}(\frac{1}{\lambda_2}y)\right].$$

Решение задачи G для исходной системы ищем в виде решения матричного уравнения $U = TW$:

$$u^1(x,y) = t_{11}w^1 + t_{12}w^2,$$
$$u^2(x,y) = t_{21}w^1 + t_{22}w^2.$$

Полученная вектор-функция $U(x,y) = (u^1(x,y), u^2(x,y))^\top$ является решением задачи G.

Таким образом, существование корректного по Адамару решения задачи G в плоскости независимых переменных $(x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$ для одной системы гиперболических уравнений третьего порядка доказана конструктивным путем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука. — 1988. — 549 с.
2. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Характеристическая задача для одного гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка с некратными характеристиками // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Том 13. — Номер 1. — С. 3–6.
3. Яковлева Ю. О. Характеристическая задача для одной системы дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего порядка // Вестник Самарского унивеситета. Естественнонаучная серия. — 2018. — Том 24. — Номер 1. — С. 20–24.

Алгебра, топология и геометрия

УДК 511.2

ПОЗИЦИОННЫЕ НУМЕРАЦИИ В ДИОФАНТОВЫХ РАВЕНСТВАХ

В.В. Агафонцев, к.т.н.
ФГБОУ ВПО «Псковский государственный университет»
e-mail: *fon-valery-ag@yandex.ru*

В статье представлен возможный подход к доказательству гипотезы Била (Beal's conjecture), основанный на позиционных нумерациях.

Ключевые слова: позиционные нумерации, позиционные системы счисления с произвольным целочисленным основанием, гипотеза Била, диофантовы равенства.

О п р е д е л е н и е 1. Следуя книге [1], определяющей в широком смысле системы счисления как *"нумерации"* [1; С. 21, 36, 62, 181, 209, 252], под понятием *"позиционные нумерации"* будем понимать позиционные системы счисления с произвольным целочисленным основанием.

О п р е д е л е н и е 2. Под понятием *"диофантово равенство"* будем понимать равенство, образующееся после подстановки в диофантово уравнение его фактического или гипотетического решения.

1993 год. США. Американский любитель математики Эндрю Бил (Andrew Beal) выдвинул такую гипотезу: If $A^x + B^y = C^z$, where A, B, C, x, y and z are positive integers and x, y and z are all greater than 2, then A, B and C must have a common prime factor. В переводе на русский: *Если* $A^x + B^y = C^z$, *где A, B, C, x, y, z - натуральные числа; x, y, z > 2, то A, B, C имеют общий простой делитель.* Гипотеза Била зарегистрирована в Американском математическом обществе (*American Mathematical Society*) как **Beal's conjecture**.

Представим возможный подход к доказательству гипотезы Била, основанный на методологическом базисе позиционных нумераций, то есть позиционных систем счисления с *произвольным* целочисленным основанием. Отметим, что на основе позиционных нумераций в работах [2] и [3] доказана лемма "ABC", формулируемая в уточнённом виде следующим образом:

Л е м м а "ABC". *Необходимое и достаточное условие выполнения диофантова равенства*

$$A^x + B^y = C^z, \tag{1}$$

в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $z \geq 2$, $(A, B, C) = 1$, *представимо триадой равенств:*

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \cdots + a_1 \cdot C + a_0 \tag{2}$$

$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \cdots + b_1 \cdot C + b_0 \tag{3}$$

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \tag{4}$$

где $i \in [1; z-1]$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$; $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$.

Здесь и далее символом $\mathbb{N}$ обозначены *натуральные*, то есть положительные целые числа *без нуля*; символом $\mathbb{N}_0$ обозначены натуральные числа *с нулём*.

Лемма "ABC" имеет два следствия.

С л е д с т в и е 1: *Необходимое условие выполнения диофантова равенства* $A^x + B^y = C^z$, *в котором* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $z \geq 2$; $(A, B, C) = 1$, *представимо равенством*

$$A^x + B^y = (C-1) \cdot C^{z-1} + C^{z-1}$$

С л е д с т в и е 2: *Равенство:*

$$a_0 + b_0 + \sum_{i=1}^{i=z-1} (a_i + b_i) \cdot C^i = C^z, \qquad (5)$$

где $a_0, b_0, C \in \mathbb{N}$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C-1$, *порождённое диофантовым равенством* $A^x + B^y = C^z$ *при условиях:* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $z \geq 2$, $(A, B, C) = 1$, *не зависит от значений x и y для любых* $x \geq 1, y \geq 1$ и *определяется* ***только*** *значением z.*

Доказательство леммы "ABC" и следствия 1 дано в работах [2], [3].

Докажем следствие 2, так как оно необходимо для последующего доказательства гипотезы Била.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем тождество

$$(C-1) \cdot C^{z-1} + (C-1) \cdot C^{z-2} + \cdots + (C-1) \cdot C + C = C^z \qquad (6)$$

Выполним в него подстановки из равенств (4). Получим равенство (5). Так как тождество (6) и равенства (4) не зависят от значений *x, y* исходного равенства (1), то и равенство (5) не будет зависеть от *x* и *y* для *любых* $x \geq 1$, $y \geq 1$, то есть равенство (5) определяется *только* значением *z,* что и требовалось доказать.

Убедимся в истинности леммы "ABC" и её следствия 2, рассмотрев случаи, в которых $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 2$, например:

а) $A^3 + B = C^2$; $2^3 + 1 = 3^2$;
б) $A^2 + B^2 = C^2$; $8^2 + 15^2 = 17^2$;
в) $A^3 + B^4 = C^2$; $6^3 + 5^4 = 29^2$;
г) $A + B^{11} = C^3$; $149 + 2^{11} = 13^3$;
д) $A^2 + B^4 = C^3$; $46^2 + 3^4 = 13^3$;
е) $A^5 + B^2 = C^3$; $3^5 + 10^2 = 7^3$.

В соответствии с леммой "ABC" примеры (а), (б), (в) порождают равенство вида

$$(a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^2$$

Действительно:

а) $A^3 + B = C^2$; $2^3 + 1 = 3^2$;
$(a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^2 =$
$= (2+0) \cdot 3 + 2 + 1 = 3^2$

б) $A^2 + B^2 = C^2$; $8^2 + 15^2 = 17^2$;
$(a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^2 =$
$= (3+13) \cdot 17 + 13 + 4 = 17^2$

в) $A^3 + B^4 = C^2$; $6^3 + 5^4 = 29^2$.
$(a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^2 =$
$= (7+21) \cdot 29 + 13 + 16 = 29^2$

В соответствии с леммой ″ABC″ примеры (г), (д), (е) порождают равенство

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^3 \qquad (7)$$

Действительно:

г) $A + B^{11} = C^3;\ 149 + 2^{11} = 13^3;$

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^3$$

$$(0 + 12) \cdot 13^2 + (11 + 1) \cdot 13 + 6 + 7 = 13^3$$

д) $A^2 + B^4 = C^3;\ 46^2 + 3^4 = 13^3;$

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^3$$

$$(12 + 0) \cdot 13^2 + (6 + 6) \cdot 13 + 10 + 3 = 13^3$$

е) $A^5 + B^2 = C^3;\ 3^5 + 10^2 = 7^3;$

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^3$$

$$(4 + 2) \cdot 7^2 + (6 + 0) \cdot 7 + 5 + 2 = 7^3$$

Эти примеры подтверждают истинность леммы ″ABC″ и следствия 2 из неё. Отметим важную особенность: в выполнимых диофантовых равенствах при $x > 1, y > 1,\ z > 1$ хотя бы одно из чисел x или y или z равняется 2: примеры - равенства (в), (д), (е). Докажем *невыполнимость* равенства (7), порождённого диофантовым равенством вида $A^x + B^y = C^z$, в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N};\ (A, B, C) = 1;\ x > 2,\ y > 2,\ z > 2.$

Т е о р е м а 1. *Равенство*

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^3$$

невыполнимо *для любых наборов чисел* $a_2, b_2, a_1, b_1 \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1,\ \ a_0, b_0, C \in \mathbb{N},$ *с которыми выполнялись бы равенства*

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \cdots + a_3 \cdot C^3 + a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0$$

$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \cdots + b_3 \cdot C^3 + b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0$$

где $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N};\ (A, B, C) = 1;\ x > 2,\ y > 2,\ z > 2$.

В соответствии с работой [2] теорему 1 можно сформулировать ещё и таким равносильным определением: *равенство*

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^3, \qquad (8)$$

порождённое диофантовым равенством $A^x + B^y = C^z$ при условиях: $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N};\ (A, B, C) = 1;\ x > 2,\ y > 2,\ z > 2,$ ***невыполнимо*** *для любых наборов чисел* $a_2, b_2, a_1, b_1 \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1,\ a_0, b_0, C \in \mathbb{N}.$

Для удобства изложения далее будем придерживаться этого второго определения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, покажем, что равенство (8) порождается диофантовым равенством (1) при *любом* натуральном числе z, большем 2 ($z > 2$). Действительно, необходимое и достаточное условие выполнения диофантова равенства (1) в соответствии с леммой ″ABC″ представляется триадой равенств (2), (3), (4). Из равенств (4) следует *необходимость* выполнения такой цепочки равенств:

$$C = a_2 + b_2 + 1; \qquad C = a_1 + b_1 + 1; \qquad C = a_0 + b_0$$

Подставляя эти равенства в тождество $(C - 1) \cdot C^2 + (C - 1) \cdot C + C = C^3$,

получим равенство (8). Отметим, что в соответствии со следствием 2 леммы ″ABC″ равенство (8) при $z > 2$ не зависит от значений x *и* y равенства $A^x + B^y = C^z$ для *любых* $x \geq 1, y \geq 1$, следовательно, и для $x > 2,\ y > 2$.

Итак, предположим, что равенство (8), порождённое диофантовым равенством $A^x + B^y = C^z$ при заданных условиях $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $(A, B, C = 1)$; $x > 2,\ y > 2,\ z > 2$ выполнимо хотя бы для одного набора чисел C, a_i, b_i, где $i = 0, 1, 2$. Выполняя условие данной теоремы ($x > 2,\ y > 2,\ z > 2$), положим $x = 3,\ y = 3,\ z = 3$. Получим гипотетическое диофантово равенство

$$A^3 + B^3 = C^3 \tag{9}$$

В соответствии с леммой ″ABC″ необходимое и достаточное условие выполнения равенства (9) требует выполнения такой триады равенств:

$$A^3 = a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0 \tag{10}$$

$$B^3 = b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0 \tag{11}$$

$$C = a_2 + b_2 + 1 = a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0 \tag{12}$$

Если бы выполнялись равенства (12), то, исходя из тождества

$$(C - 1) \cdot C^2 + (C - 1) \cdot C + C = C^3, \tag{13}$$

выполнялось бы и равенство (8). Если бы выполнялись равенства (10), (11), (12), то было бы выполнимо и равенство (9). И наоборот: если бы существовали ненулевые положительные целые числа $(A, B, C) = 1$, удовлетворяющие равенству (9), то выполнялись бы равенства (10), (11), (12).

Исходя из этих равенств, число C должно представляться числами $a_2,\ b_2,\ a_1,\ b_1 \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1; a_0, b_0 \in \mathbb{N}$; число A^3 должно представляться числами a_i $(i = 0, 1, 2)$, C^2 и C; число B^3 должно представляться числами b_i $(i = 0, 1, 2)$, C^2 и C. Таким образом, если бы существовали ненулевые положительные целые числа A, B, C, удовлетворяющие равенству (9), то в силу необходимого и достаточного условия его выполнения эти числа должны представляться набором чисел a_i, b_i $(i = 0, 1, 2)$. Но, как доказал Л. Эйлер, не существует ненулевых положительных целых чисел A, B, C, с которыми равенство (9) было бы выполнимо. В наличие такого доказательства сошлёмся на [4; §3], [5; гл.2, пп.2.1, 2.2] и [6]. Далее будем называть целые числа A, B, C *натуральными*. Так как не существует натуральных чисел A, B, C, удовлетворяющих равенству (9), то не существует и таких наборов чисел a_i, b_i $(i = 0, 1, 2)$, которыми числа A, B, C в соответствии с необходимым и достаточным условием выполнения равенства (9) должны представляться. Следовательно, для *любых* наборов чисел a_i, b_i $(i = 0, 1, 2)$ *не выполнятся все три равенства* (10), (11), (12). Невыполнимость равенств (12) означает выполнимость таких трёх неравенств:

$$C \neq a_2 + b_2 + 1; \qquad C \neq a_1 + b_1 + 1; \qquad C \neq a_0 + b_0 \tag{14}$$

Исходя из тождества (13) и включая в него подстановки из неравенств (14), получим:

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 \neq C^3 \tag{15}$$

Можно прийти к истинности неравенства (15), рассматривая вместо равенства (9) гипотетическое равенство $A^4 + B^4 = C^4$, удовлетворяющее всем условиям, предъявляемым к равенству $A^x + B^y = C^z$. Действительно, в гипо-

тетическом равенстве $A^4 + B^4 = C^4$: $A, B, C \in \mathbb{N}$; $x, y, z > 2$ и можно обеспечить $(A, B, C) = 1$. Как известно, невыполнимость равенства $A^4 + B^4 = C^4$ для любых натуральных чисел A, B, C была доказана П. Ферма [4; §2], [5; гл.1, пп.1.4, 1.5]. Следовательно, выполняя последовательность доказательных шагов, аналогичную выше изложенной, придём к выполнимости четырёх неравенств:

$$C \neq a_3 + b_3 + 1; \quad C \neq a_2 + b_2 + 1; \quad C \neq a_1 + b_1 + 1; \quad C \neq a_0 + b_0$$

В этом случае, исходя из тождества

$$(C-1) \cdot C^3 + (C-1) \cdot C^2 + (C-1) \cdot C + C = C^4,$$

и четырёх представленных выше неравенств, получим неравенство

$$(a_3 + b_3) \cdot C^3 + (a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 \neq C^4,$$

а, исходя из тождества (13) и трёх указанных выше неравенств получим неравенство (15).

Таким образом, исходное утверждение, основанное на предположении о выполнимости равенства (8), порождённого равенством $A^x + B^y = C^z$ при условиях $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $(A, B, C = 1)$; $x > 2$, $y > 2$, $z > 2$ хотя бы для одного набора чисел C, a_i, b_i $(i = 0, 1, 2)$, ***при тех же условиях*** *через последовательность импликаций привело к противоположному утверждению*. В силу фундаментального закона логики – *закона противоречия*, сформулированного Аристотелем: «невозможно, чтобы противоречащие утверждения были истинными по отношению к одному и тому же» [7, глава III, раздел "Учение об истине и законах мышления"], приходим к выводу о том, что исходное утверждение, основанное на предположении, является *ложным*. Следовательно, равенство (8), порождённое диофантовым равенством $A^x + B^y = C^z$ при условиях: $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $(A, B, C) = 1$; $x > 2$, $y > 2$, $z > 2$ **невыполнимо** для *любых наборов чисел* a_2, b_2, a_1, $b_1 \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1$, a_0, b_0, $C \in \mathbb{N}$; что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2. *Равенство*

$$A^x + B^y = C^z, \tag{16}$$

в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, *при* $x > 2$, $y > 2$, $z > 2$ ***невыполнимо*** *для любых чисел* $(A, B, C) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем утверждать *обратное*, предполагая, что равенство (16) при $x > 2$, $y > 2$, $z > 2$ выполнимо хотя бы для одного набора чисел $(A, B, C) = 1$. Тогда по лемме "ABC" должно выполниться необходимое и достаточное условие, которое в соответствии с равенствами (2), (3), (4) примет следующий вид:

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \cdots + a_3 \cdot C^3 + a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0 \tag{17}$$

$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \cdots + b_3 \cdot C^3 + b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0 \tag{18}$$

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \tag{19}$$

где $i \in [1; z-1]$; $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0 \leq C - 1$; $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$.

В соответствии с равенствами (17), (18) левая часть равенства (16) представится так:

$$A^x + B^y = (a_{z-1} + b_{z-1}) \cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2}) \cdot C^{z-2} + \cdots + (a_3 + b_3) \cdot C^2 +$$

$$+(a_2+b_2)\cdot C^2+(a_1+b_1)\cdot C+a_0+b_0 \qquad (20)$$

Исходя из тождества

$$(C-1)\cdot C^{z-1}+(C-1)\cdot C^{z-2}+\cdots+(C-1)\cdot C^3+$$
$$+(C-1)\cdot C^2+(C-1)\cdot C+C=C^z \qquad (21)$$

и делая в него подстановки из равенств (19), получим:

$$(a_{z-1}+b_{z-1})\cdot C^{z-1}+(a_{z-2}+b_{z-2})\cdot C^{z-2}+\cdots+(a_3+b_3)\cdot C^3+$$
$$+(a_2+b_2)\cdot C^2+(a_1+b_1)\cdot C+a_0+b_0=C^z$$

Нетрудно видеть, что при выполнении равенств (19) должно выполняться и такое равенство:

$$(a_2+b_2)\cdot C^2+(a_1+b_1)\cdot C+a_0+b_0=C^3 \qquad (22)$$

Но, как было доказано теоремой 1, равенство (22), вытекающее из диофантова равенства $A^x+B^y=C^z$ при условиях: $A,B,C,x,y,z\in\mathbb{N}$; $(A,B,C)=1$; $x>2,\ y>2,\ z>2$ **невыполнимо** для *любых наборов чисел* $a_2,b_2,a_1,b_1\in\mathbb{N}_0\le C-1,\ a_0,b_0,C\in\mathbb{N}$.

При названных условиях справедливо неравенство

$$(a_2+b_2)\cdot C^2+(a_1+b_1)\cdot C+a_0+b_0\neq C^3 \qquad (23)$$

Прибавим к левой и правой части неравенства (23) следующий многочлен:

$$(a_{z-1}+b_{z-1})\cdot C^{z-1}+(a_{z-2}+b_{z-2})\cdot C^{z-2}+\cdots+(a_3+b_3)\cdot C^3$$

Получим:

$$(a_{z-1}+b_{z-1})\cdot C^{z-1}+(a_{z-2}+b_{z-2})\cdot C^{z-2}+\cdots+(a_3+b_3)\cdot C^3+$$
$$+(a_2+b_2)\cdot C^2+(a_1+b_1)\cdot C+a_0+b_0\neq$$
$$\neq(a_{z-1}+b_{z-1})\cdot C^{z-1}+(a_{z-2}+b_{z-2})\cdot C^{z-2}+\cdots+(a_3+b_3)\cdot C^3+C^3 \qquad (24)$$

Левая часть неравенства (24), исходя из равенства (20), равна A^x+B^y; правая часть неравенства (24) , исходя из равенств (19) и тождества (21), равна C^z. Из неравенства (24) следует:

$$A^x+B^y\neq C^z \qquad (25)$$

Таким образом, исходное утверждение, основанное на предположении о выполнимости равенства (16) при $x>2,\ y>2,\ z>2$ хотя бы для одного набора чисел $(A,B,C)=1$, через последовательность импликаций привело к противоположному утверждению. В соответствии с фундаментальным законом логики – *законом противоречия*: одно и то же утверждение не может быть истинным и ложным [7, гл. III, раздел "Учение об истине и законах мышления"], приходим к выводу о том, что исходное предположение является *ложным*. Следовательно, равенство (16), в котором $A,B,C,x,y,z\in\mathbb{N}$, при $x>2,\ y>2,\ z>2$ **невыполнимо** для *любых* чисел $(A,B,C)=1$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 3. *Равенство*

$$A^x+B^y=C^z \qquad (26)$$

в котором $A,B,C,x,y,z\in\mathbb{N}$, *при* $x>2,\ y>2,\ z>2$ ***выполнимо*** *для составных натуральных чисел* A,B,C, *имеющих* ***общий*** *делитель.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что равенство (26) может быть порождено, например, одним из таких равенств:

$$\boldsymbol{a})\ D^x+E^y=F^2, \qquad \boldsymbol{b})\ D^x+E^2=F^z, \qquad (27)$$

в которых $D, E, F, x, y, z \in \mathbb{N}$, $(D, E, F) = 1$ и один из показателей x или y или z равен 2, а два других – больше 2.

Для случая **(*a*)**: умножим левую и правую часть равенства (27) на число F^{2xy}; для случая **(*b*)** – на число E^{2xz}. Получим:

$$\boldsymbol{a}) \ (D \cdot F^{2y})^x + (E \cdot F^{2x})^y = (F^2)^{1+xy};$$
$$\boldsymbol{b}) \ (D \cdot E^{2y})^x + (E^2)^{1+xz} = (F \cdot E^{2x})^z \qquad (28)$$

Введём следующие обозначения:

$$\text{для } \boldsymbol{(a)}: \ D \cdot F^{2y} = A; \quad E \cdot F^{2x} = B; \quad F^2 = C; \quad 1 + xy = z;$$
$$\text{для } \boldsymbol{(b)}: \ D \cdot E^{2y} = A; \quad E^2 = B; \quad F \cdot E^{2x} = C; \quad 1 + xz = y \qquad (29)$$

Для случая **(*a*)**: $z > 2$, так как $x > 2$ и $y > 2$.

Для случая **(*b*)**: $y > 2$, так как $x > 2$ и $z > 2$.

С учётом обозначений (29) равенства (28) запишутся так:

$$A^x + B^y = C^z \qquad (30)$$

Равенство (30) соответствует заключению теоремы 3, так как в нём $x > 2, y > 2, z > 2$ и числа A, B, C являются *составными натуральными числами, имеющими* ***общий*** *делитель*, что и требовалось доказать.

Приведём примеры, показывающие истинность теоремы 3. Для троек чисел (6, 5, 29) и (3, 46, 13) выполняются такие равенства: $6^3 + 5^4 = 29^2$ и $3^4 + 46^2 = 13^3$. Осуществляя процедуры, подобные приведённым в равенствах (28), получим соответственно:

a) $(6 \cdot 29^8)^3 + (5 \cdot 29^6)^4 = 29^{26}$; ***b)*** $(3 \cdot 46^6)^4 + 46^{26} = (13 \cdot 46^8)^3$

Очевидно, это очень большие *составные натуральные числа*, *имеющие как простой (случай* ***(a)****), так и составной (случай* ***(b)****) общий делитель*, в которых показатели степени $x > 2$, $y > 2$ и $z > 2$.

Т е о р е м а 4. *Равенство* $A^x + B^y = C^z$, *в котором* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, *при* $x > 2$, $y > 2$, $z > 2$ *выполнимо* ***только*** *для составных чисел* A, B, C, *имеющих* ***общий*** *делитель.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сопоставим теоремы 2 и 3.

Теоремой 2 доказано: *равенство* $A^x + B^y = C^z$, *в котором* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, *при* $x > 2$, $y > 2$, $z > 2$ ***невыполнимо*** *для любых чисел* $(A, B, C) = 1$.

Теоремой 3 доказано: *равенство* $A^x + B^y = C^z$, *в котором* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, *при* $x > 2$, $y > 2$, $z > 2$ ***выполнимо*** *для составных натуральных чисел* A, B, C, *имеющих* ***общий*** *делитель*.

Из сопоставления теорем 2 и 3 в части их условия и заключения следует истинность того, что *равенство* $A^x + B^y = C^z$, *в котором* $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, *при* $x > 2, y > 2, z > 2$ *выполнимо* ***только*** *для составных чисел* A, B, C, *имеющих* ***общий*** *делитель.* Напомним формулировку гипотезы Била: *Если* $A^x + B^y = C^z$, *где A, B, C, x, y, z – натуральные числа; x, y, z >2, то A, B, C имеют общий простой делитель.* Таким образом, можно утверждать, что гипотеза Била (Beal's conjecture) **доказана** и уточнена, так как общий делитель может быть не только простым, но и *составным* натуральным числом**.**

ЛИТЕРАТУРА

1. История математики с древнейших времён до начала XIX столетия: в 3 т. / под ред. А.П. Юшкевича, Т.1, М.: Наука, 1970.
2. Агафонцев В.В. От позиционных систем счисления к диофантовым равенствам // Инновации в науке: научный журнал. – № 8(84). – Новосибирск, Изд. АНС «СибАК», 2018. – С. 12-17. URL: https://sibac.info/journal/innovation/84 (дата обращения: 14.08.2018).
3. Агафонцев В.В. Лемма ″ABC″ и последняя теорема Ферма / В.В. Агафонцев // Современные проблемы физико-математических наук: Материалы III международной научно-практической конференции. – Орёл: Изд-во Орловского гос. ун-та, 2017. – С.113-119.
4. Постников М.М. Введение в теорию алгебраических чисел. М.: Наука, 1982.
5. Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. – М.: Мир, 1980. – 484 с.
6. Мачис Ю.Ю. О предполагаемом доказательстве Эйлера / Ю.Ю. Мачис// Математические заметки. – 2007. – №82:3. – С. 395-400.
7. Маковельский А.О. История логики / А.О. Маковельский.- М.: Изд-во Кучково поле, 2004. – 480 с.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ ФОРМАЛЬНЫХ РЯДОВ

Н. И. Дубровин, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный университет»
e-mail: *ndubrovin81@gmail.com*

Дано описание непрерывных линейных операторов на пространстве формальных рядов, связанных с правоупорядоченной группой.

Ключевые слова: формальные ряды, правоупорядоченная группа, линейные операторы.

Пусть G – множество, K – тело с дискретной топологией, и ${}^GK$ – правое линейное пространство всех отображений $\gamma : G \to K$ с покомпонентными операциями сложения и умножения на элементы тела K. Через γ_g обозначим образ элемента $g \in G$ относительно этого отображения. Если для всякого элемента $g \in G$ определить отображение $\delta^g : G \to K$ так, что $\delta^g_{g'}$ – символ Кронекера равный 1, если $g' = g$ и равный 0 в противном случае, то произвольный элемент из пространства ${}^GK$ можно представлять как формальную сумму $\gamma = \sum\limits_{g\in G}{}' \delta^g\gamma_g$. Элементы пространства ${}^GK$ будем называть *столбцами*. Для формальной суммы γ определим *нуль-множество* и *носитель*:

$$\mathcal{Z}(\gamma) = \{g \in G \mid \gamma_g = 0\}; \quad \operatorname{supp}\gamma = \{g \in G \mid \gamma_g \neq 0\}.$$

Фильтром $\mathfrak{G}$ на множестве G называется такое семейство его подмножеств, что 1) пересечение двух элементов (далее: окончаний) из $\mathfrak{G}$ – снова окончание, 2) любое надмножество окончания является окончанием, 3) пустое множество не принадлежит $\mathfrak{G}$ (см. [1]).

Пусть $\mathfrak{G}$ – фильтр на множестве G. Определим основной объект изучения: – пространство $[G]K$:

$$\{\mathfrak{G}\}K = \left\{\gamma \in {}^GK \mid \mathcal{Z}(\gamma) \in \mathfrak{G}\right\}.$$

Аналогично, для множества H с фильтром $\mathfrak{H}$ можно построить левое линейное пространство строк K^H, и подпространство $K\{\mathfrak{H}\}$ строк с нуль-множеством принадлежащим фильтру $\mathfrak{H}$. Всюду далее предполагается, что все фильтры содержат фильтр Фреше.

Через $\mathfrak{G}^*$ обозначаем фильтр всех подмножеств $A^* \subseteq G$ таких, что объединение $A^* \cup A$ кофинально в G для любого $A \in \mathfrak{G}$. Для элемента $A^* \in \mathfrak{G}^*$ рассмотрим *окрестность*

$$U(A^*) = \{\gamma \in \{\mathfrak{G}\}K \mid \mathcal{Z}(\gamma) \supseteq G \setminus A^*\}.$$

Теорема 1. Семейство подпространств $\{U(A^*) \mid A^* \in \mathfrak{G}^*\}$ является базой окрестностей нуля топологии (обозначим ее $T(\mathfrak{G})$) пространства ${}^GK$; ${}^GK$ становиться линейным хаусдорфовым топологическим пространством. Подпространство $\{\mathfrak{G}\}K$ полно относительно топологии $T(\mathfrak{G})$, при условии сбалансированности фильтра $\mathfrak{G}$. Подпространство конечных сумм $[G]K$ плотно в $(\{\mathfrak{G}\}K, T(\mathfrak{G}))$.

В случае $\mathfrak{G} = \operatorname{Cof} G$ имеем: $\mathfrak{G}^* = \mathcal{P}(G)$, $\{G\}K = [G]K$. Так как в качестве A^* в определении окрестности $U(A^*)$ можно брать что угодно, то взяв $A^* = \emptyset$, получаем, что $\{0\}$ – окрестность нуля. Из этого следует, что любое подмножество в $[G]K$ открыто и замкнуто, и $T(\operatorname{Cof} G)$ – дискретная топология.

Если $\mathfrak{G} = \mathcal{P}(G)$, то $\mathfrak{G}^* = \operatorname{Cof} G$, $\{G\}K = {}^G K$ и в качестве A^* можно брать только кофинальные подмножества. Тогда мы получаем топологию Тихонова, предбазой окрестностей нуля в которой служат подпространства $U_g = \left\{\gamma \in {}^G K \mid \gamma_g = 0\right\}$.

Рассмотрим случай, когда $(G, \leq)$ – линейно упорядоченное множество, и $\mathfrak{G} = \operatorname{CoR} G$ – фильтр, состоящий из дополнений до вполне упорядоченных по возрастанию подмножеств множества G. Тогда $\mathfrak{G}^* = \operatorname{CoL} G$ – семейство дополнений до вполне упорядоченных по убыванию подмножеств.

Суммируемость семейств элементов в абелевой топологической группе см. [2], глава 3, §5. В нашей конкретной ситуации топологического пространства $(\{\mathfrak{G}\}K, T(\mathfrak{G}))$ можно определить суммируемость непосредственно. Скажем, что семейство $\{\alpha_j \in \{\mathfrak{G}\}K \mid j \in J\}$ $\mathfrak{G}$-*суммируемо* и $\gamma = \sum\limits_{j\in J}{}^{\mathfrak{G}} \alpha_j$ есть $\mathfrak{G}$-*сумма*, если выполняются следующие два условия: 1) для любого элемента $g \in G$ существует лишь конечное число индексов j таких, что $g \in \operatorname{supp} \alpha_j$, и имеет место равенство $\gamma_g = \sum\limits_{j\in J} (\alpha_j)_g$; 2) $\bigcap_{j\in J} \mathcal{Z}(\alpha_j) \in \mathfrak{G}$.

Перейдем к описанию непрерывных линейных операторов. Кроме множества G с фильтром $\mathfrak{G}$ рассмотрим и фиксируем множество H с фильтром $\mathfrak{H}$, заданным на нем. Тем самым кроме топологического линейного пространства $\{\mathfrak{G}\}K$ рассматриваем и топологическое линейное пространство $\{\mathfrak{H}^*\}K$. Линейное отображение $\varphi : \{\mathfrak{G}\}K \to \{\mathfrak{H}^*\}K$ назовем $\mathfrak{G}$-*линейным*, если для любой $\mathfrak{G}$-суммируемой системы $\{\alpha_j \mid j \in J\}$ формальных сумм из пространства $\{\mathfrak{G}\}K$ система $\{\varphi[\alpha_j] \mid j \in J\}$ будет $\mathfrak{H}^*$-суммируемой, при этом выполняется равенство

$$\varphi\left[\sum_{j\in J}{}^{\mathfrak{G}} \alpha_j\right] = \sum_{j\in J}{}^{\mathfrak{H}^*} \varphi[\alpha_j].$$

Отображение $\Phi : H \times G \to K$ будем называть $H \times G$-матрицей, и образ элемента $(h, g) \in H \times G$ обозначим Φ_h^g. Если $\varphi : [G]K \to {}^H K$ – отображение, то по нему естественным образом строится матрица Φ так, что $\Phi^g = \varphi[\delta^g] \quad (g \in G)$. Определим произведение $H \times G$-матрицы Φ на столбец $\gamma \in {}^G K$ так, что выполняется равенство $(\Phi \cdot \gamma)_h = \sum\limits_{t\in G} \Phi_h^t \cdot \gamma_t$ для любого $h \in H$.

Определим фильтр $\langle \mathfrak{H}^*, \mathfrak{G}^* \rangle$ на декартовом произведении $H \times G$ так, что $X \in \langle \mathfrak{H}^*, \mathfrak{G}^* \rangle$ в том и только том случае, когда

$$\forall\, A \in \mathfrak{G},\ \forall\, B \in \mathfrak{H}\ \exists\, A^* \in \mathfrak{G}^*,\ \exists\, B^* \in \mathfrak{H}^* :\ B^* \times \overline{A} \cup \overline{B} \times A^* \subseteq X$$

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}$ – сбалансированные фильтры на множествах H

и G соответственно, содержащие фильтры Фреше,
$\varphi : \{\mathfrak{G}\}K \to \{\mathfrak{H}^*\}K$ – линейное отображение с $H \times G$-матрицей Φ. Следующие условия эквивалентны:

а) φ – непрерывное отображение;

б) нуль-множество $\mathcal{Z}(\Phi)$ принадлежит фильтру $\langle \mathfrak{H}^*, \mathfrak{G}^* \rangle$;

в) для любого $A \in \mathfrak{G}$ система $\left\{ \Phi^t \mid t \in \overline{A} \right\}$ $\mathfrak{H}^*$-суммируема, и имеет место равенство

$$\varphi \left[\sum_{t \in \overline{A}}{}' \delta^t k_t \right] = \sum_{t \in \overline{A}}^{\mathfrak{H}^*} \Phi^t k_t$$

для любого набора коэффициентов $k_t \in K$;

г) отображение φ является $\mathfrak{G}$-линейным.

При выполнении этих условий имеет место равенство

$$\varphi[\gamma] = \Phi \cdot \gamma \text{ для любого столбца } \gamma \in \{\mathfrak{G}\}K.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука. — 1968. — 272 с.
2. Общая топология. Топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства. — М.: Наука. — 1969. — 392 с.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ С БИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т. В. Дубровина, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный университет»
e-mail: *ndubrovin81@gmail.com*

Вычисляется определитель, составленный из биномиальных коэффициентов. Как следствие, получаем чисто алгебраическое доказательство того, что экспонента не может быть представлена в виде рациональной дроби.

Ключевые слова: биномиальные коэффициенты, экспонента.

Биномиальные коэффициенты – замечательный комбинаторный объект, возникающий естественным образом почти во всех разделах математики, особенно, в алгебре. Очень подробно свойства биномиальных коэффициентов разобраны в книге [1]. Если n, m – неотрицательные целые числа, причем $n \geq m$, то биномиальный коээфициент определяется как

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \tag{1}$$

и равен числу способов выбора m предметов из n предметов. Правое крайнее выражение в (1) может быть обобщено на случай любого действительного α:

$$C_\alpha^m = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!}, \tag{2}$$

где по прежнему $m \geq 0$ – целое число. В случае $m = 0$ требуется дополнительное соглашение: $C_\alpha^0 = 1$. Если считать α переменной, то C_α^m – многочлен степени m со старшим коэффициентом $1/m!$. Это соображение позволяет доказать рекуррентную формулу

$$C_{\alpha+1}^k = C_\alpha^k + C_\alpha^{k-1} \qquad (k \geq 1) \tag{3}$$

путем подстановки $\alpha = 0, 1, \dots, k$ и сравнивания старших коэффициентов. Заметим, что в соответствии с определением (2) получаем, что для натурального α и натурального $m > \alpha$ имеет место равенство $C_\alpha^m = 0$.

Напомним, что для комплексной функции $w = f(z)$, аналитической в круге $|z| < R$ имеет место разложение по формуле Маклорена

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

В частности, если $f(z) = (1+z)^\alpha$, то получим

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k z^k,$$

чем и вызвано название чисел C_α^k. Соотношение (3) тогда не что иное как очевидное равенство $(1+z)^{\alpha+1} = (1+z)^\alpha + z(1+z)^\alpha$.

Биномиальные коэффициенты для $\alpha = \dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ можно расположить в таблицу

$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	-2	3	-4	5	-6	7	$\dots$
1	-1	1	-1	1	-1	1	$\dots$
1	0	0	0	0	0	0	$\dots$
1	1	0	0	0	0	0	$\dots$
1	2	1	0	0	0	0	$\dots$
1	3	3	1	0	0	0	$\dots$
1	4	6	4	1	0	0	$\dots$
1	5	10	10	5	1	0	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

В этой таблице каждое число равно сумме двух чисел, одно из которых стоит над ним, а второе левее первого. Для того, чтобы это правило работало, т.е. была

бы верно соотношение (3) и для $k < 1$, для единиц, стоящих в первом столбце, считаем, что $C_\alpha^z = 0$ для любого отрицательного целого z.

Сформулируем **основной результат-формулу**: *для любого натурального k и любого действительного α имеет место равенство*

$$\begin{vmatrix} C_\alpha^0 & C_\alpha^1 & \dots & C_\alpha^k \\ C_{\alpha+1}^0 & C_{\alpha+1}^1 & \dots & C_{\alpha+1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{\alpha+k}^0 & C_{\alpha+k}^1 & \dots & C_{\alpha+k}^k \end{vmatrix} = 1 \tag{4}$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Кроме того, понадобиться видоизменение равенства (4), получающее переписыванием столбцов в обратном порядке:

$$\begin{vmatrix} C_\alpha^k & C_\alpha^{k-1} & \dots & C_\alpha^0 \\ C_{\alpha+1}^k & C_{\alpha+1}^{k-1} & \dots & C_{\alpha+1}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{\alpha+k}^k & C_{\alpha+k}^{k-1} & \dots & C_{\alpha+k}^0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \tag{5}$$

Для доказательства формулы (5) рассмотрим более общую ситуацию. На пространстве $\mathbb{R}^\infty$ бесконечных последовательностей определим линейный оператор s сдвига влево на одну позицию:

$$s(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, \dots)$$

Обозначим бесконечную последовательность $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$. Посредством $\mathbf{a}_n$ обозначаем ее n-ый элемент, т.е. a_n, а $\mathbf{a}\langle n\rangle$ будет обозначать конечную подпоследовательность последовательности $\mathbf{a}$, состоящую из первых n членов:

$$\mathbf{a}\langle n\rangle = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Наконец, Id будет обозначать тождественный оператор на пространстве $\mathbb{R}^\infty$.

Более общая формула такова: пусть $a_j = 0$ для всех $j > n$, тогда

$$D_n(\mathbf{a}) := \begin{vmatrix} \mathbf{a}\langle n\rangle \\ (\mathrm{Id}+s)(\mathbf{a})\langle n\rangle \\ (\mathrm{Id}+s)^2(\mathbf{a})\langle n\rangle \\ \dots\dots\dots\dots \\ (\mathrm{Id}+s)^{n-1}(\mathbf{a})\langle n\rangle \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \dots a_n \tag{6}$$

Для доказательства этой формулы заметим, что

$$(\mathrm{Id}+s)^{j+1}(\mathbf{a})\langle n\rangle - (\mathrm{Id}+s)^j(\mathbf{a})\langle n\rangle = (\mathrm{Id}+s)^j s(\mathbf{a})\langle n\rangle = \\ = (\mathrm{Id}+s)^j(a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1})$$

Вычтем из каждой последуюшей строки матрицы в (6) предыдущую. Получим следующий определитель

$$D_n(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\langle n\rangle \\ s(\mathbf{a})\langle n\rangle \\ (\mathrm{Id}+s)s(\mathbf{a})\langle n\rangle \\ \dots\dots\dots\dots \\ (\mathrm{Id}+s)^{n-2}s(\mathbf{a})\langle n\rangle \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}a_n D_{n-1}(s(\mathbf{a})) \tag{7}$$

Равенство здесь обусловлено тем что $a_j = 0$ для $j > n$, в силу чего последний столбец матрицы в (7) имеет вид $(a_n, 0, 0, \dots, 0)^\top$. Разложение по последнему столбцу завершает доказательство рекуррентной формулы (7). Применяя рекуррентную формулу (7) $n-1$ раз, получим

$$D_n(\mathbf{a}) = (-1)^{(n+1)+n+\dots+3}a_n a_{n-1}\dots a_1 = (-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}a_1 a_2 \dots a_n = \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1 a_2 \dots a_n$$

Формула (5) следует из формулы (6), если в качестве $\mathbf{a}$ взять строку

$$\mathbf{a} = \left(C_\alpha^k, C_\alpha^{k-1}, \dots, C_\alpha^0, 0, 0, \dots\right).$$

и учесть (3).

Из формулы (5) легко выводится утверждение: *экспонента не может быть рациональной дробью.* Это утверждение можно доказать аналитическими методами (например, сравнивая степень роста экспоненты и степенной функции или замечая, что экспонента голоморфна на комплексной плоскости, а рациональная дробь с нетривиальным знаменателем – нет). Однако чисто алгебраическое доказательство имеет то преимущество, что остается быть верным для любого поля характеристики ноль.

Итак, предположим противное, $\exp(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены степени m и n соответственно. Переписывая последнее равенство в виде $\exp(x)Q(x) = P(x)$ и приравнивая коэффициенты при степенях $> m$, получим

$$\frac{a_n}{k!} + \frac{a_{n-1}}{(k+1)!} + \dots + \frac{a_0}{(k+n)!} = 0, \tag{8}$$

где $Q(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ и $n + k > m$. При этом натуральное число k можно взять произвольным, лишь бы выполнялось неравенство $n + k > m$. Возьмем одно такое k а вместе с ним еще $k+1, \dots, k+n$. Получаем систему $n+1$ линейных уравнений с $n+1$ неизвестными $a_0, a_1, \dots, a_n$. Определитель этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{k!} & \frac{1}{(k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(k+n)!} \\ \frac{1}{(k+1)!} & \frac{1}{(k+2)!} & \cdots & \frac{1}{(k+n+1)!} \\ \frac{1}{(k+2)!} & \frac{1}{(k+3)!} & \cdots & \frac{1}{(k+n+2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(k+n)!} & \frac{1}{(k+n+1)!} & \cdots & \frac{1}{(k+2n)!} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Если умножить i-ую строку этого определителя на $(k+n+i-1)!$, а j-ый столбец его поделить на $(n+j-1)!$, то он примет вид

$$\begin{vmatrix} C_{k+n}^{n} & C_{k+n}^{n-1} & \dots & C_{k+n}^{0} \\ C_{k+n+1}^{n} & C_{k+n+1}^{n-1} & \dots & C_{k+n+1}^{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{k+2n}^{n} & C_{k+2n}^{n-1} & \dots & C_{k+2n}^{0} \end{vmatrix} \tag{10}$$

Определитель (10) отличен от нуля в силу формулы (5), следовательно и определитель (9) отличен от нуля. Тем самым $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$ – противоречие с тем, что многочлен $Q(x)$, как знаменатель дроби, должен быть отличным от нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир, 1998 — 703 с.

УДК 512.554

ВЫРОЖДЕНИЯ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР И “МАРГИНАЛЬНЫХ” АЛГЕБР[1]

С. П. Куценогий

Новосибирский государственный университет

e-mail: *kutsenogiystepan@gmail.com*

Ю. С. Попов

Новосибирский государственный университет

e-mail: *yuri.ppv@gmail.com*

Мы описываем все вырождения многообразия йордановых алгебр размерности 4 над полем комплексных чисел. Для каждого натурального n мы определяем n-мерную жесткую “маргинальную” йорданову алгебру уровня один. Кроме того, мы рассматриваем “маргинальные” алгебры в ассоциативном, альтернативном, лево альтернативном, некоммутативно йордановом, лейбницевом и антикоммутативном случаях..

Ключевые слова: вырождение алгебры, жесткая алгебра, йорданова алгебра.

Множество всех структур алгебр на пространстве $\mathbb{V}$ размерности n над $\mathbb{C}$ является векторным пространством, изоморфным $Hom(\mathbb{V}\otimes\mathbb{V},\mathbb{V}) = \mathbb{V}^*\otimes\mathbb{V}^*\otimes\mathbb{V}$. Это пространство имеет структуру аффинного многообразия $\mathbb{C}^{n^3}$. В самом деле, зафиксируем базис $e_1,\ldots,e_n$ пространства $\mathbb{V}$. Тогда любое отображение $\mu \in Hom(\mathbb{V}\otimes\mathbb{V},\mathbb{V})$ однозначно определяется набором из n^3 структурных констант $c_{i,j}^k \in \mathbb{C}$ таких, что $\mu(e_i\otimes e_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{i,j}^k e_k$.

[1]Работа была поддержана РФФИ 18-31-00001 и грантом президента РФ для поддержки молодых кандидатов наук (МК-1378.2017.1).

Йордановы алгебры впервые были определены в 1933 году в работе Йордана, фон Неймана и Вигнера, где они были использованы для изучения квантовой механики. Напомним их определение.

О п р е д е л е н и е. Коммутативная алгебра A называется *йордановой алгеброй*, если она удовлетворяет тождеству

$$(x^2)yx = (x^2y)x.$$

На текущий день, йордановы алгебры являются одним из наиболее исследованных многообразий неассоциативных алгебр.

Обозначим как $\mathfrak{Jord}_n$ множество всех йордановых алгебр размерности n над $\mathbb{C}$. Легко видеть, что $\mathfrak{Jord}_n$ является замкнутым по Зарисскому подмножеством многообразия $Hom(\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}, \mathbb{V})$ (определяющие тождества йордановых алгебр индуцируют соответствующие полиномиальные соотношения относительно переменных $c_{i,j}^k$). Общая линейная группа $\mathrm{GL}(\mathbb{V})$ действует на $\mathfrak{Jord}_n$ сопряжениями:

$$(g * \mu)(x \otimes y) = g\mu(g^{-1}x \otimes g^{-1}y),$$

где $x, y \in V$, $\mu \in \mathfrak{Jord}_n \subset Hom(\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}, \mathbb{V})$ and $g \in \mathrm{GL}(\mathbb{V})$. Следовательно, $\mathfrak{Jord}_n$ разбивается на $\mathrm{GL}(\mathbb{V})$-орбиты, соответствующие классам изоморфизма алгебр. Обозначим как $O(\mu)$ орбиту $\mu \in \mathfrak{Jord}_n$ относительно действия $GL(\mathbb{V})$ и как $\overline{O(\mu)}$ — замыкание по Зарисскому орбиты $O(\mu)$.

О п р е д е л е н и е. Пусть A и B — две n -мерные йордановы алгебры и $\mu, \lambda \in \mathfrak{Jord}_n$ представляют A и B соответственно. Будем говорить, что A вырождается в B, если $\lambda \in \overline{O(\mu)}$.

Заметим, что в этом случае $\overline{O(\lambda)} \subset \overline{O(\mu)}$. Следовательно, определение вырождения не зависит от выбора μ и λ.

О п р е д е л е н и е. Пусть A представляется $\mu \in \mathfrak{Jord}_n$. Тогда A является *жесткой алгеброй* в $\mathfrak{Jord}_n$, если $O(\mu)$ является открытым подмножеством $\mathfrak{Jord}_n$.

Один из способов (чье преимущество заключается в независимости от классификации всех йордановых алгебр фиксированной размерности с точностью до изоморфизма) доказательства жесткости йордановой алгебры $\mathfrak{J}$ заключается в том, чтобы показать, что вторая группа когомологий $H^2(\mathfrak{J}, \mathfrak{J})$ с коэффициентами в регулярном модуле равна нулю.

Напомним, что подмножество многообразия называется неприводимым, если оно не может быть представлено в виде объединения двух нетривиальных замкнутых подмножеств. Максимальное неприводимое замкнутое подмножество многообразия называется его *неприводимой компонентой*. В частности, алгебра A является жесткой в $\mathfrak{Jord}_n$ тогда и только тогда, когда $\overline{O(\mu)}$ является неприводимой компонентой $\mathfrak{Jord}_n$. Хорошо известно, что любое аффинное многообразие можно представить в виде конечного объединения его неприводимых

компонент единственным образом. Поэтому описание жестких алгебр является естественным инструментом для описания многообразия $\mathfrak{Jord}_n$.

Существует много результатов относительно вырождений алгебр малых размерностей в многообразии, определяемом набором тождеств. В частности, жесткие алгебры были описаны в многообразиях маломерных ассоциативных алгебр [8] и алгебр Ли [5]. Существует меньше работ, в которых была найдена полная информация о вырождениях для некоторого многообразия алгебр. Эта проблема была решена, например, для двумерных пре-лиевых алгебр в [3] и для трехмерных алгебр Новикова в [4].

В нашей работе была получена полная информация о вырождениях четырехмерных йордановых алгебр над $\mathbb{C}$. Таким образом, были улучшены результаты работы [6], в которой были найдены все жесткие алгебры и неприводимые компоненты этого многообразия.

Другое интересное направление исследований, связанное с вырождениями — это исследование алгебр малых уровней. Понятие уровня алгебры было введено в [1].

О п р е д е л е н и е. Алгебра A имеет *уровень* n, если существует цепочка n нетривиальных вырождений, которая начинается в A и не существует такой цепочки длины $n+1$.

Грубо говоря, уровень оценивает сложность умножения данной алгебры. Например, единственной алгеброй нулевого уровня является алгебра с нулевым умножением, а алгебра имеет уровень 1, если замыкание ее орбиты образовано нулевой алгеброй и самой орбитой. На данный момент немногое известно о классификации алгебр малого уровня. Ассоциативные, лиевы, йордановы, лейбницевы и нильпотентные алгебры уровня два были классифицированы в [7].

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{J}_n$ размерности n, заданную следующей таблицей умножения в базисе $e, n_1, \dots n_{n-1}$:

$$e^2 = e, en_i = \frac{1}{2}n_i, n_in_j = 0, \text{ где } i,j = 1,\dots,n-1.$$

Легко проверить, что $\mathfrak{J}_n$ — йорданова алгебра для любого $n > 1$.

Т е о р е м а. Для любого $n > 1$ алгебра $\mathfrak{J}_n$ имеет уровень 1. Также вторая группа когомологий $H^2(\mathfrak{J}_n, \mathfrak{J}_n)$ тривиальна. В частности, все алгебры $\mathfrak{J}_n$ являются жесткими в многообразии йордановых алгебр.

Заметим, что алгебры $\mathfrak{J}_n$ выделяются определенным образом. Они жесткие, но могут вырождаться только в алгебру с нулевым умножением, что означает, что замыкание GL_n-орбиты точки, соответствующей алгебре $\mathfrak{J}_n$, имеет одноточечное пересечение с пересечением всех другими неприводимыми компонентами $\mathfrak{Jord}_n$ (мы называем такие алгебры “маргинальными”). Следовательно, не существует нетривиальной йордановой алгебры размерности $n \geq 2$ лежащей в пересечении всех неприводимых компонент в многообразии n-мерных

йордановых алгебр. Заметим, что в многообразии алгебр Ли такая алгебра существует [2].

Рассмотрим также (ассоциативные) алгебры ν_n^l, ν_n^r заданные следующей таблицей умножения в базисе $e, n_1, \dots n_{n-1}$:

$$\nu_n^l = \langle e, n_1, \dots, n_{n-1} \rangle \ : \ e^2 = e, \ en_i = n_i \ (i = 1, \dots, n-1),$$

$$\nu_n^r = \langle e, n_1, \dots, n_{n-1} \rangle \ : \ e^2 = e, \ n_i e = n_i \ (i = 1, \dots, n-1).$$

Т е о р е м а. Для любого $n > 1$ алгебры ν_n^l, ν_n^r имеют уровень 1 и являются жесткими в многообразиях ассоциативных, альтернативных и левоальтернативных алгебр.

Наконец, рассмотрим многообразие некоммутативных йордановых алгебр, которое является обобщением многообразий ассоциативных, альтернативных и йордановых алгебр. Оно задается следующими тождествами:

$$(xy)x = x(yx), \ (x^2y)x = x^2(yx).$$

Т е о р е м а. Алгебры $\mathfrak{J}_n, \nu_n^l, \nu_n^r$ не являются жесткими в многообразии некоммутативных йордановых алгебр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбацевич В. В. О сжатиях и вырождениях конечномерных алгебр // Изв. вузов. Матем. — 1991. — 10. — С. 19–27.
2. Горбацевич В. В. О пересечении неприводимых компонент пространства конечномерных алгебр Ли // Матем. сб. — 2012. — 203. — 7. — С. 57–58.
3. Benes T., Burde D. Degenerations of pre-Lie algebras // Journal of Mathematical Physics. — 2009. — 50. — 11. — 112102, 9 pp.
4. Benes T., Burde D. Classification of orbit closures in the variety of three dimensional Novikov algebras// Journal of Algebra and Its Applications. — 2014 — 13. — 2. — 1350081, 33 pp.
5. Burde D., Steinhoff C. Classification of orbit closures of 4–dimensional complex Lie algebras // Journal of Algebra. — 1999. — 214. — 2. — С. 729–739.
6. Kashuba I., Martin M. Deformations of Jordan algebras of dimension four // Journal of Algebra. — 2014. — 399. — С. 277–289.
7. Khudoyberdiyev A. The classification of algebras of level two // J. Geom. Phys. — 2015. — 98. — С. 13–20.
8. Mazzola G. The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five // Manuscripta Mathematica. — 1979. — 27. — С. 81–101.

УДК 512.7

О ЧИСЛЕ КОМПОНЕНТ ЭЙНА В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ СТАБИЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ РАНГА 2

А. А. Кытманов, д.ф.-м.н., доц.
Сибирский федеральный университет
e-mail: *aakytm@gmail.com*
Н. Н. Осипов, д.ф.-м.н., доц.
Сибирский федеральный университет
e-mail: *nnosipov@rambler.ru*
С. А. Тихомиров, к.ф.-м.н., доц.
Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского
e-mail: *satikhomirov@mail.ru*

Приводится краткий обзор некоторых результатов о компонентах Эйна в пространствах модулей стабильных расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0$ и $c_2 = n \geqslant 1$ на комплексном трехмерном проективном пространстве.

Ключевые слова: стабильные расслоения ранга 2, пространства модулей, компоненты.

Интерес к изучению географии, геометрии и теоретико-числовых свойств компонент в пространствах модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, n)$ стабильных расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0$ и $c_2 = n \geqslant 1$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ обусловлен целым рядом причин, в том числе тем, что частными случаями таких компонент являются знаменитые инстантонные компоненты, гладкость и неприводимость которых были доказаны относительно недавно в работах [5, 6, 2]. При этом вопрос о рациональности инстантонных компонент по-прежнему остается открытым.

Среди указанных компонент в $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, n)$ достаточно широкий класс составляют так называемые компоненты Эйна, параметризуемые тройками (a, b, c) неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих набору специальных условий (по поводу основных определений см., например, [3]). В работе [4] было показано, что множество компонент Эйна содержит в качестве подмножеств множества компонент Ведерникова 1-го и 2-го типов. Кроме того, в этой статье были получены точные формулы для нахождения числа компонент Ведерникова-Эйна 1-го и 2-го типов. В свою очередь, в работе [7] было установлено, что множество компоненты Ведерникова-Эйна 3-го типа также является подмножеством множества компонент Эйна, и доказано, что множество, являющееся объединением компонент Ведерникова-Эйна всех трех типов не совпадает с множеством компонент Эйна. Тем самым, вопрос о всестороннем изучении компонент Эйна приобретает дополнительную актуальность.

Задача поиска числа компонент Эйна в пространствах модулей расслоений ранга 2 с первым классом Черна $c_1 = 0$ в зависимости от значения второго класса Черна $c_2 = n$ сводится к задаче нахождения для заданного $n \in \mathbb{Z}_+$ всех

троек (a, b, c) целых чисел, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} c^2 - a^2 - b^2 = n, \\ 0 \leqslant a \leqslant b, \\ c > a + b. \end{cases}$$

В работе [3] был доказан результат об асимптотическом поведении средней величины чисел компонент Эйна t_n,

$$t_n^{\text{av}} = \frac{t_1 + \ldots + t_n}{n} \sim \frac{\pi}{12} \cdot n^{1/2},$$

а также сформулирована следующая гипотеза об оценках на сами числа компонент Эйна:

Гипотеза. Пусть N — некоторое натуральное число, а n — значение второго класса Черна расслоения E_2 с нулевым первым классом Черна. Тогда для $n > N$ справедливы неравенства

$$0,045\sqrt{n} \leqslant t_n \leqslant 0,52\sqrt{n \ln n}, \tag{1}$$

где t_n — число подходящих троек (компонент Эйна).

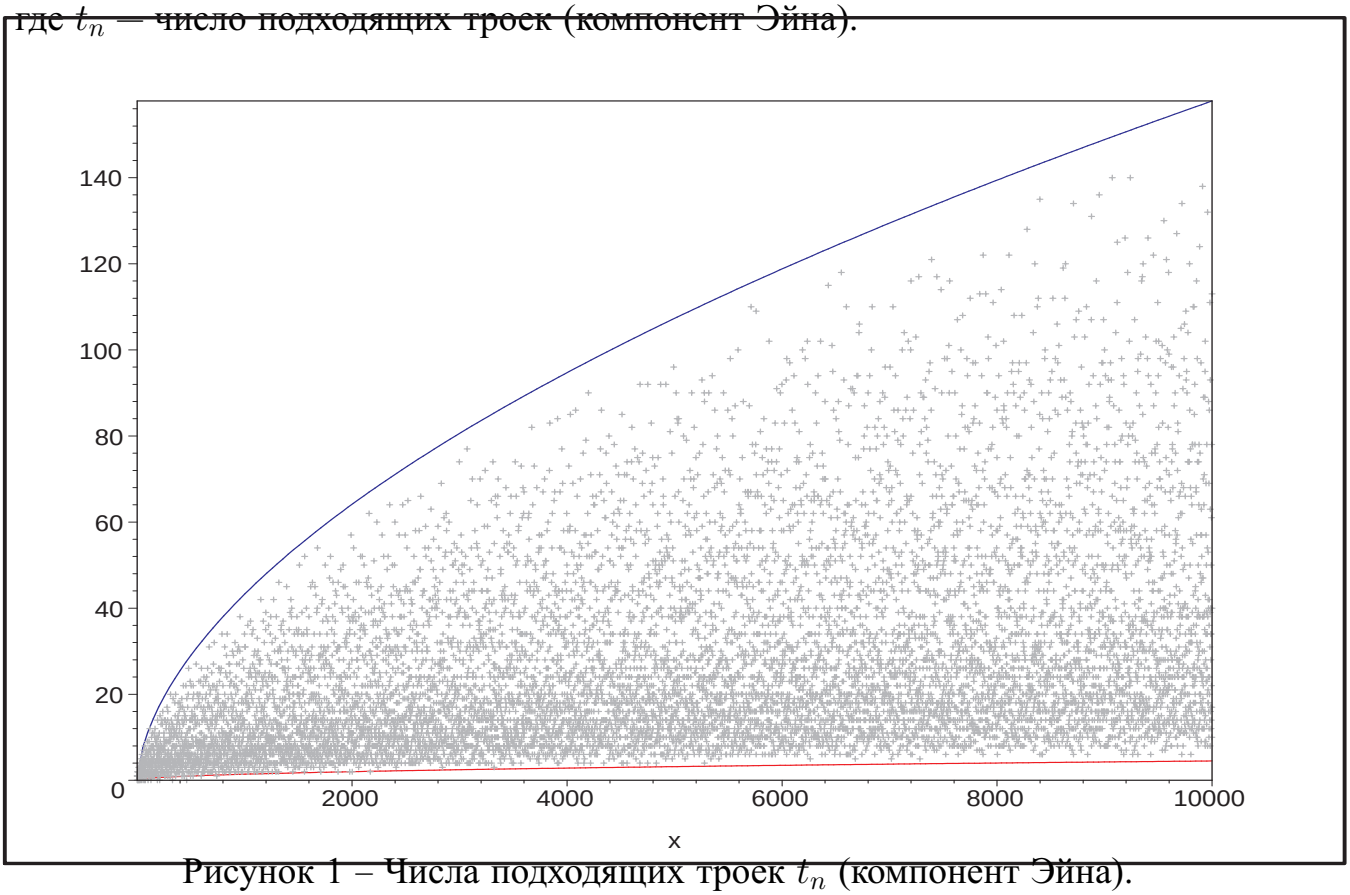


Рисунок 1 – Числа подходящих троек t_n (компонент Эйна).

Данная гипотеза проиллюстрирована на рис. 1, где серыми точками отмечены числа подходящих троек t_n для $n = 1, \ldots, 10^4$, а графики функций $0,52\sqrt{x \ln x}$ и $0,045\sqrt{x}$ указаны, соответственно, синим и красным цветами. Следует отметить, что получение точных оценок вида (1) на числа t_n представляет собой сложную теоретико-числовую задачу.

Алгоритмы для нахождения числа компонент Эйна (см. [3]), а также их размерностей и соответствия спектрам расслоений согласно формуле и технике Барта из статьи [1] были реализованы в системе компьютерной алгебры Maple и позволили получить важные численные характеристики изучаемых компонент — их размерности и соответствующие им спектры.

Указанные данные позволяют судить, например, о географии компонент Эйна, однако в ближайшей перспективе представляется важным в первую очередь получить точные формулы для нахождения числа компонент Эйна и/или доказать представленную гипотезу о характере их роста в зависимости от значений второго класса Черна c_2.

Работа поддержана грантом Президента РФ для поддержки молодых ученых – докторов наук МД-197.2017.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barth W. Stable vector bundles on $\mathbb{P}_3$, some experimental data // In: Les équations de Yang–Mills, Séminaire E.N.S. 1977/78, Exposé XIII, Astérisque **71–72** (1980), 205–218.

2. Jardim M., Verbitsky M. Trihyperkahler reduction and instanton bundles on $\mathbb{CP}^3$ // Compositio Mathematica, **150** (2014), 1836–1868.

3. Kytmanov A. A., Osipov N. N., Tikhomirov S. A. Finding Ein components in the moduli spaces of stable rank 2 bundles on the projective 3-space // Siberian Mathematical Journal, **57**:2 (2016), 322–329.

4. Osipov N. N., Tikhomirov S. A. On the number of Vedernikov–Ein irreducible components of the moduli space of stable rank 2 bundles on the projective space // Siberian Mathematical Journal, **59**:1 (2018), 107–112.

5. Tikhomirov A. S. Moduli of mathematical instanton vector bundles with odd c_2 on projective space // Izvestiya: Mathematics **76** (2012), 991–1073.

6. Tikhomirov A. S. Moduli of mathematical instanton vector bundles with even c_2 on projective space // Izvestiya: Mathematics **77** (2013), 1331–1355.

7. Тихомиров С. А, Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Трошина Т. Л. О взаимосвязях между различными компонентами в пространствах модулей стабильных 2-расслоений на проективном пространстве // Принято в сборник материалов VII Международной научно-технической конференции „Информационные технологии в науке, образовании и производстве“, НИУ „БелГУ“, Белгород, 2018, 0,25 п.л.

УДК 512.542+519.172

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ЛОКАЛЬНО ШЕСТИУГОЛЬНЫХ ГРАФОВ НА ЭЛЕМЕНТАХ КОЛЬЦА Z_n

И.Т. Мухаметьянов, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» (Лысьвенский филиал)
e-mail: *muiltal@yandex.ru*

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Если вершины $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ графа лежат на расстоянии $\boldsymbol{i}$ друг от друга, то этот факт будем обозначать через $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\boldsymbol{i}$. Для вершины $\boldsymbol{x}$ графа $\boldsymbol{\Gamma}$ через $\boldsymbol{\Gamma}_i(\boldsymbol{x})$ обозначим подграф, индуцированный $\boldsymbol{\Gamma}$ на подмножестве всех вершин, находящихся на расстоянии $\boldsymbol{i}$ от $\boldsymbol{x}$. $\boldsymbol{\Gamma}_{\leq i}(\boldsymbol{x})$ – подграф, индуцированный $\boldsymbol{\Gamma}$ на подмножестве всех вершин, находящихся на расстоянии не больше $\boldsymbol{i}$ от $\boldsymbol{x}$.

Определение 1. ***Окрестностью вершины*** называется её 1-окрестность. ***Замкнутой окрестностью*** вершины $\boldsymbol{x}$ называется $\boldsymbol{x}^{\perp}=[\boldsymbol{x}]\cup\{\boldsymbol{x}\}$, где $[\boldsymbol{x}]=\boldsymbol{\Gamma}_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x})$ – окрестность вершины $\boldsymbol{x}$. ***Локально шестиугольным*** графом называется граф, у которого окрестность каждой вершины является шестиугольником.

Определение 2. ***Регулярным графом степени k*** называется граф, степени вершин которого равны одному и тому же числу $\boldsymbol{k}$. ***Рёберно регулярным графом*** с параметрами $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\lambda})$ называется регулярный граф степени $\boldsymbol{k}$ с $\boldsymbol{v}$ вершинами, $\boldsymbol{\lambda}=|[\boldsymbol{x}]\cap[\boldsymbol{y}]|$ одно и то же для любых $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ с $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=1$.

Определение 3. ***Бесконечным правильным треугольным паркетом*** (ПТП) называется граф на $\mathbf{R}^2$ (евклидовой плоскости), который получается следующим образом:

1) Возьмём бесконечную серию параллельных прямых на плоскости, равноотстоящих друг от друга.

2) Возьмём такую же серию прямых, располагающихся под углом $\pi/3$ к исходным прямым.

3) Через точки пересечений прямых предыдущих двух серий проведём прямые под углом $2\pi/3$ к прямым первой серии.

Таким образом, получается своеобразная бесконечная сетка с правильными треугольными ячейками. Это и есть ПТП.

Ограничим часть ПТП таким правильным шестиугольником со стороной $\boldsymbol{l}$, чтобы стороны шестиугольника лежали на некоторых прямых ПТП, где за единицу измерения берём длину стороны наименьшего правильного треугольника ПТП. Полученное ограничение ПТП можно рассматривать, как некоторый граф, который обозначим через Δ_l. Будем Δ_l представлять так, что какие-то две стороны исходного шестиугольника вертикальны. Для каждой внутренней вершины $\boldsymbol{x}$ графа Δ_l, не лежащей на стороне исходного шестиугольника, окрестность $[\boldsymbol{x}]$ представляет собой шестиугольник.

Если $\mathbf{\Gamma}$ – локально шестиугольный, и $\mathbf{\Gamma}_{\le i}(x)$ изображён в виде Δ_i, то это изображение $\mathbf{\Gamma}_{\le i}(x)$ обозначим через $\overline{\Delta_i(x)}$, а $\mathbf{\Gamma}_i(x)$ – через $\Delta_i(x)$. Вообще говоря, в $\overline{\Delta_i(x)}$ некоторые вершины могут быть изображены несколько раз.

Пусть $m \in \{r^2+r+1,\ r^2+r-1,\ r^2-r+1,\ r^2-r-1\}$, $r \in \mathbf{N}$, n – натуральный делитель числа m, $n \neq 1$, $\mathbf{\Gamma}_n$ – граф с множеством вершин $\mathbf{Z}_n$ классов вычетов по модулю n, и множеством рёбер $R=\{\{\overline{x},\ \overline{y}\} \mid \overline{x}-\overline{y} \in \{\overline{1},\ -\overline{1},\ \overline{r},\ -\overline{r},\ \overline{r^2},\ -\overline{r^2}\}\}$. Так как m имеет целое семейство видов, то о $\mathbf{\Gamma}_n$ можем говорить как о члене семейства графов. $Aut\mathbf{\Gamma}_n$ – группа автоморфизмов графа $\mathbf{\Gamma}_n$.

Договоримся, что для графа $\mathbf{\Gamma}_n$ в обозначениях окрестности его вершины, i-окрестности и т.п. индекс n опускать: $\mathbf{\Gamma}(x)$, $\mathbf{\Gamma}_i(x)$, $\mathbf{\Gamma}_{\le i}(x)$ и т.д. Также договоримся, что в обозначениях классов вычетов из $\mathbf{Z}_n$ надчёркивания будем опускать: $\overline{x}=x$.

Лемма. Пусть $R_{[x]}$ – множества рёбер в $[x]$. Тогда:

1) если $m=r^2 \pm r \pm 1$, то $[x]=\{x+1,\ x-1,\ x+r,\ x-r,\ x+r+1,\ x-r-1\}$, и

$\{\{x+1,\ x+r+1\},\ \{x+r+1,\ x+r\},\ \{x+r,\ x-1\},$

$\{x-1,\ x-r-1\},\ \{x-r-1,\ x-r\},\ \{x-r,\ x+1\}\} \subseteq R_{[x]}$;

2) если $m=r^2 \pm r \mp 1$, то $[x]=\{x+1,\ x-1,\ x+r,\ x-r,\ x+r-1,\ x-r+1\}$, и

$\{\{x+1,\ x-r+1\},\ \{x-r+1,\ x-r\},\ \{x-r,\ x-1\},$

$\{x-1,\ x+r-1\},\ \{x+r-1,\ x+r\},\ \{x+r,\ x+1\}\} \subseteq R_{[x]}$.

Доказательство. Заметим, что для любых x, y и z из $\mathbf{Z}_n$ в графах $\mathbf{\Gamma}_n$ имеем $\{x,\ y\} \in R \Leftrightarrow \{x+z,\ y+z\} \in R$, а также $[0]=\{1,\ -1,\ r,\ -r,\ r^2,\ -r^2\}$. Поэтому $[x]=\{x+1,\ x-1,\ x+r,\ x-r,\ x+r^2,\ x-r^2\}$.

Случай 1. $m=r^2+r+1$. Тогда имеем сравнение $r^2+r+1 \equiv 0 \pmod{m}$, которое имеет место также для любого делителя n числа m. Поэтому в кольце $\mathbf{Z}_n$ имеет место равенство $r^2+r+1=0$, откуда $r^2=-(r+1)$ и $-r^2=r+1$. Значит, $[0]=\{1,\ -1,\ r,\ -r,\ r+1,\ -(r+1)\}$ и $[x]=\{x+1,\ x-1,\ x+r,\ x-r,\ x+r+1,\ x-(r+1)\}$. При этом $(x+1)-(x+r+1)=-r \in \{1,\ -1,\ r,\ -r,\ r+1,\ -(r+1)\}$, то есть пара $\{x+1,\ x+r+1\}$ образует ребро в $[x]$. Аналогично имеем, что пары $\{x+r+1,\ x+r\}$, $\{x+r,\ x-1\}$, $\{x-1,\ x-(r+1)\}$, $\{x-(r+1),\ x-r\}$, $\{x-r,\ x+1\}$ образуют рёбра в $[x]$. Ясно, что эти рёбра отличны от тех, что исходят из x.

Случай 2. $m=r^2-r+1$. Как и в предыдущем случае, получаем, что в кольце $\mathbf{Z}_n$ имеет место равенство $r^2-r+1=0$, откуда $r^2=r-1$ и $-r^2=-r+1$. Значит, $[0]=\{1,\ -1,\ r,\ -r,\ r-1,\ -r+1\}$ и $[x]=\{x+1,\ x-1,\ x+r,\ x-r,\ x+r-1,\ x-r+1\}$. При этом $(x+1)-(x-r+1)=r \in \{1,\ -1,\ r,\ -r,\ r-1,\ -r+1\}$, то есть пара $\{x+1,\ x-r+1\}$ образует ребро в $[x]$. Аналогично имеем, что пары $\{x-r+1,\ x-r\}$, $\{x-r,\ x-1\}$, $\{x-1,\ x+r-1\}$, $\{x+r-1,\ x+r\}$, $\{x+r,\ x+1\}$ образуют рёбра в $[x]$. Ясно, что эти рёбра отличны от тех, что исходят из x.

Случай 3. $m=r^2+r-1$. Так же, как и в предыдущих случаях, в $\mathbf{Z}_n$ имеем равенство $r^2+r-1=0$, откуда $r^2=-r+1$ и $-r^2=r-1$, $[0]=\{1,\ -1,\ r,\ -r,\ r-1,\ -r+1\}$ и $[x]=\{x+1,\ x-1,\ x+r,\ x-r,\ x+r-1,\ x-r+1\}$. Так же рассуждая, как и выше, получаем

$\{\{x+1,\ x-r+1\},\ \{x-r+1,\ x-r\},\ \{x-r,\ x-1\},$

$\{x-1, x+r-1\}$, $\{x+r-1, x+r\}$, $\{x+r, x+1\}\} \subseteq R_{[x]}$.

Случай 4. $m=r^2-r-1$. То, что в этом случае мы имеем результат, совпадающий со случаем $m=r^2+r+1$, доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Замечание. Можно доказать, что в утверждении Леммы при $m>9$ вместо включений на самом деле имеют место равенства, и тем самым графы Γ_n являются локально шестиугольными. Но из-за ограниченности объёма статьи доказательство этого факта мы не приводим, а условие локальной шестиугольности графа Γ_n мы накладываем дополнительно. То есть всюду ниже предполагаем, что Γ_n – локально шестиугольный.

Рассматриваемые графы обладают тем свойством, что они в определённой степени поддаются геометрическому изображению на $\mathbf{R}^2$. Поэтому мы будем использовать геометрические изображения фрагментов графа (окрестностей точек, подграфов $\Gamma_{\le i}(x)$) и терминологию евклидовой геометрии типа «ось, проходящая через данную вершину под углом $\pi/3$ к другой оси». Также, по аналогии с ориентировкой в круге с направлениями, как на циферблате часов, будем использовать в окрестностях $\Gamma_i(x)$ направления ***двух часов***, ***четырёх часов***, ***шести часов***, и т.д. Также будем выделять направления сторон $\overline{\Delta_i(x)}$: ***северо-восточная сторона*** и т.д. Наконец, вершины графа будем изображать в виде овалов, в которые вписываем обозначения самих вершин.

Таким образом, мы схематично можем привести окрестность произвольной вершины x графа Γ_n. На рисунке 1 мы приводим его в случаях $m=r^2\pm r\pm 1$, а на рисунке 2 – в случаях $m=r^2\pm r\mp 1$.

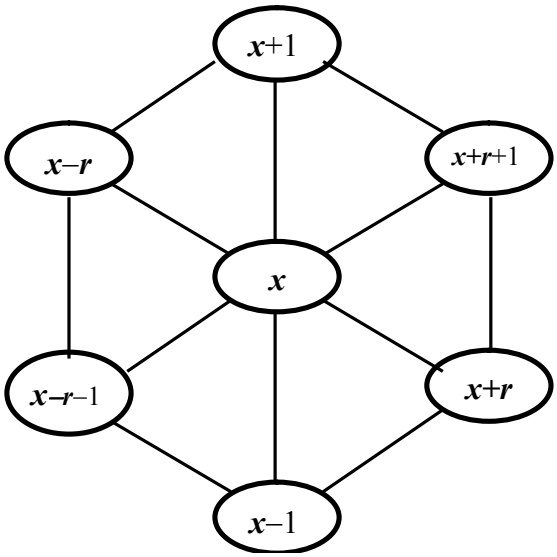


Рисунок 1 – Окрестность вершины при $m=r^2\pm r\pm 1$

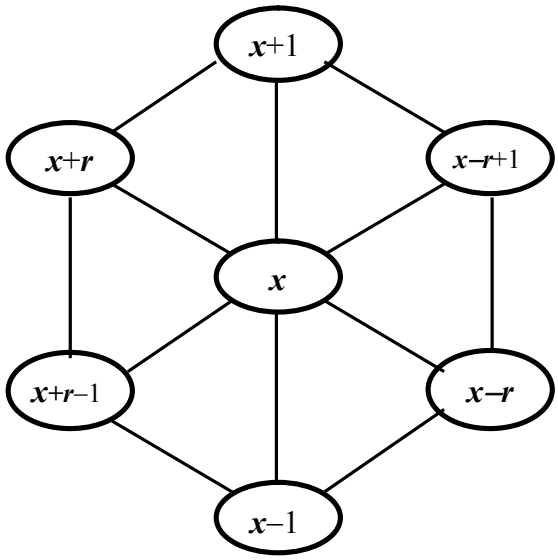


Рисунок 2 – Окрестность вершины при $m=r^2\pm r\mp 1$

На рисунках 3 и 4 приводим схему строения $\overline{\Delta_i(0)}$ также соответственно при $m=r^2\pm r\pm 1$ и $m=r^2\pm r\mp 1$. Изображение графа Γ_n можно продолжить на всю плоскость $\mathbf{R}^2$. Тогда получим ПТП, содержащий Γ_n.

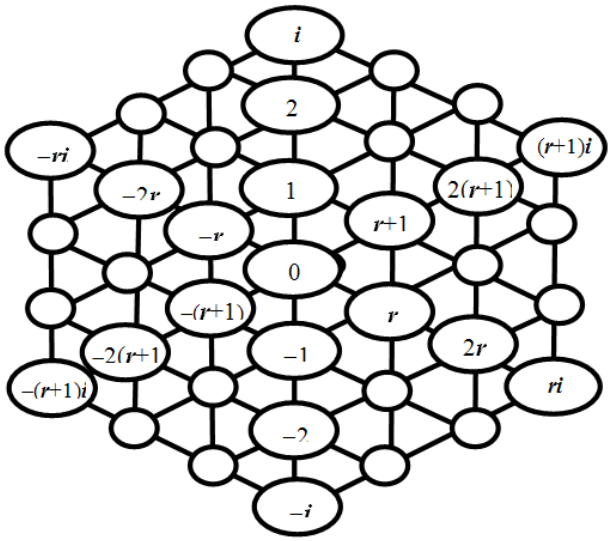


Рисунок 3 – Изображение $\overline{\Delta_i(0)}$ при $m=r^2\pm r\pm 1$

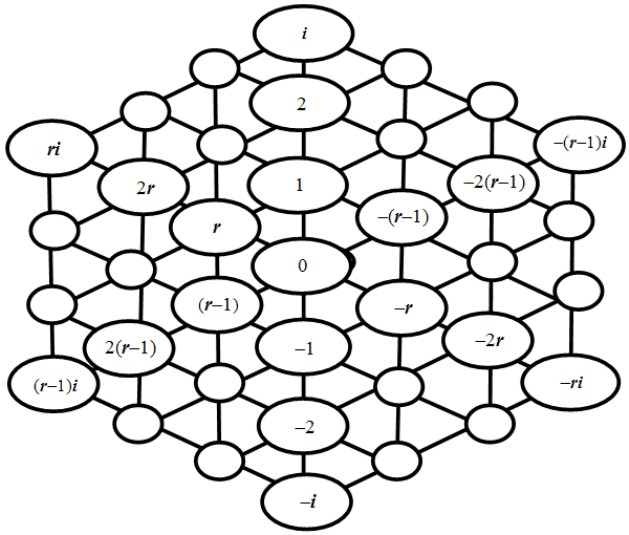


Рисунок 4 – Изображение $\overline{\Delta_i(0)}$ при $m=r^2\pm r\mp 1$

В изображениях между вершинами 2 и i предполагается «пунктирное» ребро, означающее «и т.д.». Аналогично, пунктирные линии предполагаются между соответственно $2(r+1)$ и $(r+1)i$, $2r$ и ir, -2 и $-i$, $-2(r+1)$ и $-i(r+1)$, $-2r$ и $-ir$, а также между двумя внутренними вершинами на внешнем контуре $\overline{\Delta_i(0)}$.

В первом случае (то есть на рисунке 3) имеем $r^2=\pm(r+1)$ (в кольце $\mathbf{Z}_n$!), во втором (на рисунке 4) – $r^2=\pm(-r+1)$. В любом случае ось, проходящая через вершину r^2, наклонена к вертикальной оси под углом $\pi/3$. На этой оси бесконечного паркета располагаются вершины ir^2, $i\in\mathbf{Z}$, а на другой, отличной от вертикальной, располагаются вершины ir. При этом по разные стороны от 0 на этой оси располагаются противоположные по знаку вершины графа (элементы кольца $\mathbf{Z}_n$), то есть если по одну сторону от 0 лежат ix,то по другую сторону лежат $-ix$, $x\in\{1, r, r^2\}$ в зависимости от оси.

Т е о р е м а. Справедливы следующие утверждения:

1) Граф Γ_n укладывается на торе.

2) $Aut\Gamma_n\cong\mathbf{Z}_n\mathbf{C}_6$, где $\mathbf{C}_6$ – группа поворотов на углы, кратные $\pi/3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Докажем этот факт для случаев $r^2\pm r\pm 1$. Как видно из рисунке 3, первая от вершины $-i$ в направлении вершины четырёх часов вершина на юго-восточной стороне $\overline{\Delta_i(0)}$ – это $r-i+1$. Поэтому, двигаясь по графу по маршруту от 0 в сторону вершины двенадцати часов, мы придём к вершине $r-i+1$. Продолжая движение, мы пройдём через вершину r, соседствующей с 0. Таким образом, это движение происходит по спирали, которое рано или поздно, пройдя вершину $-1=n-1$, замкнётся в вершине 0. То есть маршрут является маршрутом по замкнутой спирали. Отсюда вытекает, что граф укладывается на торе.

Аналогично этот факт доказывается для случаев $m=r^2\pm r\mp 1$.

2) Сначала заметим, что $\mathbf{Z}_n$ изоморфно вкладывается в $Aut\mathbf{\Gamma}_n$. Действительно, определим действие элементов $\varphi_k \in Aut\mathbf{\Gamma}_n$, соответствующим элементам $k \in \mathbf{Z}_n$, сдвигами: $\varphi_k(x)=x+k$. Тогда:

$\varphi_k(\{x, y\})=\{\varphi_k(x), \varphi_k(y)\}=\{x+k, y+k\} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+k)-(y+k) \in \{1, -1, r, -r, r^2, -r^2\} \Leftrightarrow x-y \in \{1, -1, r, -r, r^2, -r^2\} \Leftrightarrow \{x, y\} \in \mathbf{R}$.

Так что, $\mathbf{Z}_n$ изоморфно вкладывается в $Aut\mathbf{\Gamma}_n$. В частности, $Aut\mathbf{\Gamma}_n$ действует транзитивно на вершинах $\mathbf{\Gamma}_n$. Поэтому $|Aut\mathbf{\Gamma}_n|=n\cdot|A_x|$, где A_x – стабилизатор вершины x в $Aut\mathbf{\Gamma}_n$. Ясно, что стабилизатор вершины x является подгруппой группы самосовмещений шестиугольника. Покажем, что из самосовмещений шестиугольника только повороты на углы, кратные $\pi/3$, являются автоморфизмами графа.

Сначала покажем, что осевые симметрии замкнутой окрестности вершины x не могут быть автоморфизмами графа. В качестве x рассмотрим 0: $x=0$. Прежде всего заметим, что любая осевая симметрия окрестности точки должна распространяться на бесконечный паркет, который содержит $\mathbf{\Gamma}_n$. И если α – осевая симметрия относительно оси, проходящей через 0 и вершину двенадцати часов, то она должна фиксировать все вершины на этой оси. Но на этой оси лежат все вершины графа (речь идёт в том числе о вершинах, лежащих за пределами максимального правильного паркета). Далее заметим, что числа $m \in \{r^2+r+1, r^2-r+1, r^2+r-1, r^2-r-1\}$ взаимно просты как с r, так и с r^2. Тогда произвольные делители n числа m также взаимно просты как с r, так и с r^2. Хорошо известно, что когда i пробегает полную систему вычетов по модулю n, то и ir пробегает полную систему вычетов по модулю n, а также и ir^2 пробегает полную систему вычетов по модулю n. Отсюда вытекает, что все вершины графа лежат как на оси, проходящей через 0 и вершину четырёх часов, так и на оси, проходящей через вершину восьми часов. Следовательно, осевая симметрия графа относительно как первой оси, так и второй оси, фиксирует все вершины графа, в то время, как они не фиксируют те вершины, которые в пределах максимального правильного паркета не лежат на оси.

Таким образом, осевые симметрии окрестности $0^{\perp}$ относительно осей, проходящих через угловые вершины $\Delta_i(0)$, не являются автоморфизмами графа.

Покажем, что и осевые симметрии относительно осей, проходящих через середины сторон $\Delta_i(0)$, автоморфизмами графа не являются.

Если рассматривать симметрию относительно оси, проходящей через середину северо-восточной стороны, то она отображает ось, проходящую через вершины четырёх и десяти часов в себя, переводя вершины ir в $-ir$ и наоборот. Но мы видели, что на этой оси лежат (за пределами максимального правильного паркета) все вершины графа. То есть с одной стороны, эта симметрия переводит ненулевые вершины в противоположные (в смысле элементов кольца). А с другой стороны, например, 1 переводит в $\pm r+1$, в то время, как $\pm r+1 \neq -1$, и т.д. Здесь и ниже знак «±» в обозначениях вершин означает, что «±»=«+» при $m=r^2 \pm r \pm 1$, «±»=«–» и при $m=r^2 \pm r \mp 1$. Поэтому эта осевая симметрия автоморфизмом графа не является. Аналогично доказывается, что и другие осевые

симметрии относительно осей, проходящих через середины сторон $\Delta_i(0)$, не являются автоморфизмами графа.

Теперь покажем, что повороты на углы, кратные $\pi/3$, являются автоморфизмами.

То, что поворот на угол π является автоморфизмом графа, очевидно, так как он является центральной симметрией и переводит все вершины, не равные нулю, в противоположные.

Теперь достаточно показать, что поворот на угол $2\pi/3$ является автоморфизмом, так как остальные углы, кратные $\pi/3$, можно получить композицией поворотов на углы π и $2\pi/3$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что окрестность произвольной вершины $\boldsymbol{i}$ перейдёт в окрестность вершины $\boldsymbol{ri}$ при $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}^2\pm\boldsymbol{r}\pm1$, и в окрестность $-\boldsymbol{ri}$ при $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}^2\pm\boldsymbol{r}\mp1$, сохранив связи между вершинами окрестности.

Ясно, что при повороте на угол $2\pi/3$ вершина $\boldsymbol{i}$, лежащая на вертикальной оси, перейдёт в вершину $\pm\boldsymbol{ri}$. Дальше при анализе связей между вершинами $[\pm\boldsymbol{ri}]$ отдельно рассмотрим случаи $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}^2\pm\boldsymbol{r}\pm1$ и $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}^2\pm\boldsymbol{r}\mp1$.

Пусть $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}^2\pm\boldsymbol{r}\pm1$. Тогда непосредственно видно, что окрестность вершины $\boldsymbol{i}$ $[\boldsymbol{i}]=\{\boldsymbol{i}+1, \boldsymbol{i}+\boldsymbol{r}+1, \boldsymbol{i}+\boldsymbol{r}, \boldsymbol{i}-1, \boldsymbol{i}-\boldsymbol{r}-1, \boldsymbol{i}-\boldsymbol{r}\}$ при повороте на угол $2\pi/3$ перейдёт в окрестность $[\boldsymbol{ri}]=\{\boldsymbol{ri}+\boldsymbol{r}, \boldsymbol{ri}-1, \boldsymbol{ri}-(\boldsymbol{r}+1), \boldsymbol{ri}-\boldsymbol{r}, \boldsymbol{ri}+1, \boldsymbol{ri}+\boldsymbol{r}+1\}$, причём вершина $\boldsymbol{i}+1$ перейдёт в вершину $\boldsymbol{ri}+\boldsymbol{r}$, вершина $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{r}+1$ – в вершину $\boldsymbol{ri}-1$ и т.д. Наконец, как видим, связи между соответствующими вершинами окрестностей $[\boldsymbol{i}]$ и $[\boldsymbol{ri}]$ сохраняются.

Пусть $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}^2\pm\boldsymbol{r}\mp1$. Тогда, как и выше, видим, что окрестность $[\boldsymbol{i}]$ вершины $\boldsymbol{i}$ при повороте на угол $2\pi/3$ перейдёт в окрестность $[-\boldsymbol{ri}]=\{-\boldsymbol{ri}-\boldsymbol{r}, -\boldsymbol{ri}-1, -\boldsymbol{ri}+\boldsymbol{r}-1, -\boldsymbol{ri}+\boldsymbol{r}, -\boldsymbol{ri}+1, -\boldsymbol{ri}-\boldsymbol{r}+1\}$. При этом вершина $\boldsymbol{i}+1$ перейдёт в вершину $-\boldsymbol{ri}-\boldsymbol{r}$, вершина $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{r}+1$ – в вершину $-\boldsymbol{ri}-1$ и т.д., причём, как и выше, связи между соответствующими вершинами окрестностей $[\boldsymbol{i}]$ и $[-\boldsymbol{ri}]$ сохраняются.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что в случае, когда $\boldsymbol{n}$ делится на 3, из графа $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{n}}$ удалением определённым образом вершин можно получить граф степени 3 с шестиугольными гранями. Таким образом, получается так называемый фуллерен на торе. Но это – тема другого рассмотрения.

УДК 512.643, 514.17

СВОЙСТВА $0/1$-МАТРИЦ ПОРЯДКА n, ИМЕЮЩИХ МАКСИМАЛЬНЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

М. В. Невский, д.ф.-м.н., доц.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: *mnevsk55@yandex.ru*
А. Ю. Ухалов, к.ф.-м.н.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: *alex-uhalov@yandex.ru*

В статье доказываются некоторые необходимые условия максимальности $0/1$-определителя порядка n и описывается пример их применения.

Ключевые слова: $0/1$-матрица, определитель, симплекс, куб, гомотетия, осевой диаметр

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n := [0,1]^n$. Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ через σS обозначим образ S при гомотетии относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Под $d_i(S)$ будем понимать *i-й осевой диаметр симплекса S*, т. е. максимальную длину отрезка из S, параллельного i-й координатной оси. Определим $\alpha(S)$ как минимальное $\sigma > 0$, такое что Q_n содержится в трансляте симплекса σS.

Обозначим вершины S через $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $1 \le j \le n+1$, и рассмотрим следующую *матрицу вершин симплекса S:*

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. *Базисными многочленами Лагранжа, соответствующими S,* будем называть линейные функции $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$, коэффициенты которых составляют столбцы $\mathbf{A}^{-1}$. Числа $\lambda_j(x)$ представляют собой барицентрические координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно S. Как доказано соответственно в [3] и [4], справедливы равенства

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|, \tag{1}$$

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}. \tag{2}$$

Если $S \subset Q_n$, то $d_i(S) \le 1$. Применение (2) даёт оценку $\alpha(S) \ge n$. Лассак [2] показал, что если симплекс $S \subset Q_n$ имеет максимальный объём, то все $d_i(S) = 1$. Другой способ доказательства этого свойства был отмечен в [4].

Для симплекса максимального объёма справедливо равенство $\alpha(S) = n$, которое в силу (2) равносильно соотношениям $d_i(S) = 1$.

Через h_n и g_n обозначим максимальные значения определителей $0/1$ и $-1/1$-матриц порядка n соотвественно. Пусть ν_n есть максимальный объём n-мерного симплекса, принадлежащего Q_n. Эти числа связаны равенствами $g_{n+1} = 2^n\, h_n$, $h_n = n!\, \nu_n$ (см. [1]).

По известному максимальному $0/1$-определителю порядка n удаётся построить симплекс максимального объёма в Q_n. В качестве вершин такого симплекса можно взять систему строк (или столбцов) этого определителя и пополнить её нулевой вершиной. Действительно, для такого S имеем $\mathrm{vol}(S) = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{n!} = \frac{h_n}{n!} = \nu_n$. С другой стороны, если симплекс $S \subset Q_n$ с вершиной в нуле имеет максимальный объём, то координаты его ненулевых вершин, записанные по строкам (или столбцам) образуют максимальный $0/1$-определитель порядка n.

Т е о р е м а. *Пусть* $\mathbf{M}$ *— произвольная невырожденная* $0/1$*-матрица порядка* n*,* $\mathbf{A}$ *— матрица порядка* $n+1$*, которая получается из* $\mathbf{M}$ *после добавления* $(n+1)$*-й строки* $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ *и* $(n+1)$*-го столбца, состоящего из* 1*. Обозначим* $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$*, тогда для* $i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \geq 2. \tag{3}$$

Если $|\det(\mathbf{M})| = h_n$*, то для любого* i

$$\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 2. \tag{4}$$

Если же для некоторого i *выполняется строгое неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| > 2, \tag{5}$$

то $|\det(\mathbf{M})| < h_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S — симплекс, одна из вершин которого нулевая, а остальные задаются строками $\mathbf{M}$. Очевидно, $\mathbf{A}$ есть его матрица вершин. Поскольку $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{M}) \neq 0$, симплекс S является невырожденным. Так как $S \subset Q_n$, верно $d_i(S) \leq 1$. С учётом (1) это даёт (3). Если $|\det(\mathbf{M})| = h_n$, то S есть симплекс максимального объёма в Q_n. Для такого симплекса $d_i(S) = 1$. Применяя (1), получаем условия (4). Если же для некотрого i выполняется (5), то соответствующий осевой диаметр $d_i(S) < 1$. В этом случае объём S не максимален, значит, $|\det(\mathbf{M})| < h_n$. □

Имеющая максимальный определитель $0/1$-матрица $\mathbf{T}$ порядка n может быть построена из $-1/1$-матрицы $\mathbf{U}$ порядка $n+1$ с определителем g_{n+1}. Для

этого к матрице $\mathbf{U}$ достаточно применить специальную процедуру, описанную в [5]. Если же на выходе этой процедуры получится $|\det(\mathbf{T})| < h_n$, то на входе мы имели $|\det(\mathbf{U})| < g_{n+1}$. С помощью приведённой выше теоремы в некоторых случаях удаётся показать немаксимальность соответствующих определителей.

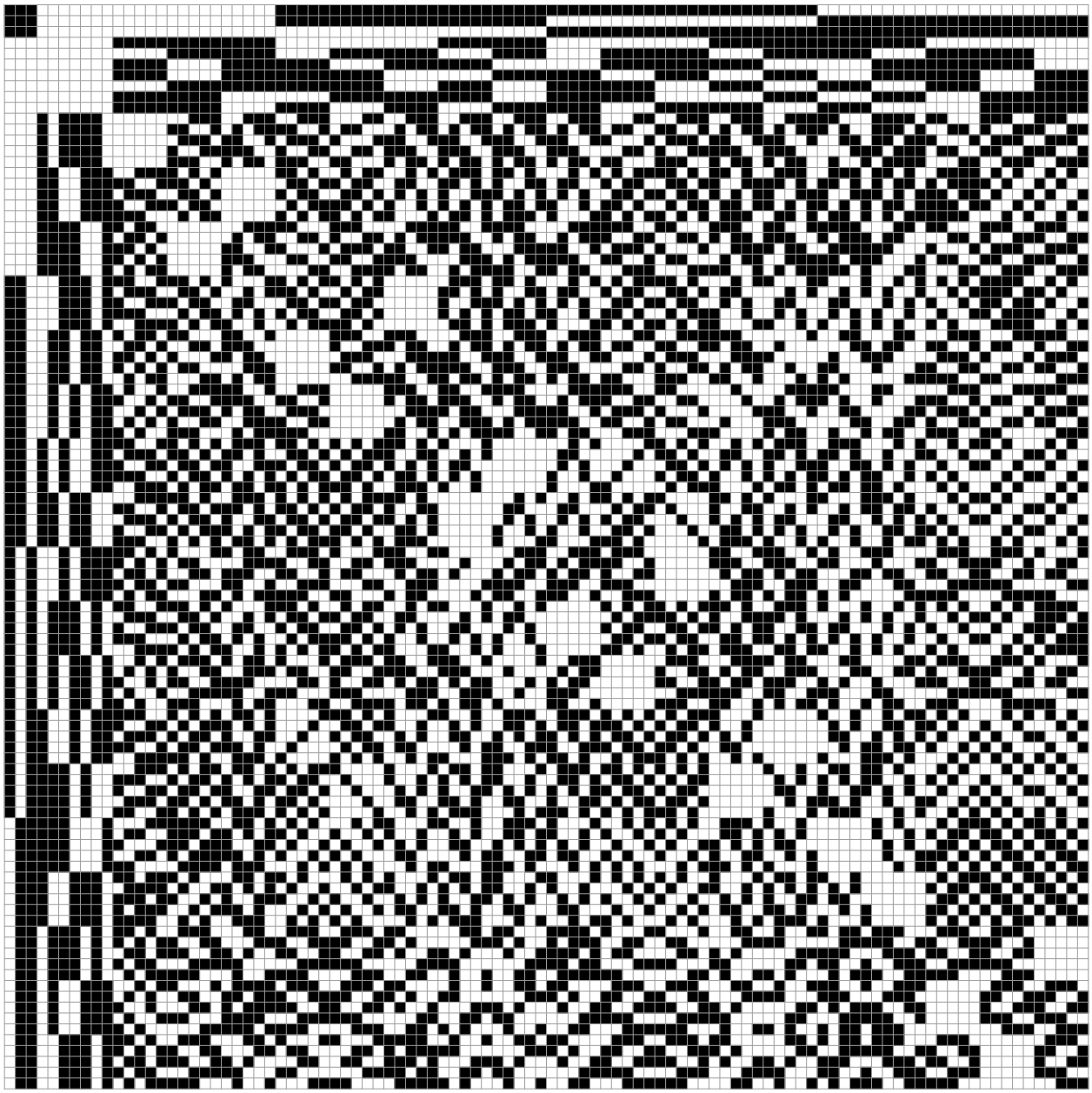


Рисунок 1 – $0/1$-матрица $\mathbf{T}$ порядка 100. Белые и чёрные квадратики изображают элементы 0 и 1 соответственно

Наибольшие из известных $-1/1$-определителей порядков $1, \ldots, 119$ содержатся на сайте [7]. В качестве примера рассмотрим приведённую там матрицу порядка 101, построенную в 2003 г. Орриком и Соломоном (см. http://www.indiana.edu/~maxdet/d101.html). Эти авторы не утверждали, что определитель матрицы максимален, а лишь отметили, что этот определитель является самым большим из известных на тот момент. В гра-

фической форме исходная $-1/1$-матрицы $\mathbf{U}$ порядка 101 и результирующая $0/1$-матрица $\mathbf{T}$ порядка 100 приводятся в [6]. Здесь мы приведём лишь матрицу $\mathbf{T}$ (см. рисунок 1). Наши вычисления, проделанные с помощью Wolfram Mathematica, позволяют установить, что огромный по модулю определитель этой $0/1$-матрицы (именно, $|\det(\mathbf{T})| = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^{97} \cdot 79 = 897408165779423029836382415865697614876239640580024570226669311523437 50$) всё же не является максимальным. Применение теоремы к $\mathbf{M} = \mathbf{T}$ даёт

$$\sum_{j=1}^{101} |l_{ij}| = \begin{cases} \frac{1438}{711} = 2.0225\ldots, & i = 1, 2, 3, \\ \frac{490}{237} = 2.0675\ldots, & i = 4, \\ 2, & i = 5, \ldots, 100. \end{cases}$$

Как видим, при $i = 1, 2, 3, 4$ выполняется строгое неравенство (5), поэтому $|\det(\mathbf{T})| < h_{100}$. Для соответствующего симплекса по формуле (1)

$$d_i(S) = \begin{cases} \frac{711}{719} = 0.9888\ldots, & i = 1, 2, 3, \\ \frac{237}{245} = 0.9673\ldots, & i = 4, \\ 1, & i = 5, \ldots, 100. \end{cases}$$

Это означает, что S не является симплексом максимального объёма в Q_{100}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hudelson M., Klee V., Larman D. Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem // Linear Algebra Appl. — 1996. — V. 241–243 — P. 519–598.
2. Lassak M. Parallelotopes of maximum volume in a simplex // Discrete Comput. Geom. — 1999. — V. 21. — P. 449–462.
3. Невский М. В. Об одном свойстве n-мерного симплекса // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87. — № 4. — С. 580–593.
4. Nevskii M. Properties of axial diameters of a simplex // Discrete Comput. Geom. — 2011. — V. 46. — № 2. — P. 301–312.
5. Невский М. В., Ухалов А. Ю. О минимальном коэффициенте поглощения для n-мерного симплекса // Модел. и анализ информ. систем. — 2018. — Т. 25. — № 1. — С. 140–150.
6. Nevskii M., Ukhalov A. Properties of $0/1$-matrices of order n having maximum determinant // arXiv:1807.02642v1 [math.MG] 7 Jul 2018. — 11 pp.
7. Orrick W. P., Solomon B. The Hadamard maximal determinant problem (website), http://www.indiana.edu/~maxdet/ .

УДК 512.526

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА

С. С. Платонов, д.ф.-м.н., проф.
Петрозаводский государственный университет
e-mail: *platonov@psu.karelia.ru*

Рассматриваются некоторые задачи теории приближений функций на локально компактных группах Виленкина в метрике L^p, $1 \le p \le \infty$ равномерно локально постоянными функциями. Получено описание некоторых функциональных пространств в терминах наилучших приближений и установлены некоторые теоремы вложения.

Ключевые слова: топологические группы, локально компактные группы Виленкина, функциональные пространства на группах, теоремы вложения

Локально компактные группы Виленкина являются важным частным случаем топологических нульмерных локально компактных абелевых групп. Различные задачи гармонического анализа и теории функций на таких группах рассматривались в книге [1] и активно изучаются в настоящее время. В настоящей работе рассматриваются некоторые задачи теории приближений комплекснозначных функций на локально компактных группах Виленкина в метрике L^p, $1 \le p \le \infty$ равномерно локально постоянными функциями. Получено описание некоторых функциональных пространств в терминах наилучших приближений и установлены некоторые теоремы вложения для пространств Липшица на этих группах.

О п р е д е л е н и е. Локально компактная аАбелева группа G называется локально компактной группой Виленкина, если в ней существует строго убывающая последовательность компактных открытых подгрупп $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} G_n = G$ и $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} G_n = \{0\}$.

Всюду далее G — локально компактная группа Виленкина, операция в которой задается аддитивно. Фактор-группа G_n/G_{n+1} является конечной абелевой группой. Пусть d_n — порядок группы G_n/G_{n+1}, тогда $d_n \ge 2$.

Примерами локально компактных групп Виленкина являются группа p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, аддитивная группа K^+ произвольного локального поля K, локально компактная двоичная группа Кантора.

Пусть dx — мера Хаара на группе G, нормированная условием

$$\int\limits_{G_0} dx = 1.$$

Через $\mu(A)$ будем обозначать меру Хаара подмножества $A \subset G$.

Для любого $n \in \mathbb{Z}$ определим число m_n по формуле

$$m_n := \begin{cases} d_1 d_2 \dots d_n & \text{при } n > 0, \\ 1 & \text{if } n = 0, \\ d_0^{-1} d_{-1}^{-1} \dots d_{n+1}^{-1} & \text{при } n < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Тогда

$$\mu(G_n) = \frac{1}{m_n}.$$

Пусть $L^p(G)$, $1 \le p < \infty$, — банахово пространство, состоящее из всех измеримых $\mathbb{C}$-значных функций $f(x)$ на G (функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры 0) с конечной нормой

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_G |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

При $p = \infty$ будем обозначать через $L^\infty(G)$ банахово пространство, состоящее из всех равномерно непрерывных и ограниченных $\mathbb{C}$-значных функций $f(x)$ на G. Норма в пространстве $L^\infty(G)$ определяется по формуле

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in G} |f(x)|.$$

Пусть $C(G)$ — множество всех непрерывных $\mathbb{C}$-значных функций на G. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ определим множество

$$\mathcal{E}_n(G) := \{f \in C(G) : f(x-h) = f(x) \quad \forall x \in G,\, h \in G_n\},$$

и пусть

$$\mathcal{E}_*(G) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n(G).$$

Функции из $\mathcal{E}_*(G)$ будем называть равномерно локально постоянными функциями на группе G.

Для любого $p \in [1, \infty]$ пусть $\mathcal{E}_{n,p}(G) := \mathcal{E}_n(G) \cap L^p(G)$. Функции из линейных подпространств $\mathcal{E}_{n,p}(G)$ пространства $L^p(G)$ являются естественным средством для построения теории приближений в банаховом пространстве $L^p(G)$.

О п р е д е л е н и е. Наилучшим приближением функции $f \in L^p(G)$ функциями из $\mathcal{E}_{n,p}(G)$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ называется число

$$E_n^{(p)}(f) := \inf\{\|f - \Phi\|_p : \Phi \in \mathcal{E}_{n,p}\}.$$

Для любой функции $f(x)$ на G и для любого $h \in G$ пусть

$$(\tau_h f)(x) := f(x-h).$$

Оператор τ_h называется оператором сдвига. Оператор τ_h является изометрическим оператором в банаховом пространстве $L^p(G)$, $1 \le p \le \infty$, то есть $\|\tau_h f\|_p = \|f\|_p$ для любой функции $f \in L^p(G)$.

О п р е д е л е н и е. Для $f \in L^p(G)$ и $n \in \mathbb{N}$ пусть

$$\omega_p(f; n) := \sup\{\|f - \tau_h f\|_p : h \in G_n\}.$$

Последовательность чисел $\{\omega_p(f;n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется модулем непрерывности функции f в пространстве $L^p(G)$.

Пусть $\omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ произвольная стремящаяся к нулю невозрастающая последовательность вещественных чисел, то есть (i) $\omega_n \geq 0$; (ii) $\omega_n \geq \omega_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$; (iii) $\omega_n \to 0$ при $n \to \infty$. Дополнительно всюду будем предполагать, что $\omega_1 > 0$.

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x)$ принадлежит пространству $H_p^\omega(G)$, если $f \in L^p(G)$ и для некоторой постоянной $c = c(f) > 0$ выполняются неравенства

$$\omega_p(f;n) \leq c\,\omega_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

В специальном случае, когда $\omega_n = \big(m_n\big)^{-\alpha} = m_n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, где числа m_n определяются по формуле (1), пространство $H_p^\omega(G)$ называется пространством Липшица и обозначается $Lip(\alpha, p; G)$.

В следующей теореме дается описание пространства $H_p^\omega(G)$ в терминах наилучших приближений.

Т е о р е м а 1. Пусть $\omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ произвольная стремящаяся к нулю невозрастающая последовательность вещественных чисел. Для любой функции $f \in L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, следующие условия эквивалентны:

$$f \in H_p^\omega(G);$$

и

$$E_n^{(p)}(f) \leq c\,\omega_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $c = c(f) > 0$ — некоторая постоянная.

В спецальном случае, когда $\omega_n = m_n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, условия

$$f \in Lip(\alpha, p; G)$$

и

$$E_n^{(p)}(f) \leq c\,m_n^{-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

эквивалентны.

Отметим, что для специального случая $p = 2$, теорема 1 вытекает из [2, Th. 1.6].

Пусть E_1 и E_2 — нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Нормированное пространство E_1 вложено в нормированное пространство E_2 (обозначение $E_1 \hookrightarrow E_2$) если 1) $E_1 \subseteq E_2$; 2) существует постоянная $c > 0$ такая, что $\|f\|_2 \leq c\,\|f\|_1$ для любого $f \in E_1$.

Пространство $Lip(\alpha, p; G)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} := \|f\|_p + |f|_{p,\alpha},$$

где

$$|f|_{p,\alpha} := \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n^\alpha\,\omega_p(f;n).$$

В следующих теоремах получены условия вложения пространства $Lip(\alpha, p; G)$ в пространство $L^{p_1}(G)$ и в пространство $Lip(\alpha_1, p_1; G)$ при $p_1 > p$.

Т е о р е м а 2. Пусть G — группа Виленкина, для которой последовательность $d_n = m_n/m_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, ограничена, $1 \leq p < p_1 \leq \infty$. Для того, чтобы имело место вложение

$$Lip(\alpha, p; G) \hookrightarrow L^{p_1}(G)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}.$$

Т е о р е м а 3. Пусть G — группа Виленкина, для которой последовательность $d_n = m_n/m_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, ограничена, $1 \leq p < p_1 \leq \infty$, α и α_1 положительные вещественные числа. Для того, чтобы имело место вложение

$$Lip(\alpha, p; G) \hookrightarrow Lip(\alpha_1, p_1; G)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\alpha - \alpha_1 \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}.$$

В частном случае, когда группа G равна группе p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, теоремы 1 — 3 доказаны ранее в [3]. Доказательства теорем 1 — 3 аналогичны доказательствам соответствующих теорем в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаев Г. Н., Виленкин Н., Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. — Изд-во „Элм“, Баку. — 1984. — 180 с.

2. Platonov S. S., An analogue of the Titchmarsh theorem for the Fourier transform on locally compact Vilenkin groups // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 9. — Iss. 4. — C. 306–313.

3. Platonov S. S., Some problems in the theory of approximation of functions on the group of p-adic numbers// p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 10. — Iss. 2. — C. 118–129.

ОБ ИНВАРИАНТАХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ТЕОРИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА

В.В. Черкасова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: cher_vl@mail.ru

В данной статье изложены способы нахождения средней кривизны двумерной поверхности качения с применением теории криволинейного мультипликативного интеграла.

Ключевые слова: криволинейный мультипликативный интеграл, средняя кривизна, инварианты двумерных поверхностей, первая квадратичная форма, коммутатор матриц.

Теория поверхностей представляет собой особой раздел дифференциальной геометрии, одной из задач которого является изучение различных характеристик поверхностей. В классической теории простая поверхность может быть получена из части плоскости путем растяжений, сжатий или изгибаний, в результате действия которых каждая точка плоскости переходит в определенную точку поверхности. Условие регулярности поверхности, является одним из необходимых в классической теории поверхностей, поскольку позволяет исключить поверхности более общего вида с самопересечениями, самоналеганиями и особыми точками, и даёт возможность ввести такие характеристики, как первая и вторая квадратичная формы, средняя и гауссова кривизны. Изучение внутренней геометрии регулярных поверхностей позволяет не только развивать теоретический аппарат данной теории, но и имеет ряд приложений, в частности в механике неголономных систем.

Одной из задач механики неголономных систем является задача о качении шара единичного радиуса по поверхности [1]. Ранее в статье [2] приведена постановка задачи, в которой вместе с качением шара анализируется изменение координат векторов жестко связанного с ним базиса. Исследование проводилось с применением криволинейного мультипликативного интеграла и позволило установить, что матрица перехода от начального положения репера к конечному представляет собой криволинейный мультипликативный интеграл вида:

$$Y = \int_{\gamma}^{\curvearrowright} E + P_1(u,v)du + P_2(u,v)dv, \qquad (1)$$

где $P_1(u,v)$ и $P_2(u,v)$ – матрицы размерности 4×4, элементами которых являются функции $f(u,v) \in C^2(D)$, D – ограниченная плоская область с координатами (u, v), E – единичная матрица размерности 4×4, γ – замкнутая спрямляемая кривая на поверхности.

Основной характеристикой криволинейных мультипликативных интегралов такого вида (1) является кривизна, которая вычисляется по формуле:

$$K = \frac{\partial P_2}{\partial u} + \frac{\partial P_1}{\partial v} - [P_1, P_2], \tag{2}$$

причем $[P_1, P_2] = P_1P_2 - P_2P_1$ – коммутатор матриц P_1 и P_2 [1].

Теорема 1: Кривизна криволинейного мультипликативного интеграла качения (1) имеет вид:

$$K = (2H - 1)\Phi([r_u \times r_v]) \tag{3}$$

где $H = \frac{1}{2}\frac{GL - 2MF + EN}{EG - F^2}$ – средняя кривизна поверхности заданной параметрическими уравнениями $r = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, $(\vec{r}''\vec{n})dt^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ – первая и вторая квадратичные формы поверхности, а матрицы P_1 и P_2 имеют вид:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\Phi(\vec{r}_u \times [\vec{r}_u \times \vec{r}_v]) + \Lambda_u,$$

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\Phi(\vec{r}_v \times [\vec{r}_u \times \vec{r}_v]) + \Lambda_v,$$

$$\Phi : x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y & 0 \\ -z & 0 & x & 0 \\ y & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) & 0 \end{pmatrix}$$

Полное доказательство данной теоремы приведено в работе [3].

Рассмотрим случай, когда поверхность, по которой осуществляется качение, представляет собой верхняя часть сферы радиуса r, заданую функцией $z = f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, тогда на основании формулы (3) получим:

$$K = \left(-\frac{2}{r} + 1\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{y}{f(x,y)} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{x}{f(x,y)} & 0 \\ -\frac{y}{f(x,y)} & \frac{x}{f(x,y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Не обходимо также отметить, что для минимальных поверхностей со средней кривизной H=0 кривизна криволинейного мультипликативного интеграла (1) находится по формуле:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -f_y & 0 \\ 1 & 0 & f_x & 0 \\ f_y & -f_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В случае качения по поверхности катеноида, заданного уравнением: $z = f(x, y) = ach\phi(x, y)$, a = const, кривизна интеграла качения (1) выражается формулой:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\dfrac{xsh\phi(x,y)}{\phi(x,y)} & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{ysh\phi(x,y)}{\phi(x,y)} & 0 \\ \dfrac{xsh\phi(x,y)}{\phi(x,y)} & -\dfrac{xsh\phi(x,y)}{\phi(x,y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } \phi(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{a}}.$$

Для поверхности Шерка $z = f(x, y) = \ln\dfrac{\cos y}{\cos x}$, тогда

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dfrac{\sin y}{\cos y} & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{\sin x}{\cos x} & 0 \\ -\dfrac{\sin y}{\cos y} & -\dfrac{\sin x}{\cos x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2: Если известна кривизна K криволинейного мультипликативного интеграла вида (1), тогда средняя кривизна поверхности качения может быть вычислена по формуле:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{k_{ij}}{\varpi_{ij}} - \frac{1}{2}, i \neq j, i, j = \overline{1;3},$$

где k_{ij} - элементы матрицы кривизны мультипликативного интеграла K,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -f_y & 0 \\ 1 & 0 & f_x & 0 \\ f_y & -f_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть в результате качения шара по поверхности $z=f(x, y)$, был получен криволинейный мультипликативный интеграл (1), кривизна которого

$$K = \begin{pmatrix} 0 & k_{12}(x,y) & k_{13}(x,y) & 0 \\ k_{21}(x,y) & 0 & k_{23}(x,y) & 0 \\ k_{31}(x,y) & k_{32}(x,y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$k_{ij}(x, y)$-функции двух переменных (x, y).

На основании результатов теоремы 2 для матрицы (3) справедливо соотношение

$$K=\begin{pmatrix} 0 & k_{12}(x,y) & k_{13}(x,y) & 0 \\ k_{21}(x,y) & 0 & k_{23}(x,y) & 0 \\ k_{31}(x,y) & k_{32}(x,y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=(-2H+1)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -f_y & 0 \\ 1 & 0 & f_x & 0 \\ f_y & -f_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $f(x,y)$ – функция двух действительных переменных, H – средняя кривизна поверхности качения, заданной графиком функции $z=f(x, y)$.

Тогда значение H – средней кривизны поверхности качения, может быть вычислено по одной из формул:

$$H=-\frac{1}{2}\left(\frac{k_{12}(x,y)}{\omega_{12}}+1\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{k_{13}(x,y)}{\omega_{13}}+1\right).$$

Другой инвариант поверхности – гауссова кривизна, может быть вычислен по формуле:

$$\mathrm{K}=\frac{-\dfrac{\partial k_{13}(x,y)}{\partial y}\dfrac{\partial k_{23}(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial k_{13}(x,y)}{\partial x}\dfrac{\partial k_{23}(x,y)}{\partial y}}{\left(\left(k_{13}(x,y)\right)^2+\left(k_{23}(x,y)\right)^2+\left(k_{12}(x,y)\right)^2\right)^{3/2}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мантуров О.В. Мультипликативный интеграл // Итоги науки и техники Серия «Проблемы геометрии». – 1990. – Выпуск – №22. С. 167–215.
2. Черкасова В.В. О связностях, индуцированных качением шара по поверхности // Известия ВУЗов. Математика. – 2009. – Выпуск. – №11. С. 79 – 84.
3. Черкасова В.В. О вычислении кривизны криволинейного мультипликативного интеграла с помощью инвариантов поверхностей // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы II международной научно-практической конференции, 24-27 ноября 2016 г. – 2016. – С. 79 – 83.

УДК 512.552

РАНГИ ГРУПП ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЕДИНИЦ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ МЕТАЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП ФРОБЕНИУСА

Е. О. Шумакова, к.ф.-м.н.
ФГБОУ ВО ЮУрГГПУ
e-mail: *shumakovaeo@cspu.ru*

В данной работе построена таблица рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса для случая с ядром простого порядка. Для вычисления рангов использованы результаты исследования групп центральных единиц целочисленных групповых колец конечных разрешимых групп, в частности формула вычисления рангов, основанная на подсчете классов сопряженных элементов метациклической группы Фробениуса. Инструментом для вычислений выступает система компьютерной алгебры GAP.

Ключевые слова: метациклическая группа Фробениуса, центральные единицы, целочисленные групповые кольца, ранг группы единиц.

Введение

Классической темой исследований по алгебре является изучение групповых колец, в частности их групп единиц. В 1940 году была опубликована статья Хигмана 'The units of group rings', результаты которой определили дальнейшее развитие теории единиц групповых колец. В изучении групп центральных единиц (равносильно, центров групп единиц) целочисленных групповых колец достигнут определённый прогресс. Усилиями Р. Ж. Алеева и его учеников были исследованы группы центральных единиц целочисленных групповых колец для некоторых неразрешимых групп, таких как, A_5, A_6, $PSL(2,q)$ и $PSL(2,2^n)$. Эти результаты можно найти в [2, 3]. В работе [1] рассматриваются группы центральных единиц целочисленных групповых колец конечных нильпотентных групп. В статье автора [5] исследованы группы центральных единиц целочисленных групповых колец для диэдральных групп, групп квазикватернионов $Q_{4n} = \left\langle a, b \mid a^2 = b^n,\ a^{-1}ba = b^{-1} \right\rangle$, и обобщенных квазидиэдральных групп $QD_{8n} = \left\langle a, b \mid a^2 = b^{4n} = 1,\ aba = b^{2n-1} \right\rangle$. Эти группы в случае, когда n не является степенью 2, являются разрешимыми ненильпотентными группами. В данной работе исследуются группы центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса.

Постановка задачи и методы решения

Будем придерживаться следующих определений и обозначений, используемых автором в [6, 7].

Пусть n — натуральное число, тогда $\tau(n)$ — число всех натуральных делителей n.

Пусть G — конечная группа. Тогда:

$\mathbb{Z}G$ — целочисленное групповое кольцо группы G;

$Z(\mathbb{Z}G)$ — центр кольца $\mathbb{Z}G$;

$U(Z(\mathbb{Z}G))$ — группа центральных единиц (обратимых элементов центра) кольца

$\mathbb{Z}G$;
$r(U(Z(\mathbb{Z}G)))$ — ранг группы $U(Z(\mathbb{Z}G))$, т. е. число бесконечных прямых циклических множителей в конечно порожденной абелевой группе $U(Z(\mathbb{Z}G))$.

О п р е д е л е н и е. Метациклической называется группа G, содержащая циклический нормальный делитель A такой, что фактор-группа G/A циклична

Пусть G_{mn} — метациклическая группа, порожденная двумя элементами a и b с определяющими соотношениями:

$$a^m = 1,\ b^n = 1,\ a^{-1}ba = b^q,\ q^n \equiv 1 \pmod{m}.$$

О п р е д е л е н и е. Групой Фробениуса F называется транзитивная группа подстановок, в которой только 1 фиксирует более одного символа, а подгруппа H фиксирующая один символ нетривиальна и называется дополнением группы Фробениуса F. Подмножество группы F состоящее из 1 и элементов, не фиксирующих ни одного символа образует нормальную подгруппу N, называемую ядром группы Фробениуса $F = N \leftthreetimes H$.

Т е о р е м а. Пусть группа G содержит собственную подгруппу H такую, что $N_G(H) = H$ и $H \cap H^x = 1$ при $x \in G \setminus H$.Тогда группа G имеет нормальную подгруппу N такую, что $G = N \leftthreetimes H$ [4, § 22, следствие 1].

Группа G, удовлетворяющая этим условиям, является группой Фробениуса с ядром N и дополнением H. Кроме того, N и H — холловские подгруппы в G, $|H|$ делит $|N|-1$, H содержит не более одной инволюции и N нильпотентна.

Пусть $F_{m,n} = \langle b \rangle_m \leftthreetimes \langle a \rangle_n$ — метациклическая группа Фробениуса порядка $m \cdot n$ с ядром $\langle b \rangle$ порядка m и дополнением $\langle a \rangle$ порядка n.

Группа центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса изучена автором в [6, 7], помимо описания строения группы единиц получена формула вычисления ранга такой группы $r(U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n})))$ и подробно рассмотрен случай, когда m — простое число, кроме того, полностью описаны случаи, при которых ранг равен 0 или 1.

В данной работе вычислим ранги $r(U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n})))$, где m — простое число, не превосходящее 100. Для этого потребуется следующее утверждение [6, следствие 1 теоремы 3]:

С л е д с т в и е. Ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца метациклической группы Фробениуса $F_{m,n} = \langle b \rangle_m \leftthreetimes \langle a \rangle_n$ с простым m равен

$$r(U(Z(\mathbb{Z}F))) = \left(1 + \left[\frac{n}{2}\right] - \frac{n}{2}\right)\frac{m-1}{n} + \left[\frac{n}{2}\right] - \tau(n) \tag{1}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{m-1}{n} + \dfrac{n}{2} - \tau(n), \text{ для четного } n, \\ \dfrac{m-1}{2n} + \dfrac{n-1}{2} - \tau(n), \text{ для нечетного } n. \end{cases} \tag{2}$$

Результаты и обсуждение

Метациклическая группа Фробениуса $F_{m,n} = \langle b \rangle_m \leftthreetimes \langle a \rangle_n$ при $n = 2$ является диэдральной группой D_{2m}, для этого случая вычислены ранги групп единиц для m не превосходящего 20 [7, с.25]. В системе компьютерной алгебры GAP4R4 упорядоченный список `Primes` содержит 168 простых чисел, не превосходящее 1000, однако в данной работе приведем значения рангов $r(U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n})))$, где m — простое число, не превосходящее 100.

Для каждого простого m укажем два упорядоченных списка: первый $\mathcal{N}$ — возможные значения n и второй $\mathcal{R}$ — вычисленные значения ранга соответствующей группы $U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n}))$, таким образом ранг $\mathcal{R}[1]$ соответствует значению $n = \mathcal{N}[1]$, ранг $\mathcal{R}[2]$ соответствует значению $n = \mathcal{N}[2]$ и т.д.

1. $m = 3$, $\mathcal{N} = [2]$, $\mathcal{R} = [0]$;
2. $m = 5$, $\mathcal{N} = [2, 4]$, $\mathcal{R} = [1, 0]$;
3. $m = 7$, $\mathcal{N} = [2, 3, 6]$, $\mathcal{R} = [2, 0, 0]$;
4. $m = 11$, $\mathcal{N} = [2, 5, 10]$, $\mathcal{R} = [4, 1, 2]$;
5. $m = 13$, $\mathcal{N} = [2, 3, 4, 6, 12]$, $\mathcal{R} = [5, 1, 2, 1, 1]$;
6. $m = 17$, $\mathcal{N} = [2, 4, 8, 16]$, $\mathcal{R} = [7, 3, 2, 4]$;
7. $m = 19$, $\mathcal{N} = [2, 3, 6, 9, 18]$, $\mathcal{R} = [8, 2, 2, 2, 4]$;
8. $m = 23$, $\mathcal{N} = [2, 11, 22]$, $\mathcal{R} = [10, 4, 8]$;
9. $m = 29$, $\mathcal{N} = [2, 4, 7, 14, 28]$, $\mathcal{R} = [13, 6, 3, 5, 9]$;
10. $m = 31$, $\mathcal{N} = [2, 3, 5, 6, 10, 15, 30]$, $\mathcal{R} = [14, 4, 3, 4, 4, 4, 8]$;
11. $m = 37$, $\mathcal{N} = [2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36]$, $\mathcal{R} = [17, 5, 8, 5, 3, 3, 5, 10]$;
12. $m = 41$, $\mathcal{N} = [2, 4, 5, 8, 10, 20, 40]$, $\mathcal{R} = [19, 9, 4, 5, 5, 6, 13]$;
13. $m = 43$, $\mathcal{N} = [2, 3, 6, 7, 14, 21, 42]$, $\mathcal{R} = [20, 6, 6, 4, 6, 7, 14]$;
14. $m = 47$, $\mathcal{N} = [2, 23, 46]$, $\mathcal{R} = [22, 10, 20]$;
15. $m = 53$, $\mathcal{N} = [2, 4, 13, 26, 52]$, $\mathcal{R} = [25, 12, 6, 11, 21]$;
16. $m = 59$, $\mathcal{N} = [2, 29, 58]$, $\mathcal{R} = [28, 13, 26]$;
17. $m = 61$, $\mathcal{N} = [2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60]$,
    $\mathcal{R} = [29, 9, 14, 6, 9, 7, 5, 5, 7, 9, 19]$;
18. $m = 67$, $\mathcal{N} = [2, 3, 6, 11, 22, 33, 66]$, $\mathcal{R} = [32, 10, 10, 6, 10, 13, 26]$;
19. $m = 71$, $\mathcal{N} = [2, 5, 7, 10, 14, 35, 70]$, $\mathcal{R} = [34, 7, 6, 8, 8, 14, 28]$;
20. $m = 73$, $\mathcal{N} = [2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72]$,
    $\mathcal{R} = [35, 11, 17, 11, 9, 5, 6, 7, 7, 11, 25]$;

21. $m = 79$, $\mathcal{N} = [2, 3, 6, 13, 26, 39, 78]$, $\mathcal{R} = [38, 12, 12, 7, 12, 16, 32]$;

22. $m = 83$, $\mathcal{N} = [2, 41, 82]$, $\mathcal{R} = [40, 19, 38]$;

23. $m = 89$, $\mathcal{N} = [2, 4, 8, 11, 22, 44, 88]$, $\mathcal{R} = [43, 21, 11, 7, 11, 18, 37]$;

24. $m = 97$, $\mathcal{N} = [2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96]$,
$\mathcal{R} = [47, 15, 23, 15, 12, 8, 9, 8, 13, 16, 37]$;

Представление результатов в виде списка обусловлено использование программы в GAP4R4, которая записывала результаты вычислений в текстовый файл "r2". В другой текстовый файл выполнялась запись выполняемых вычислений, организованных в несколько циклов. Приведем программный код, позволяющий реализовать вычисления ранга по формуле (2), указанной в следствии.

```
gap> for m in Primes do
> t:=Tau(m-1);
> a:=[2,3..t];
> b:=[2,3..m-1];
> r:=a;
> k:=1;
> for i in b do
> if IsInt((m-1)/i) then a[k]:=i; k:=k+1; fi; od;
> AppendTo("r2"  , m);
> AppendTo("r2"  , a);
> k:=1;
> for i in a do
> if IsEvenInt(i) then r[k]:=(m-1)/i+i/2-Tau(i);fi;
> if IsOddInt(i) then r[k]:=(m-1)/(2*i)+(i-1)/2-Tau(i); fi;
> k:=k+1;od;
> AppendTo("r2"  , r);
> od;
```

ЛИТЕРАТУРА

1. Jespers E., Parmenter M. M., Sehgal S. K. Central units of integral group rings of nilpotent groups. // Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 124. — № 4. — pp. 1007–1012.

2. Алеев Р. Ж. Центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп: дис. . . . доктора физ-мат. наук. — Чел.гос. ун-т. — Челябинск. — 2000. — 355 с.

3. Алеев Р. Ж., Митина О. В. Теорема разложения и ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец групп PGL2(q) , где q нечетно // Сибирские электронные математические известия. — 2008. — Том 5. — С. 652-672.

4. Белоногов В. А., Фомин А. Н. Матричные представления в теории конечных групп. — М.:Наука. — 1976.

5. Шумакова Е. О. Центральные единицы целочисленных групповых колец диэдральных и близких к ним групп // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2008. — Том 14. — №4. — С. 172-184.

6. Шумакова Е. О. Центральные единицы целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса // Сибирские электронные математические известия. — 2008. — Том 5. — С. 691-698.

7. Шумакова Е. О. Группы центральных единиц целочисленных групповых колец конечных разрешимых групп: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — Челябинск. — 2009. — 78с.

Методы дискретных особенностей в задачах математической физики

УДК 532.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАВАЮЩЕГО ДИСКА

О.В. Иванисова, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»
e-mail: *zah-ivanisov@yandex.ru*
Е.А. Харсеева, магистрант
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»
e-mail: *jene2010.96@yandex.ru*

Рассмотрим задачу о гидродинамических силах, возникающих на круглом диске при его колебаниях на свободной поверхности весомой жидкости бесконечной глубины.

Будем предполагать, что жидкость идеальная, несжимаемая, весомая и имеет плотность ρ. Течение будем рассматривать безвихревое, колебания — с постоянной частотой, осесимметричные, диск — постоянной малой толщины радиуса a. Силы на диске, взаимодействующем с жидкостью, формируются течением жидкости.

В силу осесимметричности колебаний течение будем рассматривать в цилиндрической системе координат с потенциалом скорости $\varphi(r, \theta, z, t)$.

Так как жидкость несжимаемая, то уравнение неразрывности имеет вид уравнения Лапласа. Поскольку течение осесимметричное, то уравнение Лапласа примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad z < 0.$$

На диске должно выполняться условие непротекания:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \upsilon_z(r, t) \text{ при } z = 0,\ r \le a.$$

где υ_z — заданная скорость точек диска.

На свободной поверхности весомой жидкости $\eta = \eta(r, t)$, $z = 0$, $r > a$ должны выполняться два условия.

Во-первых, условие постоянства давления:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = 0.$$

Во-вторых, условие непротекания:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

На бесконечной глубине жидкость покоится, поэтому потенциал

$\varphi \to 0$ при $z \to -\infty$ равномерно для всех r.

Будем рассматривать гармонические колебания диска. Тогда скорость точек диска можно представить в виде

$$\upsilon_z = \overline{\upsilon_z}(r) \cdot e^{-i\omega t},$$

где $\overline{\upsilon_z}(r)$ — заданная комплексная амплитуда скорости колебания диска, ω — частота колебаний.

При этом φ и η будут иметь аналогичную зависимость от времени, а от произведений, содержащих временной экспоненциальный множитель следует брать только действительную часть.

Далее черточки над комплексными амплитудами будем отбрасывать.

Колебания диска вызывают волновые движения жидкости, при этом образуются распространяющиеся от диска волны, которые должны уходить на бесконечность $(r \to \infty)$. В связи с этим должны выполняться условия излучения

$$\varphi(r,z) = C(z) H_0^{(1)}(\sigma r),\ \sigma > 0,\ r \to \infty,$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля 1-го рода [1].

Вблизи кромки диска $r = a$ потенциал скорости должен быть ограничен по абсолютной величине, но производные по r могут иметь особенности интегрируемого порядка.

В [2] с использованием преобразования Ханкеля исходная задача сведена к интегральному уравнению относительно функции $\gamma(r)$

$$\int_0^a \gamma(s) k(r,s)\, ds = \upsilon_z(r),\ r \le a, \tag{1}$$

где

$$\gamma(r) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{p}{i\omega\rho}\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

$$k(r,s) = \begin{cases} \dfrac{2\nu^2 s}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tau}{\tau^2+\nu^2} K_0(\tau r) I_1(\tau s)\, d\tau + i\pi\nu^2 s H_0^{(1)}(\nu r) J_1(\nu s),\ s < r, \\ -\dfrac{2\nu^2 s}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tau}{\tau^2+\nu^2} I_0(\tau r) K_1(\tau s)\, d\tau + i\pi\nu^2 s H_1^{(1)}(\nu s) J_0(\nu r),\ s > r, \end{cases}$$

где $\nu = \dfrac{\omega^2}{g}$, K_0, K_1 — функции Макдональда, I_0, I_1 — функции Инфельда, J_0, J_1 — функции Бесселя.

Для того чтобы найти форму свободной поверхности жидкости при колебаниях диска, используем условие непротекания на её границе. Применяя преобразование Ханкеля, получим выражение для нахождения формы свободной поверхности

$$\eta(r) = -\frac{i}{\omega}\int_0^a k(r,s)\gamma(s)ds\,,\ r > a\,. \qquad (2)$$

Решение интегрального уравнения (1) находится в классе функций, ограниченных в центре диска и имеющих интегрируемую особенность на кромке диска. Методом дискретных вихрей [3], которые в данном случае являются кольцевыми, задача решения уравнения (1) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{a}{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma(s_j)k(r_i, s_j) = \upsilon_z(r_i)\,,\ i = \overline{1, n},$$

$$r_i = \left(i - \frac{3}{4}\right)\frac{a}{N}\,,\ s_j = \left(j - \frac{1}{4}\right)\frac{a}{N}\,.$$

После решения системы форму свободной поверхности, согласно формуле (2), можно определить следующим образом

$$\eta(r) = -\frac{ia}{N\omega}\sum_{j=1}^{N}\gamma(s_j)k(r, s_j)\,.$$

Численные расчеты были проделаны с помощью математического пакета Mathcad для вертикальных колебаний диска $\upsilon_z(r) = i\omega$. На рисунке 1 приведена форма свободной поверхности жидкости при разных значениях приведенной частоты $\bar{\nu} = \omega^2 a / g$. Из рисунка видно, что с увеличением $\bar{\nu}$ увеличивается колебательность формы свободной поверхности, причем колебания амплитуды более выражены в окрестности диска, а при отдалении от него амплитуда волн уменьшается.

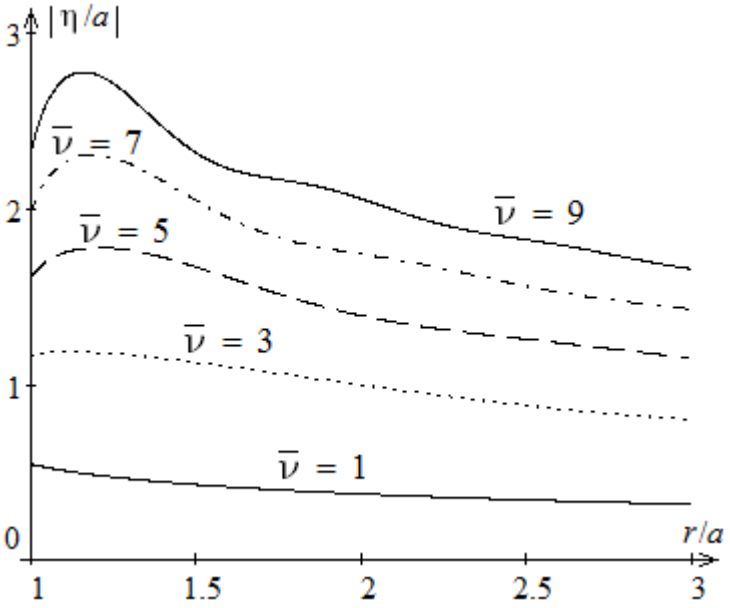


Рисунок 1 — Значения модуля амплитуды отклонения свободной поверхности от уровня $z = 0$

Предложенную в работе математическую модель можно использовать для изучения упругих перемещений диска под действием возникающих гидродинамических сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука. – 1984. – 832 с.
2. Ефремов И.И., Лукащик Е.П. Колебания круглого диска на свободной поверхности весомой жидкости // Вестник Южного научного центра РАН. – 2010. – Том 6, №1. С. 11-14.
3. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука. – 1985. – 256 с.

УДК 532.546

РАБОТА СКВАЖИНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Д. Г. Лекомцев
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *lekomtcevdg@yandex.ru*

Поставленная плоскопараллельная задача о дебите скважины в анизотропном неоднородном пласте грунта исследуется в случае степенного закона изменения проводимости. Исследовано влияние анизотропии и неоднородности грунта на дебит.

Ключевые слова: скважина, пористая среда, закон Дарси, анизотропный неоднородный пласт, дебит, тензор проницаемости.

Введение

Сейчас основной задачей теории фильтрации является исследование процессов нефтедобычи. На данный момент многие легкодоступные нефтяные месторождения с относительно простым геологическим строением истощаются. Для того чтобы удовлетворить потребность экономики в углеводородном сырье активно эксплуатируются месторождения, содержащие трудноизвлекаемые запасы нефти в породах сложной геологической структуры. Подобное строение имеют многие крупные месторождения углеводородов, например, Астраханское и Верхне-Салымское месторождения в России, или месторождение Тенгиз в Казахстане [1]. Как показывают многочисленные экспериментальные данные [2, 3], реальные нефтяные породы-коллекторы и породы, слагающие водоносные горизонты, обладают ярко выраженной анизотропией свойств. Эксплуатация месторождений, коллекторы которых четко проявляют анизотропию свойств, делает актуальным исследование новых задачи по математическому описанию течения флюида в таких условиях.

1. Постановка задачи

Совершенная эксплуатационная скважина дебита Q расположена в горизонтальном анизотропном и неоднородном пласте. Контур скважины - окружность σ_C: $x^2+y^2 = R_C^2$ радиуса R_C. Давления на контуре скважины σ_C и контуре питания постоянные, разность давлений равна единице, жидкость несжимаемая и ее течение стационарное, контур питания удален в бесконечность. Двумерное течение в анизотропно-неоднородном пористом слое (пласте грунта) проводимости $P = (P_{ij}) = H(K_{ij})$ (H – толщина слоя, (K_{ij}) $i, j = 1, 2$ – тензор его проницаемости) описываем обобщённым потенциалом φ и функцией тока ψ. φ и ψ – функции декартовых координат (x, y) плоскости z всюду в области D, за исключением изолированных особых точек этих функций, удовлетворяют системе уравнений [4].

$$P_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad P_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{1}$$

Уравнения (1) относится к эллиптическому типу, если коэффициенты отвечают условиям [5]

$$P_{11} > 0, \quad (P_{22} > 0), \quad D(P_S) = P_{11}P_{22} - (P_{12} + P_{21})^2/4, \tag{2}$$

где $D(P_S)$ – определитель симметричной части $P_S = (P + P^T)/2$ тензора P, $P^T = (P_{ji})$ – транспонированный тензор.

2. Методы решения

Рассмотрим слои с раздельной анизотропией и неоднородностью, его тензор проводимости моделируется степенной функцией одного переменного, например, [5]:

$$P(z) = ky^s, \quad (P_{ij} = k_{ij}y^s, i, j = 1, 2), \tag{3}$$

где степень s – положительная константа, далее положим $s = 6$, $k = (k_{ij})$ – постоянный тензор.

Трудность решения поставленной задачи обусловлена сложным видом (1). Исследование существенно упрощается, если преобразовать (1) к каноническому виду. Для этого осуществляется переход с физической плоскости $z = x + iy$ на вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ с использованием гомеоморфных (аффинных) преобразований (прямого и обратного) [4].

$$\zeta = z + \mu_0(z)\bar{z}, \quad z = \frac{\zeta - \mu_0(z)\bar{\zeta}}{1 - |\mu_0(z)|^2}, \quad \mu_0(z) = \frac{P_{22} - P_{11} - i(P_{12} + P_{21})}{P_{22} + P_{11} + 2\sqrt{D(P_S)}}, \tag{4}$$

$$|\mu_0(z) < 1|.$$

Из (4) следует прямое преобразование декартовых координат плоскостей z и ξ

$$\xi = (1 + a)x + by, \quad \eta = bx + (1 - a)y, \tag{5}$$

где $\mu_0 = a + ib$, $a^2 + b^2 < 1$, $a = (k_{22} - k_{11})/(k_{22} + k_{11} + 2\sqrt{D(k_s)})$, $b = (k_{12} + k_{21})/(k_{22} + k_{11} + 2\sqrt{D(k_s)})$, $D(k_s) = k_{11}k_{22} - (k_{12} + k_{21})^2/4$.

Воспользуемся преобразованием (4) и считая слой ортотропным $(k_{12} = k_{21})$, получим на плоскости проводимость [5]

$$P'(\xi) = k_0\left[\frac{(1 + a)\eta - b\xi}{1 - a^2 - b^2}\right]^s, \quad (k_0 = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} > 0). \tag{6}$$

Перейдем на плоскость $\zeta' = \xi' + i\eta'$, которая связана с плоскостью ζ преобразованием поворота на угол ϑ_0 $(tg\vartheta_0 = b/(1 + a))$. На плоскости ζ' проводимость является функцией одного переменного η' [5]:

$$P'(\xi') = k_0'\eta'^s \quad \left(k_0' = k_0\left[\frac{(1 + a)cos\vartheta_0 + bsin\vartheta_0}{1 - a^2 - b^2}\right]^s\right). \tag{7}$$

Характерной особенностью слоя проводимости (7) является наличие сингулярной линии σ_0: $\eta' = 0$, на которой $P = 0$, если $s > 0$. Согласно [5, 6] находим формулу, определяющую дебит скважины [7]

$$Q = \frac{2\pi k_0' d'^s (C - C_0)}{Q_{\frac{s}{2}-1(\omega)}}. \tag{8}$$

Здесь $Q_\nu(\omega)$ – функция Лежандра второго рода степени ν аргумента $\omega = 1 + R_C'^2/2d'^2$, $d' = d(1-\mu^2)/\sqrt{(1-a)^2 + b^2}$ расстояние от центра скважины σ_C до сингулярной линии σ_0, $R_C' = R_C\sqrt{1-\mu^2}$, $C = 1$, $C_0 = 0$.

3. Дебит скважины

Для исследования влияния анизотропии грунта на дебит скважины введем относительный дебит [8]

$$\varepsilon = Q/Q_0 - 1, \tag{9}$$

где Q_0 дебит скважины радиуса R_C, расположенной на расстоянии d от сингулярной линии $y = 0$ в случае изотропного неоднородного грунта со степенным законом изменения проводимости, при $s = 6$ [6], найдем по формуле (10):

$$Q_0 = \frac{2\pi(C - C_0)}{ln(2d/R_C) - 3/2}. \tag{10}$$

Влияния на дебит различных компонентов тензора $k = (k_{ij})$ учтем, введя коэффициенты

$$\alpha = k_{22}/k_{11} > 0, \quad \beta = k_s/k_{11}, \quad \big(k_s = (k_{12} + k_{21})/2\big).$$

Причем $\beta^2 < \alpha$, как следует из условия (2). Коэффициент α характеризует соотношение диагональных компонентов k_{11} и k_{22} тензора $k = (k_{ij})$, а коэффициент β - отношение симметричной части k_s тензора $k = (k_{ij})$ к его диагональной компоненте k_{11}. Из полученных аналитических соотношений можно, как частный случай получить формулы описывающие работу совершенной скважины в анизотропном однородном слое грунта [8]. На рисунке 1 представлены зависимости относительного дебита ε от значений коэффициентов α и β при значении $s = 6$. При $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ (случай неоднородной изотропной среды) относительного дебита $\varepsilon = 0$, это означает, что в данном частном случае формула (8) и формула (10) дают одинаковое значения дебита скважины.

Заключение

Решение данная задача может оказаться актуальной в качестве тестовой при проверке численных математических моделей описывающих более сложные задачи. Анизотропия грунта может сильно сказываться на дебите Q (может его увеличивать или уменьшать по отношению к дебиту в случае изотропной неоднородной среды Q_0), неоднородность грунта оказывает на дебит меньшее

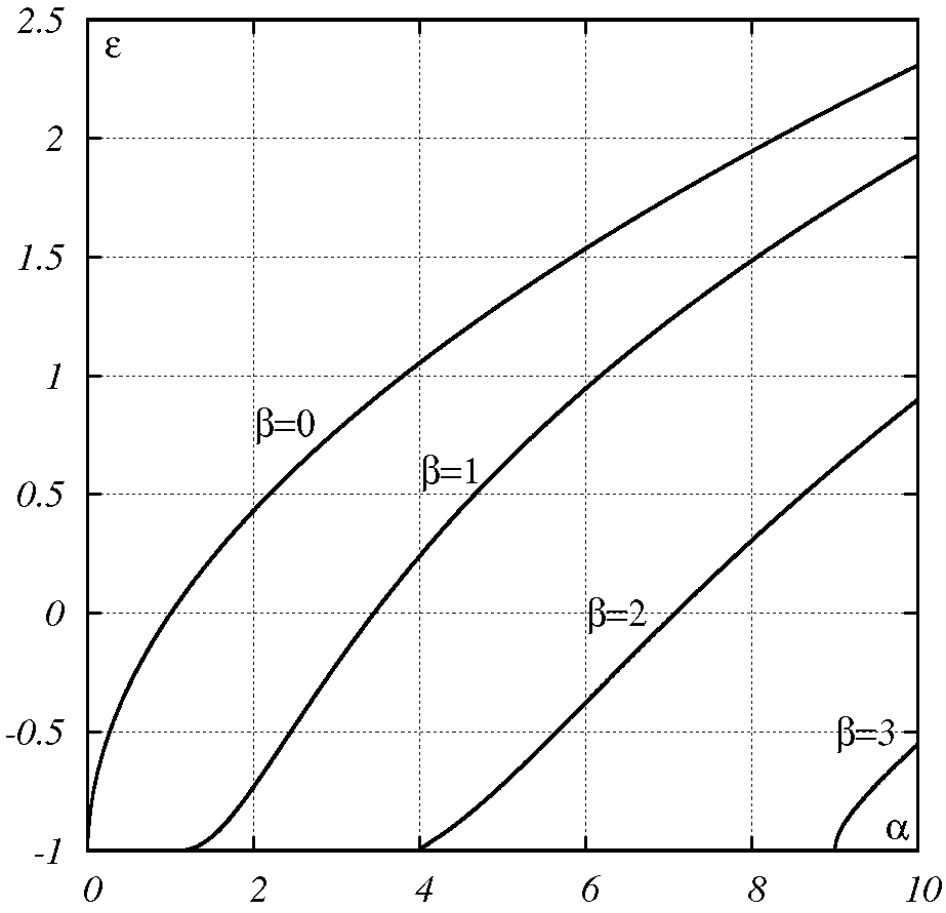


Рисунок 1 – Зависимости относительного дебита скважины ε от коэффициентов $\alpha = 1$ и $\beta = 0$

влияние, общий характер хода кривых на рисунке 1 аналогичен случаю анизотропной однородной среды [8, 9, 10]. С увеличением отношения недиагональных к диагональным компонентам тензора $k = (k_{ij})$ (увеличение коэффициента α, коэффициент β - фиксирован) влияние анизотропии уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Графутко С. Б. Изменения анизотропных свойств пласта под действием фильтрационного потока: Автореф. дис. канд. тех. наук. — М., Государственная академия нефти и газа им. И. М. Губкина. — 1993. — 28 с.

2. Дмитриев Н. М. Модели фильтрации в анизотропных средах: Автореф. дис. док. тех. наук. – М., Государственная академия нефти и газа им. И. М. Губкина. — 1997. – 34 с.

3. Nordquist T. Permeability Anisotropy of Resedimented Mudrocks. — Cambridge: Massachusetts Institute of Technology. — 2015. — 277 p.

4. Пивень В. Ф. Математические модели фильтрации жидкости. — Орел: Издательство ФГБОУ ВПО Орловский государственный университет, ПФ Картуш. — 2015. — 408 с.

5. Пивень В. Ф. Исследование двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном пористом слое // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. — 2017. — № 1. — С. 14–24.

6. Аксюхин А. А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта: дис. . . канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. — Орел. — 2000. — 153 с.

7. Лекомцев Д. Г. Математическое моделирование работы совершенной скважины в анизотропном неоднородном пласте грунта // Труды XVIII международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». — 2017. — С. 149–152.

8. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. — 2012. — Т.47. — № 3. — С. 69–74.

9. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Вычислительная механика сплошных сред. — 2016. — Т.9. — № 4. — С. 389–399.

10. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Исследование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. — 2014. — Т.59. — № 3. — С. 83–88.

УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА «РАЗНОЦВЕТНЫХ» ЖИДКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Ю.С. Федяев, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *FedyaevYS@gmail.com*

Поставлена задача о трёхмерной эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в ортотропном неоднородном грунте. Рассмотрен случай степенного закона изменения проницаемости среды. На основе метода Эйлера с адаптивным шагом исследована эволюция первоначально плоской границы раздела жидкостей к эксплуатационной скважине. Получена зависимость времени заводнения скважины от параметров задачи.

Ключевые слова: анизотропная пористая среда, модель «разноцветных» жидкостей, эволюция границы раздела жидкостей.

1. Постановка задачи

Рассмотрим трёхмерную установившуюся фильтрацию несжимаемой жидкости в ортотропной неоднородной и недеформируемой пористой среде. Проницаемость грунта задаётся тензором $K(M)$, где M — точка наблюдения. Для ортотропной среды тензор проницаемости симметричен $K_{ij}(M) = K_{ji}(M)$, $i, j = 1,2,3$. Декартовы оси координат $Ox_1x_2x_3$ сориентируем вдоль главных направлений анизотропии. В этом случае тензор проницаемости имеет диагональный вид: $K_{ij}(M) = K_i(M)\delta_{ij} = k_i\chi(M)\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, k_i — положительные константы, $\chi(M)$ — непрерывно дифференцируемая функция, задающая неоднородность среды.

Скорость фильтрации $\vec{\upsilon} = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ определяется обобщённым законом Дарси [1]

$$\upsilon_i(M) = k_i\chi(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial x_i},\ i = 1,2,3, \tag{1}$$

где $\varphi(M)$ — обобщённый потенциал скорости фильтрации, x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты. Всюду в области течения D (за исключением особых точек) справедливо уравнение неразрывности

$$\sum_{i=1}^{3} k_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\chi(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial x_i}\right) = 0. \tag{2}$$

Так как среда неоднородна, то в области фильтрации D может присутствовать сингулярная поверхность $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$, на которой проницаемость $K(M)$ обращается в бесконечность (на σ_{01}, когда $K = \infty$) или в ноль (на σ_{02}, когда $K = 0$). Поверхность σ_{01} можно рассматривать как границу большой каверны (водоёма) покоящейся жидкости, а σ_{02} — как непроницаемую для жидко-

сти границу. Условия для обобщённого потенциала φ на границе σ_0 будут иметь вид:

$$\varphi(M)^+ = 0,\ \ M \in \sigma_{01};\quad \left(\chi(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n_M}\right)^+ = 0,\ \ M \in \sigma_{02}, \tag{3}$$

где $\vec{n}_M$ — орт нормали к σ_{02}. Знак «+» означает предельное значение соответствующей функции на границе при подходе к ней со стороны орта нормали.

Если область течения содержит бесконечно удалённую точку, в которой отсутствуют особенности, то должны выполняться условия регулярности обобщённого потенциала $\varphi(M)$ на бесконечности:

$$\varphi(M) = O\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right),\ \ \chi(M)\left|\nabla\varphi(M)\right| = O\left(\frac{1}{r^2_{MM_0}}\right),\ \text{при } r_{MM_0} \to \infty, \tag{4}$$

где r_{MM_0} — расстояние от точки наблюдения $M(x_1, x_2, x_3)$ до фиксированной точки $M_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$, точки $M, M_0 \in D$.

В области фильтрации D присутствует граница Γ_t, разделяющая две жидкости. Полагаем, что фильтрационные свойства жидкостей одинаковы (модель «разноцветных» жидкостей). Положение границы Γ_t в моменты времени $t > 0$ описывается параметрическими уравнениями (s_1, s_2 — параметры):

$$\Gamma_t:\ x_i = x_i\left(t, s_1, s_2\right),\ \ i = 1,2,3,\ \ (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_t. \tag{5}$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы Γ_t задано:

$$\Gamma_t = \Gamma_0:\ \ x_i^0 = x_i\left(0, s_1, s_2\right),\ \ i = 1,2,3. \tag{6}$$

Скорость фильтрации и физическая скорость взаимосвязаны равенством $d\vec{r}/dt = \vec{\upsilon}$, где $\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки наблюдения. С учётом (1) дифференциальные уравнения движения границы раздела жидкости будут иметь вид

$$\frac{dx_i}{dt} = k_i\chi(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial x_i},\ \ i = 1,2,3,\ \ (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_t. \tag{7}$$

Задача эволюции границы Γ_t в области фильтрации D ставится следующим образом: задано положение границы Γ_0, тензор проницаемости $K(M)$. Необходимо найти положение границы Γ_t (5). Решение задачи состоит в отыскании обобщённого потенциала φ, который удовлетворяет уравнению (2), граничным условиям (3) и условиям на бесконечности (4). Далее интегрируется система уравнений (7) при начальном условии (6).

2. Фундаментальное решение

Для исследования трёхмерных граничных задач в ортотропной пористой среде принципиальную значимость имеет фундаментальное решение $\Phi(M, M_0)$ уравнения (2). Вид этого решения определяется функцией $\chi(M)$, которая характеризует неоднородность среды.

Рассмотрим случай пористой среды с тензором проницаемости $K(M)=k_t x_3^2\delta_{ij}$, $i,j=1,2,3$ ($\chi(M)=x_3^2$). В этом случае плоскость $x_3=0$ является сингулярной поверхностью σ_{02}, на которой $K(M)=0$. Фундаментальным решением уравнения (2) будет функция [1]

$$\Phi(M,M_0)=\frac{1}{4\pi x_{03}x_3}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_*}\right), \tag{8}$$

где $R=\left[k_0\left((x_1-x_{01})^2/k_1+(x_1-x_{02})^2/k_2+(x_3-x_{03})^2/k_3\right)\right]^{1/2}$ — расстояние между точками M_0 и M, $R_*=\left[k_0\left((x_1-x_{01})^2/k_1+(x_1-x_{02})^2/k_2+(x_3+x_{03})^2/k_3\right)\right]^{1/2}$ — расстояние между точками $M_0^*=\left(x_{01},x_{02},-x_{03}\right)$ и M. Точка M_0^* зеркально симметрична точке M_0 относительно плоскости $x_3=0$, $k_0>0$ — масштабный коэффициент.

Фундаментальное решение (8) имеет следующий гидродинамический смысл: $\Phi(M,M_0)$ это обобщённый потенциал точечного стока единичной мощности, который расположен в точке M_0. Обобщённый потенциал $\varphi(M,M_0)$ источника (стока) произвольной мощности Π имеет вид

$$\varphi(M,M_0)=-\Pi\Phi(M,M_0). \tag{9}$$

Решение (9) позволяет моделировать работу скважин в области фильтрации D.

3. Исследование эволюции границы к скважине

Работу эксплуатационной скважины дебита q будем моделировать точечным стоком мощности $\Pi=-q$, который расположен в точке $M_0\left(0;0;a\right)$. Кратчайшее расстояние от границы Γ_0 до точки расположения стока обозначим d. Контур скважины представляет собой сферу радиуса R_c, $R_c\ll d$. Введём параметры: $\alpha_1=k_1/k_0$ $\alpha_2=k_2/k_0$, $\alpha_3=k_3/k_0$. Положим $k_0=k_1=1$. Тогда параметр $\alpha_1=1$, параметр α_2 характеризует различие компонент тензора проницаемости вдоль осей Oy и Ox, а параметр α_3 — вдоль осей Oz и Ox. Обозначим $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$. В рассматриваемом случае обобщённый потенциал течения (9) примет вид:

$$\varphi(M,M_0)=\frac{q}{4\pi az}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_*}\right), \tag{10}$$

где $R=\left[x^2/\alpha_1+y^2/\alpha_2+\left(z-a\right)^2/\alpha_3\right]^{1/2}$, $R_*=\left[x^2/\alpha_1+y^2/\alpha_2+\left(z+a\right)^2/\alpha_3\right]^{1/2}$.

Исследуем случай, когда сток расположен между плоскостью σ_{02} и границей раздела жидкостей. На практике большое значение имеет время достижения границей Γ_t скважины, которое также называют временем заводнения скважины. Границу Γ_0 будем моделировать плоскостью $z=a+d$, $d>0$ (рисунок 1). В этом случае время заводнения скважины определяется по формуле [2]

$$T = \frac{2\pi a^3}{27q\alpha^{3/2}}\left[2\sqrt{3}\ln\left(\frac{3\beta+3-\sqrt{3}}{\left(3\beta+3+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}\right)+3\beta^3+9\beta^2-6\beta\right], \qquad (11)$$

где параметр $\beta = d/a$, $\beta \in (1,+\infty)$. При $\alpha_3 = 1$ из (11) имеем время достижения границей Γ_t скважины в неоднородном изотропном грунте с коэффициентом проницаемости $K = z^2$.

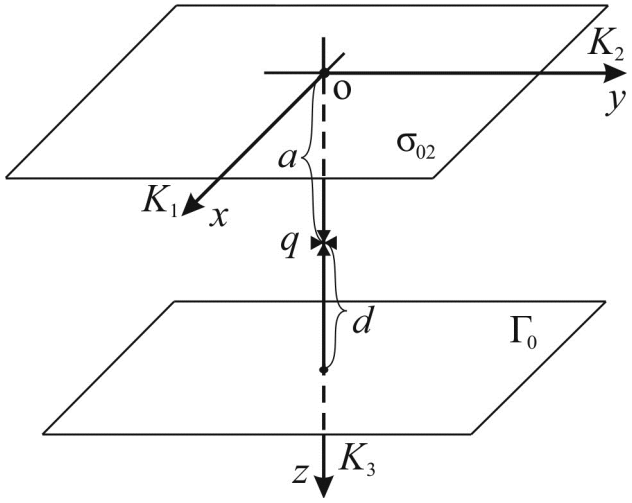


Рисунок 1 – Постановка задачи

Рассмотрим случай, когда сток расположен на сингулярной поверхности σ_{02}, т.е. параметр $a \to 0$ ($\beta \to \infty$). Выбранный случай наиболее тесно связан с задачами добычи нефти и газа из-под земли, забором пресной воды из подземных резервуаров и т. п.

Исследуем эволюцию границы Γ_t в области течения $D: z > 0$ при различных значениях параметров α_2 и α_3. Систему дифференциальных уравнений (7) решим численно методом Эйлера с адаптивным шагом [3]. При расчётах полагаем $d = 1$, $R_c = 0{,}02$, $\Delta l_{\max} = 0{,}001$ где $\Delta l_{\max}$ — ограничение на максимальное смещение точки границы.

На рисунке 2 показаны сечения границы Γ_t плоскостью Oxz в моменты времени $t = 0$ (кривая ***1***) и $t = T$ (кривые ***2, 3, 4***). Расчёты проведены при $\alpha_2 = 1$. Кривая ***2*** соответствует значению параметра $\alpha_3 = 0{,}1$, кривая ***3*** — $\alpha_3 = 1$, кривая ***4*** — $\alpha_3 = 10$. Численно посчитанное время T при варьировании параметра α_3 отличается от аналитического решения (11) не более чем на 0,15%. Прорыв жидкости к скважине происходит вдоль оси Oz, и параметр α_2 не влияет на время достижения границей Γ_t скважины. Так как $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, то картина течения симметрична относительно оси Oz. Во всех рассмотренных случаях наблюдается образование водяного конуса. Форма конуса определяется значением параметра α_3.

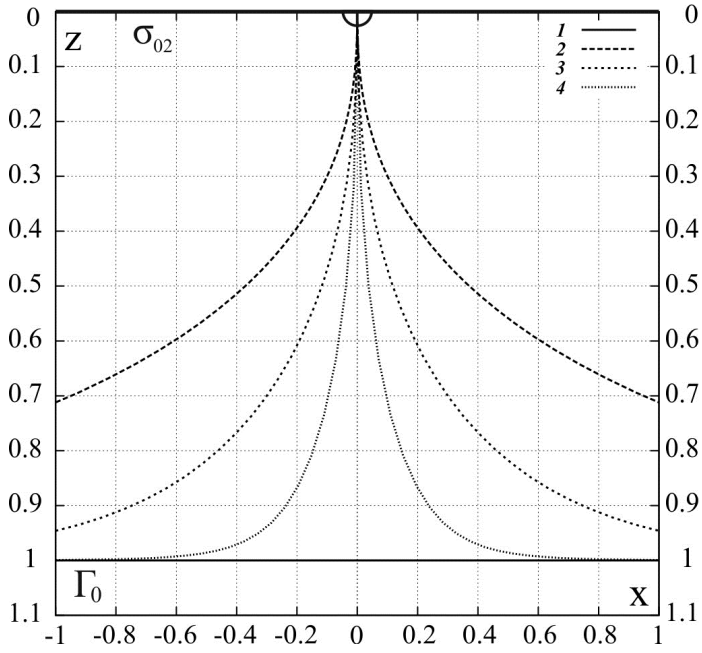


Рисунок 2 – Эволюция границы в плоскости *Oxz* при $\alpha_2 = 1$

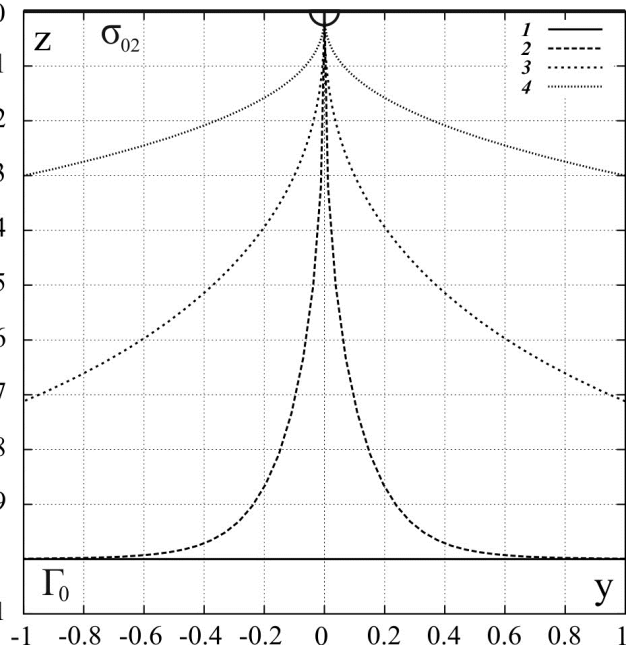


Рисунок 3 – Эволюция границы в плоскости *Oyz* при $\alpha_3 = 1$

На рисунке 3 показаны сечения границы Γ_t плоскостью *Oyz* при $\alpha_3 = 1$ и различных значений параметра α_2. Кривая ***1*** соответствует начальному положению границы Γ_0, кривая ***2*** отвечает значению параметра $\alpha_2 = 0{,}1$, кривая ***3*** — $\alpha_2 = 10$, кривая ***4*** — $\alpha_2 = 1000$. Видим, что направление прорыва не меняется даже при больших значениях параметра α_2. В плоскости *Oxz* конечные положения границы Γ_t совпали при всех выбранных значениях параметра α_2 с кривой ***3*** на рисунке 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пивень В.Ф. Математические модели фильтрации жидкости. – Орёл: Изд-во ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет», ПФ «Картуш». – 2015. – 408 с.
2. Крыштопин Д.В., Федяев Ю.С. Исследование эволюции трёхмерной границы раздела «разноцветных» жидкостей к скважине в неоднородной ортотропной пористой среде // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Естественные, технические и медицинские науки. – 2015. – № 4. – С. 32–36.
3. Крыштопин Д.В., Федяев Ю.С. Математическое моделирование трёхмерной эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в анизотропной однородной пористой среде // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Естественные, технические и медицинские науки. – 2014. – № 6. – С. 17–21.

Физика конденсированного состояния. Наноструктуры и наноматериалы

УДК 538.91, 93

ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ $(SnSe)_{1-x}(ErSe)_x$

А.А. Алиев, к.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский государственный педагогический университет
e-mail: *cih_58@mail.ru*
О.М. Гасанов, к.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский государственный педагогический университет
e-mail: *1959oktay@mail.ru*
Р.Ф. Мамедова, к.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский государственный педагогический университет
e-mail: *cahangir.adpu@mail.ru*
Т.А. Джафаров, старший преподователь
Азербайджанский государственный педагогический университет
e-mail: *tapd75@mail.ru*

Комплексными методами физико-химического анализа: дифференциально-термического (ДТА), рентгенофазового (РФА), микроструктурного (МСА) анализов, а также измерением микротвердости и плотности изучен характер взаимодействия в системеSnSe-ErSe и построена диаграмма состояния. Изучены температурная зависимость электропроводности и термоэ.д.с. сплавов системы. Установлено, что при введение ErSeв состав SnSe образуются твердые растворы и изменяются некоторые физико-химические свойства.

Ключевые слова: твердые растворы, микроструктура, дифрактограмма, физико-химический анализ, микродиаграмма, электропроводность, коэффициент Холла, термоэдс.

1. Введение

Одной из важнейших задач стоящих перед современной физикой и химией твердого тела состоит в определении области применения полупроводниковых материалов путем получения совершенных монокристаллов. Из литературы известно, что элементы из германиевой подгруппы, а так же халькогениды олова и твердые растворы, полученные на их основе, используются как перспективные термоэлектрические материалы в термоэлектрических преобразователях в интервале средних температур. Поэтому можно ожидать, что при внедрении халькогенидов эрбия в халькогениды олова, получить однофазные сплавы с высокой термоэлектрической эффективность и более широким темпе-

ратурным интервалом относительно халькогениды олова. В том числе особый интерес вызывает исследование термоэлектрических свойств твердых растворов системы SnSe-ErSe на основе SnSe.

2. Методика эксперимента

Сплавы системы $(SnSe)_{1-x}(ErSe)_x$синтезировали из исходных компонентов в эвакуированных до 0.1333 Па кварцевых ампулах. Синтез осуществляли в два этапа: первоначально–ампулы с веществом нагревали со скоростью 4-5 *град/мин*. до температуры плавления селена и выдерживали при этой температуре 3-4 часов, после чего температуру повышали до 950-1000^{0}С, в зависимости от состава, и выдерживали 8-9 часов. При синтезе тройных сплавов системы *SnSe-ErSe*, в качестве исходных компонентов использовали элементы особой чистоты: олово марки «В4-000», селен «ОС417-4» и химически чистый элементарный эрбий «ЭР-2».

Синтезированные образцы для комплексного физико-химического анализа и электрофизических исследований подвергали отжигу в течение 100- 140 часов в зависимости от состава: время отжига увеличивали с увеличением содержания эрбия. Гомогенизирующий отжиг полученных однофазных образцов проводили в среде спектрально чистого аргона при 800 К.

Взаимодействие в системе *SnSe-ErSe* изучали методами дифференциального-термического (ДТА), рентгенофазового (РФА), микроструктурного (МСА) анализов , а также измерением микротвердости, определением плотности и их основание была построена их микродиаграмма. Дифференциально-термический анализ образцов проведен в приборе PerkinElmerSinintltaneonsThermalAnalgiyzer, STA 6000 (США). Образец нагревался со скоростью 5^{0}С/мин. В качестве рабочего газа взят азотный газ и его скорость составляла 20 мл/мин.

МСА сплавов системы исследовали с помощью металлографического микроскопа МИМ-8 предварительно протравленных шлифах, полированных пастой ГОИ. При исследовании микроструктуры сплавов использовали травитель состава конц. HNO_3: H_2O_2 = 1:1 время травления 20 с.

Микротвердость сплавов системы измеряли на микротвердомере ПМТ-3 при нагрузках 0.10 и 0.20 Н. Плотность сплавов системы определяли пикнометрическим методом, в качестве рабочий жидкости использовали толуол.

Рентгенографические исследования проведены на порошковом дифрактометре типа D8 ADVAVNCE фирмы«Bruker» при режиме трубки 40кВ,40мА(CuK_α излучение,λ=1.5406Å) в интервале температур 300<*T*<1400К с использованием температурной камеры ТТК450.Дифракционные отражения записывались в интервале углов $0^0 \le 2\theta \le 80^0$, идентификация данных, полученных при исследовании образцов низкотемпературной модификации, проведена по программе TOPAS. Кристаллографические параметры уточнены по программе EVA.

После отжига из слитков кристаллов на электроискровой установке вырезали образцы размерами 2 ×4×18 мм^3. Термоэдс измеряли стационарным методом по методике изложенной в [1]. Электропроводность и коэффициент Холла

измеряли при постоянном токе и постоянном магнитном поле электромагнита [2]. Измерения проведены в интервале температур 300÷950К.

3. Полученные результаты и их обсуждения

Полученные сплавы компактные, с металлическим блеском, и с увеличением содержания эрбия цвет сплавов становится темно-серым, и меняется до черного, устойчивы по отношению к воздуху и воде. Результаты ДТА сплавов системы *SnSe-ErSe* показали, что все фиксированные эффекты на кривых нагревания и охлаждения обратимы.

В результате изучения микроструктуры выявлено, что вблизи *SnSe* имеется ограниченная область растворимости. Анализ результатов МСА показал, что растворимость *ErSe* в *SnSe* при комнатной температуре составляет 5 мол.%, а при температуре вблизи эвтектики доходит до 10 мол.%. При комнатной температуре в растворе на основе моноселенида олова ErSe растворяется до 5 моль%. С целью уточнения границ твёрдого раствора на основе SnSe были синтезированы образцы 3, 5, 6, 7 и 10 моль% ErSe. Затем они были подвергнуты термическому отжигу при температуре 300°С и 600°С в течении 200 часов. После образцы при температуре 300°С и 600°С были резко охлаждены в воде, и затем был проведен их анализ.

На основании результатов микроструктурного анализа было определено, что при комнатной температуре в растворе на основе SnSe растворяется 5 моль% ErSe, при 300°С - 6 моль% ErSe, 600°С - 7 моль% ErSe. В интервале 5-40 мол.% *ErSe* все сплавы двухфазные.

При измерении микротвердости сплавов системы SnSe-ErSe было получено два значения микротвердости. I значение микротвердости (500-800 МПа) соответствует твердости α-твердого раствора, а II значение (2100-2200 МПа) соответствует микротвердости соединения ErSe.

В сплавах из области твердых растворов с увеличением концентрации эрбия в составе происходит увеличение микротвердости. С увеличением содержания эрбия в составе *SnSe* на дифрактограммах сплавов появляются новые, нехарактерные *SnSe* максимумы, относящиеся к *ErSe*.

РФА сплавов показал, что на дифрактограммах в интервале концентраций 0-5мол.% *ErSe* дифракционные максимумы идентичны. Из анализа рентгеноструктурных данных следует, что при введении селенида эрбия наблюдается увеличение параметров элементарной ячейки *SnSe* по мере возрастания концентрации *Er,* а также интенсивное рассеяние носителей «искажениями» решетки совпадающее с исследованиями теплопроводности сплавов [3].

Совокупность результатов ДТА, МСА, РФА, значений микротвердости и плотности позволили построить диаграмму состояния системы SnSe-ErSe (рис.1).

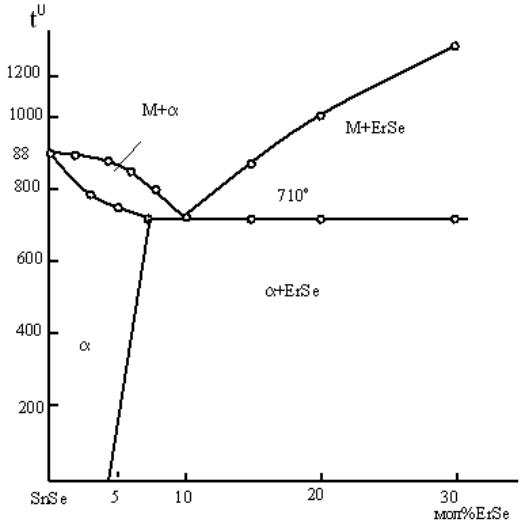


Рисунок 1 – Микродиаграмма систем SnSe–ErSe

Установлено, что система - квазибинарная, эвтектического типа с образованием инконгруэнтно плавящегося соединения $ErSnSe_2$ при 855°С. Оно с α-твердыми растворами на основе SnSe образует эвтектику, содержащую 10 мол. % ErSe и плавится при 710°С. В интервале концентраций 0-10 мол. % ErSe по линии ликвидуса происходит первичная кристаллизация α – фазы . В пределах концентраций 10-15 мол. % из жидкости первично выделяется $ErSnSe_2$, в интервале 15-100 мол. % ErSe из жидкости выделяется ErSe.

В пределах 0-4 мол. % ErSe ниже линии солидуса образуются однофазные сплавы α-твердых растворов на основе SnSe, в интервале 4-50 мол. % а в интервале 50-100 мол. %. ErSe кристаллизуется двухфазные сплавы ($ErSnSe_2$+ErSe). Совместная кристаллизация α-фазы и соединения $ErSnSe_2$ закачивается в двойной эвтектике состава 10 мол. % ErSe, которая плавится при 710°С.

Некоторые физико-химические свойства системы сплава SnSe-ErSe приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты измерения состава, ДТА, микротвердости и удельного веса сплавов системы SnSe-ErSe

Состав, моль%		Эффекты термонагревания, °С	Плотность, 10^3 кг/м^3	Микротвёрдость фаз, МПа	
SnSe	ErSe			I(α), P=0,01Н	III(ErSe), P=0,01Н
100	0,0	880	6,18	500	-
99	1,0	875	6,22	600	-
97	3,0	790, 855	6,29	800	-
95	5,0	750, 845	6,35	800	-
93	7	735, 830	6,47	эвтектика	эвтектика
90	10	710	6,52	-	-
85	15	710, 835	6,63	-	2100
80	20	710,900	6,75	-	2100
70	30	710, 1050	6,78	-	2200

Для твердых растворов $(SnSe)_{1-x}(ErSe)_x$ изучены температурные зависимости электропроводности и термо-э.д.с. С этой целью были синтезированы образцы твердого раствора $(SnSe)_{1-x}$-$(ErSe)_x$ с составом x=0,01; 0,02; 0,03 и в течении 300 часов при 600°С проводили гомогенизирущий отжиг.

Были исследованы температурные зависимости электропроводности, термо-э.д.с, силы тока и удельное сопротивление соединения SnSe и твердые растворы на их основе.

По рисунку 2 видно, что с увеличением количества ErSe в составе SnSe электропроводность уменьшается.

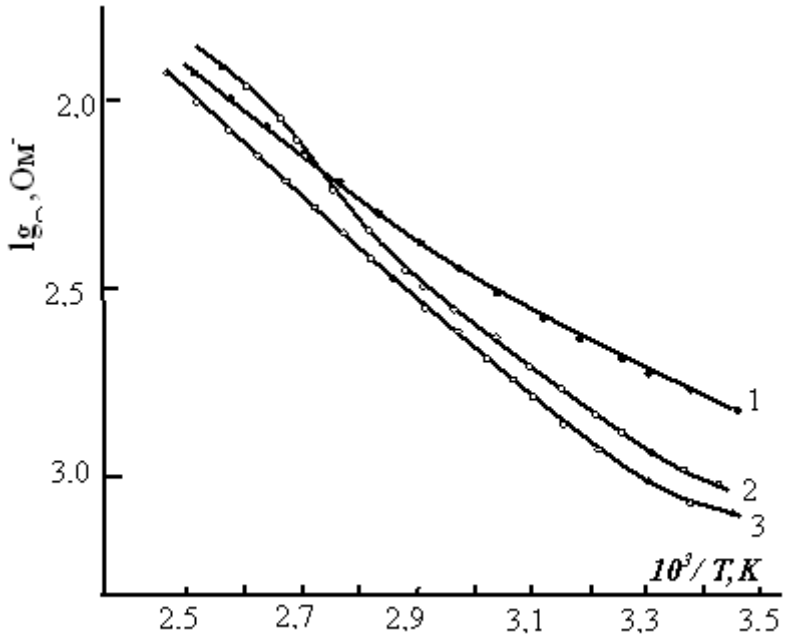


Рисунок 2 – Электропроводность сплавов $(SnSe)_{1-x}(ErSe)_x$

Это объясняется тем, что с добавлением второго компонента в SnSe происходит заполнение дефектов и электропроводность уменьшается.

Как видно из температурной зависимости электропроводности твердых растворов $(SnSe)_{1-x}$-$(ErSe)_x$ наблюдается, характерное для всех полупроводниковых растворов, увеличение электропроводности с увеличением температуры. Это положение показывает, что данные образцы относятся к полупроводникам.

При добавлении в SnSe 1 моль% ErSe его электропроводность при комнатной температуре равна $\sigma=5{,}07\cdot10^{-3}$ $Ом^{-1}\cdot см^{-1}$, а при температуре 130°С $\sigma=6{,}5\cdot10^{-2}$ $Ом^{-1}\cdot см^{-1}$. Электропроводность расплавов незначительно увеличивается в интервале температур 20-100°С и данная электропроводность соответствует примесной проводимости.

В температурном же интервале 100-130°С проводимость резко увеличивается, то есть наблюдается собственная проводимость. Для двух других составов 2 моль% и 3 моль% ErSe температурная зависимость электропроводности закономерно меняется характерно полупроводниковым веществам. Для этих двух образцов (2 моль% и 3 моль%ErSe) при комнатной температуре электропроводность соответственно равна $\sigma=3{,}1\cdot10^{-3}$ $Ом^{-1}\cdot см^{-1}$ и $\sigma=2{,}85\cdot10^{-3}$ $Ом^{-1}\cdot см^{-1}$, а при 130°С $\sigma=7{,}95\cdot10^{-3}$ $Ом^{-1}\cdot см^{-1}$ и $\sigma=5{,}22\cdot10^{-3}$ $Ом^{-1}\cdot см^{-1}$. На основании графика

температурной зависимости электропроводности расплавов, для соответствующих температурных областей примесной и собственной проводимости, были вычислены энергия активация носителей тока и термическая ширина запрещенной зоны.

Для всех образцов твердого раствора $(SnSe)_{1-x}$-$(ErSe)_x$ (x=0,01; 0,02; 0,03) были исследованы температурные зависимости термо-э.д.с (рис. 3).

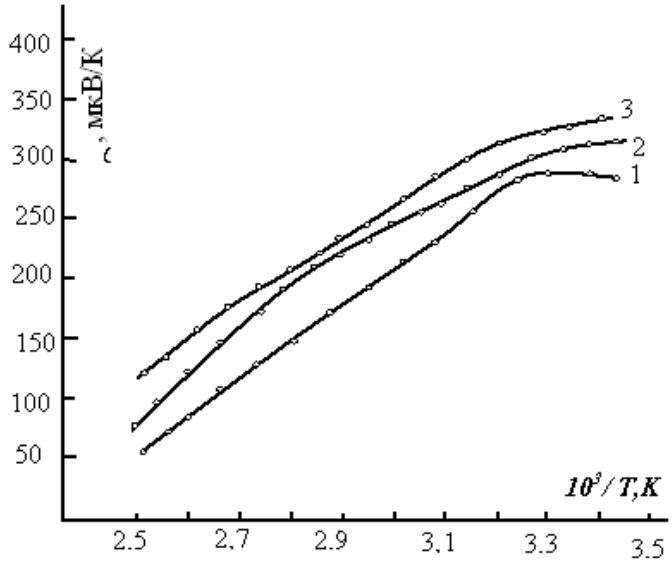


Рисунок 3 - ТермоЭДС сплавов $(SnSe)_{1-x}(ErSe)_x$

Для температурной зависимости термо-э.д.с в интервале температур 20-130°С наблюдается два состояния. Было определено, что с увеличением температуры значение термо-э.д.с уменьшается, а в зависимости от состав увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнов Дж.И., Мургузов М.И., Исмаилов Ш.С., и др. Термоэдс и термомагнитные свойства твердых растворов $Er_xSn_{1-x}Se$ // ФТП, 2017,т.51, с.161.
2. Смоленский Г.А., Боярченков М.А., Лисовский Ф.В., Раев В.К. // Микроэлектроника. 1972. Т. 1. с. 26.
3. Гусейнов Дж.И., Мургузов М.И., Исмаилов Ш.С. Теплопроводность твердыхрастворов$Er_xSn_{1-x}Se$ // «Неорганическиематериалы» Известия АН России, Москва 2008. т.44, № 5, с. 542-544.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОНОКРИСТАЛЛОВ ВИСМУТА МЕТОДОМ СКР

К.И. Аринцына, аспирант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *ksenya.arintcyna@yandex.ru,*
О.И. Марков, д.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *O.I. Markov@mail.ru*

В работе проведено обоснование метода спектроскопии комбинационного рассеяния при исследовании монокристаллов висмута. Приводятся результаты экспериментального исследования спектров комбинационного рассеяния монокристалла висмута в области частот 15-1500 $см^{-1}$ при температуре 295 К. Проведен предварительный анализ полученных результатов.

Ключевые слова: спектроскопия комбинационного рассеяния, монокристалл висмута.

В настоящее время успешно развиваются новые методы исследования кристаллов, в том числе спектроскопия комбинационного рассеяния (СКР). СКР или «рамановская» спектроскопия – раздел оптической спектроскопии, исследующий взаимодействие монохроматического излучения с веществом, связанное с изменением энергии рассеянного излучения в сравнении с энергией падающего на объект излучения. Комбинационное рассеяние вызвано неупругими столкновениями фотонов с атомами, в результате которых они обмениваются энергией. Комбинационное рассеяние света – рассеяние в газах, жидкостях и кристаллах, происходящее с заметным изменением частоты. В отличие от рэлеевского рассеяния света, при комбинационном рассеянии света в спектре рассеянного излучения обнаруживаются спектральные линии, отсутствующие в линейчатом спектре возбуждающего света. Число и расположение появляющихся комбинационных линий обусловлено атомарным строением вещества. Спектроскопия комбинационного рассеяния применяется в различных областях науки и техники как аналитический метод. Спектры комбинационного рассеяния света дают возможность судить о структуре образца, не разрушая изучаемый объект.

Рамановская спектроскопия полупроводниковых материалов и изделий из них позволяет получать данные о фононных частотах, энергиях электронных состояний и электрон−фононных взаимодействиях, концентрации носителей, содержании примесей, кристаллической структуре, ориентации кристалла, температуре, механических напряжениях [1]. Изучение фононных спектров кристаллов позволяет определять структуру материала и химический состав.

Комбинационное рассеяние света в кристаллах обладает некоторыми особенностями. Колебания атомов в кристалле можно отождествить с газом фононов, а КРС в кристаллах рассматривать как рассеяние на фононах. Другие квазичастицы кристалла (поляритоны, магноны и др.) также можно изучать методами КРС.

Исследования проводились на OmegaScope –специально разработанной системе, которая объединяет в себе современные сканирующий зондовый и ра-

мановский микроскопы, предназначенной для исследования свойств поверхности твердых образцов, а также исследования химической структуры и проведения количественного анализа материала не зависимо от его агрегатного состояния.

Принцип работы рамановского спектрометра основан на рассеянии лазерного излучения исследуемым веществом с частотами равными собственным колебаниям атомов кристаллической решетки. Таким образом, возможно однозначно установить химическую структуру образца, сингонию кристалла, наличие дефектов кристаллической решетки, содержание наночастиц, наличие упругих напряжений, а также наличие или отсутствие фазовых переходов.

Висмут, являясь полуметаллом, занимает промежуточное положение между металлами и полупроводниками [2]. Висмут обладает рядом уникальных свойств, что делает его модельным материалом при экспериментальном исследовании фундаментальных проблем физики твердого тела. Уникальные свойства висмута позволили впервые обнаружить новые физические явления (эффекты де Гааза - ван Альфена и Шубникова – де Гааза, циклотронный резонанс и др.), открытие которых привело к созданию самых мощных современных методов исследования зонной структуры металлов и полупроводников. Высокая чувствительность зонных параметров висмута к внешним воздействиям: изменению температуры, давления, магнитного и электрического полей представляет большой практический интерес. Эти свойства висмута позволяют изготавливать из него термоэлектрические преобразователи, болометры, тензометры, датчики Холла, Нернста, усилители звука и т.д. Надежность работы приборов зависит от качества получаемых монокристаллов. Поэтому очень важен контроль качества выращиваемых монокристаллов. Исходя из вышеизложенного, можно выделить три основных направления исследований монокристаллов висмута:

1. Исследование собственных колебаний кристаллической решетки висмута (фононный спектр) на плоскости (111).
2. Исследование колебаний атомов на плоскости (111) вблизи дефектов (точечных дефектов, дислокаций, границ зерен и двойников).
3. Исследование колебаний атомов с разорванными связями на плоскости несовершенной спайности.

В качестве исходного материала использовался висмут марки Ви-0000 (ГОСТ 28-75). Важным показателем чистоты исходного висмута и степени совершенства монокристалла является отношение удельного сопротивления кристалла при Т=300К к его значению при 4.2К. Величина отношения, для используемого висмута, составляла не менее 400-600. При меньших значениях отношения исходный висмут подвергался дополнительной зонной очистке [3]. Обезгаживание висмута проводилось путем нагрева в вакууме 10^{-3} — 10^{-4} мм. рт. ст. при температуре несколько выше температуры плавления в течение 1 часа при непрерывной откачке, с последующей капиллярной очисткой. В качестве контейнеров использовались ампулы из молибденового стекла С-48. Откачка ампул до 10^{-4} мм. рт. ст. проводилась при температуре 200°С в течение суток и их герметизация запаиванием в откачанном состоянии.

Монокристаллы висмута выращивались методом зонной перекристаллизации [3] при проходе зоны со скоростью 1 — 5 мм/ч при ширине расплавленной зоны 20 — 25 мм. Данная методика выращивания была выбрана вследствие сочетания технической простоты и высокого качества монокристаллов. Такая методика выращивания дает более высокий выход монокристаллов. В зависимости от целей монокристаллы Bi выращивались либо в частично заполненных трубках диаметром 20 — 30 мм, либо в полностью заполненных стеклянных трубках диаметром 5 мм.

Необходимая кристаллографическая ориентация слитка задается затравкой. Однако это не гарантирует получение монокристаллического слитка, т.к. вблизи затравки часто возникает несколько блоков, имеющих другую ориентацию, которые прорастают через весь кристалл. Причиной появления дополнительных центров является малый размер затравки. Для предотвращения дефектообразования уже выращенных монокристаллов проводилось стравливание стекла плавиковой кислотой, а для вырезания образцов использовался электроискровой метод. Монокристаллы Bi высокого совершенства методом зонной перекристаллизации от затравки в направлении бинарной или биссекторной осей. Выбор такой ориентации затравки был обусловлен существованием направлений преимущественного роста. Образцы для исследований вырезались из средней части слитков.

Исследования монокристаллов висмута методом комбинационного рассеяния уже проводились [4-6], однако качество исследуемых монокристаллов висмута вызывает сомнение. Не проводилось и исследование дефектов. В связи с этим нами предпринята попытка исследования с помощью метода рамановской спектроскопии. Предварительные измерения спектров комбинационного рассеяния монокристаллов висмута проводились на плоскости скола (111). Наличие острых пиков указывает на правильность выбора метода исследования, однако их интерпретация требует тщательного изучения и создания компьютерных моделей кристаллической решетки. Для расшифровки спектра необходимо сравнение с данными изучения монокристаллов висмута, выполненных другими физическими методами исследования [7] фононного спектра висмута, например, выполненными в работах [8,9]. Энергетический спектр фононов был исследован методом неупругого рассеяния нейтронов в монокристаллах висмута [8,9]. Наиболее полные данные, полученные в работе [8] для висмута при T = 78K, представлены на рис.2. Поскольку фононные спектры заметно не изменяются с температурой в интервале 77−300K [9], можно провести сопоставление с нашими данными. Сравнивая графики, можно предположить, что область 60-200 $см^{-1}$ (рис.1) приходится на область $(1.4\text{-}2.0)\cdot 10^{13}$ $с^{-1}$ оптических фононов монокристалла висмута (рис.2), а пики 69 $см^{-1}$, 96 $см^{-1}$ и 180 $см^{-1}$ относятся к трем оптическим ветвям.

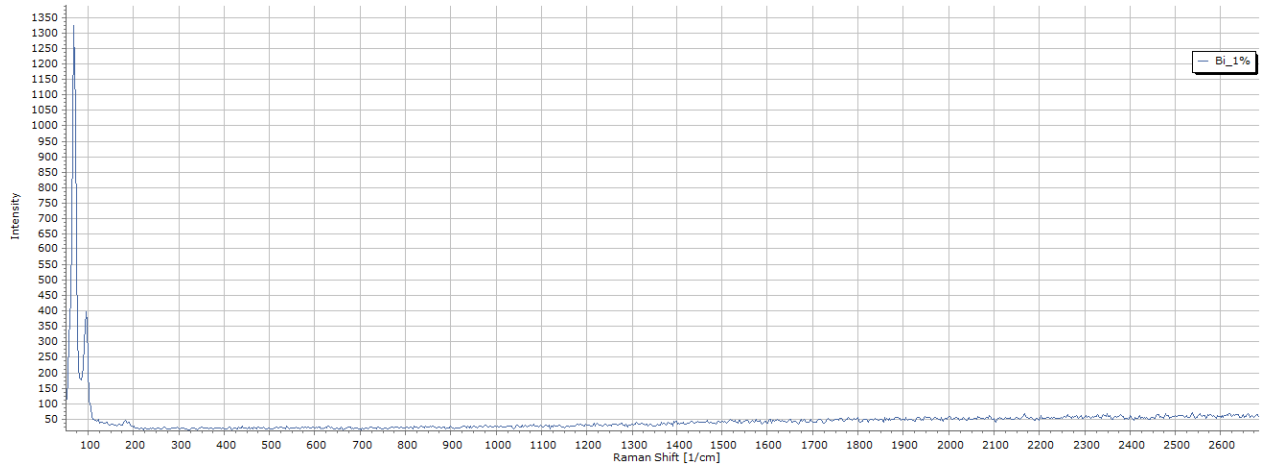


Рисунок 1 – Спектр комбинационного рассеяния для длины волны лазерного излучения 532 нм

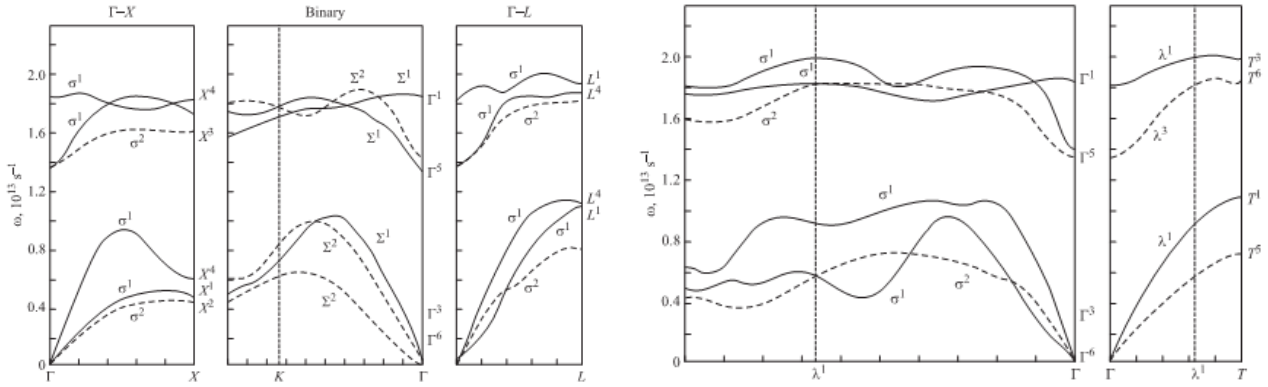


Рисунок 2 – Фононный спектр кристаллов висмута [8]

Авторы выражают благодарность руководителю лаборатории проф. А.П. Кузьменко за предоставленную возможность провести исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьменко А. П., Тимаков Д. И.. Микроспектральное романовское рассеяние на упругих деформациях балки кантилевера//Материалы электронной техники.- 2014.-№ 1(65).- С. 53-57.
2. Фальковский Л.А.. Физические свойства висмута // УФН.-1968.- т.94.- вып.1. - С.3-41.
3. Пфан У.Г. Зонная плавка. М.: Мир, 1970-336с.
4. Olijnyk H., Nakano S., Takemura K. First- and second order Raman scattering in Sb and Bi at high pressure// Phys. status solidi (b). - 2007. - N10,-v.244. - P.3572-3582.
5. Renucci J. B., Richteb W., Cardona M. and Schonheer E. Resonance Raman Scattering in Group Vb Semimetals: As, Sb, and Bi. // Phys. stat. sol. (b). - 1973. - 60. - 299.
6. Jingjing Li. Ultrafast and incoherent raman studies of optical phonons of different symmenhtes in Sb, Bi, Bi_2Te_3 and Bi_2Se_3. A dissertation submitted in partial ful-

fillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Physics) in The University of Michigan. - 2012. - 119 p.
7. Грабов В.М., Комаров В.А., Худякова И.И., Яковлева Т.А. Физика полуметаллов и низкоразмерные структуры на их основе. СПб.: РГПУ им. А.И.Герцена.- 2011.- 293 с.
8. F.E. Macfarlane. Lattice Dynamics of Bismuth. J. Phys. Chem. Sol. 1971.V. 32. Suppl. №1. P. 989-995.
9. Yamell I.L. Phonon Dispersion Curves in Bismuth / I.L. Yarnell, I.L. Warren, R.G. Wenzel, S.H. Koenig // IBM J. Res. Dev. V. 8. - № 3. -1964. - P. 234 - 240.

УДК 539.216.2

СВОЙСТВА ТОНКИХ ПЛЕНОК ОКСИДА АЛЮМИНИЯ

А.С. Атигаев
ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет»
e-mail: *at_amir@bk.ru*

Докладывается о результатах работы по выращиванию тонких пленок оксида алюминия на поверхности алюминиевой подложки, а также по вычислению и измерению основных ее диэлектрических и полупроводниковых свойств.

Выявлена дуалистическая природа диэлектрических и полупроводниковых свойств таких пленок, сделана попытка к ее обоснованию. Разработан и апробирован метод измерения толщины барьеров, основанный на этой двойственности.

Ключевые слова: пленки, оксид алюминия, анодирование, оксидирование, барьерные пленки, тонкие пленки, USPEX, толщина.

1. Введение

Применяемые во многих отраслях промышленности, пленки оксида алюминия в зависимости от их структуры делятся на барьерные, пористые и структурированные иными способами. Последние изучены достаточно хорошо, известны многие способы их получения, и придания им необходимых свойств. Первые же исследованы не так хорошо, тем не менее, находят себе применение в приборостроении.

Прибегая к такому методу оксидирования алюминия как анодирование (электрохимический метод), можно получить барьерные и пористые пленки толщинами от сотых долей до сотен микрон [1]. В этой работе речь идет о тонких (не более 9 мкм толщиной) пленках оксида алюминия, полученных на алюминиевой поверхности методом электрохимического оксидирования в растворе щелочи.

Известно, что в этом случае, как и в случае анодирования в кислотной среде [2], процесс протекает по схеме, иллюстрированной на рисунке 1.

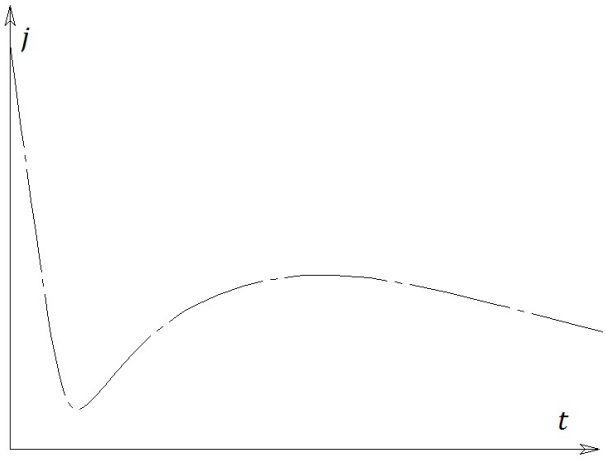


Рисунок 1 – Схематичное изображение хроноамперограммы при анодировании

Ее вид детерминирован следующими процессами: вначале (область резкого падения плотности тока) происходит образование тонкой барьерной пленки, далее (область минимума) в ней образуются трещины, в области возрастания тока происходит образование пористой структуры.

2. Выращивание пленок

По диаграммам, представленным в работе [3] можно судить о том, что для 0.1 М раствора NaOH при напряжении 25 В время анодирования не должно превышать 200 с.

Таким образом, в нашем случае условия анодирования были следующими: постоянное напряжение U_A – 25 В, электролит – 0.1 М раствор NaOH, температура анодирования T_A – 275 К, электролит постоянно перемешивался.

240 алюминиевых электродов, профили которых изображены на рисунке 2, были разделены на 120 пар. Пары случайным образом разбиты на 4 группы, таким образом, в каждой группе оказалось по 30 пар электродов.

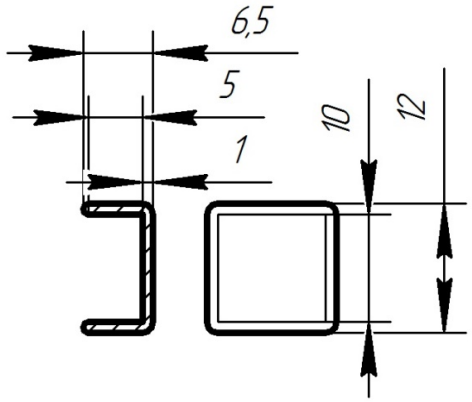


Рисунок 2 – Схематичное изображение электрода

Первая группа оксидировалась 60 с, вторая – 80 с, третья – 100 с, и четвертая – 120 с, группы были названы соответственно t_1, t_2, t_3, t_4. Микрофотография последней изображена на рисунке 3.

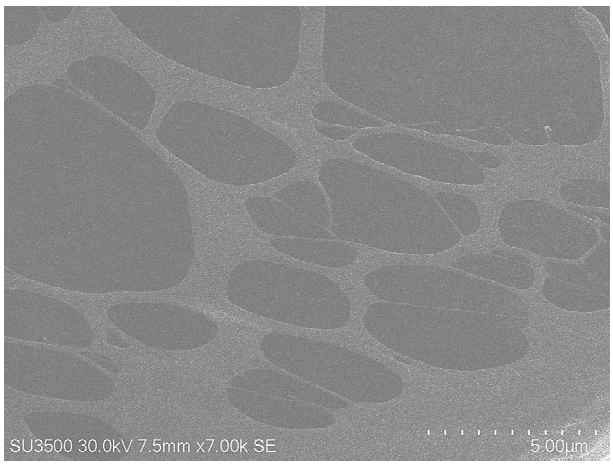


Рисунок 3 – Микрофотография одной из пленок группы t_4

Методом светового сечения [4] была установлена средняя толщина пленок по группам, она же была рассчитана по формуле из [5]:

$$d(t) = 1.133\sqrt{t} + 0.015t + 1.603 \quad (1)$$

Здесь d – толщина в мкм, t – время в мин.

Из работы [6] было заимствовано уравнение для расчета пробивного напряжения:

$$U(d) = 12d + 86 \quad (2)$$

Здесь U – напряжение в В, d – толщина в мкм.

Замечание 1. (2) справедливо для пленок толщиной не более 9 мкм [1].

3. Измерение толщины

По формуле обратной (2) рассчитали толщину пленки по ее пробивному напряжению. Последнее измерили экспериментально с помощью установки собранной по схеме, приведенной на рисунке 4.

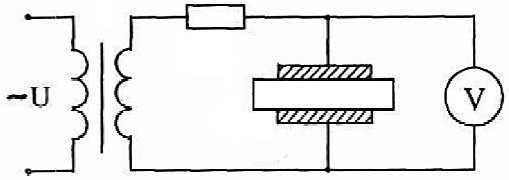


Рисунок 4 – Схема установки для измерения пробивного напряжения

Кроме того провели измерения емкостным методом [7].

Измерения проводили на каждой из пар электродов. Приведем далее сравнительную таблицу 1 результатов измерений (числа усреднены для групп).

Таблица 1 – Результаты измерений толщины разными способами

	d_0, мкм	d_{cc}, мкм	$d_{емк}$, мкм	$d_м$, мкм
t_1	2.751	2.767	2.827	2.809
t_2	2.931	2.949	3.013	2.992
t_3	3.091	3.108	3.004	3.155
t_4	3.235	3.253	3.144	3.302

Здесь d_0 – рассчитанное значение, d_{cc} – полученное методом светового сечения, $d_{емк}$ – полученное емкостным методом, $d_м$ – полученное описанным выше методом. Приведем значения погрешностей в таблице 2.

Таблица 2 – Погрешности иземерний

	d_{cc}	$d_{емк}$	$d_м$
Δ	0.006	0.028	0.021

4. Свойства пленок

Известно, что оксид алюминия проявляет диэлектрические свойства, однако авторы [8] говорят и о возможности проявления им свойства полупроводника n-типа. Подобное заявление косвенно подтверждается проведенным нами экспериментом. Было выявлено, что при напряжениях порядка 10 В пленки ведут себя как диэлектрики, при повышении приложенного напряжения до 100 В проявляют полупроводниковые свойства (при пробивном напряжении порядка 120 В), причем чем тоньше пленка, тем более заметен такой дуализм.

Пользуясь методом USPEX [9, 10, 11] был сделан прогноз о том, что тонкие и сверхтонкие (~1 мкм и менее) пленки оксида алюминия при нормальных температуре и давлении имеют непривычную брутто-формулу AlO_x, которая уже упоминалась в работе [12].

Мы выдвигаем гипотезу о том, что проявляющаяся двойственность в диэлектрических/полупроводниковых свойствах объясняется, в том числе и особенностями строения поверхности тонких пленок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атигаев А. С. Барьерные пленки оксида алюминия как диэлектрики// Международный студенческий научный вестник. – 2018. – № 2.;
URL: http://eduherald.ru/ru/article/view?id=18278 (дата обращения: 03.10.2018).
2. Вихарев А. В. Характеристика некоторых функциональных свойств анодных оксидов алюминия / А. В. Вихарев, А. А. Вихарев // Ползуновский Вестник. – 2008. – № 3. – С. 248–250.
3. Филяк М. М., Каныгина О. Н. Особенности формирования анодного оксида алюминия в щелочных электролитах // Вестник Оренбургского государственного университета. - 2013. - №1. - С. 154-159.
4. ГОСТ 9.031-74. Единая система защиты от коррозии и старения. Покрытия анодно – оксидные полуфабрикатов из алюминия и его сплавов. Общие требования и методы контроля. – Введ. 1975 – 07 – 01. – М.: Изд-во стандартов, 1989. – 14 с.
5. Филяк М. М., Каныгина О. Н. Электрофизические свойства анодного оксида алюминия // Вестник Оренбургского государственного университета. - 2013. - №9. - С. 240-244.
6. Филяк М. М., Каныгина О. Н. Диэлектрические свойства анодного оксида алюминия из растворов гидроксида натрия // Вестник Оренбургского государственного университета. - 2015. - №1. - С. 245-249.

7. А. С. 163498 СССР, МКИ[3] G 01 B 7/06. Емкостной способ измерения толщины покрытий на проводящем основании / Е. В. Королева, В. И. Овчаренко, Р. А. Мачевская, А. Н. Федорова, Е. С. Уткина, В. П. Ступин (СССР). – № 4642506/28; заявл. 22.12.88; опубл. 15.03.91, Бюл. № 10. – 2 с.
8. Jaakko Akola, Shinji Kohara, Koji Ohara, etc. (2013). Network topology for the formation of solvated electrons in binary CaO–Al2O3 composition glasses. Proceedings of the National Academy of Sciences № 25, vol. 110, 10129-10134. DOI: https://doi.org/10.1073/pnas.1300908110
9. Oganov A.R., Glass C.W. (2006). Crystal structure prediction using ab initio evolutionary techniques: principles and applications. J. Chem. Phys. 124, art. 244704;
10. Oganov A.R., Lyakhov A.O., Valle M. (2011). How evolutionary crystal structure prediction works - and why. Acc. Chem. Res. 44, 227-237;
11. Lyakhov A.O., Oganov A.R., Stokes H.T., Zhu Q. (2013). New developments in evolutionary structure prediction algorithm USPEX. Comp. Phys. Comm. 184, 1172-1182.
12. Rippard W. H., Perrella A. C., Albert F. J., Buhrman R. A. (2002). Ultrathin Aluminum Oxide Tunnel Barriers. Physical Review Letters. 88-4, 046805-1 - 046805-4.

УДК.546.682′23′+682′86′22′23

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЛАВОВ СИСТЕМЫ *PbTe-Gd_2Te_3*

В.К. Валиев, к.х.н., доц.
Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности
e-mail: *cih_58@mail.ru*
И.И. Аббасов, к.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности
e-mail: *ibrahimabbasov179@gmail.com*
Дж.И. Гусейнов, д.ф.н., доц.
Азербайджанский государственный педагогический университет
e-mail: *cahangir.adpu@mail.ru*
Х.А. Адгезалова, к.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский государственный педагогический университет
e-mail: *xatirafizik@mail.ru*

Комплексными методами физико-химического анализа: дифференциально-термического(ДТА), рентгенофазового (РФА), микроструктурного (МСА) анализов, а также измерением микротвердости и плотности изучен характер взаимодействия в системеPbTe-Gd_2Te_3 и построена диаграмма состояния. Изучены температурная зависимость электропроводности и термо-э.д.с. сплавов системы. Установлено, что при введение Gd_2Te_3 в состав PbTe образуются твердые растворы и изменяются некоторые физико-химические свойства. В системе образуется тройные соединения состава $Gd_2Pb_4Te_7$ и Gd_2PbTe_4 .

Ключевые слова: твердые растворы, микроструктура, дифрактограмма, физико-химический анализ, диаграмма состояния, электропроводность, термо-ЭДС.

1. Введение

Исследования сложных полупроводников значительно расширили семейства полупроводниковых материалов. В связи с этим в ряде научных учреждений осуществляются поисковые исследования по синтезу и изучению физико-химических свойств тройных полупроводниковых соединений. В литературе [1-3] показано, что халькогениды олова и твердые растворы на их основе используются как материалы для *p*-ветви термоэлектрических охладителей.

Халькогениды редкоземельных элементов и элементов IVB подгруппы, а также многокомпонентные фазы на их основе относятся к перспективным веществам для разработки термоэлектрических материалов. Среди них халькогениды олова и РЗЭ обладают своеобразными термоэлектрическими и гальваномагнитными свойствами [4, 5]. Диаграмма состояния системы РЗЭ резко отличается по характеру плавления соединений, количеству фаз, ширине области гомогенности и полиморфизму.

Исследования возможностей применения редкоземельных элементов для легирования термоэлектрических материалов в получении высокоэффективных

термоэлектрических преобразователей дает возможность расширить рабочие диапазоны в сторону высоких температур [6]. Это особенности могут быть предпосылкой высокой термоэлектрической добротности системы сплав *PbTe-Gd_2Te_3*.

2. Методика эксперимента

С целью изучения взаимодействия между *PbTe*и Gd_2Te_3 синтезировали 24 образца из элементов. В качестве исходных элементарных веществ использовали свинец марки СВ-000, теллур с чистотой 99,999%, гадолиний содержащие не более 0,15% примесей. Исходные компоненты системы синтезировали из элементов высокой степени чистоты в вакуумированых до 0,133 Па кварцевых ампулах с применением вибрационного перемешивания. Сплавы нагревали до 1175 К, выдержали при этой температуре 4 ч, затем поднимали температуры до 1475 К с последующей выдержкой в течение 4 ч и медленно охлождали до двух часовой выдержкой при 1125 и 1025 К. Для достижения равновесия в системе *PbTe-Gd_2Te_3* все образцы были поставлены на гомогенизирующий отжиг в течение 500 ч при 875-925 К.

Взаимодействие в системе *SnSe-ErSe* изучали методами дифференциального-термического (ДТА), рентгенофазового (РФА), микроструктурного (МСА) анализов , а также измерением микротвердости, определением плотности и их основание была построена их диаграмма состояния.

Электропроводность и коэффициент Холла измеряли при постоянном токе и постоянном магнитном поле электромагнита [7]. Термоэдс измеряли стационарным методом по методике изложенной в [8].

3. Полученные результаты и их обсуждения

Микроструктурным анализом установлено, что в системе *PbTe-Gd_2Te_3* сплавы состава от 0 до 5 мол % Gd_2Te_3имеют структуру характерную для твердых растворов. При соотношение компонентов 4:1 и 1:1 образуются тройные соединения состава $Gd_2Pb_4Te_7$ и Gd_2PbTe_4 соответсвенно, что хорошо согласуются с ДТА. Gd_2PbTe_4 плавится конгруэнтно при 1375 К, а $Gd_2Pb_4Te_7$ образуется по следуюшей перитектической реакции при 1175 К

$$Gd_2PbTe_4 + ж \leftrightarrow Gd_2Pb_4Te_7$$

Всплавах с содержанием 0-5 мол % Gd_2Te_3 значение микротвердости монотонно увеличивается от $40 \cdot 10^7$ до $70 \cdot 10^7$ $^{Н}/_{м^2}$. Значение плотности сплавов лежат в пределах значения для бинарных компонентов. Межплоскостные растояния и интенсивность линий на рентгенограммах совпадает с межплоскостными растояниями и интенсивностями линий *PbTe.* В рентгенограммах в интервале 0-5 моль % не наблюдаются сдвиги дифракционных линий, и только изменение их интенсивности в указанном интервале свидетельствует о том, что произошло образование твердых растворов на основе *PbTe*. Наблюдаемый рост решеточных параметров, хорошее согласование частичного замещения атомов *Pb* атомами *Gd* большего радиуса и соблюдение закона Вегарда позволяет говорить об образовании твердых растворов замещения на основе *PbTe*. Это по-

тверждается данными ДТА об образовании в системе $PbTe$-Gd_2Te_3 твердых растворов на основе $PbTe$. Значения плотности сплавов лежат в пределах значения для бинарных компонентов.

На основе результатаов комплексного исследования ДТА, МСА, РФА, измерения микротвердости и плотности была построена диаграмма состояния системы $PbTe$-Gd_2Te_3 (рис. 1). Как видно из рис. 1 разрез $PbTe$-Gd_2Te_3 является квазибинарным сечением тройной системы Gd-Pb-Te. Диаграмная состояния системы $PbTe$-Gd_2Te_3 составлена из двух сравнительно простых диаграм, первая из них диаграмная состояния $PbTe$-Gd_2PbTe_4 компоненты образуят ограниченные твердые растворы на основе $PbTe$ и перитетическое соединение, во второй Gd_2PbTe_4-Gd_2Te_3 которые яавляется эвтетикой.

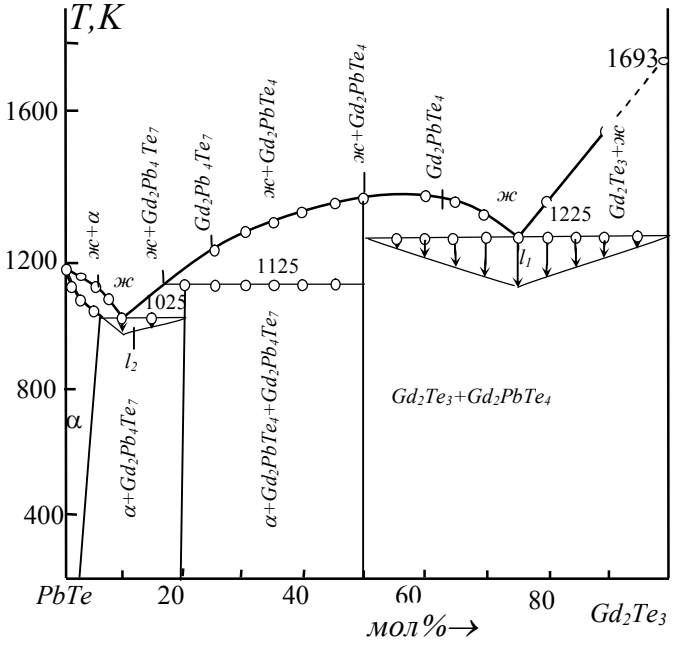


Рисунок 1 – Диаграмма состояния система$PbTe$-Gd_2Te_3

Таблица 1 – Результаты ДТА, измерения микротвердости и плотности системы $PbTe$-Gd_2Te_3

Состав, мол %		Термические эффекты нагревания, К		Микротвердость, 10^7 Н/м^2				Плотность,10^3 г/м^3	
PbTe	Gd_2Te_3			I фаза	II фаза	III фаза	IV фаза	Экспер	Рентген
100	-		1190	40				8,20	8,22
99	1	1155	1180	43				8,18	8,11
98	2	1145	1170	48				8,11	8,16
97	3	1115	1165	53				8,13	8,20
96	4	1050	1150	59				8,16	8,19
95	5	1025	1135	65				8,12	8,01
94	6	1025	1110	79				8,15	8,13
90	10	1025	1055	эвт	эвт			8,17	
85	15	1025	1125	эвт	эвт	эвт		8,14	
80	20	1125	1225		187			8,15	8,13
75	25	1180	1335		188	246		8,08	
70	30	1125	1280		190	248		7,99	
65	35	1125	1310		192	248		7,95	
60	40	1125	1340		195	250		7,91	
55	45		1350		198	250		7,83	
50	50		1375			250		7,86	7,89
45	55	1225	1350			250	эвт	7,73	
40	60	1225	1325			250	эвт	7,65	
35	65	1225	1300			255	эвт	7,43	
30	70	1225	1270			260	эвт	7,54	
25	75	1225				эвт	эвт	7,39	
20	80	1225				эвт	306	7,51	
15	85	1225	1350			эвт	307	7,42	

10	90	1225				эвт	308	7,35	
5	95	1225					308	7,46	
-	100	1165					310		7,42

В составе сплавов системы $(PbTe)_{1-x}(Gd_2Te_3)_x$ на микрорисунках всех образцов, где содержание Gd_2Te_3 не более 5 моль %, ясно наблюдается однородность и не отличается от микроструктуры *PbTe.* На микрошлифах образцов с соответствующим составом 6 и 10 моль % хоть и в малом количестве наблюдается вторая неосновная фаза. Исследование зависимости микротвердости от плотности состава, также выявленного рентгенографическим и пикнометрическим методами, показывает, что область растворения *PbTe* в Gd_2Te_3 при комнатной температуре ограничивается 5 мол%.

На термограммах системы сплавов $(PbTe)_{1-x}(Gd_2Te_3)_x$ кроме теплового эффекта, соответствующего плавлению, не наблюдаются другие тепловые эффекты. На кривых нагрева и охлаждения получаются острые пики, соответствующие плавлению и затвердеванию. Это позволяет утверждать, что в процессе этого синтеза образуются конгруэнтно плавящиеся сплавы. В бинарном соединении *SnS* частичная замена атомов *Pb* на атомы *Gd* способствует снижению температуры плавления. При частичной замене атомов *Pb* на атомы *Gd,* снижение температуры плавления исследуемых сплавов в бинарном соединении *PbTe*, показывает, что РЗМ в этих кристаллах выступают в роли смягчителей.

Для твердых растворов системы $PbTe\text{-}Gd_2Te_3$ изучены температурные зависимости электропроводности и термо-э.д.с в области температур 300-850 К. На рис. 2 и 3. приведены температурные зависимости электропроводности и коэффициента термо-э.д.с.. Исследование температурной зависимости электропроводности проводили на образцах 1, 3, 5 мол % Gd_2Te_3. Как видно из рис. 2 электропроводность при 300 К с увеличением содержания Gd_2Te_3 в теллуриде свинца до 1 мол % Gd_2Te_3 увеличивается, а с дальнейшем увеличение Gd_2Te_3 в составе электропроводность уменьшается.

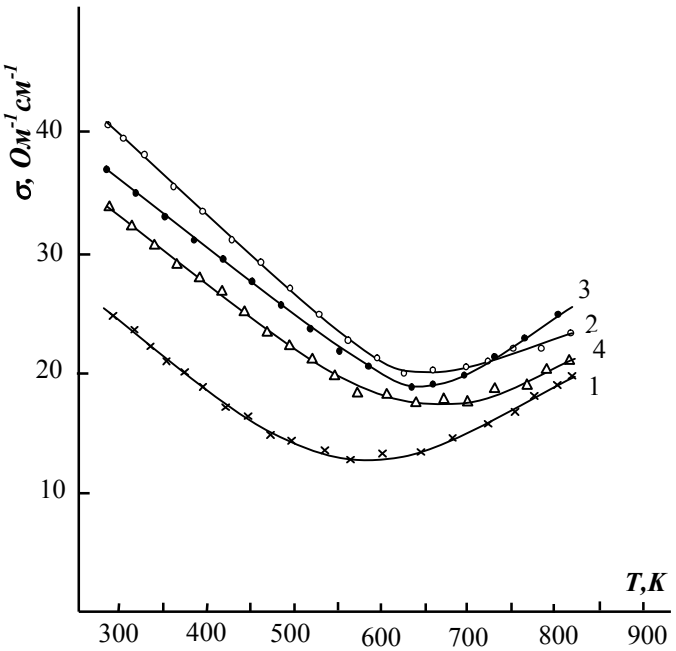


Рисунок 2 – Температурная зависмость электропровности твердых растворов $(PbTe)_{1-x}(Gd_2Te_3)_x$: 1-PbTe; 2-1%Gd_2Te_3; 3-3%Gd_2Te_3;4-5%Gd_2Te_3

В сплавах $PbTe\text{-}Gd_2Te_3$, где содержание второго компонента меньше 1 мол % происходит интенсивный процесс заполнения дефектных мест присущего *PbTe* и предполагается увеличение подвижности и снижение концентрации носителей заряда. При повышение содержания Gd_2Te_3 на процесс заполнения вакансий накладывается процесс создания новых дефектов, присущих самому твердому раствору. Во второй области, где содержание второго компонента более 1 мол% процесс

создания новых дефектов преобладает над процессом заполнения вакантных мест по свинцу, что и обеспечивает увеличение концентрации носителей.

При низких температурах (от комнатной до 600-700 К) значение электропроводности у всех исследуемых образцов твердого раствора уменьшается, т.е. обладают металлический характером проводимости, а с дальнейшим ростом температур обладает полупроводниковый характер и сохраняется специфика, присущая *PbTe.* В области температур 650-750 К электропроводность достигает своего наименьшего значения. С дальнейшим ростом температуры электропроводность растет и переходить в область собственной проводимости.

До температуры Т=500 К термоЭДС растет почти линейно (рис.3) и хорошо согласуется с теоретическими значениями рассчитанными по формулам для вырожденных полупроводников в случае зоны с одним носителем. С повышением температуры в области собственной проводимости коэффициент термоЭДС снижается. Этот тип зависимости обнаружен в базовом соединении *PbTe,* а также в его структурных аналогах. Причиной этому служит сложный характер зонной структуры этих соединений, состояние валентной зоны из двух нижних зон и объясняется существованием легких и тяжелых дырок соответственно.

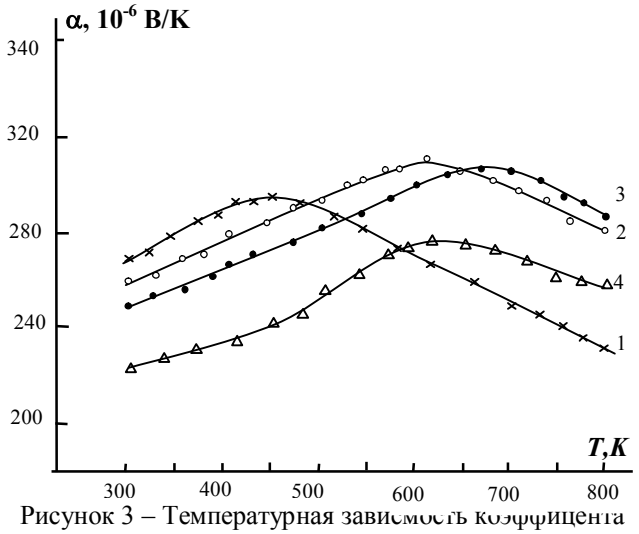


Рисунок 3 – Температурная зависимость коэффициента термо.э.д.с твердых растворов $(PbTe)_{1-x}(Gd_2Te_3)x$
1-PbTe; 2-1%Gd_2Te_3; 3-3%Gd_2Te_3;4-5%Gd_2Te_3

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрикосов Х.Х., Шелимова Л.Е.. Полупроводниковые материалы на основе соединений $A^{IV}B^{VI}$. Наука, М. (1975) 210 с.
2. Прокофьева Л.В., Равич Ю.И., Пшенай-Северин Д.А., Константинов П.П., Шабалдин А.А. ФТП **44,** 742 (2010).
3. Равич Ю.И., Немов С.А. ФТП **36,** 3 (2002).
4. Алиев Ф.Ф., Гасанов Г.А. // ФТП. 2012. Т. 46. № 3. С. 313.
5. Гусейнов Дж.И., Мургузов М.И., Исмаилов Ш.С., и др. ФТП, 2017,т.51, с.161.
6. Larson P., Mahanti S. D., Sportouch S., Kanatzidis M. // Phys Rev B, 1999. Vol. 59. No. 24. P. 15660.
7. Смоленский Г.А., Боярченков М.А., Лисовский Ф.В., Раев В.К. // Микроэлектроника. 1972. Т. 1. с. 26.
8. Равич Ю.И., Ефимова Б.А., Смирнов И.А.. Методы исследования полупроводников в применении к халькогенидам свинца PbTe, PbSe, PbS. Наука, М. (1968).

УДК 538.91,93

МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЕ СПЛАВОВ СИСТЕМЫ $Gd_xSn_{1-x}Se$

Дж.И. Гусейнов, д.ф.н., доц.
Азербайджанский государственный педагогический университет
e-mail: *cahangir.adpu@mail.ru*
Р.Ф. Мамедова, к.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский государственный педагогический университет
e-mail: *cih_58@mail.ru*
О.М. Гасанов, к.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский государственный педагогический университет
e-mail: *1959oktay@mail.ru*
Д.Дж. Аскеров, к.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности
e-mail: *ibrahimabbasov179@gmail.com*

Были получены квазибинарные соединения (SnSe)-(GdSe) образцов сложного состава в области твердого раствора, рассмотрены их гальваномагнитные свойства и исследованы в широком температурном интервале зависимости магнитного сопротивления температуры и напряженности магнитного поля. Были показаны изменение механизма рассеивания носителей заряда с изменением знака магнитного сопротивления при данной температуре, получения его большого значения и наличении в составе носителей заряда второго рода.

Ключевые слова: твердые растворы, носители заряда, галваномагнитные свойства, электропроводность, коэффициент Холла, магнитосопротивление, механизмы рассеяния, точка инверсия, зонная структура, «легкие» и «тяжелые» электроны.

1. Введение

Полупроводниковые соединения типа $A^{IV}B^{VI}$ и сплавы, полученные на их основе, считаются перспективными материалами для применения в различных областях электроники или уже применяются в источниках инфракрасного излучения и детекторах, термоэлектрических элементах, солнечных батареях, элементах памяти и др. Фундаментальные характеристики этих соединений - малая ширина запрещенной зоны, большая диэлектрическая проницаемость, относительно высокая радиационная стойкость, преобладание ионной связи еще более расширяют возможности их применения [1]. Легирование их примесями, создающими квазилокальные уровни, расширяет возможности их практического применения. Соответствующие исследования представляют особое значение в фундаментальной физике, а так же с точки зрения их применения.

Вещества, полученные с участием редкоземельных металлов (РЗМ) широко используются при изготовлении некоторых преобразователей электрической энергии, различного рода терморезисторов, стойких к радиации, давлению и влажности. При неполном заполнении электронной структуры РЗМ уровня *4f,* происходит легкий переход к *4f-5d-6s*, и создание переменной валентности за

счет подвижных электронов атомов уровня *4f* делает материалы, полученные с их участием интересным объектом исследования. С этой точки зрения, возможность получения новых перспективных материалов с требуемыми физическими свойствами на основе сплавов и соединений с участием РЗМ, делает их исследование особенно важным [2, 3].

Селенид олова является базовым материалом для создания активных элементов, которые работают в инфракрасной области оптического спектра, а также в термодинамических преобразователях [4, 5]. Установлено существование вакансий в обеих подрешетках, взаимодействие которых приводит к образованию антиструктурных дефектов. Высокая концентрация этих дефектов $\sim 10^{17} см^{-3}$ обусловливает положительный тип проводимости в *SnSe*. Введение халькогенидов редкоземельных металлов (РЗМ) приводит к возникновению ряда физических особенностей в селениде олова, что обусловлено сложной природой дефектообразования и взаимодействием дефектов [6]. Поэтому изучение взаимодействия между халькогенидами*SnSe* и *GdSe*, а также комплексное исследование галваномагнитые свостов образуемых твердых растворах представляет научный и практический интерес.

2. Методика эксперимента

Для синтеза сплавов системы *SnSe-GdSe* использовались начальные компоненты олова макри ”В4-000”, селен марки “ОС417-4” и химически чистый прозедиум (99,98 %). Синтез проводили в откаченных кварцевых ампулах, при давлении 0,1333 Па, методом непосредственного расплава компонентов в два этапа. На первоначальном этапе ампула вместе с веществом было нагрето до температуры плавления селена со скоростью 4-5 град/минута и выдерживалась при этой температуре 3-4 часа, затем температуру постепенно повышали в зависимости от состава до 950-1000 ^{0}C, и выдерживали 8-9 часов. Полученные образцы были помещены для гомогенного отжига при 580^{0}C на 120 часов.

Были исследованы в широком температурном интервале гальваномагнитные свойства образцов разного состава полученные в области твердых растворов квазибинарного соединения $(SnSe)_{1-x}$ -$(GdSe)_x$, и провели анализ общей закономерности. Было измерено в температурном интервале 300÷650K удельная электропроводность (σ), коэффициент Холла (R) и относительное магнитное сопротивление ($\Delta\rho/\rho$) в постоянном магнитном поле в режиме постоянного тока [7]. Погрешность эксперимента не привышало 4,2%.

3. Результаты и их обсуждения

Из анализа рентгеноструктурных данных следует, что при введении селенида эрбия наблюдается увеличение параметров элементарной ячейки *SnSe* по мере возрастания концентрации *Gd,* а также интенсивное рассеяние носителей «искажениями» решетки совпадающее с исследованиями теплопроводности сплавов [8]. С увеличением содержания *Gd* в сплаве плотность $Gd_xSn_{1-x}Se$ существенно не изменяется. Это подтверждает то, что введенные нами атомы*Gd* в сплав $Gd_xSn_{1-x}Se$ в первую очередь занимают междоузельное вакантное место в

кристалле, т.е. дефектообразование происходит по Френкелю [9]. С увеличением в малых концентрациях количества *Gd* в системе сплавов $Gd_xSn_{1-x}Se$ уменьшается удельная электропроводность, а при $x>0.01$ наблюдается рост электропроводности. При концентрациях *Gd* $0\leq x\leq 0.01$ заполнение вакансий олова и изменение халькогенных антиструктурных дефектов приводит к уменьшению значений концентрации носителей заряда и удельной электропроводности. Можно сказать, что при последующем росте количества *GdSe* не происходит создания антиструктурных дефектов. Очень вероятно, что частичный рост удельной электропроводности, связан с появлением второго рода носителей заряда в результате воздействия донорных атомов *Gd*.

На рисунке 1 дана температурная зависимость магнитосопротивления системы расплава $Gd_xSn_{1-x}Se$ ($x=0;\ 0.005,\ 0.01$). Как видно из графика во всех исследуемых образцах наблюдается магнитное сопротивление и при температуре T=300K $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ имеет максимальное значение. С увеличением температуры, за счет возникновения носителей заряда второго рода, то есть не основных носителей заряда, и их изменения в магнитном поле, служит причиной различного увеличения магнитного сопротивления.

Магнитное сопротивление в бинарном соединении SnSe при комнатной температуре составляет 3 %. С увеличением температуры абсолютное значение магнитного сопротивления уменьшается и после 420 K совешив инверсию меняет знак с положительного на отрицательный (рисунок 1, кривая 1).С увеличением в составе количества элемента *Gd* абсолютное значение магнитного сопротивления ($\frac{\Delta\rho}{\rho}$) увеличиватся, однако их температурная зависимость изменяется схоже с бинарным соединением.

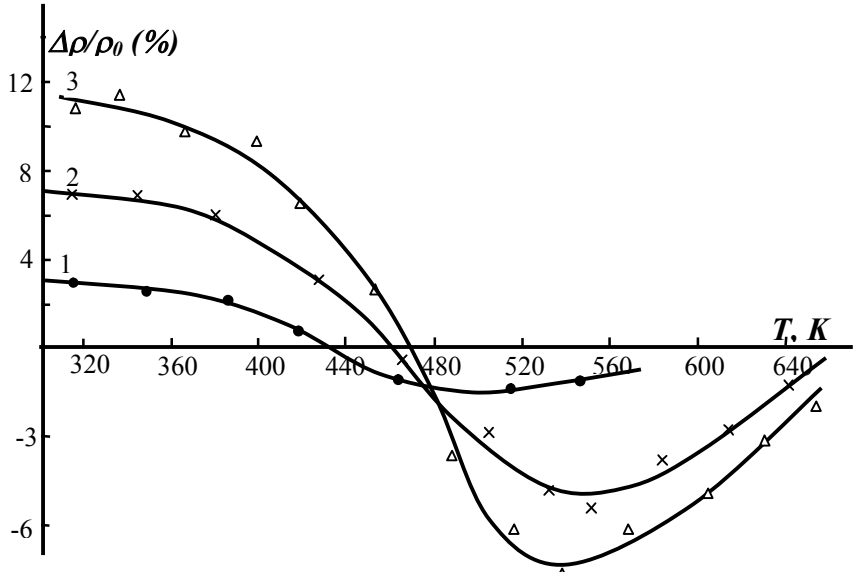


Рисунок 1 - Температурная зависимость изменения относительного магнитосопротивления твердого раствора системы $Gd_xSn_{1-x}Se$.1)x=0.0; 2)x=0.005; 3)x=0.01

Точка инверсии в твердых растворах *SnSe* с элементом *Gd* смещатся в область более высокой температуры: для образцов состава x=0.005 точка инверсии происходит при температуре T=460K; а для образцов состава x=0.01 при температуре T=470K. В результате, за счет активизации носителей заряда второго рода, создаваемое ими магнитное сопротивление имеет большое значение.

При дальнейшем увеличении температуры знак $(\frac{\Delta\rho}{\rho})$ отрицательный и в интервале температур T=530-560K, пройдя через максимум, уменьшается.

Изменение знака магнитного сопротивления в данном температурном интервале, так же показывает изменение механизма рассеивания носителей заряда. Большое абсолютное значение $(\frac{\Delta\rho}{\rho})$ показывает наличие в составе носителей заряда второго рода [10].

Таким образом, было определено, что в изменении механизма рассеивания носителей заряда так же участвуют носители второго рода данного состава. Была исследована зависимость магнитного сопротивления от напряженности магнитного поля (H) около данной точки инверсии при температуре T=420K (рисунок 2).

Дана зависимость магнитосопротивления от напряженности магнитного поля в координатах $(\frac{\Delta\rho}{\rho}) = f(\mathrm{H})^2$. Из рисунка видно, что магнитное сопротивление $(\frac{\Delta\rho}{\rho})$ от напряженности магнитного поля изменяется не линейно. Это объясняется затратой дополнительной энергии на направление спинового упорядечевания «легких» и «тяжелых» электронов.

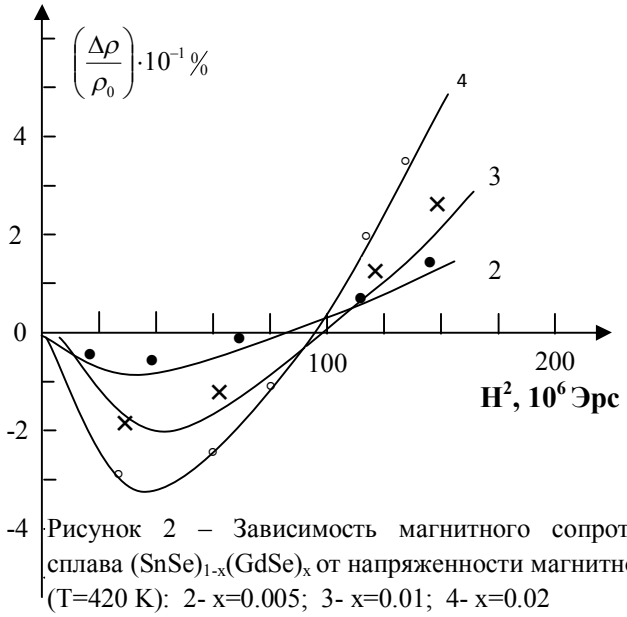


Рисунок 2 – Зависимость магнитного сопротивления сплава $(SnSe)_{1-x}(GdSe)_x$ от напряженности магнитного поля (T=420 K): 2- x=0.005; 3- x=0.01; 4- x=0.02

Исследование зависимости магнитного сопротивления от напряженности магнитного поля показывает, что при малых значениях напряженности магнитного поля в направлении поля H затрачивается энергия на направление спинового упорядечевания как свободных, так и локализованных микроцентров. За счет увеличением напряженности магнитного поля и спина увеличивается количество общенных электронов, и затем при определенном значении H магнитное сопротивление увеличивается линейно [11].

При относительно большом значении поля, с увеличением H увеличение количества общенных электронов по спину наблюдается линейная зависимость $(\frac{\Delta\rho}{\rho}) = f(\mathrm{H})^2$. Здесь есть вероятность перехода частично локализованных микроферромагнитных центров в парамагнитные.

Из анализа литературного материала было определено, что если в данных образцах наблюдается магнитное сопротивление и их изменение, то такие вещества обладают сложной строением энергетической зоной. Вообщем, наблюдение в произвольном составе магнитного сопротивления и его большого значения показывает, как сложное строение энергетической зоны вещества, так и наличие носителей заряда второго рода. За счет активизации носителей

заряда второго рода наблюдается возникновение большого значения магнитного сопротивления в образцах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bletskan D. I. Material synthesis and growth of the single crystals of the type $A^{IV}B^{VI}$ and $A^{IV}B_2^{IV}$// Chalcogenide Letters Vol. 4, No. 1, 2007, p. 1-16.
2. Физические свойства халькогенидов редкоземельных элементов. – под ред. В.П. Жузе. Изд. «Наука», Л. 1973, с. 303.
3. Ярембаш Е.И., Елисеев А.А. Халькогениды редкоземельных элементов. Изд. «Наука», М., 1975.
4. Nariya B., Dasadia A., Jani A. Crowtn of tin monosulphide and tin monoselenide single crystals, LAP, Saarbrücken, Deutschland/Germany 2013
5. Makinistian L., Albanesi E.A. On the band gap location and core spectra of orthorhombic IV–VI compounds SnS and SnSe // Physica status solidi (b) 2009, Volume 246, Issue 1, pages 183–191.
6. Sassi S., Candolfi C.,VaneyJ.,et. al. Assessment of the thermoelectric performance of polycrystalline p-type SnSe//Applied Physics Letters. (2014)104, 212105.
7. Смоленский Г.А., Боярченков М.А., Лисовский Ф.В., Раев В.К. // Микроэлектроника. 1972. Т. 1. с. 26.
8. Гусейнов Дж. И., Мургузов М.И., Исмаилов Ш.С. Теплопроводность твердых растворов $Er_xSn_{1-x}Se$ // «Неорганические материалы» Известия АН России, Москва 2008. т.44, № 5, с. 542-544.
9. Ормонт Б.Ф. Введение в физическую химию и кристаллохимию полупроводников, М., Высшая школа, 1982 .
10. Кучис Е.В. Галваномагнитные эффекты и методы их исследования. М.изд. Радио и связъ.1990.с.263.
11. Гусейнов Дж.И., Мургузов М.И., Исмаилов Ш.С., Годжаев Э.М. О магнитосопротивлении в системе сплавов $(SnSe)_{1-x}(DySe)_x$ // IX международной конференции «Аморфные и микрокристаллические полупроводники», С.Петербург, 2014, s. 187.

УДК 53.086+ 544.77.051

ИССЛЕДОВАНИЕ НАНОЧАСТИЦ МАГНЕТИТА СИНТЕЗИРОВАННЫХ МЕТОДОМ СООСАЖДЕНИЯ

Л.Х. Комиссарова, к.х.н., с.н.с.
ФГБУН Институт биохимической физики им. Н.М. Эмануэля РАН
e-mail:*komissarova-lkh@mail.ru*
Н.А. Марнаутов, аспирант, м.н.с.
ФГБУН Институт биохимической физики им. Н.М. Эмануэля РАН
e-mail:*norron@mail.ru*

С использованием методов просвечивающей электронной микроскопии и магнитометрии охарактеризованы наночастицы магнетита, полученные методом соосаждения солей железа водным раствором щелочи.

Ключевые слова: наночастицы магнетита, просвечивающая электронная микроскопия, метод соосаждения.

Среди множества различных наноматериалов, разработанных на данный момент, значительный интерес представляют магнитные наночастицы. Наночастицы обладающие ферромагнитными и суперпарамагнитными свойствами могут использоваться для диагностики и лечения различных заболеваний, целенаправленной доставки лекарственных средств, а также при создании различных устройств, в том числе, для записи информации [1, 2, 3]. Магнитоуправляемые наночастицы могут быть получены различными методами синтеза, среди которых наиболее распространенными являются метод соосаждения, микроэмульсионный метод [4, 5], метод высокотемпературного разложения органических солей железа, а также полиольный метод [6]. Метод высокотемпературного разложения органических солей железа в высококипящем растворителе позволяет получать достаточно однородные наночастицы, обладающие высокой намагниченностью, однако требует высоких температур и использования органического растворителя, к тому же наночастицы получаемые данным методом проявляют гидрофобные свойства и требуют дополнительной модификации поверхности. Микроэмульсионный метод позволяет синтезировать монодисперсные наночастицы, способные образовывать стабильные гидрозоли, однако технологически сложен и дает сравнительно малый выход наночастиц при значительных расходах органического растворителя [7]. Наиболее оптимальным методом с точки зрения безопасности окружающей среды, а также простоты масштабирования является метод соосаждения, позволяющий синтезировать значительные количества магнитных наночастиц без применения органических растворителей и высоких температур [8]. Главным недостатком метода соосаждения является высокая полидисперсность получаемых наночастиц, а также сравнительно низкая кристалличность и как следствие, низкая намагниченность. В данной работе были синтезированы наночастицы магнетита по методу соосаждения с различными модификациями и исследованы их магнитные свойства.

Синтез наночастиц осуществляли по методу соосаждения двухвалентной соли железа и трехвалентной соли железа в мольном соотношении 1:2 водным раствором аммиака.

$Fe^{2+} + 2Fe^{3+} + 8OH^- = Fe_3O_4 + 4H_2O$

В первой серии опытов реакцию проводили при комнатной температуре в течение 12 минут, для этого хлорид железа (II) и хлорид железа (III) растворяли в дистиллированной воде, а затем при постоянном перемешивании добавляли водный раствор аммиака.

Вторую серию опытов проводили в инертной атмосфере, при повышенной температуре (70°C) и увеличенном времени реакции (30 минут), соосаждение солей железа также осуществляли водным раствором аммиака, при постоянном перемешивании. Полученные наночастицы осаждали на неодимовом магните индукцией 300 мТл и многократно промывали дистиллированной водой до достижения нейтральных значений pH. Затем очищенные наночастицы магнетита ресуспендировали в дистиллированной воде, отбирали аликвоту суспензии объемом 6 мкл и наносили на медную решетку с формваровой пленкой-подложкой, сушили под вакуумом при комнатной температуре и анализировали полученный образец с помощью электронно-просвечивающей микроскопии (LEO-912 AB (Zeiss, Германия)) .

На рисунке 1 представлены микрофотографии наночастиц синтезированных в первой и второй серии опытов.

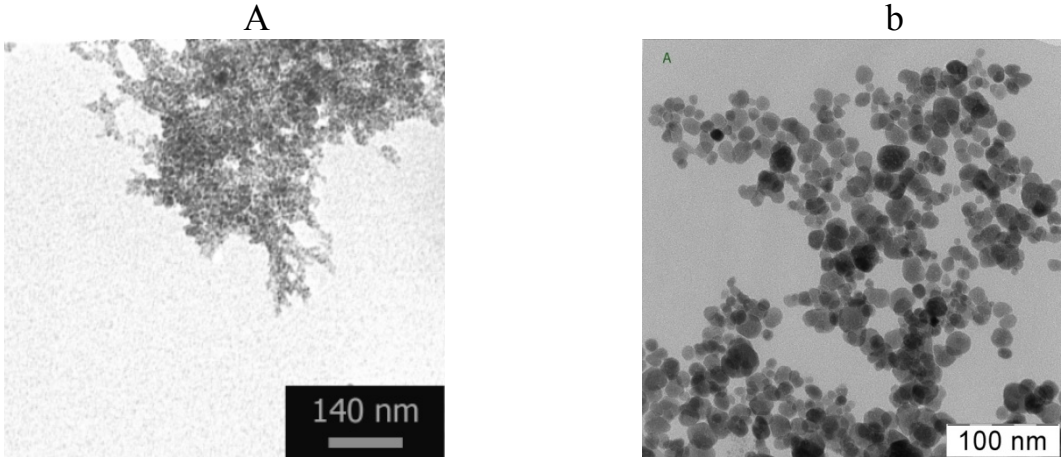


Рисунок 1 – Микрофотографии наночастиц полученных, в первой серии экспериментов (a); второй серии экспериментов (b).

В первой серии опытов размер полученных наночастиц составил 8±4 нм, размер наночастиц, полученных во второй серии опытов составил 12±4 нм. Наблюдаемое увеличение размера наночастиц во второй серии опытов, наиболее вероятно связанно с увеличением продолжительности времени реакции, а также с повышением температуры. Для измерения магнитных свойств полученные образцы сушили в эксикаторе под вакуумом, после чего измеряли показатели намагниченности на магнетометре типа «Весы Фарадея» Показатели намагниченности для образцов первой и второй серии составили 46,4 emu/g и 74,7 emu/g, соответственно. Значительное увеличение показателя намагниченности, вероятно, связано с увеличением среднего диаметра наночастиц, а также с бо-

лее полным превращением промежуточных продуктов реакции (различные метагидроксиды железа, акагенит, гетит [9]) в магнетит, в результате увеличения температуры. Полученные результаты хорошо согласуются с литературными данными [10]. Использование инертной атмосферы во второй серии опытов предотвратило возможное окисление двухвалентного железа до трехвалентного кислородом воздуха, что также способствовало образованию магнетита без содержания примесей и увеличению намагниченности. Химический состав наночастиц магнетита, синтезированных во второй серии опытов подтверждали методом электронной дифракции по области.

Таблица 1 – Значения d-value [Å], полученные для образца, синтезированного во второй серии опытов

Значения ***d-value*** [Å]	2,97	2,53	2,09	1,71	1,61	1,48

На основании дифрактограммы рассчитывали межплоскостные расстояния d-value (таблица 1). Полученные значения соответствуют магнетиту согласно базе данных AMCSD.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hu A., Yee G.T., Lin W. Magnetically recoverable chiral catalysts immobilized on magnetite nanoparticles for asymmetric hydrogenation of aromatic ketones. J. Am. Chem. Soc., 2005, vol. 127, pp. 12486-12487.
2. Chomoucka J., Drbohlavova J., Huska D., Adam V., Kizek R., Hubalek J.. Magnetic nanoparticles and targeted drug delivering. Pharm. Res., 2010, vol. 62, pp. 144-149.
3. Зинатуллина К.М., Храмеева Н.П., Касаикина О.Т., Шапиро Б.И., Кузьмин В.А. Кинетические характеристики взаймодействия природных тиолов с пероксильными радикалами и пероксидом водорода // Известия Академии наук. Серия химическая, 2017, № 7, С. 1300-1303.
4. Moulik S.P., Rakshit A.K., Capek I. Microemulsions as templates for nanomaterials // Microemulsions: background, new concepts, applications, perspectives. – 2009. – С. 180-210.
5. Rao J. P., Geckeler K. E. Polymer nanoparticles: preparation techniques and size-control parameters //Progress in polymer science. – 2011. – Т. 36. – №. 7. – С. 887-913.
6. Комиссарова Л. Х., Марнаутов Н. А., Татиколов А.С. и др. Разработка технологии получения монодисперсных наночастиц магнетита малого размерного диапазона и оценка их токсичности на мышах // Технологии живых систем. — 2017. — № 4. — С. 51–58.
7. Lu A. H., Salabas E. L., Schüth F. Magnetic nanoparticles: synthesis, protection, functionalization, and application //AngewandteChemie International Edition. – 2007. – Т. 46. – №. 8. – С. 1222-1244.
8. Марнаутов Н.А., Комиссарова Л.Х., Татиколов А.С., Ларкина Е.А., Елфимов А.Б., Васильков О.О. Разработка оптимального способа получения однородных по химическому составу и размерам наночастиц магнетита для

биомедицинских целей // Успехи современного естествознания. – 2017. – № 6. – С. 23-27.
9. Ahn T. et al. Formation pathways of magnetite nanoparticles by coprecipitation method //The journal of physical chemistry C. – 2012.– Т. 116. – №. 10. – С. 6069-6076.
10. Ishikawa T., Kataoka S., Kandori K. The influence of carboxylate ions on the growth of β-FeOOH particles //Journal of materials science. – 1993. – Т. 28. – №. 10. – С. 2693-2698.

УДК 543.428.4

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЛОЁВ РАЗБАВЛЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛУПРОВОДНИКА (In,Fe)Sb, ВЫРАЩЕННЫХ НА GaAs

А.В. Кудрин
НИФТИ ННГУ им. Н. И. Лобачевского
e-mail: *alex2983@yandex.ru*
Р.Н. Крюков
НИФТИ ННГУ им. Н. И. Лобачевского
e-mail: *kriukov.ruslan@yandex.ru*
М.В. Ведь
НИФТИ ННГУ им. Н. И. Лобачевского
e-mail: *turok.89rus@rambler.ru*
В.П. Лесников
НИФТИ ННГУ им. Н. И. Лобачевского

Представлены исследования слоёв разбавленных магнитных полупроводников (In,Fe)Sb методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии. Выявлено, что железо в данных слоях содержится как в элементном виде на уровне 2 ат.%, так и в соединении с сурьмой на уровне 10 ат.% при общей концентрации железа 12 ат.%. Также, отсутствие кислорода и углерода в слое указывает на чистоту технологии получения слоёв (In,Fe)Sb.

Ключевые слова: рентгеновская фотоэлектронная спектроскопия; факторы относительной чувствительности; разбавленные магнитные полупроводники; химический анализ.

Разбавленные магнитные полупроводники (РМП) – полупроводниковые ферромагнитные материалы, легированные атомами переходных элементов – считаются перспективными для применения в элементах приборов спинтроники, так как характеризуются высокой степенью спиновой поляризации носителей заряда, и относительно простой технологией встраивания в полупроводниковые структуры [1]. На сегодняшний день перспективными считаются РМП $(A_3,Mn)B_5$, но их существенным недостатком является низкое значение температуры Кюри. В [2] было обнаружено, что слои (In,Fe)Sb обладают ферромаг-

нитным упорядочением при температурах вплоть до комнатной. Данная работа посвящена выявлению химических соединений, присутствие которых обуславливает ферромагнетизм слоёв разбавленного магнитного полупроводника (In,Fe)Sb.

Исследуемые слои (In,Fe)Sb были выращены при температуре 200°C методом импульсного лазерного распыления твердотельных мишеней InSb и Fe в вакууме. В качестве подложки использовался *i*-GaAs. Для предотвращения окисления слои (In,Fe)Sb заращивались тонким слоем InSb.

Исследования образцов методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС) проводились на комплексе Omicron Multiprobe RM (Omicron Nanotechnology GmbH, Германия). Давление остаточных газов в ходе эксперимента не превышало 10^{-9} мбар, что предотвращало загрязнение и оксидирование поверхности. Для возбуждения фотоэмиссии использовалось Al K α-излучение с энергией 1486,6 эВ. Диаметр области анализа на поверхности образца составлял 3 мм. Послойное профилирование осуществлялось травлением ионами Ar^+ с энергией 1 кэВ с углом падения 45°. Диаметр радиально однородного по плотности тока ионного пучка был равен 20 мм. Средняя скорость травления образцов составляла 0,3 нм/мин.

Определение концентрации в слое проводилось методом факторов относительной чувствительности [3]. Для качественной и количественной интерпретации спектров использовались ФЭ-линии Sb $3d_{5/2}$, In $3d_{5/2}$,Fe $2p_{3/2}$, Ga 3*d*, As 3*d*, O 1*s* и C 1*s*. Химический анализ проводился путём спектрального анализа ФЭ-линий в программе CasaXPS [4].

При проведении исследований слоя (In,Fe)Sb был получен профиль распределения концентрации химических элементов по глубине, представленный на рисунке 1.

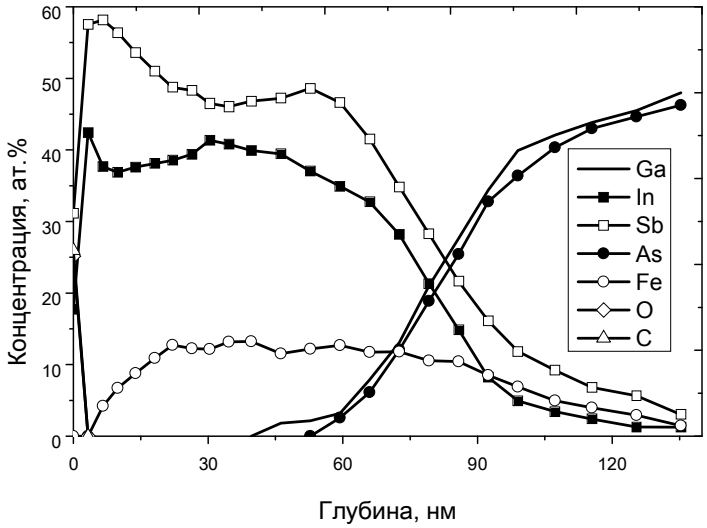


Рисунок 1 – Профиль распределения химических элементов по глубине в системе InSb/(In,Fe)Sb/GaAs

Рассматривая слой InFeSb, стоит отметь рассогласование в содержании индия и сурьмы, составляющее ~ 15 ат.%. Определено, что на протяжении всего слоя (In,Fe)Sb концентрация магнитной примеси находится на уровне 14 ат.%. Это косвенно указывает на присутствие в системе химических связей Fe-Sb. В дополнение стоит указать на детектирование железа на глубинах, соответст-

вующих подложке. Также выявлено, что кислород детектируется только на поверхности структуры, что говорит о качестве процедуры напыления. Железо отсутствует в приповерхностном слое. Эти факты отличают систему InSb/(In,Fe)Sb/GaAs от структур GaAs/(Ga,Mn)As, которые были изучены нами ранее [5], где сигнал кислородной линии определялся на протяжении всего слоя, выращенного методом импульсного лазерного распыления.

Послойный химический анализ слоя (In,Fe)Sb показал присутствие элементного железа (рисунок 2), которое может быть как в атомарном, так и кластерном состоянии. Одной из возможных причин появления железа в элементном виде может быть попадание микро-капель Fe, характерное для метода импульсного лазерного распыления. Другая возможная причина – пересыщение антимонида индия железом. Последнее может привести к агрегации междоузельных атомов металла.

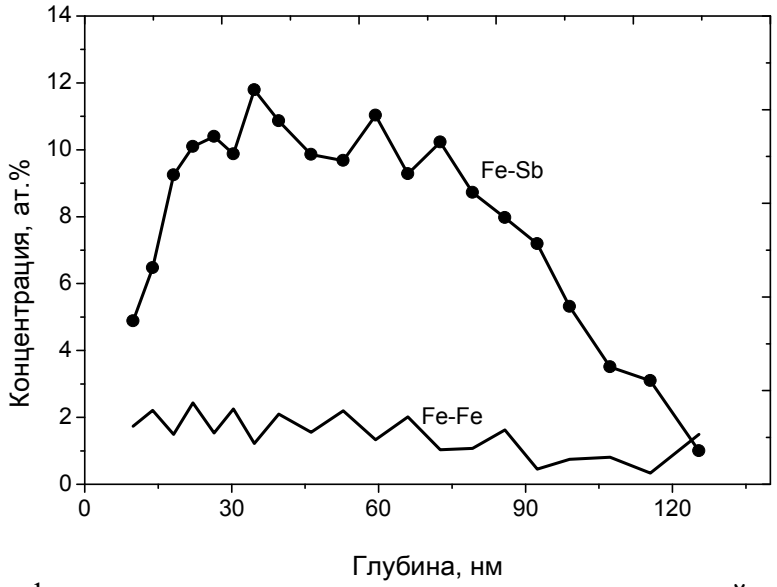


Рисунок 2 – Профиль распределения железосодержащих соединений в слое InFeSb

В ходе анализа определено, что около 83 % всего железа имело химическую связь с атомами сурьмы (рисунок 2), то есть большая часть железа встроилась в решётку полупроводника как примесь замещения или с образованием кластеров $FeSb_x$.

Таким образом, было проведено исследование физико-химических свойств слоёв разбавленных магнитных полупроводников (In,Fe)Sb методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии. Выявлено, что железо в данных слоях содержится как в элементном виде на уровне 2 ат.%, так и в соединении с сурьмой на уровне 10 ат.% при общей концентрации железа 12 ат.%. Отсутствие кислорода и углерода в слое (In,Fe)Sb указывает на чистоту технологии получения исследуемых слоёв.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (18-37-00358).

ЛИТЕРАТУРА

1. Holub M., Bhattacharya P. Spin-polarized light-emitting diodes and lasers // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2007. – V.40. – P. R179–R203.

2. Kudrin A. V., Danilov Yu. A., Lesnikov V. P. *et.al.* High-temperature intrinsic ferromagnetism in the (In,Fe)Sb semiconductor // Journal of Applied Physics. – 2017. – V. 122. – P. 183901.
3. Briggs D., Seah. M. P. Practical surface analysis by auger and X-ray photoelectron spectroscopy. – 3rd ed. – John Wiley and Sons: New York, USA. – 1985. – 499 c.
4. www.casaxps.com.
5. Николичев Д. Е., Боряков А.В., Зубков С.Ю. и др. Химический и фазовый состав спиновых светоизлучающих диодов GaMnAs/GaAs/InGaAs // ФТП. – 2014. – Т. 48. – В. 6. – С. 839-844.

УДК 05; 06

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МОНОКРИСТАЛЛОВ $FeGaInS_4$ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Н.Н. Нифтиев, д.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
e-mail: *namiq7@bk.ru*

Приводятся результаты исследования частотных и температурных зависимостей электропроводности монокристаллов $FeGaInS_4$ в переменном электрическом поле. Установлено, что в температурном интервале 296 ÷ 376К при частотах $2\cdot10^4 \div 10^6$ Гц для электропроводности выполняется закономерность $\sigma \sim f^S$ ($0,1 \leq S \leq 1,0$). В монокристаллах $FeGaInS_4$ проводимость характеризуется зонно-прыжковым механизмом.

Ключевые слова: электропроводность, монокристалл, частота, температура, зонно-прыжковый механизм.

В последние годы значительное внимание уделяется магнитным полупроводникам типа AB_2X_4 (A – Mn, Fe, Co, Ni; B – Ga, In; X – S, Se, Te) [1-5]. Эти соединения обладают уникальными физическими свойствами, что дает основание полагать перспективным использованием их для изготовления ряда оптоэлектронных приборов нового класса, управляемых с помощью магнитного поля. В [2, 5, 6] при соотношении 1:1 шпинельной структуры $FeIn_2S_4$ (п. гр. Fd3m) и ромбической структуры $FeGa_2S_4$ (п. гр. $Pna2_1$) получены новые слоистые полумагнитные полупроводники состава $FeGaInS_4$ и исследованы их некоторые электрофизические свойства.

В настоящей работе приводятся результаты исследования частотных и температурных зависимостей электропроводности монокристаллов $FeGaInS_4$ в переменном электрическом поле.

Монокристаллы $FeGaInS_4$ были получены методом Бриджмена. Рентгенографическим методом установлено, что монокристаллы кристаллизуются в структуре однопакетного политипа $ZnIn_2S_4$ [7] с параметрами кристаллической решетки a=3,81; c=12,17 Å, z=1, пр.гр. P3m1. Измерения сопротивления проводились с помощью цифровых измерителей иммитанса E7-20 (частоты $25\text{-}10^6$ Гц).

На рисунке 1 приведены зависимости проводимости от частоты для монокристаллов $FeGaInS_4$. Видно, что при исследуемых температурах вначале с ростом частоты электропроводность медленно увеличивается, далее в интервале частот $2\cdot10^5-10^6$ Гц электропроводность растет более быстро.

Для монокристаллов $FeGaInS_4$ в интервале частот $2\cdot10^4\div10^6$Гц с увеличением частоты электропроводность растет по закону

$$\sigma \sim f^S \qquad (0{,}1 \le S \ge 1{,}0) \qquad (1)$$

При низких температурах (296 ÷ 311 K) в интервале частот $10^5\div10^6$ Гц S получает значение 0,20 ÷ 0,75; а при температуре 376 К такой же частоты S изменяется в области 0,10÷0,42. Видно, что, при низких температурах значение S исследуемых частот изменяется больше чем при высоких температурах.

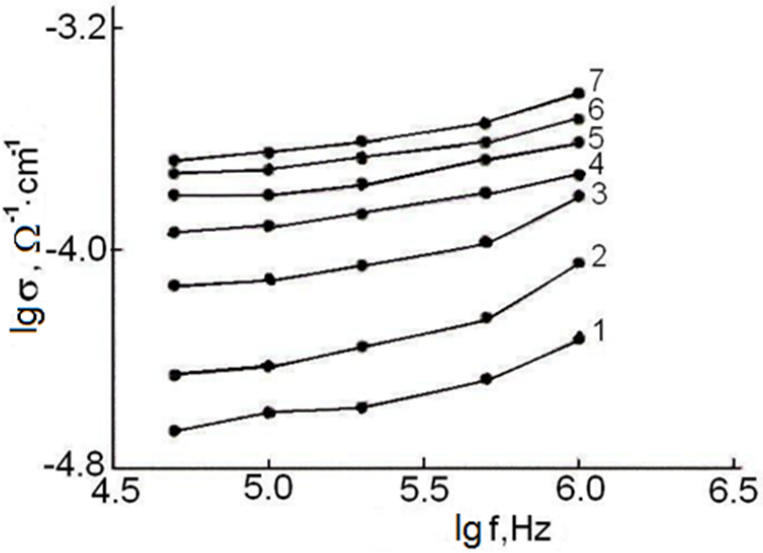


Рисунок 1 – Зависимости электропроводности от частоты измерений при различных температурах Т, К: 1 – 296, 2 – 311, 3 – 326, 4 – 341, 5 – 356, 6 – 366, 7 – 376

В монокристаллах $FeGaInS_4$ механизм зависимости роста электропроводности от частоты можно объяснить так: известно что, если в кристаллах и аморфных полупроводниках зависимость изменения электропроводности от частоты будет подчиняться закономерности $\sigma(\omega) \sim \omega^S$ $(0{,}1 \le S \ge 1{,}0)$, тогда можно предполагать что существует прыжковый механизм проводимости [8]. Основываясь на Дебаевском анализе частотной зависимости проводимости теоретически исследованье частотная и температурная зависимости проводимости в работе [8] и там частотная зависимость проводимости установлена так:

$$\sigma(\omega)_T \sim \omega\{\ln(\frac{\nu_f}{\omega})\}^4 \sim \omega^S, \qquad S \le 1 \qquad (2)$$

и температурная зависимость проводимости определяется

$$\sigma(T)_\omega \sim T^{-1}\exp(\frac{T}{T_o}) \qquad (3)$$

где ν_f – частота фонона, T_o – характеристическая температура. Согласно (3) при вышеизложенном механизме проводимости при температурах выше $T>T_o$ температурная зависимость электропроводности в масштабах $\ln(\sigma\cdot T) \sim f(T)$ должна давать прямую линию. На рисунке 2 приведена экспериментальная зависимость

$\ln(\sigma \cdot T) \sim f(T)$ при 10^6Гц. Отсюда видно что, зависимость прямолинейная. Этому соответствует прыжковый механизм проводимости.

В беспорядочных системах проблемы прыжковой проводимости в некоторых работах рассматриваются с точки зрение кластерного приближения [9-10]. В монокристаллах $FeGaInS_4$ изменение электропроводности в зависимости от частоты можно объяснить при помощи мултиплетной модели [9], так как, в кристаллах существуют кластеры, содержащие локализованные состояния с близкой энергией и перескок электронов осуществляется между ними. С повышением частоты сначала одни, а затем другие заряженные частицы не успевают за время четверти периода приложенного напряжения

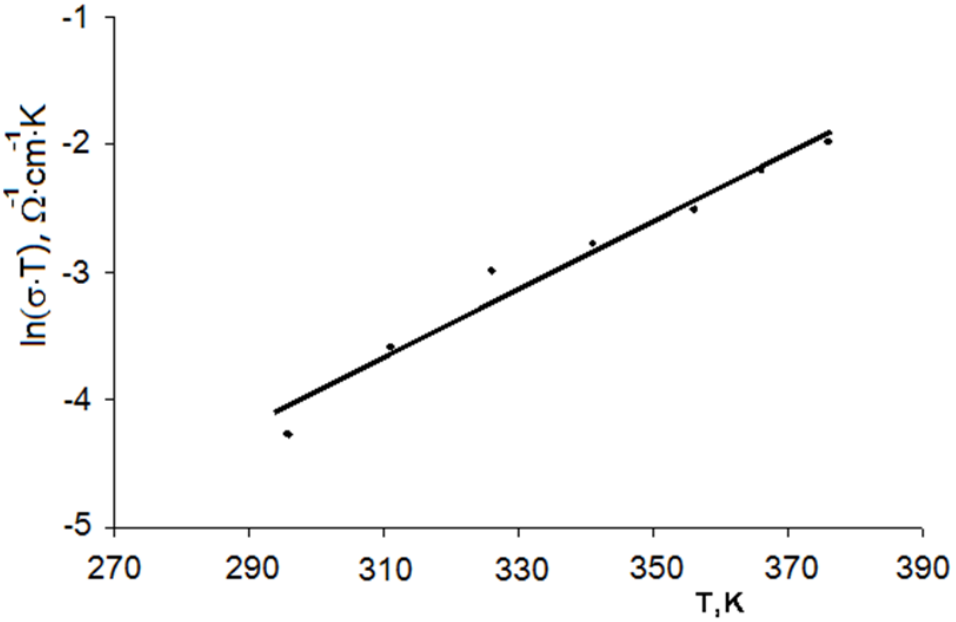


Рисунок 2 - Зависимость *ln(σ·T) ~ f(T)* для монокристаллов $FeGaInS_4$ при 10^6 Гц

достигнуть мест локализации и, непрерывно следуя за изменением электрического поля, дают вклад уже в проводимость. А также известно что, в монокристаллах $FeGaInS_4$ температурная зависимость электропроводности обладает активационным характером [2]. Значит, в монокристаллах $FeGaInS_4$ проводимость характеризуется зонно-прыжковыми механизмами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sagredo V., Moron M. et al. Antiferromagnetic versus Spin – glass like behavior in $MnIn_2S_4$ // J.of magnetism and materials, 2007, v.312, №2, p.294-297.
2. Нифтиев Н.Н., Тагиев О.Б., Мурадов М.Б., Мамедов Ф.М. Электрические свойства слоистых монокристаллов $FeGaInS_4$ на переменном токе // ФТП, 2009, т.43, в.11, с.1447-1449.
3. Боднарь И.В. Выращивание и свойства монокристаллов $MnIn_2S_4$ // Журнал Неорганической химии, 2010, т.55, №6, с.896-901.
4. Нифтиев Н.Н., Тагиев О.Б. Оптическое поглощение в монокристаллах $MnIn_2S_4$. Оптика и спектроскопия, 2012, том 113, №1, с.73-76.

5. Нифтиев Н.Н., Мамедов Ф.М. Диэлектрические свойства монокристаллов $FeGaInS_4$ в переменном электрическом поле. ФТП, 2016, том 50, в. 9, с.1225 - 1229.
6. Нифтиев Н.Н. Электрические свойства слоистых монокристаллов $FeGa\dot{I}nS_4$. ФТП, 2004, т.38, в. 5, с.522-524.
7. Battistoni C., Gastalidi L. et al. Struktural and magnetic properties of layer compounds CoGaInS4 // Solid Stade Commun. 1987, v.61, №1, p.43-46.
8. Мотт Н., Дэвис Э. Электронные процессы в некристаллических веществах. М.: Мир, 1982. т. 1. С. 368.
9. Bettger N., Bruksin V.V. Hopping conductivity in ordered and disorered systems (III)^3 // Phys. Stat. Sol (b), 1982, 113, p.9-49
10. Шкловский Б.И., Эфрос А.Л. Электронная свойства легированных полупроводников. Наука. М. 1979. С. 416.

УДК 621.382.323

ЛИНЕЙНАЯ «ВНЕШНЯЯ» КОМПАКТНАЯ МОДЕЛЬ АСИМПТОТИКИ ТОКА СТОКА В РЕЖИМЕ НАСЫЩЕНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЧЕСКОГО ПОЛЕВОГО ТРАНЗИСТОРА

В.О. Турин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *voturin@mail.ru*
Б.А. Рахматов
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *badriddin.rakhmatov.91@mail.ru*
Ч.Х. Ким
Университет Гачон, г. Соннам, Республика Корея
e-mail: *chang-hyun.kim@gachon.ac.kr*

Для органического полевого транзистора разработана «внешняя» (с аналитическим учётом сопротивлений истока и стока) и линейная по напряжению сток-исток компактная модель для асимптотики тока стока в режиме насыщения с учётом ненулевой дифференциальной проводимости. Уравнение для асимптотики тока стока проходит через пересчитанную из «внутреннего» случая во «внешний» случай «точку насыщения». При этом «внешняя» дифференциальная проводимость определяется пересчётом во «внешний» случай «внутренней» дифференциальной проводимости в «точке насыщения».

Ключевые слова: органический полевой транзистор, «внешняя» компактная модель, режим насыщения, дифференциальная проводимость, сопротивления истока и стока.

1. Введение

В работе [1] предложен подход к компактному моделированию тока стока органического полевого транзистора (ОПТ) в надпороговом режиме с корректным учётом выходной проводимости в режиме насыщения (см. [2]) и с аналитическим учётом сопротивлений истока и стока. В [1] были получены уравнения, неявно определяющие зависимость тока насыщения и асимптотику тока стока в режиме насыщения от «внешних» (с учётом сопротивлений истока и стока) напряжений на затворе и стоке. В [1] были предложены и итерационные процедуры решения этих уравнений. В работе [3], линеаризацией неявного уравнения для тока насыщения, было получено уравнение для компактного моделирования тока насыщения. В работе [4] разработана «внешняя» компактная модель для асимптотики тока стока МОП-транзистора в режиме насыщения с линейной зависимостью тока стока от «внешнего» напряжения между стоком и истоком. При этом не учитывался эффект насыщения скорости носителей в сильных электрических полях, что оправданно для длинноканальных транзисторов. В нашей работе, мы используем этот подход для ОПТ. Отметим, что эффект насыщения скорости носителей в ОПТ несущественен.

2.Основы теории органического полевого транзистора

В уравнениях, для краткости, мы будем использовать центрированное напряжение на затворе:

$$\mathrm{V_{GT}} = \mathrm{V_{GS}} - \mathrm{V_{th}}. \tag{1}$$

Здесь $\mathrm{V_{GS}}$ - «внутреннее» напряжение затвор-исток и $\mathrm{V_{th}}$ - пороговое напряжение. Мы будем использовать заглавные буквы в индексах напряжений в случае «внутренней» модели. Для «внешней» модели ($R_S \neq 0$ и/или $R_D \neq 0$) мы будем использовать в подстрочных индексах строчные буквы.

Напряжения насыщения ОПТ [5] определяется уравнением:

$$\mathrm{V_{SAT}} = \alpha_\mathrm{S}\mathrm{V_{GT}}. \tag{2}$$

Здесь α_S – безразмерный параметр, связанный, в общем случае, со значением напряжения на подложке транзистора.

Уравнение для тока насыщения определяется так [5]:

$$\mathrm{I_{SAT}} = \alpha_\mathrm{S}\mathrm{K}\mu_\mathrm{FET}\mathrm{V_{GT}^2} = \alpha_\mathrm{S}\mathrm{K}\frac{\mu_0}{\mathrm{V_{aa}^\gamma}}\mathrm{V_{GT}^{\gamma+2}}. \tag{3}$$

Крутизна ОПТ в режиме насыщения определяется следующим уравнением:

$$\mathrm{g_{mSAT}} = \frac{\partial \mathrm{I_{SAT}}}{\partial \mathrm{V_{GS}}} = \alpha_\mathrm{S}\mathrm{K}\frac{\mu_0}{\mathrm{V_{aa}^\gamma}}(\gamma+2)\mathrm{V_{GT}^{\gamma+1}} = \frac{\gamma+2}{\mathrm{V_{GT}}}\mathrm{I_{SAT}}. \tag{4}$$

Определим параметр b_{mSAT} следующим образом:

$$\mathrm{b_{mSAT}} = \frac{\partial \mathrm{V_{SAT}}}{\partial \mathrm{V_{GS}}} = \alpha_\mathrm{S}. \tag{5}$$

Зависимость асимптотики тока стока в режиме насыщения от «внутреннего» напряжения между стоком и истоком V_{DS} аппроксимируется линейной зависимостью:

$$\mathrm{I_{ASY}} = \mathrm{I_{SAT}}\big(1 + \lambda\,(\mathrm{V_{DS}} - \mathrm{V_{SAT}})\big). \tag{6}$$

При этом дифференциальная проводимость в режиме насыщения определяется уравнением:

$$g_{ASY} = \frac{\partial I_{ASY}}{\partial V_{DS}} = \lambda\, I_{SAT}. \quad (7)$$

3. Учёт сопротивлений истока и стока

Между «внутренним» и «внешним» напряжениями на затворе и на стоке выполняются соотношения [6]:

$$V_{GT} = V_{gt} - IR_S\,, \quad (8)$$

$$V_{DS} = V_{ds} - IR_T, \quad (9)$$

где суммарное сопротивление контактов в ОПТ:

$$R_T = R_S + R_D, \quad (10)$$

а I – ток, текущий через транзистор.

Подставляя V_{GT}, определяемое уравнением (8), в уравнение для тока насыщения (3), и обозначая ток насыщения как I_{sat}, получаем уравнение:

$$I_{sat} = I_{SAT}\left(V_{gt} - I_{sat}R_S\right). \quad (11)$$

Как было отмечено ранее, в работе [3], линеаризацией неявного уравнения для тока насыщения (11), было получено приближенное уравнение для компактного моделирования тока насыщения ОПТ, которое мы и будем использовать в нашей работе:

$$I_{sat} \approx \frac{I_{SAT}\left(V_{gt}\right)}{1 + g_{mSAT}\left(V_{gt}\right) R_S}. \quad (12)$$

Уравнение для «внешнего» напряжение насыщения:

$$V_{sat} = V_{SAT}\left(V_{gt} - I_{sat}R_S\right) + I_{sat}R_T \quad (13)$$

или, в более удобной для расчётов форме:

$$V_{sat} = \alpha_S V_{gt} + I_{sat}\left((1 - \alpha_S) R_S + R_D\right). \quad (14)$$

Подставляя «внутреннее» центрированное напряжение на затворе V_{GT}, выраженное с помощью уравнения (8), и «внутреннее» напряжение между стоком и истоком V_{DS}, выраженное с помощью уравнения (9), в уравнение для асимптоты тока стока в режиме насыщения (6), и, обозначая ток, текущий при этом через транзистор, как I_{asy}, получаем:

$$I_{asy} = I_{SAT}\left(V_{gt} - I_{asy}R_S\right) \times \left(1 + \lambda\left(V_{ds} - I_{asy}R_T - V_{SAT}\left(V_{gt} - I_{asy}R_S\right)\right)\right). \quad (15)$$

Отметим, что зависимость I_{asy}от V_{ds}, при заданном V_{gt}, проходит через «точку насыщения» (I_{sat}, V_{sat}), рассчитываемую по уравнениям (12) и (14), при заданном V_{gt}.

«Внешняя» асимптотическая дифференциальная проводимость ОПТ в режиме насыщения определяется так:

$$g_{asy} = \frac{\partial I_{asy}}{\partial V_{ds}}\,. \quad (16)$$

Для того, чтобы её найти, продифференцируем обе части уравнения (15) по «внешнему» напряжению V_{ds}:

$$\frac{\partial I_{asy}}{\partial V_{ds}} = \frac{\partial I_{SAT}}{\partial V_{GT}} \frac{\partial V_{GT}}{\partial V_{ds}} \left(1 + \lambda \left(V_{ds} - I_{asy} R_T - V_{SAT}\right)\right) + \lambda I_{SAT} \left(1 - \frac{\partial I_{asy}}{\partial V_{ds}} R_T - \frac{\partial V_{SAT}}{\partial V_{GT}} \frac{\partial V_{GT}}{\partial V_{ds}}\right) \quad (17)$$

Дифференцируя уравнение (8), и полагая $I = I_{asy}$, получаем:

$$\frac{\partial V_{GT}}{\partial V_{ds}} = -\frac{\partial I_{asy}}{\partial V_{ds}} R_S. \quad (18)$$

Из уравнения (17), с учётом (4), (5), (7), (16) и (18) получаем:

$$g_{asy} = \frac{g_{ASY}}{1 + g_{mSAT} \cdot R_S \cdot I_{asy}/I_{SAT} + g_{ASY} \cdot (R_T - b_{mSAT} \cdot R_S)} \quad (19)$$

Здесь аргументом всех функций I_{SAT}, g_{mSAT}, $b_{m\,SAT}$ и g_{ASY} является $V_{GT} = V_{gt} - I_{asy} R_S$. Функция I_{asy} определяется уравнением (15) и зависит от $V_{GT} = V_{gt} - I_{asy} R_S$ и от V_{ds} .

4. Линейная аппроксимация зависимости тока стока от «внешнего» напряжения между истоком и стоком в режиме насыщения

Для построения линейной аппроксимации зависимости тока стока от «внешнего» напряжения между истоком и стоком V_{ds} в режиме насыщения нам необходимо знать значение «внешней» асимптотической дифференциальной проводимости ОПТ g_{asy} в «точке насыщения» (обозначим эту величину как g_{sat}), где $I_{asy} = I_{sat}$ и $V_{ds} = V_{sat}$. При этом, мы можем использовать I_{sat} и V_{sat}, задаваемые приближенными уравнениями (12) и (14). Соответственно, уравнение (19) в «точке насыщения» переписывается следующим образом:

$$g_{sat} = \frac{g_{ASY}}{1 + g_{mSAT} \cdot R_S + g_{ASY} \cdot (R_T - b_{mSAT} \cdot R_S)}. \quad (20)$$

Здесь учтено, что $I_{sat} = I_{SAT}(V_{gt} - I_{sat} R_S)$, согласно уравнению (11), и $I_{asy} = I_{sat}$, как обсуждалось выше. Аргументом всех функций I_{SAT}, g_{ASY}, g_{mSAT} и $b_{m\,SAT}$ является $V_{GT} = V_{gt} - I_{sat} R_S$. Функция I_{sat} определяется уравнением (12).

Получим уравнение для g_{sat} в удобной для анализа форме:

$$\frac{1}{g_{sat}} = \frac{1}{g_{ASY}} + R_D + \left(1 - b_{m\,SAT} + \frac{g_{m\,SAT}}{g_{ASY}}\right) \cdot R_S \quad (21)$$

или

$$\frac{1}{g_{sat}} = \frac{1}{\lambda I_{sat}} + R_D + \left(1 - \alpha_S + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\gamma + 2}{(V_{gt} - I_{sat} R_S)}\right) \cdot R_S. \quad (22)$$

Анализ этого уравнения показывает, что выходное дифференциальное сопротивление ОПТ в режиме насыщения в «точке насыщения» складывается из дифференциального сопротивления канала транзистора $r_{ch} = 1/\lambda I_{sat}$, сопротивления стока R_D и модифицированного сопротивления истока R_S^* , зависящего

от «внутреннего» центрированного напряжения между истоком и затвором V_{GT} (см. уравнение (8)):

$$R_S^* = \left(1 - \alpha_S + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\gamma + 2}{\left(V_{gt} - I_{sat} R_S\right)}\right) \cdot R_S. \quad (23)$$

Таким образом, мы предлагаем для компактного моделирования ОПТ использовать линейное приближение для зависимости асимптотики тока стока от «внешнего» напряжения на стоке:

$$I_{asy} = I_{sat} \cdot \left(1 + \lambda_{sat} \left(V_{ds} - V_{sat}\right)\right). \quad (24)$$

Здесь параметр λ_{sat} рассчитывается по формуле:

$$\lambda_{sat} = \frac{g_{sat}}{I_{sat}}. \quad (25)$$

с использованием уравнения (20) для g_{sat} и уравнения (12) для I_{sat}.

5. Выводы

Таким образом, для компактного моделирования асимптотики тока стока ОПТ в режиме насыщения, мы предлагаем линейное по «внешнему» напряжению V_{ds}уравнение (24). Асимптота, определяемая этим уравнением, гарантированно проходит через «точку насыщения» (V_{sat}, I_{sat}) и обеспечивает правильное значение дифференциальной проводимость g_{sat} в этой точке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турин В.О., Рахматов Б.А., Зебрев Г.И., Инигез Б., Шур М.С.. Учёт сопротивлений истока и стока в режиме насыщения при моделировании надпорогового тока в «улучшенной» компактной модели органического полевого транзистора // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы II международной научно-практической конференции. 24–27 ноября 2016 г., Орёл – 2016. – С. 135–51.
2. Turin V.O., Rakhmatov B.A., Kim C.H., Iñiguez B. An approach to organic field-effect transistor above-threshold drains current compact modeling that provides monotonic decrease of the output conductance with drain bias increasing. // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – Т. 151. –No 1. – С. 1–5.
3. Турин В.О., Рахматов Б.А., Зебрев Г.И., Ким Ч.Х., Инигез Б., Шур М.С. Моделирование тока насыщения органического полевого транзистора с учётом контактных сопротивлений // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы III международной научно-практической конференции. 23–26 ноября 2017 г., Орёл – 2017. – С. 299–305.
4. Турин В.О., Шкарлат Р.С., Зебрев Г.И., Шур М.С., Инигез Б. Линейное приближение для зависимости тока стока МОП – транзистора в режиме насыщения от напряжения на стоке с учётом сопротивлений истока и стока. // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы III международной научно-практической конференции. 23–26 ноября 2017 г., Орёл – 2017. – С. 294–298.

5. Kim C.H., Castro-Carranza A., Estrada M. [и др.] A compact model for organic field-effect transistors with improved output asymptotic behaviors. // IEEE Trans. Electron Devices. – 2013. – Т. 60. – No3. – С. 1136–1141.
6. Shur M.S. Physics of Semiconductor Devices.– Prentice Hall, New. Jersey.– 1990.

УДК 621.382.323

ЛИНЕЙНАЯ «ВНЕШНЯЯ» КОМПАКТНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ АСИМПТОТИКИ ТОКА СТОКА МОП-ТРАНЗИСТОРА В РЕЖИМЕ НАСЫЩЕНИЯ С УЧЁТОМ ЭФФЕКТА НАСЫЩЕНИЯ СКОРОСТИ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА

В.О. Турин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *voturin@mail.ru*
Р.С. Шкарлат
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *shkarlatroman@ya.ru*
В.Н. Поярков
ОАО «Болховский завод полупроводниковых заводов»
e-mail: *oaobzpp@list.ru*
О.Н. Кшенский
ОАО «Болховский завод полупроводниковых заводов»
e-mail: *oaobzpp@list.ru*
Г.И. Зебрев
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
e-mail: *gizebrev@mephi.ru*
Б. Инигез
Университет Ровира и Вирджинии, г. Тарагона, Испания
e-mail: *benjamin.iniguez@urv.cat*
М.С. Шур
Ренсселаеровский политехнический институт, г. Трой, Нью-Йорк, США
e-mail: *shurm@rpi.edu*

Для короткоканального МОП-транзистора разработана «внешняя» (с аналитическим учётом сопротивлений истока и стока) линейная (с линейной зависимостью от «внешнего» напряжения сток-исток) компактная модель для асимптотики тока стока в режиме насыщения с ненулевой дифференциальной проводимостью. Модель учитывает эффект насыщения скорости электронов в сильном электрическом поле, что необходимо при моделировании элементной базы, изготавливаемой по субмикронным и наноразмерным технологическим нормам. Уравнение для асимптотики тока стока проходит через пересчитанные из «внутреннего» случая во «внешний» случай ток насыщения и соответствующее ему напряжение. При этом «внешняя» дифференциальная проводимость определяется точным пересчётом из

«внутреннего» случая во «внешний» случай дифференциальной проводимости в этой точке.

Ключевые слова: МОП - транзистор, «внешняя» компактная модель, режим насыщения, ненулевая дифференциальная проводимость, эффект насыщения дрейфовой скорости электронов, сопротивления истока и стока.

1. Введение

В работе [1] разработана «внешняя» (аналитически учитывающая сопротивления истока и стока) компактная модель зависимости асимптотики тока стока длинноканального МОП-транзистора в режиме насыщения с линейной зависимостью тока стока от «внешнего» напряжения между стоком и истоком. Но эта модель не учитывает эффект насыщения скорости электронов в сильных электрических полях, что делает её плохо пригодной для моделирования транзисторов, сделанных по субмикронным и наноразмерным технологическим нормам, когда все короткоканальные эффекты обостряются. В нашей работе мы обобщаем модель, предложенную в [1], на случай учёта эффекта насыщения дрейфовой скорости носителей заряда в сильных электрических полях. В дальнейшем, разработанную модель планируется использовать при обобщении ранее разработанной улучшенной (с корректным учётом дифференциальной проводимости в режиме насыщения) «внутренней» (без учёта сопротивления истока и стока) компактной модели МОП-транзистора [2, 3] на «внешний» случай.

2. Основы теории МОП транзистора с учетом эффекта насыщения дрейфовой скорости носителей в сильном электрическом поле

В уравнениях, для краткости, мы будем использовать центрированное напряжение на затворе:

$$V_{GT} = V_{GS} - V_{th}. \quad (1)$$

Здесь V_{GS} - «внутреннее» напряжение затвор-исток и V_{th} - пороговое напряжение. Характерное напряжение V_L, связанное с эффектом насыщения дрейфовой скорости, определяется характерной напряжённостью E_S электрического поля и длиной канала L:

$$V_L = E_S L, \quad E_S = v_S/\mu_n . \quad (2)$$

Здесь - v_s скорость насыщения дрейфовой скорости и μ_n – подвижность. Удельная крутизна МОП-транзистора определяется так:

$$\beta = \mu_n C_{ox} \frac{W}{L}, \quad C_{ox} = \frac{\varepsilon_{ox}\varepsilon_0}{d}. \quad (3)$$

Здесь W - ширина затвора; d - толщина подзатворного окисла; ε_{ox} - относительная диэлектрическая проницаемость подзатворного окисла; ε_0- электрическая постоянная.

Мы будем использовать следующие константы обезразмеривания: для тока $I^* = \beta V_L^2$; для напряжения $V^* = V_L$; для сопротивления $R^* = 1/\beta V_L$.

Уравнение для линейного режима:

$$I_{LIN} = \beta\, V_{GT}\, V_{DS} . \quad (4)$$

Проводимость в линейном режиме:

$$G_{LIN} = \beta V_{GT} . \quad (5)$$

Уравнение для тока насыщения [4]:

$$I_{SAT} = \frac{\alpha\beta V_{GT}^2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha V_{GT}}{V_L}\right)^2}} . \quad (6)$$

Здесь α - безразмерный параметр, связанный со значением напряжения на подложке транзистора.

Если дифференциальная проводимость в режиме насыщения равна нулю, то крутизна в режиме насыщения определяется уравнением:

$$G_{mSAT} = \frac{\partial I_{SAT}}{\partial V_{GS}} = \frac{\alpha\beta V_{GT}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha V_{GT}}{V_L}\right)^2}} . \quad (7)$$

Уравнение для напряжения насыщения:

$$V_{SAT} = \frac{2\alpha V_{GT}}{1 + \frac{\alpha V_{GT}}{V_L} + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha V_{GT}}{V_L}\right)^2}} . \quad (8)$$

Определим параметр B_{mSAT} следующим образом:

$$B_{mSAT} = \frac{\partial V_{SAT}}{\partial V_{GS}} = \alpha\left(1 - \frac{\alpha V_{GT}/V_L}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha V_{GT}}{V_L}\right)^2}}\right) = \alpha\left(1 - \frac{G_{mSAT}}{\beta V_L}\right). \quad (9)$$

Асимптотика тока стока в режиме насыщения в компактных моделях начального уровня типа MOSFET Level 1 аппроксимируется линейной зависимостью от «внутреннего» напряжения между стоком и истоком V_{DS} [4]:

$$I_{ASY} = I_{SAT} \cdot (1 + \lambda V_{DS}) . \quad (10)$$

В современных компактных моделях типа BSIM3/4 учитывается напряжение насыщения [5]:

$$I_{ASY} = I_{SAT} \cdot \left(1 + \lambda (V_{DS} - V_{SAT})\right) . \quad (11)$$

При этом дифференциальная проводимость в режиме насыщения определяется уравнением:

$$G_{ASY} = \frac{\partial I_{ASY}}{\partial V_{DS}} = \lambda I_{SAT}. \quad (12)$$

Кроме λ будем использовать обозначение $V_E = 1/\lambda$ (величина V_Eсоответствует хорошо известному из теории биполярных транзисторов напряжению Эрли).

3. Учёт сопротивлений истока и стока

Между «внутренними» (V_{GT}, V_{DS}) и «внешними» (V_{gt}, V_{ds}) напряжениями выполняются соотношения [4], [6]:

$$V_{GT} = V_{gt} - IR_S, \tag{13}$$

$$V_{DS} = V_{ds} - IR_T. \tag{14}$$

Здесь I – ток, текущий через транзистор, R_S – сопротивление истока, R_D – сопротивление стока. Суммарное сопротивление контактов:

$$R_T = R_S + R_D\,. \tag{15}$$

Уравнение для асимптотики линейного режима для «внешнего» случая:

$$I_{lin} = \frac{\beta V_{gt} V_{ds}}{1 + \beta V_{gt}(R_S + R_D)} \tag{16}$$

Чтобы вывести уравнение для тока насыщения для «внешнего» случая (см. [4]), подставим в уравнение (6) для I_{SAT} уравнение (19) для V_{GT} при условии $I = I_{sat}$. Полученное уравнение является квадратным относительно I_{sat} и его решение имеет вид:

$$I_{sat} = \frac{\alpha\beta V_{gt}^2}{1 + \alpha\beta R_S V_{gt} + \sqrt{1 + 2\alpha\beta R_S V_{gt} + \left(\alpha\, V_{gt}/V_L\right)^2}}\,. \tag{17}$$

«Внешнее» напряжение насыщения V_{sat} вычисляется с использованием уравнения (14), положив в нём $V_{ds} = V_{sat}$, $I = I_{sat}$ и $V_{DS} = V_{SAT}(V_{GT})$, где $V_{GT} = V_{gt} - I_{sat}R_S$ (согласно уравнению (13)):

$$V_{sat} = V_{SAT}\left(V_{gt} - I_{sat}R_S\right) + I_{sat}R_T\,. \tag{18}$$

Для V_{SAT} используется уравнение (8), для вычисления I_{sat} - уравнение (17).

Для пересчёта уравнений (10) и (11) для асимптотики тока стока в режиме насыщения во «внешний» случай необходимо положить в них $I_{ASY} = I_{asy}$, подставить в них V_{DS}, определяемое уравнением (14), преобразовать во «внешний» случай уравнения для I_{SAT} и V_{SAT}, выразив их аргумент V_{GT} через уравнение (13), при этом везде положив $I = I_{asy}$. Для случая MOSFET Level 1:

$$I_{asy} = I_{SAT}\left(V_{gt} - I_{asy}R_S\right)\left(1 + \lambda\left(V_{ds} - I_{asy}R_T\right)\right). \tag{19}$$

Для случая BSIM3/4:

$$I_{asy} = I_{SAT}\left(V_{gt} - I_{asy}R_S\right)\Big(1 + \lambda\left(V_{ds} - I_{asy}R_T - V_{SAT}\left(V_{gt} - I_{asy}R_S\right)\right)\Big). \tag{20}$$

Мы получили уравнения (19) и (20), для которых затруднительно получение аналитического решения. Отметим, что в случае MOSFET Level 1, зависимость I_{asy} от V_{ds}, при заданном V_{gt}, проходит через точку ($I_{sat}R_T$, I_{sat}), а в случае BSIM3/4 через «точку насыщения» (V_{sat} , I_{sat}), где I_{sat} и V_{sat} рассчитываются по уравнениям (17) и (18), при заданном V_{gt}.

«Внешняя» асимптотическая дифференциальная проводимость МОП-транзистора в режиме насыщения определяется так:

$$G_{asy} = \frac{\partial I_{asy}}{\partial V_{ds}}. \tag{211}$$

Для того чтобы её найти, в случае MOSFET Level 1, продифференцируем обе части уравнения (19) по «внешнему» напряжению V_{ds}:

$$\frac{\partial I_{asy}}{\partial V_{ds}} = \frac{\partial I_{SAT}}{\partial V_{GT}}\frac{\partial V_{GT}}{\partial V_{ds}}\left(1 + \lambda\left(V_{ds} - I_{asy}R_T\right)\right) + \lambda\, I_{SAT}\cdot\left(1 - \frac{\partial I_{asy}}{\partial V_{ds}}R_T\right). \tag{22}$$

В случае BSIM3/4, продифференцируем обе части уравнения (20) по «внешнему» напряжению V_{ds}:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_{asy}}{\partial V_{ds}} = \frac{\partial I_{SAT}}{\partial V_{GT}}\frac{\partial V_{GT}}{\partial V_{ds}}\left(1 + \lambda\left(V_{ds} - I_{asy}R_T - V_{SAT}\right)\right)\\ + \lambda\, I_{SAT}\left(1 - \frac{\partial I_{asy}}{\partial V_{ds}}R_T - \frac{\partial V_{SAT}}{\partial V_{GT}}\frac{\partial V_{GT}}{\partial V_{ds}}\right).\end{aligned} \tag{23}$$

Дифференцируя уравнение (13), и полагая $I = I_{asy}$, получаем:

$$\frac{\partial V_{GT}}{\partial V_{ds}} = -\frac{\partial I_{asy}}{\partial V_{ds}}R_S = -G_{asy}\cdot R_S. \tag{24}$$

Теперь, с учётом (7), (9), (18), (12), (19), (20), (21) и (24), перепишем уравнения (22) и (23) в виде:

$$G_{asy} = -G_{mSAT}\cdot G_{asy}\cdot R_S\cdot\frac{I_{asy}}{I_{SAT}} + G_{ASY}\cdot\left(1 - G_{asy}\cdot R_T\right). \tag{25}$$

и

$$\begin{aligned}G_{asy} = -G_{mSAT}\cdot G_{asy}\cdot R_S\cdot\frac{I_{asy}}{I_{SAT}} + G_{ASY}\\ \cdot\left(1 - G_{asy}\cdot R_T + B_{mSAT}\cdot G_{asy}\cdot R_S\right).\end{aligned} \tag{26}$$

Из уравнения (25) (случай MOSFET Level 1) выразим G_{asy} :

$$G_{asy} = \frac{G_{ASY}}{1 + G_{mSAT}\cdot R_S\cdot\frac{I_{asy}}{I_{SAT}} + G_{ASY}\cdot R_T}. \tag{27}$$

Из уравнения (26) (случай BSIM3/4) выразим G_{asy} :

$$G_{asy} = \frac{G_{ASY}}{1 + G_{mSAT}\cdot R_S\cdot\frac{I_{asy}}{I_{SAT}} + G_{ASY}\cdot\left(R_T - B_{mSAT}\cdot R_S\right)}. \tag{28}$$

Здесь аргументом всех функций I_{SAT}, G_{mSAT}, $B_{m\,SAT}$ и G_{ASY} является $V_{GT} = V_{gt} - I_{asy}R_S$. Функция I_{asy} неявно определяется уравнениями (19) (случай MOSFET Level 1) и (20) (случай BSIM3/4).

4. Линейная аппроксимация зависимости тока стока от «внешнего» напряжения между истоком и стоком в режиме насыщения

Для построения линейной аппроксимации зависимости тока стока от «внешнего» напряжения между истоком и стоком V_{ds} в режиме насыщения нам необходимо знать значение «внешней» асимптотической дифференциальной проводимости МОП-транзистора G_{asy} в точке где $I_{asy} = I_{sat}$ (уравнение (17)).

Обозначим эту величину как G_{sat}. Соответственно, уравнения (27) и (28) в этой точке переписываются следующим образом:

$$G_{sat} = \frac{G_{ASY}}{1 + G_{mSAT} \cdot R_S + G_{ASY} \cdot R_T} \quad (29)$$

$$G_{sat} = \frac{G_{ASY}}{1 + G_{mSAT} \cdot R_S + G_{ASY} \cdot (R_T - B_{mSAT} \cdot R_S)}. \quad (30)$$

Здесь учтено, что в «точке насыщения» $I_{asy}/I_{SAT} = 1$, т.к. в «точке насыщения» $I_{asy} = I_{sat}$ и $I_{sat} = I_{SAT}(V_{gt} - I_{sat}R_S)$. Аргументом всех функций I_{SAT}, G_{ASY}, G_{mSAT} и $B_{m\,SAT}$ является $V_{GT} = V_{gt} - I_{sat}\,R_S$, где I_{sat} определяется уравнением (17) (в этом случае, сразу можно считать, что $I_{SAT} = I_{sat}$, $G_{ASY} = \lambda\ I_{sat}$).

На рисунке 1 представлена зависимость дифференциальной проводимости в точке насыщения (уравнение (30) для BSIM3/4 модели) от напряжения насыщения в безразмерных единицах при различных значениях сопротивления истока $R_S/(1/\beta V_L)$ для случая $R_D/(1/\beta V_L) = 0{,}01$, $\alpha = 1{,}1$, $\lambda_0/(1/V_L) = 0{,}1$.

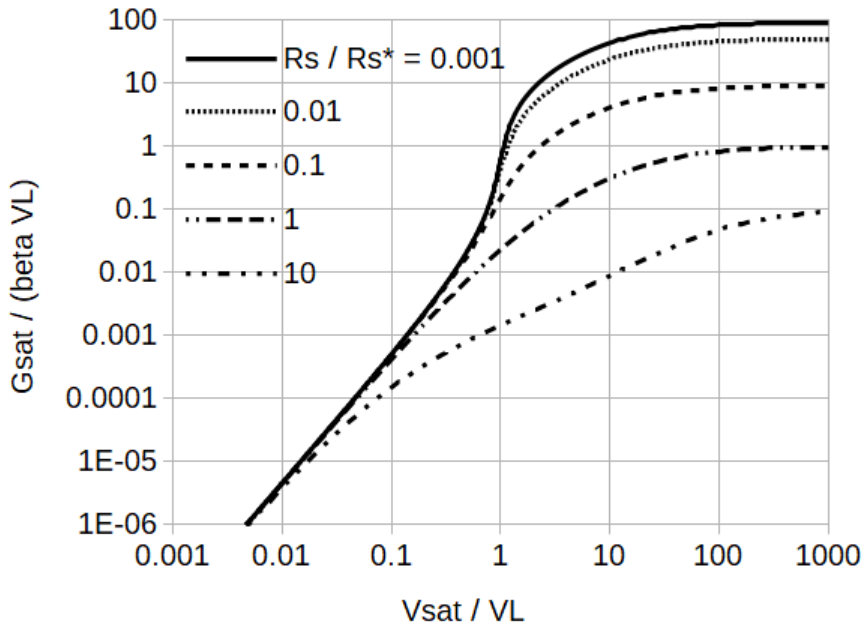


Рисунок 1 – Зависимость дифференциальной проводимости в точке насыщения (уравнение (30) для BSIM3/4 модели) от напряжения насыщения в безразмерных единицах при различных значениях сопротивления истока $R_S/(1/\beta V_L)$ для случая $R_D/(1/\beta V_L) = 0{,}01$, $\alpha = 1{,}1$, $\lambda_0/(1/V_L) = 0{,}1$

Перепишем уравнение (29) для G_{sat} (случай MOSFET Level 1) в удобной для анализа форме:

$$\frac{1}{G_{sat}} = \frac{1}{G_{ASY}} + R_D + \left(1 + \frac{G_{m\,SAT}}{G_{ASY}}\right) \cdot R_S\,. \quad (31)$$

Перепишем и уравнение (30) для G_{sat} (случай BSIM3/4) в удобной для анализа форме:

$$\frac{1}{G_{sat}} = \frac{1}{G_{ASY}} + R_D + \left(1 + \frac{G_{m\,SAT}}{G_{ASY}} - B_{m\,SAT}\right) \cdot R_S\,. \quad (32)$$

Анализ этого уравнения показывает, что выходное дифференциальное сопротивление МОП-транзистора в режиме насыщения в «точке насыщения» складывается из дифференциального сопротивления канала транзистора в режиме насыщения $r_{ch} = 1/G_{ASY} = 1/\lambda\, I_{sat}$, сопротивления стока R_D и модифицированного сопротивления истока R_S^* . В случае MOSFET Level 1:

$$R_S^* = \left(1 + \frac{G_{m\,SAT}}{G_{ASY}}\right) \cdot R_S\,. \tag{33}$$

В случае BSIM3/4:

$$R_S^* = \left(1 + \frac{G_{m\,SAT}}{G_{ASY}} - B_{m\,SAT}\right) \cdot R_S\,. \tag{2}$$

Отметим, что в уравнениях (29) – (34) аргументом всех функций $B_{m\,SAT}$, G_{mSAT}и G_{ASY}является $V_{GT} = V_{gt} - I_{sat}R_S$, где I_{sat} определяется уравнением (17).

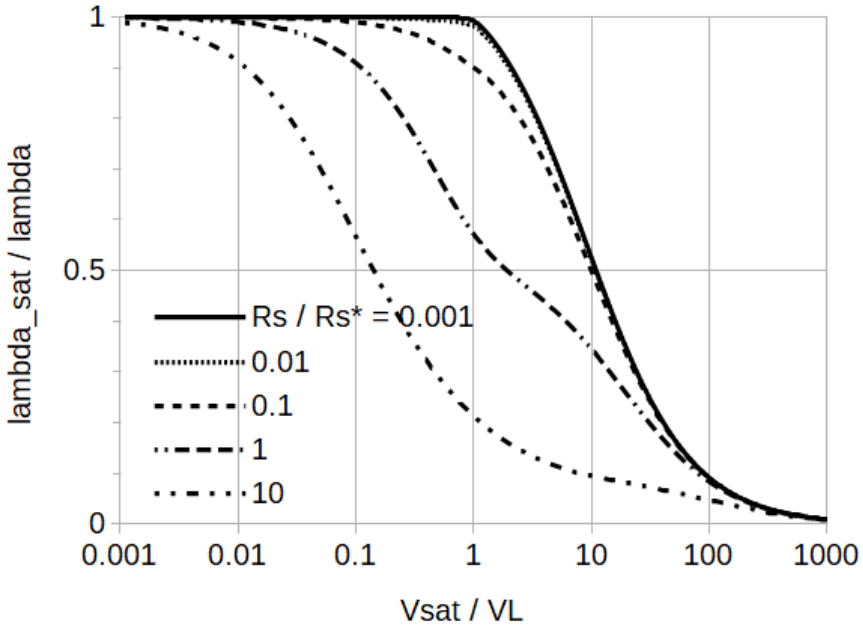


Рисунок 2 – Зависимость параметра λ_{sat} (уравнение (50) для BSIM3/4 модели) приведенного к значению λ от напряжения насыщения в безразмерных единицах при различных значениях сопротивления истока $R_S/(1/\beta V_L)$ для случая $R_D/(1/\beta V_L) = 0{,}01$, $\alpha = 1{,}1$, $\lambda/(1/V_L) = 0{,}1$

Асимптотическое поведение R_S^*, в случае MOSFET Level 1, в зависимости от значения αV_{GT}, определяется так:

$$R_S^* \cong \begin{cases} \left(1 + \dfrac{2}{\lambda\left(V_{gt} - I_{sat}R_S\right)}\right) \cdot R_S\,, & \alpha V_{GT} \ll V_L\,, \\ \left(1 + \dfrac{1}{\lambda\left(V_{gt} - I_{sat}R_S\right)}\right) \cdot R_S\,, & \alpha V_{GT} \gg V_L\,. \end{cases} \tag{35}$$

Асимптотическое поведение R_S^*, в случае BSIM3/4, в зависимости от значения αV_{GT}, определяется так (случай $\alpha V_{GT} \ll V_L$ соответствует результату, полученному в [1]):

$$R_S^* \cong \begin{cases} \left(1 + \dfrac{2}{\lambda\left(V_{gt} - I_{sat}R_S\right)} - \alpha\right) \cdot R_S\,, & \alpha V_{GT} \ll V_L\,, \\ \left(1 + \dfrac{1}{\lambda\left(V_{gt} - I_{sat}R_S\right)}\right) \cdot R_S\,, & \alpha V_{GT} \gg V_L\,. \end{cases} \tag{36}$$

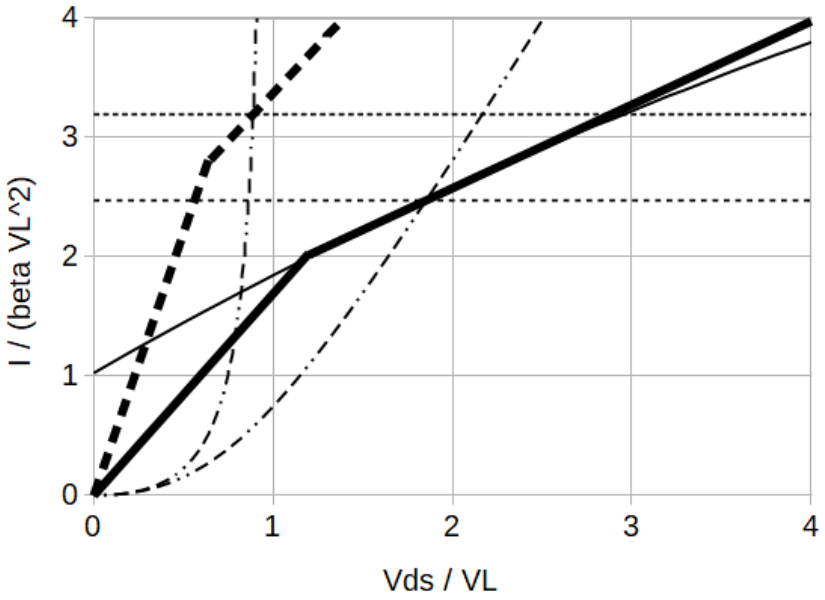


Рисунок 3 – Выходная характеристика МОП-транзистора при напряжении на затворе $V_{gt}/V_L = 3$, $\alpha = 1{,}1$, $\lambda/(1/V_L) = 0{,}5$. Сплошная толстая линия – это «внешний» случай с зависимостью асимптотики тока стока от «внешнего» напряжения на стоке в режиме насыщения согласно уравнению (38) (BSIM3/4 модель) при $R_S/(1/\beta V_L) = 0{,}3$, $R_D/(1/\beta V_L) = 0{,}1$. Сплошная толстая штриховая линия - случай «внутренней» модели. Тонкие штриховые линии – соответствующие токи насыщения. Тонкие штрихпунктирные линии – соответствующие зависимости тока насыщения от напряжения насыщения. Тонкая сплошная линия – численный расчет асимптотики тока стока от «внешнего» напряжения.

5. Выводы

Таким образом мы предлагаем для компактного моделирования МОП-транзистора использовать линейное приближение для зависимости асимптотики тока стока от «внешнего» напряжения на стоке (случай MOSFET Level 1):

$$I_{asy} = I_{sat} \cdot (1 + \lambda_{sat} V_{ds}) \ . \tag{37}$$

В случае BSIM3/4:

$$I_{asy} = I_{sat} \cdot \left(1 + \lambda_{sat} (V_{ds} - V_{sat})\right) . \tag{38}$$

I_{sat} и V_{sat} определяются уравнениями (17) и (18). Параметр λ_{sat} рассчитывается с использованием для G_{sat} уравнения (29) (случай MOSFET Level 1) или (30) (случай BSIM3/4):

$$\lambda_{sat} = G_{sat}/I_{sat} \ . \tag{39}$$

При этом I_{sat} определяется уравнением (24) и G_{sat} определяется уравнением (29) для случая MOSFET Level 1 и (30) для случая BSIM3/4. При этом аргументом всех функций, через которые выражается G_{sat}, является «внутреннее» центрированное напряжение между истоком и затвором $V_{GT} = V_{gt} - I_{sat}R_S$. На

рисунке 2 представлена зависимость параметра λ_{sat} (уравнение (39) с G_{sat} для BSIM3/4 модели (уравнение (30)) приведенного к исходному «внутреннему» значению λ от напряжения насыщения при различных значениях сопротивления истока $R_S/(1/\beta V_L)$ для случая $R_D/(1/\beta V_L) = 0{,}01,\ \alpha = 1{,}1,\ \lambda_0/(1/V_L) = 0{,}1$.

Предлагаемые нами приближенные уравнения (37) и (38) для тока стока в режиме насыщения для «внешнего» случая гарантированно проходят через точку ($I_{sat}R_T$, I_{sat}) для случая MOSFET Level 1 и через «точку насыщения» (V_{sat}, I_{sat}) для случая BSIM3/4, при этом обеспечивая правильное значение дифференциальной проводимость G_{sat} в этой точке (см. рисунок 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Турин В.О., Шкарлат Р.С., Зебрев Г.И., Шур М.С., Инигез Б. Линейное приближение для зависимости тока стока МОП – транзистора в режиме насыщения от напряжения на стоке с учётом сопротивлений истока и стока. // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы III международной научно-практической конференции. 23 – 26 ноября 2017 г., Орёл — 2017. — С. 294–298.
2. V. O. Turin, A. V. Sedov, G. I. Zebrev, B. Iñiguez, M. S. Shur, Intrinsic compact MOSFET model with correct account of positive differential conductance after saturation // Proc. SPIE 7521, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2009. – 75211H. – 2010. – Pp. 1-9.
3. V. O. Turin, G. I. Zebrev, S. V. Makarov, B. Iñiguez, M. S. Shur. The correct account of nonzero differential conductance in the saturation regime in the MOSFET compact model // International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. – 2014. – 27.– Pp. 863-874.
4. Shur M.S. Physics of Semiconductor Devices. - Prentice Hall, New. Jersey. –1990.
5. Зебрев, Г.И. Физические основы кремниевой наноэлектроники: Учебное пособие. – М.: Бином. – 2014.
6. Ytterdal T., Cheng Y., Fjeldly T.A. Device Modeling for Analog and RF CMOS Circuit. – John Willey and Sons, New York, – 2003.

УДК 530.145.65

ABERRATION OF LIGHT AND MATTER WAVE

V. O. Turin
Orel State University after Ivan Turgenev
e-mail: *voturin@mail.ru*
O. I. Markov
Orel State University after Ivan Turgenev
e-mail: *o.i.markov@mail.ru*
V. N. Poyarkov
Bolkhov Plant of Semiconductor Devices
e-mail: *oaobzpp@list.ru*

It is shown, that the one-dimensional de Broglie wave of matter for particle with mass m_0 and momentum p, mathematically, has analog - the cross-section along of x-axis of the two-dimensional light wave with wave vector $\vec{\boldsymbol{k}}(k_x, k_y)$ and frequency ω that propagates with speed of light c in plane (x, y). In "zero stationary" frame K_0 this two-dimensional wave propagates with frequency ω_0 only along y-axis and has wave vector $\vec{\boldsymbol{k}}_0(0, k_0)$. In "moving" frame K, that moves with velocity v along x-axis of K_0 frame, this wave has wave vector $\vec{\boldsymbol{k}}(k_x, k_0)$ and propagates with frequency ω under some angle to x-axis. Transformation of wave vector $\vec{\boldsymbol{k}}_0(0, k_0)$ into $\vec{\boldsymbol{k}}(k_x, k_0)$ and frequency ω_0 into ω is explained by well known light aberration effect and Doppler effect, respectively. Note, that aberration effect explains that $k_y = k_0$ is the same in K_0 and in any K frames. The cross-section along of x-axis of the two-dimensional wave in "moving" frame K gives one-dimensional wave with wave number k_x and frequency ω, that propagates along x-axis with phase velocity $v_{px} = -c^2/v$ and with group velocity $v_{gx} = -v$. The cross-section along of y-axis of this two-dimensional wave gives the one-dimensional wave with wave number k_0 and frequency ω, that propagates along y-axis with phase velocity $v_{py} = c/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Between frequency and wave numbers of these two one-dimensional waves there is relation $\omega^2 = c^2 \cdot k_0^2 + c^2 \cdot k_x^2$, that can be rewritten, after multiplication on reduced Planck constant $\hbar$, as relativistic dependence between energy, rest mass and momentum of massive particle: $E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2$.

Key words: relativistic aberration, Doppler effect, de Broglie wave, internal clock hypothesis.

INTRODUCTION

Louis de Broglie, in his 1924 PhD thesis [1], postulated the wave nature of electrons and suggested that all matter has wave properties. This concept is known as the de Broglie hypothesis, and forms a central part of the theory of quantum mechanics. Formally, this postulate was based on de Broglie conjecture that the electron has an internal clock [1, 2]. Other word, de Broglie conjecture was that a particle of mass m at rest should have an internal frequency $\nu_0 = mc^2/h$ and when the particle moves at a velocity v this frequency will be $\nu = mc^2/h \times \gamma$, where $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ is the relativistic time dilation factor. While attempts at verifying the internal clock hypothesis and measuring clock frequency are so far not conclusive, recent experimental data is at least compatible with de Broglie's conjecture [3]. In work [7] an analysis of experimental results is provided based on a previously developed four-dimensional model of the electron [5, 6]. The additional spatial degree of freedom resolves a large number of physical and mathematical conceptual issues in traditional relativistic particle and wave mechanics including the mechanism for de Broglie's internal clock. Note, that in conclusion of paper [7] there is statement that the addition of a fourth spatial dimension to relativistic wave leads to a plethora of new insights including independent physical processes for the wave and clock frequencies and if

that a fourth spatial dimension may indeed exist, it would be limited to one-half the Compton wavelength of the particle.

1. TWO DIMENSIONAL LIGHT WAVE We have plane wave with frequency ω_K and wavelength λ_K, that propagates with speed of light c in a "stationary" frame K (see Fig. 1):

$$A(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = A_m \cdot \cos(\vec{\boldsymbol{k}}_K \cdot \vec{\boldsymbol{r}} - \omega_K \cdot t). \tag{1}$$

Here $\vec{\boldsymbol{k}}_K(k_{Kx}, k_{Ky})$ is a wave vector of the considered wave, that lies in the (x, y) plane with corresponding wave number $k_K = 2\pi/\lambda_K$. For this wave we have stan-

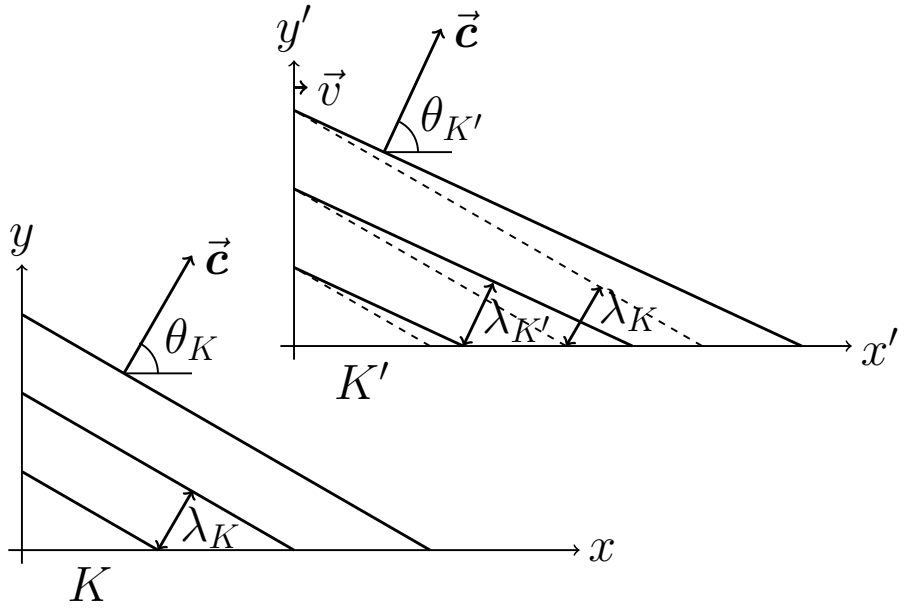


Figure 1 – Wave with frequency ω_K and wave vector $\vec{\boldsymbol{k}}_K$ propagates with speed of light c in a "stationary" frame K. In "moving" frame K' we have wave with frequency $\omega_{K'}$, determined by the Doppler effect, and wave number $\vec{\boldsymbol{k}}_{K'}$, determined by the aberration of light effect

dard, for electromagnetic waves in vacuum, dispersion law:

$$\omega_K = c \cdot k_K. \tag{2}$$

Relationship between wave number k_K and coordinates k_{Kx} and k_{Ky} of the wave vector is given by the Pythagorean theorem:

$$k_K^2 = k_{Kx}^2 + k_{Ky}^2. \tag{3}$$

Obviously, this equation, with account of dispersion law (2), can be rewritten as

$$\omega_K^2 = c^2 \cdot k_{Kx}^2 + c^2 \cdot k_{Ky}^2. \tag{4}$$

The wave vector $\vec{\boldsymbol{k}}_K$ with frequency ω_K form the components of the wave four-vector with four components that transforms according to the Lorentz transformation

[8]:

$$k^i = \left\{ \omega_K / c, \vec{\boldsymbol{k}}_K \right\}. \tag{5}$$

Next is equations for frequency $\omega_{K'}$ and components of wave vector $\vec{\boldsymbol{k}}_{K'}(k_{K'x}, k_{K'y})$ for wave in "moving" frame K', that moves with velocity v along x-axis of the "stationary" frame K (see Fig. 1):

$$\omega_{K'} = \frac{\omega_K - v \cdot k_{Kx}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{6}$$

$$k_{K'x} = \frac{k_{Kx} - v \cdot \omega_K / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{7}$$

$$k_{K'y} = k_{Ky}. \tag{8}$$

Note, that it is well known that equation (6) describes the Doppler effect and equations (7) and (8) describe the aberration of light effect [8], [9].

By using equations (6), (7) and (8), it is easy to show directly, that

$$\omega_{K'}{}^2 = c^2 \cdot k_{K'x}{}^2 + c^2 \cdot k_{K'y}{}^2. \tag{9}$$

Note, that in this equation second term on the right side $c^2 \cdot k_{K'y}{}^2$ is a constant and not depends on velocity v of "moving" coordinate frame K'.

It is possible to find relationship between angles of wave propagation in K' and K frames. For K frame:

$$\cos\theta_K = \frac{k_{Kx}}{k_K} = c\frac{k_{Kx}}{\omega_K}. \tag{10}$$

For K' frame:

$$\cos\theta_{K'} = \frac{k_{K'x}}{k_{K'}} = c\frac{k_{K'x}}{\omega_{K'}} = \\ = c\frac{k_{Kx} - v \cdot \omega_K / c^2}{\omega_K - v \cdot k_{Kx}} = \frac{c\frac{k_{Kx}}{\omega_K} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot c \cdot \frac{k_{Kx}}{\omega_K}}. \tag{11}$$

From equation (11), with accounting equation (10), we can find relationship between $\cos\theta_{K'}$ and $\cos\theta_K$, which describes the aberration of light effect [8]:

$$\cos\theta_{K'} = \frac{\cos\theta_K - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta_K}. \tag{12}$$

Now we can choose "zero stationary" coordinate frame K_0 in which wave propagates along y-axis with wavelength λ_0, i.e. with wave number $k_y = k_0 \neq 0$ and with wave number $k_x = 0$, with standard dispersion law $\omega_0 = c \cdot k_0$ (see Fig. 2):

$$A_0(y,t) = A_{m0} \cdot \cos(k_0 \cdot y - \omega_0 \cdot t). \tag{13}$$

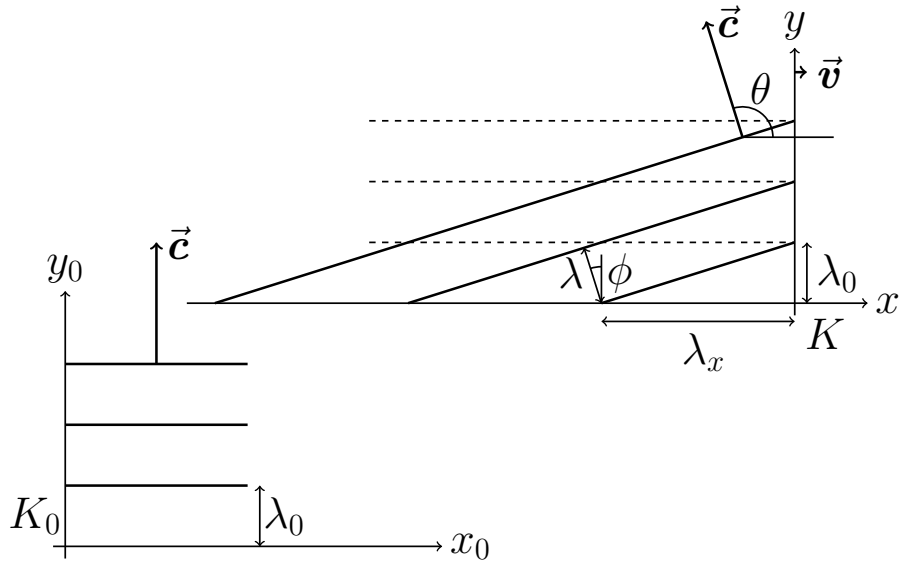


Figure 2 – In the "zero stationary" frame K_0 light wave propagates along y-axis with wavelength λ_0, i.e. with wave number $k_y = k_0 \neq 0$ and with wave number $k_x = 0$. In "moving" frame K' this wave with wavelength λ propagates under some angle to x-axis with frequency ω and wave number $\vec{\boldsymbol{k}}$

In "moving" coordinate frame K, that moves with velocity v (in positive direction along x-axis of frame K_0) we have plane wave with frequency ω and wavelength λ:

$$A(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = A_m \cdot \cos(\vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}} - \omega \cdot t). \tag{14}$$

A wave vector of this wave is $\vec{\boldsymbol{k}}(k_x, k_y)$ with corresponding wave number $k = 2\pi/\lambda$ and standard dispersion low $\omega = c \cdot k$.

Next is equations for frequency ω and components of wave vector $\vec{\boldsymbol{k}}(k_x, k_y)$, which can be directly obtained from the equations (6), (7) and (8), assuming $k_{Kx} = 0$:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{15}$$

$$k_x = -\frac{v\omega_0/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{v/c \cdot k_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{16}$$

$$k_y = k_0. \tag{17}$$

In addition, we can rewrite equation (9) for considered case:

$$\omega^2 = c^2 \cdot k_x^2 + c^2 \cdot k_0^2. \tag{18}$$

From equation (15), assuming dispersion low and definition of wave number, we can find relationship between wave lengths λ in "moving" frame K and λ_0 in frame K_0:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{19}$$

Assuming $\theta_{K'} = \theta$ and $\theta_K = \pi/2$ in equation (12), we can calculate angle θ between wave propagation direction $\vec{\boldsymbol{k}}(k_x, k_y)$ and x-axis in the "moving" coordinate frame K:

$$\cos\theta = -\frac{v}{c}. \tag{20}$$

In addition, we can consider angle ϕ between wave propagation direction and y-axis:

$$\sin\phi = \sin\left(\theta - \pi/2\right) = v/c. \tag{21}$$

Note that this result is obvious from the geometrical consideration of the well known "light clock" problem (see Fig. 3).

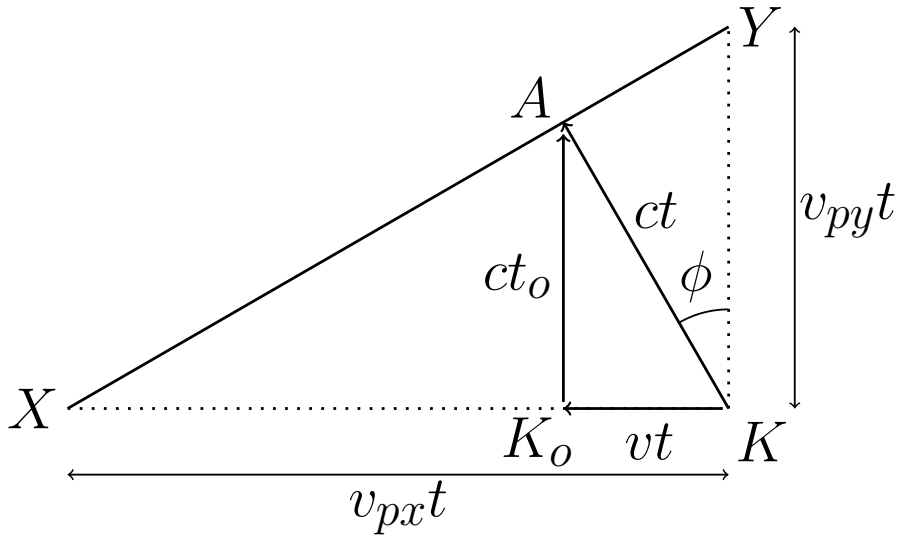


Figure 3 – Light clock

2. CROSS-SECTIONS OF THE TWO DIMENSIONAL LIGHT WAVE Now, let us consider the cross-section along of x-axis of the two-dimensional wave with wave vector $\vec{\boldsymbol{k}}(k_x, k_y)$ and frequency ω that propagates with speed of light c in plane (x, y) in the "moving" coordinate frame K. We can treat this cross-section as one-dimensional wave with wave number k_x and frequency ω that propagates along x-axis:

$$A(x,t) = A_m \cdot \cos(k_x \cdot x - \omega \cdot t). \tag{22}$$

The same way, let us consider the cross-section along of y-axis of the same two-dimensional wave. We can treat this cross-section as one-dimensional wave with wave number k_y and frequency ω that propagates along y-axis:

$$A(y,t) = A_m \cdot \cos(k_0 \cdot y - \omega \cdot t). \tag{23}$$

Let us investigate more precisely properties of these two one-dimensional waves.

Directly from Fig. 2 we can find relations between wavelengths λ_x and λ_y of two one-dimensional waves under investigation and two-dimensional wave wave-

length λ:

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\sin\phi}, \tag{24}$$

$$\lambda_y = \lambda_0 = \frac{\lambda}{\cos\phi}. \tag{25}$$

Equations for corresponding wave numbers:

$$k_x = -k\sin\phi, \tag{26}$$

$$k_y = k_0 = k\cos\phi. \tag{27}$$

From equations (26) and (27) we have:

$$k^2 = k_y^2 + k_x^2 = k_0^2 + k_x^2. \tag{28}$$

After accounting of standard dispersion low, we will obtain equation (18) again:

$$\omega^2 = c^2 \cdot k_x^2 + c^2 \cdot k_0^2. \tag{29}$$

Note, that in this case we have this equation from direct geometrical calculations with use of Fig. 2, and without direct usage of equations (6), (7) and (8), that were obtained with help of Lorentz transformations.

Now we can find phase velocities for both considered one-dimensional waves:

$$v_{px} = \frac{\omega}{k_x} = -\frac{c^2}{v} = -\frac{c}{\sin\phi}, \tag{30}$$

$$v_{py} = \frac{\omega}{k_0} = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{c}{\cos\phi}. \tag{31}$$

Note that these results are obvious from the Fig. 3.

In addition, we can find group velocity of considered one-dimensional wave with wave number k_x by using standard approach:

$$v_{gx} = \frac{\partial\omega}{\partial k_x} = \frac{\partial\omega}{\partial v} \Big/ \frac{\partial k_x}{\partial v}. \tag{32}$$

We can easily calculate both derivatives $\partial\omega/\partial v$ and $\partial k_x/\partial v$ by differentiating the equations (15) and (16):

$$\frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\omega_0 v/c^2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial k_x}{\partial v} = -\frac{\omega_0/c^2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}}. \tag{34}$$

Finally, for group velocity of wave (22) with wave number k_x and frequency ω we have:

$$v_{gx} = \frac{\partial\omega}{\partial v} \Big/ \frac{\partial k_x}{\partial v} = -v. \tag{35}$$

Minus sign shows that wave group velocity directed opposite to velocity v of the "moving" frame K .

We can see that the phase velocity of the one-dimensional wave (22), which propagates along x-axis in the "moving" frame K, is

$$v_{px} = -\frac{c^2}{v}. \tag{36}$$

Note, that this phase velocity is higher than speed of light. In addition, for group velocity of this wave we have:

$$v_{gx} = -v. \tag{37}$$

For product of group velocity v_{gx} and phase velocity v_{px} we have the recognizable equation:

$$v_{gx} \cdot v_{px} = c^2. \tag{38}$$

3. ANALOGY BETWEEN ONE-DIMENSIONAL WAVE ALONG X-AXIS AND DE BROGLIE MATTER WAVE Finally we can make an observation: the properties of considered one-dimensional wave (22), that propagates along x-axis in the "moving" frame K, are similar to one important type of waves, that used in Physics. That is de Broglie wave or matter wave [1], [10]:

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(k_x x - \omega t)} = Ae^{i(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t)} = A\cos(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t) + i \cdot A\sin(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t). \tag{39}$$

To underline similarity between matter wave and our one-dimensional wave, obtained by cross-section along x-axis of the initial two-dimensional wave, we will use notations from Quantum Mechanics. We can use designations for photon, related to considered initial light wave:

$$E_0 = \hbar\omega_0, \tag{40}$$

$$E = \hbar\omega, \tag{41}$$

$$p = \hbar k_x, \tag{42}$$

$$p_c = \hbar k_0 = \hbar\omega_0/c. \tag{43}$$

In addition, we introduce one more designation, that has recognizable form of equation for relationship between energy and rest mass:

$$m_0 = E_0/c^2. \tag{44}$$

Now we can rewrite equation (43) accounting (40) and (44):

$$p_c = E_0/c = m_0 c. \tag{45}$$

We use c-subscript index here to underline, that momentum p_c, relates to de Broglie wavelength of matter wave equal to corresponding Compton wavelength:

$$\lambda_c = h/p_c = h/m_0 c. \tag{46}$$

Now we can rewrite equations (15), (16) and (17) with new designations:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{47}$$

$$p = -\frac{m_0\, v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{48}$$

$$p_c = m_0 c. \tag{49}$$

And equation (18) can be rewritten as:

$$E^2 = (p_c c)^2 + (pc)^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2. \tag{50}$$

With use of these Quantum Mechanics designations we can rewrite equation (22) in form of de Broglie wave (39):

$$A(x,t) = A_m \cdot \cos(\frac{p}{\hbar} \cdot x - \frac{E}{\hbar} \cdot t), \tag{51}$$

In addition, we can rewrite equation (23) as:

$$A(y,t) = A_m \cdot \cos(\frac{p_c}{\hbar} \cdot y - \frac{E}{\hbar} \cdot t). \tag{52}$$

CONCLUSION

To summarize, we can see, that the one-dimensional de Broglie wave of matter with particle mass m_0 and momentum p, mathematically, has analog - the cross-section along of x-axis of the two-dimensional wave with wave vector $\vec{\boldsymbol{k}}(k_x, k_y)$ and frequency ω that propagates with speed of light c in plane (x, y). This one-dimensional wave with wave number k_x and frequency ω propagates along x-axis with phase velocity $v_{px} = -c^2/v$ and group velocity $v_{gx} = -v$. The cross-section along of y-axis of the initial two-dimensional wave is the one-dimensional wave with wave number $k_y = k_0$ and frequency ω that propagates along y-axis with phase velocity $v_{py} = c/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Relation between ω, k_x and k_0 is given by equation:

$$\omega^2 = c^2 \cdot k_0^2 + c^2 \cdot k_x^2. \tag{53}$$

This equation, after multiplication on reduced Planck constant $\hbar$ has form of relativistic dependence between energy, rest mass and momentum of massive particle:

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2. \tag{54}$$

Here we use designation $m_0 = \hbar \cdot \omega_0/c^2$. Note, that in "zero stationary" frame K_0 two-dimensional wave propagates only along y-axis with wave number $k_y = k_0$ and frequency ω_0. Transformation of this wave in K_0 frame, that is propagates perpendicular to x-axis, into two-dimensional wave with wave vector $\vec{\boldsymbol{k}}(k_x, k_y)$ that propagates under angle θ to x-axis in frame K (that moves with velocity v along x-axis of K_0 frame), is explained by well known Doppler and light aberration effects. Due to light

aberration effect $k_y = k_0$ is constant in K_0 and in any K frames. Change of frequency from ω_0 to ω is explained by well known Doppler effect. In conclusion of paper [7] there is statement that the addition of a fourth spatial dimension to relativistic wave leads to a plethora of new insights including independent physical processes for the wave and clock frequencies and if that a fourth spatial dimension may indeed exist, it would be limited to one-half the Compton wavelength of the particle. To this statement we can add that this fourth spatial dimension would be not only limited to one-half the Compton wavelength of the particle, but, in addition, would have Möbius strip shape to obtain $\pm\hbar/2$ spin value.

We thank Dr. Oleg Kshenskij and Prof. Vladimir Bykov for discussions.

REFERENCES

1. De Broglie L. Doctorate Thesis (1924). 2nd edition, Masson, Paris, 1963.
2. Гааз А. Волны материи и квантовая механика. Пер. с нем. Изд.стереотип. URSS. 2014.
3. Catillon, P., Cue, N., Gaillard, M.J. et al. Found Phys (2008) 38: 659.
4. Rivas, M., Measuring the internal clock of the electron. arXiv:0809.3635v2 [physics.class-ph]
5. Osche, G.,R., Mass, wave particle duality, and the equivalence principle in electromagnetic guided waves, Physics Essays 21(4), 260, (2008).
6. Osche, G.,R.,, Mass, wave particle duality, and the equivalence principle in relativistic quantum mechanics. Physics Essays 22(3), 233, (2009).
7. Osche, G.,R., Electron channeling resonance and de Broglie's internal clock, Annales de la Fondation Louis de Broglie, vol. 36, 2011, pp. 61–71.
8. Landau L., D., Lifshitz, E. M. The Field Theory. Nauka, Moscow. 1988. (in Russian)
9. Sivukhin, D.V. General course of the physics. Optics. Vol. IV. Nauka, Moscow. 1985. (in Russian)
10. Sivukhin, D.V. General course of the physics. Atomic and nuclear physics. Vol. V. Nauka, Moscow. 1986. (in Russian)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА МАЛЫХ ТОКОВЫХ ЗОНДОВ В АНИЗОТРОПНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

В.В. Филиппов[1,2]
[1]ФГБОУ ВО «Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского»,
[2]ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет»
e-mail: *wwfilippow@mail.ru*

Рассмотрены теоретические схемы расчета электрических полей полупроводниковых кристаллах и ограниченных пластинах с выраженной анизотропией проводимости. Получены решения для распределений потенциалов в виде рядов аналитических функций. Практическим применением предлагаемой работы является корректировка стандартных зондовых методов и контактных методик атомно-силовой микроскопии.

Ключевые слова: полупроводник, анизотропия, зондовый метод измерений.

В современной полупроводниковой электронике и наноэлектронике все большее применение находят соединения, обладающие анизотропией электрофизических свойств [1]. В ряде случаев анизотропия свойств наблюдается и у атомарных полупроводников под давлением или под влиянием внешних полей [2]. При разработке методов исследования полупроводниковых материалов, обладающих анизотропией электрических параметров, проблема, в первую очередь, заключается в сложном характере распределений электрического поля [3]. Распределение потенциала токового зонда важно также для анализа данных сканирующей зондовой микроскопии (СЗМ), например, при использовании контактной методики сопротивления растекания [4].

Рассмотрим распределение электрического поля точечного токового зонда к анизотропному полупроводнику (рисунок 1). Тензор удельной электропроводности в декартовой системе координат удобно представить в виде [2]:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где σ_x, σ_y, σ_z – значения удельных электропроводимостей по осям *x*, *y, z*.

Для случая стационарных токов уравнения для плотности тока и электрического потенциала определяются следующим образом [2]:

$$(\vec{\nabla}, \vec{j}) = 0 , \ \vec{j} = \hat{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\varphi . \qquad (2)$$

Следовательно, получаем уравнение для потенциала:

$$\sigma_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \sigma_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 . \qquad (3)$$

Рассмотрим первоначально случай распределения потенциала в полубесконечном объеме, считая геометрические параметры исследуемого образца бесконечно большими (*a, b, d* $\to\infty$). Совместим начало координат с точкой ка-

сания зонда поверхности анизотропного полупроводника, а оси координат направим вдоль кристаллофизических осей (рисунок 1).

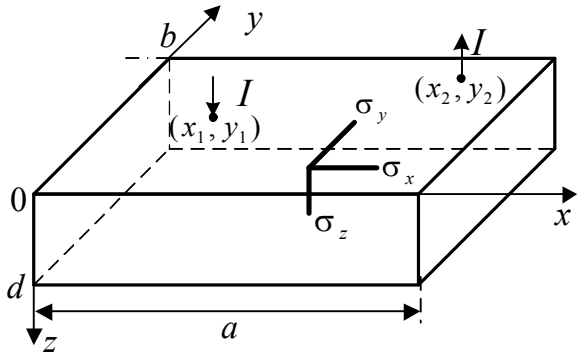


Рисунок 1 – Положение токовых зондов к анизотропному полупроводнику

Решение уравнения (3) нами получено в виде:

$$\varphi = \frac{C_1}{\sqrt{\frac{x^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z}}} + C_2, \tag{4}$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования. Считая потенциал равным нулю на бесконечности, получаем $C_2 = 0$. Постоянную интегрирования C_1 определим из условия, что поток вектора плотности тока **j** через замкнутую поверхность равен току *I*, пропускаемому через зонд.

В результате получаем потенциал точечного зонда, расположенного на поверхности анизотропной пленки в начале координат (здесь и далее нижними цифрами будем номеровать распределения потенциалов отвечающие различным граничным условиям):

$$\varphi_1 = \frac{I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z}}}. \tag{5}$$

Соответственно, распределение потенциала поля создаваемого двумя токовыми зондами с координатами $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$ примет следующий вид:

$$\varphi_{II} = \varphi_1 + \varphi_2, \tag{6}$$

$$\varphi_1 = \frac{I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(x-x_1)^2}{\sigma_x} + \frac{(y-y_1)^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z}}}, \tag{7}$$

$$\varphi_2 = \frac{-I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(x-x_2)^2}{\sigma_x} + \frac{(y-y_2)^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z}}}. \tag{8}$$

При решении электродинамических задач часто возникает необходимость учета влияния границ на распределение потенциала. В случае изотропных образцов простых геометрических форм хорошо зарекомендовал себя метод электрических изображений [5]. Обобщение данного метода на случай анизотропных сред позволит существенно сократить решение некоторых задач.

При наличии одной плоской границы потенциал, создаваемый точечным зондом *I*, находящимся в точке $A(x_1, y_1, 0)$, может быть представлен как суперпо-

зиция полей, создаваемых данным зондом I расположенном в точке A и фиктивным зондом I расположенном в точке $A'(x_1', y_1', 0)$:

$$\varphi_{\text{III}} = \varphi_I + \varphi_I', \quad \varphi_I' = \frac{I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(x-x_1')^2}{\sigma_x} + \dfrac{(y-y_1')^2}{\sigma_y} + \dfrac{z^2}{\sigma_z}}}. \tag{9}$$

Условие для непроводящей грани при $x = 0$ запишется в виде $j_x\big|_{x=0} = 0$. Отсюда получаем координаты положения фиктивного токового зонда: $x_1' = -x_1$, $y_1' = y_1$.

Очевидно, что для случая проводящей границы ($\varphi(x, y, z)\big|_{x=0} = 0$) необходимо выбрать изображение токового источника с противоположным направлением тока ($-I$) при тех же значениях координат фиктивного зонда:

$$\varphi_{\text{IV}} = \varphi_I - \varphi_I'. \tag{10}$$

Рассмотрим важный на практике случай полупроводника имеющего две плоские параллельные границы вдоль одной из кристаллографических осей.

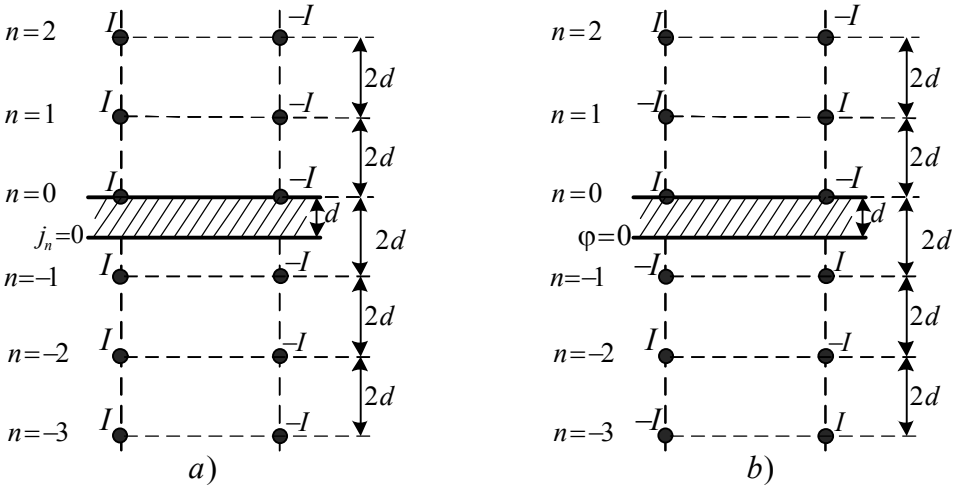


Рисунок 2 – Система источников изображения для тонкой пластины с непроводящей (a) и проводящей (b) границами

Распределение потенциала в полупроводниковой пластине толщиной d на диэлектрической подложке ($j_z\big|_{z=d} = 0$), согласно методу электрических изображений (рисунок 2a) определяется следующим образом:

$$\varphi_{\text{V}} = \frac{I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(x-x_1)^2}{\sigma_x} + \dfrac{(y-y_1)^2}{\sigma_y} + \dfrac{(z-2kd)^2}{\sigma_z}}}. \tag{11}$$

Как показано в работе [5], для случая проводящей границы необходимо чередовать мнимые источники с противоположными знаками: $+I$ и $-I$ (рисунок 2b) и распределение потенциала определяется выражением:

$$\varphi_{\text{VI}} = \frac{I}{2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{\dfrac{(x-x_1)^2}{\sigma_x} + \dfrac{(y-y_1)^2}{\sigma_y} + \dfrac{(z-2kd)^2}{\sigma_z}}}. \tag{12}$$

Для более полного учета влияния границ рассмотрим распределение по-

тенциала токового зонда к прямоугольному анизотропному образцу (рисунок 1). Потенциал нижней грани принимаем нулевым.

Опуская громоздкие математические преобразования, запишем окончательное выражение для потенциала в анизотропном полупроводнике:

$$\varphi_{\text{VII}}(x,y,z) = -\frac{I}{ab\sigma_z}\left[(z-d) + 4\sum_{n,k=0}^{\infty}\left\{\Theta_{nk}\frac{\operatorname{sh}(\eta_{nk}(z-d))}{\eta_{nk}\operatorname{ch}(\eta_{nk}d)}\cos(\alpha_n x_1)\cos(\beta_k y_1)\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_k y)\right\}\right] \quad (13)$$

$$\Theta_{nk} = \begin{cases} 1,\ n\neq 0 \wedge k\neq 0; \\ 1/2,\ n=0\wedge k\neq 0 \vee n\neq 0\wedge k=0; \\ 0, n=k=0; \end{cases}\ \eta_{nk} = \sqrt{\frac{\sigma_x}{\sigma_z}\alpha_n^2 + \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\beta_k^2}\ ,\ \alpha_n = \frac{\pi n}{a},\ \beta_k = \frac{\pi k}{b}. \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда исследуемый полупроводниковый прямоугольный образец находится на диэлектрической поверхности. Выражение для потенциала в прямоугольной области с непроводящей нижней гранью определяется в виде:

$$\varphi_{\text{VIII}}(x,y,z) = \frac{4I}{\sigma_z ab}\sum_{n,k=0}^{\infty}\left\{\Theta_{nk}\frac{\operatorname{ch}(\eta_{nk}(z-d))}{\eta_{nk}\operatorname{sh}(\eta_{nk}d)}\times\right.$$
$$\left.\times\cos(\beta_k y)\cdot\cos(\alpha_n x)\left(\cos(\beta_k y_1)\cos(\alpha_n x_1) - \cos(\beta_k y_2)\cos(\alpha_n x_2)\right)\right\}. \quad (15)$$

где $x_1, y_1,\ x_2, y_2$ – координаты первого и второго токовых зондов в плоскости $z=0$ (рисунок 1).

Рассмотрим еще один практически важный тип геометрической формы полупроводниковых образцов – диски или цилиндры (рисунок 3). В данном случае нами получено аналитическое решение для распределения потенциала при $\sigma_y = \sigma_x \neq \sigma_z$. В постановке задачи удобно воспользоваться цилиндрической системой координат, в которой уравнение для потенциала примет вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} = 0\ ,\ \xi = \gamma z,\ \gamma = \sqrt{\sigma_x/\sigma_z}\ . \quad (16)$$

Граничные условия для потенциала в случае проводящей нижней грани следуют из условия равенства нулю нормальной составляющей плотности тока на всей поверхности образца кроме точек под токовыми электродами, потенциал нижней грани образца принимаем нулевым.

Применяя граничные условия, приходим к окончательному виду решения для потенциала электрического поля в цилиндрическом образце:

$$\varphi_{\text{IX}}(r,z) = \frac{I(d-z)}{\pi\sigma_z R_0^2} + \frac{I}{\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_z}R_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\text{J}_0(\chi_n r/R_0)}{\chi_n\cdot\text{J}_0^2(\eta_n)}\frac{\operatorname{sh}(\chi_n\gamma(d-z)/R_0)}{\operatorname{ch}(\chi_n\gamma d/R_0)}\right\}, \quad (17)$$

где J_0, J_1 – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков соответственно, χ_n – корни уравнения $\text{J}_1(\chi_n)=0$.

Аналогично, в случае непроводящей границы (рисунок 3b) получаем:

$$\varphi_{\text{X}}(r,z) = \frac{I(d/2-z)}{\pi\sigma_z R_0^2} + \frac{I}{\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_z}R_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\text{J}_0(\chi_n r/R_0)}{\chi_n\cdot\text{J}_0^2(\chi_n)}\frac{\operatorname{ch}(\chi_n\gamma(d-z)/R_0) - \operatorname{ch}(\chi_n\gamma z/R_0)}{\operatorname{sh}(\chi_n\gamma d/R_0)}\right\}. \quad (18)$$

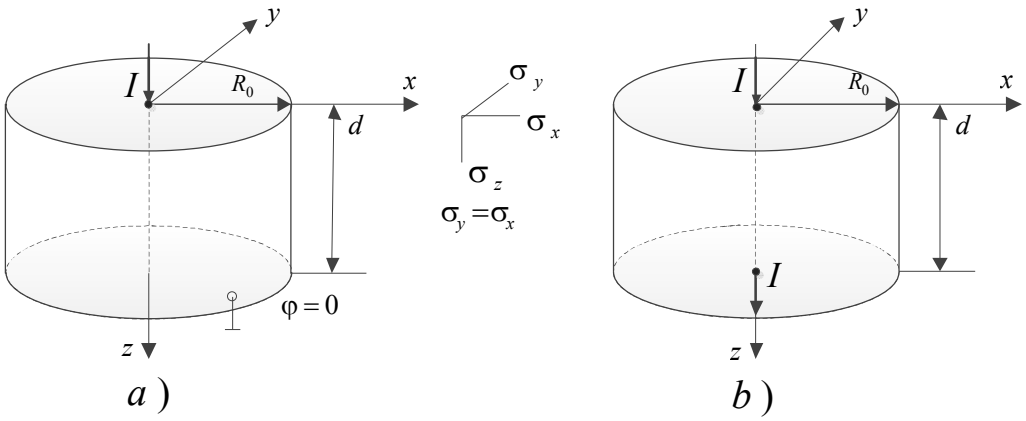


Рисунок 3 – Схема расположения контактов на анизотропном цилиндре с заземленной нижней гранью (a) и непроводящей (b)

Таким образом, представлены выражения, позволяющие определять распределение электрического поля в анизотропных полупроводниках при зондовых измерениях, рассчитывать сопротивление растекания, в том числе при СЗМ, а также предлагать методики определений компонент тензора удельной электропроводности. Полученные распределения потенциалов не зависят от рода материала и являются электродинамическими по своему характеру.

Экспериментальная проверка полученных распределений потенциала была выполнена на анизотропных кристаллах диарсенидов кадмия ($CdAs_2$) и цинка ($ZnAs_2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Драгунов В.П., Неизвестный И.Г., Гридчин В.А. Наноэлектроника. Часть 1 – М.: Юрайт, 2018. – 285 с.
2. Баранский П.И. и др. Электрические и гальваномагнитные явления в анизотропных полупроводниках – Киев: Наукова думка, 1977. – 270 с.
3. Филиппов В.В., Поляков Н.Н. Особенности гальваномагнитных явлений в пленках анизотропных полупроводников // Известия вузов. Электроника. – 2004. – № 2. – С. 9-16.
4. Неволин В. Зондовые нанотехнологии в электронике. – М.: Техносфера, 2006. – 160 с.
5. Павлов Л.П. Методы измерения параметров полупроводниковых материалов. – М.: Высшая школа, 1987. – 240 с.

ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ С РАВНЫМ НУЛЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

В.Ф. Харламов
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *vladkharl@rambler.ru*

Получены полупроводниковые материалы с отрицательным значением статической диэлектрической проницаемости $\varepsilon(0,\mathbf{k})$. Этим свойством обладают порошки, состоящие из насыщенных водородом микро- или наночастиц диэлектриков. Вследствие условия $\varepsilon(0,\mathbf{k})<0$ поляризация порошка электрическим полем сопровождается уменьшением его свободной энергии *F*. При этом возникают самосогласованные состояния свободных электронов. Из-за условия $F<0$, согласно принципу Ле Шателье, вызванное электрическим током уменьшение поляризационных зарядов сопровождается возникновением в порошке сторонних сил, разделяющих разноименные заряды. Это препятствует изменению величины *F* и изменению самосогласованных состояний электронов. Из-за действия сторонних сил в случае постоянного или синусоидального тока в поляризованном порошке при температуре 293-550 К его электрическое сопротивление равно нулю.

Ключевые слова: порошки, электрический ток, поляризация, диполь, локальное электрическое поле, свободная энергия, термодинамика необратимых процессов

Согласно дисперсионному соотношению Крамерса-Кронига статическая диэлектрическая проницаемость вещества $\varepsilon(0,\mathbf{k})$ может быть отрицательной. Для этого величина волнового вектора *k* должна превышать макроскопический размер системы. При этом создающие поле внешние заряды не должны зависеть от состояния поляризованного вещества. Выполнение условия $\varepsilon(0,\mathbf{k})<0$ обусловлено эффектами локального поля, т. е. отличием эффективного поля, действующего на заряженные частицы среды, от среднего макроскопического поля в системе, по отношению к которому определяется диэлектрическая проницаемость. Эти эффекты обусловлены обменно-корреляционным взаимодействием в поляризованной среде [1]. В веществах с отрицательной статической диэлектрической проницаемостью возможно взаимное притяжение свободных электронов среды, обеспечивающее ее сверхпроводимость по «экситонному» механизму при температуре более 300 К [1]. В литературе отсутствуют сведения о полупроводниковых материалах, удовлетворяющих условию $\varepsilon(0,\mathbf{k})<0$.

Порошки, состоящие из нано- или микрочастиц полупроводников, из-за эффектов локального поля и обменно-корреляционного взаимодействия в поляризованном состоянии удовлетворяют условиям, при выполнении которых материал может иметь отрицательное значение статической диэлектрической проницаемости. Поляризация порошка электрическим полем вызывает смещение свободных электронов, при этом у частиц порошка появляются одинаково ориентированные электрические моменты и возникают связи между частицами, обусловленные их самосогласованными электрическими микрополями. Вследствие электростатического взаимодействия зарядов диполей внутренняя энергия и свободная энергия порошка уменьшаются (при постоянных объеме и тем-

пературе) [2]. При этом, в отличие от однородных неупорядоченных сред с отрицательной статической диэлектрической проницаемостью (электролиты, ионные расплавы), энергия электростатического взаимодействия в системе существенно больше кинетической энергии хаотического движения носителей заряда. Кроме того, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(0,\mathbf{k})$ становится отрицательной величиной уже при относительно небольших значениях волнового вектора, что обеспечивает отрицательное значение свободной энергии F порошка в поляризованном состоянии:

$$F = \varepsilon_0 \int \varepsilon(0,\mathbf{k}) \left|\mathbf{E}(0,\mathbf{k})\right|^2 \mathrm{d}^3 k / 2 < 0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{E}(0,\mathbf{k})$ - фурье – разложение напряженности электрического поля. Благодаря выполнению условия (1) порошки обладают уникальными электрофизическими свойствами.

Возможно самопроизвольное возникновение макроскопического электрического поля в порошке, при этом уменьшается его свободная энергия F_p:

$$F_p = \varepsilon(0,\bar{k})\varepsilon_0 E_p^2 / 2 < 0,$$

где E_p - напряженность электрического поля спонтанной поляризации. Этот эффект обусловлен электростатическим взаимодействием зарядов диполей частиц порошка [2]. Экспериментальным данным [2], согласно условию $F_p < 0$, соответствует отрицательное значение статической диэлектрической проницаемости $\varepsilon(0,\bar{k})$ насыщенных водородом порошков.

Пусть порошок поляризован, а электрический ток в нем сопровождается уменьшением поляризационных зарядов и, соответственно, увеличением свободной энергии порошка (1), имеющей отрицательное значение. Согласно принципу Ле Шателье термодинамики необратимых процессов [3], в порошке возникают сторонние силы, разделяющие разноименные заряды и увеличивающие энергию электростатического взаимодействия зарядов диполей. Сторонние силы создают электродвижущую силу (э.д.с.) G. Эта э.д.с. G, перемещая электрические заряды в цепи вдоль замкнутого на порошок проводника, совершает работу. Работа системы против внешних сил dA и работа внешних сил над системой dW связаны соотношением $dA = -dW$. К мелкодисперсному проводнику в стационарном состоянии применим равенство $dA/dt = -dW/dt$, где dt – бесконечно малый интервал времени. Находим:

$$dA/dt = JG; dW/dt = -rJ^2;$$
$$G = -rJ, \qquad (2)$$

где J - сила тока в цепи; r – сопротивление мелкодисперсного проводника. Напряжение на мелкодисперсном проводнике равно нулю:

$$u = u_r + G = rJ - rJ = 0. \qquad (3)$$

Поэтому на основании закона Ома имеем:

$$J = U / R, \qquad (4)$$

где U - э.д.с. источника тока; R - сопротивление цепи без сопротивления порошка r. Равенства (3) и (4) соответствуют значению $r = r_{ef} = 0$ в случае посто-

янного или переменного тока. Для этого в произвольный момент времени должно выполняться условие $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, где $\mathbf{D}$ - индукция поля в порошке. При этом $\varepsilon = \varepsilon(\omega, \bar{k}) < 0$; $\omega \geq 0$.

Электрический ток в порошке, состоящем из наночастиц, зависит от вероятности туннельного прохождения электронами зазоров между частицами в области их контактов. В результате перехода электрона из одной наночастицы в другую между ними возникает разность потенциалов $2e/c \approx 0.1$ В, где e – заряд электрона; c – электрическая емкость частицы порошка. Это влияет на движение электронов между частицами. Возможны корреляции в движении испытывающих притяжение пар электронов. Поэтому можно допустить, что в порошке возникает самосогласованное движение электронов, которое состоит в изоэнергетических туннельных переходах пар электронов между частицами порошка. Аналогичные корреляции, обусловленные действием самосогласованных микрополей поляризованных частиц, могут определять силу переменного тока в порошках из микрочастиц.

Нами получены экспериментальные результаты (приведенные в докладе), свидетельствующие о выполнении условий (2) - (4) в случае синусоидального тока (в произвольный момент времени) или постоянного тока в порошках.

Таким образом, из-за уменьшения вследствие электрического тока поляризационных зарядов в порошке с отрицательной свободной энергией, согласно принципу Ле Шателье, возникают сторонние силы, восстанавливающие эти заряды. При этом, сохранение самосогласованных поляризационных зарядов частиц порошка обусловлено самосогласованным движением электронов между частицами и в их объеме. Разделение сторонними силами разноименных зарядов соответствует возникновению в порошке электродвижущей силы (2). При этом, согласно выражениям (3) и (4), сопротивление порошка $r = r_{ef}$ равно нулю, независимо от его температуры. Этот эффект и сверхпроводимость веществ имеют совпадающие причины: взаимное притяжение электронов и их самосогласованное движение. При этом, фазовый переход электронов в состояние, в котором $r = 0$, имеет разную природу: обусловлен поляризацией порошка или, соответственно, охлаждением вещества ниже критической температуры.

Автор благодарит А. А. Соколова и В.О. Сергеева за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булаевский Л.Н., Гинсбург В.Л. Жарков Г.Ф. и др. Проблема высокотемпературной сверхпроводимости. – М.: Изд-во Наука, – 1977. – С. 60, 62, 69.
2. Харламов В.Ф. Спонтанная поляризация мелкодисперсных диэлектриков с донорными центрами на их поверхности // Поверхность. Ренг., синхрот. и нейтр. исследования. – 2017. – № 9. – С. 65-72.
3. Базаров И.П. Термодинамика. – М.: Высшая школа, – 1991. – С. 190, 271.

Инженерные приложения физико-математических наук

ПРИЛОЖЕНИЕ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ К АНАЛИЗУ И СИНТЕЗУ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫХ СХЕМ

А.Е. Белых
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *oli200t@mail.ru*
А.А. Орлова
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *tadarovih@gmail.com*

В статье рассматриваются анализ и синтез релейно-контактных схем средствами алгебры логики.

Ключевые слова: булева функция, релейно-контактная схема, функция проводимости.

Современного человека окружают тысячи автоматических устройств. Их можно разделить на устройства дискретного и устройства непрерывного действия. К устройствам дискретного действия относятся, например, цифровые вычислительные машины. Их работа характеризуется прерывной, скачкообразной сменой конечного числа состояний. Примером устройств непрерывного действия являются моделирующие или аналоговые машины, для которых характерно непрерывное плавное изменение состояний. Физическая природа автоматических устройств определяется электротехническими, механическими и другими характеристиками элементов, которые их составляют. Кроме этого, составляющие элементы имеют функциональные характеристики, которые учитывают назначение каждого элемента и образуют логическую структуру устройства.

Рассматривая простейший случай, когда элементы устройства имеют только два возможных состояния, то есть, когда они работают по принципу «да - нет», «замкнуто - разомкнуто» (всевозможные включатели, переключатели, кнопки), было замечено глубокое сходство между элементами такого типа и высказываниями. Это и послужило основой приложения символизма математической логики для описания действия технических устройств, а именно, было обращено внимание на связь алгебры логики и схем дискретного действия. Мы покажем применение аппарата нормальных функций к синтезу и анализу электрических релейно-контактных схем.

Под релейно-контактной схемой понимается устройство из проводников и двух позиционных контактов. Оно может быть предназначено, например, для соединения (или разъединения) полюсов источника тока с некоторым потреби-

телем. Контакты релейно-контактной схемы могут быть двух типов: замыкающие и размыкающие. Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). К одному реле может быть подключено несколько контактов — как замыкающих, так и размыкающих. Технически реле представляет собой катушку с металлическим сердечником (магнитопроводом), вблизи которого находится соответствующий контакт.

Когда через катушку пропускается электрический ток, металлический сердечник намагничивается и замыкает все находящиеся при нем замыкающие контакты. Одновременно все размыкающие контакты, относящиеся к данному реле, размыкаются. Так как замыкающие контакты при отсутствии в реле электрического тока разомкнуты, то они называются также нормально разомкнутыми. Аналогично, размыкающие контакты называются также нормально замкнутыми. При обесточивании обмоток реле отключается, все замыкающие контакты снова размыкаются, а все размыкающие, замыкаются.

Если каждому реле поставить в соответствие свою булеву переменнуюX, или Y, …, или Z, принимающую значение 1, срабатывании реле, и значение 0 при отключении реле. На чертеже все замыкающие контакты, подключенные к реле X, обозначаются тем же символом X, а все размыкающие контакты, подключенные к этому реле, обозначаются отрицанием $\overline{X}$. Это означает, что при срабатывании реле X все его замыкающие контакты X проводят ток и им соответствует 1, а все размыкающие контакты $\overline{X}$ не проводят электрический ток, и им соответствует 0. Если реле X отключено, то создается противоположная ситуация.

Всей релейно-контактной схеме ставится в соответствие булева функция F, зависящая от булевых переменныхX, Y,.., Z, соответствующих тем реле, которые участвуют в схеме. Если при данном наборе состояний реле X, Y,.., Z (некоторые из этих реле находятся в рабочем состоянии под током, остальные отключены, т.е. "обесточены") вся релейно-контактная схема проводит электрический ток, то F ставится в соответствие значение 1, в противном случае 0. Поскольку каждый набор состояний реле X, Y,.., Z характеризуется набором, составленным из нулей и единиц и имеющим определенную длину , то данная релейно-контактная схема определяет некоторое правило, по которому каждому такому набору соответствующей длины, составленному из нулей и единиц, сопоставляется либо 0, либо 1. Таким образом, булева функция F(X, Y,.., Z) называется функцией проводимости данной релейно-контактной схемы.

Проблема проектирования логических схем сводится к отысканию оптимальной эквивалентной схемы, состоящей из возможно меньшего числа элементов. Логическим синтезом схемы дискретного действия называется определение логической структуры устройства по заданным условиям его работы. Логическим анализом схемы дискретного действия называется определение условий работы устройства по его известной логической структуре.

Покажем, как по данной релейно-контактной схеме (рисунок 1) найдите её функциональную проводимость:

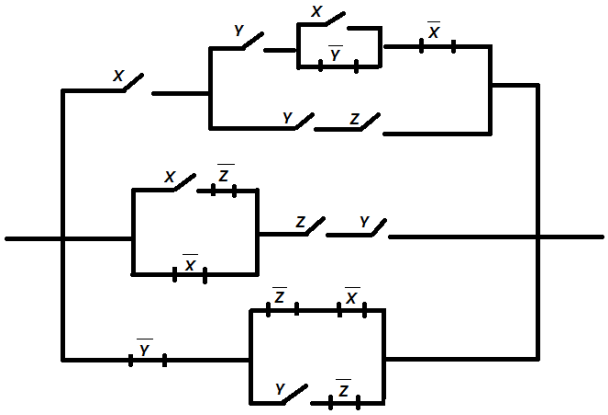


Рисунок 1 – Схема 1

Сначала составим функцию проводимости данной схемы:

F(X, Y, Z)=(X∧((Y∧(X∨1Y)∧1X)∨(Y∧Z)))∨(((X∧1Z)∨1X)∧Z∧Y)∨

∨ (1Y∧((1Z∧1X)∨(Y∧1Z))

Теперь упростим её с помощью формул равносильного преобразования расчленив её на три части по числу слагаемых дизьюнкции:

1) X∧((Y∧(X∨1Y)∧1X)∨(Y∧Z))=X∧((Y∧((X∧1X)∨(1Y∧1X)∨(Y∧Z))=

=X∧((Y∧1Y)∧1X)∨(Y∧X))=X∧(Y∧Z)

2) ((X∧1Z)∨1X)∧Z∧Y=(((X∨1X)∧(1Z∨1X))∨1X)∧Z∧Y=((1X∨1X)∨1Z)∧Z∧Y=

=((1X∧Z)∨(1Z∧Z))∧Y=1X∧Z∧Y

3) 1Y∧((1Z∧1X)∨(Y∧1Z)=(1Y∧(1Z∧1X))∨(1Y∧(Y∧1Z))=1Y∧(1Z∧1X)

В результате получим: (X∧(Y∧Z))∨(1X∧Z∧Y)∨(1Y∧(1Z∧1X))

Таблица истинности для этой формулы:

X	Y	Z	(X∧(Y∧Z))∨(1X∧Z∧Y)∨(1Y∧(1Z∧1X))
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Следовательно, функция проводимости этой схемы F(X, Y, Z)=F(0,0,0)=1; F(0,1,1)=1; F(1,1,1)=1.

Следующим примером проиллюстрируем, как синтез релейно-контактной схемы позволяет ее упростить.

Построим наиболее простую релейно-контактную схему с четырьмя переключателями X, Y, Z, T, которая должна проводить электрический ток тогда и только тогда, когда выполнено по меньшей мере одно из следующих условий: а) переключатель X замкнут и только один из переключателей Y или Z замкнут; б) T разомкнут и только два из остальных переключателей разомкнуты; в) только два переключателя, исключая пару Y, T замкнуты [1].

Используя условия, которым должна удовлетворять искомая схема, составим сначала таблицу значений функции проводимости F этой схемы (в последнем столбце таблицы, названном «Условие», указано то условие, но которому функция F принимает значение 1 на данном наборе значений аргументов):

X	Y	Z	T	F(X,Y,Z,T)	Условие
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	1	Б
0	0	1	1	1	В
0	1	0	0	1	Б
0	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	В
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	Б
1	0	0	1	1	В
1	0	1	0	1	А
1	0	1	1	1	А
1	1	0	0	1	А
1	1	0	1	1	А
1	1	1	0	0	
1	1	1	1	0	

Заметим, при каких наборах переменных функция F принимает значение 0, и запишем для неё выражение, используя совершенную конъюнктивную нормальную форму (так как наборов значений аргументов, на которых функция обращается в 0, значительно меньше, чем наборов значений аргументов, на которых функция обращается в 1, и значит, СКНФ будет более простой, чем СДНФ), и затем упростим его:

F(X,Y,Z,T)=0

(X∨Y∨Z∨T)∧(X∨Y∨Z∨¬T)∧(X∨¬Y∨Z∨¬T)∧(X∨¬Y∨¬Z∨¬T)∧(¬X∨¬Y∨¬Z∨T)∧
∧ (¬X∨¬Y∨¬Z∨T)=(X∨Y∨Z∨T¬T)∧(X∨¬Y∨Z¬Z∨¬T)∧(¬X∨¬Y∨¬Z∨T¬Y)=
=(X∨Y∨Z)∧(X∨¬Y∨¬T)∧(¬X∨¬Y∨¬Z)=
=[X∨(Y∨Z)∧(¬Y∨¬T)]∧(¬X∨¬Y∨¬Z)=(X∨¬Y∧Z∨Y∧¬T)∧(¬X∨¬Y∨¬Z)=
=¬X∧¬Y∧Z∨¬X∧Y∧¬T∨X∧¬Y∨¬Y∧Z∨X∧¬Z∨Y∧¬Z∧¬T=
=¬X∧¬Y∧Z∨X∧¬Y∨(X∨¬X)∧¬Y∧Z∨X∧(Y∨¬Y)∧¬Z∨(X∨¬X)∧Y∧¬Z∧¬T=
=¬X∧¬Y∧Z∨X∧¬Y∧Z∨¬X∧¬Y∧Z∨X∧Y∧¬Z∨X∧¬Y∧¬Z∨X∧Y∧¬Z∧¬T∨¬X∧Y∧
∧¬Z∧¬T∨¬X∧Y∧¬T=
=¬X∧¬Y∧Z∨X∧¬Y∨X∧Y∧¬Z∨¬X∧Y∧¬T=(¬X∧Z∨X)∧¬Y∨(X∧¬Z∨¬X∧¬T)∧Y=
=(¬X∨X)∧(Z∨X)∧¬Y∨(X∧¬Z∨¬X∧¬T)∧Y=(X∨Z)∧¬Y∨(X∧¬Z∨¬X∧¬Y)∧Y.

Изображение релейно-контактной схемы будет выглядеть так (рис. 2):

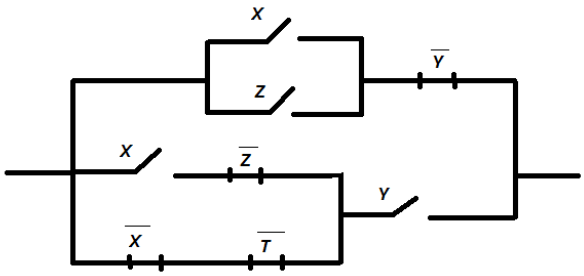


Рисунок 2 – Схема 2

Таким образом, алгебра логики дает возможность представлять математические модели реальных физических релейно-контактных схем, исследовать их на проводимость путем построения функции проводимости и, проводя преобразования нормальных форм (дизьюнктивных или коньюнктивных), записанных в виде логических формул, приходить к более упрощенному варианту.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. – М.: ИЦ Академия, 2006.
2. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: ИНФРА-М, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004.
3. Шабунин Л.В. Математическая логика. Логика высказываний и логика предикатов. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2003.

ЭФФЕКТИВНЫЕ ОЦЕНКИ В ЦИФРОВОЙ СТЕГАНОГРАФИИ: НИЖНЯЯ ГРАНИЦА КРАМЕРА–РАО, МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

А.В. Болбенков, к.т.н.
Академия ФСО России
e-mail:*ya.abv2009@ya.ru*
И.Е. Корогодин
Академия ФСО России
e-mail: *ekorogodin@yandex.ru*

В процессе формирования цифровые изображения искажаются случайными помехами (или шумами). Наиболее распространенным видом помех является статистически независимый флуктуационный шум, который характеризуется своей дисперсией и корреляционной функцией. Для учета искажений необходимо произвести оценку его статистических характеристик. На практике существуют три возможных подхода для решения этой задачи. Во-первых, для оценки дисперсии можно получить нижнюю границу Крамера–Рао (CRLB) и показать, что полученная оценка дисперсии близка к теоретической границе. Во-вторых, есть возможность использовать теорему Рао–Блеквела–Леманна–Шеффе, на основе которой можно улучшать статистические оценки параметров. В-третьих – ограничить вариацию классом линейных оценок.

НИЖНЯЯ ГРАНИЦА КРАМЕРА–РАО. Рассмотрим принципы расчета нижней границы Крамера–Рао(CRLB) для несмещенной оценки с минимальной дисперсией (MVU). Для этого введем определенные термины и получим несколько полезных соотношений.

Выборка независимых наблюдений *pdf* $p(x;\theta)$ удовлетворяет условию регулярности, если

$$E\left[\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}\right] = 0 \quad \text{для всех } \theta, \tag{1}$$

где математическое ожидание берется по отношению *pdf* $p(x;\theta)$.

Условие регулярности означает, что

$$\int p(x;\theta)\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}dx = \int \frac{\partial p(x;\theta)}{\partial \theta}dx = \frac{\partial}{\partial \theta}\int p(x;\theta)dx = \frac{\partial 1}{\partial \theta} = 0. \tag{2}$$

Получаем,что для реальных случаев замена производной будет оправдана, если она станет интегрируемой мажорантой для некоторого диапазона значений *pdf* . Таким образом, условие регулярности на самом деле не является строгим и практически всегда выполняется.

Путём частного дифференцирования условия регелярности по θ, получим

$$E\left[\frac{\partial^2 \log p(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right] = -E\left[\left(\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right], \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\int p(x;\theta)\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}dx = 0, \tag{4}$$

$$\int p(x;\theta)\frac{\partial^2 \log p(x;\theta)}{\partial \theta^2}dx = -\int \frac{\partial p(x;\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}dx, \tag{5}$$

$$\int p(x;\theta)\frac{\partial^2 \log p(x;\theta)}{\partial \theta^2}dx = -\int p(x;\theta)\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}dx, \tag{6}$$

$$E\left[\frac{\partial^2 \log p(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right] = -E\left[\left(\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]. \tag{7}$$

Теорема 1.[О нижней границе Крамера–Рао]Пусть *pdf* значений $p(x;\theta)$ удовлетворяет условию регулярности (1). Тогда дисперсия любой несмещённой оценки $\hat{\theta}$ удовлетворяет неравенству

$$Var\left[\hat{\theta}\right] \geq \frac{1}{-E\left[\dfrac{\partial^2 \log p(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right]}. \tag{8}$$

Более того, несмещённая оценка достигает границы,существующей для всех θ, тогда и только тогда,когда

$$\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta} = I(\theta)(g(x) - \theta) \tag{9}$$

для некоторых функций g и I.

Значение MVUи его дисперсия соответственно равны

$$\hat{\theta} = g(x), \tag{10}$$

$$Var[\hat{\theta}] = \frac{1}{I(\theta)}. \tag{11}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы – это прямое следствие неравенства Коши–Шварца. Пусть $g(x)$ есть функция несмещённой оценки. Так как оценка несмещена, то имеем

$$\int g(x)\, p(x;\theta) dx = \theta. \tag{12}$$

Дифференцируя данное равенство по θ, получаем

$$\int \frac{\partial p(x;\theta)}{\partial \theta} g(x) dx = 1, \tag{13}$$

$$\int p(x;\theta) \frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta} g(x) dx = 1, \tag{14}$$

$$\int p(x;\theta) \frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta} (g(x) - \theta) dx = 1. \tag{15}$$

Последнее равенство вытекает условием регулярности, т.е.

$$\int p(x;\theta) \frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}\ \theta\ dx = \theta\ E\left[\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}\right] = 0. \tag{16}$$

Используем неравенство Коши–Шварца к области квадратично интегрируемых функций с помощью *pdf* $p(x;\theta)$ со скалярным произведением $\langle f, h \rangle = \int w(x) f(x) h(x) dx$, где весовая функция w представляет собой *pdf*. Неравенство говорит о том, что $\langle f, h \rangle^2 \leq \|f\|^2 \|h\|^2$ или $(\int w(x) f(x) h(x) dx)^2 \leq \int w(x)(f(x))^2 dx \times \int w(x)(h(x))^2 dx$. В нашем случае, $w(\theta) = p(x;\theta)$, $f(x) = \partial \log p(x;\theta)/\partial \theta$, $h(x) = g(x) - \theta$. Таким образом,имеем

$$1 \le \int p(x;\theta)\left(\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2 dx \times \int p(x;\theta)(g(x)-\theta)^2\,dx, \tag{17}$$

$$1 \le E\left[\left(\frac{\partial \log p(x;\theta}{\partial \theta}\right)^2\right] \times Var\left[\widehat{\theta}\right], \tag{18}$$

что определяет границы (вместе с равенством(3)).

Равенство в неравенстве Коши–Шварца выполняется тогда и только тогда,когда функции f и h коллинеарны или одно кратно другому. Равенство существует тогда и только тогда,когда

$$\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta} = I(\theta)(g(x)-\theta), \tag{19}$$

что доказывает половину утверждения CRLB.

Докажем,что, если равенство (19) верно,то $g(x)$ оценка MVU, а $1/I(\theta)$ – его дисперсия. Применяя математическое ожидание (19) относительно $p(x;\theta)$, получаем, что левая часть, отвечающая условию регулярности, равна 0. Правая часть равняется $I(\theta)$ и представляет собой смещенную оценку, $I(\theta)E[g(x)-\theta]$.Таким образом, $\widehat{\theta} = g(x)$ является несмещенной оценкой. Чтобы показать дисперсию, сначала вычислим аналитическую форму для $I(\theta)$. Продифференцируем (19)относительно θ и снова определим математическое ожидание:

$$\frac{\partial^2 \log p(x;\theta)}{\partial \theta^2} = I'(\theta)(g(x)-\theta) - I(\theta) \tag{20}$$

$$E\left[\frac{\partial^2 \log p(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right] = E[I'(\theta)(g(x)-\theta) - I(\theta)] = -I(\theta) \tag{21}$$

Следовательно,

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \log p(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right] = E\left[\left(\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]. \tag{22}$$

Для вычисления дисперсии от $\widehat{\theta} = g(x)$ перепишем выражение (19) и его квадрат, и возьмем математическое ожидаемое от обеих сторон:

$$\frac{1}{I(\theta)}\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta} = g(x)-\theta, \tag{23}$$

$$E\left[\frac{1}{I(\theta)}\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}\right] = E[(g(x)-\theta)^2] = Var\left[\widehat{\theta}\right] \tag{24}$$

$$\frac{1}{I(\theta)^2} E\left[\left(\frac{\partial \log p(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right] = Var\left[\hat{\theta}\right], \tag{25}$$

$$\frac{1}{I(\theta)} = Var[\hat{\theta}]. \tag{26}$$

□

Последнее равенство следует из аналитического выражения для $I(\theta)$.

Величина $I(\theta) = E[(\partial \log p(x;\theta)/\partial\theta)^2]$ называется информацией Фишера. Это мера того, как быстро изменяется *pdf* при замене θ на x. Заметим что, чем быстрее изменяется *pdf*, тем точнее можно определить оценку θ. Чем последняя больше, тем меньше оценка дисперсии несмещенной оценки, $Var[\hat{\theta}] \geq 1/I(\theta)$.

Информация Фишера всегда неотрицательна и аддитивна, когда наблюдения независимы. Поэтому для независимых наблюдений

$$p(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x[i];\theta) \tag{27}$$

получаем информацию Фишера

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \log p(x[i];\theta)}{\partial\theta^2}\right] = -\sum_{i=1}^{n} E\left[\frac{\partial^2 \log p(x[i];\theta)}{\partial\theta^2}\right] = \sum_{i=1}^{n} I_i(\theta), \tag{28}$$

где $I_i(\theta)$–информация Фишера каждого наблюдения.

Следует заметить, что на практике метод CRLB для расчета оценок MVU используют редко. Двумя наиболее распространенными методами являются метод максимального правдоподобия и оценка апостериорного максимума.

МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ. В методе максимального правдоподобия (MLE) параметры оцениваются по измерениям x, используя следующую задачу оптимизации:

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} p(x|\theta). \tag{29}$$

Когда измерения независимы,

$$p(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x[i]|\theta). \tag{30}$$

Поскольку увеличение вероятности в (29) совпадает с увеличением ее логарифма, получаем

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} \sum_{i=1}^{n} \log p(x[i]|\theta) \tag{31}$$

и искомый параметр может быть получен путем решения следующего алгебраического уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log p(x[i]|\theta)}{\partial \theta} = 0 . \quad (32)$$

Когда θ – векторный параметр, выражение (32) обобщается в систему из k алгебраических уравнений для k неизвестных $\theta[k]$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log p(x[i]|\theta)}{\partial \theta[k]} = 0 \text{ для всех } k . \quad (33)$$

Метод максимального правдоподобия часто применяется при использовании параметрического распределения к экспериментальным данным.

УДК 534.7

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ НА ОСНОВЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

А.Ю. Вареникова
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»
e-mail: *avarenikova@sfedu.ru*
Н.Н. Чернов, д.т.н., проф.
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»
e-mail:*nnchernov@sfedu.ru*

Рассматривается способ экспериментального определения нелинейности в слоистой неоднородной биологической среде на основе анализа процессов образования и распространения второй гармоники акустического сигнала. Описаны акустические характеристик исследуемого биологического объекта. Приведена схема проведения исследованийнелинейности в неоднородной среде на основе измерения амплитуды акустического давления в волне второй гармоники, реализуемая с помощью разработанной экспериментальной установки. Представлена структурная схема установки, приведен алгоритм её работы. Разработана методика проведения экспериментальных исследований, определены основные технические характеристики установки.

Ключевые слова: нелинейные параметры биологических тканей, вторая гармоника акустической воны, амплитуда звукового давления, колебательная скорость, слоистые биологические среды, экспериментальная установка.

Измерение распределения акустических параметров в сечении исследуемого биологического объекта позволяет изучить структуру объекта, выявить изменения в нем, вызываемые патологическими процессами [1]. Одним из распространенных методов исследования внутренних структур биологического объекта является восстановление распределения акустических импедансом в исследуемой среде. Несмотря на свое широкое применение в медицинской практике, методы построения картины распределения акустических импедансов в сечении слоистой биологической среды не позволяют своевременно выявлять

незначительные изменения в структуре исследуемого объекта на ранних стадиях их возникновения. Это обусловлено тем, что значения акустических импедансов здоровых и патологических тканей в таком случае достаточно близки.

Восстановление распределения нелинейного параметра в сечении исследуемого объекта на основе анализа параметров второй гармоники акустической волны более информативно. Известно, что нелинейный параметр обладает большей чувствительностью к структурным изменениям биологических тканей по сравнению с линейными характеристиками среды и позволяет повысить контактность изображения [2,3]. Точность определения координат и размеров области структурных изменений в исследуемом объекте оказывает большое влияние на достоверную постановку диагноза [4].

Проведенные ранее экспериментальные измерения нелинейного параметра в биологических тканях [5,6] говорят о возможности построения изображения исследуемых объектов на основе восстановления картины распределения нелинейного параметра, выступающего в роли структурной характеристики среды. Данные исследования проводились для схем измерения нелинейного параметра, работающих на комбинационных частотах. Такие схемы требуют обязательного учета геометрии эксперимента, что приводит к усложнению процесса съема нелинейного параметра.

Схемы измерения нелинейного параметра, основанные на определении амплитудных характеристик высших гармоник акустической волны, не требуют такого строгого учета условий эксперимента, что упрощает процесс восстановления значений нелинейного параметра [7].

С учетом указанных выше допущений было проведено моделирование процессов прохождения второй гармоники ультразвуковой волны через нелинейную слоистую биологическую среду [8].

В качестве фантомов биологического объекта были выбраны свиная мышечная ткань и свиная жировая ткань. Выбор обусловлен тем, что данные ткани наиболее близки по акустическим характеристикам к мягким тканям человеческого организма. В качестве имитатора инородного включения был выбран агар (желатин).

В процессе проведения экспериментальных исследований был использован макет биологических тканей человека из группы слоев с акустическими характеристиками, представленными в таблице 1.

Таблица 1 - Акустические характеристики группы слоев

№	Среда	Плотность среды, кг/м^3	Скорость звука в среде, м/с	Нелинейный параметр среды
1	Вода	1000	1497	3,5
2	Свиная жировая ткань	930	1450	11,1
3	Свиная мышечная ткань	1026	1575	2,6
4	Агар (желатин)	1300	1550	1,45

Экспериментальное определение нелинейного параметра в слоистой неоднородной среде на основе измерения амплитуды второй гармоники проходящей акустической волны предполагает решение следующих задач:

- измерение амплитудных распределений давления и на его основе расчет колебательной скорости второй гармоники акустического сигнала, взаимодействующего со средой;
- восстановление распределения нелинейного параметра в выбранном сечении слоистой неоднородной среды.

Для достижения поставленной цели и решения обозначенных задач была разработана следующая схема экспериментальных исследований.

В измерительный бассейн, содержащий бидистиллированную воду, помещен закрепленный на поворотном устройстве исследуемый биообъект с инородным включением. Кроме биологического объекта, в бассейн помещены излучатель и приемник. Ультразвуковая волна, формируемая излучателем, облучает исследуемый объект под фиксированным углом наклона. Прошедший сигнал регистрируется приемником, затем происходит поворот исследуемого объекта на заданный угол, и измерения повторяются уже под новым углом наклона. В процессе измерений регистрируются амплитудные распределения давления второй гармоники сигнала и соответствующие им координаты, которые затем пересчитываются в значения колебательной скорости. По полученным амплитудным значениям колебательной скорости происходит восстановление распределения нелинейного параметра.

Направляющие поворотного устройства закреплены на раме, которая вращается вокруг неподвижной оси. Для каждого положения рамы измеряется набор проекций, соответствующих набору пересекающихся лучей.

Для реализации описанной выше схемы экспериментальных исследований была разработана лабораторная установка, структурная схема которой представлена на рисунке 1.

Рисунок 1 – Структурная схема лабораторной установки

Установка состоит из отдельных блоков излучающего и приемного трактов, поворотного устройства, модели биологических тканей человека (исследуемый объект) и персонального компьютера (ПК).

Экспериментальная установка имела следующие технические характеристики: рабочая частота излучающего тракта 2 МГц, с интенсивностью 1 Вт/см^2, пьезокерамический излучатель имел форму диска диаметром 10 мм. В качестве приемника использовался пьезокерамический цилиндр диаметром 0,8 мм и длиной 10 мм с резонансной частотой 1,8 МГц.

Работа установки проводилась по следующему алгоритму. Сигнал с генератора поступал на формирователь импульсов, на осциллографе контролировались амплитуда, длительность и частота следования импульсов. Далее сформированный импульс, проходя через усилитель, поступал на излучатель. Сформированная при взаимодействии акустического сигнала исследуемого объекта вторая гармоника принималась цилиндрическим приемником и далее электрический сигнал, проходя через усилитель и фильтр, выделяющий вторую гармонику, поступал на осциллограф и на ПК.

В процессе экспериментального исследования регистрировались координаты положения подвижной системы излучатель-приемник и соответствующие им значения амплитуд давления второй гармоники акустического сигнала при заданном угле поворота приемника и излучателя, которые затем пересчитываются в значения колебательной скорости.

Для проведения серии измерений нелинейного параметра в исследуемом биологическом объекте была разработана методика проведения экспериментальных исследований.

Установленные на раме излучатель и приемник опускались в измерительный бассейн. Приемник был выставлен на оси симметрии в ближней зоне излучателя. К системе позиционирования была прикреплена модель биообъекта – имитационный слой с толщиной патологического слоя в 10 мм. Фиксировалось начальное положение исследуемого объекта. Таким образом, была установлена начальная точка измерений, соответствующая положению подвижной системы для угла 0°. Блоки лабораторной установки были настроены таким образом, чтобы пьезоприемник регистрировал амплитуду давления второй гармоники акустической волны, возникшей при прохождении ультразвукового луча через исследуемый объект. Производились измерения амплитуды второй гармоники акустического сигнала для угла облучения в 0°. Регистрировались данные о распределении поля акустического давления. На этом был закончен этап получения проекции для положения модели объекта в заданном угле в 0°. Затем модель объекта поворачивалась на угол в 1°. Производились измерения амплитуды второй гармоники акустического сигнала для угла облучения в 1°. Регистрировались данные о распределении поля акустического давления. Затем происходил следующий поворот подвижной системы и процесс измерений повторялся.

По описанной выше методике проведения экспериментальных исследований происходил процесс определения нелинейного параметра исследуемого объекта для диапазона углов 0° - 180°. Затем происходила обработка получен-

ных данных.

Результаты проведенных экспериментальных исследований показали возможность восстановления нелинейного параметра в нелинейной слоистой среде на основе измерения амплитуды второй гармоники акустического сигнала.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-07-00374.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вареникова А.Ю., Чернов Н.Н. Математическое моделирование метода определения нелинейного параметра в биообъекте для целей визуализации. Фундаментальные основы, теория, методы и средства измерений, контроля и диагностики**:** материалы 19-ой Междунар. молод. науч.-практ. конф., г. Новочеркасск, 27-28 февр. 2018г. / Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова. – Новочеркасск: Лик, 2018. – 404 с.
2. Chernov N.N., Laguta M.V., Varenikova A.Yu. Research of Appearance and Propagation of Higher Harmonics of Acoustic Signals in the Nonlinear Media. Journal of Pharmaceutical Science and Research. 2017. Том 9, № 11. [Электронныйресурс] URL: http://www.jpsr.pharmainfo.in/issue.php?page=99.
3. Вареникова А.Ю., Чернов Н.Н. Исследование прохождения акустической волны в биологических жидкостях с высокой нелинейностью. V Всероссийская молодежная школа-семинар «Инновации и перспективы медицинских информационных систем ИПМИС-2016», 19-22 декабря 2016, г. Таганрог. – с. 69-72
4. Вареникова А.Ю., Лагута М.В., Чернов Н.Н. Измерение нелинейного параметра методом конечных амплитуд. V Всероссийская молодежная школа-семинар «Инновации и перспективы медицинских информационных систем ИПМИС-2016», 19-22 декабря 2016, г. Таганрог. – с. 80-84
5. Буров В.А., Шмелёв А.А., Крюков Р.В., Румянцева О.Д. Роль нелинейных взаимодействий в акустической томографии третьего порядка. Акустический журнал, 2015, т. 61, №6, с 669-684.
6. Буров В.А., Шмелев А.А. Численное и физическое моделирование процесса томографирования на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка. Акустический журнал, 2009, т. 55, №4-5, с. 466-480.
7. Демин И.Ю., Прончатов-Рубцов Н.В. Современные акустические методы исследований в биологии и медицине. Учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «Хранение и обработка информации в биологических системах». Нижний Новгород: Изд-во ННГУ 2007 г. – 121 с.
8. Чернов Н.Н., Заграй Н.П., Лагута М.В. Вареникова А.Ю. Appearance and Propagation of Higher Harmonics of Acoustic Signals in the Nonlinear Media. Journal of Physics: Conference Series, 2018 1015(3),032081

УДК 519.715

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФА ПЕРЕХОДОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНОЙ СХЕМЫ

О.И. Голубева, к.т.н., доц.
Томский государственный университет
e-mail: *golubeva-o@yandex.ru*

Рассматривается построение графа переходов последовательностной схемы с применением ROBDD, ДНФ и SAT-решателей. Предлагаются методы сокращения вычислений при построении графа переходов схемы, в том числе на основе двоичного и троичного моделирования схемы. Рассматривается подход к сокращению вычислений при поиске входных последовательностей, обеспечивающих заданные переходы схемы, основанном на графе переходов.

Ключевые слова: граф переходов схемы, последовательностная схема, переходная последовательность, ROBDD, ДНФ, SAT-решатели.

В данной работе рассматривается задача построения графа переходов синхронной последовательностной схемы. Граф переходов, в частности, применяется в задаче поиска последовательности входных векторов, обеспечивающей переход схемы в одно из состояний заданного множества [1, 2], которая является подзадачей при решении различных задач диагностирования последовательностной схемы, например, при построении тестов и обнаружении троянских схем [6].

Рассмотрим синхронную последовательностную схему с n входами, m выходами и p линиями обратных связей. $X = \{x_1, ..., x_n\}$ – входные переменные схемы, $Y = \{y_1, ..., y_m\}$ – ее выходные переменные, $Z = \{z_1, ..., z_p\}$ – внутренние переменные схемы.

Система функций переходов схемы имеет вид:

$$z_j^t = \psi_j(x_1^t,\ldots,x_n^t,z_1^{t-1},\ldots,z_p^{t-1}),\ j=\overline{1,p}. \quad (1)$$

Каждому двоичному вектору $\tau^i = (\tau_1^i,...,\tau_p^i)$ размерности p значений переменных Z соответствует состояние q_iсхемы. Будем вектор $\tau^i = (\tau_1^i,...,\tau_p^i)$ называть *кодом состояния*q_i. Таким образом, $Q = \{q_1,...,q_s\}$, где $s = 2^p$, – множество всех состояний схемы.

Рассмотрим функции $\psi'_j(x_1^t,...,x_n^t,z_1^{t-1},...,z_p^{t-1})$, $j=\overline{1,s}$, представляющие переходыв состояния. Функция $\psi'_j(\alpha,\tau)=1$, если схема из состояния с кодом τ при входном векторе α делает переход в состояние q_j, иначе $\psi'_j(\alpha,\tau)=0$. Система функций переходов в состояния имеет вид:

$$\psi'_j(x_1^t,...,x_n^t,z_1^{t-1},...,z_p^{t-1}),\ j=\overline{1,s}. \quad (2)$$

Процедура получения системы (2) [1 – 4].

Для каждого состояния q_j с кодом $\tau^j = (\tau_1^j,...,\tau_p^j)$ получим ψ'_j перемножением p функций ψ_k или их инверсий: если $\tau_k^j = 1$, $k \in \{1,...,p\}$, то в произведение входит ψ_k, если $\tau_k^j = 0$, то в произведение входит $\overline{\psi}_k$.

Обозначим символом × неопределенное значение из множества {0,1}. Вектор $\alpha = (\alpha_0,...,\alpha_n)$, такой что $\alpha_i \in \{0,1,\times\}$, будем называть *троичным вектором*. Троичный вектор $\alpha = (\alpha_0,...,\alpha_n)$ задает интервал $N(\alpha)$ в булевом пространстве размерности n. Будем говорить, что *троичный вектор* α*представляет множество булевых векторов* $N(\alpha)$.

Назовем *графом переходов* (*потоковым графом*) *схемы* (V, E)– ориентированный граф, у которого вершины сопоставлены состояниям схемы и есть дуга из вершины i в вершину j тогда и только тогда, когда в схеме возможен переход из состояния, соответствующего вершине i, в состояние, соответствующее вершине j, при каких-либо значениях входных переменных.

Заметим, что в рассматриваемом графе переходов отсутствуют входо-выходные метки на дугах. Для решения некоторых задач, в том числе задачи построения переходной последовательности, если переход из вершины i в вершину j возможен, то необходимо знать только один вектор входных значений, обеспечивающий такой переход. Будем запоминать такой входной вектор в α_{ij}.

В работах [1, 2] был предложен метод построения графа переходов (потокового графа) схемы (его матрицы смежности M), основанный на получении функций переходов в состояния в виде ROBDD графов.

В данной работе предлагаются методы сокращения вычислений при построении графа переходов схемы, применение SAT-решателя для решения задачи, а также методы сокращения вычислений при использовании ROBDD и ДНФ. Рассматривается подход к сокращению вычислений при поиске входных последовательностей, обеспечивающих заданные переходы схемы.

Будем представлять полное состояние схемы троичным вектором (α,δ). Здесь α– вектор значений входных переменных X, а δ– вектор значений внутренних переменных Z.

Известно, что при подстановке констант вместо некоторых переменных схемы (или формулы), её, как правило, можно сократить (упростить). Чтобы не повторяться, будем в дальнейшем под подстановкой констант подразумевать также и сокращение, если оно целесообразно.

Рассмотрим методы сокращения вычислений при построении графа переходов.

1) Выполним двоичное моделирование на K двоичных случайных векторах (α^i,τ^i), где K – некоторое выбранное значение, и получим множество S^1 пар состояний (q_i,q_j) таких, что возможен переход из q_i в q_j. Для каждой пары состояний из S^1 запомним один входной вектор α_{ij}, при котором такой переход возможен.

2) Для каждого состояния q_i из Q такого, что существует состояние q_j такое, что $(q_i,q_j) \notin S^1$, выполним неточное троичное моделирование функций переходов [4] на векторе (α,τ^i), где $\alpha = (\times,\ldots,\times)$ (α состоит только из неопределен-

ных компонент), и найдем троичный вектор δ^i значений функций переходов. Множество $Q\backslash N(\delta^i)$ (т.е. множество состояний, не представленных троичным вектором δ^i) представляет множество тех состояний, в которые схема не может попасть из состояния q_i. В матрице смежности графа переходов каждый элемент $M[q_i][q_k]$, где $q_k \in Q\backslash N(\delta^i)$, приравняем нулю, а пару состояний (q_i,q_k) включим в S^2.

$S^3 = (Q\times Q)\backslash(S^1\cup S^2)$. Для неопределенных после шагов сокращения вычислений 1 и 2 пар состояний $(q_i,q_j) \in S^3$ применим точный метод определения возможности перехода из q_i вq_j.

В работах [1, 2] описан метод построения матрицы смежности графа переходов, основанный на построении функций переходов в состояния в виде ROBDD графов. Он также может быть модифицирован на использование системы ДНФ, представленной в [3]. Ранее не рассматривались методы сокращения вычислений 1 и 2 и, следовательно, метод был ориентирован на получение значений для всех пар состояний. При применении методов сокращения вычислений большая часть значений матрицы смежности может быть вычислена этими методами. Здесь предлагаются два подхода к получению отдельных неопределенных значений элементов матрицы смежности.

Рассмотрим первый подход.

Получим систему (1) функций переходов. Для всех j таких, что в столбце j матрицы смежности есть неопределенные значения, получим ROBDD $G(\psi'_j)$, представляющие функции переходов в состояния, используя рассмотренную Процедуру. При этом в отличие от метода, представленного в [1, 2], не требуется фиксировать порядок разложения по переменным. При разложении Шеннона можно использовать тот порядок, который дает ROBDD меньшей сложности.

Далее возможность перехода из состояния q_i в состояние q_j определяется по ROBDD $G(\psi'_j)$ с помощью троичного моделирования на векторе полного состояния (α,τ^i), где α состоит из всех неопределенных компонент (×), а τ^i – код состояния q_i. Троичное моделирование выполняется методом, описанным в [5]. Если при этом получено значение 1 или ×, то переход из q_i в q_j возможен, иначе – нет (обоснование представлено в [2]). Данный подход можно переложить и на ДНФ.

Рассмотрим второй подход.

Если в столбце j матрицы смежности не много неопределенных состояний, то можно не строить $G(\psi'_j)$, а построить подграфы $G^{\psi'}_{ji}(X)$ (см. [1, 2, 4]) графа $G(\psi'_j)$ для каждого состояния q_i такого, что элемент матрицы смежности $M[q_i][q_j]$ не определен. Если $G^{\psi'}_{ji}(X) \neq 0$, то $M[q_i][q_j]$ присваиваем значение 1, иначе – 0. Для построения $G^{\psi'}_{ji}(X)$ сначала получим ROBDD каждой функции ψ_j, $j = \overline{1,p}$, системы (1) (например, по структурному описанию схемы). При получении ROBDD сначала выполним разложение по переменным Z, а затем по переменным X.

Процедура получения $G_{ji}^{\psi'}(X)$.

Для состояния q_j схемы с кодом $\tau^j = (\tau_1^j,...,\tau_p^j)$ получим $G_{ji}^{\psi'}(X)$, выполнив логическое произведение p подграфов ROBDD функций ψ_s или их инверсий. Причем, если $\tau_k^j = 1$, $k \in \{1,...,p\}$, то в произведение входит $G_{ki}^{\psi}(X)$, если $\tau_k^j = 0$, то в произведение входит $\overline{G}_{ki}^{\psi}(X)$.

Замечание 1.1. Если некоторый ROBDD-граф $G_{ki}^{\psi}(X)$ или $\overline{G}_{ki}^{\psi}(X)$, участвующий в логическом произведении при получении $G_{ji}^{\psi'}(X)$, равен 0, то $G_{ji}^{\psi'}(X) = 0$, поэтому перед выполнением логического произведения проверим ROBDD, входящие в произведение, на равенство 0.

Замечание 1.2. При больших размерах схемы при определении значения $M[q_i][q_j]$ можно предварительно упростить схему, подставив на входы схемы константы из τ^i, а затем получить ROBDD для функций переходов ψ_j, $j = \overline{1,p}$, из состояния q_i. После подстановки констант функции переходов будут представлять $G_{ji}^{\psi}(X)$. При таком подходе ROBDD для функций переходов строятся неоднократно, но для более простой схемы. Такой подход может быть целесообразным, например, если после выполнения шагов сокращения 1 и 2 осталось немного неопределенных значений в матрице.

Второй подход также можно переложить на ДНФ.

Рассмотрим использование SAT-решателя для получения графа переходов. Будем определять возможные переходы по комбинационной составляющей схемы (рисунок 1а). Причем при решении задачи построения матрицы смежности будем рассматривать только часть схемы необходимую для получения функций переходов. Выходы не рассматриваются и, соответственно, структурное описание комбинационной составляющей, по которой строится КНФ, упрощается (рисунок 1б).

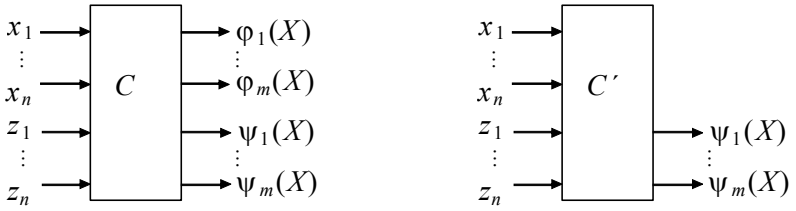


Рисунок 1 – а) Комбинационная составляющая схемы; б) комбинационная составляющая, реализующая функции переходов

Построим некоторым известным способом КНФ $P(X^t, Z^{t-1}, Z^t, V^t)$ для схемы C', которая зависит от множеств переменных X, Z^{t-1}, Z^t, где Z^{t-1} и Z^t представляют значения внутренних переменных схемы в текущий и следующий моменты времени, и множества переменных V^t, соответствующих выходам элементов схемы.

Получив все выполняющие наборы для КНФ $P(X^t, Z^{t-1}, Z^t, V^t)$ с помощью SAT-решателя, можно определить все пары состояний (q_i, q_j), представляющие возможные переходы. Такой подход достаточно трудоемкий. Поэтому предла-

гается сначала выполнить шаги сокращения вычислений 1 и 2, а затем определить возможность переходов для оставшихся неопределенных пар состояний.

Получим КНФ $P(X, \tau^i, \tau^j, V)$ для пары состояний (q_i, q_j) подстановкой значений τ^i и τ^j вместо переменных Z^{t-1} и Z^t. Выполним сокращение КНФ после подстановки констант и получим КНФ $P'(X,V)$. С помощью SAT-решателя найдем выполняющий набор для КНФ $P'(X,V)$ и из него получим набор входных переменных α_{ij} при котором возможен переход из q_i в q_j или определим, что такой переход невозможен.

Замечание 2.1. Для некоторого дополнительного сокращения вычислений можно для строки i матрицы сначала получить $P''(X^t, Z^{t-1}, V) = P(X^t, \tau^i, Z^{t-1}, V)$ и выполнить сокращение полученной КНФ. Затем для каждого столбца q_j с неопределенным значением в строке i матрицы M получить КНФ $P'(X^t,V^t) = P''(X^t,\tau^j,V^t)$. Кроме того, также как и для ROBDD при больших размерах схемы можно предварительно упростить схему, подставив константы на входы, а затем получить КНФ.

Замечание 2.2. Представленные подходы к определению возможных переходов можно, с необходимыми модификациями, применить для выполнения троичного моделирования.

В работе [1] рассматривается задача построения последовательности, обеспечивающей переход схемы из заданного состояния q^0 в одно из состояний заданного множества Q^*, с применением матрицы смежности графа переходов.

Отметим, что для сокращения вычислений можно не строить сразу всю матрицу, а по аналогии с подходом, описанным в [6], сначала находить состояния Q^1 достижимые из q^0, затем состояния, достижимые из состояний Q^1 и т.д. пока не будет получено множество Q^k, содержащее некоторое состояние из Q^*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубева О. И. Поиск входных последовательностей, обеспечивающих заданные переходы схемы, основанный на ROBDD-представлении функций переходов в состояния // Кулагинские чтения: техника и технологии производственных процессов: XVII Междунар. науч.-практ. конф.: сб. ст.: в 3 ч. Чита: ЗабГУ, 2017. − Ч. 2. − С. 49–54.
2. Голубева О. И. Троичное моделирование последовательностной схемы и построение на его основе входных последовательностей, обеспечивающих заданные переходы схемы // Таврический научный обозреватель. − 2017. − №4 (21). − С. 122–135.
3. Голубева О. И. Троичное моделирование синхронных последовательностных схем, основанное на ROBDD представлении функций // Кулагинские чтения: техника и технологии производственных процессов: XVI Междунар. науч.-практ. конф.: сб. ст.: в 3 ч. Чита: ЗабГУ, 2016. − Ч. 2. − С. 131–136.
4. Голубева О.И. Использование неточных результатов для сокращения вычислительных затрат точного троичного моделирования последовательностных схем // Таврический научный обозреватель. − 2017. − №4 (21). − С. 136 – 146.

5. Голубева О. И. Троичное моделирование комбинационных схем с использованием ROBDD. // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. − Саратов : Издат. центр «Наука», 2018. − С. 112–114.
6. Lenox J., Tragoudas S., Towards Trojan Circuit Detection with Maximum State Transition Exploration. Proc. of the IEEE International On-Line Test Symposium (IOLTS). Elia, Halkidiki, Greece. July 6 – 8, 2015. – P. 50–52.

УДК 519.63

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВЫБРОСОВ АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА

Е.А. Данилкин
Томский государственный университет
e-mail: *DanilkinE@gmail.com*

В работе представлены результаты моделированиядвижения воздуха и распространения выбросов автомобильного транспорта для реального участка городской застройки. Моделирование проведено с использованием разработанных математических моделей турбулентного движения и переноса примеси, построенных на основе RANS и LES подходов к описанию турбулентности.

Ключевые слова: вихреразрешающее моделирование, k-e модель турбулентности, моделирование турбулентности, перенос примеси, выбросы автотранспорта.

1. Введение

В настоящее время одной из важных проблем экологии является качество атмосферного воздуха в городах. Одним из самых значительных источников загрязнения городского воздуха является автотранспорт, а точнее отработавшие газыдвигателей внутреннего сгорания. Основными загрязнителями являются оксид углерода, оксид азота, свинец и летучие углеводороды.Отработавшие газы автотранспорта располагаются невысоко от земной поверхности, поэтому они плохо рассеиваются ветром и скапливаются в жилых зонах. Так токсичные вещества поступают в зону дыхания человека.

Для исследования процессов распространения выбросов автотранспорта, происходящих в городской застройке, необходимо развитие и внедрение математических моделей, описывающих движение воздуха и перенос примеси. Используя такие модели и зная расположение и интенсивность источника примеси, можно предсказывать концентрацию вредных примесей для различных метеоусловий и конфигурации городской застройки.

В настоящее время моделирование турбулентных течений в окружающей среде осуществляется, в основном, с использованием осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS) и переноса скалярных величин, для

которых требуется решить проблему замыкания путем привлечения полуэмпирических моделей различного уровня сложности. Этот подход позволяет получить успешные результаты для широкого круга турбулентных течений, и тем не менее, он дает низкую точность при описании нестационарных турбулентных течений вблизи тел со сложной геометрией (задачи обтекания). В таких случаях вихреразрешающее моделирование (LES) оказывается более предпочтительным, так как позволяет хорошо предсказывать нестационарную структуру турбулентного течения и явно разрешать крупномасштабные вихревые структуры [1].

В данной работе будет рассмотрено моделирование распространения выбросов автомобильного транспорта для реального участка городской застройки Томска. Моделирование проведено с использованием разработанных математических моделей турбулентного движения и переноса примеси, построенных на основе RANSи LESподходов к описанию турбулентности.

2. Физико-математическая постановка задачи

Рассматривается трехмерное турбулентное движение несжимаемой среды и процесс переноса пассивной газообразной примеси над плоской поверхностью с прямоугольными объемными препятствиями/зданиями. Размеры препятствий соизмеримы с размерами области исследования. В области исследования предполагается наличие точечных, линейных и площадных источников примеси постоянной интенсивности.

Математические модели опираются на многомерные нестационарные осреднённые/отфильтрованные уравнения Навье-Стокса для определения полей компонент скорости и давления, а также транспортные уравнения для расчета полей скалярных величин. Для замыкания системы уравнений в случае RANS-подхода используется стандартная k-e модель турбулентности. В случае вихреразрешающего моделирования используется модель Смагоринского [1].

Решениеитоговой системы дифференциальных уравнений в частных производных в обоих случаях осуществляется на основе метода конечного объема. Аппроксимация конвективных слагаемых осуществляется с использованием противопотоковой схемы MLU Ван Лира, диффузионных – с использованием центрально-разностной схемы. В гидродинамической части вихреразрешающей модели для согласования полей скорости и давления использована схема предиктор-корректор, в соответствии с которой явная схема для уравнения движения выполняет функцию предиктора, а коррекция выполняется на основе решения уравнения для поправки давления. Согласование полей скорости и давления в RANS-модели выполнено с помощью расщепления по физическим процессам.

Более подробно используемые математические модели, способ задания граничных и начальных условий, а также численный метод решения построенных моделей описаны в работах [1], [2]. Целью данной работы является представление результатов моделирования движения воздуха и распространения примеси над участком городской застройки Томска.

3. Результаты математического моделирования

В качестве расчетной области исследования рассматривался параллелепипед с основанием 260 на 260 м и высотой 60 м. На рисунке 1представлена схема области исследования. Исследуемая область включает здания различной конфигурации и этажности. Для расчетов использовалась равномерная сетка 225x231x81 ячеек по осям Ox, Oy и Oz соответственно. Источники примеси соответствуют расположению автодорог. При проведении расчетов выбрано юго-западное направление ветра, которое соответствует розе ветров для данной местности.

На входе в расчетную область использовался профиль скорости:

$$U_{in}(z) = U_{ref} \cdot \left(z / z_{ref}\right)^{a} \qquad (1)$$

где a=0.16 , U_{ref}=5,5 м/с, z_{ref}=9,0 м.

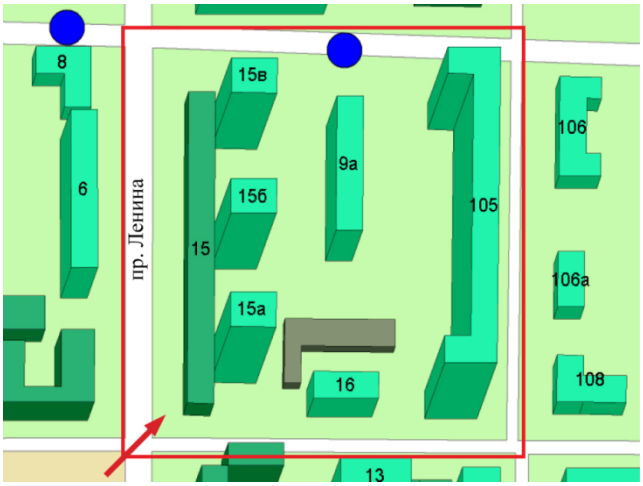


Рисунок 1 – Схема участка городской застройки Томска: прямоугольником выделена расчётная область, стрелкой показано направление ветра (данные из системы ДубльГИС)

На рисунке 2 представлено векторное поле осредненной по времени скорости на высоте 1,5 м для случая использования LES модели.

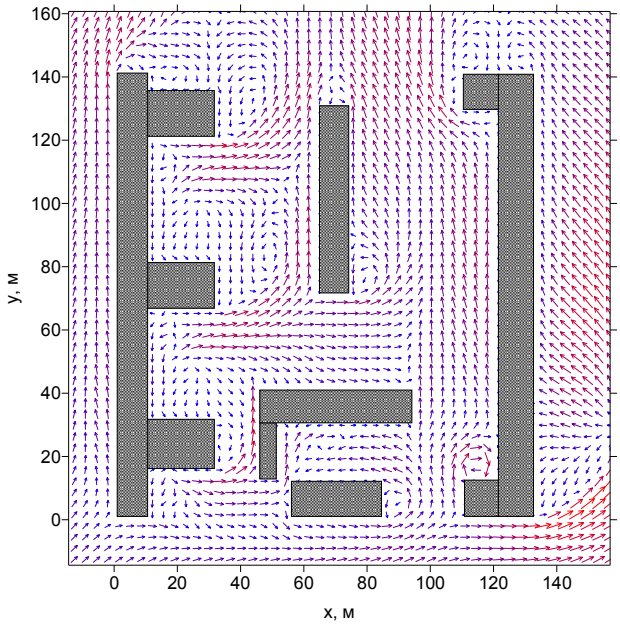


Рисунок 2 – Векторное поле скорости для участка Томска на высоте 1,5 м

Видно, что вблизи поверхности существуют многочисленные рециркуляционные участки в углах зданий и на их торцах. Полученное осредненное по времени поле скорости хорошо согласуется с полем скорости, полученным при RANS моделировании турбулентности.

На рисунке 3 представлена изоповерхность концентрации примеси для участка городской застройки для расчета по LES модели. Видно, что за высотными зданиями в зонах рециркуляции, приведенных на рисунке 2, примесь циркулирует и накапливается. Над крышей девятиэтажного здания справа образуются небольшие возвратные течения. Об этом свидетельствует затягивание примеси с подветренной стороны здания. Необходимо отметить, что даже невысокое здание торгового центра слева защищает внутреннюю часть городской застройки от проникновения примеси, и внутри городской застройки наблюдаются относительно небольшие концентрации примеси.

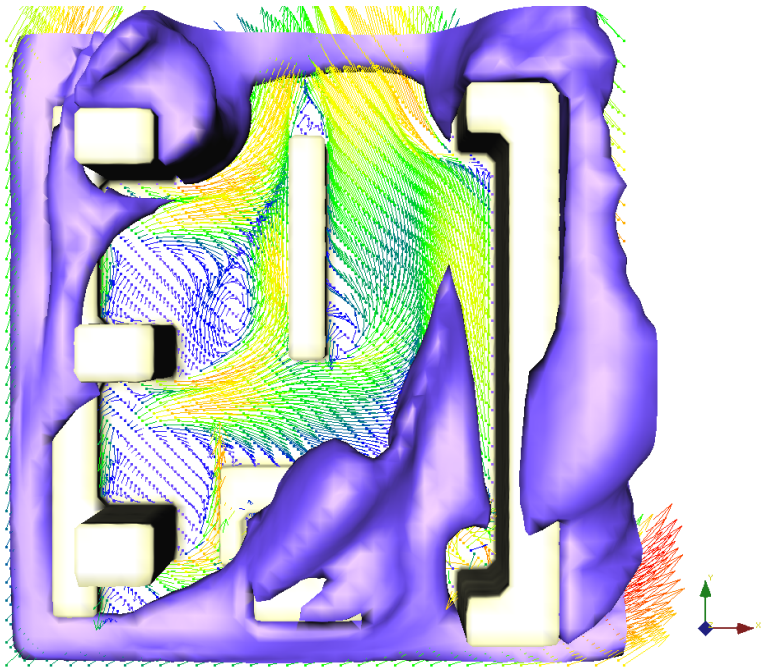


Рисунок 3 – Изоповерхность концентрации примеси для участка городской застройки на фоне векторного поля скорости на высоте 1,5 м

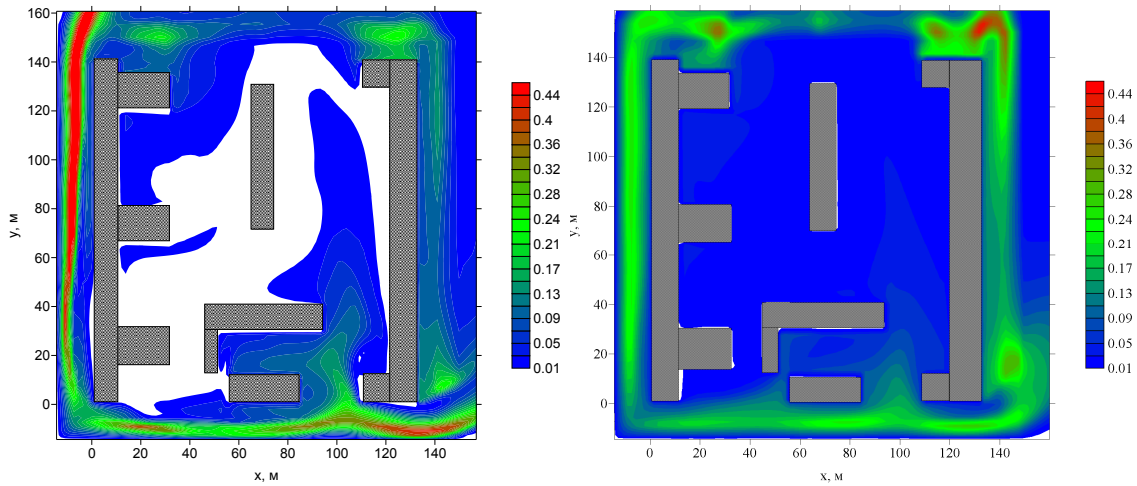


Рисунок 4 – Контурные линии концентрации примеси для участка городской застройки на высоте 1,5 м; справа - расчет по LES-модели, слева расчет по RANS-модели

Также проведено сравнение результатов расчетов по LES и RANS моделям (рисунок 4). Оба метода моделирования турбулентности и переноса примеси показывают, что вблизи поверхности максимумы концентрации примеси располагаются вдоль дорог, также оба метода фиксируют наличие в приземной области локальных максимумов в районе вторичных вращательных движений воздушных масс вниз по потоку рядом с девятиэтажными зданиями. Появление этих участков с повышенной концентрацией является следствием возникающих вращательных движений воздуха в этих областях, примесь вовлекается в вихревое движение и удерживается у подветренной стороны здания.

Однако в результатах расчетов есть и отличия. Значения концентрации примеси вдоль дорог, полученные при использовании вихреразрешающего моделирования, выше, чем концентрации, полученные при использовании RANS-подхода. С другой стороны, в зонах рециркуляции наблюдается обратная тенденция. Полученные данные свидетельствуют о выравнивании/разглаживании концентрации примеси по всей области исследования при использовании RANS-подхода для описания массопереноса,в товремя как вихреразрешающее моделирование за счет более детального описания турбулентного течения показывает более детальную и более контрастную картину распределения концентрации примеси.

4. Заключение

Представлены результаты моделирования распространения выбросов автотранспорта для участка городской застройки. Получена картина турбулентного движения воздушных масс в городском квартале, а также распределение выбросов автотранспорта для различных вертикальных сечений и в виде изоповерхности концентрации примеси. На основе сравнительного анализа LESи RANS-подходов показано, что использование вихреразрешающего моделирования турбулентных течений в городской застройке позволяет повысить детализацию вихревых структур воздушных потоков, влияющую на характер распространения концентрации выбросов автотранспорта.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-1723.2017.5

ЛИТЕРАТУРА

1. Старченко А.В., Нутерман Р.Б., Данилкин Е.А. Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах – Томск: Издательство Томского государственного университета, 2015. - 252 с.
2. Danilkin E.A., Grudovich L.E. Development of Mathematical Model and Numerical Method for Analysis of Air Mass Movement in Street Canyon // Proc. SPIE 10466, 23th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics, 2017. – P. 104666W1-8.

УДК 519.7

ЦИКЛОТОМИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ВЫСОКОЙ ЛИНЕЙНОЙ СЛОЖНОСТЬЮ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

В. А. Едемский
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
e-mail: *Vladimr.Edemsky@novsu.ri*
Н. С. Соколовский
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
e-mail: *sokolovskiy.nikita@gmail.com*

Рассматриваются циклотомические последовательности над конечным полем нечетной характеристики. Получены достаточные условия существования ряда циклотомических последовательностей с высокой линейной сложностью.

Ключевые слова: циклотомические последовательности, линейная сложность, конечные поля.

Введение

Последовательности с элементами из конечного поля имеют широкий круг приложений, в частности, в криптографиии [1]. Для синтеза последовательностей с хорошими автокорреляционными свойствами, высокой линейной сложностью и другими важными их характеристиками часто применяются циклотомические и обобщенные циклотомические классы [2]. Последовательности в этом случае называются циклотомическими и обобщенными циклотомическими соответственно. Линейная сложность таких последовательностей над конечным полем второго порядка изучена достаточно хорошо. В последние годы был опубликован ряд статей, посвященных исследованию линейной сложности циклотомических и обобщенных циклотомических последовательностей над конечными полями и кольцами различных порядков, последние результаты и обзор предшествующих приведены в [3, 4, 5].

В [6] были рассмотрены новые обобщенные бинарные циклотомические последовательности с периодом, равным степени простого числа, и исследована их линейная сложность над полем второго порядка. В отличие от обобщенных циклотомических последовательностей Уитмена и Динга-Хеллесета в [6] при синтезе последовательностей применялись обобщенные циклотомические классы различных порядков. Цель этой работы заключается в частичном обобщении результатов из [6]. Получены достаточные условия существования q-ых циклотомических последовательностей с высокой линейной сложностью над конечным полем нечетной характеристики q и периодом p.

1. Определение последовательности

Пусть p - нечетное простое число вида $p = ef+1$, где e, f - положительные целые числа. Обозначим через g примитивный корень по модулю p [7].

Пусть

$$\begin{aligned} D_0 &= \left\{ g^{t \cdot f} \ (\mathrm{mod} p) \,|\, 0 \le t < e \right\}, \text{ и} \\ D_i &= g^i D_0 = \left\{ g^i x \ (\mathrm{mod} p) : x \in D_0 \right\}, \quad 1 \le i < f. \end{aligned} \tag{1}$$

Согласно определению, D_0 - подгруппа мультипликативной группы $\mathbb{Z}_p^*$ кольца классов вычетов $\mathbb{Z}_p$ по модулю p, а D_i, $i = 1, \ldots, f-1$ её классы смежности. D_i также называют циклотомическими классами порядка f по модулю p [2]. Хорошо известно, что $\{D_0, D_1, \ldots, D_{f-1}\}$ образуют разбиение $\mathbb{Z}_p^*$ [7].

Обобщим определение последовательности из [6] и рассмотрим последовательность над конечным полем нечетной характеристики. Пусть q - нечетный простой делитель f, $h = f/q$ и b - целое число, такое что $0 \le b < f$. Определим q множеств:

$$\mathcal{C}_0 = \bigcup_{i=0}^{h-1} D_{(i+b) \pmod f}, \mathcal{C}_1 = \bigcup_{i=h}^{2h-1} D_{(i+b) \pmod f}, \ldots, \mathcal{C}_{q-1} = \bigcup_{i=(q-1)h}^{qh-1} D_{(i+b) \pmod f} \tag{2}$$

Очевидно, что $\mathbb{Z}_p^* = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cdots \cup \mathcal{C}_{q-1}$ and $|\mathcal{C}_j| = (p-1)/q$.

Рассмотрим q-ую сбалансированную последовательность $s^\infty = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$ периода p, определяемую как

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \ (\mathrm{mod}\ p) \in \mathcal{C}_0 \cup \{0\}, \\ k, & \text{если } i \ (\mathrm{mod}\ p) \in \mathcal{C}_k, k = 1, \ldots, q-1. \end{cases} \tag{3}$$

Правило (3) позволят сформировать f последовательностей над конечным полем $\mathbb{F}_q$ порядка q, в зависимости от значения b. Для $q = f$ линейная сложность последовательности s^∞ была изучена в [8], поэтому, далее, будем считать, что $q < f$.

2. Линейная сложность последовательности

Пусть $s^\infty = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$ - последовательность над конечным полем $\mathbb{F}_q$ периода p. Её линейная сложность определяется как наименьшее натуральное L, для которого существуют константы $c_1, .., c_L \in \mathbb{F}_q$ такие, что

$$-s_i = c_1 s_{i-1} + c_2 s_{i-2} + ... + c_L s_{i-L} \text{ для всех } i : L \le i < p \text{ [1]}.$$

Многочлен $m(x) = x^L + c_1 x^{L-1} + \cdots + c_L$ называют минимальным многочленом последовательности. Стоит отметить, что в ряде работ минимальным называют многочлен, возвратный к $m(x)$.

Хорошо известно, что минимальный многочлен и линейная сложность последовательности s^∞ могут быть вычислены по следующим формулам [2]:

$$m(x) = (x^p - 1) \big/ \text{НОД}\big(x^p - 1, S(x)\big)$$

и

$$L = N - \deg\Big(\text{НОД}\big(x^p - 1, S(x)\big)\Big),$$

где $S(x) = s_0 + s_1 x + \cdots + s_{p-1}x^{p-1}$. Приведенные выше формулы позволяют свести вычисление линейной сложности последовательности к исследованию корней многочлена $S(x)$ в расширении поля $\mathbb{F}_q$. Более точно, линейная сложность последовательности s^∞ может быть найдена как:

$$L = p - \left|\left\{i \in \mathbb{Z}_p \,|\, S(\alpha^i) = 0\right\}\right|, \tag{4}$$

где α - примитивный корень p-ой степени из единицы в расширении поля $\mathbb{F}_q$.

Пусть $S(x) = s_0 + s_1 x + \cdots + s_{p-1}x^{p-1}$ для последовательности s^∞, определенной в (3). Тогда,

$$S(x) = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{t \in \mathcal{C}_j} j x^t = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=jh}^{jh+h-1} j \sum_{t \in D_{i+b} \pmod f} x^t. \tag{5}$$

Введем вспомогательные многочлены

$$H_i(x) = \sum_{t \in D_i} x^t, \quad 0 \le i < f, \tag{6}$$

and

$$T_k(x) = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=jh}^{jh+h-1} j H_{i+k \pmod f}(x), \quad 0 \le k < f. \tag{7}$$

В этой работе индексы i, k для D_i, $H_i(x)$ and $T_k(x)$ всегда берутся по модулю f, поэтому, далее, модульный оператор будем опускать.

Из (5) - (7) имеем, что $S(x) = T_b(x)$. По (4) линейная сложность последовательности s^∞ может быть определена как

$$L = p - \left|\left\{i \in \mathbb{Z}_p \,|\, T_b(\alpha) = 0\right\}\right|. \tag{8}$$

В дальнейшем будем исследовать значение $T_b(\alpha^i)$ для i из $\mathbb{Z}_p$.

Л е м м а. Пусть $c \in D_k$ и $k, i = 0, 1, \ldots, f-1$. Тогда:
(i) $H_i(\alpha^c) = H_{i+k}(\alpha)$;
(ii) $T_i(\alpha^c) = T_{i+k}(\alpha)$;
(iii) $T_i(\alpha^c) - 1 = T_{i+f/q}(\alpha^c)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое и второе утверждения леммы следуют из (1) и (2),(6) и (7). Докажем третий пункт. По условию, α - примитивный корень p-ой степени из единицы, следовательно, $1 + \alpha + \cdots + \alpha^{p-1} = 0$. Воспользовавшись (1) и (6), из последнего равенства получаем, что

$$H_0(\alpha^c) + H_1(\alpha^c) + \cdots + H_{f-1}(\alpha^c) = -1. \tag{9}$$

Далее, так как

$$j\sum_{i=jh}^{jh+h-1} H_{i+f/q+k}(\alpha^c) + \sum_{i=jh}^{jh+h-1} H_{i+f/q+k}(\alpha^c) =$$

$$(j+1)\sum_{i=jh}^{jh+h-1} jH_{i+f/q+k}(\alpha^c) = (j+1)\sum_{l=(j+1)h}^{(j+1)h+h-1} H_{l+k}(\alpha^c),$$

то, воспользовавшись (9), получаем, что $T_{k+f/q}(\alpha^c) - 1 = T_k(\alpha^c)$.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Т е о р е м а. Пусть последовательность s^∞ определена по (3), $\mathrm{ord}_p(q)$ обозначает порядок q по модулю p и $v = \mathrm{НОД}\left(\frac{p-1}{\mathrm{ord}_p(q)}, f\right)$. Тогда линейная сложность последовательности s^∞ равна:

$$L = p - 1, \text{ если } v|\frac{f}{q}, \text{ или } v = 2 \text{ и } v \neq f.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, отметим, что по определению $S(1) = 0$. Далее, покажем, что при выполнении условий теоремы $T_k(\alpha^a) \neq 0$ при $a = 1, 2, \ldots, p-1$. Предположим противное, пусть существует a такое, что $T_k(\alpha^a) = 0$. В силу леммы, можно считать, не нарушая общности, что $k = 0, a = 1$, то есть $T_0(\alpha) = 0$.

По условию $\mathrm{НОД}(p, q) = 1$, следовательно, существует u из $\mathbb{Z}_p^*$ такое, что $q \equiv g^u \pmod p$. Тогда $q \in D_u$ (напоминаем, что здесь индексы вычисляются по модулю f) и $\mathrm{НОД}(u, f) = v$. По лемме имеем, что в этом случае $T_j(\alpha) = T_{j+iu}(\alpha) = 0$ для всех $i \geq 1$. Из последнего соотношения и леммы получаем следующие равенства:

$$0 = T_0(\alpha) = T_v(\alpha) = \cdots = T_{(f/v-1)v}(\alpha)$$
$$\text{и } 1 = T_{f/q}(\alpha) = T_{f/q+v}(\alpha) = \cdots = T_{f/q+(f/v-1)v}(\alpha). \quad (10)$$

Если v делит f/q, тогда $T_{f/q}(\alpha) = T_0(\alpha)$, получаем противоречие.

Пусть $v = 2, v \neq f$ и v не делит f/q. Тогда f/q - нечетное и из (10) получаем, что $T_i(\alpha) - T_{i+1}(\alpha) + 1 = 0, i = 0, 1, \ldots, f-1$. Следовательно,

$$H_i(\alpha) + H_{i+f/q}(\alpha) + \cdots + H_{i+(q-1)f/q}(\alpha) + 1 = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, f-1. \quad (11)$$

Если $f \neq q$, тогда можно выбрать j, такое что

$$(p-1) \notin \left(D_j \cup D_{j+f/q} \cup \cdots \cup D_{j+(q-1)f/q}\right).$$

Определим $f(x) = H_j(x) + H_{j+f/q}(x) + \cdots + H_{j+(q-1)f/q}(x) + 1$. Тогда для любого $c \in \mathbb{Z}_p^*$ по лемме и (11) видим, что $f(\alpha^c) = 0$. Последнее невозможно, так как многочлен $f(x)$ имеет степень меньшую чем $p-1$.

С л е д с т в и е. Если q - первообразный корень по модулю p, то $L = p-1$ и $m(x) = (x^p - 1)/(x-1)$.

В самом деле, если q - первообразный корень по модулю p, то $\mathrm{ord}_p(q) = p-1$ и $v = 1$.

Таким образом, теорема и следствие определяют достаточные условия существования q-ых циклотомических последовательностей с высокой линейной сложностью над конечным полем нечетной характеристики. В результате, частично обобщены результаты о бинарных циклотомических последовательностях, полученные в [6], а также из [8]. Результаты расчетов линейной сложности последовательности по алгоритму Берлэкэмпа-Месси подтверждают справедливость доказанных утверждений. Представляет интерес дальнейшее изучение линейной сложности q-ых обобщенных циклотомических последовательностей с периодом p^n.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Новгородской области в рамках научного проекта №18-41-530001.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лидл Р., Нидеррайтер . Конечные поля.— М.: Мир. —1988. — 820 с.
2. Cusick T., Ding C., Renvall A. Stream Ciphers and Number Theory. — Amsterdam: Elsevier.— 1998.— 474 p.
3. Edemskiy V., Sokolovskiy N. On the linear complexity of Hall's sextic residue sequences over GF(q)// J. Appl. Math. Comput. —2017.—Vol. 54.— N. 1. —P. 297–305.
4. He X., Hu L., Li D. On the GF(p) Linear Complexity of Hall's Sextic Sequences and Some Cyclotomic-Set-Based Sequences // Chin. Ann. Math. —2016. —Vol. 37B. —N.4. —P. 515–522.
5. Wang Q. Some cyclic codes with prime length from cyclotomy of order 4// Cryptogr. Commun. —2017.— Vol. 9. —P. 85–92.
6. Edemskiy V., Li C., Zeng X., Helleseth T. The linear complexity of generalized cyclotomic binary sequences of period p^n // Designs, Codes and Cryptography. —30 June 2018, —P. 1–15, DOI: 10.1007/s10623-018-0513-2
7. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. —М.: Мир. —1987. 416 с.
8. Green D. H., Smith M. D., Martzoukos N. Linear complexity of polyphase power residue sequences// IEE Proc. Commun. —2002. —Vol. 149. —No. 4. —P. 195–201

ФИЛЬТР ВИНЕРА И ЕГО ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ В ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ

Г.А. Кирюхина, к.ф.-м.н.
Академия ФСО России
И.Е. Корогодин
Академия ФСО России
e-mail: *ekorogodin@yandex.ru*

Важным инструментом в стегоанализе является фильтр шумоподавления. Задача шумоподавления относится к оценке сигналабесшумового изображения. Рассмотрим один из самых простых фильтров – фильтр Винера. Это адаптивный линейный фильтр, который удаляет из сигнала аддитивный белый Гауссовский шум заданной (известной) дисперсии. При этом отфильтрованный сигнал ближе всего к исходному (бесшумовому) сигналу в отношении наименьшего квадрата.

В этом случает часто приходится количественно описывать связь между скалярной величиной y и вектором $x \in R^d$. В стегоанализе y может обозначать скорость изменения x для стегоизображения гистограммы или другой (векторной) функции, полученной из стегоизображения. При оценке методом наименьших квадратов (LSE) выбирается параметрическая модель в виде

$$y = f(x;\theta) + \eta, \tag{1}$$

где θ – неизвестный векторный параметр, η – шум моделирования и f – отображение в области R. Неизвестный параметр будет определен из l пар $(y[i], x_i)$, $i = 1,...,l$, полученных экспериментально, путем минимизации скалярной функции

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{l} \left(f(x_i;\theta) - y[i] \right)^2 \tag{2}$$

по отношению к θ.

Минимизация приводит к системе k алгебраических уравнений для k неизвестных $\theta[1]$, ..., $\theta[k]$:

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta[k]} = 2\sum_{i=1}^{l} (f(x_i;\theta) - y[i]) \frac{\partial f(x_i;\theta)}{\partial \theta[k]} = 0. \tag{3}$$

В общем, данную задачу можно решить численно, используя, например, метод Ньютона–Рафсона.

Если система уравнений является линейной, то можно получить решение оптимизации в замкнутой форме. Рассматривая векторы как векторы столбцов, $f(x;\theta) = x'\theta$, $\theta \in R^d$ выражение (1) можно записать в компактной матричной форме как

$$y = H\theta + \eta, \tag{4}$$

где i-я строка $l \times d$ матрицы H равна x_i'. Далее мы предположим, что матрица H имеет полный ранг.

Переписав функцию $J(\theta)$ в виде

$$J(\theta) = (y - H\theta)'(y - H\theta) = y'y - y'H\theta - (H\theta)'y + (H\theta)'H\theta = \quad (5)$$

$$= y'y - 2y'H\theta + \theta'H'H\theta\,, \quad (6)$$

легко можно получить результат дифференцирования как

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2H'y + 2H'H\theta\,. \quad (7)$$

Оценка методом наименьших квадратов параметра $\widehat{\theta}$ получается путем установки градиента в нуль и решения относительно θ,

$$\widehat{\theta} = (H'H)^{-1}H'y\,. \quad (8)$$

LSE обычно применяется, когда свойства моделирования шума неизвестны.

Предположим, что у нас есть n образцов шумового сигнала $x[i]$

$$x[i] = S[i] + \xi[i], \quad i = 1,...,n\,, \quad (9)$$

что является суперпозицией исходного бесшумового сигнала $S[i]$ истинного изображения и Гауссовского шума $\xi[i]$, которые отвечают условиям:

1. $S[i]$ представляют собой гауссовские случайные величины с нулевым средним и известной ковариационной матрицей

$$C[i,j] = Cov[S[i], S[j]] = E[S[i]S[j]]\,.$$

2. Шум есть последовательность гауссовских случайных величин с известной ковариационной матрицей. Будем считать, что ковариационная матрица диагональна с дисперсией σ^2 на ее диагонали (другими словами, последовательность случайных переменных $\xi[i] \sim N(0,\sigma^2)$, являющимися независимыми одинаково распределёнными). Причем S и ξ не зависят друг от друга.

Наша задача – оценка минимальной ошибки методом наименьших квадратов S от x

$$E\left|\left(S[i] - \widehat{S}[i]\right)^2\right| \quad (10)$$

для каждого i. Выразим погрешность как линейную функцию наблюдаемых величин (при наличии шума)

$$\widehat{S}[i] = \sum_{j=1}^{n} W[i,j]x[j]\,. \quad (11)$$

Согласно условию минимальной среднеквадратичной ошибки надо найти такую матрицу W, чтобы математическое ожидание ошибки $e[i]$ для i-го образца, было минимально, т.е.

$$e[i]W[i,1],...,W[i,n] = E\left[\left(S[i] - \sum_{j=1}^{n} W[i,j]x[j]\right)^2\right]. \quad (12)$$

Продифференцируем $e[i]$ по его аргументам и определим для него области минимума

$$\frac{\partial e[i]}{\partial W[i,j]} = E\left[-2\left(S[i] - \sum_{k=1}^{n} W[i,k]x[k]\right)x[j]\right] = 0 \text{ для всех } i,\ j. \quad (13)$$

Подставляя $x[j] = S[j] + \xi[j]$, получаем для всех i, j

$$E\left[S[i](S[j] + \xi[j])\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n} W[i,k](S[k] + \xi[k])(S[j] + \xi[j])\right]. \quad (14)$$

Правую часть можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} W[i,k](E[S[k]S[j]] + E[S[k]\xi[j]] + E[S[j]\xi[k]] + E[\xi[k]\xi[j]]). \quad (15)$$

Используя тот факт, что $\xi[j]$ и $\xi[k]$ независимы для $j \neq k$, а также, что S и ξ также являются независимыми сигналами, имеем $E[S[k]\xi[j]] = 0$ и $E[\xi[k]\xi[j]] = \delta(k-j)\sigma^2$, где δ – дельта Кронекера.

Таким образом, можно переписать равенство (14) в матричном виде как

$$C = W(C + \sigma^2 I) \quad (16)$$

и получить общий вид винеровского фильтра W

$$W = C(C + \sigma^2 I)^{-1}. \quad (17)$$

Ясно, что был найден минимум, потому что вторая частная производная по $W[i,j]$ действительно представляет собой

$$\partial^2 e[i] / \partial W^2[i,j] = E[2x^2[j]] > 0.$$

В частном случае, когда ковариационная матрица C является диагональной, $C = diag(\sigma^2[1],...,\sigma^2[n])$, то будут диагональными и обратная ей матрица $(C + \sigma^2 I)^{-1}$, а также матрица W, $W = diag(w[1],...,w[n])$, где

$$w[i] = \frac{\sigma^2[i]}{\sigma^2[i] + \sigma^2}. \quad (18)$$

Сигнал с шумоподавлением имеет вид

$$\widehat{S}[i] = \frac{\sigma^2[i]}{\sigma^2[i] + \sigma^2} x[i]. \quad (19)$$

Рассмотрим практическую реализацию фильтра Винера.

Пусть $x[i,j]$, $i = 1,...,M$, $j = 1,...,N$ – значения пикселей в оттенках серого изображения $M \times N$. Значения $x[i,j]$ являются суперпозицией бесшумового изображения $S[i,j]$ и i-ой Гауссовой компоненты $\xi[i,j] \sim N(0,\sigma^2)$, т.е.

$$x[i,j] = S[i,j] + \xi[i,j]. \quad (20)$$

Отфильтруем шум и получим аппроксимацию $\widehat{S}[i,j]$ к S.

Было бы неверным считать, что $S[i,j]$ является гауссовым нулевым средним. Однако можно сделать предположение, что $S[i,j] - \hat{\mu}[i,j]$, где

$$\hat{\mu}[i,j]=\frac{1}{|N[i,j]|}\sum_{(k,l)\in N[i,j]}x[k,l] \tag{21}$$

является средним значением в оттенках серого окрестности $N[i,j]$ пикселя (i,j), содержащего пиксели $|N[i,j]|$ (например, можно взять окрестность в 3 × 3).

Отметим, что

$$Var[x[i,j]]=Var[S[i,j]]+\sigma^2, \tag{22}$$

где $Var[S[i,j]]$ может быть аппроксимирована выборочной дисперсией в окрестности $N[i,j]$,

$$Var[x[i,j]]\approx\hat{\sigma}^2[i,j]=\frac{1}{|N[i,j]|}\sum_{(k,l)\in N[i,j]}x^2[k,l]-\hat{\mu}^2[i,j]. \tag{23}$$

Теперь рассмотрим сигнал $x[i,j]-\hat{\mu}[i,j]=S[i,j]-\hat{\mu}[i,j]+\xi[i,j]$ как аналог шумового сигнала $x[i,j]$ на выходе фильтра Винера и сигнал $S[i,j]-\hat{\mu}[i,j]$ как аналог сигнала без шума $x[i,j]$.

Из выражения (22) следует, что дисперсия сигнала без шума

$$Var[S[i,j]-\hat{\mu}[i,j]]=Var[S[i,j]]=Var[x[i,j]]-\sigma^2\approx\hat{\sigma}^2[i,j]-\sigma^2.$$

Таким образом, мы получаем фильтр Винера (19) для шумоподавления изображений, представленного в виде

$$\hat{S}[i,j]=\hat{\mu}[i,j]+\frac{\hat{\sigma}^2[i,j]-\sigma^2}{\hat{\sigma}^2[i,j]}\big(x[i,j]-\hat{\mu}[i,j]\big). \tag{24}$$

В итоге имеем, что фильтр Винера представляет собой адаптивный линейный фильтр, который является оптимальным в том смысле, что сводит к минимуму оценку максимального правдоподобия между шумоподавленным изображением и изображением без шума, где значения нулевого среднего пикселя образуют последовательность независимых Гауссовских переменных нулевого среднего (не обязательно с равными дисперсиями – можно допустить нестационарные сигналы) и изображение подвержено белому Гауссовскому шуму с известной дисперсией σ^2. Это может быть реализовано Matlab в wiener2.min. Программа wiener2(X,[N N],σ^2) позволяет получить модификацию X с шумоподавлением, где N – это размер площади в окрестности ***N***. Если параметры не заданы пользователем, Matlab определяет по умолчанию значение σ^2 как среднюю дисперсию в 3×3 окрестности по всему изображению.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ МОЩНОГО НИТРИД-ГАЛЛИЕВОГО ПТБШ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗДУШНЫХ ПОЛОСТЕЙ

А.О. Климов
ОАО "НПП "Пульсар"
e-mail: *klimov_ao@pulsarnpp.ru*
К.А. Иванов
ОАО "НПП "Пульсар"
e-mail: *ivanov_ka@pulsarnpp.ru*

В статье представлены результаты математического моделирования температурного распределения канала GaN транзистора при наличии воздушных полостей в слое припоя между кристаллом и держателем. В ходе моделирования изменялись размер, количество и геометрическое расположение воздушных полостей по всей толщине припоя под активной областью кристалла. Результаты моделирования показали важность исключения вероятности роста пустот во всем объеме припоя.

Ключевые слова: полевой транзистор с барьером Шоттки (ПТБШ), расчетная сетка, тепловое сопротивление, воздушная пустота, компьютерное моделирование.

Объектами исследований являются твердотельные СВЧ усилители мощности на основе GaN транзисторов и монолитных интегральных схем (МИС). В настоящее время, в твердотельных СВЧ усилителях мощности все больше применяются транзисторы на основе GaN. Они обладают существенно лучшими характеристиками в сравнении с приборами на основе GaAs. В то время как серийные GaAs транзисторы имеют удельную СВЧмощность около Рвых.уд ~ 0,5-0,8 Вт/мм, серийно выпускаемые GaN HEMT обладают Рвых.уд = 3-10 Вт/мм[1].

В [2-6] показано, что для обеспечения надежности сложного высоко теплонагруженного комплексированного устройства необходимо при проведении тепловых расчетов учитывать все тепловые переходы от радиатора устройства до канала мощного транзистора. В [4] представлены расчеты, подтверждающие, что в составе усилителя мощности наибольший вклад в тепловое сопротивление мощного корпусированного транзистора оказывают (за исключением собственно материалов – металлов, диэлектриков, полупроводников) припойные слои.

Эксплуатационная надежность СВЧ мощных транзисторов определяется главным образом их теплоэлектрическим состоянием, которое формируется на стадии монтажа кристалла транзистора в корпус. Проблема качественного бездефектного соединения кристалла с корпусом до сих пор остается актуальной.

Современная групповая пайка мощных СВЧ GaN транзисторов осуществляется в вакуумной печи оплавления с применением защитной атмосферы (чистого азота, водорода или формир-газа) и припоя Au80Sn20. Температура плавления такого припоя равна 280 °С, что позволяет паять полупроводнико-

вые кристаллы без риска разрушения или деградации их структуры. Однако из-за большого поверхностного натяжения Au-Sn не растекается свободно по горизонтальной поверхности, несмотря на превосходную смачиваемость. Стоит отметить, что несовершенство паяемых поверхностей также существенно снижает качество монтажа сборок. Поэтому актуальными являются проблемы снижения количества дефектов пайки, оценки допустимых размеров дефектов паяных соединений, решение которых позволит улучшить электрические, тепловые и механические характеристики приборов [6].

Многочисленные рентгенографические исследования показали, что, после монтажа GaN СВЧ транзисторов без применения специальных оснасток в вакуумной печи оплавления, процент заполнения пустотами может составлять до 50% от площади кристалла (см. рисунок 1).

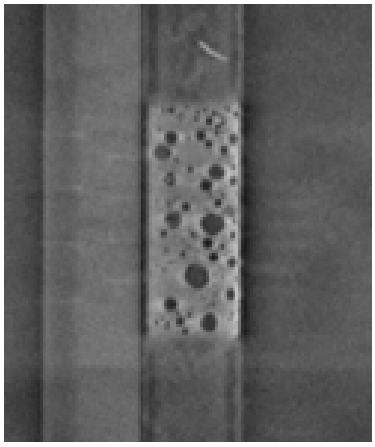


Рисунок 1 – Рентгеновский снимок GaN ПТБШ в корпусе

Авторы провели математическое моделирование температурного распределения канала транзистора при наличии воздушных полостей в слое припоя между кристаллом и держателем.

Расчёт произведен в программе трёхмерного моделирования тепло- и массообмена [7]. Алгоритм нахождения теплового сопротивления включает в себя:

– построение расчётной сетки,

– сборку матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ),

– решение СЛАУ с помощью алгебраического многосеточного метода.

В качестве расчетной сетки использована адаптивная локально измельченная сетка (АЛИС) [8]. Сборка матрицы СЛАУ реализована как поячеечная [9].

В программе [7] для решения задачи теплопередачи используется классический агломеративный алгебраический многосеточный метод РУМБА_v0.14 [7,10].

В качестве объекта моделирования выбран кристалл GaN ПТБШ с суммарной шириной затвора 5 мм, удельной выходной мощностью 5 Вт/мм иКПД=50%. При этом выделяемая тепловая мощность составляет 5 Вт/мм (25 Вт на кристалл).

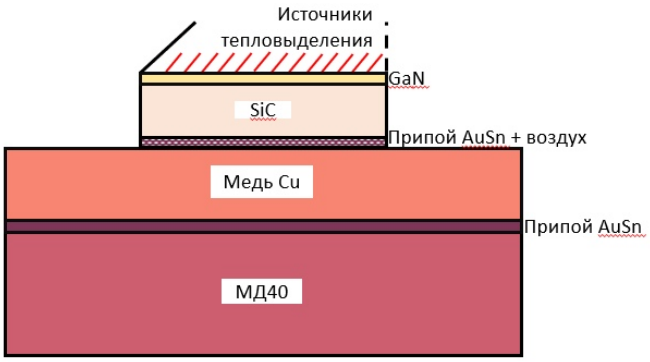
Схема поперечного сечения модели транзистора представлена на рисунок 2.

При моделировании принято:

– температура на основании корпуса поддерживается равной Tamb = +65 ˚C,

– воздушные полости расположены в слое припоя AuSn под кристаллом ПТБШ,

– под медной балкой пустоты отсутствуют.



а

материал слоя	толщина, мкм
GaN	3
SiC	100
AuSn/air	25
Cu	150
AuSn	25
МД40	1600
идеальный теплоотвод	

б

Рисунок 2 – (а) схема поперечного сечения корпусированного транзистора, (б) материал и толщина слоев корпусированного транзистора

В ходе моделирования изменялись размер, количество и геометрическое расположение воздушных полостей по всей толщине припоя под активной областью кристалла (рисунок 3). Значение диаметра пустот составляло 50, 100 и 200 мкм (см. рисунок 3), толщина пустот - 5 мкм и 25 мкм. Процент заполнения пустотами по отношению к площади кристалла при расчете 0% (рис. 4), 8% и 50%.

Рисунок 3 – Схема возможного расположения пустот под кристаллом

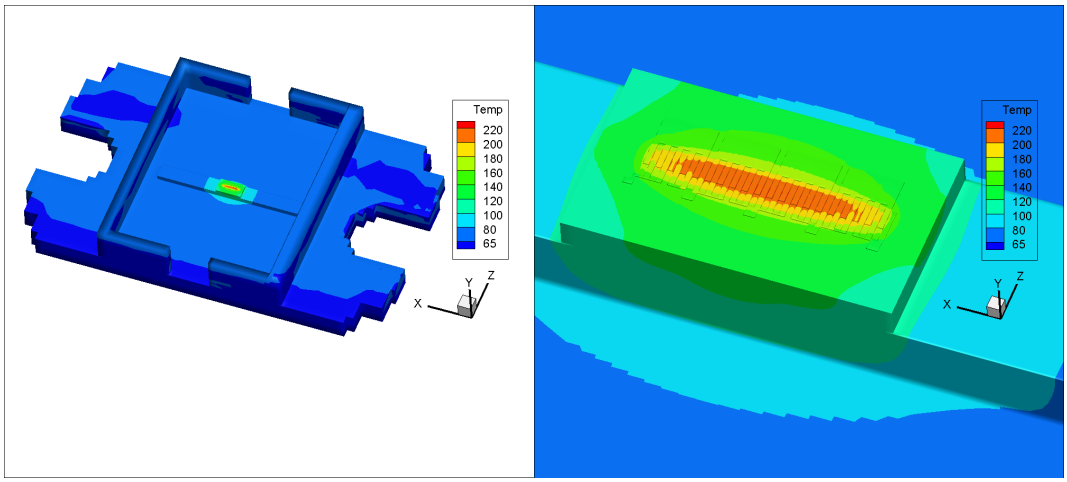


Рисунок 4 – Температурное поле GaN ПТБШ в 13 мм корпусе на АЛИС. Пустоты отсутствуют

Результаты моделирования представлены на рисунках 5, 6.

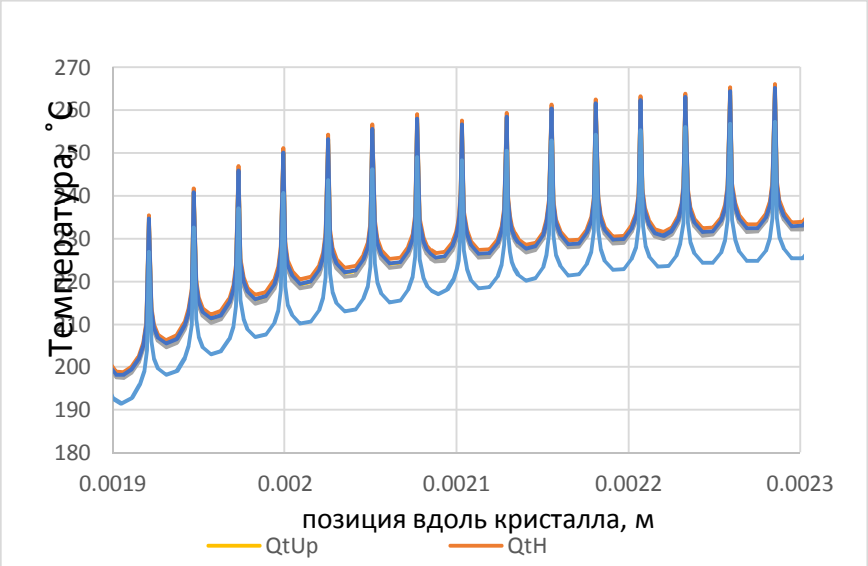


Рисунок 5 – Распределения температуры канала кристалла при различном расположении пустот по толщине припоя AuSn

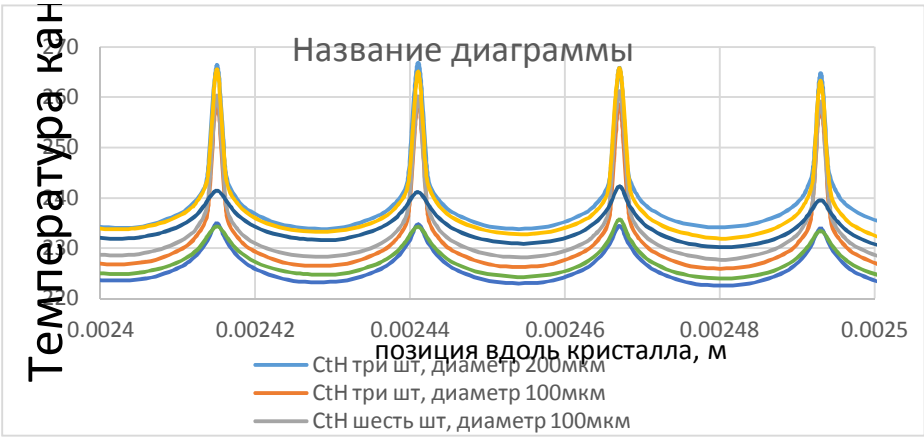


Рисунок 6 – Температура канала для случаев различного количества и размера пустот

По результатам расчета, варьируемая толщина и вертикальное расположение полостей не оказывают существенного влияния на тепловое сопротивление кристалла. На величину теплового сопротивления существенно влияет процент площади пустот по отношению к площади кристалла.Увеличение теплового сопротивления кристалла при наличии воздушных полостей в припое (8% и 50% площади кристалла) составляет 6% и 17% соответственно по сравнению с вариантом без полостей.

Результаты моделирования показали важность исключения вероятности роста пустот во всем объеме припоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Верхулевский К. Новые возможности с транзисторами на основе GaN компании Microsemi // Компоненты и технологии. – 2012. – № 9. – С. 161-164.
2. Борисов О.В., Иванов К.А., Колковский Ю.В., Миннебаев, В.М., Редька Ал.В., Ушаков А.В. Фазостабильный 200-ваттный GaN усилитель мощности

X-диапазона // Электронная техника. Серия 2. Полупроводниковые приборы. Выпуск 1 (230) 2013, с. 31-36
3. Груздов В.В., Колковский Ю.В., Миннебаев В.М. СВЧ электроника на основе нитрида галлия – основное направление создания радиоэлектронных систем // Электронная техника. Серия 2. Полупроводниковые приборы. Выпуск 2 (231) 2013, с. 88-101
4. Аболдуев И.М., Гарбер Г.З., Зубков А.М., Иванов К.А., Колковский Ю.В., Красильников В.Д., Миннебаев В.М. Температурная зависимость параметров СВЧ мощных полевых транзисторов на основе нитрида галлия и алмаза // Электронная техника. Серия 2. Полупроводниковые приборы, вып.1 (235), 2015, с.18-25
5. Борисов О.В., Глыбин А.А., Еремин В.П., Коплевацкий Н.О., Миннебаев В.М., Редька А.В., Тихомиров А.В. Широкополосный комплексированный усилитель мощности X-диапазона частот // Наноиндустрия, 2017, № S4 (74), С. 409-413
6. Бенуни И.С., Дьяконица О.Ю., Климов А.О., Павлюк-Мороз Н.А., Редька Ал.В. Особенности монтажа GaN кристаллов СВЧ усилителей мощности // Электронная техника. Серия 2. Полупроводниковые приборы. Выпуск 3 (246) 2017, с. 44-51.
7. Зубков А.М., Иванов К.А. Программа трёхмерного моделирования тепло- и массообмена в радиаторах, состоящих из набора прямоугольных параллелепипедов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013660267 – М. – 2013. Программа выложена по адресу https://github.com/kirill7785/algebraic-multigrid-method.
8. Неявная схема решения нелинейного уравнения теплопроводности на квадратной адаптивной сетке. Н.Г. Карлыханов, А.В. Уракова. Российский федеральный ядерный центр. 2003, с. 1-15.
9.Рояк М.Э., Соловейчик Ю.Г., Шурина Э.П. Сеточные методы решения краевых задач математической физики**.** Новосибирск НГТУ 1998, с. 21-47.
10. Емельянов В.Н., Волков К.Н.. Методы ускорения газодинамических расчётов на неструктурированных сетках. РФФИ 2014, с.159-255.

УДК 004.94

НОВЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Л.А. Кондратенко, д.т.н., с.н.с
АО «НПО» ЦНИИТМАШ»
e-mail: *kondrat.leonid@yandex.ru*
Л.И. Миронова, д.т.н., доц.
ФГОУ ВО «Московский авиационный институт (НИУ)»
e-mail: *mironova_lub@mail.ru*

В статье приведена система дифференциальных уравнений, описывающая процессы передачи движения в механизмах с учетом существенных нелинейностей, обусловленных явлениями гистерезиса, зонами нечувствительности, ограничением по давлению и др. Вычислительный алгоритм строится на основе модернизированного метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Изложено решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии нелинейностей, где на каждом этапе счета производится учет факторов имеющихся нелинейностей. Приведены результаты моделирования изменения скорости вращения вала гидропривода и давлений в гидромагистралях при скачкообразном увеличении управляющего воздействия. Моделирование осуществлялось с помощью ПЭВМ при шагах счета H= 10^{-4}; $2*10^{-4}$сек. Ошибка не превышала 10%.

Современная промышленность представляет собой совокупность разнообразных производств, существенную роль в которых играют механические системы, являющиеся составной частью машин для преобразования энергии и (или) движения. Механическая система или механизм, являясь носителем определенных движений, представляет собой совокупность взаимосвязанных тел, преобразующих движения одних тел в требуемые движения других. В большинстве таких механизмов имеются движущиеся звенья. При функционировании эти звенья либо совершают полезную работу, либо передают энергию движения для совершения такой работы. Во всех случаях происходит деформация и возникновение напряжений в звеньях, уравновешивающих внешние воздействия. Вследствие этого возникает необходимость вычисления скоростей и напряжений в точках сечений при передаче мощности от входного звена к выходному [1].

Современные методы исследования динамики механизмов основаны на уравнении Лагранжа второго рода и теореме Гельмгольца, на основе которых выведено известное волновое уравнение, описывающее перемещение частиц вещества [2]. С использованием указанных подходов практические задачи по исследованию колебаний скоростей движения и напряжений решаются опосредованно. Здесь возникает необходимость в поиске изменений второй производной перемещения и в пересчете перемещения в напряжение.

В механизмах с движущимися частями всегда есть нелинейности, например, трение, ограничение по перемещению, люфт и др. Динамические особен-

ности системы, оказывающие часто решающее влияние на работоспособность механизма, при наличии одной нелинейности можно достаточно просто изучить, применив известные методы, например [3]. В случае нескольких существенных нелинейностей решение во многом становится неопределенным, и универсального метода найти не удалось.

С целью определения достаточно точных параметров динамического процесса в существенно нелинейных системах был разработан новый метод [4],[5].

В отличие от способов, основанных на применении известного волнового уравнения, с использованием уравнений количества движения и момента количества движения, а также указанного волнового уравнения, были выведены новые уравнения, характеризующие процесс передачи движения в элементарном механическом объеме

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad \chi^{-1}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1}$$

где v = Ω– угловая скорость,p = τ– максимальное касательное напряжение,χ= Gr– для крутильных колебаний (r-радиус сечения стержня); v = υ– скорость перемещения, p = σ– нормальное напряжение, χ= E– для продольных колебаний.

В таком описании, где в явном виде участвуют обе переменные (скорость движения и напряжение), можно достаточно просто учесть реологические представления о передаче движения [6], свидетельствующие о влиянии на модуль упругости частоты колебаний.

Для схемы, приведенной на рисунке 1, имеющей короткий стержень (1), на другом конце которого закреплен маховик (2) с моментом инерции J, запишем, учитывая (1), в обыкновенных производных систему уравнений

$$r\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{d\tau}{dx}, \tag{2}$$

$$(rG)^{-1}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\Omega}{dx}. \tag{3}$$

Вращению диска препятствует момент сопротивления M_c. На поверхность стержня другие силы не действуют. Положим также, что силы сопротивления не оказывают влияния на скорость движение входного сечения Ω_1.

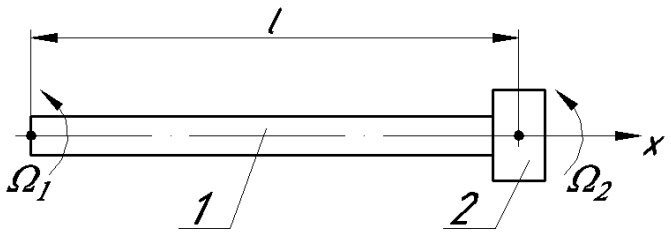


Рисунок 1 – Инерционный диск, вращающийся на конце стержня

Проинтегрируем уравнение (3) по x $l(rG)^{-1}\frac{d\tau}{dt} = \Omega_1 - \Omega_2$ или

$$\vartheta'_k\frac{d\tau}{dt} = \Omega_1 - \Omega_2, \tag{4}$$

где $\vartheta'_k = \frac{l}{rG}$, l – длина стержня; Ω_2 - угловая скорость движения выходного звена.

Еще одно интегрирование (4) по t приводит к уравнению $\vartheta'_k \tau = \varphi_1 - \varphi_2$, иллюстрирующему закон Гука при кручении.

Из уравнения (4) следует, что скорость изменения максимальных касательных напряжений в цилиндрическом стержне прямо пропорциональна разности скоростей вращения ведущего и ведомого концов.

Из теории упругости и сопротивления материалов известно, что развиваемые в стержне касательные напряжения τ преодолевают возникающее на ведомом конце сопротивление сил $M_c = M_{c0} + h_k \Omega_2$, а также силы инерции $M_d = J\frac{d\Omega_2}{dt}$. Здесь h_k- коэффициент потерь на трение, пропорциональных угловой скорости вращения диска. Поэтому можно записать

$$\tau(t) W_p = M_{c0}(t) + h_k \Omega_2(t) + J\frac{d\Omega_2}{dt}, \qquad (5)$$

где W_p - геометрический полярный момент сопротивления сечения стержня.

Введем оператор $D \equiv d/dt$, и перепишем уравнения (4), (5)

$$\vartheta'_k D\tau(t) = \Omega_1(t) - \Omega_2(t); \quad \tau(t) W_p = M_{c0}(t) + h_k \Omega_2(t) + JD\Omega_2(t). \qquad (6)$$

Система уравнений (7) позволяет представить процесс передачи движения к диску в форме структурной схемы на рис.2.

В этой схеме учтены следующие нелинейности: N_1-переменный модуль упругости [7]; N_2- нелинейное трение; k_ε, τ_ε- постоянные ретардации и релаксации [1].

С целью исследования колебаний в таком механизме, пренебрегая за малым влиянием на обычных режимах работы явлениями ретардации и релаксации, необходимо систему уравнений (7) представить в форме

$$F(1) = \frac{\Omega_1(t) - \Omega_2(t)}{\vartheta'_k}; \; F(2) = \frac{\tau(t) W_p - M_{c0}(t) - h_k \Omega_2(t)}{J}, \qquad (7)$$

где $F(1)$, $F(2)$ - производные переменных, соответственно τ и Ω_2.

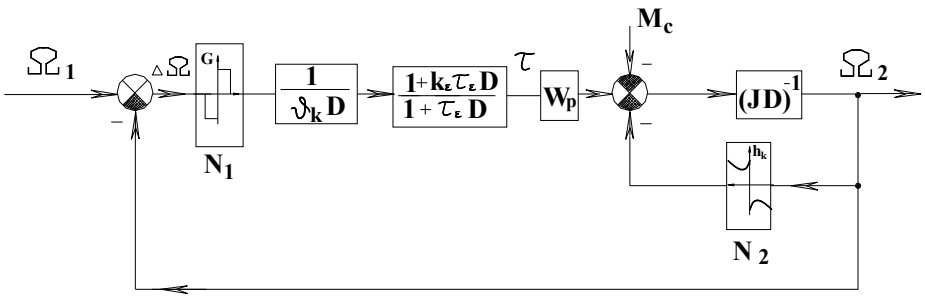


Рисунок 2 – Структурная схема передачи вращательного движения

Затем задача решается численным методом Рунге-Кутты 4-го порядка [8], но в отличие от обычно применяемого счета здесь после каждого из 4-х этапов шагового расчета переменных производится корректировка с учетом параметров каждой нелинейности [9].

Для этой цели записывается система уравнений

$$F(1)=\frac{N_1\Omega_1(t)-\Omega_2(t)}{\vartheta'_k};\quad F(2)=\frac{\tau(t)W_p-M_{c0}(t)-N_2h_k\Omega_2(t)}{J}. \qquad (8)$$

Метод решения проверялся на объемном гидроприводе, где процесс передачи движения в элементарном объеме описывается уравнениями, подобными (1) [10]

$$\rho_z\frac{\partial\upsilon_z}{\partial t}=-[\frac{\partial p_z}{\partial x}+W_\tau];\ \chi_z^{-1}\frac{\partial p_z}{\partial t}=-\frac{\partial\upsilon_z}{\partial x}, \qquad (9)$$

где ρ_z , χ_z , υ_z, p_z - соответственно, плотность, модуль упругости, скорость движения, давление жидкости; W_τ– функция, характеризующая касательные напряжения на стенке трубы.

Однако из-за участия в работе двух гидромагистралей исходные уравнения были несколько сложней. Моделирование производилось для аксиально-поршневого гидропривода IIД № 1,5 при скачкообразном изменении управляющего напряжения, вызывающем скачкообразное увеличение расхода насоса Q практически от нуля на $0{,}335Q_m$. Приняты следующие исходные данные: момент инерции J = 0,05439 Нмсек^2 при отсутствии статической нагрузки. длина магистралей l = 2м; коэффициент герметичности τ= 19,6 1/(Нмсек), начальное давление в подпиточной магистрали p_0= 0,7 МПа и параметрами механизма управления a_1= 5,36*10^{-2}с; a_2= 5,76*10^{-4}с^2; K_c= 0,02 1/В. Нелинейностями являлись предохранительные клапаны в обеих гидравлических магистралях, настроенные на давление p=15 МПа, переменная упругость магистралей, нелинейное трение в нагрузке и гидромоторе.

Моделирование осуществлялось с помощью ПЭВМ при шагах счета H = = 10^{-4}; 2*10^{-4}сек. Ошибка не превышала 10%.

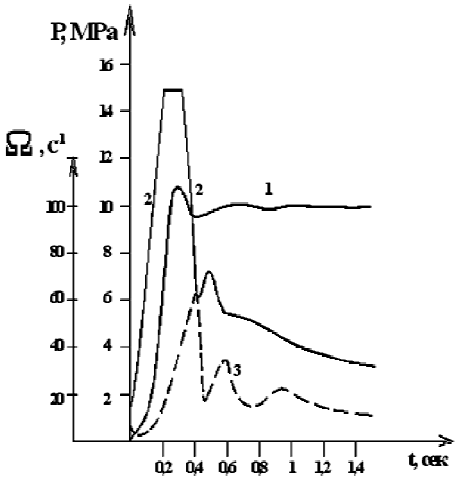


Рисунок 3

Расчетная осциллограмма переходного процесса в гидроприводе II Д № 1,5:

1- ***Ω*** **-** скорость вращения;

2- $\boldsymbol{P_n}$- давление в напорной магистрали;

3- $\boldsymbol{P_p}$- давление в отдающей (подпиточной) магистрали

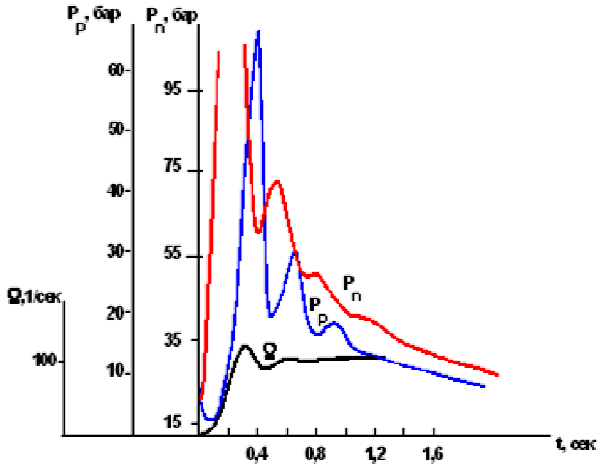


Рисунок 4

Переходные характеристики гидропривода, составленного из аксиально- поршневых машин II Д № 1,5:

Ω- скорость вращения;

$\boldsymbol{P_n}$-давление в напорной магистрали;

$\boldsymbol{P_p}$ - давление в отдающей (подпиточной).

В процессе счета в специальный файл заносились все результаты расчетов, на основании которых строились кривые. Скорость счета одного шага составляла 0,01-0,04 мс. Результаты моделирования и натурного эксперимента приведены на рис.3,4

Расчетные и экспериментальные кривые, характеризующие переходный процесс, имеют хорошую сходимость.

Выводы

Предложенный метод численного моделирования может быть использован для исследования работы любых механических систем с сосредоточенными параметрами силовых магистралей, содержащих несколько существенных нелинейностей. Такой метод вполне приемлем для расчета частотных характеристик указанных систем. В связи с большей скоростью счета по сравнению с известными программами, его можно использовать для анализа движения быстродвижущихся объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратенко Л.А. Расчет колебаний в деталях и узлах машин. – М.: Спутник, 2008, 317с.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т1, Т2. – М.: Недра, 1970, 492с., 490 с.
3. Попов Е.П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. – М.: ФМЛ, 1973, 583 с.
4. Kondratenko L.A., Terekhov V.M., Mironova L.I. About one method of research torsional vibrations of the core and his application in technologies of mechanical engineering. Engineering & Automation Problems.2017, no. 1, pp. 133-137. (InRuss.).
5. Kondratenko L., Dmitriev V., Mironova L. Simulation of a drive with a long connecting link. 26th International Conference Vibroengineering, St. Petersburg, Russia. JVE International LTD. Vibroengineering Procedia. 2017, Vol. 12.ISSN 2345-0533, pp.231-236.
6. 6.ПостниковВ.С. Внутреннее трениеМ. Металлургия 1974. 350с
7. 7.Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. ФМЛ. М. 2001. 588 с.
8. Kamke E. Differential gleichungen losungs methoden und losungen. Handbook of ordinary differential equations. Leipzig, 1959.
9. Кондратенко Л.А., Миронова Л.И. Имитационная модель механической системы с существенными нелинейностями «GDPR-1,5» Свидетельство о государственной регистрации программы ЭВМ №2018617684 от 28.06.2018г.
10. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро-пневмосистем. М.: Машиностроение, 1977, с. 423.

УДК 664.661.016:633.88-021.632:613.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ СПЛОШНЫХ СРЕД С УЧЕТОМ ИХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

В.П. Корячкин, д.т.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail:*mapp-unpk@mail.ru*
Л. Ю. Фроленкова, д.т.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *Larafrolenkova@yandex.ru*
Д.А. Гончаровский, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *dgoncharovskiy@gmail.com*
В.К. Бодров
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *vitia.bodrov@yandex.ru*

Фундаментальными методами ротационной и капиллярной вискозиметрии исследовали сдвиговое течение образцов теста, содержащих пшеничную и пшенную муку. Образец, содержащий 0% пшенной муки, был контрольным. По результатам исследований выявили зависимости деформационного поведения теста от его состава и реологические уравнения состояния.

Ключевые слова: сахарное тесто, реологическое уравнение состояния.

1. Введение

Деформационное поведение сплошных пищевых сред зависит от их состава. Пищевые среды могут проявлять пластично-вязко-упругие или вязко-упруго-пластичные свойства в зависимости от относительного содержания компонентов в их составе.

Методами ротационной и капиллярной вискозиметрии исследовали деформационное поведение новых видов сахарного теста, образцы которого содержали пшенную муку в определенном сочетании с пшеничной мукой высшего сорта.

2. Результаты экспериментальных исследований

На рисунке 1 изображены экспериментальные кривые течения $\lg\theta = \lg\theta(\lg D)$ образцов пшенно-пшеничного сахарного теста с соответственным содержанием пшенной муки в смеси с пшеничной мукой высшего сорта: 100%, 75%, 50%, 25% и 0% (контроль), построенные по экспериментальным данным.

На рисунке 2 представлены зависимости вязкости от скорости сдвига $\lg\eta = \lg\eta(\lg D)$ образцов пшенно-пшеничного сахарного теста с соответственным содержанием пшенной муки в смеси с пшеничной мукой высшего сорта: 100%, 75%, 50%, 25% и 0% (контроль), рассчитанные по кривым течения.

Кривые течения новых видов песочного теста были описаны предложенными нами трехпараметрическими реологическими уравнениями состояния 1:

$$\theta = \mp\frac{\theta_0^2}{\theta} + kD^n, \quad \theta = \pm\frac{\theta_0^2}{\theta} + kD^n \qquad (1)$$

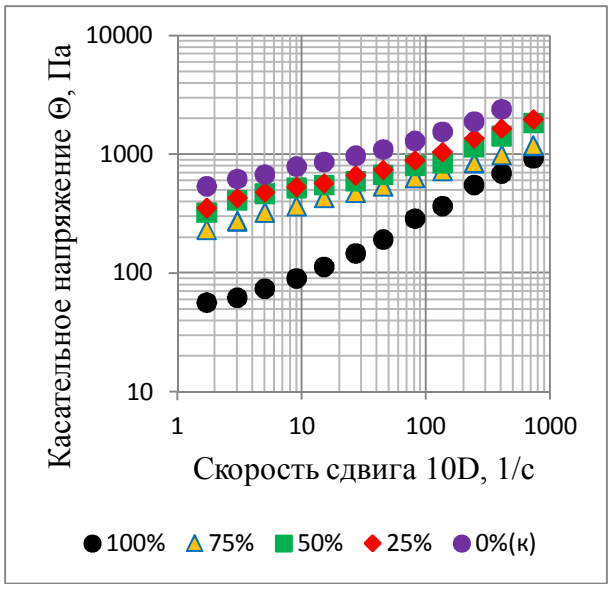


Рисунок 1 – Кривые течения $\lg\theta = \lg\theta(\lg D)$ образцов пшено - пшеничного сахарного тестас содержанием пшенной муки: 100%, 75%, 50%, 25% и 0% (контроль) в смеси с пшеничной мукой высшего сорта

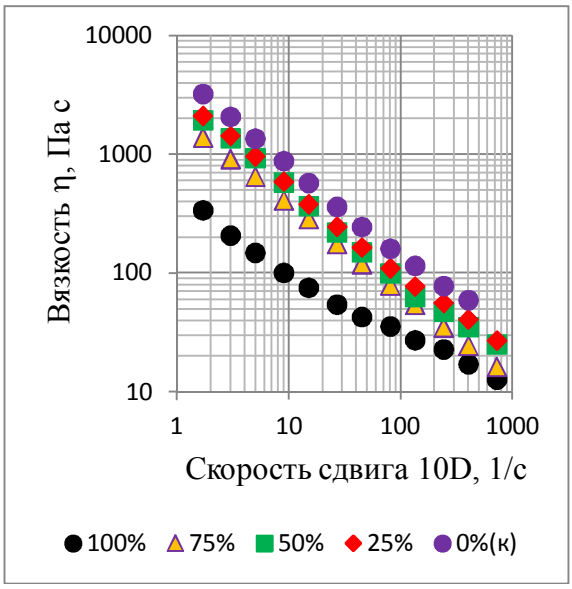


Рисунок 2 – Зависимость вязкости от скорости сдвига $\lg\eta = \lg\eta(\lg D)$ образцов пшено - пшеничного сахарного тестас содержанием пшенной муки: 100%, 75%, 50%, 25% и 0% (контроль) в смеси с пшеничной мукой высшего сорта

В таблице 1 приведены экспериментальные значения касательного напряжения и вязкости образцов пшенно-пшеничного сахарного теста.

Таблица 1 – Экспериментальные значения касательного напряжения и расчетные значения вязкости образцов пшенно-пшеничного сахарного теста

Скорость сдвига D, c^{-1}	Экспериментальные значения касательного напряжения θ образцов пшенно-пшеничного сахарного теста, содержащего пшенную муку С, %				
	100%	75%	50%	25%	0%(к-ль)
0,167	56,3	230,83	322,17	351,88	537,37
0,3	61,93	273,06	408,18	427,88	619,3
0,5	73,82	323,72	464,48	478,55	675,6
0,9	90,08	365,95	520,78	529,22	788,2
1,5	112,6	427,88	548,93	568,63	858,58
2,7	146,38	472,92	591,15	661,53	971,18
4,5	191,42	**534,85**	**669,97**	**737,53**	**1097,85**
8,1	**287,13**	633,38	802,28	886,73	1294,9
13,5	365,95	726,27	844,5	1041,55	1548,25
24,3	551,74	844,5	1140,08	1356,83	1886,05
40,5	689,68	985,25	1421,58	1643,96	2392,75
72,9	923,32	1182,3	1829,75	1964,87	
Скорость	Расчетные значения вязкости η образцов пшенно-				

сдвига D, c^{-1}	пшеничного сахарного теста, содержащего пшенную муку С, %				
	100%	75%	50%	25%	0%(к-ль)
0,167	337,126	1382,22	1929,16	2107,07	3217,78
0,3	206,433	910,2	1360,6	1426,27	2064,33
0,5	147,64	647,44	928,96	957,1	1351,2
0,9	100,089	406,611	578,644	588,022	875,778
1,5	75,0667	285,253	365,953	379,087	572,387
2,7	54,2148	175,156	218,944	245,011	359,696
4,5	42,5378	**118,856**	**148,882**	**163,896**	**243,967**
8,1	**35,4481**	78,1951	99,0469	109,473	159,864
13,5	27,1074	53,7978	62,5556	77,1519	114,685
24,3	22,7053	34,7531	46,9169	55,8366	77,6152
40,5	17,0291	24,3272	35,1007	40,5916	59,0802
72,9	12,6656	16,2181	25,0995	26,9529	-2

В таблице 1 жирным шрифтом выделены экспериментальные значения касательного напряжения и расчетные значения вязкости образцов пшенно-пшеничного сахарного теста, соответствующие точкам перегиба графиков кривых течения $\lg\theta = \lg\theta(\lg D)$ и вязкости $\lg\eta = \lg\eta(\lg D)$.

В результате математической обработки экспериментальных данных сдвигового течения исследованных образцов пшено - пшеничного сахарного тестаопределили параметры реологических уравнений (1).

На рисунке 3 представлены в виде диаграммы реологические характеристики исследованных образцов пшено - пшеничного сахарного теста.

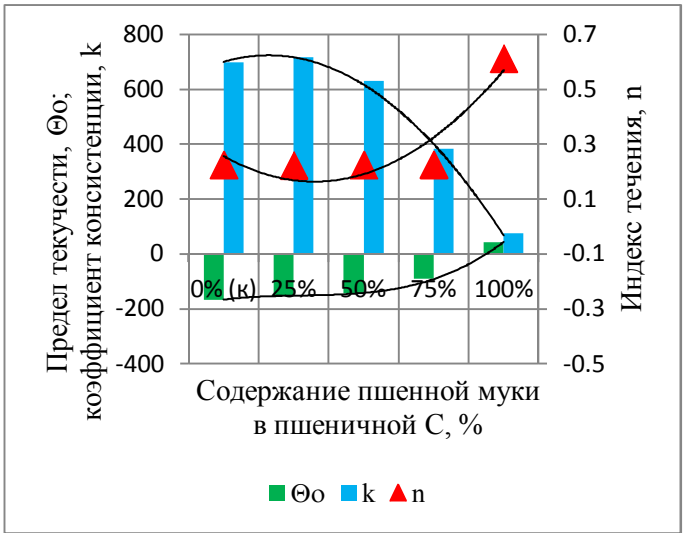


Рисунок 3 – Реологические характеристики образцов пшено - пшеничного сахарного теста

Из диаграммы видно, что большие абсолютные значения предела текучести образцов пшено - пшеничного теста соответствуют области с 25 – 50% содержанием пшенной муки в пшеничной муке высшего сорта. Можно полагать, что укрепление теста при этом обеспечено за счет упругого клейковинного каркаса пшеничной муки. Для этой же области характерно максимальное значение коэффициента консистенции k теста, а индекс течения n имеет, практически постоянное значение. Эти данные указывают на устойчивую формосохраняе-

мость тестовых заготовок.

При делении численных значений касательных напряжений кривых течения всех образцов теста (рисунок 1) на значения касательных напряжений в точках изменения направления кривизны графиков, соответствующих каждой кривой течения $\lg\theta = \lg\theta(\lg D)$, например при $D = 8{,}1$ с$^{-1}$ у контрольного образца и при $D = 4{,}5$ с$^{-1}$ у остальных образцов (таблица 2) получаем одну общую инвариантную, по отношению к концентрации пшеничной муки, безразмерную кривую (рисунок 4) за исключением образца теста, состоящего из 100% пшенной муки.

Таблица 2 – Безразмерные значения касательного напряжения образцов пшенно-пшеничного сахарного теста

Скорость сдвига D, с$^{-1}$	Безразмерные значения касательного напряжения θ образцов сахарного теста, содержащего пшенную муку С, %				
	100%	75%	50%	25%	0%(к - ль)
0,167	0,196	0,431	0,480	0,477	0,489
0,3	0,215	0,510	0,609	0,580	0,564
0,5	0,257	0,605	0,693	0,648	0,615
0,9	0,313	0,684	0,777	0,717	0,717
1,5	0,392	0,8	0,819	0,770	0,782
2,7	0,509	0,884	0,882	0,896	0,884
4,5	0,667	1	1	1	1
8,1	1	1,184	1,197	1,202	1,179
13,5	1,274	1,357	1,260	1,412	1,410
24,3	1,921	1,578	1,701	1,839	1,717
40,5	2,401	1,842	2,121	2,229	2,179
72,9	3,215	2,210	2,731	2,664	-

По безразмерным значениям касательного напряжения образцов пшенно-пшеничного сахарного теста были рассчитаны соответствующие безразмерные значения вязкости (таблица 3).

Таблица 3 – Безразмерные значения вязкости образцов пшенно-пшеничного сахарного теста

Скорость сдвига D, с$^{-1}$	Расчетные значения вязкости η образцов сахарного теста, содержащего пшенную муку С, %				
	100%	75%	50%	25%	0%(к-ль)
0,167	9,510	11,629	12,957	12,856	
0,3	5,823	7,658	9,138	8,702	13,189
0,5	4,164	5,447	6,239	5,839	8,461
0,9	2,823	3,421	3,886	3,587	5,538
1,5	2,117	2,4	2,458	2,312	3,589
2,7	1,529	1,473	1,470	1,494	2,346
4,5	1,2	1	1	1	1,474
8,1	1	0,657	0,665	0,667	1
13,5	0,764	0,452	0,420	0,470	0,655
24,3	0,640	0,292	0,315	0,340	0,470
40,5	0,480	0,204	0,235	0,247	0,318
72,9	0,357	0,136	0,168	0,164	0,242

На рисунках 4 и 5 изображены безразмерные кривые течения

$\lg\theta = \lg\theta(\lg D)$ и безразмерные зависимости вязкости от скорости сдвига $\lg\eta = \lg\eta(\lg D)$ исследованных образцов пшенно-пшеничного сахарного теста, построенные по данным таблиц 2 и 3.

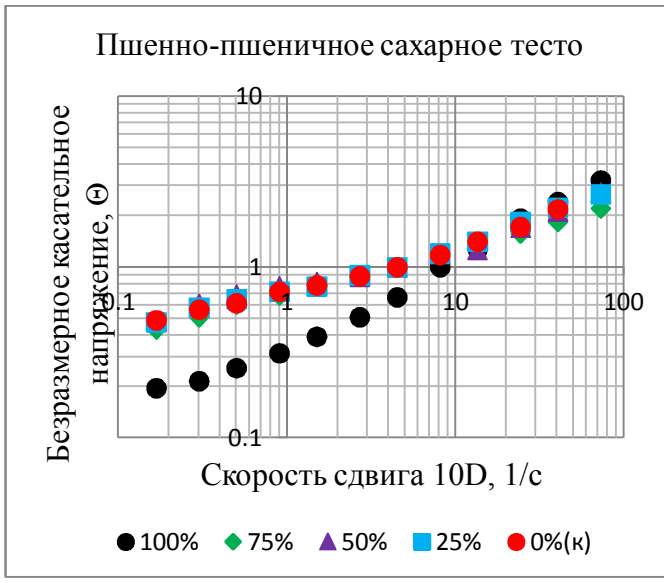


Рисунок 4 – Безразмерные кривые течения $\lg\theta = \lg\theta(\lg D)$ образцов пшено - пшенично-го сахарного тестас соответственным содер-жанием пшенной муки в смеси с пшеничной мукой высшего сорта: 100%, 75%, 50%, 25% и 0% (контроль)

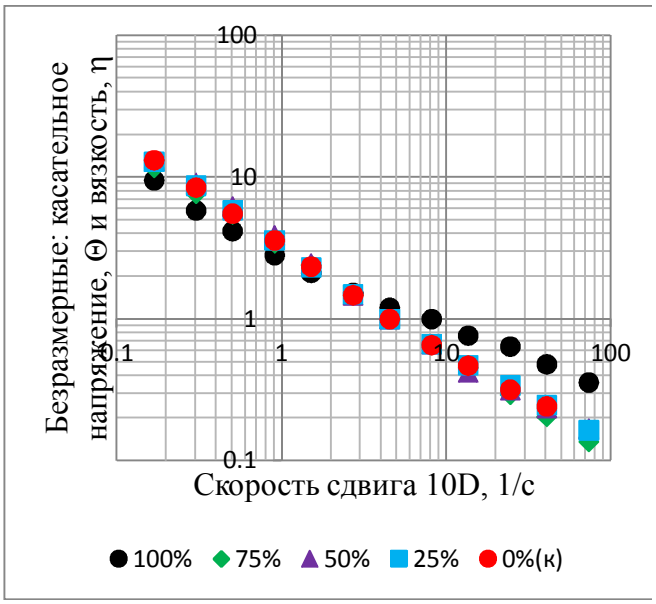


Рисунок 5 – Безразмерные зависимости вяз-кости от скорости сдвига $\lg\eta = \lg\eta(\lg D)$ образцов пшено - пшеничного сахарного тестас соответственным содержанием пшен-ной муки в смеси с пшеничной мукой выс-шего сорта: 100%, 75%, 50%, 25% и 0% (контроль)

3. Заключение

Образцы теста с клейковинным каркасом образуют в безразмерных коор-динатах общую кривую течения и общую зависимость вязкости от скорости сдвига образцов пшено - пшеничного сахарного теста, отличные от соответст-вующих кривых течения образцов теста, полностью состоящих из пшенной му-ки, которая имеет свой характер кривизны из-за отсутствия в образце пшенного теста клейковинного каркаса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корячкин В.П., Ермолаев В.Д. Расчет параметров свойств пищевых систем. Ке-мерово: ЦНТИ, 1982. – № 297. – 3 с.
2. Корячкин В.П. Реологические свойства жировой начинки с облепиховым шротом для кондитерских изделий [Текст] // Современные наукоемкие технологии. – 2004. – №2. – С. 11 – 17.
3. Структурно-механические характеристики пищевых продуктов / А.В. Горбатов, А.М. Маслов, Ю.А. Мачихин и др.; под ред. А.В. Горбатова. – М.: Легкая и пище-вая пром-сть, 1982. – 296 с.

УДК 691.161

АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА РЕЗУЛЬТАТОВ РЕКТИФИКАЦИИ НЕФТИ АППАРАТОМ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С ОБУЧЕНИЕМ

В.А. Лобанова, к.т.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail*: lvanata@yandex.ru*
В.Т. Еременко, д.т.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail*: lvanata@yandex.ru*

В данной статье авторы освещают проблему решения задачи прогнозирования результатов процесса ректификации на конкретной колонне в условиях мини-НПЗ. Рассмотрен вопрос о выборе инструментария для моделирования процесса ректификации с целью получения расчетных значений параметров техпроцесса для любого состава перерабатываемого сырья.

Ключевые слова: ректификация, мини-НПЗ, тепловой баланс, математическая модель, фракционный состав, нейронная сеть.

1. Введение

Нефть и ее фракции представляют собой сложную многокомпонентную смесь. Количество компонентов в нефти превышает 2000. Из-за большого количества компонентов нефть принято считать непрерывной смесью и выражать ее состав кривой истинных температур кипения (ИТК), имеющей плавный, непрерывный характер.

Ректификация – разделение многокомпонентных жидких смесей на практически чистые компоненты. Ректификация основана на многократной дистилляции.

Задача управления процессом ректификации состоит в получении целевого продукта заданного состава при установленной производительности установки при минимальных энергетических затратах теплоагентов при соответствующем компонентном составе сырья.

В работах ряда ученых исследуется возможность регулировать не температуру в колонне, т. е. косвенный показатель, а непосредственно состав целевых продуктов. В качестве анализаторов состава используют хроматографы, газоанализаторы, плотномеры, рефрактометры и другие приборы [2].

В работе А. А. Мусаева «Виртуальные анализаторы: концепция построения и применения в задачах управления непрерывными технологическими процессами» рассматриваются концептуальные основы построения виртуальных анализаторов и их применения в системах мониторинга состояния непрерывных технологических процессов (ТП) [4]. Предложена параметрическая модель управления ТП, позволяющая структурировать множество виртуальных анализаторов и определять виды их функциональности.

Авторы считают, что тепловой баланс процесса ректификации играет ключевую роль в переработке нефти, поэтому изучение его условий при мате-

матическом моделировании является важной задачей для прогнозирования процессов ректификации на конкретной колонне в условиях мини-НПЗ. Встает вопрос о выборе инструментария для моделирования процесса ректификации с целью получить расчетные значения для любого состава перерабатываемого сырья.

2. Методы исследования

На тепловой баланс ректификации непосредственно влияет температура нагрева подаваемой нефти [1].

Рассмотрим уравнение:

$$Q_{вх} = (Q_P + Q_W - Q_F - Q_f)П \quad (1)$$

Данное уравнение дает представление о тепловых потоках: $Q_{вх}$ – количество теплоты (Дж), подаваемое с нагретой углеводородной смесью (её же энергия учитывается как «$-Q_F$»), а так же подаваемой флегмой с верха колонны (её энергия учитывается как «$-Q_f$»). Учитывается подача кубового остатка Q_w и паров дистиллята Q_P. П – коэффициент потери в окружающую среду.

Опишем тепловые потоки:

$$Q_P = \frac{D(R+1)H_P}{3600}, \quad (2)$$

где D – производительность по дистилляту (кмоль/ч), R – флегмовое число, H_P – энтальпия паров дистиллята (Дж/кмоль).

Флегма

$$Q_W = \frac{W \cdot H_W}{3600}, \quad (3)$$

где W – производительность по кубовому остатку (кмоль/ч), H_W – энтальпия кубового остатка (Дж/кмоль)

$$Q_F = \frac{F \cdot H_F}{3600}, \quad (4)$$

где F – производительность колонны по питанию (кмоль/ч), H_F – энтальпия питания (Дж/кмоль).

$$Q_f = \frac{D \cdot R \cdot H_f}{3600}, \quad (5)$$

где H_f – энтальпия флегмы (Дж/кмоль).

В данных уравнениях (1-5) приводится общее количество теплоты Q (Дж), общее количество сырья (кмоль/час). Также отсюда видно, что уравнения материального и теплового балансов тесно связаны друг с другом, и часто при расчетах используются совместно для решения систем уравнений.

Существует другое математическое описание процесса ректификации – «от тарелки к тарелке», или «потарелочный» расчет. Чтобы понять суть этого математического аппарата, приведем уравнения для укрепляющей (верхней) части колонны:

$$V_j H_j^v = L_{j-1} H_{j-1}^l + D \cdot H_d^v + \sum_{k=1}^{k=j-1} W_k \cdot H_w^l - \sum_{k=1}^{k=j-1} Q_k . \quad (6)$$

В этом уравнении используются мольные доли сырья: L, V, D, W – это количество жидкости, пара, дистиллята, кубового продукта соответственно – моль / 100 моль сырья. Таким образом, тепловой баланс может быть выражен так же и через концентрации компонентов в системе. Уравнение, учитывающее питающую и отгонную часть (уравнение общего теплового баланса по колонне в целом):

$$F^l H_f^l + F^v H_f^v = D \cdot H_d + \sum_{k=1}^{k=n} W_k \cdot H_w^l + R \cdot H_r - \sum_{k=1}^{k=n} Q_j \,. \qquad (7)$$

Как видно, учитываются так же F и R – количество питания и кубового остатка в колонне. В этой же литературе есть ещё одно уравнение, описывающее тепловой баланс по тарелкам:

$$L_j H_j^l + V_j H_j^v = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{k=n} (L_k^l H_k^l a_{j,k}^l + V_k^v H_k^v a_{j,k}^v) + F_j^l H_j^{F^l} + F_j^v H_j^{F^v} + Q_j \,, \qquad (8)$$

где $a_{j,k}^l$, $a_{j,k}^v$ - коэффициенты распределения жидкостного и парового потоков.

3. Результаты и обсуждения исследований

В нашем случае необходимо составить математическую модель, которая поможет рекомендовать температурный режим относительно параметров заданных, известных и искомых. К ним относится: количество и фракционный состав дистиллята, количество и фракционный состав сырья, температура, давление, коэффициенты распределения жидкостного и парового потока, количество теплоты и тд. В зависимости от того, какие мы выберем параметры в качестве независимых переменных, будет выбрана та или иная математическая модель.

На основе изученных научных работ был разработан алгоритм нахождения рекомендуемых температурных параметров заданных уравнений материального и теплового баланса (рис. 1).

В качестве исходных данных рассматривается состав дистиллята, подаваемого в колонну питания и технологических параметров колонны (диаметр, КПД тарелок, расстояние, кол-во тарелок и т.п..). Так в случае с математической моделью учета тепловых потоков (1) обособлены расчеты для таких искомых констант (величин или параметров), как температура верха и низа ректификационной колонны (РК). Температура верха колонны непосредственно влияет на температуру конденсации паров дистиллята. Рассмотрим уравнение:

$$T(T_в) = \sum_{i=1}^{n} \frac{pV \cdot y_i}{P(i, T_в)}, \qquad (9)$$

где $P(i, T_в)$ – функция давления, pV – давление верха РК с учетом гидравлических потерь, y_i – состав дистиллята (мольные доли).

Это уравнение дает нам понять лишь о существовании возможности или невозможности (или о «степени истинности» введенных значений параметров) по заданным значениям y_i найти искомую рекомендуемую температуру. Для этого нужно решить обратную задачу задаче проектирования колонны. Это в нашем случае относительно математики и порождает неоднозначность – множество решений системы с нелинейными уравнениями. Данный алгоритм, по

сути, сводится к оцениванию полученного множества и обеспечению минимума функционала. Искомая температура предлагается в качестве регулируемого параметра на входе математической модели, а это дает возможность как раз таки оценить температурный диапазон реальной РК в установившемся рабочем режиме. Другими словами – решениями таких предлагаемых уравнений будет рабочий температурный диапазон – множество, о котором шла речь ранее. Задачей алгоритма является для каждой заданной температуры из такого множества найти оптимальное решение, удовлетворяющее заданной точности ε. Применяя нечеткую логику, идет оценка полученных результатов $T_в$ – поиск той или иной температуры. В результате получим множество Y (множество, описывающее состав) с допустимыми отклонениями, где мольные доли y_i – по сути, и есть характеристика степени истинности, которая была упомянута ранее. Но на этом расчеты прогнозирования можно сказать – лишь начинаются. Дальше идет процесс поиска «оптимальной» температуры на следующей тарелке. Если ни одно значение из множества T не удовлетворяет заданной точности ε, то можно сделать вывод о том, что для заданного состава не существует оптимального температурного режима. Предлагаемый автором алгоритм, конечно же, не гарантирует точное и однозначное решение, т.к. в себе содержит элементы нечеткой логики. Но для условий мини-НПЗ он может оказаться вполне приемлемым, и алгоритм позволит определить, по крайней мере, возможность или невозможность получить заданный состав Y. Это утверждение требует детального изучения эффективности и точности предлагаемого алгоритма, которое выходит за рамки этой статьи.

Анализ алгоритма предполагает использование аппарата искусственных нейронных сетей с обучением [3], [4]. Это позволит вводить большое количество исходных данных и на выходе задавать нужные результаты, т.е. использовать способность нейронной сети к прогнозированию. Это напрямую следуют из ее способности к обобщению и выделению скрытых зависимостей между входными и выходными данными. После обучения сеть способна предсказать будущее значение некой последовательности на основе нескольких предыдущих значений и (или) каких-то существующих в настоящий момент факторов в процессе обучения нейронная сеть способна выявлять сложные зависимости между входными данными и выходными, а также выполнять обобщение. Это значит, что в случае успешного обучения сеть сможет вернуть верный результат на основании данных, которые отсутствовали в обучающей выборке, а также неполных и/или «зашумленных», частично искаженных данных.

Когда в данной работе мы говорим об аппарате ИНС, то имеем в виду персептрон Розенблатта. В нем «образом» является набор заданных величин состава, температуры и т.д. для S – слоя рецепторов. Обучение персептрона предлагается классическим методом – коррекции ошибки: когда появилась неправильная реакция, необходимо скорректировать вес коэффициентов с помощью «учителя». Учителем в данном случае является предлагаемый выше алгоритм.

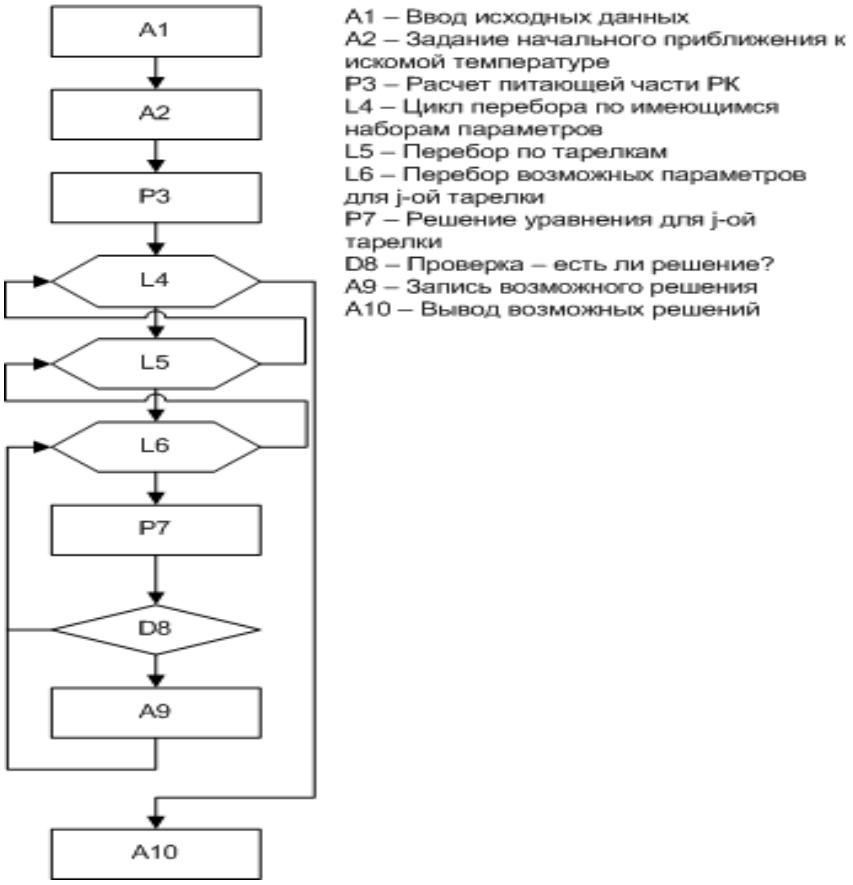


Рисунок 1 – Блок-схема общего алгоритма прогнозирования фракционного состава

Алгоритм обучения означает процедуру, в которой используются правила обучения для настройки весов. значения для весов сети находят после определения количества слоев и числа элементов в каждом из них. Веса сети должны минимизировать ошибку прогнозирования, выдаваемую сетью. Проходит процесс подгонки модели, реализуемой сетью, к обучающим данным. Прогнав через сеть все имеющиеся наблюдения и сравнив реально выдаваемые выходные значения с целевыми показателями, определяется ошибка для данной конфигурации сети.

При создании модели используются данные технологического процесса и заводской лаборатории: расход верхнего продукта, температура верха колонны, давление в колонне. На обучающей выборке веса корректируются. На каждом цикле итерации определяются расхождения между заданным выходом и откликом сети. Если расхождение велико, то алгоритм надо корректировать и начать новый цикл обучения.

При оценке качества продуктов на ректификационных установках используются следующие способы контроля показателей качества: лабораторные анализы, данные поточных анализаторов, данные виртуальных анализаторов. Следует отметить низкую оперативность лабораторных анализов. Суммарная погрешность приборов снижается из-за необходимости отбора пробы и ее доставки в лабораторию.

Таблица 1 - Коэффициенты детерминации моделей

Метод	Коэффициент корреляции		Коэффициент детерминации	
	Обучающая выборка	Контрольная выборка	Обучающая выборка	Контрольная выборка
Сеть прямого распространения	0,987	0,864	0,994	0,846
Обобщенно-регрессионная нейронная сеть	0,998	0,897	0,997	0,862

Вывод

Таким образом, при оценке качества продуктов на ректификационных установках применяются следующие способы контроля показателей качества: лабораторные анализы, данные поточных анализаторов, данные виртуальных анализаторов. Следует отметить низкую оперативность лабораторных анализов. Суммарная погрешность приборов снижается из-за необходимости отбора пробы и ее доставки в лабораторию. В результате сравнительного анализа коэффициента детерминации в регрессионных и нейросетевых моделей наиболее точной является обобщенно-регрессионная нейросетевая модель.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галиаскаров Ф.М. Расчет ректификации нефтяных смесей / Изд. Башкирский ун-т – Уфа, 1999 г. - 152 с.
2. Усков А.А. Гибридные нейросетевые методы моделирования сложных объектов: Монография [Текст]/ А.А. Усков, С.А. Котельников, Е.М. Грубник, В.М. Лаврушин. – Смоленск: Смоленский филиал АНО ВПО ЦС РФ «Российский университет кооперации», 2011. – 132 с.
3. Медведев В.С. Нейронные сети MATLAB 6. [Текст] / В.С. Медведев, В.Г. Потемкин; под общ.ред. В.Г. Потемкина. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2002.– 496 с.
4. Мусаев А. А. Виртуальные анализаторы: концепция построения и применения в задачах управления непрерывными технологическими процессами // Автоматизация в промышленности. 2003. № 8. С. 28-33.

УДК 621.382.2/.3

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНОГО ТЕПЛОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ СИЛОВЫХ IGBT-МОДУЛЕЙ ПАЯНОЙ КОНСТРУКЦИИ

С.И. Матюхин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sim1@mail.ru*
Д.О. Малый
АО «Протон-Электротекс»
e-mail: *d.malyy@proton-electrotex.com*
А.С. Вишняков
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sim1@mail.ru*

Методами компьютерного моделирования теплопереноса в программной среде ComsolMultiphysics решена задача определения переходного теплового сопротивления силовых IGBT-модулей паяной конструкции.

Ключевые слова: силовой полупроводниковый модуль, IGBT, паяная конструкция, теплоперенос, тепловое сопротивление, компьютерное моделирование, ComsolMultiphysics

1. Введение

В настоящее время практически все типы преобразовательного оборудования мощностью от нескольких киловатт до единиц мегаватт разрабатываются и производятся с использованием силовых IGBT-модулей [1–5]. По типу конструкции силовые модули подразделяются на два вида [5]: достаточно новые модули прижимной конструкции, которые всё чаще используются в электроэнергетике, и традиционные паяные модули, которые рекомендуются для применения в промышленных электроприводах.

Силовые модули паяной конструкции представляют собой многослойные структуры из различающихся материалов, одним из которых выступает непосредственно полупроводниковый элемент(рисунок 1).

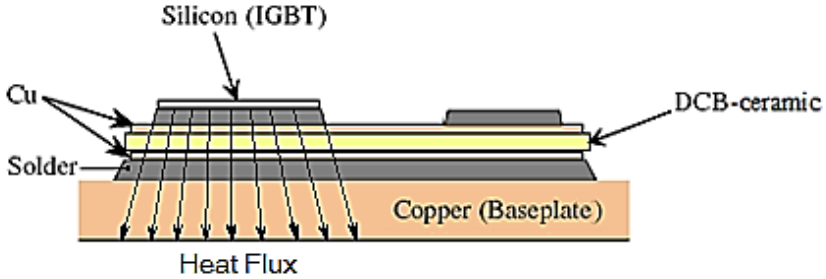


Рисунок 1 – Структура силового IGBT-модуля паяной конструкции

В процессе работы полупроводниковые элементы внутри модулей испытывают циклические изменения температуры. Из-за них материалы с различными коэффициентами теплового расширения (КТР) получают высокие меха-

нические напряжения, которые с течением времени ведут к ухудшению термоконтакта между различными слоями.

Далее развивается положительная обратная связь: увеличение теплового сопротивления приводит к увеличению температуры чипов; это увеличивает механические напряжения и деформацию слоёв; в свою очередь, увеличение деформации слоёв приводит к увеличению теплового сопротивления и т.д. Всё это вместе приводит к снижению эксплуатационных характеристик конечного изделия и, в конечном итоге, к его отказу.

На сегодняшний день термоциклоустойчивость стандартных IGBT-модулей с медным основанием составляет не более 10 тыс. циклов[5]. И существенное увеличение этой устойчивости представляет собой одну из главных проблем, которая стоит перед производителями модулей. Вторая проблема, возникающая при эксплуатации модулей и обусловленная нагреванием полупроводниковых чипов, связана с увеличением мощности, которая преобразуется при помощи этих чипов.

Очевидно, что увеличение этой мощности при заданной температуре корпуса и неизменном тепловом сопротивлении модуля будет приводить к росту температуры чипов и, как следствие, к снижению их эксплуатационных характеристик и потере работоспособности. Таким образом, увеличение коммутируемых токов и рабочих напряжений при проектировании модулей, как правило, должно быть сопряжено с решением ряда задач, связанных с их охлаждением и/или понижением их теплового сопротивления.

В настоящей работе методами компьютерного моделирования решена задача определения переходного теплового сопротивления силовых IGBT-модулей паяной конструкции, выпускаемых АО «Протон-Электротекс» (г. Орёл).

2. Постановка задачи и результаты компьютерного моделирования

В качестве задания для моделирования выбиралась следующая задача:

1.Приноминальнойтепловой мощности P_{tot}, выделяющейся в полупроводниковых IGBT-чипах модуля, и заданной температуре основания модуля T_C, путем численного решения нестационарного уравнения теплопроводности необходимо найти распределение температуры в структуре модуля, изображенной на рисунке 1, и максимальное значение температуры чипов $T_{j\max}$.

2. Используя формулу

$$\frac{T_{j\max} - T_C}{R_{th}} = P_{tot}, \qquad (1)$$

найти тепловое сопротивление R_{th} модуля.

При этом следует иметь в виду, что благодаря нестационарности задачи, значение температуры $T_{j\max}$, а с ними тепловое сопротивление модуля R_{th} будет зависеть от времени, т.е. определенное таким образом тепловое сопротивление является переходным.

Для решения поставленной задачи была выбрана программная среда Comsol Multiphysics [6–7]. Результаты компьютерного моделирования теплопереноса, выполненного в этой программе, представлены на рисунках 2 –3.

Как показывает рисунок 2, основной вклад в переходное тепловое сопротивление изученного IGBT-модуля, также как и в стационарное [8], вносит DCB-керамика.

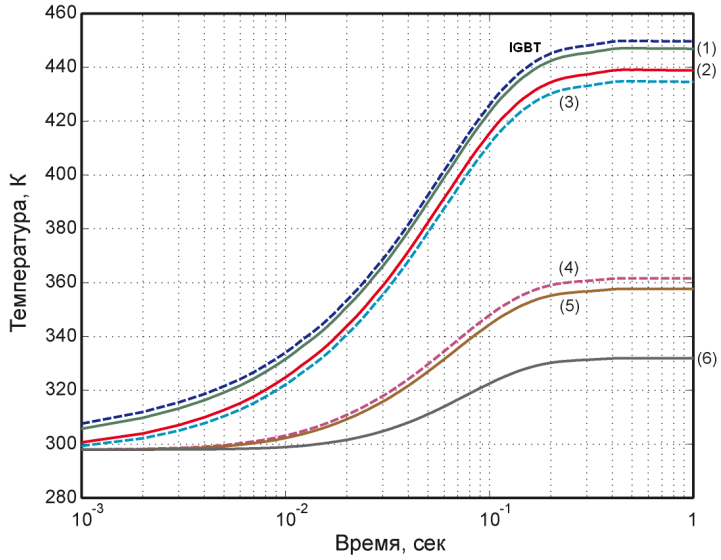


Рисунок 2 – Изменение температурыIGBT-чипа и в точках модуля, расположенных непосредственно под чипом на границах слоев: 1 – «чип - припой»; 2 – «припой - металлизация DCB-керамики»; 3 – «металлизация - керамика»; 4 – «керамика - нижняя металлизация»; 5 – «нижняя металлизация - припой»; 6 – «припой - основание».

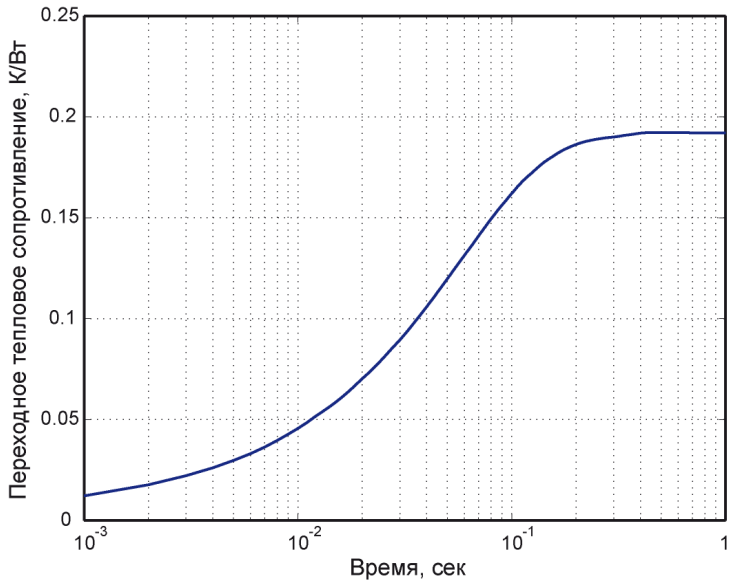


Рисунок 3 – Переходное тепловое сопротивление силового IGBT-модуля (в расчете на чип), соответствующее номинальной мощности P_{tot}, в зависимости от времени от начала прямоугольного импульса тока.

3. Заключение

Полученные результаты показывают, что компьютерное моделирование в программной среде Comsol Multiphysics является мощным методом решения сложных, многопараметрических задач [6], аналитическое или экспериментальное решение которых оказывается затруднительным. В частности, Comsol Multiphysics может с успехом использоваться для моделирования и анализа теплопереноса в многослойных структурах, примером которых являются силовые IGBT-модули паяной конструкции.

Компьютерное моделирование теплопереноса в IGBT-модулях, производимых АО «Протон-Электротекс» (г. Орёл), позволило рассчитать их переходное (рисунок 3) и стационарное [8] тепловое сопротивление и показало, что основной вклад в эти сопротивления вносит DCB-керамика. Этот вывод оказывается важным с точки зрения оптимизации конструкции этих модулей, а дальнейшее их исследование может быть направлено на изучение переходного (нестационарного) теплового сопротивления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Флоренцев С.Н. Современное состояние и прогноз развития приборов силовой электроники // Современные технологии автоматизации. – 2004. – №2. – С.20-30.
2. Евсеев Ю.А., Ковалев В.Д., Сурма А.М. Состояние и перспективы развития российской полупроводниковой элементной базы силовой электроники // Электро. – 2005. – №5. – С.2-14.
3. Minato T., Sato K. Future Trend of Si Power Device // IEICE Electronics Express. – 2014. – V.11. – №3. – P.1-17.
4. Jan Vobecky The Current Status of Power Semiconductors // Facta Universitatis. Series: Electronics and Energetics. – 2015. – V.28. – №2. – P.193-203.
5. Флоренцев С.Н. Силовые IGBT-модули – основа современного преобразовательного оборудования // Электронные компоненты. – 2002. – №6. – С.11-17.
6. Матюхин С.И., Макулевский Г.Р., Деев О.В. Современное программное обеспечение для моделирования в электронике // Информационные системы и технологии. – 2014. – №2 (82). – С.58-71.
7. Comsol Multiphysics User's Guide, - Comsol. – 2012. – 1292 p.
8. Матюхин С.И., Малый Д.О., Вишняков А.С., Заночкин Е.А., Петрухин А.Д. Компьютерное моделирование теплопереноса в силовых IGBT-модулях паяной конструкции // Сб. трудов III Междунар. научно-практической конф. «Современные проблемы физико-математических наук»,- Орёл: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2017. С.242-245.

УДК 621.9.047; 532.528

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОБ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ С УЧЁТОМ КАВИТАЦИИ

Н. М. Миназетдинов, к.ф.-м.н., доц.
Российский новый университет
e-mail: *nminazetdinov@yandex.ru*

На основе модели идеального процесса электрохимической обработки металлов и теории двумерных установившихся течений идеальной несжимаемой жидкости получено решение нелинейной двумерной задачи теории электрохимической обработки металлов, связанной с определением формы поверхности при её обработке двугранным электродом-инструментом с учётом кавитационного течения в межэлектродном промежутке. Результаты расчетов для частного случая представлены в виде графиков форм обрабатываемой детали и присоединенной к границе катода каверны.

Ключевые слова: электрохимическая обработка металлов, идеальный процесс, идеальная несжимаемая жидкость.

Электрохимическая обработка (ЭХО) металлов является одним из современных методов изготовления деталей за счёт анодного растворения заготовки (анода) в проточном электролите с помощью специального электрода-инструмента (катода) с заданной геометрической формой поверхности. При описании схемы возможных режимов течения электролита в межэлектродном промежутке отмечено особое значение явления кавитации [1, 2].

Основными факторами, способствующими возникновению кавитации, являются: высокая скорость течения электролита, его начальная загазованность и выделение газообразных продуктов электрохимических реакций. В начальной стадии кавитации каверны являются микроскопически малыми пузырьками, движущимися вместе с раствором электролита. В следующей стадии кавитации, называемой присоединённой кавитацией [3], в местах с пониженным статическим давлением поток электролита отрывается от поверхности катода, и образуется присоединённая каверна, заполненная парами жидкости и газом. Низкая электропроводность парогазовой среды, заполняющей каверну, вызывает экранирование обрабатываемой поверхности и существенно влияет на форму обрабатываемой поверхности [1].

В настоящей работе в рамках модели "идеального процесса" [1] построено численно-аналитическое решение двумерной задачи теории ЭХО, связанное с определением установившейся формы поверхности детали с учётом кавитации при обработке двугранным катодом. В первом приближении для описания течения электролита используется модель идеальной несжимаемой жидкости [2, 3]. Влияние вязкости жидкости и многофазности потока электролита в межэлектродном промежутке не учитывается.

Схема сечения межэлектродного промежутка изображена на рис. 1а: участок ADE — граница катода-инструмента, DC — граница присоединенной каверны, линия ABC соответствует установившейся границе анода. Угол при вершине D катода-инструмента равен $\alpha\pi\ (0 < \alpha < 1)$. Решение задачи для частного случая при $\alpha = 0.5$ представлено в [4].

Введём систему декартовых координат $(x_1,\, y_1)$, связанную с катодом, который совершает поступательное движение к аноду в направлении, противоположном оси ординат с постоянной скоростью V_c. Начало координат выбрано в точке D. Точки A и C являются бесконечно удаленными. Поток электролита направлен от точки A к точке C. В точке D происходит отрыв потока от поверхности катода AD с образованием каверны, граница DC которой простирается до бесконечности.

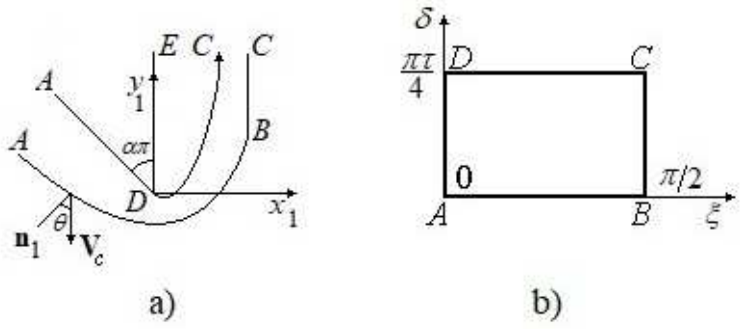


Рисунок 1 – Схема межэлектродного промежутка(a), плоскость параметрической переменной t (b)

Согласно модели "идеального процесса электрическое поле с потенциалом u в межэлектродном промежутке описывается уравнением Лапласа $\nabla^2 u = 0$. Функцию $u(x_1,\, y_1)$ можно считать мнимой частью аналитической функции $W(z_1) = \nu(x_1,\, y_1) + iu(x_1,\, y_1)$ комплексной переменной $z_1 = x_1 + iy_1$. Функция $W(z_1)$ — комплексный потенциал электрического поля, её действительная часть $\nu(x_1,\, y_1)$ — функция тока. Значения потенциалов u_a и u_c на поверхностях анода ABC и рабочей части катода AD постоянны.

Будем считать, что граница каверны является изолятором, что оправдано при учете слабой электропроводности газовой среды по сравнению с электролитом. На границе DC каверны выполняется условие $\partial u/\partial n = 0$.

Производительность и точность обработки существенно зависят от доли заряда (выхода по току для реакций анодного растворения металла), затраченной на растворение металла. Выход по току η зависит от различных параметров процесса, главным образом, от анодной плотности тока j_a [1]. Для электролитов в виде растворов нитрата и хлората натрия зависимость $\eta(j_a)$ при обработке сталей можно представить в виде [5]

$$\eta(j_a) = 0 \text{ при } j_a \le j_{cr};\ \eta(j_a) = a_0 + a_1/j_a \text{ при } j_a > j_{cr}, \qquad (1)$$

где $a_0 > 0,\ a_1 < 0,\ j_{cr}$ — постоянные.

При соблюдении необходимых условий, после длительного времени обработки поверхность принимает определенную, постоянную во времени форму, которую называют установившейся или стационарной [1].

Согласно условию (1), искомую установившуюся анодную границу разделим на два участка. На участке AB происходит растворение металла, и распределение нормальной производной потенциала на этом участке анодной границе удовлетворяет условию стационарности формообразования [1, 6]

$$\left|\frac{dW_1}{dz_1}\right| = \frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{1}{\kappa a_0}\left(-a_1 + \frac{\rho V_c}{\varepsilon}\cos\theta\right), \tag{2}$$

где κ — удельная электропроводность среды; ε — электрохимический эквивалент металла; ρ — плотность материала анода; θ — угол между вектором $\mathbf{V}_c$ скорости подачи катода и вектором $\mathbf{n}_1$ нормали к анодной границе (рис. 1a). Вследствие того, что каверна экранирует часть обрабатываемой поверхности, на анодной границе формируется необрабатываемая зона, которой в модели соответствует прямолинейный участок BC.

Далее исследование проводится в безразмерных величинах. Принимая за характерный размер величину $H = \kappa(u_a - u_c)/j_0$, где $j_0 = \rho V_c/\varepsilon$ [7], введём безразмерную переменную $z = z_1/H = x + iy$. С помощью преобразования $W(z) = (W_1(z) - iu_c)/((u_a - u_c)$ перейдём к безразмерному комплексному потенциалу $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$.

В односвязной области $z = x + iy$ рассмотрим установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости, ограниченное прямолинейной стенкой AD, свободной поверхностью DC и твердой границей, состоящей из криволинейного участка AB, переходящего в прямолинейный участок BC. Скорость течения на входе в межэлектродный канал в окрестности бесконечно удаленной точки A равна V_1, а величина скорости на свободной границе DC постоянна и равна V_0 [2, 3]. Требуется определить формы границ AB и DC.

Введём вспомогательное комплексное переменное $t = \xi + i\delta$, изменяющееся в области $G_t\,(0 < \xi < \pi/2,\ 0 < \delta < \pi|\tau|/4)$, $\tau = i|\tau|$ (рис. 1b). Для решения задачи будем искать функцию $z(t)$, конформно отображающую прямоугольник G_t на область течения. Решение задачи сводится к определению аналитических функций: комплексного потенциала течения $W_g(t) = \varphi_g(t) + i\psi_g(t)$ ($\varphi_g(t)$ — потенциал скорости, $\psi_g(t)$ — функция тока) и функции Жуковского $\chi(t) = \ln(V_0 dz/dW) = r + i\theta_g$, $r = \ln(V_0/V)$, где V — модуль скорости, θ_g — угол скорости с осью абсцисс [3].

В плоскости χ свободным границам соответствуют отрезки $r = \text{const}$, а прямолинейным стенкам — прямые $\theta = \text{const}$. Для того, чтобы получить граничное условие для функции $\chi(t)$ на неизвестной границе AB, введем функцию $dW_g/dz = V\exp(-i\theta_g)$ и рассмотрим соотношение

$$V = \left|\frac{dW_g}{dz}\right| = \left|\frac{dW_g}{dW}\frac{dW}{dz}\right| = \left|\frac{dW_g}{dt}\frac{dt}{dW}\frac{dW}{dz}\right|. \tag{3}$$

Твердые и свободные границы течения являются линиями тока, на которых $\psi_g(t) = \text{const}$. Кроме этого, граница анода ABC и рабочая часть AD ка-

тода являются эквипотенциальными линиями электрического поля, на которых $\psi(t) = \text{const}$, а на границе каверны DC, которая в модели считается изолятором, выполняется условие $\varphi(t) = \text{const}$. Поэтому в плоскостях W_g и W границам межэлектродного промежутка соответствуют прямолинейные границы. Это обстоятельство позволяет построить выражения функции dW_g/dt и dW/dt, используемые в соотношении (3), методом особых точек Чаплыгина [3].

Учитывая, что граница AB является одновременно линией тока идеальной жидкости и эквипотенциальной линией электрического поля и то, что на этом участке анодной границы выполняется равенство $\theta_g(x, y) = \theta(x, y)$ из условия (2) и формулы (3) следует, что на границе AB граничные значения гармонически сопряженных функций $r(\xi)$ и $\theta_g(\xi)$ связаны соотношением

$$\exp(-r) = \frac{a(b + \cos\theta_g)}{V_0} \left| \frac{d\varphi_g}{d\varphi} \right|, \; a = \frac{1}{a_0}, \; b = -\frac{a_1}{j_0}. \tag{4}$$

В точке B, в которой граница AB переходит в полубесконечную прямую BC, выполняется условие Бриллуэна-Вилла [3]

$$d\theta_g/d\xi = 0 \text{ при } \xi = \pi/2. \tag{5}$$

Представим функцию $\chi(t)$ в виде суммы: $\chi(t) = \chi_0(t) + \omega(t)$, где $\chi_0(t) = r_0(t) + i\theta_0(t)$ – функция Жуковского для течения жидкости по заданной схеме при условии, что на границе AB модуль скорости равен $V_* = \text{const}$; $\omega(t)$ – функция, аналитическая в G_t и непрерывная в $\overline{G} = G_t \cup \partial G$.

В плоскости χ_0 области течения соответствует прямоугольник. Используя метод конформных отображений, найдём функцию $\chi_0(t)$.

Из сравнения граничных условий функций $\chi_0(t)$ и $\chi(t)$ для функции $\omega(t)$ получим нелинейную краевую задачу

$$\operatorname{Im}\omega(i\delta) = 0, \; \operatorname{Im}\omega(\pi/2 + i\delta) = 0, \; \delta \in [0, \, \pi|\tau|/4], \tag{6}$$

$$Re\,\omega(\xi + \pi\tau/4) = 0, \; \xi \in [0, \, \pi/2], \tag{7}$$

$$\exp(-r_0(\xi) - \nu) = \frac{a(b + \cos(\theta_0(\xi) + \mu))}{V_0} \left| \frac{d\varphi_g}{d\varphi} \right|, \tag{8}$$

$$\mu = \operatorname{Im}\omega(\xi), \; \nu = \operatorname{Re}\omega(\xi), \; \xi \in [0, \, \pi/2].$$

Функция $\omega(t)$, в силу условий (6), (7), разлагается в ряд с вещественными коэффициентами

$$\omega(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} c_k \sinh\left(\frac{\pi|\tau|}{2} + 2ti\right) k. \tag{9}$$

Коэффициенты разложений (9) и параметр $|\tau|$ определяются таким образом, чтобы на искомой анодной границе удовлетворялись условия (5), (8).

Результаты расчета координат точек границ AB и DC при $a_0 = 0.906$, $a_1 = -12.82$, $j_0 = 50\,\text{A/cm}^2$, $\alpha = 0.25$ представлены на рис.2.

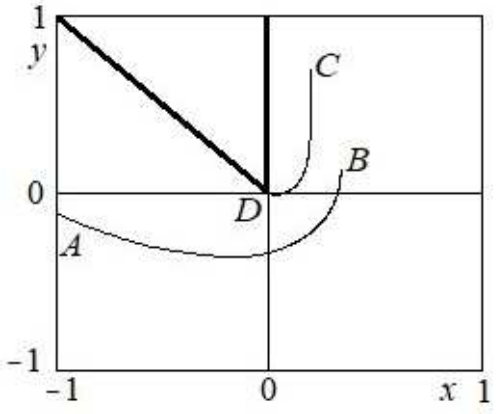


Рисунок 2 – Результаты расчета анодной границы и границы присоединенной каверны

ЛИТЕРАТУРА

1. Давывов А. Д., Козак Е. Высокоскоростное электрохимическое формообразование. — М.: Наука. — 1990. — 272 с
2. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. — М.: Мир. — 1964. — 466 с.
3. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука. — 1977. — 536 с.
4. Миназетдинов Н. М. О кавитационном течении идеальной несжимаемой жидкости при электрохимической обработке металлов // ПММ. — 2017. — Том 81. — Выпуск 1. — С. 45–53.
5. Котляр Л. М., Миназетдинов Н. М. Определение формы анода с учётом свойств электролита в задачах электрохимической размерной обработки металлов // ПМТФ — 2003. — Том 44. — Номер 3. — С. 179–184.
6. Миназетдинов Н. М. Об одной задаче теории электрохимической обработки металлов // ПМТФ. — 2009. — Том 50. — Номер 3. — С. 214–220.
7. Каримов А. Х, Клоков В. В, Филатов Е. И. Методы расчёта электрохимического формообразования. — Казань.: Изд-во Казан. ун-та. — 1990. — 386 с.

УДК 550.34.012

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОЛЕЙ УПРУГИХ ВОЛН В ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

М. А. Никитина
ИТПЗ РАН
e-mail: *margarita@mitp.ru*
А. Ю. Вальков
Математический факультет, Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Физический факультет, Санкт-Петербургский Государственный Университет, Петродворец
e-mail: *alexvalk@mail.ru*

Исследовано поле гармонического точечного источника (функция Грина) в упругой вертикально-неоднородной среде. Было получено матричное представление для функции Грина (ФГ) в смешанном представлении, то есть по поперечным переменным проводится преобразование Фурье. Данное представление выражается через полное семейство линейно-независимых решений волнового уравнения среды. Такое подход позволяет свести задачу к алгебраической в отличие от координатного представления. Полученная схема расчета ФГ не имеет явного аналитического решения и может быть использована только для численных вычислений.

Ключевые слова: функция Грина, упругая среда, задача Штурма-Лиувилля, граничные условия.

Особую роль в геофизике играет исследование распространения упругих волн в среде. В частности такой подход позволяет извлечь из имеющихся практических данных информацию об источнике землетрясений, о параметрах среды и т.д. Существует множество методов на основе использования акустических волн. Данные методы и подходы могут быть эффективно использованы для мониторинга невозобновляемых ресурсов, но они крайне чувствительны к частотной дисперсии и рассеянию на случайных неоднородностях среды, что может значительно исказить результат измерения. Однако существует альтернативный подход, в котором в качестве источника излучения могут быть использованы промышленные устройства или установки, генерирующие гармонические колебания. В рамках такого подхода исключаются искажения сигнала из-за частотной дисперсии, в то время как рассеяние может быть учтено. Предложенный метод анализа может быть реализован с использованием мат аппарата ФГ.

Функция Грина с физической точки зрения представляет собой поле точечного источника. Само по себе это понятие имеет основополагающее значение и широко используется в теории распространения волн и ряде других задач математической физики. В частности метод ФГ является основой современного подхода к теории рассеяния в случайно-неоднородных средах, а также в ближнезонных и дальнезонных задачах для упругого однородного полупространства [1].

Рассмотрим упругую слоистую среду, расположенную между двумя свободными горизонтальными поверхностями l_1, l_2, как показано на рис. 1. Такая система превращается в полупространство при $l_2 \to +\infty$, мы также получаем

полупространство, если $l_1 \to -\infty$. Если же обе границы устремить к бесконечности ($l_1 \to -\infty$ и $l_2 \to +\infty$), то система превращается в неограниченную среду.

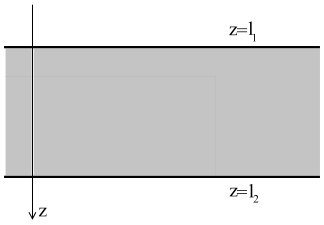


Рисунок 1 – Упругая среда располагается: в слое $l_1 \leqslant z \leqslant l_2$

Для удобства расчетов мы будем использовать ФГ в смешанном Фурье представлении $(\mathbf{q}_\perp, z, \omega)$, поэтому запишем интегральные правила перехода для получения ФГ в $(\mathbf{r}, t)$ –представлении:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_0(\mathbf{q}_\perp, z, \omega) e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} \frac{d\mathbf{r}_\perp}{2\pi} = \mathbf{G}_0(\mathbf{r}_\perp, z, \omega), \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} dt = \mathbf{G}_0(\mathbf{r}, t). \tag{2}$$

Здесь ω — круговая частота, $\mathbf{q}$ — волновой трехмерный вектор и $\mathbf{q}_\perp$ — двумерный волновой вектор, а именно поперечная часть волнового вектора, аналогичные обозначения употребляются для $\mathbf{r}, \mathbf{r}_\perp$.

Запишем уравнение движения на компоненты функции Грина $\mathbf{G}(\mathbf{q}_\perp; z; z')$:

$$\left(\mathbf{K}_2(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mathbf{K}_1(z) \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{K}_0(z) \right) \mathbf{G}(\mathbf{q}_\perp; z; z') = \mathbf{I}\delta(z - z'), \tag{3}$$

где матрицы $\mathbf{K}_{0,1,2}(z)$ записываются в виде:

$$\begin{aligned} (K_0)_{\alpha\beta} &= \left(\omega^2 - c_t^2(z) q_\perp^2\right) \delta_{\alpha\beta} - \left(c_l^2(z) - c_t^2(z)\right) Q_\alpha Q_\beta, \\ (K_1)_{\alpha\beta} &= \left(c_l^2(z) - c_t^2(z)\right) \left(Q_\alpha n_\beta + n_\alpha Q_\beta\right), \\ (K_2)_{\alpha\beta} &= c_t^2(z) \delta_{\alpha\beta} + \left(c_l^2(z) - c_t^2(z)\right) n_\alpha n_\beta, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_\perp, 0)$ — это трехмерный вектор, составленный из двумерного $\mathbf{q}_\perp$ и 0 в качестве третьей компоненты, $\mathbf{n}$ — это трехмерный вектор нормали.

Для решения поставленной задачи мы воспользуемся методом Штурма-Лиувилля. Из условий задачи мы также получаем, что ФГ должна удовлетворять трем следующим условиям:

1. ФГ представляет из себя линейную комбинацию решений однородного уравнения в областях $z < z'$ и $z \geqslant z'$, так как при $z \neq z'$ ФГ удовлетворяет однородному уравнению (3).

2. Полученное решение для ФГ должно удовлетворять условию сшивания при $z = z'$.

3. Решение для ФГ должно удовлетворять граничным условиям при $z = l_1$ и $z = l_2$.

Начнем с поиска собственных решений однородного уравнения:

$$\left(\mathbf{K}_2(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + i\mathbf{K}_1(z)\frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{K}_0(z)\right)\mathbf{u}(z) = 0. \tag{5}$$

В ходе решения этого уравнения мы получаем шесть линейно-независимых решений: $\mathbf{u}^{(1)}(z)$,..., $\mathbf{u}^{(6)}(z)$, которые будут записаны в виде матрицы с размерностью 3×6:

$$\mathbf{V}(z) = \left(\mathbf{u}^{(1)}(z), \ldots, \mathbf{u}^{(6)}(z)\right). \tag{6}$$

Полученная таким образом матрица $\mathbf{V}$ не является точно определенной и ее можно заменить на матрицу

$$\tilde{\mathbf{V}}(z) = \mathbf{V}(z)\mathbf{C}, \tag{7}$$

где $\mathbf{C}$ — это произвольная невырожденная постоянная матрица размерности 6×6. Однако такая неоднозначность не сказывается на итоговом решении для ФГ.

Далее мы учтем влияние свободных поверхностей $z = l_j$, $j = 1, 2$, для этого запишем третий тип граничных условий:

$$\left(\mathbf{B}_1(l_j)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + i\mathbf{B}_0(l_j)\mathbf{u}\right)\Big|_{z=l_j} = \mathbf{0};\ j = 1, 2, \tag{8}$$

где $\mathbf{B}_{1,0}(l_j)$ матрицы размерности 3×3. Такие граничные условия называются смешанными или условиями Робина. Данная система дифференциальных уравнений (5) имеет шесть независимых решений. Сформируем из полученных решений две матрицы соответствующим образом:

$$\mathbf{V}_>(z) = \left(\mathbf{u}_>^{(1)}, \mathbf{u}_>^{(2)}, \mathbf{u}_>^{(3)}\right), \tag{9}$$

$$\mathbf{V}_<(z) = \left(\mathbf{u}_<^{(1)}, \mathbf{u}_<^{(2)}, \mathbf{u}_<^{(3)}\right), \tag{10}$$

где $\mathbf{u}_>^{(1)}(z), \mathbf{u}_>^{(2)}(z), \mathbf{u}_>^{(3)}(z)$ — это решения идущие вверх и удовлетворяющих граничным условия на границе $z = l_2$, а $\mathbf{u}_<^{(1)}(z), \mathbf{u}_<^{(2)}(z), \mathbf{u}_<^{(3)}(z)$ — это решения идущие вниз и удовлетворяющие граничным условия для $z = l_1$:

В итоге мы можем записать ФГ в виде линейной комбинации решений однородного уравнения (5):

$$\mathbf{G}(z, z') = \begin{cases} \mathbf{V}_>(z)\mathbf{C}^>(z'),\ z \geq z', \\ \mathbf{V}_<(z)\mathbf{C}^<(z'),\ z < z'. \end{cases} \tag{11}$$

где матрицы коэффициентов $\mathbf{C}^>(z), \mathbf{C}^<(z)$ имеют размерность 3×3. Выражения для них мы будем искать из граничных условий и условий сшивания.

Для случая $z > z'$ ФГ $G(z, z')$ удовлетворяет однородному условию на границе $z = l_2$,

$$\left(\mathbf{B}_1(l_2)\frac{\partial}{\partial z} + i\mathbf{B}_0(l_2)\right)\mathbf{G}(z, z')\Big|_{z=l_2} = 0, \tag{12}$$

а при $z < z'$ на границы $z = l_1$,

$$\left(\mathbf{B}_1(l_1)\frac{\partial}{\partial z} + i\mathbf{B}_0(l_1)\right)\mathbf{G}(z, z')\Big|_{z=l_1} = 0. \tag{13}$$

Также ФГ должна удовлетворять условию непрерывности и условию на скачок первой производной при $z = z'$:

$$\mathbf{V}_>(z)\mathbf{C}^>(z) = \mathbf{V}_<(z)\mathbf{C}^<(z), \mathbf{V}'_>(z)\mathbf{C}^>(z) - \mathbf{V}'_<(z)\mathbf{C}^<(z) = \mathbf{K}_2^{-1}(z). \tag{14}$$

После проделанных вычислений мы получаем, что ФГ принимает вид:

$$\mathbf{G}(z, z') = \begin{cases} \mathbf{V}_>(z)\mathbf{V}_>^{-1}(z')\mathbf{W}^{-1}(z'), & z \geq z', \\ \mathbf{V}_<(z)\mathbf{V}_<^{-1}(z')\mathbf{W}^{-1}(z'), & z < z', \end{cases} \tag{15}$$

где матрица $\mathbf{W}(z)$ — это матричный аналог вронскиана для набора функций: $\mathbf{u}_>^{(j)}$, $\mathbf{u}_<^{(j)}$, $j = 1$–3:

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{K}_2(z)\left(\mathbf{V}'_<(z)\mathbf{V}_<^{-1}(z) - \mathbf{V}'_>(z)\mathbf{V}_>^{-1}(z)\right). \tag{16}$$

Полученное решение для ФГ выражается через полное семейство линейно-независимых решений волнового уравнения $u^{(j)}$, $j = 1, \ldots, 6$. В общем случае эти собственные решения не могут быть явно аналитически получены, поэтому предложенная схема расчета ФГ может быть использована только для численных вычислений. Особый интерес для практических приложений представляет возможность использовать полученные результаты при анализе полей в ближней зоне, когда длина волны и толщины слоев одного порядка. Также найденная функция Грина именно в смешанном представлении является основой при решении задачи рассеяния на неоднородностях среды как однократного, так и многократного [2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18-35-00335)

ЛИТЕРАТУРА

1. Val'kov A. Yu., Kuzmin V., Romanov V., Nikitina M., Kozhevnikov S., Meglinski I. Field of a point source in a semi-infinite elastic medium»// Waves in random and complex media. — 2012.— V. 22 — 423-434

2. Val'kov A. Yu., Kuzmin V. L., Romanov V. R., Nikitina M. A. Boundary effect on multiple scattering of elastic waves in a half-space// NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS. — 2015. — V. 6 — 524–536

УДК 532

МЕТОДИКА АНАЛИЗА ДИНАМИКИ УСТЬЕВЫХ ПАРАМЕТРОВ СКВАЖИНЫ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ПРИЗНАКОВ ПРОЦЕССА ПЕСКООБРАЗОВАНИЯ НА ЕЁ ЗАБОЕ

М.Т. Петросянц, м.н.с.
АО «СевКавНИПИгаз»
e-mail: *PetrosyancMT@scnipigaz.ru*
В.А. Толпаев, д.ф.-м.н., проф.
АО «СевКавНИПИгаз»
e-mail: *TolpaevVA@scnipigaz.ru*

В работе предлагается методика, позволяющая оценить возможность пескообразования на забое скважины по эксплуатационным данным. Также приводится пример анализа для скважины №1 Восточно-Прибрежного нефтегазоконденсатного месторождения.

Непосредственной причиной пескопроявлений, как известно, является превышение депрессии на пласт некоторого предельно допустимого значения и последующего разрушения породы в при забойной зоне. Допустимые депрессии определяются проектом разработки исходя, в частности, из результатов газо-гидродинамических исследований[1]. При наличии достаточно большого количества фактически-измеренных значений пластового и забойного давлений, появляется возможность сравнения текущих значений депрессий с проектными значениями, и подготовки соответствующих рекомендаций по подбору эксплуатационных параметров (таких, как диаметр штуцера), снижающих риск пескопроявлений.

Однако для этого необходимо проведение глубинных замеров (например, в рамках газо-гидродинамических исследований) как минимум раз в месяц, что требует значительных финансовых затрат. Наличие же помесячных записей для устьевых параметров рассматриваемых скважин позволяет, в свою очередь, приблизительно оценить динамику параметра $\eta = Q/\Delta P$ для данной конкретной скважины, где Q - месячный отбор скважины по нефти, газу или конденсату, $\Delta P = P_{др} - P_{буф}$ - разность значений давления на границе радиуса дренирования $P_{др}$ и буферного давления $P_{буф}$, осредненных за месяц.

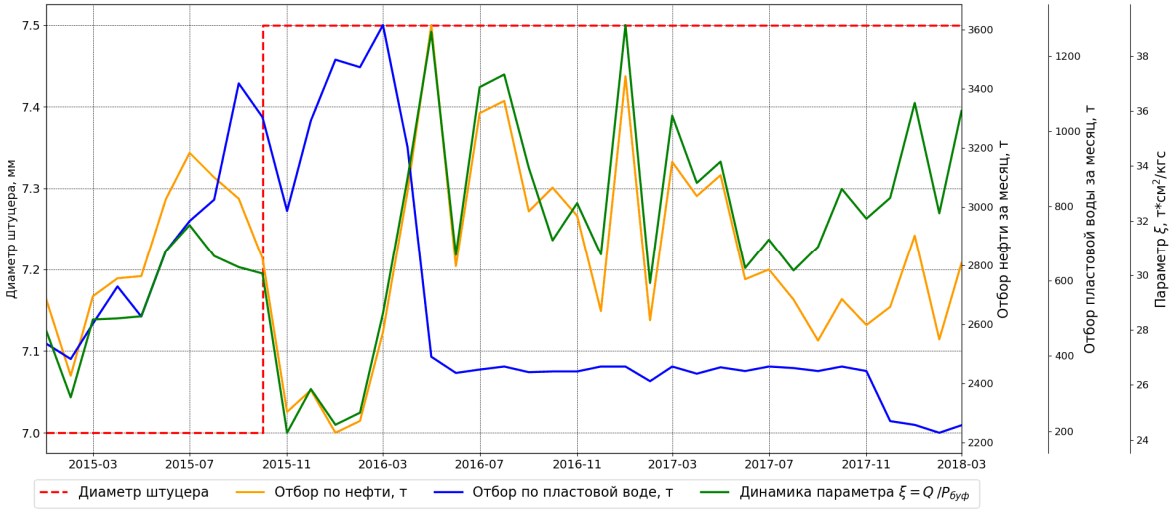
Величина η, соотнесённая с некоторым моментом времени, показывает, по сути, какой объем добываемых углеводородов приходится на единицу создаваемой разности давлений в системе «пласт-скважина». Уменьшение η даёт все основания утверждать, что для извлечения из пласта того же объема углеводородов приходится создавать большую разницу давлений. Это является, весьма вероятно, признаком захвата потоком в системе «пласт-скважина» некоторой дополнительной массы, которой может оказаться песок или пластовая вода. Для принятия оперативного решения по изменению технологического режима эксплуатации скважины достаточно рассматривать сравнительно не-

большие временные интервалы (примерно 3-5 лет). Поэтому можно принять в качестве допущения, что $P_к \approx C = const$. С учетом этого допущения соотношение для η можно переписать как $\eta \approx Q / (C - P_{буф})$. Для разработки рекомендаций достаточно оценить динамику изменения η. Поэтому нет необходимости определять значение коэффициента C. Вместо этого введём величину $\xi = \frac{Q}{P_{буф}}$. Очевидно, что ξ и η отрицательно коррелированы, т.е. увеличение значения ξ означает одновременное уменьшение значения η и наоборот. Преимуществом введения ξ является то, что для её определения достаточно использования только эксплуатационных данных. Далее для каждой скважины строятся графики изменения дебита по углеводородной продукции и по пластовой воде. Также на этих графиках отражается динамика изменения величины ξ.

В рамках авторского надзора за разработкой Восточно-Прибрежного нефтегазоконденсатного месторождения Каневского газопромыслового управления возникла необходимость предоставления рекомендаций по подбору режима для эксплуатируемых скважин с учетом возможного песко- и водопроявления.

Количество замеров забойного и пластового давлений, полученных в ходе исследований скважин Восточно-Прибрежного месторождения, не позволяет провести прямой сравнительный анализ фактических и проектных значений депрессии. При этом начало процесса пескообразования установить также не удалось из-за крайне небольшого объема выносимой на устье в этот момент породы.

Благодаря наличию помесячных эксплуатационных рапортов появилась возможность оценить динамику таких устьевых параметров, как отбор углеводородный продукции и буферное давление. Что, в свою очередь, позволило оценить динамику введенного ранее параметра ξ. Как уже отмечалось, рост ξ является косвенным признаком захвата потоком в системе «пласт-скважина» некоторой дополнительной массы, которой может оказаться песок или пластовая вода. Ниже представлен сравнительный график для скважины №1 Восточно-Прибрежного нефтегазоконденсатного месторождения



Как видно из графика, примерно с июля 2017 года наблюдается рост, в среднем, величины ξ. При этом, отбор пластовой воды в этот период, в целом уменьшился. Отбор нефти к марту 2018 года стабилизировался. Можно утверждать о прихвате потоком добываемых углеводородов дополнительной массы, не являющейся при этом пластовой водой. Есть все основания подозревать значительный вынос песка. Была рекомендована временная смена штуцера с уменьшением диаметра. Дальнейшие рекомендации можно дать только после проведения дополнительных гидродинамических и геофизических исследований.

Заключение

Благодаря разработанной методике появляется возможность оперативно оценить вероятность образования песчаной пробки и обводнения скважин в ближайшей перспективе, что позволит потенциально сэкономить значительные финансовые ресурсы добывающих компаний. Пример анализа данных эксплуатации скважин Восточно-Прибрежного месторождения показал возможность оценки темпов выноса песка и пластовой воды по устьевым параметрам. Развитие этой методики, её алгоритмизация и внедрение в повседневную деятельность инженера-разработчика позволит повысить рентабельность разработки месторождения в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриценко А.И. Руководство по исследованию скважин / А.И. Гриценко, З.С. Алиев, О.М. Ермилов, В.В. Ремизов, Г.А. Зотов. – М.: Наука, 1995.

УДК 539.3

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ ПОКРЫТИЙ

В.Ю. Преснецова, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *alluvian@mail.ru*
С.Н. Ромашин, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sromashin@yandex.ru*
Л. Ю. Фроленкова, д.т.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»,
e-mail: *Larafrolenkova@yandex.ru*
В. С. Шоркин, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»,
e-mail: *VShorkin@yandex.ru*
С.И. Якушина, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»,
e-mail: *jakushina@rambler.ru*
В.М. Пресняков
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
А.С. Захаров
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
Е.Ю. Титова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
А.В. Шамрин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

В данной работе предлагается упрощенная модель явления разрушения упругого материала, позволившая установить связь между теоретическим пределом прочности на растяжение и реальным разрушающим напряжением на основе представления о том, что каждая представительная элементарная частица сплошной упругой среды имеет в своем составе микротрещину. Установленные в работе связи между теоретическим пределом прочности и реальным разрушающим напряжением, результаты расчёта, соответствуют известным представлениям и справочным данным.

Ключевые слова: накопление повреждений; прочность теоретическая и реальная; микротрещина.

1. Введение

Теоретическая и реальная прочность существенно разнятся между собой. Это находит свое объяснение в теории трещин Гриффитса [1], допускающей наличие в материале сети микротрещин.

В работе предлагается упрощенная модель явления, а также оценка разрушающего напряжения, сделанная на ее основе. Этот результат позволит проводить оценочные расчеты реальной прочности тонкопленочных покрытий

при условии наличия информации о среднем размере их микротрещин.

2. Теоретические положения и допущения

Допускается, что материал имеет ячеистую структуру. В каждой из ячеек имеется микротрещина. При растяжении пленки «активизируются» те из них, которые перпендикулярны направлению растяжения. Тело B, моделирующее покрытие, представлено в виде объединения элементарных частей ΔB_n, $n = 1,...,N$: $B = \bigcup_{n=1}^{N} \Delta B_n$, $\Delta B_n \bigcap \Delta B_m = \varnothing$, $m \neq n$. Тела ΔB_n можно считать элементарными структурными ячейками исследуемого тела B. Для учета микро-неоднородности материала при континуальном описании для структурной ячейки вводятся внутренние параметры [2]. В описание вводятся осредненные по ней характеристики материала, используется представление о представительной области, когда диаметр области ΔB_n имеет не равную нулю нижнюю границу.

Ячейка ΔB_n является областью Ω_D влияния трещины на напряженно-деформированное состояние окружающего материала. Область Ω_D ограничена поверхностью A_Ω. В момент образования трещины она является математическим разрезом. Раскрытие трещины, предполагается малым. Поверхность берегов и их площадь обозначаются, как $A_{cr}^{\pm} = A_{cr}$. Она ограничена замкнутой линией L_{cr}. Диаметр областей $A_{cr}^{\pm}$ равен l_{cr}. В соответствии с [1], при появлении трещины часть энергии упругих деформаций окружающей ее среды превращается в поверхностную энергию F_{saf} ее берегов, которая распределяется по ним равномерно с интенсивностью W_{saf} :

$$F_{saf} = W_{saf}\left(A_{cr}^{+} + A_{cr}^{-}\right) = 2 W_{saf} A_{cr}. \qquad (1)$$

Область Ω_D влияния трещины на состояние материала вокруг нее имеет характерный размер D, соизмеримый со своим аналогом l_{cr} для трещины. Область Ω_D условно делится на две не пересекающиеся области Ω_α и $\Omega_{1-\alpha}$. Пусть A_{Gr} – поверхность, разделяющая эти области. Предполагается, что область $\Omega_{1-\alpha}$ обладает свойством, наделяемым теорией [1] – линия L_{cr} принадлежит ей: $L_{cr} \subset A_{Gr}$. При этом, как и в теории [1], наиболее удаленные от трещины ее участки расположены там, где возмущениями полей напряжений и деформаций можно пренебречь. Значит, поверхности A_{Gr} и A_Ω имеют общие участки. Плоская форма трещины вносит определенную ориентацию в пространство Ω_D. Учитывая это, допускается, что область $\Omega_{1-\alpha}$ имеет цилиндрическую форму с образующей – прямой, параллельной нормали к плоскости трещины, и направляющей – линией L_{cr}. Торцы цилиндра для простоты предполагаются плоскими, параллельными плоскости трещины, отстоящими на расстоянии h от нее. Область Ω_D также цилиндрическая. Ее боковая поверхность параллельна боковой поверхности области $\Omega_{1-\alpha}$, торцы

являются частями тех же плоскостей, что и торцы области $\Omega_{1-\alpha}$. Учитывая, что все три области Ω_D, Ω_α и $\Omega_{1-\alpha}$ имеют одинаковую высоту $2h$, можно утверждать, что объемы этих областей V_D, V_α и $V_{1-\alpha}$ относятся точно также как и площади A_D, A_α и $A_{1-\alpha}$, то есть находятся в отношении

$$V_D : V_\alpha : V_{1-\alpha} = A_D : A_\alpha : A_{1-\alpha} = 1 : \alpha : 1-\alpha . \qquad (2)$$

Здесь α – относительная площадь части сечения области Ω_D плоскостью трещины, не подвергшаяся разрушению. При этом $\beta = 1-\alpha$ – поврежденность этого сечения трещиной.

До образования трещины вся среда и мысленно выделенные в ней области Ω_D, Ω_α и $\Omega_{1-\alpha}$ находились в однородном деформированном состоянии. После ее образования это состояние внутри Ω_D искажается, перестает быть однородным. Свойства материала описываются на основании линейной теории упругости. Деформированное состояние в этом случае характеризуется тензором деформаций Коши [2]

$$\mathbf{g} = (\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j) g_{ij} = (1/2)(\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j)\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right). \qquad (3)$$

В работе применяется прямоугольная декартова система координат x_i, $(i = 1, 2, 3)$ с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_i$. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ – вектор перемещений, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки в отсчетной конфигурации исследуемого тела B, $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})$ – радиус-вектор той же точки в текущей конфигурации того же тела, $\nabla\mathbf{u} = (\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j) u_{i,j}$ – градиент вектора перемещений, индекс jпосле запятой означает дифференцирование по x_j.

Объемная плотность изменения свободной энергии, вызванного деформациями, и соответствующий им тензор напряжений определяются равенством [2]:

$$w = \mu\, g_{ij} g_{ij} + \frac{\lambda}{2} g_{kk} g_{ll}\,,\ \mathbf{P} = (\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j) P_{ij} = \frac{\partial w}{\partial g_{ij}} = (\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j)(2\mu\, g_{ij} + \lambda \delta_{ij} g_{kk}) . \qquad (4)$$

Характеристики деформированного состояния материала частицы ΔB внутри Ω_D считаются постоянными, равными средним по Ω_D величинам. Поэтому деформированное состояние частицы ΔB характеризуется величиной $\langle\nabla\mathbf{u}\rangle$.

$$\langle\nabla\mathbf{u}\rangle = \frac{1}{V_D}\int_{V_D}\left(\nabla\mathbf{u}(\mathbf{r})\right) dV_D = \frac{1}{V_D}\int_{V_\alpha}\left(\nabla\mathbf{u}(\mathbf{r})\right) dV_\alpha + \frac{1}{V_D}\int_{V_{1-\alpha}}\left(\nabla\mathbf{u}(\mathbf{r})\right) dV_{1-\alpha} =$$

$$= \frac{V_\alpha}{V_D}\langle\nabla\mathbf{u}\rangle_\alpha + \frac{V_{1-\alpha}}{V_D}\langle\nabla\mathbf{u}\rangle_{1-\alpha} = \alpha\langle\nabla\mathbf{u}\rangle_\alpha + (1-\alpha)\langle\nabla\mathbf{u}\rangle_{1-\alpha} . \qquad (5)$$

В этом выражении величины $\langle\nabla\mathbf{u}\rangle_\alpha$, $\langle\nabla\mathbf{u}\rangle_{1-\alpha}$ являются средними соответственно по областям Ω_α и $\Omega_{1-\alpha}$ градиентами вектора перемещений точек этих областей. Они не совпадают друг с другом.

Тензор напряжений (4) зависит от градиента перемещений линейно. Поэтому для него справедливо выражение, совпадающее по форме с (5).

$$\langle\mathbf{P}\rangle = \alpha\langle\mathbf{P}\rangle_\alpha + (1-\alpha)\langle\mathbf{P}\rangle_{1-\alpha} . \qquad (6)$$

Оценкой изменения свободной энергии предлагается считать величину $[w]$

$$[w]=\int_0^{\langle\nabla\mathbf{u}\rangle}\langle\mathbf{P}\rangle(\langle\nabla\mathbf{u}\rangle)\,d\langle\nabla\mathbf{u}\rangle=\mu\langle g_{ij}\rangle\langle g_{ij}\rangle+\frac{\lambda}{2}\langle g_{kk}\rangle\langle g_{ll}\rangle,\ \langle\mathbf{g}\rangle=\alpha\langle\mathbf{g}\rangle_{\alpha}+(1-\alpha)\langle\mathbf{g}\rangle_{1-\alpha},\quad(7)$$

$$[w]=\alpha^2[w]_{\alpha\alpha}+2\alpha(1-\alpha)[w]_{\alpha(1-\alpha)}+(1-\alpha)^2[w]_{(1-\alpha)(1-\alpha)}.\quad(8)$$

При $\alpha\to 1,\ D\to 0$ – уменьшении площади трещины и стремлении диаметра области возмущения к нулю, а также при ограниченности нормы $\left\|\nabla^2\mathbf{u}=(\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j\,\mathbf{e}_k)u_{i,jk}\right\|$ выполняется условие $[w]\to w$.

Условием определения параметра α предлагается считать условие стационарности значения свободной энергии материала внутри Ω_D.

$$\frac{\partial[w]}{\partial\alpha}=0.\quad(9)$$

Следствием этого выражения является формула

$$\alpha=\left[1+\frac{[w]_{\alpha\alpha}-[w]_{\alpha(1-\alpha)}}{[w]_{(1-\alpha)(1-\alpha)}-[w]_{\alpha(1-\alpha)}}\right]^{-1}.\quad(10)$$

Далее предлагается связь разрушающего напряжения σ_u с теоретическим пределом прочности σ_t, величиной параметра α и размером трещины l_{cr}.

Можно получить следующие выражения:

$$[w]=\frac{\sigma_u^2}{E},\ [w]_{(1-\alpha)(1-\alpha)}=\frac{4W_{saf}}{2h},\ [w]_{\alpha(1-\alpha)}=0,\ [w]_{\alpha\alpha}=\frac{\sigma_t^2}{2E}.\quad(11)$$

$$\frac{\sigma_u^2}{2E}=(1-\alpha)^2\frac{2W_{saf}}{h}+\alpha^2\frac{\sigma_t^2}{2E}.\quad(12)$$

В соответствии с определением

$$\alpha=\frac{l^2-l_{cr}^2}{l^2}.\quad(13)$$

Выражение (10) приобретает вид:

$$\alpha=\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_t^2 h}{2W_{saf}E}}.\quad(14)$$

Система соотношений (12) – (14) содержит в качестве неизвестных величины σ_u, α, l_{cr}, l. Значения σ_t и W_p могут быть вычислены, например, методами, изложенными в [3, 4]. Неопределенность системы уравнений дает основание для того, что бы две из неизвестных величин определялись экспериментально или гипотетически, например, допущением о том, что $\sigma_u\approx 0{,}01\sigma_t$, $l\approx h$. Из выражения (14) вытекает связь:

$$\frac{2W_{saf}}{l}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\sigma_t^2}{2E}\right).\quad(15)$$

С ее учетом из (12) следует зависимость:

$$\sigma_u = \sigma_t \sqrt{\alpha} = \sigma_t \sqrt{1-\beta}\,. \qquad (16)$$

Можно получить, что $l \approx l_{cr}$. Тогда

$$l_{cr} \approx \frac{4W_{saf}\,E}{\alpha\,\sigma_t^2} = \frac{4W_{saf}\,E}{\sigma_u^2}, \qquad \sigma_u = \left(\frac{4W_{saf}\,E}{l_{cr}}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (17)$$

Установлена связь теоретического предела прочности σ_t, разрушающего напряжения σ_u и поврежденности материала рассмотренного типа – сеть параллельных микротрещин.

3. Заключение

Проведены оценочные расчеты величины микротрещин и поврежденности некоторых материалов (таблицу 1). Результаты расчета, соответствуют известным представлениям и справочным данным.

Таблица 1 – Результаты расчета длины микротрещин и минимальной относительной площади неповрежденного трещиной сечения элементарной ячейки (принято $\sigma_u \approx 0{,}01\,\sigma_t$)

Материал	$\sigma_t, 10^{11}\,Па$ расчет.	$\sigma_u, 10^9\ Па$ расчет.	$\sigma_u, 10^9\ Па$, [5]	$l_{cr}, 10^{-6}\,м$	α, 10^{-4}
Al	0,07	0,07	0,05	15	0,84
Cr	0,37	0,37	0,41	17	1,05
Ti	0,21	0,21	0,24	17	1,07
Mo	0,53	0,53	0,80	7	1,23

Работа выполнялась в рамках базовой части Государственного задания на 2017 – 2019 гг., код проекта 1.5265.2017/БЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1920. – Vol. 221. – Pp. 163 – 198.
2. НовацкийВ. Теорияу пругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
3. Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С. Метод вычисления поверхностной энергии и энергии адгезии упругих тел // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 1. – С. 235 – 259.
4. Romashin S.N., Presnetsova V.Yu., Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S. Method for calculating the characteristics of elastic state media with internal degrees of freedom // Advanced Structured Materials. –2016. – № 1. – V. 42. – Pp. 363 – 376.
5. Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др. Физические величины: Справочник. Под ред. Григорьева И.С., Мейлихова Е.З. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

УДК 539.42

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ СМЕШАННОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ ПОЛУДИСКА С РАЗРЕЗОМ

Л.В. Степанова, д.ф.-м.н., доц.
ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
e-mail: *stepanovalv@samsu.ru*
К.В. Фролов
ФГБОУ ВПО «Самарский технический университет»
e-mail: *riksot@mail.ru*

Приведен класс конечно-элементных решений задач определения напряженно-деформированного состояния в новых типах экспериментальных образцов на трехточечный изгиб: полудиск с вертикальным и наклонным надрезом и полудиск с вертикальным надрезом с несимметричным расположением опор. Для первого типа образца проведен анализ полей напряжений у вершины наклонного надреза для различных значений угла наклона надреза: $0^\circ, 10^\circ - 45^\circ, 49^\circ, 50^\circ - 80^\circ$ и вычислены параметры механики разрушения (коэффициенты интенсивности напряжений и Т-напряжения для нормального отрыва и нагружений, близких к поперечному сдвигу) для различных видов смешанного нагружения. Для второго типа образца проведен вычислительный эксперимент для различных расстояний опор до центра диска. С помощью метода фотоупругости выполнена серия натурных экспериментов, нацеленных на анализ поля напряжений в полудиске и вида смешанного нагружения. Наблюдаемая интерференционная картина позволяет ясно видеть тип нагружения и сделать заключение о невозможности реализации чистого поперечного сдвига в рассматриваемом типе образцов. Проведенное конечно-элементное исследование, реализованное в многофункциональном комплексе SIMULIAAbaqus, и последующее сравнение полученных результатов и наблюдений в рамках интерференционно-оптических методов механики подтверждают невозможность реализации чистого поперечного сдвига в данном типе образцов с наклонной трещиной. Анализ численных расчетов показывает, что действительно при угле наклона разреза, равном 49°, чистого поперечного сдвига не происходит. В полудиске с наклонным надрезом реализуется смешанное нагружение для всех углов наклона надреза от 0° до 85°.

Ключевые слова: полудиск с наклонной трещиной, конечно-элементное решение, коэффициенты интенсивности напряжений, Т-напряжений, смешанное нагружение, чистый нормальный отрыв, чистый поперечный сдвиг, метод фотоупругости.

1. Введение

Оценка направления роста трещины в условиях смешанного нагружения, и критерии разрушения, позволяющие найти угол направления распространения трещины, являются одними из широко обсуждаемых проблем современной механики разрушения [1-3]. В настоящее время широко обсуждаются вопросы теоретического, экспериментального и численного определения параметров

механики разрушения для смешанного деформирования тел с надрезами и трещинами [1-3]. Одним из наиболее важных вопросов является моделирование чистого поперечного сдвига в экспериментальных условиях. Во многих работах [1-3] предложены специальные образцы и специальные условия нагружения для воспроизведения чистого поперечного сдвига. В настоящее время предложен и широко используется ряд экспериментальных образцов для исследования смешанного нагружения, например, в работе [1] рассматривается полудиск с вертикальным и наклонным надрезами. Данный тип образца является удобным для верификации различных критериев разрушения и для оценки вклада высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений в окрестности вершины трещины в изотропном линейно упругом материале [1-3]. В [1] обсуждается серия вычислительных экспериментов с данным типом образца, в котором варьируется угол наклона надреза. На основе проведенного компьютерного имитационного моделирования авторы показывают, что для определенного значения угла наклона разреза, равного 49°, можно реализовать чистый поперечный сдвиг. Отметим, что чистый нормальный отрыв возникает при действии сосредоточенной силы на полукруглый диск с симметричным надрезом, ортогональным хорде полудиска. Изменение угла наклона разреза приводит к изменению типа нагружения и реализации смешанного деформирования. Тем не менее, многие вопросы остаются открытыми: проведенное в рамках данной работы экспериментальное исследование полудиска с наклонным разрезом методом фотоупругости показывает смешанное нагружение при данном значении угла наклона надреза, но не чистый поперечный сдвиг. Поэтому целью настоящей работы являлось конечно-элементное решение задач определения напряженно-деформированного состояния у вершины наклонного надреза в полудиске для различных значений угла наклона дефекта и вычисление параметров механики разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений для нормального отрыва и поперечного сдвига и Т-напряжений) для нахождения вида смешанного нагружения. Вычисленные значения параметров разрушения (коэффициенты интенсивности напряжений и Т-напряжения) показывают реализацию смешанного деформирования для указанного угла наклона надреза 49°. Проведенное конечно-элементное исследование, выполненное в многофункциональном комплексе SIMULIAAbaqus, и последующее сравнение полученных результатов и наблюдений в рамках интерференционно-оптических методов механики деформируемого твердого тела (метод цифровой фотоупругости), подтверждают невозможность реализации чистого поперечного сдвига в данном типе образцов с наклонной трещиной. Анализ численных расчетов показывает, что действительно при угле наклона разреза, равном 49°, чистого поперечного сдвига не происходит. Для получения экспериментального образца, в котором реализуется чистый поперечный сдвиг, следует продолжить компьютерное имитационное моделирование для различных типов образцов. Смешанное нагружение образца с надрезом можно получить в полудиске, сохраняя вертикальный надрез, но меняя расстояние между опорами. Для различных геометрических параметров этого образца получены конечно-элементные и экспериментальные результаты для параметров механики хруп-

кого разрушения. Однако многие вопросы остаются невыясненными, а именно реализация чистого поперечного сдвига при определенных сочетаниях геометрических параметров образца. Поэтому в настоящей работе проводятся конечно-элементное и экспериментальное исследования двух типов полудисков с надрезами: 1) первый тип образца – образец с наклонным надрезом для моделирования смешанного нагружения и 2) второй тип образца – образец с вертикальным надрезом с симметричным и несимметричным расположением опор. Для каждого типа образца вычислены параметры механики разрушения (коэффициенты интенсивности напряжений и Т-напряжения) и показана невозможность реализации чистого поперечного сдвига в каждом типе экспериментального образца.

2. Конечно-элементное решение задачи о диске с наклонным надрезом. Определение параметров механики разрушения: коэффициенты интенсивности напряжений и Т-напряжения

В настоящей статье проведена серия вычислительных экспериментов для полудиска с надрезом, ориентированным под разным углом к вертикали. Конфигурация образца показана на рисунке 1. В полудиске, находящемся под действием сосредоточенной силы, с вертикальным надрезом реализуется чистый нормальный отрыв. Меняя угол наклона надреза, можно в вычислительном и натурном эксперименте осуществить ту или иную форму смешанного нагружения.

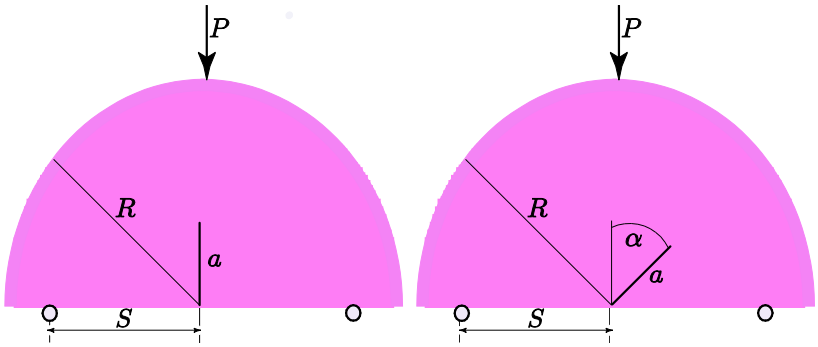


Рисунок 1 – Схематичное изображение образцов с надрезом для исследования нормального отрыва (слева) и смешанного нагружения (справа)

Для рассматриваемого образца коэффициенты интенсивности напряжений $K_i, i = I, II$ и T-напряжения [5, 25] определяются согласно соотношениям [4]

$$K_i = \frac{P}{2Rt}\sqrt{\pi a}Y_i\left(a/R, S/R, \alpha\right) \qquad i = I, II$$
$$T = \frac{P}{2Rt}T^*\left(a/R, S/R, \alpha\right), \tag{1}$$

где P – приложенная нагрузка, R – радиус полудиска, a – длина надреза, $2S$ – расстояние между опорами, α – угол наклона надреза к линии продолжения надреза в образце, t – толщина образца.

Результаты вычислений сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Вычисленные значения коэффициентов интенсивности напряжений и Т-напряжений в полудиске с наклонным надрезом для различных значений углов наклона надреза

α	$K_I, H/mm^{3/2}$	$K_{II}, H/mm^{3/2}$	$T, H/mm^2$
0	66.68	0	-0.90
10	64.74	-7.50	-0.30
20	58.89	-13.43	0.93
30	50.58	-17.40	2.62
40	41.17	-19.03	4.23
45	36.49	-19.08	4.93
49	32.78	-18.78	5.40
50	31.90	-18.66	5.52
60	23.35	-16.75	6.42
70	15.74	-13.61	7.02
80	8.81	-9.19	7.39
85	5.53	-6.16	7.45

Зависимости безразмерных функций от угла наклона надреза показаны на рисунке 2. Из рисунка 2 видно, что чистый поперечный сдвиг в полудиске не реализуется. Из рисунка 2 видно, что для всех углов надреза, больших нуля, в полудиске реализуется состояния смешанного деформирования, но не чистого поперечного сдвига, поскольку безразмерная функция Y_I и безразмерное Т-напряжение T^* одновременно должны обращаться в нуль. Из графиков, приведенных на рис. 3, видно, что ни при каких значениях угла наклона надреза коэффициент интенсивности напряжений $K_I = \left(P/(2Rt)\right)\sqrt{\pi a}Y_I\left(a/R, S/R, \alpha\right)$, отвечающий нормальному отрыву, и Т-напряжение $T = \left(P/(2Rt)\right)T^*\left(a/R, S/R, \alpha\right)$ не обращаются в нуль.

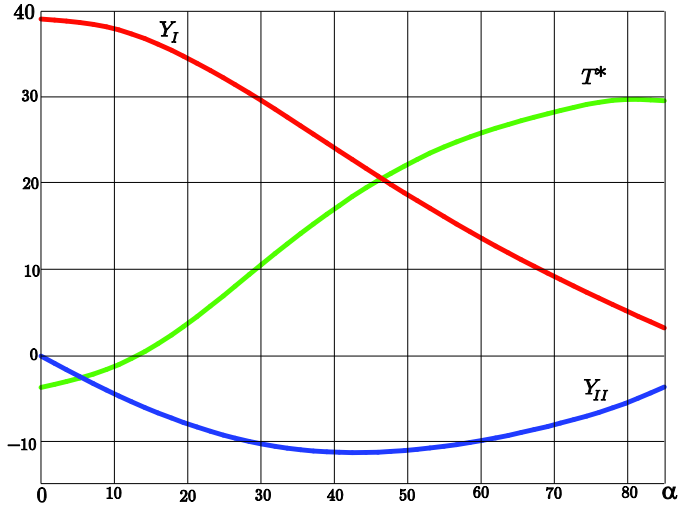


Рисунок 2 – Зависимости безразмерных тарировочных функций Y_I, Y_{II}, T^* от угла наклона надреза α

3. Выводы и обсуждение результатов

В настоящей работе выполнено компьютерное имитационное моделирование смешанного деформирования элементов конструкций с надрезами в пол-

ном диапазоне смешанных форм нагружения от чистого нормального отрыва до нагружений, близких к чистому поперечному сдвигу. Проведена серия конечно-элементных расчетов в многофункциональном программном комплексе SIMULIA/Abaqus на примере диска под действием различных систем нагрузок. Рассмотрены два типа полукруглых дисков с надрезами: 1) диск с вертикальным и наклонным надрезом под действием сжимающей сосредоточенной силы, вызывающей состояние трехточечного изгиба; 2) диск с вертикальным надрезом с симметричным и несимметричным расположением опор. Данный тип образцов широко используется для создания условий смешанного нагружения.

В работе вычислены параметры линейной механики разрушения: коэффициенты интенсивности напряжений и Т-напряжения. На основании проведенных вычислений показано, что данный тип образцов не может служить для создания условий чистого поперечного сдвига, поскольку выполненные расчеты ясно показывают, что коэффициент интенсивности напряжений K_I не обращается в нуль ни при одном значении геометрических параметров модели. Для верификации конечно-элементных расчетов была произведена последовательность натурных экспериментов с помощью интерференционно-оптических методов (метода фотоупругости). Наблюдаемая картина интерференционных полос указывает на реализацию смешанного деформирования. Полученные картины изохроматических полос для каждого из двух рассмотренных типов экспериментальных образцов свидетельствуют о реализации смешанного нагружения для двух типов образцов.Таким образом, разработка и анализ экспериментальных образцов на смешанное нагружение должны быть продолжены. Такие исследования должны включать обширный виртуальный (компьютерный) эксперимент с целью выяснения характерных особенностей новых нестандартных типов экспериментальных образцов, что приведет к сокращению затрат на прямую экспериментальную проверку новых типов образцов механики разрушения и обработку их результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанова Л.В., Фролов К.В. Конечно-элементное исследование смешанного нагружения на примере полудиска с вертикальным и наклонным надрезами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. –Номер.3. – С. 128-137.
2. Степанова Л.В., Бронников С.А., Белова О.Н. Оценка направления роста трещины в условиях смешанного нагружения (нормальный отрыв и поперечный сдвиг): обобщенные критерии классической механики разрушения и атомистическое моделирование смешанного нагружения (метод молекулярной динамики)// Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – Номер.4. – С. 189-213.
3. Степанова Л.В., Росляков П.С. Полное асимптотическое разложение М. Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине// Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – №.4. – С. 188-225.

УДК 004.42

МОБИЛЬНОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ КОРРЕКТИРОВКИ МАРШРУТОВ ОБЩЕСТВЕННОГО ТРАНСПОРТА В ВЕЧЕРНЕЕ ВРЕМЯ

А.А. Тетерева, магистрант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *nastyatetereva@inbox.ru*
О. В. Конюхова, к.т.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *oks1112@yandex.ru*

1. Введение

Одной из проблем общественного транспорта в г. Орёл является перемещение по городу в вечернее время.

Администрация г. Орла утвердила план развития регулярных перевозок 2018-2019 годы. Как следует из постановления администрации [1], исполнение графика работы общественного транспорта в вечернее время составляет всего 80-85% от потребности. Водителями общественного транспорта периодически игнорируются остановки, несмотря на наличие свободных мест в салоне и присутствие на остановках пассажиров.

Применяемые на сегодняшний день технические и программные средства для отслеживания общественного транспорта: электронные табло и мобильные приложения [2,3,4], не решают данную проблему.

Электронные табло установлены не на всех остановках, а выводимая информация не всегда соответствует действительности: в указанное время транспорт просто не приезжает на остановку, и подсчёт времени до следующего рейса начинается сначала.

С тем же самым приходится сталкиваться и при использовании мобильных приложений. Например, мобильная версия сайта bus57.ru [2], позволяет отследить конкретный транспорт. Приложение сообщает о скором его прибытии, но спустя некоторое время отметка о выбранном рейсе исчезает с экрана мобильного устройства.

Кроме того, мобильные приложения при построении маршрута не учитывают актуальную информацию о находящемся в работе общественном транспорте. Водители общественного транспорта не имеют сведений о наличии и количестве пассажиров на остановках в вечернее время.

Решение выделенных проблем требует разработки распределённой программной системы с пользовательским мобильным приложением.

Ниже приводятся требования и описание функциональности такого мобильного приложения.

2. Функциональность мобильного приложения для корректировки маршрутов в вечернее время

Для решения названных выше проблем мобильное приложение должно удовлетворять следующим функциональным требованиям:

1) Предоставлять возможность выбора пользователя перед входом в приложение. Приложением могут пользоваться как водители общественного транспорта, так и пассажиры.

2) Обеспечивать возможность выбора вида транспорта, которым пассажиры будут передвигаться по городу.

3) Предоставлять информацию о всех маршрутах с описанием этих маршрутов.

4) Выводить на экран карты города, по которым можно следить за движением общественного транспорта онлайн.

5) Обеспечивать построение маршрута на карте города при выборе номера общественного транспорта.

6) Обеспечивать построение оптимального пути из точки А в точку Б с комбинированием видов транспорта и актуальной информацией об имеющихся рейсах.

7) Обеспечивать определение приблизительного время прибытия следующего транспорта.

8) Для пассажиров общественного транспорта обеспечивать связь с водителем в виде установления пометки о том, что пассажир ожидает его на остановке и одновременно фиксировать время ожидания выбранного транспорта.

9) Для водителей общественного транспорта обеспечивать контроль количества пассажиров на остановках данного маршрута.

10) Предоставлять возможность написание отзывов (жалоб или благодарностей) с прямой переадресацией на руководство транспортной компании и администрацию города.

11) Предоставлять статистику о работе общественного транспорта.

В системе предполагается возможность разграничения пользователей в мобильном приложении (водители общественного транспорта и пассажиры). Собственно, интерфейс и функциональные возможности будут различаться в зависимости от конкретного пользователя.

Вход в приложение пользователем «Пассажир» будет доступно всем, в отличие от входа водителя транспорта. Пользователь «Водитель» заходит в систему под своим номером, ему доступна карта всех маршрутов города, но отметки о количестве ждущих транспорта людей будет видно только по его маршруту. Это сделано для того, чтобы в вечернее время им было проще узнать о количестве людей на остановках, так как именно в это время людям достаточно трудно добраться до нужных им мест.

Для пользователя «Пассажир» будет реализован удобный интерфейс простого транспортного приложения, но с отличительными дополнениями, которые и будут отличать разрабатываемое мобильное приложение от всех других. В нем будет возможность установки отметки, о том, что человек находится на остановке и ожидает конкретный транспорт. Пассажир может написать отзыв о

работе водителя и (или) транспортного средства, который будет отправлен руководству транспортной компании, где работает данный водитель, и администрации города.

Принцип действия разрабатываемого приложения совпадает с принципом действия распространенных мобильных приложений [2, 3], но с учётом названных выше требований. В нем предоставляется выбор номера нужного маршрута, поиск месторасположения пользователя, прогноз подъезжающего к остановке общественного транспорта, определение следующего транспорта, построение оптимального маршрута, просмотр данных о выбранном маршруте, фильтрация транспорта по районам.

Наглядно функциональность проектируемого мобильного приложения представлена на рисунке 1 в виде диаграммы вариантов использования языка UML (Unified Modeling Language) [5].

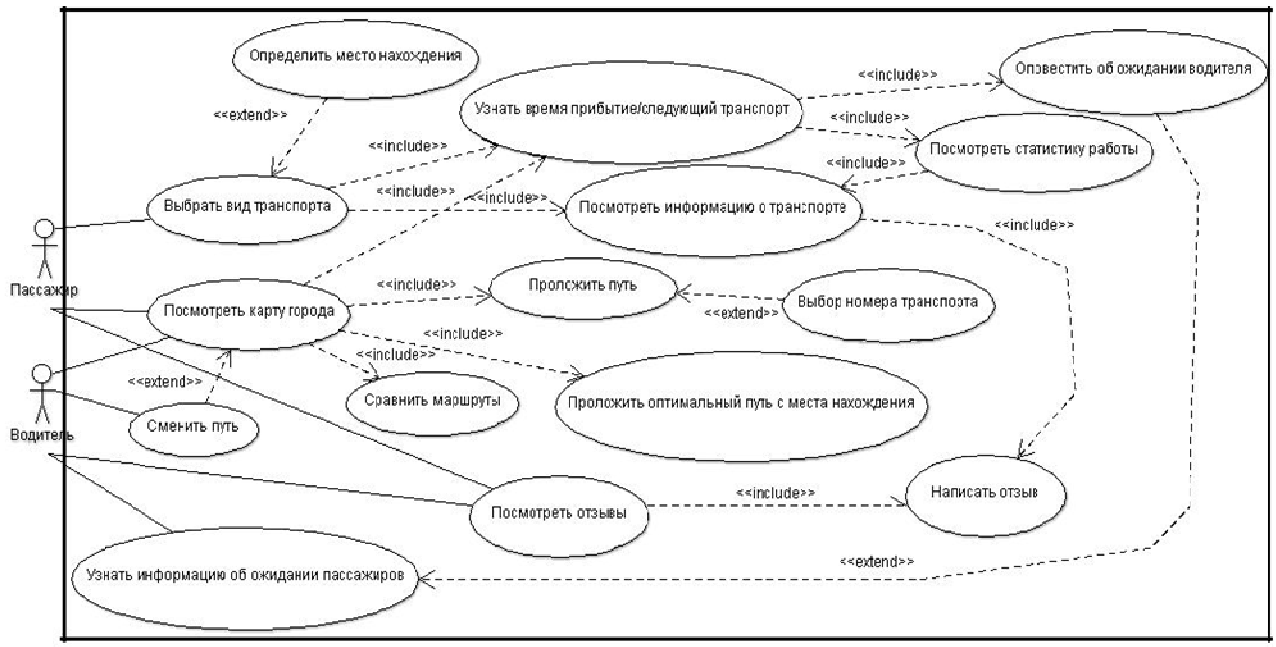


Рисунок 1 – Взаимодействие мобильного приложения с пользователями

Основные направления взаимодействия мобильного приложения с пользователями представлены следующими вариантами использования: «Выбрать вид транспорта», «Посмотреть карту города», «Посмотреть отзывы» и «Сменить путь».

Взаимодействовать с приложением может «Пассажир» и «Водитель». Пассажир может использовать первые три варианта. Для водителя вид транспорта уже выбран автоматически при входе в систему.

Вариант использования «Выбрать вид транспорта» включает в себя выбор разновидности общественного транспорта: автобус, троллейбус или трамвай. После выбора одного из предложенных вариантов, приложение с помощью геолокации определяет место нахождения человека либо позволяет вручную выбрать остановку, от которой будет выполнять поиск нужного транспорта. Уточнив место нахождения, можно просмотреть, какой общественный

транспорт прибудет в ближайшее время, либо выбрать определенный вид транспорта и номер.

Определившись с нужным транспортом, пользователь сможет увидеть ближайшее время прибытия и время прибытия следующего транспорта с этим же номером.

Выбирая общественный транспорт, пользователь может узнать информацию о нем, а именно: ФИО водителя, время работы на текущий день, статистику его работы, отзывы о водителе.

При ожидании транспорта (особенно актуально в вечернее время) существует возможность связи с водителем путём установления отметки о том, что пассажир находится на конкретной остановке и ожидает определенный автобус, троллейбус или трамвай с указанием номера маршрута. При этом время фиксируется с момента установки отметки.

Вариант использования «Посмотреть карту» доступен как пассажиру, так и водителю. Здесь предоставляется возможность просмотреть на карте весь транспорт, его местонахождение в городе. После выбора на карте нужного транспорта, можно проследить, где и через какое время он будет на каждой из остановок.

При помощи функции «Проложить путь» можно узнать траекторию выбранного маршрута. С помощью функции «Проложить оптимальный путь» можно узнать траекторию маршрута из любого места расположения пользователя путём прорисовки на карте маршрута до остановки, пути проезда на транспорте и пути от остановки до места прибытия, с учетом просчета всего время от начальной точки до конечной. Находясь дома, пользователи могут заранее просчитать, какое время примерно будет тратиться на дорогу с учетом ходьбы от дома до университета, работы и т.п.

Вариант использования «Посмотреть отзывы» в первую очередь предназначен для пассажиров, которые не знают куда обратиться, если водители недобросовестно относятся к своей работе. Так же пассажир может опубликовать и положительный отзыв о работе водителя. Данная информация будет важна как для организации, в которой работает водитель, так и для администрации. На основе этих данных можно формировать актуальную статистику о качестве работы как общественного транспорта в целом, так и отдельных водителей.

Вариант использований «Сменить путь» предназначен для водителей автобусов. Если на дорогах «пробки», при согласовании с пассажирами, водитель может изменить направление пути.

3. Заключение

В городе Орле существует проблема перемещения на общественном транспорте в вечернее время. Разработка мобильной версии программной системы для корректировки маршрутов общественного транспорта поможет автоматизировать управление работой общественного транспорта. В работе представлено описание функциональности такого мобильного приложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Постановление администрации г. Орла от 30.08.2017 г. № 3823 (ред. от 13.04. 2018 г.) «Об утверждении документа планирования регулярных перевозок в городе Орле на 2018-2019 годы».- [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://www.orel-adm.ru/ index.php?option=com_k2&view=itemlist&task= category&id =416: pravovye-akty-prinyatye-v-2018-godu&Itemid=115.- Систем. требования: PIV; 64 Мб ОЗУ; Windows 98 и выше; SVGA 32768 и более цветов; 640×480; мышь; IE 4.0 и выше.- Загл. с экрана.- Яз. рус.
2. Общественный транспорт города Орёл онлайн.- [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://bus57.ru.- Систем. требования: PIV; 64 Мб ОЗУ; Windows 98 и выше; SVGA 32768 и более цветов; 640×480; мышь; IE 4.0 и выше.- Загл. с экрана.- Яз. рус.
3. Яндекс Транспорт.- [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://transport-yandex-online.ru/.- Систем. требования: PIV; 64 Мб ОЗУ; Windows 98 и выше; SVGA 32768 и более цветов; 640×480; мышь; IE 4.0 и выше.- Загл. с экрана.- Яз. рус.
4. 2ГИС Орел. - [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://2gis.ru/orel /search/. - Систем. требования: PIV; 64 Мб ОЗУ; Windows 98 и выше; SVGA 32768 и более цветов; 640×480; мышь; IE 4.0 и выше.- Загл. с экрана.- Яз. рус.
5. Новиков Ф.А. Учебно-методическое пособие по дисциплине «Анализ и проектирование на UML». - СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. - 286 с.

УДК 608.2

АКТУАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОГО СПЕКАНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К СИЛОВЫМ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМ ТИРИСТОРАМ И ДИОДАМ

Д.А. Титушкин
АО Протон-Электротекс,
e-mail: *d.titushkin@proton-electrotex.com*
С.И. Матюхин
ФГБО ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sim1@mail.ru*

Исследованы актуальные методы проведения процесса низкотемпературного спекания. Выбран наиболее подходящий материал для проведения процесса низкотемпературного спекания применительно к силовым полупроводниковым тиристорам и диодам площадью более 50 кв.см.

Ключевые слова: силовые полупроводниковые приборы, тиристоры, диоды, низкотемпературное спекание, синтеринг.

1. Введение

Традиционные технологии соединения кремниевой пластины и термокомпенсатора не удовлетворяют требованиям, которые предъявляются к пер-

спективным силовым элементам. Вследствие этого в полупроводниковом производстве находит все более широкое применение технология низкотемпературного спекания. Ее применение особенно актуально для соединения полупроводникового кристалла и молибденовых дисков тиристоров и диодов высокой и сверхвысокой мощности, рассчитанных на коммутацию токов от тысяч до сотен тысяч ампер, и имеющих характерный размер кремниевого кристалла 50-150 мм [1].

Основными материалами для процесса с низкотемпературного спекания полупроводниковых кристаллов являются материалы на основе серебросодержащих частиц [2,4,7-11]. Это обусловлено высокой теплопроводностью и электропроводностью серебра. Но порошки, содержащие частицы серебра, требуют высоких температур для спекания (больше 500°C). Исследования [1,5,6] показали, что существенно снизить температуру синтеринга возможно посредством приложения внешнего давления в процессе. При этом температура плавления получаемого соединения остаётся равной температуре плавления монолитного серебра (961°C) [3].

2. Обзор методов проведения процесса низкотемпературного спекания

Серебросодержащие материалы представляют собой частицы серебра с неокисленной поверхностью, каждая из которых покрыта органической оболочкой, которая разрушается под действием давления и температуры. Химический состав органической оболочки определяется изготовителем материала.

Серебросодержащие материалы классифицируют в соответствии с размером частиц серебра на микро- и нано-. К микроматериалам относят материалы на основе с размером частиц от 1 до 15 мкм, а к наноматериалам относятся материалы с размером частиц от 1 до 100 нм. По сравнению с материалами на основе микрочастиц, наночастицы имеют значительно большую свободную поверхностную энергию, что в свою очередь, снижает температуру в процессе спекания. Классификация серебросодержащих материалов в отношении размеров частиц приведена в таблице 1 [18]:

Для компенсации отсутствия давления в процессе низкотемпературного спекания для материалов с нано- и микроразмером частиц используют повышенную концентрацию молекул кислорода и повышение температуры соединения, которые позволяют снизить температуру синтеринга.

Таблица 1 — Классификация серебросодержащих материалов по размеру частиц

Тип материала	**Температура процесса спекания**	**Давления процесса спекания**	**Размер частиц серебра**
Серебросодержащие материалы на основе микрочастиц	250 ^{0}C	40 МПа	1-15 мкм
	350 ^{0}C	0 МПа	1-15 мкм
Серебросодержащие материалы на основе наночастиц	220 ^{0}C	10 МПа	менее 100 нм
	300 ^{0}C	0 МПа	менее 100 нм

В настоящее время основным трендом является использование наночастиц серебра, так как эти материалы требуют сниженное давление и температуру в процессе спекания за счёт увеличенной свободной энергии [2,3,4]. Однако использование наночастиц серебра может вызвать ряд экологических проблем, так как эти частицы токсичны для многих микроорганизмов. Использование материалов из наносеребра будет серьёзно ограничено, если исследования докажут, что эти частицы вредны для окружающей среды [12,13].

Как уже было сказано, материалы на основе наночастиц обладают высоким запасом свободной энергии, в связи с чем процесс спекания начинается при очень низких температурах (от 160°C) и с достаточно высокой скоростью. При этом для получения соединения с высокой плотностью необходимо применение высокой скорости нагрева в процессе спекания. В настоящее время разработаны передовые методы спекания, способные увеличить скорость нагрева, например, спекание с использованием СВЧ излучения, плазмы, лазерного излучения и т.д. [14-17]. Однако высокая скорость нагрева, может вызвать тепловой удар, что может вызвать разрушения полупроводниковых чипов в процессе спекания. Поэтому увеличение скорости нагрева не подходит применительно к соединению силовых полупроводниковых приборов, и необходимо вести поиск других стратегий по достижению максимального уплотнения материалов на основе наночастиц.

Материалы для процесса спекания доступны в двух видах: пасты и плёнки [41].

В серебросодержащих пастах, помимо органической оболочки, частицы серебра размешены в органическом наполнителе, который необходимо удалить под действием температуры после процесса нанесения на подложку. Как правило, пасты наносят методом трафаретной печати через сеточный трафарет либо перфорированный металлический.

Главным недостатком пасты является дополнительная операция по удалению органического наполнителя. Важно полностью удалить наполнитель до процесса синтеринга по следующим причинам:

– в процессе синтеринга выделяющиеся пары могут разрушить полупроводниковый элемент;

– остатки органического наполнителя могут образовывать пустоты в области шва, что скажется на стойкости прибора при надёжностных испытаниях.

Достоинством паст является возможность гибкого изменения формы нанесённого слоя посредством изменения трафарета.

Альтернативным видом серебросодержащих материалов являются плёнки. Каждая плёнка состоит из полимерной подложки, на которую нанесён слой частиц серебра с неокисленной поверхностью, каждая из которых покрыта органической оболочкой. Отличительной особенностью плёнок является отсутствие органического наполнителя, и, как следствие, отсутствие операции удаления этого наполнителя.

Серебросодержащая плёнка наносится на подложку при помощи промежуточной операции переноса. Для переноса серебросодержащего слоя на подложку необходимо наличие как температуры, так и давления, что накладывает

ограничения на материал, используемый в качестве подложки. Для защиты от внешних воздействий серебросодержащий слой сверху покрыт ещё одной полимерной плёнкой. Главным преимуществом плёнок является сокращение операций для нанесения серебросодержащего слоя на подложку, и, как следствие, упрощение состава основного оборудования.

В настоящее время лидерами среди материалов для процесса низкотемпературного спекания являются такие компании как Heraeus, Henkel, Dowa, Alpha Assembly Solutions. Основные продукты данных компаний приведены в таблице 2 [19-22].

Таблица 2 – Поставщики материалов для процесса низкотемпературного спекания и их продукты

Поставщик	**Наименование материала**	**Тип материала**	**Размер частиц**
Alpha Assembly Solutions	Argomax 2000/5000	паста	нано
	Argomax 8000	плёнка	нано
Heraeu	LTS 016/043	паста	микро
Henkel	LOCTITE ABLESTIK SSP 2020	паста	микро
Dowa	PA-HT-1503M	паста	нано

Были определены необходимые критерии для выбора материалов для проведения процесса низкотемпературного спекания применительно к силовым полупроводниковым тиристорам и диодам площадью более 50 кв.см., к которым относятся:

- температура соединения кремниевого элемента с молибденовым термокомпенсатором не более 300°C, что обусловлено необходимым снижением термомеханических напряжений и уровня остаточных деформации в полупроводниковом элементе;
- температура разрушения соединения более 700°C, что обусловлено возможностью кратковременного перегрева кремниевого элемента в режиме протекания ударного тока без разрушения и деградации соединения с молибденовым термокомпенсатором;
- высокая электро- и теплопроводность полученного соединения (не хуже соединения, полученного методом сплавления на силуминивый припой), что обусловлено необходимостью соответствия параметров статических и тепловых потерь;
- отсутствие взаимодействия (расплавления) с поверхностными слоями кремния при температурах, равных температуре соединения, что обусловлено необходимостью обеспечения равномерного распределения тока по площади структуры;
- возможность соединения кремниевых элементов и молибденовых термокомпенсаторов с диаметром от 80 мм и более с допустимым уровнем несоответствующей продукции при производстве, который должен быть

экономически оправдан с точки зрения маржинальности продукции при изготовлении с помощью данной технологии;
- повышенная стабильность при воздействии термоциклирования и электротермоциклирования при проведении ресурсных испытаний, что обусловлено необходимостью снижения количества деградационных отказов и повышению ресурса работы приборов.

Выбор типа материала, применяемого при низкотемпературном спекании силовых полупроводниковых тиристоров и диодов с площадью кремниевого элемента более 50 кв.см. проходил исходя из необходимости снижения температуры и давления в процессе соединения, так как во время работы полупроводникового прибора в металло-керамическом корпусе происходит термоциклирование при внешнем монтажном усилии. При этом верхняя медная крышка корпуса, прижатая к полупроводниковому элементу через катодную прокладку, нагреваясь, передаёт кремниевому элементу усилие на разрыв. Это усилие создаётся за счёт разности ТКЛР кремния и меди и передаётся кремниевому элементу за счёт силы трения. При наличии жёсткого шва тангенциальное напряжение, сообщаемое расширяющейся медной крышкой, распределяется по всему полупроводниковому элементу, а основная часть силы реакции приходится на наиболее толстый и жёсткий молибден – в этом и состоит физический смысл термокомпенсатора.

Таким образом, в качестве основного материала был выбран материал компании Alpha Assembl ySolutions серии 8000, базирующийся на плёнке с наночастицами серебра и имеющий следующие преимущества:
- материал базируется на наночастицах серебра, что позволит максимально снизить температуру и давление в процессе низкотемпературного спекания, и, как следствие, снизить уровень остаточных деформаций полупроводникового элемента;
- материал нанесён на носитель, что позволит сократить количество операций для нанесения серебросодержащего слоя на подложку;
- материал имеет сниженное количество органического наполнителя, что нивелирует риски разрушения полупроводникового элемента в процессе испарения наполнителя и образования дополнительных пустот в области шва, что повышает стойкость прибора к термоциклированию.

Из этой серии для соединения больших площадей наиболее подходит материал Argomax 8010, так как данный материал имеет в своём составе сниженное число органического наполнителя, что позволит получить соединение с наиболее высокой плотностью.

3. Заключение

В настоящей работе исследованы актуальные методы проведения процесса низкотемпературного спекания. Определены преимущества и недостатки. Также выбран наиболее подходящий материал компании Alpha Assembly Solutions серии 8000 для проведения процесса низкотемпературного спекания

применительно к силовым полупроводниковым тиристорам и диодам площадью более 50 кв.см.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwarzbauer H. Novel Large Area Joining Technique for Improved Power Device Performance. - IEEE Transactions on Industrial Applications, 27 (1), 1991, p. 93- 95.
2. Bai J.G. Low-temperature sintering of nanoscale silver paste for semiconductor device interconnection. Dissertation doctor of philosophy in materials science and engineering. Virginia polytechnic institute and state university. Virginia. 2005
3. Siow K.S. Mechanical properties of nano-silver joints as die attach materials. Journal of alloys and compounds .2012. Vol. 514. P. 6-19
4. Pratsinis S.E., Herrmann H.J. Nanoparticle agglomerates and aggregates in aerosols by coagulation and sintering. Dissertation doctor of sciences. ETH Zurich. Zurich. 2012
5. Schwarzbauer H. Method of securing electronic components to a substrate. U.S. Patent 4810672. Siemens AG. 2005
6. Klaka S., Sitting R. Proceedings of 6th international symposium on power semiconductor devices & ICs, Davas, Switzerland. 1994. May 31-June 2
7. Nadler J. Silver–diamond composite offers unique capabilities for cooling powerful defense microelectronics. Georgia technology research institute, 9th July 2011.
8. Lei T.G., Calata J.N., Lu G.-Q. Low-temperature sintering of nanoscale silver paste for attaching large-area (>100mm2) chips. IEEE transactions on components and packaging technology.2010. Vol. 33(1)
9. Lu G.-Q., Calata J.N., Lei T.G. Low-temperature sintering of nano scale silver paste for power chip attachment
10. Mutoh H., Moriyama N., Kaneko K., Miyazawa Y. Microstructure of interface between Si chip and tape-type Ag nanoparticle sheet. International Symposium on Interfacial Joining and Surface Technology (IJST2013) IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 61. 2014.
11. Knoerr M., Schletz A. Power Semiconductor Joining through Sintering of Silver Nanoparticles: Evaluation of Influence of Parameters Time, Temperature and Pressure on Density, Strength and Reliability CIPS2010. Nurenberg. 2010
12. Calata J. N., Lei T. G., Lu G.-Q.. Sintered nanosilver paste for high-temperature power semiconductor device attachment. Int. J. Materials and Product Technology. 2009. Vol. 34(1/2)
13. Stensberg M.C., Wei Q., McLamore E.S., Porterfield D.M., Wei A., Sepuelveda M.S., Nanomed 6. 2011. P. 879–898
14. Mayo M.J. Processing of nanocrystalline ceramics from ultrafine particles. International Materials Reviews. 1996. ,Vol. 41(3). P. 85-115
15. Wang S.W., Chen L.D., Hirai T. Densification of Al_2O_3 powder using spark plasma sintering. Journal of Materials Research. 2000. Vol. 15(4). P. 982-987
16. Freim J., McKittrick J., Katz J., Sickafus K. Microwave sintering of nanocrystalline γ-Al_2O_3. Nanostructured Materials. 1994. Vol. 4, P. 371-385.

17. Groza J.R., Dowding R.J. Nanoparticulate materials densification. Nanostructured Materials. 1996. Vol. 7. P. 749-768
18. Kuramoto M., Kunimune T., Ogawa S., Niwa M., Suganuma K. Low-temperature and pressureless ag–ag direct bonding for light emitting diode die-attachment. IEEE transactions on components, packaging and manufacturing technology. 2012. Vol. 2(4)
19. ALPHA® Sinter Technology [электронный ресурс]: https://alphaassembly.com /Products/Sinter-Technology
20. mAgic® Sinter Pastes for high performance applications [электронный ресурс]: https://www.heraeus.com/en/het/products_and_solutions_het/sinter_materials/sinter_materials___page.aspx
21. Semi-Sintering Die Attach Paste [электронный ресурс]: https://www.henkel-adhesives.com/us/en/products/industrial-adhesives/die-attach-adhesives/semi-sintering-die-attach-paste.html
22. Dowa Power Sintering Paste [электронный ресурс]: http://files.dowa-europe.com /power_sintering_paste_spec.pdf

УДК 539.3

МЕТОД РАСЧЕТА ПОТЕНЦИАЛОВ НЕЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАЗНЫХ МАТЕРИАЛОВ

С.И. Якушина, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *Jakushina@rambler.ru*
В.С. Шоркин, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *VShorkin@yandex.ru*
О.С. Новичихина
e-mail: *Jakushina@rambler.ru*

В работе на основании механики деформируемого твердого тела представлено теоретическое обоснование наличия неполноты адгезионного контакта упругих материалов с разными механическими свойствами и её качественная оценка. Поскольку реальные конструкционные материалы на микроуровне, а также композиционные материалы имеют гетерогенную структуру, наличие такой несплошности может быть причиной наличия в них микротрещин даже в отсутствии внешних воздействий.

Причина несплошности состоит в том, что адгезионный контакт является настолько неполным, насколько это способствует достижению минимума поверхностной энергии в его зоне.

Ключевые слова: адгезия, когезия, композиционный материал, прочность, энергия адгезии, напряженное состояние.

1. Введение

Основная задача данной работы – построение математической модели, в рамках которой установлена связь адгезионных и когезионных свойств компо-

зиционных материалов, являющихся гетерогенными средами, с несплошностью адгезионного контакта элементов композита.

Адгезионное состояние защитной пленки и основного материала характеризуется непрерывным переходом атомной решетки основного материала в атомную решетку покрытия. При этом типы решеток и их размеры могут отличаться друг от друга значительно. Очевидно, что в переходном слое должны существовать значительные механические напряжения, а на участках поверхности контакта, где непрерывный переход оказался невозможным, возможно наличие микротрещин.

2. Теоретические положения

В реальном композиционном материале наблюдается адгезионный контакт составляющих с разными физическими и механическими свойствами, отделенными друг от друга явно выраженной поверхностью контакта.

Одной из количественных оценок прочности адгезионного соединения является энергия адгезии соединения [1], определяемая равенством

$$F = W^{(1,2)} - W^{(1)} - W^{(2)} \qquad (1)$$

Вычитаемое в правой части – сумма поверхностных энергий свободных от контакта тел $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$: уменьшаемое – поверхностная энергия слипшейся системы тел, сконцентрированная вблизи S_0. Для расчёта энергии адгезии построена теория [2,3], опирающаяся на общие представления линейной теории упругости изотропных сред, а также на некоторые специальные представления, заключающиеся в следующем. Деформированное состояние тела описывается не одним, а двумя тензорами деформации $g_{i,j} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$ и $Z_{ijk} = u_{i,jk}$, где u_i - компоненты вектора перемещений $\vec{u}$ материальных точек в ортонормированной системе координат x_1, x_2, x_3, имеющей базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$; индекс после запятой означает, дифференцирование по соответствующей координате. Тензоры g_{ij} и Z_{ijk} являются обобщёнными перемещениями, на которых совершают работу обобщённые силы P^1_{ij} и P^2_{ijk} - тензоры развивающихся в деформируемом теле напряжений. Теория учитывает наличие в среде внутреннего начального напряжённого состояния, которое вблизи границы описывается тензором гипернапряжений

$$P^2_0 = T_0 \cdot \vec{E}\,. \qquad (2)$$

Здесь: $T_0 = \pi_0 \delta_{ij} \delta_{kl} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k \vec{e}_l$ (по повторяющимся индексам производится суммирование – правило Эйнштейна); π_0 – материальная константа; δ_{ij} – символ Кронекера; $\vec{E}$ – единичный вектор, нормальный к эквипотенциальным поверхностям поля межчастичного взаимодействия внутри изучаемого тела, на поверхности тела $\vec{E}$ совпадает с внешней единичной нормалью $\vec{n}$.

В соответствии с теорией [2,3], объемная плотность изменения потенциала механического взаимодействия частиц сплошного тела определяется равенством

$$dw = 2\mu\, g_{ij} dg_{ij} + \lambda\, g_{kk} dg_{ii} + \\ (2\mu + \lambda)\left(b_1^2 Z_{ijk} dZ_{ijk} + b_2^2 Z_{ijk} dZ_{ijk}\right) + \pi_0 \delta_{ij} E_k dZ_{ijk} \tag{3}$$

λ, μ, b_1, b_2 – материальные постоянные, характеризующие упругие свойства среды. На основании рассматриваемой теории, с учетом (1) при условии полного адгезионного контакта слоев

$$F_a = \frac{W^{(1)} W^{(2)} (k^{(1)} + k^{(2)})^2}{W^{(1)} k^{(2)2} + W^{(2)} k^{(1)2}} \;;\; k^{(j)} = \frac{\nu^{(j)}}{1 - \nu^{(j)}}; \tag{4}$$

где $\nu^{(j)}$ – коэффициент Пуассона для материала тела. При этом считалось, что слои $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ находятся в состоянии адгезии, если прямолинейная до деформации материальная линия, состоящая как из частиц $B^{(1)}$, так и $B^{(2)}$, пересекающая контактную поверхность, при любой деформации объединенного тела $B = B^{(1)} \cup B^{(2)}$ сохраняет свою целостность и гладкость продольной деформации и изгиба.

Известно [4], что реальный контакт твердых тел даже в состоянии адгезии не является сплошным.

В данной работе определяется лишь обусловленное физическими причинами относительная площадь истинного контакта α, $0 \le \alpha \le 1$. При этом так же, как и в общефизическом представлении считается, что в состоянии равновесия упругое тело обладает минимумом потенциальной энергии. На основании этого строится условие для количественной относительной площади адгезионного контакта.

Допускается, что каждый элементарный участок dS_0 поверхности кажущегося контакта S_0 тел $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ является объединением двух участков

$$dS_0 = dS_\alpha + dS_{1-\alpha}. \tag{5}$$

На первом из них $dS_\alpha = \alpha dS_0$ адгезия существует, на втором $dS_{1-\alpha} = (1-\alpha) dS_0$ ее нет, нет там и жесткого контакта $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$, когда при переходе через границу S_α поле напряжений сохраняет свою непрерывность ($W^{(1,2)}$ зависит от параметра α, величины $W^{(j)}$, $j = 1,2$, определяются для тел $B^{(j)}$ при условии, что взаимодействия между ними нет, величина F оказывается зависящей от относительной площади адгезионного контакта $\alpha : F = F(\alpha) \ne F_a$). При образовании $B = B^{(1)} \cup B^{(2)}$ в этой системе происходят энергетические изменения. Среди всех возможных для системы состояний наступает то, которое соответствует их минимуму.

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial W^{(1,2)}}{\partial \alpha} = 0. \tag{7}$$

Краевые условия на свободных участках $S^{(j)}$ граничной поверхности, условия сопряжения на границе контакта S_0 имеют вид:

$$\nabla \cdot \left(P^{1(j)} - \nabla \cdot P^{2(j)} \right) = \vec{0}, \; \vec{r} \in B^{(j)} \tag{8}$$

$$\vec{n}^{(j)} \cdot \left(P^{1(j)} - \nabla \cdot P^{2(j)} \right) - \nabla_s \cdot \left(\vec{n}^{(j)} \cdot P^{2(j)} \right) = \vec{0}, \; \vec{r} \in S^{(j)} \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
&\vec{n}^{(j)} \cdot P^{2(j)} = \vec{0} \\
&\vec{n}^{(1-2)} \cdot \left(P^{1(1)} - \nabla \cdot P^{2(1)} \right) - \nabla_s \cdot \left(\vec{n}^{(1-2)} \cdot P^{2(1)} \right) + \\
&+ \vec{n}^{(2-1)} \cdot \left(P^{1(2)} - \nabla \cdot P^{2(2)} \right) - \nabla_s \cdot \left(\vec{n}^{(2-1)} \cdot P^{2(2)} \right) = \vec{0} \\
&\vec{n}^{(1-2)} \cdot P^{2(1)} + \vec{n}^{(2-1)} \cdot P^{2(2)} = \vec{0} \\
&\vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(2)};\ \nabla_{\vec{n}} \vec{u}^{(1)} = \nabla_{\vec{n}} \vec{u}^{(2)}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Для тех же тел $B^{(j)}$, $j = 1,2$, если на S_α адгезия отсутствует, вместо условий (10) используются условия:

$$
\begin{aligned}
&\vec{n}^{(1-2)} \cdot \left(\overset{1}{P}{}^{(1)} - \nabla \cdot \overset{2}{P}{}^{(1)} \right) - \nabla_s \cdot \left(\vec{n}^{(1-2)} \cdot \overset{2}{P}{}^{(1)} \right) = \\
&= \vec{n}^{(2-1)} \cdot \left(\overset{1}{P}{}^{(2)} - \nabla \cdot \overset{2}{P}{}^{(2)} \right) - \nabla_s \cdot \left(\vec{n}^{(2-1)} \cdot \overset{2}{P}{}^{(2)} \right) = \vec{\sigma}_{1-\alpha}^{(1-2)} \\
&\vec{n}^{(1-2)} \cdot \overset{2}{P}{}^{(1)} = \vec{n}^{(2-1)} \cdot \overset{2}{P}{}^{(2)} = \vec{0}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Для фиксации положения $B = B^{(1)} \cup B^{(2)}$ одна из материальных точек фиксируется – считается неподвижной. Положения остальных частей составного тела определяется при расчёте деформаций.

Перемещение частиц тела $B^{(j)}$ на границе S_α его контакта с другим телом системы $B = B^{(1)} \cup B^{(2)}$:

$$
\vec{u}^{(j)} = \alpha\, \vec{u}_\alpha^{(j)} + (1-\alpha)\, \vec{u}_{1-\alpha}^{(j)} \tag{25}
$$

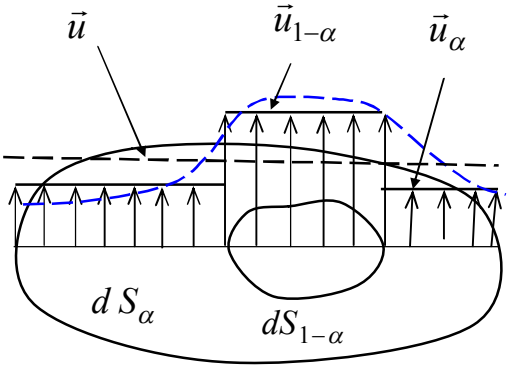


Рисунок 1 – Распределение перемещений по поверхности контакта

С учётом непрерывности и дифференцируемости поля перемещений в телах $B^{(j)}$ можно заключить, что это представление перемещений может сохраняться во всей области пространства, занимаемой $B^{(j)}$.

В теории упругости тензоры напряжений являются линейными комбинациями градиентов перемещений различных порядков. С учётом (25), на основании этого можно заключить, что для них справедливо представление

$$
P^{k(j)} = \alpha P_\alpha^{k(j)} + (1-\alpha) P_{1-\alpha}^{k(j)};\ j,k = 1,2 \tag{26}
$$

Представленные выше рассуждения дают возможность решить поставленную задачу, рассмотрев предварительно, независимо друг от друга, две задачи. Первая – об адгезии $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ в предположении об абсолютной её

сплошности вдоль S_0. Вторая – задача об их напряжённо-деформированном состоянии при условии отсутствия их взаимных воздействий. Выражение для избытка поверхностной энергии $W^{(1,2)}$ объединённого тела $B = B^{(1)} \bigcup B^{(2)}$

$$W^{(1,2)} = \alpha^2 W_{\alpha\alpha} + \alpha(1-\alpha)W_{\alpha(1-\alpha)} + (1-\alpha)^2 W_{(1-\alpha)(1-\alpha)} = W_{(\alpha)}^{(1,2)} \qquad (30)$$

В этой записи $W_{\alpha\alpha}$ численно равно работе обобщённых внутренних сил, вызванных адгезионным контактом, на обобщённых перемещениях, вызванных также адгезионным контактом. $W_{(1-\alpha)(1-\alpha)}$ – работа обобщённых внутренних сил, возникающих в $B^{(j)}$ при отсутствии адгезии, на перемещениях, появляющихся под влиянием этих сил. Ввиду этого, обе величины $W_{\alpha\alpha}$ и $W_{(1-\alpha)(1-\alpha)}$ положительны. Значит, зависимость $W_{(\alpha)}^{(1,2)}$ имеет минимум. Соответствующее ему значение $\alpha = \alpha_0$ определяется условием

$$\alpha = \frac{1}{1 + \dfrac{W_{\alpha\alpha} - \dfrac{1}{2}W_{\alpha(1-\alpha)}}{W_{(1-\alpha)(1-\alpha)} - \dfrac{1}{2}W_{\alpha(1-\alpha)}}} \qquad (31)$$

После того, как значение α_0 будет найдено, энергию адгезии тел $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ с учётом неполноты адгезионного контакта, обусловленного физическими причинами, можно рассчитать по формуле

$$F = \alpha[\alpha W_{\alpha\alpha} + (1-\alpha)W_{\alpha(1-\alpha)} - (2-\alpha)W_{(1-\alpha)(1-\alpha)}] \qquad (32)$$

Заключение

Расчеты, иллюстрирующие, изложенные теоретические положения проведены для случая развития напряженно-деформированного состояния контактирующих материалов только вдоль нормали к поверхности контакта. При этом π_0, $b = (b_1^2 + b_2^2)^{1/2}$ – дополнительные материальные постоянные, характеризующие упругие свойства среды выражаются [6] через поверхностную энергию W_s: $\pi_0 = W_s$, $b = \dfrac{W_s}{2\mu + \lambda}$. Величина W_s либо является известной величиной, либо определяется приближенно по эмпирической формуле $W_s \approx 8E \cdot 10^{-12}\ Дж/м^2$ или через потенциал межчастичного взаимодействия.

В результате оказалось, что относительная площадь адгезионного контакта, являясь величиной близкой единице, для материалов с разными механическими свойствами всегда меньше единицы. А относительная несплошность, то есть поврежденность, адгезионного контакта не равна нулю. Это означает, что в гетерогенной среде всегда существует сеть микроповреждений сплошности, способных развиться в сеть микротрещин трещин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физический энциклопедический словарь.– т.1.– М.: Советская энциклопедия, 1960.– 664 с.

2. Шоркин В.С. Особенности упругости поверхностных слоев твердых тел. / В.С. Шоркин // Упругость и неупругость. Материалы межд. Научн. Симп. По проблемам механики деформируемых тел, посв. 90 – летию со дня рожд. А.А. Ильюшина. Москва, 22- 23 января 2001 г. – М.: МГУ, 2001. – с. 453 – 454.
3. Шоркин В.С. Модель упругой среды второго порядка с начальным напряжённым состоянием./ Technomat & Infotel 2004 – Materials, methods and technology.// 6th International Symposium, 6 – 10 September, 2004. Bulgaria. Pp. 71 – 86.
4. Зимон А.Д. Адгезия пленок и покрытий.– М.: Химия, 1977.– 352 с.
5. Киселев В.Ф. Поверхностные явления в полупроводниках и диэлектриках.– М.: Наука, 1970.– 400 с.
6. Витковский И.В., Конев А.Н., Шоркин В.С., Якушина С.И.Теоретическая оценка несплошности адгезионного контакта элементов многослойной оболочки бланкета термоядерного реактора // Журнал «Техническая физика» №7, 2007

Информатика
и информационные технологии

УДК 615.478; 616-7

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ ХРАНЕНИЯ И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ

Г.К. Алексанян, к.т.н., доц.
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова
e-mail: graer@yandex.ru
И.Д. Щербаков, ассистент
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова
e-mail: id.shcherbakov@gmail.com
А.И. Кучер, старший преподаватель
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова
e-mail: artiom.kucher@gmail.com
В.Ю. Рябченко, магистрант
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова
e-mail: valentinaryabchenko@yandex.ru

В работе описывается процесс обработки измерительных данных, полученных методом электроимпедансной томографии. Данные измерений записываются в формате *JSON* и преобразуются в изображение среза человеческого тела с расширением .png. Разработанное программное обеспечение позволяет визуализировать распределение поля проводимости исследуемого объекта. Программное обеспечение разработано на языке программирования Python 3.6 с использованием библиотек json и Pillow.

Ключевые слова: электроимпедансная томография, проводимость, потенциалы, визуализация, реконструкция, алгоритм, формат *JSON*.

Электроимпедансная томография (ЭИТ) представляет собой метод медицинской визуализации распределения электрического поля проводимости тела человека [1-4]. Суть метода заключается в следующем: источник тока (ИТ) последовательно инжектирует электрический ток на электроды $Э_i$, где i=1…n – количество электродов, расположенные на поверхности исследуемого объекта (ИО). Результатом измерений является разность потенциалов $\Delta\varphi_i=\varphi_{i+1}-\varphi_i$ с каждой пары соответствующих соседних электродов $Э_{i+1}$ и $Э_i$. На основе по-

лученной $\Delta\varphi_i$ выполняется реконструкция поля проводимости σ ИО. Обобщенная структура получения измерительных данных с биологического объекта методом ЭИТ представлена на рисунке 1.

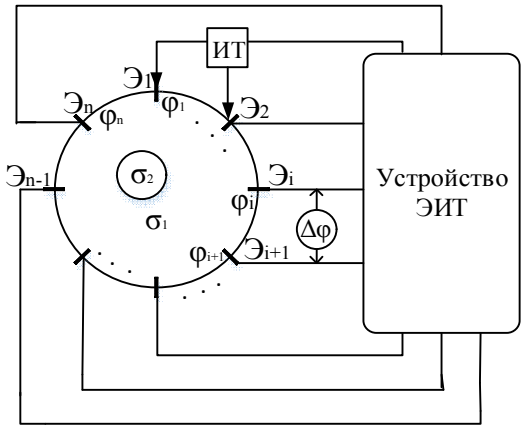


Рисунок 1 – Общая схема реализации метода ЭИТ

При реализации данного метода возникают проблемы, связанные с хранением и подготовкой измерительных данных к реконструкции и визуализации [2,3].

Для решения этих задач разработано программное обеспечение (ПО), функциями которого являются преобразование, хранение, сжатие и восстановление измерительных данных без потерь, а также реконструкция поля проводимости σ ИО. Программа написана на языке *Python* 3.6 [5]. Измерительные данные с устройства ЭИТ преобразуются в объект формата *.json* [6-8] для дальнейшего хранения. Для записи в файл *.json* с помощью разработанного ПО осуществляется сериализация [9] измерительных данных. Утилита *GZIP*[10], основанная на алгоритме *DEFLATE* [10,11], обеспечивает сжатие и восстановление данных без потерь. Данный алгоритм использует комбинацию алгоритма *LZ77* [11] и алгоритма Хаффмана [11], с помощью которых осуществляется кодировка и сжатие информации.

Для десериализации [9], т.е. для чтения измерительных данных из файла *JSON* используется алгоритм считывания и преобразования данных в необходимый формат для дальнейшей обработки и реконструкции. В результате формируется изображение путем отображения всех конечных элементов области поля проводимости σ. Схема разработанного алгоритма приведена на рисунке 2.

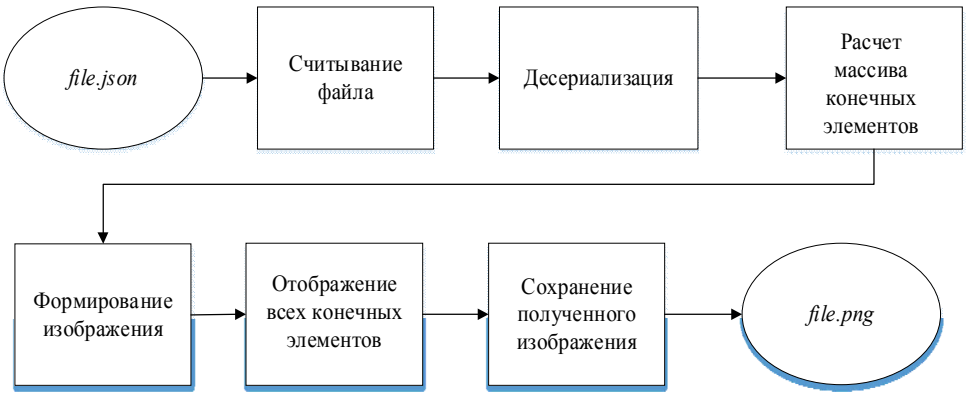


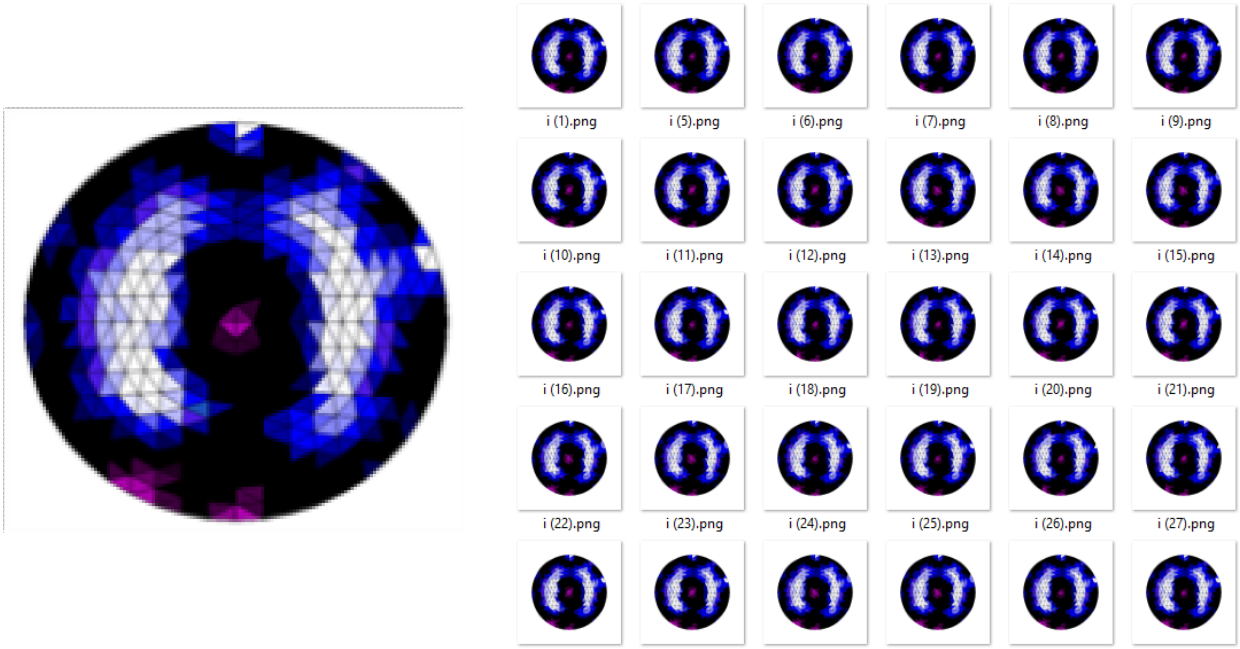
Рисунок 2 – Алгоритм работы программы

Программа рассчитывает координаты каждого конечного элемента поля проводимости σ. С помощью библиотеки *Pillow* [12] создается графическая структура в формате *RGB* с заданными размерами, в которой отображаются все конечные элементы. Полученное изображение сохраняется в графический файл с расширением *.png*.

На рисунке 3 а) представлен пример визуализированной реконструкции поля проводимости σ ИО.

В результате работы программы формируется набор изображений, визуализирующих распределение поля проводимости σ ИО. На рисунке 3 б) представлен пример серии сгенерированных изображений томографического среза ИО.

Для персонального компьютера с конфигурацией, указанной в [6], и исходными данными, приведенными в [6], один кадр изображения генерируется за 0,026 секунд, что соответствует 38 кадрам в секунду.



а) б)

Рисунок 3 – а) Единичное изображение реконструкции поля проводимости ИО;
б) Серия сгенерированных изображений

Разработанное ПО осуществляет преобразование измерительных данных с устройства ЭИТ в отдельный файл с расширением *.json*. С помощью утилиты *GZIP* выполняется сжатие файла с данными для дальнейшей обработки и хранения. Программное обеспечение позволяет работать с ранее сохраненными файлами и визуализировать результаты расчетов с записью в графический файл *.png*.

Работы выполняются в рамках гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-196.2017.8 "Разработка теоретических основ и алгоритмов многоракурсной электроимпедансной томографии для систем неинвазивной трехмерной медицинской визуализации".

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексанян Г.К. Электроимпедансная томография - перспективный и развивающийся метод медицинской визуализации. // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: естественные и технические науки. – Москва. 2016. – № 11. –С. 60-64.
2. Алексанян Г.К., Кучер А.И., Нескребин Д.Г. Разработка 16-электродной системы для электроимпедансной томографии // Новая наука: от идеи к результату. Уфа. 2015. № 7-2 С.103-105.
3. Алексанян Г.К., кучер А.И1, Нескребин Д.Г. Разработка 64 -х электродной системы для исследования объемных объектов методом электроимпедансной томографии // Новая наука: стратегии и векторы развития: материалы международной. науч. -практ. конф. (Стерлитамак, 19.11.2015 г.). -Стерлитамак: РИЦ АМИ. 2015. № 5 –2. С. 117 -119.
4. Алексанян Г.К., Тарасов А.Д., Чан Нам Фонг, Нгуен Мань Кыонг. Разработка программного продукта трехмерной визуализации проводимости объекта // Наука, образование, общество: проблемы и перспективы развития: сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч. -практ. конф., 31 июля 2015 г. Тамбов, 2015. Ч. 2. С. 13-15.
5. Прохоренок Н.А., Дронов В.А. *Python* 3. Самое необходимое. - СПб.: БХВ-Петербург, 2016. — 461 с.
6. Сулыз А.В., Кучер А.И., Поликарпов А.В., Бадашев В.В. Применение форматов обмена данных для хранения математических моделей объектов исследований в задачах электроимпедансной томографии // Фундаментальные основы, теория, методы и средства измерений, контроля и диагностики. – 19-я Междунар. молодежная науч. -практ. конф., 27 – 28 февраля 2018 г., Новочеркасск, 2018. С. 275-277.
7. D. Crockford The application/json Media Type for JavaScript Object Notation (JSON) — Internet Engineering Task Force, 2006. — 10 p. — doi:10.17487/RFC4627.
8. Introducing JSON [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.json.org/.
9. Симон Робинсон, Олли Корнес, Джей Глинн, и др. C# для профессионалов. Том 2. Изд. - Москва: Лори, 2003. – 478 с.
10. GNU Operating System [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.gnu.org/software/gzip/.
11. Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. - М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2002. – 384 с.
12. Pillow (PIL Fork) 5.1.0 documentation [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://pillow.readthedocs.io/en/5.1.x/.

УДК 004.9

ВЕБ-ОРИЕНТИРОВАННАЯ ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ТРЕНИРОВКИ НАВЫКОВ МЕНТАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ

В.А. Беднаж, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского»
e-mail: *vera.bednazh@mail.ru*
А.И. Лаптева, бакалавр
ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского»
e-mail: *asya.lapteva@yandex.ru*
Т.А. Нога, магистрант
ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет им. ак. И.Г. Петровского»

В работе рассматривается необходимость разработка онлайн тренажера навыков ментальной математики, для чего проанализированы некоторые существующие разработки.

Ключевые слова: информационные системы, ментальная арифметика, образовательные веб-ориентированные системы, веб-приложение.

В настоящее время информационные технологии прочно укоренились в жизни современного человека и постепенно выходят на первый план. Для удобного взаимодействия со всеми необходимыми данными из любой точки Мира и любого устройства используют облачные технологии. При создании информационной системы использование веб-технологий помогает добиться распределённости и кроссплатформенности.

Одним из приоритетных направлений применения информационных систем является образование. Способом организации образовательного пространства могут выступать автоматизированные информационные системы.

Информационные системы способствуют рациональной организации учебного процесса учащихся в ходе учебной деятельности, благодаря чему, обучение становиться более эффективным, интенсифицировать все уровни учебно-воспитательного процесса, в том числе и формирование навыков различного рода деятельности.

Основополагающим фактором применения информационной системы для тренировки навыков ментальной арифметики вызывает определенный интерес у ряда специалистов в данной области, по причине возникновения необходимости использование современных информационных технологий, вместо традиционных подходов в обучении, которые позволяют намного эффективнее осуществлять усвоение информации учащимися.

Ментальная арифметика – это методика развития умственных способностей, которая основана на системе устного счёта. При использовании данной методики, активно развиваются правое и левое полушарие. Это способствует приобретению навыков, которые очень слабо развиты у современных школьников:

решение задач разными путями;

аналитическое мышление;
концентрация на задаче;
экстремальное мышление.

Все эти факторы показывают актуальность ментальной арифметики на сегодняшний день, в следствии чего возникает необходимость разработки ПО для контроля и тренировки навыков ментальной арифметики.

На сегодняшний день одной из потребностей человека является получение нужной информации в информационной среде. Для этого необходимо всего лишь иметь персональный компьютер с доступом в сеть Интернет. В связи с этим назрела необходимость адаптации учебных материалов к современным условиям. В данный момент существует множество образовательных веб-ориентированных систем различных направлений, в том числе и ментальной арифметики. Проведем краткий анализ некоторых систем.

Серия бесплатных онлайн тренажеров для занятий ментальной арифметики «Mentalar» (рисунок 1) состоит из отдельных тренажеров, каждый из которых нацелен на тренировку конкретного арифметического действия: сложение, вычитание, умножение и деление. Каждый из них состоит из 2 окон: окна выбора параметров (количество цифр, количество сложений и время в секундах) и окна показа чисел. Ввод и проверка результатов, а также статистика пользователя не предусмотрены.

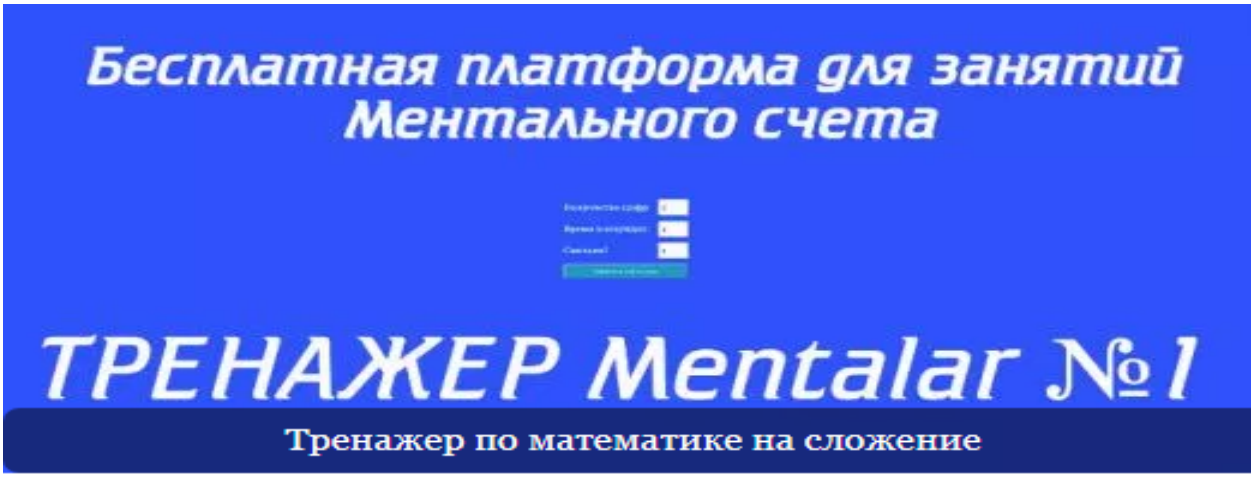


Рисунок 1 – Онлайн тренажер Mentalar №1

Тренажер по ментальному счёту «Я так считаю!» (рисунок 2). Данный тренажер имеет приятный дизайн и относительно удобный интерфейс, но является настольным и разработан под операционную систему Windows, что лишает возможности использовать его на разных платформах и устройствах. При запуске данного тренажёра на стартовом экране появляется запись, что данная версия программы является демоверсией. Для безлимитного пользования приложением необходимо записаться на курсы, или приобрести франшизу.

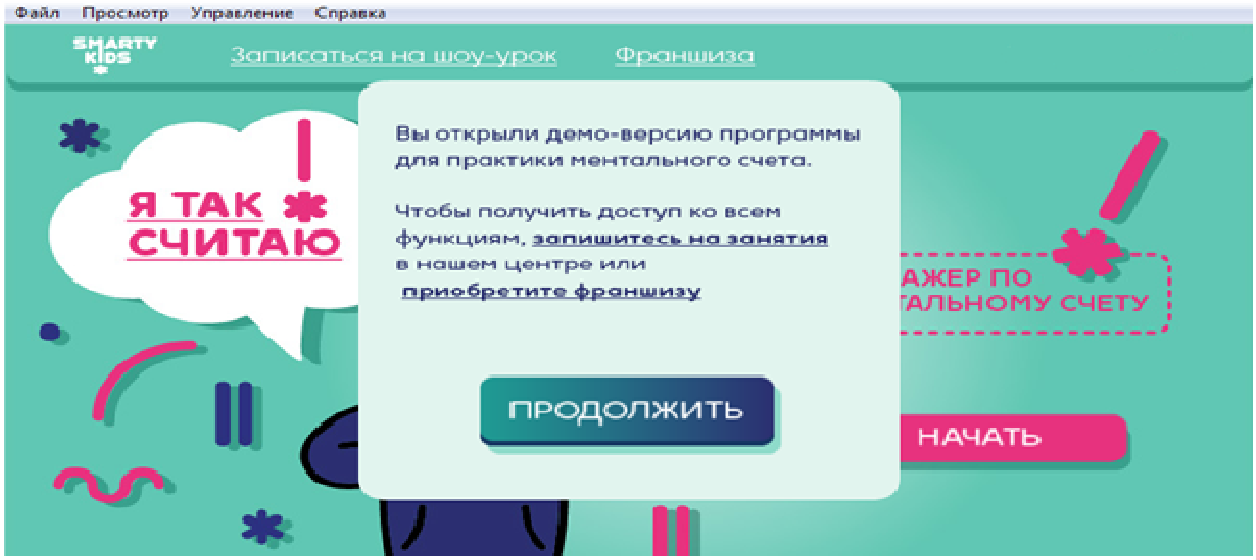


Рисунок 2 – Настольный тренажер «Я так считаю!»

Онлайн тренажер от центра развития «Геометрика» (рисунок 3) представляет собой веб-приложение. На стартовом экране расположена форма входа, которая требует логин и пароль, однако регистрации не предусмотрено. Данным тренажером могут пользоваться лишь слушатели курсов центра развития и интеллекта «Геометрика», на которых им предоставляют данные для авторизации.

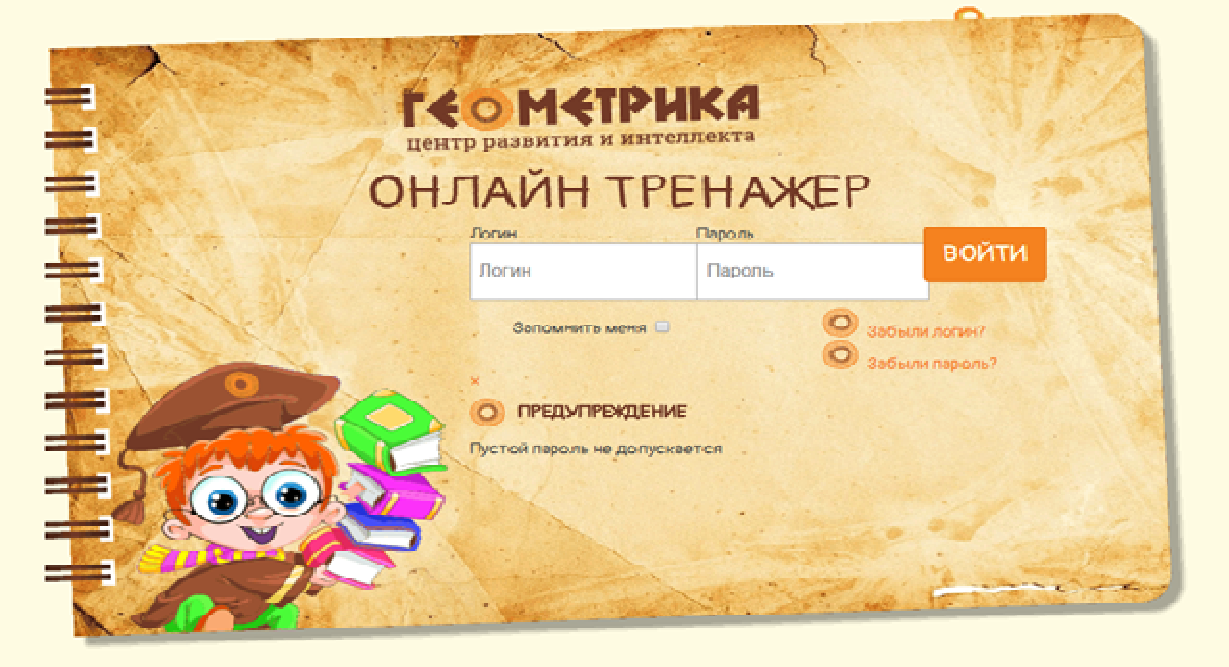


Рисунок 3 – Онлайн тренажер от центра развития «Геометрика»

Проанализировав существующие аналоги тренажера ментальной арифметики, можно сделать выводы, что часть из них является настольными приложениями. Это не позволяет получить к ним доступ в любое время и с любого устройства. Для использования некоторых приложений необходимо быть слушателям курсов, или приобретать франшизу, что не подходит для пользователей, занимающихся самообразованием. Так же, некоторые приложения обладают

слабым функционалом, который не позволяет проверять ответы и просматривать статистику пользователя.

Разрабатываемая веб-ориентированная информационная система будет обладать удобным и понятным интерфейсов и включать в себя возможность выбора любой арифметической операции, проверку ответов и отображение статистики пользователя.

Веб-приложение будет состоять из двух взаимосвязанных частей: клиентской и серверной.

Клиентская часть представляет собой часть веб-приложения, которая предоставляет информацию для пользователя приложения с набором пользовательских функций. Доступ к ней имеют все пользователи. Она состоит из удобного, простого и привлекательного пользовательского интерфейса со статической и динамической информацией.

Серверная часть представляет собой часть веб-приложения, которая обеспечивает управление контентом приложения и его структурой, которая представляется на стороне пользователя, а также содержит логику динамически изменяющегося контента приложения.

Общие требования к веб-приложению: создается на основе фреймворка Flask с использованием языка программирования Python; пользователь должен иметь возможность пройти тестирование с учётом выбранных параметров и просмотреть статистику; веб-приложение должно быть адаптировано для всех браузеров.

Требования к дизайну веб-приложения заключаются в том, что дизайн всех экранов должен быть простым, интуитивно понятным и направлен на целевую аудиторию. Цветовое решение должно быть выполнено в соответствии с теорией цвета, а также с использованием читабельных и бесплатных шрифтов. При дизайне страниц должна соблюдаться стилистика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронкова О. Информационные технологии в образовании. — М.: Феникс. — 2013.
2. Голицина О.А., Максимов Н.В., Попов И.И. Информационные системы и технологии. — М.: Форум, Инфра. – 2014.
3. Садыкова Д.М. Роль информационных технологий на современном этапе развития. — М.: Lambert. — 2013.
4. Сырых Ю.А. Современный веб-дизайн. — М.: Вильямс. — 2018.
5. Федорова Г.Н. Информационные системы. — 3-е изд., стер. – М. — 2013.
6. Информационные системы и сети. Режим доступа: http://tsput.ru/res/informat/sist_seti_fmo/lekcii/lekciy-1.html
7. MentalMath Режим доступа: http://mmath.herokuapp.com.

ОПЫТ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ РАЗМЕТКИ ТЕКСТОВ КЛЮЧЕВЫМИ СЛОВАМИ

А.С. Ванюшкин
ФГБОУ ВО «Псковский государственный университет»
e-mail: *alexmandr@mail.ru*
Л.А. Гращенко, к.ф.-м.н.
ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»
e-mail: *graschenko@mail.ru*

В статье приводятся предварительные результаты тестовой экстралингвистической разметки ключевыми словами русскоязычных текстов, представленных 27 статьями трех функциональных стилей: публицистического, научного и художественного. В вычислительном эксперименте на основе реализованной авторами системы разметки (аннотирования) в виде веб-сервиса приняли участие 24 добровольца. На основе обсуждения проблемных аспектов, выявленных в ходе аннотирования, формулируются задачи дальнейшей разработки и исследования.

Ключевые слова: извлечение ключевых слов, экстралингвистическое аннотирование, обработка текстов на естественных языках, краудсорсинг.

Разработка эффективных алгоритмов извлечения ключевых слов и фраз (КС) из текстов подразумевает наличие соответствующих лингвистических ресурсов - корректно сформированных и размеченных (аннотированных) текстовых корпусов. Существует некоторое множество апробированных и более-менее корректно размеченных ключевыми словами текстовых корпусов для английского языка. Но для русского языка ситуация обратная - подобных лингвистических ресурсов в открытом доступе не представлено [1].

И если сформировать коллекцию текстов в соответствии с определенными критериями относительно несложно, то реализовать лингвистическую разметку этих текстов экспертами уже сложнее. В работе [2] было показано, что процесс разметки текстов ключевыми словами обладает особенностями, свойственными как внешней (экстралингвистической), так и внутренней (интралингвистической) разметке. При этом деятельность человека-эксперта, сопоставляющего тексту набор КС, является индивидуальной и аналитической.

В общем можно рассматривать три основных пути разметки текстов КС. Во-первых, приписывать КС тексту могут непосредственно их авторы (эксперты верхнего уровня). Такая ситуация характерна для научных статей, аннотация которых как правило сопровождается авторским набором ключевых слов и фраз, облегчающих рубрикацию текста. Указанное обстоятельство позволяет относительно быстро и без дополнительных затрат формировать тестовые корпуса, обладающих при этом определенной узостью выбора их функционального стиля. Во-вторых, к разметке могут привлекаться внешние эксперты (как в предметной области, так и профессиональные лингвисты). Это наиболее затратный и ресурсоемкий вариант. В-третьих, возможно использовать широкую общественность, добровольцев различной степени заинтересованности и мотивации (краудсорсинговая стратегия). Наконец, можно реализовать комбиниро-

ванную стратегию, при которой будут задействованы все перечисленные источники экспертного мнения, но учет мнений участников будет производиться исходя из их предопределенного статуса.

Так или иначе, достаточно очевидно, что целесообразно использовать как экспертов, так и «дилетантов», чтобы получить представительный материал для последующей обработки. Поэтому краудсорсинговая стратегия разметки с ранжированием участников представляется предпочтительной. Здесь, конечно, возникают вопросы о требуемом числе экспертов и их категорий, способах привлечения и мотивации и т.д.

В соответствии с известной четырехэтапной схемой выполнения краудсорсингового проекта [4], в рамках решения задачи создания двуязычного аннотированного корпуса для проверки алгоритмов извлечения КС, следом за разработкой и отладкой средства аннотирования проведена фаза тестовых испытаний. Таким образом, в данной работе будут представлены предварительные результаты, полученные в ходе реализации этапа тестирования разработанного ранее проблемно-ориентированного средства разметки текстов ключевыми словами на основе веб-технологий [2].

Текущий функционал системы разметки позволяет:

– привлекать как экспертов, так и общественность (самостоятельная регистрация без участия администратора);

– формировать различные варианты заданий (язык, последовательность предъявления текстов, вводный инструктаж);

– учитывать время, затраченное экспертами на каждый текст;

– размечать КС тремя способами: вводом вручную, выделением в тексте и комбинированно (рисунок 1);

– задавать шаблоны допустимого для выделения и ввода текста.

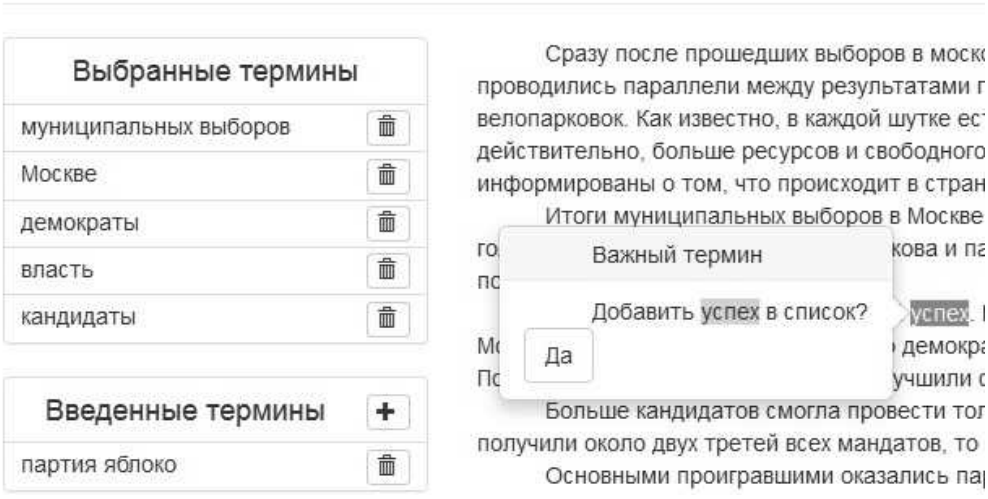


Рисунок 1 – Пример выбора ключевых слов в системе разметки

Для первоначального тестирования и выявления проблемных моментов был проведен эксперимент по разметке КС для небольшого набора текстов, состоящий из трех заданий, различающихся способом выделения ключевых слов. В первом случае было доступно непосредственное выделение и выбор не разделенных знаками препинания цепочек слов. Второе задание подразумевало

ввод вручную произвольного текста (не содержащего знаки препинания). В третьем задании были доступны оба способа разметки.

В рамках каждого задания экспертам предлагалось девять текстов следующих функциональных стилей: газетная статья, художественный текст, научная статья (оценивались онлайн-сервисом «Худломер»[1]), таблица 1.

Таблица 1 – Состав заданий для разметки ключевыми словами

Вариант задания	Длина текста, слов		
	Публицистика	Художественный	Научный
1. Выбор КС	864	1245	783
	2233	1882	1105
	1254	884	967
2. Ввод КС	848	777	879
	1117	894	928
	2030	1070	1187
3. Выбор и ввод КС	1058	1152	1223
	1640	1053	1369
	1682	1209	1036

Пользователи выполняли все три задания последовательно с возможностью пропуска и возвращения к предыдущим текстам. Каждому заданию предшествовало краткое описание, которое намеренно не содержало термин «ключевое слово», его определение и характеристики. Вместо этого предлагалось выбрать слова (словосочетания) из текста, которые описывают его содержание. Причина – существование различных подходов к определению (полисемичность) и междисциплинарность термина.

Для участия в эксперименте были задействованы 24 размечающих (включая авторов работы), из них 19 студентов 3-5 курсов специалитета, пятеро с высшим образованием. Общее время эксперимента составило 18 дней. Чистое время, потраченное участниками на разметку – 5 дней и 12 часов. В итоге получены следующие предварительные статистические данные (таблицы 2 – 4).

Таблица 2 – Результаты разметки текстов способом выбора ключевых слов

Стиль	***N***	***M***	$M_{уд}$	***V***	$V_{уд}$
Публицистика	24	288	12	742	31
	24	318	13	960	40
	24	319	13	1037	43
Научные тексты	24	311	13	704	29
	24	275	11	624	26
	23	310	13	879	38
Художественные тексты	24	306	13	818	34
	24	385	16	1323	55
	24	258	11	592	25

Поясним обозначения столбцов и содержимое таблиц: N – это количество пользователей, разметивших конкретный текст; M – длина списка ключевых слов (фраз), назначенных данному тексту всеми участниками; $M_{уд}$ – средняя длина списка КС для данного текста; V – сумма элементов общего списка КС;

[1] http://teneta.rinet.ru:80/2000/hudlomer

$V_{уд}$ – средняя длина списка КС в словах. В таблице 4 для величин M и V нижние индексы обозначают способ разметки: 1 - выбором, 2 - вводом.

Таблица 3 – Результаты разметки текстов способом ввода ключевых слов

Стиль	***N***	***M***	$M_{уд}$	***V***	$V_{уд}$
Публицистика	23	191	8	527	23
	23	247	11	678	29
	23	333	14	1126	49
Научные тексты	23	174	8	409	18
	23	204	9	496	22
	23	179	8	547	24
Художественные тексты	24	215	9	518	22
	23	204	9	557	24
	23	226	10	660	29

Таблица 4 – Результаты разметки текстов смешанным способом

Стиль	***N***	***M***			***V***			$M_{уд}$	$V_{уд}$
		M_1	M_2	**Σ**	V_1	V_2	**Σ**		
Публицистика	23	202	72	274	697	179	876	12	38
	23	267	68	335	852	193	1045	15	45
	23	262	74	336	874	194	1068	15	46
Научные тексты	23	206	53	259	605	95	700	11	30
	23	107	91	198	216	263	479	9	21
	23	204	53	257	546	111	657	11	29
Художественные тексты	23	226	59	285	805	170	975	12	42
	23	168	74	242	566	194	760	11	33
	23	254	62	316	751	145	896	14	39

Отметим, что размеры списка КС, введенных вручную (M_2), кратно меньше того же списка, выделенного из текста (M_1). Похоже, что пользователи охотнее относят к ключевым присутствующие в тексте слова и словосочетания.

В процессе разметки производился учет затраченного времени на каждый обрабатываемый текст. Диапазон полученных значений оказался значительно выше ожидаемого – от 39 секунд до 6 часов. Видимо некоторые участники не читали тексты целиком (малое время) и имеются недоработки в системе хронометража. Для оценки скорости обработки текстов введен коэффициент K, рассчитываемый как отношение потраченного на разметку текста времени к его длине в словах. Гистограммы его значений в целом и отдельно для художественных и публицистических текстов приведены на рисунке 2. Количество столбцов рассчитывалось по формуле Фридмана-Диаконис (Fridman-Diakonis).

Визуальный анализ гистограммы позволяет говорить, что график плотности распределения островершинный с правосторонней асимметрией и тяжелым хвостом. Последнее обстоятельство связано с наличием экстремальных значений времени разметки, характеризующих несовершенство системы его измерения. В то же время имеется значительный процент малых значений, нехарактерный для предполагаемого логнормального распределения. Это позволяет говорить о наблюдаемой смеси распределений, вызванной наличием группы участников, систематически «недорабатывающих» задания.

Для очистки результатов и получения согласованного вариационного ряда в дальнейшем разумно отбросить экстремальные значения. Для фильтрации малых значений стоит воспользоваться оценками средней скорости вдумчивого чтения взрослого человека (порядка 200 слов/минуту) [3]. Тогда нижний порог для большинства текстов лежит в интервале 0.25 ... 0.3.

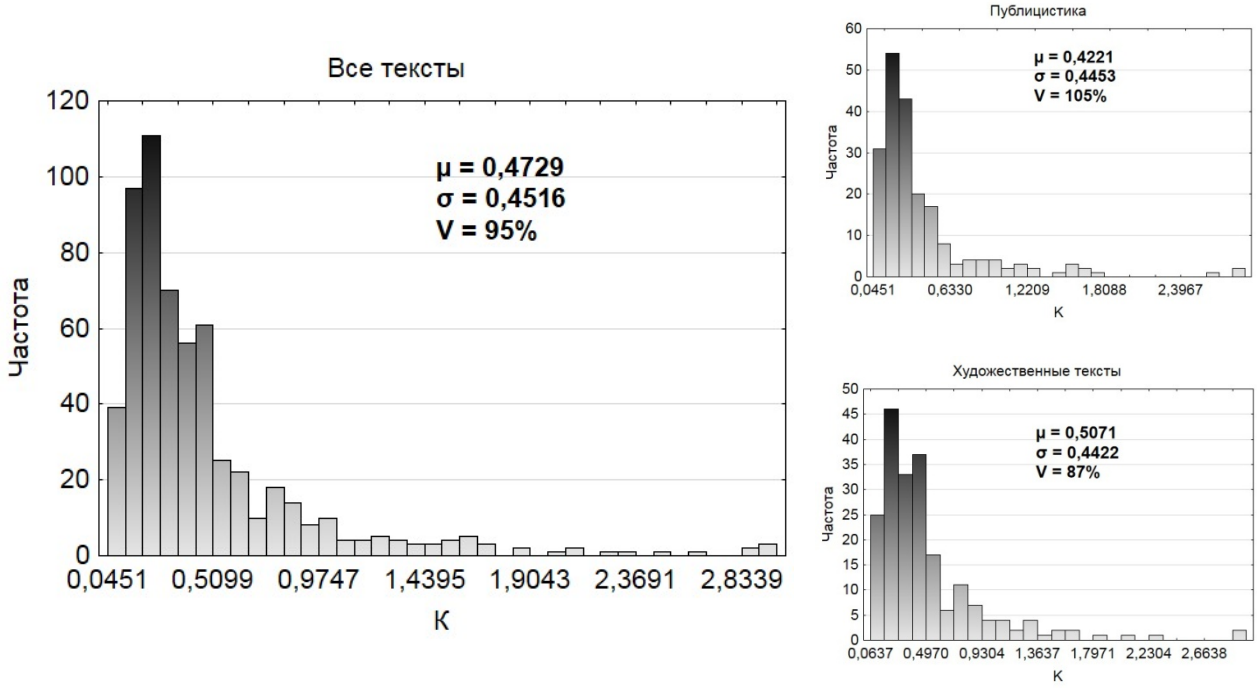


Рисунок 2 – Гистограммы коэффициента скорости разметки

В ходе тестирования были выявлены технические и организационные просчеты. Требуется обработка и интерпретация представленных данных, но предварительно можно сформулировать следующие основные выводы:

- экспертам необходимо предоставлять более подробное описание задания и его ограничений. Целесообразно наличие демонстрационного задания;
- при учете времени, затраченном на разметку, требуется осуществлять динамическую проверку активности пользователя;
- выделение слов из текста без ввода вручную выглядит более эргономичным и предпочтительным для пользователей;
- сложно организовать экспертов без финансовой составляющей. Следует совершенствовать систему мотивации участников и, возможно, сообщать участнику его текущий статус (уровень доверия к его деятельности);
- выбор веб-технологий для создания средства разметки оправдан, это позволило осуществлять работу экспертов из удобных им мест.
- последующий анализ полученных результатов позволит устранить имеющиеся недочеты и проблемы в функционировании системы разметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ванюшкин А.С., Гращенко Л.А. Оценка алгоритмов извлечения ключевых слов: инструментарий и ресурсы // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2017. – №. 20 – С. 95-102.

2. Ванюшкин А.С., Гращенко Л.А. О разметке корпусов текстов ключевыми словами // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2018. – №21. – С. 207-211.
3. Вормсбехер В.Ф., Кабин В.А. 100 страниц в час. – Кемерово: Кемеровское книжное издательство, 1980. – 144 с.
4. Sabou, M. et al. Corpus Annotation through Crowdsourcing: Towards Best Practice Guidelines // Proceedings of LREC'14 – 2014. – pp. 859-866.

УДК 523.03

МЕТОДИКА ВЫЯВЛЕНИЯ СОБЫТИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО МИКРОЛИНЗИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА АХРОМАТИЗМА ВРЕМЕННЫХ ВСПЛЕСКОВ МИКРОВОЛНОВОГО РЕЛИКТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ

В.Я. Варгашкин, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева»
e-mail: *finstp@bk.ru*

Разработана методика выявления событий гравитационного микролинзирования микроволнового реликтового излучения ранней Вселенной. Методика основана на статистическом анализе частотной независимости попадания скачков излучения в хвосты их распределений по различным направлениям небесной сферы. Выдвинуто предположение о физической обусловленности статистически значимых скачков анизотропии реализацией интегрированного либо неинтегрированного эффекта Сакса-Вольфа.

Ключевые слова: микроволновое реликтовое излучение, анизотропия, гравитационное микролинзирование, эффект Сакса-Вольфа, спутниковые измерения, кривые блеска, ахроматизм, статистические распределения, хвосты распределений, вероятность события.

1. Введение

Целью настоящего исследования явилась разработка методики поиска временной анизотропии микроволнового реликтового излучения Вселенной по данным зондов «*Wilkinson*» и «*Planck*», а также сравнительные анализ количества направлений небесной сферы, в которых возможно обнаружение временной анизотропии с использованием разрабатываемой методики. Идея разработки основана на частотно-независимом анализе хвостов распределений временных изменений анизотропии излучения.

Подобные изменения могут быть вызваны как случайными факторами, в частности, погрешностями измерения и шумами самой измерительной аппаратуры, так и последствиями протекания в космическом пространстве некоторых физических процессов, обусловливающих неслучайные изменения анизотропии с течением времени. К таким процессам могут быть отнесены неинтегральный, либо интегральный эффекты Сакса-Вольфа [1]. При этом кривая светимости является функцией времени, содержащей две ветви – восходящую и нисходя-

щую. Длительность выявленных событий гравитационного микролинзирования составляет от нескольких часов до нескольких недель.

Подробная карта распределения анизотропии реликтового излучения по небесной сфере была построена на основе спутниковых измерений с зонда «*Wilkinson*» («*WMAP*») в ходе его девятилетней работы (2001 – 2010 гг.) [2]. Измерения, проведенные зондом «*WMAP*», явились интегральными по циклам годичной длительности для частот 23; 33; 41; 61 и 94 *ГГц*. Последним по счету спутником, регистрировавшим микроволновое реликтовое излучение, был зонд «*PLANK*», функционировавший в 2009 – 2013 гг. с частотными измерительными диапазонами 30; 44; 70; 100; 143; 217; 353; 545 и 857 *ГГц* [3]. Измерения, выполненные зондом «*PLANK*», также явились интегральными по циклам полугодичной длительности.

В связи с тем, что как данные зонда «*Wilkinson*», так и данные зонда «*Planck*» обладают значительной степенью интегрированности, отследить события микролинзирования путем прямых измерений кривых изменения блеска линзируемых объектов применительно к анализируемым спутниковым экспериментам не представляется возможным. Рассмотрим методику выявления информации и событиях гравитационного микролинзирования путем статистического анализа ахроматизма временных изменений блеска излучения.

2. Процедура выявления событий гравитационного микролинзирования

Изменения светимости реликтового излучения в согласии с ходом кривой может обусловливать временные скачки измеряемых значений анизотропии излучения таким образом, что соответствующие изменения анизотропии окажутся в хвостах распределения. Пусть P_1 и P_2 – вероятности попадания измеренных значений изменения анизотропии излучения в какой-либо хвост распределения для частотных каналов f_1 и f_2 при измерениях в некотором, одинаковом для обеих частот, направлении небесной сферы.

Произведение вероятностей P_1 и P_2 характеризует теоретическое число направлений небесной сферы, в которых измеренные значения анизотропии оказываются в одних и тех же хвостах распределений, как на частоте f_1, так и на частоте f_2. В том случае, если экспериментально установленное число таких направлений оказывается близким их теоретическому числу, то можно сделать вывод о том, что временные изменения анизотропии обусловлены случайными факторами. Существенное отличие числа этих направлений от их числа, обусловленного произведением вероятностей P_1 и P_2, служит аргументом в пользу гипотезы о формировании скачков под воздействием физически обусловленных факторов на светимость излучения. В работе [6] показано, что анализ данных спутниковых измерений зонда «*Planck*» на частотных каналах 30 и 44 *ГГц* свидетельствует именно о существовании частотной независимости ряда временных изменений светимости микроволнового излучения, а следовательно, о физической обусловленности временных скачков анизотропии.

3. Проверка методики по базе данных зонда «Wilkinson»

Полученные данные нуждаются в проверке с использованием данных других спутниковых измерений, и, в частности, спутниковых измерений зонда «*WMAP*» [2]. Для выявления анализируемых изменеий были построены дифференциальные функции распределения анизотропии температуры *T* микроволнового реликтового излучения по имеющимся в базе данных зонда 12.582.912 направлениям небесной сферы (рис. 1).

Эти данные относятся к двум каналам спутниковых измерений, выполненных на частотах 33 *ГГц* (*а* и *в*) и 94 *ГГц* (*б и г*). Рисунки (*а)* и (*б)* соответствуют второму годичному измерительному циклу, а рисунки (*с)* и (*д)* – первому циклу.

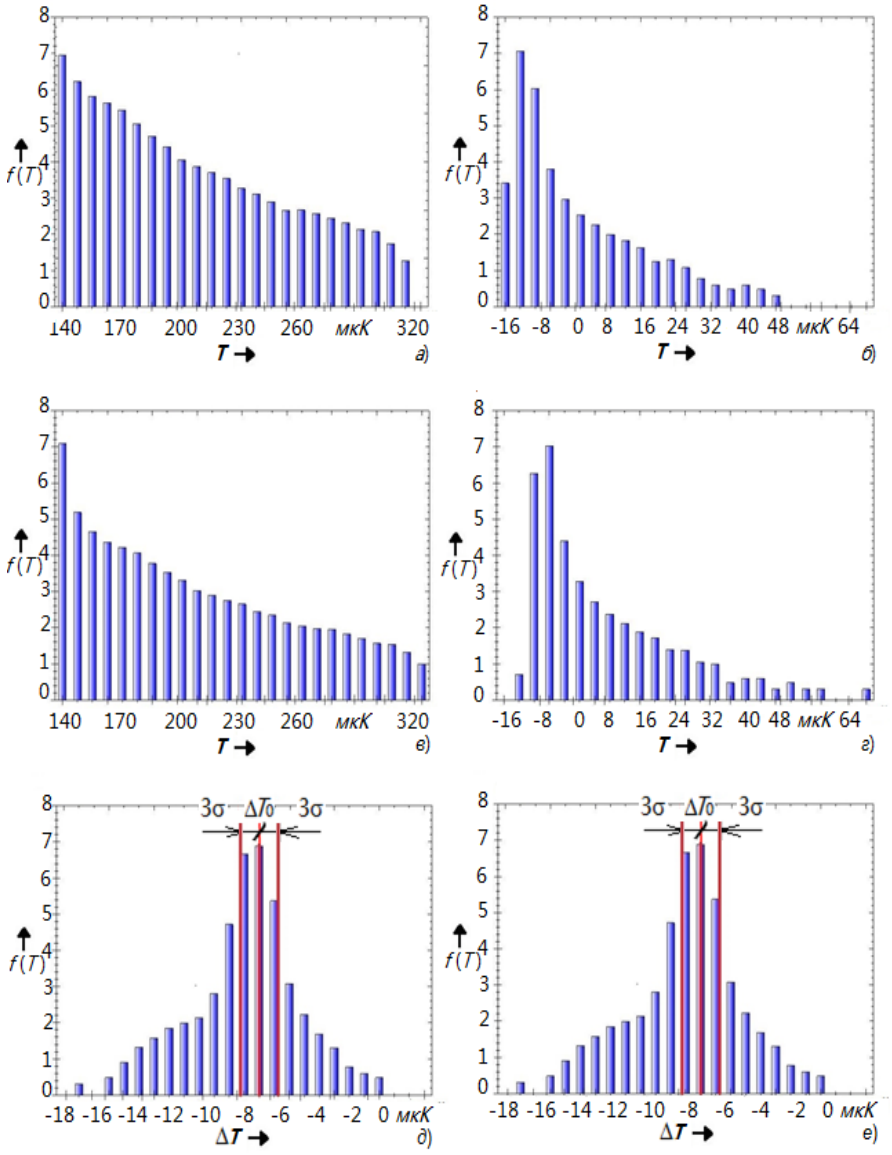


Рисунок 1 – Статистические распределения анизотропии температуры микроволнового реликтового излучения, измеренные зондом «*WMAP*» в ходе второго года полета (*а*) и (*б*); первого года полета (*в*) и (*г*), а так же рас пределения их соответствующих разностей (*д*) и (*е*) на частотных диапазонах 33 *ГГц* (*а*; *в*; *д*), а так же 94 *ГГц* (*б*; *г*; *е*)

По оси абсцисс на изображенных графиках отложены интервалы температурной анизотропии *T*, а по оси ординат отложены количества *f*(*T*) попаданий в тот или иной интервал. Ввиду того, что эти количества, в зависимости от зна-

чений T, изменяются от нескольких штук до сотен тысяч, оси ординат графиков отградуированы в логарифмическом масштабе единиц.

Анализ рис.1 (*д*) – (*е*) показывает, что среднее значения ΔT_0 изменения температурной анизотропии составляет –5,14408 *мкК* для частотного канала 33*ГГц* и –6,491 *мкК* – для 94 *ГГц*. Эти значения на рисунках представлены вертикальной линией обозначенной символом ΔT_0. При этом средние квадратические отклонения σ изменения анизотропии от среднего значения составляют 0,9332 *мкК* для частоты 33 *ГГц* и 0,3694 *мкК* для частоты 94 *ГГц* соответственно. На рисунках отложены также по две вертикальные линии, соответствующие трем средним квадратическим отклонениям σ температурной анизотропии ΔT от значения ΔT_0 в обе стороны температурной шкалы, то есть соответствующие значениям изменения анизотропии от –7,94368 *мкК* до –2,41128 *мкК* для частоты 33*ГГц* и от –7,5992 *мкК* до –5,3828 *мкК* для 94 *ГГц*.

Хвосты статистических распределений оказались расположенными по обе стороны от этих линий. Эти хвосты характеризуются таблицей. Ее вторые столбцы содержат количества измерений, приходящихся на левые, либо на правые хвосты распределений на той или иной частоте. Третий столбец содержит значения столбца 2, деленные на объем генеральной совокупности в 12.582.912 результатов измерений, то есть вероятности попадания одиночного результата в тот или иной хвост, относящийся к той или иной частоте в отдельности.

Таблица 1 – Характеристики хвостов распределений по рис. 1 (*д* - *е*)

Одночастотные измерения			Двухчастотные измерения		
Хвосты распределений	Количество результатов	Вероятность	Вероятность	Вероятностное количество	Экспериментальное количество
1	2	3	4	5	6
Зонд «*Wilkinson*»					
Частота 33 *ГГц*			Частоты 33 и 94 *ГГц*		
левый	3.913	$3{,}1\times10^{-4}$	$1{,}72\times10^{-6}$	22	35
правый	44	$3{,}50\times10^{-6}$	$3{,}34\times10^{-3}$	42.062	23.070
Частота 94 ГГц					
левый	69.507	$5{,}5\times10^{-3}$			
правый	7.614.577	0,61			
Зонд «*Planck*»					
Частота 30 *ГГц*			Частоты 30 и 44 *ГГц*		
левый	961.869	0,07644	0,001422	17.899	28.278
правый	2.485.610	0,19753	0,022053	277.501	152.204
Частота 44 ГГц					
левый	234.144	0,01860			
правый	1.404 793	0,11164			

Четвертый столбец таблицы 1 содержит произведение вероятностей P_1 и P_2, взятых для одинаковых хвостов по каждой из двух рассматриваемых частот f_1 и f_2, т.е. вероятности попадания результата измерений в хвосты распределений на обеих частотах. В пятом столбце содержатся произведения вероятностей

взятых из четвертого столбца и умноженные на объем генеральной совокупности, т.е. статистически обусловленные количества результатов измерения, которые должны попасть в тот или иной хвост одновременно на двух различных частотах. Шестой столбец содержит количества подобных попаданий, выявленных при анализе базы данных спутниковых измерений зонда «*WMAP*» [3].

Статистически значимое, лежащее в интервале 45…59 %, различие между числовыми значениями пятого и шестого столбцов таблицы свидетельствует о работоспособности разрабатываемой методики поиска временной анизотропии микроволнового реликтового излучения Вселенной по данным зонда «*WMAP*», основанной на частотно независимом анализе хвостов распределений изменения анизотропии излучения с течением времени. Таблица содержит данные, характеризующие временные скачки анизотропии излучения, которые получены в соответствии с разрабатываемой методикой обработки экспериментальных данных зонда «*Planck*» [5] на частотных каналах 30 и 44 *ГГц*.

Анализ полученных данных показывает, что разрабатываемая методика позволяет выявлять временные частотно-независимые скачки анизотропии микроволнового реликтового излучения, имеющие физическую обусловленность, и, в частности, являющиеся одной из реализаций эффекта Сакса-Вольфа. Их число в течение полугодичных либо годичных измерительных циклов может меняться с течением времени. Оно зависит от используемых пар частот излучения и может быть распределено по десяткам и сотням тысяч направлений небесной сферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sachs, R. K. Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background // Astrophysical Journal.-Vol. 147.- 1967.
2. LegacyArchiveforMicrowaveBackgroundDataAnalysis [Электронный ресурс] // lambda.gsfc.nasa.gov, URL:http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/dr5/pub_papers/nineyear/basic_results/w map_9yr_basic_results.pdf (англ.), (Дата обращения: 13 августа 2018 г.).
3. NASAOfficial [Электронный ресурс] // nasa.govURL: https:// www.nasa.gov/ mission_pages/planck/overview.html (англ.), (Дата обращения: 13 августа 2018 г.).
4. Vladimir Ya.Vargashkin. The analysis of frequency-independent jumps of CMB according to the «Planck» data (англ.) // Journal of Physics: Conference. Series 1051 (2018) / Proceeding of XX International Meeting «Physical Interpretations of Relativity Theory».- London (Great Britain): Institute of Physics published house, 2018.-PP. 012027: 1-10. Доступ: http://iopscience.iop.org /article /10.1088 /1742-6596/1051/1/012027/meta

О ПРОДУКТИВНОСТИ СПОСОБОВ УНИКАЛИЗАЦИИ ТЕКСТОВ

Л.А. Гращенко, к.ф.-м.н.
ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»
e-mail: *graschenko@mail.ru*
Д.А. Науменко
ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»
e-mail: *dima.naumenko.96@mail.ru*

В статье приводится результаты исследования продуктивности языковых способов (использование слов-синонимов, замена частей речи, замена конструкций предложений и их комбинаций) уникализации текста. С привлечением 15 экспертов получено 180 вариаций двух текстов разных функциональных стилей (художественный и научно-деловой). Наилучшими значениями уникальности (сравнение происходило с помощью алгоритма шинглов) обладает метод замены частей речи (78,9%) и его комбинация с методом использования слов-синонимов (85%).

Ключевые слова: рерайтинг, рерайт, стилистическое преобразование текстов, уникализация текста, парафраз, парафразирование.

В настоящее время наблюдается устойчивый интерес к явлению рерайтинга, связанный с ростом объемов ежегодно продуцируемой текстовой информации [2], вследствие чего возникает потребность в реализации программных решений в области обработки, в частности уникализации текстов на естественных языках, в основе которых лежит ряд базовых методов. В их числе – методы и приёмы рерайтинга.

Понятие «рерайт» широко используется в исследованиях, которые принадлежат различным, весьма далеким друг от друга областям знания — информатике и автоматической обработке текстов, литературоведению, лингвистике текста и другие. Принимая во внимание столь широкий разброс сфер использования данного понятия, Ю.Д. Апресян отмечает, что «необычайное разнообразие и разнородность перифраза создают трудности для его системного описания» [1]. В результате чего, на сегодняшний день не разработана удовлетворительная методика получения рерайта.

В связи с указанными особенностями, в данной работе предпринята попытка классифицировать методы и приёмы рерайтинга, а также определить наиболее продуктивные способы уникализации контента.

Как показывает анализ частоты употребления терминов «рерайт», «инвариант», «перифраз» и «парафраз» в русском и английском языках, проведенный с использованием on-line сервиса Books Ngram Viewer[2], в литературе термины стали активно обсуждаться с 1960 г., а максимум встречаемости приходится на середину 1990-2000 гг. что объясняется появлением Интернета и необходимостью наполнения оригинальным контентом новые сайты. Популярность этих понятий в русском языке значительно ниже, чем в английском. Что касается

[2] https://books.google.com/ngrams

предпочтений в употреблении терминов, в отечественной литературе термин «рерайт» не употребляется, значение этого понятия полностью отраженно в термине «парафраз».

Исходя из вышесказанного, существуют различия в отечественной и иностранной терминологии, по этой причине образовалось множество схожих понятий (рисунок 1).

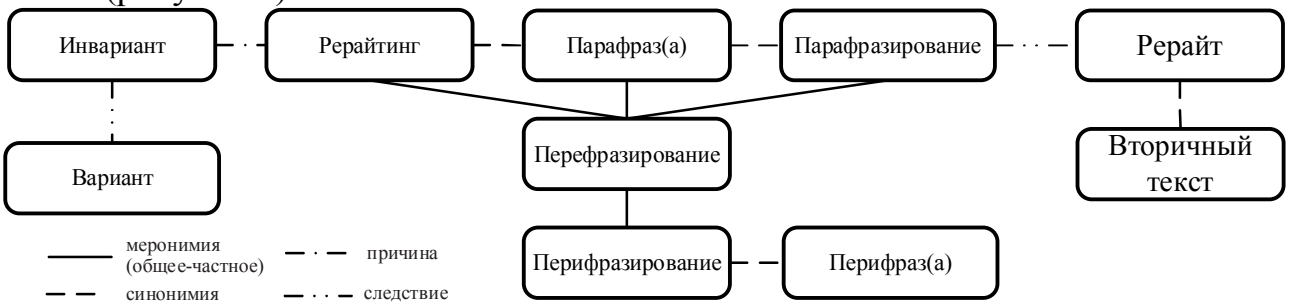


Рисунок 1 – Тезаурус предметной области

Рерайтинг — процесс создания уникального текста на основе уже существующего материала, сохраняя смысл текста оригинала. Отличие от «парафраз(а)» лишь в конечной цели преобразования: рерайтинг – предать уникальность, парафраз(а) – облегчить понимание материала или изменить литературную форму. Результатом рерайтинга называют рерайт.

Инвариант — абстрактное обозначение одного и того же текста (сущности) в отвлечении от его конкретных модификаций, отображающее общие свойства класса объектов, образуемого вариантами, и присущие каждому из вариантов. Варианты — его различные проявления [5].

Принципиальное различие понятий «парафразирование», «перефразирование» и «перифразирование» усматривается в типе первичной формы – слово (при перефразировании), фраза (при перефразировании), текст (при парафразировании) [2].

В результате рассмотрения литературы была составлена классификация рерайтинга, по различным признаковым группам (рисунок 2).

Отдельного внимания заслуживают языковые методы стилистического преобразования текстов, так как они являются наиболее гибкими и легкодоступными для применения [3].

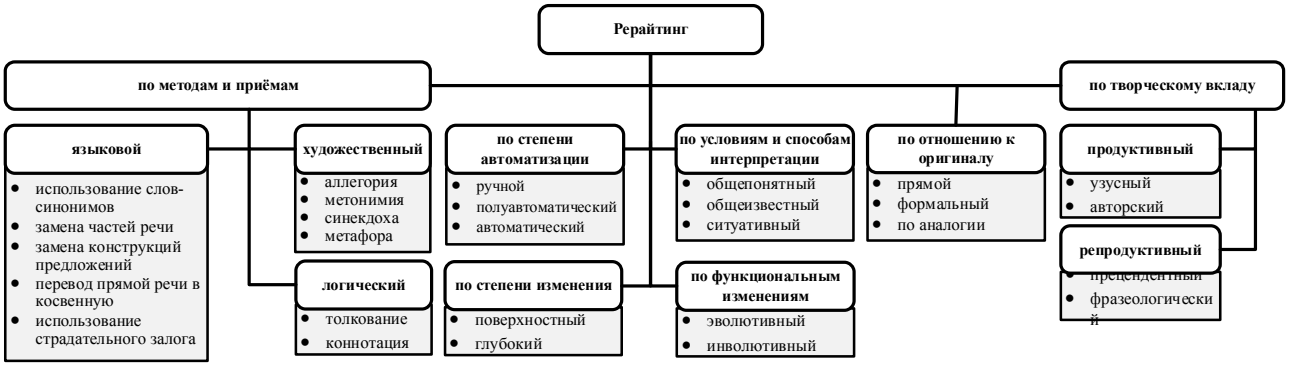


Рисунок 2 – Классификация рерайтинга

Использование слов-синонимов, является самым простым способом сделать рерайт – заменить синонимами столько слов в исходном тексте, сколько возможно. Замена одних частей речи другими позволяет изменить структуру предложения и придать тексту уникальность. Например, очень часто заменяют глагол на существительное и наоборот. В методе замены конструкций предложений изменение структуры текста происходит в делении предложения на более простые, или же наоборот, в объединении в сложные.

В ходе проведения эксперимента было использовано два текста, научного и художественного стилей, объемом 1000 слов (рисунок 3). Стиль текстов был проверен с помощью онлайн ресурса «Худломер»[3], отнеся первый текст к художественной литературе, а второй к научно-деловому стилю.

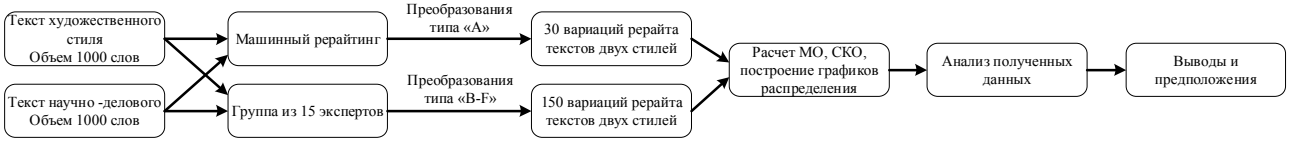


Рисунок 3 – Схема проведенного эксперимента

К исходным текстам были применены шесть групп преобразований: «A» - машинный рерайтинг, «B» - использование слов-синонимов, «C» - замена частей речи, «D» - замена конструкций предложений, «E» - комбинация методов B + C, «F» - комбинация методов B + D (таблица 1).

Таблица 1 – Временные затраты при преобразовании текста каждой группы

Группа	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Кол-во изменений в процентах	40-45	38-45	30-35	70-80	50-55	60-65
Трудоёмкость для 1 текста в минутах	1	40	60	20	10	10
Трудоёмкость для 30 текстов в минутах	30	1200	1800	600	300	300

Для группы «A» исходный текст был преобразован с помощью «синонимайзера»[4] - программа, позволяющая заменять слова или фразы в исходном тексте на синонимы в автоматическом режиме. На длине текста 100 слов производилось в среднем 45-50 преобразований.

При составлении экспериментальной выборки для групп текстов B-F, было задействовано 15 экспертов, каждый из которых производил данные преобразование над исходным текстом.

Таким образом, для эксперимента было подготовлено шесть групп двух текстов разных стилистик, в 15 различных вариациях, отличающихся от инварианта на величину (выраженную в процентах).

Итого: каждому эксперту потребовалось, при составлении 6 групп двух текстов разных стилистик, в среднем, 140 минут. Что свидетельствует о том, что для ручного рерайтинга, требуется существенно больше времени по сравнению с машинным.

Сравнение текстов (оригинала с рерайтом) происходило с помощью алгоритма шинглов, так как имеет лучшие показатели поиска нечетких дубликатов по сравнению с другими алгоритмами [6], при различном размере окна (N = 3,

[3] http://teneta.rinet.ru:80/2000/hudlomer
[4] http://online-sinonim.ru

4, 5). При этом стоит отметить, что распределение процента уникальности близко к нормальному закону распределения (рисунок 4).

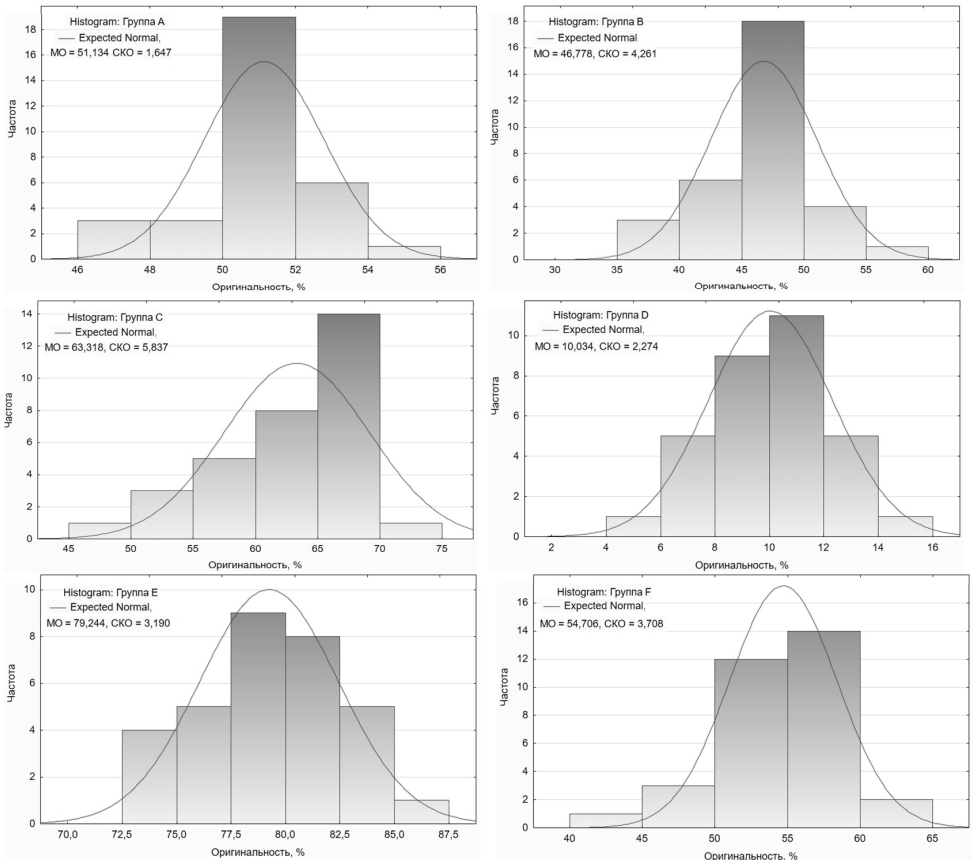


Рисунок 4 – Распределение показателя уникальности в группах рерайта

Сравнив между собой гистограммы оригинальности текстов в зависимости от тестовой группы и длины окна, для разных стилей текста, можно заметить, что стиль текста оригинала не влияет на оригинальность полученного рерайта. Наилучшие показатели уникальности достигаются при использовании глубокого рерайтинга - применение нескольких способов преобразования (рисунок 5).

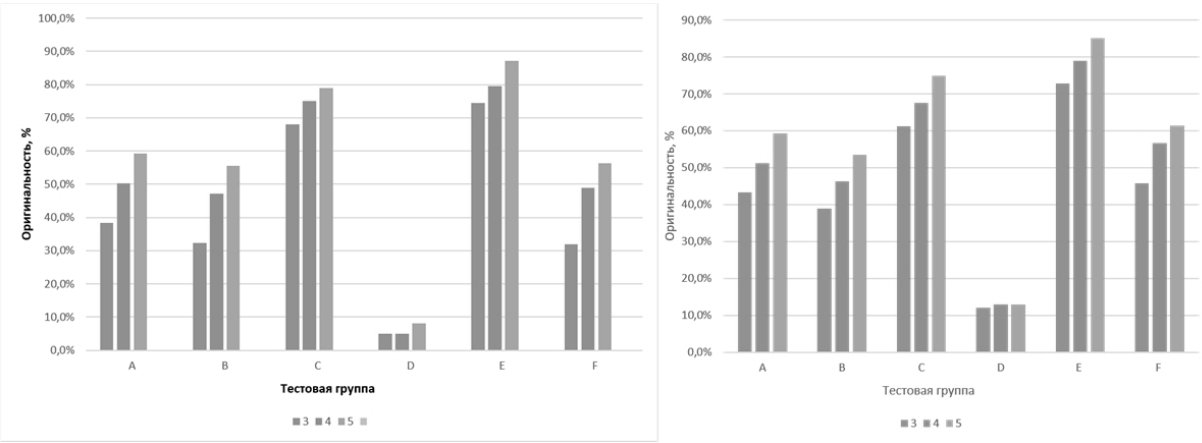


Рисунок 5 – Гистограмма оригинальности художественного текста по текстовым группам (слева – художественный текст, справа – научный)

Подобное исследование, представленное А.В. Адаменко [4] и его результаты тестирования значительно отличаются от оценок, полученных в данном исследовании. Причина – использование разных алгоритмов сравнения текстов.

Анализ приведенных предварительных результатов позволяет сформулировать следующие выводы:

1. потребность в автоматизации рерайтинга связана с постоянным ростом Интернет сайтов и необходимостью наполнения их оригинальным контентом;
2. наиболее продуктивными способами уникализации текста, является применение метода замены частей речи (78,9%) и его комбинация с методом использования слов-синонимов (85%), при этом в методе замены частей речи происходило меньше всего текстовых преобразований (примерно 30-35% на 1000 слов);
3. для стилистических преобразований в «ручном» режиме, требуется гораздо больше времени (в десятки раз), чем при автоматическом;
4. при использовании языковых способов преобразования стиль текста оригинала не влияет на оригинальность полученного рерайта;
5. полученные выводы носят предварительный характер. Требуется и планируется постановка более масштабных и выверенных экспериментов.

Следующим этапом в развитии теории и практики рерайтинга станет попытка решить задачу автоматизации метода замены частей речи с помощью лексико-синтаксических шаблонов на естественном языке.

С учётом приведённых положений, дальнейшая исследовательская работа будет направлена на реализацию программного стенда, с помощью которого планируется провести тестирование машинного рерайтинга и сравнение полученных результатов с уже существующими программными средствами уникализации текста.

ЛИТЕРАТУРА

1. Апресян Ю.Д., Цинман Л.Л. Перифразирование в модели «смысл-текст» // Семиотика и информатика. — М., 1998. — Вып. 36. — С. 77-202.
2. Богатова Е.Б. Типологизация перифраз с позиций деятельностной концепции // Вестник ЧитГУ. – 2011. – Вып. 5 – С. 34-40.
3. Ванюшкин А.С., Гращенко Л.А. Методы и алгоритмы извлечения ключевых слов // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2016. – №19. – С. 85-93.
4. Гращенко Л.А., Адаменко А.В. Оценивание чувствительности алгоритма извлечения ключевых слов TextRank к структурным преобразованиям входного текста // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2017. – №20. – С. 144-147.
5. Грязнова В.М. Понятие инварианта в лингвистике: история вопроса и современное состояние // Наука. Инновации. Технологии. – 2009. – №6. – С. 183–190.
6. Зиберт А.О., Хрусталев В.И. Разработка системы определения наличия заимствований в работах студентов ВУЗа. Алгоритмы поиска нечетких дубликатов // Universum: технические науки. – 2014. – №3(4). – С. 5.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ДОСТУПНЫХ СЕРВИСОВ МАШИННОГО ПЕРЕВОДА С КИТАЙСКОГО ЯЗЫКА НА РУССКИЙ

Л.А. Гращенко, к.ф.-м.н.
ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»
e-mail: *graschenko@mail.ru*
А.В. Федоров
ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»
e-mail: *fedorovalexacc@gmail.com*

В статье приводятся результаты автоматизированного оценивания качества машинного перевода текстов семью популярными онлайновыми системами с китайского языка на русский. Количественные оценки получены для коллекции из 33 двуязычных новостных текстов портала CHINA.COM на основе метрики BLEU. Наилучшие полученные значения (17,6% для сервиса Яндекс.Переводчик) недостаточны для практического использования существующих систем для рассматриваемой языковой пары.

Ключевые слова: машинный перевод, метрика BLEU, китайско-русская языковая пара, оценка качества перевода, эталонный перевод.

Общение в современном мире вышло на совершенно новый, глобальный уровень. Информационные системы и технологии прочно вошли во все сферы жизни человека. Благодаря новейшим разработкам обмен информацией упростился и ускорился. Однако проблемы коммуникации не устранены полностью. По-прежнему наблюдаются языковые барьеры между представителями народов, чьи языки относятся к разным языковым семьям. Вкупе с лавинообразным увеличением объемов продуцируемых текстов, эти факторы выступают информационными барьерами во взаимодействии русского и китайского народов, пространственно близких, но далеких в языковом смысле. Проводниками в межъязыковой коммуникации издревле выступали переводчики [1], однако интерес и должная оценка их деятельности в отечественных публикациях проявились лишь в последнее столетие, в чем можно убедиться с помощью сервиса Google Books Ngram Viewer[5] (рисунок 1).

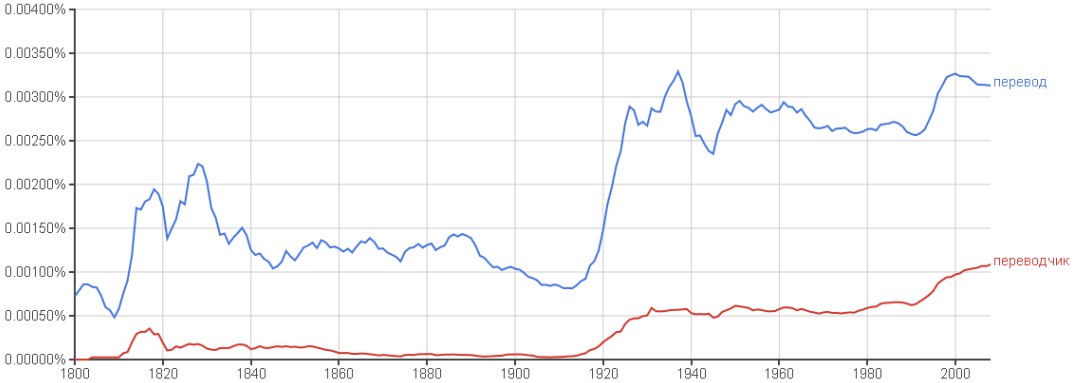


Рисунок 1 – Встречаемость слов «перевод» и «переводчик» в русскоязычных книгах в различные периоды

[5] https://books.google.com/ngrams

Актуальность разработки системы машинного перевода с китайского языка на русский была показана ранее [3]. Однако в связи с активным развитием переводческой деятельности, возрастают потребности в оценке этой самой деятельности. При этом оценка, выполненная ранее, наглядно не показывает состояние машинного перевода.

Переводческая деятельность по сути своей является информационной деятельностью по переработке (преобразованию) информации из одного вида в другой. Логично, что улучшать данную деятельность следует путем использования информационных систем, а точнее, с помощью машинных переводчиков, электронных словарей и систем автоматизированного перевода.

Качество перевода в системах автоматизированного перевода, в отличие от систем машинного перевода, в основном зависит от квалификации переводчика. Однако именно использование автоматизации, в конечном итоге, позволяет снизить стоимость перевода и, при наличии необходимых информационных ресурсов, уменьшить время перевода.

Анализаторы качества перевода используются в сложных системах машинного перевода, позволяя системе автоматически оценивать качество своей работы. Стоит заметить, что наука о переводах не располагает единой утвержденной системой оценки качества, однако анализ литературы показал, что в большинстве своем оцениваются такие параметры как точность перевода и эквивалентность перевода исходному тексту [2].

В переводоведении существует три основных подхода к оценке качества машинного перевода: экспертная оценка, оценка путем использования автоматических референсных метрик и гибридные методы [2].

Использование метода экспертных оценок не требует образца перевода и показывает абсолютный уровень качества перевода системы, однако имеет ряд недостатков, таких как трудоемкость, дороговизна и нестабильность результатов. Эксперт в процессе своей деятельности по оцениванию качества может устать, утомиться, что в свою очередь отразится на результатах.

Использование референсных метрик потребует обязательного наличия образца перевода и, в отличие от экспертной оценки, покажет лишь относительный уровень качества. При этом референсные метрики не способны анализировать семантику переведенного текста.

Гибридные способы оценки сочетают в себе лучшие стороны вышеописанных способов. Позволяют эксперту работать быстрее – предлагая подсказки, контролируют его деятельность, используя элементы автоматического контроля, таким образом, повышается стабильность результатов оценки и уменьшается её стоимость.

Для того чтобы выполнить оценку текстов была выбрана метрика BLEU [5, 6, 7]. Подробное описание метрики, её достоинства и недостатки были описаны ранее в других работах [2, 4, 8].

Очевидно, что метрика BLEU не выполняет оценку с той же точность, что и экспертная оценка. Метрика не способна оценить качество на уровне семантики, взаимосвязанность предложений. Однако её использование оправдано меньшими затратами по сравнению с экспертной оценкой.

Основная идея оценки с помощью данного подхода – это вычисление лексической точности перевода машиной по сравнению с человеком. В процессе оценки вычисляется точность n-грамм, добавляя балл в конечный результат. В базовом виде для расчета используется формула 1 [8]:

$$P = \frac{m}{w_t}, \tag{1}$$

где m – количество общих для экспертного и машинного перевода слов, а w_t – общее количество слов в экспертном переводе.

Однако наравне с классическим способом вычисления оценки, также используется способ, при котором оценка вычисляется не с использованием отдельных слов, а учитывая их объединение в n-граммы, формула 2 [8]:

$$p_n = \frac{\sum_{C \in \{Candidates\}} \sum_{n-gram \in C} Count_{clip}(n-gram)}{\sum_{C' \in \{Candidates\}} \sum_{n-gram' \in C'} Count(n-gram')}, \tag{2}$$

Для оценки текущего состояния машинного перевода был проведен вычислительный эксперимент. В ходе эксперимента сравнивались тексты переведенные человеком и системами машинного перевода с китайского языка на русский.

В качестве систем машинного перевода были выбраны популярные системы китайско-русского перевода, которые осуществляли оригинальную выдачу результатов и являлись бесплатными для некоммерческого использования: Google Переводчик[6], Microsoft Translator[7], M-Translate[8], PerevodSpell[9], PROMT онлайн[10], Transër[11], Яндекс.Переводчик[12].

Задача поиска параллельных китайско-русских текстов является проблемной. В открытом доступе сложно найти статьи, выложенные на двух языках одновременно. Также проблемы создают особенности китайского сегмента сети интернет, а именно долгое ожидание доступа к контенту, либо отсутствие возможности как таковой. После продолжительных поисков был найден новостной портал, публикующий статьи на китайском и русском языках. Таким образом, в качестве источника параллельных текстов использовались данные новостного агентства china.com[13].

В итоге, было сформировано 33 коллекции. Каждая коллекция содержит: новостную статью на китайском языке, новостную статью на русском языке, 7 переводов выполненных в выбранных системах машинного перевода. Всего сравнению и оценке подлежали 264 текста. Средняя длина текстов - 1752 символа (стандартная машинописная переводческая страница – 1800 символов).

[6] https://translate.google.com
[7] https://www.bing.com/translator
[8] https://www.m-translate.com
[9] https://www.perevodspell.ru/perevodchik/kitajskij/na-russkij.htm
[10] https://www.translate.ru
[11] https://transer.org
[12] https://translate.yandex.ru
[13] https://china.com

На основе сформированных комплектов были получены оценки BLEU. Также были получены результаты промежуточных вычислений для n-gram. Результаты представлены в таблице 1 и на рисунке 2.

Таблица 1 – Результаты промежуточных вычислений BLEU по n-граммам

Название системы	**n = 1**	**n = 2**	**n = 3**	**n = 4**
Google Translator	0,5018	0,1225	0,0500	0,0236
Yandex.Translator	0,4995	0,1256	0,0524	0,0265
M-Translator	0,4984	0,1203	0,0485	0,0227
Transer	0,4715	0,0896	0,0271	0,0090
Microsoft Translator	0,4614	0,0932	0,0340	0,0127
PROMT	0,4562	0,0826	0,0233	0,0082
PerevodSpell	0,4561	0,0960	0,0345	0,0147

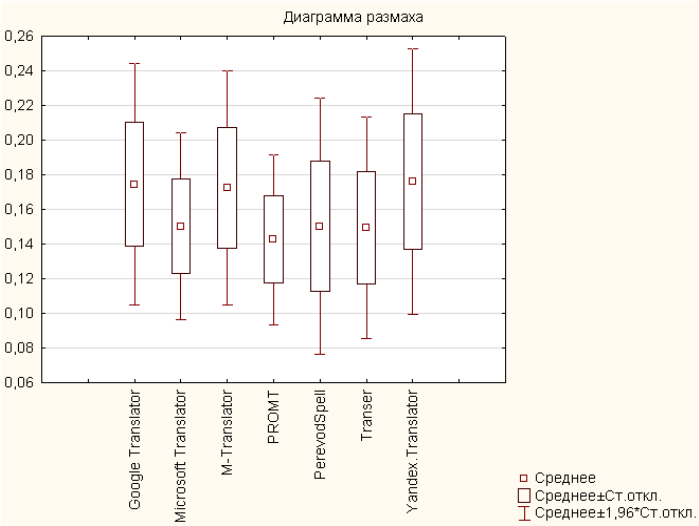


Рисунок 2 – Результаты оценивания выбранных машинных переводчиков по метрике BLEU

Полученные значения следует сравнивать со следующими значениями: BLEU > 0.3 – возможно понять смысл текста [4]; BLEU > 0.5 – хороший и гладкий перевод [4]; BLEU > 0.74 – перевод точен и качественен [9]. Оценки, полученные для текстов выше 0.74, характерны для переводов выполненных человеком (для английского языка).

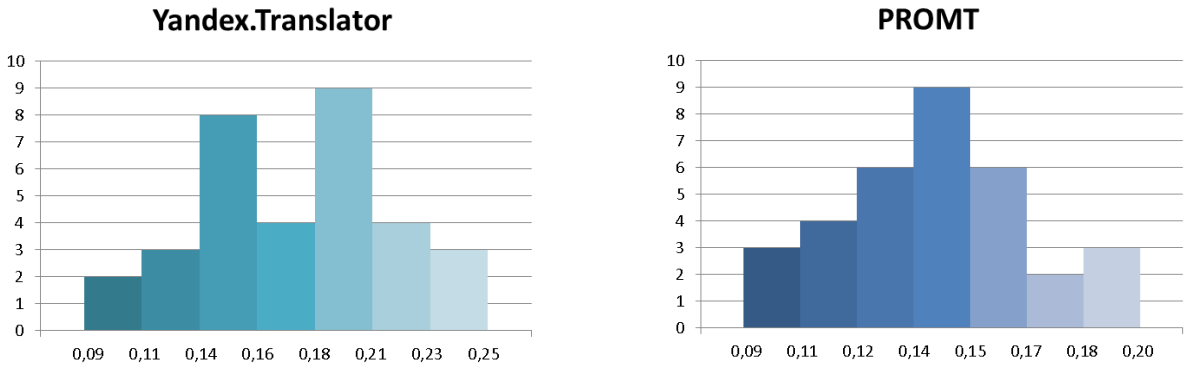


Рисунок 3 – Типовое распределение значений метрики BLEU для двух систем

Из рисунка 2 видно, что во всех случаях BLEU < 0.3, вероятно смысл текста не всегда передан правильно. Аналогичный эксперимент был проделан для китайско-английской пары, при этом был получен результат BLEU 35.7% [7]. Из результатов видно, что оценка BLEU не превышает 0,18, что кратно меньше требуемых 0,74. Авторский пословный анализ также показал недостаточную адекватность результата машинных переводчиков.

Таким образом, на данный момент машинный перевод, выполненный с китайского языка на русский язык, требует обязательной постобработки экспертом. В дальнейшем для получения более точных оценок, стоит увеличить количество комплектов и повторить эксперимент.

Само по себе оценивание работы систем машинного перевода без проведения дополнительных исследований имеет ограниченную применимость, так как не позволяет выявить конкретный перечень возникающих при переводе проблем. Тем не менее, использование общепринятых апробированных на практике метрик для сравнения систем машинного перевода характеризует уровень развития этих систем. Очевидно, что для рассматриваемой языковой пары этот уровень пока невысок. В дальнейшем с привлечением профессиональных лингвистов предполагается выполнить переводоведческий анализ результатов работы сервисов машинного перевода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушинский А.А. К проблеме методологических предпосылок адекватного перевода: стиль мышления китайцев и их языковая картина мира // Вестник РУДН. – 2012. – № 4. – С. 57-76.
2. Улиткин И.А. Автоматическая оценка качества машинного перевода научно-технического текста // Вестник Московского государственного областного университета. - Серия: лингвистика. – 2016. - № 4. – С. 174-182.
3. Федоров А.В. Информационные основы машинного перевода с китайского языка на русский / А.В. Федоров // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2018. – № 21. – С. 156-162.
4. Alon L. Evaluating the Output of Machine Translation Systems // 13th MT Summit Tutorial. – 2011. – 86 p.
5. Callison-Burch C., Osborne M., Koehn P. Re-evaluating the Role of BLEU in Machine Translation Research // In EACL. – 2006. – pp. 249-256.
6. Kishore P., Salim R., Todd W. Bleu: a Method for Automatic Evalution of Machine Translation // Proceedings of the 40th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL). – 2002. – pp. 311-318.
7. Marta R., Carlos A., Rafael E. Evaluating Indirect Strategies for Chinese-Spanish Statistical Machine Translation. // Journal of Artificial Intelligence Research. – 2012. – pp. 761-780.
8. Papineni K., Roukos S., Ward T. Bleu: a Method for Automatic Evaluation of Machine Translation. Technical Report RC22176 (W0109-022). – 2001. – 10 p

9. Tab L., Dehdari J. An Awkward Disparity between BLEU / RIBES Scores and Human Judgements in Machine Translation // Workshop on Asian Translation (WAT2015). – 2015. – pp. 74-81.

О НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЯХ РУССКОЯЗЫЧНЫХ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ОПИСАНИЙ

Л.А. Гращенко, к.ф.-м.н.
ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»
e-mail: *graschenko@mail.ru*
Н.В. Черкасов
ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»
e-mail: *nikitacherkasov@icloud.com*

В статье приводятся результаты исследования статистических особенностей русскоязычных библиографических описаний, оформленных в соответствии с ГОСТ 7.1-2003. В результате вычислительного эксперимента на представительной коллекции электронных текстов показано, что длины библиографических описаний трех видов изданий (статей, книг и электронных публикаций) описываются лог-нормальными распределениями. Средняя длина описания статьи составляет 126 символов.

Ключевые слова: извлечение библиографии, именованные сущности, библиографическое описание, обработка текстов на естественном языке

В настоящее время существует множество международных стилей оформления публикаций, основными из которых являются: BSI (Гарвардский), AMA (American Medical Association), ASA (American Sociological Association), Chicago (Chicago Manual of Style), MLA (Современная языковая ассоциация), ГОСТ 7.1-2003. В данной работе за основу был взят ГОСТ 7.1-2003 т.к. исследование проводится с русскоязычными текстами, которые должны быть оформлены по правилам именно этого ГОСТа.

В соответствии с ГОСТ 7.1-2003 библиографическое описание содержит библиографические сведения о документе, приведенные по определенным правилам, устанавливающим наполнение и порядок следования областей и элементов, и предназначенные для идентификации и общей характеристики документа. В свою очередь, данное понятие входит в структуру библиографии, что показано на рисунке 1.

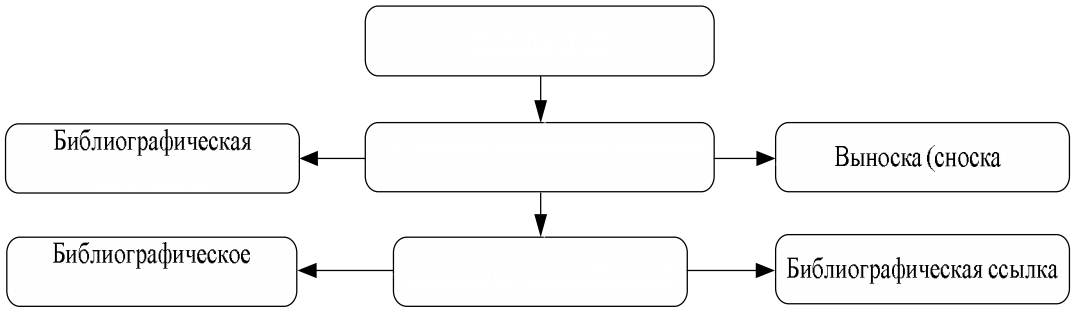


Рисунок 1 – Структура библиографии (источник: [4])

В статье [3] определяется возможность трактовки понятия библиографического описания как последовательности именованных сущностей, рисунок 2.

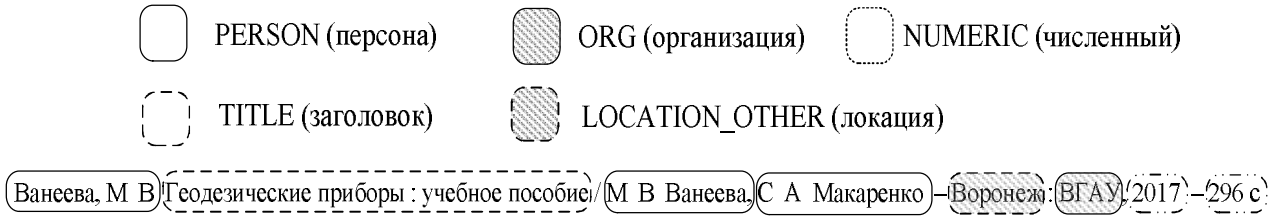


Рисунок 2 – Элементы библиографического описания как именованные сущности (разработан авторами)

Выделение именованных сущностей является одной из ключевых задач извлечения информации, извлечения структурированных данных из неструктурированных документов. Ее суть - найти в тексте названия, идентификаторы объектов определенного типа, это могут быть фестивали, продукты и т.д. Впервые задача была сформулирована еще в 1996 году на Message Understanding Conference, где в качестве сущностей рассматривались: организации, места, люди и некоторые числовые выражения [1].

Процесс выделения именованных сущностей состоит из 3 этапов: поиск именованной сущности, определение ее границ и определение ее типа.

Полученные за время существования задачи выделения именованных сущностей теоретические и практические результаты могут быть применены к разработке алгоритмов автоматического извлечения библиографической информации из текстов [3], использование которых возможно в решениях задач автоматического рецензирования [5] и в системах квалиметрии научных и учебных работ [2].

Для применения алгоритмов выделения именованных сущностей необходимо опираться на статистические свойства исследуемого объекта. В связи с этим, основной целью работы являлось исследование статистических особенностей библиографических описаний, а также определение направления дальнейших исследований, основываясь на полученных результатах.

На данный момент существует возможность решить задачу выделения именованных сущностей при помощи использования регулярных выражений, метода опорных векторов, скрытых Марковских моделей, деревьев принятия решений, байесовского классификатора. Основным недостатком многих методов является то, что они исходят из предположения о независимости именованных сущностей. На самом же деле они зависят от соседних слов, например, New York – место, а New York Times – организация [6].

В статье [3] рассматривается извлечение библиографических описаний с использованием метода, основанного на регулярных выражениях. Они применяются для определения соответствия блока текста признакам именованной сущности в соответствии с определенными шаблонами, в состав которых входят специальные символы.

Данный метод может быть оптимизирован путем определения вторичных признаков, присущих библиографическим описаниям, таких как: средняя длина

библиографического описания и частота встречаемости знаков пунктуации в тексте и библиографическом описании.

Определение статистики длин библиографических описаний было проведено на коллекции научных статей, которой сопоставлены ~400000 библиографических описаний, полученных из крупнейшего научно-образовательного ресурса российского сегмента сети Интернет[14]. Выбор сайта обусловлен тем, что в нем имеется встроенная функция цитирования, которая возвращает библиографическое описание на соответствующую статью (книгу). Встречаемость знаков пунктуации определялась на основе 10000 статей. Для обеспечения полноты результатов дополнительно исследовалось распределение длин библиографических описаний книг и электронных изданий на основе ~10000 описаний.

Из-за отсутствия готовых решений задачи парсинга, он осуществлялся при помощи Python 3.7, а также следующих установленных библиотек: BeautifulSoup, Requests. Обработка результатов (построение графиков, гистограмм, проверка гипотез о виде распределения, определение параметров распределений) осуществлялась при помощи программных пакетов Statistica 12 и MATLAB R2018a.

На первом этапе были проведены исследования по определению длин библиографических описаний в символах. В статье [3] была выдвинута гипотеза о том, что распределение длин библиографических списков описывается логнормальным законом. По результатам эксперимента было определено, что средняя длина библиографического описания составляет 126 символов. Решение относительно логнормального вида распределения было проверено с помощью теста Колмогорова-Смирнова с уровнем значимости 0.95 в ПО Statistica 12. Для длин библиографических описаний статей в периодических изданиях установлены параметры распределения LN(4.78, 0.13), а для книг и электронных изданий - LN(4.82, 0.12), рисунок 3.

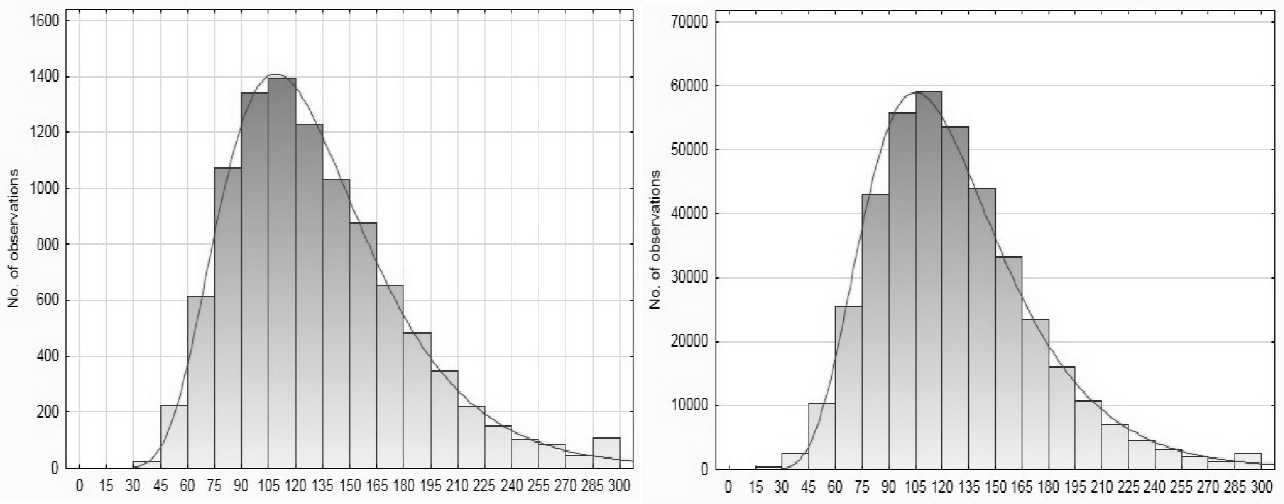


Рисунок 3 – Распределение длин библиографических описаний: слева – статей, справа – книг и электронных изданий (разработан авторами)

[14] https://cyberleninka.ru/

Полученные результаты можно использовать при реализации способа локализации библиографических описаний в тексте на основе «скользящего окна», размер которого следует определить эмпирически (но в качестве исходного размера можно выбрать значение 250 символов). Оценка достоверности локализации может проводиться на основе частоты встречаемости знаков пунктуации, так как предполагается, что в пределах библиографических описаний она значимо выше, чем в целом по тексту. Соответственно, задача второго этапа состояла в подсчете статистики для них. Стоит отметить, что в качестве знаков пунктуации выбирались точки и запятые.

Результаты эксперимента представлены на рисунке 4.

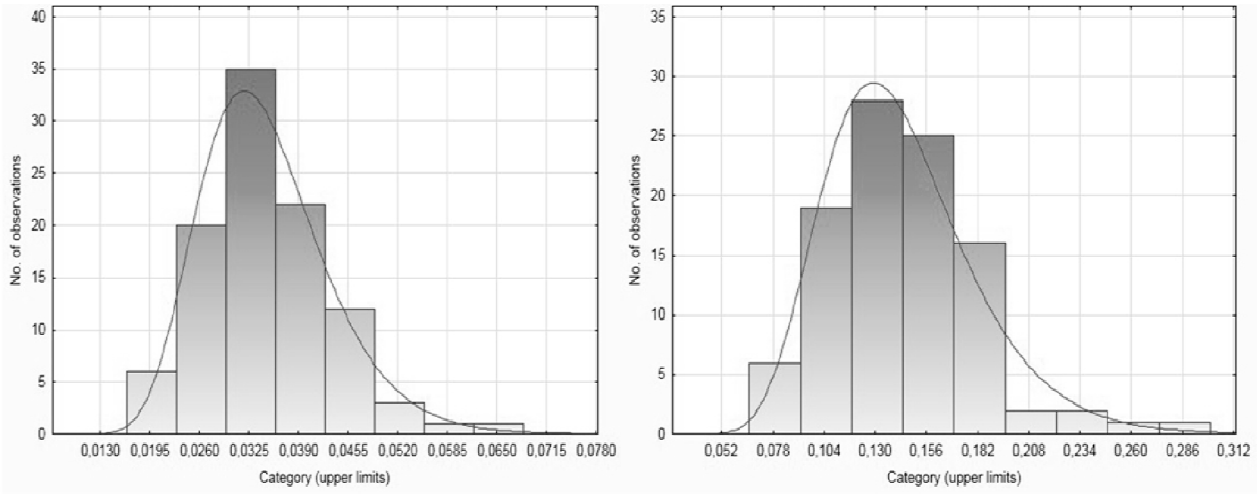


Рисунок 4 – Частоты встречаемости знаков пунктуации в текстах научных статей (слева) и библиографических списков (справа) (разработано авторами)

Частота встречаемости знаков пунктуации в обоих случаях подчиняется логнормальному закону, но с различными параметрами математического ожидания и среднеквадратического отклонения. Для случая с анализом текстов без библиографических описаний распределение имеет вид LN(-3.4, 0.25), а для второго случая LN(-1.96, 0.28). Для решения задачи классификации (относится ли фрагмент текста к библиографическому описанию или нет) определим порог принятия решения, рисунок 5.

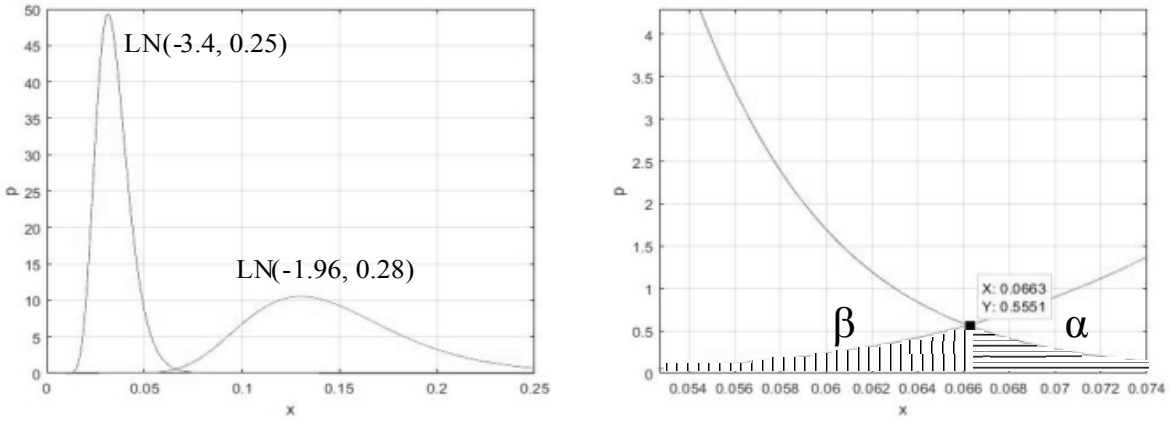


Рисунок 5 – Функции плотности вероятности встречаемости знаков пунктуации в текстах и библиографических списках (слева) и справа – точка их пересечения (разработано авторами)

Этой точкой будет являться точка пересечения огибающих двух распределений. Таким образом, значение порога равно 0,0662. Также в ходе эксперимента была произведена оценка ошибок первого и второго рода. Вероятность ложного срабатывания (ошибки первого рода α, горизонтальная штриховка на рисунке 5) составляет 0,0031, вероятность пропуска цели (ошибки второго рода β, вертикальная штриховка на рисунке 5) составляет 0,0035. В зависимости от решаемой задачи, данная точка может смещаться как для уменьшения ошибок первого рода, так и для уменьшения ошибок второго рода.

Описанные в работе результаты вычислительных экспериментов позволяют сделать следующие предварительные выводы:

– статистические параметры распределения длин библиографических описаний можно использовать для задания начального значения при определении оптимального размера скользящего окна для решения задачи локализации библиографических описаний в текстах;
– для оценки достоверности локализации библиографических описаний могут использоваться полученные результаты частот встречаемости знаков пунктуации. Оценка может осуществляться в соответствии с вычисленными параметрами ошибок первого и второго рода, варьирование которых может производиться в зависимости от практических нужд;
– необходимо проведение дальнейших исследований с учетом того, что зачастую авторами статей или редакционными политиками издательств игнорируются требования ГОСТ 7.1-2003;
– полученные оценки средней длины библиографического описания согласуются с ранее проведенными исследованиями [3];
– при использовании метода скользящего окна для извлечения библиографических описаний важным моментом является расчет коэффициента перехлеста для выделения библиографических описаний. При выборе малых значений коэффициента перехлеста возможно возникновение ошибок первого рода, а при использовании больших значений скорость работы алгоритма будет снижаться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ткаченко М.В. Метод выделения именованных сущностей на основе Википедии: дипломная работа. - СПб.: СПбГУ, 2011. – 36 с.
2. Гращенко Л.А., Романишин Г.В. Опыт автоматизированного анализа повторов в научных текстах // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2015. – №18. – С. 582-590.
3. Колмогорцев С.В., Сараев П.В. Извлечение библиографии из текстов регулярными выражениями // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2017. – №20. – С. 82-88.
4. Логунова О.С., Ильина Е.А., Попов С.Н. Онтология понятийного аппарата для обработки библиографической информации // Онтология проектирования. – 2016. – №4 (22). – С. 514-524.

5. Гращенко Л.А., Романишин Г.В. Библиографические ссылки как фактор квалиметрии научных текстов // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2017. – №20. – С. 89-94.
6. Ермакова Л.М. Методы извлечения информации из текста // Вестник Пермского университета. – 2012. – №1. – С. 80-82.

К ВОПРОСУ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА РАСПОЗНАВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ПРЕПЯТСТВИЙ

В.И. Дорофеева
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *vdorofey@mail.ru*
Н.А. Емельянов
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *emelyanovnikolay57@gmail.com*

В статье описывается один вариант решения проблемы распознавания поверхностей и препятствий с использование алгоритма A*. Приводится пример использования разработанного программного обеспечения.

Ключевые слова: распознавание поверхностей и препятствий, алгоритм решения, графы.

В современном мире особой востребованностью пользуются задачи о поиске пути, которые позволяют построить математические модели для описания движения искусственного интеллекта по заданному пути. Одними из наиболее востребованных являются задачи, описывающие движение объекта в 3-х мерном пространстве с наличием факторов, влияющих на перемещение от начальной до конечной точки. При учете объектов, стоящих на пути движения искусственного интеллекта, вычисляется наименьшая стоимость из всех возможных путей и выбирается оптимальный путь. Сложность задачи обуславливается анализом типов встречающихся препятствий на пути алгоритма их преодолением.

Одним из способов анализа препятствий является создание динамического графа, содержащего информацию об их местоположении. Граф, как и путь на нем, генерируется автоматически в области движения искусственного интеллекта.

Актуальность работы подкреплена нарастающей потребностью оценки наикратчайшего пути с учетом факторов, влияющие на движение. Данный вид задачи найдет применение как теоретическое, так и практическое в разработке игр, программ, а также все более популярных в данное время алгоритмах планирования для механизмов под управлением искусственного интеллекта.

Ключевая идея всех алгоритмов заключается в том, что отслеживается состояние расширяющегося кольца, которое называется «границей». В сетке этот процесс иногда называется заливкой, но та же техника применима для поиска препятствий. Принцип реализации заключается в повторении шагов до тех

пор, пока граница не окажется пустой. Необходимо выбирать и удалять точку из границы, отметить ее как посещённую, чтобы знать, что не нужно обрабатывать её повторно. Расширяем границу, глядя на её соседей. Всех соседей, которых мы ещё не видели, добавляем к границе.

Данный способ подходит для поиска пути на статически заданной поверхности. Поэтому кроме стандартного метода необходимо разработать способ поиска пути на графе с динамически изменяемой информацией. Решение кроется в методе совмещение двух алгоритмов поиска для решения задачи о поиске пути на графе в 3-х мерном пространстве с учетом поверхностей и препятствий.

Помимо выбора метода решения данной проблемы, необходимо было уделить внимание выбору современного средства, способного в процессе счета обеспечить высокую скорость и точность решения при работе с большим объемом динамической информации. Исходя из рассуждений, был выбран визуальный язык программирования – Blueprint и среда разработки Unreal Engine 4 [1].

В качестве основного алгоритма был выбран алгоритм A*, который пошагово просматривает все пути, ведущие от начальной вершины в конечную, пока не найдёт минимальный [2]. Описанный способ хорошо показывает себя при создании графа на 3-х мерном ландшафте на котором можно задать не типы препятствий, а типы проходимых поверхностей на участках ландшафта (рисунок 1).

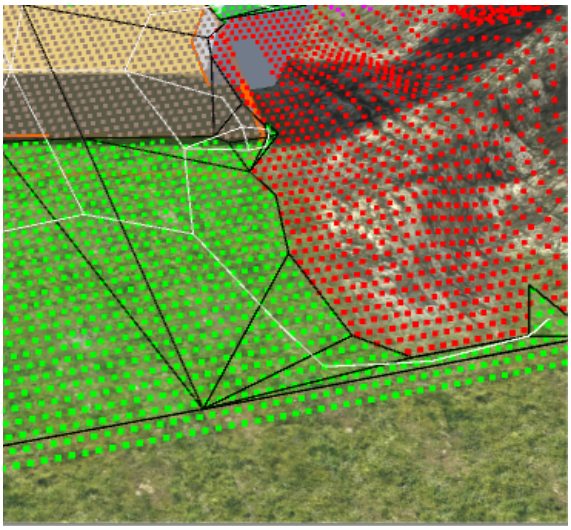


Рисунок 1 – Визуализация графа на 3-х мерном ландшафте

Проводя тестирование алгоритма на разных типах поверхностей от плоскостей до ландшафтов, граф и поиск пути на нем показывали хорошие результаты при работе алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Unreal Engine [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.unrealengine.com/ – Дата доступа: 11.11.2018.
2. Dechter, R., Pearl, J. Generalized best-first search strategies and the optimality of A* // Journal of the ACM. — 1985. — Т. 32, № 3. — С. 505 — 536.

УДК 004.942

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВИЧ-ИНФЕКЦИИ С РАЗНОЙ СТЕПЕНЬЮ ДЕТАЛИЗАЦИИ

В. В. Желткова
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: *valeryaaziattseva@yandex.ru*
Г. А. Бочаров, д. ф.-м. н., профессор
ИВМ РАН
e-mail: *bocharov@inm.ras.ru*

В данной работе были изучены несколько математических моделей популяционной динамики ВИЧ-инфекции разной степени детализации. Была модифицирована модель, включающая блок, описывающий динамику регуляторных Т-лимфоцитов. Для рассмотренных моделей была сформулирована и решена задача оценивания параметров модели по экспериментальным данным, описывающим типичную динамику развития ВИЧ-инфекции. Модель, учитывающая динамику регуляторных Т-лимфоцитов показала наилучшее приближение экспериментальных данных.

Ключевые слова: математическое моделирование, идентификация параметров, математическая иммунология

Применение математического моделирования может значительно расширить возможности изучения закономерностей развития инфекционных заболеваний. Такие комплексные заболевания, как ВИЧ-инфекция, воздействуют на многие подсистемы человеческого организма, однако при их математическом описании, как правило, учитываются лишь немногие участвующие клеточные популяции. Интересным является вопрос, насколько детализация модели позволяет воспроизвести более реалистичную динамику заболевания. В данной работе мы рассмотрим несколько популяционных моделей ВИЧ-инфекции: классические модели [1], [2] включающие и не включающие блок, описывающий клеточный иммунный ответ, а также модель, построенную на основе работ [1], [3], описывающую блоки клеточного иммунного ответа и динамику регуляторных Т-лимфоцитов. Для этих моделей были сформулированы и решены задачи оценивания параметров по экспериментальным данным, описывающим типичный сценарий развития ВИЧ-инфекции [4].

Базовая модель ВИЧ-инфекции [1] описывает динамику клеток-мишеней (T), зараженных клеток-мишеней (T^*) и вирусных частиц (V):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \lambda - dT - kVT,\\ \frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t} &= kVT - \delta T^*,\\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= pT^* - cV\end{aligned}$$

Расширенная версия модели включает также блок клеточного иммунного ответа в виде динамики эффекторных клеток (E). Она основана на модели из [2]

с одним типом клеток-мишеней:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \lambda - d_T T - kVT, \\
\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t} &= kVT - \delta T^* - mET^*, \\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= N\delta T^* - cV - \rho kVT \\
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \lambda_E + \frac{b_E T^*}{T^* + K_b}E - \frac{d_E T^*}{T^* + K_d}E - \delta_E E
\end{aligned}$$

В работе [3] описана модель, учитывающая динамику регуляторных Т-лимфоцитов (R - нормальные регуляторные Т-лимфоциты, R_α - адаптированные регуляторные Т-лимфоциты), а также различающая незрелые (E_i) и зрелые (E_m) эффекторные Т-лимфоциты. Регуляторные Т-лимфоциты играют ключевую роль в развитии механизма истощения, и их динамика описывается в ряде моделей онкологических заболеваний и аутоиммунных процессов, например, [5] [6], однако практически никогда не учитываются при разработке математических моделей ВИЧ инфекции. Мы модифицировали модель, предложенную в данной работе, переписав её в виде системы ОДУ и видоизменив описание процесса подавления эффекторных клеток регуляторными Т-лимфоцитами, чтобы уравнения модели удовлетворяли условию положительной инвариантности:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= p_R - d_r R - \gamma RV, \\
\frac{\mathrm{d}R_\alpha}{\mathrm{d}t} &= \gamma RV - \delta_R R_\alpha, \\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= N\delta T^* - cV, \\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= s - dT - kVT - \alpha_1 RT, \\
\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t} &= kVT - \delta T^* - d_x E_m T^*, \\
\frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}t} &= p_{E_i} - d_{E_i} - k_E V E_i - \alpha_2 R E_i \\
\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} &= k_E V E_i - d_{E_m} E_m - \alpha_3 R_\alpha E_m
\end{aligned}$$

Для решения задачи приближения модели к экспериментальным данным нужно найти значение вектора параметров, минимизирующее функционал невязки (где p - вектор параметров модели, y - данные эксперимента):

$$p* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{p})$$

Функционал Φ отражает характер распределения и статистические свойства погрешностей измерений. В данной работе мы использовали метод максимального

правдоподобия, предполагающий максимизацию функции правдоподобия $L(\mathbf{p})$. При этом предполагалось, что погрешности измерений не зависят от момента времени, распределены по логнормальному закону,а так же независимы между собой. В этом случае задача оценки параметров сводится к минимизации функционала:

$$\Phi_{LogOLS}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1,..N} \sum_{i=1..M} [ln(y^i(t_j, \mathbf{p})) - ln(y^i_j)]^2$$

Мы предполагали, что погрешности измерений различны для вирусной нагрузки и численности, поэтому использовали логарифмический функционал наименьших квадратов с весами. Для решения задачи оптимизации полученного функционала использовался метод multistart с локальной оптимизацией симплекс-методом Нелдера-Мида, реализованном в системе MATLAB. Для численного решения систем ОДУ использовался метод ode15s для решения жестких систем ОДУ пакета MATLAB. Найденные оптимальные решения трех рассмотренных моделей приведены на рисунке 1.

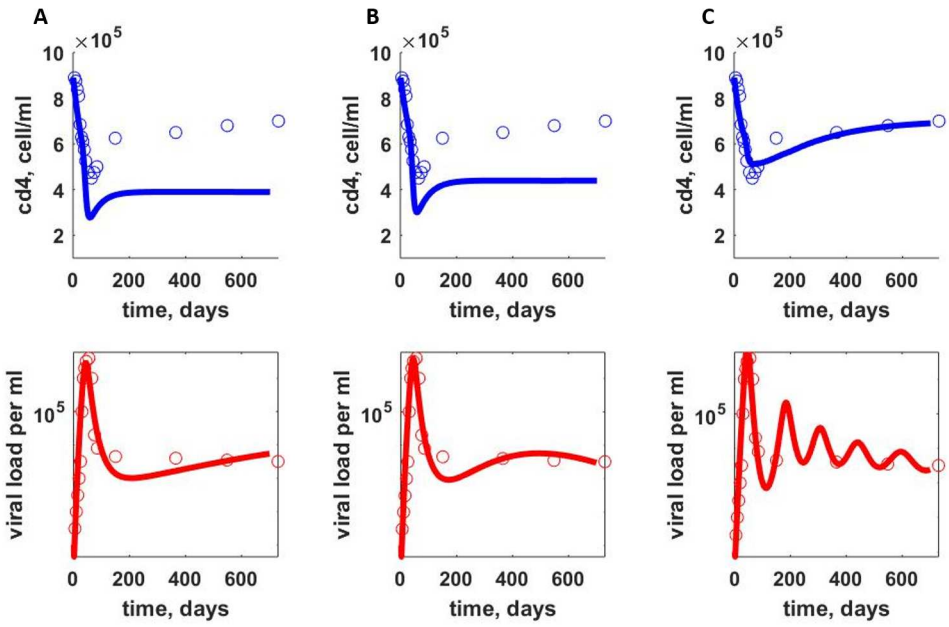


Рисунок 1 – Решения трех рассмотренных моделей (A - базовая модель, B - базовая модель с учетом динамики эффекторных Т-лимфоцитов, C - модель с учетом динамики эффекторных и регуляторных Т-лимфоцитов) и экспериментальные данные. Последняя из рассмотренных моделей позволила получить наилучшее приближение экспериментальных данных.

Сравнение полученных результатов показывает, что математическая модель, учитывающая динамику регуляторных Т-лимфоцитов, позволила добиться лучшего приближения экспериментальных данных по динамике клеток-мишеней и вирусной нагрузке ($\Phi = 1.386$), чем более простые модели ($\Phi = 3.398$ для базовой модели, $\Phi = 2.8311$ для расширенной версии с кле-

точным иммунным ответом).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00356 и частично проекта РФФИ № 17-01-00171.

ЛИТЕРАТУРА

1. Perelson A. S. Modelling viral and immune system dynamics // Nature Reviews Immunology 2.1 (2002): 28.
2. Adams B. M., Banks H. T., et. al. // HIV dynamics: modeling, data analysis, and optimal treatment protocols. - Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2005 — 184 — 1, pp. 10-49
3. Simonov M., Rawlings R. A., Comment N., et. al. // Modeling adaptive regulatory T-cell dynamics during early HIV infection. PloS one — 2012 e33924
4. Munier M. L., Kelleher A. D. // Acutely dysregulated, chronically disabled by the enemy within: T-cell responses to HIV-1 infection. Immunology and cell biology — 2007 — 85 — 1 pp. 6-15
5. Wilson S., Levy D. // A mathematical model of the enhancement of tumor vaccine efficacy by immunotherapy. - Bulletin of mathematical biology. — 2012 — 74 — 7 pp. 1485-500
6. Kim Y., Lee S., et. al. // Regulation of Th1/Th2 cells in asthma development: a mathematical model. Mathematical Biosciences & Engineering. — 2013 — 10 — 4 pp. 1095-133

THREE-DIMENSIONAL INTEGER HAAR WAVELETS

A.V. Korobeynikov, PhD in Engineering, Associate Professor
Kalashnikov Izhevsk State Technical University
e-mail: *kav33@inbox.ru*

Integer variant of three-dimensional Haar wavelets, allowing to reduce the stored data amount without information loss, is considered.

Keywords: lossless compression, Haar wavelet, three-dimensional data, integer processing.

1. Introduction

In previous works authors proposed intra-channel decorrelation method for amount of channels with lossless compression of multi-channel signals [1], which was revised in [2]. The article [3] shows the relationship of the formula of inter-channel decorrelation with Haar wavelets for one- and two-dimensional signals, and integer variants of one- and two-dimensional Haar wavelets reducing the stored data amount. In the work [4] two-dimensional integer Haar wavelets had been applied to compression images.

In this work, the previously discussed approach is evolved for three-dimensional integer Haar wavelets. Multidimensional wavelets are not new and are discussed, for example, in works [5-7]. However, the considered integer variant allows to reduce the stored data amount without information loss.

2. Inter-channel decorrelation with guaranteed restore

Inter-channel decorrelation formula for amount of channels with multichannel signal are proposed in these works [1, 2]:

$$\begin{gathered} c_i = x_1 - x_i \\ c_1 = x_1 - ROUND\left(\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} c_i\right) = x_1 - z_1 \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \end{gathered}; \quad (1)$$

where i – is the channel number, n – the channels amount, x_i – value of the original channel signal, c_i – the value of the channel obtained on the basis of original channels, z_1 – correction to channel x_1, «*ROUND*» – the operation of rounding.

Formula to restore the original values of channels [1, 2]:

$$\begin{gathered} x_1 = c_1 + ROUND\left(\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} c_i\right) = c_1 + z_1 \\ x_i = x_1 - c_i \end{gathered}. \quad (2)$$

The notation z_1 is introduced in formulas for the formula part to show that the same expression is included to the encoding and decoding formulas. Regarding to the z_1 introduction encoding and decoding represent the addition and subtraction operations, which do not lead to loss information. Thus, the restore of the original values without losses is guaranteed.

3. One-dimensional integer Haar wavelets

Consider the signal сигнал $X^1 = (x_1, x_2)$ and its one-dimensional (1*D*) integer Haar wavelet $W^1 = (s, r)$ [3], which coincides with the revised formula inter-channel decorrelation of two-channel signal $\widetilde{X} = (x_1, x_2)^T$ [2]:

$$\begin{matrix} s = c_1 = x_1 - ROUND(c_2 / 2) \approx (x_1 + x_2)/2 \\ r = c_2 = x_1 - x_2 \end{matrix}; \quad (3)$$

where x_i – is the original signal value; c_i – the result of intra-channel decorrelation; *s, r* – the result of the integer Haar wavelet transform.

Define dependences (3) in a more readable form:

$$s = (+1,+1); r = (+1,-1). \quad (4)$$

4. Two-dimensional integer Haar wavelets

Consider the inter-channel decorrelation of multi-channel signal with the channels amount *n*=4 $\widetilde{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ [2]:

$$\begin{matrix} c_2 = x_1 - x_2 \\ c_3 = x_1 - x_3 \\ c_4 = x_1 - x_4 \end{matrix}; \quad (5)$$

$$c_1 = x_1 - ROUND\left(\frac{1}{4}\sum_{i=2}^{4} c_i\right) = x_1 - z_1 \approx \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i$$

For two-dimensional wavelet transformation $W^2 = \begin{pmatrix} a,h \\ v,d \end{pmatrix}$ for an fragment (two-dimensional signal, 2*D*) $X^2 = \begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_3, x_4 \end{pmatrix}$ proposed the following formulas [3, 4]:

$$\begin{matrix} a = c_1 \\ h = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ v = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ d = x_1 - x_2 - x_3 + x \end{matrix}; \quad (6)$$

where *a* – is the average value; *h* – characterizes the horizontal lines; *v* – characterizes the vertical lines; *d* – characterizes the diagonal lines.

Define dependences (6) in a more readable form:

$$a = \begin{pmatrix} +1,+1 \\ +1,+1 \end{pmatrix}; \quad h = \begin{pmatrix} +1,+1 \\ -1,-1 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} +1,-1 \\ +1,-1 \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} +1,-1 \\ -1,+1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Note that these two-dimensional (2*D)* scheme (7) can be obtained from one-dimensional (1*D)* schemes (4):

$$a = (+s^T, +s^T); \quad h = (+r^T, +r^T); \quad v = (+s^T, -s^T); \quad d = (+r^T, -r^T). \quad (8)$$

Define from formulas (5, 6):

$$v = c_2 - c_3 + c_4$$
$$d = c_3 - c_4 + c_2 \,. \quad (9)$$
$$h = c_4 - c_2 + c$$

Obtain a formula for restoring $c_2 \ldots c_4$ using pairwise summation formula (6) lines:

$$h + v = 2(x_1 - x_4) = 2c_4$$
$$v + d = 2(x_1 - x_2) = 2c_2 \,. \quad (10)$$
$$d + h = 2(x_1 - x_3) = 2c_3$$

Present v и h from formula (10) to reduce the information amount:

$$v = -d + 2c_2$$
$$h = -d + 2c_3 \,. \quad (11)$$

Then get:

$$\bar{v} = ROUND(v/2) = -ROUND(d/2) + c_2$$
$$\bar{h} = ROUND(h/2) = -ROUND(d/2) + c_3 \,. \quad (12)$$

The result of the integer wavelet transform are $W^2 = \begin{pmatrix} a, \bar{h} \\ \bar{v}, d \end{pmatrix}$, which have coefficients relative to the values of [6, 7]: $\begin{pmatrix} 1/4, 1/2 \\ 1/2, 1 \end{pmatrix}$.

To restore the values $c_2 \ldots c_4$ use the formula obtained from the formulas (9, 12):

$$c_2 = \bar{v} + ROUND(d/2)$$
$$c_3 = \bar{h} + ROUND(d/2). \quad (13)$$
$$c_4 = c_2 + c_3 - d$$

The value of d cannot be divided by 2, rounded and stored because the expression for c_4 recovery from formulas (6, 10, 12) looks like:

$$c_4 = ROUND((h+v)/2) \neq ROUND(h/2) + ROUND(v/2) = \bar{h} + \bar{v} \,. \quad (14)$$

Thus, use the formula (13) to restore the c_4.

5. Three-dimensional integer Haar wavelets

Consider inter-channel decorrelation of multi-channel signal with channels amount n=8: $\widetilde{X} = (x_1 \ldots x_8)^T$. Revised inter-channel decorrelation formulas [2]:

$$c_i = x_1 - x_i$$
$$c_1 = x_1 - ROUND\left(\frac{1}{8}\sum_{i=2}^{8} c_i\right) = x_1 - z_1 \approx \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i \,. \quad (15)$$

Describe the procedure for three-dimensional integer Haar wavelet transformation W^3 for three-dimensional (3D) signal $X^3 = \left(\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_3, x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_5, x_6 \\ x_7, x_8 \end{pmatrix}\right)$:

$$W^3 = \left(\begin{pmatrix}[+a+a],[+h+h]\\ [+v+v],[+d+d]\end{pmatrix},\begin{pmatrix}[+a-a],[+h-h]\\ [+v-v],[+d-d]\end{pmatrix}\right). \quad (16)$$

Look at the expression for each value of the scheme (16):

$$[+a+a]=\left(\begin{pmatrix}+1,+1\\ +1,+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+1,+1\\ +1,+1\end{pmatrix}\right); \qquad [+a-a]=\left(\begin{pmatrix}+1,+1\\ +1,+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1,-1\\ -1,-1\end{pmatrix}\right);$$

$$[+h+h]=\left(\begin{pmatrix}+1,+1\\ -1,-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+1,+1\\ -1,-1\end{pmatrix}\right); \qquad [+h-h]=\left(\begin{pmatrix}+1,+1\\ -1,-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1,-1\\ +1,+1\end{pmatrix}\right);$$

$$[+v+v]=\left(\begin{pmatrix}+1,-1\\ +1,-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+1,-1\\ +1,-1\end{pmatrix}\right); \qquad [+v-v]=\left(\begin{pmatrix}+1,-1\\ +1,-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1,+1\\ -1,+1\end{pmatrix}\right);$$

$$[+d+d]=\left(\begin{pmatrix}+1,-1\\ -1,+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}+1,-1\\ -1,+1\end{pmatrix}\right); \qquad [+d-d]=\left(\begin{pmatrix}+1,-1\\ -1,+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1,+1\\ +1,-1\end{pmatrix}\right). \quad (17)$$

Define a specific formulas based on expression (17):

$$\begin{aligned}
[+a+a] &= c_1\\
[+a-a] &= x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6-x_7-x_8\\
[+h+h] &= x_1+x_2-x_3-x_4+x_5+x_6-x_7-x_8\\
[+h-h] &= x_1+x_2-x_3-x_4-x_5-x_6+x_7+x_8\\
[+v+v] &= x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7-x_8\\
[+v-v] &= x_1-x_2+x_3-x_4-x_5+x_6-x_7+x_8\\
[+d+d] &= x_1-x_2-x_3+x_4+x_5-x_6-x_7+x_8\\
[+d-d] &= x_1-x_2-x_3+x_4-x_5+x_6+x_7-x_8
\end{aligned}. \quad (18)$$

Then get from formulas (15), (18):

$$\begin{aligned}
[+a-a] &= -c_2-c_3-c_4+c_5+c_6+c_7+c_8\\
[+h+h] &= -c_2+c_3+c_4-c_5-c_6+c_7+c_8\\
[+h-h] &= -c_2+c_3+c_4+c_5+c_6-c_7-c_8\\
[+v+v] &= +c_2-c_3+c_4-c_5+c_6-c_7+c_8\\
[+v-v] &= +c_2-c_3+c_4+c_5-c_6+c_7-c_8\\
[+d+d] &= +c_2+c_3-c_4-c_5+c_6+c_7-c_8\\
[+d-d] &= +c_2+c_3-c_4+c_5-c_6-c_7+c_8
\end{aligned}. \quad (19)$$

Use the formula (19) to reduce the amount of information:

$$\begin{aligned}
[+v+v] &= -[+v-v]-[+d+d]-[+d-d]+4c_2\\
[+h+h] &= -[+h-h]-[+d+d]-[+d-d]+4c_3\\
[+a-a] &= -[+h-h]-[+v-v]-[+d-d]+4c_5\\
[+v-v] &= -[+d-d]+2(c_2+c_5-c_6)\\
[+h-h] &= -[+d-d]+2(c_3+c_5-c_7)\\
[+d+d] &= -[+d-d]+2(c_2+c_3-c_4)
\end{aligned}. \quad (20)$$

Then get:

$$[+\bar{v}+\bar{v}] = ROUND([+v+v]/4) = -ROUND(([+v-v]+[+d+d]+[+d-d])/4)+c_2$$
$$[+\bar{h}+\bar{h}] = ROUND([+h+h]/4) = -ROUND(([+h-h]+[+d+d]+[+d-d])/4)+c_3$$
$$[+\bar{a}-\bar{a}] = ROUND([+a-a]/4) = -ROUND(([+h-h]+[+v-v]+[+d-d])/4)+c_5$$
$$[+\bar{v}-\bar{v}] = ROUND([+v-v]/2) = -ROUND([+d-d]/2)+(c_2+c_5-c_6)$$
$$[+\bar{h}-\bar{h}] = ROUND([+h-h]/2) = -ROUND([+d-d]/2)+(c_3+c_5-c_7)\ . \qquad (21)$$
$$[+\bar{d}+\bar{d}] = ROUND([+d+d]/2) = -ROUND([+d-d]/2)+(c_2+c_3-c_4)$$

The result of the integer wavelet transformation are the values $W^3 = \left(\begin{pmatrix}[+a+a],[+\bar{h}+\bar{h}]\\ [+\bar{v}+\bar{v}],[+\bar{d}+\bar{d}]\end{pmatrix},\begin{pmatrix}[+\bar{a}-\bar{a}],[+\bar{h}-\bar{h}]\\ [+\bar{v}-\bar{v}],[+d-d]\end{pmatrix}\right)$, which have coefficients relative to values from [17]: $\left(\begin{pmatrix}½\cdot¼,¼\\ ¼,½\end{pmatrix},\begin{pmatrix}¼,½\\ ½,1\end{pmatrix}\right)$.

To restore the values $c_2 \ldots c_8$ use the formula obtained from the formula (19, 21):

$$c_2 = [+\bar{v}+\bar{v}] + ROUND(([+v-v]+[+d+d]+[+d-d])/4)$$
$$c_3 = [+\bar{h}+\bar{h}] + ROUND(([+h-h]+[+d+d]+[+d-d])/4)$$
$$c_5 = [+\bar{a}-\bar{a}] + ROUND(([+h-h]+[+v-v]+[+d-d])/4)$$
$$c_4 = -ROUND([+d-d]/2)+(c_2+c_3)-[+\bar{d}+\bar{d}]$$
$$c_6 = -ROUND([+d-d]/2)+(c_2+c_5)-[+\bar{v}-\bar{v}]$$
$$c_7 = -ROUND([+d-d]/2)+(c_3+c_5)+[+\bar{h}-\bar{h}]$$
$$c_8 = -c_2-c_3+c_4-c_5+c_6+c_7+[+d-d]. \qquad (22)$$

6. Conclusions

The formulas of relationship inter-channel decorrelation with three-dimensional integer Haar wavelets are proposed.

The modification of the three-dimensional integer Haar wavelet formula are proposed, to reduce the stored data amount without information loss.

This approach can be apply to four-dimensional (4*D*) Haar wavelets, however, this data class is use rarely and the formulas will be cumbersome.

REFERENCES

1. Franchenko, R. S., & Korobeynikov, A. V. (2010). Interchannel Decorrelation for Any Number of Channels at Lossless Compression of Multichannel Signals. ISTU Bulletin, 1, 87-88.
2. Korobeynikov, A. V., & Franchenko, R. S. (2011). The formulas clarifying of inter-channel decorrelation of signals. In Information Systems Industry and Education: Proceedings of young scientists (pp. 43-44). Izhevsk: IzhSTU.
3. Korobeynikov, A. V., & Franchenko, R. S. (2011). Clarification of the inter-channel communication formulas of decorrelation signals with Haar wavelets. In Information Systems Industry and Education: Proceedings of young scien-

tists (pp. 44-47). Izhevsk: IzhSTU.
4. Smirnov, V. S., & Korobeynikov, A. V. (2013). Lossless image compression based on integral-valued Haar wavelets. Intelligent Systems in Manufacturing, 2(22), 158-160.
5. Heil, C. E., & Walnut, D. (2009). Fundamental Papers in Wavelet Theory. Princeton University Press.
6. Dremin, I. M., Ivanov, O. V., & Nechitaĭlo, V. A. (2001). Wavelets and their uses. Physics-Uspekhi, 44(5), 447-478. doi:10.1070/PU2001v044n05ABEH000918.
7. Karakaz'yan, S., Skopina, M., & Tchobanou, M. (2009). Symmetric Multivariate Wavelets. International Journal Of Wavelets, Multiresolution And Information Processing, 7(3), 313-340.

УДК 001.891.573; 519.688

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА МОНИТОРИНГА ИЗМЕНЕНИЯ ПРОВОДИМОСТИ ГРУДНОЙ ПОЛОСТИ ЧЕЛОВЕКА МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ

А.И. Кучер
ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова»
e-mail: *artem-ka5@mail.ru*
Г.К. Алексанян
ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова»
e-mail: *graer@ya.ru*
И.Д. Щербаков
ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова»
e-mail: *neon86@rambler.ru*

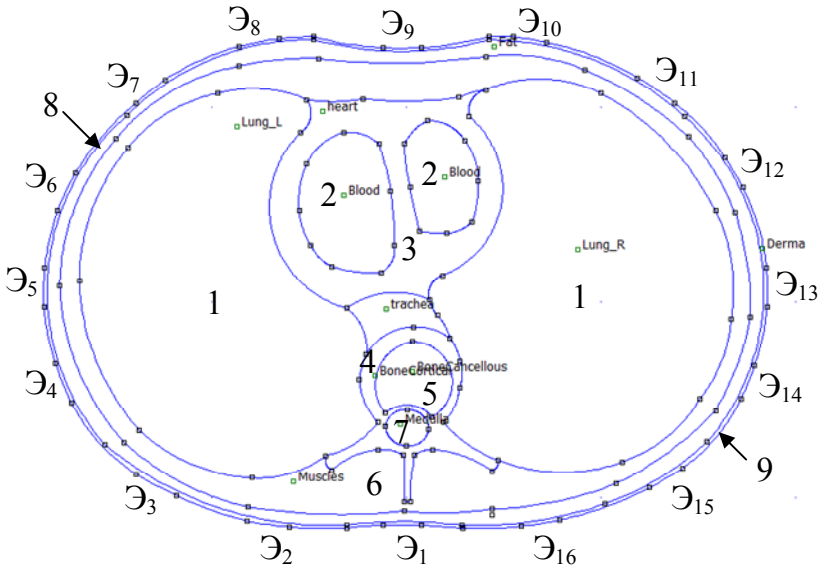
В работе приведено краткое описание метода электроимпедансной томографии (ЭИТ). Авторами предложена методика моделирования процесса мониторинга изменения проводимости грудной полости методом ЭИТ, основанная предложенной ранее модели грудной полости. Проведено исследование предложенной методики. Методика может быть использована при исследовании способов идентификации внутренних структур биологических объектов на основе ЭИТ.

Ключевые слова: электроимпедансная томография, моделирование, мониторинг, грудная полость, легкие, *Femm*, проводимость, вентиляционная функция.

Электроимпедансная томография (ЭИТ) – метод медицинской визуализации [1], позволяющий на основе электрических измерений на поверхности биологического объекта (БО) реконструировать и визуализировать поле проводимости Ω (статическая ЭИТ) или поля изменения проводимости $\Delta\Omega$ (дифференциальная ЭИТ) [2]. Для реализации метода на поверхности БО располагают N электродов $Э_n$ ($n \in 1..N$), к которым по заданному алгоритму подключают источ-

ник тока I (инжектирование тока I) и между которыми одновременно с инжектированием измеряют по заданному алгоритму разности потенциалов ΔФ [3]. На основании априорной информации о БО (форма поверхности, геометрические размеры, местоположение и размеры электродов $Э_n$ и т.п.), информации об алгоритме инжектирования тока I, алгоритме измерения разностей потенциалов ΔФ и измеренных значениях ΔФ реконструируют поле Ω или ΔΩ внутри БО. В случае дифференциальной ЭИТ реконструируется поле изменения проводимости между моментами времени t_1 и t_2, которым соответствуют наборы измерительных данных $\Delta\Phi_{t1}$ и $\Delta\Phi_{t2}$. Для оценки качества реконструкции ΔΩ необходимо сравнивать результат реконструкции ΔΩ с реальным изменением проводимости внутри БО. Ввиду отсутствия референтных методов оценки ΔΩ большое распространение в ЭИТ получило математической моделирование, позволяющее варьировать множество параметров в широких диапазонах [4].

В работе [5] авторами была предложна модель и методика моделирования метода ЭИТ при исследовании вентиляции легких. Для решения прямой задачи ЭИТ [2] используется метод конечных элементов. Прямая задача ЭИТ решается для каждой конфигурации инжектирующих электродов, на основании результатов которой определяются разности потенциалов между заданными электродами и формируется массив измерительной информации ΔФ. На рисунке 1 представлена геометрия задачи.



Ткани:
1 – Легочная ткань;
2 – Кровь;
3 – Миокард;
4 – Кортикальная пластина;
5 – Губчатое вещество;
6 – Мышечная ткань;
7 – Спинной мозг;
8 – Жировая ткань;
9 – Кожа;
Э – Электрод.

Рисунок 1 – $\Delta V(t)$ (а) и $\sigma(t)$ (б)

Для моделирования мониторинга изменения проводимости грудной полости предлагается на основании известного закона изменения воздухонаполнения легких $\Delta V(t)$ формировать изменение электрических параметров тканей легких – проводимости $\sigma(t)$ и диэлектрической проницаемости $\varepsilon(t)$, и моделировать процесс получения измерительной информации $\Delta\Phi(t_i)$ при $\sigma(t_i)$ и $\varepsilon(t_i)$, формируя тем самым массив измерительной информации $\Delta\Phi(t)$. При этом $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ могут быть различными для левого и правого легкого или даже их подобластей, позволяя тем самым моделировать патологии вентиляции легких.

Таким образом, с помощью предложенной методики на основании разработанной ранее модели грудной полости можно формировать массив измерительной информации $\Delta\Phi(t)$:

$$\Delta\Phi(t)=\begin{pmatrix} \Delta\varphi_1(t_1) & \cdots & \Delta\varphi_1(t_i) & \cdots & \Delta\varphi_1(T) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \Delta\varphi_l(t_1) & \cdots & \Delta\varphi_l(t_i) & & \Delta\varphi_l(T) \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta\varphi_L(t_1) & \cdots & \Delta\varphi_L(t_i) & \cdots & \Delta\varphi_L(T) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где L – число элементов вектора $\Delta\Phi(t_i)$.

На основании полученного массива можно производить реконструкцию $\Delta\Omega$ для каждого момента времени t_i, формируя тем самым массив $\Delta\Omega(t)$:

$$\Delta\Omega(t)=\begin{pmatrix} \Delta\sigma_1(t_1) & \cdots & \Delta\sigma_1(t_i) & \cdots & \Delta\sigma_1(T) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \Delta\sigma_s(t_1) & \cdots & \Delta\sigma_s(t_i) & & \Delta\sigma_s(T) \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta\sigma_S(t_1) & \cdots & \Delta\sigma_S(t_i) & \cdots & \Delta\sigma_S(T) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

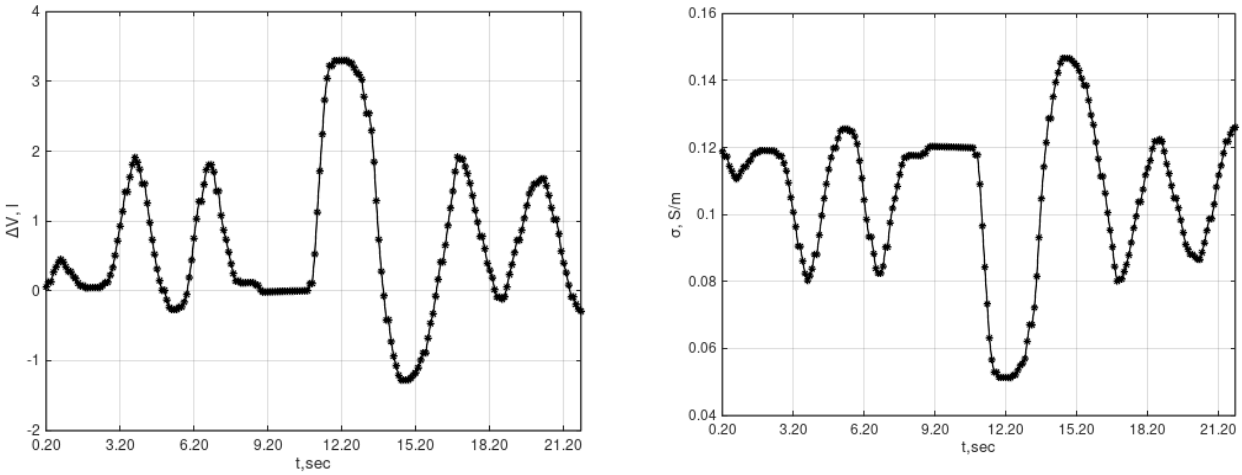
где S – число конечных элементов модели грудной полости, используемой при решении обратной задачи ЭИТ. Полученный массив $\Delta\Omega(t)$ описывает изменение проводимости грудной полости во времени для известного $\Delta V(t)$. Такой подход позволит исследовать и разрабатывать методы идентификации внутренних структур с помощью ЭИТ. Так, например, оценив степень взаимосвязи изменения проводимости каждого конечного элемента $\Delta\sigma_s(t)$ и $\Delta V(t)$ можно выявить области легких на изображении грудной полости [6].

Для формирования массивов $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ на основании $\Delta V(t)$ используются значения σ и ε на вдохе и выдохе для заданной частоты инжектируемого тока f_I. Формирование производится по формуле:

$$\Delta x(t_i, f_I)=\left(\Delta V(t_i)-min(\Delta V(t))\right)\cdot\frac{x_{INS}(f_I)-x_{EXP}(f_I)}{max(\Delta V(t))-min(\Delta V(t))}+x_{EXP}(f_I), \quad (3)$$

где x – искомый параметр (σ или ε), x_{INS} – значение искомого параметра на вдохе; x_{EXP} – значение искомого параметра на выдохе.

На рисунке 2 представлены результаты формирования массива $\sigma(t)$ при f_I=20 кГц для $\Delta V(t)$, полученной на основании результатов обследования пациента с помощью спирометра СМП21/01-‘Р-Д’.



а) б)

Рисунок 2 – $\Delta V(t)$ (а) и $\sigma(t)$ (б)

Для моделирования неравномерности воздухонаполения левого и правого легкого используются коэффициенты K_L и K_R, такие что:

$$\begin{cases} \Delta\sigma(t) = K_L \cdot \Delta\sigma_L(t) + K_R \cdot \Delta\sigma_R(t), \\ K_L + K_R = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Реализация предложенной методики позволила сформировать массив измерительной информации $\Delta\Phi(t)$, на основании которого путем реконструкции был сформирован массив $\Delta\Omega(t)$. Проведен расчет среднего изменения проводимости грудной полости $\Delta\Omega_{ср}(t)$:

$$\Delta\Omega_{cp}(t_i) = \frac{\sum_{1}^{S} \Delta\sigma_s(t_i)}{S}. \quad (5)$$

Оценка степени корреляции $\Delta\Omega_{ср}(t)$ и $\Delta V(t)$ показала крайне высокую степень корреляции ($r_{\Delta V \Delta\Omega}$>0,95), что подтверждает верность допущений, использованных при моделировании. Оценка $\Delta\Omega_{ср}(t)$ для левой и правой половины модели грудной полости показала пропорциональное K_L и K_R изменение амплитуды $\Delta\Omega_{срЛ}(t)$ и $\Delta\Omega_{срП}(t)$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-38-00786 «Разработка методологии и алгоритмических средств интеллектуальной идентификации внутренних структур биологических объектов в системах электроимпедансной томографии».

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексанян Г.К., Тарасов А.Д., Кучер А.И. Методы медицинской визуализации внутренних структур биообъекта // Научно-техническая конференция и выставка инновационных проектов, выполненных вузами и научными организациями ЮФО в рамках участия в реализации федеральных целевых программ и внепрограммных мероприятий, заказчиком которых является Минобрнауки России : сб. материалов конф., г. Новочеркасск, 14-16 дек. 2014 г. / Юж.-Рос. гос. политехн. ун-т им. М.И. Платова – Новочеркасск : Лик, 2014. – С. 400-401.

2. Cheney M., Isaacson D., Newell J.C. Electrical impedance tomography//SIAM Review. – 1999. – Vol.41, Is.1. – P.85-101.
3. Пеккер Я.С., Бразовский К.С., Усов В.Ю. и др. Электроимпедансная томография – Томск.: НТЛ. – 2004. – 192 с.
4. Пеккер Я.С., Бразовский К.С. Моделирование биологических объектов в электроимпедансной томографии // Известия Томского политехнического университета [Известия ТПУ]. – 2004. – Т. 307, № 2. – С. 148-153.
5. Aleksanyan G.K., Kucher A.I., Shcherbakov I.D. Research of the Multi-Frequency Electrical Impedance Tomography using Possibility for Specific Physiological Processes Monitoring Tasks // Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2017. Vol. 12, Is.16. – P.4251-4258.
6. Zhao Z., Yun P.J., Kuo Y.L., Fu F., Dai M., Frerichs I., Möller K. Comparison of different functional EIT approaches to quantify tidal ventilation distribution // Physiological Measurement. –2018. – Vol. 39, № 1. – 14 с.

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА SOVA В ТУРБОДЕКОДИРОВАНИИ

С.Н. Михеечев, к.в.н, доц.
Академия ФСО России
e-mail: *miheechev-s@yandex.ru*
Н.С. Храмцов
Академия ФСО России
e-mail: *nadya255@mail.ru*

1. Введение

Алгоритм Витерби с мягким выходом, который сохраняет мягкое значение метрики для каждого из состояний и проверяет его при обработке на каждом шаге декодирования (Soft Output Viterbi Algorithm – SOVA) может быть успешно использован для итерационного декодирования турбокодов. Стоит отметить, что алгоритм SOVA предназначен для декодирования сверточных кодов и является оптимальным в смысле минимизации вероятности ошибки в кодовой последовательности. Данный алгоритм основан на реализации метода максимального правдоподобия и нахождении кодовой последовательности ближайшей к принятой. По результатам пошагового сравнения всех путей алгоритм SOVA по кодовой решетке отбрасывает те, которые находятся на расстоянии большем, чем другие пути[1, 2]. Главной особенностью SOVA является переход от привычного декодирования к декодированию с «мягким» решением, в связи с чем используется метрика Евклида, а не расстояние Хэмминга. Основным недостатком предложенного алгоритма является необходимость проверки всех существующих путей, выходящих из рассматриваемого узла кодовой решетки. При этом большинство выполняемых вычислений оказываются бесполезными.

2. Теоретическое обоснование мягкого декодирования

Декодирование называется жёстким, если выход демодулятора квантуется строго на 2 уровня, а принятое решение является дибитным (1 или 0).

Способ квантования, изображенный на рисунке 1, имеет 8 уровней квантования что, приводит к улучшению отношения сигнал/шум на 2 дБ по сравнению с 2-х уровневым. Практически доказано, что последующее увеличение количества уровней квантования до 16, 32 и т.д не имеет практического смысла ввиду того, что оно даёт лишь незначительное улучшение отношения сигнал/шум (максимум дополнительно на 0,2 дБ) [3]. Мягкая схема принятия решения предоставляет декодеру как значение символа, так и степень его достоверности, чем не может похвастаться жесткая схема.

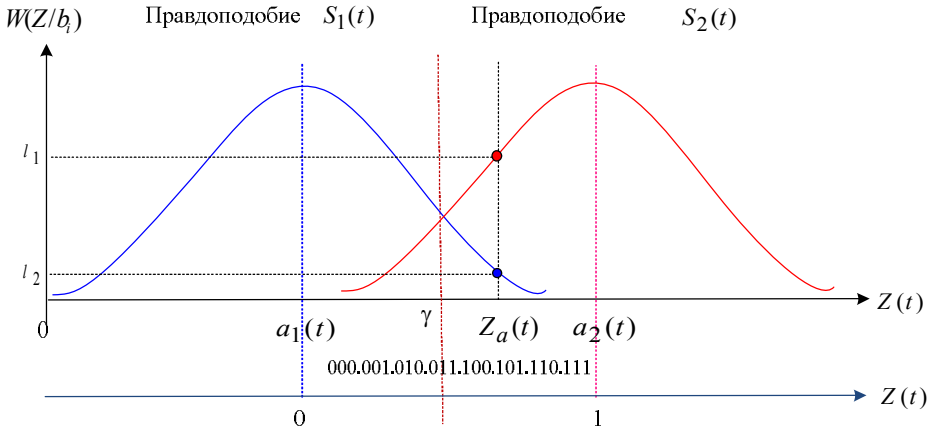


Рисунок 1– Сравнение мягкого и жесткого декодирования при передаче сигнала по каналу с АБГШ

С помощью одного из углов квадрата, изображенного на рисунке 2,*а*, можно изобразить каждую из пар принятых символов при жёстком решении.

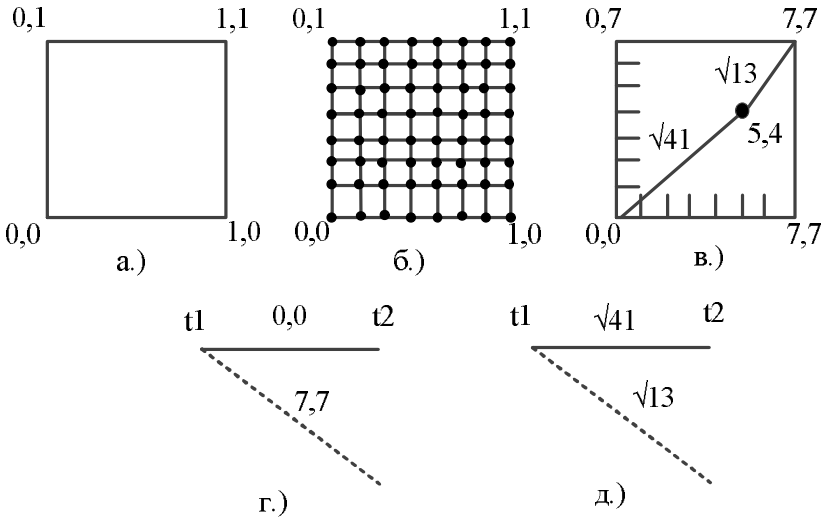


Рисунок 2 – Декодирование Витерби: а) жесткая схема принятия решения; б) 8-ми уровневая плоскость принятия решения; в) пример мягких кодовых символов; г) первая секция решетки кодирования; д) секция решетки декодирования

Что касается мягкого декодирования, для него каждую пару символов можно отобразить с помощью квадрата 8x8, что показано на рисунке 2,*б*.

В целях упрощения применения метрики Евклида, преобразуем числа из двоичной системы в восьмеричную. На рисунке. 2, *в* соответствующим образом

обозначены углы квадрата при мягком декодировании, для описания каждой из 64 точек будем использовать пары целых чисел в диапазоне от 0 до 7. Рассмотрим в качестве примера точку с координатами (5, 4), которая является совокупностью сигнала и шума. Первоначальная секция решетки декодирования изображена на рисунке 2, *г*, кодовые слова соответствующим образом преобразованы из двоичных в восьмеричные. На рисунке 2, *д* – первая секция решетки декодирования. Евклидово расстояние между словом 5,4 и словом 0,0 равно $\sqrt{41}$ и обозначено на рисунке сплошной линией. Аналогично метрика $(\sqrt{13})$ представляет собой Евклидово кодовое расстояние между поступившим кодовым символом 5,4 и кодовым символом 7,7, это расстояние показано на рисунке пунктирной линией.

Как было указано в примере, с нахождением кодового расстояния Евклида проблем не возникает. Основной задачей мягкого решения является проблема вычисления значения, относительно которого будет приниматься решение, так как для мягкого решения невозможно напрямую использовать расстояние Евклида. На основе формулы полной вероятности и теореме Байеса строится теоретической обоснование методов мягкого декодирования.

Основной задачей при реализации декодирования является разработка эффективных процедур мягкого декодирования составных кодов, т.е. разработка способов вычисления мягкого решения $L_{DK}(C_1, C_2)$ для итеративной процедуры обмена в процессе декодирования [5, 6].

3. Практическое применение

Большое практическое применение способы кодирования с мягким выходом получили в турбокодировании. Все турбокоды объединяет возможность применения в них алгоритма декодирования с "мягкими" решениями. Декодирование СК, основанное на мягких решениях, не вызывает особых затруднений по сравнению с алгебраическими кодами. Предложенный способ позволяет выиграть в энергетическом смысле не менее чем в 2 дБ по сравнению с использованием жестких решений. Один из способов построения данного кодера изображён на рисунке 3, в него входит параллельное соединение двух рекурсивных сверточных кодеров [7]. Оба эти декодера предоставляют решение об отправленном символе на основе критерия MAB, чем обеспечивается наименьшая возможная вероятность ошибочного декодирования каждым из декодеров.

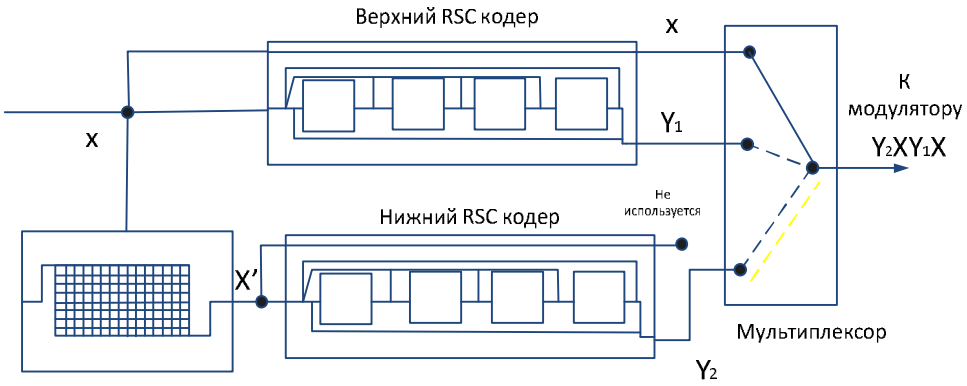


Рисунок 3 – Турбокодер

Во время первой итерации на вход 1-го декодера от демодулятора прибывают оценки переданных символов в качестве мягких решений от демодулятора 1-го кодового блока. Символьная оценка, сформированная на выходе 1-го декодера, в дальнейшем применяется в виде априорной информации для 2-го декодера. Оценка обновляется по результат второй и последующих итераций декодирования и применяется в виде априорной информации о переданном символе для 1-го декодера. По результату описанных выше операций, на вход каждого из двух декодеров поступают мягкие решения, а окончательным итогом декодирования является также мягкое решение. Схемы, использующие данный принцип работы, получили название декодеров с мягкими входом и выходом. Нижним декодером выносится финальное решение о переданном символе. Изложенный выше алгоритм декодирования оказался довольно успешным, каждая последующая в нём итерация последовательно значительно увеличивает априорную информацию о переданном символе. Декодирование заканчивается либо после выполнения установленного количества Q итерационных циклов, либо после того, как величина поправки результата декодирования достигнет заданного порога [8].

Процесс увеличения величины отношения сигнал/шум, влечёт за собой уменьшение итераций, требуемых для декодирования. Это объясняется тем, что схема итерационного декодирования становится ближе к оптимальной.

Заключение

В качестве основной идеи ТК стоит использование двух кодеров, работающих параллельно. В этом случае информационный блок кодируется дважды, причем второй раз кодируется непосредственно после предварительного перемежения. При декодировании закодированный блок можно представить в качестве двух кодовых блоков. Данная способность позволяет использование двух декодеров, каждый из которых декодирует свой кодовый блок. Для уточнения результата декодирования, используется информация, полученная в качестве априорной информации для 2-го декодера, которая снимается с выхода 1-го декодера. В случае необходимости данную операцию можно производить неоднократно. Сложность использования турбокодера при расчете на один бит информации не имеет зависимость от длины информационного блока. Следует отметить, что она также является сравнимой со сложностью декодера Витерби для сверточного кода [7]. В качестве критерия выбора параметров кода выбирается наименьшее количество кодовых блоков с малым взаимным расстоянием при условии максимума среднего расстояния в противопоставление весьма распространенному критерию максимума минимального расстояния между кодовыми блоками. Выбранный критерий обеспечивает сравнительно более высокую достоверность декодирования при условии низкого отношения сигнал/шум по сравнению с критерием минимума максимального расстояния. Стоит отметить, что длиной блока можно управлять с помощью вероятностью ошибки. Снижение вероятности ошибки декодирования достигается увеличением длины информационного блока без изменения вычислительной сложности алгоритма.

Перспективным направлением дальнейших исследований является экспериментальная проверка эффективности предложенных методов декодирования и оценка достигаемого энергетического выигрыша.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башкиров А.В. , Остроумов И.В. , Свиридова И.В. Основы помехоустойчивого кодирования, основные преимущества и недостатки алгоритмов декодирования.
2. Галлагер Р.Г. Коды с малой плотностью проверок на четность, в сб. Теория кодирования, изд-во «Мир», 1964, стр.139-165.
3. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение.
4. Осадчий С.И., Кузнецова Е.Я., Зубенко В.А., Голик Е.П. Разработка и исследование методов мягкого декодирования каскадных кодовых конструкций с итеративным обменом мягкими решениями.
5. Кузнецов А.А., Приходько С.И., Гусев С.А., Зубенко В.А. Мягкое декодирование каскадных кодов-произведений с использованием упорядоченных подмножеств проверочных уравнений.
6. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи.
7. Варгаузин В., Протопопов Л. Турбо-коды и итеративное декодирование: принципы, свойства, применение.
8. Невдяев Л.М. Мобильная связь третьего поколения. Серия «Связь и бизнес», М.: 2000 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ LDPC КОДА В АППАРАТНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

С.Н. Михеечев, к.в.н, доц.
ФГКВОУ ВО Академия ФСО России
e-mail: *miheechev-s@yandex.ru*
А.А. Шестов
ФГКВОУ ВО Академия ФСО России
e-mail: *a.shestov-work@yandex.ru*

1. Введение

Код с малой плотностью проверок на чётность (LDPC-код) – это код, определяемый матрицей, содержащей преимущественно нули и сравнительно небольшое число единиц.

LDPC код специфицируется разреженной проверочной m × n матрицей H, пример которой показан на рисунке 1, в который каждый столбец содержит небольшое фиксированное число единиц k.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 1 – Пример проверочной матрицы регулярного LDPC кода (8,4,2)

Основным достоинством LDPC кодов от классических линейных кодов является то, что при их синтезе не стоит задача максимизации минимального расстояния Хэмминга, а хорошие характеристики помехоустойчивости достигаются за счет того, что количество слов относительно общего размера кодового пространства находящихся на минимальном расстоянии крайне мало, при этом расстояние между другими кодовыми словами может быть весьма большим. Следствием этого является то, что наиболее эффективные с точки зрения помехоустойчивости LDPC коды имеют большую длину кодового слова.

Вместо порождающей матрицы для описания кодирования и декодирования LDPC кодов используется проверочная матрица кода.

2. Исследование пропускной способности LDPC кодов

На текущем уровне развития теории кодирования существует больше количество представлений о кодах и методах их декодирования, имеющих различия в энергетическом выигрыше, вносимой избыточностью, сложностью реализации и ряда других параметров. Рассмотрим помехоустойчивость кодов с кодовой скоростью R≈1/2 (рисунок 2). Необходимо отметить следующее замечание — рассмотренные характеристики способов помехоустойчивого кодирования взяты для канала с аддитивным белым гауссовским шумом, двоичной фазовой модуляции и демодулятора, формирующего мягкие решения [1].

На рисунке 2 кривой 10 показаны характеристики LDPC кода длиной 1000000 битов и граница Шеннона C=1/2. Можно заметить, что данный вариант кода находится в 0.1 дБ от пропускной способности канала, но его реализация весьма трудная задача, так что этот вариант является теоретическим. В стандартах IEEE 802.16e и DVB-S2 используются LDPC коды длиной 2304 и 64800 битов соответственно, их характеристики представлены на рисунке 2 кривыми 11 и 12. Исходя из представленного графика заметим, что данные реализации сопоставимы с турбо-кодами (кривые 7-9) по эффективности, но их гораздо проще реализовать, что представляет последним неплохую конкуренцию [1].

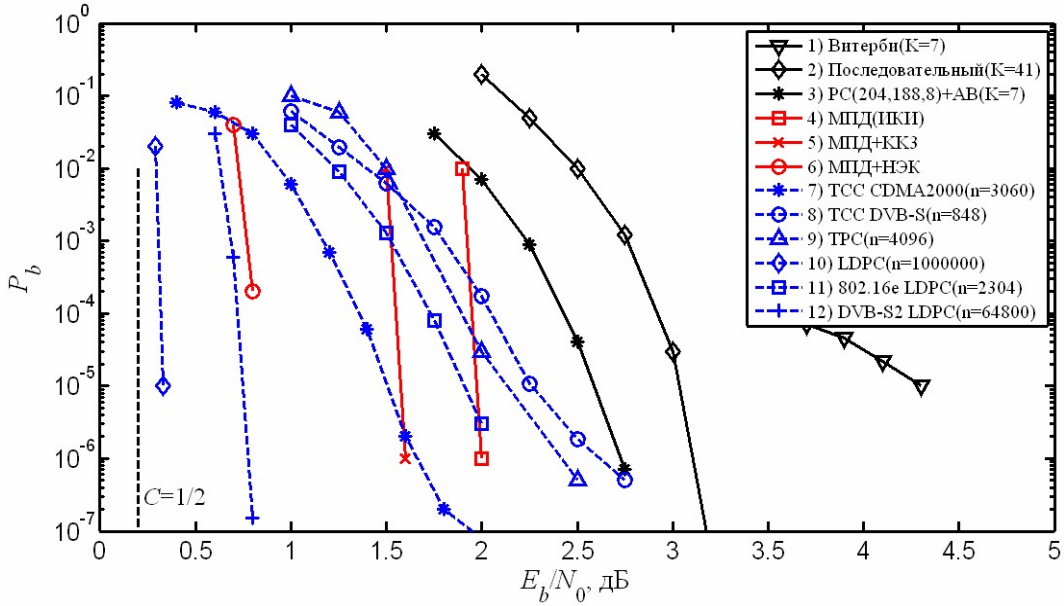


Рисунок 2 – Характеристики помехоустойчивых кодов с R≈1/2

Отметим, рассмотренные на рисунке 2 результаты для вариаций LDPC кодов и турбо-кодов использовали оптимальные алгоритмы декодирования и вычислялись, используя неквантованные решения демодулятора. Если же исследовать практическое применение этих кодов, то мы столкнемся с большой сложностью аппаратной реализации и, как следствие, неэффективности их применения. Данных факт заставляет переходить к простым алгоритмам, использующем несколько уровней квантования, что приведет к потерям от 0.5 до 1 дБ и даже более [2].

Известно, что для всех классов LDPC кодов доступны две базовые модели декодера: полностью параллельная, гарантирующую наибольшую пропускную способность, но для её реализации необходимо большое количество аппаратных средств, и полностью последовательная, использующая минимально возможное количество аппаратных средств и обладающая минимальной производительностью. Обе базовые модели не нашли практического применения, представляя собой два предельных случая построения декодера [3].

«На рисунке 3 представлена структурная схема декодера с полностью параллельной модели с длиной кодового блока 672 бита и с длиной проверочного блока 336 бит» [3].

В данной модели все посылки проверочных и кодовых блоков вычисляются одновременно. Это позволяет демодулятору минимизировать временную

задержку. Таким образом, получаем наибольшую пропускную способность и выигрыш по времени задержки на декодирование.

На рисунке 4 представлена полностью последовательная схема декодера.

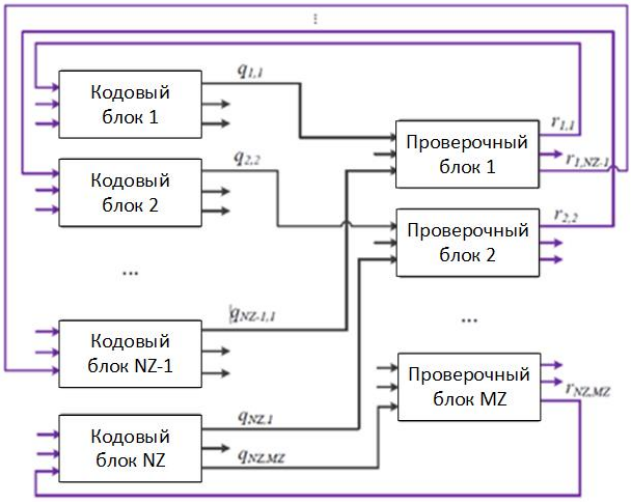


Рисунок 3 – Полностью параллельная схема декодера

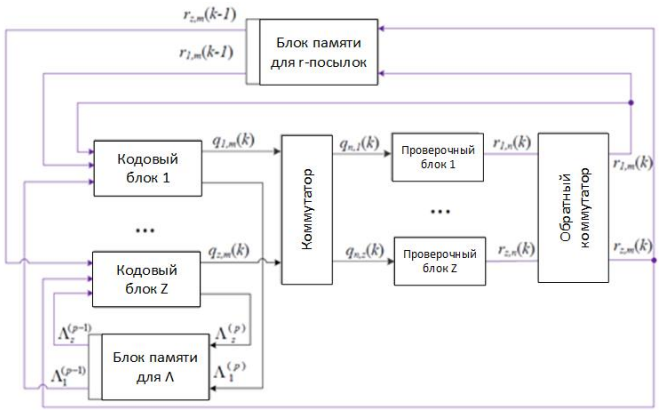


Рисунок 4 – Последовательная схема декодера

Последовательная модель использует Z аппаратных проверочных блоков и Z аппаратных кодовых узлов, соединенных между собой прямым и обратным коммутаторами. Циклически сдвигая матрицу LDPC кода, перенастраиваем коммутаторы. Результаты вычислений сообщений и мягких метрик кодового слова сохраняются в соответствующие блоки памяти [4].

В общем случае пропускная способность аппаратного LDPC декодера может быть оценена как

$$T = \frac{f \cdot R \cdot L}{N_{iter} \cdot S},$$

где f – тактовая частота блока декодера, L – длина кодового слова в битах, R – скорость кодирования, N_{iter} – число итераций алгоритма декодирования, S – число тактов, требуемых для выполнения одной итерации [3].

Оценивая пропускную способность представленных модель декодеров в зависимости от числа логических ячеек (LUT) на частоте тактирования декодера f=100 МГц, при 5 итерациях в [4] были получены следующие результаты:

Таблица 1 – Сравнение пропускной способности декодеров

	Модель декодера	
	Полностью параллельная	Последовательная
Пропускная способность декодера, Мбит/с	6588	159
Число LUT	116779	12814

Видно, что наибольшей пропускной способности равной 6.5 Гбит/с достигает полностью параллельная модель. Однако недостатком данного решения является невозможность ее масштабирования для меньших значений пропускной способности. Таким образом, эта модель представляет интерес исключи-

тельно для задач, в которых необходимо обеспечить максимальную пропускную способность, но не годится для задач, требующих определенное значение пропускной способности, где достаточно хорошо проявляет себя последовательная модель, которая при изменении количества аппаратных средств, позволяет добиться требуемой пропускной способности используя много меньше логических элементов. Не смотря на кажущуюся эффективность последовательной модели относительно параллельной, однозначно можно сказать, что рост значения требуемой пропускной способности приведет и к росту количества логических элементов, которые на определенном уровне превысят их количество в параллельной модели, приведя аппаратную реализацию модели к невыгодной.

В таблице 2 проведено исследование влияния количества модулей обработки и скорости кода в полностью параллельной модели LDPC декодера на его пропускную способность при LUT=30720, f=160 МГц и 20 итерациях.

Таблица 2 – Сравнительная таблица пропускной способности декодера

Количество модулей обработки	Поток	Скорость кода		
		R=1/2 N=2304	R=2/3 N=2304	R=3/4 N=2304
1	входной выходной	5.2 Мбит/с 2.6 Мбит/с	5.92 Мбит/с 3.94 Мбит/с	6,32 Мбит/с 4.74 Мбит/с
6	входной выходной	29,68 Мбит/с 14.84 Мбит/с	29,68 Мбит/с 19.78 Мбит/с	35,12 Мбит/с 26,34 Мбит/с
8	входной выходной	39 Мбит/с 19.5 Мбит/с	45.28 Мбит/с 30.18 Мбит/с	45.28 Мбит/с 30.18 Мбит/с

Заметим, что, например, для кодовой скорости R=2/3 отношения входного к выходному потоку составляют примерно 66.8%. Такую же закономерность можно заметить и для других кодовых скоростей. Таким образом увеличение количества блоков обработки увеличивает количество переданной информации, но оставляет неизменным отношение входного к выходному потоку.

3. Заключение

LDPC-коды используются в высокоскоростных системах передачи данных (до 40 Гб/с), при ограниченной полосе пропускания канала связи. Они находят применения в стандартах DVB-S2 спутниковой передачи данных для цифрового телевидения, и частью стандарта DVB-T2 для цифрового наземного телевещания, вследствие простоты их реализации.

Имеет место использование многопороговых моделей декодеров, позволяющие работать в широком интервале кодовых скоростей с использованием как жесткого, так и мягкого решения. При этом выполняются простейшие операции сложения и сравнения небольших целых чисел, что обуславливает его простоту при программной или аппаратной реализации.

Важным недостатком таких декодеров представляется невозможность масштабируемости и варьирования параметров данных моделей, что вносит определенные сложности в разработку подобных систем. Разработчикам прихо-

дится искать функциональные решения для нахождения баланса между требуемой пропускной способность и возможностью использования необходимого количества аппаратных ресурсов. Данная проблема решена только для специально синтезированных кодов, характеристики которых позволяют использовать комбинированные модели. Актуальной задачей является создание данных кодов и разработка их декодеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоголовый А.В., Крук Е.А. Многопороговое декодирование кодов с низкой плотностью проверок на четность // В сб. «Вопросы передачи и защиты информации». СПбГУАП. СПб., 2006. С.25–37.
2. Блейхут Р. «Теория и практика кодов контролирующих ошибки». М.: Мир, 1986. 576 с.
3. Wiener M., Nikolic B. A high-throughput, flexible LDPC decoder for multi-Gbps Wireless Personal Area Networks // Technical Report No. UCB/EECS-2010-177
4. А.А. Шевченко, Р.О. Масленников, А.А. Мальцев, М.В. Пантелеев, А.Ф. Клюев, А.Г. Ветчинкин. Сравнительный анализ аппаратных архитектур декодера LDPC кодов для систем радиосвязи IEEE 802.11ad // МЭС.-2014.-4.
5. Vikram Arkalgud Chandrasetty, Syed Mahfuzul Aziz. A Highly Flexible LDPC Decoder using Hierarchical Quasi-Cyclic Matrix with Layered Permutation. // Journal of Networks vol.7 NO.3 2012

УДК 519.6

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ВЫСОКОУРОВНЕВОМ ЯЗЫКЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. А. Петров
ЕГУ им. И. А. Бунина
e-mail: *xeal91@yandex.ru*
О. Н. Масина, д. ф-м. н., доц.
ЕГУ им. И. А. Бунина
e-mail: *olga121@inbox.ru*

В работе разработаны и реализованы алгоритмы стохастической оптимизации. Изучены вопросы производительности программного кода, проведен сравнительный анализ работы указанных алгоритмов с существующими алгоритмами оптимизации, входящими в состав математической библиотеки scipy языка программирования Python.

Ключевые слова: алгоритмы стохастической оптимизации, безусловная оптимизация, программирование, Python, дифференциальная эволюция.

1. Введение

Алгоритмы безусловной оптимизации непрерывных функций находят широкое применение в различных научно-технических задачах, к которым можно отнести задачи математического моделирования технических систем, задачи управления и машинного обучения [1–4]. Развитие прямых методов оптимизации является особенно актуальным направлением в связи со слабой формализуемостью, большой размерностью и многомодальностью функций, описывающих реальные явления. Среди указанных методов наиболее эффективными и универсальными являются методы стохастической оптимизации, которые основаны на имитации процессов, протекающих в живой и неживой природе. Выделяют два основных типа указанных методов: 1) оптимизация роем частиц [5], 2) эволюционное моделирование [6]. Кроме указанных методов, выделяют также класс методов Монте-Карло, случайный поиск [7], метод симуляции отжига. В настоящей работе разработаны и реализованы два алгоритма: 1) оптимизация роем частиц, 2) адаптивный случайный поиск.

Целью настоящей работы является сравнительный анализ эффективности разработанных алгоритмов со стохастическими и детерминированными алгоритмами, входящими в состав математической библиотеки scipy.

2. Алгоритм оптимизации роем частиц

Алгоритм оптимизации роем частиц состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Генерация роя частиц.

Шаг 2. Расчет масс каждой частицы.

Шаг 3. Нахождение частицы с наибольшей массой.

Шаг 4. Проверка критерия останова.

Шаг 5. Смещение частиц в сторону частицы с наилучшей массой согласно (1).

Шаг 6. Переход к шагу 2.

Под массой частицы понимается значение $f^{-1}(x)$, где f – целевая функция, x – координаты частицы. Закон перемещения частиц представляет собой модифицированный закон тяготения для гравитационного поиска [2]:

$$\begin{aligned} R &= G\frac{P}{\sqrt{M+1}}, \\ G &= \overline{g,0}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $P = X - x_m$, X – множество частиц x с учетом $f^{-1}(x_m) > f^{-1}(x_i)$, $\forall x_i \in X/x_m$, M – массы частиц, G – коэффициент притяжения, экспоненциально убывающий от начального положительного значения g до 0. Все операции в (1) являются покомпонентными.

3. Алгоритм адаптивного случайного поиска

Алгоритм адаптивного случайного поиска состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Выбор первого приближения решения ϵ.

Шаг 2. Расчет n случайных векторов $\vec{v}$ с учетом $||\vec{v}|| \leqslant \delta$.

Шаг 3. Решение задачи одномерной оптимизации $\vec{v}, \epsilon + \vec{v} \rightarrow \min$.

Шаг 4. $\epsilon := \epsilon + \vec{v}$.

Шаг 5. Проверка условия останова. Переход к шагу 2.

В данном алгоритме δ обозначает радиус гиперсферы, задающей область поиска.

4. Сравнение производительности

Рассмотренные в разделе 2 и разделе 3 алгоритмы были реализованы в виде библиотек на языке Python. Далее проведем сравнительный анализ производительности со следующими алгоритмами оптимизации: 1) дифференциальная эволюция, 2) алгоритм Пауэлла. Указанные алгоритмы входят в состав математической библиотеки scipy. В качестве целевых функций используются тестовые функции оптимизации, а именно функция Розенброка и функция Растригина.

Будем считать, что алгоритм завершается успешно, если последнее приближение решения лежит в небольшой окрестности глобального экстремума. Скорость оптимизации для указанных функций представлена на рис. 1, где приняты следующие обозначения: PSO – алгоритм оптимизации роем частиц, s_search – случайный поиск, diff_evo – дифференциальная эволюция, Powell – алгоритм Пауэлла. Нулевое время на рис. 1 указано для алгоритмов, не сходящихся к минимуму в каждом из испытаний.

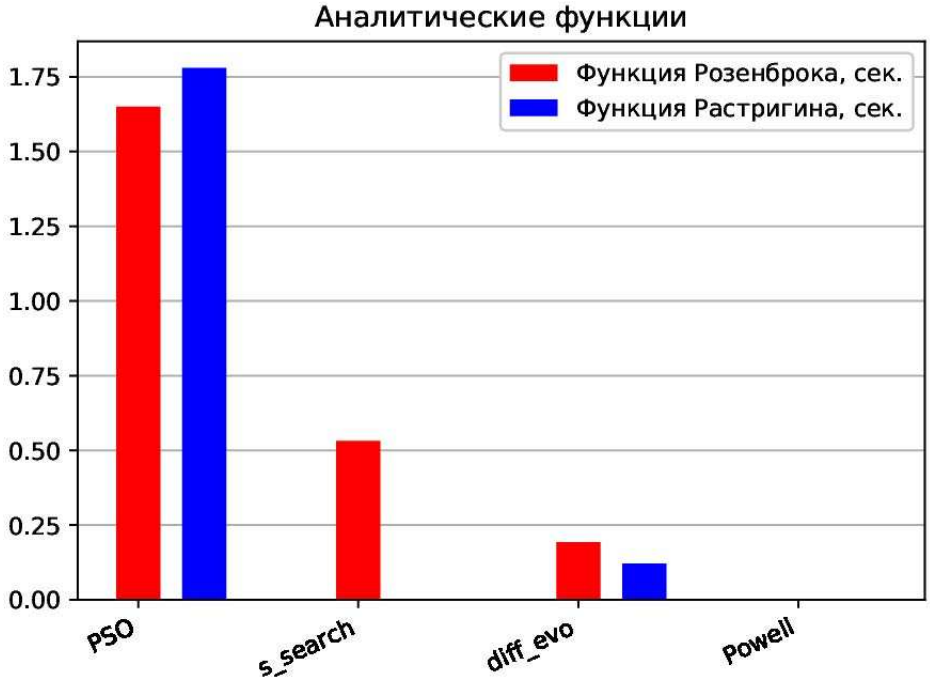


Рисунок 1 – Скорость нахождения минимума функций

Как следует из рис. 1, наиболее производительным и универсальным алгоритмом среди протестированных является дифференциальная эволюция. Алгоритм Пауэлла не показывает стабильной сходимости как для первой, так и для второй тестовой функции. Следует отметить, что эффективность реализации алгоритмов оптимизации роем частиц и случайного поиска можно оценивать как достаточно высокую, поскольку в процессе разработки основной акцент делался на простоту программного кода и минимальное использование сторонних библиотек. Для некоторых вариантов целевых функций производительность можно увеличить на 1–2 порядка.

В дальнейшем планируется проведение вычислительных экспериментов с различными комбинациями параметров для разработанных алгоритмов, улучшение поддержки многопоточного выполнения программного кода, а также разработка новых алгоритмов.

5. Заключение

Результаты, полученные в работе, могут найти применение в задачах параметрической оптимизации математических моделей динамических систем, а также в задачах машинного обучения, для которых разработка эффективных алгоритмов оптимизации является одной из ключевых проблем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике — Том 1. — М.: Мир. — 1986.

2. Plotnikova N.P., Fedosin S.A., Teslya V.V. Gravitation search training algorithm for asynchronous distributed multilayer perceptron model // Lecture Notes in Electrical Engineering. — 2015. — T. 312. — C. 417–423.

3. Druzhinina O.V., Masina O.N., Petrov A.A. Models for the control of technical systems motion taking into account optimality conditions // Proceedings of the VIII International Conference on Optimization Methods and Applications «Optimization and Applications» (OPTIMA–2017), Petrovac, Montenegro, October 2–October 7, 2017. Published at http://CEUR-WS.org 10.11.2017. — Vol. 1987. — P. 386–391.

4. Петров А.А. Структура программного комплекса для моделирования технических систем в условиях переключения режимов работы // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2018. — Т. 23. — № 4. — С. 61–64.

5. Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization // In Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks. — 1995. — P. 1942–1948.

6. Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces // Journal of Global Optimization — 1995. — V. 11. — № 4. — P. 341–359.

7. Rastrigin L.A. The convergence of the random search method in the extremal control of a many parameter system // Automation and Remote Control. — 1963. — V. 24 — №. 10 — P. 1337–1342.

УДК 004.942

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ИНФЕКЦИИ ВИРУСА ИММУНОДЕФИЦИТА ЧЕЛОВЕКА НА ОСНОВЕ АНТИРЕТРОВИРУСНЫХ И ГОРМОНАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

А. А. Савинкова
M&S Decisions
e-mail: *any1871@yandex.ru*
Б. А. Бахметьев, к. м. н., доцент
ПГМУ
e-mail: *bachmetyev@mail.ru*
Г. А. Бочаров, д. ф.-м. н., профессор
ИВМ РАН
e-mail: *bocharov@inm.ras.ru*

В данной работе мы провели построение математической модели иммунных процесов в организме человека при ВИЧ-инфекции с учетом уравнений гормонального блока, провели анализ чувствительности сформулированной модели и выполнили оптимизацию лечения антиретровирусными препаратами с помощью методов имитации отжига и симплекс-метода. В результате была продемонстрирована значимость гормонального блока в расчетах иммунных процессов при ВИЧ-инфекции и существенное превосходство метода имитации отжига над симплекс-методом в задаче оптимизации использования препаратов, позволившее существенно (до 3 раз) снизить объем используемых медикаментов при одновременном улучшении качества и длительности жизни больного.

Ключевые слова: математическое моделирование, иммунология, ВИЧ, методы оптимизации

Человеческий организм является сложной системой, в которой все части тесно взаимодействуют между собой и нельзя абсолютно достоверно описать процессы одной физиологической системы (например иммунной), не учитывая влияния других. Поэтому актуальным является одновременное моделирование сразу нескольких подсистем организма с учетом их взаимодействия.

В настоящей работе на основе модели иммунного ответа при ВИЧ-инфекции [1] разрабатывается модель динамики гормональной регуляции иммунного ответа. В исходной модели описывается динамика неинфицированных и зараженных Т-клеток и макрофагов, латентно-инфицированных Т-клеток, Т-киллеров и вирусных частиц двух конкурирующих типов – дикого типа и мутантов. В расширенной модели также описывается динамика тиреотропного гормона (ТТГ), тироксина (Т4) и трийодтиронина (Т3). Данные гормоны добавлены в систему уравнений, поскольку они оказывают существенное влияние на регуляцию процессов иммунного ответа [2]. Проведена калибровка модели по реальным данным [3]. Исследована чувствительность гормонального блока модели к вариациям параметров. В перспективе модель позволит разрабатывать оптимальные стратегии медикаментозного воздействия на процессы иммунного ответа с учётом уточнённой модели динамики и регуляции иммунных процессов в организме человека при ВИЧ инфекции.

Одна из проблем, которая имеет место при лечении ВИЧ-инфекции, состоит в том что наряду с вирусом, изначально попавшим в организм (вирус дикого типа) и поддающимся лечению, вследствие мутации также образуется некоторое количество вирусов, устойчивых к лекарствам. В результате при подавлении лекарствами вируса дикого типа, устойчивый к лекарствам вирус начинает бесконтрольно размножаться, сводя эффект от терапии на нет.

Решить эту проблему помогают структурированные терапевтические прерывания (СТП), когда на протяжении всего лечения чередуются периоды приема (ON) и "неприема"(OFF) лекарств. При правильном подборе длительности каждого отдельно взятого периода можно держать под контролем не только вирус дикого типа, но и мутировавший, устойчивый к лекарствам, вирус.

Для поиска оптимальных СТП были использованы два метода оптимизации: метод имитации отжига [4] и симплекс-метод.

Симплекс-метод представляет из себя следующий алгоритм:

- Пусть требуется найти минимум функции n переменных $f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}\right)$
- Параметры метода: α - коэффициент отражения, β - коэффициент сжатия, γ - коэффициент растяжения.

1. Выбираются $n+1$ точка $x_i = \left(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \cdots, x_i^{(n)}\right), i = 1 \ldots n+1$.
   В этих точках вычисляются значения функции:
   $f_1 = f\left(x_1\right), f_2 = f\left(x_2\right), \cdots f_{n+1} = f\left(x_{n+1}\right)$
2. Из этих точек выбираем три точки: x_h с наибольшим значением функции f_h, x_g со следующим по величине значением f_g и x_l с наименьшим значением функции f_l
3. Найдем центр тяжести всех точек, за исключением x_h.
4. Отразим точку x_h относительно x_c: $x_r = (1+\alpha)x_c - \alpha x_h, f_r = f(x_r)$.
   Если $f_r < f_l$, то строим $x_e = (1-\gamma)x_c + \gamma x_r, f_e = f(x_e)$.
   Если $f_e < f_r$, то $x_h = x_e$, идем к пункту 8.
   Если $f_r < f_e$, то $x_h = x_r$, идем к пункту 8.
   Если $f_l < f_r < f_g$, то $x_h = x_r$, идем к пункту 8.
   Если $f_g < f_r < f_h$, то меняем местами x_r и x_h, f_r и f_h, идем к пункту 5.
   Если $f_h < f_r$, то идем к пункту 5.
5. Строим $x_s = \beta x_h + (1-\beta)x_c, f_s = f(x_s)$.
6. Если $f_s < f_h$, то $x_h = x_s$, идем к пункту 8.
7. Если $f_s > f_h$, то проводим сжатие: $x_i = x_l + (x_i - x_l)/2,\ i \neq l$.

8. Выполняем проверку сходимости (сжатие симплекса решений). Если условие не выполнено, продолжаем с пункта 2.

Для метода отжига были выполнены 1000 итераций, для симплекс-метода - 3000 итераций (6000 решений). Время вычислений составило, соответственно, 30 минут и 3 часа. Метод отжига нашел решение, при котором фаза СПИДа наступает после 7500 дней, в то время как решение симплекс-метода показало результат в 4858 дней. Данные результаты свидетельствуют о существенном преимуществе метода имитации отжига перед симплекс-методом.

Результаты оптимизации приведены на рисунках 1 - 3

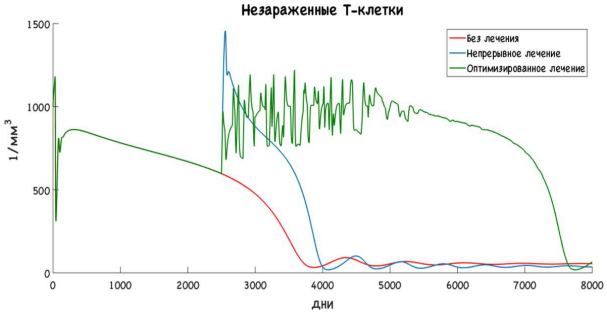


Рисунок 1 – Динамика количества незараженных Т-клеток при оптимальном лечении, непрерывном лечении и при отсутствии лечения.

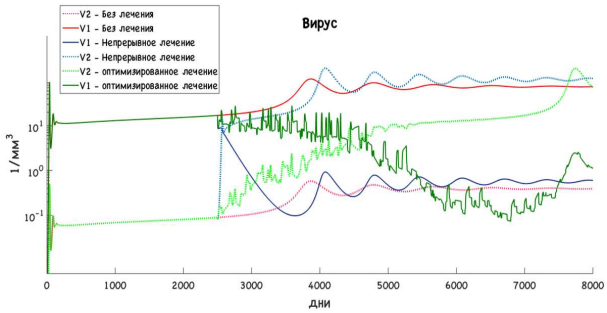


Рисунок 2 – Динамика количества вирусных частиц, соответствующая динамике Т-клеток на рисунке 1.
V_1 - вирус дикого типа (чуствительный к лекарствам),
V_2 - мутировавший вирус (устойчивый к лекарствам).

Как видно из рисунков 1, 2 структурированные терапевтические прерывания позволяют эффективно контролировать и чувствительный, и устойчивый к лекарствам вирусы, продлевая таким образом жизнь пациенту. Так же СТП снижают негативную нагрузку лекарств на организм, что позволяет пациенту легче переносить терапию подобными препаратами.

В результате выполненной работы была построенная расширенная модель иммунного ответа на ВИЧ-инфекцию, учитывающая влияние заболевания на ди-

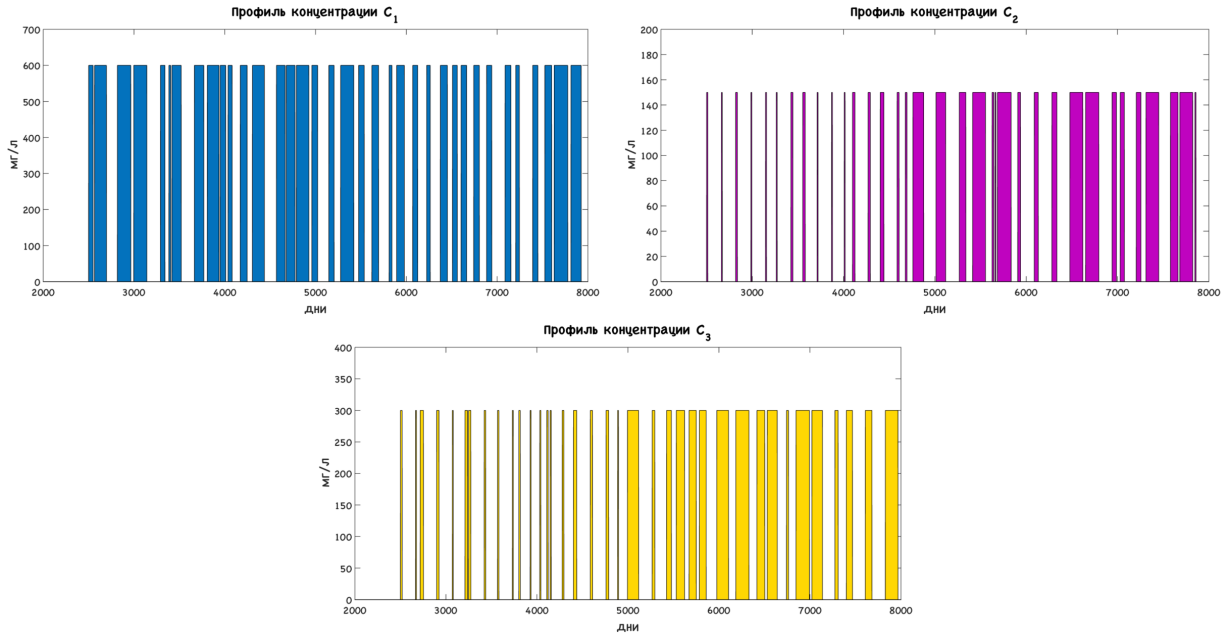


Рисунок 3 – Профили концентраций C_1, C_2, C_3 для препаратов RDV, 3TC и ZDV соответственно.
Значение C_i фиксированно во время ON-периодов (и одинаково для всех периодов) и равно нулю во время OFF-периодов.

намику некоторых (TSH, T3,T4) гормонов и соответсвенно влияние этих гормонов на иммунный ответ, а также оценены некоторые параметры для добавленных в систему уравнений. Проведена оценка чувствительности модели к новым параметрам.

Был разработан алгоритм поиска оптимального режима лечения ВИЧ-инфекции, т.е. такого, при котором не допускается перехода ВИЧ-инфекции в СПИД в течении заданного периода времени после начала заболевания и при котором суммарная величина побочных эффектов будет по возможности минимальна, но в то же время количество незараженных Т-клеток поддерживается на как можно большем уровне.

Разработанный алгоритм можно применять к поиску режима лечения не только ВИЧ, но и других инфекций. В дальнейшем можно для каждого отдельного периода искать свою оптимальную концентрацию препаратов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00356 и проекта № 17-01-00636.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hadjiandreou M.M., Conejeros R., Wilson I.. HIV treatment planning on a case-by-case basis // Inter J Biol Life Sci — 2011 — 7 — 3 — pp.148-157.

2. Черешнев В. А., Бочаров Г. А., Ким А. В. и др. Введение в задачи моделирования и управления динамикой ВИЧ-инфекции. М.–Ижевск : Институт компьютерных исследований, — 2016. — 230

3. Kapelari K., Christine Kirchlechner C., Hogler W., et. al Pediatric reference intervals for thyroid hormone levels from birth to adulthood: a retrospective study // BMC Endocrine Disorders —2008 — 8 — 1 p. 15.

4. Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P. Optimization by Simulated Annealing. // Science — 1983 — 220 pp. 671-680

5. Розен В. Б..Основы эндокринологии: Учебник — 3-е изд. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — 384 с.

УДК 004.42

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕРАКТИВНЫХ ЧАТ-БОТОВ

З.Р. Таилова
ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»
e-mail: *dgumail@mail.ru*
Т.С. Лугуев, к.ф.-м.н.
ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»
e-mail: *dgumail@mail.ru*

В работе рассматриваются аспекты программной реализации вопросно-ответной системы в виде чат-бота, предоставляющего информацию по курсу валют.

Ключевые слова: вопросно-ответная система, чат-бот, программная реализация.

1. Введение

Последнее время технологические инновации открывают все больше возможностей находить, делиться информацией и взаимодействовать с другими пользователями. В особенности, значительный прогресс произошел с ростом диалоговых интерфейсов [1].

В связи с этим, актуальной задачей является реализация вопросно-ответных систем, работающих в определенной области для выполнения поддержки людей и увеличения эффективности их деятельности.

В настоящей работе рассматриваются аспекты программной реализации вопросно-ответной системы в виде чат-бота, предоставляющего информацию по курсу валют.

2. Платформы

Несколько платформ, включая Facebook, KiK, Telegram и Slack, размещают приложения для чат-ботов с несколькими целями, начиная от электронной коммерции, здравоохранения, развлечений, производительности и продвижения образа жизни. Для реализации настоящего исследования использована платформа Telegram для создания чат-ботов [2].

В частности, использовался программный интерфейс Telegram API Bot, позволяющий программировать собственного бота. API включает в себя объекты и команды, предназначенные для установки поведения бота Telegram. Bot API представляет из себя HTTP-интерфейс для работы с ботами в Telegram.

3. Особенности реализации

Для достижения цели работы решены следующие основные задачи:

1) разработка пользовательского интерфейса интерактивного чат-бота: команды, описание и т.д.;
2) создание вопросно-ответной системы бота

3) публикация программной системы на хостинге.

Для начальной инициализации бота использовался бот @BotFather, который позволил с помощью комады /newbot выбрать имя создаваемого бота. Для осуществления данной цели был разработан бот @Owl24Bot, который выполняет реализует следующий алгоритм действий:

1) Приветствие.
2) При вводе трехбуквенного общепринятого обозначения валюты выдает курс валюты в рублях.
3) Автоматическая загрузка информации о текущем курсе валют с официального сайта Центрального банка Российской Федерации http://www.cbr.ru
4) Демонстрация через интерфейс чат-бота полученного значения курса.

Алгоритм действий, реализованный в чат-боте приведен на рисунке 1.

Рисунок 1 – Алгоритм действий, реализованный в чат-боте

Для реализации загрузки курсов валют выполнялись следующие команды на языке Python:

```
# текущая дата в нужном формате для подстановки в url.
self.date = dt.now()
# т.к. ЦБ РФ не публикует курс в вс/пн, ставим курс на сб
if self.date.weekday() == 6:
  self.date = self.date + td(days=-1)
elif self.date.weekday() == 0:
  self.date = self.date + td(days=-2)
self.date = self.date.strftime('%d/%m/%Y')
# url с текущей датой
url = 'http://www.cbr.ru/scripts/XML_daily.asp?date_req=' + self.date
file = UR.urlopen(url)
```

Загружаемый файл с курсами валют представлен в формате XML и требует дополнительного анализа для извлечения информации о запрошенной валюте пользователем. Для этого использовались следующие команды:

```
tree = ET.parse(file)
root = tree.getroot()
self.db = {valute[1].text: [valute[2].text,
                            valute[3].text,
                            valute[4].text] for valute in root}
```

```
self.currs = [valute[1].text for valute in root]
```

Кроме того, реализована функция извлекающая определенную валюту из загруженных и предобработанных данных:

```
def send_rate(self, name):
    query = name[1:]
    reply='Курс на '+self.date+':\n{0}{1}={2} рублей.'.format(self.db[query][0],
                                                              self.db[query][1],
                                                              self.db[query][2])
    return reply
```

Размещение реализованной вопросно-ответной системы выполнялось на облачном сервисе Heroku. Алгоритм размещения, реализованного чат-бота следующий:

1) Регистрация на Heroku
2) Вход на сервер через Heroku CLI и команды *heroku login*
3) Создание приложения командой *cd %directory% $ heroku create %app_name% --buildpack http://github.com/heroku/heroku-buildpack-python.git*
4) Перемещение в директорию где расположен бот: cd %directory% — %app_name% — название приложения
5) Создание необходимых файлов конфигурации runtime.txt:

worker: python %not_web_app%.py // chatbot.py

6) Загрузка бота через git.

Реализованная программная система доступна в сети Интернет для тестирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Майкотова Г.Т. Будущее в банковском секторе: роботизация. Инновационные научные исследования: теория, методология, практика. Сборник статей победителей III международной научно-практической конференции. 2016. С. 84-86.
2. Иванов А.Д. Чат-бот в Telegram и вконтакте как новый канал распространения новостей // Вестник Волжского университета им. В.Н. Татищева . – 2016. – том.1 – номер 3. – с. 126-132.

УДК 004.514.6

МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ С ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОГО ИНТЕРФЕЙСА

С.И. Трусов, магистрант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *trusov-s1@yandex.ru*
О.В. Конюхова, к.т.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *oks1112@yandex.ru*

1. Введение

Эффективность работы пользователя зависит не только от качества оборудования и программного обеспечения, но и от доступности их возможностей для пользователя, а это определяется качеством пользовательского интерфейса (ПИ), в частности, важной его составляющей – диалоговой компоненты, определяющей, во многом, дружественность ПИ к конечному пользователю.

Ниже кратко рассматриваются методы спецификации ПИ и возможности их применения на разных этапах разработки ПИ.

2. Методы спецификации пользовательского интерфейса

Существует несколько групп методов описания ПИ [1 – 9].

1. Методы, основанные на графическом представлении взаимодействия пользователя с программной системой: конечные автоматы *FSM* (*Finite State Machines*), сети Петри, диаграммы переходов состояний в языке *UML* (*Unified Modeling Language*).

2. Методы, основанные на построении иерархии целей и задач: метод иерархического анализа задач *HTA* (*Hierarchical Task Analysis*), нотация *GOMS* (*Goals, Oparators, Methods, Selection rules*), нотация действий пользователя *UAN* (*User Action Notation*).

3. Лингвистические методы, основанные на формальных грамматиках: метод описания грамматики в форме Бэкуса-Наура *BNF* (*Backus-Nauru Form*) [1, 3] и грамматику действий задачи *TAG* (*Task Action Grammar*) [1, 3].

4. Методы создания формализованной модели системы – определения процессов, описывающих поведение системы и правила их взаимодействия: взаимодействующие последовательные процессы Хоара *CSP* (*Communicating Sequential Processes*), модель акторов.

Применение этих методов позволяет создать модель системы, которую можно анализировать и оптимизировать, выявить набор правил, по которым модель может изменяться, и сгенерировать программный код для ПИ.

Конечные автоматы [4] широко применяются при разработке ПИ из-за взаимосвязи элементов управления между собой как в пространстве, так и во времени.

Существует много преимуществ использования программного обеспечения конечных автоматов: простота (наработан большой опыт техники моделирования систе-

мы с помощью FSM); гибкость (можно изменить и перенастроить поведение системы во время отладки и даже на стадии тестирования); доступность (низкие накладные расходы при реализации).

В тоже время, при реализации больших систем могут возникать сложности: FSM следует использовать только тогда, когда поведение системы может быть разложено на отдельные состояния с четко определенными условиями переходов между ними; в конечных автоматах не удается эффективно следовать принципам логического параллелизма; современные системы становятся более сложными, количество входов увеличивается, и контролировать систему становится труднее.

Методы анализа свойств *сетей Петри* [7] основаны на использовании графов достижимых (покрывающих) маркировок, решении уравнения состояний сети. Применяются также вспомогательные методы редукции, позволяющие уменьшить размер сети Петри с сохранением её свойств, и декомпозиции исходной сети на подсети.

Достоинства сетей Петри: возможность моделирования параллельных независимых событий и конфликтных взаимодействий между процессами; возможность введения любой степени иерархической детализации описываемых подсистем модели; возможность широкого анализа определенных состояний сети.

Недостатки сетей Петри: высокая трудоемкость анализа сетей большой размерности при описании реальных процессов; недостаточная мощность для содержательного моделирования систем; сложность отражения преобразования информации при срабатывании переходов.

Диаграммы переходов состояний в языке UML – это, по существу, диаграмма состояний из теории автоматов со стандартизированными условными обозначениями, которая может определять множество систем [6].

Диаграммы состояний в UML более наглядны и выразительны при составлении диаграмм, но их применение требует большей подготовленности пользователя и предъявляет более высокие требования к инструментам моделирования.

Достоинства UML: объектная ориентированность, мощный и всесторонний набор типов моделей (структурные модели, поведенческие модели, механизмы управления моделями), имеет стандарты, получившие широкое распространение.

Недостатки: избыточность, неточности в семантике, проблемы в процессе внедрения и изучения (у большинства пользователей UML отсутствуют предварительные навыки), формальный механизм визуализации, многие конструкции используются редко, существуют пробелы и конфликты при более глубоком согласовании концепций из моделей различных типов. Таким образом, использование данного языка является актуальным далеко не во всех ситуациях.

Иерархический анализ задач HTA [1, 3] опирается на целезависимое поведение системы при решении задачи, содержащее в себе иерархию задач, связанных между собой планами. На самом высоком уровне задача рассматривается как состоящая из операций, а сама операция определяется с точки зрения ее цели. Операцию можно разбить на подоперации.

Преимущества HTA: иерархическое описание необходимо разрабатывать только до того момента, когда оно необходимо для цели анализа; иерархическая структура HTA позволяет сосредоточиться на важнейших аспектах задачи, которые могут повлиять на безопасность системы.

Недостатки HTA: аналитику необходимо наработать навыки для эффективного анализа задач; поскольку HTA подразумевает сотрудничество со всеми заинтересованными сторонами, это приводит к значительным затратам времени и ресурсов.

Нотация *GOMS* [1, 3, 5] разработана С. Кардом, Т. Мораном и А. Ньюэллом в 80-х годах 19 века. Суть метода заключается в процессе решения задачи пользователем в виде иерархии целей, методов, операторов и правил выбора между конкурирующими целями, методами и операторами. В основе разработки модели лежит следующий основной принцип: пользователи действуют рационально для достижения своих целей.

Преимущества метода: наглядность, простота и удобство понимания для конечных пользователей; модель не требует создания рабочего прототипа; анализ по этой модели может быть автоматизирован.

Недостатки: метод не учитывает индивидуальных различий пользователей; метод не учитывает возникновение случайных ошибок в работе; что в процессе работы происходит самообучение, а при простое – забывание; не является строго формальным.

Использованием метода GOMS наиболее целесообразно на ранних этапах создания ПИ, поскольку позволяет пользователям и разработчикам ПИ «говорить на одном языке».

Метод UAN первоначально предназначался для моделирования динамики взаимодействующих систем [2, 5]. UAN-нотация разработана в 80-х годах Антонио Сиочи, Х. Рексом Хартсоном и Деборой Хикс.

Основной элемент анализа – пользовательская задача; интерфейс рассматривается как иерархия неупорядоченных задач; последовательность действий в рамках одной задачи не зависит от других. Задача описывается на нескольких уровнях иерархии. Высший уровень включает все возможные задачи, низший – элементарные действия.

В UAN учитываются только корректные действия пользователей, нотация не является строго формальной; не учитываются действия, инициированные самой программной системой.

Однако UAN обладает богатым и компактным языком для описания действий пользователя, позволяет наиболее наглядным способом описать взаимодействие между пользователем и системой.

Отличительной особенностью методов *BNF* и *TAG* является описание алгоритма решения задачи в виде диалога между человеком и программной системой на некотором языке. Структура и логика этого диалога описывается совокупностью грамматических правил, в которых терминальные символы обозначают элементарные действия пользователя (использование физических устройств ввода, действия с графическими интерактивными компонентами на экране), а нетерминальные символы – более сложные действия, состоящие из набора более простых (например, выбрать пункт меню, удалить файл и т.д.). Грамматические правила TAG включают в себя дополнительные параметры: условия, при которых возможно выполнение действия и (или) семантические пояснения выполняемого действия. Со временем возможности грамматик были расширены для описания диалогов, ориентированных на использование графики.

При построении диалога с помощью BNF или TAG учитываются опыт и знания пользователей о порядке решения задачи, что позволяет в некоторой степени понять ее суть. Процесс моделирования и оценки диалога может быть достаточно легко автоматизирован на основе стандартных программных средств языкового анализа.

Однако, системы обозначений BNF и TAG являются недостаточно удобными и понятными конечным пользователям для анализа задачи на начальных этапах разработки ПИ.

Взаимодействующие последовательные процессы CSP – формальный язык для описания моделей взаимодействия в параллельных системах [9]. Относится к математическим теориям параллелизма, известных как исчисление процессов (или алгебра процессов), основанных на передаче сообщений по каналам.

Теория CSP была впервые описана в статье Чарльза Э. Хоара в 1978 году. Впоследствии под влиянием идей, заимствованных из модели акторов Карла Хьюитта, теория была значительно изменена.

CSP позволяет описывать системы в терминах компонентных процессов, которые работают независимо друг от друга и взаимодействуют друг с другом исключительно через передачу сообщений.

При разработке параллельных программ программисту необходимо очень детально описать логику работы и координации. Избежать этого можно при использовании высокоуровневых моделей, одной из которых является *модель акторов* [8].

В такой архитектуре вычисления реализуются набором акторов, каждый из которых: имеет уникальный идентификатор; может посылать сообщения другим акторам и принимать их; может реагировать на поступающие сообщения; имеет внутреннее состояние, которое может влиять на его поведение; в ответ на некоторое сообщение может: изменить свое состояние; изменить поведение, которое будет использоваться при обработке следующего полученного сообщения; послать одно или несколько сообщений другим акторам; создать одного или нескольких новых акторов.

Модель акторов имеет большое практическое значение, являясь подходящим методом для создания распределённых систем и удобных в написании и сопровождении программ.

Формальные методы легко реализуемы программными средствами, позволяют построить строгую модель логики диалога ПИ. Однако для их использования требуются соответствующие знания и подготовка, что не позволяет их использовать на всех этапах разработки ПИ.

3. Заключение

Для проектирования взаимодействия пользователей с программной системой (логики диалога) при разработке ПИ, ни одну из существующих нотаций невозможно применять в одиночку. Используя системный подход, можно прийти к выводу о необходимости сочетания различных методов на разных этапах разработки ПИ: более наглядных и понятных конечному пользователю на ранних этапах разработки ПИ и хорошо формализуемых более поздних этапах реализации и исполнения.

В работе [5] предложена методика разработки ПИ, заключающая в последовательном описании ПИ с использованием методов GOMS, UAN и CSP.

Более того, опираясь на возможности формальных грамматик, можно предложить методику, включающую в себя метод GOMS и лингвистические методы. Цели и методы GOMS будут соответствовать нетерминальным грамматическим символам, а операторы - терминальным.

Также можно рассматривать методику создания ПИ, базирующуюся на использовании методов GOMS, UAN и модели акторов. Базовые задачи UAN будут соответствовать элементарным (базовым) акторам, более сложные задачи – комплексным акторам.

Все эти методики объединяет нотация GOMS как наиболее наглядная, простая и удобная для спецификации ПИ на ранних этапах его разработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cognitive models. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.dis.uniroma1.it/~ catarci/HCIslides/e3-chap-12.pdf.- Систем. требования: P IV; 64 Мб ОЗУ; Windows 98 и выше; SVGA 32768 и более цветов; 640×480; мышь; IE 4.0 и выше.- Загл. с экрана.- Яз. англ.
2. Hartson Rex H., Gray Philip D. Temporal Aspects of Tasks in the User Action Notation. HUMAN-COMPUTER INTERACTION, 1992, Volume 7. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://arwic.com/ uploads/ course/ documents/ 1351144366Sample_ Paper_2.pdf3.- Систем. требования: P IV; 64 Мб ОЗУ; Windows 98 и выше; SVGA 32768 и более цветов; 640×480; мышь; IE 4.0 и выше.- Загл. с экрана.- Яз. англ.
3. User Interface Languages: a survey of existing methods [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://www.jpbowen.com/pub/TR-5-89.pdf.- Систем. требования: P IV; 64 Мб ОЗУ; Windows 98 и выше; SVGA 32768 и более цветов; 640×480; мышь; IE 4.0 и выше.- Загл. с экрана.- Яз. англ.
4. Yiu Joseph. Software based Finite State Machine (FSM) with general purpose processors. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www2.keil.com/docs/ default-source/ default-document-library/software-based-finite-state-machine-(fsm)-with-general-purpose-processorsf4f837f788736c26abc1ff00001d2c02.pdf.- Систем. требования: P IV; 64 Мб ОЗУ; Windows 98 и выше; SVGA 32768 и более цветов; 640×480; мышь; IE 4.0 и выше.- Загл. с экрана.- Яз. англ.
5. Конюхова О.В. Графический пользовательский интерфейс для автоматизированных систем раскроя изделий сложной формы [Текст]: дис. канд. техн. наук 05.13.06: защищена 27.06.2006: утв. 13.10.2006/ Конюхова О.В.- Орёл, 2006.- 171 с.
6. Новиков Ф.А. Учебно-методическое пособие по дисциплине «Анализ и проектирование на UML». - СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. - 286 с.
7. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем: Пер. с англ. - М.: Мир, 1984.- 264 с., ил.
8. Программная модель актеров – Русский блог по разработке для HPC. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://blogs.msdn.microsoft.com/ru-hpc/2009/11/25/73/.- Систем. требования: P IV; 64 Мб ОЗУ; Windows 98 и выше; SVGA 32768 и более цветов; 640×480; мышь; IE 4.0 и выше.- Загл. с экрана.- Яз. рус.
9. Хоар Ч. Взаимодействующие последовательные процессы. – М.: Мир, 1989. – 264 с.

ТЕХНОЛОГИЯ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ОТ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СЕНСОРОВ

П.В. Харечкин, к.т.н.
ООО «Инфоком-С»
e-mail: *p.harechkin@infocom-s.ru*
В.В. Науменко, к.т.н.
ООО «Инфоком-С»
e-mail: *v.naumenko@infocom-s.ru*
О.В. Дорофеев, аспирант
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»
e-mail: *o.dorofeev@infocom-s.ru*
В.В. Копытов, д.т.н., проф.
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»
e-mail: *v.kopytov@infocom-s.ru*

В статье предлагается технология и архитектура системы высокоскоростного потокового сбора и обработки сенсорных данных, позволяющая сочетать в себе достоинства облачной модели сбора, хранения и обработки данных, а также технологии «туманных вычислений».

Ключевые слова: туманные вычисления, облачные вычисления, информационные сенсоры, обработка данных.

В настоящее время задачи сбора и агрегирования данных мониторинга от разнородных территориально распределенных устройств решаются с использованием облачных технологий с применением программных средств, использующих кластерную архитектуру центра обработки данных. Однако вследствие возрастающего объема хранимых и передаваемых данных, облачные архитектуры не позволяют наращивать требуемую мощность. Решение данной проблемы возможно путем использования технологии «туманных вычислений», позволяющей обеспечить эффективное, надежное и безопасное взаимодействие большого множества устройств между собой, а также с локальными и с облачными центрами обработки данных (ЦОД).

Само понятие «туманные вычисления» возникло в 2012 году после публикации статьи компании Cisco «Туманные вычисления и их роль в создании Интернета вещей» [1]. В 2015 году с целью выработки единых подходов к реализации технологии «туманных вычислений» компаниями ARM, Cisco, Dell, Intel, Microsoft, а также Принстонским Университетом в США был создан консорциум Open Fog [2], а в 2017 году была выпущена первая версия спецификации, описывающей архитектуру «туманных вычислений» [3].

Архитектура «туманных вычислений» позволяет переместить вычисления, хранение, связь, системы управления и принятия решений на оконечные устройства, имеющие ограниченные ресурсы и непосредственную связь с физическим миром и находящиеся за пределами «облака». Поэтому совместное использование облачных и туманных вычислений позволяет построить опти-

мальное решение с точки зрения производительности, надежности, масштабируемости и минимизации экономических издержек.

В данной статье авторами предлагается подход, позволяющий сочетать в себе достоинства облачной модели сбора, хранения и обработки данных, а также технологии «туманных вычислений», и адаптироваться к различным задачам мониторинга и ситуационного управления. Важной особенностью предлагаемой технологии является возможность как создания новых ЦОД, так и функционального и технологического расширения уже существующих и функционирующих автоматизированных систем управления и контроля.

Базовыми элементами предлагаемой технологии являются драйвера устройств или внешних систем мониторинга, а также приложения для выполнения задачи анализа, прогнозирования или предсказательного моделирования.

Технология предполагает три варианта организации сбора и обработки данных в зависимости от поставленных задач: сбор первичных данных без использования предварительной обработки, предварительная обработка данных на устройствах сопряжения, сбор данных и аналитическая обработка данных с использованием устройств сопряжения.

Сбор первичных данных без использования предварительной обработки предполагает, что обработка данных реализована только в облаке (кластере) ЦОД, а драйвера выполняют функцию преобразования интерфейса устройства для работы с интеграционной шиной облака. Драйвер может быть установлен как на серверах интеграционной шины ЦОД, так и на отдельных устройствах, вынесенных за пределы ЦОД.

Предварительная обработка данных на устройствах сопряжения заключается в том, что часть задач по обработке данных (предварительная обработка данных) выполняется драйвером устройства, то есть в хранилище кластера записываются данные после предварительной обработки, при этом дальнейшую обработку данных выполняет облако ЦОД. Снижение нагрузки на кластер ЦОД обеспечивается использованием устройств промежуточной обработки данных, вынесенных за пределы ЦОД, на которых устанавливается драйвер устройства.

Сбор данных и аналитическая обработка данных с использованием устройств сопряжения предполагают, что задачи по обработке данных выполняются внешними устройствами сопряжения, реализующими одновременно функции драйвера и вычислительного модуля. При этом программное обеспечение устройства должно реализовывать межмашинное взаимодействие с другими устройствами, позволяя таким образом объединять их в кластер для совместного выполнения вычислительных задач.

Для реализации каждого из вариантов организации сбора и обработки данных необходимо унифицированное технологическое решение, позволяющее адаптироваться под конкретные задачи ЦОД. Как показывает практика [4], таким решением может выступать использование недорогих одноплатных компьютеров на Linux [5] в качестве устройств для размещения драйверов, таких как Raspberry Pi (Raspberry Pi Trading, Ltd), Khadas VIM (Shenzhen Wesion Technology Co., Ltd), Odroid XU-4 (Hardkernel Co., Ltd) и др. Таким образом, драйвер устройства позволяет частично реализовать функционал «туманных

вычислений» путем выноса части функций по обработке данных за переделы ЦОД. В этом случае драйвер устройства будет состоять из блока сопряжения с устройством мониторинга (сенсорами), вычислительного блока и блока сопряжения с интеграционной шиной ЦОД (рисунок 1).

Блок сопряжения с устройством мониторинга и блок сопряжения с интеграционной шиной ЦОД выполняют задачи по преобразованию данных. При этом вычислительный блок должен позволять выполнять набор стандартных функций для работы с временными рядами значений измерительных данных, например, взятие среднего значения за интервал, экспоненциальное сглаживание, преобразование Фурье и др., либо выполнять расчет по заранее заданной математической функции.

При этом приложение для выполнения задач анализа, прогнозирования или предсказательного моделирования будет состоять из вычислительной части, в которую входят службы потоковой обработки данных и службы обработки данных по расписанию, а также интерфейса, позволяющего выполнять настройку драйвера устройства под конкретную вычислительную задачу. Настройка драйвера устройства включает в себя настройку параметров первичной обработки измерительных данных при помощи математических функций обработки временных рядов, настройку подключения к устройствам (сенсорам), а также настройку подключения к интеграционной шине облака. Структура приложения для выполнения задач анализа, прогнозирования или предсказательного моделирования и драйвера устройства будут выглядеть следующим образом (рисунок 1).

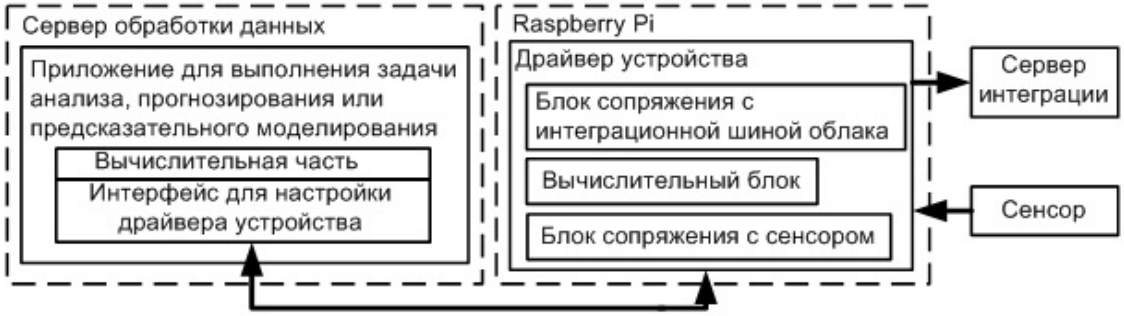


Рисунок 1 – Структура приложений для реализации предварительной обработки данных на устройствах сопряжения

Таким образом, данная схема позволяет реализовать выполнение части задач по обработке данных на устройствах, вынесенных за пределы ЦОД, снизив тем самым нагрузку на вычислительный кластер ЦОД.

Для реализации распределенных вычислений, полностью выполняющих вычислительные задачи анализа, прогнозирования или предсказательного моделирования за пределами облака ЦОД, потребуется специализированное программное обеспечение, способное реализовать архитектуру «туманных вычислений» в соответствии со спецификацией Open Fog [3]. Так, например, в настоящее время компания Cisco ведет работы по созданию программного обеспечения для выпускаемого сетевого оборудования [6], способного обеспечить защищенную межмашинную коммуникацию для реализации распределенных вычислений на периметре сети. Однако это потребует затрат на модернизацию

сетевой инфраструктуры, что создаст трудности при развертывании новых ЦОД. Поэтому наиболее оптимальным решением является использование, как и в случае предварительной обработки данных, одноплатных компьютеров. На данный момент наиболее подходящим вариантом для реализации распределенных вычислений является платформа Greengrass от компании Amazon [7]. Платформа Greengrass представляет собой контейнер исполнения программного модуля, запускаемый на устройстве Greengrass и позволяющий устройствам обмениваться информацией между собой вне зависимости от наличия подключения к внешней сети. Программный продукт Greengrass полностью совместим с большинством Linux платформ, используемых на одноплатных компьютерах. Для функционирования платформы Greengrass требуется внешний сервис AWS Greengrass, управляющий распределенными вычислениями на устройствах.

В этом случае приложение для выполнения задач анализа, прогнозирования или предсказательного моделирования будет состоять из вычислительной части, в которую входят службы интеграции с сервисом AWS Greengrass и службы потоковой обработки данных, а также интерфейса, позволяющего выполнять настройку параметров вычислительных задач, выполняемых платформой Greengrass. При этом служба потоковой обработки данных выгружает обработанные данные из облака AWS Greengrass и сохраняет их в хранилище данных кластера. В свою очередь, на устройствах сопряжения развертываются локальные приложения Greengrass Core, взаимодействующие с сервисом AWS Greengrass, а также службы сопряжения подключаемых информационных сенсоров, поддерживающие Greengrass API.

Структура приложения для выполнения задачи анализа, прогнозирования или предсказательного моделирования и драйвера устройства будет выглядеть следующим образом (рисунок 2).

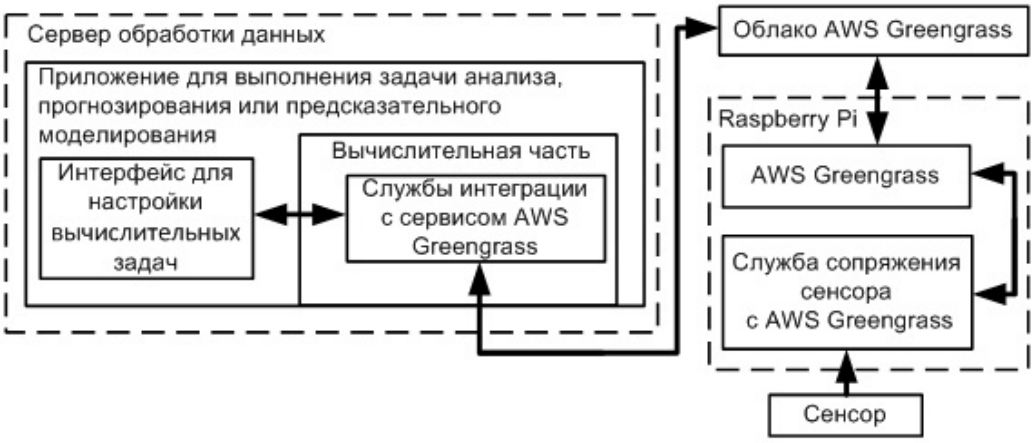


Рисунок 2 – Структура приложений для реализации сбора и аналитической обработки данных с использованием устройств сопряжения

Основными ограничениями использования распределенных вычислений с использованием устройств сопряжения являются:

- нахождение устройств сопряжения в одной подсети;
- наличие устойчивого сетевого соединения и достаточной для выполнения вычислительных задач пропускной способности сети между устройствами, ме-

жду каждым из устройств и облаком AWS Greengrass, а также между ЦОД и облаком AWS Greengrass;
- локальность входных данных, то есть исходными данными для вычислительной задачи могут служить только измерительные данные, полученные от информационных сенсоров, подключенных к устройствам Greengrass.

Достоинством предлагаемой технологии и архитектуры является возможность комбинирования различных технологических решений централизованной и распределенной обработки данных, что позволяет адаптироваться к различным задачам мониторинга и ситуационного управления, обеспечивая тем сам снижение временных затрат на создание и эксплуатацию. Недостатком предлагаемой технологии и архитектуры является зависимость от подключения к внешним сервисам для выполнения «туманных вычислений» с использованием устройств сопряжения. Поэтому дальнейшее совершенствование данного направления исследований связано с необходимостью создания открытого программного обеспечения для «туманных вычислений» на базе Linux платформ.

Настоящее исследование выполнено в рамках реализации научного проекта по теме «Разработка средств высокоскоростной обработки данных информационных сенсоров в системах ситуационного управления» в рамках Федеральной целевой программы по исследованиям и разработкам 2014-2020 (уникальный идентификатор RFMEFI57916X0135) при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bonomi F., Milito R., Zhu J., Addepalli S. Fog computing and its role in the Internet of things, in Proc. 1st Edition MCC Workshop Mobile Cloud Comput., Helsinki, Finland, pp. 13-16.
2. OpenFog Reference Architecture for Fog Computing [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://knect365.com/cloud-enterprise-tech/article/0fa40de2-6596-4060-901d-8bdddf167cfe/openfog-reference-architecture-for-fog-computing (дата обращения: 17.09.2018).
3. OpenFog Reference Architecture for Fog Computing [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.openfogconsortium.org/wp-content/uploads/OpenFog_Reference_Architecture_2_09_17-FINAL.pdf (дата обращения: 17.09.2018).
4. Nandor Verba, Kuo-Ming Chao, Anne James, Daniel Goldsmith, Xiang Fei, Sergiu-Dan Stan Platform as a service gateway for the Fog of Things. Advanced Engineering Informatics. vol. 33. pp. 243-257.
5. Catalog of 98 open-spec, hacker friendly SBCs [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://linuxgizmos.com/catalog-of-98-open-spec-hacker-friendly-sbcs/ (дата обращения: 17.09.2018).
6. Cisco IoT Networking. Deploy. Accelerate. Innovate [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.cisco.com/c/dam/en/us/products/collateral/se/internet-of-things/brochure-c02-734481.pdf (дата обращения: 17.09.2018).
7. AWS Greengrass [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://aws.amazon.com/greengrass/ (дата обращения: 17.09.2018).

УДК 004.912

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ СИНТАГМ ДЛЯ ЗАДАЧ МАШИННОГО ПЕРЕВОДА

А.А. Хорошилов, к.т.н.
ФИЦ ИУ РАН
e-mail: *a.a.horoshilov@mail.ru*
Д.А. Садовников
ФИЦ ИУ РАН
e-mail: *fos2000@yandex.ru*

В статье описывается использование обобщенных синтагм для улучшения качества машинного перевода в гибридных системах или для добавления “новых” языков в системы машинного перевода. Данный метод основан на автоматическом формировании синтаксической модели языка без участия человека, основываясь на использовании процедур морфологического анализа. Статья подготовлена при поддержке гранта РФФИ (проект 18-37-00110 мол_а)

Ключевые слова: машинный перевод, статистические методы, гибридный машинный перевод, морфологический анализ, декларативные средства, синтаксическая структура текста.

1. Введение

Задача автоматического перевода текстов исследуется уже несколько десятилетий. На данный момент исследователи смогли добиться приемлемого качества перевода для некоторых языковых пар. Одним из лидеров в данном направлении является компания Google, их продукт поддерживает 103 языка. В то же время в мире на данный момент насчитывается более 7 тыс. языков. Быстро наращивать число поддерживаемых языков на основе технологий машинного обучения, базирующихся на использовании параллельных текстов в настоящее время невозможно из-за их малого количества для большинства языков. В работе предлагается метод, основанный на использовании статистических данных о синтаксической структуре текстов языка, получаемых при обработке больших массивов одноязычных текстов.

2. Существующие методы машинного перевода

В соответствии с современными теоретическими представлениями основная идея машинного перевода текстов с одного естественного языка на другой заключается в адекватной передаче смыслового содержания текста на входном языке средствами выходного языка. Другими словами, в процессе машинного перевода должен производиться анализ смысловой структуры исходного текста, заключающийся в трансформации исходного представления текста в его формализованное представление, соотнесение выявленных наименований понятий и их взаимосвязей на исходном языке с системой понятий на выходном языке, построение формализованного представления смысловой структуры тек-

ста на выходном языке и генерация текстового представления лингвистическими средствами выходного языка.

Сейчас в рамках современных промышленных технологий машинного перевода (МП) существует несколько подходов. Традиционный метод [1] заключается в использовании лингвистических правил для анализа и синтеза текстов на естественном языке. Для создания такого переводчика необходимо разработать совокупность грамматических правил для входного и выходного языков и сформировать словарные базы. От количества и качества лингвистических алгоритмов зависит качество получаемого в итоге перевода. В качестве примера таких систем можно привести ЭТАП-3, Abbyy Compreno.

В основе статистического метода машинного перевода [2-3] лежит статистическое вычисление вероятности совпадений фраз из исходного текста с фразами, которые хранятся в базе системы перевода. На сегодняшний день продуктивными разработками в этой области занимаются такие крупные компании как Microsoft, Yandex, до 2016 г. Google. Они предлагают онлайновые сервисы перевода на своих порталах. Данными компаниями неоднократно говорилось о преимуществе именно статистического метода перевода. Причиной успеха они называли обширные словарные базы, имеющие необходимое количество сегментов текста для их правильного перевода. Для работы таких систем необходимы огромные базы параллельных текстов, где попарно хранятся словосочетания и их переводы, так называемые N-граммы. Система подбирает вариант перевода имеющий наиболее высокий процент совпадений. Существенная проблема таких систем состоит в том, что для корректной работы такой системы необходимо иметь огромное число параллельных N-грамм. А учитывая, что перевод текстов в различных предметных областях отличается лексическим составом и синтаксической структурой текстов, необходимо располагать огромными массивами тематических параллельных текстов, что существенно ограничивает сферу применения этого подхода.

В последнее время стали появляться новые типы систем, основанные на использовании нейронных сетей при переводе текстов [4-5]. С помощью внедрения методов основанных на использовании нейронных сетей в настоящее время переводчик компании Google значительно повысил показатели эффективности своей системы. Но этот подход также не лишен недостатков. Среди них можно назвать относительно низкую скорость самообучения данных систем при работе с небольшими объемами корпусов текстов. Низкую эффективность демонстрируют и системы, основанные на статистических методах перевода, также требующие при их обучении значительных массивов параллельных текстов.

3. Метод обобщенных синтагм

В настоящее время существует множество инструментов, позволяющих получать на этапе морфологического анализа слов грамматическую информацию с вероятностью ошибки менее 0.01 [6]. Поскольку точность таких результатов достаточно высока, то на их основе можно сформировать классы слов,

имеющие одинаковые наборы грамматических признаков, соответствующие их формам представления в сходных контекстных окружениях.

Таким образом, при разработке универсальной синтаксической модели, подходящей для текстов на различных языках авторы исходили из следующей гипотезы: одинаковым последовательностям обобщенных символов классов слов (обобщенным синтагмам) должны соответствовать одинаковые синтаксические структуры. При этом предполагалось, что такая гипотеза верна для любых синтаксических моделей и может быть полезна при решении как глобальных, так и частных задач синтаксического анализа и синтеза.

В процессе исследований был разработан алгоритм, позволяющий автоматически формировать словарь обобщённых синтагм для синтаксической модели языка. Далее приведем сам алгоритм:

Шаг 1. Разделить текст на предложения и выполнить обработку каждого анализируемого предложения процедурой морфологического анализа[6]. Получить для каждого слова обобщенный символ класса.

Шаг 2. Сформировать из обобщенных символов каждого предложения последовательности.

Шаг 3. Сформировать из получившихся последовательностей подпоследовательности размером от трех до длины исходной последовательности.

Шаг 4. Добавить подпоследовательности, полученные на шаге 3, в словарь синтаксических конструкций. Пересчитать значения частот для этих подпоследовательностей.

Шаг 5. Сформировать из элементов словаря синтаксических конструкций с частотой более трех словарь обобщенных синтагм.

Сформированный с помощью алгоритма словарь обобщённых синтагм хранит в себе информацию о синтаксической структуре языка и для каждого языка формируется исходя из получаемой на этапе морфологического анализа информации.

4. Использование обобщенных синтагм для задач машинного перевода

Использование словаря обобщенных синтагм в задачах машинного перевода может значительно повысить качество перевода и ускорить процесс добавления “новых” направлений машинного перевода для информационных систем. Авторы использовали данный механизм для повышения качества машинного перевода, в настоящее время тестирование проводилось для англо-русского направления. В данном исследовании был использован следующий алгоритм:

Шаг 1. Определить язык, на котором написан входной текст.

Шаг 2. Разделить текст на предложения и выполнить обработку текста процедурой морфологического анализа.

Шаг 3. Сформировать из обобщенных символов каждого предложения последовательности.

Шаг 4. Произвести поиск наиболее длинных синтагм покрывающих обрабатываемое предложение.

Шаг 5. Произвести семантико-синтаксический анализ [7] предложений текста.

Шаг 6. Разрешить грамматическую омонимию с помощью обобщенных синтагм.
Шаг 7. Найти в переводных словарях наиболее длинные словосочетания.
Шаг 8. Сформировать примерную модель синтезируемого предложения на основе правил.
Шаг 9. Произвести поиск наиболее длинных синтагм похожих на синтезируемое предложение.
Шаг 10. Сформировать в соответствии с грамматической информацией, соответствующей найденным в словарях синтагмам итоговое предложение.
Шаг 11. Сформировать из полученных предложений текст перевода.

Таблица 1 – Пример перевода с использованием словаря обобщённых синтагм и без его использования

Исходный текст	Перевод традиционным методом машинного перевода	Перевод с использованием алгоритма обобщенных синтагм
The aircraft was named "Yuri Gagarin", after the first man to venture into space almost exactly 50 years before.	Самолет назвали «Юрием Гагариным» в честь первого человека, который будет отправляться в космос почти точно за 50 лет назад.	Самолет получил название "Юрий Гагарин", в честь первого человека, отправившегося в космос почти точно 50 лет назад.

5. Заключение

Основные методы машинного перевода, которые используются на данный момент и дают наилучшие результаты – это статистический машинный перевод и нейронный машинный перевод. Но чтобы использовать эти методы, необходимы огромные массивы параллельных текстов, которые есть для весьма небольшого числа языков. В связи с этим остается актуальной задача создания разработка метода машинного перевода, который должен позволять достаточно оперативно включать в мультиязыковую модель, используемую для реализации метода, новые языки, без использования корпусов параллельных текстов, но при этом давать высокое качество перевода. Авторы в данной статье предлагают метод, основанный на использовании словаря обобщенных синтагм. Данный метод позволяет постоянно пополнять словарь без участия человека и тем самым повышать качество перевода. Авторы провели тестирование алгоритмов на примере англо –русского перевода и получили результаты которые позволяют сократить количество синтаксических ошибок примерно на 15% на данном этапе исследований по сравнению с алгоритмом перевода, основанным на правилах. Пример перевода с использованием словаря обобщенных синтагм и без его использования приведен в таблице 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Апресян Ю.Д., Кулагина О.С. Проблемы разработки систем машинного перевода // Актуальные вопросы практической реализации систем автоматического перевода. Ч. 1. - М.: Изд-во МГУ. - 1982. - С. 5-23.
2. Koehn P., Och F. J., and Marcu D. Statistical Phrase Based Translation // NAACL '03 Proceedings of the 2003 Conference of the North American Chapter of the As-

sociation for Computational Linguistics on Human Language Technology. HLT-NAACL 2003. Edmonton, Canada. – 2003. - Volume 1. - pp. 48-54.
3. Wołk K., Marasek K. Polish-English Speech Statistical Machine Translation Systems for the IWSLT 2013 // Proceedings of the 10th International Workshop on Spoken Language Translation, Heidelberg, Germany. – 2013. – pp. 113–119.
4. He W., Wu Hua., Wang H. Improved neural machine translation with SMT features // Thirtieth AAAI conference on artificial intelligence. – 2016. – pp. 151-157.
5. Sennrich R., Haddow R. Improving neural machine translation models with monolingual data // 54th annual meeting of the association for computational linguistics. Berlin. – 2016. – pp. 86-96.1.
6. Белоногов Г.Г., и др. Метод аналогии в компьютерной лингвистике // Научно-техническая информация. Сер.2. – 2000. – № 1. – С.21-31.
7. Захаров В. Н., Хорошилов А.А. Автоматическое формирование визуального представления смыслового содержания документа // Системы и средства информатики. Т. 23. № 1. – 2013. – С. 143-158.
8. Захаров В. Н., Хорошилов А.А. Автоматическое формирование визуального представления смыслового содержания документа // Системы и средства информатики. Т. 23. № 1. – 2013. – С. 143-158.

УДК 004.912

МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ УНИФИЦИРОВАННОГО СЕМАНТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕКСТОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ПОИСКА В МНОГОЯЗЫЧНЫХ ХРАНИЛИЩАХ ДОКУМЕНТОВ

А.А. Хорошилов, к.т.н.
ФИЦ ИУ РАН
e-mail: *a.a.horoshilov@mail.ru*
Д.А. Садовников
ФИЦ ИУ РАН
e-mail: *fos2000@yandex.ru*

В статье описан метод формирования унифицированного семантического представления текстов для задач поиска в многоязычных хранилищах документов. Этот метод основывается на использовании процедур семантико-синтаксического и концептуального анализа, а также словаря унифицированных формализованных представлений наименований понятий. Данный словарь был сформирован с использованием двуязычных словарей программного комплекса МетаФраз. Статья подготовлена при поддержке гранта РФФИ (проект 18-37-00110 мол_а)

Ключевые слова: многоязычный поиск, информационный поиск, автоматизированная обработка текстов, формализованное описание текста, смысловая структура, лингвистическое программное обеспечение, декларативные средства.

1. Введение

В настоящее время все большее количество организаций испытывают потребность в использовании мощных информационных систем для автоматизации процесса обработки поступающих данных. Одними из самых распространенных данных, требующих анализа, являются тексты на естественном языке. Эффективность инструментов, предназначенных для обработки текстов, постоянно растет и это существенно повышает возможности для анализа смыслового содержания документов и информационного поиска. Однако до сих пор существуют значительные трудности при поиске информации в разноязычных хранилищах документов.

Многие разработчики в течении долгого времени занимаются проблемой многоязычного поиска, при этом основные исследования описаны в иностранных работах. Из отечественных исследователей стоит отметить работу [1], где авторы описывают опыт использования двуязычного тезауруса для задач многоязычного поиска. Вообще данный подход является одним из наиболее распространённых, при решении задачи многоязычного информационного поиска, многие иностранные исследователи используют подобные методы, как, например, в работе [2]. Основное же отличие в эффективности при таком подходе возникает из-за разницы используемых тезаурусов и словарей. Другой подход, который часто используется для решения задачи поиска в разноязычных хранилищах – это использование инструментария систем автоматического перевода текстов, такой подход описан, например, в работах [3-4]. Стоит отметить, что в настоящее время, для исследования эффективности существующих методов информационного поиска проводятся множество различных конференций, на которых исследуются также вопросы многоязычного поиска, одной из наиболее известных является Text Retrieval Conference (TREC). В целом уровень эффективности инструментов, созданных иностранными исследователями достаточно высок и эффективность поиска в разноязычных массивах приближается к показателям поиска в базах, содержащих тексты на одном языке [5]. К сожалению, результаты исследований, проводимых отечественными разработчиками значительно скромнее.

Авторы предлагают метод формирования унифицированного семантического представления текста, который можно использовать для повышения эффективности поиска в многоязычных массивах документов. При этом для реализации макета системы, осуществляющей поиск в многоязычных массивах документов, авторами, помимо описанных методов, использовались процедуры платформенного лингвистического программного обеспечения (ПО) МетаФраз.

2. Инструментальные средства автоматической обработки текстовой информации, используемые при разработке метода

Рассмотрим подробнее платформенное лингвистическое ПО МетаФраз. Данное ПО обеспечивает весь технологический цикл преобразования текстового представления документа в его формализованное смысловое представление [6]. Оно разработано в виде единого интегрированного многофункционального программного комплекса, состоящего из нескольких подсистем, предназначен-

ных для решения отдельных функциональных задач по обработке, формализации и анализу смыслового содержания разноязычных документов. При этом в состав ПО включены также программные модули, позволяющие создавать и адаптировать декларативные средства для настройки на заданную предметную область путем быстрого автоматизированного создания словарей по корпусу текстов.

Таблица 1 – Фрагмент многоязычного словаря унифицированных формализованных представлений наименований понятий

№ n/n	**Значения на русском языке**	**Эквиваленты на английском языке**	**Эквиваленты на немецком языке**
…	…	…	
816437	нефтехранилище / нефтесклад / хранилище	oil reservoir / oil storage / petroleum storage / tank farm	öllager / erdöllager / tanklager
816438	нефть / каустобиолит / петролеум / черный золото	mineral oil / naphtha / oil / petrol / petroleum / rock-oil	öl / caustobiolith / petroleum / petrol
816439	нефтяник / нефтедобытчик	oilman / oil-industry worker	ölproduzent / ölhändler
…	…	…	

Далее рассмотрим подробнее многоязычный словарь унифицированных формализованных представлений наименований понятий. Этот словарь был получен из словосочетаний, содержащихся в двуязычных словарях программного комплекса МетаФраз. Фрагмент этого словаря приведен в таблице 1. После автоматической обработки этого словаря было выявлено 305 тыс. синонимичных фразеологических рядов. После слияния со словарем синонимов программного комплекса МетаФраз общий объем полученного словаря составил 512 тыс. пар словосочетаний, связанных отношениями синонимии для русского языка. После этого к ним были добавлены их переводы. Также в словарь были добавлены слова и словосочетания с переводами, для которых не были выявлены синонимы. Всем словосочетаниям, являющимся формой представления одного и того же наименования понятия, назначался уникальный идентификатор – номер по словарю унифицированных форм представлений наименований понятий. Количество словарных статей в этом словаре составило более 3.5 млн.

3. Описание метода формирования унифицированного семантического представления текста

Разработанный авторами метод основывается на использовании многоязычного словаря унифицированных формализованных представлений наименований понятий. В данном исследовании словарь был сформирован для трех языков (русского, английского и немецкого), но в этот словарь могут быть добавлены эквиваленты на других языках при наличии переводных словарей схожих объемов. Также для работы метода необходимы процедуры обработки текстовой информации для каждого языка, который содержится в словаре унифицированных формализованных представлений наименований понятий. При вы-

полнении этих условий формирование унифицированного семантического представления текста сводится к следующему алгоритму (Алгоритм 1):
Шаг 1. Определяется язык обрабатываемого текста.
Шаг 2. С помощью процедуры концептуального анализа (для выявленного языка) определяется совокупность значимых наименований понятий с указанием местоположений этих понятий в тексте.
Шаг 3. Каждое наименование понятия текста приводится к нормальной форме с помощью процедуры автоматической пословной нормализации.
Шаг 4. Каждое нормализованное наименование понятия ищется в многоязычном словаре унифицированных формализованных представлений наименований понятий, после чего ему присваивается номер из этого словаря.

4. Общее описание процесса поиска текстовой информации в многоязычных массивах

Для обеспечения эффективной работы макета системы, осуществляющей поиск в многоязычных массивах, необходимо предварительно иметь массив документов, в котором будет производиться поиск информации. Этот массив должен быть предварительно обработан процедурами формализации, причем запрос и тексты поискового массива должны обрабатываться аналогичным образом. Поэтому для обработки поискового массива тоже будет использован алгоритм 1. После этого текст вместе с полученным списком наименований понятий и дополнительной информацией о них записывается в базу данных.
Далее рассмотрим алгоритм поиска документов в многоязычных массивах, с использованием стандартных средств СУБД:
Шаг 1. На вход поступает поисковый запрос, после чего он обрабатывается с помощью алгоритма 1.
Шаг 2. Средствами СУБД производится поиск наименований понятий запросов в многоязычном массиве (при поиске сравниваются не сами наименования понятий, а их номера в многоязычном словаре унифицированных формализованных представлений наименований понятий).
Шаг 3. Запускается процедура ранжирования результатов поиска, полученных с помощью стандартных средств СУБД. Процедура ранжирования зависит от типа поиска.
Шаг 4. Выдача результатов поиска пользователю.
Как видно из алгоритма после обработки текстов и запроса процедурами формализации уже не важно, на каком языке был написан текст. Поэтому имея процедуры семантико-синтаксического и концептуального анализа для других языков, можно добавить сколько угодно языков в короткие сроки.

5. Эксперимент по проверке разработанного метода поиска в многоязычном массиве

Эксперимент проводился в несколько этапов:

На первом этапе тексты документов, приготовленные для эксперимента, были загружены в систему и обработаны при помощи алгоритма 1. Все результаты обработки были занесены в базу данных программного комплекса.

На втором этапе из загруженных текстов было выбрано 230000 предложений и 500000 случайных наименований понятий. При этом был создан контрольный массив, где содержались все адреса предложений и наименований понятий в текстах документов коллекции.

На третьем этапе выбранные предложения и наименования понятий были переведены на английский и немецкий язык с помощью системы перевода Google Переводчик (https://translate.google.ru/).

На четвёртом этапе был произведен поиск каждого из переведенных на третьем этапе предложений и наименований понятий в русскоязычном массиве документов. Для этого использовался алгоритм 2. После этого информация об адресах найденных соответствий сопоставлялась с информацией, полученной на втором этапе.

На пятом этапе с помощью данных полученных на четвёртом этапе были получены значения полноты, точности и F1-меры. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Значения показателей эффективности метода

	Полнота	**Точность**	**F1-мера**
Поиск наименований понятий	0.88	0.96	0.92
Поиск предложений	0.81	0.99	0.90
Среднее значение	0.85	0.98	0.91

6. Заключение

В данной статье был предложен метод формирования унифицированного семантического представления текстов для задач информационного поиска в многоязычных массивах документов. Разработанные на его основе алгоритмы были реализованы в виде экспериментального программного обеспечения, которое обеспечивает обработку текстов на трех языках (русском, английском и немецком). Эффективность предложенного метода была проверена на небольшой коллекции документов и показала неплохие для данного этапа исследований результаты. Для дальнейшего улучшения качества работы метода необходимо существенное пополнение словарей новой лексикой. Это позволит значительно улучшить качество работы разработанных алгоритмов на текстах, относящихся к широкому спектру предметных областей. В настоящее время на рынке IT-услуг существует потребность в эффективных многоязычных поисковых средствах, которые могут интегрироваться в программное обеспечение, работающее в промышленном режиме. Предложенный метод позволяет создать на его основе универсальный модуль, который можно использовать во многих информационных системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добров Б.В., Лукашевич Н.В. Организация двуязычного поиска в университетской информационной системе Россия // Труды четвертой Всероссийской научной конференции RCDL’2002 “Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции”. г. Дубна, 15 – 17 октября 2002 г. – 2002. – с. 148-158.

2. Oard D. Alternative Approaches for Cross-Language Text Retrieval // Proceedings of the AAAI Spring 1997 Symposium on Cross-Language Text and Speech Retrieval. – 1997. – p.227-231
3. Cardeñosa J., Gallardo C., Toni A. Multilingual Cross Language Information Retrieval A new approach // Seventh International Conference on Computer Science and Information Technologies 28 September - 2 October, Yerevan, Armenia. – 2009. – p.117-123.
4. Dong Zhou, Mark Truran, Tim Brailsford, Vincent Wade, and Helen Ashman. Translation techniques in cross-language information retrieval.ACM Computing Surveys (CSUR), 45(1):1. – 2012. – p. 364-367.
5. Sparsh Mittal Versatile question answering systems: seeing in synthesis // Mittal et al., IJIIDS, 5(2) . – 2011. – p. 119-142.
6. Zakharov V., Khoroshilov A. Automatic assessment of similarity of the texts' thematic content on the base of their formalized semantic descriptions comparison // CEUR Workshop Proceedings Vol-934. Proceedings of the 14th All-Russian Scientific Conference "Digital libraries: Advanced Methods and Technologies, Digital Collections" Pereslavl-Zalessky, Russia, October 15-18. – 2012. – P. 143-149.
7. Khoroshilov A. A method for detecting implicit plagiarism in scientific and technical texts on the basis of their conceptual analysis // CEUR Work-shop Proceedings Vol-1536. Selected Papers of the XVII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2015) Obninsk, Russia, October 13-16. – 2015. – P. 266-372.
8. Zakharov V., Khoroshilov Alexandr, Khoroshilov Alexey A Method of Automatic Plagiarism Detection in Multilingual Documents // CEUR Work-shop Proceedings Vol-1752. Selected Papers of the XVIII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2016). – 2016. – P. 181-186.

ЭЛЕМЕНТЫ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММЫ КОМПЬЮТЕРНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПО

А.В. Щербатых, магистрант
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»
e-mail: *wega18@mail.ru*

В статье раскрываются причины, побудившие взяться за разработку программного комплекса тестирования и обучения, приводятся структуры элементов базы данных и содержание главного программного модуля комплекса.

Ключевые слова: компьютерная программа, базы данных, тестирование, обучение.

Как известно, компьютерные программы тестирования широко применяются в различных сферах деятельности человека: на производстве, в медицине, в спорте, в научных исследованиях и т.д.

Педагогика в этом смысле не является исключением. Здесь компьютерное тестирование успешно используются уже давно, так как позволяет, например, объективно измерить уровень знаний и качественно оценить структуру подготовленности ученика (студента). Вполне очевидно, что результаты тестирования некоторой группы учащихся, могут быть и основанием для коррекции педагогом читаемого в этой группе курса своей дисциплины.

Безусловно, результат индивидуального тестирования зависит как от опыта и мастерства педагога, так и от трудолюбия в учении и способностей самого обучающегося.

Поскольку никто не отменял дидактические принципы и закономерности процесса обучения, одна из которых ставит в зависимость каждый последующий этап развития от качества, объема и характера предыдущего, уже изученного учебного материала, то, что делать, если, например, у студента базовых (школьных) знаний слишком мало? Такие обстоятельства иногда возникают в центрах СПО при ВУЗах, т.к. прием абитуриентов там осуществляется по завершению основного общего образования и без экзаменов.

В связи с этим, на стадии зачисления в ВУЗ необходимо проводить отбор наиболее подготовленных абитуриентов. При наличии большого конкурса это можно будет осуществлять по результатам тестирования абитуриентов посредством разрабатываемого нами программного комплекса. А если конкурс приема невелик, то можно будет обязать уже студентов пройти тестирование с положительным результатом.

Этого можно будет добиться при выполнении следующих условий:

1) программный комплекс должен обладать соответствующей функциональностью: при отрицательном результате тестирования программа порекомендует студенту и представит для повторения разделы теории с примерами практического содержания, соответствующие неверно решенным задачам теста, и предложит вновь пройти испытание;

2) в задачу комплекса не входит проверка всех математических знаний за девять лет обучения в школе. В комплекс заложено семнадцать особо важных тем, незнание которых приведет к невозможности восприятия и понимания дальнейших, более сложных математических объектов. Поэтому целью комплекса является, в том числе и попытка подтянуть эти «главные» темы до минимального уровня.

Разрабатываемый программный комплекс состоит из базы данных в Access и программных модулей на VBA.

Выбор этих продуктов Microsoft обусловлен тем, что Access входит в состав Microsoft Office, обладает многими чертами, характерными для приложений Office, имеет широкий спектр функций, связь с внешними базами данных. Благодаря встроенному языку VBA, в самом Access можно создавать приложения любой сложности, работающие с базами данных. Разрабатываемая база данных состоит из трех таблиц, отчетов, пользовательских форм и программных модулей.

Таблица "Темы", как видно по рисунку 1, раскрывает названия главных тем и в поле "Теория" (OLE object) содержит соответствующий им теоретический материал с подробно разобранными примерами практических заданий, предназначенный для обучения. Таблица "Задачи" (см. фрагмент таблицы на рисунке 2) содержит по пять вариантов заданий к каждой теме и ответы к ним.

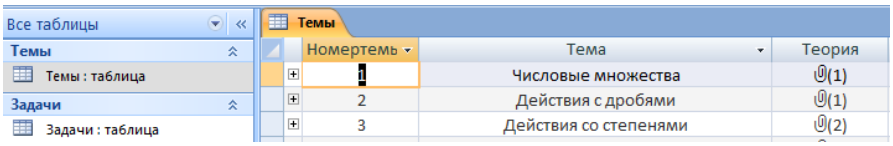


Рисунок 1 – Таблица в Access "Темы"

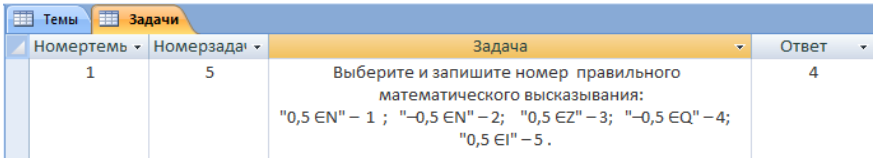
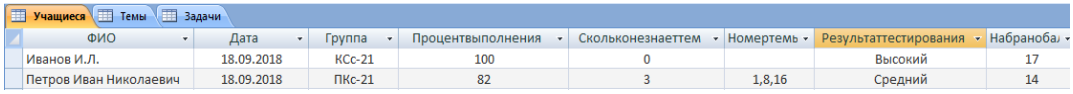


Рисунок 2 – Таблица в Access "Задачи"

На рисунке 3 представлен фрагмент таблицы "Учащиеся", которая формируется посредством формы "Ввод данных" и результирующего блока операторов главного программного модуля, который ответственен:

- за цикличность представления каждой темы определенным заданием посредством формы "Тестирование";
- за высокую вариативность содержания (используется генератор случайных чисел для выбора каждой задачи из пяти);
- за переход, в случае получения студентом отрицательного результата по тестированию, в режим обучения, после чего опять в режим тестирования (положительный результат необходим!);
- за форму вывода отчетов (по группе, фамилии, дате, результату, за семестр).

На рисунке 4 приведен фрагмент отчета по дате проведения тестирования.



Учащиеся | Темы | Задачи

ФИО	Дата	Группа	Процентвыполнения	Скольконезнаеттем	Номертемь	Результаттестирования	Набранобал
Иванов И.Л.	18.09.2018	КСс-21	100	0		Высокий	17
Петров Иван Николаевич	18.09.2018	ПКс-21	82	3	1,8,16	Средний	14

Рисунок 3 – Таблица в Access "Учащиеся"

Отчет по результатам тестирования (математика : 9-ый класс)

ФИО	Группа	Дата	Набрано баллов (из 17-ти)	% выполнения	Результат
Иванов И.Л.	КСс-21	18.09.2018	17	100	Высокий
Петров Иван Николаевич	ПКс-21	18.09.2018	14	82	Средний

Рисунок 4 – Отчет в Access по таблице "Учащиеся"

Работы [1] – [5] использовались как справочный материал для заполнения соответственно теоретическим и практическим содержанием таблиц "Темы" и "Задачи" базы данных.

Благодарность: автор выражает благодарность за полезные советы и консультации при написании статьи доценту, к.ф.-м.н. В.Е. Щербатых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев В.А., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Геометрия: полный справочник. – Москва: Махаон, 2006. – 320 с.
2. Евсюк С.Л. Тестовые задания с решениями. – 2-е изд. – Минск: Букмастер, 2013. – 208 с.
3. Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Математика: полный справочник.– Москва: Махаон, 2006. – 320 с.
4. Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачева М.В. и др. Изучение алгебры в 7–9 классах: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 2002. – 287 с.
5. Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др. Алгебра 8 класс: методические рекомендации. – Москва: Просвещение, 2017. – 128 с.

Математические методы в экономике

УДК 519.862.6

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ ПАРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ В РЕГРЕССИОННОМ АНАЛИЗЕ

М.П. Базилевский, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет путей сообщения»
e-mail: *mik2178@yandex.ru*

В статье проведено первичное исследование метода наименьших модулей парных произведений (МНМПП), предназначенного для оценивания неизвестных параметров регрессионных моделей. Приводится обобщение методов наименьших модулей (МНМ), квадратов (МНК) и МНМПП. Показано, что оценивание регрессий с помощью МНМПП сводится к решению задачи квадратичного программирования. Рассмотрен пример, демонстрирующий то, что МНМПП может давать уникальные оценки линейной регрессии, не совпадающие с МНК- и МНМ-оценками.

Ключевые слова: регрессионная модель, метод наименьших квадратов, метод наименьших модулей, метод наименьших модулей парных произведений, квадратичное программирование.

Введение

Рассмотрим классическую модель множественной линейной регрессии:

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где n – объем выборки; m – количество независимых переменных; y_i и x_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ – известные значения зависимой и независимых переменных соответственно; α_i, $i = \overline{0,m}$ – подлежащие оцениванию параметры; ε_i, $i = \overline{1,n}$ – ошибки аппроксимации.

Задача построения регрессионной модели (1) заключается в оценивании неизвестных параметров α_i, $i = \overline{0,m}$, по имеющимся в распоряжении исследователя данным так, чтобы полученное соотношение «наилучшим образом» описывало зависимость переменной y от переменных x_1, x_2, …, x_m. Иными словами, в регрессии (1) требуется минимизировать ошибки аппроксимации ε_i, $i = \overline{1,n}$, в некотором заданном смысле. К наиболее часто встречающимся на практике методам оценивания параметров регрессионных моделей относятся метод наименьших квадратов (МНК) и модулей (МНМ) [1].

Суть МНК состоит в том, чтобы найти такие оценки неизвестных параметров регрессионной модели (1), при которых будет минимальна сумма квадратов ошибок:

$$J_2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 , \tag{2}$$

а суть МНМ состоит в минимизации суммы модулей ошибок:

$$J_1 = \sum_{i=1}^{n} \left|\varepsilon_i\right| . \tag{3}$$

Возведем сумму модулей (3) в квадрат. Тогда:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left|\varepsilon_i\right| \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left|\varepsilon_i \varepsilon_j\right|$$

или

$$J_1^2 = J_2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left|\varepsilon_i \varepsilon_j\right| . \tag{4}$$

Таким образом, полученная зависимость (4) связывает квадрат суммы модулей ошибок J_1^2 с суммой квадратов ошибок J_2: квадрат суммы модулей ошибок J_1^2 разлагается на сумму квадратов ошибок J_2 и удвоенную сумму модулей парных произведений ошибок $2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left|\varepsilon_i \varepsilon_j\right|$. Пусть $J_{1-2} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left|\varepsilon_i \varepsilon_j\right|$. Очевидно, что для суммы J_{1-2} справедливо двойное неравенство:

$$0 \le J_{1-2} \le J_1^2 .$$

Естественный интерес вызывает использование суммы J_{1-2} в качестве целевой функции для оценивания неизвестных параметров линейной регрессии (1). Для этого сформулируем оптимизационную задачу:

$$J_{1-2} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left|\varepsilon_i \varepsilon_j\right| \to \min . \tag{5}$$

Поскольку автору не удалось найти литературных источников, посвященных проблеме оценивания регрессионных моделей с помощью сформулированного метода (5), то по аналогии с МНК и МНМ будем называть его методом наименьших модулей парных произведений (МНМПП). Целью данной работы является обобщение методов МНМ, МНК и МНМПП, разработка математического обеспечения для оценивания линейных регрессий (1) с помощью МНМПП и его демонстрация на конкретном примере.

1. Обобщение методов оценивания регрессионных моделей

Рассмотрим квадратичную форму:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \left|\varepsilon_i\right| \left|\varepsilon_j\right| , \tag{6}$$

где w_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ – неотрицательные весовые коэффициенты.

Квадратичную форму (6) можно представить в матричном виде:

$$Q = \varepsilon^T W \varepsilon , \tag{7}$$

где $\varepsilon = \begin{pmatrix} |\varepsilon_1| \\ |\varepsilon_2| \\ \dots \\ |\varepsilon_n| \end{pmatrix}$ – матрица-столбец модулей ошибок, $W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{12} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{1n} & w_{2n} & \dots & w_{nn} \end{pmatrix}$ – симметричная матрица весовых коэффициентов, T – операция транспонирования.

Рассмотрим некоторые возможные виды матрицы весовых коэффициентов W для квадратичной формы (7):

1) если матрица W является единичной, т.е. $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, то имеем квадратичную форму $Q = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ для МНК;

2) если матрица W является диагональной, т.е. $W = \begin{pmatrix} w_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_{nn} \end{pmatrix}$, то имеем квадратичную форму $Q = \sum_{i=1}^{n} w_{ii} \varepsilon_i^2$ для взвешенного МНК;

3) если матрица W является матрицей единиц, т.е. $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, то имеем квадратичную форму $Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_i \varepsilon_j|$ для МНМ, потому что $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_i \varepsilon_j| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} |\varepsilon_i \varepsilon_j| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i| \right)^2$;

4) если главная диагональ матрицы W состоит из нулей, а все остальные элементы равны единице, то имеем квадратичную форму $Q = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} |\varepsilon_i \varepsilon_j|$ для МНМПП;

5) если элементы матрицы W $w_{i-1,i} = w_{i,i-1} = 1$, $i = \overline{2,n}$, а все остальные элементы равны нулю, то имеем квадратичную форму $Q = 2 \sum_{i=2}^{n} |\varepsilon_{i-1} \varepsilon_i|$ для МНМПП соседних ошибок.

Таким образом, квадратичная форма (6) является обобщением как классических методов оценивания регрессионных моделей – МНК и МНМ, так и предложенного в данной работе МНМПП.

2. МНМПП как задача квадратичного программирования

Известно, что для нахождения неизвестных оценок регрессионной модели с помощью МНМ необходимо решать задачу линейного программирования [1]. Используя описанный в работе [2] приём для МНМ, сведем задачу (5) для МНМПП к задаче квадратичного программирования.

Введем в рассмотрение неотрицательные вещественные переменные u_i и v_i, $i = \overline{1,n}$, следующим образом:

$$u_i = \begin{cases} y_i - \alpha_0 - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{ij}, \text{ при } y_i - \alpha_0 - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{ij} > 0, \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$v_i = \begin{cases} \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{ij} - y_i, \text{ при } \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{ij} - y_i > 0, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что имеют место тождества

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{ij} + u_i - v_i = y_i, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Функционал (5) обращается в квадратичную форму

$$2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (u_i + v_i)(u_j + v_j) \to \min. \tag{9}$$

Заметим, что с учётом равенства (4), целевая функция (9) равносильна функции:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^2 \to \min. \tag{10}$$

Таким образом, исходная задача (5) сводится к задаче квадратичного программирования (9) или (10) с линейными ограничениями (8) и условиями неотрицательности переменных u_i, v_i, $i = \overline{1,n}$.

По выражению (9) видно, что условие $u_i v_i = 0$ для любого i, следующее из определения переменных u_i и v_i, реализуется на оптимальном решении этой задачи.

3. Пример

Для демонстрации предложенного в работе математического обеспечения оценивалась модель парной линейной регрессии зависимости переменной y от переменной x. Для этого было сгенерировано 10 пар наблюдений, представленных в таблице 1 в столбцах y и x. Парная регрессия оценивалась с помощью МНМ, МНК и МНМПП. При этом МНК- и МНМ-оценки были получены с

использованием эконометрического пакета Gretl, а МНМПП-оценки, предполагающие решение задачи квадратичного программирования (10) с ограничениями (8) и условиями $u_i \geq 0$, $v_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, с использованием языка моделирования APMonitor. В качестве начального приближения оценок для МНМПП были взяты МНМ-оценки. Для каждой регрессии вычислялись сумма модулей остатков $\sum_i |e_i|$, сумма квадратов остатков $\sum_i e_i^2$ и удвоенная сумма модулей парных произведений остатков $2\sum_i \sum_j |e_i e_j|$. Результаты оценивания парной регрессии тремя методами представлены в таблице 2. Остатки регрессии для каждого метода приведены в таблице 1 в столбцах $e_{\text{МНК}}$, $e_{\text{МНМ}}$ и $e_{\text{МНМПП}}$.

Таблица 1 – Исходные данные и остатки регрессии

№	y	x	$e_{\text{МНК}}$	$e_{\text{МНМ}}$	$e_{\text{МНМПП}}$
1	5	6	-1,432	-0,833	-0,636
2	10	8	3,135	3,833	4,000
3	10	9	2,918	3,667	3,818
4	7	6	0,568	1,167	1,364
5	5	5	-1,215	-0,667	-0,455
6	6	6	-0,432	0,167	0,364
7	6	8	-0,865	-0,167	0
8	5	3	-0,782	-0,333	-0,091
9	6	7	-0,648	0	0,182
10	8	19	-1,247	0	0

Таблица 2 – Результаты оценивания парной регрессии тремя методами

Метод	Уравнение регрессии	$\sum_i \lvert e_i \rvert$	$\sum_i e_i^2$	$2\sum_i \sum_j \lvert e_i e_j \rvert$
МНМ	$\tilde{y} = 4{,}8333 + 0{,}1667x$	10,8333	30,8056	86,5556
МНК	$\tilde{y} = 5{,}1327 + 0{,}2165x$	13,2433	25,7180	149,6674
МНМПП	$\tilde{y} = 4{,}5455 + 0{,}1818x$	10,9091	33,2221	85,7864

Таким образом, все три метода дали разные оценки параметров модели парной линейной регрессии. При этом для регрессии, полученной с помощью МНМ, нулевыми оказались остатки для наблюдений под номером 9 и 10, а для регрессии, полученной с помощью МНМПП – 7 и 10. Это означает, что МНМПП действительно является независимым методом оценивания параметров регрессионных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений: Квазиправдоподобные оценки. – М.: Радио и связь. – 1983. – 304 с.
2. Носков С.И. Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. – Иркутск.: РИЦ ГП «Облинформпечать». – 1996. – 321 с.

УДК 517.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОТОКА ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КАДРОВ

А.А. Быкова
ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»
e-mail: *bikova.anastasia@gmail.com*
С.А. Бельман, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»
e-mail: *s.belman@rsu.edu.ru*

В статье рассматривается модель исследования потока педагогических ресурсов. Построена система обыкновенных дифференциальных уравнений, которые описывают процесс присоединения и выбывания студентов из числа вовлеченных в будущую профессиональную деятельность. Получено общее решение системы.

Ключевые слова: педагогические ресурсы, математическая модель, вовлеченность.

В работе предлагается модель прогнозирования изменения потока педагогических кадров. В основу модели положена система обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

Предварительно было проведено исследование вовлеченности студентов педагогических направлений в будущую профессиональную деятельность [2].

Вовлеченность студентов оценивалась по результатам анкетирования, разработанного на основе опросника Aon Hewitt – компании, которая впервые озвучила концепцию вовлеченности [3].

Также были проанализированы статистические данные по востребованности молодых педагогов на рынке труда Рязани и Рязанской области.

На основании данных о вовлеченности студентов и их востребованности на рынке труда был составлен прогноз спроса и предложения на педагогические кадры (рисунок 1).

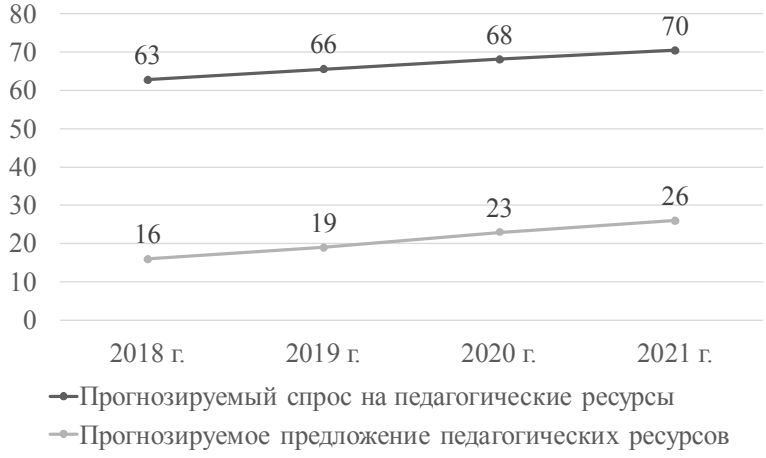


Рисунок 1 – Сопоставление спроса и предложения на педагогические ресурсы

Результаты исследования позволили предположить наличие линейной зависимости переменных в динамической модели изменения численности потока педагогических ресурсов:

$$\dot{y} = aw(t) + by(t) - z(t). \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение (1) описывает скорость изменения численности студентов, присоединяющихся к группе вовлеченных в педагогическую деятельность, где $w(t)$ – численность студентов бакалавриата педагогических направлений, вовлеченных в будущую профессиональную деятельность в момент времени t; $y(t)$ – численность студентов, присоединившихся к группе вовлеченных в момент времени t; $z(t)$ – численность студентов, выбывающих из группы вовлеченных в педагогическую деятельность; a, b – коэффициенты пропорциональности.

Скорость изменения численности студентов, выбывающих из группы вовлеченных в профессиональную деятельность, описывается следующим уравнением:

$$\dot{z} = -w(t) - y(t) + z(t). \quad (2)$$

Скорость изменения численности студентов, вовлеченных в педагогическую деятельность, определяется уравнением:

$$\dot{w} = y(t) - z(t). \quad (3)$$

В общем виде система имеет следующий вид

$$\begin{cases} \dot{y} = by(t) - z(t) + aw(t), \\ \dot{z} = -y(t) + z(t) - w(t), \\ \dot{w} = y(t) - z(t). \end{cases}$$

Введем обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} b & -1 & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим частный случай, когда коэффициенты имеют некоторые фиксированные значения: $a = 3$, $b = 2$ и найдем собственные значения полученной матрицы A. Характеристическая матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix},$$

собственные значения которой равны: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$.

При $\lambda_1 = -1$ решение имеет вид: $\mathrm{D}_1 = colon(-1,\ 0, 1)$.

При $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$ имеем $\mathrm{D}_2 = colon\left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}, \frac{-(3 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})}, 1\right)$.

При $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$ имеем $\mathrm{D}_3 = colon\left(\frac{4 - 3\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}, \frac{-(3 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})}, 1\right)$.

Тогда общее решение системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{(2+\sqrt{3})t} \dfrac{(4+3\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})} + c_3 e^{(2-\sqrt{3})t} \dfrac{(4-3\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})} \\ z = c_2 e^{(2+\sqrt{3})t} \dfrac{(-(3+\sqrt{3}))}{(2+\sqrt{3})} + c_3 e^{(2-\sqrt{3})t} \dfrac{(-(3-\sqrt{3}))}{(2-\sqrt{3})} \\ w = c_1 e^{-t} + c_2 e^{(2+\sqrt{3})t} + c_3 e^{(2-\sqrt{3})t} \end{cases}$$

Таким образом, численность потока студентов, вовлеченных в будущую профессиональную деятельность, возрастает за счет присоединившихся к группе студентов, вовлеченных в педагогическую деятельность. При этом произведен учет численности потока студентов, которые по тем или иным причинам выбывают из группы студентов, вовлеченных в педагогическую деятельность. Модель требует дальнейшего уточнения за счет введения нелинейных слагаемых, описывающих более сложные процессы взаимодействия социальных потоков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бельман С.А. Математическая модель стабильной работы структурного подразделения на предприятии // Вестник РАЕН. – 2018. – Т. 18. – №4. – С. 16–18.
2. Быкова А.А. Математическая модель изменения объема педагогических ресурсов на рынке труда// Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук. – Тольятти: 2018. Часть 1.- С. 222 – 227.
3. Кулькова И. А., Николаев Н. А. Методические положения по оценке и развитию факторов формирования вовлеченности персонала в деятельность предприятия [Текст] // Известия УГГУ. 2016. №4 (44). С. 88-93.

РАЗРАБОТКА СРЕДСТВАМИ 1С ОТЧЕТА ПО ДЕБИТОРСКОЙ ЗАДОЛЖЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ЕЕ КРИЗИСНОГО СОСТОЯНИЯ

Д.В. Корниенко, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *dmkornienko@mail.ru*

Статья посвящена вопросам создания и применения отчетов. В статье приводится механизм разработки отчета для типовой конфигурации 1С: Управление производственным предприятием. Данный отчет демонстрирует дебиторскую задолженность организации в соответствии со сроками ее возникновения. Актуальность данного отчета связана с непрерывным контролем оборотных средств компании, что позволяет решать целый комплекс задач, начиная с избавления от ненужных затрат и заканчивая сохранением финансовой устойчивости.

Ключевые слова: платформа, конфигурация, база данных, модуль, процедура, форма, запрос, объект, реквизит, обработка, отчет.

Современный этап экономического развития страны характеризуется острым проявлением кризисных явлений, обусловленных влиянием ряда факторов. К таким факторам можно отнести следующие: нарушение сложившихся экономических связей, спад производства, банкротство предприятий, которые привели к сбоям в расчетно-платежных операциях между хозяйствующими субъектами, необоснованному и неконтролируемому росту дебиторской задолженности и, как следствие, к существенному увеличению рисков при реализации продукции с отсрочкой платежа. В связи с этим большое значение приобретает управление дебиторской задолженностью предприятия.

Это обусловлено, с одной стороны тем, что грамотная работа с дебиторской задолженностью во многом влияет на повышение прибыльности и рентабельности бизнеса в целом, а с другой является залогом экономической безопасности любого предприятия. Поэтому от создания грамотной системы управления дебиторской задолженностью на предприятии и работы с долгами будет зависеть эффективность и стабильность предприятия [7]. Таким образом, процесс управления дебиторской задолженностью представляется и как элемент маркетинговой политики предприятия, и как элементом процесса финансового управления предприятием.

Напомним, что дебиторская задолженность - это сумма долга, причитающаяся предприятию от других юридических лиц или физических лиц. Дебиторская задолженность - важный компонент оборотного капитала. Когда одно предприятие продаёт товары другому предприятию, совсем не значит, что стоимость проданного товара будет оплачена немедленно. Дебиторская задолженность является активом предприятия, который связан с юридическими правами, включая право на владение.

Основной задачей анализа дебиторской задолженности является оценка уровня и состава, а также динамики и эффективности инвестированных в нее средств.

Политика управления дебиторской задолженностью представляет собой, часть обшей политики управления оборотными активами и маркетинговой политики предприятия, направленной на расширение объема реализации продукции и заключающейся в оптимизации общего размера этой задолженности и обеспечении своевременной ее инкассации.

Формирование политики управления дебиторской задолженностью предприятия осуществляется по следующим основным этапам:

- анализ дебиторской задолженности в предшествующем временном периоде;
- формирование принципов кредитной политики к покупателям;
- определение суммы финансовых средств инвестируемых в дебиторскую задолженность;
- формирование системы кредитных условий;
- обеспечение использования на предприятии современных форм рефинансирования дебиторской задолженности;
- построение эффективных систем контроля за движением и своевременной инкассацией дебиторской задолженности.

Для руководителя компании важно обладать информацией о том, какое количество денежных средств он может использовать. При правильном подходе в управлении, эффективно срабатывает постоянное наблюдение за долгами. Кроме того, желательно делать проверку состояния счетов, проводя аудит дебиторской и кредиторской задолженности. По его результатам выявляются слабые и сильные стороны деятельности компании, а также предлагаются соответствующие меры, направленные на улучшение ее финансового состояния.

Таким образом, в условиях финансового кризиса необходимо учитывать, что управление дебиторской задолженностью представляет собой важнейшую часть необходимых комплексных мероприятий по выводу предприятия из кризиса ликвидности. При этом использование результатов анализа дебиторской задолженности во многом способствует повышению эффективности управления расчетов с дебиторами и принятию экономически грамотных и обоснованных управленческих решений в условиях конкурентной среды [7].

Именно поэтому для руководителя компании важно своевременно составлять отчет по дебиторской задолженности. Сформированный отчет поможет дать оценку дебиторской задолженности каждого клиента во временном разрезе.

Построение такого отчета можно добиться средствами платформы 1С: Предприятие 8 [5]. Данный отчет может быть использован в различных конфигурациях и в частности в 1С: Управление производственным предприятием [1]. Основные особенности данного отчета будут заключаться в следующем:

- не зависит от настроек, формируется вне зависимости от состояния флажка «по документам расчета» в договоре;

– имеется выбор организации;
– интервалы задолженности настраиваются непосредственно в отчете;
– может формироваться на конкретную дату;
– позволяет указывать счета учета;
– учитывается количество дней контроля задолженности, указанное в договоре, и график погашения из соглашения.

Отчет будет представлять собой внешнюю обработку, которая специальным образом будет подключена к информационной базе.

Основное преимущество внешних отчетов заключается в том, что их можно использовать в различных прикладных решениях без изменения структуры самих решений. Кроме того, важным преимуществом является возможность проектировать и отлаживать отчеты в процессе работы прикладного решения, без необходимости сохранения каждый раз конфигурации прикладного решения [2].

Для создания внешнего отчета достаточно в конфигураторе выбрать меню Файл/Новый и выбрать вид файла – отчет [3]. Для того чтобы подключить его в типовую конфигурацию в качестве дополнительного отчета этого недостаточно. Для этого мы должны в модуль прописать несколько процедур. Общий их смысл сводится к тому, что мы даем понять конфигурации, что это за обработка (обработка, отчет, печатная форма, заполнение табличной части и т.д.). Наряду с этим мы указываем, в какой подсистеме он должен находиться.

Далее создадим ряд реквизитов отчета: НастройкаПериода, Организация, Период и СписокИнтервалов. Для настройки интервалов создадим отдельную форму – ФормаИнтервалы. В модуле данной формы пропишем процедуры, отвечающие за функциональность данной формы.

Для выбора счетов учета создадим собственную форму и пропишем в ее модуле соответствующие процедуры и функции.

Далее создадим основную форму отчета, которая будет представлена пользователю при вызове данного отчета. В модуле формы опишем поведение соответствующих процедур и функций.

Заключительным этапом будет описание модуля объекта. Наиболее интересным моментом для рассмотрения будет являться описание запроса [5]:

```
Процедура УстановитьТекстЗапроса()
	ТекстЗапросаПоОстаткам = "ВЫБРАТЬ
	|	ВложенныйЗапрос.Организация,
	|	ВложенныйЗапрос.Контрагент,
	|	ВложенныйЗапрос.Договор,
	|	ВложенныйЗапрос.ОстатокДолга0
	|ИЗ
	|	(ВЫБРАТЬ
	|		ВзаиморасчетыОстатки.Организация КАК Организация,
	|		ВзаиморасчетыОстатки.Субконто1 КАК Контрагент,
	|		ВзаиморасчетыОстатки.Субконто2 КАК Договор,
	|		ВзаиморасчетыОстатки.Счет КАК Счет,
	|		ВзаиморасчетыОстатки.СуммаРазвернутыйОстатокДт КАК Остаток-
Долга0
	|	ИЗ
```

```
        |                 РегистрБухгалтерии.Хозрасчетный.Остатки(
        |                         &ДатаОстатков,
        |                         Счет В (&СчетаКД)
        |                             И (НЕ Счет.Забалансовый)
        |                             И (НЕ Счет В ИЕРАРХИИ (&ИсключенныеСчета)),
        |                         &ВидыСубконтоКД,
        |                         ВЫРАЗИТЬ(Субконто2 КАК Справоч-
ник.ДоговорыКонтрагентов).ВидДоговора В (ЗНАЧЕ-
НИЕ(Перечисление.ВидыДоговоровКонтрагентов.СПокупателем), ЗНАЧЕ-
НИЕ(Перечисление.ВидыДоговоровКонтрагентов.СКомиссионером), ЗНАЧЕ-
НИЕ(Перечисление.ВидыДоговоровКонтрагентов.СКомитентом))
        |                             И Организация = &Организация) КАК Взаиморас-
четыОстатки) КАК ВложенныйЗапрос";
        Если Не ЗначениеЗаполнено(Организация) Тогда
                ТекстЗапросаПоОстаткам = СтрЗаменить(ТекстЗапросаПоОстаткам, "И Орга-
низация = &Организация", "");
        КонецЕсли;
        ТекстЗапросаПоОборотам = "ВЫБРАТЬ
        |       ВзаиморасчетыОбороты.Организация,
        |       ВзаиморасчетыОбороты.Субконто1 КАК Контрагент,
        |       ВзаиморасчетыОбороты.Субконто2 КАК Договор,
        |       ВЫБОР
        |               КОГДА ВзаиморасчетыОбороты.СуммаОборотДт > 0
        |                       ТОГДА ВзаиморасчетыОбороты.СуммаОборотДт
        |               ИНАЧЕ 0
        |       КОНЕЦ - ВЫБОР
        |               КОГДА ВзаиморасчетыОбороты.СуммаОборотКт < 0
        |                       ТОГДА ВзаиморасчетыОбороты.СуммаОборотКт
        |               ИНАЧЕ 0
        |       КОНЕЦ КАК УвеличениеДолга1
        |ИЗ
        |       РегистрБухгалтерии.Хозрасчетный.Обороты(
        |                       &НачалоИнтервала1,
        |                       &КонецИнтервала1,
        |                       ,
        |                       Счет В (&СчетаКД)
        |                               И НЕ Счет.Забалансовый
        |                               И НЕ Счет В ИЕРАРХИИ (&ИсключенныеСчета),
        |                       &ВидыСубконтоКД,
        |                       ВЫРАЗИТЬ(Субконто2 КАК Справоч-
ник.ДоговорыКонтрагентов).ВидДоговора В (ЗНАЧЕ-
НИЕ(Перечисление.ВидыДоговоровКонтрагентов.СПокупателем), ЗНАЧЕ-
НИЕ(Перечисление.ВидыДоговоровКонтрагентов.СКомиссионером), ЗНАЧЕ-
НИЕ(Перечисление.ВидыДоговоровКонтрагентов.СКомитентом))
        |                               И Организация = &Организация,
        |                       ,
        |                       ) КАК ВзаиморасчетыОбороты";
        Если Не ЗначениеЗаполнено(Организация) Тогда
                ТекстЗапросаПоОборотам = СтрЗаменить(ТекстЗапросаПоОборотам, "И Орга-
низация = &Организация", "");
        КонецЕсли;
        КолИнтервалов = ТабИнтервалы.Количество();
```

```
	ТекстЗапросаОстатокИОбороты = "ВЫБРАТЬ
	|	Остатки.Организация,
	|	Остатки.Контрагент,
	|	Остатки.Договор,
	|	Остатки.ОстатокДолга0";
	Для Ном = 1 По КолИнтервалов Цикл
		ОборотыНом = "Обороты" + Ном;
		ТекстЗапросаОстатокИОбороты = ТекстЗапросаОстатокИОбороты + ",
		|	ЕСТЬNULL(Обороты" + Ном + ".УвеличениеДолга" + Ном + ", 0) КАК
УвеличениеДолга" + Ном;
	КонецЦикла;
	ТекстЗапросаОстатокИОбороты = ТекстЗапросаОстатокИОбороты + "
	|ИЗ
	|	(" + ТекстЗапросаПоОстаткам + ") КАК Остатки";
	Для Ном = 1 По КолИнтервалов Цикл
		ТекстЗапросаПоОборотамИнтервала = СтрЗаменить(ТекстЗапросаПоОборотам,
"УвеличениеДолга1", "УвеличениеДолга" + Ном);
		ТекстЗапросаПоОборотамИнтервала = СтрЗаме-
нить(ТекстЗапросаПоОборотамИнтервала, "&НачалоИнтервала1", "&НачалоИнтервала" +
Ном);
		ТекстЗапросаПоОборотамИнтервала = СтрЗаме-
нить(ТекстЗапросаПоОборотамИнтервала, "&КонецИнтервала1", "&КонецИнтервала" +
Ном);
		ОборотыНом = "Обороты" + Ном;
		ТекстЗапросаОстатокИОбороты = ТекстЗапросаОстатокИОбороты + "
		|ЛЕВОЕ СОЕДИНЕНИЕ
		|	(" + ТекстЗапросаПоОборотамИнтервала + ") КАК " + ОборотыНом + "
		|	ПО
		|		Остатки.Организация = " + ОборотыНом + ".Организация
		|			И Остатки.Контрагент = " + ОборотыНом + ".Контрагент
		|			И Остатки.Договор = " + ОборотыНом + ".Договор";
	КонецЦикла;
	ТекстЗапросаОстаткиПоПериодам = "ВЫБРАТЬ
	|	ОстатокИОбороты.Организация,
	|	ОстатокИОбороты.Контрагент,
	|	ОстатокИОбороты.Договор,
	|	ОстатокИОбороты.Договор.ВалютаВзаиморасчетов КАК ВалютаВзаиморасче-
тов,
	|	ОстатокИОбороты.ОстатокДолга0";
	Для Ном = 1 По КолИнтервалов Цикл
		ВыражениеОстатка = "ОстатокИОбороты.ОстатокДолга0";
		Для й = 1 По Ном Цикл
			ВыражениеОстатка = ВыражениеОстатка + " - ОстатокИОборо-
ты.УвеличениеДолга" + й;
		КонецЦикла;
		ТекстЗапросаОстаткиПоПериодам = ТекстЗапросаОстаткиПоПериодам + ",
		|	ВЫБОР
		|		КОГДА " + ВыражениеОстатка + " > 0
		|			ТОГДА " + ВыражениеОстатка + "
		|		ИНАЧЕ 0
		|	КОНЕЦ КАК ОстатокДолга" + Ном;
	КонецЦикла;
```

```
        ТекстЗапросаОстаткиПоПериодам = ТекстЗапросаОстаткиПоПериодам + "
        |ИЗ
        |       (" + ТекстЗапросаОстатокИОбороты + ") КАК ОстатокИОбороты";
        ТекстПоказателей = "
        |       ОстаткиПоПериодам.ОстатокДолга0 КАК ОстатокДолга";
        Для Ном = 1 По КолИнтервалов Цикл
                ТекстПоказателей = ТекстПоказателей + ",
                |       ОстаткиПоПериодам.ОстатокДолга" + (Ном - 1) + " - ОстаткиПоПериодам.ОстатокДолга" + Ном + " КАК ОстатокПериода" + Ном;
        КонецЦикла;
        Если КолИнтервалов > 0 Тогда
                ТекстПоказателей = ТекстПоказателей + ",
                |       ОстаткиПоПериодам.ОстатокДолга" + КолИнтервалов + " КАК ОстатокПериода" + (КолИнтервалов + 1);
        КонецЕсли;
        ТекстЗапроса = "ВЫБРАТЬ РАЗРЕШЕННЫЕ
        |       ОстаткиПоПериодам.Организация КАК Организация,
        |       ОстаткиПоПериодам.Контрагент КАК Контрагент,
        |       ОстаткиПоПериодам.Договор КАК Договор,
        |       ОстаткиПоПериодам.Договор.ВалютаВзаиморасчетов КАК ВалютаВзаиморасчетов," + ТекстПоказателей + "
        |ИЗ
        |       (" + ТекстЗапросаОстаткиПоПериодам + ") КАК ОстаткиПоПериодам";
        Запрос.Текст = ТекстЗапроса;
КонецПроцедуры
```

ЛИТЕРАТУРА

1. Асатрян А. Методическое пособие по эксплуатации крупных информационных систем на платформе 1С: Предприятие 8 / А. Асатрян, А. Голиков, А. Морозов. – М.: ООО «1С-Паблишинг», 2017. – 220 с.
2. Габец А.П., Гончаров Д.И., Козырев Д.В., Кухлевский Д.С., Радченко М.Г. Профессиональная разработка в системе 1С: Предприятие 8. Под ред. М.Г. Радченко / Габец А.П., Гончаров Д.И., Козырев Д.В., Кухлевский Д.С., Радченко М.Г. – М.: ООО «1С-Паблишинг», 2013. – 1408 с.
3. Гончаров Д.И. Решение специальных прикладных задач в «1С:Предприятии 8.2» / Д.И. Гончаров, Е.Ю. Хрусталева - М.: ООО «1С-Паблишинг», 2012. – 300 с.
4. Хрусталева Е.Ю. Язык запросов «1С:Предприятие 8» / Е.Ю. Хрусталева. – М.: ООО «1С-Паблишинг», 2013. – 369 с.
5. Радченко М.Г., Хрусталева Е.Ю. 1С: Предприятие 8.3. Практическое пособие разработчика. Примеры и типовые приемы» / М.Г. Радченко, Е.Ю. Хрусталева – М.: ООО «1С-Паблишинг», 2013. – 964 с.
6. Хрусталева Е.Ю. Разработка сложных отчетов в «1С: Предприятие 8». Система компоновки данных / Е.Ю. Хрусталева. – М.: ООО «1С-Паблишинг», 2012. – 484 с.
7. Егорушкина Т. Н., Самонин А. Н. Значение анализа дебиторской задолженности в системе управления предприятием // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – Т. 17. – С. 440–444.

УДК 330.4

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРОДАЖ ТОВАРА ПОВСЕДНЕВНОГО СПРОСА В ТОРГОВОЙ СЕТИ

Е.Ю. Лискина, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»
e-mail: *katelis@yandex.ru*
В.С. Трепакова
ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»
e-mail: *treviks@mail.ru*

В предлагаемой работе разработана регрессионная модель прогнозирования сбыта одного продукта от поставщика в торговую сеть на основе известной ценовой политики поставщика, предшествующего объёма сбыта и косвенной оценки товарного запаса в торговой сети. Были использованы реальные данные поставщика. Построенная модель имеет лучшие прогнозные характеристики, чем принятые у поставщика и может использоваться при планировании продаж в дистрибьюции; в принятии решений об объеме закупок в малом бизнесе; для оценки объема закупок при коррекции данных в магазинах крупной торговой сети.

Ключевые слова: сбыт продукции, объем сбыта, прогнозирование продаж, рекламные скидки.

1. Введение

Интенсивное развитие национальных торговых сетей в России увеличило конкуренцию в сфере продаж товаров повседневного спроса. В этих условиях планирование продаж является одним из важных инструментов в реализации стратегий успешного развития не только крупных компаний, но и малого бизнеса [1]. Прогнозирование продаж включает в себя методы экспертных оценок и статистические методы. Классические модели прогнозирования с использованием статистических процедур характеризуются экстраполяцией статистических результатов изучения предыстории процесса сбыта [2–4]. Недостаток такого подхода состоит в отсутствии анализа влияния факторов сбыта на объём сбыта. В последнее время появились работы, в которых авторы предлагают учитывать влияние различных факторов сбыта на его объем [5–7]. В исследовании [6] предложены модели для множества товаров торговой сети. В работах [2–5, 7] исследованы продажи одного товара.

В данной работе предлагается модель продаж одного товара повседневного спроса, в которой объём продаж зависит от следующих ключевых факторов: глубины промоскидки и косвенной оценки запаса товара у покупателя. Главный критерий при построении модели – простота в использовании.

2. Требования к модели

Крупные производители и национальные торговые сети используют автоматизированные системы управления и автоматического заказа при планировании сбыта и планировании закупок, которые обладают богатым набором эф-

фективных моделей прогнозирования. Однако на рынке всевозможных предприятий, осуществляющих реализацию товаров повседневного спроса, есть сегмент, для которого установка автоматизированных систем является нецелесообразной в силу их высокой стоимости. К нему относятся:

1) работники отделов (или организаций) продаж, осуществляющие сбыт товара малому бизнесу и в небольшие торговые сети, или непосредственно в магазины крупной торговой сети,

2) руководители секций в магазинах торговых сетей, в обязанности которых входит коррекция данных в системах автозаказа,

3) дистрибьюторы.

Для этого сегмента необходимо разработать математическую модель зависимости объема продаж от цены и некоторых других ключевых факторов на основе регрессионных моделей с использованием табличного процессора MS Excel. Достоинство MS Excel состоит в том, что он не требует дополнительных инвестиций в оборудование, разработку и внедрение.

Рассмотрим процесс продажи непродовольственного товара между производителем или дистрибьютором (далее – поставщиком) и торговой сетью. Предложение на товар поступает от поставщика, имеющего свою ценовую политику. Как правило, основным инструментом ценовой политики является продажа товара со скидкой в определённые периоды времени. Эти периоды времени называют промоакциями. Долю, на которую снижается цена во время промоакций, называют промоскидкой. Торговая сеть (или магазин) приобретает товар по цене с промоскидкой или по цене без промоскидки (в зависимости от ценового предложения поставщика в текущий момент).

Руководитель отдела торговой сети принимает решение приобрести данный товар у данного поставщика, ориентируясь на продажи сети, на цену товара, объём запаса данного товара у себя на складе (или в магазине) и на ценовое предложение конкурента. При планировании объёма продаж поставщику известны объемы продаж в предыдущие моменты времени, значения цены и величина промоскидки. Однако поставщик должен учитывать и остальные факторы: объем запаса товара в магазине и ценовое предложение конкурента.

Обычно планирование продаж происходит качественным образом: представитель поставщика сравнивает графики объемов продаж за одинаковые кварталы различных лет, качественно оценивает полный временной ряд продаж товара в данную торговую сеть на предмет роста или падения продаж данного товара, а затем строит прогноз объемов продаж на требуемый квартал года с учетом плана сбыта товара от производителя. Относительная ошибка прогноза, допустимая у поставщика, составляет 35–40%.

Таким образом, требуется построить математическую модель продаж, которая должна удовлетворять следующим условиям:

1) должна учитывать ключевые факторы, (величину промоскидки, объемы продаж в предыдущие моменты времени объем запаса товара в магазине и ценовое предложение конкурента),

2) должна быть достаточно простой для вычисления прогнозных значений и использования MS Excel,

3) должна иметь меньшую относительную ошибку прогноза, чем 35–40%.

3. Построение модели

Будем использовать следующие обозначения

Y_t – объем продаж товара в торговую сеть (шт.) на неделе с номером t,

X_t – глубина скидки на товар (в долях) на неделе с номером t, единая для всей торговой сети.

В качестве моментов времени t выбраны 104 календарных недели (КН) 2016–2017 годов (начало – первая календарная неделя 2016 года). Товар не является сезонным. Источник числовых данных по выбранным показателям – реальные данные объёмов продаж и величины промоскидки дистрибьютора. Название товара и название торговой сети скрыты по требованию дистрибьютора. Для моделирования был использован табличный процессор MS Excel. Все расчёты проводились на уровне значимости 0,05.

В работе [8] было проведено исследование временного ряда Y_t на аномальные значения по критерию Ирвина и выполнена проверка гипотез об отсутствии тренда у временного ряда Y_t на данных 60 первых календарных недель. Анализ показал отсутствие тренда.

На диаграмме рассеяния признаков Y_t и X_t (рисунок 1) имеется две группы точек. Первая группа точек соответствует продажам при отсутствии скидки, а вторая – продажам при наличии скидки. На основании этого можно сделать вывод о системном влиянии глубины промоскидки на объём продаж. Для оценки влияния промоскидки были введены фиктивные переменные в соответствии со шкалой скидок поставщика:

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & X_t \in [0{,}3;\ 0{,}33], \\ 0, & X_t \notin [0{,}3;\ 0{,}33]; \end{cases} \quad Z_2 = \begin{cases} 1, & X_t \in [0{,}35;\ 0{,}38], \\ 0, & X_t \notin [0{,}35;\ 0{,}38]; \end{cases} \quad Z_4 = \begin{cases} 1, & X_t \in [0{,}4;\ 0{,}44], \\ 0, & X_t \notin [0{,}4;\ 0{,}44]. \end{cases}$$

Для оценки влияния предыдущих объёмов закупок на текущую была построена автокорреляционная функция (АКФ) временного ряда и оценена значимость коэффициентов автокорреляции по t-критерию Стьюдента. Коэффициенты автокорреляции лагов первого, второго, третьего и четвертого уровней оказались статистически значимыми, что указывает на наличие влияния на величину текущего уровня Y_t величин уровней Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, Y_{t-4}. Поэтому были построены всевозможные комбинации моделей с распределённым лагом первого, второго, третьего и четвертого уровней. Наилучшая моделью по значимости коэффициентов по совокупности R^2 и средней ошибки аппроксимации A оказалась модель с распределённым лагом первого уровня.

Однако запас товара определяется не только величиной Y_{t-1}, но и политикой сбыта товара (акциями) торговой сетью и объёмом закупок данного товара у конкурента. Для оценки величины остатков товара в торговой сети была введена оценка $\bar{y} = 0{,}5(y_d + y_0) = 648{,}2$, где $y_d = 1138{,}6$ шт. – средний объем продаж товара в данную сеть в условиях промоскидки, $y_0 = 157{,}8$ шт. – средний

объём продаж товара в данную сеть при отсутствии промоскидки, а затем введена фиктивная переменная

$$v_t = \begin{cases} 1, & Y_{t-1} < \bar{y}, \\ 0, & Y_{t-1} < \bar{y}. \end{cases}$$

То есть, если предыдущий объём продаж был небольшой (менее $\bar{y}$), то, скорее всего, запас товара окажется мал к следующему моменту времени, и торговая сеть приобретёт большое количество товара.

Таким образом, была обоснована модель линейной регрессии переменной структуры с распределенным лагом следующего вида:

$$\hat{Y}_t = \sum_{i=1}^{3} b_i Z_i + \alpha Y_{t-1} + \beta v + e_t . \quad (1)$$

Запишем модель (1) с числовыми коэффициентами:

$$\hat{Y}_t = \begin{cases} 0{,}25Y_{t-1} + 72{,}45v + e_t, & X_t = 0; \\ 757{,}64 + 0{,}25Y_{t-1} + 72{,}45v + e_t, & X_t \in [0{,}3;\ 0{,}33]; \\ 1267{,}99 + 0{,}25Y_{t-1} + 72{,}45v + e_t, & [0{,}35;\ 0{,}38]; \\ 862{,}53 + 0{,}25Y_{t-1} + 72{,}45v + e_t, & X_t \in [0{,}4;\ 0{,}44]. \end{cases} \quad (2)$$

Статистические характеристики модели (2): $R^2 = 0{,}94$, средняя ошибка аппроксимации $A = 0{,}43$, наблюдаемое значение F-критерия $F_f = 325{,}95$, все коэффициенты модели являются значимыми на уровне 0,05.

4. Проверка адекватности модели

Для проверки адекватности модели (2) были использованы данные продаж товара за период со 105 по 114 календарную недели. Графики прогноза и доверительных интервалов с использованием модели (2) в сравнении с наблюдаемыми значениями на промежутке времени со 105 по 114 календарную неделю представлены на рисунке 2.

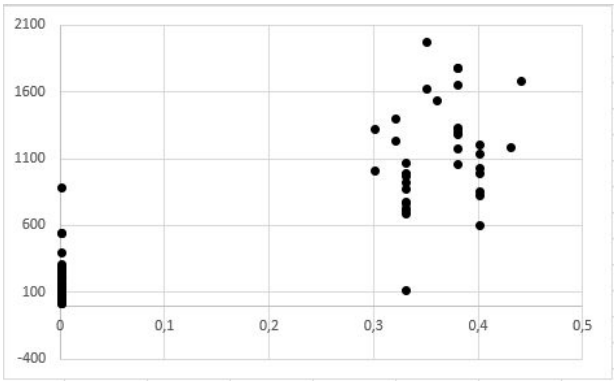


Рисунок 1 – Диаграмма рассеяния Y_t от X_t

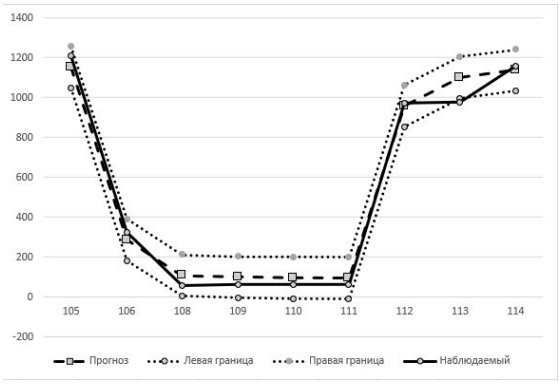


Рисунок 2 – Сравнение прогноза с наблюдаемыми значениями

Для оценки адекватности прогноза модели (2) были вычислены следующие величины: средняя ошибка аппроксимации (по новым данным) $A = 0{,}47$, относительная ошибка прогноза $V = 0{,}20$, коэффициент расхождения Тейла $U = 0{,}04$. Значение A является неудовлетворительным, значение U – хорошим,

значение $V = 20\%$ существенно лучше, чем относительная ошибка прогноза, принятая у поставщика (35–40%). Следовательно, модель (2) можно считать приемлемой для прогнозирования продаж товара повседневного спроса в торговую сеть.

5. Выводы

В данном исследовании разработана модель продаж одного товара повседневного спроса от поставщика в торговую сеть, которая удовлетворяет требованиям, изложенным в п. 2. Поэтому она может быть использована при прогнозировании объемов продаж товара в торговую сеть. Руководители секций в магазинах могут использовать её для оценки объёмов закупок при коррекции данных в системах автоматического управления. Предприниматели могут использовать данную модель для планирования закупок. Модель может применяться в структурах продажи и дистрибьюции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sales forecastin // The IEBM Encyclopedia of Marketing, Michael J. Baker (Ed.). – International Thompson Business Press, 1999. – Pp. 278–290.
2. Тихонов Д. В., Микитчук М. Ю. Моделирование прогноза объема продаж при различных вариантах учета сезонности // УЭкС. – 2015. – №8 (80). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-prognoza-obema-prodazh-pri-razlichnyh-variantah-ucheta-sezonnosti (дата обращения: 14.07.2018).
3. Щукина Н.А., Тарасова И.А. Моделирование динамики продаж новых легковых автомобилей в России // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 10 (Ч. 3) – С. 673–677.
4. Мясников С. В., Седельников А. В., Хнырева Е. С. Анализ двух подходов к моделированию объёмов продаж маргарина // Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета. – 2011. – №1 (17). – С. 111–116. – URL: http://www.scientific-notes.ru/pdf/018-012.pdf (дата обращения: 28.07.2018).
5. Логиновский О.В., Баль А.В. Математическая модель для расчета розничных цен с коррекцией прогноза спроса на товары [Текст] // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2015. – Т. 15. – № 1. – С. 123–127.
6. Пивкин К.С. Корреляционный анализ факторов влияния на покупательский спрос розничного магазина как этап формирования модели прогнозирования и управления запасами // Вестник УдГУ. Сер. Экономика и право. – 2016. – № 3. – С. 40–50.
7. Степаньян В.В. Optimization of economic efficiency of trade turnover of food products in a small business through the Use of the experiment planning theory // «New research in the development of technology» № 1/2017 С. 4-10
8. Трепакова В.С., Лискина Е.Ю. Исследование зависимости объема продаж товара повседневного спроса в торговой сети от размера рекламной скидки на этот товар у дистрибьютора // «Математическое и компьютерное моделиро-

вание в экономике, страховании и управлении рисками» : материалы VI Междунар. молодежной науч.-практ. конф. – Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2017. – 264 с. – С. 213–216.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР С ПРИРОДОЙ ПРИ ПОДГОТОВКЕ БУДУЩИХ ЭКОНОМИСТОВ

О.Н. Прокуратова
ФГБОУ ВО « Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *oxprok7@mail.ru*

Рассмотрим матричные игры особого типа, в которых игрок взаимодействует не со вторым игроком, а с окружающей средой. При этом под окружающей средой будем понимать не только природные, климатические факторы, но и любые условия из вне, на которые невозможно влиять или возможность такого влияния ограничена: спрос на продукцию, действия конкурентов и т.д.

Рационально окружающая среда не заинтересована в проигрыше игрока. В то же время выбор выгодного варианта поведения игроком происходит в условиях риска (возможности неблагоприятных последствий принятого решения: потери ресурсов, возникновение дополнительных расходов, недополучения прибыли и т.д.) или неопределенности (неполноты информации о внешних условиях, действующих на результат принимаемого решения).

Определение. Матричная игра, в которой игрок взаимодействует с окружающей средой, не заинтересованной в его проигрыше, и решает эту задачу определения наиболее выгодного варианта поведения с учетом неопределенности состояния окружающей среды или риска, называется игрой с природой.

Задачи, связанные с принятием решений при известных вероятностях внешних условий, в литературе называют «задачами принятия решений в условиях риска», а задачи при неизвестных вероятностях внешних условий – «задачами принятия решений в условиях неопределенности».

При решении статистических игр каждой стратегии игрока x_i^1 приписывается некоторый результат W_i, характеризующий все последствия этого решения. Затем из массива результатов принятия решений игрок выбирает элемент W, который наилучшим образом отражает мотивацию его поведения.

Критерий Байеса применяется, когда игроку известны вероятности состояний окружающей среды. Критерий используется в двух видах:

как критерий максимума среднего выигрыша

Пусть известны вероятности состояний окружающей среды: $p_1, p_2, \dots, p_n$. Если решение выбирается по значениям выигрышей, то для каждого решения игрока находится средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша): $W_i = \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} \cdot p_j,\ i = 1, \dots, m$. Лучшим является решение с максимальным математическим ожиданием выигрыша: $W = \max_i W_i$.

Пример 1. Компания собирается приобрести пакет акций одного из предприятий π_1, π_2, π_3,. Прибыль, которую получит компания от покупки акций, не

может быть точно известна заранее, она зависит от того, как будет меняться стоимость этих акций. Возможные размеры прибыли фирмы (в млн. ден ед.) приведены в таблице:

Пакет акций	*Изменение стоимости акций*		
	Рост	*Стабильное состояние*	*Снижение*
π_1	*20*	*16*	*-17*
π_2	*16*	*14*	*-13*
π_3	*18*	*13*	*-12*

Согласно имеющимся экспертным оценкам, возможны 4 схемы развития экономических ситуаций (S_1, S_2, S_3, S_4):

S_1: стоимость акций π_1, π_2 стабильно, стоимость акций π_3 растет; $P(S_1) = 25\%$

S_2: стоимость акций π_1 снижается, π_2 и π_3 растет; $P(S_2) = 12\%$

S_3: стоимость акций π_1, π_2, π_3 остается стабильной; $P(S_3) = 13\%$

S_4: стоимость акций π_1, π_2, π_3 останется стабильной; $P(S_1) = 50\%$

Требуется узнать какой из пакетов акций следует получить компании, чтобы обрести максимальную прибыль.

Решение.

Задача решается в условиях риска и неопределенности, так как прибыль зависит не только от решения компании, но и от внешних условий (какой будет сценарий развития экономической ситуации). Воздействовать на сценарий невозможно.

Составим матрицу выигрышей. Если компания купит акции π_1 и экономическая ситуация будет развиваться по сценарию S_1, компания получит прибыль 16 млн. ден. ед. Если S_2, фирма принесет убыток 17 млн. ден. ед. При S_3 - прибыль 20 млн. ден. ед., при S_4 - прибыль 16 млн. ден. ед. Выполнив соответствующие рассуждения для всех схем компании и всех схем, получим:

$$(\pi_{ij}) = \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 16 & -17 & 20 & 16 \\ 14 & 16 & -13 & 14 \\ 18 & 18 & -12 & 13 \end{pmatrix}$$

Находим оценки решений фирмы:

$W_1 = 16 \cdot 0{,}25 + (-17) \cdot 0{,}12 + 20 \cdot 0{,}13 + 16 \cdot 0{,}5 = 12{,}6$

$W_2 = 14 \cdot 0{,}25 + 16 \cdot 0{,}12 + (-13) \cdot 0{,}13 + 14 \cdot 0{,}5 = 10{,}7$

$W_3 = 18 \cdot 0{,}25 + 18 \cdot 0{,}12 + (-12) \cdot 0{,}13 + 13 \cdot 0{,}5 = 11{,}6$

$W = \max\{Wi\} = W_1$, следовательно, фирме рекомендуется приобрести пакет акций π_1.

как критерий минимума среднего риска.

В некоторых случаях используется матрица рисков (R_{ij}); i=l,...,m; j=l,...,n.

Под риском понимается потерянный выигрыш: разность между максимально возможным для варианта внешних условий выигрышем и фактичным выигрышем.

Построим матрицу рисков для разобранной выше задачи, но возьмем другие значения пакетов акций для облегчения решения:

Пакет акций	*Изменение стоимости акций*		
	Рост	*Стабильное состояние*	*Снижение*
π_1	*10*	*6*	*-7*
π_2	*6*	*4*	*-3*
π_3	*8*	*3*	*-2*

$$(R_{ij}) = \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 15 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 13 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

В данном случае, например, для S_1 максимальная прибыль получается при приобритении пакета π_3- 8 млн. ден.ед. При покупкеπ_1 прибыль будет меньше – 6 млн. ден. ед. Потерянный выигрыш (риск): 8-6=2 млн. ден. ед.

Результаты принятия решений вычисляется по формуле: $W_i = \sum_{j-1}^{n} R_{ij} \cdot p_j,\ i = 1, \dots, m.$

W_1,= $2 \cdot 0{,}25 + 15 \cdot 0{,}12 + 0 \cdot 0{,}13 + 0 \cdot 0{,}5 = 2{,}3$

W_2= $4 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}12 + 13 \cdot 0{,}13 + 2 \cdot 0{,}5 = 3{,}93$

W_3= $0 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}12 + 12 \cdot 0{,}13 + 3 \cdot 0{,}5 = 3{,}06$

W = min{Wi}= W_1 , следовательно, фирме рекомендуется приобрести пакет акций π_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конюховский П. Математические методы исследования операций. – СПб.: Питер, 2001.
2. Исследование операций в экономике: учеб, пособие / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Юнити. 2002. – 413с.
3. Жук Л.В. Лекции по математическому программированию и теории игр: учебное пособие / Л.В. Жук, О.Н. Прокуратова. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011. – 123 с.
4. Прокуратова О.Н. Лекции по методам оптимизации: учебное пособие / О.Н. Прокуратова. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2015. – 80 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ И ПОСТАВЩИКОВ ПЛАТНЫХ МЕДИЦИНСКИХ УСЛУГ

Т.Н. Русских
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *trusskih@rambler.ru*
А.М. Музалевская
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *borisova.aleno4ka@gmail.com*

В статье проводится анализ требований к информационной системе поддержки принятия решений для потребителей и поставщиков платных медицинских услуг на региональном рынке. Приводятся эмпирические результаты мониторинга удовлетворенности потребителей качеством и доступностью медицинских услуг коммерческих клиник г.Орла и Орловской области.

Ключевые слова: медицинские услуги, поддержка принятия решений, информационная система, мониторинг.

В настоящее время в условиях сохраняющейся тенденции низкой доступности и, зачастую, невысокого качества бесплатной медицинской помощи, растет спрос населения на платные медицинские услуги. Это обуславливает открытие в регионах новых платных медицинских организаций (далее МО), увеличение доли рынка платных медицинских услуг [2, 3]. В сложившейся ситуации, с одной стороны, руководство коммерческих медицинских организаций заинтересовано в привлечении и удержании клиентов на конкурентном рынке, с другой стороны, потребители сталкиваются с проблемой выбора платной медицинской организации, конкретного специалиста или услуги. Вышеизложенное обосновывает актуальность разработки информационной системы поддержки принятия решений, как для потребителей, так и для поставщиков платных медицинских услуг.

На начальном этапе исследования определены бизнес-требования к информационной системе [1]:

– регистрация потребителей и коммерческих МО;

– получение пользователями справочной, нормативной информации;

– проведение мониторинга удовлетворенности потребителей качеством и доступностью предоставленных медицинских услуг;

– формирование рейтинга специалистов, рейтинга коммерческих МО;

– обеспечение мониторинга качества и доступности медицинских услуг контролирующими органами.

На основе приведенных бизнес-требований для системы выделены основные действующие лица: «коммерческая медицинская организация», «потребитель», «модератор», «контролирующие органы».

В таблице 1 представлена функциональность системы для действующих лиц «коммерческая медицинская организация», «потребитель», «модератор».

Таблица 1 – Функциональность системы

Действующее лицо	Вариант использования	Комментарий
Потребитель	Регистрация пользователя в личном кабинете.	Для совершения действий в системе пользователь должен зарегистрироваться.
	Поиск/просмотр информации о медицинской организации, медицинской услуге.	Вывод по запросу пользователя информации о МО, медицинской услуге в зависимости от заданных пользователем фильтров.
	Заполнение анкеты по оценке качества и доступности медицинских услуг.	Пользователю предоставлена возможность оценить качество и доступность медицинских услуг в выбранной МО.
	Составление и отправка жалобы, вопроса или отзыва.	Пользователь может составить и отправить жалобу, вопрос или отзыв. В своем личном кабинете пользователь может отслеживать статус и этапы рассмотрения жалобы, вопроса.
	Просмотр результатов мониторинга, рейтинга специалистов, рейтинга коммерческих медицинских организаций региона.	Генерируются результаты мониторинга удовлетворенности потребителей качеством и доступностью медицинских услуг по основным критериям в зависимости от введенных пользователем параметров. Пользователь может просмотреть рейтинг специалистов и коммерческих МО региона
	Просмотр контактов медицинской организации.	При выборе медицинской организации пользователь может ознакомиться с контактами МО.
	Переход в информационную систему медицинской организации.	При выборе МО пользователь может перейти в его информационную систему напрямую по ссылке.
Коммерческаямедицинская организация	Регистрация медицинской организации.	МО необходимо зарегистрироваться путем заполнения карточки с полями о самой организации, услугах и специалистах.
	Поиск/просмотр информации о медицинской организации.	Вывод по запросу МО информации в зависимости от заданных фильтров.
	Просмотр результатов мониторинга качества предоставленных медицинских услуг, рейтинга специалистов и коммерческих МО региона.	В зависимости от заданных фильтров выводятся результаты мониторинга удовлетворенности потребителей качеством и доступностью медицинских услуг. МО может просмотреть рейтинг специалистов и коммерческих МО региона.
Модератор	Проверка корректности регистрационной карточки потребителя / регистрационной карточки медицинской организации / отзыва.	После заполнения или редактирования электронных регистрационных форм данные проходят автоматическую проверку на правильность заполнения полей. После успешного прохождения проверки, регистрационная карточка, анкета или отзыв попадает на проверку модератора. Модератор изучает данные на предмет корректности заполнения. Если в данных найдены ошибки, карточка, анкета или отзыв возвращается к пользователю для внесения правок.

	Обработка результатов мониторинга качества предоставленных медицинских услуг.	Модератор обрабатывает результаты мониторинга удовлетворенности, отзывы; формирует параметры для вывода результатов мониторинга для просмотра различными классами пользователей.
	Обработка запроса на проведение мониторинга.	Модератор обрабатывает запрос контролирующих органов на проведение мониторинга качества предоставленных медицинских услуг по требуемым параметрам и формам.

Одним из реализуемых в информационно системе бизнес-процессов является мониторинг удовлетворенности потребителей качеством и доступностью медицинских услуг, предполагающий анкетирование пользователей. Для реализации анкетирования может быть использована разработанная методика мониторинга удовлетворенности потребителей качеством и доступностью медицинских услуг на основе лингвистического, балльного оценивания и инструментария нечеткой математики [4].

Система критериев удовлетворенности потребителей качеством и доступностью платных медицинских услуг включает четыре интегральных критерия удовлетворенности: профессионализм медицинского персонала, отношение к пациенту; организационная доступность; ресурсы, материально-техническая оснащенность; результативность предоставляемых услуг.

Каждый интегральный критерий удовлетворенности является обобщением частных критериев. К примеру, в таблице 2 приведены частные критерии интегральных критериев «Профессионализм медицинского персонала, отношение к пациенту», «организационная доступность».

Таблица 2 – Частные критерии удовлетворенности

Интегральные критерии	Частные критерии
Профессионализм медицинского персонала, отношение к пациенту	Доброжелательность, вежливость и внимательность врачей
	Доброжелательность, внимательность, вежливость среднего, младшего мед. персонала
	Качество диагностики врача при осмотре
	Доступность объяснений врача (о заболевании, его возможных причинах, способах лечения, о возможных побочных эффектах лечения и т.п.)
	Качество диагностики и объяснений врача при проведении обследований (УЗИ, ЭКГ и т.п.)
	Качество проведения лабораторных анализов мед.персоналом
Организационная доступность	Возможность получения необходимой информации о приеме специалистов, стоимости услуг с помощью телефона, Интернета и т.п.
	Своевременность записи к врачу
	Своевременность записи на диагностические обследования
	Своевременность записи на лабораторные анализы
	Время и условия оформления договора и оплаты услуг, время ожидания приема
	Стоимость услуг
	Время ожидания результатов лабораторных анализов

Введем обозначения для интегральных критериев качества и доступности медицинских услуг:

K_1 – квалификация и профессионализм медицинского персонала, отношение к пациенту;

K_2 – организационная доступность,

K_3 – ресурсы, материально-техническая оснащенность МО;

K_4 – результативность предоставляемых услуг.

Обозначим $K_{i,j}$ – частные критерии качества и доступности медицинских услуг интегрального критерия K_i (где $j = 1,...,n_{ij}$, n_{ij} – число частных критериев в группе);

$U_{P_m}(K_{i,j})$ – уровень удовлетворенности потребителя P_m качеством услуг по соответствующему частному критерию $K_{i,j}$.

$U_{P_m}(K_i)$ – уровень удовлетворенности потребителя P_m качеством услуг по соответствующему интегральному критерию K_i.

Уровни удовлетворенности по частным критериям $U_{\mathrm{P}_m}(K_{i,j})$ задаются в виде лингвистической переменной с терм-множеством: T^1– «очень низкий», T^2 – «низкий», T^3 – «средний», T^4 – «высокий», T^5 – «очень высокий». Термы описываются нечеткими треугольными числами [4].

Индивидуальный уровень удовлетворенности потребителя P_m качеством и доступностью услуг по интегральным критериям предлагается определять как средний уровень по совокупности частных критериев удовлетворенности:

$$U_{P_m}(K_i) = \frac{1}{n_{ij}} \sum_j U_{P_m}(K_{i,j}). \qquad (1)$$

Обозначим $\omega_{P_m}(K_i)$ – весовой коэффициент относительной важности интегрального критерия K_i для потребителя P_m. Весовые коэффициенты $\omega_{P_m}(K_i)$ представляют собой нормированные балльные оценки важности критериев для потребителя по пятибалльной шкале от 0 до 5.

Общий индивидуальный уровень удовлетворенности U_{P_m} потребителя качеством и доступностью услуг определяется в виде:

$$U_{P_m} = \sum_{i=1,4} \omega_{P_m}(K_i) U_{Pm}(K_i). \qquad (2)$$

Во введенных выше обозначениях средние уровни удовлетворенности потребителей половозрастной группы G_l по частным критериям $U_{G_l}(K_{i,j})$, а также средние уровни удовлетворенности по интегральным критериям $U_{G_l}(K_i)$ определяются в виде:

$$U_{G_l}(K_{i,j}) = \frac{1}{N_l} \sum_{P_m \in G_l} U_{P_m}(K_{i,j}), \qquad U_{G_l}(K_i) = \frac{1}{N_l} \sum_{P_m \in G_l} U_{P_m}(K_i) \ . \tag{3}$$

Рассмотрим эмпирические результаты мониторинга удовлетворенности потребителей качеством и доступностью услуг платных медицинских организаций г. Орла и Орловской области на примере половозрастной группы респондентов – женщины в возрасте от 16 до 35 лет. В социологическом опросе, проведенном июне-июле 2018 года, приняли участие 92 респондента данной половозрастной группы, проживающих на территории г. Орла и Орловской области.

Согласно предложенной методике мониторинга были вычислены нечеткие и дефаззифицированные уровни удовлетворенности респондентов по каждому частному критерию. В таблице 3 приведены дефаззифицированные средние уровни удовлетворенности респондентов по частным критериям.

Таблица 3 – Уровни удовлетворенности респондентов по частным критериям

Частный критерий удовлетворенности качеством и доступностью услуг	Дефаззифицированные средние уровни удовлетворенности
Профессионализм медицинского персонала, отношение к пациенту	
Доброжелательность, вежливость и внимательность врачей	0,77
Доброжелательность, внимательность, вежливость среднего, младшего мед. персонала	0,78
Качество диагностики врача при осмотре	0,75
Доступность объяснений врача (о заболевании, его возможных причинах, способах лечения, о возможных побочных эффектах лечения и т.п.)	0,72
Качество диагностики и объяснений специалистов при проведении обследований (УЗИ, ЭКГ и т.п.)	0,72
Качество проведения лабораторных анализов мед.персоналом	0,73
Организационная доступность	
Возможность получения необходимой информации о работе учреждения с помощью коммуникационных средств (телефон, Интернет)	0,74
Своевременность записи к врачу	0,75
Своевременность записи на диагностические обследования	0,76
Своевременность записи на лабораторные анализы	0,76
Время и условия оформления договора и оплаты услуг, время ожидания приема	0,75
Стоимость услуг	0,62
Время ожидания результатов лабораторных анализов	0,71
Ресурсы, материально-техническая оснащенность	
Условия пребывания в учреждении (состояние здания, кабинетов и т.п.)	0,81
Перечень предоставляемых медицинских услуг	0,78
Результативность предоставляемых услуг	
Своевременность, полнота назначений и проведения обследования врачом; качество проведенного лечения	0,74
Полнота и качество диагностического обследования, лабораторных исследований	0,77

Анализирую результаты, можно заключить, что в целом опрошенные респонденты удовлетворены качеством и доступностью оказанных платных медицинских услуг по совокупности частных критериев удовлетворенности. Из всей совокупности частных критериев низкий уровень удовлетворенности получен только в оценке стоимости медицинских услуг клиник (0,62). По остальным частным критериям групп «Профессионализм медицинского персонала, отношение к пациенту», «Результативность предоставляемых услуг» полученные уровни удовлетворенности превышают 0,72. Таким образом, можно заключить, что в секторе платной медицине в должной мере реализован пациент-ориентированный подход к оказанию медицинской помощи. Этот очевидный факт обусловлен, прежде всего, стремлением клиник повысить уровень конкурентоспособности на региональном рынке в борьбе за потенциальных клиентов. Несмотря на высокий уровень цен на медицинские услуги коммерческих клиник по сравнению с ценами на аналогичные платные услуги муниципальных организаций, муниципальные организации зачастую не способны выдержать конкуренции, в частности, как показал социологический опрос, в виду отсутствия отдельных высококвалифицированных специалистов.

На основе индивидуальных уровней удовлетворенности по частным критериям по формуле (1) получены индивидуальные и групповые уровни удовлетворенности по интегральным критериям. Путем взвешивания с учетом важности интегральных критериев вычислены индивидуальные (формула (2)) и групповой уровень удовлетворенности качеством и доступностью медицинских услуг (формула (4)).

В таблице 4 приведены нечеткие и дефаззифицированные групповые уровни удовлетворенности респондентов качеством и доступностью платных услуг по интегральным критериям, общие уровни удовлетворенности.

Таблица 4 – Уровни удовлетворенности респондентов по интегральным критериям

Критерий	Платные услуги коммерческих организаций	
	$U(K_i)$	$d(U(K_i))$
Профессионализм медицинского персонала, отношение к пациенту	(0,52;0,77;0,92)	0,74
Организационная доступность	(0,52;0,76;0,91)	0,73
Ресурсы, материально-техническая оснащенность	(0,57;0,82;0,95)	0,78
Результативность предоставляемых услуг	(0,53;0,77;0,93)	0,74
Общий уровень удовлетворенности	(0,54;0,78;0,93)	0,75

Уровни удовлетворенности респондентов по интегральным критериям, общий уровень удовлетворенности опрошенных респондентов качеством и доступностью платных услуг можно оценить как «высокий».

Результаты мониторинга удовлетворенности потребителей позволят осуществлять действенный контроль качества и доступности оказанных медицинских услуг со стороны коммерческих организаций и контролирующих органов в секторе платной медицины региона. С другой стороны, субъективная оценка

качества предоставленных медицинских услуг может быть положена в основу формирования рейтинга медицинских организаций.

Перечисленные функциональные возможности разрабатываемой информационной системы обеспечивают поддержку принятия решений всем участникам рынка платных медицинских услуг региона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вигерс, К. Разработка требований к программному обеспечению / К. Вигерс, Д. Битти. – 3-е изд., доп. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2014. – 736 с.
2. Объем платных медицинских услуг в субъектах Российской Федерации. 2014-2017 гг. – Режим доступа: http://medresearch.ru/wp-content/uploads /2018 /06/SYNOPSIS_rus_med_market_regions_2018_free.pdf
3. Платное обслуживание населения в России. 2017: Стат. Сб./ Росстат. М., 2017, 110 .
4. Русских Т.Н. Математическое обеспечение мониторинга удовлетворенности потребителей качеством и доступностью медицинских услуг в регионе: монография / Т.Н. Русских. – Орел: Картуш, 2016. – 120 с.

МОДЕЛИ ПОВЕДЕНЧЕСКОГО СКОРИНГА ЗАЕМЩИКОВ БАНКА

С.П. Строев, к.э.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
А.А. Гришин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

Введение

Основное назначение скоринговых систем при работе с физическими лицами заключается в том, чтобы на основе некоторой информации о заявителе обоснованно принять решение о возможности выдачи ему кредита и его условиях. Другим, не менее актуальным, применением скоринговых систем является прогнозирование изменений платежеспособности заемщика на основе информации о его взаимоотношениях с банком, например анализ графиков погашения кредита, оборотов по личным счетам. Результаты подобного анализа позволяют гибко подходить к работе с каждым клиентом, увеличивать или уменьшать кредитные линии, применять различные стимулирующие программы. Подобные скоринговые системы в литературе [3,5,7] получили название систем поведенческого скоринга. Следует также выделить активно развиваемые в последнее время так называемые системы коллекторского скоринга, основное назначение которых состоит в оценке возможности взыскания с заемщиков просроченных задолженностей [4]. Выделенные возможности скоринговых систем традиционно применяются в качестве инструмента риск-менеджмента персонального кредитного портфеля банка.

Для построения модели скоринговой системы принято использовать априорный и апостериорный подходы.

В рамках априорного подхода [6] модель скоринговой системы разрабатывается, как правило, с привлечением экспертов, определяющих показатели системы и соответствующие им оценки.

Апостериорный подход к построению модели скоринговой системы предполагает наличие значительного числа кредитных историй, в результате обработки которых определяются показатели скоринговой системы и соответствующие им значения.

В последнее время при построении модели скоринговой системы применяется именно апостериорный подход. Объясняется это, прежде всего, значительным ростом объема кредитных историй физических лиц, а также развитием и доступностью соответствующих технологий их обработки.

В данной работе в рамках апостериорного подхода описываются основные результаты построения модели поведенческого скоринга на основе анализа данных о взаимодействии заемщика с банком.

Схема построения модели скоринговой системы

Апостериорный подход к построению модели скоринговой системы предполагает выполнение следующих этапов (табл. 1) [6].

Таблица 1 – Последовательность этапов разработки модели скоринговой системы

Наименование этапа	Перечень процедур реализации	Результат этапа
Сбор и первичная обработка данных	Обработка (удаление) пропущенных значений, поиск дубликатов, поиск аномальных значений признаков, формирование признакового пространства	Обучающее множество
Разработка модели	Оценка параметров выбранной модели	Формализованное представление модели классификации
Содержательная интерпретация модели	Определение диапазонов изменений признаков каждого профиля	Профили заемщиков

Для реализация выделенных этапов построения модели скоринговой системы использовалось библиотеки Pandas, Scikit, light GBM, XGBoost, CatBoost языка программирования Python.

Дадим необходимое описание выделенных в таблице 1 этапов построения скоринговой модели.

Эмпирические результаты

На первом этапе проводилась первичная обработка имеющего массива данных, который представлял собой сведения об обслуживании заемщиками банка взятых кредитов. По каждой записи клиента известна его дисциплина (плохой/хороший) – зависимая переменная, а также следующий набор независимых переменных, условно объединенных по блокам: блок денежных переводов по кредиту (тип переводов, география переводов, география телефона, сумма перевода), блок активности клиента (до напоминания по смс, после напоминания по смс, до взятия кредита, после взятия кредита, после попадания в просрочку), блок социально-демографических признаков (возраст, пол, резиденст-

во, совпало ли ФИО с телефоном, совпал ли регион получения кредита с регионом телефона, указан иной номер телефона при взятии кредита, тип получения финансовых средств). Первичная обработки исходной совокупности данных проводилась с использованием возможностей библиотеки Pandas. В частности, выявлялись пропуски, дубликаты и аномальные значения [2]. Соответствующие записи удалялись из исходного массива. В результате была сформирована обучающая выборка объемом 55 тысяч записей.

Далее на этом этапе рассматривалась задача по формированию признакового пространства обучающего множества. Для этого использовался алгоритм градиентного бустинга, программно реализованный в библиотеке XGBoost [1]. В случае применения указанного алгоритма установлено, что наибольшую значимость имеют признаки, характеризующие денежные переводы по кредиту и активность клиента. Блок социально-демографических признаков имеет меньшую значимость.

На этапе разработки модели решалась задача по выделению типичных профилей заемщиков. Фактически данная задача предполагает разбиение исходного множества на конечное число подмножеств. Такие задачи часто решают методами неконтролируемого обучения или кластеризации, среди которых наибольшее распространение получили алгоритмы семейства *k*-средних, отличительной особенностью которых является задание количества групп разбиения. В связи с этим для решения рассматриваемой задачи был выбран алгоритм кластеризации DBSCAN [8], входными параметрами которого, наряду с матрицей попарных расстояний между объектами, являются максимальное расстояние между соседними точками и минимальное число точек в окрестности. Данный алгоритм программно реализован в библиотеке машинного обучения языка Python. В результате получено следующее разбиение исходного множества (рисунок 1).

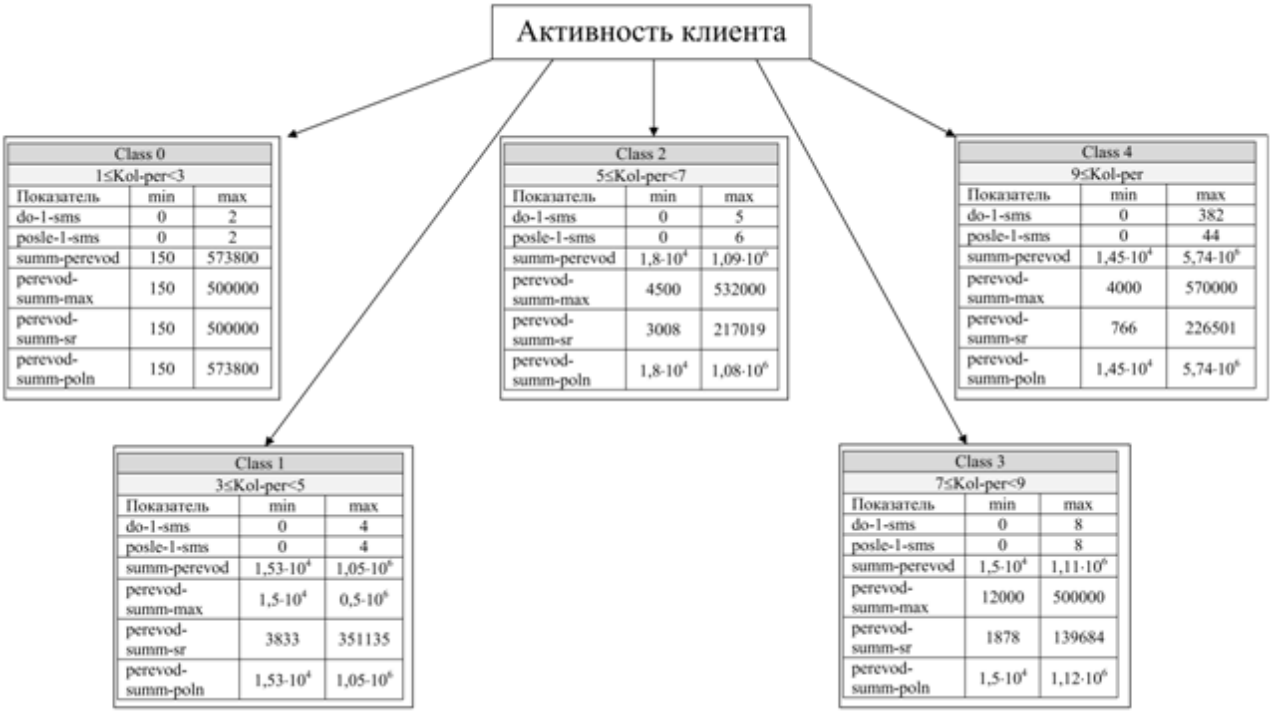


Рисунок 1 – Профили заемщиков

Анализ выделенных профилей позволяет также сделать вывод о том, что действенным средством воздействия на клиента является его смс-оповещения о необходимости обслуживания кредита.

Основные выводы исследования

В результате проведенных исследований возможности построения модели поведенческого скоринга на основе имеющихся апостериорных данных получены следующие результаты:

- разработана процедура определения профиля заемщика, позволяющая выработать стратегию работы с клиентом и снизить затраты на смс-оповещение;

- установлено, что наиболее важными признаками, определяющими профиль заемщика, являются признаки, которые характеризуют денежные переводы по кредиту и активность клиента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин А.А. Разработка модели поведенческого скоринга с использованием методов градиентного бустинга / А.А. Гришин, С.П. Строев // Научно-технический вестник Поволжья. – №9. – 2018. – С.93-98.
2. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. - М.: Физматлит, 2006.— 816 с.
3. Abdou H., Pointon J. Credit scoring, statistical techniques and evaluation criteria: A Review of the Literature // Intelligent Systems in Accounting, Finance & Management. – 2011. – Vol. 2/3, no. 18. – P. 59-88. – URL: http: //usir.salford.ac.uk/16518/4/Credit Scoring.
4. Anderson R. The credit scoring toolkit: theory and practice for retail credit risk. – New York : Oxford University press, 2007. – 790 p.
5. Ince H., Aktan B. A Comparison of Data mining Techniques for Credit Scoring in Banking: A managerial Perspective // Journal of Business Economics and Management. – 2009. – Vol. 3, no. 10. – P. 233-240.
6. Naeem S. Credit risk scorecards: developing and implementing intelligent credit scoring. – Hoboken, New Jersey : John Wiley, Sons, 2006. – 208 p.
7. Ravi V. Advances in banking technology and management: impacts of ICT and CRM. – Hershey, PA: Information Science Reference, 2008. – URL: https://books.google.ru/books?id=5h3ZF7bOx0kC&printsec=frontcover&hl= ru&source=gbs ViewAPI&redir esc=y#v=onepage&q&f=false.
8. Sander J. [et al.]. Density-Based Clustering in Spatial Databases: The Algorithm GDBSCAN and Its Applications // Data Mining and Knowledge Discovery. – 1998. – Vol. 2, no. 2. – P. 345–389.

УДК 004.82

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ВЫБОРА БАНКОВСКОГО ПРОДУКТА

И.И. Чернобровкина, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *iichernobrovkina@yandex.ru*
Ю.В. Чернобровкина, аспирант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *nikeli2009*

Экспертные системы удобно использовать в банковском деле и со стороны банковских работников, и со стороны клиентов. Поэтому в статье представлена небольшая экспертная система, построенная в программе EXPERT DEVELOPER PRO, которая может быть усовершенствована и дополнена большим количеством вопросов и выдаваемых результатов.

Ключевые слова: экспертная система, банковский кредит, EXPERT DEVELOPER PRO.

На данный момент в России существует около 560 функционирующих банков. Практически все из них предлагают следующие услуги и продукты: кредиты и кредитные карты. Есть особые условия в зависимости от ситуаций. Например, для держателей зарплатных карт существуют особые условия кредитования. Так, в сбербанке существуют следующие виды кредитов и действий по кредитам: потребительские кредиты: кредит на любые цели, рефинансирование кредитов, кредит для клиентов, ведущих личное подсобное хозяйство, реструктуризация кредитов, реструктуризация задолженности; кредит на жилье: на приобретение строящегося или готового жилья, рефинансирование ипотеки других кредитов, ипотека с господдержкой для семей с детьми, строительство жилого дома, загородная недвижимость, нецелевой кредит под залог недвижимости, ипотека плюс материнский капитал, военная ипотека, ипотека на гараж или машино-место и т.д. [2]. Разнообразие банков и предлагаемых ими услуг зачастую приводит к сложности клиента в определении с выбором. Конечно, существуют службы поддержки, готовые дать информацию, а также можно найти информацию на сайте, но это отнимет много времени. Более того, часто заемщик и сам не может четко определиться с целью кредита и возможностями его погашения. Поэтому предлагается разработать экспертную систему с возможностью ее размещения на сайте банка, которая поможет заемщику определиться с выбором банковского продукта.

Под экспертной системой понимается компьютерная система, способная частично заменить специалиста-эксперта в разрешении проблемной ситуации [1]. Экспертом в данной системе должен выступать специалист по кредитам. Инженером знаний может выступать программист, инженер и т.д. Средством построения экспертной системы предлагается использовать готовое программное обеспечение EXPERT DEVELOPER PRO. Это достаточно простая программа, которая использует байесовскую систему логического вывода. Она

предназначена для проведения консультации с пользователем в какой-либо прикладной области (в нашем случае – область кредитования) с целью определения вероятностей возможных исходов и использует для этого оценку правдоподобности некоторых предпосылок, получаемую от пользователя. Важным достоинством данной программы является возможность создания и использования собственной базы знаний.

На первом этапе необходимо спроектировать структуру логического вывода (рисунок 1), которая в данном случае будет представлена ориентированным графом или деревом решений. В простейшем случае диаграмму дерева решений, описывающего проблему, можно рассмотреть на бумаге. Производя выбор в каждой точке разветвления, диаграмма дерева помогает принимать решения. Такой тип логической структуры (в виде дерева решений) может быть легко преобразован в компьютерную систему.

На рисунке 1 представлен граф, отражающий знания экспертной системы (вопросы составлены для банка ВТБ, что не нарушает общности построения графа). Каждая вершина графа помечена уточняющим вопросом экспертной системы к пользователю или ее ответом на задачу.

Если вершина помечена вопросом, то из нее выходят две дуги. Одна дуга помечена одним ответом пользователя, другая – его альтернативным ответом. Вершина, соответствующая ответу экспертной системы, не имеет выходящих дуг. Все вершины пронумерованы.

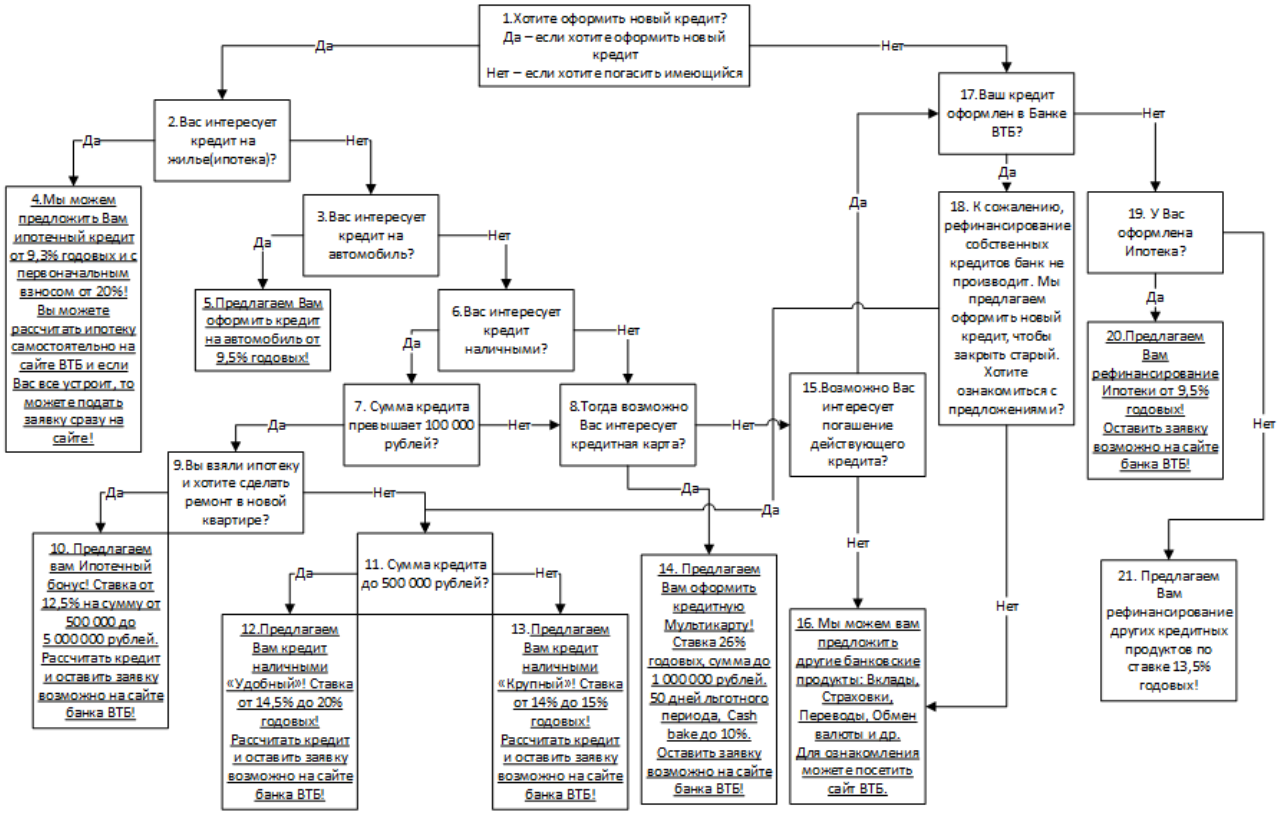


Рисунок 1 – Структура логического вывода в экспертной системе

После построения графа можно переходить к построению экспертной системы.

При загрузке программы появляется окно (рисунок 2). И здесь выбираем «Expert» → «New». Заметим, что экспертов может быть несколько. И далее эксперт заполняет поля (рисунок 3).

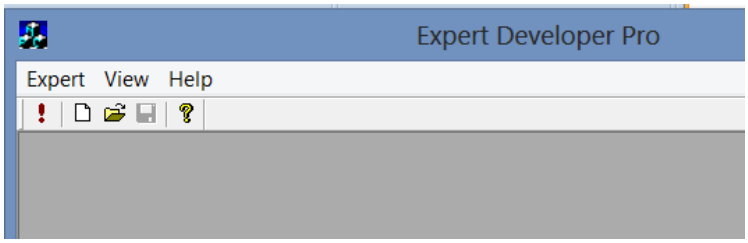


Рисунок 2 – Начальное поле построения системы

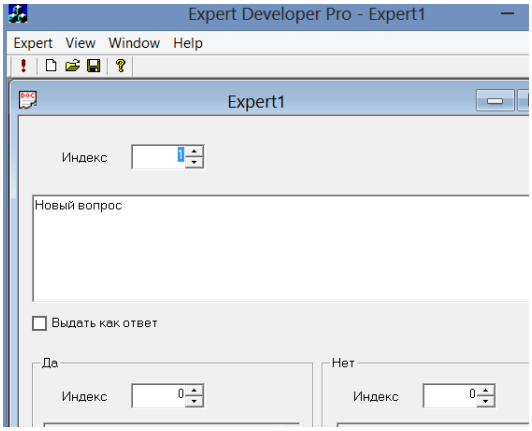


Рисунок 3 – Поле для заполнения экспертом

Согласно схеме на рисунке 1 первый вопрос будет звучать: «Хотите оформить новый кредит?». И далее по схеме: если «да», то «Вас интересует кредит на жилье (ипотека)?», если «нет (хотите погасить имеющийся кредит)», то «Ваш кредит оформлен в банке ВТБ?». В таблице программы это будет выглядеть так, как на рисунке 4. Выставление флажка «Выдать как ответ» символизирует конец тестирования. В этом случае в поле ввода вопроса помещается результат тестирования. Пример завершенного тестирования представлен на рисунке 5.

После создания шаблона можно переходить к тестированию: Expert → Begin Test.

Решение задачи подбора нового автокредита представлено в такой экспертной системе в статье [3].

Такая, несложная для потребителя, экспертная система может быть внесена на сайт Банка. Небольшое количество вопросов не сильно обременит клиента, но поможет быстрее сориентироваться.

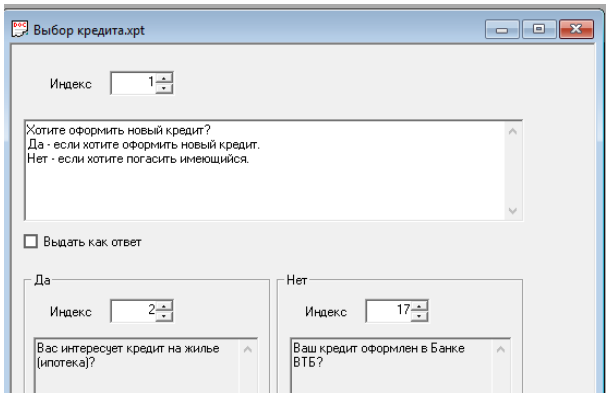


Рисунок 4 – Создание одного из возможных результатов тестирования

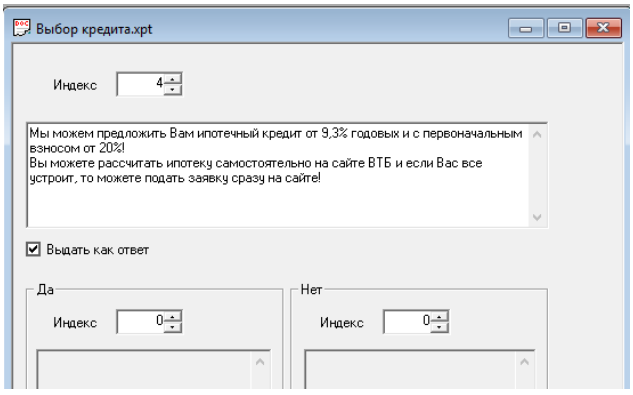


Рисунок 5 – Один из возможных результатов тестирования

ЛИТЕРАТУРА

1. Джарратано Дж., Райли Г. Экспертные системы: принципы разработки и программирование. – М.: Вильямс, 2007. – 1152 с.
2. «Сбербанк» – Наши продукты и услуги [электронный ресурс]. – URL: https://www.sberbank.ru/ru/person/credits/homenew.
3. Чернобровкина И.И., Пыталева В.А. Подбор банковского кредитного продукта методом экспертных систем // Роль и место информационных технологий в современной науке: сборник статей Международной научно - практической конференции (10 апреля 2018 г, г. Челябинск). В 2 ч. , 2018. – с. 10-15.

УДК 519.254

ФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА В СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

В.Г. Шуметов, д.э.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный аграрный университет им. Н.В. Парахина»
e-mail: *shumetov@list.ru*

Обсуждается проблема мнимых повторностей в эмпирических исследованиях. На примере анализа реальных результатов сельскохозяйственных исследований показано, что снять эту проблему можно путем построения факторных моделей дисперсионного анализа.

Ключевые слова: сельскохозяйственные исследования; мнимые повторности; дисперсионный анализ, множественное сравнение средних; факторный эксперимент; обобщенная линейная модель.

Одним из важных направлений статистического анализа результатов эмпирических исследований является обоснование эффекта воздействия регулируемых факторов, что сводится к сравнению средних по вариантам эксперимента. Если при сравнении двух средних достаточно воспользоваться *t*-критерием (критерием Стьюдента), то в случае большего числа вариантов эксперимента необходимо применять методы множественного сравнения, когда на первом этапе проверяется гипотеза о равенстве всех средних, а на следующем этапе проводится собственно сравнение по тому или иному статистическому критерию – Дункана, Шеффе, Тьюки и др. В математическом плане в основе методов множественного сравнения лежит дисперсионный анализ результатов повторных экспериментов, и чем больше повторность, тем надежнее получаемые статистические выводы. Однако в некоторых случаях исследователь сталкивается со значительными трудностями или даже невозможностью проведения повторных опытов. Так, во многих экологических исследованиях это вынуждает ограничиться вычислением точечных оценок изучаемых показателей по имеющимся выборкам, и возникает вопрос: как, имея лишь единственную по-

вторность, оценить значение необходимого показателя и получить меру точности этой оценки?

Распространенным вариантом решения этой проблемы является использование приближенных методов аппроксимации предполагаемых свойств исследуемой статистики. Но из-за возможных отклонений от ряда предположений, таких как независимость измерений и их ошибок, нормальность распределений, однородность дисперсий, обоснованность статистических выводов подвергается серьезным сомнениям. В частности, дискуссию вызвала некорректность дисперсионного анализа, чувствительного к соблюдению вышеназванных условий, при этом критике были подвергнуты не столько ошибки в планировании эксперимента, сколько некорректное применение статистического анализа к их результатам. В опубликованной в 1984 г. С. Хелбертом статье [1] отмечалось, что более чем в четверти всех публикаций в области экологии выявление эффекта того или иного воздействия проводилось по выборкам, ошибочно рассматривавшихся как повторности, либо экспериментальные повторности не были статистически независимыми. Позднее аналогичные ошибки были выявлены и в работах российских экологов [2]; появился даже специальный термин «мнимая повторность» (*pseudoreplication*). Термин *pseudoreplication*, прямой перевод которого «псевдорепликация», не имеет прямого аналога в русском языке, обозначает «ошибочный выбор повторностей для оценки внутри- и междугрупповой изменчивости в статистическом анализе» [3, стр. 7]. По мнению финского эколога М.В. Козлова, чаще всего подобные ошибки связаны с неоправданным обобщением частного (при заданной методике получения выборки) результата на генеральную совокупность [2, стр. 294].

Позднее, в 2008 г., феномен мнимой повторности был детально обсужден в работе [3], представлявшей собой компиляцию нескольких статей. Следует согласиться с выводом авторов одной из них – В.К. Шитикова, Н.А. Цейтлина и В.Н. Якимова, что «псевдорепликацией следует считать лишь такую ситуацию, когда нестатистическая аргументация подменяется статистической. Если же исследователь четко очерчивает границы своего статистического анализа, никаких претензий к нему быть не может...» [3, стр. 109].

Экологические исследования – не исключение, псевдорепликации встречаются и в сельскохозяйственных экспериментах. Часто это происходит, когда исследователь, исходя из лучших побуждений, стремится усилить аргументацию в пользу обоснования эффекта воздействия распространением понятия «экспериментальная единица» на элементы выборки. В качестве примера приведем фрагмент диссертационного исследования М.А. Зяблицевой [4], посвященного анализу влияния микробиологических препаратов на продуктивность цыплят-бройлеров: при сравнении статистической достоверности разности содержания гемоглобина и других гематологических показателей в крови цыплят опытных групп с контрольной группой по критерию Стьюдента истинная экспериментальная единица – группа цыплят объемом 100 голов – была представлена выборками объемом по три особи, измерения которых и принимались за повторности.

Одним из вариантов выхода из непростой ситуации отсутствия повторностей является постановка факторных экспериментов с последующим анализом их результатов методами дисперсионного анализа. В работе [5] нами были рассмотрены особенности алгоритмов множественного сравнения средних с помощью относительно новой процедуры дисперсионного анализа – обобщенной линейной модели [6]; в этой процедуре можно также проводить оценку параметров двух- и более факторных моделей. Приведем пример из цитированной нами выше работы [4] по влиянию микробиологических препаратов на содержание гемоглобина в крови цыплят.

Следуя рекомендациям О.Ю. Ребровой по описанию статистического анализа данных в оригинальных статьях [7], представим методику эксперимента. Объектом исследования являлись цыплята-бройлеры кросса «*ROSS*-308». Для проведения каждого «научно-хозяйственного опыта» (терминология автора – М.А. Зяблицевой) были сформированы две опытные и одна контрольная группы цыплят-бройлеров по 100 голов в каждой. Птицу в группы отбирали по принципу аналогов, однородную по живой массе, состоянию здоровья, кроссу и возрасту. Цыплята опытных групп дополнительно к основному рациону получали микробиологические препараты: опытная группа 1 – препарат «УРГА», опытная группа 2 – препарат «Байкал ЭМ-1». Продолжительность каждого опыта составляла 39 суток. Кровь для исследований отбирали 3 раза – в 14, 28 и 38 суток от трех цыплят каждой группы.

Результаты измерений содержания гемоглобина в крови цыплят в формате «среднее арифметическое ± ошибка среднего» представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Содержание гемоглобина (г/л) в крови цыплят-бройлеров. Источник [4]

Возраст, сутки	**Группа**		
	Контрольная	**1-я опытная**	**2-я опытная**
14	79,53±1,16	87,73±2,02	80,72±2,03
28	111,10±8,20	113,46±2,33	118,13±1,16
38	102,90±3,11	108,80±2,02	109,96±2,33

Анализ средних данных (без учета ошибок), приведенных в таблице 1, проводим в программной среде процедуры «Обобщенная линейная модель» одной из ранних версий пакета статистических программ анализа данных общественных наук *SPSS Base* 8.0 [8].

На первом этапе исследования выполняем визуальный анализ распределения исходных данных, используя соответствующие графические средства пакета – диаграммы Тьюки, или, иначе, ящичковые диаграммы (рисунок 1).

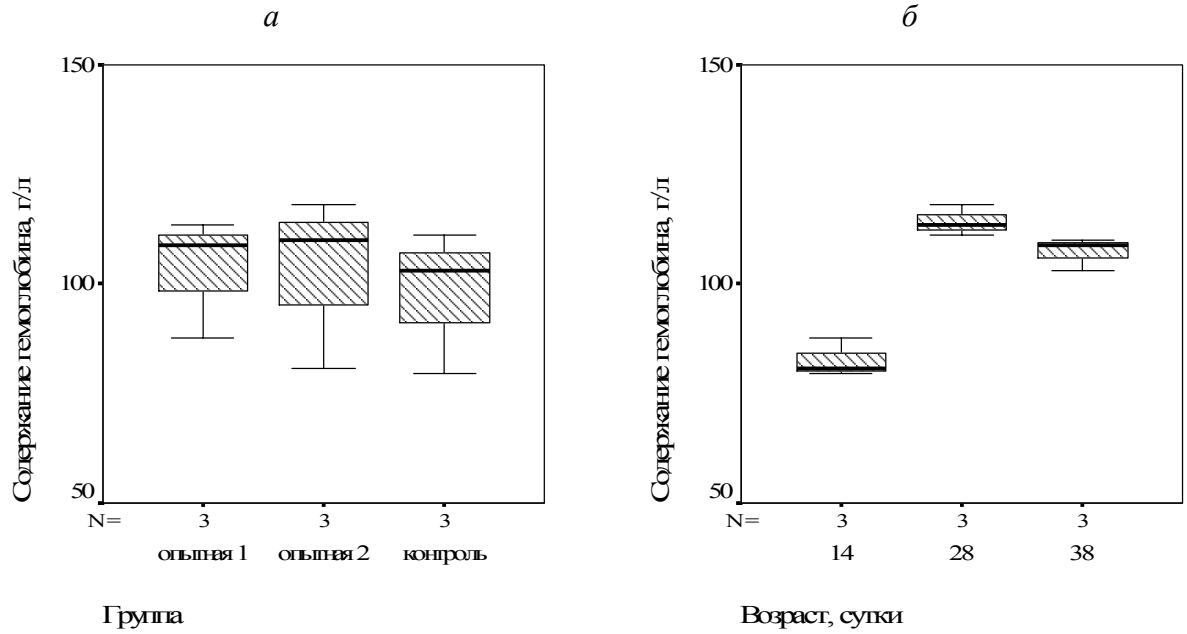


Рисунок 1 – Сравнение содержания гемоглобина в крови цыплят разного возраста

По диаграммам можно выдвинуть гипотезы о различии средних. По возрасту цыплят распределения содержания гемоглобина не перекрываются, что говорит в пользу значимости различия средних, тогда как по группам распределения показателя перекрываются. Это не позволяет однозначно судить о статистической значимости различия соответствующих средних лишь визуально, и требуется более «тонкий» аналитический инструментарий.

Выполним анализ различия средних показателя «содержание гемоглобина» с помощью процедуры «Обобщенная линейная модель» по методике, описанной в [6, 8]. В этой процедуре вначале проводится оценка статистической значимости различия средних «в целом». При этом на дисплей выводится тест межсубъектных эффектов «*Tests of Between-Subjects Effects*» – таблица 2.

Таблица 2 – Тест межсубъектных эффектов для показателя «содержание гемоглобина» (расчеты автора)

Источник изменчивости	**Сумма квадратов**	**Ст. св.**	**Средний квадрат**	***F***	**Значимость**
Исправленная модель	1705,199	4	426,300	45,677	0,001
Постоянная	92482,892	1	92482,892	9909,412	0,000
ГРУППА	56,200	2	28,100	3,011	0,159
ВОЗРАСТ	1648,999	2	824,499	88,344	0,000
Ошибка	37,331	4	9,333		
Сумма	94225,422	9			
Исправленная сумма	1742,530	8			

Из теста межсубъектных эффектов следует влияние возраста цыплят на содержание гемоглобина – критерий Фишера F=88,344 статистически значим на p-уровне не хуже 0,0005. Этот тест свидетельствует и о высоком качестве линейной модели: коэффициент детерминации R^2=0,979 близок к единице. В то же время значение p-уровня для фактора «группа», равное 0,159, превышает норматив 0,05, и этот фактор не может быть признан статистически значимым.

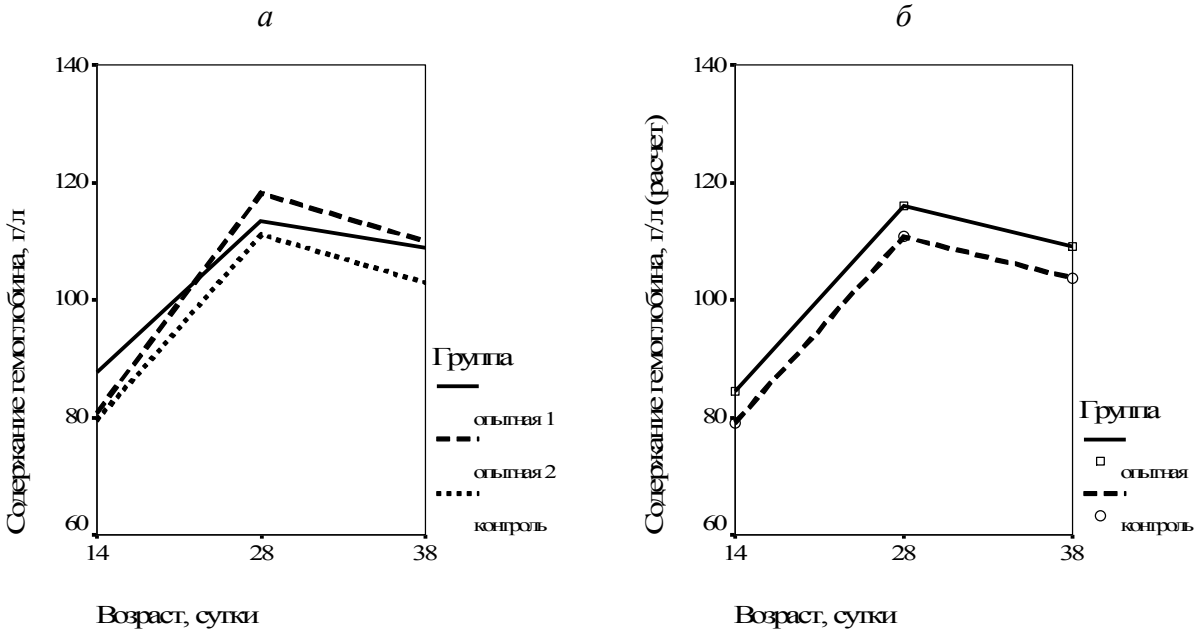


Рисунок 2 – Зависимость содержания гемоглобина в крови от возраста цыплят: *а* – фактически; *б* – расчет

Судя по рисунку 2, фактические значения содержания гемоглобина в крови цыплят опытных групп близки, что дает основание объединить их в одну. Это логично, поскольку препарат «УРГА» отличается от препарата «Байкал ЭМ-1» лишь некоторыми добавками, которые мало влияют на гематологические показатели крови цыплят. Тогда мы получаем уже иной результат – таблица 3.

Таблица 3 – Тест межсубъектных эффектов для показателя «содержание гемоглобина» после объединения опытных выборок (расчеты автора)

Источник изменчивости	**Сумма квадратов**	**Ст. св.**	**Средний квадрат**	***F***	**Значимость**
Исправленная модель	1704,967	3	568,322	75,648	0,000
Постоянная	80783,241	1	80783,241	10752,919	0,000
ГРУППА	55,968	1	55,968	7,450	0,041
ВОЗРАСТ	1648,999	2	824,499	109,748	0,000
Ошибка	37,563	5	7,513		
Сумма	94225,422	9			
Исправленная сумма	1742,530	8			

Как следует из таблицы 3, в результате объединения опытных групп цыплят становится статистически значимым также и фактор «группа» (p=0,041<0,05), что позволяет признать адекватной двухфакторную модель

$$Y_{ij} = \mu_0 + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

и оценить ее параметры (таблица 4). В этой модели: Y_{ij} – наблюдаемое значение выходной переменной Y на i-м уровне фактора «группа» и j-м уровне фактора «возраст»; μ_0 – оценка свободного коэффициента модели; α_i и β_j – оценки главных эффектов; ε_{ij}– случайная ошибка.

Таблица 4 – МНК-оценки параметров двухфакторной модели влияния группы и возраста цыплят на содержание гемоглобина

Параметр	*B*	Стд. ошибка	*t*	Значимость	95% доверительный интервал	
					нижняя граница	нижняя граница
Постоянная	103,693	2,043	50,756	0,000	98,442	108,945
[ГРУППА=1]	5,290	1,938	2,729	0,041	0,308	10,272
[ГРУППА=2]	0	,	,	,	,	,
[ВОЗРАСТ=14]	-24,560	2,238	-10,974	0,000	-30,313	-18,807
[ВОЗРАСТ=28]	7,010	2,238	3,132	0,026	1,257	12,763
[ВОЗРАСТ=38]	0	,	,	,	,	,

Поясном таблицу 4. В ней постоянная μ_0=103,7 г/л, эффекты группы 2 (контроль) и возраста 38 суток приняты за нулевые. Эффекты опытной группы (объединенной) и возраста отсчитываются уже от этого уровня; так, содержание гемоглобина в крови цыплят объединенной опытной группы в возрасте 28 суток характеризуется добавкоми α_1=5,29 г/л и β_{28}=7,01 г/л. Значения 95%-ного доверительного интервала всех эффектов не включает в себя нуль, а это свидетельствует о статистической значимости всех параметров модели.

Дополнительную информацию о значимости разности средних дают таблица 5 множественных сравнений и таблица 6 однородных подгрупп возраста, полученные при использовании критерия Тьюки.

Таблица 5 – Апостериорные парные сравнения по критерию Тьюки (расчеты автора)

(I) Возраст (сутки)	(J) Возраст (сутки)	Средняя разность (I-J)	Стд. ошибка	Знч. (2-сторон)	95% доверительный интервал	
					нижняя граница	верхняя граница
14	28	-31,5700	2,23796	0,000	-38,8521	-24,2879
	38	-24,5600	2,23796	0,000	-31,8421	-17,2779
28	14	31,5700	2,23796	0,000	24,2879	38,8521
	38	7,0100	2,23796	0,057	-0,2721	14,2921
38	14	24,5600	2,23796	0,000	17,2779	31,8421
	28	-7,0100	2,23796	0,057	-14,2921	0,2721

Таблица 6 – Однородные подгруппы возраста цыплят по критерию Тьюки (уровень значимости критерия различия между подгруппами *p*=0,05)

Возраст, сутки	N	Содержание гемоглобина, г/л	
		1	2
14	3	82,6600	
38	3		107,2200
28	3		114,2300
Уровень значимости критерия различия в подгруппе		1,000	0,057

Как следует из таблиц 5 и 6, цыплята возраста 28 и 28 суток статистически неразличимы: 95% доверительный интервал средней разности содержания гемоглобина в крови цыплят этих возрастов включает в себя нуль, и они образуют однородную подгруппу. Но двухсторонний уровень значимости критерия

различия в подгруппе лишь немного больше нормативной величины 0,05, и при переходе к одностороннему *p*-уровню можно утверждать, что на возраст 28 суток приходится максимум содержания гемоглобина.

Ввиду ограничения на объем публикации мы привели лишь один пример, но уже из него видно, что построение факторных моделей дисперсионного анализа эмпирических данных, во-первых, в ряде случаев позволяет ограничиться одной повторностью дорогостоящих опытов, во-вторых, дает исследователю важную информацию о надежности статистических выводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hurlbert S.H. Pseudoreplication and the design of ecological field experiments // Ecological Monopaphs. – 1984. – V. 54. – P. 187-211.
2. Козлов М.В. Мнимые повторности (pseudoreplication) в экологических исследованиях: проблема, не замеченная российскими учеными // Журнал общей биологии. – 2003. – Т. 64. – № 4. – С. 292–307.
3. Проблемы экологического эксперимента (Планирование и анализ наблюдений) / Под ред. чл.-корр. РАН Г.С. Розенберга и д.б.н. Д.Б. Гелашвили; сост. и коммент. д.б.н. В.К. Шитикова. − Тольятти: СамНЦ РАН; «Кассандра», 2008. − 274 с.
4. Зяблицева М.А. Продуктивность цыплят-бройлеров при использовании микробиологических препаратов «Урга» и «Байкал ЭМ-1». Дис. … к-та сельскохоз. наук. – Троицк, 2018. – 153 с.
5. Шуметов В.Г. Множественные сравнения средних в системе анализа данных общественных наук SPSS Base // Современные проблемы физико-математических наук. М-лы II междунар. н.-практ. конф. 24-27 ноября 2016 г. / под общ. ред. Т.Н. Можаровой. – Орел: ОГУ. – С. 240-244.
6. Бююль А., Цёфель П. SPSS: Искусство обработки информации. Анализ статистических данных и восстановление скрытых закономерностей. – СПб.: ООО «ДиаСофтЮП», 2002. – 608 с.
7. Реброва О.Ю. Описание статистического анализа данных в оригинальных статьях. Типичные ошибки // Журнал неврологии и психиатрии им. С.С. Корсакова. – 2010. – № 11. – С. 71–74.
8. SPSS Base 8.0 для Windows. Руководство по применению. Перевод–Copyright 1998 СПСС Русь. – 397 с.

Научное издание

Современные проблемы физико-математических наук

Материалы
IV Всероссийской научно-практической
конференции с международным участием
22 – 25 ноября 2018 г., г. Орёл

Часть 1

Под общ. ред. канд. физ.-мат. наук, доц. Т.Н. Можаровой

Материалы печатаются в авторской редакции

Технический редактор Строев С.П.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
302026, г. Орел, ул. Комсомольская, д. 95, http:/oreluniver.ru

Подписано к печати 29.11.2018 г. Формат 60x84 1/16
Усл. печ. л. 27,9,0. Тираж 100 экз.
Заказ №

Отпечатано с готового оригинал-макета
на полиграфической базе ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева»
302026, г. Орёл, ул. Комсомольская, д. 95