МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ И.С. ТУРГЕНЕВА

Современные проблемы физико-математических наук

Материалы V Всероссийской научно-практической конференции
с международным участием, 26 – 29 сентября 2019 г., Орел

Орел – 2019

УДК 51+53+681.3
ББК 22.1+22.3+32.81(072.8)
С56

Редакционная коллегия:
Дорофеева В.И., кандидат физико-математических наук, доцент
Зарубин А.Н., доктор физико-математических наук, профессор
Можарова Т.Н., кандидат физико-математических наук, профессор
Марков О.И., доктор физико-математических наук, профессор
Селютин В.Д., доктор педагогических наук, профессор
Тарасова О.В., доктор педагогических наук, профессор
Федяев Ю.С., кандидат физико-математических наук, доцент

Современные проблемы физико-математических наук. Материалы V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием 26 – 29 сентября 2019 г. / под общ. ред. Т.Н. Можаровой. – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2019. – 562 с.

В сборнике содержатся тексты докладов, прочитанных на V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, проходившей 26-29 сентября на базе физико-математического факультета Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева.

Материалы издаются в авторской редакции с незначительной технической корректурой.

© ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», 2019 г.
© Коллектив авторов, 2019 г.

Содержание

Предисловие 11

Математический анализ и дифференциальные уравнения 12

Абдурагимов Г.Э. Численное решение краевой задачи для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка 12

Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т. О одной граничной обратной задаче для уравнения теплопроводности 14

Антоновская О.Г., Бесклубная А.В. О построении общей квадратичной функции Ляпунова параметрически неопределенного семейства систем 18

Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории детерминированного хаоса 23

Зарубин А.Н. Интегро-функциональные уравнения второго рода со слабой особенностью 31

Климов В.С. Обратные неравенства для субэллиптических функций 34

Кужаев А.Ф. О верхней и нижней плотностях комплексной последовательности 39

Можарова Т.Н. О решениях одного класса однородных операторных уравнений 44

Орлов С.С., Шеметова В.В. Построение решений в пространстве распределений начальных задач для дифференциально-операторных уравнений с отклоняющимся аргументом 48

Платонов С.С. О преобразовании Фурье-Уолша функций из двоичных классов Дини-Липшица 54

Ситник С.М., Тимашов А.С. Аппроксимация функций квадратичными экспонентами 58

Соломатин О.Д. К вопросу о целых функциях нулевого или бесконечного порядка роста 60

Султыгов М.Д. Теоремы искажения для α-спиралевидных функций Яновского двух комплексных переменных 63

Тарасова О.А. О некоторых свойствах дискретных краевых задач 68

Чаплыгина Е.В. К теории сингулярных интегро-функциональных уравнений второго рода 72

Чернова О.В. Краевая задача для эллиптической системы 75

Яковлева Ю.О. Решение задачи Коши для одного уравнения гиперболического типа третьего порядка 79

Алгебра, топология и геометрия 81

Батуров Д.П. О числе Линделёфа плотных подпространств функциональных пространств 81

Букушева А.В. О некоторых свойствах тензора кривизны многообразия Кенмоцу, оснащенного N-связностью 83

Галаев С.В. О геометрии золотой продолженной субримановой структуры 88

Дубровин Н.И. Делители нуля в банаховых алгебрах 93

Дубровин Н.И. Цепные модули и кольца 100

Дубровина Т.В. Об универсальности операторов пространства формальных рядов над левоупорядоченной группой 104

Дубровина Т.В. О кольцах матриц над телами 108

Иванова А.С., Мухаметьянов И.Т. Об одном графе с шестиугольной окрестностью вершин 112

Невский М.В. О некоторых задачах для шара и симплекса 118

Невский М.В., Ухалов А.Ю. О линейной интерполяции на евклидовом шаре 124

Черкасова В.В. О связностях, индуцированных минимальными поверхностями 129

Шумакова Е.О. Описание групп центральных единиц ранга 1 для целочисленного группового кольца метациклической группы Фробениуса 133

Теория вероятностей и математическая статистика 137

Левизов С.В. Об игре «до первого дубля» 137

Методы дискретных особенностей в задачах математической физики 140

Лекомцев Д.Г. Работа скважины в среде с раздельной анизотропией и неоднородностью 140

Информатика и информационные технологии 146

Алексин И.К. Мониторинг показателей качества жизни населения 146

Бушмелева К.И., Увайсов С.У. Автоматизированная система расчета отбраковочных допусков электрорадиоэлементов 150

Володина Е.И., Колесов В.А. Зачем производители уменьшают процессоры и почему закон Мура больше не актуален 159

Воронина Г.В. Использование информационных технологий при обучении физике и астрономии 162

Гаврилко Д.Ю., Клепиков Д.В., Хорошилов А.А. Использование контекстно-семантического подхода для повышения эффективности поиска информации 166

Грабчак Е.П., Логинов Е.Л. Поддержание стабильности работы информационных систем управления технологическими процессами на энергооборудовании тепловых электрических станций 172

Дворяткина С.Н., Есина Ю.Л., Лопухин А.М. Финансовое прогнозирование на основе математического моделирования: классические доминанты и перспективные направления 176

Dorofeeva V.I., Nikol'skii D.N., Fedyaev Y.S. CRIS as an applied tool for analyzing research activity at Turgenev Orel State University 184

Дрогайцева Е.Э. Моделирование транспортной задачи на графах 189

Егоров Д.Н. Основные способы обеспечения взаимодействия программно несовместимых приложений 193

Закалкина Е.В., Анохина Т.Ю. Создание онлайн-курса на платформе Open EdX 197

Корниенко Д.В. Примеры разработки печатных форм для конфигурации 1С: Управление торговлей 203

Лаптев В.В. Интегрированная среда для начального обучения программированию 207

Никитина С.А., Попов С.С. Задача автоматической классификации текстов на основе методов машинного обучения 217

Попов И.Н., Попова А.В. Программирование на Python: определение количества неэквивалентных способов раскраски графа 222

Рогозянская Е.А., Закалкина Е.В., Еремеева Н.П. Возможности внедрения современных систем электронного обучения 230

Сажин В.И. Разработка программного обеспечения для решения задачи приближения функций 233

Сарьян В.К., Русаков А.А., Дубнов Д.В. Типовые процессы в физике и математике 236

Сизова В.В., Сухан И.В. Алгоритмы решения некоторых экстремальных задач на графах 239

Тютюнов И.А. Использование стандарта CERIF для описания научных исследований 243

Федутинов К.А. Разработка моделей управления в системах экологического мониторинга на основе сетей ART 246

Фирюлина М.А. Разработка приложения для определения риска ДТП в зависимости от погодных условий 251

Чалыкина Е.Г., Сухан И.В. Разработка экспертных систем 257

Юдина Т.А., Баранов А.М. О создании и перспективах использования корпуса текстов российских научных статей как набора открытых данных 262

Инженерные приложения физико-математических наук 268

Голубева О.И. Получение достаточных множеств и допустимых функций частичных булевых функций 268

Голубева О.И. Троичное моделирование комбинационных и синхронных последовательностных схем 274

Golubeva O., Ruday D. Construction of Controllability, Observability and Stuck-at Fault Detection Functions 281

Кондратенко Л.А., Миронова Л.И. Математическое и численное моделирование колебаний скоростей движения и напряжений в двухзвенной механической системе с бесконечным числом степеней свободы 285

Корогодина И.В., Бондаренко С.Ю., Соловьев В.А. Электромагнитный мониторинг объектов радиосвязи 292

Масина О.Н., Петров А.А. Оптимизация параметров динамических моделей управления движением технических систем с учетом нестационарных сил 296

Матюхин С.И., Казаков В.И., Фроленков К.Ю. Зависимость теплового сопротивления силового полупроводникового модуля от положения полупроводникового чипа на подложке 300

Матюхин С.И., Фроленков К.Ю., Санников М.Д., Орлов Е.Ю. Исследование причин возникновения механических дефектов на шлифованных кремниевых полупроводниковых пластинах после термообработки с использованием кремнийорганических плёнок 305

Миназетдинов Н.М. Об одной задаче электрохимической обработки металлов с учётом разрыва функции выхода по току от плотности тока 312

Никитина М.А., Орунбаев С.Ж. Применение метода функций Грина для моделирования синтетических сейсмограмм для кусочно-однородной многослойной упругой среды 319

Пилипенко А.П. Влияние конструктивных и технологических параметров на циклостойкость многокристальных IGBT модулей 324

Пурдин М.С. Численное моделирование теплообмена при пульсирующем с малыми амплитудами ламинарном течении в квадратном канале 327

Толпаев В.А., Ахмедов К.С., Кравцов А.М., Петросянц М.Т., Бондаренко М.А. Оценка характеристик фильтрационных потоков к газодобывающим скважинам по уточненному закону Дарси 334

Турин В.О., Пиляева Е.Н., Головин И.В. Исследование распределения потока тепла при теплоотводе в подложку в транзисторной структуре подложка-полупроводник-пассивация методом изображений для точечного источника тепла расположенного на границе полупроводник-пассивация 341

Уперчук Р.А. Моделирование движения космических аппаратов по эллиптическим орбитам 353

Хрипунов Ю.В., Музалевская М.А., Катунин А.А., Шарифов Н.К. О проведении взаимной экспертизы проектных работ школьников всероссийского конкурса научно-технологических проектов «Большие вызовы» 357

Якушина С.И., Преснецова В.Ю., Пресняков В.М., Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С. Автоматизация процесса математического расчета многочастотного адгезионного взаимодействия 361

Физика конденсированного состояния 364

Нифтиев Н.Н., Мамедов Ф.М. Вольт-амперные характеристики кристаллов MnGaInSe4 364

Наноструктуры и наноматериалы 367

Аринцына К.И., Марков О.И. Исследование монокристаллов Bi, Bi-Sb, Bi-Sb-Te, Bi-Sb-Sn методом СКР 367

Кудрин А.В., Ведь М.В., Дорохин М.В., Лесников В.П. Температурная зависимость степени циркулярной поляризации спиновых светодиодов с инжектором (In,Fe)Sb 371

Кузнецов Ю.М., Дорохин М.В., Здоровейщев А.В., Вихрова О.В., Кудрин А.В., Дёмина П.Б. Исследование гальваномагнитных и термомагнитных свойств тонких плёнок CoPt 376

Марков О.И., Шмелёв Д.С. Моделирование малых висмут-фуллеренов 383

Прохоров Д.С., Рыков А.В., Шенгуров В.Г. Виртуальные подложки Ge/Si(001) для создания оптоэлектронных гетероструктур на основе GaAs 388

Filippov V.V., Lusyanin S.E., Mitsuk S.V. Technique of determination of electrical conductivity of layered semiconductor materials 391

Математические методы в экономике 395

Кошуняева Н.В. Агент-ориентированный подход к моделированию кооперационных связей между предприятиями 395

Курбыко И.Ф. Математическое моделирование динамики некоторых статистических показателей применения информационно-коммуникационных технологий 398

Методика преподавания математики, информатики, физики и астрономии в школе и вузе 403

Алексеева Е.С., Рассадин А.Э. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости без применения метода конформного отображения 403

Бойченко А.М., Корогодин И.Е. Роль законов физики в армспорте 407

Бурцева К.В. Межпредметные связи как способ повышения мотивации учащихся 410

Власов Д.А. Методические особенности эконометрической подготовки будущего экономиста 414

Гасанов О.М., Адгезалова Х.А., Гусейнов Дж.И., Аллахвердиев А.М. Рекомендации по выполнению компьютерных лабораторных работ по теме электрический ток в полупроводниках в 11 классе 420

Гомбоева И.С. Возможности электронных таблиц в решении профессионально ориентированных задач будущими поварами, кондитерами 426

Елаховский Д.В. Влажностный режим помещений в программе физического образования студентов строительной специальности 434

Елаховский Д.В. Знакомство студентов строительной специальности с лучистым теплообменным процессом 439

Ельчанинова Г.Г., Рыманова Т.Е. Проектирование образовательного процесса по математике в контексте повышения образованности школьников 444

Железнова Л.А. О методических подходах к введению понятия «производная» в школьном курсе математики 450

Кириченко О.Е. Организация коллективных форм учебно-исследовательской деятельности обучающихся при изучении математических дисциплин в вузе 453

Кирюхина Г.А. Некоторые формы проведения учебных занятий, позволяющие активизировать познавательную деятельность обучающихся 456

Ковалев А.В. Некоторые аспекты преподавания математики в высшем учебном заведении 459

Ковалева Л.А., Чернова О.В. Необходимость математического образования для инженеров 462

Кокорев А.В., Орехова С.С., Чернобровкина Ю.В., Сучкова Е.Е. О роли математической компетенции студентов среднего профессионального образования в процессе формирования и развития профессиональных компетенций 466

Корогодина И.В., Яворский Я.В., Халин В.А. Комбинационное рассеяние в усилении оптического сигнала 472

Кузнецова Л.В., Форкунова Л.В. Составление контекстной математической задачи как исследовательский проект школьника 476

Лобанова Н.И. Математические методы решения экономических задач как средство развития финансовой грамотности 481

Логунов И.С. О сравнении чисел «вручную» 487

Мельников Р.А. Научно-педагогическое наследие академика Алексея Васильевича Погорелова (к 100-летию со дня рождения) 490

Мельников Р.А., Саввина О.А., Черноусова Н.В. Сочетание традиционных и инновационных образовательных технологий (из опыта дополнительного математического образования) 497

Овсянникова Т.Л. О векторно-координатном методе построения сечений многогранников 503

Ольнева Е.С., Троицкая О.Н. Методические особенности использования пакетов прикладных программ при обучении математике в вузе 508

Рогожина Т.С., Дронов В.М., Барашев М.Н. Задания межпредметного содержания в курсе физики, как способ реализации концепции конвергентного образования 515

Романчук Д.С., Глухова А.К. Развитие геометрического мышления на уроках геометрии 519

Русаков А.А., Русакова В.Н., Саватеева Е.С. Отдельные аспекты методики преподавания курса «Основы математической обработки информации и информационные технологии» 523

Сафронова Т.М., Черноусова Н.В., Сафронова М.И. К вопросу о повышении финансовой грамотности старшеклассников на уроках математики через решение практико-ориентированных финансовых задач 527

Симоновская Г.А. К вопросу о подготовке школьника к решению задач экономического содержания 531

Синчуков А.В. Принципы проектирования содержания дисциплин по

выбору студентов (на примере дисциплины «R и Wolfram-технологии в экономике и финансах») 535

Троицкая О.Н, Вохтомина Е.Д. Опыт реализации волонтерского студенческого социально-образовательного проекта «Тьютор» в области математики и информатики 541

Фадеева О.В. Формирование профессиональных компетенций студентов инженерных специальностей в процессе междисциплинарного обучения 546

Цуканов Б.Д. Особенности организации аудиторных занятий по физике на начальном этапе обучения иностранных студентов 549

Чернобровкина И.И. Методические особенности преподавания физики на биолого-химических направлениях 552

Чернобровкина И.И., Чернобровкина Ю.В. Схема Горнера в курсе алгебры 556

Чернобровкина Ю.В., Кокорев А.В. Исследовательская деятельность учащихся вне уроков математики 559

Сведения об авторах

Предисловие

В настоящем сборнике представлены материалы V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» (СПФМН-2019), состоявшейся 26-29 сентября 2019 г. в Орле и объединившей участников из крупнейших университетов Москвы, Санкт-Петербурга, Ельца, Воронежа, Ставрополя, Самары, Кирова, а также стран ближнего и дальнего зарубежья.

Целью конференции являлось обсуждение фундаментальных и прикладных проблем современной математики, физики, информационных технологий, вопросов методики преподавания.

Работа конференции проводилась по следующим секциям:

1. Математический анализ и дифференциальные уравнения;
2. Алгебра, топология и геометрия;
3. Математические методы в экономике;
4. Методы дискретных особенностей в задачах математической физики;
5. Физика конденсированного состояния;
6. Наноструктуры и наноматериалы;
7. Информатика и информационные технологии;
8. Инженерные приложения физико-математических наук;
9. Методика преподавания математики, информатики, физики и астрономии в школе и вузе.

Благодарим всех авторов статей, докладчиков и участников за вклад в организацию нашей научно-практической конференции и ее успешное проведение.

Организационный и Программный комитеты

Математический анализ и дифференциальные уравнения

УДК 519.624

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Э. Абдурагимов, к.ф.-м.н., доц.
Дагестанский государственный университет
e-mail: *gusen_e@mail.ru*

В настоящей работе приводится численная реализация с помощью итерационных схем положительного решения краевой задачи для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, существование и единственность которой, раннее была установлена автором.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, итерация, приближение, сходимость.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + 7,9 \cdot 2^t \left(\int_0^1 x(s)\, ds \right)^2 = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \; x(1) = 0. \tag{2}$$

Задача (1)-(2) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = \frac{7,9}{ln2} \left(t - \frac{2^t - 1}{ln2} \right) \left(\int_0^1 x(s)\, ds \right)^2 + \alpha t, \quad 0 < t < 1, \tag{3}$$

где α — произвольное число, удовлетворяющее начальному условию $x'(0) = \alpha$.

В [1] автором было показано существование и единственность положительного решения краевой задачи (1-(2). Сходимость итерационного метода численного решения уравнения (3) независимо от начального приближения гарантируют соответствующие априорные оценки [1] положительного решения рассматриваемой задачи и достаточная малость $\frac{7,9}{ln2}\left|t - \frac{2^t-1}{ln2}\right|$.

В процессе реализации итерационной схемы решения уравнения для вычисления соответствующего интеграла была использована квадратурная формула трапеций с равномерной сеткой. Итерационные расчеты реализованы до тех пор, пока с необходимой нам точностью не подберем число α^*, которое обеспечило бы выполнение недостающего второго граничного условия $x(1, \alpha^*) = 0$ краевой задачи (1)-(2).

Таблица 1 — Положительное решение задачи (1)-(2) при $\alpha^* = 1.00$

t	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
x	0,00	0,09	0,17	0,22	0,26	0,28	0,28	0,25	0,18	0,12	0,00

В соответствии с вышеописанной схемой результаты численных расчетов представлены в следующей таблице. На рисунке 1 представлен график приближенного положительного решения задачи (1)-(2), полученного путем интерполирования данных вышеприведенной таблицы.

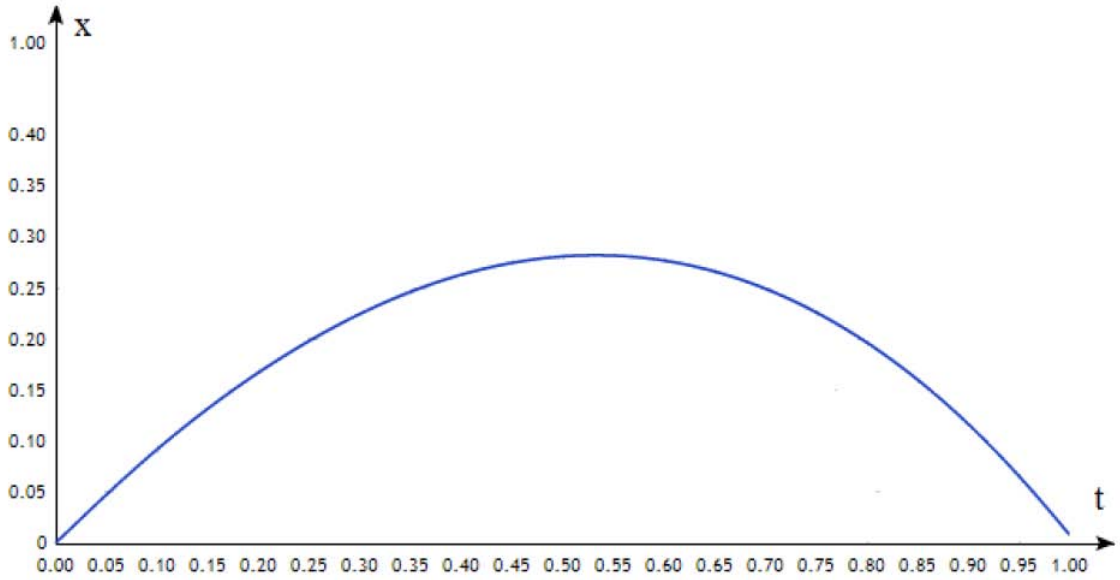


Рисунок 1 – Приближенное положительное решение задачи (1)-(2)

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи типа Штурма-Лиуввиля для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения второго порядка // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2012. — Выпуск 2. — С. 77–80.

УДК 517.946

О ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Б.С. Аблабеков, д.ф.-м.н., проф.
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына
e-mail: *ablabekov_63@mail.ru*
А.Т. Муканбетова, асп.
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына
e-mail: *ajzat.mukanbetova.85@mail.ru*

Рассматривается граничная обратная задача для линейного уравнения теплопроводности. Получена двусторонняя оценка модуля непрерывности для обратной граничной задачи. Для построения устойчивых приближенного решения данной задачи используется метод регуляризации М.М. Лаврентьева. Получены точные по порядку оценки погрешности рассмотренных методов на одном из классов равномерной регуляризации.

Ключевые слова: граничная обратная задача теплопроводности, интегральные уравнения Вольтерра первого рода, регуляризация.

Введение

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи определения коэффициентов, правых частей, а также начальных или граничных условий и решений дифференциальных уравнений по некоторой дополнительной информации (переопределении) о решении прямой задачи [1,2]. Среди обратных задач для дифференциальных уравнений важное прикладное значение имеет граничные обратные задачи теплопроводности. Граничные обратные задачи теплопроводности относятся к классу некорректных задач математической физики и изучались в работах [3-7].

Работа посвящена к изучению одной граничной обратной задачи для уравнения теплопроводности. Рассматриваемая задача является неустойчивой, поэтому основными вопросами при ее исследовании являются вопросы построения устойчивых приближенных решений и оценки точности приближенных решений. Приближенное решение строится методом регуляризации А.М. Денисова [4].

1. Постановка обратной задачи

Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет начально-краевой задаче

$$u_t = u_{xx}, \quad (x,t) \in \Pi_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $\Pi_T = \{(x,t) : x \in (0,1), t \in (0,T]\}$.

Предположим, что функция $\varphi(t)$ неизвестна, и требуется определить $\varphi(t)$, если известна дополнительная информация о решении задачи (1)-(3)

$$u_x(0,t) = h(t), \ \ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $h(t)$ – заданная функция.

Пусть функция $h(t) \in C^2[0,T], h(0) = h'(0) = 0$. Предположим, что при задано не точно, т.е. известно число $\delta > 0$ и непрерывная функция $h_\delta(t) \in C^2[0,T], h_\delta(0) = h'_\delta(0) = 0$ такая, что

$$\left\| h_\delta(t) - h(t) \right\|_{L_2[0,T]} \le \delta.$$

Задача (1) -(3) возникает во многих процессах в области металлургии, метрологии, а также при изучении свойств материалов, связанных с тепловыми характеристиками [5,6].

2. Сведение обратной задачи к интегральному уравнению первого рода

Так как система $\{\sin \pi n x\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_2(0,1)$, то каждое классическое решение задачи (1) -(3) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin n\pi x, \tag{5}$$

где

$$T_n(t) = 2\int_0^1 u(x,t) \sin n\pi x \, dx, \; n = 1,2,\ldots .$$

Тогда после применение к задаче (1) -(3) метода Фурье относительно функции $T_n(t)$ $(n = 1,2,...)$, получим

$$T_n'(t) + (n\pi)^2 T_n(t) = (-1)^{n+1} (n\pi) \varphi(t), \tag{6}$$

$$T_n(0) = 0. \tag{7}$$

Решением задачи (6), (7) является функция

$$T_n(t) = (-1)^n (n\pi) \int_0^t \exp\left(-(n\pi)^2 (t-\tau)\right) \varphi(\tau d\tau. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (5), получим формулу

$$u(x,t) = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n\pi) e^{-(n\pi)^2 (t-\tau)} \sin n\pi x \, \varphi(\tau) d\tau. \tag{9}$$

Продифференцировав выражение (9) по x и используя дополнительную информацию (4), получим

$$\int_0^t K(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = h(t), \tag{10}$$

где

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n\pi)^2 e^{-(n\pi)^2 t}.$$

Интегральное уравнение (10) является уравнением Вольтерра первого рода относительно искомой функции $\varphi(\tau)$. Кроме того, $K(t-\tau) \to \infty, t \to \tau,$ и применять способ сведения к уравнению второго рода нельзя.

3. Построение приближенного решения

Следуя по методике работы [4], силу неограниченности ядро $K(t)$ в точке $t=0$ в качестве приближенного решения уравнения (10) рассмотрим интегральное уравнения Вольтерра второго рода

$$\alpha\varphi_{\alpha\delta}(t)+\int_0^t \bar{K}(t-\tau)\varphi_{\alpha\delta}(\tau)d\tau = h_\delta(t), \tag{11}$$

где

$$\bar{K}(t)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(i\pi)^2 e^{-(i\pi)^2 t}.$$

Обозначим через $\varphi_{\alpha\delta n}(t)$ решение уравнения (11).

Выберем $n=n(\delta)$ так, чтобы 1) $n(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$, 2) $\frac{\delta}{\alpha}n^2\to 0$ при $\alpha\to 0,\ \delta\to 0$. Тогда $\left\|\varphi_{\alpha\delta n}(t)-\varphi(t)\right\|\to 0$ при $\delta\to 0$.

Точнее справедлива

Теорема. Если функция $\varphi(t)\in C^{(2)}([0,T]), \varphi(0)=\varphi'(0)=0$, а параметры $\delta\to 0, \alpha\to 0, n\to\infty$ так чтобы $\frac{\delta}{\alpha}n\to 0$, то

$$\left\|\varphi_{\alpha\delta n}(t)-\varphi(t)\right\|_{C[0,T]}\le C\left[\frac{\delta}{\alpha}n^2+\alpha+\frac{1}{n^2}\right]\to 0,\ C-const. \tag{12}$$

Доказательство. Введем обозначение $z_{\alpha\delta}(t)=\varphi_{\alpha\delta n}(t)-\varphi(t)$, $\delta(t)=h_\alpha(t)-h(t)$. Тогда функция $z_{\alpha\delta}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\alpha z_{\alpha\delta}(t)+\int_0^t \bar{K}(t-\tau)z_{\alpha\delta}(\tau)d\tau = \delta(t)-\alpha\varphi(t)+\psi_n(t), \tag{13}$$

где $\psi_n(t)=\int_0^1\sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n\pi)^2 e^{-(n\pi)^2(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau,\ \delta(t)=h_\delta(t)-h(t).$

Далее, как и в работе [4], преобразовав уравнение (13), перепишем ее в виде

$$\alpha z_{\alpha\delta}(t)=\int_0^t \bar{K}_\alpha(t-\tau)z_{\alpha\delta}(\tau)d\tau+\nu_\alpha(t), \tag{14}$$

где

$$\bar{K}_\alpha(t-\tau)=-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1}(n\pi)^2 e^{-(n\pi)^2(t-\tau)}+\frac{a_n}{\alpha^2}\int_\tau^t e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-s)}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1}(n\pi)^2 e^{-(n\pi)^2(t-\tau)}ds+$$

$$+\frac{a_n}{\alpha}e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-s)}=\frac{1}{\alpha}\int_\tau^t\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1}(n\pi)^4 e^{-(n\pi)^2(s-\tau)}e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-s)}ds=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n\pi)^3}{a_n-\alpha(n\pi)^2}\left[e^{-(n\pi)^2(s-\tau)}-e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-s)}\right],$$

$$\nu_\alpha(t)=\frac{\delta(t)}{\alpha}-\frac{a_n}{\alpha^2}\int_0^t e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-\tau)}\varphi'(\tau)d\tau+\int_0^t e^{-\frac{a_n}{\alpha}(t-\tau)}\psi_n(\tau)d\tau.$$

Отсюда

$$\|\nu_\alpha(t)\|\le\frac{\delta}{\alpha}+\frac{\alpha}{a_n}\|\varphi'(t)\|+\frac{1}{a_n}\|\psi_n(t)\|.$$

Рассмотрим

$$\psi_n(t)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\left[(-1)^{i+1}(i\pi)^2\varphi'(t)-(-1)^{i+1}\int_0^t(i\pi)^4e^{-(i\pi)^2(t-\tau)}\varphi'(\tau)d\tau\right]=$$

$$=\sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^t(i\pi)^2e^{-(i\pi)^2(t-\tau)}\varphi''(\tau)d\tau.$$

Следовательно,

$$\|\psi_n(t)\|\le\|\varphi''(t)\|\cdot\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{(i\pi)^2}\le\frac{1}{(n\pi)^2}\|\varphi''(t)\|.$$

Итак,

$$\|\nu_\alpha(t)\|\le\frac{\delta}{\alpha}+\frac{\alpha}{a_n}\|\varphi'(t)\|+\frac{1}{a_n}\frac{1}{(n\pi)^2}\|\varphi''(t)\|.$$

Оценим для каждого $t\in[0,T]$ интеграл

$$\int_0^t\bar{K}_\alpha(t-\tau)d\tau\le1-\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}(i\pi)^2e^{-(n\pi)^2t}\le1-\frac{k\pi}{a_n}e^{-(k\pi)^2t}. \qquad (15)$$

Применим к (14) метод последовательных приближений по схеме

$$z_{\alpha\delta}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}z_i(t),$$

где

$$z_i(t)=\int_0^t\bar{K}_\alpha(t-\tau)z_{i-1}(\tau)d\tau,\qquad z_0(t)=v_\alpha(t).$$

Отсюда, последовательно применяя оценку (15), получим

$$\|z_{\alpha\delta}(t)\|\le\|v_\alpha(t)\|\left\{\frac{\delta}{\alpha}n^2+\alpha+\frac{1}{n^2}\right\}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1.Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболичесих уравнений. – Бишкек: Илим 2001. – 183 с.

2.Аблабеков Б.С. Граничная обратная задача для уравнения фильтрации жидкостей в трещиноватом пласте//Известия Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова. 2013. № 28. С. 449-452.

3.Вабищевич П.Н. Разностные методы решения граничной обратной задачи теплопроводности//Дифференц.уравнения, 1991, том 27, номер 7, 1114–1123

4.Денисов А.М. О приближенном решении уравнения Вольтерра второго рода //Журн.вычисл.матем. иматем. Физики, 1975, т.15, №4, С.1053-1056.
5. Костин А.Б., Прилепко А.И. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения. II//Дифференц. уравнения, 1996, том 32, номер 11, 1519-1528.
6.Солодуша С.В. Применение численных методов для уравнений Вольтерра I рода, возникающих в обратнойграничной задаче теплопроводности// Известия Иркутского государственного университета. 2015. Т. 11. Серия «Математика». С. 96-105.
7.Солодуша С.В., Япарова Н.М. Численное решение обратной граничной обратной задачи теплопроводности с помощью уравнений Вольтерра I рода
//Сиб.журн. вычисл, математики /РАН.Сиб.отд-ние. – Новосибирск, 2015. – Т.18, №3. – С.327-335.

УДК 517.926

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩЕЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО СЕМЕЙСТВА СИСТЕМ

О.Г. Антоновская, к.ф.-м.н, доц.
ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
e-mail: *olga.antonovsckaja@yandex.ru*
А.В. Бесклубная, к.пед.н.
ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
e-mail: *antbeskl@gmail.com*

В работе решается вопрос о существовании общей квадратичной функции Ляпунова для параметрически неопределенного семейства систем. Общая функция Ляпунова строится как положительно определенная квадратичная форма, которая является функцией Ляпунова для одной из систем семейства и удовлетворяет ограничению на ее первую производную в силу системы.

Ключевые слова: робастная устойчивость, параметрически неопределенная система, квадратичная функция Ляпунова, первая производная в силу системы.

Введение

Важное место в теории динамических систем занимает проблема робастной устойчивости, которая связана с получением условий устойчивости не одной конкретной системы, а целой совокупности систем с заданными ограничениями на их параметры [1]. В случае сложной параметрической неопределенности непосредственная проверка робастной устойчивости семейства систем также сложна, поэтому используется подход, основанный на определении достаточных условий робастной устойчивости: в частности, подход, основанный на построении общей квадратичной функции Ляпунова для неопределенных семейств (робастная квадратичная устойчивость) [2]. При этом следует отме-

тить и тот факт, что может представлять интерес сама задача построения общей квадратичной функции Ляпунова семейства систем.

В настоящей статье предложена методика построения общей квадратичной функции Ляпунова для параметрически неопределенных семейств динамических систем. В качестве функции Ляпунова выбирается положительно определенная квадратичная форма, которая является функцией Ляпунова для одной из систем семейства и удовлетворяет ограничению на ее первую производную в силу системы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим параметрически неопределенную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(q)x_j \quad (i = 1,2,...,n), \tag{1}$$

где q – параметр, изменяющийся на некотором заданном множестве. И пусть при некотором значении параметра $q = q_0$ корни $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}x_i x_j \quad (K_{ij} = K_{ji}, i, j = 1,2,\ldots,n). \tag{2}$$

В силу системы (1) при $q = q_0$ найдем первую производную квадратичной формы (2)

$$\dot{V}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}(\dot{x}_i x_j + x_i \dot{x}_j) \tag{3}$$

(здесь $\dot{x}_i$ вычисляется из (1)). Тогда, согласно [2-3] квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1) при $q = q_0$, для которой максимальное значение первой производной (3) на заданной поверхности уровня $V(x_1, x_2, ..., x_n) = V_0$ равно $\delta_0 V_0$ $(2\max_{i=1,n}\{Re\,\lambda_i\} \le \delta_0 < 0)$, тогда и только тогда, когда параметры (2) удовлетворяют уравнению

$$det(A_{km} - \delta K_{km})_{k,m=1}^{n} = 0 \tag{4}$$

при $\delta = \delta_0$, в котором

$$A_{km} = \sum_{i=1}^{n}(K_{ik}a_{im}(q_0) + K_{im}a_{ik}(q_0)) \quad (k, m = 1,2,...,n). \tag{5}$$

Здесь величины A_{km} – коэффициенты квадратичной формы (3) при $q = q_0$.

Левая часть уравнения (4) представляет собой определитель, все элементы которого линейны относительно δ. Таким образом, левую часть (4) можно записать в виде многочлена степени n относительно δ. Так что уравнение может иметь до n действительных корней. Причем $\delta = \delta_0$ есть наибольший отрицательны его корень.

Запишем уравнение (4)-(5) в виде $P_n(\delta) = 0$, где

$$P_n(\delta) = \delta^n + a_1\delta^{n-1} + a_2\delta^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\delta + a_n, \qquad (6)$$

$$a_k = (-1)^k \frac{\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} \det K^{i_1,i_2,\ldots,i_k}}{\det K}, a_n = (-1)^n \frac{\det A}{\det K}, \qquad (7)$$

матрицы $K = (K_{ij})$, $A = (A_{ij})$, а матрица $K^{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ получается из матрицы K заменой столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ на соответствующие столбцы матрицы A. Поскольку действительные корни (6)-(7) определяют значения величины $\dot{V}/V$ на поверхности уровня $V = V_0$, каждому из которых соответствуют координаты точек этой поверхности [4], в которых $\dot{V}/V = \delta$, то в случае, когда (2) является функцией Ляпунова, величина $a_n \neq 0$. Ведь a_n есть произведение всех корней (4), а максимальный действительный его корень удовлетворяет условию $2 \max\limits_{i=1,n}\{Re\,\lambda_i\} \le \delta_0 < 0$.

Пусть значение параметра q изменилось. Тогда и коэффициенты системы изменятся на величины $\Delta a_{ij} = a_{ij}(q) - a_{ij}(q_0)$ $(i, j = 1,2,\ldots,n)$, а сама система примет вид

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(q_0) + \Delta a_{ij}) x_j \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \qquad (8)$$

Тогда если считать функцию (2) неизменной, величины A_{km} преобразуются к виду $A_{km} + \Delta A_{km}$, где

$$\Delta A_{km} = \sum_{i=1}^{n} (K_{ik}\Delta a_{im} + K_{im}\Delta a_{ik}) \quad (k, m = 1,2,\ldots,n), \qquad (9)$$

уравнение (4) примет вид

$$\det(A_{km} + \Delta A_{km} - \delta K_{km})_{k,m=1}^{n} = 0, \qquad (10)$$

а полином (6) –

$P_n^{\Delta}(\delta) = \delta^n + (a_1 + \Delta a_1)\delta^{n-1} + (a_2 + \Delta a_2)\delta^{n-2} + \ldots + (a_{n-1} + \Delta a_{n-1})\delta + a_n + \Delta a_n$,

где Δa_k представляют собой сумму произведений всех миноров до порядка k матрицы $\Delta A = (\Delta A_{ij})$ $(i, j = 1,2,\ldots,n)$ на соответствующие им алгебраические дополнения из матрицы $K^{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. В частности, коэффициент Δa_n равен

$$\Delta a_n = (-1)^n \frac{1}{\det K}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Delta A_{ij} A^{ij} + \sum_{i_1<i_2}\sum_{j_1<j_2} \begin{vmatrix} \Delta A_{i_1 j_1} & \Delta A_{i_1 j_2} \\ \Delta A_{i_2 j_1} & \Delta A_{i_2 j_2} \end{vmatrix} A_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} + \ldots + \det \Delta A\right), \qquad (11)$$

где A^{ij} – алгебраическое дополнение элемента A_{ij} в матрице A, а $A_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$ – алгебраическое дополнение минора, построенного на строках с номерами i_1, i_2 и столбцах с номерами j_1, j_2 в матрице A. Задача состоит в определении условий, при которых функция Ляпунова, построенная для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова для системы (8).

2. Методика решения задачи

Рассмотрим уравнение (4). Это уравнение всегда имеет действительные корни, поскольку определяет значения δ такие, что $\dot{V}/V = \delta$ в некоторых точках поверхности уровня $V = V_0$ [4]. При этом всегда можно построить такую функцию (2), что все корни уравнения (4) действительны и отрицательны [5]. Например, если все корни характеристического уравнения действительны и различны, причем $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < 0$, всегда существует линейное невырожденное преобразование координат

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\xi_{j,} \tag{12}$$

приводящее систему (1) к каноническому виду

$$\dot{\xi}_i = \lambda_i \xi_i, i = 1,2,\ldots,n. \tag{13}$$

(Столбцы матрицы $B = (b_{ij})$ являются собственными векторами матрицы A.) Тогда квадратичную функцию Ляпунова с $\max\limits_{V=V_0}(\dot{V}/V) = \delta_0$ для канонической системы можно искать в виде

$$V(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2} K_{ij}\xi_i\xi_j + K_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2 + 2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n + K_{nn}\xi_n^2$$

$$(K_{ij} = K_{ji}, i, j = 1,2,\ldots,n), \tag{14}$$

где

$$K_{n-1,n}^2 = (1 - R(\delta_0))K_{n-1,n-1}K_{nn},\ R(\delta_0) = (\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2(\lambda_{n-1} + \lambda_n - \delta_0)^{-2}$$

$$(2\lambda_n \le \delta_0 \le 0). \tag{15}$$

В частности, условию $\max\limits_{V=V_0}(\dot{V}/V) = \delta_0$ будет удовлетворять функция

$$V(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = \sum_{i=1}^{n-2} K_{ii}\xi_i^2 + K_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2 + 2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n + K_{nn}\xi_n^2\ , \tag{16}$$

для которой все корни, кроме двух последних равны $\delta_i = 2\lambda_i (i - 1,2,\ldots,n-2)$, а $\delta_{n-1} = \lambda_{n-1} + \lambda_n - \delta_0, \delta_n = \delta_0$. Переходя назад к исходным переменным, получим искомую квадратичную функцию Ляпунова. В дальнейшем будем предполагать, что функция Ляпунова (2) построена именно таким образом для системы (1) с $q = q_0$.

Заметим, что Функция Ляпунова (2), построенная для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова и для системы (8), если a_n при изменении параметра системы не поменяет знака, т.е. знаки величин a_n и $a_n + \Delta a_n$ будут совпадать. Причем при непрерывном изменении a_n не пройдет через ноль. Но поскольку

$$|a_n + \Delta a_n| \ge |a_n| - |\Delta a_n|, \tag{17}$$

то $|a_n + \Delta a_n| > 0$, если будет положительной правая часть неравенства (17). Таким образом, будет иметь место следующее утверждение [2]:

Лемма. Функция (2), являющаяся функцией Ляпунова для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова для системы (8), если

$$|\Delta a_n| < |a_n|, \tag{18}$$

где a_n и Δa_n ищутся в силу (7) и (11), а A_{km} и ΔA_{km} $(k,m = 1,2,...,n)$ определены соотношениями (5) и (9) соответственно.

Более того, т.к. квадратичная функция Ляпунова строится в соответствии с методикой работы [5], основанной на переходе к каноническим координатам и дающей функцию Ляпунова, удовлетворяющую условию $\max\limits_{V=V_0}(\dot{V}/V) = \delta_0$ $(2\max\limits_{i=1,n}\{Re\,\lambda_i\} \le \delta_0 < 0)$, тогда все корни полинома (6) действительны, причем $\delta_1 \le \delta_2 \le ... \le \delta_n = \delta < 0$. А значит

$$|\Delta a_n| = |\delta_1\delta_2...\delta_n| \ge |\delta_n|^n = |\delta_0|^n, \tag{19}$$

т.е.

$$|a_n + \Delta a_n| \ge |a_n| - |\Delta a_n| \ge |\delta_0|^n - |\Delta a_n|. \tag{20}$$

Таким образом, в этом случае функция (2), построенная для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова дл системы (8), если

$$|\Delta a_n| < |\delta_0|^n, \tag{21}$$

где Δa_n ищется в силу (11). Т.е. построенная функция Ляпунова будет оставаться функцией Ляпунова системы при всех значениях параметра q, при которых имеет место условие (21).

Замечание. Квадратичная функция Ляпунова, удовлетворяющая ограничению на ее первую производную в силу линеаризованной системы как правило строится для получения различных оценок для системы нелинейной. Поэтому актуальной будет и задача построения общей квадратичной функции Ляпунова множества систем, обладающей определенным «запасом» знакоотрицательности. То есть также удовлетворяющей ограничению на первую производную, скажем $\dot{V}/V \le \tilde{\delta}$ на поверхности уровня $V = V_0$ $(\delta_0 < \tilde{\delta} < 0)$. Для этого заменой $w = \delta - \tilde{\delta}$ приведем полином (6) к виду

$$\tilde{P}_n(w) = w^n + \tilde{a}_1 w^{n-1} + \tilde{a}_2 w^{n-2} + ... + \tilde{a}_{n-1} w + \tilde{a}_n, \tag{22}$$

в котором

$$\tilde{a}_1 = a_1 + C_n^1\tilde{\delta},\ \tilde{a}_2 = a_2 + a_1 C_{n-1}^1\tilde{\delta} + C_n^2\tilde{\delta}^2,\ ...,\tilde{a}_n = P_n(\tilde{\delta}), \tag{23}$$

а C_n^m – биномиальные коэффициенты. Будем исследовать его по описанной выше методике. Но тогда из условия $Re\,w_i < 0$ для корней полинома (22), зависящего от w, будет следовать, что $Re\,\delta_i < \tilde{\delta}$ для корней полинома (6). А для получения оценок вида (21) следует учитывать, что

$$\Delta\tilde{a}_n = \Delta a_1\tilde{\delta}^{n-1} + \Delta a_2\tilde{\delta}^{n-2} + ... + \Delta a_{n-1}\tilde{\delta} + \Delta a_n. \tag{24}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука. – 2002. – 384 с.
2. Антоновская О.Г. К исследованию робастной квадратичной устойчивости динамических систем. // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Часть 1. – 2018. – С. 12-15.
3. Антоновская О.Г., Бесклубная А.В. Некоторые предложения по изложению метода функций Ляпунова в образовательном процессе. // Международный научно-исследовательский журнал. – 2019. – № 4(82). – С. 94-98.
4. Антоновская О.Г. Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия вузов. Математика. – 2004. – № 2 (501). – С. 19-23.
5. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Том 52. – № 3. – С. 275-281.

УДК 531. 36, 534.1

К ТЕОРИИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОСА

С.О. Гладков, д.ф.-м.н., проф.
Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)
e-mail: *sglad51@mail.ru*
С.Б. Богданова, к.ф.-м.н., доц.
Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)
e-mail: *sonjaf@list.ru*

Рассмотрена система N взаимодействующих компланарных маятников. Предположение, что взаимодействие между маятниками носит электромагнитный характер, позволило получить систему N нелинейных дифференциальных уравнений, описывающую поведение системы. Анализ модели показал, что при N=2 синхронизация возможна. В случае, если $N > 2$ на безразмерных временах $\tau \in [0, 250000]$ синхронизация не наступает, хотя тенденция к ней видна.

Ключевые слова: электромагнитное взаимодействие, излучение, хаотическое движение.

В работах [1-7] было исследовано явление синхронизации двух компланарных физических маятников, расстояние между точками подвеса которых фиксировано. В настоящем сообщение мы воспользуемся результатами этой теории и исследуем хаотическое поведение ансамбля, состоящего из N маятников с массами m_i, длинами подвеса которых также различны и равны l_i, где

$i = 1,2...,N$. Считаем, что точки подвеса маятников находятся на равном удалении b друг от друга (см. рисунок 1).

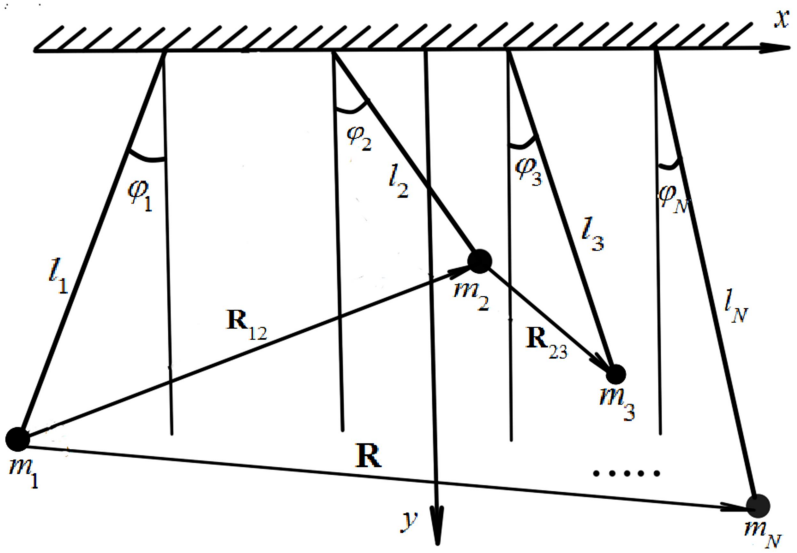


Рисунок 1 – Геометрия задачи

Как было показано в [4], взаимодействие между металлическими маятниками носит сугубо электромагнитный характер, который к тому же сопровождается еще и ЭМ излучением, которое легко вычисляется с помощью классической теории, подробно изложенной, например, в монографиях [8,9]. В результате несложных выкладок (они приведены в работе [4]) его мощность оказывается такой

$$W_i = \frac{\rho_e^2 l_i^2 V_i^2}{2c^3}\left(\ddot{\varphi}_i^2 + \dot{\varphi}_i^4\right), \tag{1}$$

где $\rho_e = en -$ объемная плотность электрического заряда маятника, $n -$ концентрация движущихся электронов, $V_i -$ объем $i -$го маятника, c – скорость света, а угловые координаты φ_i соответствуют отклонению $i -$ го маятника от вертикального положения.

Заметим, что несмотря на тот факт, что маятники в целом электронейтральны, ЭМ взаимодействие и ЭМ излучение, тем не менее, существуют, поскольку связаны именно с неравномерностью движения. Неподвижные или прямолинейно движущиеся маятники не излучают ЭМ волны. Благодаря этим двум факторам маятники начинают «чувствовать» друг друга, и если система состоит только из двух маятников, то учет этих двух факторов приводит к эффекту синхронизации (см. работу [4]).

Как показал численный расчет, всегда можно считать, что

$$\left|\ddot{\varphi}_i\right| << \left|\dot{\varphi}_i^2\right| \tag{2}$$

Исходя из закона сохранения мощности всей системы, т.е. используя уравнение [10-11]

$$\sum \dot{E} + \sum \dot{Q} + \sum W = 0, \tag{3}$$

где $\dot{Q} -$ диссипативная функция, $E -$ полная энергия системы, $W -$ мощность излучения, с учетом выражения (1) и условия (2), а также благодаря алгоритму

решения задачи, подробно изложенному в статье [4], мы приходим к общей системе нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику хаотического поведения системы, состоящей из N металлических шаров:

$$
\begin{cases}
\ddot{\varphi}_1+\omega_0^2\sin\varphi_1-\lambda_2 q_2\left(\ddot{\varphi}_2\cos\psi-\dot{\varphi}_2\dot{\psi}\sin\psi\right)\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)-3\lambda_2 q_2\left(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2\right)\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\dot{\varphi}_2\cos\psi+\kappa\dot{\varphi}_1^3+\\
+\frac{\lambda_2 q_2}{32}\left(\ddot{\varphi}_3\cos\psi-\dot{\varphi}_3\dot{\psi}\sin\psi\right)\cos\left(\varphi_1+\varphi_3\right)-\frac{3\lambda_2 q_2}{32}\left(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_3\right)\sin\left(\varphi_1-\varphi_3\right)\cos\left(\varphi_1+\varphi_3\right)\dot{\varphi}_3\cos\psi-\ldots=0,\\
\ddot{\varphi}_2+\omega_0^2\sin\varphi_2-\lambda_2 q_2\left(\ddot{\varphi}_1\cos\psi-\dot{\varphi}_1\dot{\psi}\sin\psi\right)\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)-3\lambda_2 q_2\left(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2\right)\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\dot{\varphi}_1\cos\psi+\kappa\dot{\varphi}_2^3-\\
-\lambda_2 q_2\left(\ddot{\varphi}_3\cos\psi-\dot{\varphi}_3\dot{\psi}\sin\psi\right)\cos\left(\varphi_2+\varphi_3\right)-3\lambda_2 q_2\left(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_3\right)\sin\left(\varphi_2-\varphi_3\right)\cos\left(\varphi_2+\varphi_3\right)\dot{\varphi}_3\cos\psi-\\
-\frac{\lambda_2 q_2}{32}\left(\ddot{\varphi}_4\cos\psi-\dot{\varphi}_4\dot{\psi}\sin\psi\right)\cos\left(\varphi_2+\varphi_4\right)-\frac{3\lambda_2 q_2}{32}\left(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_4\right)\sin\left(\varphi_2-\varphi_4\right)\cos\left(\varphi_2+\varphi_4\right)\dot{\varphi}_4\cos\psi-\ldots=0,\\
\ddot{\varphi}_3+\omega_0^2\sin\varphi_3-\lambda_2 q_2\left(\ddot{\varphi}_3\cos\psi-\dot{\varphi}_3\dot{\psi}\sin\psi\right)\cos\left(\varphi_2+\varphi_3\right)-\\
-3\lambda_2 q_2\left(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_3\right)\sin\left(\varphi_2-\varphi_3\right)\cos\left(\varphi_2+\varphi_3\right)\dot{\varphi}_3\cos\psi+\kappa\dot{\varphi}_3^3-\frac{\lambda_2 q_2}{32}\left(\ddot{\varphi}_1\cos\psi-\dot{\varphi}_1\dot{\psi}\sin\psi\right)\cos\left(\varphi_1+\varphi_3\right)-\\
-\frac{3\lambda_2 q_2}{32}\left(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_3\right)\sin\left(\varphi_1-\varphi_3\right)\cos\left(\varphi_1+\varphi_3\right)\dot{\varphi}_1\cos\psi-\lambda_2 q_2\left(\ddot{\varphi}_4\cos\psi-\dot{\varphi}_4\dot{\psi}\sin\psi\right)\cos\left(\varphi_3+\varphi_4\right)+\\
-3\lambda_2 q_2\left(\dot{\varphi}_4-\dot{\varphi}_3\right)\sin\left(\varphi_4-\varphi_3\right)\cos\left(\varphi_3+\varphi_4\right)\dot{\varphi}_4\cos\psi-\frac{\lambda_2 q_2}{32}\left(\ddot{\varphi}_5\cos\psi-\dot{\varphi}_5\dot{\psi}\sin\psi\right)\cos\left(\varphi_3+\varphi_5\right)-\\
-\frac{3\lambda_2 q_2}{32}\left(\dot{\varphi}_5-\dot{\varphi}_3\right)\sin\left(\varphi_5-\varphi_3\right)\cos\left(\varphi_3+\varphi_5\right)\dot{\varphi}_5\cos\psi-\ldots=0,\\
\ddot{\varphi}_4+\omega_0^2\sin\varphi_4-\lambda_2 q_2\left(\ddot{\varphi}_3\cos\psi-\dot{\varphi}_3\dot{\psi}\sin\psi\right)\cos\left(\varphi_3+\varphi_4\right)-3\lambda_2 q_2\left(\dot{\varphi}_3-\dot{\varphi}_4\right)\sin\left(\varphi_3-\varphi_4\right)\cos\left(\varphi_3+\varphi_4\right)\dot{\varphi}_3\cos\psi+\kappa\dot{\varphi}_4^3-\\
-\lambda_2 q_2\left(\ddot{\varphi}_5\cos\psi-\dot{\varphi}_5\dot{\psi}\sin\psi\right)\cos\left(\varphi_4+\varphi_5\right)-3\lambda_2 q_2\left(\dot{\varphi}_5-\dot{\varphi}_4\right)\sin\left(\varphi_5-\varphi_4\right)\cos\left(\varphi_4+\varphi_5\right)\dot{\varphi}_5\cos\psi-\\
-\frac{\lambda_2 q_2}{32}\left(\ddot{\varphi}_2\cos\psi-\dot{\varphi}_2\dot{\psi}\sin\psi\right)\cos\left(\varphi_2+\varphi_4\right)-\frac{3\lambda_2 q_2}{32}\left(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_4\right)\sin\left(\varphi_2-\varphi_4\right)\cos\left(\varphi_2+\varphi_4\right)\dot{\varphi}_2\cos\psi-\\
-\frac{\lambda_2 q_2}{32}\left(\ddot{\varphi}_6\cos\psi-\dot{\varphi}_6\dot{\psi}\sin\psi\right)\cos\left(\varphi_4+\varphi_6\right)-\frac{3\lambda_2 q_2}{32}\left(\dot{\varphi}_6-\dot{\varphi}_4\right)\sin\left(\varphi_6-\varphi_4\right)\cos\left(\varphi_4+\varphi_6\right)\dot{\varphi}_6\cos\psi-\ldots=0,\\
\ldots.
\end{cases}
\tag{4}
$$

где ω_0, λ_2, q_2, κ и ψ - некоторые величины и функции, связанные с параметрами исследуемой системы, а штрихи означают дифференцирование по безразмерному времени $\tau=\omega_0 t$. Заметим, что система (4) написана для абсолютно тождественных маятников. Случай нетождественных маятников подробно изложен в работе [12].

На рисунках 2-9 показаны результаты численного решения уравнений (4) для случая систем, состоящих из трех и четырех тождественных маятников.

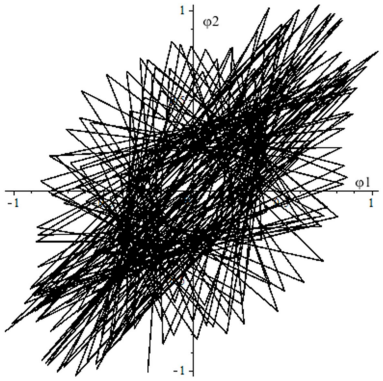


Рисунок 2 – Система трех маятников. Хаотичное поведение крайнего левого и среднего маятников $\varphi_2(\varphi_1)$ в начале движения системы, $\tau=500$. Начальные

$$\varphi_1(0)=-\frac{\pi}{3},\varphi_2(0)=-\frac{\pi}{4},\varphi_3(0)=\frac{\pi}{6}$$

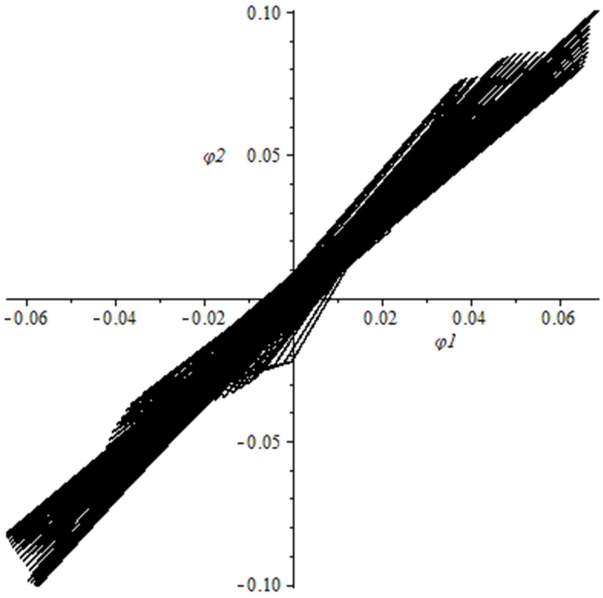


Рисунок 3 – Система трех маятников. Зависимость $\varphi_2(\varphi_1)$ демонстрирует несинхронное движение для среднего и крайнего левого маятников на очень большом временном интервале $\tau = 200\ 000$. Начальные условия те же $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{3}, \varphi_2(0) = -\frac{\pi}{4}, \varphi_3(0) = \frac{\pi}{6}$

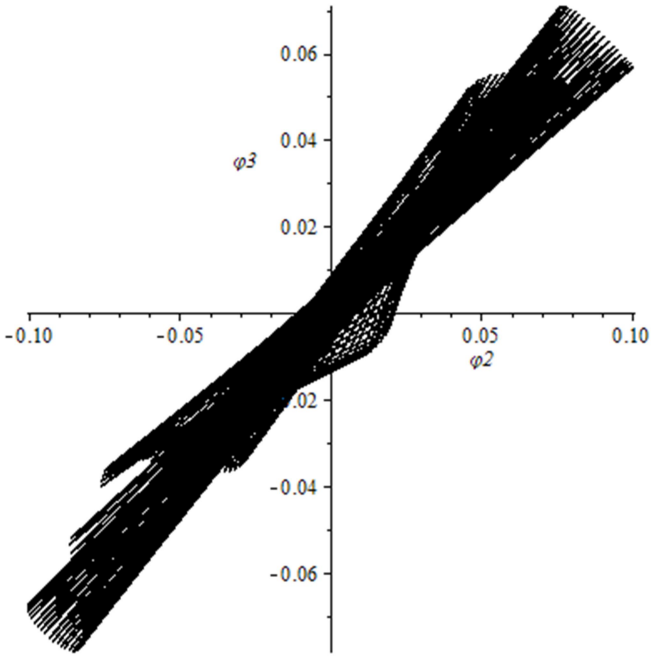


Рисунок 4 – Система трех маятников. Зависимость $\varphi_3(\varphi_2)$ демонстрирует несинхронное движение среднего и крайнего правого маятников на временном интервале $\tau = 200\ 000$ при тех же начальных условиях $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{3}, \varphi_2(0) = -\frac{\pi}{4}, \varphi_3(0) = \frac{\pi}{6}$

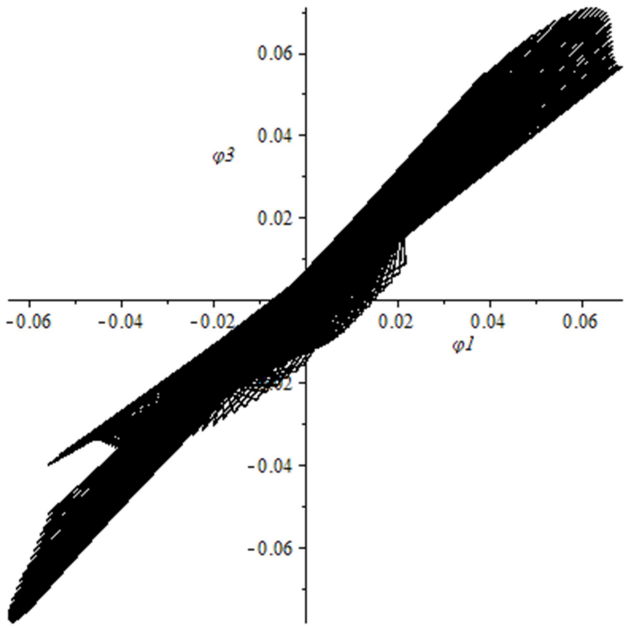


Рисунок 5 – Система трех маятников. Видна тенденция к синхронному поведению крайних маятников на временном интервале $\tau = 200\ 000$ в виде зависимости $\varphi_3(\varphi_1)$. «Неидеальность» биссектрисы связана со сложным нелинейным характером взаимодействия и излучения всех трех маятников. Начальные условия прежние $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{3}, \varphi_2(0) = -\frac{\pi}{4}, \varphi_3(0) = \frac{\pi}{6}$

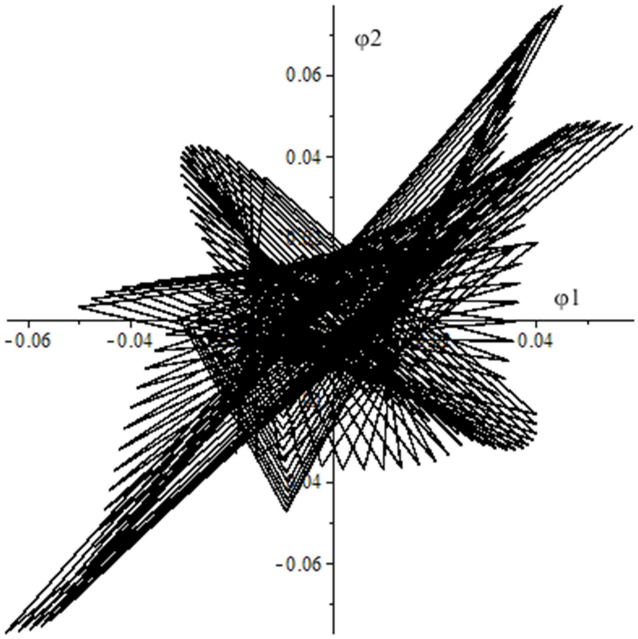


Рисунок 6 – Система четырех маятников. Зависимость $\varphi_2(\varphi_1)$, построенная на большом временном интервале $\tau \in [0; 250\ 000]$, показывает полный хаос маятников, отклоненных в начальный момент времени на разные углы $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{3}, \varphi_2(0) = -\frac{\pi}{4}, \varphi_3(0) = \frac{\pi}{6}, \varphi_4(0) = \frac{\pi}{8}$

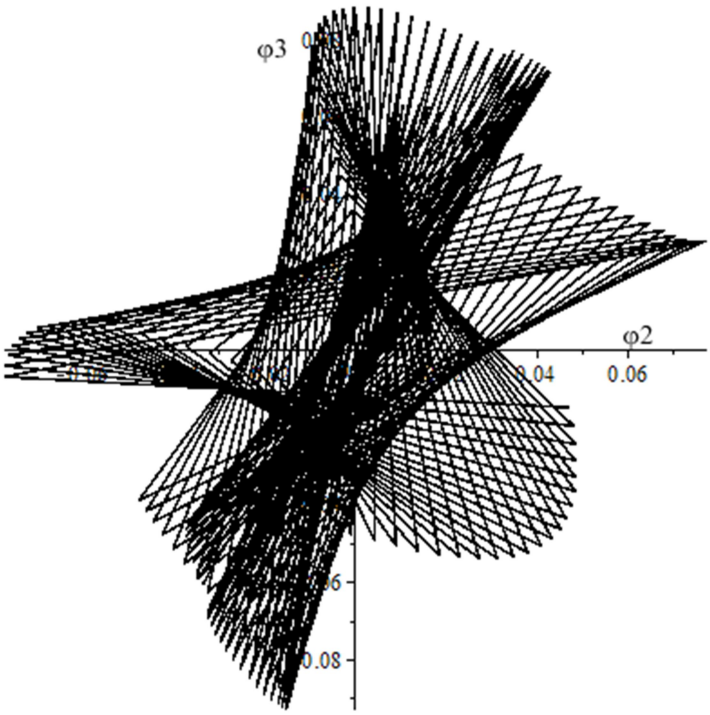


Рисунок 7 – Система четырех маятников. Зависимость $\varphi_3(\varphi_2)$, иллюстрирует аналогичную ситуацию хаоса и со средними маятниками. Время построения $\tau \in [0;250\ 000]$, начальные условия $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{3}, \varphi_2(0) = -\frac{\pi}{4}, \varphi_3(0) = \frac{\pi}{6}, \varphi_4(0) = \frac{\pi}{8}$

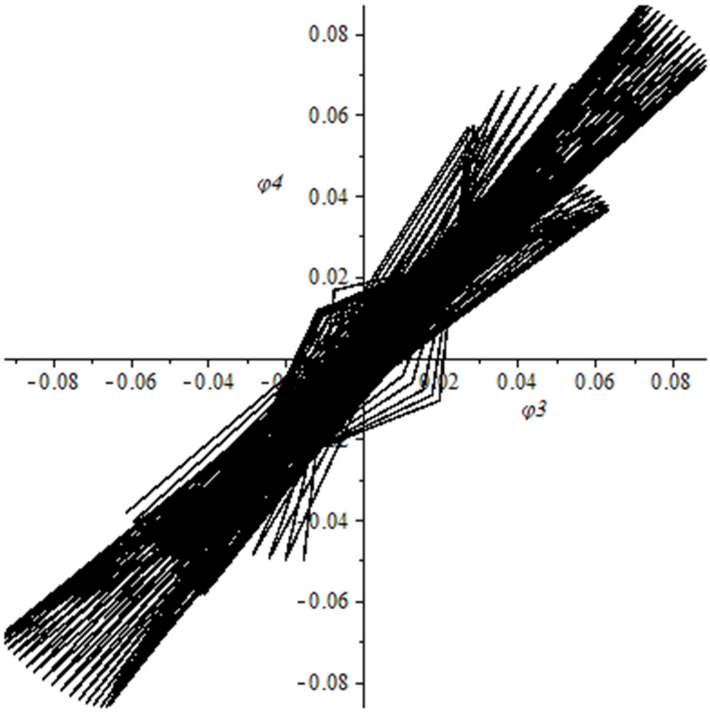


Рисунок 8 – Система четырех маятников. Здесь видна тенденция к синхронизации третьего и четвертого маятников при $\tau = 250\ 000$. Начальные условия

$$\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{3}, \varphi_2(0) = -\frac{\pi}{4}, \varphi_3(0) = \frac{\pi}{6}, \varphi_4(0) = \frac{\pi}{8}$$

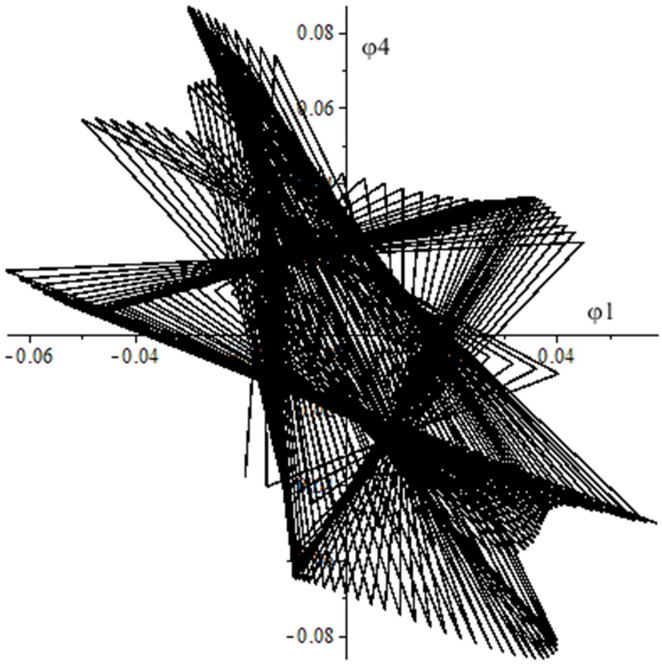


Рисунок 9 – Система четырех маятников. Зависимость $\varphi_4(\varphi_1)$ при $\tau = 250\,000$ совершенно однозначно показывает, что крайние маятники далеки от синхронизации. Нелинейные взаимодействия в ансамбле из четырех маятников сложны настолько, что даже за очень большие времена $\tau = 250\,000$ синхронизация не наступает. Начальные условия выбраны теми же

$$\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{3}, \varphi_2(0) = -\frac{\pi}{4}, \varphi_3(0) = \frac{\pi}{6}, \varphi_4(0) = \frac{\pi}{8}$$

Как мы только что видели, системы физических маятников в случае $N > 2$ на временных интервалах от 0 до 250000 не синхронизируются. Однако, надо заметить, что ввиду трудностей чисто технического характера, мы пока не сумели осуществить численный расчет до времен порядка $800000 - 1000000$ безразмерных единиц. Эти результаты будут представлены нами позднее.

Из системы (4) следует, что единственная стационарная точка будет определяться уравнением $\sin\varphi_i = 0$, из которого следует решение $\varphi_i = 0$, при котором все маятники по прошествии некоторого сравнительно большого промежутка времени, должны остановиться. При этом электромагнитное взаимодействие на фоне нелинейного ЭМ излучения будет приводить к длительному хаосу в движении всей системы в целом. Простой опыт, проведенный на относительно небольших промежутках времени, подтверждает сказанное выше (см. [13]).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Gladkov, S. Bogdanova. Chaotic dynamics of interacting pendulums (the decision of the synchronization problem). Proceedings of the XLVI Summer School – Conference Advanced problems in mechanics, APM 2018. St. Petersburg, 2018. pp. 302-316.
2. S. Gladkov, S. Bogdanova. To the problem of synchronization of physical pendulums. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, DIFF 2018. СУЗДАЛЬ, 2018. СС. 240 – 242.

3. S. Gladkov, S. Bogdanova. Chaotic dynamics of interacting pendulums. Mechanics, Materials Science & Engineering. 2018. V.18. doi: 10.2412/mmse.35.79.433.
4. С.О. Гладков, С.Б. Богданова. Хаотическая динамика взаимодействующих маятников (решение проблемы синхронизации). Инженерная физика. 2019. Т. 19. В.1. с. 49-62.
5. С.О. Гладков, С.Б. Богданова. К теории электромагнитного взаимодействия физических маятников. IV Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» (СПФМН-2018), ОРЁЛ, 22-25.11.2018. с. 24-27.
6. С.О. Гладков, С.Б. Богданова. К вопросу о синхронизации маятников. VIII-й Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» (GRACOS-18), КАЗАНЬ, 29.10 – 03.11.2018. с. 116-121.
7. С.О. Гладков, С.Б. Богданова. К теории нелинейной динамики физических маятников. Всероссийская конференция по математике и механике с международным участием. ТОМСК, 2-4.10.2018. с.129.
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. Т.2. М.: Наука. 2001. 520 с.
9. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Т. 8. М.: Наука. 2002. 620 с.
10. С.О. Гладков. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра. ЖТФ, 2018. Т. 59. В. 3. СС. 377 – 341.
11. С.О. Гладков, С.Б. Богданова. К вопросу учета силы сопротивления в шарнирной точке крепления физического маятника и ее влияние на динамику движения. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019, №1. с.53-63
12. С.О. Гладков, С.Б. Богданова. Теория детерминированного хаоса в системе N взаимодействующих компланарных маятников. Инженерная физика, №3, 2019. С.9-21.
13. https://youtu.be/UW8p3AXBVTw

УДК 517.968.22

ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВЕНИЯ ВТОРОГО РОДА СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

А.Н. Зарубин, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева»
e-mail: *aleks_zarubin@mail.ru*

Пусть $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – сохраняющие ориентацию взаимно-обратные $\alpha_{3-j}(\alpha_j(x))=x\,(j=1,2)$ диффеоморфизмы класса C^2, удовлетворяющие условиям $\alpha_1(x)<x, \alpha'(x)>1\,(\alpha_1'(x)<1)$ и $\alpha_2(x)>x, \alpha_2'(x)<1\,(\alpha_2'(x)>1)$, т.е. представляющие собой растягивающе(сжимающе)-запаздывающее и сжимающе (растягивающе)-опережающее отображения, причем $x_n=\alpha_1(x_{n+1})$, $x_{n+1}=\alpha_2(x_n)(n=\overline{-2,4})$;

$$\alpha_2(x_0)>0;\alpha_1(x_1)=x_0=0;$$

$$\text{и } \alpha_j^l(x)\equiv\underbrace{\alpha_j(\alpha_j(...(\alpha_j(x))...)}_{l-раз},\ \text{если } l>0;$$

$$\alpha_j^l(x)\equiv\underbrace{\alpha_{3-j}(\alpha_{3-j}(...(\alpha_{3-j}(x))...)}_{-l-раз},\ \text{если } l<0;\ \alpha_j^0(x)=x\,(j=1,2).$$

Обозначим

$$\Phi(\alpha_j^k(x),\varphi)=\int\limits_{\alpha_j^k(x_0)}^{\alpha_j^k(x)}\frac{\varphi(t)dt}{(\alpha_j^k(x)-t)^q}\,(j=1,2;k=\overline{-2,4})\text{-} \tag{1}$$

слабополярный интегральный оператор со сдвигом запаздывающего и опережающего некарлемановского типа.

Рассмотрим интегро-функциональное уравнение

$$\sum_{k=0}^{2}a_k\varphi(\alpha_1^k(x))+\sum_{k=1}^{2}b_k\varphi(\alpha_2^k(x))+\sum_{k=0}^{2}C_k\Phi(\alpha_1^k(x),\varphi)+\sum_{k=1}^{2}d_k\Phi(\alpha_2^k(x),\varphi)=$$

$$=f(x),x_0\le x\le x_3, \tag{2}$$

где $a_k,b_k,c_k,d_k\equiv const; f(x)-$заданная достаточно гладкая функция на множестве $x_0\le x\le x_3$.

Задача J. Найти решение $\varphi(x)$ уравнения (2) из класса $C(x_0\le x\le x_3, x\ne x_1,x_2)$ удовлетворяющее краевым условиям

$$\varphi(x)=r(x),x_{-2}\le x\le x_0, \tag{3}$$

$$\varphi(x)=\rho(x),x_3\le x\le x_5, \tag{4}$$

где $r(x),\rho(x)$- заданные достаточно гладкие функции на множествах $x_{-2}\le x\le x_0$, $x_3\le x\le x_5$, соответственно.

Теорема 1. Если $r(x)\in C[x_{-2},x_0];\rho(x)\in C[x_3,x_5];r(x_k)=0(k=\overline{-2,0})$;

$\rho(x_n) = 0 (n = \overline{3,5})$; матрицы коэффициентов уравнения (2) коммутируют, то решение $\varphi(x)$ задачи J существует и единственно.

Доказательство.

Для интегрального уравнения (2) в терминах функций

$$\Phi_j(\alpha_l^k(x), \varphi_j) = \Phi(\alpha_l^k(x), \varphi), x_j \le x \le x_{j+1} (j = \overline{-2,4}; l = 1,2; k = \overline{0,2}), \quad (5)$$

$$\varphi_j(x) = \varphi(x), x_j \le x \le x_{j+1} (j = \overline{-2,4}) \quad (6)$$

построим систему трех интегральных уравнений при $x_0 \le x \le x_1$.

С этой целью заменим в уравнении (2) на промежутках $x_j \le x \le x_{j+1} (j = \overline{0,2})$ переменную x на $\alpha_2^j(x) (j = \overline{0,2})$ и учтем, что при $x_0 \le x \le x_1$ выполняется неравенство $x_j \le \alpha_2^j(x) \le x_{j+1} (j = \overline{0,2})$.

В результате получаем соответствующую систему трех интегро-функциональных уравнений

$$\sum_{k=0}^{2} a_k \varphi_{n-k}(\alpha_2^{n-k}(x)) + \sum_{k=1}^{2} b_k \varphi_{n+k}(\alpha_2^{n+k}(x)) +$$

$$\sum_{k=0}^{2} c_k \Phi_{n-k}(\alpha_2^{n-k}(x), \varphi_{n-k}) + \sum_{k=1}^{2} d_k \Phi_{n+k}(\alpha_2^{n+k}(x), \varphi_{n+k}) =$$

$$= f(\alpha_2^n(x)), x_0 \le x \le x_1 (n = \overline{0,2}),$$

которую, с учетом (1)-(6), запишем в форме матричного уравнения

$$A\overline{\varphi}(x) + B\overline{\Phi}(x, \overline{\varphi}) = \overline{F}(x),\ x_0 \le x \le x_1, \quad (7)$$

где

$$\overline{\varphi}(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(\alpha_2(x)), \varphi_1(\alpha_2^2(x)))^T,$$

$$\overline{\Phi}(x, \overline{\varphi}) = (\Phi_0(x, \varphi_0), \Phi_1(\alpha_2(x), \varphi_1), \Phi_2(\alpha_2^2(x), \varphi_2))^T,$$

$$\overline{F}(x) = (F_0(x), F_1(x), F_2(x))^T,$$

причем

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_1 & b_2 \\ a_1 & a_0 & b_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} c_0 & d_1 & d_2 \\ c_1 & c_0 & d_1 \\ c_2 & c_1 & c_0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

а

$$F_0(x) = f(x) - a_1 r(\alpha_1(x)) - a_2 r(\alpha_1^2(x)) - c_1 \Phi_{-1}(\alpha_1(x), r) - c_2 \Phi_{-2}(\alpha_1^2(x), r),$$

$$F_1(x) = f(\alpha_2(x)) - a_2 r(\alpha_1(x)) - b_2 \rho(\alpha_2^3(x)) - c_2 \Phi_{-1}(\alpha_1(x), r) - d_2 \Phi_3(\alpha_2^3(x), \rho),$$

$$F_2(x) = f(\alpha_2^2(x)) - b_1 \rho(\alpha_2^3(x)) - b_2 \rho(\alpha_2^4(x)) - d_1 \Phi_3(\alpha_2^3(x), \rho) - d_2 \Phi_4(\alpha_2^4(x), \rho).$$

Будем считать в матрицах (8) элементы

$$a_j = b_j (j = 1,2),\ c_1 = d_1,\ c_2 = d_2 = c_1 \frac{a_2}{a_1}. \quad (9)$$

Тогда матрицы (8), в силу (9), симметрические и коммутативны. В этом случае [1,с.78] существует матрица $T (\det T \ne 0)$, приводящая матрицы A и B одновременно к диагональной форме:

$$T^{-1} A T = \Lambda_A, T^{-1} B T = \Lambda_B,$$

$$\text{где} \quad \Lambda_A = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \Lambda_B = \begin{pmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

причем $\gamma_j, \delta_j (j = 0,1,2)$ – различные действительные отличные от нуля собственные значения матриц A и B соответственно.

Поскольку матрицы A, B коммутирующие, то тоже можно сказать и о матрицах Λ_A, Λ_B, полученных преобразованием подобия [2,с.133].

Для разделения системы (7) на отдельные уравнения произведем замену

$$\overline{\varphi}(x) = T\overline{\upsilon}(x), \tag{11}$$

$$\overline{\upsilon}(x) = (\upsilon_0(x), \upsilon_1(\alpha_2(x)), \upsilon_2(\alpha_2^2(x)))^T,$$

и перейдем к системе

$$\Lambda_A \overline{\upsilon}(x) + \Lambda_A \overline{\Phi}(x, \overline{\upsilon}) = \overline{F}(x),\ x_0 \le x \le x_1,$$

которая, в силу (10), (11), распадается на три отдельных уравнения

$$\gamma_k \upsilon_k(\alpha_2^k(x)) + \delta_k \Phi_k(\alpha_2^k(x), \upsilon_k) = F_k(x),\ x_0 \le x \le x_1\ (k = 0,1,2),$$

$$\text{или}\ \gamma_k \upsilon_k(x) + \delta_k \Phi_k(x, \upsilon_k) = F_k(\alpha_1^k(x)),\ x_k \le x \le x_{k+1}\ (k = 0,1,2),$$

а с учетом (1),

$$\gamma_k \upsilon_k(x) + \delta_k \int_{x_k}^{x} \frac{\upsilon_k(t)dt}{(x-t)^q} = M_k(x) \equiv F_k(\alpha_1^k(x)),\ x_k \le x \le x_{k+1}\ (k = 0,1,2). \tag{12}$$

Уравнение Абеля (12) второго рода имеет [3,с.413] единственное решение вида

$$\upsilon_k(x) = \frac{1}{\gamma_k} M_k(x) + \frac{1}{\gamma_k} \int_{x_k}^{x} R_k(x-t) M_k(t)dt,\ x_k \le x \le x_{k+1}, \tag{13}$$

где резольвента $R_k(x-t)$ определяется формулой

$$R_k(x-t) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n [\delta_k \Gamma(1-q)(x-t)^{1-q} / \gamma_k]^n}{\Gamma(1+(1-q)n)}. \tag{14}$$

С помощью формул (13), (11), (6), можно записать решение задачи J (2)-(4).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука,1976. – 352 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 549 с.
3. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. – М.: Физматлит, 2003. – 608 с.

УДК 517.956.222

ОБРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СУБЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. С. Климов, д.ф.-м.н., проф.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: *vsk76@list.ru*

Обсуждаются внутренние оценки решений неравенства $Au \geqslant 0$, где A — линейный эллиптический оператор порядка $2m$, определеный на функциях многих переменных.

Ключевые слова: функциональное неравенство, линейный эллиптический оператор

Прямые и обратные функциональные неравенства часто применяются в математическом анализе и связанных с ним направлениях. Характерным примером прямых неравенств являются теоремы вложения, значительную часть которых составляют оценки норм функций через нормы производных этих функций. Обратные функциональные неравенства дают оценки норм старших производных через нормы их младших производных. Такого рода оценки справедливы лишь для функций, удовлетворяющих дополнительным условиям.

В докладе предполагается обсудить внутренние оценки решений неравенства $Au \geqslant 0$, где A — линейный эллиптический оператор порядка $2m$, определенный на функциях многих переменных. Совокупность решений этого неравенства образует клин $\mathscr{K}(A)$ в подходящем функциональном пространстве. Близкие по теме и используемым методам вопросы рассматривались в [1], [2]. Например, в монографии [1] приводится следующий результат.

ТЕОРЕМА. *Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задана последовательность субгармонических функций u_j, сходящаяся в пространстве $\mathscr{D}'(\Omega)$ к субгармонической функции u. Тогда*

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j - u; W_p^1(\omega)\| = 0, \quad (p(n-1) < n)$$

для любой области $\omega \Subset \Omega$.

Используемые термины подробно объясняются ниже. Сейчас же отметим, что если выбросить из рассмотрения субгармонические функции тождественно равные $-\infty$ на компонентах связности открытого множества Ω, то определением субгармоничности функции u может служить неравенство $\Delta u \geqslant 0$, понимаемое в смысле теории распределений.

Введём ряд определений и обозначений. Всюду далее $\mathbb{R}^n$ – действительное n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $|x|, \Omega$ – область в пространстве $\mathbb{R}^n\,(n > 1$, случай $\Omega = \mathbb{R}^n$ не исключается), $L_p(\Omega)$ –пространство Лебега; как обычно, эквивалентные относительно n – мерной меры Лебега mes_n функции отождествляются, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, норма в пространстве $L_p(\Omega)$ вводится стандартным образом. Для натурального числа k и $q \in [1, \infty)$ через $W_q^k(\Omega)$ обозначается совокупность функций из $L_q(\Omega)$, произ-

водные в смысле Соболева [3], [4] которых до порядка k включительно принадлежат пространству $L_q(\Omega)$. Норма в $W_q^k(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u; W_q^k(\Omega)\| = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u; L_q(\Omega)\|.$$

Здесь и далее $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ – порядок мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} u, D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Ниже применяются локальные варианты $W_q^k(\Omega, loc)$ пространств $W_q^k(\Omega)$. Пространство $W_q^k(\Omega, loc)$ состоит из функций, сужения которых на любую область $\omega \Subset \Omega$ принадлежит $W_q^k(\omega)$. Как обычно, включение $\omega \Subset \Omega$ означает, что замыкание $\bar{\omega}$ области ω есть компакт, содержащийся в Ω. Последовательность $u_j \in W_q^k(\Omega, loc)$ сходится в $W_q^k(\Omega, loc)$ к функции u, если

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j - u; W_q^k(\omega)\| = 0 \quad \forall \omega \Subset \Omega.$$

Напомним определение пространства Никольского $H_1^k(\Omega)$. Обозначим через Ω_η совокупность точек из Ω, отстоящих от границы области Ω на расстояние, большее чем η. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит $H_1^1(\Omega)$, если она суммируема по Ω и выполняется условие Зигмунда

$$\|f(\cdot + h) - 2f(\cdot) + f(\cdot - h); L_1(\Omega_\eta)\| \leqslant M|h|, \quad (|h| < \eta). \tag{1}$$

Класс $H_1^1(\Omega)$ образует пространство Банаха, если ввести норму

$$\|f; H_1^1(\Omega)\| = \|f; L_1(\Omega)\| + M_f,$$

где M_f – наименьшая константа, с которой выполняется неравенство (1) для всех η, для которых Ω_η имеет смысл. Для натурального $k > 1$ пространство $H_1^k(\Omega)$ состоит из функций класса $W_1^{k-1}(\Omega)$, все производные которых порядка $k-1$ принадлежат пространству $H_1^1(\Omega)$. В $H_1^k(\Omega)$ вводится норма

$$\|f; H_1^k(\Omega)\| = \|f; W_1^{k-1}(\Omega)\| + \sum_{|\alpha|=k-1} \|D^\alpha f; H_1^1(\Omega)\|.$$

Хорошо известны определения пространств Никольского $H_1^k(\Omega)$ и для нецелых значений параметра k [4]. Стандартным образом вводятся пространства $C^k(\Omega)$, также имеющие смысл для любого $k \geqslant 0$.

Помимо обычных функций в работе находят приложения и обобщённые, называемые иногда распределениями. Напомним некоторые определения и обозначения. Через $\mathscr{D}(\Omega)$ обозначается линейное пространство всех финитных в Ω и бесконечно дифференцируемых функций. Функции класса $\mathscr{D}(\Omega)$ называют пробными. Непрерывный линейный функционал $\Lambda\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ называют обобщённой функцией или распределением. Линейное пространство всех распределений обозначают символом $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Ниже $\mathscr{D}_+(\Omega)$ – множество неотрицательных пробных функций. Распределение Λ называют положительным, если $\langle \Lambda, \varphi \rangle \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}_+(\Omega)$. Множество положительных распределений обозначается символом $(\mathscr{D}')_+(\Omega)$. Очевидно,что $(\mathscr{D}')_+(\Omega)$ есть замкнутый конус в пространстве $\mathscr{D}'(\Omega)$. Каждое положительное распределение является мерой.

Далее A – линейный дифференциальный оператор, определяемый равенством

$$(Au)(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x).$$

Оператор A равномерно эллиптичен:

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n} \geqslant k_0(x)(t_1^2 + \dots + t_n^2)^m;$$

здесь $k_0 \colon \Omega \to \mathbb{R}$ – функция на Ω, причём

$$\inf_{x \in \omega} k_0(x) > 0 \qquad \forall \omega \Subset \Omega.$$

Коэффициенты $a_\alpha(x)$ дифференциального оператора A – бесконечно дифференцируемые в Ω функции:

$$a_\alpha \in C^\infty(\Omega) \quad (|\alpha| \leqslant 2m). \tag{2}$$

Через A^* обозначается формально сопряжённый к A дифференциальный оператор, определяемый равенством

$$(A^* v)(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x) v(x)).$$

Если $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ – достаточно гладкая функция, то для любой пробной функции φ имеет место равенство

$$\int\limits_\omega \varphi(x)(Au)(x)\,dx = \int\limits_\Omega u(x)(A^*\varphi)(x)\,dx. \tag{3}$$

Ввиду (1) функция $A^*\varphi$ также является пробной. Это позволяет распространить оператор A на класс распределений $\mathscr{D}'(\Omega)$. Если $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, то функционал $\varphi \to u(A^*\varphi)$ также принадлежит $\mathscr{D}'(\Omega)$; соответствующее распределение и обозначается символом Au. Таким образом, верен аналог соотношения (3) – равенство

$$(Au)(\varphi) = \langle u, A^*\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{4}$$

Если $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$, то уравнение

$$Au = \Lambda \tag{5}$$

эквивалентно соотношению

$$u(A^*\varphi) = \langle \Lambda, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Из общей теории уравнений эллиптического типа известно, что если Λ обычная достаточно гладкая функция, то таковым же является и любое решения уравнения (5). Например, если Λ бесконечно дифференцируемая в Ω функция, то и каждое решение уравнения (5) также бесконечно дифференцируемо.

Введём класс $\mathscr{K}(A)$, полагая

$$\mathscr{K}(A) = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega), \quad A(u) \geqslant 0\}.$$

Распределения класса $\mathscr{K}(A)$ иногда именуют субэллиптическими функциями [5]. Краткости ради, далее будет использоваться и этот термин.

Множество $\mathscr{K}(A)$ есть замкнутый клин в $\mathscr{D}'(\Omega)$ с лезвием $Ker(A)$. Поскольку положительное распределение есть мера, то субэллиптические функции обладают некоторой регулярностью, во всяком случае они являются локально суммируемыми функциями. Ряд дополнительных сведений о гладкости субэллиптических функций можно найти в [5].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть ω, Ω_0 – области в $\mathbb{R}^n$ и $\omega \Subset \Omega_0 \Subset \Omega$. Пусть $1 < p < \frac{n}{n-1}$. Тогда пространство $\mathscr{K}(A)|L_1(\Omega_0)$ компактно вложено в $W_p^{2m-1}(\omega)$; более подробно это означает, что множество $\{u \in \mathscr{K}(A), \|u; L_1(\Omega_0)\| \leqslant 1\}$ предкомпактно в пространстве $W_p^{2m-1}(\omega)$.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *В условиях теоремы 1 имеет место неравенство*

$$\|u; W_p^{2m-1}(\omega)\| \leqslant c(\omega, \Omega_0)\|u; L_1(\Omega_0)\|, \tag{6}$$

где постоянная $c(\omega, \Omega_0)$ не зависит от функции $u \in \mathscr{K}(A)$.

В неравенстве (6) и теореме 1 существенно предположение $p < \dfrac{n}{n-1}$. Убедимся в необходимости этого условия на примере оператора A, совпадающего с оператором Лапласа Δ. Действительно, пусть функции $\mathscr{E}_n$ определены на $\mathbb{R}^n$ равенствами

$$\mathscr{E}_2(x) = \ln|x|, \quad \mathscr{E}_n(x) = -|x|^{2-n}, \quad (n > 2).$$

Как нетрудно видеть, $\mathscr{E}_n \in \mathscr{K}(\Delta), \quad \mathscr{E}_n \in L_1(B_1) \quad (B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}$, в то же время включения $\mathscr{E}_n \in W_p^1(B_1)$ справедливы лишь при $p < \dfrac{n}{n-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $u_j \in \mathscr{K}(A)\,(j = 1, 2, \ldots)$ и $u_j \to u$ в $L(\Omega, loc)$, то $u_j \to u$ в $W_p^{2m-1}(\Omega, loc)$.*

Сходимость $u_j \to u$ в $L(\Omega, loc)$ можно заменить более слабой. Например, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A – равномерно эллиптический операторь с постоянными коэффициентами. Если $u_j \in \mathscr{K}(A)$ и $u_j \to u$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$, то $u_j \to u$ в $W_p^{2m-1}(\Omega, loc)$.*

Теорема 2 усиливает результаты работ [1], [2]. Теорема Хёрмандера относится к случаю, когда A есть оператор Лапласа. В этой ситуации $\mathscr{K}(A)$ совпадает с клином субгармонических функций. В работе [2] A – произвольный

равномерно эллиптический оператор с постоянными коэффициентами, однако сходимость $u_j \to u$ устанавливается в более слабой топологии. Предположение о постоянстве коэффициентов оператора A в теореме 2 представляется завышенным; скорее всего оно связано лишь с методом доказательства. В докладе предполагается обсудить и перспективы смягчения условия (2).

Сопоставим эллиптическому оператору A более узкий, чем $\mathscr{K}(A)$, клин $\mathscr{K}_1(A)$, полагая

$$\mathscr{K}_1(A) = \{u \in \mathscr{K}(A), \quad Au \in L_1(\Omega, loc)\}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть ω, Ω_0 – области в $\mathbb{R}^n$ и $\omega \Subset \Omega_0 \Subset \Omega$. Тогда имеет место неравенство*

$$\|u; H_1^{2m}(\omega)\| \leqslant C(\omega, \Omega_0)\|u; L_1(\Omega_0)\|. \tag{7}$$

где постоянная $C(\omega, \Omega_0)$ не зависит от функции $u \in \mathscr{K}_1(A)$.

Внутренние оценки можно дополнить оценками вплоть до границы. Такого рода результаты устанавливались в работах автора для функций, удовлетворяющих граничным условиям [6], [7]. Они нашли применения к нелинейным краевым задачам. Предположение $n > 1$ связано лишь с тем, что для обыкновенных дифференциальных уравнений все результаты могут быть существенно усилены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hörmander L. Notions of Convexity. — Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser. — 1994.
2. Малышев В. А. Нелинейные теоремы вложения // Алгебра и анализ. — 1993. — Т. 5. — № 6. — С. 1–38.
3. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука. — 1988.
4. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука. — 1977.
5. Садуллаев А., Мадрахамов Р. Гладкость субгармонических функций // Математический сборник. — 1990. — Т. 181. — № 2. — С. 167–182.
6. Климов В. С. Нетривиальные решения краевых задач для полулинейных эллиптических уравнений // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1971. — Т. 35. — № 2. — С. 428–439.
7. Климов В. С., Павленко А. Н. Обратные функциональные неравенства и их приложения к нелинейным эллиптическим краевым задачам // СМЖ. — 2001. — Т. 42. — № 4. — С. 781–795.

УДК 517.52, 517.53/.55

О ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ПЛОТНОСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

А. Ф. Кужаев
Башкирский государственный университет,
Уфимский государственный нефтяной технический университет
e-mail: *arsenkuzh@outlook.com*

Известно, что если целая функция не является нулевой, то множество её нулей образует неограниченную по модулю последовательность комплексных чисел. Широкое применение в теории функций и комплексном анализе нашли целые функции экспоненциального типа. Поведение таких функций полностью описывается распределением их нулей. В связи с этим представляется, что получение каких-либо соотношений для характеристик неограниченных по модулю последовательностей комплексных чисел, будет полезно при исследовании поведения целых функций. В настоящей работе получены точные двусторонние оценки на верхнюю и нижнюю плотность последовательности чисел, которая при определённых условиях может быть последовательностью нулей целой фнкции экспоненциального типа.

Ключевые слова: верхняя плотность, нижняя плотность, последовательность нулей целой функции.

Данная работа является развитием идей работы [1]. Будем рассматривать кратную последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n, \nu_n\}_{n=1}^{\infty}$, где λ_n — комплексные числа, образующие строго возрастающую и неограниченную по модулю последовательность

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < ... < |\lambda_n| < ..., \quad |\lambda_n| \to \infty,$$

а ν_n — натуральные числа, которые будем называть кратностью элемента λ_n.

Символом $B(z,t)$ будем обозначать замкнутый круг с центром в точке z, радиуса t. *Верхней плотностью* и *нижней плотностью* последовательности Λ называются соответственно величины:

$$\bar{n}(\Lambda) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n(t,\Lambda)}{t}, \quad \underline{n}(\Lambda) = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{n(t,\Lambda)}{t},$$

где $n(t,\Lambda)$ обозначает считающую функцию последовательности Λ, т. е. число её точек (каждая точка λ_n считается ровно столько раз, какова её кратность), лежащих в круге $B(0,t)$:

$$n(t,\Lambda) = \sum_{|\lambda_n|\leqslant t} \nu_n.$$

Если $\bar{n}(\Lambda) = \underline{n}(\Lambda)$, то последовательность Λ называется *измеримой*, и тогда величина

$$n(\Lambda) = \lim_{t\to+\infty} \frac{n(t,\Lambda)}{t}$$

существует и называется *плотностью* последовательности Λ.

Введём в рассмотрение величины, аналогичные величинам из работы [1]:

$$\eta(\Lambda) := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right|, \quad \underline{\eta}(\Lambda) := \varliminf_{n\to\infty} \left|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right|, \quad \bar{\eta}(\Lambda) := \varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right|;$$

$$\sigma(\Lambda) := \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n}{|\lambda_n|}, \quad \underline{\sigma}(\Lambda) := \varliminf_{n\to\infty} \frac{\nu_n}{|\lambda_n|}, \quad \bar{\sigma}(\Lambda) := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\nu_n}{|\lambda_n|}.$$

Очевидно, что $1 \leqslant \underline{\eta}(\Lambda) \leqslant \bar{\eta}(\Lambda)$.

Помимо приведённых выше характеристик числовой последовательности, сущестсвует огромное множество других: это и различные плотности, и связанные с ними величины. Подробнее о них и взаимосвязях между ними можно посмотреть, например, в [2], [3], [4]. Из проведённых исследований в упомянутых работах видно, что знание поведения характеристик последовательности нулей целых функций экспоненциального типа необходимо для получения результатов в классических вопросах анализа и теории функций, таких как полнота семейства голоморфных функций в некоторых функциональных пространствах.

Цель настоящей работы — получить двусторонние оценки для верхней и нижней плотности, через величины $\underline{\eta}(\Lambda), \bar{\eta}(\Lambda), \underline{\sigma}(\Lambda), \bar{\sigma}(\Lambda)$, аналогичные оценкам на логарифмическую блок-плотность из [1].

Прежде всего, докажем. что справедлива

Л е м м а. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n, \nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — кратная последовательность комплексных чисел, о которой говорилось выше. Справедливы равенства

$$\bar{n}(\Lambda) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n(|\lambda_n|, \Lambda)}{|\lambda_n|}, \quad \underline{n}(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n(|\lambda_n|, \Lambda)}{|\lambda_{n+1}|}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения верхнего предела немедленно следует, что

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n(t, \Lambda)}{t} \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n(|\lambda_n|, \Lambda)}{|\lambda_n|}. \tag{1}$$

Пусть $t > 0$ и

$$m(t) := \max\{k \in \mathbb{N} : |\lambda_k| \leqslant t\}.$$

Тогда

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n(t, \Lambda)}{t} = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n(|\lambda_{m(t)}|, \Lambda)}{t} \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n(|\lambda_{m(t)}|, \Lambda)}{|\lambda_{m(t)}|} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n(|\lambda_n|, \Lambda)}{|\lambda_n|}. \tag{2}$$

Соотношения (1)-(2) дают утверждение леммы для верхней плотности.

Пусть теперь γ_n — произвольная ограниченная последовательность, удовлетворяющая условию

$$0 < \gamma_n < |\lambda_{n+1}| - |\lambda_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из определения нижнего предела получим, что

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{n(t, \Lambda)}{t} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{n(|\lambda_{n+1}| - \gamma_n, \Lambda)}{|\lambda_{n+1}| - \gamma_n}. \tag{3}$$

Кроме того, в силу выбора последовательности γ_n,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{n(|\lambda_n|,\Lambda)}{|\lambda_{n+1}|}=\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{n(|\lambda_{n+1}|-\gamma_n,\Lambda)}{|\lambda_{n+1}|-\gamma_n}. \tag{4}$$

Наконец, объединяя цепочку

$$\frac{n(t,\Lambda)}{t}=\frac{n(|\lambda_{m(t)}|,\Lambda)}{t}\geqslant\frac{n(|\lambda_{m(t)}|,\Lambda)}{|\lambda_{m(t)+1}|}$$

с (3)-(4), получим требуемое. Лемма доказана.

Т е о р е м а. Пусть $\Lambda=\{\lambda_n,\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — кратная последовательность комплексных чисел, о которой говорилось выше. Предположим, что $\underline{\eta}(\Lambda)>1$. Тогда имеют место следующие оценки

$$\frac{\bar{\eta}(\Lambda)\underline{\sigma}(\Lambda)}{\bar{\eta}(\Lambda)-1}\leqslant\bar{n}(\Lambda)\leqslant\frac{\underline{\eta}(\Lambda)\bar{\sigma}(\Lambda)}{\underline{\eta}(\Lambda)-1}, \tag{5}$$

$$\frac{\underline{\sigma}(\Lambda)}{\bar{\eta}(\Lambda)-1}\leqslant\underline{n}(\Lambda)\leqslant\frac{\bar{\sigma}(\Lambda)}{\underline{\eta}(\Lambda)-1}. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя обозначение из леммы, будем иметь следующее:

$$\bar{n}(\Lambda)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{n(t,\Lambda)}{t}=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{m(t)}\nu_k\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{|\lambda_{m(t)}|}\sum_{k=1}^{m(t)}\nu_k.$$

Так как по предположению $\underline{\eta}(\Lambda)>1$, то для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует номер $N(\varepsilon)>0$ такой, что будут выполнены неравенства

$$(\underline{\sigma}(\Lambda)-\varepsilon)|\lambda_n|\leqslant\nu_n\leqslant(\bar{\sigma}(\Lambda)+\varepsilon)|\lambda_n|,\quad n\geqslant N(\varepsilon), \tag{7}$$

$$1<\underline{\eta}(\Lambda)-\varepsilon\leqslant\left|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right|\leqslant\bar{\eta}(\Lambda)+\varepsilon,\quad n\geqslant N(\varepsilon). \tag{8}$$

Поскольку отбрасывание конечного количества членов последовательности не влияет на величину плотностей, то можно без ограничения общности считать, что неравенства (7)-(8) выполнены для всех номеров $n\geqslant 1$.

Имеем

$$\bar{n}(\Lambda)\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{|\lambda_{m(t)}|}\sum_{k=1}^{m(t)}\nu_k\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\bar{\sigma}(\Lambda)+\varepsilon}{|\lambda_{m(t)}|}\sum_{k=1}^{m(t)}|\lambda_k|=$$

$$=(\bar{\sigma}(\Lambda)+\varepsilon)\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left(\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_{m(t)}}\right|+\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_{m(t)}}\right|+\cdot+\left|\frac{\lambda_{m(t)-1}}{\lambda_{m(t)}}\right|+1\right)=$$

$$=(\bar{\sigma}(\Lambda)+\varepsilon)\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left(\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\cdots\frac{\lambda_{m(t)-1}}{\lambda_{m(t)}}\right|+\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\cdots\frac{\lambda_{m(t)-1}}{\lambda_{m(t)}}\right|+\cdots+\left|\frac{\lambda_{m(t)-1}}{\lambda_{m(t)}}\right|+1\right)\leqslant$$

$$\leqslant (\bar{\sigma}(\Lambda)+\varepsilon)\varlimsup_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{(\underline{\eta}(\Lambda)-\varepsilon)^{m(t)-1}}+\cdots+\frac{1}{\underline{\eta}(\Lambda)-\varepsilon}+1\right)=$$

$$=(\bar{\sigma}(\Lambda)+\varepsilon)\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{(\underline{\eta}(\Lambda)-\varepsilon)^{m(t)}}-1}{\frac{1}{\underline{\eta}(\Lambda)-\varepsilon}-1}=(\bar{\sigma}(\Lambda)+\varepsilon)\frac{\underline{\eta}(\Lambda)-\varepsilon}{\underline{\eta}(\Lambda)-1+\varepsilon}.$$

Так как ε произвольно, то

$$\bar{n}(\Lambda)\leqslant\frac{\underline{\eta}(\Lambda)\bar{\sigma}(\Lambda)}{\underline{\eta}(\Lambda)-1}.$$

Оценку снизу для верхней плотности можно провести исходя утверждения леммы, неравенств (7)-(8) и аналогично применив формулы суммы геометрической прогресии. А именно:

$$\bar{n}(\Lambda)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\sum_{k=1}^{n}\nu_k\geqslant(\underline{\sigma}(\Lambda)-\varepsilon)\varlimsup_{n\to\infty}\left(\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right|+\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right|+\cdots+1\right)\geqslant$$

$$\geqslant(\underline{\sigma}(\Lambda)-\varepsilon)\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(\bar{\eta}(\Lambda)+\varepsilon)^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{\bar{\eta}(\Lambda)+\varepsilon}+1\right)=$$

$$=(\underline{\sigma}(\Lambda)-\varepsilon)\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(\bar{\eta}(\Lambda)+\varepsilon)^{n}}-1}{\frac{1}{\bar{\eta}(\Lambda)+\varepsilon}-1}=(\underline{\sigma}(\Lambda)-\varepsilon)\frac{\bar{\eta}(\Lambda)+\varepsilon}{\bar{\eta}(\Lambda)-1-\varepsilon}.$$

Таким образом, для верхней плотности двусторонние оценки (5) доказаны.

Для того, чтобы получить заявленные оценки (6) для нижней плотности, снова воспользуемся леммой:

$$\underline{n}(\Lambda)=\varliminf_{n\to\infty}\frac{n(|\lambda_n|,\Lambda)}{|\lambda_{n+1}|}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\nu_k\leqslant(\bar{\sigma}(\Lambda)+\varepsilon)\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right|.$$

Аналогично снизу получим

$$\underline{n}(\Lambda)\geqslant(\underline{\sigma}(\Lambda)-\varepsilon)\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right|.$$

Применяя снова (7)-(8) и рассуждая так же, как и для верхней плотности окончательно получим

$$\frac{\underline{\sigma}(\Lambda)}{\bar{\eta}(\Lambda)-1}\leqslant\underline{n}(\Lambda)\leqslant\frac{\bar{\sigma}(\Lambda)}{\underline{\eta}(\Lambda)-1},$$

что и требовалось. Теорема полностью доказана.

Непосредственно из теоремы вытекает

С л е д с т в и е. Если в условиях теоремы так же потребовать существование величин $\sigma(\Lambda)$ и $\eta(\Lambda)$, то справедливы формулы

$$\bar{n}(\Lambda)=\frac{\eta(\Lambda)\sigma(\Lambda)}{\eta(\Lambda)-1},\quad\underline{n}(\Lambda)=\frac{\sigma(\Lambda)}{\eta(\Lambda)-1}.$$

З а м е ч а н и е . 1. Отметим, что в отличие от случая с логарифмической блок-плотностью, оценки (1)-(2) не требует существование величины $\eta(\Lambda)$, в то время как для получения двусторонних оценок для логарифмической блок-плотности это условие обязательно. В то же время, от условия $\underline{\eta}(\Lambda) > 1$ и в настоящей работе отказаться не удалось.

2. Так же, как и для логарифмической блок-плотности, полученные оценки имеют существенный недостаток: под особый случай $\underline{\eta}(\Lambda) = 1$ попадают много простейших. Например, натуральный ряд $\mathbb{N} = \{n, 1\}$ — это пример измеримой последовательности и $n(\mathbb{N}) = 1$. Это обстоятельство позволяет утверждать, формулы из следствия 1 часто бывают непригодны для непосредственного вычисления значения верхней или нижней плотности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кужаев А. Ф., Рафиков А. И., Кривошеева О. А. Об одном соотношении для логарифмической блок-плотности // Вестник Башкирского университета. — 2017. — 22. — 1. — С. 25–27.

2. Rubel L. A. Necessary and suffcient conditions for Carlson's theorem on entire functions // Trans. Amer. math. Soc. — 1956. — 83. — P. 417–429.

3. Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности. — 3-е изд. дополненное. — Уфа: РИЦ БашГУ.— 2011. — 176 с.

4. Кривошеев А. С., Кужаев А. Ф. Об одной теореме Леонтьева-Левина // Уфимский математический журнал. — 2017. — 9. — 3. — С. 89–101.

О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ОДНОРОДНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.Н. Можарова, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева»
e-mail: *tatjana.mozharova@yandex.ru*

Автором продолжено исследование условий аппроксимации решений однородного операторного уравнения $\varphi(A)(x)=0$, где A – линейный неограниченный оператор, посредством его элементарных решений.

Ключевые слова: линейный неограниченный оператор, однородное операторное уравнение.

Пусть H – банахово пространство и A: $D(A) \to H$, $D(A) \subset H$, – замкнутый линейный неограниченный оператор; $D(A)$ – инвариантно относительно оператора А. Если характеристическая функция $\varphi(t)$ оператора

$$\varphi(A)(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} x_k A^k(x), \quad x \in D(A), \{x_k\} \subset H, \tag{1}$$

является целой векторнозначной со значениями в H и имеет порядок роста, не превосходящий $1/\beta$, а при порядке $1/\beta$ – тип меньший, чем $\beta/(\alpha e)$ ($\alpha > 0$ и $\beta > 0$ – фиксированные числа), то оператор $\varphi(A)$определен и является линейным и непрерывным на некотором подпространстве H_α^β пространства H [1]. Этот результат справедлив и для скалярной характеристической функции $\varphi(t)$.

Пусть

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k, \quad \{x_k\} \subset H, \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \tag{2}$$

– целая собственная вектор-функция оператора А, имеющая порядок роста $\rho \neq 0, \infty$, и тип σ. Векторы $f(\lambda_j) \in H_\alpha^\beta, \quad \forall \alpha, \beta > 0$. Здесь $\{\lambda_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$ – нули характеристической функции оператора φ:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \ c_k \in \mathbf{C}. \tag{3}$$

Можно показать, что если λ_j – нули $\varphi(t)$ соответственно кратности m_j, $j = 1, 2, \ldots$, то векторы $f^{(k)}(\lambda_j)$, $k = 0, 1, \ldots m_j - 1$, являются частными решениями уравнения

$$\varphi(A)(x) = 0. \tag{4}$$

Для доказательства теорем, показывающих, что каждое решение уравнения (4) аппроксимируется (в определенных условиях) посредством указанных выше элементарных решений, проведен ряд вспомогательных построений.

Пусть функция

$$\psi_\varphi(\lambda, t) = \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(t)}{\lambda - t}, \tag{5}$$

где $\varphi \in \left[\frac{1}{\beta};\frac{\beta}{\alpha e}\right)$; t – фиксированный комплексный параметр. Следовательно, $\psi_\varphi(\lambda, t)$, как функция λ, – целая, причем $\psi_\varphi(\lambda, t) \in \left[\frac{1}{\beta};\frac{\beta}{\alpha e}\right)$. При фиксированном t такая функция определяет на H_α^β линейный непрерывный оператор

$$\psi_\varphi[A, t_0](x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k [A^{k-1}(x) + t_0 A^{k-2}(x) + \cdots + t_0^{k-1} x],\ t_0 \in \mathbf{C}. \tag{6}$$

Ряд (6) абсолютно сходится по норме в H для всех $x \in H_\alpha^\beta$.

С использованием свойств интерполирующей функции $\psi_\varphi[A;t](x)$[2], ранее было доказано следующее утверждение [3]:

Теорема 1. Для любого вектора $x \in H_\alpha^\beta$ и любой функции $\varphi \in \left[\frac{1}{\beta};\frac{\beta}{\alpha e}\right)$ справедлива формула:

$$x = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{\psi_\varphi[A;t](x)}{\varphi(t)} dt + R_r(A)(x), \tag{7}$$

где $R_r(\lambda) \in \left[\frac{1}{\beta};\frac{\beta}{\alpha e}\right)$ и для $|\lambda| < r$ определяется как

$$R_r(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{dt}{(t-\lambda)\varphi(t)}. \tag{8}$$

(Здесь $r > 0$ – любое, но такое, что окружность $|t| = r$ не проходит через нули функции $\varphi(t)$.)

В указанных выше обозначениях справедлива также

Лемма. Пусть φ – фиксированная целая функция, $\varphi \in \left[\frac{1}{\beta};\frac{\beta}{\alpha e}\right)$. Тогда для любого $x \in H_\alpha^\beta$, являющегося решением уравнения $\varphi(A)(x) = 0$, имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{\psi_\varphi[A;t](x)}{\varphi(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{l_0\{\psi_\varphi[A;t](x)\} f(t)}{\varphi(t)} dt, \tag{9}$$

где $f(t)$ – собственная вектор-функция оператора A; l_0 – линейный непрерывный функционал, участвующий в определении $f(t)$.

Исходя из теоремы 1, с привлечением леммы доказано следующее утверждение, описывающее условия аппроксимации каждого решения уравнения (4) посредством системы $\left\{f^{(k)}(\lambda_j)\right\}$ его элементарных решений.

Теорема 2. Пусть целая функция $\varphi \in \left[\frac{1}{\beta}, \frac{\beta}{(\alpha e)}\right)$ удовлетворяет условию:

существуют окружности $| t | = r_k$, $r_k \uparrow \infty$, на которых имеет место оценка

$$|\varphi(t)| > M_k,\ \frac{r_k}{M_k} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{10}$$

Тогда каждое решение $x \in H_\alpha^\beta$ уравнения (4) представляется в виде

$$x = \lim_{r_k \to \infty} \sum_{|\lambda_j| < r_k} \sum_{\nu=0}^{m_j - 1} d_{j\nu} f^{(\nu)}(\lambda_j), \tag{11}$$

где λ_j – нули функции $\varphi(t)$, m_j – кратность нуля λ_j, $j = 1, 2, \ldots$

Доказательство.В формуле (7) в качестве контура интегрирования возьмем окружность $| t | = r_k$, не проходящую через нули функции $\varphi(t)$, так как по условию $|\varphi(t)| > M_k$. Тогда имеем:

$$x - \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_k} \frac{\psi_\varphi[A,t](x)}{\varphi(t)} dt = R_k(A)(x).$$

По лемме получаем:

$$x - \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_k} \frac{l_0\{\psi_\varphi[A,t](x)\} f(t)}{\varphi(t)} dt = R_k(A)(x). \tag{12}$$

Для доказательства теоремы произведем оценку остаточного члена формулы (12) и покажем, что в условиях теоремы он стремится к нулю при $k \to \infty$.

Для этого, оценивая функцию $R_k(\lambda)$, получаем:

$$\left|R_k(\lambda)\right| \le C(\varepsilon) \frac{e^{(\sigma_1+\varepsilon)|\lambda|^{\frac{1}{\beta}}} r_k}{M_k}, \forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где σ_1 – тип функции $\varphi(t)$ при порядке роста $\frac{1}{\beta}$. Следовательно, ее коэффициенты имеют оценку:

$$\left|B_m^{(k)}\right| \le C(\varepsilon) \frac{r_k}{M_k} \left[\frac{(\sigma_1+\varepsilon)e}{\beta m}\right]^{\beta m}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Отсюда

$$\left\|B_m^{(k)} A^m(x)\right\| \le C(\varepsilon) \left[\frac{(\sigma_1+\varepsilon)e}{\beta m}\right]^{\beta m} \frac{r_k}{M_k} \left\|A^m(x)\right\| \le C(\varepsilon) \left[\frac{(\sigma_1+\varepsilon)e}{\beta m}\right]^{\beta m} \frac{r_k}{M_k} (\varepsilon_p m)^{\beta m} \|x\|_p$$

$$\exists \varepsilon_p < \frac{\beta}{(\sigma_1+\delta)e}, \quad \forall \delta > 0, \ m > m_0(\varepsilon,\delta), \ 0 < \varepsilon < \delta,$$

$x \in H_\alpha^\beta$ – решение уравнения $\varphi(A)(x) = 0$.

Следовательно, ряд $\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(k)} A^m(x)$, определяющий оператор $R_k(A)(x)$, сходится абсолютно по топологии пространства H, причем

$$\left\|R_k(A)(x)\right\| \le C_p \frac{r_k}{M_k} \|x\|_p,$$

где $C_p > 0$, x – любое решение уравнения $\varphi(A)(x) = 0$ из H_α^β. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можарова Т.Н., Ломакин Д.Е. Об условиях существования и непрерывности оператора $\varphi(A)$ с переменными коэффициентами в случае неограниченного оператора A // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (26 января – 1 февраля 2017 г.).– 2017. – С. 150 – 151.

2. Можарова Т.Н. Об интерполирующей функции, порожденной целой вектор-нозначной функцией $\varphi(t)$ и линейным неограниченным оператором A//Continuum.Математика. Информатика. Образование. – 2016. – №1(1). – С. 31-36.
3. Можарова Т.Н. Об элементах локально-выпуклого пространства H_{α}^{β} // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы III Международной научно-практической конференции: Орел, ОГУ (23-26 ноября 2017 г.) – 2017. – С.68-71.

УДК 517.929+517.983.51

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ[1]

С. С. Орлов, к.ф.-м.н.
Иркутский государственный университет
e-mail: *orlov_sergey@inbox.ru*
В. В. Шеметова
Иркутский государственный университет
e-mail: *valentina501@mail.ru*

В представляемой работе изучена разрешимость двух типов начальных задач для дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом в банаховых пространствах. Применены методы теории распределений Соболева–Шварца. Фундаментальное решение абстрактного дифференциального оператора с запаздыванием построено в виде специальной оператор-функции, содержащей коммутаторы операторных коэффициентов уравнения, что позволило ослабить условие коммутативности их композиции. Получены условия разрешимости рассматриваемых задач в классе распределений с ограниченным слева носителем и явные формулы обобщенных решений. Установлены свойства классических решений.

Ключевые слова: банахово пространство, коммутатор линейных операторов, обобщенная функция, фундаментальное решение.

Абстрактные функционально-дифференциальные уравнения как аппарат для исследования эридитарных физических процессов, описываемых системами обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений и уравнениями в частных производных, и как самостоятельные математические объекты, изучали C. Lizama и F. Poblete [1], A. Ashyralyev [2], B. C. Dhage и S. Heikkila [3], M. Lauran [4], J. I. Vrabie [5], S. L. Campbell и V. H. Lihn [6], Г. В. Демиденко и И. И. Матвеева [7], В. Е. Федоров [8], М. В. Булатов [9], В. Ф. Чистяков [10], В. И. Назаров [11], Р. Г. Алиев [12] и многие другие. В данной работе применяются идеи теории распределений к изучению разрешимости начальных задач для дифференциально-операторных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом. Этот подход позволяет обойти трудности непосредственного построения классических решений и оказывается не менее естественным, нежели для уравнений без возмущения аргумента.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, u — неизвестная, а f — заданная функции действительного аргумента со значениями в E_1 и E_2 соотвественно. Рассмотрим начальную задачу вида

$$Bu'(t) = A_1u(t) + A_0u(t-h) + f(t),\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(t) = \varphi(t),\ -h \le t \le 0, \tag{2}$$

где $h > 0$ — заданное число, B, A_1 и A_0 — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $D(B) \subseteq D(A_1) \cap D(A_0)$, функция $\varphi(t) \in C\left(\left[-h; 0\right], E_1\right)$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-01-00643 А и № 18-51-54001 Вьет_а), а также при поддержке Иркутского государственного университета, индивидуальный исследовательский грант № 091-19-212.

известна и задает решение уравнения (1) на отрезке $[-h;0]$. Рассматриваемую начальную задачу (1), (2) называют *начальной задачей с начальной функцией*. Под *классическим* решением будем понимать функцию

$$u(t) \in C\left(\left[-h;+\infty\right),E_1\right) \cap C^1\left(\left(0;+\infty\right),E_1\right),$$

которая обращает в тождество дифференциально-операторное уравнение (1) и удовлетворяет начальному условию (2).

Продолжим классическое решение начальной задачи (1), (2) нулем из E_1 на интервал $(-\infty;-h)$ следующим образом:

$$\tilde{u}(t) = \varphi(t)\big(\theta(t+h)-\theta(t)\big) + u(t)\theta(t),$$

тогда в классе $K'_+(E_1)$ распределений с ограниченным слева носителем данная задача принимает вид сверточного уравнения

$$\big(B\delta'(t) - A_1\delta(t) + A_0\delta(t-h)\big) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t), \tag{3}$$

с правой частью

$$\tilde{g}(t) = B\delta'(t)*\varphi(t)\big(\theta(t+h)-\theta(t)\big)+B\varphi(0)\delta(t)-A_1\varphi(t)\big(\theta(t+h)-\theta(t)\big)+f(t)\theta(t),$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $\theta(t)$ — функция Хевисайда. Единственным решением уравнения (3) в $K'_+(E_1)$ (*обобщенным* решением рассматриваемой начальной задачи (1), (2)) является следующее распределение:

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t). \tag{4}$$

Здесь обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}(t)$ удовлетворяет двум условиям

$$\forall\, v(t) \in K'_+(E_2) \quad \big(B\delta'(t) - A_1\delta(t) - A_0\delta(t-h)\big) * \mathcal{E}(t) * v(t) = v(t),$$

$$\forall\, w(t) \in K'_+(E_1) \quad \mathcal{E}(t) * \big(B\delta'(t) - A_1\delta(t) - A_0\delta(t-h)\big) * w(t) = w(t),$$

и называется *фундаментальной оператор-функцией* [13] или *фундаментальным решением* линейного дифференциального оператора $B\delta'(t) - A_1\delta(t) - A_0\delta(t-h)$ с отклоняющимся аргументом. Смысл конструкции фундаментального решения состоит в следующем. Если известен его вид, то, в силу первого равенства, сверточное уравнение (3) имеет решением обобщенную функцию (4), причем это решение единственно. Действительно, пусть существует $\tilde{v}(t) \in K'_+(E_1)$ такая, что $\tilde{v}(t) \neq \tilde{u}(t)$ и $\big(B\delta'(t) - A_1\delta(t) + A_0\delta(t-h)\big) * \tilde{v}(t) = \tilde{g}(t)$, тогда, с учетом второго равенства из определения фундаментальной оператор-функции, получим

$$\tilde{v}(t) = \mathcal{E}(t) * \big(B\delta'(t) - A_1\delta(t) - A_0\delta(t-h)\big) * \tilde{v}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t) = \tilde{u}(t),$$

противоречие, которое доказывает единственность решения (4) в классе $K'_+(E_1)$ исходного сверточного уравнения (3).

Т е о р е м а 1. Пусть B непрерывно обратим, тогда дифференциальный оператор $B\delta'(t) - A_1\delta(t) - A_0\delta(t-h)$ имеет фундаментальное решение вида

$$\mathcal{E}(t) = B^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{A_1B^{-1}(t-kh)}U_k(t-kh)\theta(t-kh),$$

где $e^{A_1B^{-1}t}$ — операторная экспонента, последовательность операторнозначных функций $U_{k-1}(t)$ задана рекуррентно

$$U_k(t) = \int\limits_0^t V(s)U_{k-1}(s)ds,\ U_0(t) = \mathbb{I}_2,\ V(t) = e^{-A_1B^{-1}t}A_0B^{-1}e^{A_1B^{-1}t},$$

$\mathbb{I}_1$ и $\mathbb{I}_2$ — тождественные операторы в E_1 и E_2 соотвественно.

По следствию из формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа [14] оператор-функция $V(t)$ представима следующим операторно-функциональным рядом

$$V(t) = A_0B^{-1} + \left[A_0B^{-1}, A_1B^{-1}\right]\frac{t}{1!} + \left[\left[A_0B^{-1}, A_1B^{-1}\right], A_1B^{-1}\right]\frac{t^2}{2!} + \\ + \left[\left[\left[A_0B^{-1}, A_1B^{-1}\right], A_1B^{-1}\right], A_1B^{-1}\right]\frac{t^3}{3!} + \ldots.$$

Здесь выражение

$$\left[A_0B^{-1}, A_1B^{-1}\right] = A_0B^{-1}A_1B^{-1} - A_1B^{-1}A_0B^{-1}$$

означает коммутатор операторов A_1B^{-1} и A_0B^{-1}, которые на основании теоремы о замкнутом графике являются ограниченными линейными операторами из E_2 в E_2, а, значит, указанный ряд сходится равномерно на любом компакте $\left[0;T\right]$ в топологии $\mathcal{L}(E_2)$. Заметим, что

$$V'(t) = \left[V(t), A_1B^{-1}\right],$$

т. е. линейные операторы $V(t)$ и A_1B^{-1} образуют *пару Лакса* [15], и

$$V(0) = A_0B^{-1}.$$

Справедливы рекуррентные дифференциальные соотношения

$$U_k'(t) - \left[U_k(t), A_1B^{-1}\right] = U_{k-1}(t)A_0B^{-1},$$

и асимптотические формулы

$$U_{k-1}(t) \sim (A_0B^{-1})^{k-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!},\ t \to 0,$$

для членов операторно-функциональной последовательности $\{U_{k-1}(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$. В случае коммутативности композиции операторов A_1B^{-1} и A_0B^{-1} последние имеют смысл точных равенств при всех $t \in \left[0;+\infty\right)$.

С л е д с т в и е 1. Пусть B непрерывно обратим и $f(t) \in C\big(\big[0;+\infty\big), E_2\big)$, тогда начальная задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение вида

$$\tilde{u}(t) = \varphi(t)\big(\theta(t+h)-\theta(t)\big) + B^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\Big[e^{A_1B^{-1}(t-kh)}U_k(t-kh)B\varphi(0)\theta(t-kh)+$$

$$+\int\limits_{(k+1)h}^{t} e^{A_1B^{-1}(t-s)}U_k(t-s)A_0\varphi(s-(k+1)h)ds\big(\theta(t-kh)-\theta(t-(k+1)h)\big)+$$

$$+\int\limits_{-h}^{0} e^{A_1B^{-1}(t-(k+1)h-s)}U_k(t-(k+1)h-s)A_0\varphi(s)ds\,\theta(t-kh)+$$

$$+\int\limits_{0}^{t-kh} e^{A_1B^{-1}(t-kh-s)}U_k(t-kh-s)f(s)ds\,\theta(t-kh)\Big].$$

Распределение $\tilde{u}(t) \in K'_+(E_1)$ является регулярным и порождено обычной функцией $u = u(t)$, которая задается кусочно на полуинтервалах $\big[(k-1)h; kh\big)$. При условии $f(t) \in C\big(\big[0;+\infty\big), E_2\big)$ указанная функция сильно непрерывно дифференцируема на интервале $\big(0;+\infty\big)$, обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальному условию (2), т. е. является классическим решением начальной задачи (1), (2). Если $f(t) \in C^{n-1}\big(\big[0;+\infty\big), E_2\big)$, то это решение имеет порядок n сильной гладкости на интервале $\big(0;+\infty\big)$, за исключением кратных запаздыванию точек $t = kh$, в которых порядок сильной гладкости равен k, где $k = 1,\dots,n-1$. Этот факт согласуется с классическими представлениями [16] об уравнениях с отклоняющимся аргументом в скалярном случае $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$.

Предлагаемый подход можно применить к задаче более общего вида

$$Bu'(t) = A_1u(t) + A_0u(t-h) + f(t),\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(t) = \varphi(t),\ -h \le t < 0,\ u(0) = u_0. \tag{5}$$

Здесь функция $\varphi(t) \in C\big(\big[-h;0\big]; E_1\big)$ и вектор $u_0 \in E_1$ считаются известными, причем $u_0 \ne \varphi(0)$. Начальную задачу (1), (5) называют *начальной задачей с начальной функцией и начальным значением*, также ее можно трактовать как начальную задачу с разрывной в точке $t = 0$ начальной функцией. *Классическим* решением этой задачи назовем функцию

$$u(t) \in C\big(\big[-h;0\big) \cup \big(0;+\infty\big), E_1\big) \cap C^1\big(\big(0;+\infty\big), E_1\big),$$

которая обращает в тождество дифференциально-операторное уравнение (1) и удовлетворяет начальным условиям (5).

В классе $K'_+(E_1)$ начальная задача (1), (5) принимает вид уравнения

$$\big(B\delta'(t) - A_1\delta(t) + A_0\delta(t-h)\big) * \tilde{u}(t) = \tilde{h}(t),$$

в котором правая часть определена следующим образом:

$$\tilde{h}(t) = B\delta'(t) * \varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + Bu_0\delta(t) - A_1\varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + f(t)\theta(t).$$

Единственным обобщенным решением начальной задачи (1), (5) также является

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{h}(t).$$

С л е д с т в и е 2. Пусть B непрерывно обратим и $f(t) \in C\left(\left[0; +\infty\right), E_2\right)$, тогда начальная задача (1), (5) имеет единственное обобщенное решение вида

$$\tilde{u}(t) = \varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + B^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\Bigg[e^{A_1B^{-1}(t-kh)}U_k(t-kh)Bu_0\theta(t-kh) +$$

$$+ \int\limits_{(k+1)h}^{t} e^{A_1B^{-1}(t-s)}U_k(t-s)A_0\varphi(s-(k+1)h)ds\big(\theta(t-kh) - \theta(t-(k+1)h)\big) +$$

$$+ \int\limits_{-h}^{0} e^{A_1B^{-1}(t-(k+1)h-s)}U_k(t-(k+1)h-s)A_0\varphi(s)ds\,\theta(t-kh) +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t-kh} e^{A_1B^{-1}(t-kh-s)}U_k(t-kh-s)f(s)ds\,\theta(t-kh)\Bigg].$$

Данное распределение также является регулярным и порождено обычной функцией $u = u(t)$, которая задается кусочно на полуинтервалах $\big[(k-1)h; kh\big)$. При $f(t) \in C^{n-1}\left(\left[0; +\infty\right), E_2\right)$ эта функция имеет порядок n сильной гладкости на интервале $\big(0; +\infty\big)$, за исключением точек $t = kh$, кратных запаздыванию, в которых порядок сильной гладкости равен $k-1$, где $k = 1, \ldots, n$. Если к тому же линейный оператор A_0 необратим, и вектор $\big(u_0 - \varphi(0)\big) \in E_1$ лежит в ядре (нуль-пространстве) $N(A_0)$ этого оператора, то на интервале $\big(0; +\infty\big)$ функция $u = u(t)$ обладает свойствами классического решения начальной задачи (1), (2), удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (5). В частности, при $n = 1$ решение имеет разрыв в точке $t = 0$ и сильно непрерывно дифференцируемо на интервале $\big(0; +\infty\big)$.

Т е о р е м а 2. Пусть B непрерывно обратим и $f(t) \in C\left(\left[0; +\infty\right), E_2\right)$. Тогда для того, чтобы начальная задача (1), (5) имела единственное классическое решение, необходимо и достаточно, чтобы $\big(u_0 - \varphi(0)\big) \in N(A_0)$.

Таким образом, наличие необратимого операторного коэффициента при слагаемом с запаздыванием в абстрактном дифференциальном уравнении (1) улучшает свойства решения начальной задачи, что принципиально отличается от случая необратимого оператора при старшей производной, когда подобные задачи становятся неразрешимыми при произвольных входных данных [8, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Lizama C., Poblete F. A Characterization of Well-Posedness for Abstract Cauchy Problems with Finite Delay // J. Math. Anal. Appl. — 2018. — Vol. 457. — № 1. — P. 410–435.
2. Ashyralyev A., Agirseven D., Ceylan B. Bounded Solutions of Delay Nonlinear Evolutionary Equations // J. Comput. Appl. Math. — 2017. — Vol. 318. — P. 69–78.
3. Dhage B. C., Heikkila S. On Discontinuous Second Order Boundary Value Problems with Deviating Arguments in Ordered Banach Spaces // Indian J. Pure Appl. Math. — 1999. — Vol. 30. — № 8. — P. 787–800.
4. Lauran M. Existence Results for Some Differential Equations with Deviating Argument // Filomat. — 2011. — Vol. 25. — № 2. — P. 21–31.
5. Vrabie J. I. A Local Existence Theorem for a Class of Delay Differential Equations // Topol. Meth. Nonlin. Anal. — 2016. — Vol. 48. — № 2. — P. 597–612.
6. Campbell S. L., Lihn V. H. Stability Criteria for Differential-Algebraic Equations with Multiple Delays and Their Numerical Solutions // Appl. Math. Comput. — 2009. — Vol. 208. — № 2. — P. 397–415.
7. Demidenko G. V., Matveeva I. I. Estimates for Solutions to Linear Systems of Neutral Type with Several Delays // J. Anal. Appl. — 2014. — Vol. 12. — № 1&2. — P. 37–52.
8. Федоров В. Е., Омельченко Е. А. Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием // Сибирский математический журнал. – 2012. — Т. 53. — № 2. — С. 418–429.
9. Lihn V. H., Truong N. D., Bulatov M. V. Convergence Analysis of Linear Multistep Methods for a Class of Delay Differential-Algebraic Equations // Bull. South Ural State Univ. Ser.: Math. Model., Prog. Comp. Soft. — 2018. — Vol. 11. — № 4. — P. 78–93.
10. Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука. — 2003. — 320 с.
11. Назаров В. И. Дифференциально-операторное уравнение первого порядка с запаздыванием в пространствах Румье // Дифференциальные уравнения. — 1984. — Т. 20. — № 9. — С. 1540–1548.
12. Алиев Р. Г. О разрешимости уравнения с отклоняющимся аргументом в гильбертовом пространстве // Доклады АН СССР. — 1980. — Т. 251. — № 1. — С. 11–14.

13. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A. and Falaleev M. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers. — 2002. — 548 p.

14. Hall B. C. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction. — New York: Springer. — 2015. — 453 p.

15. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир. — 1987. — 479 с.

16. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука. — 1971. — 296 с.

УДК 517.444

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ - УОЛША ФУНКЦИЙ ИЗ ДВОИЧНЫХ КЛАССОВ ДИНИ - ЛИПШИЦА

С. С. Платонов, д.ф.-м.н., проф.
Петрозаводский государственный университет
e-mail: *platonov@psu.karelia.ru*

Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу Лебега $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \le 2$, на полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и пусть $\widehat{f}(x)$ — преобразование Фурье - Уолша функции f. В работе дается ответ на следующую задачу: если функция f принадлежит двоичному классу Дини - Липшица $DLip_{\oplus}(\alpha, \beta, p; \mathbb{R}_+)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, то для каких значений r можно гарантировать, что $\widehat{f} \in L^r(\mathbb{R}_+)$? Результат работы является аналогом классической теоремы Е. Титчмарша о преобразовании Фурье функций из классов Липшица на $\mathbb{R}$.

Ключевые слова: двоичный гармонический анализ, функции Уолша, преобразования Фурье - Уолша, условия Дини - Липшица

В настоящей работе для функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ получен аналог одной классической теоремы Е. Титчмарша о преобразовании Фурье функций из классов Липшица на $\mathbb{R}$. Приведем точную формулировку этой теоремы.

Пусть $f(x)$ — функция из пространства $L^p(\mathbb{R})$, $p \ge 1$, (все рассматриваемые функции комплекснозначные), $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ — норма в пространстве $L^p(\mathbb{R})$, α — произвольное число из полуинтервала $(0, 1]$. По определению функция $f(x)$ принадлежит классу Липшица $Lip(\alpha, p; \mathbb{R})$, если выполняется условие

$$\|f(x-t) - f(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(t^\alpha)$$

при $t \to 0$.

Т е о р е м а 1 ([1], теорема 84). Пусть $f(x) \in Lip(\alpha, p; \mathbb{R})$, $1 < p \le 2$, $0 < \alpha \le 1$, и пусть $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции f. Тогда $\widehat{f}$ принадлежит классу Лебега $L^r(\mathbb{R})$ при

$$\frac{p}{p + \alpha p - 1} < r \le \frac{p}{p-1}, \tag{1}$$

причем границы в неравенстве (1) точные.

Имеется много различных аналогов теоремы 1: для рядов Фурье на группах Виленкина, для рядов Фурье на компактных однородных многообразиях, для преобразований Фурье на конечно-мерных метризуемых локально компактных абелевых группах (см., например, [2, 3, 4]). В настоящей работе приводится двоичный аналог теоремы 1 для преобразования Фурье – Уолша на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Приведем необходимые сведения из двоичного гармонического анализа (см., например, [5, 6, 7, 8]).

Для любых $x \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ положим

$$x_n := [2^n x] (\mathrm{mod}\ 2), \qquad x_{-n} := [2^{1-n} x] (\mathrm{mod}\ 2), \tag{2}$$

где $[a]$ — целая часть числа a, а числа x_n и x_{-n} по определению равны 0 или 1. Тогда справедливо равенство

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} x_{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} x_n. \tag{3}$$

Отметим, что $x_{-n} = 0$ для $n \geq n_1(x)$.

Если числа $x, y \in \mathbb{R}_+$ представлены в виде (3), то число $x \oplus y \in \mathbb{R}_+$ определяется по формуле

$$x \oplus y := \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} |x_{-n} - y_{-n}| + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} |x_n - y_n|. \tag{4}$$

Операция $\oplus$ называется операцией двоичного сложения на $\mathbb{R}_+$. Отметим, что $x \oplus 0 = x$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus y = y \oplus x$ для любых $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Для любого $p \in [1, +\infty)$ пусть $L^p(\mathbb{R}_+)$ — лебегово банахово пространство, состоящее из всех измеримых комплекснозначных функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{+\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Для $x, y \in \mathbb{R}_+$ положим

$$t(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_{-n} + x_{-n} y_n). \tag{5}$$

Ряд, стоящий справа в этом равенстве, на самом деле является конечной суммой.

Обобщенная функция Уолша $\psi(x, y)$ определяется на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ равенством

$$\psi(x, y) := (-1)^{t(x,y)}. \tag{6}$$

Для функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ преобразование Фурье – Уолша $F(f) = \widehat{f}$ определяется равенством

$$F(f)(x) = \widehat{f}(x) := \int_0^{+\infty} \psi(x, y) \, f(y) \, dy, \qquad x \in \mathbb{R}_+. \tag{7}$$

Для $1 < p < \infty$ пусть $p' = \frac{p}{p-1}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \le 2$, то ее преобразование Фурье – Уолша $\widehat{f}$ определяется как предел в $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ последовательности функций

$$\widehat{f}_n(x) := \int_0^{2^n} \psi(x,y)\, f(y)\, dy, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

при $n \to \infty$.

Преобразование Фурье – Уолша $F : f \mapsto \widehat{f}$ является линейным непрерывным оператором из банахова пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$ в банахово пространство $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ и для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ справедливо неравенство Хаусдорфа – Юнга

$$\|F(f)\|_{p'} \le \|f\|_p. \tag{8}$$

Для любой функции $f(x) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и для любого $h \in \mathbb{R}_+$ пусть

$$(\tau_h f)(x) := f(x \oplus h). \tag{9}$$

Оператор τ_h называется двоичным оператором сдвига. Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, то $\tau_h f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $\|\tau_h f\|_p = \|f\|_p$.

Для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $n \in \mathbb{N}$ пусть

$$\omega_p(f; n) := \sup\{\|f - \tau_h f\|_p : 0 \le h < 2^{-n}\}. \tag{10}$$

Числовая последовательность $\{\omega_p(f;n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется двоичным модулем непрерывности функции f в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $1 \le p < \infty$, $\alpha > 0$, β — произвольное вещественное число, $f(x)$ — комплекснозначная функция на $\mathbb{R}_+$.

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x)$ принадлежит двоичному классу Дини – Липшица $DLip_\oplus(\alpha, \beta, p; \mathbb{R}_+)$, если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и для некоторой постоянной $c = c(f) > 0$ справедливо неравенство

$$\omega_p(f; n) \le c\, p^{-\alpha n} n^{-\beta}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

В частном случае $\beta = 0$ класс $DLip_\oplus(\alpha, 0, p; \mathbb{R}_+)$ называется двоичным классом Липшица и обозначается $Lip_\oplus(\alpha, p; \mathbb{R}_+)$.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 для преобразования Фурье – Уолша функций из двоичного класса Дини – Липшица.

Т е о р е м а 2. Пусть $f(x) \in DLip_\oplus(\alpha, \beta, p; \mathbb{R}_+)$, $1 < p \le 2$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, и пусть $\widehat{f}$ – ее преобразование Фурье – Уолша. Тогда $\widehat{f}$ принадлежит классу Лебега $L^r(\mathbb{R}_+)$, если r удовлетворяет условиям:

$$\frac{p}{p+\alpha p-1} < r \le \frac{p}{p-1} \quad \text{при} \quad \beta \le \frac{p+\alpha p-1}{p}, \tag{12}$$

$$\frac{p}{p+\alpha p-1} \le r \le \frac{p}{p-1} \quad \text{при} \quad \beta > \frac{p+\alpha p-1}{p}. \tag{13}$$

При этом границы $\frac{p}{p+\alpha p-1}$ и $\frac{p}{p-1}$ в неравенствах (12) и (13) точные, т. е. область значений r не может быть расширена.

В частном случае $\beta = 0$ получаем следующее следствие.

С л е д с т в и е 3. Если $f(x) \in Lip_{\oplus}(\alpha, p; \mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$, $\alpha > 0$, то ее преобразование Фурье – Уолша $\widehat{f}$ принадлежит классу Лебега $L^r(\mathbb{R}_+)$ при

$$\frac{p}{p+\alpha p-1} < r \leq \frac{p}{p-1}, \tag{14}$$

причем границы в неравенстве (14) точные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. — М., ОГИЗ, Гостехиздат. — 1948.
2. Quek T. S., Leonard Y. H., Absolute convergence of Vilenkin–Fourier series // J. Math. Anal. Appl. — 1980. — Vol. 74. — C. 1–14.
3. Daher R., Delgado J., Ruzhansky M., Titchmarsh theorems for Fourier transforms of Hölder-Lipschitz functions on compact homogeneous manifolds // Monatsh. Math. — 2019. — Vol. 189. — No. 1. — C. 23–49.
4. Bloom W. R., Absolute convergence of Fourier series on finite-dimensional groups // Colloq. Math. — 1982. — Vol. 46. — C. 97-103.
5. Shipp F., Wade W. A., P. Simon P. Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. — Budapest, Académiai Kidaó. — 1990.
6. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. — М. Наука. — 1987.
7. Голубов Б. И., Двоичный аналог тауберовой теоремы Винера и смежные вопросы // Изв. РАН. Сер. матем. — 2003. — Том 67. — Вып. 1. — С. 33–58.
8. Платонов С. С., Об аналоге одной теоремы Титчмарша для преобразования Фурье – Уолша // Матем. заметки. — 2018. — Том 103. — Вып. 1. — С. 101–110.

УДК 519.652

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ КВАДРАТИЧНЫМИ ЭКСПОНЕНТАМИ

С.М. Ситник, д.ф.-м.н., проф.
ФГАОУ ВО Белгородский государственный национальный исследовательский университет («НИУ БелГУ»)
e-mail: *Sitnik@bsu.edu.ru*
А.С. Тимашов
ФГАОУ ВО Белгородский государственный национальный исследовательский университет («НИУ БелГУ»)
e-mail: *aleksandrtim@rambler.ru*

В статье рассматриваются аппроксимации функций при помощи целочисленных сдвигов функций Гаусса – квадратичных экспонент. Предложен метод нахождения узловой функции для данной задачи интерполяции, основанный на решениях усечённых систем линейных уравнений.

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения данного типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов. Исследованию таких конечных приближений и посвящена данная работа. Историю вопроса, основные результаты и многочисленные приложения см. в [1-3].

Более точно, будет исследована следующая основная задача: рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$ и некоторый параметр $\sigma > 0$, который в приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Будем искать интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$, так же определённую на всей оси $x \in \mathbb{R}$, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках

$$f(m) = \tilde{f}(m), \ m \in \mathbb{Z}. \qquad (2)$$

Известны два подхода к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета-функций Якоби. Как показано в [1], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [2-3], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой существенного усложнения алгоритма, при этом вычисления возможны в достаточно узких диапазонах параметров и с небольшим числом разрядов в резуль-

татах. Поэтому в настоящей работе предлагается наиболее простой прямой метод решения поставленной задачи, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений, см. также [4-5].

Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе получены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ.

В работе получено теоретическое обоснование корректной разрешимости основной системы линейных уравнений для конечномерного приближения бесконечной системы, а также проведён достаточно существенный объём компьютерных вычислений.

Приведём список основных полученных результатов (см. также [4-5]).

1. Доказано, что при всех допустимых значениях параметров q, σ исследуемые конечномерные системы линейных уравнений имеют единственное решение.

2. Проведено компьютерное исследование решений полученных конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета MATHEMATICA при широком наборе управляющих параметров q, σ.

3. Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключательных режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные меандры.

4. К данной задаче могут также быть применены результаты, связанные с использованием теории операторов преобразования [9-10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлёв М.В., Киселёв Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. Т. 67. Уравнения в частных производных.- 2010. - С. 107-116.
2. Минин Л.А., Ситник С.М., Журавлев М.В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета.- 2009.- № 13 (68), 17/2. -С. 89-99.
3. Zhuravlev M.V., Kiselev E. A., Minin L. A., S. M. Sitnik. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer.- 2011, Vol. 173, № 2. - pp. 231-241.
4. Ситник С.М., Тимашов А.С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика.- 2013.- №19 (162).- Вып. 32.- С. 184-186.

5. Ситник С.М., Тимашов А.С. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий.- 2013.- № 2 (56).- С. 90-94.
6. Ситник С.М., Тимашов А.С., Ушаков С.Н. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2015, № 17 (214), вып. 40, С. 130-142.
7. Минин Л.А., Ситник С.М., Ушаков С.Н. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Гаусса и Лоренца//Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика.2014, №7 (183), Выпуск 35, С. 214-217.
8. Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И. Я., Ситник С. М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов// Математические заметки. 2014, Том 96, выпуск 2, С. 239-250.
9. Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений //Современная математика. Фундаментальные направления.2018. Т. 64, № 2. С. 211-426.
10. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя // М.: Физматлит, 2019.

К ВОПРОСУ О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ НУЛЕВОГО ИЛИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА РОСТА

О.Д. Соломатин, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

В статье рассматриваются логарифмическая и Б-шкала, применяемые для оценки роста целых функций в случае нулевого или бесконечного порядка роста, рассмотрены примеры.

Ключевые слова: логарифмическая шкала роста, Б-шкала роста, целая трансцендентная функция.

При решении задач анализа часто появляются целые функции нулевого или бесконечного порядка роста. Для вычисления характеристик роста таких функций в первом случае используется логарифмическая шкала роста, а во втором – шкала «большого» роста (Б-шкала). Логарифмический порядок γ и тип ν описывается точными формулами с помощью коэффициентов a_n степенного разложения функции $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ([1], с. 5):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\ln\ln\frac{1}{|a_n|}}=\frac{\gamma-1}{\gamma};\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\ln\frac{1}{|a_n|}}=\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)(\nu\gamma)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Б-порядок α и Б-тип ω однозначно определяются коэффициентами a_n функции $f(z)$ ([1], с. 14):

$$\alpha=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln\ln n}{-\ln|a_n|};\quad \omega=\varlimsup_{n\to\infty}(\ln)\sqrt[n]{|a_n|^{\alpha}}\,.$$

Рассмотрим примеры нахождения характеристик роста целой функции по указанным формулам.

1. Для функции $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{n\sin 1^\circ}}$ находим

$$\rho=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{-\ln|a_n|}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{\ln n^{n\sin 1^\circ}}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{n\sin 1^\circ\ln n}=\frac{1}{\sin 1^\circ}.$$

$$\left(\sigma e\frac{1}{\sin 1^\circ}\right)^{\sin 1^\circ}=\varlimsup_{n\to\infty}\left(n^{\sin 1^\circ}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^{n\sin 1^\circ}}\right|}\right)=\varlimsup_{n\to\infty}\left(n^{\sin 1^\circ}\,\frac{1}{n^{\sin 1^\circ}}\right)=1;\ \sigma=\frac{\sin 1^\circ}{e}.$$

2. Для функции $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{n^{1+\sin 1^\circ}}}$ находим

$$\rho=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{-\ln|a_n|}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{-\ln\left|\frac{1}{n^{n^{1+\sin 1^\circ}}}\right|}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{n^{1+\sin 1^\circ}\ln n}=0.$$

Далее, по логарифмической шкале получим для порядка

$$\frac{\gamma-1}{\gamma}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\ln n^{n^{1+\sin 1^\circ}}}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\left(n^{1+\sin 1^\circ}\ln n\right)}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\left(1+\sin 1^\circ\right)\ln n+\ln\ln n}=$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sin 1^\circ+\dfrac{\ln\ln n}{\ln n}}=\frac{1}{1+\sin 1^\circ};\quad \gamma=\frac{1+\sin 1^\circ}{\sin 1^\circ}.$$

Тогда для типа

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{\sin 1^\circ}{1+\sin 1^\circ}}}{-\ln\left|\dfrac{1}{n^{n^{1+\sin 1^\circ}}}\right|}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{\sin 1^\circ}{1+\sin 1^\circ}}}{\ln n^{n^{1+\sin 1^\circ}}}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{\sin 1^\circ}{1+\sin 1^\circ}}}{n^{1+\sin 1^\circ}\ln n}=0,$$

то есть

$$\left(\frac{\sin 1^\circ}{1+\sin 1^\circ}\right)\left(\nu\frac{1+\sin 1^\circ}{\sin 1^\circ}\right)^{\frac{1}{\frac{1+\sin 1^\circ}{\sin 1^\circ}-1}}=0,\ \text{откуда}\ \nu=0.$$

3. Функция $f(z)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\frac{n}{(\ln n)^{1-\sin 1^\circ}}}}$ имеет бесконечный порядок

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\ln n^{\frac{n}{(\ln n)^{1-\sin 1^\circ}}}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\frac{n}{(\ln n)^{1-\sin 1^\circ}}\ln n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} (\ln n)^{1-\sin 1^\circ} = \infty,$$

значит, далее находим Б-порядок роста

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln\ln n}{-\ln \frac{1}{n^{\frac{n}{(\ln n)^{1-\sin 1^\circ}}}}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln\ln n}{\ln n^{\frac{n}{(\ln n)^{1-\sin 1^\circ}}}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln\ln n}{\frac{n}{(\ln n)^{1-\sin 1^\circ}}\ln n} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(\ln n)^{1-\sin 1^\circ}\ln\ln n}{\ln n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{1-1+\sin 1^\circ}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{(\ln n)^{\sin 1^\circ}} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\frac{1}{\ln n}\frac{1}{n}}{\sin 1^\circ (\ln n)^{\sin 1^\circ - 1}\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sin 1^\circ}\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\ln n(\ln n)^{\sin 1^\circ - 1}} = \frac{1}{\sin 1^\circ}\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\ln n(\ln n)^{\sin 1^\circ}} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Громов В.П., Соломатин О.Д. Логарифмический порядок и тип и характеристики роста целой функции бесконечного порядка. – Учебно-методическое пособие для студентов, аспирантов и преподавателей математических специальностей университетов по специализации «Теория функций и функциональный анализ». – Орел, Орловский государственный университет, Полиграфическая фирма «Картуш», 2007.

УДК 517.55

ТЕОРЕМЫ ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ α – СПИРАЛЕВИДНЫХ ФУНКЦИЙ ЯНОВСКОГО ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

М.Д. Султыгов, к.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Ингушский государственный университет»
e-mail: *magomet.sultygov@mail.ru*

В статье рассматривается одно из дополнений к фундаментальным результатам геометрической теории многомерного комплексного анализа по проблемам классов голоморфных функций. Рассматривается новый класс α −спиралеобразных функций Яновского, который включает в себя некоторые значимые подклассы в аналитической и геометрической теории функций. Определены точные двусторонние оценки модуля функции и других оценок в полных ограниченных кратно круговых областях. Указана точность полученных оценок на специальных подмножествах экстремальными функциями.

Ключевые слова: класс спиралеобразных функций, полные ограниченные кратнокруговые области, оператор дифференцирования, звездная область, радиус звездообразности, теоремы искажения, точные оценки, экстремальная функция.

1. Введение

В работе рассматриваются α −спиралевидные функции Яновского, голоморфные в полных ограниченных кратнокруговых областях $D \subset C^n$ или в их подобластях $\overline{D}_r = r\overline{D}$, где$\overline{D}$ −замыкание области D и $r \in (0,1)$.Для упрощения записи все рассуждения ниже проводятся для случая двух комплексных переменных, однако полученные результаты легко переносятся на случай многих комплексных переменных.

Назовем $f(z_1, z_2) \in H(D \subset C^2)$ функцией класса Q_D [1,с.10], если в $D \subset C^2$имеет разложение

$$f(z_1, z_2) = 1 + \sum_{|k|=1}^{\infty} a_k z^k, |k| = \sum_{i=1}^{2} k_i, \quad (1)$$

и $F(z_k) = z_k f(\nu_1 z_k, \dots, z_k, \dots, \nu_n z_k)$, как функция переменногоz_k, однолистна в сечении области D скомплексной прямой

$P_{\nu[k]}$=$\left\{z_k = \frac{z_m}{\nu_m} : \nu_m \in C\backslash\{0\}, m = 1, \dots, k-1, k+1, \dots n\right\}$;

при$\nu_m = 0$ функция $F(z_k) = z_k f(0, \dots, z_k, \dots, 0)$однолистна в сечении

$$\Lambda_m = D \cap \{z_m = 0 : m = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}.$$

Голоморфную функцию$f(z) \in H(D \subset C^n)$,удовлетворяющую условию

$$Re \frac{e^{i\lambda} L_1 f(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2)} > 0 \quad (2)$$

будем называть λ – спиралеобразной функцией и обозначать его в виде $S_D(1, \lambda, 0), \alpha = 0, |\lambda| < \frac{\pi}{2}$. Здесь оператор дифференцирования $L_1 f(z_1, z_2)$имеет вид $L_1[f(z_1, z_2)] = f(z_1, z_2) + z_1 \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}$[2,с.10].

Обратным $L_\gamma[f(z_1, z_2)]$ является оператор$L_\gamma^{(-1)} f(z) = \int_0^1 \varepsilon^{\gamma-1} f(\varepsilon z_1, \varepsilon z_2) d\varepsilon$.

В случае одного комплексного переменного этот класс ввел Л. Спачек [3], и показал, что функции этого класса аналитичны и однолистны в единич-

ном круге. В 1967 г. Р.Либера [4] расширил это определение на λ – спиралеобразные функции порядка αодного комплексного переменного. Критерием принадлежности голоморфных функций $f(z_1, z_2) \in H(D \subset C^2)$ к данному классу, который мы обозначим как $S_D(1, \lambda, \alpha)$, является

$$Re\frac{e^{i\lambda}L_1 f(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)} > \alpha cos\lambda \tag{3}$$

Мы будем говорить, что функция $f(z_1, z_2)$подчинена функции $g(z_1, z_2)$ и обозначать в дальнейшем, как $f(z_1, z_2) \prec g(z_1, z_2)$, если $f(\overline{D}_r) \subset g(\overline{D}_r)$для всех $r \in (0,1)$.

2. Мои результаты

Для произвольных фиксированных чисел A, B, $-1 \leq B < A \leq 1$, обозначим через $\mathcal{P}_D(A, B)$ семейство функций

$$p(z) = 1 + \sum_{|k|=1}^{\infty} p_k z^k \tag{4}$$

голоморфных в D и таких, что $\mathcal{P}_D(A, B)$ тогда и только тогда, когда

$$p(z_1, z_2) = \frac{1 + A\Theta(z_1, z_2)}{1 + B\Theta(z_1, z_2)}, \Theta(z_1, z_2) \in S_D(0)[1, \text{с. } 7]. \tag{5}$$

В то же время этот класс может быть представлен в виде

$$Re\, p(z_1, z_2) > \frac{1 - A}{1 - B} > 0$$

Определение 1. Пусть $S_D(A, B, \alpha)$ обозначает семейство голоморфных функций $f(z_1, z_2) \in H(D \subset C^2)$ такое, что $f(z_1, z_2) \in S_D(A, B, \alpha)$ тогда и только тогда, когда существует действительное число α, для которого

$$\frac{e^{i\alpha}L_1 f(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2)} = p(z_1, z_2)cos\alpha + isin\alpha, |\alpha| < \frac{\pi}{2}, p(z_1, z_2) \in \mathcal{P}_D(A, B) \tag{6}$$

верно для любых точек $(z_1, z_2) \in D \subset C^2$. Тогда классы $S_D(A, B, \alpha)$ называются α - спиральными функциями Яновского.

Теорема 1. Пусть $f(z_1, z_2) \in S_D(A, B, \alpha)$. Тогда при $-1 \leq B < A \leq 1, |\alpha| < \frac{\pi}{2}$ функция $f(z_1, z_2) \in S_{D_r}(0,0,0) \equiv M_{D_r}$,будет звездной в области $D_r = rD$, где $r = r(A, B, \alpha) -$ корень следующего выражения

$$r = \begin{cases} \dfrac{2}{(A-B)cos\alpha + \sqrt{(A-B)^2cos^2\alpha + 4(ABcos^2\alpha + B^2sin^2\alpha)}}, & B \neq 0, \\ \dfrac{1}{Acos\alpha}, & B = 0. \end{cases}$$

Этот радиус точный.

Доказательство. Используя (6) получаем

$$p(z_1, z_2) = sec\alpha\left(\frac{e^{i\alpha}L_1 f(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2)} - isin\alpha\right) \tag{7}$$

С другой стороны, поскольку$p(z) \in \mathcal{P}_D(A, B)$, то мы имеем,

$$\left|p(z_1,z_2)-\frac{1-Br^2}{1-B^2r^2}\right|\le\frac{(A-B)r}{1-B^2r^2} \tag{8}$$

Неравенство (8) было получено ранее нами, как многомерный аналог для результата В. Яновского [7]. Используя (7), (8) и после простых вычислений мы получаем:

$$\begin{cases}\dfrac{1-(A-B)rcos\alpha-(ABcos^2\alpha+B^2sin^2\alpha)}{1-B^2r^2}\le Re\dfrac{L_1f(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}\le\\ \le\dfrac{1+(A-B)rcos\alpha-(ABcos^2\alpha+B^2sin^2\alpha)}{1-B^2r^2};\ B\neq0,\\ 1-Arcos\alpha\le Re\dfrac{L_1f(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}\le1-Arcos\alpha,\qquad B=0.\end{cases} \tag{9}$$

Неравенства (9) доказывают утверждения данной теоремы.

Следствие 1. Если продолжим, что $A=1,B=-1$ получаем,

$$r=\frac{1}{cos\alpha+|sin\alpha|} \tag{10}$$

радиус звездообразности для класса $\alpha-$ спиралевидных функций.Отметим также, что если мы будем придавать различные значениям A и B, то получим радиусы звездообразности для различных подклассов класса $\alpha-$спиралевидных функций.

Теорема 2. Если $f(z_1,z_2)\in S_D(A,B,\alpha)$, то

$$\begin{cases}(1-Br)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha+\ )}{2B}}(1+Br)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha-1)}{2B}}\le|f(z_1,z_2)|\le\\ \le(1-Br)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha-\ )}{2B}}(1+Br)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha+1)}{2B}};B\neq0,\\ e^{-Arco}\le|f(z_1,z_2)|\le e^{Arcos}\ ;\qquad B=0.\end{cases} \tag{11}$$

Доказательство. Используя оценки (9) и известное равенство

$$Re\frac{L_1f(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}=Re\left(1+\frac{L_0f(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}\right)=1+L_0lnf(z_1,z_2)$$

после простых вычислений получаем требуемый результат. Оценки (11) являются точными.

Теорема 3. Если $f(z_1,z_2)\in S_D(A,B,\alpha)$, то

$$[(1-Ar)cos\alpha-(1-Br)sin\alpha]F(A,B,cos\alpha,-r)\le|L_0f(z_1,z_2)|\le$$
$$\le[(1+Ar)cos\alpha+(1+Br)sin\alpha]F(A,B,cos\alpha,r), \tag{12}$$

где $F(A,B,cos\alpha,r)=(1-Br)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha-\ )}{2B}}(1+Br)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha+1)}{2B}}$.

Это неравенство точное.

Доказательство. Доказательство теоремы основано на следующих утверждениях:

1°. Если $p(z)\in\mathcal{P}_D(A,B)\Rightarrow\frac{1-Ar}{1-Br}\le|p(z_1,z_2)|\le\frac{1+Ar}{1+Br}$;

$2^{\circ}.p(z_1,z_2)=sec\alpha\left(\dfrac{e^{i\alpha}L_1f(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}-isin\alpha\right),f(z_1,z_2)\in S_D(A,B,\alpha),$

$p(z_1,z_2)\in\mathcal{P}_D(A,B)$;

$$3^{\circ}.\frac{(1-Ar)cos\alpha-(1-Br)sin\alpha}{1-Br}\leq\left|\frac{L_1f(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}\right|\leq$$
$$\leq\frac{(1+Ar)cos\alpha+(1+Br)sin\alpha}{1+Br} \tag{13}$$

Учитывая (13) и (11) получаем утверждение теоремы.

Несколько слов о точности полученных оценок.

В пространстве C^2 вводятся следующие области:

гиперконус $K_1=\{(z_1,z_2)\in C^2:|z_1|+|z_2|<1\}$,

поликруг $U_R^n=\{z\in C^n:\|z\|_1<R\}$,

$$K_{1,\sigma}^2=\left\{z\in C^2:(a_1|z_1|)^{\frac{1}{\sigma}}+(a_2|z_2|)^{\frac{1}{\sigma}}<1,a_1,a_2>0,0<\sigma<1\right\}; \tag{14}$$

логарифмически выпуклая ограниченная полная двояко круговая область

$$D_{p,q}\overset{\text{def}}{=}\left\{(z_1,z_2)\in C^2:|z_1|^p+|z_2|^q<1;p=\frac{m}{n},m,n,q\in N\right\}$$

а также множества:

$$\left\{\frac{|z_1|}{a_1}=\frac{|z_2|}{a_2}\right\}\cap K_{1,\sigma}^2, \tag{15}$$
$$\{a_1|z_1|=a_2|z_2|\}\cap K_{1,\sigma}^2 \tag{16}$$
$$\left\{\frac{|z_1|}{R_1}=\frac{|z_2|}{R_2}\right\}\cap U_{R_1,R_2}^2(k),k=1,2,3; \tag{17}$$

где

$$U_{R_1,R_2}^2(1)=\left\{\left\{\frac{|z_1|}{R_1}=\frac{|z_2|}{R_2}\right\}\cap U_{R_1,R_2}^2\right\}, \tag{18}$$
$$U_{R_1,R_2}^2(2)=\left\{\left\{\frac{|z_1|}{R_1}>\frac{|z_2|}{R_2}\right\}\cap U_{R_1,R_2}^2\right\}, \tag{19}$$
$$U_{R_1,R_2}^2(3)=\left\{\left\{\frac{|z_1|}{R_1}<\frac{|z_2|}{R_2}\right\}\cap U_{R_1,R_2}^2\right\}, \tag{20}$$

и величины:

$$\omega(|z_1|,|z_2|)=\left\{(a_1|z_1|)^{\frac{1}{\sigma}}+(a_2|z_2|)^{\frac{1}{\sigma}}\right\}^{\sigma} \tag{21}$$
$$\gamma_k(|z_1|,|z_2|)=\max_{z\in U_{R_1,R_2}^2(k)}\left\{\frac{|z_1|}{R_1},\frac{|z_2|}{R_2}\right\}\text{ , где }k=1,2,3; \tag{22}$$

а $U_{R_1,R_2}^2(k)$определены в (18) – (20).

Теорема 5. Если $f(z_1,z_2)\in S_{K_{1,\sigma}^2}(A,B,\alpha)$то в $K_{1,\sigma}^2$ справедливы оценки:

$$\begin{cases}(1-B\omega)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha+\ )}{2B}}(1+B\omega)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha-1)}{2B}}\leq|f(z_1,z_2)|\leq\\ \leq(1-B\omega)^{\frac{(A-B)cos\ \ (cos\alpha-\ )}{2B}}(1+B\omega)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha+1)}{2B}};B\neq0,\\ e^{-A\omega cos\alpha}\leq|f(z_1,z_2)|\leq e^{A\omega cos\ \ };\qquad B=0.\end{cases} \tag{23}$$

$$[(1-A\omega)cos\alpha-(1-B\omega)sin\alpha]F(A,B,cos\alpha,-\omega)\leq|L_0f(z_1,z_2)|\leq$$
$$\leq[(1+A\omega)cos\alpha+(1+B\omega)sin\alpha]F(A,B,cos\alpha,\omega), \tag{24}$$

где $F(A,B,cos\alpha,\omega)=(1-B\omega)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha-1)}{2B}}(1+B\omega)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha+1)}{2B}}$ и

$$\frac{(1-A\omega)cos\alpha-(1-B\omega)sin\alpha}{1-B\omega}\le\left|\frac{L_1f(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}\right|\le$$
$$\le\frac{(1+A\omega)cos\alpha+(1+B\omega)sin\alpha}{1+B\omega},\qquad(25)$$

где $\omega=\omega(|z_1|,|z_2|)=\left\{(a_1|z_1|)^{\frac{1}{\sigma}}+(a_2|z_2|)^{\frac{1}{\sigma}}\right\}^{\sigma}$. Точность полученных оценок выполняются экстремальной функцией вида

$$\varphi(A,B,\alpha,\mu)=\begin{cases}(1+B\mu)^{\frac{A-B}{B}e^{-i\alpha}cos\alpha};B\neq0,\\ e^{Ae^{-i\alpha}\mu cos\alpha};\qquad B=0.\end{cases}\in S_{K^2_{1,\sigma}}(A,B,\alpha)\qquad(26)$$

с параметром α и $\mu=2^{\sigma-1}\left(a_1z_1e^{i\alpha_1}+a_2z_2e^{i\alpha_2}\right)$.

Теорема 6. Если функция, $f(z_1,z_2)\in S_{U^2_{R_1,R_2}}(A,B,\alpha)$, тогда в $U^2_{R_1,R_2}(k)$ справедливы оценки:

$$\begin{cases}(1-B\gamma_k)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha+1)}{2B}}(1+B\gamma_k)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha-\ )}{2B}}\le|f(z_1,z_2)|\le\\ \le(1-B\gamma_k)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha-1)}{2B}}(1+B\gamma_k)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha+1)}{2B}};B\neq0,\\ e^{-A\omega co}\le|f(z_1,z_2)|\le e^{A\omega cos\alpha};\qquad B=0.\end{cases}\qquad(27)$$

$$[(1-A\gamma_k)cos\alpha-(1-B\gamma_k)sin\alpha]F(A,B,cos\alpha,-\gamma_k)\le|L_0f(z_1,z_2)|\le$$
$$\le[(1+A\gamma_k)cos\alpha+(1+B\gamma_k)sin\alpha]F(A,B,cos\alpha,\gamma_k),\qquad(28)$$

где $F(A,B,cos\alpha,\gamma_k)=(1-B\gamma_k)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha-1)}{2B}}(1+B\gamma_k)^{\frac{(A-B)cos\alpha(cos\alpha+\ )}{2B}}$,

$$\frac{(1-A\gamma_k)cos\alpha-(1-B\gamma_k)sin\alpha}{1-B\gamma_k}\le\left|\frac{L_1f(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}\right|\le$$
$$\le\frac{(1+A\gamma_k)cos\alpha+(1+B\gamma_k)sin\alpha}{1+B\gamma_k}\qquad(29)$$

где $\gamma_k=\gamma_k(|z_1|,|z_2|)=\max_{z\in U^2_{R_1,R_2}(k)}\left\{\frac{|z_1|}{R_1},\frac{|z_2|}{R_2}\right\}$ и $k=1,2,3$.

Точность полученных оценок выполняются экстремальной функцией вида

$$\psi(A,B,\alpha,\mu)=\begin{cases}(1+B\rho)^{\frac{A-B}{B}e^{-i\alpha}cos\alpha};B\neq0,\\ e^{Ae^{-i\alpha}\rho cos\alpha};\qquad B=0.\end{cases}\in S_{U^2_{R_1,R_2}}(A,B,\alpha)\qquad(30)$$

с параметром α и $\rho=\frac{e^{i\alpha_1}z_1}{R_1}+\frac{e^{i\alpha_2}z_2}{R_2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баврин И.И. Классы голоморфных функций многих комплексных переменных и экстремальные вопросы для этих классов.– М. –1976. – 99 с.
2. Баврин И.И. Операторный метод в комплексном анализе. – М. –1991.– 200 с.
3. Špaček L. Pricpevek k teorii funci prostysh: Časopis pro pest. Mat. a fys., vol. 62. –1932. – pp. 12–19.
4. Libera R.J. Univalent α-spiral functions: Canada J. Math. –vol. 19. –1967. – pp. 449–456.
5. Султыгов М.Д. Некоторые результаты по подклассам Яновского

λ –спиралеобразных функций сложного порядка//Colloquium-journal.–№2 (13). −2018. − Część1. – С.49-53.
6. Султыгов М.Д. Об одном подклассе спиралеобразных функций //– Пенза. – 2018. – International innovation research. – XIII МНПК. – С. 13-16.
7. Janowski W. Some extremal problems for certain families of analytic functions // J. Ann. Polon.Math., 28 (1973).– pp.297−326.
8. Yasar Polatoˇglu. Growth and distortion theorem for the Janowski α-spirallike functions in the unit disc//Stud. Univ. Babes-Bolyai Math., 57(2012). – №2. – pp. 255–259.

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДИСКРЕТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

О.А. Тарасова
ФГБОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
e-mail: *tarasova_o@bsu.edu.ru*

Рассматриваются дискретные аналоги псевдодифференциальных операторов и связанные с ними дискретные уравнения и краевые задачи. Исследована одна краевая задача и дано сравнение дискретных и непрерывных решений для гладких данных в дискретном пространстве Соболева–Слободецкого.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, краевая задача.

Мы рассмотрим здесь дискретный аналог псевдодифференциальных операторов и уравнений [1,2]. Дискретные аналоги дифференциальных уравнений и краевых задач ранее рассматривались в математической литературе [3,4]. Здесь мы исследуем дискретные краевые задачи для дискретных аналогов псевдодифференциальных уравнений, основываясь на специальной периодической факторизации символа [5,8,9,10]. Некоторые простейшие варианты были рассмотрены в работах [6,7].

Пусть $\mathrm{u_d}$– функция дискретной переменной, где $\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m$, $h > 0$, для которой определенно дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x}\in\mathbb{Z}^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}), \xi \in \hbar\mathbb{T}^m,$$

где $\mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m$, $\hbar = h^{-1}$,и частичные суммы берутся по кубам

$$Q_N = \{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m : \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) \max_{1\le k\le m} |\tilde{x}_k| \le N\}.$$

Вводятся некоторые функциональных пространств [8],представляющие собой дискретный аналог пространства Шварца $S(h\mathbb{Z}^m)$. Обозначим $\zeta^2 = h^{-2}\sum_{k=1}^{m}(e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)^2$.

Определение 1. Пространство $\mathrm{H^s}(\mathrm{h}\mathbb{Z}^m)$ это замыкание пространства $\mathrm{S}(\mathrm{h}\mathbb{Z}^m)$ в отношении нормы

$$\| u_{\mathrm{d}} \|_{\mathrm{s}} = (\int_{\hbar\mathbb{T}^m}(1 + |\zeta^2|^{\mathrm{s}} |\tilde{\mathrm{u}}_{\mathrm{d}}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi)^{1/2}. \quad (1)$$

Образ пространства $\mathrm{H}^{s}(\mathrm{h}\mathbb{Z}^{m})$ будим обозначать $\widetilde{\mathrm{H}}^{s}(\hbar\mathbb{T}^{m})$.

Для таких функций можно определить дискретные операторы A_d.

Если $\tilde{A}_d(\mathcal{E})$ - периодическая функция в $\mathbb{R}^m$с основным периодом $\hbar\mathbb{T}^m$,то ее мы рассматриваем как символ некоторого дискретного оператора. Введем дискретный псевдодифференциальный оператор следующим образом.

Дискретным псевдодифференциальным операторомA$_{\mathrm{d}}$в дискретной области D$_d$называется оператор[8]

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^m} \int_{\hbar\mathbb{T}^m} \tilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \tilde{x} \in D_d.$$

Мы рассматриваем класс символов $\tilde{A}_d(\xi)$ [8] при следующем условии

$$c_1(1+\left|\zeta^2\right|^{\alpha/2} \leq |A_d(\xi)| \leq\ c_2(1+\left|\zeta^2\right|^{\alpha/2} \qquad (2)$$

где c_1, c_2 - универсальные положительные константы.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$область. Рассмотрим уравнение

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \tilde{x} \in D_d, \qquad (3)$$

в дискретной области $D_d = D \cap h\mathbb{Z}^m$, для которого решение $u_d \in H^s(D_d)$, правая часть $v_d \in H^{s-\alpha}(D_d)$ [8, 9.

В этой статье мы рассмотрим случаи для полупространства $\mathbb{R}^m_+$.

Случай $\mathbb{R}^m_+$ сильно отличается от $\mathbb{R}^m$, и условия эллиптичности (2) недостаточно для однозначной разрешимости. Основную роль для разрешимости играет понятие периодической факторизации, определяемое для эллиптического символа.

Для описания разрешимости уравнения (3) введем следующие обозначения. Обозначим $\Pi_{\pm} = \{(\xi', \xi_m \pm i\mathcal{T}), \mathcal{T} > 0\}, \xi = (\xi', \xi_m) \in\ \mathbb{T}^m$.

Мы будем использовать специальную периодическую факторизацию эллиптического символа $A_d(\xi) \in E_\alpha$

$$A_d(\xi) = A_{d,}+(\xi)A_{d,}-(\xi),$$

где $A_{d,\pm}(\xi)$ допускают аналитические продолжения в полосы $\hbar\Pi_{\pm}$ и удовлетворяют некоторым оценкам [8, 9].

Специальный индекс æ периодической факторизации сильно влияет на разрешимость уравнения (3), в частности, для некоторых значений индекса æполученные определенные результаты [8, 9]. Если$|æ - \mathrm{s}| < 1/2$, то существует единственное решение

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}^{-1}_{d,+}(\xi) P^{per}_{\varepsilon'} \left(\tilde{A}^{-1}_{d,-}(\xi)\widetilde{\ell v}_d(\xi)\right), \qquad (4)$$

$$(P^{per}_{\varepsilon'}\tilde{u}_d)(\xi) \equiv \frac{1}{2}(\tilde{u}_d(\xi) + \frac{h}{2\pi i} v.p. \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi', \eta_m)$$

$$ctg\,\frac{h(\xi_m - \eta_m)}{2} d\eta_m),$$

уравнения (3). Если$æ - s\ = n + \delta,\ n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$,то существует множество решений вида

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}^{-1}_{d,+}(\xi) X_n(\xi) P^{per}_{\varepsilon'} \left(X_n^{-1}(\xi)\tilde{A}^{-1}_{d,-}(\xi)\widetilde{\ell v}_d(\xi)\right) + \tilde{A}^{-1}_{d,+}(\xi) \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_k\,(\xi')\hat{\zeta}^k_m,$$

где $X_n(\xi)$ произвольный полином порядка n переменных $\hat{\zeta} = \hbar\left(e^{-ih\xi_k} - 1\right), k = 1, \dots, m$, удовлетворяющих условию (2), $\tilde{c}_k(\xi')$, j $= 0, 1, \dots, n-1$, произвольные функции из $\widetilde{H}^{s_k}(\hbar T^{m-1}), s_k = s - æ + \mathrm{k} - 1/2$.

Далее мы рассматриваем континуальноепсевдодифференциальное уравнение

$$(Au)(x) = \upsilon(x), \quad x \in D. \tag{5}$$

Предположим, что символ $A(\xi)$ оператора A удовлетворяет условию

$$c_1(1 + |\xi|)^{\alpha} \le |A(\xi)| \le c_2(1 + |\xi|)^{\alpha}, \tag{6}$$

известно, что такой символ допускает факторизацию

$$A(\xi) = A_+(\xi', \xi_m)A_-(\xi', \xi_m)$$

относительно последней переменной ξ_mс индексом æ [1].

Поскольку для случая æ – s = n + δ, n∈N, $|\delta| < 1/2$, мы имеем множество решений, для получения единственного решения необходимы дополнительные условия.

Рассмотрим здесь случай $n = 1$. Используем здесь дискретное условие Дирихле.

$$u_d|_{\tilde{x}_m = 0} = g_b(\widetilde{x'}), \tag{7}$$

гдеg_dявляется заданной функцией дискретной переменной в дискретной гиперплоскости hZ^{m-1}.

Тогда (7) в образах Фурье примет вид

$$\int_{-h\pi}^{h\pi} \widetilde{u_d}(\xi', \xi_m)d\xi_m = \widetilde{g_d}(\xi'),$$

и, согласно предыдущей теореме, получаем следующее интегральное уравнение относительно неизвестного $\widetilde{c_0}(\xi')$

$$\int_{-h\pi}^{h\pi} \widetilde{c_0}(\xi')A_{d,+}^{-1}(\xi', \xi_m)d\xi_m = \widetilde{f_d}(\xi'),$$

где использованы следующие обозначения

$$\widetilde{f_d}(\xi') = \widetilde{g_d}(\xi') - \int_{-h\pi}^{h\pi} A_{d,+}^{-1}(\xi', \xi_m)X_1(\xi', \xi_m)$$

$$P_{\xi'}^{per}\left(X_1^{-1}A_{d,-}^{-1}\widetilde{lv_d}\right)(\xi)d\xi_m,$$

где $\mathrm{X}_1(\xi)$ является полиномом порядка одной переменной $\widehat{\zeta_{\mathrm{k}}}$=ħ$(\mathrm{e}^{-\mathrm{ih}\xi_{\mathrm{k}}} - 1), \mathrm{k} = 1, \dots, \mathrm{m}$ из класса E_1.

Обозначив

$$\int_{-\mathrm{h}\pi}^{\mathrm{h}\pi} \mathrm{A}_{\mathrm{d},+}^{-1}\left(\xi', \xi_{\mathrm{m}}\right) \equiv \mathrm{b}_{\mathrm{d}}(\xi')$$

и предположив, что $\mathrm{b_d}(\xi') \neq 0$, найдем $\mathrm{c\tilde{}_0}(\xi') = \mathrm{b_d^{-1}}(\xi')\mathrm{f\tilde{}_d}(\xi')$.

Тогда решение задачи (3),(7) можно переписать в виде

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{u}_d(\xi) = A\tilde{}_{d,+}^{-1}(\xi)X_1(\xi)P_{\xi'}^{per}$$

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{u_d}(\xi)\left(X_1^{-1}(\xi)\tilde{A_{d,-}^{-1}}(\xi)\tilde{l u_d}(\xi)\right) +$$
$$+b_d^{-1}(\xi')\tilde{f_d}(\xi')A_{d,+}^{-1}(\xi', \xi_m).$$

Теорема 1. Дискретная краевая задача (3),(7) однозначно разрешима в пространстве $H^s(h\, Z_+^M)$ для произвольной правой части$\tilde{v}_d \in H_0^{s-\propto}(hZ_+^m)$ и произвольной граничной функции $\mathrm{g}_d \in H^{s-\frac{1}{2}}(hZ^{m-1})$.

Если правая часть равна нулю, т.е. $v_d = 0$, тогда формула решения сильно упрощается и выглядит следующим образом

$$\widetilde{u_d}(\xi) = b_d^{-1}(\xi')\tilde{\mathrm{g}}_d(\xi')A_{d,+}^{-1}(\xi', \xi_m).$$

После применения обратного дискретного преобразования Фурье решение примет следующий вид

$$u_d(\tilde{x'}, \tilde{x_m}) = \sum_{\tilde{y'} \in hZ^{m-1}} G_d\,(\tilde{x'} - \tilde{y'}, \tilde{x_m})\mathrm{g}_d(\tilde{y'})h^{m-1} \qquad (8)$$

где функция $G_d(\tilde{x})$ дискретной переменной определяется как обратное дискретное преобразование Фурье функции $b_d^{-1}(\xi')A_{d,+}^{-1}(\xi', \xi_m)$.

Формула (8) является дискретным аналогом формулы Пуассона для задачи Дирихле в полупространстве.

Непрерывным аналогом дискретной краевой задачи является

$$(Au)(x) = 0 \quad , \; x \in R_+^m \qquad (9)$$
$$u(x', 0) = \; g(x'), \;\; x' \in R^{m-1} \qquad (10)$$

Если индекс факторизации равен $æ$ и $æ - s = 1 + \delta$, $|\delta| \leq 1/2$, то единственное решение задачи (9) , (10) строится по аналогичной формуле

$$\tilde{u}(\xi) = b^{-1}\tilde{g}(\xi')A_+^{-1}(\xi', \xi_m)$$

где $b(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_+^{-1}\,(\xi', \xi_m)\, d\xi_m$, предполагая что $b(\xi') \neq 0, \;\; \forall \xi' \in R^{m-1}$. Это простейший вариант условия Шапиро-Лопатинского [1].

Согласно выше приведенным выкладкам имеется следующее дискретное решение

$$\tilde{u}_d(\xi) = b_d^{-1}(\xi')\tilde{g}_d(\xi')A_{d,+}^{-1}(\xi', \xi_m),$$

где приближения выбираются следующим образом.

Построим оператор сужения $\mathrm{Q_h}$ для функций u∈ $\mathrm{S(R_m)}$. Возьмем преобразование Фурье $\tilde{u}(\xi)$, потом hT^m и продолжим его на R^m. Далее мы применяем обратное дискретное преобразование Фурье F_d^{-1} и получим дискретную функцию, которая обозначается $(Q_h u)(\widetilde{x}), \tilde{x} \in \; hZ^m$.

Выберем $g_d = Q_h\, g$ и $A_{d,\pm}(\xi', \xi_m)$ как сужения $A_\pm(\xi', \xi_m)$ на hT^m. Периодический символ $A_d(\xi)$=$A_{d,+}(\xi', \xi_m)A_{d,-}(\xi', \xi_m)$ удовлетворяет всем условиям периодической факторизации с одним и тем же индексом $æ$. Более того, $\tilde{g}_d(\xi')$ и $A_{d,+}(\xi', \xi_m)$ совпадают $\tilde{g}(\xi')$ и$A_+(\xi', \xi_m)$ соответственно на hT^m.

Теорема 2. Пусть $æ > 1$. Если $\tilde{g}(\xi)$ является ограниченной функцией, то сравнение между решением задачи (3), (7) и (9),(10) дается следующим образом

$$|\tilde{u}(\xi) - \tilde{u}_d(\xi)| \leq Ch^{æ-1} \;\; , \; \xi \in hT^m$$

В заключение автор выражает благодарность профессору В.Б. Васильеву за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.:1973.
2. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир,1985.
3. Самарский А. А. Теория разносных схем. М.: Наука, 1977.
4. Рябенький В.С. Метод разносных потенциалов для некоторых задач механикм сплошных сред. М.: Наука, 1987.
5. Васильев А. В., Васильев В. Б. Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках. Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 5. С. 642-649.
6. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. On finite discrete operators and equations. Proc.Appl. Math. Mech. 2016. V. 16, No 1. P. 771-772.
7. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Two-scale estimates for special finite discrete operators. Math. Model. Anal. 2017. V. 22, No. 3. P. 300-310.
8. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space. Math. Model. Anal. 2018. V. 23, No 3. P. 492-506.
9. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. On some discrete boundary value problems in canonical domains. In: Differential and Difference Equations and Applications. Springer Proc. Math. &Stat., V. 230. Cham: Springer, 2018. pp. 569-579.
10. Vasilyev V.B. Discreteness, periodicity, holomorphy, and factorization. In: Integral Methods in Science and Engineering. V.1. Theoretical Technique. C.Constanda, Dalla Riva, M., Lamberti, P.D., Musolino, P. (Eds.) Birkhauser,2017. P. 315-324.

УДК 517.968.22

К ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

Е.В. Чаплыгина, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *lena260581@yandex.ru*

Рассмотрим интегро-функциональное уравнение

$$\sum_{k=0}^{2} a_k \varphi(\alpha_1^k(x)) + \sum_{k=1}^{2} b_k \varphi(\alpha_2^k(x)) + \sum_{k=0}^{2} c_k S(\alpha_1^k(x), \varphi) + \\ + \sum_{k=1}^{2} d_k S(\alpha_2^k(x), \varphi) = f(x), x_0 \le x \le x_3, \quad (1)$$

где $a_k, b_k, c_k, d_k \equiv const; f(x)$ – заданная достаточно гладкая функция на множестве $x_0 \le x \le x_3$, $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ - сохраняющие ориентацию взаимно-обратные $\alpha_{3-j}(\alpha_j(x)) = x\ (j = 1,2)$ диффеоморфизмы класса C^2, удовлетворяющие условиям $\alpha_1(x) < x, \alpha'(x) > 1\ (\alpha_1'(x) < 1)$ и $\alpha_2(x) > x, \alpha_2'(x) < 1\ (\alpha_2'(x) > 1)$, т.е. представляющие собой растягивающе(сжимающе)-запаздывающее и сжимающе (растя-

гивающе)-опережающее отображения, причем $x_n = \alpha_1(x_{n+1})$, $x_{n+1} = \alpha_2(x_n)(n = \overline{-2,4})$;

$$\alpha_2(x_0) > 0; \alpha_1(x_1) = x_0 = 0;$$

$$\text{и } \alpha_j^l(x) \equiv \underbrace{\alpha_j(\alpha_j(...(\alpha_j(x))...)}_{l-раз}, \text{если } l > 0;$$

$$\alpha_j^l(x) \equiv \underbrace{\alpha_{3-j}(\alpha_{3-j}(...(\alpha_{3-j}(x))...)}_{-l-раз}, \text{если } l < 0; \alpha_j^0(x) = x\,(j = 1,2);$$

$$S(\alpha_j^k(x), \varphi) = \int\limits_{\alpha_j^k(x_0)}^{\alpha_j^k(x_1)} \frac{\varphi(t)dt}{\alpha_j^k(x) - t}\,(j = 1,2; k = \overline{-2,4}) - \qquad (2)$$

слабополярный интегральный оператор со сдвигом запаздывающего и опережающего некарлемановского типа.

Задача S. Найти решение $\varphi(x)$ уравнения (1) из класса $C(x_0 \le x \le x_3, x \ne x_1, x_2)$ удовлетворяющее краевым условиям

$$\varphi(x) = r(x), x_{-2} \le x \le x_0, \qquad (3)$$

$$\varphi(x) = q(x), x_3 \le x \le x_5, \qquad (4)$$

где $r(x), q(x)$ - заданные достаточно гладкие функции на множествах $x_{-2} \le x \le x_0$, $x_3 \le x \le x_5$ соответственно.

Теорема. Если $r(x) \in C[x_{-2}, x_0]; q(x) \in C[x_3, x_5]; r(x_k) = 0(k = \overline{-2,0});$ $q(x_n) = 0(n = \overline{3,5});$ матрицы коэффициентов уравнения (1) коммутируют, то решение $\varphi(x)$ задачи S существует и единственно.

Доказательство.

В терминах функций

$$S_j(\alpha_l^k(x), \varphi_j) = S(\alpha_l^k(x), \varphi), x_j \le x \le x_{j+1}(j = \overline{-2,4}; l = 1,2; k = \overline{0,2}), \qquad (5)$$

$$\varphi_j(x) = \varphi(x), x_j \le x \le x_{j+1}(j = \overline{-2,4}) \qquad (6)$$

для уравнения (1) построим систему интегральных уравнений при $x_0 \le x \le x_1$.

Для этого заменим в уравнении (1) на промежутках $x_j \le x \le x_{j+1}(j = \overline{0,2})$ переменную x на $\alpha_2^j(x)(j = \overline{0,2})$, и учитывая, что при $x_0 \le x \le x_1$ выполняется неравенство $x_j \le \alpha_2^j(x) \le x_{j+1}(j = \overline{0,2})$, получаем систему интегро-функциональных уравнений

$$\sum_{k=0}^{2} a_k \varphi_{n-k}(\alpha_2^{n-k}(x)) + \sum_{k=1}^{2} b_k \varphi_{n+k}(\alpha_2^{n+k}(x)) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{2} c_k S_{n-k}(\alpha_2^{n-k}(x), \varphi_{n-k}) + \sum_{k=1}^{2} d_k S_{n+k}(\alpha_2^{n+k}(x), \varphi_{n+k}) =$$

$$= f(\alpha_2^n(x)), x_0 \le x \le x_1(n = \overline{0,2}).$$

Которую, с учетом (2)-(6), можно записать в форме матричного уравнения

$$A\overline{\varphi}(x) + B\overline{S}(x, \overline{\varphi}) = \overline{F}(x),\ x_0 \le x \le x_1, \qquad (7)$$

где

$$\overline{\varphi}(x)=(\varphi_0(x),\varphi_1(\alpha_2(x)),\varphi_2(\alpha_2^2(x)))^T,$$
$$\overline{S}(x,\overline{\varphi})=(S_0(x,\varphi_0),S_1(\alpha_2(x),\varphi_1),S_2(\alpha_2^2(x),\varphi_2))^T,$$
$$\overline{F}(x)=(F_0(x),F_1(x),F_2(x))^T,$$

причем

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & b_1 & b_2 \\ a_1 & a_0 & b_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} c_0 & d_1 & d_2 \\ c_1 & c_0 & d_1 \\ c_2 & c_1 & c_0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

а

$$F_0(x)=f(x)-a_1r(\alpha_1(x))-a_2r(\alpha_1^2(x))-c_1S_{-1}(\alpha_1(x),r)-c_2S_{-2}(\alpha_1^2(x),r),$$
$$F_1(x)=f(\alpha_2(x))-a_2r(\alpha_1(x))-b_2q(\alpha_2^3(x))-c_2S_{-1}(\alpha_1(x),r)-d_2S_3(\alpha_2^3(x),q),$$
$$F_2(x)=f(\alpha_2^2(x))-b_1q(\alpha_2^3(x))-b_2q(\alpha_2^4(x))-d_1S_3(\alpha_2^3(x),q)-d_2S_4(\alpha_2^4(x),q).$$

Будем считать в матрицах (8) элементы

$$a_j=b_j\,(j=1,2),\ c_1=d_1,\ c_2=d_2=c_1\frac{a_2}{a_1}. \tag{9}$$

Тогда, в силу (9), матрицы (8) симметричны и коммутативны. В этом случае [1, с.78] существует матрица $T(\det T\neq 0)$,приводящая матрицы A и B одновременно к диагональной форме

$$T^{-1}AT=\Lambda_A, T^{-1}BT=\Lambda_B,$$

где

$$\Lambda_A=\begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix},\Lambda_B=\begin{pmatrix} \delta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

причем $\gamma_j,\delta_j\,(j=0,1,2)$ – различные действительные отличные от нуля собственные значения матриц A и B соответственно.

Так как матрицы A, B коммутирующие, то матрицы Λ_A,Λ_B, полученные преобразованием подобия [2, с.133] так же коммутирующие.

Для разделения системы (7) на отдельные уравнения сделаем замену

$$\overline{\varphi}(x)=T\overline{\upsilon}(x), \tag{11}$$
$$\overline{\upsilon}(x)=(\upsilon_0(x),\upsilon_1(\alpha_2(x)),\upsilon_2(\alpha_2^2(x)))^T,$$

и перейдем к системе

$$\Lambda_A\overline{\upsilon}(x)+\Lambda_B\overline{S}(x,\overline{\upsilon})=\overline{F}(x),\ x_0\le x\le x_1,$$

которая, в силу (10), (11), распадается на три отдельных уравнения

$$\gamma_k\upsilon_k(\alpha_2^k(x))+\delta_kS_k(\alpha_2^k(x),\upsilon_k)=F_k(x),\ x_0\le x\le x_1\ (k=0,1,2)$$

или

$$\gamma_k\upsilon_k(x)+\delta_kS_k(x,\upsilon_k)=F_k(\alpha_1^k(x)),\ x_k\le x\le x_{k+1}\ (k=0,1,2),$$

а, с учетом (2),

$$\gamma_k\upsilon_k(x)+\delta_k\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\upsilon_k(t)dt}{x-t}=N_k(x)\equiv F_k(\alpha_1^k(x)),\ x_k\le x\le x_{k+1}\ (k=0,1,2). \tag{12}$$

Разрешив сингулярное интегральное уравнение 2-ого рода (12) относительно $\upsilon_k(x)$, учитывая (11),(6) получим решение задачи S (1)-(4).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 549 с.

УДК 917.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

О.В. Чернова
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)
e-mail: *chernova_olga@bsu.edu.ru*

Для эллиптической системы первого порядка с постоянными комплексными старшими коэффициентами в открытом множестве комплексной плоскости, представляющем собой объединение конечной и бесконечной областей, рассматривается общая задача линейного сопряжения. Используя специальную замену, удается исходную задачу свести к задаче линейного сопряжения для эллиптической системы, записанной в каноническом виде. При этом краевое условие выражается через элементы вспомогательных матриц. Предполагая, что выполнены определенные условия на коэффициенты, правые части системы и правую часть краевого условия, используя интегральное представление решений этой системы и опираясь на результаты классической теории сингулярных операторов, установлен критерий фредгольмовости исходной задачи и получена формула индекса для нее.

Ключевые слова: эллиптическая система, задача линейного сопряжения, индекс.

1. Введение

Задача линейного сопряжения для обычных аналитическихфункций была предметом многочисленных исследований и детально изучена в скалярном случае для общей кусочно − гладкой линии L [6] и в матричном случае [1], [3].

Так, например, в работе А.П. Солдатова [7] была рассмотрена задача линейного сопряжения теории аналитических функций в матричном случае для произвольной кусочно-гладкой линии, доказана ее фредгольмовость, построено семейство канонических функций и описано поведение этих решений в узлах линии, в [4] рассматривались нелокальные краевые задачи для трех гармонических функций.

В данной работе рассматривается наиболее общая задача линейного сопряжения для эллиптической системы с комплексными коэффициентами в случае простого контура Γ в открытом множестве, представляющем собой объединение конечной и бесконечной областей. Вообще говоря, задача линейного сопряжения и теория сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши тес-

но связаны между собой. По существу, это две эквивалентные теории, связь между ними осуществляется с помощью представлений аналитических функций интегралами типа Коши и формулами скачка для последних. Согласно [9] эллиптическую систему первого порядка с постоянными комплексными старшими коэффициентами возможно редуцировать к матричному аналогу систем типа Бельтрами [2]. Предполагая, что выполнены определенные условия на матричные коэффициенты, правую часть системы и на правую часть краевого условия, в работе сформулирована теорема фредгольмовой разрешимостизадачи линейного сопряжения и получена формула для индекса.

2. Постановка задачи

Пусть Γ –простой гладкий контур класса $C^{1,\nu}$. Напомним, что последнее означает принадлежность производной параметризации гладкой кривой классу Гельдера C^{ν} с показателем $0<\nu<1$. Пусть открытое множество $D=C\setminus\Gamma$ есть объединение двух областей: конечной D_1 и бесконечной D_2. Рассмотрим в D эллиптическую систему первого порядка

$$\mathrm{L_A}\ \mathrm{U(z)} + \mathrm{a(z)U(z)} + \mathrm{b(z)}\ \overline{\mathrm{U(z)}} = \mathrm{F(z)},\quad \mathrm{z}\in\mathrm{D} \tag{1}$$

где $A\in C^{l\times l}$ –постоянная матрица, не имеющая вещественных собственных значений, $F(z)$ – комплексная l – вектор-функция, $a(z),b(z)-l\times l$ комплексные матричные коэффициенты, заданные вне Γ и $\mathrm{L_A}=\dfrac{\partial}{\partial y}-A\dfrac{\partial}{\partial x}$ есть дифференциальный оператор, который определяется матрицей A и действует в классе l – вектор-функций.

Определение 1. Регулярным решением системы (1) называется комплексная l – вектор-функция $\mathrm{U(z)}=(\mathrm{U_1(z)},...,\mathrm{U_1(z)})\in\mathrm{C^1(D)}$, удовлетворяющая этой системе тождественно.

Для системы (1) поставим краевую задачу линейного сопряжения, определяемую следующим условием

$$\mathrm{C_{11}\ U^+(t) - C_{12}\ U^-(t) + C_{21}\ U^+(t) - C_{22}\ U^-(t) = f(t),\quad t\in\Gamma} \tag{2}$$

где черта означает комплексное сопряжение, $l\times l$ – матричные коэффициенты $\mathrm{C_{ij}}$ выбираются из класса Гельдера $C^{\nu}(\Gamma)$, и под $\mathrm{U^+(t)}$ и $\mathrm{U^-(t)}$ понимаются граничные значения функции $\mathrm{U(z)}$, т.е.

$$\mathrm{U^+(t)}=\lim_{\mathrm{z}\to\mathrm{t}}U(z),z\in D_1,\mathrm{U^-(t)}=\lim_{\mathrm{z}\to\mathrm{t}}U(z),z\in D_2.$$

Введем в рассмотрение класс $C^{\mu}_{\delta}(\hat{D},\infty),-1<\delta<0$, заданных в D функций, который определяется условием принадлежности их пространству Гельдера $C^{\mu}(\overline{D_1})$ с показателем $0<\mu<\nu<1$. и весовому пространству Гельдера $C^{\mu}_{\delta}(\overline{D_2},\infty),-1<\delta<0$, введенному в [8].

В предположении, что для матричных коэффициентов и правых частей задачи (1) – (2) выполнены условия

$$a(z), b(z) \in C^{\mu}_{\delta_0}(\hat{D}, \infty), \qquad \delta_0 < -1$$
$$f(t) \in C^{\mu}(\Gamma), F(z) \in C^{\mu}_{\delta-1}(\hat{D}, \infty), \quad -1 < \delta < 0 \tag{3}$$

решения $\mathrm{U(z)} = (\mathrm{U_1(z)}, ..., \mathrm{U_1(z)})$ задачи (1) – (2) будем искать в классе $C^{\mu}_{A,\delta}(\hat{D}, \infty)$, который явно определяется условиями $U \in C^{\mu}_{\delta}(\hat{D}, \infty), L_A U \in C^{\mu}_{\delta-1}(\hat{D}, \infty).$

Напомним [5], что линейный оператор N, ограниченный в банаховых пространствах $X \to Y$, фредгольмов, если подпространство $\{x \in X, Nx = 0\}$, называемое его ядром $\ker N$, конечномерно, образ $imN = N(X)$ замкнут в Y и фактор – пространство Y / imN, называемое его коядром $co\ker N$, также конечномерно. Удобно для краткости размерности $\dim(\ker N)$ и $\dim(co\ker N)$ обозначать, $\dim N$ и $co\dim N$ соответственно.

Определение 2.Целое число $indN = \dim N - co\dim N$ называется индексом оператора N. Коядро $co\ker N = Y / imN$ часто отождествляется с ядром $\ker N^*$ сопряженного оператора N^*.

Фредгольмовость задачи (1) – (2) понимается в смысле фредгольвости оператора ее краевого условия, который действует из класса $C^{\mu}_{A,\delta}(\hat{D}, \infty)$ в прямое произведение классов $C^{\mu}_{\delta-1}(\hat{D}, \infty) \times C^{\mu}(\Gamma)$.

3. Фредгольмова разрешимость

Свяжем с l –вектор–функцией $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, где ϕ_1 означают первые l_1 компонент, а ϕ_2 следующие l_2 компонент, l –вектор–функцию $\widetilde{\phi} = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$. Как показано в [12] существует матрица $B \in C^{l \times l}$ следующей блочной структуры

$$\begin{pmatrix} B_{11} & \overline{B}_{12} \\ B_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad B_{ij} \in C^{l_i \times l_j}, i, j = 1,2, \tag{4}$$

где l_1, l_2 число собственных значений матрицы A системы (1) (с учетом кратности), лежащих, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях, при этом $l = l_1 + l_2$.

Рассмотрим блочную $2l \times 2l$ матрицу

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & \overline{G}_{22} \\ G_{21} & \overline{G}_{12} \end{pmatrix}$$

где $l \times l$ матрицы–функции $G_{ij}(t), i, j = 1,2$ в обозначении (4) имеют явный вид

$$G_{11} = (C_{11}B_1, C_{21}B_2), \quad G_{12} = (C_{12}B_1, \overline{C}_{22}B_2),$$
$$G_{12} = (C_{21}B_1, \overline{C}_{11}B_2), \quad G_{22} = (C_{22}B_1, \overline{C}_{12}B_2).$$

Теорема. Пусть контур Γ класса $C^{1,\nu}$, открытое множество D есть объединение конечной области D_1 и бесконечной области D_2, $l \times l$ матрицы – функции $\mathrm{C_{ij}} \in \mathrm{C^{\nu}}(\Gamma), i, j = 1,2$ и для $l \times l$ – матричных коэффициентов $a(z)$, $b(z)$ и правых частей системы (1) $F(z)$ и краевого условия (2) $F(z)$ выполнено (3). Тогда условие обратимости матрицы – функции $\det G(t) \neq 0, t \in \Gamma$ необходимо и доста-

точно для фредгольмовости задачи (1)–(2) в классе $C^{\mu}_{A,\delta}(\hat{D},\infty)$ и ее индекс дается формулой

$$\chi = -\frac{1}{\pi}\arg[\det G(t)]_{\Gamma}$$

где приращение $[]_{\Gamma}$ вдоль Γ берется в направлении, оставляющем область D_1 слева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Системы сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука.– 1970. – 380 с.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука – 1988. –512 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевая задача Римана для системы n пар функций // УМН. – 1988. – Т.7, вып. 4(50). – С. 3 – 54.
4. Ковалева Л.А., Солдатов А.П. Об одной нелокальной задаче теории функций// Дифференциальные уравнения. – 2010. –Т. 46.,№ 3. –С. 396-409.
5. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука – 1971.– 104 с.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука– 1968. – 513 с.
7. Солдатов А. П. Краевая задача линейного сопряжения теории функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1979. – Т.43, №1. – С. 184 – 202.
8. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 2017. – Т. 63. – С. 1 – 189.
9. Чернова О.В. Эллиптические системы первого порядка на плоскостис постоянными старшими коэффициентами // Материалы III Международной научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математических наук». Орел, 23 – 26 ноября –2017. – С. 109-112.

УДК 517.956

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ю. О. Яковлева, к.ф.-м.н., доц.
Самарский государственный технический университет
e-mail: *julia.yakovleva@mail.ru*

В статье рассмотрена задача Коши для одного дифференциального уравнения гиперболического типа третьего порядка. Регулярное решение задачи Коши для уравнения гиперболического типа третьего порядка с кратными характеристиками получено в явном виде методом Римана.

Ключевые слова: задача Коши, дифференциальное уравнение гиперболического типа третьего порядка, кратные характеристики, регулярное решение, метод Римана, функция Римана.

В односвязной области $D = \{(x,\, y) : x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$ независимых переменных $(x,\, y)$ рассмотрим **задачу Коши**, состоящую из уравнения третьего порядка в частных производных [1], не содержащего производные порядка меньше третьего вида

$$Mu \equiv u_{xxy} + cu = 0, \tag{1}$$

где $u\,(x,\, y)$ – искомая функция, c — некоторый отличный от нуля действительный коэффициент, и условий:

$$u\,(x,\, y)\,|_{y=x} = \alpha(x),\; x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}|_{y=x} = \beta(x),\; x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial n^2}|_{y=x} = \gamma(x),\; x \in \mathbb{R},$$

где $\alpha(x),\, \beta(x),\, \gamma(x)$ – заданные функции, $\overrightarrow{n}$ – нормаль к нехарактеристической прямой $y = x$.

Уравнение (1) является, в соответствии с [2], слабо гиперболическим уравнением третьего порядка в частных производных с кратными характеристиками $x = C_1,\, y = C_2,\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}$.

Регулярным в плоскости $\{(x,\, y) : x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$ решением задачи Коши уравнения (1) называется функция $u\,(x,\, y)$, которая имеет в плоскости все непрерывные частные производные, входящие в уравнение (1) и удовлетворяющую уравнению (1) и указанным условиям задачи Коши в обычном смысле.

Определим функцию Римана как решение специальной задачи Гурса, тогда регулярное решение задачи Коши может быть получено в явном виде и имеет

следующий вид:

$$u\,(x_0,\,y_0) = \alpha(y_0) - \frac{1}{4}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)\,{}_0F_2\left(1,\,\frac{3}{2};\,c\tau\right)(\alpha''(x)-\gamma(x))\right]dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[((x-x_0)^2+1)\,{}_0F_2\left(1,\,\frac{3}{2};\,c\tau\right)(\alpha(x)+\alpha'(x)+\beta(x))\right]dx-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)^2(x-y_0)c\,{}_0F_2\left(2,\,\frac{5}{2};\,c\tau\right)(\alpha'(x)+\beta(x))\right]dx-$$

$$-\frac{1}{60}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)^4(x-y_0)c^2\,{}_0F_2\left(3,\,\frac{7}{2};\,c\tau\right)\alpha(x)\right]dx,$$

где $\tau = \frac{(x-x_0)^2(x-y_0)}{4}$.

Полученный результат совпадает с результатами приведенными в работах [1, 3, 4], где получены решения задач Коши и Гурса для уравнения

$$u_{xxy} + eu = f, \tag{2}$$

где $e \in C^2(D)$, $f \in C(D)$, $D = \{x_0 < x < x_1,\, y_0 < y < y_1\}$, $e(y) \neq 0$. Функция Римана для уравнения (2)

$$R(x,y;x_0,y_0) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\int\limits_{\eta}^{y} e(\tau)d\tau\right]^k\frac{(x-x_0)^{2k}}{(2k)!}$$

получена как решение интегрального уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалов В. И., Миронов А. Н. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2002. — № 5. — С. 23–30.

2. Петровский И. Г. Избранные труды. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. — М.: Наука. — 1987. — 424 с.

3. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. — Казань: Казанское математическое общество. — 2001. — 226 с.

4. Миронов А. Н. О методе Римана решения задачи Коши // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2005. — № 2(513). — С. 34–44.

Алгебра, топология и геометрия

УДК 515.12

О ЧИСЛЕ ЛИНДЕЛЁФА ПЛОТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Д. П. Батуров, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *dbaturov@rambler.ru*

Основной результат статьи устанавливает связь между теснотой компакта и числом Линделёфа плотных нормальных подпространств пространства непрерывных вещественных функций на этом компакте в топологии поточечной сходимости.

Ключевые слова: число Линделёфа, теснота, функциональное пространство.

В этой статье рассматриваются плотные подпространства пространства $C_p(X)$ непрерывных вещественных функций на тихоновском пространстве X в топологии поточечной сходимости. Будем пользоваться терминологией работ [1] и [3]. Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть τ — бесконечный кардинал, X — компакт, $t(X) \leq \tau$ и Y — плотное подпространство пространства $C_p(X)$. Если Y нормально, то $l(Y) \leq 2^\tau$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $l(Y) > 2^\tau$. Тогда Y содержит замкнутое дискретное подмножество F мощности $(2^\tau)^+$ [1, Теорема III.6.1]. Поскольку Y нормально и плотно в $C_p(X)$ (а $C_p(X)$ — плотное подпространство $\mathbf{R}^X$), для любых непересекающихся подмножеств A, $B \subset F$ существует счетное $S \subset X$ такое, что $\overline{\pi_S(A)} \cap \pi_S(B) = \emptyset$ (π_S — проекция $\mathbf{R}^X$ на $\mathbf{R}^S$) [1, Лемма I.6.1].

Пусть диагональное произведение ΔF отображает X на X_0, тогда X_0 — компакт веса $\leq (2^\tau)^+$, $t(X_0) \leq t(X) \leq \tau$ [3, Задача 3.12.8] и имеет место каноническое вложение $F \subset C_p(X_0) \subset C_p(X)$, поэтому для любых непересекающихся подмножеств A, $B \subset F$ существует счетное $S_0 \subset X_0$ такое, что $\overline{\pi_{S_0}(A)} \cap \pi_{S_0}(B) = \emptyset$.

Компакт X_0 содержит плотное множество M мощности $\leq (2^\tau)^+$ (т. к. $w(X_0) \leq (2^\tau)^+$). Занумеруем точки множества M ординалами: $M = \{x_\alpha : \alpha < (2^\tau)^+\}$ (возможно, $x_\alpha = x_\beta$ для различных α и β). Обозначим $M_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$.

Поскольку $t(X_0) \leq \tau$, для любого α замыкания подмножеств M_α, имеющих мощность $\leq \tau$, образуют сеть μ_α в $\overline{M_\alpha}$, $|\mu_\alpha| \leq 2^\tau$ и $X_0 = \bigcup_{\alpha<(2^\tau)^+} \overline{M_\alpha}$. Положим $\mu_0^* = \mu_0$ и $\mu_\alpha^* = \{V \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \overline{M_\beta} : V \in \mu_\alpha\}$ если $\alpha > 0$. Тогда

$\mu = \bigcup_{\alpha<(2^\tau)^+} \mu^*_\alpha$ — сеть в X_0, $|\mu| \le (2^\tau)^+$ и для любой точки $x \in X_0$ семейство $\{V \in \mu : x \in V\}$ имеет мощность $\le 2^\tau$.

Семейство η, состоящее из всех множеств вида

$$W(G_1, \dots, G_n\,; O_1, \dots, O_n) = \{f \in C_p(X_0) : f(G_i) \subset O_i\,, i = 1, \dots, n\},$$

где $G_i \in \mu$, O_i — интервалы с рациональными концами, является сетью в $C_p(X_0)$. Положим

$$\eta_0 = \{H \in \eta : |H \cap F| = (2^\tau)^+\}.$$

Поскольку $|\eta_0| \le |\eta| \le (2^\tau)^+$ и $|F| = (2^\tau)^+$, можно выбрать $A \subset F$, такое, что $|A| = (2^\tau)^+$ и $(F \setminus A) \cap H \ne \emptyset$ для любого $H \in \eta_0$. Существует счетное $S_0 \subset X_0$ такое, что $\pi_{S_0}(A) \cap \overline{\pi_{S_0}(F \setminus A)} = \emptyset$.

Пространство $\pi_{S_0}(A)$ имеет счетную базу, поэтому найдется функция $f_0 \in A$ такая, что для любой ее окрестности вида $W(s_1, \dots, s_n\,; O_1, \dots, O_n)$, где $s_i \in S_0$, O_i — интервалы с рациональными концами, выполняется равенство $|W(s_1, \dots, s_n\,; O_1, \dots, O_n) \cap A| = (2^\tau)^+$. Поскольку для любого i семейство $\{V \in \mu : s_i \in V\}$ имеет мощность $\le 2^\tau$, $W(s_1, \dots, s_n\,; O_1, \dots, O_n)$ есть объединение не более чем 2^τ элементов η, поэтому найдется $H \in \eta$ такое, что $H \subset W(s_1, \dots, s_n\,; O_1, \dots, O_n)$ и $|H \cap A| = (2^\tau)^+$, т. е. $H \in \eta_0$.

Итак, любая окрестность функции f_0 вида $W(s_1, \dots, s_n\,; O_1, \dots, O_n)$, где $s_i \in S_0$, O_i — интервалы с рациональными концами, содержит множество H, принадлежащее η_0, поэтому $(F \setminus A) \cap W(s_1, \dots, s_n\,; O_1, \dots, O_n) \ne \emptyset$, т. е. $\pi_{S_0}(f_0) \in \overline{\pi_{S_0}(F \setminus A)}$ — противоречие с тем, что $\pi_{S_0}(A) \cap \overline{\pi_{S_0}(F \setminus A)} = \emptyset$. Теорема доказана.

В работе [2] доказано следующее утверждение: если τ — бесконечный кардинал, X — компакт и $t(X) \le \tau$, то $l(C_p(X)) \le 2^\tau$ [2, Следствие 2]. В этом утверждении не предполагается нормальность пространства $C_p(X)$ (если X — компакт и $C_p(X)$ нормально, то $l(C_p(X)) \le \aleph_0$ [1, Теорема III.6.3]), поэтому доказанная выше теорема не является его обобщением.

Если τ — бесконечный кардинал, X — одноточечная компактификация Александрова дискретного пространства мощности τ, то $C_p(X)$ содержит дискретное подпространство D мощности τ. Если $Y = D \cup (C_p(X) \setminus \overline{D})$, то Y плотно в $C_p(X)$ и $l(Y) = \tau$, при этом X — компакт и $t(X) = \aleph_0$. Таким образом, доказанная выше теорема неверна, если не предполагать нормальность Y.

Если τ — бесконечный кардинал, X — дискретное пространство мощности 2^τ, то $C_p(X)$ совпадает с $\mathbf{R}^{2^\tau}$ и, как доказано в [4], содержит плотное нормальное подпространство Y, для которого $l(Y) = \tau$ [4, Теорема 2.1], при этом $t(X) = \aleph_0$. Таким образом, доказанная выше теорема неверна, если не предполагать компактность X.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А. В. Топологические пространства функций. — М.: Изд-во МГУ. — 1989. — 222 с.
2. Батуров Д. П., Резниченко Е. А. О числе Линделёфа пространств функций над монолитными компактами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 2018. — №3. — С. 57–60.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир. — 1986. — 752 с.
4. Baturov D. P. On closed discrete subsets of normal dense subspaces of products // Topol. Appl. — 2015. — V. 191. — P. 28–36.

УДК 514.76

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ МНОГООБРАЗИЯ КЕНМОЦУ, ОСНАЩЕННОГО N-СВЯЗНОСТЬЮ

А. В. Букушева, к.пед.н.

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

e-mail: *bukusheva@list.ru*

На многообразии Кенмоцу M изучается связность с кручением ∇^N, названная в работе N-связностью. N-связность определяется внутренней связностью ∇ и эндоморфизмом $N : D \to D$ гладкого распределения D, заданного на многообразии M. Сравниваются свойства N-связности со свойствами связность Леви-Чивита $\tilde{\nabla}$ и четверть-симметрической связности $\dot{\nabla}$. Обсуждаются как универсальные, не зависящие от выбора эндоморфизма N, свойства связности ∇^N, так и те свойства, которые присущи связности ∇^N для выделенных эндоморфизмов. Так, например, доказывается, что N-связность сохраняет структурный эндоморфизм φ многообразия Кенмоцу тогда и только тогда, когда эндоморфизмы N и φ коммутируют. В то же время, приводятся тождества, которым удовлетворяет тензор кривизны N-связности при любом выборе эндоморфизма $N : D \to D$.

Ключевые слова: многообразие Кенмоцу, внутренняя связность, N-связность, четверть-симметрическая связность.

Введение

Необходимость оснащения почти контактных метрических многообразий связностями с кручением вызвана потребностями теоретической физики [2, 10, 13]. Однако, до настоящего времени последовательно изучались почти контактные метрические многообразия только с четверть-симметрической связностью. Целью работы является изучение простейших свойств N-связности, зависящей от выбора эндоморфизма $N : D \to D$ и определяемой на многообразии Кенмоцу. N-связность ∇^N определяется на почти контактном метрическом многообразии как единственная связность на многообразии M, удовлетворяющая следующим условиям [1, 5]:

1) $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} \in \Gamma(D)$, 2) $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi} = \vec{0}$, 3) $\nabla^N_{\vec{\xi}}\vec{y} = [\vec{\xi}, \vec{y}] + N\vec{y}$, 4) $\nabla^N_{\vec{y}}\vec{z} = \nabla_{\vec{y}}\vec{z}$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, $\vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$.

N-связность ∇^N может быть охарактеризована также следующими условиями:

1) $S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(TM)$;

2) $\nabla^N_{\vec{x}} g(\vec{y},\vec{z}) = 0$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D)$;

3) $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi} = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$;

4) $\nabla^N_{\vec{x}}\eta = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

К известным классам N-связностей следует отнести:

1) Связность Бежанку ∇^B : $\nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi}$, $N = 0$;

2) Связность Танака-Вебстера ∇^{TW}, определяемая равенствами

1) $\nabla^{TW}\eta = 0$, 2) $\nabla^{TW}\vec{\xi} = 0$, 3) $\nabla^{TW} g = 0$, 4) $S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi}$, $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$, 5) $S(\vec{\xi},\varphi\vec{x}) = -\varphi S(\vec{\xi},\vec{x})$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Связность ∇^{TW} совпадает с N-связностью при $N = C$;

3) Связность Схоутена-ван Кампена ∇^{Sk} : $\nabla^{Sk}_{\vec{x}}\vec{y} = (\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^h)^h + (\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^v)^v$, $N = C - \varphi$.

1. Основные сведения из геометрии многообразий Кенмоцу

Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n = 2m+1$, $m > 1$, с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g)$ [1, 3, 6]. Здесь, в частности, η – 1-форма, порождающая распределение D : $D = ker(\eta)$, $\vec{\xi}$ – векторное поле, порождающее оснащение $D^\perp$ распределения D : $D = Span(\vec{\xi})$. Гладкое распределение D будем называть распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_\varphi + 2d\eta\otimes\vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(\vec{x},\vec{y}) = [\varphi\vec{x},\varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x},\vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x},\vec{y}] - \varphi[\vec{x},\varphi\vec{y}]$ – тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Нормальное почти контактное метрическое многообразие называется многообразием Кенмоцу, если $d\eta = 0$, $d\Omega = 2\eta\wedge\Omega$ [14, 15]. Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивита тензора g : $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$. Почти контактное метрическое многообразие M является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда

$$(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = -\eta(\vec{y})\varphi\vec{x} - g(\vec{x},\varphi\vec{y})\vec{\xi}.$$

Для многообразий Кенмоцу также выполняются следующие условия: $(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\eta)\vec{y} = g(\vec{x},\vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$, $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta\otimes\eta)$.

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha,\beta,\gamma = 1,...,n; a,b,c = 1,...,n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [9]. Пусть $P : TM \to D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D\oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта.

Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ порождают распределение D: $D = Span(\vec{e}_a)$. Для используемого нами неголономного поля базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a,\partial_n)$ выполняется соотношение $[\vec{e}_a,\vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Для многообразия

Кенмоцу последнее равенство упрощается: $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 0$. Из условия $\vec{\xi} \in \ker \omega$ следует, что $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Преобразование компонент допустимого тензорного поля t в адаптированных координатах подчиняется следующему закону [11, 12]: $t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Пусть $\psi : D \to D$ – эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\psi\vec{x}, \vec{y})$.

Имеет место следующее предложение [9].

Предложение 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивита почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:*
$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}$, $\tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a + \psi^b_a$, $\tilde{\Gamma}^n_{na} = \tilde{\Gamma}^a_{nn} = 0$, *где* $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C^a_b = g^{da} C_{db}$, $\psi^c_a = g^{bc}\omega_{ab}$.

Для многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах получаем: $C_{ab} = g_{ab}$, $C^b_a = \delta^b_a$, $\omega_{ba} = 0$, $\psi^c_a = 0$.

Таким образом, в качестве следствия предложения 1 получаем предложение 2.

Предложение 2. *Коэффициенты связности Леви-Чивита многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид:*
$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\tilde{\Gamma}^n_{ab} = -g_{ba}$, $\tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = \delta^b_a$, $\tilde{\Gamma}^n_{na} = \tilde{\Gamma}^a_{nn} = 0$.

Определим на многообразии M N-связность ∇^N полагая:
$\nabla^N_{\vec{x}} \vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y} + g(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} - \eta(\vec{x}) N\vec{y} - \eta(\vec{y})\vec{x}$.

Предложение 3. *Ненулевые коэффициенты $G^\alpha_{\beta\gamma}$ связности ∇^N, заданной на многообразии Кенмоцу M, имеют вид:* $G^c_{ab} = \tilde{\Gamma}^c_{ab}$, $G^c_{nb} = \delta^c_b + N^c_b$.

Внутренней линейной связностью ∇ на многообразии с почти контактной метрической структурой [1, 3, 7, 8] называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1)\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}};$$

$$2)\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y},$$

$$3)\nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z},$$

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a \vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, следует формула преобразования для коэффициентов связности:

$$\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'} \vec{e}_a A^{c'}_b .$$

Тензорное поле $P^c_{ad} = \partial_n \Gamma^c_{ad}$ назовем тензором Схоутена-Вагнера.

Т е о р е м а 1. Тензор Схоутена-Вагнера внутренней связности многообразия Кенмоцу равен нулю.

Доказательство. Используя равенство $\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd}+\vec{e}_c g_{bd}-\vec{e}_d g_{bc})$, получаем: $2g_{ae}\Gamma^a_{bc} = \vec{e}_b g_{cd}+\vec{e}_c g_{bd}-\vec{e}_d g_{bc}$. Продифференцируем обе части последнего равенства по x^n. Используя $L_{\vec{\xi}}g = 2(g-\eta\otimes\eta)$, или, в адаптированных координатах, $\partial_n g_{ab} = 2g_{ab}$, получаем: $4g_{ae}\Gamma^a_{bc}+2g_{ae}\partial_n\Gamma^a_{bc} = 2(\vec{e}_b g_{cd}+\vec{e}_c g_{bd}-\vec{e}_d g_{bc})$. Отсюда следует, что $\partial_n\Gamma^c_{bc} = 0$.

2. Свойства тензора кривизны многообразие Кенмоцу с N-связностью

Имеет место следующее предложение:

Предложение 4. *Ненулевые компоненты тензора кривизны $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ связности ∇^N в адаптированных координатах принимают следующий вид:* $K^d_{abc} = R^d_{abc}$, $K^d_{nbc} = -\nabla_b N^d_c$.

Здесь R^c_{bad} — компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах [1, 4]: $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a||e||}\Gamma^e_{b]c}$.

Рассмотрим некоторые из свойств связности ∇^N.

Предложение 5. *N-связность ∇^N является метрической тогда и только тогда, когда выполняется следующее равенство:* $N^c_a g_{cb} + N^c_b g_{ac} = 0$.

Доказательство. В адаптированных координатах равенство $\nabla^N g = 0$ переписывается в виде:

$$\nabla^N_c g_{ab} = \vec{e}_c g_{ab} - \Gamma^d_{ca}g_{db} - \Gamma^d_{cb}g_{ad} = 0,\ \nabla^N_c g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N^c_a g_{cb} - N^c_b g_{ac} - 2g_{ab} = 0.$$

Учитывая, что для многообразия Кенмоцу $\partial_n g_{ab} = 2g_{ab}$, приходим к равенству $N^c_a g_{cb} + N^c_b g_{ac} = 0$, что и доказывает предложение.

Предложение 6. *N-связность сохраняет ∇^N структурный эндоморфизм φ многообразия Кенмоцу тогда и только тогда, когда эндоморфизмы N и φ коммутируют:* $N^b_c\varphi^c_a - N^c_a\varphi^b_c = 0$.

Доказательство предложение опирается на равенство:
$\nabla^N_n\varphi^b_a = \partial_n\varphi^b_a + N^b_c\varphi^c_a - N^c_a\varphi^b_c = 0$.

Последнее равенство выполняется, в частности, если $N = \varphi$.

Пусть $\dot{\nabla}$ — четверть-симметрическая связность: $\dot{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} - \eta(\vec{x})\varphi\vec{y}$.

Координатное представление последнего равенства фиксируется предложением 7.

Предложение 7. *Ненулевые коэффициенты $\dot{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ связности $\dot{\nabla}$, заданной на многообразии Кенмоцу M, в адаптированных координатах имеют вид:* $\dot{\Gamma}^c_{ab} = \tilde{\Gamma}^c_{ab}$, $\dot{\Gamma}^n_{ab} = \tilde{\Gamma}^n_{ab}$, $\dot{\Gamma}^c_{nb} = \delta^c_b + N^c_b$.

Пусть $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$, $\dot{R}(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ — тензоры кривизн связностей ∇^N, $\dot{\nabla}$ соответственно. Тогда из предложений 2, 3, 4, 7 следует справедливость следующего предложения:

Предложение 8. *Тензоры $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$, $\dot{R}(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ связаны между собой следующим соотношением:* $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = \dot{R}(\vec{x},\vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{y})(\nabla_{P\vec{x}}N)P\vec{z} - \eta(\vec{x})(\nabla_{P\vec{y}}N)P\vec{z}$.

Используя предложение 8, получаем следующую теорему.

Теорема 2. Тензор кривизны $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ удовлетворяет равенству: $K(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} = \eta(\vec{x})\vec{y} - \eta(\vec{y})\vec{x} - \eta(\vec{x})\varphi\vec{y} + \eta(\vec{y})\varphi\vec{x}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букушева А. В. Изометрические преобразования продолженных почти контактных метрических структур с метрикой полного лифта // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2016. — №47 — С. 39-47.
2. Букушева А. В. Инфинитезимальные автоморфизмы распределений контактных метрических многообразий с допустимой симплектической структурой // Математика. Механика. — 2016. — №18 — С. 11-13.
3. Букушева А. В., Галаев С. В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2013. — №4. — С. 10-18.
4. Букушева А. В., Галаев С. В. О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика. — 2005. — №7. — С. 12-14.
5. Букушева А. В., Галаев С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12. — №3. — С. 17-22. — №48 — С. 32-41.
6. Галаев С. В. Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой // Сибирский математический журнал. — 2016. — Т. 57. — №3(337). — С. 632-640.
7. Галаев С. В. N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2017. — №3. — С. 15-23.
8. Галаев С. В. Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15. — №3. — С. 258-263.
9. Галаев С. В. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2014. — №8. — С. 42-52.
10. Гордеева И. А., Паньженский В. И., Степанов С. Е. Многообразия Римана-Картана // Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я). — 2009. — Т. 123. — С. 110-141.
11. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov

Series III: Mathematics, Informatics, Physics. — 2011. — Vol. 4(53). — №2. — P. 13–22.

12. Galaev S. V. Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2018. — Vol. 39. — №1. — P. 71–76.

13. Golab S. On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // Tensor. N.S. — 1975. — №29. — P. 293-301.

14. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. — 1972. — V. 24. — P. 93-103.

15. Pitis G. Geometry of Kenmotsu manifolds. — Publishing House of Transilvania University of Brasov, Brasov. — 2007. — 160 p.

УДК 514.76

О ГЕОМЕТРИИ ЗОЛОТОЙ ПРОДОЛЖЕННОЙ СУБРИМАНОВОЙ СТРУКТУРЫ

С. В. Галаев, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
e-mail: *sgalaev@mail.ru*

На распределении D субриманова многообразия M определяется продолженная субриманова структура. Благодаря внутренней связности, ассоциированной со структурой субриманова многообразия M, на многообразии D естественным образом задается допустимая золотая аффинорная структура, совместимая с продолженной субримановой структурой. Находятся условия, при которых полученная аффинорная структура интегрируема.

Ключевые слова: субриманово многообразие, внутренняя связность, ассоциированная связность, продолженная субриманова структура, золотая аффинорная структура.

Введение

В настоящей работе под субримановым многообразием контактного типа понимается риманово многообразие M размерности n, оснащенное субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$. На распределении D как на гладком многообразии размерности $2n-1$ естественным образом определяются интересные для исследования геометрические структуры [1-4], к которым, прежде всего, можно отнести так называемую продолженную субриманову структуру [5-8]. Продолженная субриманова структура представляет собой нечетный аналог определяемой на касательном расслоении римановой структуры с метрикой Сасаки. Для определения метрики Сасаки используется риманова метрика исходного многообразия и ассоциированная с ней связность Леви-Чивита. В нашем случае роль связности Леви-Чивита выполняет

внутренняя метрическая связность без кручения. Благодаря внутренней связности на многообразии D определяется (допустимая) золотая аффинорная структура. В работе решается задача нахождения условий ее интегрируемости.

1. О геометрии специальных субримановых многообразий

Пусть M — риманово многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$. Обычно исследование субримановых многообразий начинают с собственно субримановой структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, переходя затем к структуре риманова многообразия, полагая, что $\vec{\xi}$ — единичное векторное поле и распределения D и $D^{\perp}$ ортогональны между собой. Наряду со связностью Леви-Чивита на многообразии M естественным образом определяется внутренняя линейная метрическая связность без кручения [10, 12, 13]. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],$$

где $P : TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$.

Введем понятие специального субриманова многообразия (или, короче - S-многообразия) как естественное обобщение продолженного субриманова многообразия. Предположим, что $rk(d\eta) = 2p$, $0 < 2p < n - 1$. Пусть K — интегрируемое распределение, равное ядру формы $\omega = d\eta$. Помимо разложения $TM = D \oplus D^{\perp}$ на многообразии M возникает разложение $TM = L \oplus L^{\perp} \oplus D^{\perp}$, где $L^{\perp} = K \cap D$, а L — ортогональное ему подраспределение распределения D [12, 13]. Кроме того, нам понадобятся разложения $\tilde{L} = L \oplus D^{\perp}$, $K = L^{\perp} \oplus D^{\perp}$, $TM = L \oplus K$. С помощью последнего разложения определяются проекторы $h : TM \to L$, $v : TM \to K$. Будем называть многообразие M специальным субримановым многообразием (или, короче - S-многообразием), если выполняются следующие условия:

1) распределение $\tilde{L} = L \oplus D^{\perp}$ — интегрируемо;

2) тензорное поле $\mu(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = v\vec{z}\, g(h\vec{x}, h\vec{y}) - g(h[v\vec{z}, h\vec{x}], h\vec{y}) - g(h[v\vec{z}, h\vec{y}], h\vec{x})$ обращается в нуль.

Пусть, далее, F — поле допустимого эндоморфизма, определяемое разложением $D = L \oplus L^{\perp}$ таким образом, чтобы все векторы пространства L отвечали собственному значению $\lambda = 1$, а векторы $L^{\perp}$ — собственному значению $\lambda = -1$. Из условий, входящих в определение S-многообразия вытекает

Предложение 1. *Поле эндоморфизма F ковариантно постоянно относительно ассоциированной связности:* $\nabla^A F = 0$.

Пусть I — тождественное преобразование распределения D, $I\vec{\xi} = 0$. Эндоморфизм $N = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}I$ является допустимым эндоморфизмом, удовлетворяющим соотношению $N^2 = N + 1$. При этом равенство $\nabla^F = 0$ влечет равенство $\nabla^A N = 0$ [12-14].

Пример S-многообразия. Пусть $M = \mathbb{R}^5$. (∂_n) $(\alpha = 1, .., 5)$ — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η, полагая, $\eta = dx^5 + x^2 dx^1$. Пусть, далее $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_5$. Зададим на M метрический тензор g, полагая, что векторы $(\sqrt{2}\vec{e}_1, \sqrt{2}\partial_2, \sqrt{2}\partial_3, \sqrt{2}\partial_4, \sqrt{2}\partial_5)$ образуют ортонормированный базис. Положим: $L = span(\vec{e}_1, \partial_2)$, $L^\perp = span(\partial_3, \partial_4)$. Учитывая равенство $[\vec{e}_1, \partial_2] = \partial_5$, заключаем, что распределение $\tilde{L} = L \oplus D^\perp$ интегрируемо. Два других входящих в определение S-многообразия свойства также проверяются непосредственно.

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n; a, b, c = 1, ..., n-1; A, B, C = 1, ..., 2p;$ $i, j, k = 2p+1, ..., n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если

1) $\partial_n = \vec{\xi}$;

2) $\Gamma(L^\perp) =< \partial_i >$;

3) $\Gamma(\tilde{L}) =< \partial_A, \partial_n >$.

Векторные поля $h(\partial_A) = \vec{e}_A = \partial_A - \Gamma^n_A \partial_n$ порождают систему $L : L = Span(\vec{e}_A)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_A, \vec{e}_B] = 2\omega_{BA}\partial_n$. Условие $\vec{\xi} \in ker\omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma^n_a = 0$. Из определения S-многообразия следует, что $\partial_n g_{AB} = 0$, $\partial_i g_{AB} = 0$.

Ранее автором было введено понятие почти нормальной аффинорной структуры t, как такой, для которой выполняется условие $\nabla^A t = 0$ [9-13].

Т е о р е м а 1. Пусть t — почти нормальная аффинорная структура, заданная на S-многообразии. Тогда найдется атлас адаптированных карт, относительно которых компоненты эндоморфизма t постоянны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство $\nabla^A t = 0$ сводится в адаптированных координатах к равенствам $\nabla_a t^c_b = \partial_a t^c_b + \Gamma^c_{ad} t^d_b - \Gamma^d_{ab} t^c_d = 0$, $\nabla_n t^c_b = \partial_n t^c_b$. Равенство $\partial_a t^c_b + \Gamma^c_{ad} t^d_b - \Gamma^d_{ab} t^c_d = 0$, (с учетом $\partial_n g_{ab} = 0$ и $\partial_n \Gamma^c_{ab} = 0$) можно интерпретировать как равенство, заданное относительно голономной карты. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно воспользоваться следующим утверждением: аффинорная структура интегрируема тогда и только тогда, существует сохраняющая ее связность без кручения.

2. Распределение субриманова многообразия с продолженной структурой

Пусть D — распределение субриманова многообразия нулевой кривизны [5-8]. Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}) = (A_i)$ $(a, b, c = 1, ..., n-1; i, j, k = 2n-1)$ определяют [5-8] на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b)$ — соответствующее поле кобазисов. Имеют место следующие структурные уравнения [6]:

$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$,

$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+d}\partial_n \Gamma^c_{ad} \partial_{n+c}$,

$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab} \partial_{n+c}$.

Определим на многообразии D метрику $\tilde{g}$, подчиняющуюся равенствам:

$$\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x}, \vec{y}),\ \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^h, \partial_n) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \partial_n) = 0.$$

Нетрудно установить справедливость следующего предложения.

Предложение 2. *Многообразие D с заданной на нем метрикой $\tilde{g}$ оснащено структурой S-многообразия.*

Пусть, далее, F — поле допустимого эндоморфизма, определяемое разложением $\tilde{D} = HD \oplus VD$ ($HD =< \vec{\varepsilon}_a >, VD =< \partial_{n+b} >$) таким образом, чтобы все векторы пространства HD отвечали собственному значению $\lambda = 1$, а векторы VD — собственному значению $\lambda = -1$. Из условий, входящих в определение S-многообразия вытекает теорема 2.

Т е о р е м а 2. Если кривизна распределения субриманова многообразия равна нулю, то допустимый эндоморфизм $N = \frac{\sqrt{5}}{2}F + \frac{1}{2}I$ представляет собой почти нормальную структуру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букушева А. В. Классификация почти контактных метрических структур на распределениях с внутренней симплектической связностью // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика/ — 2019. — Т. 51. — №1. — С. 20-24.

2. Букушева А. В. Продолжение римановой метрики в расслоение допустимых 2-форм субриманова многообразия // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. — 2017. — С. 29-33.

3. Букушева А. В. Изометрические преобразования продолженных почти контактных метрических структур с метрикой полного лифта // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2016. — №47 — С. 39-47.

4. Букушева А. В. Инфинитезимальные автоморфизмы распределений контактных метрических многообразий с допустимой симплектической структурой // Математика. Механика. — 2016. — №18 — С. 11-13.

5. Букушева А. В., Галаев С. В. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2017. — №48 — С. 32-41.

6. Галаев С. В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16. — №3. — С. 263-272.

7. Галаев С. В. Почти контактные метрические многообразия с распределением нулевой кривизны // Научные ведомости Белгородского Государственного университета. Серия: Математика. Физика. — 2017. — Выпуск 46. — №6(255). — С. 36-43.

8. Галаев С. В. О распределениях со специальной квази-сасакиевой структурой // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. — 2017. — №2(39). — С. 6-17.

9. Гордеева И. А., Паньженский В. И., Степанов С. Е. Многообразия Римана-Картана // Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я). — 2009. — Т. 123. — С. 110-141.

10. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics. — 2011. — Vol. 4(53). — №2. — P. 13–22.

11. Falcon S., Plaza A. The metallic ratios as limits of complex valued transformations // Chaos, Solitons, Fractals. — 2009. — Vol. 41(1). — P. 1–13.

12. Galaev S. V. Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2018. — Vol. 39. — №1. — P. 71–76.

13. Galaev S. V. Intrinsic geometry of almost contact kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. — 2015. — Vol. 31. — №1. — P. 35–46.

14. Goldberg S. I., Yano K. Polynomial structures on manifolds // Kodai Math. Sem. Rep. — 1970. — Vol. 22. — P. 199–218.

УДК 512.552

ДЕЛИТЕЛИ НУЛЯ В БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ

Н. И. Дубровин, д.ф.-м.н., проф.
Владимирский государственный университет
e-mail: *ndubrovin81@gmail.com*

Вычисляется аннулятор элемента $k + x + y + x^{-1} + y^{-1}$ в банаховом пространстве $L^p(G)$ в том случае, когда $k \in \mathbb{C}$, G – свободная группа со свободными образующими x, y, а $p > 2$.

Ключевые слова: банахово пространство, проблема Капланского делителей нуля, спектр оператора.

ВВЕДЕНИЕ. Алгебраистам хорошо известна проблема делителей нуля для групповых алгебр: пусть $(G, \cdot, e)$ – группа без кручения, а K – поле; будет ли групповая алгебра KG областью целостности? Совсем нетрудно доказать, что, если в группе G имеется конус P (о конусах см. [1]) и $KU(P)$ – область целостности, то и KG будет областью целостности (здесь $U(P) = P \cap P^{-1}$ – группа обратимых элементов конуса). Если P – чистый конус, т.е. $P \cap P^{-1} = \{e\}$, то на группе G можно задать левый порядок в соответствии с правилом "$g \leq h \quad \Leftrightarrow \quad g^{-1}h \in P$" и тем самым превратить G в левоупорядоченную группу. Аналогично, правило "$g \leq_r h \quad \Leftrightarrow \quad hg^{-1} \in P$" задает на группе G правый порядок (в случае, когда P не обязательно чистый конус, эти правила задают правый и левый предпорядок соответственно). Группа называется *локально индикабельной*, если любая ее конечно порожденная подгруппа имеет нетривиальный гомоморфный образ в $(\mathbb{Z}, +)$. В лекциях [9] показано, что любая локально индикабельная группа будет левоупорядоченной; обратное неверно, как показывает пример универсальной накрывающей группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, см. [3]. Положительное решение эта проблема получила для сверхразрешимых групп без кручения, см. [5], и для расширений полициклической группы с помощью конечной группы, см. [4]. Группа с конечным нормальным рядом, каждый фактор которого цикличен, называется *сверхразрешимой*, см. [2, §19]. Эти группы составляют подкласс класса *полициклических групп*, у которых найдется конечный субнормальный ряд с циклическими факторами, см. [2, §4]. Попутно отметим, что положительное решение проблемы делителей нуля для разрешимой без кручения группы G влечет тот факт, что групповая алгебра KG будет областью Оре, см. [6].

В полном объеме проблема делителей нуля не решена до сих пор. Естественное обобщение этой проблемы состоит в следующем. Обозначим $L^p(G)$ банахово пространство формальных сумм $\gamma = \sum_{g \in G} g c_g$ с комплексными коэффициентами $c_g \in \mathbb{C}$, для которых семейство $\{ |c_g|^p \mid g \in G \}$ суммируемо и, если s – сумма этого семейства, то число $\|\gamma\|_p := s^{1/p}$ называется *нормой формальной суммы* γ. Здесь $p \geq 1$ или $p = +\infty$, и в этом крайнем случае требуется ограниченность семейства $\{ |c_g| \mid g \in G \}$, а $\|\gamma\|_\infty := \sup_{g \in G} |c_g|$. Если

число $q \geq 1$ такое, что $1/p + 1/q = 1$, то определена корректно линейная по первому аргументу и сопряженно линейная по второму аргументу функция $L^p(G) \times L^q(G) \colon \mapsto \mathbb{C}$:

$$\left(\sum_{g \in G} g c_g, \sum_{g \in G} g b_g \right) = \sum_{g \in G} c_g \bar{b}_g; \ \left(\sum_{g \in G} g c_g \in L^p(G), \sum_{g \in G} g b_g \in L^q(G) \right) \qquad (1)$$

Норма превращает $L^p(G)$ в банахово пространство, в которое плотно вложено групповая алгебра $\mathbb{C}G$, а в случае $p = 2$ получаем гильбертово пространство относительно скалярного произведения (1), где $p = q = 2$.

Обозначим $C_0(G)$ замкнутое подпространство пространства $L^\infty(G)$, состоящее из сумм $\sum_{g \in G} g c_g$, для которых множество $\{g \in G \mid |c_g| > \varepsilon\}$ конечно, каково бы положительное число ε ни было. Известно, что для $1 \leq p < p' < +\infty$ справедливы включения

$$\mathbb{C}G \subseteq L^1(G) \subseteq L^p(G) \subseteq L^{p'}(G) \subseteq C_0(G) \subseteq L^\infty(G). \qquad (2)$$

Если $|G| < \infty$, то здесь имеют место равенства как множеств так и топологий, а в случае бесконечной группы G всюду в (2) будут строгие неравенства.

Пространство $L^p(G)$ превращается в $\mathbb{C}G$-бимодуль относительно левого и правого умножения на элементы из группового кольца $\mathbb{C}G$, если определить умножение на элемент $h \in G$ сдвигом:

$$h \cdot \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{g \in G} a_g (hg); \quad \sum_{g \in G} a_g g \cdot h = \sum_{g \in G} a_g (gh), \quad (h \in G)$$

и продолжить его на алгебру $\mathbb{C}G$ по дистрибутивности. Умножение на элементы из G будут изометрией пространства $L^p(G)$.

ПРОБЛЕМА (см. [7, 8]) Пусть G – группа без кручения, $0 \neq b \in \mathbb{C}G$ и $0 \neq \gamma \in L^p(G)$; будет ли верно неравенство $b\gamma \neq 0$?

Как видно, проблема зависит от параметра p, и, как оказалось, – сильно зависит. В случае $p = 2$ имеется ряд положительных результатов, самый общий из них следующий: если $E \lhd H \lhd G$ – субнормальный ряд групп такой, что E – свободная группа, H/E – элементарно аменабельная группа, а G/H – левоупорядоченная группа, то $b \in \mathbb{C}G$ не имеет делителей нуля в $L^2(G)$ ([7, Proposition 1.4]). Класс *элементарно аменабельных* групп – это наименьший класс групп, содержащий конечные и абелевы группы и замкнутый относительно расширений и прямых пределов. Напротив, если параметр p достаточно велик, то b может иметь делители нуля в $L^p(G)$ даже в случае свободной абелевой группы конечного ранга, см. [8, Theorem 2.3]. Кроме того, в статье [10] указан критерий для радиальной формальной суммы $b \in L^1(G)$ (определение см. ниже) свободной группы G быть делителем нуля в пересечении $\bigcap_{p>2} L^p(G)$, т.е. $b\gamma = 0$ и $0 \neq \gamma$ принадлежит любому из пространств $L^p(G)$, $p > 2$.

Цель настоящей заметки – элементарными средствами вычислить аннулятор радиального элемента $k + x + y + x^{-1} + y^{-1}$ ($k \in \mathbb{C}$) в случае, когда $G = \langle x, y\rangle$ – свободная группа с свободными образующими x, y. В этом смысле изложение доступно студентам-математикам.

РАДИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В СВОБОДНОЙ ГРУППЕ. Результаты этого параграфа хорошо известны, см., например, [11]. Пусть $\langle x, y\rangle$ – свободная группа со свободными образующими x, y, а E_k – множество элементов этой группы, имеющих длину самой короткой записи в алфавите $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$, равную k; $e_k = |E_k|$ – число элементов этого множества. Так как группа $\langle x, y\rangle$ свободна, то $E_k \cap E_m = \emptyset$ при условии $k \neq m$, и $\langle x, y\rangle = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$. Обозначим $E_k(w)$ – множество слов-элементов множества E_k, имеющих префикс w, а $E_k(\overline{w}) = E_k \setminus E_k(w)$ – множество слов, не имеющих этого префикса. Этим обозначением будем пользоваться для "букв" алфавита, т.е. в случае $w \in E_1$. Для $k \geq 1$ можно указать разбиение

$$E_k = E_k(x) \cup E_k(y) \cup E_k(x^{-1}) \cup E_k(y^{-1}). \tag{3}$$

Так как все "буквы" играют симметричную роль, то число элементов в компонентах разбиения (3) одинаково и равно

$$|E_k(w)| = \frac{1}{4} e_k \qquad (w \in E_1) \tag{4}$$

С другой стороны, для $k \geq 2$ имеет место разложение

$$xE_k = E_{k+1}(x) \cup E_{k-1}(\overline{x}) = E_{k+1}(x) \cup E_{k-1}(y) \cup E_{k-1}(x^{-1}) \cup E_{k-1}(y^{-1}), \tag{5}$$

и аналогичное разложение справедливо для оставшихся "букв". Ограничим операцию умножения слева на x на подмножество $E_k(\overline{x^{-1}})$. Тогда получим лишь часть разложения (5):

$$xE_k(\overline{x^{-1}}) = E_{k+1}(x) = E_{k+1}(x) \cup E_{k-1}(y) \cup E_{k-1}(x^{-1}) \cup E_{k-1}(y^{-1}) \tag{6}$$

Найдем число элементов множества слева и справа от знака равенства в (6), применяя формулу (4): $\frac{3}{4} e_k = \frac{1}{4} e_{k+1}$, откуда следует рекуррентное соотношение

$$e_{k+1} = 3e_k,\ e_1 = 4 \ \Rightarrow\ e_k = 4 \cdot 3^{k-1} \quad (k \geq 1) \tag{7}$$

Пусть $\chi_k = \sum_{g \in E_k} g$ – конечная сумма, элемент групповой алгебры $\mathbb{C}\langle x, y\rangle$. Формальную сумму

$$a_0 + a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k \quad (a_k \in \mathbb{C}) \tag{8}$$

называем *радиальной функцией*. Алгебра этих функций такова:

$$\chi_1^2 = \chi_2 + 4; \tag{9}$$

$$\chi_1 \chi_k = \chi_{k+1} + 3\chi_{k-1}. \tag{10}$$

Соотношение (9) проверяется прямым подсчетом, а (10) следует из (5).

ВЫЧИСЛЕНИЕ АННУЛЯТОРА. Обозначим $L^p_r\langle x,y\rangle$ пространство радиальных функций, принадлежащих $L^p\langle x,y\rangle$. Прежде чем искать аннулятор, выясним условия на коэффициенты $a_j \in \mathbb{C}$, при которых ряд $\gamma := \sum_{m=0}^{\infty} a_m\chi_m$ принадлежит $L^p\langle x,y\rangle$. Будем писать $c_m \sim l_m$ для двух последовательностей, если $\lim \frac{c_m}{l_m} \neq 0$, т.е. на бесконечности эти последовательности одного порядка. Заметим, что $e_m \sim 3^m$. По определению банахова пространства $L^p(..)$

$$\gamma \in L^p\langle x,y\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^p\, e_m < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{m=1}^{\infty} 3^m\, |a_m|^p < \infty.$$

Сравнение с рядом $\sum_{m=1}^{\infty} m^n\mu^m$, который сходится в том и только том случае, когда $|\mu| < 1$, приводит к следующему результату

Т е о р е м а 1. Если $a_m \sim P(m)\lambda^m$, где P – многочлен, то $\gamma \in L^p\langle x,y\rangle$ в том и только том случае, когда $3\cdot\lambda^p < 1$.

Найдем правый аннулятор элемента $b = k + \chi_1$ в $L^p_r\langle x,y\rangle$. Здесь $k \in \mathbb{C}$. Составим уравнение

$$b(a_0 + a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + a_3\chi_3 + \cdots) = 0. \tag{11}$$

относительно коэффициентов $a_j \in \mathbb{C}$. Перепишем уравнение (11) следующим образом:

$$ka_0 + ka_1\chi_1 + ka_2\chi_2 + ka_3\chi_3 + \cdots +$$
$$+a_0\chi_1 + a_1(\chi_2 + 4) + a_2(\chi_3 + 3\chi_1) + a_3(\chi_4 + 3\chi_2) + \cdots = 0$$

Приравнивая коэффициенты при χ_k к нулю, получим бесконечную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} ka_0 + 4a_1 = 0 \\ 3a_2 + ka_1 + a_0 = 0 \\ 3a_3 + ka_2 + a_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 3a_{m+1} + ka_m + a_{m-1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{12}$$

Так как $a_0 \neq 0$, то можно считать $a_0 = 1$. Тогда, решая первые уравнения системы (12), находим

$$a_1 = -\frac{k}{4}; \quad a_2 = -\frac{1}{3}(ka_1 + a_0) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{k^2}{4} + 1\right) = \frac{k^2}{12} - \frac{1}{3}. \tag{13}$$

Составим для рекуррентного соотношения $3a_{m+1} + ka_m + a_{m-1} = 0$ характеристическое уравнение:

$$3\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 12}}{6}. \tag{14}$$

Отсюда $a_m = \lambda_1^m \cdot C_1 + \lambda_2^m \cdot C_2$ (или $a_m = \lambda_1^m(C_1 + m \cdot C_2)$ в случае совпадения $\lambda_1 = \lambda_2$, т. е. в случае $k = \pm 2\sqrt{3}$). Константы C_1, C_2 можно найти из системы

$$\begin{cases} \frac{k}{4} & = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2; \\ \frac{k^2}{12} - \frac{1}{3} & = \lambda_1^2 C_1 + \lambda_2^2 C_2. \end{cases} \tag{15}$$

В качестве примера рассмотрим случай $k = 0$. Тогда $\lambda_1 = -\sqrt{3}i/3$, $\lambda_2 = \sqrt{3}i/3$, и система (15) приобретает вид (см. [10])

$$0 = -\sqrt{3}iC_1/3 + \sqrt{3}iC_2/3;\; -1/3 = -1/3C_1 + -1/3C_2/9 \;\Rightarrow\; C_1 = C_2 = 1/2;$$

откуда

$$\chi_1 \left(1 - \frac{1}{3}\chi_2 + \frac{1}{9}\chi_4 - \cdots + (-1)^k \frac{1}{3^k}\chi_{2k} + \cdots\right) =$$

$$= \chi_1 - \frac{1}{3}(\chi_3 + 3\chi_1) + \frac{1}{9}(\chi_5 + 3\chi_3) - \frac{1}{27}(\chi_7 + 3\chi_5)\cdots = 0$$

Формальный ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{3^m}\chi_{2m}$ принадлежит $L^p\langle x, y\rangle$ для любого $p > 2$, но не принадлежит $L^2\langle x, y\rangle$, так как

$$\frac{1}{3^{mp}} e_{2m} = \frac{4 \cdot 3^{2m}}{3^{mp}} \asymp \frac{1}{3^{m(p-2)}}.$$

Находить константы C_1, C_2 необязательно, следует лишь оценить $|a_m|^p \cdot 3^{m-1}$ при $m \to \infty$. Так как $|\lambda_1|\,|\lambda_2| = 1/3$, то для большего по модулю корня справедлива оценка $|\lambda_1| \geq 1/\sqrt{3}$, а для меньшего по модулю корня – $|\lambda_2| \leq 1/\sqrt{3}$. Может ли быть константа C_1 при большем по модулю из корней нулевой? Исследуем этот случай. Тогда, предполагая $C_1 = 0$ и $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$, получим из системы (15), деля второе уравнение на первое:

$$\frac{k^2/12 - 1/3}{k/4} = \lambda_2 = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 12}}{6},$$

отсюда $2k^2 - 8 = -k^2 \pm k\sqrt{k^2 - 12}$ или $3k^2 - 8 = \pm k\sqrt{k^2 - 12}$, следовательно $9k^4 - 48k^2 + 64 = k^4 - 12k^2$. Это эквивалентно $2k^4 - 9k^2 + 16 = 0$ и дает корни $(k^2)_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{47}i}{4}$, откуда получаем четыре корня

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{9/8 + \sqrt{2}} \pm i\sqrt{\sqrt{2} - 9/8};\; k_{3,4} = \pm\sqrt{9/8 + \sqrt{2}} \mp i\sqrt{\sqrt{2} - 9/8}. \tag{16}$$

Отложим пока дальнейшие вычисления с этими корнями и найдем значения k, при которых существует $p > 1$ такое, что $\gamma \in L^p\langle x, y\rangle$ и $b \cdot \gamma = 0$, пользуясь

теоремой 1.

$$(\exists p)\ 3\cdot\left|\frac{-k\pm\sqrt{k^2-12}}{6}\right|^p<1 \quad\Leftrightarrow\quad \left|\frac{-k\pm\sqrt{k^2-12}}{6}\right|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |\lambda_{1,2}|<1.$$

Решим это неравенство, заменяя сначала неравенство на равенство. Если $|\lambda_1|=1$, то во-первых, $\lambda_1=e^{i\varphi}$, а во-вторых $|\lambda_2|=1/3$ – меньший по модулю корень (и заведомо не равный ни одному из корней $k_{1,2,3,4}$, найденных выше). Тогда

$$3\lambda_1^2+k\lambda_1+1=0\ \Rightarrow\ k=-3\lambda_1-\lambda_1^{-1}=-3e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}=-4\cos\varphi-2i\sin\varphi.$$

Если φ пробегает отрезок $[0;2\pi]$, то получаем, что k пробегает эллипс с полуосями 4 и 2. Ясно, что именно внутренность этого эллипса будет решением неравенства $|\lambda_{1,2}|<1$. Подводим итог.

Т е о р е м а 2. Элемент $k+x+y+x^{-1}+y^{-1}$, где $k=u+iv\in\mathbb{C}$, $u,v\in\mathbb{R}$ будет иметь ненулевой правый аннулятор среди радиальных функций банахова пространства $L^p\langle x,y\rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{u^2}{16}+\frac{v^2}{4}<1. \tag{17}$$

При заданном $k=u+iv$, удовлетворяющим неравенству (17), величина p такая, что $\gamma\in L^p\langle x,y\rangle$ должна удовлетворять неравенству

$$\left|\frac{-k\pm\sqrt{k^2-12}}{6}\right|^p<\frac{1}{3}. \tag{18}$$

Решение этого неравенства относительно p заведомо больше 2, ибо

$$\max\left|\frac{-k\pm\sqrt{k^2-12}}{6}\right|\geq\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Возвратимся к корням $k_{1,2,3,4}$, ранее найденным, и проверим, что все они лежат внутри эллипса $\frac{u^2}{16}+\frac{v^2}{4}=1$:

$$\frac{9/8+\sqrt{2}}{16}+\frac{\sqrt{2}-9/8}{4}<1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{9}{8}+\sqrt{2}+4\sqrt{2}-\frac{9}{2}<16 \quad\Leftrightarrow\quad 5\sqrt{2}-\frac{27}{8}<16,$$

что верно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Н. И., Дубровина Т. В. Конусы в группах// Мат.сборник. — 1996. — Т.187. — №7. — С. 59–74.

2. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. Н. Основы теории групп. — 3-е изд. дополненное. — М.: Наука. — 1982. — 288 с.

3. Brungs H. H., Gräter J. On central extention of SL(2, F) admitting left-ordering // Journalof Algebra.—2017. — 486. — P. 288–327.

4. Cliff G. H. Zero divisors and idempotents ib group rings// Canadian J. Math. — 1980. — 32. — P. 596-602.

5. Formanek E. The zero divisor question for suersolvable groups// Bull. Austral. Math. Soc. — 1973. — 9. — P. 69-71.

6. Lewin J. A note on zero divisors in group rings//Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — 31. —- P. 357-359.

7. Linnell P. A.. Division rings ang group von Neumann algebras// Forum Math. — 1993. — 5. — P. 561-576 .

8. Linnell P. A., Puls M. J. Zero divisiors and $L^p(G)$, II// arXiv:math/0003191v1. — 28 Mar 2000. — P. 1-9.

9. Mura R. B., Premtulla A. H. Oderable Groups. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. — Marcel Dekker, New York. — volume 27. – 1977

10. Puls M. J. Zero divisors and $L^p(G)$// Proc. Amer. Math. Soc. — 2014. — 6.— 8.— P. 230-241.

11. Pytlik T. Radial functions on free groups and a decomposition of the regular representation into irreducible components// J. Reine Angew. Math. — 1981. — 326. — P. 124-135.

УДК 512.552, 512.553

ЦЕПНЫЕ МОДУЛИ И КОЛЬЦА

Н. И. Дубровин, д.ф.-м.н., проф.
Владимирский государственный университет
e-mail: *ndubrovin81@gmail.com*

Правый R-модуль M назовем *n-цепным*, если для любых элементов $m_0, m_1, \ldots, m_n \in M$ найдется элемент m_i лежащий в подмодуле, порожденном остальными элементами. Кольцо R назовем *n-цепным справа*, если правый регулярный модуль n-цепной. Устанавливаются свойства n-цепных колец. Доказывается, что n-цепное полупростое кольцо будет артиновым.

Ключевые слова: цепной модуль, артиново кольцо, полуцепные кольца

ВВЕДЕНИЕ. В данной работе дается несколько необычная характеристика простых артиновых колец и приводятся примеры применения такой характеристики. Все кольца подразумеваются ассоциативными, с единицей, подкольцо наследует единицу кольца. Кольцо R называется *артиновым справа*, если любая убывающая по включению цепочка правых идеалов стабилизируется. Аналогично определяются артиновы слева кольца. Кольцо *простое*, если в нем нет собственных двусторонних идеалов. Например, кольцо матриц D_n над телом D будет простым.

Хорошо известна теорема Артина-Веддербарна, дающая описание простых артиновых колец, это в точности кольца матриц над телами (см. [4, §2.1]).

ЦЕПНЫЕ МОДУЛИ. Правый R-модуль M называется *цепным*, если его подмодули линейно упорядочены по включению. Аналогично определяются левые цепные модули. Из определения вытекает, что правый R-модуль M будет цепным тогда и только тогда, когда для любых элементов $m, m' \in M$ либо $mR \subseteq m'R$, либо $m'R \subseteq mR$. Ясно, что любой простой модуль ($MR \neq 0$ и в M нет собственных подмодулей) будет цепным, а прямая сумма $M \oplus N$ ненулевых модулей уже цепной не будет. Правый модуль называют *полуцепным*, если он представим в виде прямой суммы цепных модулей (см. [3, 25.1.12]). Видимо истоки этой тематики следует искать в теории абелевых групп: $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ – цепное артиново кольцо (p – простое число), а любая конечно порожденная периодическая абелева группа – полуцепной модуль над кольцом целых чисел.

Кольцо R, у которого правый регулярный модуль R_R цепной называется *цепным справа*. Аналогично определяются левые цепные кольца. Кольцо, цепное справа и слева называется *цепным*. Определение цепных колец можно считать хорошо известным (см. [1]). Цепные справа области целостности R обладают правым классическим телом частных D, для любого ненулевого элемент d которого либо $d \in R$, либо $d^{-1} \in R$.

Определение. Правый R-модуль M назовем *n-цепным*, если для любых элементов $m_0, m_1, \ldots, m_n \in M$ найдется элемент m_i, лежащий в подмодуле, порожденном остальными элементами. Кольцо R назовем *n-цепным справа*, если правый регулярный модуль n-цепной. Аналогично определяются левосторонние аналоги этих понятий. Кольцо называется *n-цепным*, если оно n-цепное как справа, так и слева.

Отметим, что 1-цепной справа модуль – это в точности цепной модуль. Кроме того, условие "модуль n-цепной" влечет условие "модуль m-цепной" для всякого $m \leq n$.

Теорема 1. Если M – n-цепной справа модуль, и $m_1, \ldots, m_t \in M$, то можно выбрать не более, чем n элементов из множества $\{m_1, \ldots, m_t\}$ так, что правый подмодуль, порожденный ими, содержит все $m_j, 1 \leq j \leq n$.

Теорема 2. Если M – n-цепной правый R-модуль, и N – подмодуль модуля M, то N и M/N также будут n-цепными модулями. Далее, если $M_1, \ldots, M_k$ – n-цепные правые R-модули, то их прямая сумма будет nk-цепным модулем.

Справедливость первого утверждения сразу вытекает из определения n-цепных модулей. Докажем второе утверждение индукцией по k. Пусть $M = \oplus_j M_j$, $t = nk$ и $\pi : M \to M_1$ – естественная проекция. Так как модуль M_1 n-цепной, то можно выбрать n элементов, пусть это будут $m_1, \ldots, m_n$ таких, что

$$\sum_{j=0}^{t} \pi(m_j)R = \sum_{j=1}^{n} \pi(m_j).$$

Тогда

$$d_j := m_j - m_1 r_{j1} - \ldots - m_n r_{jn} \in \operatorname{Ker} \pi$$

для подходящих элементов $r_{ji} \in R$ и для $j = 0$, а также для всех $n+1 \leq j \leq t$. Таких индексов будет $n(k-1)$ штук, а $\operatorname{Ker} \pi = M_2 \oplus \ldots \oplus M_k$. Следовательно можно воспользоваться предположением индукции и найти элемент d_j, пусть это будет d_0, такой, что $d_0 \in \sum_{j=n+1}^{t} d_j R \subseteq \sum_{j=1}^{t} m_j R$. Так как элемент d_0 сравним с m_0 по модулю $\sum_{j=1}^{t} m_j R$, то $m_0 \in \sum_{j=1}^{t} m_j R$.

Замечание. Если все модули M_j, $1 \leq j \leq k$ ненулевые, то их прямая сумма не может быть $(k-1)$-цепным модулем, что показывает семейство ненулевых элементов $(0, \ldots, 0, m_j, 0, \ldots, 0)$ этой прямой суммы.

ЦЕПНЫЕ КОЛЬЦА. Применим результаты о цепных модулях к кольцам.

Теорема 3. Пусть R – n-цепное справа кольцо, и $e \in R$ – идемпотент. Тогда кольцо eRe будет также n-цепным справа. Более того, если кольцо $(1-e)R(1-e)$ не является k-цепным справа, то eRe будет $(n-k-1)$-цепным справа кольцом.

Доказательство. Первая часть утверждения непосредственно следует из определения n-цепного кольца. В частности, число k, фигурирующее в формулировке предложения, не превосходит $n-1$.

Итак, пусть $a_0, a_1, \ldots, a_t \in eRe$, где $t = n-k-1$ и дано, что кольцо $(1-e)R(1-e)$ не является k-цепным. Выберем элементы $s_0, \ldots, s_k \in (1-e)R(1-e)$ так, что ни один из них не принадлежит правому $(1-e)R(1-e)$-идеалу, порожденному остальными s_j-ми.

Так как кольцо R n-цепное справа, то в множестве $s_0, \ldots, s_k, a_0, \ldots, a_t$ найдется хотя бы один элемент, обозначим его b, принадлежащий правому R-идеалу, порожденному остальными элементами. Рассмотрим два случая

Случай 1. $b \in \{s_0, \ldots, s_k\}$. Без ограничения общности можно считать, что $b = s_0$. Тогда

$$s_0 = s_1 r_1 + \cdots + s_k r_k + a_0 z_0 + \cdots + a_t z_t$$

для некоторых $r_j, z_t \in R$. Пользуясь тем, что $s_j = (1-e)s_j(1-e)$ и умножая последнее соотношение слева и справа на идемпотент $1-e$, получаем равенство $s_0 = s_1 r_1(1-e) + \ldots + s_k r_k(1-e)$, которое противоречит выбору элементов s_i. Следовательно случай 1 не может иметь места.

Случай 2. $b \in \{a_0, a_1, \ldots, a_t\}$. Без ограничения общности можно считать, что $b = a_0$. Тогда

$$a_0 = a_1 r_1 + \cdots + a_t r_t + s_0 z_0 + \cdots + s_k z_k$$

для некоторых $r_j, z_t \in R$. Умножая слева и справа это равенство на e, получаем

$$a_0 = a_1(er_1e) + \cdots + a_t(er_te),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. Если R – n-цепное справа (слева) кольцо, то кольцо матриц R_k будет nk- цепным справа (слева).

Доказательство предложения опирается на лемму.

Лемма . Если M – n-цепной правый R-модуль, то $M^k = M \oplus \cdots \oplus M$ будет также n-цепным правым R_k-модулем.

Доказательство. Пусть $m_j = (m_{1j}, \ldots, m_{kj}) \in M^k$, $0 \le j \le n$, $m_{ij} \in M$. Из множества $\{m_{ij}\}$ выберем подмножество $\Delta = \{m_{i_1 j_1}, \ldots, m_{i_n j_n}\}$, содержащее не более, чем n элементов, и порождающее модуль $\sum_{i,j} m_{ij} R$. Так как число элементов множества $\{j_1, \ldots, j_n\}$ не превосходит n, то найдется индекс j, пусть это будет 0, не принадлежащий $\{j_1, \ldots, j_n\}$. Тогда для любого $i, 1 \le i \le k$ имеет место разложение

$$m_{i0} = \sum_{1 \le \beta, \alpha \le k} m_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta}^{(i)}$$

для подходящих элементов $r_{\alpha\beta}^{(i)} \in R$. Отсюда

$$m_0 = m_1 A_1 + \dots m_n A_n,$$

где

$$A_j = \begin{pmatrix} r_{1j}^{(1)} & r_{1j}^{(2)} & \dots\dots\dots & r_{1j}^{(k)} \\ r_{2j}^{(1)} & r_{2j}^{(2)} & \dots\dots\dots & r_{2j}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{kj}^{(1)} & r_{kj}^{(2)} & \dots\dots\dots & r_{kj}^{(k)} \end{pmatrix}, \qquad (1 \le j \le n).$$

Вернемся к доказательству предложения. Регулярный правый R_k-модуль раскладывается в прямую сумму модулей R^k. По лемме каждое слагаемое будет n-цепным правым R_k-модулем. Тогда, согласно теореме 2, R_k – nk-цепной правый R_k-модуль.

Ряд подмодулей $0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n = M$ модуля M называется *композиционным*, если каждый фактор M_{i+1}/M_i – простой модуль. Если модуль M удовлетворяет как условию обрыва возрастающих цепей, так и условию обрыва убывающих цепей подмодулей, то он обладает композиционным рядом и, кроме того, все композиционные ряды имеют одинаковую длину (см. [5, §1.4]). Обозначим посредством $\operatorname{len} M$ длину композиционного ряда модуля M.

Т е о р е м а 5. Пусть R – n-цепное справа (слева) полупростое кольцо. Тогда кольцо R артиново и $\operatorname{len} R \le n$. Наоборот, любое полупростое артиново кольцо R будет n-цепным для $n = \operatorname{len} R_R$.

Доказательство первой части теоремы следует из такого утверждения: найдутся не более n максимальных правых идеалов кольца R, пересечение которых равно нулю. Докажем это утверждение. Пусть

$$R \subset L_1 \subset L_1 \cap L_2 \subset \dots \subset L_1 \cap L_2 \cap \dots \cap L_s$$

– цепочка правых идеалов кольца R, где L_i – максимальные правые идеалы. Тогда

$$R/L_1 \cap L_2 \cap \dots \cap L_s \cong N_1 \oplus \dots \oplus N_s,$$

где $N_i = R/L_i$ – простые правые R-модули.

В виду замечания после теоремы 2 получаем оценку $s \le n$. Так как радикал Джекобсона кольца R нулевой, то пересечение всех максимальных правых идеалов равно 0. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Вторая часть теоремы – непосредственное следствие теорем 2 и 4, если учесть к тому же, что любое тело является 1-цепным кольцом.

С л е д с т в и е. Для n-цепного (справа) кольца фактор-кольцо по радикалу Джекобсона является артиновым кольцом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Н. И. Цепные области//Вестник МГУ. Сер. матем., мех. — 1980. — №2. — С. 51-54.

2. Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир. — 1971.— 283 с.

3. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. — Т2. — М.: — Мир. — 1979. — 464 с.

4. Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М.: Мир. — 1972. — 192 с.

УДК 512.555

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ ПРОСТРАНСТВА ФОРМАЛЬНЫХ РЯДОВ НАД ЛЕВОУПОРЯДОЧЕННОЙ ГРУППОЙ

Т. В. Дубровина, к.ф.-м.н., доц.
Владимирский государственный университет
e-mail: *ndubrovin81@gmail.com*

Рассматривается рациональное замыкание D групповой алгебры FG левоупорядоченной группы G в кольце операторов пространства L формальных рядов $\gamma = \sum_{g\in G} a_g g$ (a_g – элементы поля F) с вполне упорядоченными носителями $\operatorname{supp}\gamma$. В универсальной локализации S групповой алгебры FG по системе ненулевых элементов выделяется FG-подмодуль H, порожденный элементами вида $(a+b)^{-1}$, где $a, b \in F^* \times G$. Доказывается, что сужение естественного FG-гомоморфизма $\tau\colon S \mapsto D$ на подмодуль H будет мономорфизмом.

Ключевые слова: упорядоченные группы, формальные ряды, универсальная локализация

Пусть F – поле; $(G; \cdot, e, \leq)$ – левоупорядоченная группа, L – пространство формальных рядов $\gamma = \sum_{g\in G} a_g g$ с вполне упорядоченными носителями $\operatorname{supp}\gamma$, см. [2]. Рассматриваем FG как подкольцо кольца операторов $\operatorname{End} L$; действие оператора d записываем как $d[\gamma]$. Обозначим посредством D рациональное замыкание групповой алгебры FG в кольце операторов $\operatorname{End} L$. Известно, что групповая алгебра FG обратима в кольце D (см. [1, 2]). Пусть $D[1]$ – кольцо, порожденное над FG всеми обратными элементами r^{-1} $(0 \neq r \in FG)$. С другой стороны, обозначим S универсальную локализацию групповой алгебры FG по системе ненулевых элементов $FG \setminus \{0\}$ (см. [3, глава 7]). Ввиду универсальности, существует эпиморфизм $\tau : S \to D[1]$ над алгеброй FG. Центральным вопросом является следующий: будет ли τ изоморфизмом? Иными словами, следует ли из равенства $\tau(\tilde{d}) = 0$, где $\tilde{d} \in S$, равенство нулю самого элемента $\tilde{d}$? Представляется естественным, отвечая на этот вопрос, продвигаться по мере увеличения сложности элемента $\tilde{d}$ (подробнее о сложности см. в [4]). Так как сужение τ на FG – тождественное отображение, то следует рассмотреть элементы универсальной локализации

на шаг сложнее, чем элементы групповой алгебры. Таковыми являются элементы вида

$$\tilde{d} = a_1 + \cdots + a_s + (b_1 + c_1)^{-1} + \cdots + (b_t + c_t)^{-1}. \qquad (1)$$

Здесь $a_i, b_i, c_i \in F^* \times G$. Операторы $ag \in F^* \times G$ (имеется ввиду умножение формальных рядов на ag слева) мономиальны и обратимы и являются самыми простыми среди ненулевых рациональных операторов. Считаем далее, что $\tilde{d} \neq 0$, причем запись (1) является наипростейшей для элемента $\tilde{d}$. Обозначим $d = \tau(\tilde{d})$. Запись рационального оператора $d \in D[1]$ через элементы поля F и группы G точно такая же как и в (1), но в общем случае не гарантируется, что она будет наипростейшей для d. Тот факт, что это на самом деле так, и составляет содержание следующей теоремы 1. Обозначим через H совокупность элементов вида (1); они образуют FG-подмодуль в кольце S.

Т е о р е м а 1. Сужение канонического эпиморфизма τ на подмодуле H является изоморфизмом.

Учитывая, что τ эпиморфизм, следует лишь доказать, что если $d = 0$ в кольце D, то $\tilde{d} = 0$ в кольце S. Доказательству теоремы предпошлем определение и лемму.

О п р е д е л е н и е. Для двух элементов $g, h \in G$ пишем $g \asymp h$, если пересечение циклических групп, порожденных элементами g и h, имеет конечный индекс в каждой из групп $\mathrm{gr}\,\{g\}$, $\mathrm{gr}\,\{h\}$.

Из определения непосредственно вытекает

Л е м м а 1. а) Отношение $g \asymp h$ в группе G эквивалентно тому, что найдутся целые числа n, m такие, что $g^n = h^m$.

б) Если $g, h > e$, то $g \asymp h$ тогда и только тогда, когда найдутся натуральные n, m такие, что $g^n = h^m$.

в) Отношение $\asymp$ задает эквивалентность на группе G.

Например, в левоупорядочиваемой группе трилистника $\langle u, v \mid u^2 = v^3 \rangle$ имеем: $u \asymp v$, но элементы u, v не коммутируют. В абстрактной группе семейство элементов, находящихся в отношении $\asymp$ с нейтральным элементом составляет множество периодических элементов. В свободной группе класс эквивалентности, пополненный нейтральным элементом будет бесконечной циклической группой.

Отметим равенство

$$(1 - a)^{-1} = (1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})(1 - a^n)^{-1} \qquad (2)$$

справедливое в любом кольце с элементом a для которого $1 - a^n$ обратим; тогда и элемент $1 - a$ обратим автоматически.

Напомним, что $v(\gamma) := \min \mathrm{supp}\,\gamma$; для $\gamma = 0$ это будет ∞ с обычными правила обращения с бесконечностью. Перепишем элемент $\tilde{d}$ по другому. Без ограничения общности можно считать, что $v(\tau(c_i b_i^{-1})) > e$ для

любого i (равенства $v(\tau(c_i b_i^{-1})) = e$ быть не может, тогда бы $v(b_i) = v(c_i)$ и $b_i + c_i \in F^* \times G$, что противоречит свойству записи (1) быть наипростейшей). Обозначим $z_i = -c_i b_i^{-1}$. Тогда

$$\tilde{d} = a_1 + \cdots + a_s + b_1^{-1}(1 - z_1)^{-1} + \cdots + b_t^{-1}(1 - z_t)^{-1} \tag{3}$$

Разобьем множество $\{z_1, z_2, \ldots, z_t\}$ на классы эквивалентности относительно отношения $\asymp$. Пусть $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k$ – представители классов эквивалентности и, скажем, $z_1, \ldots, z_m$ составляют класс эквивалентности, представителем которого является $\tilde{y}_1$. Согласно лемме 1 найдутся натуральные числа $N_1, \ldots, N_m$ такие, что

$$y_1 := v(z_1^{N_1}) = \ldots = v(z_m^{N_m}).$$

Это значит, что $z_1^{N_1}, \ldots, z_m^{N_m}$ отличаются друг от друга лишь множителями из F^*. Тогда найдутся элементы $\alpha_j \in F^*$ такие, что $z_j^{N_j} = \alpha_j y_1$; поэтому

$$\sum_1^m b_j^{-1}(1 - z_j)^{-1} = \sum_1^m \tilde{r}_j(1 - \alpha_j y_1)^{-1} = r_1 \prod_1^m (1 - \alpha_j y_1)^{-1},$$

где $\tilde{r}_j = b_j^{-1}(1 + z_j + z_j^2 + \cdots + z_j^{N_j - 1})$ согласно (2) и

$$r_j = \sum_1^m \tilde{r}_j (1 - \alpha_1 y_1) \ldots \widehat{(1 - \alpha_j y_1)} \ldots (1 - \alpha_m y_1) \in FG,$$

(шапка наверху означает отсутствие соответствующего множителя).

Итак, найдется многочлен $P_1(x) \in F[x]$ с единичным свободным членом и раскладывающийся на линейные множители такой, что

$$\sum_1^m (b_j + c_j)^{-1} = r_1 P_1(y_1)^{-1}.$$

Аналогично преобразуется сумма элементов $(b_j + c_j)^{-1}$ для других классов эквивалентности (их k штук). Получаем

$$d = r + r_1 P_1(y_1)^{-1} + \cdots + r_k P_k(y_k)^{-1}. \tag{4}$$

Здесь $r = a_1 + \cdots + a_s \in FG$, $P_j(x)$ – многочлены с единичным свободным членом и раскладывающиеся на линейные множители; $y_1, \ldots y_k$ – элементы группы G большие нейтрального элемента e и попарно не сравнимые между собой в смысле отношения $\asymp$.

Рассмотрим случай $k = 1$. Тогда $\tilde{d} = (rP_1(y_1) + r_1)P_1(y_1)^{-1}$. Если $d = 0$, то $rP_1(y_1) + r_1 = 0$, а поэтому $\tilde{d} = 0$.

Далее считаем, что $k > 1$. Предположим, что число элементов в носителе $\operatorname{supp} \tau(r_1 P_1(y_1)^{-1})[e]$ конечно. Тогда

$$\tau(r_1 P_1(y_1)^{-1})[e] = q[e]$$

для некоторого элемента $q \in FG$ (здесь e – формальная сумма вида $\sum_{g\in G} a_g g$, у которой $a_e = 1_F$, а остальные коэффициенты – нули). Следовательно,

$$r_1 = \tau(r_1) = \tau(qP_1(y_1)) = qP_1(y_1),$$

откуда получаем равенство $r_1 P_1(y_1)^{-1} = q$ в кольце S. Но тогда запись (1) не будет наипростейшей. Итак, доказано, что число элементов в носителе $\operatorname{supp} r_1 P_1(y_1)^{-1}[e]$ бесконечно.

Предположим, что $d[e] = 0$. Тогда

$$r_1 P_1(y_1)^{-1}[e] = (-r - r_2 P_2(y_2)^{-1} - \ldots - r_k P_k(y_k)^{-1})[e]$$

и поэтому

$$\operatorname{supp} r_1 P_1(y_1)^{-1}[e] \subseteq \operatorname{supp} r \cup \left(\bigcup_2^k \operatorname{supp} r_j P_j(y_j)^{-1}[e] \right). \qquad (5)$$

Но число элементов в объединении $\left(\bigcup_{j=1}^k \operatorname{supp} r_j\right) \cup \operatorname{supp} r$ конечно, поэтому из включения (5) вытекает, что существуют элементы $g, h \in G$, индекс $j > 1$, числа $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ и *различные* натуральные числа n_1, n_2 такие, что

$$g y_1^{n_1} = h y_j^{m_1}; \quad g y_1^{n_2} = h y_j^{m_2}.$$

Однако из этого следует, что $y_1^{n_2-n_1} = y_j^{m_2-m_1} \neq 1$, т.е. $y_1 \asymp y_j$, – противоречие с выбором элементов y_j. Это противоречие показывает, что на самом деле $d[e] \neq 0$. Тем самым $d \neq 0$ и теорема доказана.

Замечание. Для произвольного $h \in G$ имеет место равенство

$$d[h] = \left(a_1 h + \cdots + a_s h + \sum_1^t (h^{-1} b_i + h^{-1} c_i)^{-1} \right)[e].$$

Следовательно $d[h] \neq 0$ для любого $h \in G$. Отсюда следует, что d – монотонный автоморфизм пространства L, см. [2].

Замечание. Пусть $\tilde{d}$ – элемент вида (1), а $r, s \in FG$ – ненулевые элементы. Тогда равенство $\tau(\tilde{d} + r^{-1} + s^{-1}) = 0$ (*) влечет равенство нулю самого элемента $\tilde{d} + r^{-1} + s^{-1}$. Действительно,

$$\tilde{d} + r^{-1} + s^{-1} = r^{-1} \left(r \cdot \tilde{d} \cdot s + s + r \right) s^{-1}.$$

Следовательно равенство (*) влечет $\tau(r \cdot \tilde{d} \cdot s + s + r) = 0$, а так как элемент $r \cdot \tilde{d} \cdot s + s + r$ принадлежит H, то по теореме 1 получаем, что $r \cdot \tilde{d} \cdot s + s + r = 0$. Отсюда следует искомое равенство $\tilde{d} + r^{-1} + s^{-1} = 0$ в кольце S.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Н. И. Обратимость группового кольца правоупорядоченной группы над телом// Мат. заметки. — 1987. — Т.42. — №4. — С. 508-518.

2. Дубровин Н. И. Рациональные операторы пространства формальных рядов// Фундаментальная и прикладная математика. — 2006. — 12. — 3. — С. 9-53

3. Кон П. М. Свободные кольца и их отношения. — М.: Мир. — 1975. — 422 с.

4. Dubrovin N. I., Gräter J., Hanke T. Complexity of elements in rings// Algebras and Representation Theory. — 2003. — 6. — P. 33-45.

5. Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир. — 1971.— 283 с.

6. Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М.: Мир. — 1972. — 192 с.

УДК 512.552

О КОЛЬЦАХ МАТРИЦ НАД ТЕЛАМИ

Т. В. Дубровина, к.ф.-м.н., доц.
Владимирский государственный университет
e-mail: *ndubrovin81@gmail.com*

Кольца матриц над телами характеризуются как примитивные кольца Q для которых найдется фиксированное число k такое, что для любого элемента $q \in Q$ один из элементов в строке $p_0(q), p_1(q), \ldots, p_n(q)$ обратим. Здесь p_j последовательность многочленов, задающаяся рекуррентно $p_0(t) = t; \quad p_n(t) = 1 + p_{n-1}(t) \cdot \ldots \cdot p_0(t)$.

Ключевые слова: простые артиновы кольца, примитивные кольца, кольцо матриц над телом

Рассматриваются ассоциативные кольца с единицей, не равной нулю. Подкольца кольца наследуют единицу. Элемент q кольца Q *регулярен*, если равенство $qa = 0$ также, как и равенство $aq = 0$, влечет $a = 0$. Множество регулярных элементов кольца Q обозначаем Q^*, в то время как мультипликативную группу обратимых элементов кольца Q обозначаем $U(Q)$. Кольцо Q называется *примитивным (справа)*, если существует точный неприводимый правый Q-модуль V (см. [2, §3.1]). Это значит, что V не содержит собственных подмодулей и $Vq \neq 0$ для любого ненулевого $q \in Q$ (определение эквивалентно аналогичному в [4, §1.1])). Примитивные кольца могут быть устроены достаточно сложно, в частности их центр может быть произвольной коммутативной областью целостности (см. [3, 19.22]) в то время как дополнительное условие обрыва убывающих по включению цепочек правых идеалов позволяет заключить, что такое кольцо будет кольцом матриц над телом. Кольцо называется *простым*, если оно не содержит собственных идеалов.

Определим рекуррентно последовательность многочленов

$$p_0(t) = t; \quad p_n(t) = 1 + p_{n-1}(t) \cdot \ldots \cdot p_0(t).$$

Например, $p_1(t) = 1 + t$, $p_2(t) = 1 + t + t^2$, $p_3(t) = 1 + t + 2t^2 + 2t^3 + t^4$ и т. д.

Т е о р е м а 1. Пусть Q – примитивное справа (слева) кольцо. Следующие условия эквивалентны:

1) кольцо Q артиново;

2) кольцо Q вложимо в простое артиново кольцо S так, что любой элемент $q \in Q$, регулярный в S, обратим в кольце Q (символически $S^* \cap Q \subseteq U(Q)$);

3) существует фиксированное натуральное число k такое, что для любого элемента $q \in Q$ найдется неотрицательное целое число i, не превосходящее k, для которого элемент $p_i(q)$ обратим.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. 1) $\Rightarrow$ 2). В качестве кольца S можно взять само кольцо Q. Известно, что в кольце матриц над телом множество регулярных элементов совпадает с множеством обратимых элементов, поэтому условие $Q^* \cap Q = Q^* \subseteq U(Q)$ будет выполнено.

2) $\Rightarrow$ 3). Для того, чтобы установить справедливость этой импликации, достаточно показать, что свойство, сформулированное в третьем пункте теоремы, выполняется для кольца матриц над телом. Действительно, пусть $S = D_n$, где D – тело, а $s \in S$ – произвольный элемент. Рассматривая элементы кольца S как линейные преобразования векторного пространства L размерности n над телом D, устанавливаем, что

$$\operatorname{Ker} p_i(s) \cap (\operatorname{Ker} p_{i-1}(s) + \cdots + \operatorname{Ker} p_0(s)) = 0.$$

Действительно, если $p_i(s)[l] = 0$, что эквивалентно $l = -p_0(s) \dots p_{i-1}(s)[l]$ и $l = l_0 + l_1 + \cdots + l_{i-1}$, где все $l_j \in \operatorname{Ker} p_j(s)$, то $p_0(s) \dots p_{i-1}(s)[l] = 0$, откуда $l = 0$.

Таким образом, если предположить, что элементы $p_i(s)$ не регулярны для всех $0 \leq i \leq n$, то неравенство

$$1 + n \leq \dim (\operatorname{Ker} p_0(s) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} p_n(s)) \leq \dim L \leq n$$

приводило бы к противоречию. Итак, в пункте 3 теоремы можно положить $k = n$.

3) $\Rightarrow$ 1). По теореме плотности, Q – плотное кольцо линейных преобразований векторного пространства V над телом D. Пусть K – простое подполе тела D, т.е поле в теле D, порожденное единицей.

Л е м м а 1. Существует матрица A размера $n \times n$ для некоторого натурального числа n над полем K такая, что матрицы $p_i(A)$ вырождены для всех $i = 0, 1, \dots, k$ (число k такое же как и в пункте 3 теоремы 1).

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Пусть K_i – конечное расширения поля K при помощи одного из корней многочлена $p_i(t)$ для $i = 2, \dots, k$. Поле K_i вкладывается в кольцо матриц K_{n_i} при помощи правого регулярного представления. Пусть A_i – матрица, соответствующая корню многочлена $p_i(t)$ при этом вложении. Рассмотрим матрицу A размера $n \times n$, где $n = 2 + \sum_{i=2}^{k} n_i$

вида

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, A_2, \ldots, A_k\right).$$

Тогда у матрицы $p_i(A)$, i-ый блок ($i = 1, 2, \ldots, k$) будет нулевой, следовательно матрица $p_i(A)$ будет вырожденной.

Продолжим доказательство теоремы 1. Нам достаточно доказать, что пространство V конечномерно. Предположим, что это не так. Тогда V содержит подпространство V_n размерности n, где число n взято из леммы 1. Рассмотрим подкольцо S кольца Q, состоящее из элементов $q \in Q$ таких, что $qV_n \subseteq V_n$. Множество $W_n = \{q \in Q \mid qV_n = 0\}$ будет двусторонним идеалом этого кольца. Из теоремы плотности следует изоморфизм $S/W \cong D_n$. Так как $K_n \subseteq D_n$, то мы может рассмотреть прообраз r матрицы A, взятой из леммы, при эпиморфизме $S \mapsto D_n$. По условию, $p_i(r)$ – обратимый элемент кольца Q для некоторого i, $0 \leq i \leq k$. В частности $\operatorname{Ker} p_i(r) \cap V_n = 0$. Отсюда получаем, что $p_i(A)$ – невырожденная и, следовательно, обратимая матрица, – противоречие с выбором A.

Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые приложения полученной характеризации простых артиновых колец. Скажем, что кольцо удовлетворяет условию $\mathcal{P}_n$, если для него выполнено свойство 3) формулировки теоремы 1. Кольцо R назовем *матрично локальным* (см. [1]), если его фактор кольцо по радикалу Джекобсона будет кольцом матриц над телом. Обозначим $J(R)$ радикал Джекобсона кольца R. Примеры колец, отличных от простых артиновых, и удовлетворяющих условию $\mathcal{P}_n$, даются следующим утверждением.

Т е о р е м а 2. Любое матрично-локальное кольцо R удовлетворяет условию $\mathcal{P}_n$, где n – размерность кольца матриц $R/J(R)$ над телом.

Это утверждение есть следствие теоремы 1 и того факта, что обратимость элемента по модулю радикала Джекобсона влечет обратимость в самом кольце.

Т е о р е м а 3. Пусть примитивное справа или слева кольцо Q является объединением семейства подколец R_i, $i \in \Lambda$, такого, что для любых двух индексов $i, j \in \Lambda$ найдется индекс $k \in \Lambda$ с условием $R_i \cup R_j \subseteq R_k$. Если существует натуральное число n такое, что все кольца R_i удовлетворяют условию $\mathcal{P}_n$, то кольцо Q артиново.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Если $q \in Q$, то найдется индекс $i \in I$, для которого $q \in R_i$. По условию один из элементов $p_j(q)$ ($0 \leq j \leq n$) обратим в кольце R_i, а значит он обратим и в кольце Q, ибо у R_i та же самая единица, что и у кольца Q. Итак, условие $\mathcal{P}_n$ выполнено для кольца Q, поэтому оно по теореме 1 будет артиновым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Н. И. Некоммутативные кольца нормирования// Труды ММО. — 1982. — Т.45. — 16 с.
2. Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Факториал Пресс. — 2005. — 283 с.
3. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. — Т2. — М.: — Мир. — 1979. — 464 с.
4. Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М.: Мир. — 1972. — 192 с.

УДК 512.542+519.172

ОБ ОДНОМ ГРАФЕ С ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ОКРЕСТНОСТЬЮ ВЕРШИН

А.С. Иванова, студ.
Лысьвенский филиал ФГБОУ «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
И.Т. Мухаметьянов, к.ф.-м.н., доц.
Лысьвенский филиал ФГБОУ «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
e-mail: *muiltal@yandex.ru*

Многие классификационные теоремы о графах с той или иной степенью регулярности перечисляют графы, обладающие определёнными свойствами, в частности, локальными свойствами. Например, в [1] в классификационных теоремах упоминаются тривалентный граф (Предложение 1), четырёхвалентный и шестивалентный графы (Предложение 2).

Регулярные графы малых валентностей подробно рассматриваются в вопросах, связанных с проблемами химии, кристаллографии и в ряде других наук. Обобщению таких графов посвящён целый ряд математических статей. Относительно недавно появилась целая монография по данному направлению теории графов [2].

В данной работе рассматривается один граф малой размерности, являющийся частным случаем графа, рассмотренного в [3].

Если x и yграфа лежат на расстоянии i друг от друга, то этот факт будем обозначать через $d(x, y)=i$.

Определение 1. Для вершины x графа Γ через $\Gamma_i(x)$ обозначим ***i*-окрестность** вершины x, то есть подграф, индуцированный Γ на подмножестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от x.

$\Gamma_{\le i}(x)$– подграф, индуцированный Γ на подмножестве всех вершин, находящихся на расстоянии не большеi от x.

Определение 2. ***Окрестность вершины***– её 1-окрестность. Положим $[x]=\Gamma_1(x)=\Gamma(x)$ – окрестность вершины x, $x^{\perp}=[x]\cup\{x\}$ –***замкнутая окрестность*** вершины x.

Определение 3. ***Регулярный граф степени k***– это граф, степени вершин которого равны одному и тому же числу k.

Определение 4. Если вершины x и y регулярного графа находятся на расстоянии i друг от друга в Γ, то через $a_i(x, y)$, $b_i(x, y)$, $c_i(x, y)$ обозначим число вершин соответственно в пересечениях $\Gamma_i(x)\cap\Gamma(y)$, $\Gamma_{i+1}(x)\cap\Gamma(y)$, $\Gamma_{i-1}(x)\cap\Gamma(y)$. Назовём их ***числами пересечений графа*** Γ.

Определение 5. Упорядоченный набор

$$\{b_0(x, y), b_1(x, y), \ldots, b_{d-1}(x, y); 1, c_2(x, y), \ldots, c_d(x, y)\},$$

называется ***массивом пересечений*** графа Γ.

Если различных значений $b_i(x, y)$ и $c_i(x, y)$ относительно немного (скажем, два), то в массиве пересечений эти значения будем располагать в столбцах,

причём так, чтобы координаты в $b_i(x, y)$ и $c_i(x, y)$ будут соответствовать друг другу.

Определение 6. ***Рёберно регулярный граф*** с параметрами (v, k, λ)– это регулярный граф степени k с v вершинами,$\lambda=|[x]\cap[y]|$ для любых x и y с $d(x, y)=1$ (что равносильно *любое ребро содержится в двух треугольниках*).

Определение 7. ***Вполне регулярный граф*** с параметрами (v, k, λ, μ) – это рёберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ), у которого $\mu=|[x]\cap[y]|$ для любых x и y с $d(x, y)=2$.

Вообще, зафиксируем обозначения $\lambda(x, y)=|[x]\cap[y]|$ для x и y с $d(x, y)=1$ и $\mu(x, y)=|[x]\cap[y]|$ для x и y с $d(x, y)=2$.

Нами рассматривается один рёберно регулярный граф степени $k=6$ с $\lambda=2$.Мы предлагаем его конструкцию и находим его массив пересечений.

Рассмотрим правильный шестиугольник со стороной $d+1$. Разобьем его на треугольники, следующим образом:

1. Разделим каждую сторону на $d+1$ равных отрезков.

2. Проведём отрезки параллельно сторонам с концами в точках деления сторон.

Получается своеобразная сетка с правильными треугольными ячейками. Его можно рассматривать, как некоторый граф, который обозначим через Δ. Для каждой внутренней точки x– вершины графа, не лежащей на стороне шестиугольника, замкнутая окрестность $x^{\perp}$ представляет собой своеобразное колесо (рисунок 1).

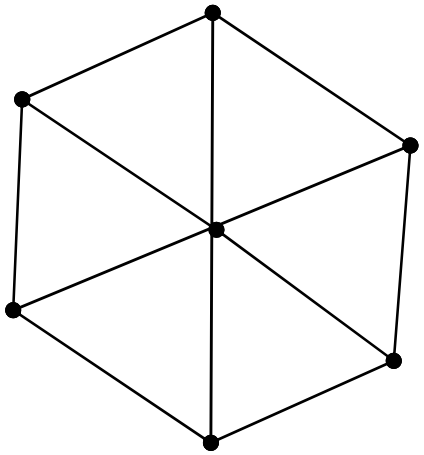


Рисунок 1 – Замкнутая окрестность вершины

Пронумеруем вершины графа следующим образом:

1. Будем считать, что граф расположен так, что какие-то две (параллельные) стороны исходного шестиугольника вертикальны.

2. Начинаем нумерацию с вершины, расположенной в центре шестиугольника, дав этой вершине номер 0, двигаясь вертикально вверх. Самая верхняя вершина получит, помер d.

3. Нумерацию продолжаем снизу вверх по левому краю графа. Вершины получат номера с $d+1$ по $2d+1$.

4. Нумерацию продолжаем снизу вверх по второму справа от «центрального» ряда.Вершины получат номера от $2d+2$ до $4d+1$.

5. Нумеруем по второму вертикальному ряду слевого края(снова снизу вверх, что мы в дальнейшем оговаривать не будем). Вершины получат номера от $4\boldsymbol{d}+2$ до $5\boldsymbol{d}+3$.

6. Аналогично продолжаем по третьему ряду справа от центра: $5\boldsymbol{d}+4$ – $7\boldsymbol{d}+2$.

7. По третьему ряду от левого края: $7\boldsymbol{d}+3$ – $8\boldsymbol{d}+5$.

И так далее.

В результате придем к графу изображенному ниже на рисунке 2.

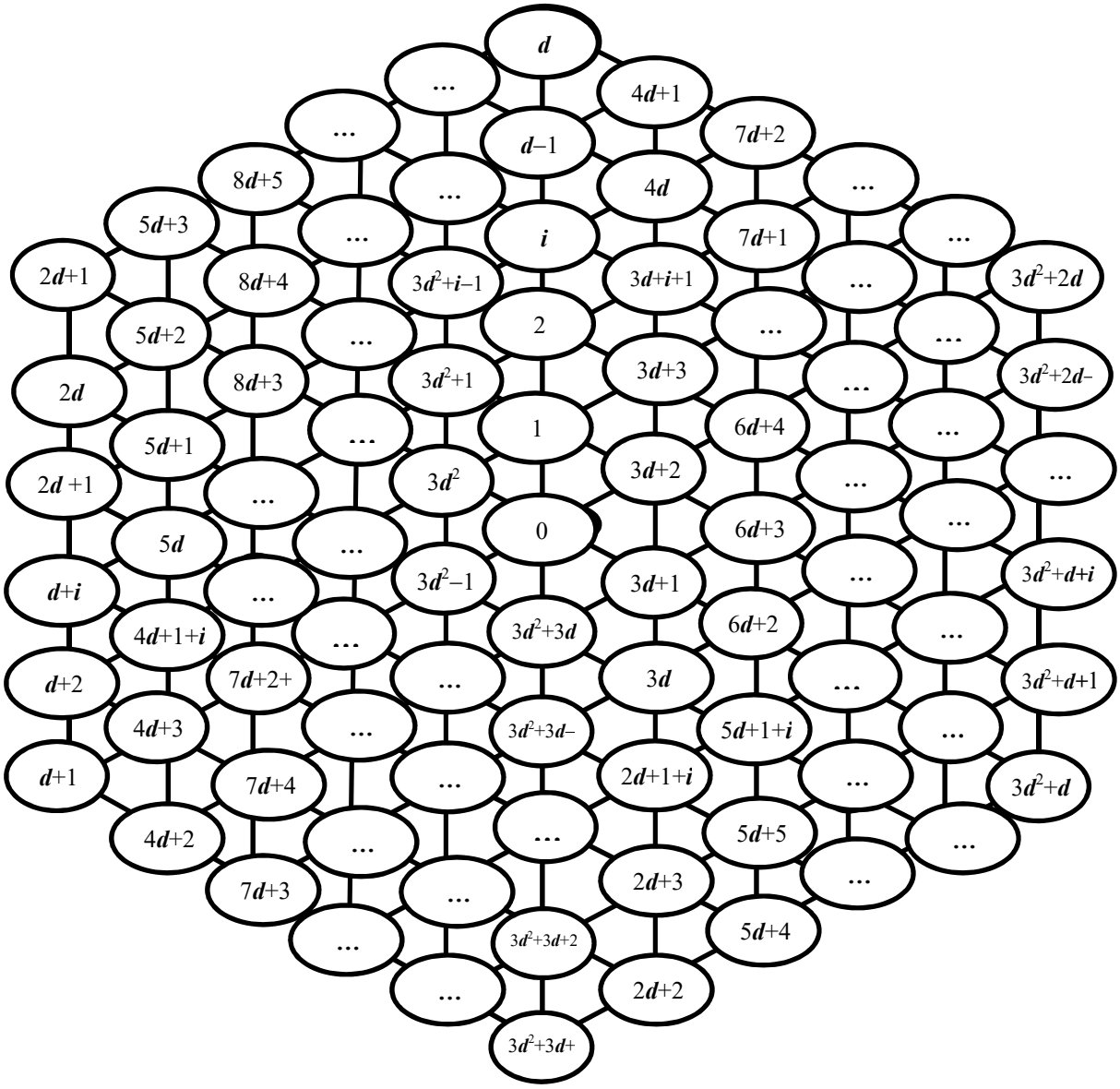


Рисунок 2 – Нумерация вершин графа

Заметим, что $[0]=\{1, 3\boldsymbol{d}+2, 3\boldsymbol{d}+1, \boldsymbol{n}-1, (3\boldsymbol{d}-2)\boldsymbol{d}+2\boldsymbol{d}-1, (3\boldsymbol{d}-2)\boldsymbol{d}+2\boldsymbol{d}\}$.

При этом $[1]=\{2, 3\boldsymbol{d}+3, 3\boldsymbol{d}+2, 0, (3\boldsymbol{d}-2)\boldsymbol{d}+2\boldsymbol{d}, (3\boldsymbol{d}-2)\boldsymbol{d}+2\boldsymbol{d}+1\}$, и если числа рассматривать по mod$\boldsymbol{n}$, то [1] получается из [0] формальным прибавлением ко всем элементам из [0] единицы. Аналогично получаем [2], [3] и, вообще, для любого $\boldsymbol{k}\in\{0, 1, \dots, \boldsymbol{n}-1\}$, такого, что $\boldsymbol{k}$ является внутренней вершиной графа Δ, имеем:

$$[\boldsymbol{k}]=\{1+\boldsymbol{k}, 3\boldsymbol{d}+2+\boldsymbol{k}, 3\boldsymbol{d}+1+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}-1+\boldsymbol{k}, (3\boldsymbol{d}-2)\boldsymbol{d}+2\boldsymbol{d}-1+\boldsymbol{k}, (3\boldsymbol{d}-2)\boldsymbol{d}+2\boldsymbol{d}+\boldsymbol{k}\}, \quad (1)$$

причем значения в $[\boldsymbol{k}]$ берутся из $\{0, 1, \dots, \boldsymbol{n}-1\}$ по mod $\boldsymbol{n}$.

Заметим, что если в качестве $\boldsymbol{k}$ в формуле (1) взять любую вершину, лежащую на стороне шестиугольника, то она позволяет добавить новые ребра в наш граф, и тем самым мы получаем граф $\boldsymbol{\Gamma}$, который является регулярным степени 6. Например, для вершины $\boldsymbol{d}$ получаем:

$$[\boldsymbol{d}]=\{1+\boldsymbol{d}, 3\boldsymbol{d}+2+\boldsymbol{d}, 3\boldsymbol{d}+1+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}-1+\boldsymbol{d}, (3\boldsymbol{d}-2)\boldsymbol{d}+2\boldsymbol{d}-1+\mathrm{d}, (3\boldsymbol{d}-2)\boldsymbol{d}+2\boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}\}=$$
$$=\{1+\boldsymbol{d}, 4\boldsymbol{d}+2, 4\boldsymbol{d}+1, \boldsymbol{d}-1, 3\boldsymbol{d}^2+\boldsymbol{d}-1, 3\boldsymbol{d}^2+\boldsymbol{d}\},$$

то есть, как и изображено в нашей схеме, $\boldsymbol{d}$ имеет в своей окрестности вершины $\boldsymbol{d}-1$, $4\boldsymbol{d}+1$, $3\boldsymbol{d}^2+\boldsymbol{d}+1$, и кроме них ещё и вершины $\boldsymbol{d}+1$, $4\boldsymbol{d}+2$, $3\boldsymbol{d}^2+\boldsymbol{d}$, которые мы бы получили, если бы пририсовали вершины, продолжив нумерацию вверх, за переделы Δ.

Определение 8. Подграф Δ графа $\boldsymbol{\Gamma}$ назовём ***контуром относительно вершины*** 0.

Ясно, что вместо 0 в контуре Δ мы можем поместить любую вершину $\boldsymbol{k}$, и, прибавив $\boldsymbol{k}$ к каждой вершине контура относительно 0, мы изΔ получим контур $\Delta(\boldsymbol{k})$ относительно $\boldsymbol{k}$.

Таким образом, мы построили граф $\boldsymbol{\Gamma}$, который является регулярным степени 6.

Теорема. Граф $\boldsymbol{\Gamma}$ является реберно-регулярным с параметрами $(3\boldsymbol{d}^2+3\boldsymbol{d}+1, 6, 2)$ и массивом пересечений

$$\{6, 3, \binom{3}{2}, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}; 1, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}\}$$

при $\boldsymbol{d}>2$ и $\{6, 3; 1, \binom{1}{2}\}$ при $\boldsymbol{d}=2$.

Доказательство. Заметим, что граф $\boldsymbol{\Gamma}$ является реберно-регулярным, так как любое ребро содержится в двух треугольниках, то есть $\boldsymbol{\lambda}=2$. Но вполне регулярным он не является, так как две вершины на расстоянии два могут иметь либо один, либо два общих соседа, то есть $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\{1; 2\}$. Подсчитаем количество вершин графа: $|\boldsymbol{V}|=3\boldsymbol{d}^2+3\boldsymbol{d}+1$. Действительно, для любого $\boldsymbol{i}\in\mathbf{N}$ такого, что $1\le\boldsymbol{i}\le\boldsymbol{k}$, имеем $|\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x})|=6\boldsymbol{i}$. А теперь общее число вершин равно

$$|\{\boldsymbol{x}\}\cup\boldsymbol{\Gamma}_1(\boldsymbol{x})\cup\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{x})\cup\dots\cup\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})|=1+\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{k}}6\boldsymbol{i}=1+6\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{i}=1+6\frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}+1)}{2},$$

откуда и получаем указанное равенство.

Таким образом, построенный нами граф $\boldsymbol{\Gamma}$ является реберно-регулярным с параметрами $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\lambda})=(3\boldsymbol{d}^2+3\boldsymbol{d}+1,6,2)$.

Найдем массив пересечения графа $\boldsymbol{\Gamma}$.

Мы видели, что если $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$, то $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\lambda} = 2$. Тогда $\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{\lambda} - 1 = 6-2-1=3$.

Пусть $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=2$. Далее отдельно рассмотрим два случая: $\boldsymbol{d}=2$ и $\boldsymbol{d}>2$.

Случай 1. $\boldsymbol{d}=2$. В этом случае граф $\boldsymbol{\Gamma}$ на рисунке 3.

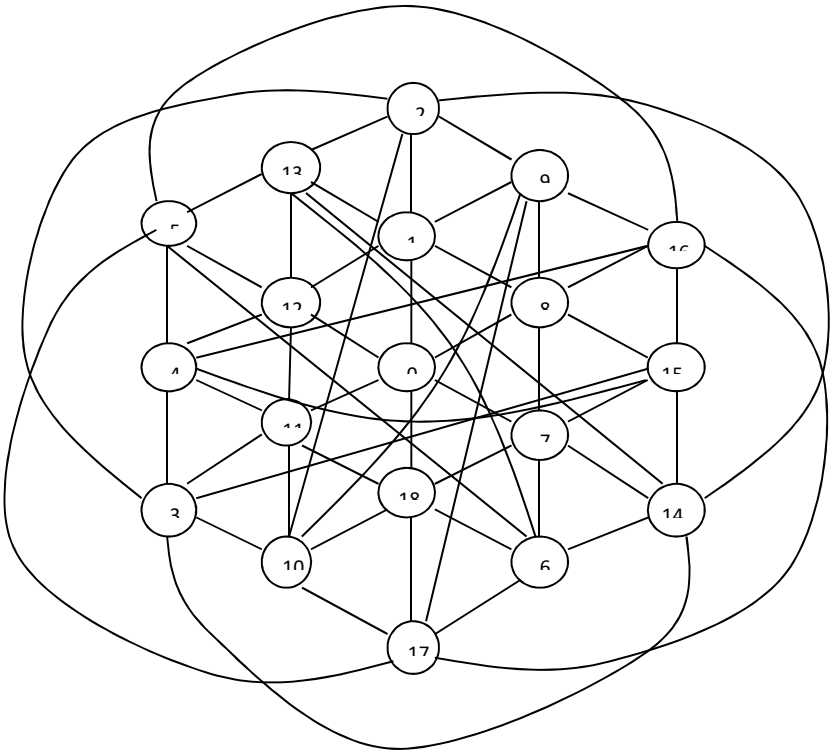


Рисунок 3 – Граф при d=2

Он получен из его контура относительно 0 добавлением рёбер. Как мы уже заметили, это изображение мы можем получить относительно любой вершины $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 18\}$, прибавив его к вершинам изображённого графа. Так что будем считать, что контур этот изображён относительно x.

В этом подграфе $\Delta(x)$ вершины y на расстоянии два от x делятся на два вида:

1) y лежат в вершинах исходного правильного шестиугольника, образованного ребрами с концами на расстоянии 2 от x;

2) y лежат на сторонах правильного шестиугольника (деля их пополам).

В первом случае имеем, что в $\Gamma(y)$ только одна вершина является внутренней для $\Delta(x)$, а остальные пять лежат на сторонах шестиугольника, либо являются его вершинами. Поэтому в этом случае имеем $a_2(x, y)=5$, $c_2(x, y)=1$ (в силу d=2 имеем $b_2(x,y)=0$).

Вовтором случае имеем, что в $\Gamma(y)$ две вершины являются внутренними для $\Delta(x)$, а остальные четыре лежат на сторонах шестиугольника, либо являются его вершинами. Поэтому в этом случае имеем $a_2(x, y)=4$, $c_2(x, y)=2$.

Таким образом, если d=2, то массив пересечений графа – следующий:

$$\{6, 3; 1, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

Случай 2. $d>2$. Возьмем $\Gamma_{\leq 2}(x)$. Ясно, что как и выше, в этом подграфе вершины y на расстоянии два от x делятся на два вида:

1) y лежат в вершинах правильного шестиугольника, образованного ребрами с концами на расстоянии 2 от x;

2) y лежат на сторонах правильного шестиугольника из пункта 1).

В первом случае имеем $a_2(x, y)=2$, $b_2(x,y)=3$, $c_2(x, y)=1$.

Во втором случае – $a_2(x, y)=2$, $b_2(x,y)=2$, $c_2(x, y)=2$.

Пусть $d(x, y)>2$, $d(x, y)<d$. Тогда на кратчайшем пути от x до y на расстоянии i–2 лежит некоторая вершина z. Таких z имеется два вида, а именно, если z и y рассматривать как точки из одной окрестности то либо y и z диаметрально противоположны друг другу (первый вид), либо иначе (второй вид). В первом случае имеем $a_i(x, y)=2$, $b_i(x,y)=3$, $c_i(x, y)=1$. Во втором случае – $a_i(x, y)=2$, $b_i(x,y)=2$, $c_i(x, y)=2$.

Пусть $d(x, y)=d$. В этом случае для y возможны две ситуации:

1) y совпадает с вершинойисходного шестиугольника. Как и при $d=2$, в этом случае только одна вершина из окрестности y лежит в окрестности x, а именно, та которая лежит внутри шестиугольника. Остальные пять вершин из окрестности yлежат на расстоянии d от x (так как эти вершины лежат на сторонах шестиугольника). В этом случае $a_d(x, y)=5$ и $c_d(x,y)=1$.

2) y лежит на стороне шестиугольника и не является его вершиной. В этом случае две вершины из окрестности y является внутренними точками шестиугольника, и поэтому лежат на расстоянии d–1 от x. Остальные четыре лежат на сторонах шестиугольника. Следовательно, $c_d(x, y)=2$, $a_d(x, y)=4$.

Таким образом, при $d>2$ массив пересечений графа Γ – следующий:

$$\{6, 3, \binom{3}{2}, \binom{3}{2}, ..., \binom{3}{2}; 1, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, \ldots, \binom{1}{2}\}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Махнев. О сильной регулярности некоторых рёберно регулярных графов // Изв. РАН. Сер.матем. –2004. –Том 68, выпуск 1. –С. 159 – 182.
2. М.М. Деза, М.Д. Сикирич. Геометрия химических графов: полициклы и биполициклы. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2013 – 384 с.
3. И.Т. Мухаметьянов. Об одном семействе локально шестиугольных графов на элементах кольца Z_m// Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук». Часть I. – Орёл. – 2018. – С. 114 – 119.

УДК 514.17

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ШАРА И СИМПЛЕКСА

М. В. Невский, д.ф.-м.н., доц.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: *mnevsk55@yandex.ru*

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Под τS понимается образ S при гомотетии относительно центра тяжести с коэффициентом τ. Для выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ через $\xi(C;S)$ обозначается минимальное $\tau \geq 1$, для которого $C \subset \tau S$, а через $\alpha(C;S)$ — минимальное $\tau > 0$, такое что C принадлежит трансляту симплекса τS. Ранее автор доказал, что $\xi(C;S) = (n+1) \max\limits_{1\leq j\leq n+1} \max\limits_{x\in C}(-\lambda_j(x)) + 1$ (если $C \not\subset S$), $\alpha(C;S) = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \max\limits_{x\in C}(-\lambda_j(x)) + 1$. Здесь λ_j — базисные многочлены Лагранжа симплекса S. В статье рассматривается случай, когда C есть единичный евклидов шар $B_n = \{x : \|x\| \leq 1\}$, $\|x\| := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$. Приводится ряд соотношений для $\xi(B_n;S)$ и $\alpha(B_n;S)$. Даётся сравнение с результатами, полученными для $C = [0,1]^n$.

Ключевые слова: n-мерный симплекс, n-мерный шар, гомотетия, коэффициент поглощения

1. Предварительные сведения

Далее $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Положим

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2},$$

$$B\left(x^{(0)};\varrho\right) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^{(0)}\| \leq \varrho\} \quad \left(x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \varrho > 0\right),$$

$$B_n := B(0;1), \quad Q_n := [0,1]^n, \quad Q_n' := [-1,1]^n.$$

Для выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ через τC обозначим результат гомотетии относительно центра тяжести с коэффициентом τ. Пусть S — невырожденный n-мерный симплекс. По определению,

$$\xi(C;S) := \min\{\tau \geq 1 : C \subset \tau S\}.$$

Эту величину мы называем *коэффициентом поглощения выпуклого тела C симплексом S*. Обозначим через $\alpha(C;S)$ минимальное $\tau > 0$, для которого C принадлежит трансляту симплекса τS. Под $\mathrm{ver}(G)$ будем понимать совокупность вершин выпуклого многогранника G.

Обозначим вершины S через $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $1 \leq j \leq n+1$. Матрица вершин

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Введём в рассмотрение линейные многочлены $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$, коэффициенты которых составляют столбцы $\mathbf{A}^{-1}$. Мы называем λ_j *базисными многочленами Лагранжа, соответствующими* S. Числа $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно S. Подробнее о λ_j см. [1, гл. 1].

Равенство $\xi(C;S) = 1$ эквивалентно включению $C \subset S$. В [2] установлено, что если $C \not\subset S$, то

$$\xi(C;S) = (n+1) \max_{1\le j\le n+1} \max_{x\in C}(-\lambda_j(x)) + 1. \tag{1}$$

Соотношение

$$\max_{x\in C}(-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x\in C}(-\lambda_{n+1}(x)) \tag{2}$$

эквивалентно тому, что симплекс $\xi(C;S)S$ описан вокруг C. В случае $C = Q_n$ равенство (1) приводится к виду

$$\xi(Q_n;S) = (n+1) \max_{1\le j\le n+1} \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_j(x)) + 1,$$

а (2) сводится к соотношению

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_{n+1}(x)). \tag{3}$$

Всегда $\xi(C;S) \ge \alpha(C;S)$, причём $\xi(C;S) = \alpha(C;S)$ тогда и только тогда, когда симплекс $\xi(C;S)S$ описан вокруг C. Последнее равносильно (2), а для $C = Q_n$ — также и (3).

В [3] доказано, что

$$\alpha(C;S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x\in C}(-\lambda_j(x)) + 1. \tag{4}$$

Если $C = Q_n$, то эта формула равносильна равенству

$$\alpha(Q_n;S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}. \tag{5}$$

Здесь $d_i(S)$ — *i-й осевой диаметр симплекса S,* определяемый как максимальная длина отрезка из S, параллельного i-й координатной оси. Равенство (5) установлено в [4]. Если $S \subset Q_n$, то $d_i(S) \le 1$, поэтому для таких симплексов (5) даёт

$$\xi(Q_n;S) \ge \alpha(Q_n;S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \ge n. \tag{6}$$

Как доказал автор (см. [2]),

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \tag{7}$$

Из (5) и (7) следует соотношение

$$\alpha(Q_n; S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \tag{8}$$

Величина $\alpha(C; S)$ не меняется при параллельном переносе множеств и для $\tau > 0$ верно $\alpha(\tau C; S) = \tau \alpha(C; S)$. Поскольку куб $Q'_n = [-1, 1]^n$ есть транслят куба $2Q_n$, то из (8) получается более простая формула

$$\alpha(Q'_n; S) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \tag{9}$$

Положим

$$\xi_n := \min\{\xi(Q_n; S) : \ S - n\text{-мерный симплекс}, S \subset Q_n, \ \mathrm{vol}(S) \neq 0\}.$$

Числам ξ_n посвящены многие работы автора, а также автора и А. Ю. Ухалова (см., например, [1], [2], [5]). Всегда $n \leq \xi_n < n + 1$. Точные значения ξ_n известны для $n = 2, 5, 9$ и бесконечной совокупности нечётных n, для каждого из которых существует матрица Адамара порядка $n + 1$. При $n \neq 2$ каждое известное значение ξ_n равно n, а $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.34\ldots$ Неизвестно, существует ли чётные n со свойством $\xi_n = n$.

В настоящей статье приводятся свойства указанных характеристик для симплекса и евклидова шара. Замена куба на шар делает многие вопросы более простыми, однако геометрическая интерпретация общих результатов и в этом частном случае представляет интерес. Доказательства сформулированных ниже утверждений содержатся в [6].

2. Вычисление $\alpha(B_n; S)$

Инрадиусом n-мерного симплекса S называется максимальный радиус шара, содержащегося в S. Центр этого единственного максимального шара называется *инцентром* S. Граница максимального шара — сфера, которая имеет с каждой $(n-1)$-мерной гранью симплекса единственную общую точку. Под *внешним радиусом* S будем понимать минимальный радиус шара, содержащего S. Граница этого единственного минимального шара не обязательно содержит все вершины S. Это имеет место тогда и только тогда, когда центр минимального шара лежит внутри S. Инрадиус r и внешний радиус R симплекса S связаны *неравенством Эйлера* $R \geq nr$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда S — правильный симплекс. По поводу n-мерного неравенства Эйлера см., например, [7], [8], [9].

Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ — вершины, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ — базисные многочлены Лагранжа невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$. Через Γ_j обозначим $(n-1)$-мерную гиперплоскость, задаваемую уравнением $\lambda_j(x) = 0$, через Σ_j — $(n-1)$-мерную грань симплекса, содержащуюся в Γ_j, через h_j — высоту, опущенную

из вершины $x^{(j)}$ на Γ_j, через r — инрадиус S. Пусть σ_j — $(n-1)$-мера Σ_j и $\sigma := \sum\limits_{j=1}^{n+1} \sigma_j$.

Т е о р е м а 1. Справедливы равенства

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}^2 \right)^{1/2} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{h_j} = \frac{1}{r} = \frac{\sigma}{n\mathrm{vol}(S)}.$$

Соотношение $\frac{1}{r} = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{1}{h_j}$, которое может быть получено и непосредственно, оказывается эквивалентным общей формуле (4) в случае, когда выпуклое тело C является евклидовым единичным шаром.

С л е д с т в и е 1. Инрадиус r и инцентр z симплекса S имеют вид

$$r = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}^2 \right)^{1/2}}, \quad z = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}^2 \right)^{1/2}} \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}^2 \right)^{1/2} x^{(j)}.$$

Равенство $\alpha(B_n; S) = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}^2 \right)^{1/2}$ интересно сравнить с (9). Так как $B_n \subset Q_n'$, то $\alpha(B_n; S) \leq \alpha(Q_n'; S)$. Последнее следует также из оценки $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}^2 \right)^{1/2} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |l_{ij}|$.

Для произвольных $x^{(0)}$ и $\varrho > 0$ величина $\alpha\left(B(x^{(0)}; \varrho); S\right)$ может быть вычислена с помощью теоремы 1 и равенства $\alpha(B(x^{(0)}; \varrho); S) = \varrho\alpha(B_n; S)$.

Как следует из (6), минимальное значение $\alpha(Q_n; S)$ для $S \subset Q_n$ равно n. Это минимальное значение достигается на тех и только тех $S \subset Q_n$, для которых каждый осевой диаметр $d_i(S)$ равен 1. Указанным свойством обладают симплексы максимального объёма в Q_n (см. [1]), но при $n > 2$ не только они. Следующая теорема даёт аналоги этих утверждений для симплексов, содержащихся в шаре.

Т е о р е м а 2. Если $S \subset B_n$, то $\alpha(B_n; S) \geq n$. Равенство $\alpha(B_n; S) = n$ выполняется тогда и только тогда, когда S — правильный симплекс, вписанный в B_n.

Заметим, что теорема 2 эквивалентна неравенству Эйлера.

3. Вычисление $\xi(B_n; S)$. Равенство $\beta_n = n$

Приведём формулу для коэффициента поглощения симплексом евклидова шара.

Т е о р е м а 3. Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\varrho > 0$. Если $B\left(x^{(0)}; \varrho\right) \not\subset S$, то

$$\xi\left(B\left(x^{(0)}; \varrho\right); S\right) = (n+1) \max_{1 \le j \le n+1} \left[\varrho \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}^2 \right)^{1/2} - \sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i^{(0)} - l_{n+1,j} \right] + 1.$$

В частности, если $B_n \not\subset S$, то

$$\xi(B_n; S) = (n+1) \max_{1 \le j \le n+1} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}^2 \right)^{1/2} - l_{n+1,j} \right] + 1.$$

Т е о р е м а 4. Если $S \subset B_n$, то $\xi(B_n; S) \ge n$. Равенство $\xi(B_n; S) = n$ выполняется тогда и только тогда, когда S — правильный симплекс, вписанный в B_n.

Последнее утверждение немедленно следует из теоремы 2 и неравенства $\xi(B_n; S) \ge \alpha(B_n; S)$. В [6] даётся и непосредственное доказательство без применения неравенства Эйлера, с помощью которого получается оценка $\alpha(B_n; S) \ge n$ теоремы 2.

По аналогии с величиной $\xi_n = \min\{\xi(Q_n; S) : S \subset Q_n\}$, определяемой через единичный куб $Q_n = [0,1]^n$, введём в рассмотрение числовую характеристику, задаваемую единичным шаром:

$$\beta_n := \min\{\xi(B_n; S) : \ S - n\text{-мерный симплекс}, S \subset B_n, \ \mathrm{vol}(S) \ne 0\}.$$

Многие задачи о числах ξ_n ещё не решены. Например, единственным известным точным значением ξ_n для чётного n до сих пор остаётся $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}$, да и оно было найдено весьма непросто (см. [1, гл. 2]). По сравнению с ξ_n задача о числах β_n оказывается тривиальной.

С л е д с т в и е 2. Для любого n справедливо $\beta_n = n$. Экстремальным относительно β_n симплексом $S \subset B_n$ является любой правильный симплекс, вписанный в B_n. Других экстремальных симплексов нет.

С л е д с т в и е 3. Пусть B_n' — шар, описанный вокруг Q_n. Если симплекс S не является правильным и $S \subset Q_n \subset nS$, то $B_n' \not\subset nS$.

Симплексы, удовлетворяющие условию следствия 3, существуют по крайней мере при $n = 3, 5$ и 9 (см. [5]).

Соотношения (6) означают, что всегда $\xi_n \ge n$. Поскольку $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} > 2$, существуют n, для которых $\xi_n > n$. Кроме ситуаций, когда $n+1$ есть число Адамара, равенство $\xi_n = n$ установлено при $n = 5$ и $n = 9$. Для всех таких размерностей $\xi_n = \beta_n$, т. е. с точки зрения минимального коэффициента поглощения находящимся внутри симплексом оба множества — n-мерный куб и n-мерный шар — ведут себя одинаково.

Равенство $\xi_n = n$ равносильно существованию симплексов, удовлетворяющих включениям $S \subset Q_n \subset nS$. Некоторые свойства таких симплексов (например, то, что центр тяжести S совпадает с центром куба, см. [6]) аналогичны свойствам правильных симплексов, вписанных в B_n. Однако вопрос о полном описании тех n, для которых существуют симплексы с условием $S \subset Q_n \subset nS$, остаётся открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Невский М. В. Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции. — Ярославль: ЯрГУ. — 2012. — 218 с.
2. Невский М. В. Об одном свойстве n-мерного симплекса // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87. — № 4. — С. 580–593.
3. Невский М. В. О минимальном положительном гомотетическом образе симплекса, содержащем выпуклое тело // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93. — № 3. — С. 448–456.
4. Nevskii M. Properties of axial diameters of a simplex // Discrete Comput. Geom. — 2011. — V. 46. — № 2. — P. 301–312.
5. Nevskii M., Ukhalov A. Perfect simplices in $\mathbb{R}^5$ // Beiträge zur Algebra und Geometrie. — 2018. — V. 59. — № 3. — P. 501–521.
6. Невский М. В.. О некоторых задачах для симплекса и шара в $\mathbb{R}^n$ // Модел. и анализ информ. систем. — 2018. — Т. 25. — № 6. — С. 680–691.
7. Klamkin M. S., Tsifinis G. A. Circumradius–inradius inequality for a simplex // Mathematics Magazine. — 1979. — V. 52. — № 1. — P. 20–22.
8. Yang S., Wang J. Improvements of n-dimensional Euler inequality // Journal of Geometry. — 1994. — V. 51. — P. 190–195.
9. Vince A. A simplex contained in a sphere // Journal of Geometry. — 2008. — V. 89. — № 1–2. — P. 169–178.

УДК 514.17+517.51+519.6

О ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ЕВКЛИДОВОМ ШАРЕ

М. В. Невский, д.ф.-м.н., доц.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: *mnevsk55@yandex.ru*
А. Ю. Ухалов, к.ф.-м.н.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: *alex-uhalov@yandex.ru*

Пусть $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, R > 0$, $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, $B = B(x^{(0)}; R)$ — евклидов шар в $\mathbb{R}^n$, задаваемый неравенством $\|x - x^{(0)}\| \le R$, $C(B)$ — пространство непрерывных функций $f : B \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C(B)} := \max\limits_{x \in B} |f(x)|$, $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1. Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ — вершины n-мерного невырожденного симплекса $S \subset B$. Интерполяционный проектор $P : C(B) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, соответствующий S, определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$. В работе приводится формула для вычисления нормы P как оператора из $C(B)$ в $C(B)$ через $x^{(0)}$, R и коэффициенты базисных многочленов Лагранжа, соответствующих S. Более подробно исследован случай, когда S — правильный симплекс, вписанный в B. Для иллюстрации даются результаты компьютерных вычислений.

Ключевые слова: n-мерный симплекс, n-мерный шар, линейная интерполяция, проектор, норма

1. Основные результаты

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $B = B(x^{(0)}; R)$ евклидов шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром $x^{(0)}$ и радиусом R:

$$B(x^{(0)}; R) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^{(0)}\| \le R\}.$$

По определению, для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Положим $B_n := B(0; 1)$. Через $C(B)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : B \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(B)} := \max_{x \in B} |f(x)|.$$

Под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ будем понимать совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1, т. е. линейных функций на $\mathbb{R}^n$.

Всюду далее S есть невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Обозначим вершины S через $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $1 \le j \le n+1$, и рассмотрим следующую *матрицу вершин:*

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Базисными многочленами Лагранжа, соответствующими S, мы называем функции $\lambda_j \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ вида $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$. Числа $\lambda_j(x)$ представляют собой барицентрические координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно S (см. [1, глава 1]).

В этой работе предполагается, что $S \subset B$. Будем говорить, что интерполяционный проектор $P : C(B) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ соответствует симплексу S, если его узлы совпадают с вершинами $x^{(j)}$ симплекса. Этот проектор определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right), \quad 1 \le j \le n+1$. Справедлив аналог интерполяционной формулы Лагранжа

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f\left(x^{(j)}\right)\lambda_j(x). \tag{1}$$

Обозначим через $\|P\|_B$ норму P как оператора из $C(B)$ в $C(B)$. Из (1) следует, что

$$\|P\|_B = \max_{x\in B} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|. \tag{2}$$

Дополним (2) другими выражениями для нормы проектора. Доказательства сформулированных ниже утверждений приводятся в [2].

Т е о р е м а 1. Имеет место равенство

$$\|P\|_B = \max_{f_j=\pm 1}\left[R\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij}\right)^2\right)^{1/2} + \left|\sum_{j=1}^{n+1} f_j\left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}x_i^{(0)} + l_{n+1,j}\right)\right|\right] =$$

$$= \max_{f_j=\pm 1}\left[R\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij}\right)^2\right)^{1/2} + \left|\sum_{j=1}^{n+1} f_j\lambda_j(x^{(0)})\right|\right]. \tag{3}$$

В случае, когда центр тяжести симплекса совпадает с $x^{(0)}$, выполняются равенства $\lambda_j(x^{(0)}) = \frac{1}{n+1}$. В этом случае формула (3) упрощается:

$$\|P\|_B = \max_{f_j=\pm 1}\left[R\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij}\right)^2\right)^{1/2} + \frac{1}{n+1}\left|\sum_{j=1}^{n+1} f_j\right|\right]. \tag{4}$$

Ниже рассмотривается случай, когда S — правильный симплекс, вписанный в шар B (точнее, в граничную сферу $\|x - x^{(0)}\| = R$). В этой ситуации норма P не зависит ни от $x^{(0)}$, ни от R, ни от выбора правильного симплекса, вписанного в шар. Будем считать $B = B_n$. Положим

$$\psi(t) := \frac{2\sqrt{n}}{n+1}\left(t(n+1-t)\right)^{1/2} + \left|1 - \frac{2t}{n+1}\right|, \quad 0 \le t \le n+1,$$

$$a := \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor.$$

Здесь $\lfloor s \rfloor$ — целая часть s. Из (4) выводится следующий результат.

Т е о р е м а 2. Пусть S^* — правильный симплекс, вписанный в B_n, P^* — соответствующий интерполяционный проектор. Тогда $\|P^*\|_{B_n} = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}$. Для любого n верны неравенства

$$\sqrt{n} \le \|P^*\|_{B_n} \le \sqrt{n+1}.$$

При этом $\|P^*\| = \sqrt{n}$ лишь в случае $n = 1$, а равенство $\|P^*\| = \sqrt{n+1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\sqrt{n+1}$ — целое число.

Определим θ_n как минимальную величину нормы интерполяционного проектора при условии принадлежности всех узлов шару B_n. Обозначим

$$k = k(n) := \begin{cases} a+1, & \text{если } \psi(a+1) \ge \psi(a), \\ a, & \text{если } \psi(a+1) < \psi(a). \end{cases}$$

Доказывается, что если $k = 1$, то в обозначениях теоремы 2 справедливо равенство $\theta_n = \|P^*\|_{B_n}$. Интересно, что $k(n) = 1$ тогда и только тогда, когда $1 \le n \le 4$. Поэтому для таких n величина θ_n совпадает с нормой проектора, имеющего узлы в вершинах правильного вписанного симплекса. Авторы предполагают, что равенство $\theta_n = \|P^*\|_{B_n}$ выполняется вообще для любого n, но пока не имеют доказательства этого общего факта.

2. Вычисления и комментарии

Для вычислений и построения графиков использовалась система Wolfram Mathematica (см., например, [3]).

На рис. 1–2 приводятся графики функции $\psi(t)$ для $n = 3$ и $n = 5$. Мы полагаем

$$t_- := \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2}, \quad t_+ := \frac{n+1}{2} + \frac{\sqrt{n+1}}{2}.$$

Это точки максимума $\psi(t)$ на промежутках $\left[0, \frac{n+1}{2}\right]$ и $\left[\frac{n+1}{2}, n+1\right]$ соответственно. Число a определено выше.

На рис. 3 представлены значения разности $d_n = \sqrt{n+1} - \|P^*\|_{B_n}$ для $23 \le n \le 160$. Здесь P^* — интерполяционный проектор, соответствующий правильному симплексу, вписанному в B_n. Как мы установили, $\|P^*\|_{B_n} \le \sqrt{n+1}$, причём равенство имеет место лишь для $n = 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, \ldots$, т. е. размерностей вида $m^2 - 1$. Именно в этих точках $d_n = 0$, что и видно на рис. 3. Пунктирной линией обозначен график ломаной (линейного интерполяционного сплайна) l, построенной по узлам $n = m^2 - 2$, $n = m^2$ и значениям d_n в этих узлах. Всегда $d_n \le l(n)$,

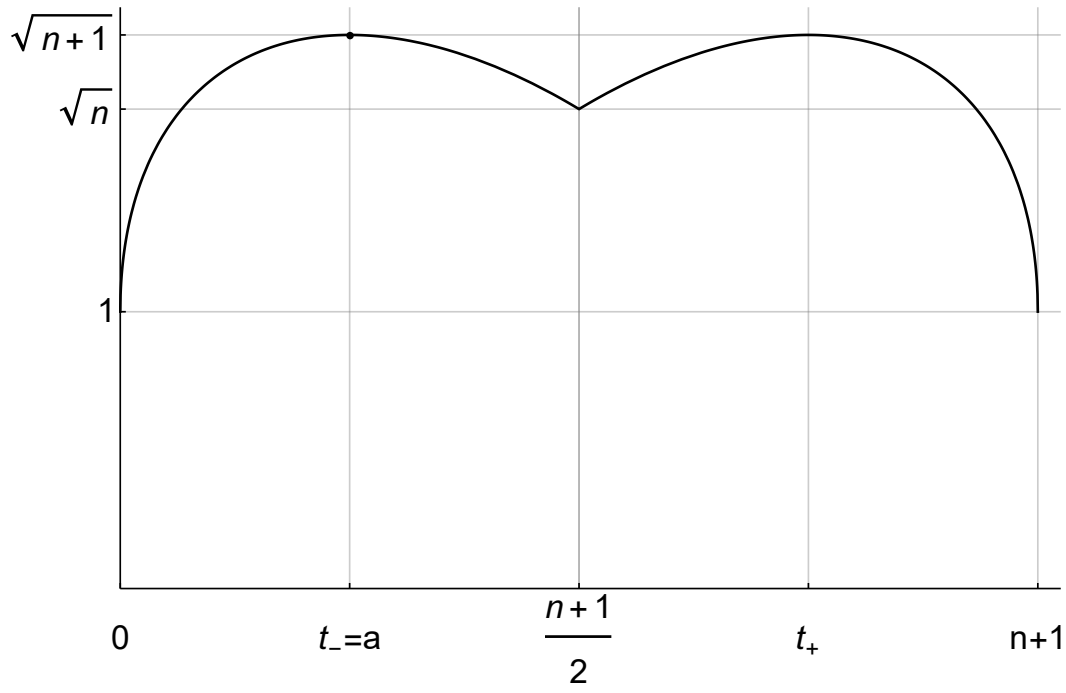


Рисунок 1 – График $\psi(t)$ для $n = 3$. Здесь $n + 1 = 4$, $t_- = a = 1$

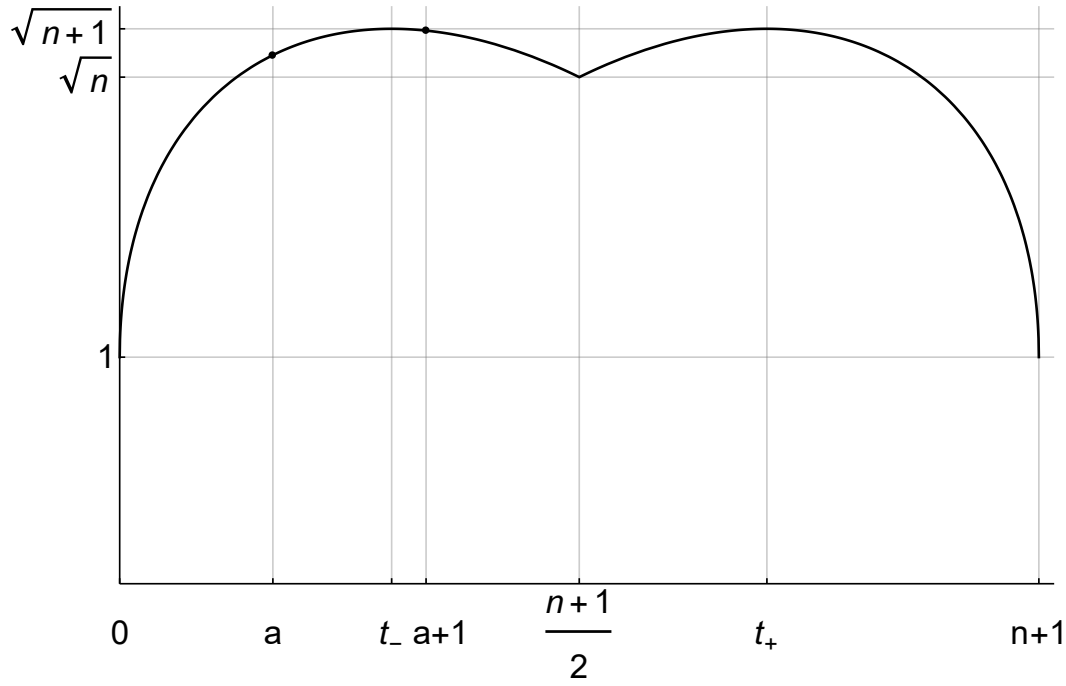


Рисунок 2 – График $\psi(t)$ для $n = 5$. Здесь $n + 1 = 5$, $a = 1$, $t_- = \frac{6-\sqrt{6}}{2}$

причём равенство достигается лишь для $n = m^2 - 2$ и $n = m^2$. При $n \to \infty$ монотонно $l(n) \to 0$. Таким образом, справедлива двусторонняя оценка $\sqrt{n+1} - l(n) \leq \|P^*\|_{B_n} \leq \sqrt{n+1}$. Как правое, так и левое соотношения обращаются в равенства для бесконечного множества n. Эта оценка точнее, чем неравенство из условия теоремы 2.

В таблице 1 приводятся значения $\|P^*\|_{B_n}$ для $1 \leq n \leq 8$, $n = 100$ и $n = 1000$.

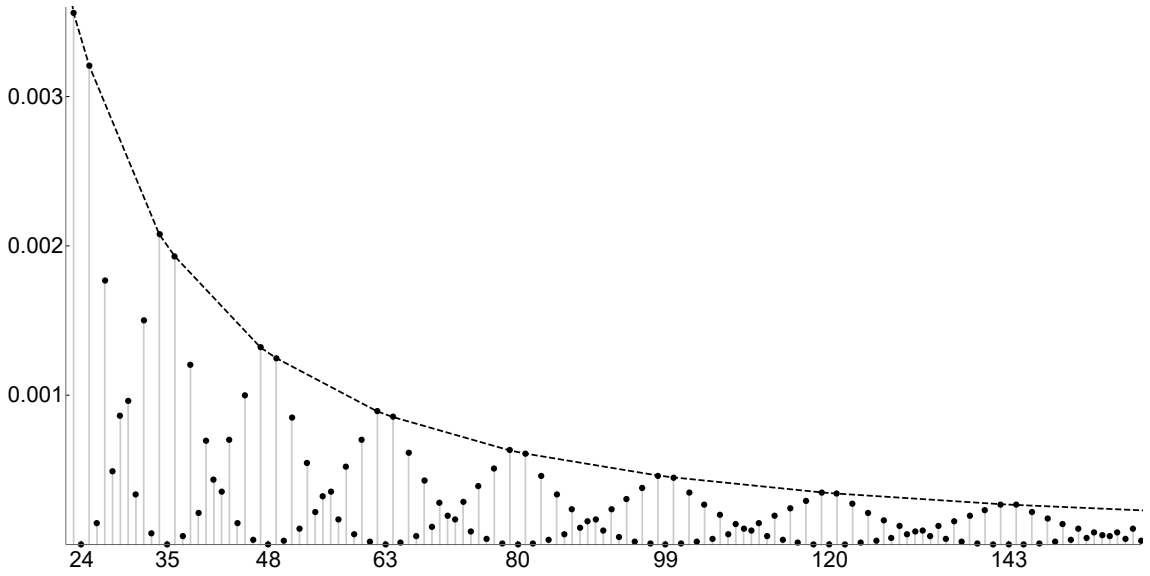


Рисунок 3 – Числа $d_n = \sqrt{n+1} - \|P^*\|_{B_n}$ для $23 \le n \le 160$

Таблица 1 — Норма проектора P^*

n	a	a+1	$\psi(a)$	$\psi(a+1)$	k	$\|P^*\|_{B_n}$	$\|P^*\|_{B_n}$
1	0	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$1.6666\ldots$
3	1	2	2	$\sqrt{3}$	1	2	2
4	1	2	$\frac{11}{5}$	$\frac{1+4\sqrt{6}}{5}$	1	$\frac{11}{5}$	2.2
5	1	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{1+2\sqrt{10}}{3}$	2	$\frac{1+2\sqrt{10}}{3}$	$2.4415\ldots$
6	2	3	$\frac{3+4\sqrt{15}}{7}$	$\frac{1+12\sqrt{2}}{7}$	2	$\frac{3+4\sqrt{15}}{7}$	$2.6417\ldots$
7	2	3	$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{105}}{4}$	3	$\frac{1+\sqrt{105}}{4}$	$2.8117\ldots$
8	3	4	3	$\frac{1+8\sqrt{10}}{9}$	3	3	3
100	45	46	$\frac{11+120\sqrt{70}}{101}$	$\frac{9+20\sqrt{2530}}{101}$	45	$\frac{11+120\sqrt{70}}{101}$	$10.0494\ldots$
1000	484	485	$\frac{3+40\sqrt{5170}}{91}$	$\frac{31+200\sqrt{25026}}{1001}$	485	$\frac{31+200\sqrt{25026}}{1001}$	$31.6385\ldots$

ЛИТЕРАТУРА

1. Невский М. В. Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции. — Ярославль: ЯрГУ. — 2012. — 218 с.

2. Невский М. В., Ухалов А. Ю. Линейная интерполяция на евклидовом шаре в $\mathbb{R}^n$// Модел. и анализ информ. систем. — 2019. — Т. 26. — № 2. — С. 279–296.

3. Wolfram S. An elementary introduction to the Wolfram Language. — New York: Wolfram Media. — 2015 — 342 p.

О СВЯЗНОСТЯХ, ИНДУЦИРОВАННЫХ МИНИМАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В.В. Черкасова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: cher_vl@mail.ru

В данной статье изложены способы определения объекта связности через конструкции криволинейного мультипликативного интеграла и рассмотрены примеры связностей, индуцированных качением шара по минимальным поверхностям в трехмерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: криволинейный мультипликативный интеграл, средняя кривизна, ей, первая и вторая квадратичные формы поверхности, заданной параметрически, дифференциально-геометрическая связность, метрический тензор, символы Кристоффеля.

Важнейшим свойством аффинного пространства является возможность откладывать заданный вектор из любой точки. В том случае, когда рассматриваемая область Ω отнесена к криволинейным координатам $\left(x^1,\ldots x^n\right)$, для каждой точки $M \in \Omega$ определены величины Γ_{ij}^k, являющиеся коэффициентами связности и преобразующиеся по закону:

$$\Gamma_{i'j}^{k'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma_{ij}^k . \quad (1)$$

В аффинных пространствах объект связности позволяет восстановить всю геометрию той области, в которой он задан.

Пусть $g_{ij}\left(x^1,\ldots x^n\right)$ – метрический тензор, заданный в области Ω в криволинейных координатах x^i, тогда длина кривой, заданной параметрическими уравнениями $x^i = x^i(t), t_1 \le t \le t_2$, можно вычислить по формуле:

$$\overset{\cup}{M_1 M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt .$$

При этом коэффициенты связности Γ_{ij}^k есть символы Кристоффеля 2-ого рода, которые находятся из соотношений:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right). \quad (2)$$

Это классическая схема описания параллельного переноса вектора, принятая в дифференциальной геометрии [1]. Однако, параллельный перенос в аффинном пространстве может быть описан с помощью иной конструкции – криволинейного мультипликативного интеграла.

Определение 1. Выражение вида

$$\overset{\cap}{\int_\gamma} E + \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \left(x^1,\ldots,x^n\right) dx^k \Big), \quad (3)$$

где $\Gamma_k\left(x^1,...,x^n\right)$ - операторные функции со значениями в алгебре $L(V)$, γ – произвольная непрерывная спрямляемая кривая в V, называется криволинейным мультипликативным интегралом.

Геометрический смысл интеграла (3) заключается в том, что его структуру уместно сравнивать с параллельным перенесением вектора, определенного какой-либо связностью.

В частности, при рассмотрении евклидова пространства E_n, параллельный перенос вектора $\bar{\xi} = \bar{\xi}(t)$ из точки $t_0 = a$ в точку $t_n = b$, задается криволинейным мультипликативным интегралом вида (3), где элементами матричных функций $\Gamma_k\left(x^1,...,x^n\right)$ являются коэффициенты связности (2), согласованные с метрикой $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \alpha,\beta = 1,...,m$.

Рассмотрим некоторые особенности связностей, индуцированных качением единичного шара минимальным поверхностям второго порядка.

Определение 2. Гладкая m-мерная поверхность S^m евклидова пространства E_n, заданная параметрическими уравнениями:

$$x^i = x^i(u^1,...,u^m),$$

где независимые переменные $\left(u^1,...,u^m\right)$ пробегают некоторую связную область Ω_n, и средняя кривизна которой $H = 0$, называется минимальной.

Для регулярных поверхностей n-мерного евклидова пространства, обладающих параметризацией $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, однозначно определены первая и вторая квадратичные формы:

$I = \left(d\bar{r}\right)^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, $II = \left(d^2\bar{r},\bar{n}\right) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$.

Пусть по некоторой поверхности S, заданной уравнением: $r = r(u, v)$, или подробно $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u,v)$, где u, v принадлежат некоторой области двумерного пространства, катится шар единичного радиуса с жестко прикрепленным к нему репером $\left(\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right)$. Шар катится без проскальзывания вдоль кривой γ, определяемой уравнениями: $r = r(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$.

В конце пути репер примет свое новое положение относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ и матрица перехода от начального положения репера к конечному представляет собой мультипликативный интеграл:

$$Y = \overset{\frown}{\int_\gamma} E + \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\Phi\left(r_u \times \left[r_u \times r_v\right]\right) + \Lambda_u\right)du + \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\Phi\left(r_v \times \left[r_u \times r_v\right]\right) + \Lambda_v\right)dv,$$

$$\Phi : x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & z(u,v) & -y(u,v) & 0 \\ -z(u,v) & 0 & x(u,v) & 0 \\ y(u,v) & -x(u,v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема: Кривизна криволинейного мультипликативного интеграла

$$Y = \overset{\frown}{\int_{\gamma}} E + \Gamma_1(x,y)dx + \Gamma_2(x,y)dy \tag{4}$$

где функции $\Gamma_1(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -A_2 & B_1 & 0 \\ A_2 & 0 & C & 0 \\ -B_1 & -C & 0 & 0 \\ 1 & 0 & f'_x & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & C & 0 \\ -C & 0 & B_2 & 0 \\ -C & -B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f'_y & 0 \end{pmatrix}$,

$A_1 = \dfrac{f'_x}{g(x,y)}$, $A_2 = \dfrac{f'_y}{g(x,y)}$, $B_1 = \dfrac{(f'_x)^2 + 1}{g(x,y)}$, $B_2 = \dfrac{(f'_y)^2 + 1}{g(x,y)}$, $C = \dfrac{f'_x f'_y}{g(x,y)}$ и $g(x,y) = \sqrt{(f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2 + 1}$, определяется формулой

$$K = (-2H + 1)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -f_y & 0 \\ 1 & 0 & f_x & 0 \\ f_y & -f_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

причем $H = \dfrac{(1 + f_y^2) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x{}^2) f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$ – средняя (эйлерова) кривизна поверхности, заданной уравнением $z=f(x,y)$.

Доказательство данной теоремы приведено в работе [2].

Основываясь на результатах данной теоремы, для минимальных поверхностей кривизна криволинейного мультипликативного интеграла (4) находится по формуле:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -f_y & 0 \\ 1 & 0 & f_x & 0 \\ f_y & -f_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если поверхность качения представляет собой катеноид, заданный уравнением

$$z = f(x, y) = ach\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a}},$$

где a = const, кривизна интеграла качения находится по формуле:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\dfrac{\sqrt{a}xsh\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{a}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{\sqrt{a}ysh\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{a}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ \dfrac{\sqrt{a}xsh\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{a}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\dfrac{\sqrt{a}xsh\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{a}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В случае, если качение шара осуществляется вдоль некоторого бесконечно малого замкнутого контура на поверхности Шерка, определяемой уравнением $z = f(x, y) = \ln\dfrac{\cos y}{\cos x}$, кривизна, вычисленная по формуле (5) имеет вид:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dfrac{\sin y}{\cos y} & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{\sin x}{\cos x} & 0 \\ -\dfrac{\sin y}{\cos y} & -\dfrac{\sin x}{\cos x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, связности индуцированные качением по минимальным поверхностям представляют криволинейный мультипликативный интеграл вида (4) с кривизной (5), что позволяет приближенно оценивать геометрию поверхности качения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – 6-е изд. – М.:Наука. – 2010. – 664 с.
2. Черкасова В.В. Мультипликативный интеграл в дифференциальной геометрии и прикладных задачах // Вестник ТГГПУ. – 2010. – Выпуск. – № 3(21).- С. 79-83.

УДК 512.552

ОПИСАНИЕ ГРУПП ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЕДИНИЦ РАНГА 1 ДЛЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ГРУППОВОГО КОЛЬЦА МЕТАЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ФРОБЕНИУСА

Е. О. Шумакова, к.ф.-м.н.
ФГБОУ ВО ЮУрГГПУ
e-mail: *shumakovaeo@cspu.ru*

В данной работе изучается хигманова теория центральных единиц. Выделены случаи, в которых ранг группы единиц равен 0 и 1. Указаны порождающие элементы групп единиц центров целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса порядков 10, 39, 55 и 78.

Ключевые слова: метациклическая группа Фробениуса, центральные единицы, целочисленные групповые кольца, ранг группы единиц, порождающий элемент.

Введение

Хигманова теория единиц групповых колец, описанная в статье середины прошлого века „The units of group rings“, перенесена Р. Ж. Алеевым на группы центральных единиц целочисленных групповых колец произвольных конечных групп [1].

В последние годы Р. Ж. Алеев, О. В. Митина и Т. А. Ханенко [4] и [3] исследовали группы центральных единиц для циклических групп порядков 16, 32 и 64. В настоящее время Р. Ж. Алеевым и его учениками изучаются группы центральных единиц для циклических 3-групп, результаты этой работы анонсированы в [2].

Постановка задачи и методы решения

Целью данной работы является изучение и описание групп обратимых элементов из центров целочисленных групповых колец для метациклических групп Фробениуса $F_{m,n} = \langle b \rangle_m \leftthreetimes \langle a \rangle_n$ с ядром $\langle b \rangle$ порядка m и дополнением $\langle a \rangle$ порядка n.

Для конечной группы G обозначим $U(Z(\mathbb{Z}G))$ — группу обратимых элементов центра кольца $\mathbb{Z}G$, а $r(U(Z(\mathbb{Z}G)))$ — ранг группы $U(Z(\mathbb{Z}G))$, т. е. число бесконечных прямых циклических сомножителей в конечно порожденной абелевой группе $U(Z(\mathbb{Z}G))$.

Группа обратимых элементов центра кольца $\mathbb{Z}G$ для метациклических групп Фробениуса изучена автором в [7], где изучалась строение метациклических групп и получена формула вычисления ранга группы $U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n}))$ для произвольных m и n, а так же отдельно рассмотрен случай, когда m — простое число. Доказано, при каких условиях (и только при них) ранг группы $U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n}))$ с простым m равен 0 или 1 (таблица 1).

В статье [6] указаны значения рангов групп $U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n}))$, где m — простое число, не превосходящее 100, а так же описан процесс вычисления рангов с использованием системы компьютерной алгебры GAP (Groups, Algorithms and Programming), задуманной как инструмент вычислительной теории групп.

Таблица 1 — Ранг группы $U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n}))$

m	n	$r(U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n})))$
3	2	0
5	2	1
5	4	0
7	3	0
7	6	0
11	5	1
13	3	1
13	6	1
13	12	1

Задача состоит в описании группы $U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n}))$ в терминологии порождающих элементов в случаях, когда ранг группы равен 1.

Рассмотрим базисы $\mathbb{C}$–пространства из классовых сумм и из минимальных центральных идемпотентов для центра комплексной групповой алгебры $\mathbb{C}F_{m,n}$, упорядочив их в соответствии с таблицами характеров, построенных для конкретных групп. Установим взаимосвязь между базисами, используя таблицы характеров, и исследуем полученные системы линейных уравнений. Для получения решений систем используются свойства полей характеров, автоморфизмы этих полей, особенности решения уравнений в целых числах, алгебраическая сопряженность групп элементов.

Результаты и обсуждение

Поиски решений указанной задачи заняли довольно длительное время, частично результаты были представлены в [5].

К настоящему моменту найдены порождающие элементы группы центральных единиц целочисленного группового кольца метациклической группы Фробениуса порядка 10, 55, 78 и 39, таким образом исследованы четыре случая из пяти возможных, при которых ранг группы единиц равен 1. Исследование случая для группы Фробениуса порядка 156 не окончены и ведутся в настоящее время. Отметим, что в случае, когда $m = 5$ и $n = 2$ получим диэдральную группу D_{10}.

Обозначим $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Сформулируем полученные результаты в четырех теоремах.

Т е о р е м а 1. [5] Группа обратимых элементов центра целочисленного группового кольца группы $F_{5,2} = D_{10} = \langle b \rangle_5 \leftthreetimes \langle a \rangle_2$ имеет вид

$U(Z(\mathbb{Z}F_{5,2})) = \langle -1\rangle \times \langle u\rangle$, где

$$u = 1 + e_1 - \alpha^2 e_2 - \alpha^{-2} e_3 = -1 + y(b^2).$$

Т е о р е м а 2. [5] Группа обратимых элементов центра целочисленного группового кольца группы $F_{11,5} = \langle b\rangle_{11} \leftthreetimes \langle a\rangle_5$ имеет вид $U(Z(\mathbb{Z}F_{11,5})) = \langle -1\rangle \times \langle u\rangle$, где

$$u = 1 + (4181 + 6765\alpha)(e_1 + e_4) + (10946 - 6765\alpha)(e_2 + e_3) + e_5 + e_6 =$$
$$= 551 + 550(y(b)) + y(b^2)) + 170(y(a) + y(a^4)) - 445(y(a^2) + y(a^3)).$$

Т е о р е м а 3. Группа обратимых элементов центра целочисленного группового кольца группы $F_{13,6} = \langle b\rangle_{13} \leftthreetimes \langle a\rangle_6$ имеет вид $U(Z(\mathbb{Z}F_{13,6})) = \langle -1\rangle \times \langle u\rangle$, где

$$u = 1 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - \beta^{-2} e_6 - \beta^2 e_7 =$$
$$= -5 + 2y(b) - y(b^2).$$

Т е о р е м а 4. Группа обратимых элементов центра целочисленного группового кольца группы $F_{13,3} = \langle b\rangle_{13} \leftthreetimes \langle a\rangle_3$ имеет вид $U(Z(\mathbb{Z}F_{13,3})) = \langle -1\rangle \times \langle u\rangle$, где

$$u = 1 + e_1 + e_2 - \beta^{-2}(e_3 + e_5) - \beta^2(e_4 + e_6) =$$
$$= -5 + 2(y(b) + y(b^{-1})) - y(b^2) - y(b^{-2}).$$

Заметим, что результат теоремы 2 существенно отличаются от результатов теорем 1, 3 и 4, точнее: информация о группе центральных единиц целочисленного группового кольца циклической группы $\langle b\rangle$ не достаточна для построения группы центральных единиц целочисленного группового кольца группы $F_{11,5}$.

Исследования в области групповых колец являются источником для формулировки тем учебных проектов, которые могут быть реализованы обучающимися по программам бакалавриата и магистратуры математических направлений университетов [8]. Использование проектной технологии при обучении студентов позволяет оживить их учебную и исследовательскую деятельность, оптимизировать и усовершенствовать профессиональную подготовку, реализовать индивидуальный подход в обучении, осуществить подготовку к выполнению выпускной квалификационной работы. Выполнение индивидуального или группового проекта по алгебраической или междисциплинарной тематике может быть включено в вариативную часть [9] заданий дисциплины "Алгебра". Проектная деятельность по актуальной алгебраической тематике способствует формированию универсальных, общепрофессиональных, профессиональных компетенций, предусмотренных ФГОС ВО, необходимых для подготовки выпускника к проектной и научно-исследовательской деятельности, способствует саморазвитию.

Работа выполнена при поддержке ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», по договору о выполнении НИР по

теме "Формирование профессиональных компетенций бакалавров средствами проектной деятельности при обучении профильным математическим дисциплинам заявка № 21-04-2019 от 19.04.2019.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алеев Р. Ж. Центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Челябинск: Чел. гос. ун-т, 2000. — 355 с.
2. Алеев Р. Ж., Воробьев А. Н., Кетова Е. А., Шумакова Е. О. Единицы целочисленных групповых колец циклических 3-групп // Международная конференция "Мальцевские чтения": тезисы докладов. — Новосибирск, 2018. — С. 71.
3. Алеев Р. Ж., Митина О. В., Ханенко Т. А. Локальные единицы целочисленного группового кольца циклической группы порядка 64 для характера с полем характера Q_{64} // Челябинский физико-математический журнал. — 2018. — Т. 3. — № 3. — С. 253–275.
4. Алеев Р. Ж., Митина О. В., Ханенко Т. А. Нахождение единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 16 и 32 // Челябинский физико-математический журнал. — 2016. — Т. 1. — № 4. — С. 30–55.
5. Шумакова Е. О. Группы центральных единиц целочисленных групповых колец конечных разрешимых групп: автореферат диссертации . . . канд. физ.-мат. наук. — Екатеринбург. — 2009. — 12с.
6. Шумакова Е. О. Ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса // Современные проблемы физико-математических наук: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. — Орёл, ОГУ им. И.С. Тургенева, 2018. — С. 132–136.
7. Шумакова Е. О. Центральные единицы целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса // Сибирские электронные математические известия. — 2008. — Том 5. — С. 691-698.
8. Шумакова Е. О., Севостьянова С. А. Формирование проектных умений в учебных проектах бакалавров по профильным математическим дисциплинам// Современные проблемы науки и образования. —- 2018. —- № 5. — С. 195.
9. Севостьянова С. А., Шумакова Е. О., Мартынова Е. В. Рейтинговая система оценки знаний студентов при изучении дисциплины "Вводный курс математики"// Вестник Челябинского государственного педагогического университета. —- 2018. —- № 8. — С. 116-129.

Теория вероятностей и математическая статистика

УДК 519.813

ОБ ИГРЕ ДО ПЕРВОГО «ДУБЛЯ»

С.В. Левизов, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
e-mail: *levizov@rambler.ru*

Получена оценка длительности «игры» с бросанием монеты – до выпадения двух «гербов» подряд.

Ключевые слова: математическое ожидание, дисперсия, дифференцирование функционального ряда, числа Фибоначчи.

Рассмотрим ситуацию: монета бросается до тех пор, пока дважды подряд не выпадет «герб». Как долго («в среднем») может продолжаться такая «игра»?

Иными словами, нам нужно рассчитать математическое ожидание дискретной случайной величины $X = \{$количество бросаний, необходимых для окончания вышеописанной «игры»$\}$. Для этого попытаемся оценить соответствующие вероятности событий:

$X_n =$ { «дубль герба» впервые возникает после n-го бросания }, $n = 1,2,...$

Пусть $P(X_n) = p_n$, тогда легко вычислить, что $p_1 = 0,\ p_2 = \frac{1}{4},\quad p_3 = p_4 = \frac{1}{8},...$

В дальнейшем, обозначая выпадение «герба» и «решётки» соответственно Г и Р, оценим величину $T(n)$ – количество последовательностей длины n, составленных из этих букв – таких, которые заканчиваются сочетанием «Г, Г» (до этого не встречавшимся). Заметим, что, во-первых, такую последовательность длины n можно получить из аналогичной последовательности длины $(n-1)$, дописывая к ней слева букву «Р» – количество таковых равно $T(n-1)$. С другой стороны, подходящую последовательность длины n можно получить, добавляя (слева) букву «Г» – к тем последовательностям длины $(n-1)$, которые начинались с буквы «Р» – а их количество равно как раз $T(n-2)$ – это шаг «индукционного перехода» при построении последовательности длины $(n-1)$. Тем самым все возможности для построения подходящих последовательностей длины n будут исчерпаны. В итоге мы получаем рекуррентное соотношение:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$$

Это и есть формула для подсчёта количества походящих последовательностей длины $n \geq 2$; при этом ясно, что $T(0) = T(1) = 0;\ T(2) = T(3) = 1;\ T(4) = 2, \ldots$

Фактически – мы имеем последовательность Фибоначчи $\{u_n\}$ со смещением индекса: $T(n) = u_{n-1}$.

Теперь понятно, что вероятность p_n будет равна величине $\frac{T(n)}{2^n}$ (количество всех «подходящих» последовательностей длины n делится на количество возможных последовательностей длины n, составленных из букв «Г» и «Р»).

Далее вычисляем математическое ожидание :

$M(X) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} T(n) = \sum_{u=2}^{\infty} \frac{n}{2^n} u_{n-1} = \sum_{n=1`}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} u_n$, поскольку $T(1) = 0$.

Нам придётся уточнить величину u_n – n-го элемента последовательности чисел Фибоначчи. Используем формулу Бине (см. [1] , стр. 25):

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Тогда $M(X) = \sum_{n=1`}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$

Полученный ряд представляет собой разность двух равномерно сходящихся (для $|x| < 1$) рядов вида

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(x)^n \quad \left(\text{у нас } x = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \right) \right).$$

Вычислим сумму каждого из них, применяя операцию дифференцирования ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(x)^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x)^{n+1} \right)' = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} = -1 + \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Поэтому в нашем случае, формируя разность рядов, получаем:

$$M(X) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} + 1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2} \right] = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{16}{\left(3-\sqrt{5}\right)^2} - \frac{16}{\left(3+\sqrt{5}\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{5}} \left[\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2 - \left(3-\sqrt{5}\right)^2}{\left(3-\sqrt{5}\right)^2 \left(3+\sqrt{5}\right)^2} \right] = \frac{8}{\sqrt{5}} \left[\frac{\left(9+6\sqrt{5}+5\right) - \left(9-6\sqrt{5}+5\right)}{(9-5)^2} \right] = \frac{8}{\sqrt{5}} \frac{12\sqrt{5}}{16} = 6.$$

Таким образом, «средняя длительность» нашей «игры» составит 6 (бросаний).

Рассчитаем также и дисперсию случайной величины X. Получим следующее:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = M(X^2) - (6)^2 = M(X^2) - 36.$$

$$M(X^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(n)^2\,p_n=\sum_{n=1}^{\infty}(n)^2\,\frac{u_{n-1}}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)^2\,\frac{u_n}{2^{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Вновь имеем разность двух равномерно сходящихся рядов вида

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(x)^n,\ \text{где}\ x=\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\right).$$

Вычисляем их суммы :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2(x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)(x)^n-(n+1)(x)^n\right]=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x)^{n+2}\right)''-\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x)^{n+1}\right)'=$$

$$=\left(\frac{1}{1-x}-1-x-x^2\right)''-\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)'=\left(\frac{2}{(1-x)^3}-2\right)-\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1\right)=$$

$$=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}-1.$$

Обозначая (для упрощения вычислений) $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$, $\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, получим :

$$1-\alpha=1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{4},\ 1-\beta=1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{4},$$

и тогда

$$M(X^2)=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{2}{(1-\alpha)^3}-\frac{2}{(1-\beta)^3}-\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1-\beta)^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{4^3}{(3-\sqrt{5})^3}-\frac{4^3}{(3+\sqrt{5})^3}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{4^2}{(3-\sqrt{5})^2}-\frac{4^2}{(3+\sqrt{5})^2}\right]=\frac{64}{\sqrt{5}}\left[\frac{(3+\sqrt{5})^3-(3-\sqrt{5})^3}{(3-\sqrt{5})^3(3+\sqrt{5})^3}\right]-\frac{8}{\sqrt{5}}\left[\frac{(3+\sqrt{5})^2-(3-\sqrt{5})^2}{(3-\sqrt{5})^2(3+\sqrt{5})^2}\right]=$$

$$=\frac{64}{\sqrt{5}}\left[\frac{(3+\sqrt{5})^3-(3-\sqrt{5})^3}{(9-5)^3}\right]-\frac{8}{\sqrt{5}}\left[\frac{(3+\sqrt{5})^2-(3-\sqrt{5})^2}{(9-5)^2}\right]=\frac{64}{\sqrt{5}}\left(\frac{64\sqrt{5}}{64}\right)-\frac{8}{\sqrt{5}}\left(\frac{12\sqrt{5}}{16}\right)=$$

$$=64-6=58.$$

Окончательно : $D(X)=58-36=22$.

Среднее квадратичное отклонение составляет $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{22}\approx 4,69$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьёв Н.Н. // Числа Фибоначчи. – М.: Наука. – 984. – 144 с.

Методы дискретных особенностей в задачах математической физики

УДК 532.546

РАБОТА СКВАЖИНЫ В СРЕДЕ С РАЗДЕЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ И НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Д. Г. Лекомцев
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *lekomtcevdg@yandex.ru*

Двумерная (плоскопараллельная) задача о дебите скважины в анизотропном неоднородном пласте грунта исследуется для случая, когда проводимость изменяется по степенному закону при s=-2. Рассмотрено воздействие анизотропии и неоднородности грунта на дебит.

Ключевые слова: скважина, пористая среда, закон Дарси, раздельная анизотропия и неоднородность, дебит, тензор проницаемости.

Введение

Одна из основных задач теории фильтрации на текущий момент - это исследование процесса нефтедобычи. В настоящее время запасы основной части легкодоступных нефтяных месторождений истощены [1]. Для добычи нефти активно используются залежи, содержащие запасы нефти в пластах с весьма сложным геологическим строением. Такую структуру имеют многие большие месторождения, например, Астраханское и Верхне-Салымское месторождения в России, или месторождение Тенгиз в Казахстане [2]. Многочисленные эксперименты демонстрируют [3, 4, 5], что нефтяные породы-коллекторы, в реальных пластах, обнаруживают хорошо заметную анизотропию и неоднородность своей структуры. Это актуализирует математическое моделирование фильтрационных процессов в таких породах.

1. Постановка задачи

Эксплуатационная скважина дебита Q, совершенная по степени вскрытия пласта, размещена в горизонтальном анизотропном и неоднородном пласте. Контур скважины - окружность σ_C: $x^2 + y^2 = R_C^2$ радиуса R_C. Давления на контуре скважины σ_C и контуре питания неизменные, разность давлений примем равным единице, жидкость несжимаемая и ее течение не изменяется со временем, пласт безграничен по простиранию. Двумерное течение в анизотропно-неоднородном пористом слое (пласте грунта) проводимости $P = (P_{ij}) = H(K_{ij})$ (H – толщина слоя, (K_{ij}) $i, j = 1, 2$ – тензор его проницаемости) описываем обобщённым потенциалом φ и функцией тока ψ. φ и ψ – функции декартовых координат (x, y) плоскости z всюду в области D, за исключением изолированных особых точек

этих функций, удовлетворяют системе уравнений [6].

$$P_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+P_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad P_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+P_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{1}$$

При следующих условиях

$$P_{11}>0,\quad (P_{22}>0),\quad D(P_S)=P_{11}P_{22}-(P_{12}+P_{21})^2/4, \tag{2}$$

где $D(P_S)$ – определитель симметричной части $P_S=(P+P^T)/2$ тензора P, $P^T=(P_{ji})$ – транспонированный тензор.

Если коэффициенты уравнения (1) отвечают условиям (2), то уравнение (1) является эллиптическим [7].

2. Методы решения

Будем рассматривать пористую среду с раздельной анизотропией и неоднородностью. При таком условии тензор проводимости, возможно, смоделировать степенной функцией одного переменного, например, [6]:

$$P(z)=ky^s,\quad (P_{ij}=k_{ij}y^s, i,j=1,2), \tag{3}$$

где степень s – отрицательная постоянная, далее считаем $s=-2$, тензор $k=(k_{ij})$ – постоянный.

Эта задача весьма сложна, что объясняется видом уравнений (1). Решение задачи можно заметно упростить, если преобразовать (1) к каноническому виду. Используем гомеоморфные (аффинные) преобразования (прямое и обратное) для перехода с физической плоскости $z=x+iy$ на вспомогательную плоскость $\zeta=\xi+i\eta$ [7].

$$\zeta=z+\mu_0(z)\bar{z},\quad z=\frac{\zeta-\mu_0(z)\bar{\zeta}}{1-|\mu_0(z)|^2},\quad \mu_0(z)=\frac{P_{22}-P_{11}-i(P_{12}+P_{21})}{P_{22}+P_{11}+2\sqrt{D(P_S)}}, \tag{4}$$

$$|\mu_0(z)<1|.$$

Из (4) вытекает прямое преобразование декартовых координат плоскостей z и ξ [6]

$$\xi=(1+a)x+by,\quad \eta=bx+(1-a)y, \tag{5}$$

и обратное ему

$$x=\frac{(1-a)\xi-b\eta}{1-a^2-b^2},\quad y=\frac{(1+a)\eta-b\xi}{1-a^2-b^2},$$

где $\mu_0=a+ib$, $a^2+b^2<1$, $a=(k_{22}-k_{11})/(k_{22}+k_{11}+2\sqrt{D(k_s)})$, $b=(k_{12}+k_{21})/(k_{22}+k_{11}+2\sqrt{D(k_s)})$, $D(k_s)=k_{11}k_{22}-(k_{12}+k_{21})^2/4$.

Применим преобразование (4) в предположении, что слой является ортотропным $(k_{12}=k_{21})$. На плоскости ξ получим проводимость [7]

$$P'(\xi)=k_0\left[\frac{(1+a)\eta-b\xi}{1-a^2-b^2}\right]^s,\quad (k_0=\sqrt{k_{11}k_{22}-k_{12}^2}>0). \tag{6}$$

Перейдем на плоскость $\zeta' = \xi' + i\eta'$, связанную с плоскостью ζ преобразованием поворота. Поворот плоскости ζ' производится на угол ϑ_0, который можно найти из соотношения $tg\vartheta_0 = b/(1+a)$. На плоскости ζ' проводимость это функция одного переменного η' [7]:

$$P'(\xi') = k'_0\eta'^s \quad \left(k'_0 = k_0\left[\frac{(1+a)cos\vartheta_0 + bsin\vartheta_0}{1-a^2-b^2}\right]^s\right). \tag{7}$$

Специфической чертой слоя проводимости (7) является существование линии σ_0: $\eta' = 0$, на которой $P = \infty$, при условии $s < 0$. В данном случае $s < 0$, фундаментальное решение будет иметь вид

$$\Phi_1(\zeta', \zeta'_0) = -\frac{k'_0(\eta'\eta'_0)^{|s|/2}Q_{\frac{|s|}{2}}(\omega)}{2\pi} \quad (s < 0). \tag{8}$$

Здесь $Q_\nu(\omega)$ – функция Лежандра второго рода степени ν аргумента $\omega = 1 + R'^2/2\eta'\eta'_0$, $R' = |\eta' - \eta'_0| = \sqrt{(\xi' - \xi'_0)^2 - (\eta' - \eta'_0)^2}$.

Используя (8) и следуя [7, 8] находим формулу, определяющую дебит скважины

$$Q = \frac{2\pi(C - C_0)}{k'_0 d'^{|s|} Q_{\frac{s}{2}-1(\omega)}}. \tag{9}$$

Здесь $Q_\nu(\omega)$ – функция Лежандра второго рода степени ν аргумента $\omega = 1 + R'^2_C/2d'^2$, $d' = d(1-\mu^2)/\sqrt{(1-a)^2 + b^2}$ расстояние от центра скважины σ_C до сингулярной линии σ_0, $R'_C = R_C\sqrt{1-\mu^2}$, $C = 1$, $C_0 = 0$.

3. Дебит скважины

Для изучения влияния анизотропии и неоднородности грунта на дебит скважины используем относительный дебит [9]

$$\varepsilon = Q/Q_0 - 1, \tag{9}$$

где Q_0 дебит совершенной скважины радиуса R_C, размещенной на расстоянии d от прямолинейного бесконечного контура питания в однородной изотропной среде [10].

Учтем воздействия на дебит компонентов тензора $k = (k_{ij})$, применив коэффициенты

$$\alpha = k_{22}/k_{11} > 0, \quad \beta = k_s/k_{11}, \quad \big(k_s = (k_{12} + k_{21})/2\big).$$

Из (2) следует, что $\beta^2 < \alpha$. Коэффициент α показывает соотношение диагональных компонентов k_{11} и k_{22} тензора $k = (k_{ij})$, а коэффициент β - отношение симметричной части k_s тензора $k = (k_{ij})$ к его компоненте k_{11}. На рисунке 1 представлены зависимости относительного дебита ε от значений коэффициентов α и β при значении $s = -2$.

Заключение

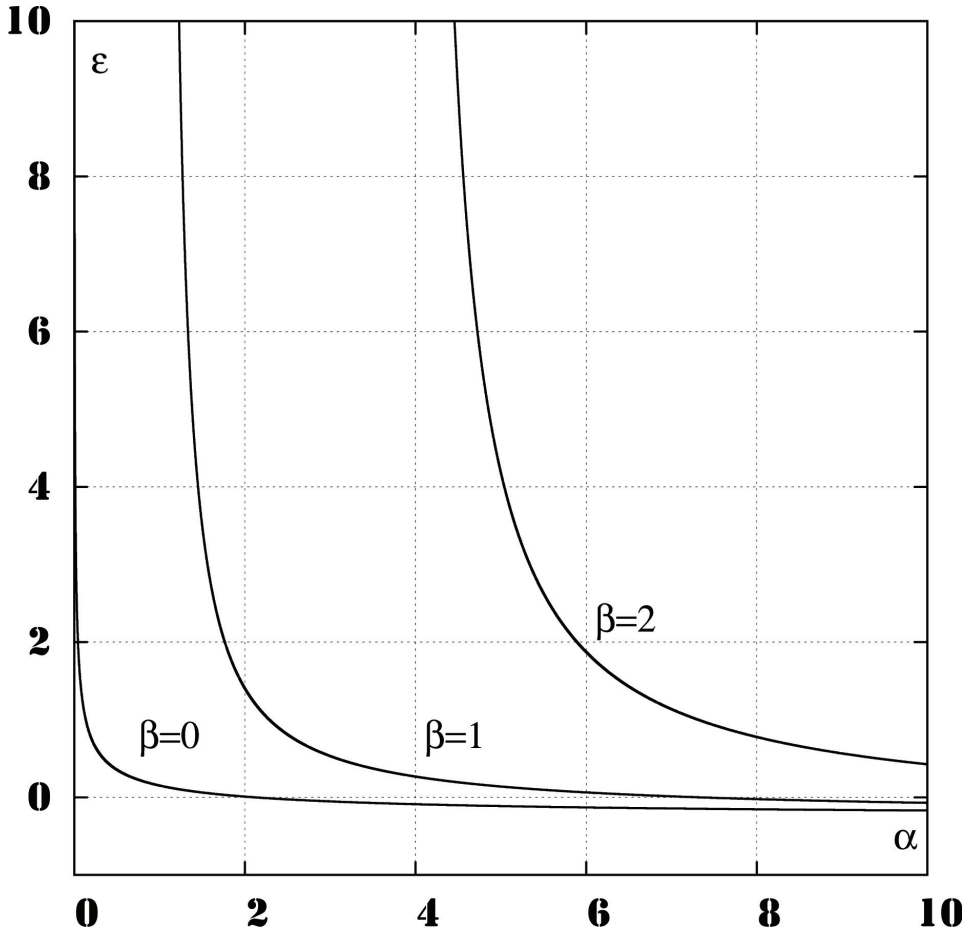


Рисунок 1 – Зависимости относительного дебита скважины ε от коэффициентов α и β

Решение настоящей задачи можно применять для тестирования при апробации численных математических моделей для более сложных случаев. Анизотропия грунта может сильно сказываться на дебите Q (может его увеличивать по отношению к дебиту в случае изотропной неоднородной среды Q_0). На рисунке хорошо видно, что кривые имеют вертикальную асимптоту $\alpha = \beta^2$. Неоднородность грунта оказывает на дебит заметное влияние. Общий вид кривых на рисунке 1 существенно отличается, как от случая анизотропной однородной среды [9, 11, 12], так и от случая анизотропной неоднородной среды со степенным законом изменения проводимости [8, 13, 14] при s>0. С увеличением отношения недиагональных к диагональным компонентам тензора $k = (k_{ij})$ (увеличение коэффициента α, коэффициент β - фиксирован) влияние симметричной части k_s тензора $k = (k_{ij})$ уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайн Н. Геология, разведка, бурение и добыча нефти. — М.: ЗАО «Олимп - Бизнес». — 2004. — 752 с.

2. Графутко С. Б. Изменения анизотропных свойств пласта под действием фильтрационного потока: Автореф. дис. канд. тех. наук. — М., Государственная академия нефти и газа им. И. М. Губкина. — 1993. — 28 с.

3. Семенов А. А. Экспериментальные исследования фильтрационных течений в анизотропных пористых средах: Автореф. дис. канд. тех. наук. — М., РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина. — 2007. — 26 с.

4. Дмитриев Н. М. Модели фильтрации в анизотропных средах: Автореф. дис. док. тех. наук. — М., Государственная академия нефти и газа им. И. М. Губкина. — 1997. — 34 с.

5. Nordquist T. Permeability Anisotropy of Resedimented Mudrocks. — Cambridge: Massachusetts Institute of Technology. — 2015. — 277 p.

6. Пивень В. Ф. Математические модели фильтрации жидкости. — Орел: Издательство ФГБОУ ВПО Орловский государственный университет, ПФ Картуш. — 2015. — 408 с.

7. Пивень В. Ф. Исследование двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном пористом слое // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. — 2017. — № 1. — С. 14–24.

8. Лекомцев Д. Г. Работа скважины в анизотропной неоднородной среде со степенным законом проницаемости // Современные проблемы физико-математических наук: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, (22-25 ноября 2018 г., г. Орёл): в 2 ч. Ч. 1. — Орел. — 2018. — С. 141–145.

9. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. — 2012. — Т.47. — № 3. — С. 69–74.

10. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. — М.: Гостоптехиздат. — 1963. — 396 с.

11. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Вычислительная механика сплошных сред. — 2016. — Т.9. — № 4. — С. 389–399.

12. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Исследование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. — 2014. — Т.59. — № 3. — С. 83–88.

13. Лекомцев Д. Г. Работа совершенной скважины в анизотропном неоднородном слое грунта с квадратичным законом изменения проводимости // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XVI Международной научной конференции (3-8 июля 2017 г., с. Цей). — Владикавказ. — 2017. — С. 156–157.

14. Лекомцев Д. Г. Математическое моделирование работы совершенной скважины в анизотропном неоднородном пласте грунта // Труды XVIII Международного Симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (26-28 июня 2017г., г. Харьков). — г. Харьков — 2017. — С. 149–152.

Информатика
и информационные технологии

УДК 538.91+519.65

МОНИТОРИНГ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ЖИЗНИ НАСЕЛЕНИЯ

И.К. Алексин, студ.
ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет»
e-mail: *ilya-05.02.1997@mail.ru*

В статье предлагается методика комплексной оценки потенциала города Новосибирска. Каждая из составляющих потенциала города относится к разделу «умная среда». Такая оценка позволяет принять решение о приоритетных направлениях развития в городе и о распределении инвестиций.

Ключевые слова: умная среда, комплексная оценка, потенциал, показатели качества.

В рамках своей магистерской диссертации я намерен провести мониторинг показателей качества жизни населения в городе Новосибирске. Для этого мне необходимо выбрать методику, по которой я и буду осуществлять мониторинг. И среди всего многообразия методик, предпочтение отдаю методике Н.В. Шаланова [1], так как она больше всего подходит по условиям моего исследования. С помощью данной методики возможно произвести оценку потенциала Новосибирска (уровня благосостояния населения), которая несёт в себе полезную информацию для представления более полной и чёткой картины качества жизни в городе.

Поскольку потенциал города представляет собой систему, которая включает в себя уровень качества жизни населения, а также перечень показателей качества в рамках каждого блока, то возможно использование метода интегральной оценки системы по перечню показателей качества к определению интегральной оценки потенциала города.

Сформированная система показателей качества для оценки жизни населения города Новосибирска, должна отвечать следующим принципам: все показатели должны достаточно полно и объективно характеризовать основные условия качества жизни населения по субъективным оценкам; исходная информационная база при расчете показателей качества должна быть единой; показатели должны измеряться количественной величиной; все показатели не должны находиться в функциональной зависимости (между собой).

Прежде чем сформировать свою информационную базу, предлагаю рассмотреть опыт нескольких зарубежных и российских исследователей, для того,

чтобы иметь представление о системе показателей качества. Европейские учёные P. Bosch, S. Jongeneel, V. Rovers, Hans-Martin Neumann, M. Airaksinen and A. Huovila работали над проектом «Горизонт 2020», суть которого заключалась в формировании и утверждении показателей качества «умного города» для мониторинга жизни населения, финансируемым Европейским союзом. Все сформированные показатели были разбиты на 4 блока, такие как: человек, планета, зажиточность и правительство. Блок «человек» включал в себя такие показатели, как доступ к базовому медицинскому обслуживанию, количество дорожных происшествий, доступ к общественному транспорту, доступ к образовательным ресурсам и др. Блок «планета» включал в себя такие показатели, как количество генерируемой возобновляемой энергии в городе, количество потребления воды, стратегия устойчивости к изменению климата и др. Блок «зажиточность» включал в себя такие показатели, как уровень безработицы, топливная бедность, валовый внутренний продукт, количество инновационных хабов в городе и др. Блок «правительство» включал в себя такие показатели, как участие граждан в управлении городом, участие избирателей на выборах, умная городская политика и др. [2].

Учёные из Национального исследовательского института технологий и связи сформировали свою систему индикаторов «умных городов». Вся система была разбита на 7 блоков, которые соответствовали разделам «умного города». Система состоит из следующих блоков: умная экономика, управление, жители, технологии, среда, инфраструктура и финансы. Каждый блок содержит 2-6 показателей качества [3].

Стандартизированные системы показателей качества для города были введены лишь недавно, и соответствующей научной литературы не так много. В настоящее время ведётся международная работа по стандартизации тремя организациями: ISO, ITU и коалиция европейских организаций по стандартизации. На данный момент существует 6 международных стандартов показателей, которые имеют отношение к мониторингу качества жизни «умного города». Во всех 6 стандартах выделяются основные блоки, такие как экономика, образование, энергетика, здравоохранение, окружающая среда, правительство и многие другие. Каждый стандарт содержит своей перечень показателей качества, он может состоять от 20 до 140 показателей [4].

В своём исследовании я определил, что все показатели качества будут относится к «умной среде». На основе анализа зарубежных и отечественных публикаций, и в соответствии с международными стандартами о формировании показателей качества жизни для «умного города», я выявил, что информационная база показателей качества делится на несколько блоков, а сами блоки содержат в среднем по 4-5 показателей, которые могут быть разбиты ещё на подгруппы. В моём случае информационная база будет разбита на 7 блоков, каждый блок будет содержать по 4 показателя качества. Показатели качества формируется на основе разделов «умного города».

Сформируем систему показателей качества (таблица 1).

Таблица 1 – Показатели качества «умной среды» для города Новосибирска

	Экологические показатели
1	Уровень активности жителей и администрации города Новосибирска в развитии строительства мусороперерабатывающих заводов
2	Уровень развития систем мониторинга и предупреждения угроз экологической безопасности в городе Новосибирск
3	Доля предприятий, использующих альтернативные источники энергии
4	Доля общественного транспорта в городе, использующая в виде топлива газ/электричество
	Социальные показатели
5	Количество туристических зон в Новосибирске
6	Уровень нагрузки на природную среду при туризме
7	Уровень шумового загрязнения в Новосибирске
8	Количества камер видеонаблюдения в общественных местах
	Образовательные показатели
9	Доля абитуриентов, подающих заявление в университет через электронную систему ВУЗа
10	Доля студентов, возвращающихся в Новосибирск после обучения в иностранном ВУЗе
11	Количество студентов ВУЗов, которые обучаются дистанционно
12	Количество языков, преподаваемых в школах
	Медицинские показатели
13	Доля людей, обращающихся за диагностикой по сети Интернет
14	Доля людей, записывающихся на приём к врачу через сеть Интернет
15	Индекс оценки лечащего врача
16	Уровень развитости онлайн-лабораторий в городе
	Экономические показатели
17	Доля людей, пользующихся электронными деньгами
18	Доля государственных учреждений, оказывающих электронные услуги
19	Доля людей, владеющих криптовалютой
20	Доля компаний, имеющих автоматизированные системы учёта
	Транспортные показатели
21	Доля «умного транспорта» в город
22	Доля общественного транспорта, имеющая возможность оплаты за проезд банковской картой/с помощью мобильного телефона
23	Уровень развития систем оплаты за проезд в общественном транспорте в зависимости от пройденного расстояния
24	Доля беспилотного транспорта в городе
	Управленческие показатели
25	Уровень информированности населения
26	Доля людей, принимающих участие в управлении городом с помощью социальных сетей
27	Доля граждан, использующих механизм получения государственных и муниципальных услуг в электронной форме
28	Количество онлайн-систем для обсуждения вопросов развития города

По составленным показателям качества проводятся экспертные оценки (опрос 100 респондентов). Экспертами проводится ранжирование переменных на основе выбранной автором анкеты балльной системы оценок. После экспертных оценок необходимо провести интегральную оценку по всему комплексу блоков, согласно выбранной методике Н.В. Шаланова. Апробация данной методики интегральной оценки должна позволить определить интегральную оценку уровня благосостояния населения, проживающего в городе Новосибирске, комплексные оценки уровня и качества жизни, значимости в интегральной оценке, а также значимости показателей качества в рамках каждого блока.

Необходимо определиться со способом проведения мониторинга. Мониторинг показателей качества жизни можно проводить с использованием программного обеспечения, как и будет выполнено в моём случае. Существует достаточное количество способов проведения мониторинга, предлагаю сначала рассмотреть опыт некоторых исследователей. Зараковский Г.М., Пенова И.В. создали систему компьютерной поддержки принятия решений по критериям качества жизни [5]. Данная система реализована в виде программного продукта, который даёт возможность наглядно представлять информацию по показателям качества жизни населения и проводить мониторинг. Также она даёт возможность не только оценивать фактическое качество жизни населения в определённый момент времени, но и видеть, в результате каких факторов оно сформировалось. Система реализована в виде настольного приложения и проста в использовании.

Администрация города Порту разработала систему мониторинга и программный продукт для поддержки городского планирования и управления. В системе представлено два компонента: анализ статистических показателей и анализ, основанный на восприятии гражданами условий жизни. В будущем данный проект предполагает доступ для общественности посредством разработки интерактивного интернет-сайта, который будет одновременно давать и получать мнения о качестве городской жизни, чтобы усилить участие граждан в определении приоритетов развития в городе [6].

Мониторинг можно запускать и через социальные сети. С помощью экспертных оценок также возможно отслеживать изменения в отношении качества жизни населения.

В моей работе будет спроектирована и разработана система для мониторинга показателей качества жизни в Новосибирске. Для решения этой задачи мне необходимо: спроектировать архитектуру системы, разработать базу данных по показателям качества жизни населения города Новосибирска, создать пользовательский интерфейс и web-приложение (где будут проводиться экспертные оценки и представлены результаты мониторинга), которое использует базу данных и обеспечивает удалённый доступ к данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаланов Н. В. Системный анализ. Кибернетика. Синергетика: Математические методы и модели. Экономические аспекты. – Новосибирск: НГТУ, 2008. С. 288 с.
2. Bosch, P., S. Jongeneel , V. Rovers , H. Neumann , M. Airaksinen , and A. Huovila .2017 “CITYkeys Indicators for Smart City Projects and Smart Cities.” 305. AccessedJanuary 24, 2017.
3. Индикаторы умных городов НИИТС 2017 / АО “Национальный исследовательский институт технологии и связи”, Москва, 2017.
4. A. Huovila, P. Bosch, and M. Airaksinen, “Comparative analysis of standardized indicators for Smart sustainable cities: What indicators and standards to use and when?,” Cities, 2019.
5. Зараковский Г.М., Пенова И.В. Система компьютерной поддержки принятия решений по критериям качества жизни // Стандарты и качество. – 2005. – № 3. – С. 60–62.
6. Santos, L. D., and I. Martins. 2007. Monitoring urban quality of life: the Porto Experience. Social Indicators Research 80:411–425.

УДК 004.42

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА РАСЧЕТА ОТБРАКОВОЧНЫХ ДОПУСКОВ ЭЛЕКТРОРАДИОЭЛЕМЕНТОВ

К.И. Бушмелева, д.т.н., доц.
БУ ВО ХМАО-Югры «Сургутский государственный университет»
e-mail: *bkiya@yandex.ru*
С.У. Увайсов, д.т.н., проф.
ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет»
e-mail: *uvaysov@yandex.ru*

В работе представлен и описаны математический аппарат, модели и алгоритмы, а также программное обеспечение, используемые для разработки автоматизированной системырасчета отбраковочных допусков на электрические параметры радиоэлементов электронных средств.

Ключевые слова: отбраковочные допуски, электрорадиоэлементы, электронные средства, программное обеспечение, автоматизированная система, база данных.

В связи с высоким уровнем внедрения в различные сферы деятельности человека электронных средств (ЭС) их производство предполагает массовое изготовление различных узлов на платах печатных узлов (ПУ). При этом одной из основных проблем является обеспечение высоких показателей качества и надежности этой продукции, которое в свою очередь невозможно без применения на заводах-изготовителях разнообразных методов и средств контроля, в том числе технического диагностирования (ТД), на каждом этапе технологического процесса. Данное диагностирование представляет собой процесс определения

технического состояния объекта диагностирования с определенной точностью и установление его вида.

Жизненный цикл любого объекта состоит из этапов производства и эксплуатации, к каждому из которых предъявляются определенные технические требования. Объект всегда должен удовлетворять требованиям, установленным в технической документации. Возникающие в объекте дефекты нарушают это соответствие. Задача диагностирования состоит в том, чтобы своевременно обнаружить дефекты, найти места и причины их возникновения и, в конечном итоге, восстановить нарушенное дефектами соответствие объекта техническим требованиям. Дефекты могут быть вызваны, например, одной из следующих причин: нарушением технологических процессов изготовления ПУ; отсутствием на предприятии стопроцентного входного контроля радиоэлементов электронных средств, в частности электрорадиоэлементов (ЭРЭ) (например, таких как, резистор, конденсатор, катушка индуктивности и др.) и другие. Ошибки проектирования представляют собой особый класс дефектов, также подлежащих устранению с помощью методов и средств ТД.

При проектировании ЭС в техническом задании на их выходные характеристики задаются допуски, которые в свою очередь должны находиться в пределах заданных значений в процессе хранения и эксплуатации устройства. Эти допуски,в свою очередь, обеспечиваются технологическими допускамина параметры ЭРЭ электронной схемы.

В процессе эксплуатации на параметры ЭРЭ оказывают воздействие различные внешние дестабилизирующие факторы (например, климатические: воздействие тепла и холода; давление и др.), что приводит к изменению их начальных значений, а также влечет за собойвыходэтих параметров за пределы технологического допуска, происходит так называемый параметрический отказ, как результат – ЭРЭ переходит в неисправное состояние, что в свою очередь уменьшает показатель срока эксплуатации устройства. Размер влияния немало зависит от конструктивных особенностей ЭС, например, от количества и расположения элементов на печатном узле. Для предотвращения параметрического отказа ЭРЭ рассчитывают отбраковочные допуски, которые учитывают дрейф параметрапри воздействии дестабилизирующих факторов [1]. Расчет отбраковочного допуска позволяет произвести отбор элементов, параметры которых не выйдут за пределы технологического допуска, что гарантирует низкую долю вероятности выхода из строя ЭРЭ, и обеспечивает на этапе проектирования исправность рассматриваемых ЭРЭ с точки зрения учитываемых факторов воздействия.

Целью данной работы является разработка автоматизированной системы (АС) позволяющей производить расчет показателей технических систем, в частности, отбраковочных допусков на параметры ЭРЭ электронных средств на этапе проектирования с учетом таких дестабилизирующих факторов, как температурные режимы, что в свою очередь позволит повысить достоверность диагностирования ЭС.

С точки зрения организации АС были выдвинуты следующие требования:

– наличие блочно-модульной структуры, которая позволит эффективным образом дополнять систему другими функциональными блоками и программными модулями, расширяющими его функциональные возможности;
– возможность функционирования, как в автономном режиме, так и в составе систем автоматизированного проектирования (САПР), а также интеграция с программами типа PSpice и АСОНИКА-ТМ;
– открытость к изменению математической модели учета дестабилизирующих факторов;
– структура базы данных (БД) должна предусматривать различные типономиналы ЭРЭ, с возможностью их дополнения, а также данные о влиянии на элемент того или иного дестабилизирующего фактора;
– наличие ручного ввода данных учета дестабилизирующих факторов;
– разработка должна вестись с учетом современных достижений в области программирования и технического обеспечения.

На первом этапе была поставлена задача, спроектировать контекстную диаграмму АС, данная диаграмма, как и диаграмма второго уровня (рисунок 1), выполнена по методологии функционального моделирования и графических нотаций IDEF0. Проектируемая система предстает в виде набора взаимосвязанных функциональных блоков. Каждая из четырех сторон функционального блока имеет свое определенное значение:
– левая сторона это данные представляющие собой мощности тепловыделения ЭРЭ, получаемые в результате моделирования электрических процессов принципиальной схемы, геометрические и теплофизические параметры печатного узла, технологические допуски ЭРЭ;
– правая сторона это характеристики, которые позволят на основе произведенных расчетов оценить различные показатели технических систем, в частности, температуру ЭРЭ, получаемую с помощью АСпо моделированию тепловых процессов; отбраковочные допуски ЭРЭ;
– верхняя сторона это элементы, выполняющие управляющее воздействие, которые представлены технической документацией на печатный узел, а также техническим заданием (ТЗ) и техническими указаниями (ТУ) на ЭРЭ;
– нижняя сторона это объекты, с помощью которых выполняется функция системы, ими являются проектировщик электронных средств, владеющий теоретическими и практическими знаниями в области радиоэлектроники, а также ЭВМ, на которой будет, непосредственно осуществляется расчет.

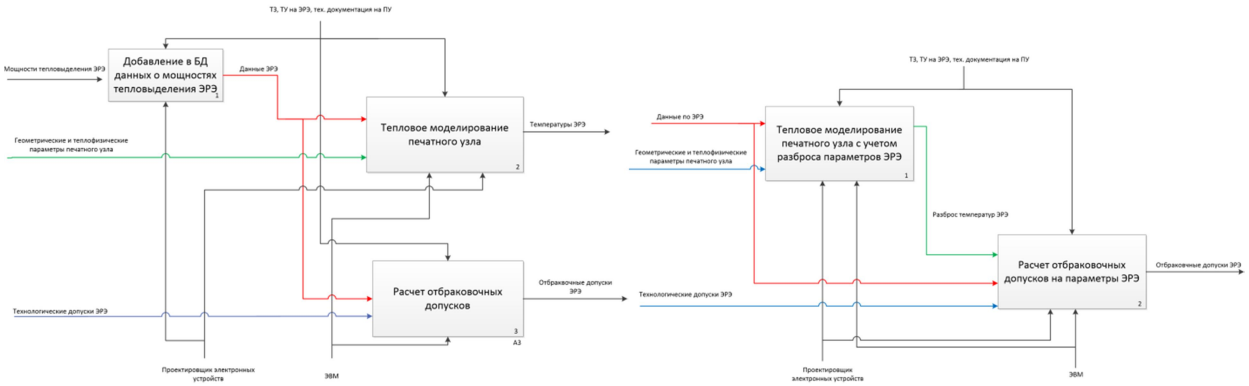


Рисунок 1 – Диаграмма второго и третьего уровня

Декомпозированная контекстная диаграмма состоит из трех функциональных блоков, один из которых представлен диаграммой третьего уровня. Первый функциональный блок описывает добавление в БД автоматизированной системы, информации о мощностях тепловыделения ЭРЭ. На вход второго функционального блока подаются данные по ЭРЭ. Во втором функциональном блоке производится расчет температур ЭРЭ при номинальных параметрах мощностей тепловыделения с помощью ПО моделирования тепловых процессов печатного узла. Кроме данных по ЭРЭ, входной информацией для данного блока является геометрические и теплофизические параметры печатного узла. Входными параметрами третьего функционального блока являются технологические допуски ЭРЭ, данные по ЭРЭ полученные из первого блока.

Задача расчета отбраковочных допусков, проводимая после расчета температур ЭРЭ при номинальных параметрах элементов, описана диаграммой третьего уровня.Расчет отбраковочных допусков проходит в два этапа. На первом этапе происходит получение температур ЭРЭ с учетом разброса посредством проведения теплового расчета модели печатного узла с помощью АС моделирования тепловых процессов [2, 3]. Второй этап – это расчет отбраковочных допусков, сопровождаемый последующей проверкой теплофизических параметров ЭРЭ на основании заданного алгоритма, с целью коррекции нижних и верхних границ рабочих температур и теплофизических параметров ЭРЭ [4,5].

Физическая модель БД разработана в среде Microsoft Management Studio в СУБД SQL Server и состоит из шести взаимосвязанных таблиц: «Проекты», «Резисторы», «Конденсаторы», «Катушки индуктивности», «Модели конденсаторов» и «Модели катушек индуктивности».

Для расчета отбраковочных допусков ЭРЭ необходимо получить доверительные интервалы температур анализируемых элементов. Для этого проводят тепловое моделирование. Проведя заданное количество расчетов теплового режима модели конструкции ПУ, получаем K значений температур на каждом элементе. Для вычисления допустимых интервалов на температуры ЭРЭ используется аппарат математической статистики, где первоначально рассчитывается математическое ожидание $M(T_n)$, далее дисперсия температуры $D(T_n)$и среднеквадратичное отклонение $\sigma(T_n)$ температуры ЭРЭ, где T_n – значение температуры n-ого элемента.

Для вычисления верхней и нижней границ диапазона, в котором может находиться температура ЭРЭ, задают доверительную вероятность, на основании которой определяют интервал нахождения температуры ЭРЭ.

Величина χ (обратное значение функции стандартного нормального распределения) показывает для нормального закона распределения число среднеквадратических отклонений, которое нужно отложить вправо и влево от $M(T_n)$ для того, чтобы вероятность попадания в полученный интервал была равна β.

Нижняя $T_n^н$ и верхняя $T_n^в$ границы допуска на значение температуры n-го элемента ЭРЭ для заданной вероятности β определяется по формулам (1), (2):

$$T_n^H = M(T_n) - \chi\sigma(T_n) \quad (1)$$

и

$$T_n^B = M(T_n) + \chi\sigma(T_n). \quad (2)$$

Как правило, значение доверительной вероятности выбирается равным $\beta = 0{,}9973$, при этом $\chi \approx 3$ (реальное значение 2,58).

Для обеспечения параметров ЭРЭ в пределах допусков во всем диапазоне температур, заданном в техническом задании на ЭС, тепловых процессов необходимо проводить при минимальной и максимально возможной температурах. При расчете отбраковочных допусков необходимо использовать максимальное и минимальное значения температур элементов для соответствующих случаев (изменение параметра в сторону увеличения или уменьшения). Максимальной температурой элемента T_{max} будет являться верхняя граница допуска на значение температуры элемента $T_n^{\text{в}}$ при условии, что моделирование проводилось при максимальной температуре окружающей среды.

Минимальной температурой элемента является нижняя граница допуска на значение температуры элемента при условии моделирования схемы при минимальной температуре окружающей среды.

После расчета доверительного интервала допустимо переходить к расчету отбраковочных допусков. Расчет отбраковочных допусков начинается после завершения этапов схемотехнического, конструкторского проектирования печатного узла ЭС. Коэффициент старения β рассчитывается по формуле (3):

$$\beta = \frac{\Delta q_{\text{ст.max}}}{t_{\text{м.н.}} * 100}, \quad (3)$$

где $\Delta q_{\text{ст.max}}$ – предельное значение изменения параметра ЭРЭ, $t_{\text{м.н.}}$ – часы минимальной наработки электронного средства.

Верхние и нижние границы технологических допусков $q^{\text{в}}$ и $q^{\text{н}}$ рассчитываются по формулам (4) и (5):

$$q^{\text{в}} = q^{\text{ном}} * \left(1 + \frac{\delta}{100}\right) \quad (4)$$

и

$$q^{\text{н}} = q^{\text{ном}} * \left(1 - \frac{\delta}{100}\right), \quad (5)$$

где $q^{\text{ном}}$ – номинальное значение параметра ЭРЭ, δ – допуск на параметр ЭРЭ.

Верхний и нижний отбраковочные допуски $q^{\text{в}}_{\text{отбр}}$ и $q^{\text{н}}_{\text{отбр}}$ рассчитываются по формулам (6) и (7):

$$q^{\text{в}}_{\text{отбр}} = \frac{q^{\text{в}}}{1 + \alpha^{\text{в}}_q * (T^{\text{в}} - T_0) + \beta_q * t} \quad (6)$$

и

$$q^{\text{н}}_{\text{отбр}} = \frac{q^{\text{н}}}{1 + \alpha^{\text{н}}_q * (T^{\text{н}} - T_0) - \beta_q * t}, \quad (7)$$

где $\alpha^{\text{в}}_q, \alpha^{\text{н}}_q$ – верхний и нижний температурные коэффициенты, β_q – коэффициент старения элемента ПУ, *t* – время эксплуатации ЭС, T_0 – номинальная температура элемента, $T^{\text{н}}$, $T^{\text{в}}$ – нижняя и верхняя граница температуры.

Случайные геометрические $q^{\text{геом}}$ и теплофизические $q^{\text{тепл}}$ параметры ЭРЭ рассчитываются по формулам (8) и (9):

$$q^{\text{геом}} = q^{\text{геом}_{\text{ном}}} * (1 + \delta_{\text{геом}} * \xi) \quad (8)$$

и

$$q^{\text{тепл}} = q^{\text{тепл_ном}} * (1 + \delta_{\text{тепл}} * \xi). \quad (9)$$

где $q^{геом_ном}$, $q^{тепл_ном}$ – номинальные геометрические и теплофизические параметры ЭРЭ; $\delta_{геом}$, $\delta_{тепл}$ – разбросы геометрических и теплофизических параметров ЭРЭ соответственно; ξ – случайная величина, сгенерированная по заданной пользователем плотности распределения.

Так как основной задачей является разработка ПО, позволяющего автоматизировать процесс расчета отбраковочных допусков ЭРЭ в составе ПУ на этапе проектирования ЭС, то характеристики, учитываемые для разработки АС, складываются из особенностей проведения компьютерного моделирования, используемого для получения данных, требуемых для непосредственного расчета отбраковочных допусков. В первую очередь здесь учитывается проведение электрического моделирования принципиальной схемы устройства с целью получения значений мощностей тепловыделения элементов, а затем проведения моделирования принципиальной схемы методом Монте-Карло. В связи с этим ПО должно быть сопряжено с программой электрического моделирования, в которой реализован метод Монте-Карло (PSpice), а также с программой моделирования тепловых и механических процессов АСОНИКА-ТМ, позволяющей производить расчеты температур ЭРЭ.

В основу разработки АС заложен алгоритм расчета отбраковочных допусков представленный в виде блок-схемы на рисунке 2.

Для расчета отбраковочных допусков ЭРЭ вводятся следующие параметры элемента: номинальные значения ($q_{ном}$); технологические допуски δ; максимальные и минимальные рабочие температуры ЭРЭ [T_{max}, T_{min}]; срок эксплуатации ЭС (t); температурные коэффициенты ЭРЭ (α_q); данные для учета старения (предельное значение изменения параметра $q_{ст.max}$, время минимальной наработки $t_{м.н}$).Расчет отбраковочных допусков начинается при завершении этапа теплового моделирования печатного узла. Итогом теплового моделирования является набор векторов температур элементов. Расчет отбраковочных допусков проводится с учетом линейных температурных коэффициентов и коэффициента старения. Корректировка границ температур ЭРЭ проводится при анализе интервальных температурных коэффициентов. В итоге определяются адекватные значения доверительных интервалов температур ЭРЭ.

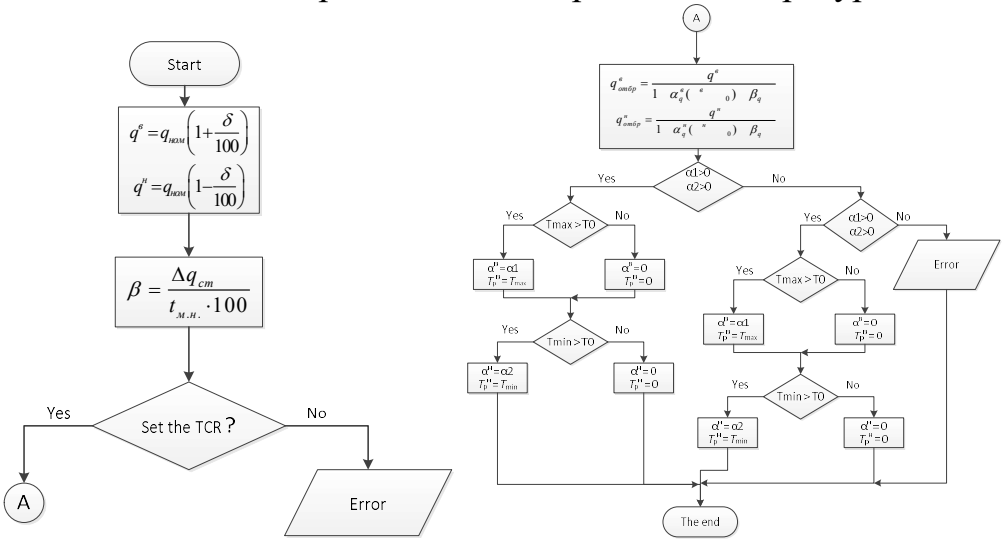


Рисунок 2 – Блок схема расчета отбраковочных допусков ЭРЭ

При разработке алгоритма теплового моделирования было учтено, что макет ПУ имеет многослойную структуру, при этом количество слоев определяется документацией на аппаратуру. Для создания 3D модели печатной платы необходимы следующие слои: слой контура платы; слой шелкографии; слой посадочных мест. Тепловое моделирование осуществляется путем наложения материалов на элементы ПУ, температуры окружающей среды, задания объемных источников тепла, обладающих заданной мощностью тепловыделения. При номинальном расчете температур, геометрические параметры и теплофизические параметры ЭРЭ остаются без изменений. При расчете температур с учетом технологических допусков, генерируется случайная величина с целью задания случайных значений геометрических и теплофизических параметров ЭРЭ.

Также при разработке АСдополнительно использовались САПР: Altium Designer, SolidWorks, SolidWorks Flow Simulation, SolidWorks Flow Simulation Electronic Cooling Module Add-In, реализующие следующие функции: создание моделей ЭРЭ; проектирование печатных плат; реализация 3D модели печатной платы; тепловое моделирование.Разрабатываемая программа в ходе своей работы использует внешние модули позволяющие получить характеристики электрического моделирования принципиальных схем и температур на ЭС, например такие как: выходное напряжение схемы; мощности тепловыделения элементов; коэффициенты чувствительности элементов и др.

Модуль электрического моделирования является частью программы PSpice A/D, под названием “PSP_CMD.EXE”, которая встроена и модифицирована во многие другие программы (Micro-Cap, Ngspice и др.). Входными данными для модуля являются файлы с описанием принципиальной схемы на языке SPICE (Circuit-файл) и заданиями на моделирование, результаты работы модуля сохраняются в выходных файлах.

Описание схемы в общем случае состоит из описания элементов схемы и их моделей, имеет строгую структуру, которая зависит от типа элементов. Далее следует указание узлов схемы, с которыми соединен ЭРЭ. Таким образом, PSPICE представляет схему в виде неориентированного графа, в котором вершины – узлы схемы, а ребра – элементы схемы. Модели элементов представляют собой набор параметров для конкретного типа элемента, при указании имени модели в описании элемента, все параметры модели будут относиться и к этому элементу, они строятся по шаблону, а набор параметров модели зависит от типа элемента. Модель описывает параметры конкретного типа элементов, тип элементов указывается в соответствующей части описания модели. Далее в описании модели идут значения конкретных параметров, зависящих уже от типа описываемого элемента.

После проведения моделирования, PSPICE формирует выходной файл с необходимой информацией о моделировании и с другой информацией, в соответствии с заданиями на моделирование, указанными во входном файле.

Разработка АС велась в среде Microsoft Visual Studio и имеет клиент-серверную архитектуру. Для хранения информации о параметрах ЭРЭ, геометрических и теплофизических параметров печатного узла и ЭРЭ была выбрана

СУБД Microsoft SQL Server. Для взаимодействия с БД использовалась объектно-ориентированная технология доступа к данным Entity Framework.

Интерфейс АС включает в себя несколько окон. Первоначально при запуске программы появляется стартовое окно системы, которое предоставляет пользователю возможность выбрать действия по осуществлению теплового расчета или расчета отбраковочных допусков ЭРЭ.Внешняя подсистема передает ID схемы, требуемую задачу (указывается символом), а также необходимые расчетные данные в формате контейнера List. Для теплового расчета в первом элементе указывается тип расчета (с номинальными параметрами, либо с учетом разброса), во втором - температура окружающей среды, в последующих – строка следующего вида: «Имя_элементамощность_тепловыделения». Активность кнопок определяется по импортируемым данным.

Для теплового расчета ЭРЭ требуется импорт файла с мощностями тепловыделения, а также скриншот температурного разброса на поверхности ПУ, с целью сохранения в соответствующую директорию проекта. При расчете с учетом разброса теплофизических и геометрических параметров пользователю требуется указатель плотность распределения в выпадающем окне при нажатии пункта меню «Плотность распределения случайной величины». В результате в диалоговом окне появится изображение ПУ с результатами теплового расчета (температурный разброс), а также характеристики ЭРЭ участвующих в расчете, такие как: температура элемента; мощность тепловыделения; длина, ширина, высота ЭРЭ; температура окружающей среды.

Для проведения генерации случайной величины система предоставляет окно ввода данных заданной плотности распределения, а также других необходимых параметров. В результате выходные данные формируются в контейнер List с указанием в первой строке ID схемы и далее в последующих строках записи указываются в следующем формате: «Наименование_элемента Значение_температуры». После этого данные обрабатывается внешней подсистемой.

Для расчета отбраковочных допусков ЭРЭ пользователь в диалоговом окне задает срок эксплуатации ЭС, выбирает наименование ЭРЭ, после чего просматривает расчетные параметры элемента, например такие как, технологический допуск, время минимальной наработки, предельное значение отклонения параметра, номинальная температура, с целью проверки всех необходимых.

После завершения этапа проверки производится непосредственно расчет отбраковочных допусков. Полученные значения заносятся в базу данных, и отправляется ответ внешней системе. Для пользователя также предоставляется возможность записи расчетных данных в таблицу и сохранения результата в соответствующую директорию корневой папки проекта.

Подводя итог можно отметить, что в результате проведенной работы была разработана автоматизированная система расчета отбраковочных допусков с учетом температурного фактора и старения. В ходе исследований, с помощью данной системы, были проведены расчеты отбраковочных допусков ЭРЭ с использованием предварительно полученных значений технологических допусков и по реализуемым расчетным формулам. В результате при диагностировании ЭРЭ в составе ЭС непосредственно после подачи на вход требуемых воздей-

ствий по отбраковочным допускам повышается его достоверность. Кроме того, отбор элементов по отбраковочным допускам позволяет сохранить электрические параметры элементов в пределах заданных технологических допусков, т.е. это в свою очередь предотвратит параметрический отказ элементов в отдельности и переход ЭС в целом в неисправное состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долматов А.В., Лобурец Д.А., Увайсов С.У. Определение допусков на параметры электрорадиоизделий функциональных узлов с учетом дестабилизирующих факторов /LIII научная сессия, посвященная Дню радио.Тезисы докладов. Москва, РНТО РЭС им. А.С. Попова, 1998.
2. Долматов А.В., Лобурец Д.А., Увайсов С.У. Комплексное электротепловое моделирование при проектировании и диагностировании радиоэлектронных средств // Информатика-машиностроение, 1998, №2, С.23-31.
3. Bushmeleva K.I., Plyusnin I.I., Bushmelev P.E., Uvaysov S.U. Modeling the optimal parameters for a remote sensing device // Measurement Techniques.Moscow, 2011. Т.54. №3. pp. 294-299.
4. Еремина В.Е., Абрамешин А.Е., Арестова А.Ю., Адюкова Е.В. Методика расчета отбраковочных допусков на комплектующие элементы в составе печатного узла с учетом влияния температуры и старения на примере резисторов/Инновационные информационные технологии. Материалы международной научно-практической конференции. – М.: МИЭМ, 2012, 602 с.
5. Еремина В.Е., Увайсова С.С., Масленникова Я.Л. Синтез отбраковочного допуска на емкость конденсаторов с учетом температурного фактора /Инновационные технологии, научные и технические достижения, их правовая защита. Сборник статей IV Международной научно-практической конференции. – Тольятти – М.: Изд. «Типография Ника», 2011. – 356 с.

ЗАЧЕМ ПРОИЗВОДИТЕЛИ УМЕНЬШАЮТ ПРОЦЕССОРЫ И ПОЧЕМУ ЗАКОН МУРА БОЛЬШЕ НЕ АКТУАЛЕН

Е.И. Володина
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
В.А. Колесов
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

В статье рассказано о том, что такое закон Мура, под влиянием какой научной работы создавались и создаются ЭВМ, как закон Мура повлиял на развитие всей компьютерной техники. Объяснено, почему данным законом пользовались практически пять десятилетий, почему сейчас он уже не актуален, чем хороши маленькие транзисторы, а также выдвинуты предположения о том, что может прийти на замену закону Мура.

Ключевые слова: закон Мура, Intel, транзисторы, процессоры, микросхемы, архитектура, разработка.

1. Введение

В 1965 один из основателей Intel Гордон Мур нашел закономерность: новая модель микросхемы появлялась примерно через год после предыдущей, при этом количество транзисторов в них возрастало каждый раз приблизительно вдвое. Данное наблюдение получило название – закон Мура (рисунок 1). На приведенном ниже рисунке точки на графике – объем памяти в битах.

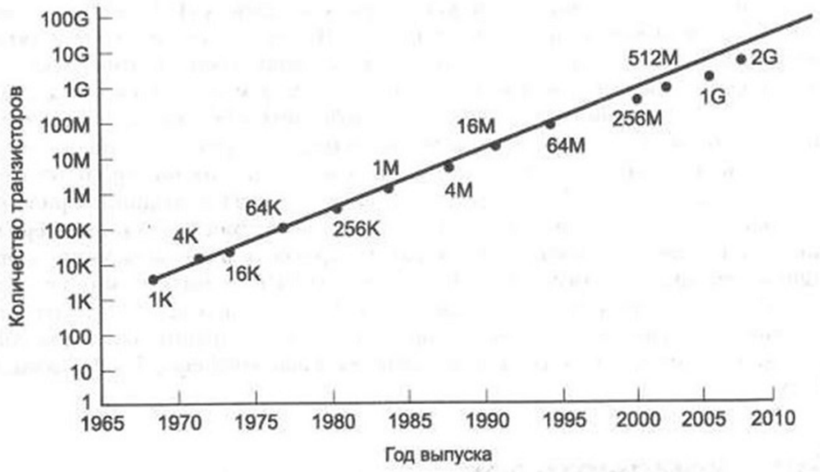


Рисунок 1 – Закон Мура

В 1975 Мур внес поправки в свои наблюдения, которые заключались в том, что удвоение числа транзисторов происходило каждые два года.

2. История

В 1946 году Фон Нейман, Голдстайн и Бёркс, которые на тот момент уже работали в Институте перспективных исследований, опубликовали статью под названием «Предварительное рассмотрение логической конструкции электронно-вычислительного устройства». И несмотря на то, что прошло уже довольно большое количество времени, данная статья содержит актуальные научные сведения. В частности, в ней подробно обосновывается необходимость использования двоичной системы счисления, хотя раньше вычислительные машины хранили данные в десятичном виде. По прошествии десятилетий, ЭВМ научи-

лись обрабатывать информацию разного типа, например, графическую, текстовую и другие, но принцип использования нулей и единиц всё также составляет основу современных устройств.

Знания, заложенные десятилетия назад и стали основой. В последствии, инженеры лишь старались сделать компьютеры более производительными.

Важно помнить, что закон Мура также лежит в основе. Все его последующие воплощения служили поддержкой базовой модели, и уже мало что могло помешать разорвать этот цикл. Получалось так, что чем дальше и активнее развивалась техника, тем глубже увязали разработчики этих систем. Создание принципиально новой модели требовало времени и человеческих ресурсов, и немногие копании могли позволить себе поиск альтернативных вариантов развития компьютеров. Некоторые компании пытались проводить различные эксперименты, но они так и не увенчались успехом.

Работа программистов теперь заключалась лишь в оптимизации работы техники, чтобы каждая единица площади работала все более эффективно. Также разработчики пытались и пытаются до сих пор разместить как можно большее число ядер в рамках одного процессора.

Исключением из закона Мура может служить, разве что, GPU(рисунок 2), которые разрабатывались для обработки графической информации.

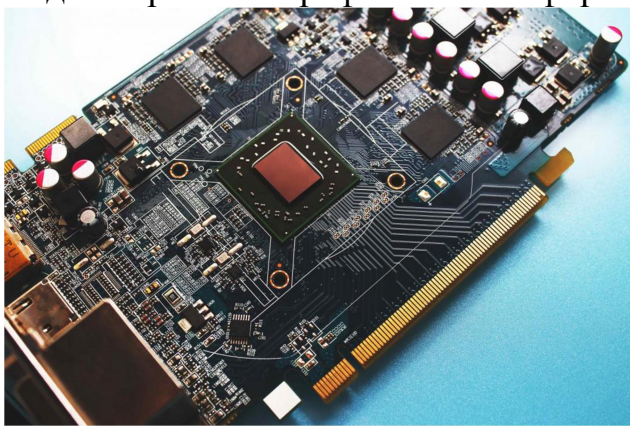


Рисунок 2 – GPU

Поэтому их архитектура естественно отличается от архитектуры процессоров. Но для того, чтобы справляться со своей задачей, GPUэволюционировали не зависимо от эволюции процессоров. Здесь инженерам пришлось разрабатывать новый тип чипов, который лишь дополнял возможности обычных процессоров, но не замещал их [1].

3. Конец эпохи Мура

Высказывая свои наблюдения, Мур не мог предположить, что его законом будут пользоваться на протяжении практически пяти десятилетий. Не мог он предугадать и то, что проблемы с соблюдением данного закона начнутся у самой компании Intel. Чтобы увеличивать количество транзисторов в процессоре, необходимо уменьшать их размер и увеличивать плотность на единицу площади (рисунок 3).

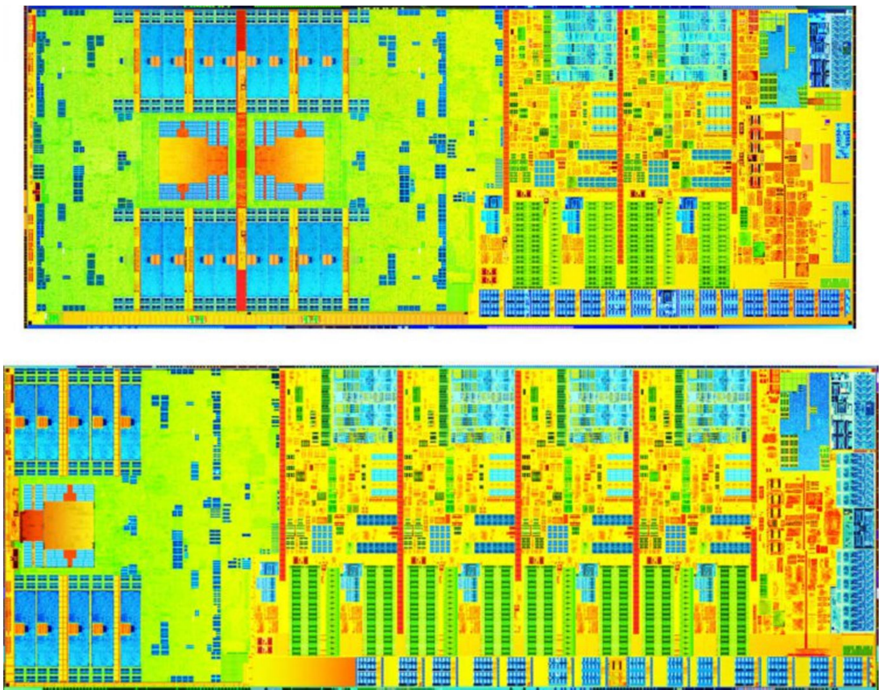


Рисунок 3 – Изменения процессоров

На данный момент, самым маленьким освоенным размером можно считать 22 нм у транзисторов в процессоре IntelHaswell. Казалось бы, причин перехода на такие маленькие транзисторы нет, так как уменьшение размеров ведет к сложностям при литографии и контроле качества, однако все не так просто.

Во-первых, энергопотребление: чем меньше элемент, тем меньше он потребляет и выделяет тепла. Это дает возможность использовать мощные процессоры в компактных устройствах. С другой стороны, возрастает сложность теплоотвода.

Во-вторых, каждый конденсатор вносит небольшую задержку в распространение цифрового сигнала, которая при увеличении связанных компонентов суммируется. Уменьшение паразитной емкости можно добиться с помощью уменьшения самого транзистора.

В-третьих, затраты на производство. Чем меньше площадь процессора, тем больше их помещается на пластине, следовательно, тем больше выгода. Но данная причина является скорее следствием уменьшения размеров процессора.

Это все, конечно, хорошо, но быстрее бы производители признали, что закон Мура уже не актуален и перестали бы все уменьшать. Ведь уменьшение ведет к большому количеству брака, так как даже незаметные человеку земные колебания приводят в негодность большой процент процессоров. Плюс, сложное производство, современное оборудование и огромный штат научных сотрудников. Отсюда и такая дороговизна [2].

4. Что дальше?

Скоро разработчикам не нужно будет думать о том, как еще успеть за законом Мура. Уже сейчас постепенно внедряются новые технологии и идеи, которые позволяют достичь высот, недоступных обычным компьютерам с традиционной архитектурой. Возможно, что даже скорость вычислений будет иметь не такое большое значение при оценке производительности техники.

Скорее всего, стремясь обойти закон Мура, специалисты создадут новые технологии, которые превзойдут все наши смелые планы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Brooks R. The End of Moore's Law [электронныйресурс] // Rodney Brooks. URL: http://rodneybrooks.com/the-end-of-moores-law/ (Дата обращения: 12.09.2019).
2. Бурда А. Битва за нанометры: зачем производители уменьшают техпроцесс [электронный ресурс] // Hi-News.ru. URL: https://hi-news.ru/technology/bitva-za-nanometry-zachem-proizvoditeli-umenshayut-texprocess.html (Дата обращения: 12.09.2019).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ ФИЗИКЕ И АСТРОНОМИИ

Г.В. Воронина
Многопрофильный колледж ФГБОУ ВО Орловский ГАУ
e-mail: *voroninagaly@yandex.ru*

Использование информационно-коммуникационных технологий в образовании стало повсеместным явлением. Образование должно идти в ногу со временем, с развитием обучающихся в информационной сфере.

Такие предметы как физика и астрономия особенно интересно преподавать, используя информационные технологии, которые очень разнообразны: от простых презентаций PowerPoint до использования 3D-технологий.

С появлением персональных электронно-вычислительных машин появились новые информационные формы обучения, использование которых в учебном процессе обусловлено такими аспектами:

- условия развития обществ заставили искать новые формы организации учебно-воспитательного процесса, в том числе и персонального компьютера;
- стремительное увеличение научной информации в период технического прогресса человечества требует своевременного и адекватного отображения в учебном процессе;
- педагоги-практики свидетельствуют, что сейчас наблюдается снижение уровня мотивации и познавательной активности учеников во время изучаемых предметов, в том числе физики. Это указывает на необходимость совершенствования методики обучения, модернизации форм работы преподавателя.

Современный преподаватель занимается разными видами профессиональной деятельности: преподавательской, воспитательной, научной, методической, управленческой. В зависимости от того или иного вида деятельности существуют разные возможности использовать компьютерные и информационные технологии, что позволяет получать, передавать, систематизировать и обрабатывать информацию.

В преподавании физики и астрономии компьютер может быть использован на всех этапах урока – при объяснении нового материала, закреплении, повторении, контроле. Использование компьютеров на уроках физики и астрономии заключается в том, что информацию учащиеся получают в различном виде – текстовом, графическом, видовом – в любом объёме, на любом этапе урока и процесса обучения, Компьютер может быть использован как:

- информационная система, которая помогает решать различные вопросы;
- источник информации для разработки творческих проектов;
- расширение наглядности обучения;
- оперативный контроль усвоения знаний и умений.

Использование компьютера как способа обучения, повышает мотивацию обучения за счет интереса обучающихся к деятельности, связанной с компьютером.

Рассмотрим формы использования информационных технологий Интернет-технологий в процессе изучения физики и астрономии:

1. Динамические слайд-лекции. Использование мультимедийных возможностей компьютера (статическое изображение, видео, анимация, звук) при представлении материала. Для создания таких динамических демонстраций можно воспользоваться программой PowerPoint.
2. Компьютерные справочники, энциклопедии и словари. Достоинством электронных справочников, энциклопедий и словарей является быстрый поиск нужной информации.
3. Обучающие и контролирующие программы. Выпущено много разнообразных обучающих программ по физике и астрономии, которые позволяют изучать новый материал, тренироваться в решении задач, проверять свои знания и т.п. Сейчас в образовании популярна тестовая система контроля знаний и компьютер полностью может использовать возможности этой системы.
4. Моделирование физических явлений, физических и химических опытов, которые в силу причин невозможно провести в школе. Например, невозможно использовать на уроках физики радиоактивные материалы, сильнодействующие химикалии. Поэтому один из выходов – моделирование соответствующих экспериментов на компьютере. Можно имитировать не только опыт или явление, но и Вселенную.
5. Компьютер можно превратить в мощную измерительную лабораторию, снабдив его соответствующими датчиками и периферийным оборудованием.
6. Одной из главных на сегодняшний день технических возможностей использования информационных технологий в образовании является использование в обучении Internet-технологий. Глобальная сеть Internet сама по себе и информационные технологии, основанные на ее использовании, на сегодня являются одним из самых доступных средств получения информации.

Несомненно, наиболее распространённая информационная технология – презентация PowerPoint. Однако зачастую презентации не обладают

интерактивностью, их использование носит ограниченный характер. Их использование целесообразно в качестве дополнительного инструмента при обучении на уроках.

Физика, как и астрономия, является наукой с практической направленностью. Невозможно представить этот предмет без лабораторных работ, экспериментов и опытов. Астрономию невозможно представить без наблюдений за небесными телами.

Поэтому существуют программные и иные информационные средства, помогающие реализовать опыты, эксперименты и наблюдения.

Зачастую так происходит, что в кабинете физики отсутствует тот или иной прибор, или установка экспериментального оборудования занимает много времени. Чтобы как-то исправить данную ситуацию существует так называемая виртуальная лаборатория. Это программное средство, распространяющееся с помощью дисков, а также имеющееся в открытом доступе в Интернете. В этом программном продукте можно проводить опыты по всем темам физики. При этом можно изменять начальные условия эксперимента, изменять исходные данные непосредственно во время эксперимента. При работе с данным продуктом отпадает необходимость следить за тем, чтобы приборы не перегорели, работали исправно. А учащиеся индивидуально могут получать задания по изменению тех или иных параметров, не прибегая к переустановке и новой калибровке оборудования. Несомненно, что данное программное обеспечение не может заменить полностью живой эксперимент. Он лишь дополняет.

Ресурс LearningApps в Интернете предназначен для всеобъемлющей подготовки по учебному предмету. С помощью интерактивных модулей можно создавать средства, как для теоретической подготовки учащегося, так и для практического закрепления материала или для контроля знаний. Так как средство LearningApps не входит ни водну программу по учебным предметам, то учитель может выбрать сам, на какую тему и в какой форме представить учебный материал.

Несмотря на большое количество программ для контроля знаний, существует качественная и профессиональная система Moodle. С помощью данной системы можно проводить контроль знаний по различным предметным областям, к тому же она обладает широкими возможностями по созданию не только тестовых заданий, но также теоретических выкладок.

Несмотря на то, что в астрономии можно применять все те программные средства, что и в физике, существуют программы и технологии, которые присущи только астрономии.

Огромное место в преподавании астрономии занимает визуальное представление информации. Помимо различных видеороликов и фильмов, существуют специализированные программы.

Самая простая программа для визуализации неба в любой момент времени служит Stellarium. Данное программное обеспечение переносит обучающегося в любую точку планеты Земля, просто нужно знать географическую широту и долготу. Знание определений широт и долгот

связывает эту программу с географией. Далее обучающемуся нужно просто выставить время наблюдений и просмотреть, какие созвездия и небесные тела находятся в небе на данный момент. Эта программа удобна при вечерних внеклассных наблюдениях, когда учащиеся ещё толком не знают, где и что находится на небе.

Чуть более сложная программа Celestia. Данная программа позволяет учащемуся углубиться в Солнечную систему и путешествовать по ней в как врежиме реального времени, так и в режиме времени ускоренного. Также есть возможность моментального перемещения по Солнечной системе к различным небесным телам. Это очень удобно при прохождении тем о планетах, спутниках, малых небесных телах.

Особое место при обучении астрономии занимает интерактивный мультимедийный комплекс Redshift 7.0. Это целый планетарий, который может быть установлен не только на компьютер или ноутбук, а также на планшеты, что делает его по-настоящему мобильной и удобной программой. Этот комплекс содержит в себе информацию о 100 млн. звёзд, более 125 тысяч астероидов и 1800 комет, не считая планет и их спутников. Также с помощью специального модуля можно следить за искусственными спутниками Земли и различными аппаратами. Прогнозировать появление небесных тел на земном небосводе. Внутри комплекса содержатся также мультимедийные курсы по различным темам астрономии, короткие ролики и видеофильмы. Это полноценная мультимедийная энциклопедия.

Часто обучающиеся не могут себе представить истинных размеров и форм тех или иных небесных тел или их частей, например? кратеров, ущелий, скал. Для того чтобы справиться с этой бедой можно пользоваться анаглифическими (стерео) очками состёклами двух разных цветов. Таких 3D-изображений множество в Интернете. Учащиеся с удовольствием работают с 3 D-технологией, рассматривая те или иные неровности поверхности космических тел.

На уроках астрономии также можно использовать популярную программу для общения Skype. Наладив связи с астрономами, с помощью данной программы и некоторого аппаратного обеспечения (веб-камеры) можно выйти на связь с людьми, посвятившими свою жизнь наблюдениям за небесными телами.

Ну и конечно в Интернете огромное количество различных сайтов на космическую тематику. Однако как показывает практика, многие сайты либо обновляются редко, содержат неактуальную информацию, либо подают информацию сквозь призму политических взглядов

Следует отметить, что ни одна информационно-коммуникационных технологий не может в полной мере заменить самого учителя. ИКТ призвано облегчить труд преподавателя, внести разнообразие в процесс обучения. Ни одна машина не сможет заменить живого взаимодействия между преподавателем и обучающимся

В заключении необходимо отметить, что применение информационных технологий на уроках и во внеурочной деятельности расширяет возможности

творчества преподавателя, обучающихся, повышает интерес к предмету, пополняя знания, стимулирует освоение серьезных тем по информатике.

Таким образом, использование компьютерных программ, сети Интернет в процессе обучения астрономии и физики позволяет делать процесс обучения наиболее содержательным, интересным, наглядным, экономит время, позволяет оперативно следить за новыми открытиями.

УДК 004.912

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНТЕКСТНО-СЕМАНТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОИСКА ИНФОРМАЦИИ

Д.Ю. Гаврилко
Сериндип
e-mail: *dmitry.gavrilko@gmail.com*
Д.В. Клепиков, к.ф-м.н.
Сериндип
e-mail: *klepikovdmitry@gmail.com*
А.А. Хорошилов, к.т.н.
ФИЦ ИУ РАН
e-mail: *a.a.horoshilov@mail.ru*

В работе описываются методы, которые позволяют увеличить качество поиска путем использования заранее сформированных устойчивых контекстов слов и словосочетаний. Совокупность контекстов формируются с использованием лингвостатистических методов из терминов предметной области. На этапе поиска предлагаемый подход позволяет повысить пертинентность поиска путем автоматического взвешивания наборов контекстов и дальнейшего автоматического или ручного их выбора для расширения запроса. Словари контекстов были сформированы на английском языке для предметной области медицина. Работа метода была протестирована на тестовой подборке статей библиотеки PubMed размером 1.4 млн. статей. Работа подготовлена при поддержке гранта РФФИ (проект 18-37-00110 мол_а).

Ключевые слова: контекстно-семантический подход, информационный поиск, автоматизированная обработка текстов, формализованное описание текста, смысловая структура, лингвистическое программное обеспечение, декларативные средства.

1. Введение

В настоящее время существует большое количество электронных библиотек, содержащих многомиллионные базы научных статей и книг на различных языках. Основной проблемой таких ресурсов в настоящее время является трудность доступа пользователей к интересующим их данным. Если атрибутивный поиск получил широкое развитие и, например, поиск по автору или названию не является серьезной проблемой, то поиск по смыслу является до сих пор задачей не решенной. Большинство электронных библиотек не позволяют в полной мере использовать знания, содержащиеся в их базах. Основной

проблемой является то, что при поиске исследователь не всегда может точно сформулировать запрос на этапе сбора информации для исследований.

Основной задачей, стоящей в настоящее время перед разработчиками систем информационного поиска, является создание мощного семантического инструментария, предназначенного для понимания поискового запроса и его интерпретации для максимизации пертинентности поиска.

В работе авторы описывают применение контекстно-семантического подхода, основанного в работах А.Д. Редозубова. В основе данного подхода лежит принцип формирование семантической инфраструктуры на основе обработки текстов предметной области. Для этого мы создаем базу устойчивых контекстов для слов и словосочетаний [1]. На этапе поиска мы стараемся связать понятия из запроса с их контекстами, содержащимися в базе, это позволяет значительно повысить эффективность поиска.

2. Формирование словаря контекстов для терминов предметной области

Для начала стоит отметить, что данный подход будет работать эффективно в рамках предметной области, на которой формировался словарь контекстов, то есть должна иметься обучающая выборка текстов значительного размера, соответствующих предметной области.

Также важно понимать, что терминологический состав предметной области достаточно разнообразен. И даже для обучающей выборки, состоящей из нескольких десятков статей, количество терминов предметной области будет на два-три порядка больше. В связи с этим довольно трудно найти достаточно полный словарь устойчивых слов и словосочетаний, являющихся терминами. Список терминов предметной области постоянно растет, поэтому любая система, основывающаяся на терминологических и семантических словарях должна постоянно автоматически актуализироваться. В связи с этим был сформирован алгоритм формирования словарей терминов и словарей контекстов.

2.1 Формирование словаря слов предметной области

На первом этапе необходимо сформировать словарь слов, которые являются устойчивыми терминами предметной области. Для этого формируется выборка текстов, соответствующих тематике значительных размеров. В нашем исследовании была взята выборка размером 120 тыс. текстов по тематике медицина. После этого строится частотный словарь слов, причем оттуда сразу автоматически исключаются стоп-слова и общая лексика. Также исключаются слова, частота которых меньше заданного порога. Скорее всего эти слова содержат опечатки или это термины из других предметных областей. После этого словарь просматривается лингвистом, который является экспертом в предметной области. На выходе получаем словарь однословных терминов. В нашем случае был получен словарь размером около 12 тыс. терминов.

2.2 Формирование частотных словарей многословных терминов

Для формирования многословных терминов использовался метод обобщенных синтагм, описанный в работе [3]. Обобщенные синтагмы – это контактно расположенные последовательности символов обобщенных классов

словоформ, включающие в себя набор грамматических признаков слов. Для решения задачи выявления многословных терминов были сформированы словари обобщенных синтагм, следующим образом:

- был взят имеющийся словарь терминов по тематике авиация и космонавтика (23 тыс. терминов) и набор текстов по данной тематике размером 17 тыс. текстов) на английском языке;
- для каждого случая вхождения термина из словаря была сформирована синтагма (последовательность символов обобщенных классов словоформ), на основе грамматической информации, полученной на этапе морфологического анализа;
- составлен список полученных синтагм с их частотами;
- сформирован словарь обобщенных синтагм из синтагм с частотой более трех.

Далее для выделения из текстов “новых” терминов был использован следующий алгоритм:

- текст разделяется на предложения, после этого выполняется обработка каждого предложения процедурой морфологического анализа. Для каждого слова определяется обобщенный символ класса словоформы;
- в каждом предложении ищутся последовательности обобщённых символов классов словоформ, которые присутствуют в словаре обобщенных синтагм, если находятся несколько пересекающихся последовательностей, то выбираются самые длинные;
- если в словосочетания, соответствующие выбранным последовательностям, входят однословные термины из словаря, описанного в п. 2.1., то эти словосочетания добавляются в словарь многословных терминов;
- итоговый словарь формируется из словосочетаний с частотой больше 2-х.

2.3. Формирование словарей контекстов для слов и словосочетаний предметной области

По мнению многих ученых смысл слова или словосочетания выражается через его контекст, об этом говорится во многих работах, среди которых [1,2]. В связи с этим, был проведен эксперимент по формированию словаря, в котором словам и словосочетаниям были поставлены с соответствие их устойчивые контексты. Для этого было приняты некоторые допущения. Самой большой проблемой при формировании словарей контекстов стало большое количество слов и словосочетаний общей лексики, которые ставились в соответствие терминам предметной области, причем через них, по большей части смысл понятия не выражался. В связи с этим, при формировании словаря контекстов в соответствие терминам ставились только слова и словосочетания из словаря, полученного путем объединения словарей, составление которых описывается в п. 2.1 и 2.2. Также было использовано допущение, согласно которому внутри одного текста для каждого слова или словосочетания существует только один устойчивый контекст.

Для формирования контекстов использовался следующий алгоритм для выявления контекста термина внутри текста:

- текст разделяется на предложения, после этого в каждом предложении выявляются термины, содержащиеся в словаре;
- для каждого выявленного термина ищутся все термины, находящиеся в том же предложении;
- устойчивые контексты терминов формируются из таких терминов с частотой больше заданного порога.

После того как найдены контексты терминов внутри текстов, происходит формирование словаря контекстов по корпусу текстов. При этом для каждого термина ищутся все его контексты. При этом если контекст слова и словосочетания 2-х контекстов совпадают на величину большую заданного порога, то эти контексты объединяются. В качестве меры сходства контекстов, была использована мера Серенсона.

Механизм составления словаря контекстов проиллюстрирован на рисунке 1.

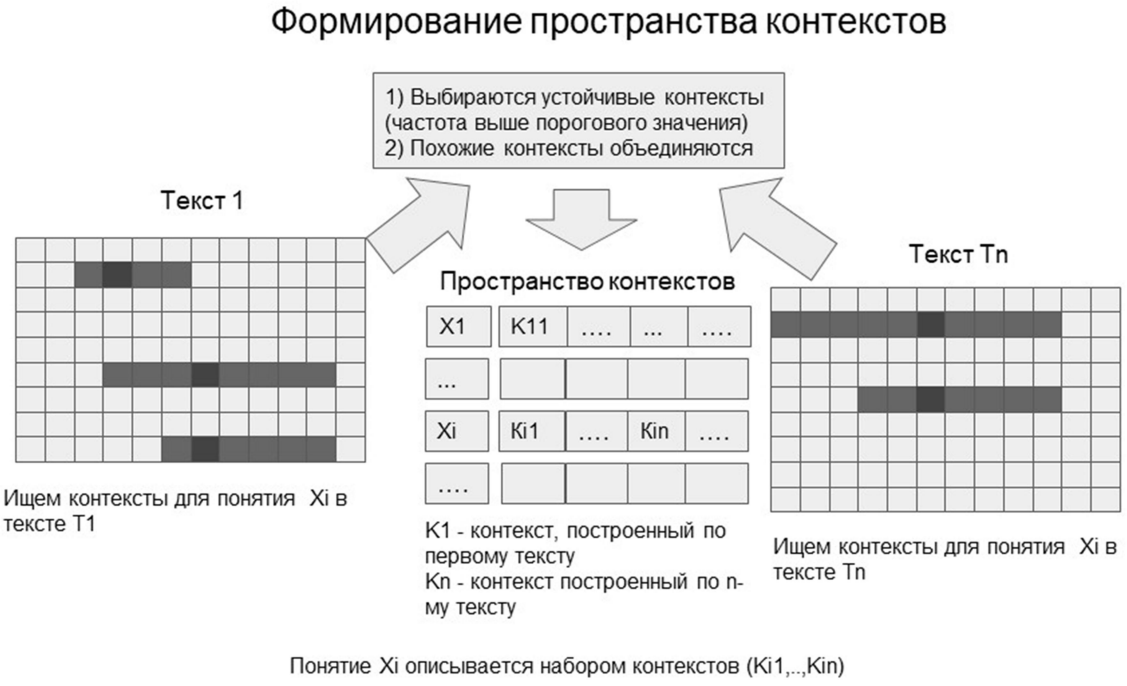


Рисунок 1 – Механизм составления словаря контекстов

3. Поиск на основе контекстно-семантического подхода

После составления словаря контекстов был проведен эксперимент по использованию его для повышения эффективности поиска текстов по тематике медицина на английском языке. Для этого было протестировано два алгоритма, первый – автоматический алгоритм расширения запросов. Для этого из исходного запроса пользователя выделялись значимые слова и словосочетания, с использованием словаря обобщенных синтагм, но без проверки по словарю терминов. После этого, для выявленных слов и словосочетаний искались контексты по словарю контекстов. Затем для контекстов разных терминов, в которых слова и словосочетания совпадали между собой, повышались веса. Также веса повышались для тех контекстов слова и словосочетания, которые совпадали со словами и словосочетаниями из запроса. Во втором режиме поиска контексты, соответствующие запросу, выделял сам пользователь (см. рисунок 2). Для ран-

жирования результатов поиска использовались стандартные процедуры ранжирования, ранг найденного текста зависел от числа найденных слов и словосочетаний запроса (с учетом дополнений по контексту терминов), расстояния между ними и соотношения найденных в тексте слов и словосочетаний и содержащихся в запросе.

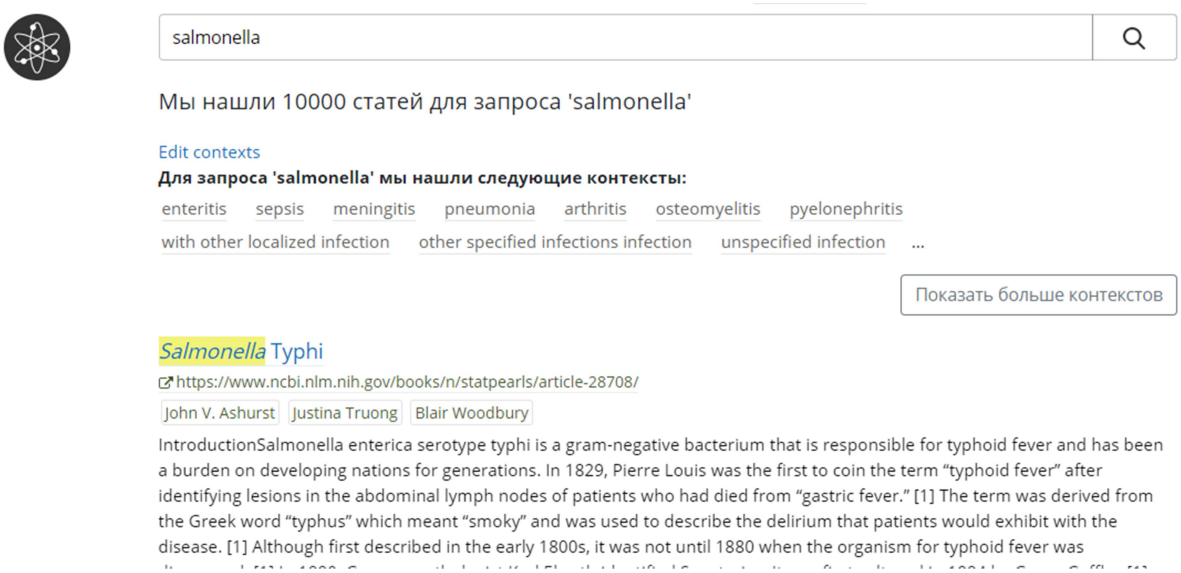


Рисунок 2 – Пример интерфейса выбора контекстов пользователем

Общая схема поиска на основе контекстно-семантического подхода приведена на рисунке 3.

Рисунок 3 – Общая схема поиска на основе контекстно-семантического подхода

4. Заключение

Для исследования результатов пертинентности поиска был проведен эксперимент, для этого было сформировано 50 запросов. После этого был проведен поиск стандартными средствами СУБД, а также с использованием меха-

низма, описанного в статье. После этого для каждого поиска была посчитано, отношение результатов, соответствующих ожиданиям пользователя к общему числу найденных документов. Рассматривались первые 20 результатов выдачи.

В таблице 1 приведены результаты.

Таблица 1 – Результаты исследования эффективности предлагаемых подходов

	Стандартные средства СУБД (среднее значение)	Метод с ручным уточнением контекста (среднее значение)	Метод с автоматическим уточнением контекста (среднее значение)
Процент найденных текстов, соответствующих ожиданиям пользователя	0.71	0.83	0.74

Данные исследования показывают, что предложенный подход позволяет существенно повысить качество выдачи. При этом существует несколько особенностей метода, на которые стоит обратить внимание:

- качество работы подхода сильно зависит от количества и качества исходной подборки документов, использованной для составления словаря контекстов;
- качество составления словаря контекстов сильно зависит от словаря однословных терминов предметной области;
- метод невозможно применять без предварительной настройки на предметную область.

ЛИТЕРАТУРА

1. Редозубов А.Д. Логика сознания. Часть 5. Смысловой подход к анализу информации: habr [Электронный ресурс] // 2016. URL: http:// https://habr.com/post/309626/ (дата обращения: 5.09.2019)
2. Белоногов Г.Г. Теоретические проблемы информатики, Том 2. Семантические проблемы информатики. Под общей редакцией К.И. Курбакова. – М.: РЭА им. Г.В. Плеханова, 2008. – 342 с.
3. Садовников Д.А., Хорошилов А.А. Использование обобщенных синтагм для задач машинного перевода // Современные проблемы физико-математических наук: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, (22-25 ноября 2018 г., г. Орёл): в 2 ч. Ч. 1 / под общ. ред. канд. физ.-мат. наук, доц. Т.Н. Можаровой. – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2018. С. 392-396.

ПОДДЕРЖАНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ РАБОТЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ НА ЭНЕРГООБОРУДОВАНИИ ТЕПЛОВЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТАНЦИЙ

Е.П. Грабчак, к.э.н.
Департамент оперативного контроля и управления в электроэнергетике
Минэнерго России
e-mail: *Grabchak.eugene@gmail.com*
Е.Л. Логинов, д.э.н., проф. РАН
дважды лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники
Ситуационно-аналитический центр Минэнерго России
e-mail: evgenloginov@gmail.com

Введение

Для управления технологическими процессами на энергооборудовании тепловых электрических станций, в условиях информационных атак и иных чрезвычайных ситуаций при развитии сбоев, приводящих к каскадным отключениям или блокированию работы, автор - для поддержания стабильности работы в чрезвычайных ситуациях - предлагает опираться на управляемую кластеризацию информационных систем тепловых электрических станций (временную дезинтеграцию системы на кластеры с последующим самовостановлением в автоматическом режиме).

1. Принципы риск-ориентированного управления технологическими процессами на энергооборудовании тепловых электрических станций

Базовые принципы риск-ориентированного управления технологическими процессами на энергооборудовании тепловых электрических станций включают:

- возможность анализа технического состояния каждого элемента оборудования в рамках системы удаленного мониторинга, оценки и прогнозирования изменения технического состояния объектов для определения оптимального вида, состава и стоимости технического воздействия на оборудование (группы оборудования);
- возможность определения интегрального показателя технического состояния оборудования в отношении основного технологического оборудования объектов электро- и теплоэнергетики с последующим интерактивным формированием цифровых двойников технологических процессов, физических систем, объектов и изделий;
- возможность полицентрической интеграции данных оценки технического состояния основного технологического оборудования объектов электро- и теплоэнергетики для формирования сценариев технических воздействий на оборудование: продолжения эксплуатации, ремонта, замены, технического перевооружения или реконструкции;
- возможность анализа оценки технического состояния каждого элемента оборудования в рамках единой унифицированной цифровой модели сети, их характеристик с решением задачи нахождения оптимизированных значений

при нечетких условиях и ограничениях, по минимальному значению определяется интегральный показатель оборудования (группы оборудования) допустимых классов между идентифицируемыми индексами технического состояния каждого элемента оборудования;

- возможность выявления семантики анализируемых индексов технического состояния каждого элемента оборудования, интегрированных с блоками, позволяющими определить количественные оценки готовности к работе в отопительный сезон субъекта электро- и теплоэнергетики, рейтинговые категории, по которым регулятор фиксирует готовность к работе в отопительный сезон данного субъекта и пр.;
- возможность сбора необходимой информации в отношении расчетных моделей планирования режима работы оборудования с использованием цифровой топологии оборудования в отношении функциональных элементов единой унифицированной цифровой модели сети, позволяющей обеспечить построение унифицированных систем учета оборудования, эксплуатируемого на объектах электро- и теплоэнергетики, их технологических параметров и характеристик, необходимых для принятия оптимальных управленческих решений.

2. Управляемая кластеризация информационных систем тепловых электрических станций

Временная дезинтеграция системы на кластеры ставит задачу поиска новых методов управления [1]. Российскими учеными (Воропай Н.И. и др.) разработан ряд эффективных подходов к повышению эффективности существующих интеллектуальных средств автоматики объектов тепловых электрических станций со сложной структурой [2].

Наиболее перспективным здесь является использование мультиагентных технологий: системы адаптивного управления (децентрализованной адаптивной координации) режимами объектов тепловых электрических станций [3].

Критерии наблюдаемости при этом должны быть ориентированы на виртуально агрегированный программно-аппаратный кластер с мультипроцессорной архитектурой – своего рода, функционально стабильный элемент организации инфраструктуры цифрового сегмента энергетики - информационных систем управления технологическими процессами на энергооборудовании тепловых электрических станций, участвующих в поддержании цифровых сервисов.

Пакет методов кластеризации информационных и телекоммуникационных систем предполагает возможность поддержки необходимой прозрачности каждого виртуально агрегированного программно-аппаратного кластера с мультипроцессорной архитектурой как фрактальной части общей инфраструктуры цифрового сегмента энергетики.

3. Оперирование поведением информационных систем в отношении сложных объектов тепловых электрических станций

Каждая из систем должна отвечать локальному состоянию краткосрочного относительного равновесия суперсистемы, сильно или слабосвязанного с другими системами, с учетом вероятности перехода к формированию синхрон-

ных групп - однонаправленному изменению вектора абсолютного скольжения всех объектов тепловых электрических станций.

Необходимо обеспечить прогнозирование, выявление и обсчет результатов аварийного выпадения объектов тепловых электрических станций из синхронизма, которые могут происходить как информационным образом (информационная атака), так и физическим образом (разрушение объекта). При этом возможности вероятностных расчетов будут ограничены при отсутствии ретроспективного опыта и обучающих паттернов. В этом случае могут помочь методы агентной интерпретации управленческих моделей самоорганизации с учетом возможности отработки адаптивным регулятором дрейфа параметров как объекта (системы, кластера), так и самого регулятора.

При этом, необходимо учитывать аспекты высокой динамики нарастания собственных траекторий поведения отдельных интеллектуальных сегментов информационных систем (smart grid) в отношении сложных объектов тепловых электрических станций с большим количеством автономных систем управления, не входящих в глобальные централизованные информационно-управляющие сети [4].

Управляемая временная дезинтеграция системы на кластеры с последующим самовосстановлением в автоматическом режиме путем децентрализованной стабилизации и управления качеством сложносоставной системы в линейной, нелинейной, оптимальной и адаптивной постановках позволяет рассчитать желаемые передаточные матрицы вынужденного движения выхода для всех локальных информационных систем. В результате обеспечивается выполнение поставленных целей управления для определенного перечня вариаций возмущений из прогнозируемой области группы энергетических объектов в рамках кластера.

На этой основе создается возможность определения мер по стабилизации работы информационных систем в условиях действия на управляемый объект динамичных во времени или величине возмущений для регулирования динамики работы объектов тепловых электрических станций в отношении формирования их синхронных групп для класса многосвязных объектов с запаздыванием, когда измерению доступны скалярные входные и выходные сигналы локальных систем.

4. Новизна и результаты

Новизна заявленного подхода состоит в разработке подходов к кластеризации разнородных сегментов оперативного информационного пространства и кластеризации информационных полей тепловых электрических станций с учетом фактора нелинейности, нестационарности ряда параметров, наличия временных запаздываний и т.д. Предлагаемый подход обеспечивает упреждающую идентификацию уязвимостей к ущербу при информационных атаках и иных чрезвычайных ситуациях в отношении узлов цифровой инфраструктуры объектов тепловых электрических станций, и, как следствие, поддержание устойчивости работы энергетики нашей страны. Идентификация уязвимостей с применением новых аналитических методов позволяет осуществлять упреждающее

каскадные отключения планирование мер регулирования локальных блоков управления в рамках кластеров, гарантирующих устойчивость всей связной системы в динамичных условиях и принятие соответствующих мер к восстановлению функционирования информационных систем управления технологическими процессами на энергооборудовании тепловых электрических станций или их групп [5].

Заключение

Технология обеспечивает комплексное решение вопросов структурно-функциональной организации поддержания стабильности работы информационных систем управления при реализации процессов принятия решений, детерминированных функциональными задачами отдельных объектов тепловых электрических станций, обеспечения того, чтобы замкнутая децентрализованными управлениями возмущенная система осталась устойчивой для определенного перечня вариаций возмущений из прогнозируемой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Логинов Е.Л., Борталевич С.И., Шкута А.А. Развитие интеллектуальных сервисов в автоматизированных информационных системах управления энергетической инфраструктуры. – М.: ИПР РАН, 2017. – 95 с.
2. Снижение рисков каскадных аварий в электроэнергетических системах / отв. ред. Н.И. Воропай; Рос. акад. наук, Сиб. отделение, Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева и др. - Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2011. - 303 с.
3. Грабчак Е.П. Цифровая трансформация электроэнергетики. Основные подходы // Энергия единой сети. - 2018. - № 4 (40). - С. 12-26.
4. Агеев А.И., Райков А.Н., Логинов Е.Л. Информационные системы управления в чрезвычайных ситуациях // Экономические стратегии. - 2019. - №2. - С.12-18.
5. Грабчак Е.П., Медведева Е.А., Васильевна И.Г. Как сделать цифровизацию успешной // Энергетическая политика. - 2018. - № 5. - С. 25-29.

УДК 366.6+51.77

ФИНАНСОВОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ: КЛАССИЧЕСКИЕ ДОМИНАНТЫ И ПЕРСПЕКТИВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

С.Н. Дворяткина, д.п.н., доцент
ФГБОУ ВО «Елецкийго сударственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: sobdvor@yelets.lipetsk.ru
Ю.Л. Есина, к.э.н, доцент
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: esyul@mail.ru
А.М. Лопухин, магистрант
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: ars4044@mail.ru

В статье представлен анализ классических моделей и подходов, занимающих доминирующее положение в сфере финансового прогнозирования. Предложены новые подходы и методы, с применением которых возможен прогноз макроэкономических показателей в условиях цифровой экономики (аппарат нечеткой логики, байесовские интеллектуальные технологии, нейронные сети, фрактальный подход и др.).

Ключевые слова: прогнозирование, финансовая экономика, математическое моделирование, вероятностные и детерминированные прогнозы.

Введение

В области финансовой экономики, как и в других отраслях экономики, одним из самых сложных и рискованных направлений исследовательской работы является прогнозирование. В настоящее время методология прогнозирования достаточно широко представлена в научной литературе. Подобный интерес определяется установлением новых факторов развития экономических систем и особенностями их функционирования в современных условиях цифровизации.

Однако способность конструировать дедуктивные модели, обладающие предсказательной силой, экономическая наука приобрела благодаря интеграции статистических методов в экономику. Отдельная наука, получившая название эконометрика, была создана в 1930-х годах. Она соединила и включила в себя теорию экономики, методы статистики и финансовые показатели. Эконометрика это интеграция трех наук – математики, статистики и экономики.

Именно под влиянием традиций математико-статистических дисциплин появился эффективный инструментарий для составления различных сценариев будущего, объединяющий известные элементы экономической системы и связи между ними в совокупности с еще неопределенными элементами, а также для анализа и прогноза экономических явлений, происходящих на рынках труда, капитала, денежном рынке и т. д.

В современной науке доминирующее положение в сфере анализа финансовых отношений занимают так называемые «слабые прогнозы», построенные на вероятностных прогностических экстраполяциях формальных статистиче-

ских моделей. «Слабые прогнозы» представляют собой «нечёткие, общие прогностические утверждения о том, какие факторы сделают определённое развитие событий в будущем более вероятным…». С другой стороны, под «сильными прогнозами» исследователи понимают «конкретные, определённые прогностические утверждения о том, какие тренды и какие события будут иметь место в будущем».

Периферийное положение «сильных прогнозов» в финансовой экономике приводит к тому, что ряд авторитетных авторов критически относятся к возможности построения точных прогностических моделей на основе математического моделирования. По словам П. Самуэльсона, «Экономист утешает себя... мыслью о том, что он куёт инструменты, которые, в конце концов, приведут к результату. Это обещание всегда отнесено к будущему, мы подобны хорошо натренированным атлетам, которые не участвуют в соревнованиях и потому теряют форму» [14]. К.К. Кумехов отмечал, что «при конструировании модели все наиболее известные авторы экстраполируют в новые модели прошлое состояние или прошлые события. В результате к моменту готовности новой модели ситуация меняется, прошлые параметры, заложенные в основу модели, теряют актуальность, так что в лучшем случае исследователь может интерпретировать уже произошедшие события и параметры, которые в будущем не реализуемы» [8].

Выше изложенное, определяет актуальность настоящего исследования и позволяет сформулировать цель работы: осуществить генезис проблемы разработки и развития экономико-математического и компьютерного моделирования с установлением возможностей и диапозона адаптации и применения классических и новых теорий и методов в решении задач прогнозирования экономических процессов и систем в современных условиях цифровизации.

Базовые понятия математико-экономического моделирования

Для решения любой задачи, возникающей в практике экономических исследований, необходимо глубоко понимать закономерности, функциональные связи, степень согласованности элементов изучаемой экономической системы. Наиболее авторитетные экономические школы при исследовании экономических систем используют метод математического моделирования. Большинство авторов под моделью понимают «логическое или математическое описание компонентов и функций, отображающих существенные свойства моделируемого объекта или процесса» [9, с. 204]. Предметом рассмотрения настоящего исследования являются прогностические модели, относящиеся к наиболее востребованным видам математических моделей.

Прогностическая модель – математико-статистическое представление о функционировании конкретного реального процесса или объекта, исследование которого позволяет предсказать поведение процесса в будущем посредством получения информации, способов и сроков их достижения. Таким образом, целевая функция прогностической модели состоит в получении информации не об объекте вообще, а о его будущих состояниях [4].

Изучение и анализ возможной финансовой динамики отдельных субъектов экономики и определение на перспективу оптимального распределения финансовых ресурсов составляют основу финансового прогнозирования. Построение модели, посредством которой осуществляется прогнозирование финансово-экономических показателей, неразрывно связано с выбором инструмента моделирования. Данный этап моделирования определяет область применения и возможности будущей модели.

Финансовое прогнозирование в настоящее время осуществляется на основе следующих методов: математико-экономических (анализ временных рядов, экстраполяция трендов, корреляционно-регрессионный анализ, математическая оптимизация, теории игр, теория принятия решений); имитационного моделирования (метод Монте-Карло, агентное моделирование); экспертных оценок (нечеткая логика, методы когнитивного и нейрокогнитивного моделирования), нейросетевых технологий и др. Пока лидирующее положение в данном секторе занимают методы экспертных оценок, но активное внедрение математического инструментария существенно снижает их результативность. Кроме того, большое значение имеют сведения о значимости, достоверности, ценности, уровня неопределенности и вероятности экономической информации, предназначенной для построения прогнозных моделей.

Классические доминантные теории в сфере финансового прогнозирования

Работа «Экономическая таблица», ведущего представителя физиократической школы Франсуа Кенэ, опубликованная в 1758 году ознаменовала собой первые шаги в направлении интерагции в экономические исследования элементов моделирования. Исследовался «процесс производства капитала как процесс воспроизводства, обращения, как форму этого воспроизводства» [3], была «предпринята попытка включить в этот процесс воспроизводства происхождение дохода, обмен между капиталом и доходом, отношения между воспроизводственным и окончательным потреблением, а обращение капитала включить между производителями и потребителями» [3]. Модель Ф. Кенэ позволила впервые определить и актуализировать главные направления реализации общественного продукта с выявлением ключевых нюансов обмена как объемной динамики финансов и товаров. Ф. Кенэ обосновал, что соблюдение только определенных пропорций при развитии народного хозяйства позволит обеспечить бесперебойную динамику процесса воспроизводства и реализации. Им был заложен фундамент экономико-математических моделей в макроэкономике.

Основатель Лозаннской школы неоклассического направления в экономической науке, лидер в области применения математических методов в экономике Леон Вальрас в работе «Элементы чистой политической экономии» (1874) сделал ряд открытий.

Разделив экономические субъекты производства на предпринимателей и владельцев производства, тем самым выделив условие существования двух групп, Л. Вальрас, базируясь на принципе субъективной полезности, построил математическую модель общего экономического равновесия.

Все участники экономической деятельности являются взаимозависимыми. С учетом положения независимости всех участников экономической деятельности и условия равенства спроса и предложения производственных услуг, автор обосновал условие формирования устойчивой рыночной цены продукции, которая эквивалента издежкам, представляющим собой цены факторов производства. Это является равновесным состоянием рынка.

Пионером эконометрики, внесшим значимый вклад в экономическое моделирование, стал Рагнар Фриш, которым была построена замкнутая модель экономического равновесия на основе выбора конечных целей в терминах максимизации функции общественного благосостояния и определения целевых показателей-ориентиров. Норвежский экономист впервые описал экономическую модель макроэкономики, в которой установил влияние случайных событий на циклы деловой активности и их продолжительность. В своей последней работе «Анализ статистических пересечений в системе полной регрессии» (1934) Р. Фриш решил проблему взаимозависимости переменных (авт. мультиколлинеарность), определив ее как тенденцию многих переменных к совместному движению благодаря их подчиненности общим тенденциям.

Классиком экономической науки Джон Кейнсом в работе, опубликованной в 1936 году, важнейшая роль была отведена государству. В его труде «Общей теории занятости, процента и денег» была презентована макроэкономическая модель с функциональной зависимостью между инвестициями, занятостью, потреблением и доходом. Кейнс утверждал, что точность не является прерогативой экономической науки. По его логике государство является регулятором, обеспечивающим более стабильные и предсказуемые условия для предпринимательской деятельности. Управление эффективным спросом в целом и уменьшение степени неопределенности производится в частности посредством планового распределения бюджетных ресурсов и регулировкой ставки процента.

Основная идея, пронизывающая теорию Кейнса, состоит в том, что невозможно полностью избавиться от неопределенности в финансовом будущем, ее возможно лишь минимизировать. «…Наши знания о будущем являются колеблющимися, туманными и неопределёнными» [6].

Существенным ограничением модели Кейнса, сужающим круг реальных экономических процессов, является предположение о постоянстве величины инвестиций в экономику. Попытка устранения этого недостатка была произведена Дж. Р. Хиксом и П. Самуэльсоном в их динамической макроэкономической модели, в которой инвестиции представлены суммой постоянной и переменной частей. При этом переменная составляющая является пропорциональной приросту ВВП текущего года относительно прошлого. Инвестиции, занятость, потребление и доход, как переменные модели Самуэльсона-Хикса, представлены функциями времени. Модель с позиции математики можно рассматривать как линейное конечно-разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Она решает задачу установления наличия вероятностных колебаний между спросом и предложением на рынке товаров и услуг, но решить другие важные задачи, которые ставятся перед экономической моде-

лью, она не может в виду ограниченности элементов и факторов, её составляющих.

Дальнейший поиск равновесия в экономике с неопределенностью между производством и потреблением, спросом и ценами на основе математического моделирования осуществили лауреаты Нобелевской премии К. Эрроу и Ж. Дебрё. В работе «Существование равновесия для конкурентной экономики» (1954) авторы доказали существование равновесного вектора цен и распределения благ [1]. Экономико-статистическая модель общего равновесия в условиях совершенной конкуренции, построенная исследователями, в качестве основных компонентоввключала подсистемы: потребители-собственники, свободно обменивающиеся экономическими благами, и фирмы-производители — поставщики товаров.

Утверждение, что модель, представленная Эрроу и Дебрё, не является динамической, на первый взгляд представляется неверным. Ведь она характеризует развитие экономики во времени по равновесной траектории. Однако состояния экономических агентов в модели не определены в промежуточные моменты времени. Деятельность экономического агента планируется в стартовый момент на весь период времени. В тоже время существенным свойством динамических моделей является то, что любой промежуточный момент времени можно считать начальным.

В дальнейшем Ж. Дебрё объединил в единую модель общего экономического равновесия теорию размещения, теорию капитала и теорию поведения в условиях неопределенности.

Следующим шагом в развитии методологии моделирования макроэкономических систем явились работы академиков РАН А.А. Петрова и И.Г. Поспелова. Авторами были построены следующие макромодели экономической динамики: модель экономики периода высокой инфляции 1992–1995 гг.; модель экономики периода финансовой стабилизации 1995–1998 гг., предсказавшая кризис 1998 г.; модель оценки перспектив развития экономики после кризиса 1998 г. [11]. Особое внимание было уделено рассмотрению и анализу финансового сектора, главнейшему направлению модельной конструкции.

Новые технологии разработки прогностических моделей экономики

В современных условиях цифровой экономики к макроэкономическому прогнозированию сложных систем существенно повышаются требования, прежде всего, с точки зрения необходимости проведения многовариантных расчетов, повышения научного уровня и точности прогнозных оценок. В работах В. Аверина, И. Брусакова, И. Кручинина, В. Трофимова, Р. Файзрахманова и других авторов представлены результаты исследования в области применения цифровых технологий в задачах моделирования и прогнозирования поведения экономических систем.

Совершенствуется и математический аппарат моделирования. Одним из передовых направлений развития экспертных систем является их проектирование на основе Fuzzy Logic [10]. Как ранее было отмечено, требование к качеству и объему статистической информации является основополагающим при

построении модели. При ее зависимости от временного параметра и большого количества значимых параметров исследователи зачастую прибегают к применению аппарата нечеткой логики. Финансовые модели, построенные на основе нечетких множеств, например, модели оптимизации рискового портфеля государственных облигаций с применением функции полезности, позволяют компактно, в терминах предметной области, описать моделируемый объект.

Другим перспективным направлением совершенствования математического аппарата моделирования в условиях информационной неопределенности является методология байесовских интеллектуальных технологий (БИТ) для решения задач управления и прогноза.

Для построения моделей прогнозных сценарных расчетов макроэкономических показателей применим также марковский подход [7; 15]. МС-модели или модели на базе марковских цепей при расчете своих показателей требуют меньших ресурсных затрат чем вероятностные. Наряду с этим, последние модели являются еще и более сложными. МС-модели характеризуются достаточно высоким уровнем точности прогнозирования и гибкости. Готовые модели на основе марковских цепей легко адаптировать относительно специфики работы фактически любого предприятия или организации.

Принципиальная нелинейность развития экономических систем в условиях неопределенности и неполной наблюдаемости процессов функционирования сложных систем диктует целесообразность прогнозирования на основе нейронных систем [5; 13;16]. Впервые построение нейросотевой моделей кратковременного финансового прогнозирования было предпринято в начале 90-х годов прошлого столетия В. Ченгом, Л. Вагнером и Ч. Лином. Авторами была доказана эффективность и возможность применения нового инструментария к краткосрочному прогнозированию высоколиквидного рынка ценных бумаг. Нейронная сеть – компьютерный алгоритм, построенный по принципу функционирования человеческого мозга с возможностью анализа и обработки неограниченного объема информации и обладающий способностью к обучению. Прогнозирование на основе НС включает следующие этапы: создание выборки финансовых показателей входных данных; построение нейронной модели (выбор структуры НС и алгоритма обучения); обучение НС; тестирование НС для определения качества прогнозирования. Структура НС может быть различной: многослойный персептрон (multilayer perceptrons), сеть радиально-базисной функции (RBF-сеть), сети Кохонена, сети Хопфилда и Элмана. Важной особенностью применения НС в прогнозировании является то, что при их обучении (составлении обучающей выборки) должна быть заложена информация, как о текущем состоянии, так и о прошлых наблюдениях. Авторами, использующие НС для финансового прогнозирования, установлено, что НС в отличие от традиционных моделей, повышают объективность прогноза на основе определения нелинейной зависимости между входами и выходами в процессе обучения сети и учета большого количества переменных различной размерности.

Биржевой терминал имеет в своем составе инструмент анализа, основанный на учете фрактальных конструктов, формирующихся при движении цены акции. Этот инструмент достаточно точно позволяет определять направление

движения котировок, однако работает он с некоторым запаздыванием. Его использование на малых таймфреймах носит весьма ограниченный характер. С высокой степенью достоверности можно утверждать, что динамика развития как макро- , так и микроэкономики имеет циклический характер и сопровождается формированием характерных паттернов. При этом становится доступен аналитический прогноз с высокой вероятностью. Тем самым, фрактальность исходно заложена в динамике экономических процессов. Фрактальные методы относятся к актуальным методам анализа и прогноза финансово-экономических показателей.

Представленный краткий научный обзор классических и новых теорий моделирования экономических процессов и явлений с применением математического аппарата позволил актуализировать решение «старых» проблем и определить новые направления исследования. Следует отметить, что представленный в статье перечень методов и подходов в методологии прогнозирования является далеко не исчерпывающим. Существуют и другие современные направления, требующие своего дальнейшего исследования и изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Автономов В.С., Ананьин О.И., С.А. Афонцев С.А., Гловели Г.Д. История экономических учений. – М.: ИНФРА-М. –2000. – 784 с.
2. Владимирова Л.П. Прогнозирование и планирование в условиях рынка. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательский Дом «Дашков и К». – 2008. – 308 с.
3. Всемирная история экономической мысли в 6 томах / В.Н. Черковец, Е.Г. Василевский, В.А. Жамин, И.П. Фаминский и др. – М.: Мысль. – 1987. Т. 1. 606 с.
4. Дуброва Т. А. Статистические методы прогнозирования в экономике. – М.: Изд-во МФПА 2004. – 60 с.
5. Карлина Е.П., Епифанова Н.Ш., Фартушина А.С., Дергунов В.В. Моделирование тенденций развития социально-экономических систем на основе нейронных систем // Вестник Астраханского государственого технического университета. Серия: Экономика. – 2017. – №4. – С. 53-59.
6. Кейнс Дж. М. Общая теория занятости, процента и денег. Избранное. – М.: Эксмо. – 2007. – С. 356-367.
7. Крюкова А.А., Кузьмин Е.В. (2009). Разработка концепции комплексного управления клиентами // Вестник СГЭУ. – 2009. – №7. – С. 61-64.
8. Кумехов К.К. Критика классических теорий макроэкономического моделирования // Вестнк МГИМО-университета. – 2015. – №5 (44). – С. 181-189.
9. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь. – М.: Дело. – 2003. 519 с.
10. Недосекин А.О. Применение теории нечетких множеств к задачам управления финансами // Аудит и финансовый анализ. – 2000. – №2. Режим доступа: https://www.cfin.ru/press/afa/2000-2/08.shtml
11. Поспелов И.Г. Модель современной экономики России: методы, технология, результаты // Экономические стратегии. – 2010. – №9. – С. 60-69.

12. Прокопчина С.В. Разработка методов и средств байесовской интелектуализации измерений в задачах мониторинга сложных объектов: дисс. на соиск. уч.степ. докт. техн. наук. – СПб.: ЛЭТИ, 1995 г.
13. Пчелинцев А.В., Зюдина И.А., Рагочев С.А. Моделирование инвестиционного портфеля с использованием нейросетевых технологий // Вестник МГУ. – 1999. – №4. – С.75-90.
14. Самуэльсон П.А. Основания экономического анализа. – СПб.: Экономическая школа. – 2002. – 604 с.
15. Третьяк О.А., Слоев И.А. Оценка маркетинговой деятельности по состоянию клиентского потока // Российский журнал менеджмента. – 2012. –Том 10. – №1. – С. 29-50.
16. Яковлев В.Л., Яковлева Г.Л., Лисицкий Л.А. Модели детерминированного хаоса в задаче прогнозирования тенденций финансовых рынков и их нейросетевая реализация // Информационные технологии. – 2000. – №2. – С.46-52.

UDC 004.78: [001.89:378.4]–047.36

CRIS AS AN APPLIED TOOL FOR ANALYZING RESEARCH ACTIVITY AT TURGENEV OREL STATE UNIVERSITY, RUSSIA

V.I. Dorofeeva,
Oryol State University
e-mail: *dorofeevavi@gmail.com*
D.N. Nikol'skii
Oryol State University
e-mail: *nikolskydn@gmail.com*
Yu.S. Fedyaev,
Oryol State University
e-mail: *fedyaevys@gmail.com*

The paper gives a ground for the relevance of the development of the CRIS carried out at Turgenev Orel state University, Russia. The specific features of the system are analyzed in the context of the organization of university research activities. To design a system, various information technologies can be used to create the software product that is in line with the modern trends of using web technologies in applications. As a result, the structure of the information and analytical system for the preparation of individual forms of electronic reporting was developed in the context of university research activities.

Keywords: current research information systems, research information management, institutional research activity, Turgenev Orel State University

Turgenev Orel State University, Russia, is one of the higher-education institutions that won the competition for the creation of the principal universities. The program for the establishment of principal universities based on the restructuring of Turgenev Orel State University and Prioksky State University for 2016–2020 means that the target strategic directions for the development of scientific education activities are interrelated with the key objects of the investment infrastructure of Orel region.

The creation of the research and innovation complex of the university assumes the development of the thematic directions of research in the priority areas of the economic activities of the region, internationalization and an increase of the scientific results of the university, arrangement of a system for the grant support for scientific activities, improvement of the innovation infrastructure, and an increase in the educational, expert and organizational role of the university in solving regional problems.

The organizational support of the publishing activities and provision of the membership of the higher-education institution and separate scientists in the profile scientific associations is required to carry out these measures. This will permit the necessary degree of openness and transparency of the scientific results of the institution and contribute to the formation of its image as a large regional research center that has significant scientific and research potential.

Collecting comprehensive information on the scientific research carried out at the university is one of the pressing problems in wide range of university activities.

The structure of the University scientific research sector includes the department of scientific research and innovations; department of innovation activity; de-

partment of intellectual property, patents and inventions; the department for training of highly qualified academic staff; the Scientific and Technical Council; research institutes; scientific research centers; laboratories; museums and other scientific departments. Each major research department has its own hierarchy.

This article presents the results of a single phase of the analysis of the scientific research carried out at Turgenev Orel State University, Russia and the development of the information analytical system which is planned to be used at the University. The main goal of this practical work is to elaborate a system that will be an effective tool for the administrative and management personnel and to help evaluate the scientific research sector of the university as a whole and in each of its structural unit in particular. Such analysis is the basis for making effective management decisions at all levels.

By the time we began to design the plan, all the planned and reporting activities were performed on paper and various forms and tables developed by the Scientific and Technical Council were still in use. This caused considerable inconvenience, since modern information technology which enables processing of large amounts of information was almost never used.

The main reason for developing system was to create a tool for effective collection and analyzing data, both personal and generalized across individual research teams and organizations, in order to obtain reliable indicators of performance and focus of scientific research [1].

The results of the teachers' staff work and other structural subdivisions are, as a rule, considered to be the main indicators of scientific activities of an organization: scientific research, publications, textbooks and study guides, grants, projects, patents and certificates, reports at conferences, as well as participation in exhibitions, supervision of diplomas and thesis works, and other types of scientific activities. The structural subdivision of the higher-education institution that leads the research work plans the scientific activities for the next calendar year and reports on the executed work and performance at the end of the year. In this case, each member files an individual work plan and reports on its performance in written and oral form at the session of the collective body of the structural subdivision.

The aim of monitoring system is to create an instrument that permits prompt collection and qualitative analysis of the personal and generalized data by separate structural subdivisions in order to obtain reliable indicators of the results of scientific-research activities.

The main objectives of the systems are to make it possible for the consumers of the structural subdivisions to plan and take the results of its scientific activities into account in the automated mode, and for the heads of separate structural subdivision and the entire organization to be able to carry out quantitative and qualitative analysis for research activities of each member, the separate subdivisions, and the entire organization.

The analysis of the information systems that are used to solve such problems found in the Internet permitted the specification of several groups of systems, most of which are bibliographic and abstract databases, particularly Web of Science, Scopus, Google Scholar, and the Russian portal eLibrary.ru, to some degree combine such

functions as indexing and searching for scientific works. The CRIS ISTINA of Moscow State University and the Pure system from Elsevier carry out comprehensive monitoring of the scientific activities for organization and evaluation members' efficiency contributions [2-4].

However, the obvious advantages of these systems are not possible to apply in our case. First of all, it is explained by the individual characteristics of the research work of different scientific organizations, long-term adaptation to a certain situation (complexity of the data entry and search of the information, the use of "rigid" schemes of data classification and descriptions, etc.), as well as the high cost of the information systems on the market.

Due to these facts the authors made the conclusion of the necessity to use the information technologies that correspond to the modern tendencies of the use of the web-technologies in the applications and the condition and prospects of development of the country's scientific–technical complex while developing the monitoring system. This will allow the service that is provided by the developed application available at any location that has an Internet connection

The following problems can be noted among the main ones that the collective of developers of the system face: analysis of the forms and types of accounting on the scientific work at the institution, as well as development of the database and its connections with the objects for the information system, screen forms that take the economic requirements to the interface into account, the software code of the form processors, and the software code of the server portion of the information system. As a result of discussion of these problems the decision was made to create the system with the client/server architecture based on web technologies. The application was developed using the Django framework for the Python language. A Gunicorn server is used as the web server. The MySQL database control system was selected for working with the database of the project. The web application is deployed on a dedicated server under the control of the Linux operating system. The Semantic UI framework was applied to create the user interface. The behavior of the elements on the side of the client is set using the jQuery library. The software that was used is distributed under the terms of a free license and has a high level of reliability.

The monitoring system was developed in three stages: at the first stage the components of the system for preparation of the individual plans for research work and the summary plans of the structural subdivisions for the next calendar year were modeled and created; at the second stage the components of the system for the preparation of the individual reports and reports of the structural subdivisions of the institution on scientific activities were modeled and created; at the third stage the components of the system for the preparation of the consolidated form of electronic reports on the scientific activities of the structural subdivisions and the entire institution were developed. Each member should be registered on the website of the scientific department of the university to work in the system. After authorization the user enters their personal account where the Profile, Plan, and Report services are available (Fig.1).

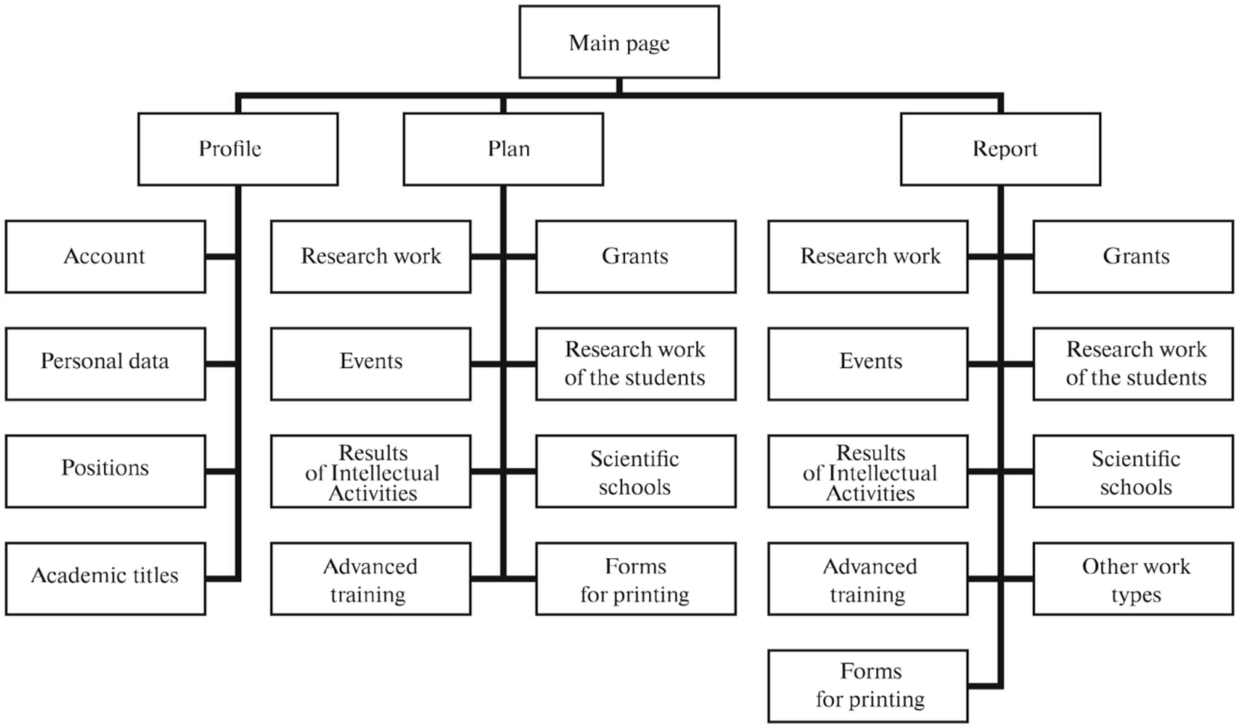


Figure 1 – The structure of the menu of the monitoring system for the scientific work at the university

Due to these facts the authors made the conclusion of the necessity to use the information technologies that correspond to the modern tendencies of the use of the web-technologies in the applications and the condition and prospects of development of the country's scientific–technical complex while developing the monitoring system. This will allow the service that is provided by the developed application available at any location that has an Internet connection

Let us describe the process of the compilation of the report on the scientific work of the department. For this purpose, each member of the structural subdivision should complete the Report form in the information system including all sections of the plan and an additional section, Other work types. Each paragraph of the report has its own structure (Fig. 2).

The components of the system were tested and certified at the departments of Turgenev Orel State University (physical–mathematical, philosophy, record management and pedagogic education, and the medical institute). The work with the pages of the web application in the test mode detected some drawbacks of the system, first of all, those connected with the different training levels of the lecturers for working with modern information technologies. This required the arrangement of assistance and master classes for the members of the university to learn the stages of filing an individual plan and report on their research work.

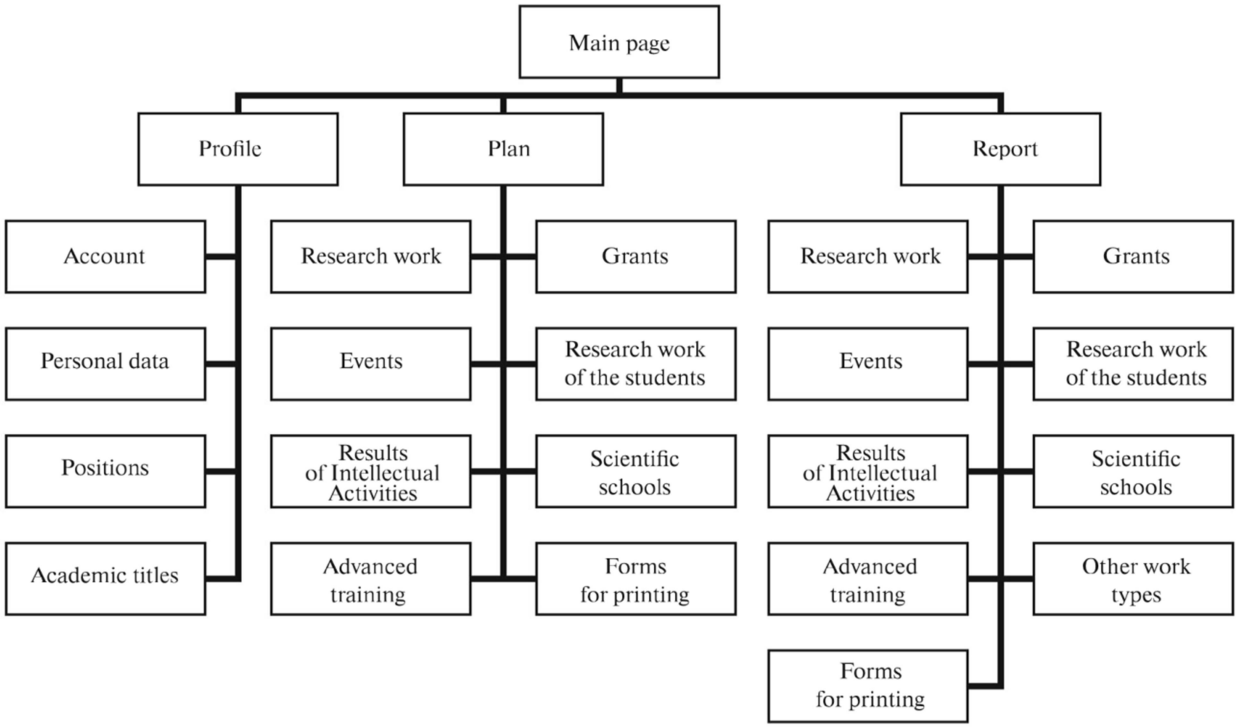


Figure 2 – The structure of the research-work report of a department

The results of the certification of the system were considered and approved at the session of the Scientific Board and Science and Engineering Council of the university. The system should be implemented in all of the structural subdivisions of the institution. It is expected that this system will be an efficient instrument for the evaluation of the scientific work for the entire university and for each of its structural subdivisions, in particular, as the basis to adopt efficient managerial decisions at all levels. This will permit efficient fulfillment of the indicators of the Program of development of the principal university for 2016–2020 [5].

REFERENCES

1. Afonin S.A. et al. Intellektual'naya sistema tematicheskogo issledovaniya nauchno-tekhnicheskoi informatsii (ISTINA) (The Intelligent System of Topical Study of Scientific and Technical Information (ISTINA)). Moscow: Izd. Mosk. Gos. Univ., 2014.
2. Akoev M., Leyba O., Golitsyn L. Limitations of CRIS in Assessing the Progress of Increasing Research Output in UrFU // Procedia Computer Science. 2017. Vol. 106. P. 47–53.
3. Dorofeeva V.I. et al. On the development of the scientific work monitoring system at higher educational institutions // Scientific and Technical Information Processing. 2016. Vol. 43, № 3. P. 166–173.
4. Zelepukhina V.A. et al. Particular Experience in Design and Implementation of a Current Research Information System in Russia: National Specificity // Procedia Computer Science. 2014. Vol. 33. P. 168–173.
5. Dorofeeva V.I., Nikol'skii D.N., Fedyaev Y.S. The Information System for Monitoring Research Activities in the Innovative Structure of a University // Scientific and Technical Information Processing. 2019. Vol. 46, № 1. P. 28–33.

УДК 519.178

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ

Е.Э. Дрогайцева
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *Katya-Katya_99@mail.ru*

В работе рассматривается разработка программного обеспечения для решения задачи построения оптимального транспортного маршрута при движении пешехода по туристическим местам. Приводится реализация алгоритма на языке Python и демонстрируется на примере небольшой размерности.

Ключевые слова: транспортная задача, теория графов, алгоритм Флойда-Уоршалла, моделирование транспортной задачи.

На сегодняшний день есть много навигационных приложений, использующих задачу нахождения кратчайшего расстояния. Однако нас будет интересовать пешеходный маршрут, так как в будущем планируется разработать мобильное приложение для пешеходов.

Данные приложения ориентированы на поиск расстояний между любыми точками на карте, поэтому на картах много лишней информации, которая отвлекает нас от самих достопримечательностей города. Таким образом, имеется необходимость в разработке навигационного приложения для пешеходов по достопримечательностям города Орла.

Родившись при решении головоломок и занимательных игр, теория графов стала в настоящее время простым, доступным и мощным средством решения вопросов, относящихся к широкому кругу проблем. В данной работе мы решили остановиться именно на решении транспортной проблемы с использованием теории графов, так как этот раздел напрямую связан с поставленной задачей, а именно, разработкой программного обеспечения для нахождения кратчайшего расстояния.

В работе будет рассматривать один из наиболее простых алгоритмов, позволяющих найти кратчайшее расстояние между вершинами графа, а именно – алгоритм Флойда-Уоршелла.

Алгоритм Флойда-Уоршелла предназначен для решения задачи поиска всех кратчайших путей на графе. Для заданного ориентированного взвешенного графа алгоритм находит кратчайшие расстояния между всеми парами вершин.

Строгая формулировка задачи следующая: есть ориентированный граф G = (V, E), каждой дуге v -> w этого графа сопоставлена неотрицательный вес C[v, w]. Общая задача нахождения кратчайших путей заключается в нахождении для каждой упорядоченной пары вершин (v, w) любого пути от вершины v в вершины w, длина которого минимальна среди всех возможных путей от v к w.

Для определенности положим, что вершины графа последовательно пронумерованы от 1 до n. Алгоритм Флойда использует матрицу A размера n x n, в которой вычисляются длины кратчайших путей.

Вначале A[i, j] = C[i, j] для всех i != j. Если дуга i -» j отсутствует, то C[i,j] = infinity. Каждый диагональный элемент матрицы A равен 0.

Приведем шаблон программой реализации алгоритма (листинг 1).

```
//прочитать g --- g[0 ... n - 1][0 ... n - 1] - массив, в котором хранятся веса рёбер, g[i][j] делаем равным достаточно большому числу, если ребра между i и j нет; диагональные элементы обнуляем
//вводим n
d = g
for i in range ( 1, n + 1 ):
   for j in range ( 0, n – 1 ):
      for k in range ( 0, n – 1 ):
         if d [j] [k] > d [j] [i - 1] + d [i - 1] [k]:
            d [j] [k] = d [j] [i - 1] + d [i - 1] [k]
print ( d )
```

Листинг 1 – Шаблон программной реализации алгоритма Флойда-Уоршалла

Рассмотрим пример с небольшим количеством вершин графа.

Возьмем ориентированный граф (рисунок 1):

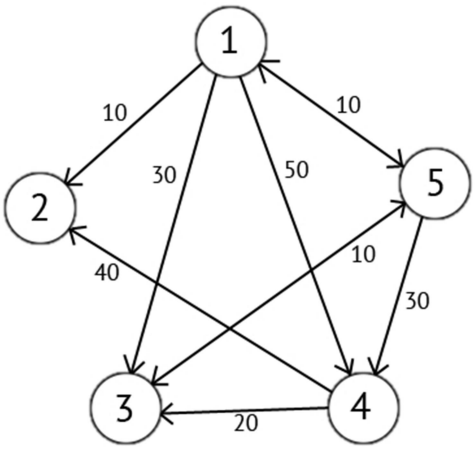


Рисунок 1 – Ориентированный граф

Этот граф мы можем представить в виде матрицы C (рисунок 2).

	1	2	3	4	5
1		10	30	50	10
2					
3					10
4		40	20		
5	10		10	30	

Рисунок 2 – Матрица графа

Проанализируем пример, представленный выше, и напишем программный код (листинг 3) для его решения. Запишем в текстовый файл matr1.txt (листинг 2) матрицу расстояний, вместо привычной бесконечности в пустые ячейки записываем «1000» как достаточно большое число. На главной диагонали пишем нули.

```
0 10 30 50 10
1000 0 1000 1000 1000
1000 1000 0 1000 10
1000 40 20 0 1000
10 1000 10 30 0
```

Листинг 2 – Файл matr1.txt

```
#!/usr/bin/python
#-*- coding utf-8 -*-
#coding: utf-8
from time import *
t1=time()
g = []
with open("matr1.txt") as f:
   for line in f:
      g.append([int(x) for x in line.split()])
n=5    */количество столбцов и строк матрицы/*
d = g
for i in range(1, n + 1):
    for j in range(0, n - 1):
        for k in range(0, n - 1):
            if d[j][k] > d[j][i - 1] + d[i - 1][k]:
                d[j][k] = d[j][i - 1] + d[i - 1][k]
print(d[0])
t2=time()
t=t2-t1
print(t)
```

Листинг 3 – Файл main1.py

В данной программной реализации демонстрируем наиболее простую реализацию алгоритма, без использования библиотек и оцениваем время работы программы.

Рассмотрим программное решение предыдущей задачи с помощью библиотек языка Python (листинг 4).

```
from scipy.sparse import csr_matrix
from scipy.sparse.csgraph import floyd_warshall
from time import *
graph = [[0, 10 , 30, 50, 10],
[1000, 0, 1000, 1000, 1000],
[1000, 1000, 0, 1000, 10],
[1000, 40, 20, 0, 1000],
[10, 1000, 10, 30, 0]]
t1=time()
graph = csr_matrix(graph)
print(graph)
```

```
dist_matrix, predecessors = floyd_warshall(csgraph=graph, directed=False, return_predecessors=True)
print ( dist_matrix)
print ( predecessors)
t2=time()
t=t2-t1
print(t)
```

Листинг 4 – Файл main1.py

Рассматривая различные реализации одного алгоритма на одном примере, можем наблюдать, что реализация алгоритма с помощью библиотек языка Python для алгоритма Флойда-Уоршалла привела к оптимизации программы: к более короткому коду и ускорению времени работы программы.

Данная работа имеет практическое значение, так как разработанное программное обеспечение может использоваться для моделирования процесса построения пешеходного маршрута.

ЛИТЕРАТУРА

1. Электронная версия издания: "Бакалавр экономики: Хрестоматия в 3-х томах. Т. 2. / Под общ. ред. В.И. Видяпина; Рос. экон. академия им. Г.В. Плеханова; Центр кадрового развития. - М. : Триада, 1999. - 1050 с." — .http://lib.vvsu.ru/books/Bakalavr01/page0221.asp. — Дата доступа: 15.06.2019.
2. Библиотека алгоритмов на графах: [Электронный ресурс]. — http://urban-sanjoo.narod.ru/floyd.html. — Дата доступа: 15.06.2019.
3. Блог с элементами новостного сайта: [Электронный ресурс]. — https://habr.com/ru/post/119158/. — Дата доступа: 15.06.2019.
4. SciPy v1.3.0 Reference Guide: [Электронный ресурс]. — https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.sparse.csgraph.floyd_warshall.html#scipy.sparse.csgraph.floyd_warshall. — Дата доступа: 17.05.2019.

УДК 004.42

ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОГРАММНО НЕСОВМЕСТИМЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ

Д.Н. Егоров
ФГБОУ ВПО «Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина»
e-mail: *dmitryegorov48@gmail.com*

Рассматриваются основные способы обеспечения взаимодействия несовместимых программ. Дается определение связующего кода, функции-обёртки. Приводятся примеры их использования.

Ключевые слова: несовместимые программы, реверс-инженеринг, связующий код, функция-обёртка.

При разработке программного обеспечения (ПО) часто возникает необходимость использования существующих программных решений для реализации поставленных перед разработчиком задач. Прямая совместимость двух различных программ является наиболее благоприятным вариантом развития событий, так как для обеспечения взаимодействия между ними не требуется никаких дополнительных действий. Однако, бывает так, что приложения программно не совместимы и, как следствие, не могут работать друг с другом напрямую. Например, наше приложение, написанное на языке программирования C или C++, должно вызывать ряд функций приложения, написанного на Java. При условии, что C\C++ код будет скомпилирован в набор инструкций процессора, а код на Java в набор инструкций для виртуальной машины, две получившиеся программы между собой окажутся программно несовместимыми. Другим примером несовместимых приложений являются программа, написанная под одну операционную систему (ОС), и другая ОС, на которой требуется эту программу запустить. В настоящее время огромное количество приложений осуществляют подобные взаимодействия на том или ином уровне. Таким образом, знания основных способов обеспечения взаимодействия между программно несовместимыми приложениями для программиста являются весьма актуальными.

Существует большое количество способов наладить взаимодействие двух несовместимых программ. Выбор конкретного из них диктуется, в первую очередь, поставленной задачей и возможностью практической реализации. Все эти способы можно подразделить на три категории по принципу действия:

1) использование связующего кода и функций-обёрток;
2) обмен данными через канал связи;
3) эмуляция и интерпретация.

Так или иначе, все решение проблемы сводится к созданию некоего посредника между двумя программами, через который и происходит взаимодействие. Рассмотрим подробнее каждую из категорий.

1. Использование связующего кода и функций-обёрток

Под связующим кодом понимается такой код программы, всё действие которого сводится к обеспечению совместимости между двумя компонентами. Связующий код никак не влияет на алгоритм и результат работы программы. Предположим, что в программе «A» есть функция Foo, использующая pascal в качестве соглашения о вызове:

```
int __pascal Foo(int a, int b) { ... }
```

и мы хотим её вызвать из программы «B», однако напрямую сделать этого не можем, так как используемый нами компилятор не поддерживает это соглашение о вызове. На помощь приходит связующий код. В программе «B» создаётся функция Bar, которая имитирует нужное соглашение о вызове, в нашём случае это pascal, и осуществляет вызов:

```
int Bar(int a, int b) {
  int result;
  __asm {
    push a
    push b
    call Foo
    mov result, eax
  }
  return result;
}
```

В этом случае содержимое функции Bar является связующим кодом, так как оно связывает функции Foo и Bar, которые без этого кода были бы несовместимы. Как видим, функция Bar помещает аргументы на стек в нужном порядке, осуществляет вызов Foo и сохраняет результат в переменную result, значение которой и возвращает. Алгоритм и результат самой функции Foo остаются неизменными.

Теперь разберёмся, что понимается под функцией-обёрткой. В рассмотренном выше примере Bar является функцией-обёрткой над Foo, так как вся её суть сводится к тому, чтобы осуществить вызов Foo. Как правило, функции-обёртки содержат связующий код, однако выполнение этого условия не является обязательным, ровно как необязательным является и возвращение какого-либо значения. Например, функция Foobar является функцией-обёрткой, несмотря на то, что не содержит связующего кода (функцию Bar можно вызвать напрямую) и не возвращает значения:

```
void Foobar(int a, int b) {
  Bar(a, b);
}
```

Таким образом, функцией-обёрткой называют такую функцию, основной задачей которой является вызов другой функции.

Разобравшись с терминами, приступим к рассмотрению того, каким образом связующий код и функции-обёртки применяются для решения проблем программной несовместимости. Разобранный ранее пример на самом деле является демонстрацией одной из таких проблем, а именно: отсутствия поддержки необходимого соглашения о вызове. Чаще всего с подобным сталкиваются программисты, целью которых является вызов недокументированных функций.

Так как эти функции не являются частью публичного программного интерфейса приложения (API), компилятор может оптимизировать их путём использования нестандартного соглашения о вызове. В среде реверс-инженеринга подобные соглашения называют «пользовательскими» или «виртуальными» и обозначают как __usercall. Решением этой проблемы, как уже было сказано ранее, является создание функции-обёртки, имитирующей нужное соглашение о вызове. Ниже приведен пример из реального приложения, который был несколько упрощён для наглядности:

```
     String * __usercall String_Clone<eax>(String *src<edi>,
String *dest<esi>) { ... }

     String * Clone(String *src, String *dest) {
       String *result = 0;
       __asm {
         mov edi, src
         mov esi, dest
         call String_Clone
         mov result, eax
       }
       return result;
     }
```

Как видим, функция String_Clone использует нестандартное соглашение о вызове, в котором значение аргументов src и dest передаются в регистрах edi и esi соответственно, а результат функции помещается в регистр eax.

Несколько более сложной является ситуация, когда приложения работают в различных средах. Например, одно запускается напрямую, а другое через виртуальную машину. В этом случае, обеспечение взаимодействия осуществляется путём реализации виртуальной машиной интерфейса для получения информации о программе, запущенной в ней. Ситуация также осложняется при наличии сборщика мусора в том или ином приложении, так как возникает необходимость реализации механизма безопасного обмена ссылками. Это необходимо для того, чтобы не допустить ситуаций, когда одно приложение получило указатель на какой-либо ресурс другого, однако значение этого указателя к моменту его использования становится неверным, так как сборщик мусора посчитал, что ресурс пора освободить. Чтобы этого не допустить, приложение, реализующее сборку мусора, должно сообщить сборщику, что определенный ресурс, на время его использования другим приложением, освобождать нельзя. Так, помимо просто функций-обёрток, в этом случае требуется реализовать ряд дополнительной функциональности. Такие среды как Common Language Runtime (CLR) и Java Virtual Machine (JVM) предоставляют подобные решения [1].

Также довольно сложной является ситуация, когда из-под операционной системы «A» необходимо запустить приложение, написанное под операционную систему «B». В этом случае может потребоваться написание функций-обёрток не только для самого API этой ОС, но и для используемых программой стандартных библиотек. Так как таких библиотек, как правило, используется большое количество, объём работ может быть довольно значительным. Помимо

этого необходимо будет написать парсер для исполняемых файлов, что, пожалуй, является наиболее простой задачей — подобные форматы в большинстве случаев являются открытыми, однако и здесь могут возникнуть трудности. Ещё одной преградой может стать бинарная несовместимость исполняемого кода. Эта проблема надвисает черной тучей над программистом если ОС «A» и «B» собраны под разные архитектуры. Впрочем, и с этим можно справиться путём реассемблирования под нужную архитектуру или применения эмуляции/интерпретации. Последний вариант значительно отразится на производительности. В качестве примера можно привести программный слой совместимости Wine, который обеспечивает возможность запуска Windows-приложений под POSIX-совместимыми ОС, такими, как Linux и macOS [2].

2. Обмен данными через канал связи

Если применение методов из предыдущей категории допускает, что одно из приложений может не знать о том, что другое хочет с ним взаимодействовать, то для работы методов этой категории необходимо вмешательство обеих сторон. Суть таких методов сводится к тому, что оба приложения используют один протокол связи и используют его через какой-либо канал связи. Самым распространённым таким каналом является сеть. Каждый раз, запуская интернет-браузер, пользователь сталкивается с этим видом взаимодействия двух приложений. Огромным преимуществом такого подхода является полная независимость от архитектуры устройства, на котором осуществляется запуск программ. В случае использования сети интернет чаще всего применяется модель «клиент-сервер», где одно приложение устанавливает соединение с другим и посредством запросов-ответов взаимодействует с ним.

Такой подход также широко распространён при взаимодействии двух приложений, запускаемых на одной машине. В этом случае в качестве канала связи может также использоваться сеть, однако операционной системой может предоставляться ещё один способ — «именованный канал». В случае его использования, оба приложения договариваются о названии канала, и всё взаимодействие происходит через средства ОС. В этом случае приложениям не требуется установка и поддержка соединения, этим занимается операционная система.

Благодаря независимости от архитектуры вычислительного устройства и относительной простоты реализации, методы этой категории получили широкое распространение и используются всеми устройствами, подключенными к сети интернет.

3. Эмуляция и интерпретация

Метод эмуляции и интерпретации применяется в случаях, когда невозможно использовать другие методы. Как правило, это ситуации, когда есть доступ к приложению, но нет доступа к устройству, на котором это приложение можно запустить. Ярким примером является эмулятор Android устройства, поставляемый как часть Android SDK для возможности разработки под это самое устройство, при этом, не имея к нему доступа.

Тема эмуляции и интерпретации довольно обширна и заслуживает отдельной статьи. Если говорить вкратце, то суть этих методов заключается в имитации работы какого-либо устройства, используя другое устройство. Для выполнения этой задачи, необходимо владеть знаниями о внутреннем строении имитируемого устройства и его поведении, что делает написание эмулятора или интерпретатора сложным делом. Именно поэтому, реализация какого-либо из двух предыдущих способа является более предпочтительными.

Таким образом, задача обеспечения взаимодействия между программно несовместимыми приложениями является вполне решаемой и, более того, те или иные методы решения встречаются повсеместно. Благодаря им, обеспечивается работа огромного количества программ и устройств, постоянно взаимодействующих между собой в той или иной форме. Работа сети интернет напрямую зависит от решения задачи обмена информацией между приложениями, работающими на множестве различных и несовместимых между собой устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Common Language Runtime (CLR) overview [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://docs.microsoft.com/en-us/dotnet/standard/clr (дата обращения 10.09.2019)
2. What is Wine? [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.winehq.org/ (дата обращения 10.09.2019)

СОЗДАНИЕ ОНЛАЙН-КУРСА НА ПЛАТФОРМЕ OPEN EDX

Е.В. Закалкина
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *zakalkin@mail.ru*
Т.Ю. Анохина, студ.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *tan-ano@mail.ru*

Одной из форм дистанционного образования является создание интернет курсов с массовым интерактивным участием и открытым доступом при помощи МООК (Массовых открытых онлайн-курсов). Самыми популярными провайдерами МООК являются американские платформы Coursera, edX и Udacity, а также британская FutureLearn. Во многих странах появились национальные онлайн-платформы: XuetangX в Китае, MiriadaX в странах Латинской Америки, France Université Numérique (FUN) во Франции, EduOpen в Италии, SWAYAM в Индии, Национальная платформа открытого образования (НПОО) в России [1].

В настоящее время в Орловском государственном университете им. И.С.Тургенева есть возможность создавать онлайн-курсы на основе платформы OpenedX.

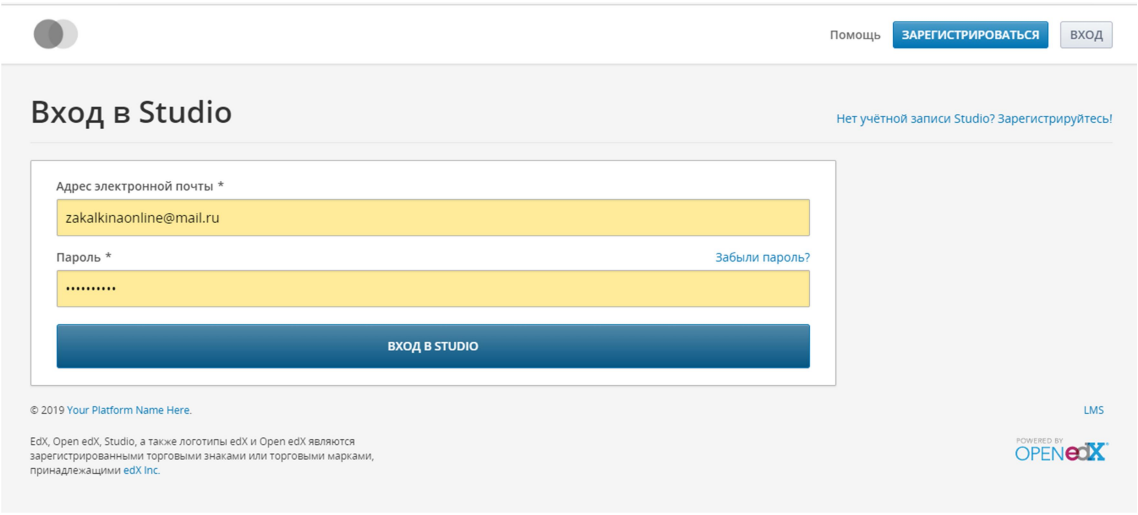


Рисунок 1 – Регистрация в системе

Первым этапом создания онлайн-курса является регистрация в системе и регистрация курса (Рисунки 1 и 2). Название курса будет доступно пользователям. Его нельзя будет изменить, однако можно указать альтернативное отображаемое название в расширенных настройках.Для **организациинеобходимо** ввести идентификатор. Для номера курса необходимо ввести как аббревиатуру темы, так и номер. Не включайте пробелы или специальные символы в номере курса.Если курс будет публичным, обязательно необходимо включить "x". Если это исключительно предложение на кампусе, то включать “x” не нужно. Далее возможно приступать к созданию курса.

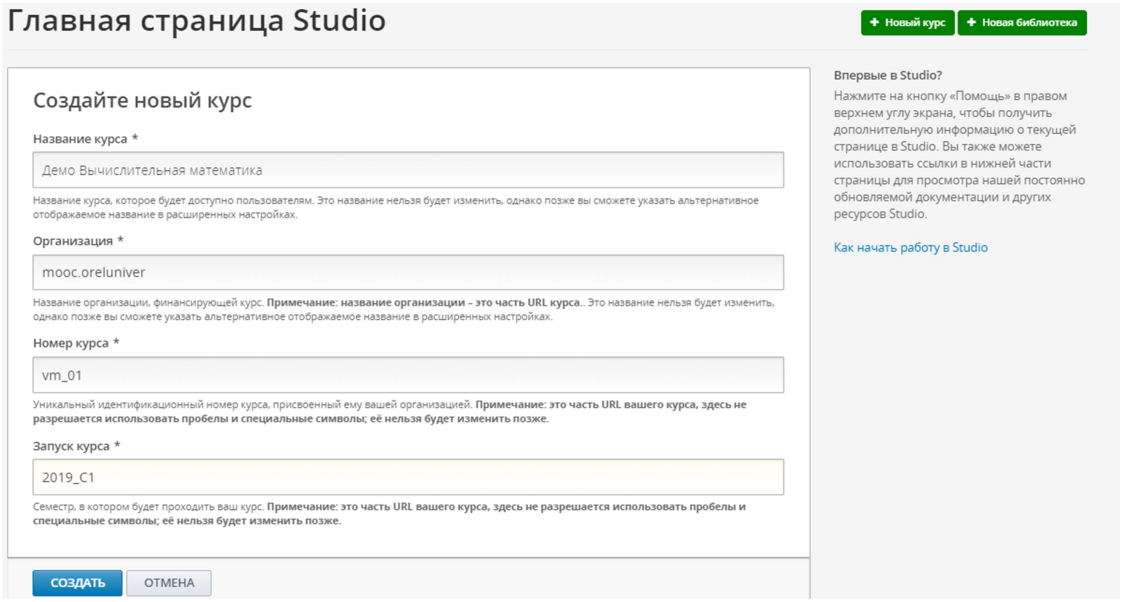


Рисунок 2 – Регистрация курса

Перед созданием курса необходимо было определить строительные блоки курса edX. Контур курса – это контейнер для всего содержания курса. Контур содержит один или несколько разделов. Разделы курса находятся на верхнем уровне и, как правило, представляют собой период времени. Раздел содержит один или несколько подразделов. Есть подразделы, которые содержат одну или несколько единиц. Единицы курса – уроки в подразделе. Учащиеся рассматривают их как отдельные страницы. Устройство содержит один или не-

сколько компонентов. Компоненты курса – это объекты внутри единицы измерения, содержащие фактическое содержимое курса.

После того, как структурированы разделы курса, можно начать организацию вашего контента и ввод его в студию. Необходимо создать разделы, подразделы и единицы измерения в курсе. Для классифицированных подразделов задается тип назначения и дата выполнения.

Кроме того, можно управлять видимостью содержимого, задав даты выпуска в единицах структуры и публикации. На рисунке 3 показан рабочий процесс создания контента.

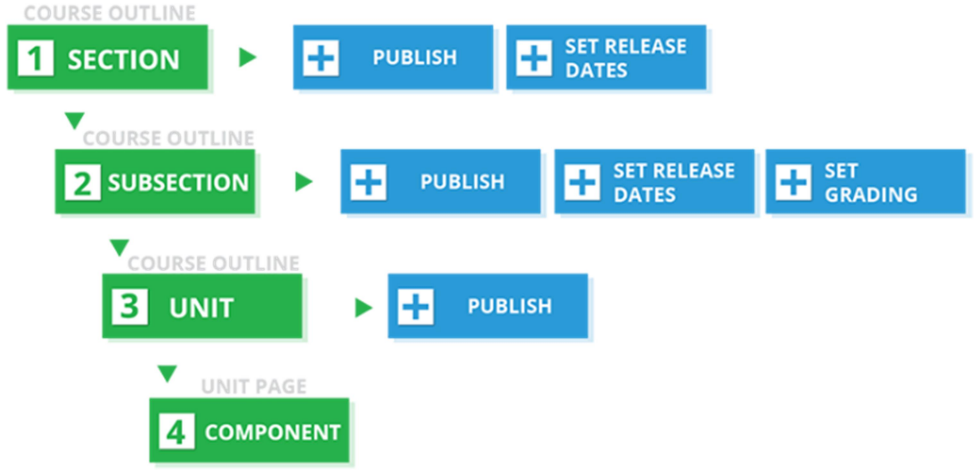


Рисунок 3 – Процесс создания контента

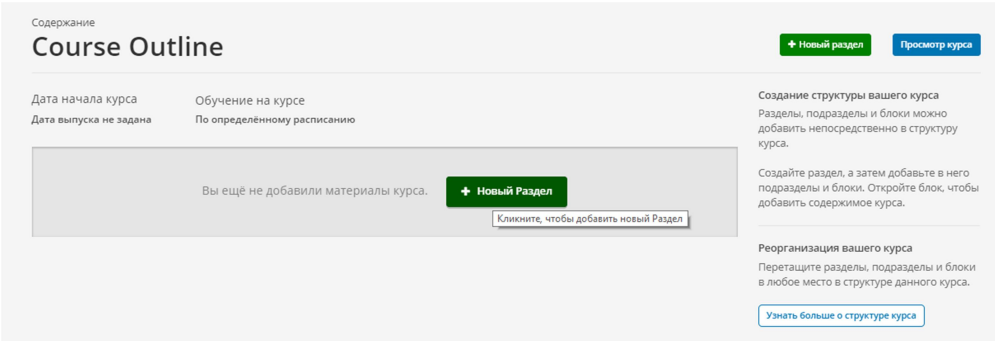


Рисунок 4 – Создание раздела курса

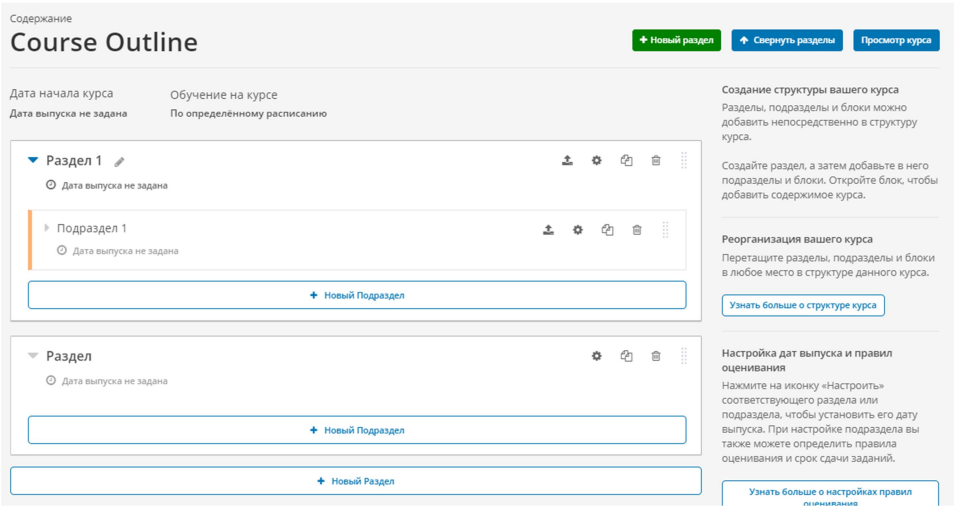


Рисунок 5 – Создание подраздела

У каждого раздела и подраздела есть настройки, с помощью которых нужно задать дату и время выпуска курса и настроить видимость раздела (рисунок 6).

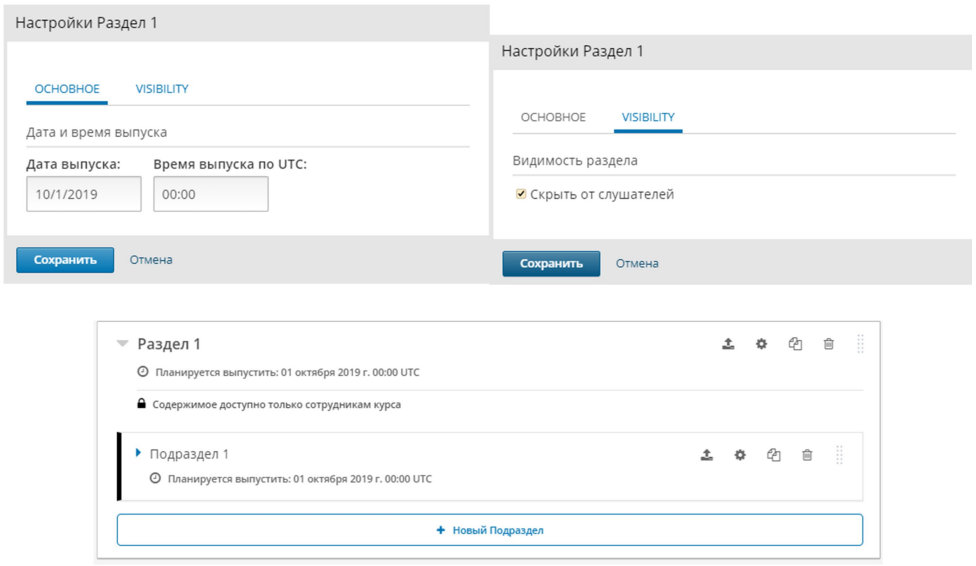


Рисунок 6 – Задание даты и времени курса

В системе есть возможность отредактировать название блока (рисунок 7).

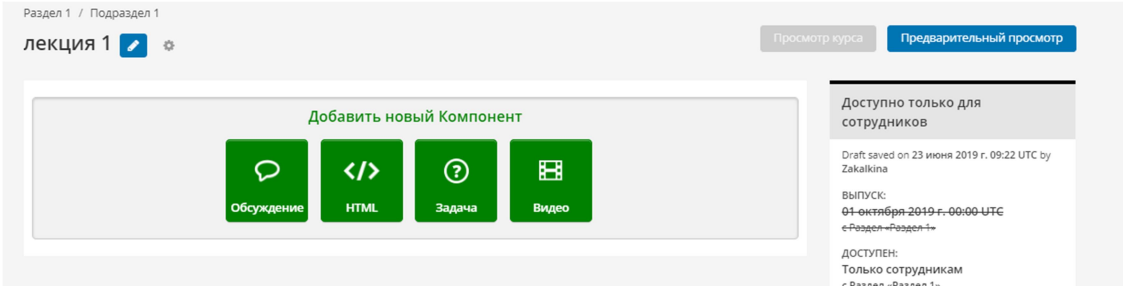
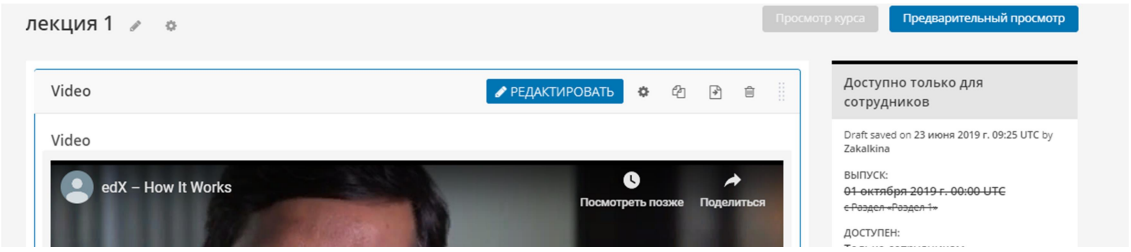


Рисунок 7 – Редактирование курса

Также в системе есть возможность размещения и редактирования видеоролика. При этом кнопке дополнительно (в правом верхнем углу формы) можно ограничить доступ на скачивание видео.



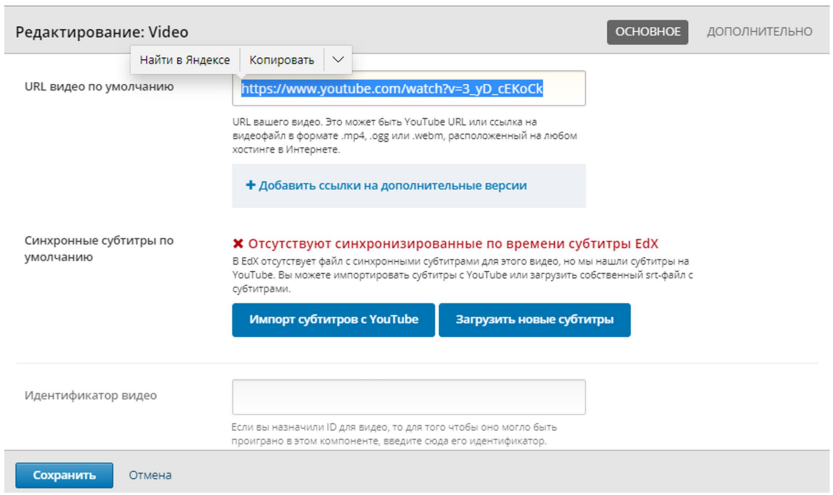


Рисунок 8 – Размещение видеоролика

Чтобы загрузить видео с компьютера выбираем пункт содержание файлы и загрузки. После загрузки копируем ссылку на видео и добавляем его как было описано ранее.

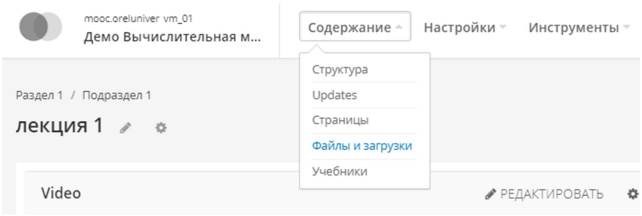


Рисунок 9 – Размещение видеоролика с компьютера

Для добавления текста нужно выбрать кнопку HTML, выбрать из списка текст, ввести текст и нажать сохранить.

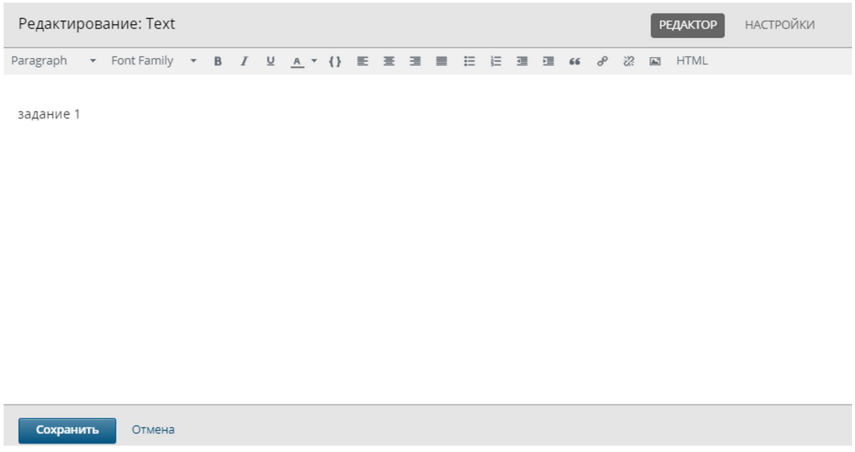


Рисунок 10 – Сохранение текста

Чтобы добавить тестовое задание выбирается задача, тип задания, выводиться пример. Нажимаем редактировать, изменяем на нужный текст и сохраняем.

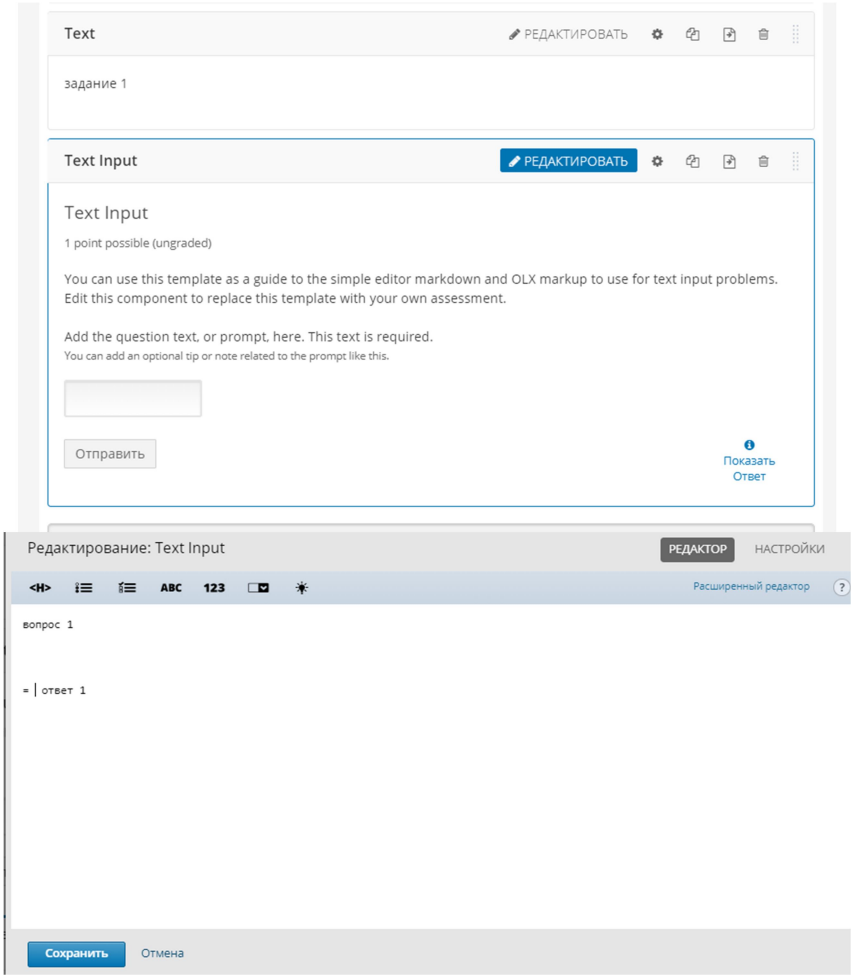


Рисунок 11 – Тестовое задание

Рекомендуется тестировать содержимое курса на протяжении всего процесса создания. Содержание доступно для учащихся, которые получают доступ к курсам с помощью мобильных приложений edX. Обновления курса, могут занять больше времени в мобильных приложениях edX, чем на сайте edX. В частности, недавно опубликованный контент может занять до часа, чтобы обновить приложение Android.

В последние десять лет произошли большие изменения в образовательном процессе, которые связаны в повсеместным внедрением информационно-телекоммуникационных технологий в учебный процесс. Современные потребности общества требуют изменения традиционного классического обучения, практикуемого во всем мире, сделать образование более мобильным [2]. Актуальность создания онлайн-курсов обусловлена быстрым развитием информатизации общества и внедрением новых технологий в процессы обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Семенова Г. В., Вилкова К. А., Щеглова И. А. Рынок массовых открытых онлайн-курсов: перспективы для России // Вопросы образования – Москва: НИУВШЭ, 2018. № 2. С. 173–197 [Электронный ресурс].Режим доступа URL: https://vo.hse.ru/2018--2/221352019.html
2. Закалкина Е.В., Еремеева Н.П., Рогозянская Е.А. Онлайн-курсы как тенденция развития образования// Избранные труды физико-математического фа-

культета Орловского государственного университета / под общ.ред. Т. Н. Можаровой. – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2018. – с.45-49

ПРИМЕРЫ РАЗРАБОТКИ ПЕЧАТНЫХ ФОРМ ДЛЯ КОНФИГУРАЦИИ 1С: УПРАВЛЕНИЕ ТОРГОВЛЕЙ

Д.В. Корниенко, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *dmkornienko@mail.ru*

Статья посвящена рассмотрению алгоритма построения печатных форм для типовой конфигурации 1С. Печатная форма представляет собой аналог электронной версии некоторого документа или отчета.

Ключевые слова: печатная форма, макет, параметр табличного документа, запрос, табличная часть.

Статья посвящена рассмотрению алгоритма построения печатных форм для типовой конфигурации 1С. Печатная форма представляет собой аналог электронной версии некоторого документа или отчета [1, стр. 213].

Печатные формы подразделяются на два вида: внутренние (встроенные), которые хранятся в самой конфигурации, и внешние, которые хранятся отдельно от настроек программы [2, стр. 458].

Для программного формирования печатных форм используются различные макеты. Одним из таких видов макетов является табличный документ. Табличный документ используется для созданияпечатных форм документов. Табличные документы вида "Макет" служат прообразами для других табличных документов. Макеты могут содержать параметры, предназначенные для заполнения конкретными данными. Перед выводом определённой области макета в результирующую таблицу, ее параметрам можно присвоить значения и(или) результаты выражений. Также макеты могут иметь параметры расшифровки, значения которых задаются аналогично параметрам. Расшифровка не влияет на внешний вид результирующей таблицы и используется для создания связанных отчетов, открытия форм или иных действий.

При создании печатной формы с выбором макета Табличный документ открывается редактор данного макета. Именно в нем разработчик ведет всю подготовку будущего макета. Во многих моментах работа в редакторе похожа на работу в программе Excel, но есть свои особенности, которые необходимо учитывать.

Формирование печатной формы заключается в описании ее составных частей - именованных областей, из которых затем «собирается» полностью готовая печатная форма. Порядок заполнения этих областей данными и последующего вывода их в итоговую форму описывается на встроенном языке платформы 1С. Печатная форма может состоять из различных графических объектов: картинок, OLE-объектов, диаграмм и т. д. [3, стр. 517].

Каждая ячейка редактируемого табличного документа может содержать текст, параметр или шаблон. Текст, который содержится в ячейке, будет просто показан на экране.

Параметр, заключенный в скобки <> будет заменен конкретным значением, которое может быть присвоено ему средствами встроенного языка. Текст, который содержится в ячейке, является именем этого параметра. А шаблон представляет собой некоторую текстовую строку, в определенные места которой будут вставлены значения параметров.

Значения параметров обычно берутся из реквизитов документа и его табличных частей путем запроса к соответствующим таблицам объекта [4, стр. 181].

```
// Сформировать печатные формы объектов
Процедура Печать(МассивОбъектов, ПараметрыПечати, КоллекцияПечатныхФорм, ОбъектыПечати, ПараметрыВывода) Экспорт

	Если УправлениеПечатью.НужноПечататьМакет(КоллекцияПечатныхФорм, "КомплектДокументов") Тогда
		КоллекцияПечатныхФорм.Очистить();
		СформироватьКомплектПечатныхФорм(МассивОбъектов, ПараметрыПечати, КоллекцияПечатныхФорм, ОбъектыПечати);
	КонецЕсли;

	Если УправлениеПечатью.НужноПечататьМакет(КоллекцияПечатныхФорм, "Заявка") Тогда
		//КоллекцияПечатныхФорм.Очистить();
		УправлениеПечатью.ВывестиТабличныйДокументВКоллекцию(
		КоллекцияПечатныхФорм,
		"Заявка",
		НСтр("ru = 'Заявка'"),
		СформироватьПечатнуюФормуЗаказ(МассивОбъектов, ОбъектыПечати));

	КонецЕсли;
	ФормированиеПечатныхФорм.ЗаполнитьПараметрыОтправки(ПараметрыВывода.ПараметрыОтправки, МассивОбъектов, КоллекцияПечатныхФорм);
КонецПроцедуры

Функция СформироватьПечатнуюФормуЗаказ(ЗаказКлиента, ОбъектыПечати) Экспорт

	УстановитьПривилегированныйРежим(Истина);
	ТабличныйДокумент = Новый ТабличныйДокумент;
	ТабличныйДокумент.ОриентацияСтраницы=ОриентацияСтраницы.Портрет;
	Запрос = Новый Запрос;
	Запрос.Текст =
	"ВЫБРАТЬ
	|	ЗаказКлиента.Договор КАК Договор,
	|	ЗаказКлиента.Номер КАК Номер,
	|	ЗаказКлиента.Дата КАК Дата,
	|	ЗаказКлиента.КонтактноеЛицо КАК КонтактноеЛицо,
	|	ЗаказКлиента.Контрагент КАК Контрагент,
```

```
	|	ЗаказКлиента.Товары.(
	|		Номенклатура КАК Номенклатура,
	|		ТемператураПеревозки КАК ТемператураПеревозки,
	|		Масса КАК Масса,
	|		Объем КАК Объем
	|	) КАК Товары,
	|	ЗаказКлиента.КонтактноеЛицоОтправителя КАК КонтактноеЛицоОтправителя,
	|	ЗаказКлиента.КонтактноеЛицоПолучателя КАК КонтактноеЛицоПолучателя,
	|	ЗаказКлиента.ДатаДоставки КАК ДатаДоставки,
	|	ЗаказКлиента.ВремяДоставки КАК ВремяДоставки,
	|	ЗаказКлиента.ПунктДоставки КАК ПунктДоставки,
	|	ЗаказКлиента.ДополнительнаяИнформацияПоДоставке КАК ДополнительнаяИнформацияПоДоставке,
	|	ЗаказКлиента.Ссылка КАК Ссылка,
	|	ЗаказКлиента.Контрагент.ИНН КАК КонтрагентИНН,
	|	ЗаказКлиента.Контрагент.НаименованиеПолное КАК КонтрагентНаименованиеПолное,
	|	ЗаказКлиента.Договор.Дата КАК ДоговорДата,
	|	ЗаказКлиента.Договор.Номер КАК ДоговорНомер,
	|	ЗаказКлиента.Склад КАК Склад,
	|	ЗаказКлиента.Комментарий КАК Комментарий,
	|	ЗаказКлиента.Менеджер КАК Менеджер
	|ИЗ
	|	Документ.ЗаказКлиента КАК ЗаказКлиента
	|ГДЕ
	|	ЗаказКлиента.Ссылка В(&ЗаказКлиента)
	|ИТОГИ ПО
	|	Ссылка";

	Запрос.УстановитьПараметр("ЗаказКлиента", ЗаказКлиента);
	Макет = Документы.ЗаказКлиента.ПолучитьМакет("ПФ_ЗаказКлиента");
	ОбластьШапка = Макет.ПолучитьОбласть("Шапка");
	ОбластьСтрока = Макет.ПолучитьОбласть("Строка");
	ОбластьПодвал = Макет.ПолучитьОбласть("Подвал");

	ВыборкаЗаказ=Запрос.Выполнить();
	ВыборкаЗаказ. Выбрать(ОбходРезультатаЗапроса.ПоГруппировкам);
	Пока ВыборкаЗаказ.Следующий() Цикл

		лВыборка = ВыборкаЗаказ.Выбрать();
		Пока лВыборка.Следующий() Цикл
			ОбластьШапка.Параметры.Номер = ПрефиксацияОбъектовКлиентСервер.ПолучитьНомерНаПечать(лВыборка.Номер);
			ОбластьШапка.Параметры.Дата = лВыборка.Дата;
			ОбластьШапка.Параметры.Клиент = лВыборка.КонтрагентНаименованиеПолное;
			ОбластьШапка.Параметры.ИНН = лВыборка.КонтрагентИНН;
			ОбластьШапка.Параметры.ДатаДоговора = лВыборка.ДоговорДата;
			ОбластьШапка.Параметры.НомерДоговора = лВыборка.ДоговорНомер;

			Представление = "";
```

```
                    СтрокаКИ = "";
                    ВзаимодействияВызовСерве-
ра.ПредставлениеИВсяКонтактнаяИнформациюКонтакта(лВыборка.КонтактноеЛицо, Пред-
ставление, СтрокаКИ);
                    ОбластьШапка.Параметры.Контакты = Представление + " " + СтрокаКИ;
                    ТабличныйДокумент.Вывести(ОбластьШапка);

                    лВыборкаПозиции=лВыборка.Товары.Выбрать();
                    Пока лВыборкаПозиции.Следующий() Цикл
                        ОбластьСтрока.Параметры.Заполнить(лВыборкаПозиции);
                        ТабличныйДокумент.Вывести(ОбластьСтрока);
                    КонецЦикла;
                    Представление = "";
                    СтрокаКИ = "";
                    ВзаимодействияВызовСерве-
ра.ПредставлениеИВсяКонтактнаяИнформациюКонтакта(лВыборка.Склад, Представление,
СтрокаКИ);
                    ОбластьПодвал.Параметры.ПунктОтправки = Представление + " " +
СтрокаКИ;
                    Представление = "";
                    СтрокаКИ = "";
                    ВзаимодействияВызовСерве-
ра.ПредставлениеИВсяКонтактнаяИнформациюКонтакта(лВыборка.ПунктДоставки, Пред-
ставление, СтрокаКИ);
                    ОбластьПодвал.Параметры.ПунктДоставки = Представление + " " +
СтрокаКИ;
                    Представление = "";
                    СтрокаКИ = "";
                    ВзаимодействияВызовСерве-
ра.ПредставлениеИВсяКонтактнаяИнформациюКонтакта(лВыборка.КонтактноеЛицоОтправ
ителя, Представление, СтрокаКИ);
                    ОбластьПодвал.Параметры.ОтправительКонтакты = Представление + " "
+ СтрокаКИ;
                    Представление = "";
                    СтрокаКИ = "";
                    ВзаимодействияВызовСерве-
ра.ПредставлениеИВсяКонтактнаяИнформациюКонтакта(лВыборка.КонтактноеЛицоПолуча
теля, Представление, СтрокаКИ);
                    ОбластьПодвал.Параметры.ПолучательКонтакты = Представление + " "
+ СтрокаКИ;
                    ОбластьПодвал.Параметры.ДопИнфо = лВыборка.Комментарий;
                    ОбластьПодвал.Параметры.КлиентФИО = ФизическиеЛицаКлиентСер-
вер.ФамилияИнициалы(лВыборка.КонтактноеЛицо.Наименование);
                    ОбластьПодвал.Параметры.ЭкспедиторФИО = ФизическиеЛицаКли-
ентСервер.ФамилияИнициалы(лВыборка.Менеджер.Наименование);
                    ОбластьПодвал.Параметры.ДатаПодвоза = лВыборка.ДатаДоставки +
(лВыборка.ВремяДоставки - '00010101');
                    ТабличныйДокумент.Вывести(ОбластьПодвал);

                КонецЦикла;
                ТабличныйДокумент.ВывестиГоризонтальныйРазделительСтраниц();
            Конеццикла;
```

```
    ТабличныйДокумент.АвтоМасштаб = Истина;
    Если ПривилегированныйРежим() Тогда
        УстановитьПривилегированныйРежим(Ложь);
    КонецЕсли;
    Возврат ТабличныйДокумент;
КонецФункции
```

ЛИТЕРАТУРА

1. Кашаев С. Программирование в 1С: Предприятие 8.3 / С. Кашаев. - Питер, 2014. - 304 с.
2. Грянина Е.А. Настольная книга по оплате труда и ее расчету в 1С: Зарплата и управление персоналом 8 (редакция 3.0) / Е.А. Грянина, С.А.Харитонов.- 1С-Паблишинг, 2015. - 614 с.
3. Габец А.П., Гончаров Д.И., Козырев Д.В., Кухлевский Д.С., Радченко М.Г. Профессиональная разработка в системе 1С:Предприятие 8. Под ред. М.Г. Радченко / Габец А.П., Гончаров Д.И., Козырев Д.В., Кухлевский Д.С., Радченко М.Г. – М.: ООО «1С-Паблишинг», 2013. – 808 с.
4. Хрусталева Е.Ю. Язык запросов «1С:Предприятие 8» / Е.Ю. Хрусталева. – М.: ООО «1С-Паблишинг», 2013. – 369 с.

ИНТЕГРИРОВАННАЯ СРЕДА ДЛЯ НАЧАЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

В.В. Лаптев, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Астраханский государственный технический университет»
e-mail: *WLlaptew@yandex.ru*

Описывается интегрированная среда Semantic IDE для обучения программированию. Редактор кода не является текстовым редактором, а оперирует конструкциями языка и объектами программы. Редактор позволяет представить программу в разных синтаксисах. Описывается работа с программными проектами, и показаны возможности редактора для подготовки обучающих материалов непосредственно в среде.

Ключевые слова: интегрированная среда, Semantic IDE, семантический редактор, учебный язык программирования, семантическое дерево программы, синтаксис как интерфейс.

1. Введение

В работе [3] сформулированы требования к учебному языку и обучающей системе по программированию. В работе [1] описан разработанный в соответствии с требованиями учебный язык программирования Semantic Language и его интерпретатор. Разработка программ на учебном языке должна осуществляться в интегрированной среде программирования (Integrated Development Environment, IDE). С одной стороны, эта среда является частью обучающей системы и должна обеспечивать процесс обучения. С другой стороны, интегрированная среда должна быть похожа на современную интегрированную среду для

профессиональной разработки программ. Поэтому рассмотрим некоторые свойства современных интегрированных сред.

Интегрированная среда объединяет в единую систему множество системных программ, однако наиболее важной частью любой интегрированной среды является редактор кода, который и обеспечивает взаимодействие пользователя-программиста со средой. Как правило, редактор кода представляет собой обычный текстовый редактор, в котором основные операции выполняются с символами, строками и блоками текста. Однако современные промышленные среды обеспечивают некоторую поддержку языка разработки. Например, обычно предоставляется набор так называемых сниппетов (snippets), обеспечивающих вставку конструкций языка по короткой комбинации клавиш или даже по одной горячей клавише.

В последние годы в некоторых средах (например, в Visual Studio) выполняется интеллектуальный анализ кода (технология IntelliSense) уже при его создании (до компиляции) [4,7]. Подобный механизм обеспечивает более богатые возможности, например:

1. При наборе кода предоставляются интеллектуальные подсказки, позволяющие выбрать конструкцию из списка (например, вызов метода класса стандартной библиотеки), а не набирать ее вручную.
2. Обеспечивается возможность получения краткой справки об объектах программы (например, информация о составе методов класса или о списке параметров метода) непосредственно в редакторе без обращения к системе помощи.
3. Обеспечивается навигация по коду, например, переход от вызова метода к его определению и обратно.
4. Ошибочные конструкции помечаются в окне редактора в момент набора (без компиляции), и в отдельном окне выводятся сообщения о возможных ошибках.

В наиболее развитых средах обеспечивается поддержка некоторых простых операций рефакторинга [2,4,7].

Результаты этих операций отражаются в окне редактора. Подобные возможности позволяют значительно снизить количество ошибок при наборе кода, и существенно повышают производительность программиста. Тем не менее, подавляющее большинство операций, которые программист выполняет в редакторе, – это обычные операции с текстом. Однако код программы – это не простой текст, поэтому применение текстовых операций к коду регулярно нарушает синтаксис языковых конструкций. Поэтому нередко возникают мелкие синтаксические ошибки, что приводит к непроизводительным затратам времени.

Редактор интегрированной среды обычно сохраняет код программы в текстовом виде. Текстовое представление кода является входным для компилятора, что требует наличия фазы лексического и синтаксического анализа. С одной стороны, это замедляет процесс разработки программы. С другой стороны, ошибки компиляции затрудняют процесс обучения, так как отвлекают обучаемого от главной цели – от решения задачи. Кроме того, текст программы можно

открыть, просмотреть и изменить вне интегрированной среды. При профессиональной разработке это бывает полезно, но при обучении провоцирует обучаемых на нечестные способы выполнения заданий по программированию.

2. Концепции разработки

Б. Страуструп в своей книге [6] отмечал, что главным препятствием на пути развития языка C++ являются символьно-ориентированные инструменты (в частности, текстовый редактор кода). Более перспективный и интересный подход – отказаться от традиционного текстового представления и реализовать инструментарий на основе семантических понятий языка программирования. В этом случае синтаксис языка представляет собой интерфейс между языком программирования и пользователем (программистом). И, как всякий интерфейс, его можно заменять, не изменяя базовой семантики языка.

В соответствии этим подходом и с учетом анализа свойств современных сред был сформулирован ряд концепций реализации интегрированной среды, которая является одной из подсистем автоматизированной обучающей среды по программированию:

- среда должна поддерживать работу и с одномодульными, и с многомодульными программами;
- среда должна обеспечивать простой и независимый от платформы механизм накопления программных компонент; в частности, с помощью этого механизма должны быть разработаны и включены в среду модули стандартной библиотеки;
- ввод-вывод данных должен осуществляться в рамках среды без выхода в операционную систему;
- среда должна обеспечивать разработку системы помощи непосредственно в редакторе без привлечения сторонних средств;
- редактор кода должен оперировать конструкциями языка программирования и объектами программы;
- изменение ключевых слов в коде должно быть невозможно;
- ошибки должны определяться в момент набора кода программы;
- редактор должен обеспечивать при необходимости традиционные операции редактирования текста;
- редактор должен позволять набирать код программы и в русской, и в английской лексике;
- должна быть обеспечена возможность переключения лексики и синтаксиса языка программирования, причем это переключение не должно приводить к повторному анализу кода программы.

В настоящее время практически все эти концепции реализованы в рамках интегрированной среды Semantic IDE.

3. Среда Semantic IDE и семантический редактор

Внешний вид среды Semantic IDE показан на рисунке 1. Центральное окно – это окно редактора кода. В нем пользователь создает код программ и содержимое других документов. Для каждого документа создается отдельная вкладка. Над центральным окном расположены главное меню и лента выбран-

ного пункта главного меню. Под окном кода – текущая подсказка в зависимости от положения курсора в коде.

Справа расположено окно проектов. В нем отображается текущий проект, с которым в данный момент работает пользователь. Окно проектов имеет стандартные вкладки «Задачник» и «Документация». Это позволяет работать с проектами задачника и помощи непосредственно в среде.

Под центральным окном – окно сообщений об ошибках и окно консоли. Сообщения об ошибках появляются при редактировании кода – для этого не требуется запускать программу на трансляцию. При выполнении программы среда переключается в окно консоли, в котором программист задает входные данные и в которое выводятся результаты работы программы. При работе в среде не открывается никаких окон от операционной системы.

В окне консоли имеются стандартные вкладки «Результаты поиска» и «Журнал команд». Первая вкладка предназначена для вывода результатов поиска по редактируемому документу. Во второй вкладке среда показывает все действия пользователя, которые он выполнил от момента запуска среды и до момента просмотра. Эта информация весьма полезна для преподавателя и позволяет среде адаптироваться к конкретному пользователю.

Все окна, кроме центрального окна редактора, являются плавающими и их можно перемещать и закреплять как вкладки в центральном окне.

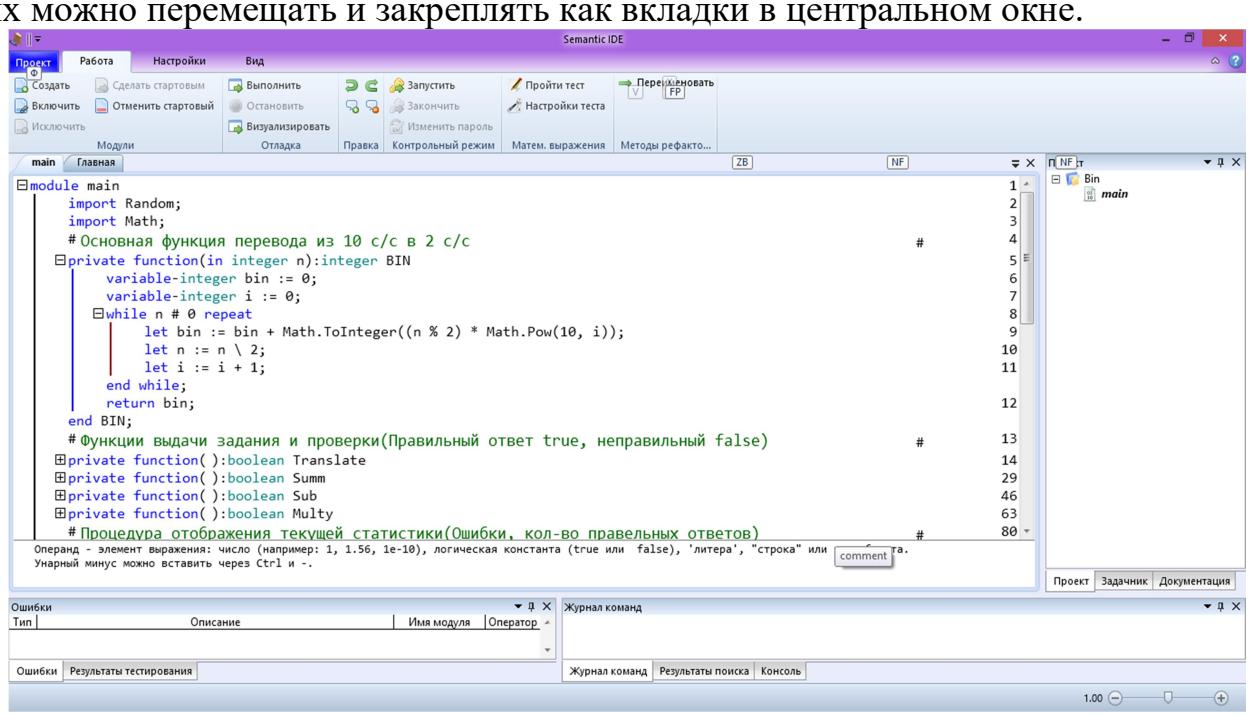


Рисунок 1 – Внешний вид Semantic IDE

Проекты. Работа в интегрированной среде начинается с создания проекта. Проект – это набор файлов, созданных в редакторе кода и сохраненных на диск. При создании проекта на диске создается папка, в которую записывается файл проекта. В этой же папке хранятся все остальные файлы проекта. Проект создается даже в том случае, если включает единственный файл.

Проект может содержать не только файлы, но и папки. Если проект большой, то система обычно разбивается на подсистемы, и все файлы подсистемы собираются в отдельную папку.

Любой файл, созданный в редакторе кода, может содержать программный модуль на языке программирования Semantic Language. Но в общем случае это не обязательно – файл может содержать только неисполняемую информацию. Таким образом, в редакторе кода можно создавать как программные, так и информационные проекты. Примером чисто информационного проекта в Semantic IDE является проект справочной системы (вкладка «Документация» в окне проектов). Проект «Задачник», представляющий собой набор лабораторных работ по программированию, содержит как тексты, так и примеры программ на языке Semantic Language.

Программные проекты могут быть исполняемыми и неисполняемыми. Примером неисполняемого проекта в среде является проект Framework, в котором собраны модули стандартной библиотеки. Если же программный проект требуется выполнять, то один из модулей проекта назначается стартовым: выполнение программы начнется с секции инициализации этого модуля. Остальные модули загружаются и связываются при выполнении интерпретатором оператора import. Примером исполняемого проекта, предоставляемого в составе Semantic IDE, является проект Example, в который включено множество примеров программ на языке Semantic Language.

Для хранения проектов на диске был разработан специальный xml-формат. Например, текущая версия проекта Задачник выглядит так:

```
<?xml version="1.0" encoding="utf-16"?>
<Project Name="Задачник" StartupModule="#notset">
 <Files>
  <Folder Path="Лекции">
   <Folder Path="Лекция_01_Знакомство_со_средой">
    <Module Path="Лекция_01.sl" />
   </Folder>
   <Folder Path="Лекция_02_Ветвления">
    <Module Path="Лекция_02.sl" />
    <Module Path="Пример_1_Л_02.sl" />
    <Module Path="Пример_2_Способ_1_Л_02.sl" />
    ...
   </Folder>
   <Folder Path="Лекция_03_Циклические_алгоритмы">
    <Folder Path="Типовые задачи">
     <Module Path="Задача_1_Л_03.sl" />
     ...
     <Module Path="Задача_8_Л_03.sl" />
    </Folder>
    <Module Path="Лекция_03.sl" />
    <Module Path="Пример_1_Л_03.sl" />
    ...
    <Module Path="Пример_4_Л_03.sl" />
   </Folder>
   ...
   <Folder Path="Лекция_10_Динамические_структуры_данных">
    <Module Path="Лекция_10.sl" />
    <Module Path="Пример_1_Л_10.sl" />
```

```
      ...
    </Folder>
  </Folder>
  <Folder Path="Практические работы">
    <Folder Path="Варианты заданий">
      <Module Path="Варианты_заданий_01.sl" />
      ...
      <Module Path="Варианты_заданий_15.sl" />
    </Folder>
    <Module Path="Лабораторная_01.sl" />
    ...
    <Module Path="Лабораторная_15.sl" />
  </Folder>
  <Module Path="Оглавление.sl" />
 </Files>
</Project>
```

Файл проекта сохраняется в папке проекта в виде xml-файла с расширением «.prj», а файлы, созданные в редакторе и включенные в проект, имеют расширение «.sl». В данном случае отсутствует стартовый модуль, поскольку проект не является исполняемой программой.

Редактирование кода. Редактор кода – это не традиционный текстовый редактор. В Semantic IDE реализован семантический редактор. Как было описано в работе [3], семантический редактор оперирует не символами, а операторами учебного языка и объектами программы. Поэтому, во-первых, большинство элементов оператора сразу вставляются в код в правильном виде, и, во-вторых, полностью исчезают ошибки набора ключевых слов. Редактор разрешает символьный ввод только в строго определенных позициях оператора. Например, в операторе объявления переменной разрешено вводить посимвольно только имя переменной.

Операторы учебного языка добавляются в код программы с помощью сниппетов и контекстного подсказчика. Каждый оператор учебного языка начинается ключевым словом, поэтому сниппет – это первые две-три буквы ключевого слова оператора. При наборе букв сниппета в кодовом окне редактора подсказчик выводит список операторов, и подсветка устанавливается на конкретном операторе.

Контекстный подсказчик работает и при наборе составного имени при вводе селектора-точки. Если перед точкой было набрано имя модуля, то в списке выводится список всех открытых объектов этого модуля. Если перед точкой было набрано имя объекта определяемого типа, то подсказчик выводит имена всех открытых полей и методов, определенных в этом типе.

Редактор следит за действиями программиста и сообщает об ошибках в момент набора программы. Пока ввод оператора не завершен, в окне ошибок «вывешены» все сообщения об ошибках, которые возникают по мере ввода составных частей оператора. Например, при ошибке в написании имени переменной во время ввода оператора мгновенно появляется сообщение о том, что данная переменная не была определена.

Аналогично выполняется удаление – удаляется вся конструкция целиком. Операция замены работает только с элементами оператора. Заменить оператор целиком нельзя – можно только его удалить и вставить новый.

Заметим, что программа при вводе/удалении операторов всегда является синтаксически правильной – синтаксические ошибки отсутствуют. Даже при наборе арифметических или логических выражений всегда вставляется (и удаляется) синтаксически правильная часть выражения. Все возникающие ошибки являются исключительно лексическими (например, неверно набранная числовая константа) или семантическими (например, в операторе присваивания требуется недопустимое преобразование типа). Таким образом, набор кода программы требует минимального количества действий от программиста, и при этом существенно сокращается количество ошибок.

Оператор-комментарий. Одним из операторов, размещаемых в коде, является оператор-комментарий, обозначаемый в окне редактора символом «решетка» (#). Оператор-комментарий может быть вставлен в код в любом месте, где допускается вставка оператора языка программирования, а также перед кодом и после него. Однако в семантическом редакторе оператор-комментарий трактуется более широко, чем обычные комментарии в программах: разрешается создавать произвольную последовательность операторов-комментариев вообще без программного кода.

В пределах комментария разрешается посимвольный ввод любого текста, и выполняются традиционные текстовые операции с символами и строками. Разрешены и обычные операции с буфером обмена – это позволяет вставлять фрагменты материалов из других программ (например, из MS Word). Внутри комментария можно создать таблицы, разрешается вставлять рисунки и видеоролики. Обеспечивается возможность связывания комментариев с помощью гиперссылок, в том числе и с другими файлами проекта.

Таким образом, возможности представления информации практически не уступают возможностям подготовки документа в MS Word в rtf-формате. Все это позволяет преподавателю непосредственно в редакторе готовить обучающие материалы. Теоретический материал можно проиллюстрировать кодом программы-примера, которую можно запустить на выполнение. Это способствует более быстрому и прочному усвоению изучаемого материала.

4. Синтаксис как интерфейс

Редактор кода в соответствии с действиями программиста строит внутреннее представление программы. Один модуль – это семантическое дерево с вершинами сложной структуры. Каждая вершина (узел) дерева представляет отдельный оператор программы, в котором сохраняется полная информация о семантике оператора.

В каждом узле имеется ссылка на следующий узел-оператор. Таким образом, последовательность операторов представляет собой последовательный список узлов семантического дерева. В узлах, соответствующих блочным операторам учебного языка [1], имеется еще одна ссылка – на первый вложенный оператор тела.

Внутреннее представление программы в виде семантического дерева является входным для интерпретатора. Поскольку все ошибки выявляются при создании кода в редакторе, на вход интерпретатора поступает правильная программа. Интерпретатор не выполняет ни лексического, ни синтаксического анализа – это существенным образом упростило реализацию, и повысило быстродействие. Алгоритм интерпретатора представляет собой простую рекурсивную процедуру обхода дерева с вызовом нужной функции интерпретации в каждом узле.

С другой стороны, представление программы в виде семантического дерева позволяет реализовать идею Б.Страуструпа о том, что синтаксис языка программирования является только интерфейсом [6], который, вообще говоря, можно менять, выбирая подходящий. В Semantic IDE помимо синтаксиса Semantic Language реализованы Си-подобный, Pascal-подобный и Python-подобный синтаксисы. За образец Pascal-подобного принят синтаксис языка Component Pascal [5], реализованного в системе BlackBox Component Builder. Кроме того, каждое из представлений может быть показано либо в русской лексике, либо в английской.

На рисунке 2 показано представление программы вычисления факториала на языке Semantic Language в английской и русской лексике. Та же программа в Си-подобном и Pascal-подобном виде показана на рисунке 3.

```
module Факториал
start
   variable-integer i := 1;
   variable-real current := 1;
   constant integer N = 15;
      while i < N repeat
      let current := current * i;
      let i := i + 1;
      output '\n';
      output current;
   end of while;
end Факториал.
```

```
модуль Факториал
начало
   переменная-целое i := 1;
   переменная-вещ current := 1;
   константа целое N = 15;
   пока i < N повторять
      присвоить current := current * i;
      присвоить i := i + 1;
      вывести '\n';
      вывести current;
   конец цикла;
конец Факториал.
```

Рисунок 2 – Представление программы на языке Semantic Language

```
namespace Факториал {
main() {
   int i = 1;
   double current = 1;
   const int N = 15;
   while (i < N) {
      current = current * i;
      i = i + 1;
      cout << '\n';
      cout << current;
   }
}
}
```

```
MODULE Факториал;
BEGIN
   VAR i: INTEGER := 1;
   VAR current: REAL := 1;
   CONST N: INTEGER = 15;
WHILE i < N DO
      current := current * i;
      i := i + 1;
      write ('\n');
      write (current);
   END
END Факториал.
```

Рисунок 3 – Представление программы на языке Semantic Language в Си-подобном синтаксисе и Pascal-подобном синтаксисе

Каждый синтаксис определяется собственной грамматикой представления. Грамматика не используется для синтаксического анализа программы и нужна только для определения внешнего представления программы в окне редактора кода. В грамматике каждому оператору соответствует правило представления, задаваемое в формате РБНФ. Например, оператор объявления массива в грамматике для Semantic Language задан таким правилом:

<Array> ::= "Array""["<expression>"]" <Type> <name>";"

Нетерминал в левой части правила – это семантическая единица языка (оператор), которая в семантическом дереве представлена соответствующим узлом. В правой части правила – синтаксис представления этого оператора в окне редактора. Последовательности символов, заключенные в кавычки, выводятся буквально в окно редактора – это ключевые слова языка, которые в коде показаны синим цветом. Нетерминалы, представленные в правой части правил, являются параметрами данной семантической единицы. В данном случае узел имеет три параметра:

– выражение, задающее размер массива;

– тип элементов массива;

– имя массива.

То же правило в грамматике С-подобного представления выглядит так:

<Array> ::= <Type> <name>"["<expression>"];"

В грамматике Си-подобного представления это правило выглядит следующим образом:

<Array> ::= "VAR" <name>":" "ARRAY" <expression> "OF" <Type>";"

Алгоритм смены представления – это тот же рекурсивный обход дерева с вызовом нужной функции изображения в каждом узле.

5. Заключение

Описанная в данной статье интегрированная среда Semantic IDE является основой обучающей системы, требования к которой изложены в [3]. Реализация Semantic IDE выполнена на языке C# в среде Visual Studio 2012-2015. Полностью реализована вся процедурная составляющая учебного языка и большая часть объектно-ориентированной. Разработана начальная версия системной библиотеки.

Среда используется в учебном процессе на кафедре АСОИУ Астраханского государственного технического университета с 2012 года для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Программирование и информатика». Среда используется и на факультативных занятиях по программированию в Астраханском колледже вычислительной техники. Опыт использования показывает существенное сокращение времени при создании кода программы и практически полное исчезновение ошибок набора.

По отзывам преподавателей представление программы в русской лексике облегчает усвоение базовых понятий студентам, не изучавшим основы программирования в школе и способствует усвоению профессиональной терминологии. С другой стороны, возможность переключить программу в английскую лексику облегчает студентам переход на профессиональные англоязычные языки программирования.

Работа поддержана грантами «У.М.Н.И.К.» в 2011 и 2012 годах, и грантом «Старт» в 2013 и 2015 годах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грачёв А.Д., Лаптев В.В. Разработка учебного языка программирования и интерпретатора для обучающей среды // Объектные системы-2012: материалы VI Международной научно-практической конференции (Ростов-на-Дону, 10-12 мая 2012г.) / Под общ. ред. П.П. Олейника. – Ростов-на-Дону: ШИ ЮРГТУ (НПИ), 2012. – 110 с., с. 92-101.
2. Давыдов С.В., Ефимов А.А. IntelliJ IDEA. Профессиональное программирование на Java. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 800 с.
3. Лаптев В.В. Требования к современной обучающей среде по программированию // Объектные системы-2010 (Зимняя сессия): материалы II Международной научно-практической конференции. Россия, Ростов-на-Дону, 10-12 ноября 2010 г. / Под общ. Ред. П.П. Олейника. – Ростов-на-Дону, 2010. – 134 с., с. 104-110.
4. Пауэрс, Л. Microsoft Visual Studio 2008 / Л. Пауэрс, М. Снелл: Пер. с англ. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 1200 с.
5. Потопахин В.В. Современное программирование с нуля! – М.: ДМК Пресс, 2010. – 240 с.
6. Страуструп Б. Дизайн и эволюция C++. – М.: ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2006. – 448 с.
7. Рендольф Н., Гарднер Д., Минутилло М., Андерсон К. Visual Studio 2010 для профессионалов. – М.: ООО «И.Д.Вильямс», 2011. – 1184 с.

ЗАДАЧА АВТОМАТИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ТЕКСТОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

С.А. Никитина, к.ф.-м.н., доц.
Челябинский государственный университет
e-mail: *nikitina@csu.ru*
С.С. Попов, магистрант
Челябинский государственный университет
e-mail: *sergei.popov174@gmail.com*

Решается задача автоматической классификации текстов. Определяется тематическая принадлежность текста на русском языке. Для проведения классификации применены методы машинного обучения. Методы протестированы на разных наборах параметров, выявлены наиболее существенныеиз них. Написановеб-приложение, которое позволяет выполнять анализ текста и определять его тематическую принадлежность.

Ключевые слова: автоматическая классификация текстов, определение тематической принадлежности текста, веб-приложение.

1. Введение

Классификация текстов на сегодняшний день является одной из актуальных задач, поскольку к ней сводится ряд других задач: определение автора текста,тематической принадлежности текстов, эмоциональной окраски высказываний и др.

Один из подходов к классификации основывается на методах машинного обучения [3]. При классификации документов категории (классы) определены заранее. Процесс классификации заключается в следующем. Задается набор примеров, который называют обучающей выборкой. Обучающую выборку используют для обучения классификатора и определения значения параметров, при которых классификатор выдает лучший результат. Затем в системе вырабатываются правила, с помощью которых происходит разделение множества на заданные классы. Качество классификации проверяется тестовой выборкой.

Многие из существующих систем классификации текстов ориентированы на англоязычные коллекции текстов [6]. В данной статье решается задача автоматической классификации текстов на русском языке по темам с использованием методов машинного обучения и методов естественной обработки языка. Разработано веб-приложение, позволяющего производить данный анализ автоматически.

2. Методика проведения исследований

Классификация состоит из нескольких последовательных этапов: предобработка и индексация, построение и обучение классификатора, оценка качества классификации [1].

При предобработке текста можно встретить достаточно большое количество корректных словоформ со схожими значениями, написания которых могут отличаются различными изменяемыми частями слова (например, приставками, суффиксами, окончаниями и т.д.). Это усложнит дальнейшую обработку текста, а также создание словарей. Лемматизация позволяет привести слово к его сло-

варной форме − лемме. Предварительная обработка текста значительно сокращает размерность пространства.

Индексация документов предполагает построение некоторой числовой модели текста, которая переводит текст в удобное для дальнейшей обработки представление. Один из распространенных методов индексации – Word2vec, в котором каждое слово представляется в виде вектора, содержащего информацию о сопутствующих словах.

Существуют несколько способов определения веса признаков документа. Наиболее распространенный – вычисление функции TF-IDF. Его основная идея состоит в том, чтобы больший вес получали слова с высокой частотой в пределах конкретного документа и с низкой частотой употреблений в других документах.

В данной работе использовались два метода обработки текста: лемматизация и векторизация TF-IDF.

На сегодняшний день разработано большое количество методов машинного обучения. Для решения поставленной задачи были выбраны следующие: метод опорных векторов (SVM), метод ближайших соседей (KNN), метод на основе логистической регрессии (LogReg).

Суть метода опорных векторов [1, 2] заключается в построении гиперплоскости, разделяющей имеющиеся объекты наилучшим образом. Причем, в алгоритме предполагается, что чем больше расстояние между разделяющей гиперплоскостью и объектами классов, тем меньше ошибок будет допущено в работе алгоритма. Зачастую структура данных бывает неизвестна и очень редко удается построить разделяющую гиперплоскость. В таком случае необходимо перейти от исходного пространства признаков документов к новому, в котором обучающая выборка окажется линейно разделимой. Для этого каждое скалярное произведение заменяют на некоторую функцию, отвечающую определенным требованиям. Вообще, задача построения наилучшей разделяющей гиперплоскости сводится к задаче квадратичного программирования.

В основе метода ближайших соседей [1, 5] лежит оценивание расстояний до объектов. Для повышения надежности и точности классификации, объекты необходимо относить к такому классу, к которому принадлежат k его ближайших соседей обучающей выборки.

Логистическая регрессия [1, 4] – еще один метод построения классификатора, с помощью которого оцениваются апостериорные вероятности принадлежности объектов классам. Задаются зависимая переменная, принимающая одно из двух значений и множество независимых переменных, на основе значений которых вычисляется вероятность принятия значения зависимой переменной. При классификации документов в качестве зависимой переменной выступает класс (тематика), а в качестве независимых переменных – множество документов.

3. Обсуждение полученных результатов

В качестве инструментов для решения задачи был выбран язык программирования Python и библиотеки к нему sklearn, pandas, pymorphy2.

Была проведена лемматизация с помощью библиотеки pymorphy2, а также tf-idf векторизация с помощью модуля TfidfVectorizer из библиотеки sklearn. Далее использовались модули, LinearSVC, LogisticRegression, KneighborsClassifier из библиотеки sklearn, с разными параметрами. Замерялась скорость обучения и предсказания, а также точность предсказания (таблица 1-4).

Таблица 1– Результаты работы методов с параметрами из «коробки»

Метод	Время обучения на 20000 объектов, сек	Время предсказания на 5000. объектов, сек	Точность, %
Метод опорных векторов (SVM)	16.2	0.258	89.94
Логистическая регрессия (LogReg)	59.3	0.258	80.45
Метод ближайших соседей (KNN)	0.85	231	77.16

Таблица 2 – Результат SVM с перебором параметра *C*

Значение *C*	Точность
5	90
10	90
7.5	89.91
3	89.93
6.5	89.87
0.5	89.5
0.1	85.92

Таблица 3 – Результат LogReg с перебором параметра *C*

Значение *C*	Точность
3	85.73
5	86.97
10	88.17
15	88.52
0.5	75.4
0.1	58.89

Таблица 4 – Результат KNN с перебором параметра *k*

5	77.16
10	76.30
15	75.59
30	73.45
35	72.73
50	71.59
100	68.53

После проведения численных экспериментов в качестве наилучшей модели была выбрана KNN. На её основе так же проводился перебор параметров векторизации tf-idf (таблица 5).

Таблица 5 – Результат KNN с разными параметрами tf-idf

max_features	ngram_range	Точность SVM
100000	Нет	77.77
50000	Нет	76.62
1000000	2	78.44
Нет	2	82.75
700000	2	80.71
100000	3	83.30
1000000	3	85.14

Было разработано демонстрационное веб-приложение на языке Python, с использованием микрофреймворка Flask. Данное приложение позволяет определять для произвольного текста на русском языке его тематику.

4. Заключение

Рассмотрена задача определения тематической принадлежности текста на русском языке.В рамках решения задачи выполнен обзор алгоритмов классификации и алгоритмов приведения текстов к векторному виду.

Для проведения классификации были реализованы:метод опорных векторов (SVM), метод ближайших соседей (KNN), метод на основе логистической регрессии. Для реализации веб-приложения была выбран SVM. Алгоритм классификации протестирован на разных наборах характеристик и параметров, выявлены наиболее значимые характеристики,определенылучшие параметры.

Реализованное в ходе работы приложение показало свою работоспособность при проведении экспериментов. Данное приложение может быть модернизировано в дальнейшем путём расширения тренировочной выборки, применения других способов векторизации текстов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Батура Т.В. Методы автоматической классификации текстов // Программные продукты и системы. –2017. – Т. 30. – № 1. С. 85–99.
2. Воронцов, К. В. Лекции по методу опорных векторов [Электронный ресурс] // URL: https://yourcmc.ru/wiki/images/6/6a/Vorontsov-SVM-draft.pdf.
3. Барсегян А.А., Куприянов М.С., Холод И.И. и др. Анализ данных и процессов. –СПб.: БХВ-Петербург.–2009. – 512 с.
4. Логистическая регрессия: [Электронный ресурс]. // [сайт] URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Логистическая_регрессия.
5. Метод ближайших соседей: [Электронный ресурс]. [сайт] // URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=KNN.
6. Korobov M.: Morphological Analyzer and Generator for Russian and Ukrainian Languages // Analysis of Images, Social Networks and Texts, P 320-332 (2015).

УДК 519.1+004.42

ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА PYTHON: ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА НЕЭКВИВАЛЕНТНЫХ СПОСОБОВ РАСКРАСКИ ГРАФА

И. Н. Попов, к.ф.-м.н., доц.
Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: *PopovIvanNik@yandex.ru*
А. В. Попова
Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: *anyaa-popova@yandex.ru*

Целью работы является предложение программы, осуществленной на языке Python, для решения комбинаторной задачи «об ожерельях». Приводятся теоретические сведения о решаемой задаче, рассматриваются примеры.

Ключевые слова: программирование, Python, цикловой индекс группы, теорема Пойа.

Одной из комбинаторных задач является задача «об ожерельях». В разных источниках (например, [1, с. 225, 226, 261], [2, с. 86, 90, 91], [5, с. 148, 151, 155, 160], [6, с. 110, 122]) она формулируется по разному, но требование одно и то же: определить количество составляемых «ожерелий». Часто задаваемый вопрос или сводящийся к нему: сколько различных ожерелий из n бусин можно составить из бусин, количество цветов которых равно m, если введены условия различимости (неэквивалентности) ожерелий? Предлагаются также задачи с дополнительными количественными требованиями к составлению ожерелий. Например: сколько различных ожерелий (рассматривая их как плоскостные или пространственные объекты) можно составить из двух синих, двух белых и двух красных бусин? Решение этих задач можно осуществить с использованием теоремы Пойа, решение которой основывается на разложении подстановок в произведения независимых циклов.

Целью статьи является предложить способ компьютерного вычисления количества неэквивалентных способов раскраски графов, с использованием языка программирования Python [4].

Естественно, сами подстановки в математике изучаются как самостоятельные объекты. Но у подстановок есть прикладной характер, который выражается в том, что они задают правила преобразований разного рода других математических объектов (многочленов, матриц, геометрических фигур, графов и так далее). Разложения подстановок в произведение независимых циклов помогает решать ряд задач, связанных как с исследованием свойств самих подстановок, так и прикладных задач. В их числе: определение порядка подстановки; выяснение сопряженности двух подстановок; определение числа классов эквивалентности графов относительно раскраски их вершин с помощью циклового индекса группы; алгоритмизация процесса разложения подстановки в произведение транспозиций из данного базисного множества транспозиций.

Биективное отображение конечного множества $\{1;2;\ldots;n\}$ на себя называется подстановкой; тождественная подстановка обозначается id, множество подстановок — S_n. Композиция подстановок $\varphi, \psi \in S_n$ определяется равенством $(\varphi\psi)(i) = \psi(\varphi(i))$ для всех $i \in \{1;2;\ldots;n\}$. Относительно композиции подстановок множество S_n является группой с нейтральным элементом id и подстановкой φ^{-1}, обратной для φ.

Подстановку $\varphi \in S_n$ записывают в матричном виде

$$\varphi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ \varphi(i_1) & \varphi(i_2) & \ldots & \varphi(i_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix},$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — попарно различные числа из множества $\{1;2;\ldots;n\}$. Если первая строка в матричной записи подстановки φ упорядочена по возрастанию, то будем использовать обозначение $\varphi = [\varphi(1);\varphi(2);\ldots;\varphi(n)]$. Циклом ψ длины ℓ, где $1 \le \ell \le n$, называется подстановка вида

$$\psi = (i_1;i_2;\ldots;i_{\ell-1};i_\ell) = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_{\ell-1} & i_\ell & i_{\ell+1} & \ldots & i_n \\ i_2 & i_3 & \ldots & i_\ell & i_1 & i_{\ell+1} & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Элементы $i_1, i_2, \ldots, i_{\ell-1}, i_\ell$ для случая $\ell \ge 2$ называют подвижными элементами цикла, их число обозначается $|\psi|$. Циклы, не имеющие общих подвижных элементов, называются независимыми. Цикл (i) для любого $i \in \{1;2;\ldots;n\}$ имеет длину 1 и называется тривиальным, который, очевидно, совпадает с подстановкой id. Тогда $\psi = (i_1;i_2;\ldots;i_{\ell-1};i_\ell)(i_{\ell+1})\ldots(i_n)$ и $\mathrm{id} = (1)(2)\ldots(n)$. Справедливо: любую подстановку можно разложить в произведение независимых и/или тривиальных циклов [2, с. 42-43].

Для подстановки $\varphi = \psi_1\psi_2\ldots\psi_k \in S_n$, записанной в произведение независимых и/или тривиальных циклов, определяется одночлен от n переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$: $P_\varphi = P_\varphi(t_1;t_2;\ldots;t_n) = t_{|\psi_1|}t_{|\psi_2|}\ldots t_{|\psi_k|}$. В частности, $P_{\mathrm{id}}(t_1;t_2;\ldots;t_n) = t_1^n$. Для группы подстановок $G = \{\varphi_1;\varphi_2;\ldots;\varphi_k\} \subseteq S_n$ определяется многочлен $P_G(t_1;t_2;\ldots;t_n) = \frac{1}{k}(P_{\varphi_1} + P_{\varphi_2} + \ldots + P_{\varphi_k})$. Отметим, что многочлен P_G содержит слагаемое t_1^n для любой группы подстановок G, так как в любом случае $\mathrm{id} \in G$. Многочлен P_G называется цикловым индексом группы [1, с. 217-226], [5, с. 153–155], [6, с. 111–114].

Многочлен P_G для группы подстановок G используется в формулировке теоремы Пойа [5, с. 155–156], [6, с. 114]. Пусть в графе (рассматривая его как жесткую структуру) содержится n вершин, занумерованные числами от 1 до n. Вершины графа раскрашиваются в m цветов, и говорят о раскраске графа. Разрешается раскрашивать все вершины в один цвет из предложенных, в два любых цвета и так далее. Под действием подстановок из группы G на граф понимается то, что происходит самосовмещение графа, но вершины с одними номерами, возможно, занимают места вершин с другими номерами. Под действием подстановок из группы G раскраски графа считаются эквивалентными (одинаковыми,

равными). Тогда число неэквивалентных (различных, разных) раскрасок графа равно $P_G(t_1 = m; t_2 = m; \ldots; t_n = m)$.

Если вершины раскрашиваются в цвета $s_1, s_2, \ldots, s_m$ и ставится вопрос, сколькими неэквивалентными способами можно это сделать, используя k_1 раз цвет s_1, k_2 раз цвет s_2 и так далее, k_m раз цвет s_m, то следует определить коэффициент при слагаемом $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$ в многочлене $P_G(t_1; t_2; \ldots; t_n)$, сделав замену $t_i = a_1^i + a_2^i + \ldots + a_m^i$ для всех $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$ (многочлен P_G рассматривается от переменных $a_1, a_2, \ldots, a_m$) [4, с. 156–157]. При этом должно выполняться: $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ и $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — неотрицательные целые числа (если $k_i = 0$, то цвет s_i не используется в раскрашивании вершин). Требованию удовлетворяют числа в количестве $\bar{C}_m^n = \frac{(n+m-1)!}{n! \cdot (m-1)!}$ [1, с. 13]. Поэтому многочлен $P_G(a_1; a_2; \ldots; a_m)$ содержит $\bar{C}_m^n$ слагаемых.

Рассмотрим пример. Пусть вершины графа-квадрата (рисунок 1) раскрашиваются в два цвета (черный и белый). Группу G определим как группу самосовмещений квадрата относительно поворотов вокруг его центра на углы $0°$, $90°$, $180°$ и $270°$, а также четырех симметрий (двух относительно диагоналей и двух относительно прямых, проходящих через середины противоположных сторон). Количество различных способов раскраски равно 6. В данном случае $P_G = \frac{1}{8}t_1^4 + \frac{1}{4}t_1^2 t_2 + \frac{3}{8}t_2^2 + \frac{1}{4}t_4 = a_1^4 + a_1^3 a_2 + 2a_1^2 a_2^2 + a_1 a_2^3 + a_2^4$. При раскрашивании квадрата только в один цвет (либо ○, либо ●) получаем один способ раскраски. Если же две вершины раскрашиваются в цвет ○ и две — в цвет ●, то решением задачи является число 2.

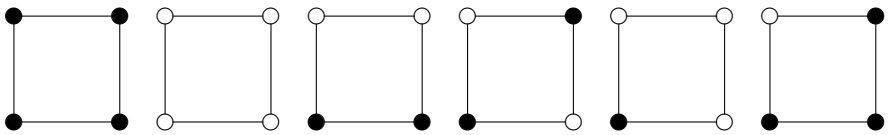


Рисунок 1 – Раскраска графа–квадрата в 2 цвета

Понятно, что если увеличивать количество вершин в графе и/или цветов, то использовать метод перебора становится затруднительно. Для компьютерной реализации решений задачи об общем числе неэквивалетных способов раскраски графа и задачи об определении коэффициентов в многочлене $P_G(a_1; a_2; \ldots; a_m)$ следовало решить вопрос о представлении многочленов в программе Python. Использовано следующее: многочлен от нескольких переменных $f = \alpha x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k} + \ldots$ вполне определяется наборами степеней переменных однолчленов и коэффициентами при них, поэтому многочлен в вычислениях в программе Python определяется как список списков (тип list): $[[n_1, n_2, \ldots, n_k, \alpha], \ldots]$. Так как сложение и умножение многочленов сводятся к действиям над степенями и коэффициентами его одночленов, то действия в программе сводятся к вычислениям над элементами списков. Исходя из смысла коэффициенты в многочлене $P_G(a_1; a_2; \ldots; a_m)$ являются неотрицательными це-

лыми числами, таковыми же являются и показатели степеней при переменных, что упрощает программный код (скажем, для рациональных коэффициентов следовало бы добавлять в программу строки для точных работ с дробями).

Следующая программа, написанная на языке Python, позволяет определять требуемые количества способов раскраски графа.

```
# Разложение подстановки в произведение независимых циклов
def DPIC(Q):
    M=set(Q); c=[]
    while M != set():
        cv=[]; x0=M.pop(); cv.append(x0); x=x0
        while Q[x-1] != x0:
            x=Q[x-1]; cv.append(x); M.discard(x)
        c.append(cv)
    return c
# Нахождение характеристического вектора подстановки
def vL(Q):
    oL=[]; c=DPIC(Q)
    for i in range(len(c)): oL.append(len(c[i]))
    return sorted(oL)
# Количество способов раскраски графа G в m цветов
def NDC(G,m): # Number of different colorings
    PG=0
    for i in range(len(Group)):
        p=1; L=Group[i]; degL=[]; Q=vL(L)
        for k in range(len(L)): degL.append(Q.count(k+1))
        for j in range(len(degL)): p=p*(m**degL[j])
        PG=PG+p
    return(int(PG/len(Group)))
# Нахождение многочленов ti(a1, a2, ...)
def ti(m,n):
    t=[]; xt=[]
    for i in range(n):
        for k in range(m):
            vt=[]
            for j in range(m):
                if j==k:
                    vt.append(i+1)
                else:
                    vt.append(0)
            vt.append(1)
```

```
            xt.append(vt)
    for i in range(int(len(xt)/m)):
        vt=[]
        for j in range(m):
            vt.append(xt[j+m*i])
        t.append(vt)
    return(t)
# Нахождение суммы многочленов
def summ(P,Q):
    if P==Q:
        Q=[]
        for i in range(len(P)): Q.append(1); Q[i]=P[i].copy()
    PQ=[]; vPQ=[]; m=len(P[0])-1;
    vPQ.extend(P); vPQ.extend(Q); s=[]
    for i in range(len(vPQ)):
        x=[]; tm=vPQ[i][m]
        for k in range(m): x.append(vPQ[i][k])
        for j in range (i+1,len(vPQ)):
           y=[];
           for k in range(m): y.append(vPQ[j][k])
           if x==y:
               s.append(j); tm=tm+vPQ[j][m]; vPQ[j][m]=0
        if tm !=0: vPQ[i][m]=tm
    for i in range(len(vPQ)):
        if i not in set(s): PQ.append(vPQ[i])
    return(PQ)
# Нахождение произведения многочленов
def prod(P,Q):
    P=summ(P,[]); Q=summ(Q,[])
    vPQ=[]; m=len(P[0])-1
    for i in range(len(P)):
        for j in range(len(Q)):
            term=[]
            for k in range(m): term.append(P[i][k]+Q[j][k])
            term.append(P[i][m]*Q[j][m])
            vPQ.append(term)
    return(summ(vPQ,[]))
# Многочлен Pa(a1;a2;...)
def polynomPa(m,Group):
    DC=[]
    for i in range(len(Group)):
```

```
        DC.append(vL(Group[i]))
    n=len(Group[1]); ordGroup=len(DC)
    P=ti(m,n)
    SA=[]; A=P[DC[1][0]-1]; SA=[]; lenSA=0
    for k in range(len(DC)):
        A=P[DC[k][0]-1]
        for i in range(1,len(DC[k])):
            A=prod(A,P[DC[k][i]-1])
        for j in range(len(A)):
            SA.append(1); SA[j+lenSA]=A[j].copy()
        lenSA=lenSA+len(A)
    Pa=summ(SA,[])
    for i in range(len(SA)):
        SA[i][m]=int(SA[i][m]/ordGroup)
    return(Pa)
# Количество способов раскрашивания графа в цвета s1, s2, ...
def NCM(m,Group,SP): # number of coloring methods
    if m==1: return(1)
    Pa=polynomPa(m,Group)
    coeff=0; i=0
    bool=0
    while bool==0 and i<=len(Pa)-1:
        x=[]
        for k in range(m): x.append(Pa[i][k]);
        if x==SP: coeff=Pa[i][m]; bool=1
        i=i+1
    return(coeff)
```

Рассмотрим следующий пример. Для графа-квадрата с выделенными 12 точками, представленного на рисунке 2, определим количество различных способов раскрашивания квадрата в два цвета, считая, что раскраски совпадают относительно его самосовмещений.

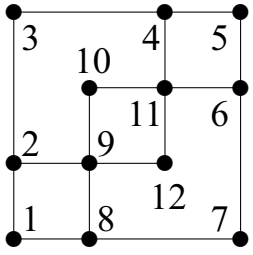


Рисунок 2 – Граф-квадрат с выделенными 12 точками

Заметим, что повороты квадрата, при которых множество выделенных то-

чек переходит в само себя, следует осуществлять только на углы 0° и 180°. Самосовмещение квадрата также происходит при диагональных симметриях.

Каждому преобразованию квадрата соответствует подстановка из группы S_{12}. Среди всех преобразований, естественно, выделяется тождественное преобразование id, соответствующее повороту квадрата на угол 0°.

Поворот квадрата на 180° задается подстановкой

$$\varphi = [5; 6; 7; 8; 1; 2; 3; 4; 11; 12; 9; 10].$$

Подстановки

$$\alpha = [1; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 9; 12; 11; 10], \quad \beta = [5; 4; 3; 2; 1; 8; 7; 6; 11; 10; 9; 12]$$

задают симметрии квадрата относительно диагоналей 1, 5 и 3, 7 соответственно. Тогда $G = \{\mathrm{id}; \varphi; \alpha; \beta\}$ — группа самосовмещений графа.

Если раскрашивать квадрат только в цвет $\circ$ (при этом все 12 вершин будут раскрашены в этот цвет), то для выяснения вопроса о количестве различных раскрасок относительно преобразований квадрата из группы G определяем в многочлене $P_G(a_1; a_2)$ коэффициент при слагаемом a_1^{12}. Этот коэффициент равен 1, что и следовало ожидать. Если же ставится задача об определении количества различных раскрасок квадрата таким образом, что из 12 вершин 9 вершин окрашиваются в цвет $\circ$ и 3 — в цвет $\bullet$, то следует определить коэффициент при одночлене $a_1^9 a_2^3$.

Для определения требуемых количественных параметров графа в программе Python добавляем строки:

```
Group=[[5,6,7,8,1,2,3,4,11,12,9,10],[1,8,7,6,5,4,3,2,9,12,11,10],
[5,4,3,2,1,8,7,6,11,10,9,12],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]]
m=2
SP=[9,3] # a set of paints
# Сумма чисел в SP равна длине подстановок из группы Group
print(NCM(m,Group,SP)) # Число способов раскраски графа
print(NDC(Group,m)) # Число различных способов раскраски графа
```

В результате: коэффициент при одночлене $a_1^9 a_2^3$ равен 65; общее число способов раскраски равно 1168.

В данном случае $P_G = \frac{1}{4}t_1^{12} + \frac{1}{4}t_2^6 + \frac{1}{2}t_1^4 t_2^4$ и

$$P_G = a_1^{12} + 5a_1^{11}a_2 + 23a_1^{10}a_2^2 + 65a_1^9 a_2^3 + 143a_1^8 a_2^4 + 218a_1^7 a_2^5 + 258a_1^6 a_2^6 +$$

$$+218a_1^5 a_2^7 + 143a_1^4 a_2^8 + 65a_1^3 a_2^9 + 23a_1^2 a_2^{10} + 5a_1 a_2^{11} + a_2^{12}.$$

При увеличении числа m (количества цветов) многочлен P_G, зависящий от переменных $a_1, a_2, \ldots, a_m$, может быть большим в своей записи. Например, если $m = 3$, то многочлен $P_G(a_1; a_2; a_3)$ содержит $\bar{C}_3^{12} = 91$ слагаемое. Если же ставится вопрос об определении числа неэквивалентных раскрасок квадрата в 3 цвета, требуя, чтобы при этом цвет s_1 использовался ровно 2 раза, цвет s_2 — 7

раз и цвет $s_3 - 3$ раза ($2 + 7 + 3 = 12$), то следует определить в многочлене P_G коэффициент при слагаемом $a_1^2 a_2^7 a_3^3$.

Программа для расчетов выглядит следующим образом:

```
Group=[[5,6,7,8,1,2,3,4,11,12,9,10],[1,8,7,6,5,4,3,2,9,12,11,10],
[5,4,3,2,1,8,7,6,11,10,9,12],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]]
m=3
SP=[2,7,3] # a set of paints
# Сумма чисел в SP равна длине подстановок из группы Group
print(NCM(m,Group,SP))
print(NDC(Group,m)) # Число различных способов раскраски графа
```

В результате: 2036 и 136323.

Отметим, что общее количество всех различных раскрасок квадрата равно сумме всех коэффициентов многочлена $P_G(a_1; a_2; a_3)$, которое равно $P_G(a_1 = 1; a_2 = 1; a_3 = 1) = 136323$ (это же количество можно вычислить по формуле $P_G(t_1 = 3; t_2 = 3; \ldots; t_{12} = 3) = \frac{1}{4} \cdot 3^{12} + \frac{1}{4} \cdot 3^6 + \frac{1}{2} \cdot 3^4 \cdot 3^4 = 136323$).

В заключение заметим, что предложенная программа с привлечением дополнительных знаний по различным разделам дискретной математики (комбинаторики, теории конечных групп и так далее) может быть основой для компьютерного решения вариаций задачи «об ожерельях». Части программы (функции `summ` и `prod`) могут быть использованы самостоятельно для проведения действий с многочленами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний. — 2001. — 240 с.
2. Калужнин Л. А., Сущанский В. И. Преобразования и перестановки . М.: Наука. — 1985. — 160 с.
3. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.. Основы теории групп. М.: Наука. — 1972. — 240 с.
4. Лутц М. Изучаем Python. СПб.: Символ-Плюс. — 2011. — 1280 с.
5. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. М.: Изд-во МАИ. — 1992. — 240 с.
6. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю, Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир. — 1980. — 476 с.

ВОЗМОЖНОСТИ ВНЕДРЕНИЯ СОВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Е.А. Рогозянская
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *e_a_roggy@mail.ru*
Е.В. Закалкина
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *zakalkin@mail.ru*
Н.П. Еремеева
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *1sent@mail.ru*

Одной из характеристик современного общества является глобальная тенденция информатизации, оказывающая колоссальное влияние на все сферы общественной деятельности, в том числе и на образование. Применительно к образованию информатизация - это внедрение в обучение и воспитание информационных продуктов, средств и технологий, преобразующих педагогические процессы. Посредством информатизации возникают и развиваются новые формы и виды обучения, а, следовательно, и новые формы взаимодействия участников образовательного процесса.

Данная тенденция ориентирует современные учебные заведения к применению все более актуальных средств, повышающих качество обучения.

Кроме того, использование информационных технологий в образовательном процессе обусловлено и ориентацией обучающихся на модернизацию технологий передачи знаний.

Решением данного вопроса может стать внедрение современных систем электронного обучения.

Система управления обучением (LMS) – это широкий термин, используемый для приложений, которые позволяют управлять онлайн-курсами для обучения или ориентации группы учащихся. Технически LMS не предполагает создание контента. Программное обеспечение фокусируется только на предоставлении учебных материалов, позволяя контролировать успеваемость студентов и следить за их успеваемостью. Тем не менее, многие поставщики включают совместные функциональные возможности в свои услуги LMS, что позволяет преподавателям в различных местах сотрудничать в расширении самого курса. Это одно из важных отличий, на которое нужно обратить внимание при подписке на планы, предлагаемые многими инструментами управления обучением. Перечислим еще несколько аспектов, которые помогут сделать обоснованные сравнения, чтобы выбрать лучшее программное решение для управления обучением.

В зависимости от развертывания существует три различных типа систем управления обучением:

- Локальные системы управления обучением. Это означает, что они представляют собой корпоративные продукты, размещенные на собственном сервере компании. Они предлагают больше настроек и индивидуализации, чем лю-

бой другой тип, и они решают проблемы масштабируемости. Большинство из них могут быть интегрированы с другими локальными продуктами.

- Системы управления обучением SaaS. Системы SaaS или Software-as-a-Service - это системы, размещенные на сервере поставщика, к которым можно получить доступ из любого места. Они известны своей гибкостью, и это потому, что поставщик отвечает за их обновление и предоставление ИТ-поддержки, в то время как их пользователям не нужно заботиться о масштабируемости.

- Облачные системы управления обучением. Облачные LMS являются, пожалуй, самым популярным вариантом среди организаций образования, которые ищут оптимизированное и экономически эффективное обучение. Они размещены в Интернете и доступны путем входа на сайт вендора, где и проходят все коммуникации и обучение. Из-за отсутствия затрат на внедрениеи обслуживание они считаются наименее дорогими решениями для онлайн-обучения.

Решения LMS варьируются, но все они принадлежат к одной семье и имеют общие черты и цели. Хорошее решение LMS должно предоставлять возможность преподавателям выполнить следующие основные процессы.

Создать обязательную функцию автоматической саморегистрации, при ориентации на большой круг учащихся.

Создать раздел для материалов курса. При долговременной работе в LMS, благодаря единому расположению прошлых и текущих материалов курса будет проще получать данные, повторно использовать материалы или организовывать курсы.

Создать базу знаний или раздел самообслуживания – и учащиеся и преподаватели будут нуждаться в помощи для использования LMS. Раздел самообслуживания должен содержать ответы на часто задаваемые вопросы или сопоставлять лучшие практики и тематические исследования.

Сбор материалов курса по категориям – необходимо организовать курсы по темам, предметам, авторам или учебному плану, чтобы помочь учащимся и преподавателям разобраться в материалах.

Создание групп или команд – эта функция позволяет проводить групповые занятия, что полезно для групповых ориентаций или групповых семинаров.

Настройка доставки курса – возможность настроить доставку материалов на основе кривой обучения студента поможет повысить уровень прохождения и уровень компетентности.

Создать гибкий график курса, что позволит предлагать программы, в которых обучающиеся могут переходить между уровнями обучения по индивидуальным учебным планам или курсам.

Создать тесты для оценки успеваемость или компетентности студентов до, во время или после программы курса.

Экспорт / импорт – важная функциональная возможность, когда необходимо переносить материалы курса, отчеты и реестры в популярные файлы документов, такие как PDF, TXT, JPEG, CVS и DOC, если необходимо использовать другие программные системы.

Кроме того, следует обратить внимание на следующие функции, которые делают решение LMS более надежным.

Custom Branding – позволяет украсить пользовательский интерфейс своим корпоративным логотипом и цветами.

Надежный календарь – позволяет создавать события, приглашать участников, выполнять самостоятельную регистрацию и отслеживать посещаемость в одном модуле.

Надежная аналитика – позволяет в режиме реального времени просматривать результаты обучения или создавать групповые отчеты в дополнение к базовым отчетам.

Мобильная платформа – позволяет учащимся получить доступ к курсам через смартфон или планшет.

Video Library – позволяет создавать видео курсы.

API – позволяет интегрировать LMS с другими программными решениями.

Опросы – чтобы получить обратную связь и понимание от учащихся и преподавателей.

Следует также обратить внимание на функции, которые можно встретить в новых или более устоявшихся решениях LMS. Многие из этих тенденций, вероятно, станут стандартом в будущих решениях LMS.

Создание контента - современные решения LMS теперь включают в себя инструменты авторинга для создания курсов внутри системы. Кроме того, эти курсы могут быть связаны с платформой электронной коммерции LMS.

Современные платформы SCORM – сертифицированы, что означает эталонную модель объектов Sharable Content, набор стандартов, который позволяет разработчикам курсов обмениваться материалами между решениями LMS. Иными словами, создание курса в среде, сертифицированной SCORM, позволяет повторно использовать контент в другом программном обеспечении, сертифицированном SCORM.

Системы управления обучением являются незаменимыми инструментами для индивидуального и коллективного обучения, которые оптимизируют отношения между преподавателем и обучающимся и хранят всю полезную информацию в централизованных базах данных, откуда ее можно легко получить. Это означает, что они превращают обучение в централизованный процесс, потому что все обучение, производительность и развитие происходят в одном и том же месте. Доставка материалов проста благодаря свойствам социальных сетей, а модули достаточно гибкие, чтобы их можно было персонализировать для удовлетворения любых потребностей и стилей.

Что действительно важно в LMS, так это то, что они предлагают точные и простые механизмы оценки и ведут записи отчетности, которые могут определить общий успех обучающихся, привести к принятию оптимальных и системных педагогических решений. Затраты и потери времени на традиционное обучение устраняются, поскольку посещаемость перестает быть проблемой, так как материалы доступны в любом месте и в любое время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паспорт приоритетного проекта «Современная цифровая образовательная среда»: [Электронный ресурс]. Режим доступа URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_216432/
2. ЗакалкинаЕ.В., ЕремееваН.П., РогозянскаяЕ.А. Онлайн-курсы как тенденция развития образования// Избранные труды физико-математического факультета Орловского государственного университета / под общ.ред. Т. Н. Можаровой. – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2018. – с.45-49
3. Семенова Г. В., Вилкова К. А., Щеглова И. А. Рынок массовых открытых онлайн-курсов: перспективы для России // Вопросы образования – Москва: НИУВШЭ, 2018. № 2. С. 173–197
4. Меркель А. В., Радыгин В. Ю., Куприянов Д. Ю., Лукьянова Н. В. LMS-система как механизм повышения качества обучения студентов очного отделения: симбиоз конкурентного подхода и технологий социальных сетей на базе свободного программного обеспечения // Молодой ученый. — 2016. — №24. — С. 24-31.
5. Образовательная платформа Открытый Canvas [Электронный ресурс]: https://remote.misis.ru/login/canvas.

УДК 519.65

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

В.И. Сажин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *vitalik-sazhin@mail.ru*

В статье рассматриваются вопросы численного приближения функций. На различных примерах демонстрируется применение разработанного программного обеспечения для приближения функций разной степени точности.

Ключевые слова: приближение функции, алгебраический многочлен, программное обеспечение.

В окружающем нас мире все взаимосвязано, поэтому одной из наиболее часто встречающихся задач является поиск зависимости между различными величинами, что позволяет по значению одной величины определить значение другой. Математической моделью такой зависимости является понятие функции y = f (x).

При расчетах, связанных с обработкой полученных экспериментальных данных, вычислением f(x), разработкой вычислительных методов, встречаются следующие две ситуации: 1. Как установить вид функции y=f(x), если она неизвестна, а известны только некоторые ее значения; 2.Как упростить вычисление известной функции f(x) или ее характеристик, если f(x) имеет слишком сложный вид? [1].

Теория приближений — раздел математики, изучающий вопрос о возможности приближенного представления одних математических объектов другими, а также вопросы об оценках вносимой при этом погрешности [2].

Под приближением функции понимают замену по определенному правилу одной функции другой, близкой к исходной в том или ином смысле. Практическая необходимость в такой замене возникает в самых различных ситуациях, когда данную функцию необходимо заменить более простой и удобной для вычислений, восстановить функциональную зависимость по экспериментальным данным, и т.п.

Теорема 1 (об интегральном среднеквадратичном приближении функции ортогональными многочленами). Для любой функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом на отрезке $[a,b]$, обобщенный многочлен порядка $Q_n(x)$ с коэффициентами Фурье функции $f(x)$ относительно ортогональной на отрезке $[a,b]$. Системы функции $\{g_k(x)\}$ является многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения этой функции, причем квадрат наименьшего среднеквадратичного отклонения определяется соотношением

$d^2(f,Q_n) = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} C_k^2\|g_k\|^2$, где c_k - коэффициенты Фурье [3].

Необходимо решить задачу численного приближения функций и разработать программное обеспечение для решения задачи приближения функции тригонометрическими многочленами.

Для решения поставленной задачи разработаем программное обеспечение на языке программирования Maple.

```
fourierseries := proc (f, x1, x2, sp)
 local k, l, a, b, s, i;
 l := (1/2)*x2-(1/2)*x1;
 a[0] := (int(f, x = x1 .. x2))/l;
 a[k] := (int(f*cos(k*Pi*x/l), x = x1 .. x2))/l;
 b[k] := (int(f*sin(k*Pi*x/l), x = x1 .. x2))/l;
 s := seq((1/2)*a[0]+sum(a[k]*cos(k*Pi*x/l)+b[k]*sin(k*Pi*x/l), k = 1 .. i), i = sp);
 plot([f, s], x = x1 .. x2, legend = ["f", op(sp)])
end proc
f := piecewise(x1 <= x and x <= c, f1, c <= x and x <= x2, f2);
 fourierseries(f, x1, x2, {n1, n2, n3})
```

Листинг 1 – Реализация алгоритма тригонометрического приближения функции

Применим разработанное программное обеспечение для решения задач и рассмотрим результаты решения нескольких различных примеров.

Пример 1. Задана функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \pi \le x \le 0 \\ 3x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Построим приближение тригонометрическими многочленами степени n=1, 3 и 5. На рисунке 1 представлен результат решения задачи с помощью разработанного программного обеспечения.

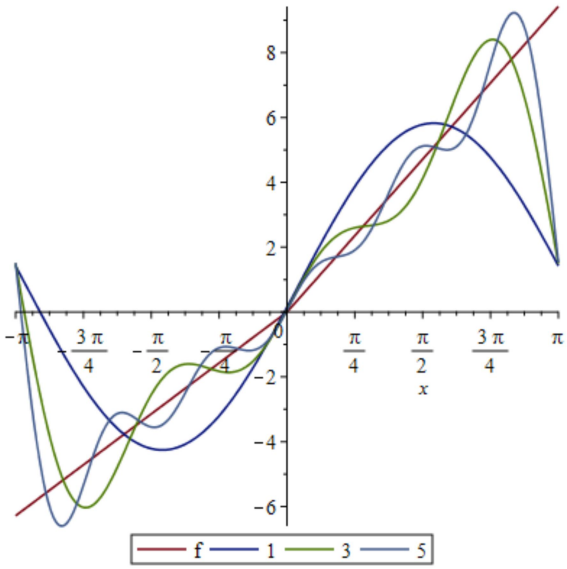


Рисунок 1 – Решение примера 1

Пример 2. Задана функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & -4 < x < -1 \\ x + 2, & -1 < x < 2 \end{cases}$$

Построим приближение тригонометрическими многочленами степени n=1, 2, 3, 5, 10, 50, 100, 200. На рисунке 2 представлен результат решения задачи с помощью разработанного программного обеспечения.

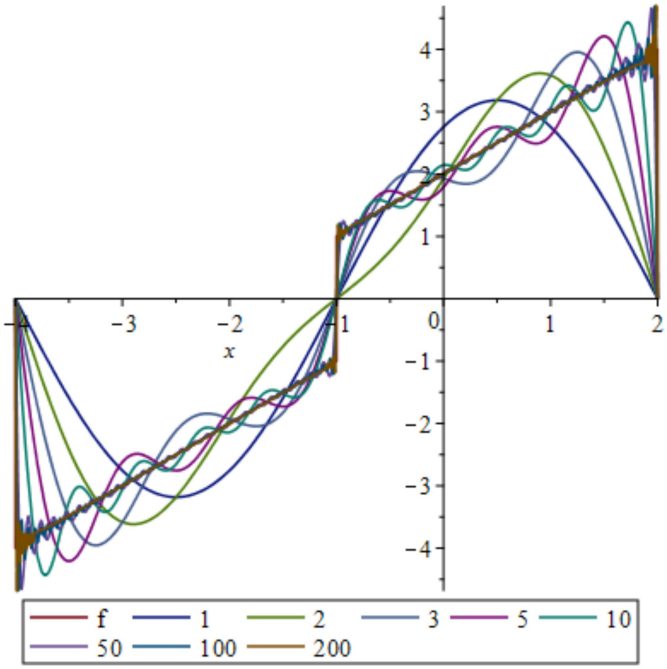


Рисунок 2 – Решение примера 2

Таким образом, с помощью разработанного программного обеспечения решены примеры различной сложности и различной степени приближения. Программа может быть использована для решения прикладных задач приближения функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аппроксимация функций [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://present5.com/approksimaciya-funkcij-zachem-nuzhna-approksimaciya-funkcij-v/ - Дата доступа 15.06.2019
2. Теория приближений [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теория_приближений - Дата доступа 15.06.2019
3. Ракитин, В.И. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров / В.И.Ракитин, В.Е.Первушин: Учеб. пособие. - М.: Высш. шк., 1998. – 383 с.

ТИПОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ

В.К. Сарьян, А.А. Русаков, Д.В. Дубнов

В 1932 году Уолтер Кеннон ввёл понятие гомеостаза как системы координированных физиологических процессов, которые поддерживают большинство устойчивых состояний организма. Существенным шагом к раскрытию и математической формализации механизмов гомеостаза стала схема гомеостатического плато Юджина Одума. Гомеостатическое плато – это область, в пределах которой механизмы обратной связи способны, несмотря на стрессовые воздействия, сохранить устойчивость системы, хотя и в измененном виде. В настоящее время гомеостаз понимается как способность открытой системы сохранять постоянство своего внутреннего состояния посредством скоординированных реакций, направленных на поддержание динамического равновесия, стремление системы воспроизводить себя, восстанавливать утраченное равновесие, преодолевать сопротивление внешней среды. Лучше всего понятие гомеостаза разработано в экологии – для экологического сообщества и в биологии – для человеческого или животного организма. В поддержании гомеостаза задействована как отрицательная, так и положительная обратная связь.

С точки зрения авторов доклада, гомеостаз служат так называемые типовые процессы поддерживается путём регулярного воспроизведения набора взаимосвязанных типовых процессов, так что типовые процессы являются фундаментальным инвариантом многих естественных и искусственных сложных систем. Практика показала эффективность так называемых информационно-управленческих сетей (ИУС) и массовых информационно-управленческих сетей (МИУС), основанных на воспроизведении типовых информационных процессов. Типовой процесс в понимании авторов – это регулярно воспроизводимый процесс, имеющий определённый смысл и целью которого является гомеостаза системы.

Опишем общую схему воспроизведения типового процесса. Будем считать, что система состоит из взаимодействующих человеко-машинных объектов: одного или нескольких центральных объектов и рядовых объектов трех поколений. В простейшем случае можно говорить об древовидной иерархической структуре, каждый этаж которой состоит из локальных информационно-управленческих сетей (ИУС), состоящих из одного центрального и рядовых

объектов (которые могут быть в свою очередь центрами сетей низшего уровня), воспроизводящих определённый набор типовых процессов с заданными частотами воспроизведения.

Объекты первого поколения – это обучающиеся объекты. Их связь с центральными элементами односторонняя: их поведение не оказывает влияния на поведение центральные элементы. В случае возникновения синхронизации объекта первого поколения с центральным элементом он может быть переведен во второе поколение. Связь объектов второго поколения с центральными элементами двухсторонняя. Их обучение продолжается, но они, в свою очередь, влияют на характеристики центральных элементов. К третьему поколению относятся те объекты, которые прежде принадлежали ко второму поколению, но не смогли в достаточной степени синхронизироваться с центральными элементами. Поведение центрального объекта не зависит от их поведения, но при этом центральный объект (в зависимости от того, как они воспроизводят типовые процессы) может принять решение либо об их исключении из сети, либо о возвращении в первое или второе поколение.

По результатам воспроизведения типовых процессов центры сетей принимают решение об изменении предписанных частот типовых процессов или же об изменении самих типовых процессов. При необходимости структура локальных сетей перестраивается (то есть можно говорить о цепочке эволюций и перестроек). Типовые процессы, воспроизводящиеся в ИУС, как правило, агрегированы. Агрегированный типовой процесс представляет собой иерархию взаимосвязанных типовых процессов, воспроизводящихся на частотах, находящихся примерно в рациональном отношении друг к другу.

Для описания эволюции каждой локальной ИУС можно использовать, например, осцилляторные модели сетей с центральным элементом, в которых осцилляторы дробно-кратно синхронизированы.

Разработка систем индивидуализированного спасения людей в чрезвычайных ситуациях дало новый импульс концепции типового процесса. Важным случаем чрезвычайной ситуации является землетрясение. Возникает вопрос: нельзя ли выявить в движениях земной коры типовые процессы, внедриться в них и частично управлять ими с целью мониторинга и в перспективе предотвращения крупномагнитудных землетрясений (то есть преобразования в серию маломагнитудных землетрясений). Теоретически это возможно – достаточно хорошо изучены циклические движения блоков земной коры и в том числе сейсмогенные циклы. Были успешные опыты воздействия на очаги готовящихся землетрясений – например микроволновое стимулирование очагов. Но в целом это очень сложная нелокальная (в силу явления миграции очагов) задача для искусственного интеллекта, требующая скоординированных усилий всего мирового сообщества.

Очевидны перспективы применения понятия типового процесса в медицине. Например, кровообращение и микроциркуляции в организме представляют собой типовые процессы, параметры которых меняются при воспалениях и других реакциях организма на внешние воздействия.

Рассмотрим пример из области высшего технического образования. Студенты ВУЗа должны освоить определённый раздел программы. В случае если обучение стандартизировано, обычно требуется выполнение и сдача типового задания. Уровень его сложности и сроки сдачи определяются преподавателем или на уровне кафедры. В данном случае с отдельным студентом нельзя связать объект системы, воспроизводящий типовой процесс, но кафедру с работающими на ней преподавателями данного предмета уже можно рассматривать как аналог ИУС. Уровень сложности и сроки сдачи являются управляющими параметрами. Например, при слишком сжатых сроках студенты списывают, скачивают из интернета заказывают или покупают сделанные типовые задания, а при чрезмерном увеличении срока не уделяют достаточного внимания данному предмету, ориентируясь больше на предметы с более жёсткими требованиями (наличие других предметов можно воспринимать как часть внешнего воздействия на систему). При качественном изменении состава студентов, федеральных требований и т.д. изменяются или параметры типового процесса, или же он структурно перестраивается.

При всей значимости типового процесса задача математического описания эволюции систем, воспроизводящих типовые процессы, представляется очень сложной. В.К. Сарьяном было предложено понятие семантической аномалии – структуру, определяющую параметры воспроизводимых типовых процессов. Математической моделью семантической аномалии может быть семантическое пространство с взвешенной евклидовой метрикой, и динамической (то есть зависящей от времени) мерой, определённые области которого соответствуют типовым процессам. Агрегирование типовых процессов может быть задано алгебраически, например, групповой операцией.

В настоящее время стандартным математическим аппаратом для описания явлений, в которых постепенное эволюционное накопление малых изменений со временем приводит к скачкообразному переходу системы на новый динамический режим, используются быстро-медленные динамические системы. Скачкообразные переходы или «срывы» означают структурные перестройки типовых процессов (например, землетрясения для типовых процессов в земной коре). Если данный математический аппарат применим к описанию систем с типовыми процессами, то «медленные» фазовые переменные описывают эволюцию семантической аномалией, служащей памятью для «быстрой» системы. В случае правомерности использования данного математического аппарата период «затишья» при подготовке землетрясений гипотетически может соответствовать явлению затягивания потери устойчивости в быстро-медленных системах.

Авторы предполагают, что создание математического аппарата для подтверждённой практикой теории типовых процессов (и математической модели гомеостаза) является одной из важных задач современного математического моделирования.

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ

В.В. Сизова, магистрант
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»
e-mail: *valentina_sizova_97@mail.ru*
И.В. Сухан, ст. преп.
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»
e-mail: *irina-sukhan@yandex.ru*

Ключевые слова: теория графов, задача нахождения максимального потока, задача нахождения кратчайшего пути

1. Введение

На основе теории графов могут решаться различные задачи поиска наилучшего распределения узлов и дуг для получения максимального «выигрыша» или минимального «проигрыша», с какой-либо точки зрения. Это очень часто является целью системного анализа, поэтому алгоритмы экстремальных задач на графах фактически являются одним из инструментов системного анализа.

В процессе изучения теории графов была замечена такая закономерность: теория графов работает с довольно большим объемом данных, это может быть как множество вершин, так и множество ребер, их веса. Алгоритмы, непосредственно обрабатывающие эти данные, также являются довольно громоздкими, так как представляют из себя последовательность действий, где текущий шаг необязательно зависит от предыдущего. Следствием этого является невозможность быстро определить, привело ли решение к верному ответу или нет, на какой итерации была совершена ошибка, и в целом верно ли был выполнен алгоритм.

Исходя из этих предпосылок была сформулирована цель: разработать программный продукт, который будет решать задачу о нахождении максимального потока и задачу о нахождении кратчайшего пути. При этом полезно предусмотреть возможность вывода промежуточного решения, полученного на *i*-той итерации алгоритма. Программа должна работать с достаточно большим объемом информации, обрабатывать его за минимальный промежуток времени, иметь интерфейс, который был бы интуитивно понятен пользователю и прост в использовании, иметь справочный материал, соответствующий темедля помощи и консультации пользователя, а так же содержать задачник для самостоятельного изучения данных алгоритмов с последующим решением примеров.

Прежде чем приступать к реализации программного продукта, необходимо провести исследование, исходя из которогоследует выбрать алгоритм (или алгоритмы) для реализации. Выбор алгоритма осуществляется по нескольким критериям: оценка сложности и распространенность в изучении. Предполагается выбор нескольких алгоритмовдля исключения ошибок как во время тестирования программного продукта, так и в целом, в работе алгоритмов.

2. Алгоритмы решения задачи поиска максимального потока

Задача поиска максимального потока заключается в том, что необходимо найти такой поток на транспортной сети, что сумма потоков из начальной вершины в конечную, из истока в сток, будет максимальна.

При рассмотрении задачи поискамаксимального потока были рассмотрены следующие алгоритмы:

1) Метод линейного программирования или симплекс-метод.

Оценка сложности: сложность алгоритма оценивается экспоненциально, то есть сложность будет увеличиваться пропорционально количеству переменных.

Краткое описание:рассматриваем задачу о максимальном потоке как задачу линейного программирования. Переменные – потоки по дугам и будет 2 ограничения – сохранение потока и ограничение пропускной способности.

2) Алгоритм Форда – Фалкерсона.

Оценка сложности:на каждом шаге алгоритм добавляет поток увеличивающего пути к уже существующему потоку. Следовательно, на каждом шаге алгоритм увеличивает поток по крайней мере на единицу. Из этого можно мделать вывод что поток сойдётся не более чем за $O(f)$шагов, где f — максимальный поток в графе. Каждый шаг выполняется за время $O(E)$, где E — число рёбер в графе, следовательно общее время работы алгоритма будет ограничено $O(Ef)$.

Краткое описание:необходимо найти любойувеличивающийся путь. Увеличиваем поток по всем его рёбрам на минимальную из их остаточных пропускных способностей. Повторяем пока существует увеличивающий путь.

3) Алгоритм Эдмондса – Карпа.

Оценка сложности:входе работы алгоритм Эдмондса – Карпа будет находиться каждый дополняющий путь за время (|E|).Общее число увеличений потока, выполняемое данным алгоритмом, будет оцениваться как $O(|V|\,|E|)$. Таким образом получается что оценка сложности алгоритма Эдмондса – Карпа равна $O(|V| \setminus |E|^2)$.

Краткое описание: данный алгоритм,алгоритм Эдмондса – Карпа, является частным случаем алгоритма Форда – Фалкерсона, при котором на каждом шаге выбирается кратчайший дополняющий путь из истока в стокна остаточной сети.

4) Алгоритм Диница.

Оценка сложности:на каждом шаге алгоритма число рёбер кратчайшего пути из истока в сток увеличивается на число больше или равное единице, поэтому в алгоритме не болееn –1блокирующих потоков, где n—число вершин в сети. Вспомогательная сеть, может быть построена обходом в ширину за время O(E), а блокирующий поток на каждом уровне графа может быть найден за время $O(VE)$.Исходя из этого время работы алгоритма Диницаоценивается по формуле:$O(V)$ *($O(E)$ +$O(VE)$) = $O(V^2E+VE)$.

Краткое описание:данный алгоритм является более совершенным вариантом алгоритма Эдмондса – Карпа. На каждом шаге используется поиск в ши-

рину и определяется расстояние от источника до всех вершин в остаточной сети.

5) Алгоритм проталкивания предпотока.

Оценка сложности: оценивание сложности не имеет конкретики, как зависит от нескольких переменных.

Краткое описание: вместо потока, алгоритм работает с предпотоком. Особенность состоит в том, что для любой вершины, кроме источника и стока, существует сумма входящих в неё потоков, которая для потока должна быть строго нулевой (условие сохранения потока), а для предпотока— положительной или равной нулю. Эту сумму называют избыточным потоком к вершине, а вершина, с положительным избыточным потоком будет переполненной. Кроме того, для каждой вершины сохраняется дополнительная характеристика — высота, которая является целым числом, так же положительным или равным нулю. Алгоритм использует две операции: проталкивание, выражающееся в то, что когда поток по ребру, идущему из более высокой в более низкую вершину, увеличивается на максимально возможную величину, и подъём, когда переполненная вершина, проталкивание из которой невозможно из-за недостаточной высоты, поднимается.

Для работы были выбраны алгоритм Форда–Фалкерсона и метод линейного программирования. Основанием для этого послужило повсеместное распространение первого алгоритма и экспоненциально возрастающая сложность второго.

3. Алгоритмы решения задачи о поиске кратчайшего пути

Задача поиска кратчайшего пути — это задача, при решении которой необходимо найти кратчайший путь между двумя вершинами графа, уменьшая сумму весов ребер из которых состоит этот путь.

При изучении задачи о поиске кратчайшего пути были исследованы следующие алгоритмы:

1) Алгоритм Дейкстры.

Оценка сложности:сложность алгоритма Дейкстры зависит от нескольких переменных: способа нахождения вершины v, способа хранения множества непосещённых вершин и способа обновления меток пройденных вершин.

Краткое описание:алгоритм Дейкстры находит кратчайший путь от одной из вершин графа до всех остальных. Алгоритм работает только для графов рёбрами положительного веса.

2) Алгоритм Беллмана – Форда.

Оценка сложности: $O(V^2)$[.

Краткое описание: алгоритм находит кратчайшие пути от одной вершины графа до всех остальных во взвешенном графе. Вес рёбер может быть как положительным, так и отрицательным.

3) Алгоритм поиска А.

Оценка сложности: временная сложность алгоритма А зависит от нескольких параметров. Наихудшей оценкой сложности данного алгоритма явля-

ется экспоненциальная оценка зависящая от длины пути, являющегося оптимальным.

Краткое описание: алгоритм поиска А находит маршрут с наименьшим весом от одной вершины (начальной) к другой (конечной). Используем алгоритм поиска по первому наилучшему совпадению на графе.

4) Алгоритм Флойда – Уоршелла.

Оценка сложности: алгоритм имеет кубическую сложность.

Краткое описание:Алгоритм Флойда–Уоршелла находит кратчайшие пути между всеми вершинами взвешенного ориентированного графа.

5) Алгоритм Ли.

Оценка сложности: $O(n^2)$.

Краткое описание:Алгоритм Ли или волновой алгоритм, основан на методе поиска в ширину. Он находит такой путь между вершинами *s* и *t* графа (*s* не совпадает с *t*),что содержащееся в нем число промежуточных вершин будет минимальным.

Для реализации этой задачи были выбраны алгоритм Дейкстры и алгоритм Флойда-Уоршелла, так как данные алгоритмы довольно распространены, а сложность алгоритма Дейкстры зависит сразу от нескольких параметров.

4. Итоги

Алгоритмы, выбранные для программной реализации, реализованы в виде консольных приложенийна языке C++, без пользовательского интерфейса, на платформе MicrosoftVisualStudio 2017. Они успешно справляются со своей работой при достаточно больших входных данных (матрицы данных 10*10).

Выбор нескольких алгоритмов для реализации оправдал себя с практической стороны: решение проверяется несколькими способами, что дает более веские основания считать, что решение верно, а также, в процессе тестирования было легче исправить и отладить все неточности программного кода.

В ближайшее время планируется продолжить работу в данном направлении и реализовать полноценное интерфейсное приложение с несколькими возможностями ввода информации: это непосредственно ввод данных на форме или ввод через текстовый файл/файл Excel. Так же подготовлен справочный материал, содержащий, помимо теории по описанным задачам, общую информацию по теории графом. Тестовые примеры и задачник находятся на стадии разработки.

УДК 004.9

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТАНДАРТА CERIF ДЛЯ ОПИСАНИЯ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

И.А. Тютюнов
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *igrikigrikigrik@yandex.ru*

В работе рассматривается создание базы данных для описания научных исследований на основе стандарта CERIF. Изложены основные этапы проектирования базы данных.

Ключевые слова: научные исследования, CERIF, MySQL.

Во многих странах проводятся научные исследования со сходными схемами исследований. Как правило, сначала осуществляется стратегическое планирование, потом формализуется программа исследований, проходит поиск предложений, подходящие предложения принимаются к работе, результаты исследований отслеживаются, анализируются и накапливается опыт их применения. Исследования в одной и той же области знаний могут производиться в нескольких научных организациях, в том числе и в одной стране. Кроме того, исследовательские организации одной страны могут опираться на результаты, полученные в других странах. Это делает актуальным обмен достоверной информацией между различными странами и фондами на всех этапах проведения исследований, начиная с этапа подачи заявки и заканчивая этапом публикации рецензии на инновационную разработку. Проблема стандартизации данных научных исследований возникла еще в 80-е годы прошлого века, и в качестве решения этой проблемы сначала появлялись варианты обобщения схем баз данных для хранения результатов научных исследований, на основе которых позднее возник стандарт CERIF – общий европейский формат для исследовательской информации [1-3].

Стандарт CERIF рекомендован к использованию в системах CRIS (Current Research Information Systems – информационные системы по актуальным научным исследованиям), которые собирают воедино всю информацию, лежащую в основе научных исследований. Использование подобных систем значительно облегчает взаимодействие инвесторов и исследователей. Исследовательские группы получают легкий доступ к информации, необходимой для разработки инновационных идей, руководители и управляющий персонал получают возможность проще отслеживать и оценивать текущую исследовательскую деятельность, инвесторы и исследовательские советы могут оптимизировать процесс финансирования инновационных проектов.

CERIF описывает объекты в области исследований, такие как персона (cfPerson), организация (cfOrganisationUnit), проект (cfProject), публикация (cfResultPublication), патент (cfResultPatent), данные, материальные средства (cfFacility), оборудование (cfEquipment), услуги (cfService), предоставляемые организацией или персоной, например, суперкомпьютер, исследовательская

научная информация. Финансирование (cfFunding), измерения (cfMeasurement), индикаторы (cfIndicator), идентификаторы и их взаимосвязи. На рисунке 1 представлен общий вид области исследования и связанных с ним объектов, где цвета указывают возможные контексты, такие как результаты исследования (cfResultPatent, cfResultPublication, cfResultProduct) - оранжевый, результаты измерений (cfMeasurement, cfIndicator) - красный, действующие лица (cfPerson, cfProject, cfOrganisationUnit) - зеленый, инфраструктура (cfEquipment, cfFacity, cfService) - фиолетовый и т. д.

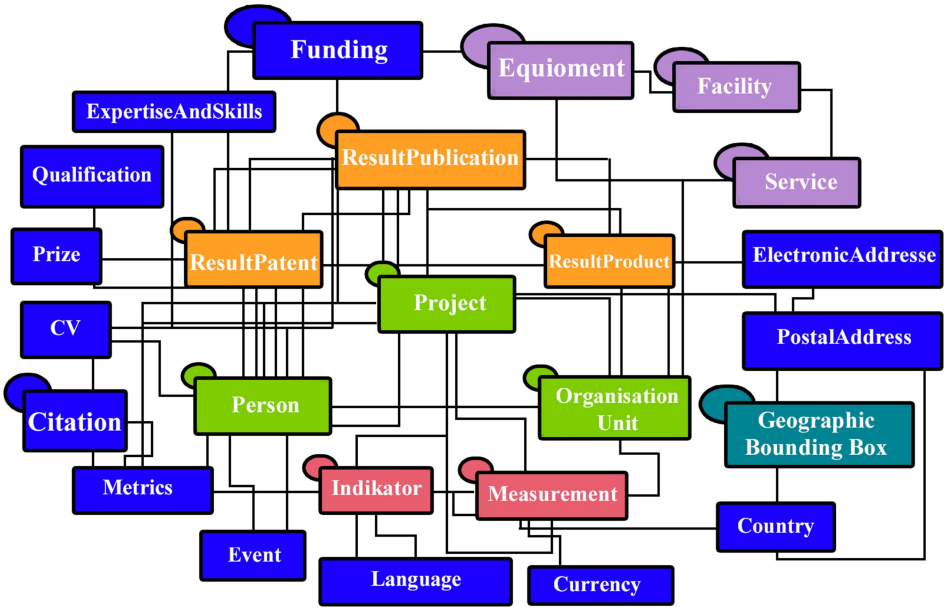


Рисунок 1 – Объекты стандарта CERIF

Основные объекты в стандарте CERIF – это Person, OrganisationUnit и Project (Человек, Организация и Проект), каждый из которых рекурсивно связан сам с собой и поддерживает отношения с другими объектами.

Стандарт описывает множество дополнительных объектов, с помощью которых полностью описываются исследовательские проекты, их участники, результаты их совместной работы и прочее [4-6].

Было принято решение, реализовать стандарт описания научных исследований CERIF в системе управления базами данных MySQL. Данный процесс был разделён на следующие этапы:

1. Создать базу данных, которая будет называться «CERIF»;
2. Создать в базе данных все таблицы (сущности), из которых состоит стандарт CERIF;
3. Задать связи между таблицами.

На первом этапе в СУБД MySQL была создана база данных «CERIF», с помощью SQL запроса CREATEDATABASECERIF. На этом этап создания базы данных был завершён.

На втором этапе были созданы таблицы в СУБД MYSQL с помощью SQL запросов вида: CREATE TABLE название_таблицы (имя_атрибутатип_данных [NOTNULL], PRIMARYKEY(названия ключевых атрибутов таблицы));. Информация о таблицах была взята с официального сайта euroCRIS.

И последний этап в проектировании базы данных CERIF в СУБД MySQL – это связывание таблиц между собой. Для их связывания были написаны SQL запросы вида: ALTER TABLE t1 ADD FOREIGN KEY (polet1) REFERENCES t2 (polet2); где:
t1 – таблица содержащая вторичный ключ;
polet1-атрибут, содержащийся в таблице t1 и являющийся вторичным ключом;
t2 – таблица, содержащая первичный ключ;
polet2 – атрибут, содержащийся в таблице t2 и являющийся первичным ключом.

Для того, чтобы сгенерировать SQL запросы для связывания таблиц, требуется следующая информация, это названия двух связываемых таблиц и названия атрибутов, через которые эти таблицы связываются. Вся это информация была взята на официальном сайте euroCRIS.

В результате проделанной работы было осуществлено ознакомление с общеевропейским форматом представления исследовательской информации CERIF. Далее, на базе формата представления исследовательской информации CERIF была разработана база данных в СУБДMySQL с помощью SQLзапросов. А именно, были созданы все таблицы и их атрибуты, с помощью которых и описывается исследовательская информация. После чего таблицы были связаны между собой в точном соответствии формату представления исследовательской информации CERIF. В результате была получена база данных, которая полностью соответствует формату описания исследовательской информации CERIF.

ЛИТЕРАТУРА

1. Получение знаний для формирования информационных образовательных ресурсов / А.Д. Иванников, В.П. Кулагин, В.А. Мордвинов, Л.В. Найханова, Б.Б. Овезов, А.Н. Тихонов В.Я. Цветков. – М.: ФГУ ГНИИ ИТТ «Информика», 2008. – 440 с.
2. Цветков В.Я. Особенности развития информационных стандартов в области новых информационных технологий / В.Я. Цветков// Информационные технологии, 2014. – №8. – С.2-7.
3. CERIF 2008 – 1.2 Full Data Model (FDM) Introduction and Specification [Электронныйресурс] Режимдоступа: http://www. eurocris.org/Uploads/Web%20pages/CERIF2008/Release_1.2/CERIF2008_1.2_FDM.pdf. - Датадоступа: 05.06.2019.
4. CERIF 1.3 Full Data Model (FDM) Introduction and Specification [Электронныйресурс] Режимдоступа: https://www.eurocris.org/Uploads/Web%20pages/CERIF1.3/Specifications/CERIF1.3_FDM.pdf. - Датадоступа: 05.06.2019.
5. CERIF 1.5 Full Data Model (FDM) Introduction and Specification [Электронныйресурс] Режимдоступа: http://www.eurocris.org/Uploads/Web%20pages/CERIF1.5/Release_1.5/CERIF1.5_FDM.pdf. - Дата доступа: 05.06.2019.
6. CERIF 1.6 Full Data Model (FDM) Introduction and Specification [Электронныйресурс] Режимдоступа:

http://www.eurocris.org/Uploads/Web%20pages/CERIF1.6/Release_1.6/CERIF1.6_1.2_FDM.pdf. - Датадоступа: 05.06.2019.

УДК 004.032.26

РАЗРАБОТКА МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА НА ОСНОВЕ СЕТЕЙ ART

К.А. Федутинов
ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет»
e-mail: *fedutinovv@gmail.com*

В статье рассмотрены особенности кластеризации мониторинговой экологической информации с помощью обобщенной модели нейронной сети семейства ART. Сформулирован подход к получению комплексной оценки экологического состояния региона (на примере Воронежской области) с использованием сети Fuzzy ART. Построенная модель анализа экологического состояния и разработанное программное обеспечение позволяют экспертам отслеживать тенденции изменения экологической ситуации в регионе для формирования управляющих решений.

Ключевые слова: нейронная сеть, машинное обучение, экологический мониторинг, теория адаптивного резонанса, кластеризация данных.

1. Введение

Традиционным методом комплексирования результатов оценки экологического состояния является усреднение значений мониторинговых показателей. Однако существующие исследования свидетельствуют о том, что такой подход не только не способствует ранжированию территорий по степени напряжённости экологических проблем, но скорее способствует нивелированию различий между отдельными зонами [1]. Наличие современной информационно - мониторинговой среды обеспечивает возможность проведения кластерной структуризации экологической информации по всей совокупности частных показателей. Кластерная структуризация данных позволяет выделить на карте региона области со схожей экологической ситуацией. Результаты анализа альтернативных подходов к кластерному разделению экологической информации позволяют на следующем этапе обработки данных экологического мониторинга перейти к разработке обоснованной модели интегрированной оценки экологического состояния региона. Такая модель должна схожим образом оценивать наборы показателей, попавшие в один кластер. Кроме того, методы кластеризации экологической информации ориентированы на следующие цели:

– «понимание» данных путём определения их кластерной структуры: разбиение региона на кластеры дает возможность усовершенствовать дальнейшее принятие решений и выработку стратегий реагирования на изменения в экологической ситуации за счет применения к каждому кластеру своего метода анализа;
– обнаружение новизны – в этом случае определяются нетипичные территории, которые не попадают ни в один из кластеров и требуют отдельного анализа.

Одним из направлений использования технологий искусственного интеллекта при разработке программных комплексов, предназначенных для экологического мониторинга, является применение нейронных сетей в задачах анализа и прогнозирования экологических ситуаций. На сегодняшний день при решении задач кластеризации наилучшим образом себя зарекомендовали нейронные сети семейства ART (Adaptive Resonance Theory) [2-3]. Поэтому для решения задачи кластерной структуризации региона на основе набора мониторинговых показателей предлагается использовать нейронную сеть Fuzzy ART [4], в соответствии с предложенной в [5] обобщенной моделью сетей семейства ART.

2. Применение сети Fuzzy ART к оценке экологического состояния региона

Архитектура и особенности обучения сети Fuzzy ART подробно рассмотрены в [4,6]. Исходные данные задачи оценки экологического состояния региона представляют собой ряд мониторинговых показателей, снятых в Воронежской области с разрешением 500x500 метров или интерполированных из карт более крупного масштаба.

Список используемых показателей включает:

- четыре экзогенных показателя: районирование территории по степени опасности развития процессов овражной эрозии, оползней, суффозионно-просадочных явлений, заболачивания;
- три показателя по гидросфере: естественная защищенность от загрязнения основных эксплуатационных горизонтов подземных вод, модуль эксплуатационных ресурсов пресных подземных вод (л/с*км2), величина местного поверхностного стока в тыс. (м3/км2);
- а также ряд других показателей: почвенно-агроландшафтная группа, ландшафтный тип местности, количество выбросов вредных веществ в атмосферу от стационарных источников (тыс. тонн), интегральный критерий климатической комфортности, интегральный показатель здоровья населения, степень изменения морфологических признаков высших растений (%), уровень техногенной нагрузки.

Набор обрабатываемых данных составил 206 тысяч 676 значений для каждого из исходных показателей. Значение каждого показателя измеряется в целочисленной шкале. Общее число показателей – 17 (включая географические координаты точки сбора значений показателя). Данные предоставлены кафедрой геологической экологии Воронежского государственного университета, где накоплен большой фактический материал для анализа природно-техногенных показателей Воронежской области.

Для решения задачи кластерной структуризации мониторинговой информации был разработан программный комплекс, реализующий сеть Fuzzy ART, а также ее модификацию Fuzzy ART C, позволяющую ограничивать максимальное число создаваемых кластеров (параметр C задает это максимальное число). Разработанный комплекс позволяет осуществлять в процессе интерактивной работы с пользователем выбор любого набора из имеющегося списка 17-ти показателей и оценку на их основе состояния окружающей природной среды.

На рис. 1 приведен пример кластеризации по 4 отдельно выбранным техногенно-климатическим факторам (уровень техногенной нагрузки, интегральный критерий биоклиматической комфортности, интегральный показатель здоровья населения, степень изменения морфологических признаков высших растений).

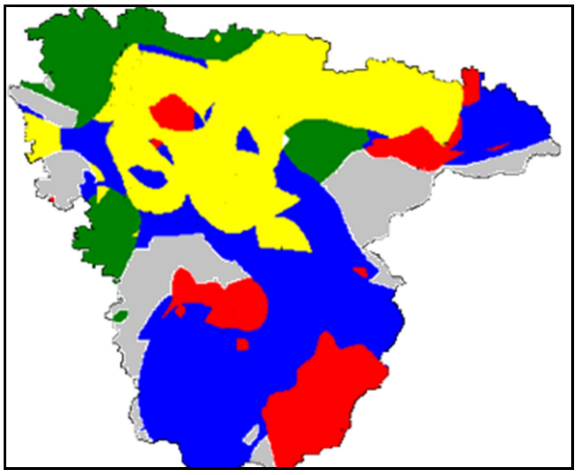


Рисунок 1 – Пример разбиения территории Воронежской области на 5 кластеров по выбранным 4 показателям

В качестве метрики качества кластеризации использовался коэффициент силуэта *s* [7], который показывает, насколько среднее расстояние между объектами внутри кластеров отличается от среднего расстояния до объектов других близкорасположенных кластеров. Чем ближе величина коэффициента к единице, тем качественнее проведена кластеризация. Значения коэффициента силуэта для результатов кластеризации, приведенных на рис. 1 равно *s=0.91*

Для сравнения на рис.2. приводятся результаты кластеризации по тем же 4 техно-генно-климатическим факторам, что и на рис.1, полученные с использованием стандартного метода k-средних. Кластеризация была реализована в среде Jupyter notebook с использованием модуля KMeans библиотеки Scikit-learn для языка Python.

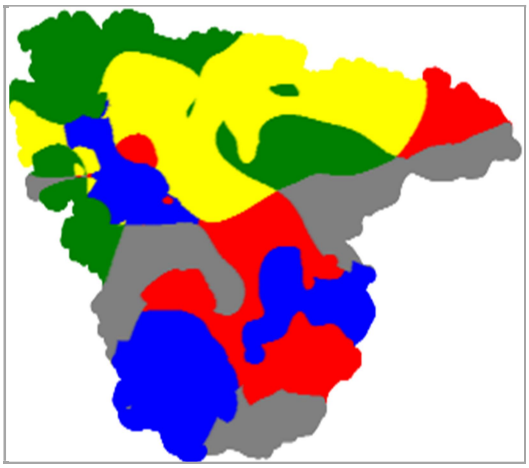


Рисунок 2 – Результаты кластеризации области на 5 кластеров с использованием метода k-средних по тем же 4 показателям

Как можно заметить, результаты кластеризации на рис.4 и рис.5 получились довольно похожими, однако некоторые отличия все же присутствуют. Значения коэффициента силуэта для метода k-средних оказалось равным *s=0.75*,

что говорит о том, что сеть Fuzzy ART смогла более точно определить границы кластеров.

Рассмотрим схему работы с предлагаемым программным комплексом.

1. Определение цели анализа экологического состояния и отбор нужных критериев.

Проведение с помощью ПО кластеризации массива данных по выбранным компонентам. Первичная визуализация результатов в проекции на модель местности.

Корректировка искомого числа кластеров и повторение п. 2.

Проведение экспертной оценки полученных прототипов кластеров и разработка стратегий действий для каждого из них.

Возможное дообучение сети при поступлении новых данных и повторение п. 4.

Возможность ограничения числа кластеров в сети Fuzzy ART C позволяет провести ещё один тип анализа – последовательное разбиение на 2..N кластеров. Анализ расщеплений соответствующих прототипов может позволить эксперту сделать более точные выводы о характере отдельных кластеров и сопутствующим им характеристикам реальной экологии окружающей среды, что приведет к более эффективным стратегиям по управлению [4].

Разработанная нейросетевая система позволяет проводить комплексную оценку экологического состояния региона по выбранному набору факторов в зависимости от типа требуемого анализа. Например, при строительстве промышленных объектов для предварительного экологического анализа мы можем использовать один набор факторов, а сельско-хозяйственных – совсем другой. Медицинские учреждения может заинтересовать анализ исключительно техногенных, социальных и климатических факторов, и так далее. Кроме этого, построенная модель анализа экологического состояния и разработанное ПО позволяет экспертам отслеживать тенденции изменения экологической ситуации.

3.Заключение

В результате проведённого исследования разработан и апробирован на примере Воронежской области научно-методический аппарат нейросетевого подхода к комплексированию экологической информации на основе кластерной структуризации данных по всей совокупности мониторинговых показателей. В целом, подобная методика применима для произвольного набора данных геологического, гидро-геологического, геофизического, экологического характера. Она позволяет исследовать пространственное взаимодействие элементов изучаемой системы и выявлять ведущие факторы, воздействующие на эту совокупность. Присущие сетям ART характеристики, в частности, возможность непрерывного обучения, когда поступающие на вход новые данные используются для расширения знаний в существующей модели, представляют собой вычислительную парадигму, позволяющую формировать управляющие решения “на лету”, по мере поступления новой мониторинговой информации. Разработанные алгоритмы могут найти применение для обработки потоковых мониторин-

говых данных или больших данных, позволяя, без длительной предварительной процедуры обучения, извлекать из этих данных знания и формировать на основе этих знаний управляющие решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Д. Взаимодействие компонентов природной среды на территории Воронежской области// ArcReview. 2005. №3 (34). с.1–3.
2. Carpenter G., Grossberg S. Adaptive Resonance Theory// The Handbook of Brain Theo-ry and Neural Networks. - Second Edition. Cambridge, MA: MIT Press. 2003. P. 87-90.
3. Grossberg S. Adaptive Resonance Theory: How a brain learns to consciously attend, learn, and recognize a changing world// Neural Networks. 2013. № 37. P. 1-47.
4. Keskin G.A. Ozkan C. An Alternative Evaluation of FMEA: Fuzzy ART Algorithm// QUality and reliability engineering international. 2009. V. 25 (6). P. 647-661
5. Каширина И.Л. Нейросетевое моделирование формирования кластерной структуры на основе сетей ART/ И.Л. Каширина, Я.Е. Львович, С.О. Сорокин // Информационные технологии. 2017. Т. 23. № 3. С. 228-232.
6. Каширина И.Л., Федутинов К.А. Применение сети FUZZY ARTMAP в интеллектуальных системах обнаружения вторжений// Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2018. Т. 6. № 3 (22). С. 243-257.
7. Rousseeuw P. Silhouettes: a Graphical Aid to the Interpretation and Validation of Cluster Analysis// Computational and Applied Mathematics. 1987. № 20. P. 53–65.

УДК 314.48

РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РИСКА ДТП В ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ

М. А. Фирюлина
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
e-mail: *mashafiryulina@mail.ru*

В данной статье описана разработка приложения, которое предсказываетстепень риска дорожно-транспортного происшествия в текущий день на основе анализаметеорологическихданных, сезонных факторов, а также исторических данных по дорожно-транспортным происшествиям в Воронежской области и дает рекомендации пользователям. В основе алгоритма прогнозирования использована нейронная сеть с архитектурой самоорганизующаяся карта Кохонена.

Ключевые слова: нейронные сети, кластерный анализ, дорожно-транспортные происшествия, карта Кохонена.

1. Введение

В наше время разрабатывается много приложений-виджетов, помогающих принимать решения в различных жизненных ситуациях. Каждый день люди отслеживают информацию по курсам валют, метеорологическим данным, ситуации на дорогах и так далее. Подобные приложения и могут не только сделать жизнь комфортнее, но и обезопасить жизнь людей.

Исследование отдельных причин смертности помогает при создании наиболее точных моделей прогнозирования. Ведь летальные исходы зависят не только от факторов риска, но и от недостаточной осведомленности населения об этих факторах. С целью такого исследования специалисты Воронежской ОКБ №1 предоставили нам полную деперсонифицированную статистику по смертности жителей Воронежской области за 2014-2016 годы.

В результате анализа представленных данных всего было выделено 8 основных причин смертельных случаев в Воронежской области: болезни, связанные с кровообращением, внешние причины, новообразования, старость, болезни органов дыхания, прочее, дорожно-транспортные происшествия и суицидальные случаи. Наибольший процент в данную статистику вносят сердечно-сосудистые заболевания. Данная тенденция наблюдается по всей России и для Воронежской области сохраняется.

Однако, тот факт, что смертность от ДТП в Воронежской области относится к лидирующим причинам смертности, не является типичным для других регионов и вызывает настороженность. Хотя, в качестве положительного момента можно отметить, что количество летальных исходов по причине ДТП в последние годы уменьшается. На рисунке 1 изображен график количества умерших жителей Воронежской области в следствии ДТП за 2014-2016 годы.

Возрастные характеристики относятся к наиболее значимому предиктору при составлении моделей прогнозирования смертности. Изучив каждую группу отдельно, можно выявить наиболее критичные причины для каждой из групп [1].

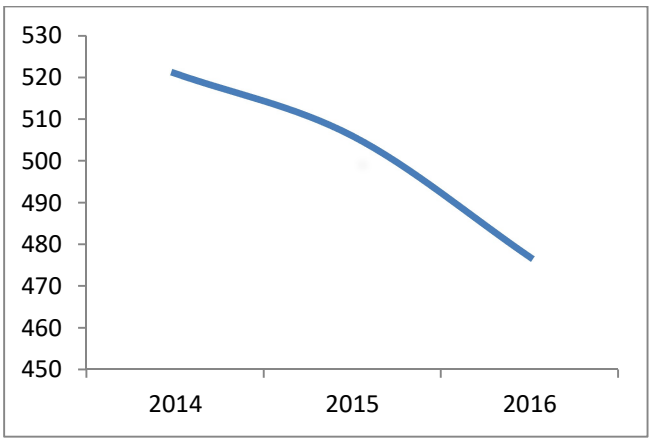


Рисунок 1 – Количество погибших в ДТП за 2014-2016 гг

Средний возраст жителей Воронежской области, погибших в ДТП, составляет приблизительно 43 года.

На рисунке 2 представлена диаграмма для среднего возраста смертности В Воронежской области по каждой из причин. Видно, что средний возраст погибших в ДТП самый наименьший среди всех основных причин.

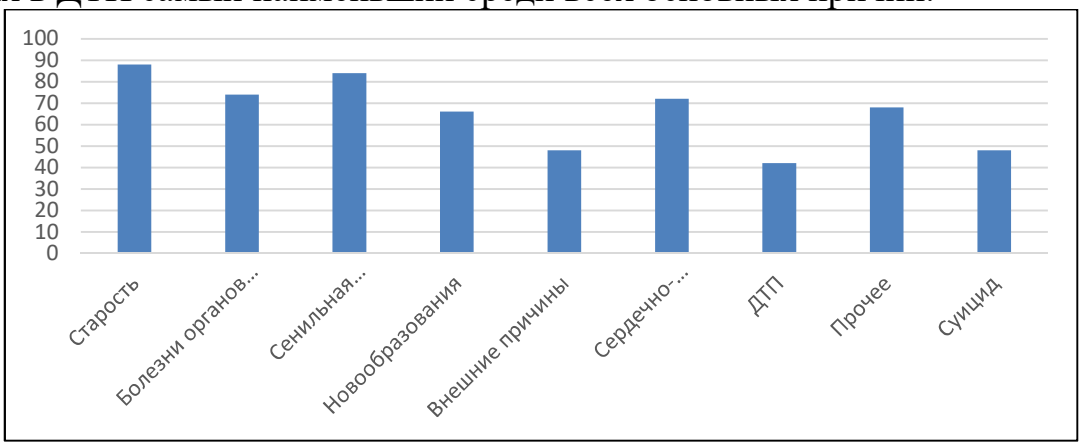


Рисунок 2 – Диаграмма средней продолжительности жизни населения Воронежской области

Для более подробного исследования смертности в результате ДТП были выделены отдельные возрастные группы (рис. 3).

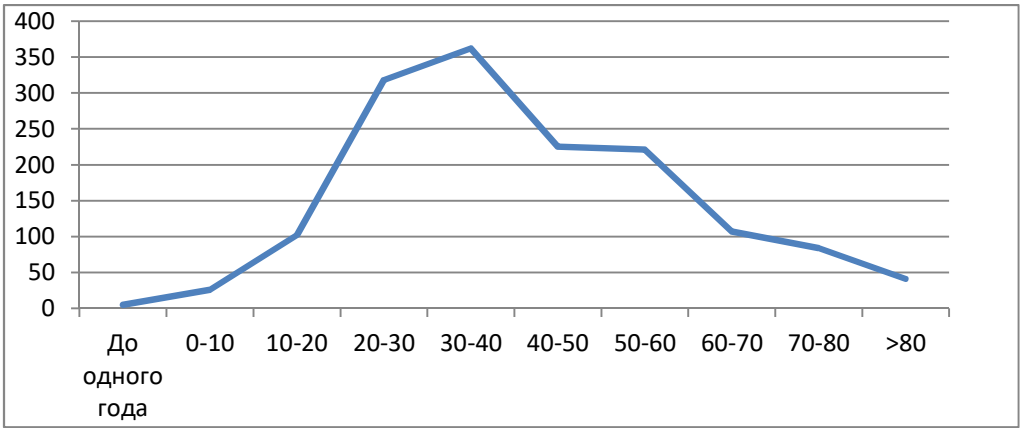


Рисунок 3 – График распределения количества смертельных случаев по возрастным группам для ДТП

Как видно по результатам графика на рисунке 3, наибольшее количество зафиксированных смертельных случаев приходится на возраст 30-40 лет.

При исследовании причин смертности важной является половая дифференциация населения. На диаграмме 4 представленоколичество умерших в результате ДТП лиц женского и мужского пола.

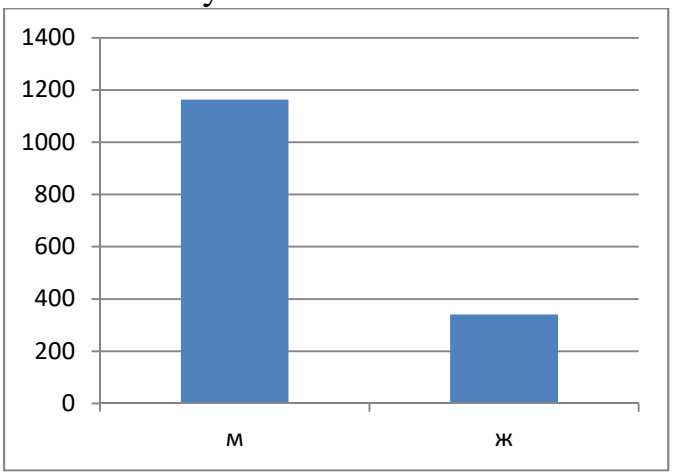


Рисунок 4 – Гендерная диаграмма умерших при ДТП

Как видим, мужчин в ДТП погибает значительно больше, чем женщин.

2. Анализ смертельных случаев по причине ДТП

Дорожно-транспортные происшествия являются одной из немногих причин смертности, процент которой можно с существенно снизить за короткий промежуток времени. Данные результаты достигаются за счет установления предупреждающих знаков на аварийных участках, информирования населения о возможных аварийных случаях, проведения комплекса мероприятий по осведомлению детей дошкольного и школьного возраста правилам дорожного движения. Кроме того, возможно распространение среди населения мобильных программ-виджетов, предсказывающих неблагоприятную дорожную ситуацию и предупреждающих о текущем риске ДТП.

Для выявлениязакономерностей влияния сезонных и метеорологических факторов на количество смертельных случаев при ДТП в Воронежской области был проведен анализ с помощью карты Кохонена.

Карта Кохонена (Self-OrganizingMaps, SOM) – это искусственная нейронная сеть, имеющая единственныйвыходной слой нейронов, расположенных в форме двумерной сетки. Такая сеть формирует топологическую структуру, в которой похожие входные векторы образуют кластеры - группы образов, близко находящиеся на топологической карте. Тем самым,появляется возможность строить топографические карты, чрезвычайно полезные для визуализации многомерной информации.После обучения карты положение нейрона в выходном слое будет взаимосвязано с положением прототипов в многомерном пространстве входов сети: входные векторы, активирующие на выходе один и тот же нейрон-кластер будут близки в пространстве входов. При этом соседним по карте нейронам также будут соответствовать достаточно близкие значения входов[3]. Удобным инструментом визуализации данных является раскраска карт Кохонена, аналогично тому, как это делают на обычных географических картах. Каждый признак данных порождает свою раскраску ячеек карты – по величине среднего значения этого признака у данных, попавших в данный кластер.

Собрав воедино карты всех интересующих нас признаков, можно получить топографический атлас, дающий интегральное представление о структуре многомерных данных [4].

Для решения задачи прогнозирования степени риска дорожно-транспортного происшествия была сформирована карта Кохонена. Размер карты был выбран 10x10. В качестве входных параметров выступают метрологические и сезонные факторы: температура в текущий момент времени, максимальная разница (размах) температуры за последние сутки, влажность, облачность, давление, скорость ветра, месяц и день недели. Для топологической раскраски карты были определены цвета, которые соответствуют конкретному дню недели или сезоны, которые представлены на рисунках 5 и 6 соответственно.

Рисунок 5 – Соответствие цветов дням недели для раскраски карты Кохонена

Рисунок 6 – Соответствие цветов сезонов для раскраски карты Кохонена

Ниже приведены раскраски карты Кохонена по сезонам на рисунке 7 и дням недели на рисунке 8. Приведенные в ячейках карты числовые значения соответствуют среднему риску смертельных исходов в результате ДТП по дням, попавшим в данный кластер (пока не приведённого к единичному масштабу).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,7	2,363636	1,083333	1,333333	0,842105	0,923077	1,6	0,666667	0,75	0,666667
2	1,222222	1,266667	1,222222	1,181818	0,933333	0,5	0,8	0,846154	0,444444	1
3	1,444444	0,769231	1,538462	1,666667	1,142857	1,571429	1,1	0,642857	0,714286	1
4	0,923077	0,666667	1,272727	0,933333	1,25	1,2	1,142857	0,571429	1,6	1,666667
5	1	1,25	1,090909	1,714286	0,75	0,888889	1,6	1,2	1,454545	2,714286
6	1,272727	1,333333	1,833333	2,153846	1,181818	1,111111	1	1	2,555556	2,307692
7	1,6	1,166667	2,142857	1,727273	1,125	1,375	2	1,230769	2,666667	1,357143
8	1,076923	1,2	2	2	3	2,25	1,222222	1,333333	2	1,588235
9	0,583333	0,6	1,25	1,888889	1,769231	1,666667	1,833333	1,666667	1,307692	1,4
10	0,8	0,6	1,285714	2,111111	2,05	2,25	1,666667	1,222222	0,944444	1,846154

Рисунок 7 – Раскраска сезонности карты Кохонена для случаев смерти от ДТП

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,7	2,363636	1,083333	1,333333	0,842105	0,923077	1,6	0,666667	0,75	0,666667
2	1,222222	1,266667	1,222222	1,181818	0,933333	0,5	0,8	0,846154	0,444444	1
3	1,444444	0,769231	1,538462	1,666667	1,142857	1,571429	1,1	0,642857	0,714286	1
4	0,923077	0,666667	1,272727	0,933333	1,25	1,2	1,142857	0,571429	1,6	1,666667
5	1	1,25	1,090909	1,714286	0,75	0,888889	1,6	1,2	1,454545	2,714286
6	1,272727	1,333333	1,833333	2,153846	1,181818	1,111111	1	1	2,555556	2,307692
7	1,6	1,166667	2,142857	1,727273	1,125	1,375	2	1,230769	2,666667	1,357143
8	1,076923	1,2	2	2	3	2,25	1,222222	1,333333	2	1,588235
9	0,583333	0,6	1,25	1,888889	1,769231	1,666667	1,833333	1,666667	1,307692	1,4
10	0,8	0,6	1,285714	2,111111	2,05	2,25	1,666667	1,222222	0,944444	1,846154

Рисунок 8 – Раскраска по дням недели карты Кохонена для случаев смерти от ДТП

По результатам раскраски можно выявить отдельные группы и наиболее характерные для них признаки. Например, для кластера (9,2) (с низкой степенью риска ДТП) характерна температура воздуха в районе 17-20 градусов выше нуля, ясная, безоблачная погода, низкий скачок температуры и средняя влажность, весна, четверг.Построенная модель позволяет проанализировать любую текущую ситуацию и соотнести с некоторым кластером риска.

3. Программная реализация приложения по предсказанию риска ДТП со смертельным исходом

Разработанный виджет предназначен для прогнозирования степени риска дорожно-транспортного происшествия, а также дает некоторые рекомендации, стоит ли использовать автомобиль как средство передвижения в текущий день, или стоит воздержаться.

Для начала необходимо обозначить уровни риска и их границы. Было выделено четыре возможных вероятностных результата работы программы: низкая, ниже среднего, выше среднего и высокая. Ранее на картах Кохонена были выведены среднее количество смертельных случаев по каждому кластеру. Эти данные были нормализованы по формуле 1.

$$x_{\text{нов}} = \frac{x_{\text{ст}} - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} * 100 \quad (1)$$

Затем были определены границы диапазонов риска. Если среднее количество смертельных случаев составляет от 0 до 30%, то вероятность совершения дорожно-транспортного происшествия низкая в данном кластере, если границы 30-50% - ниже среднего, 50-80% выше среднего, более 80% - высокая.

Для определения риска ДТП необходимы параметры погодных условий для нейронной сети. Для удобства использования пользователю нет необходимости вводить параметры вручную, с помощью веб-сервисов данные о погоде на текущий момент отображаются автоматически при запуске приложения. Данные о погоде берутся с сайта OpenWeatherMap.org.

После отображения на формах значения параметров передаются в функцию, вызывающую запуск нейронной сети.

Ниже на рисунках представлены скриншоты графического интерфейса программы.

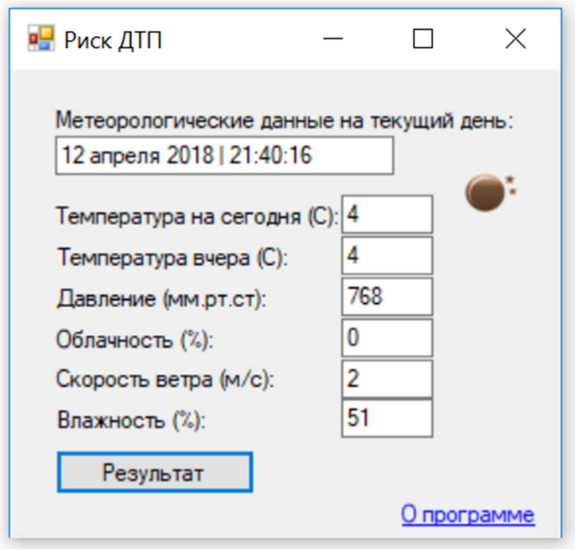


Рисунок 9 – Запуск программы

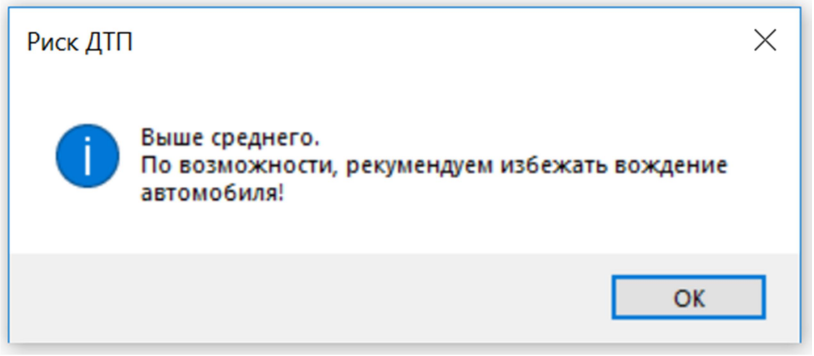


Рисунок 10 – Результат работы программы

Таким образом, данное приложение предупреждает о возможном риске дорожно-транспортного происшествия, тем самым обезопасив жизнь людей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медицинская энциклопедия. – Электронный ресурс. — Режим доступа: http://www.medical-enc.ru
2. StatSoft, Inc. /Москва, StatSoft. – Электронный учебник по статистике. – Режим доступа: http://www.statsoft.ru/home/textbook/default.htm
3. Каширина И.Л. Нейросетевые технологии. Учебно-методическое пособие для вузов / И.Л. Каширина. - Воронеж, 2008. – С. 26-28.
4. Жариков О.Г. Экспертные системы в медицине/ О.Г. Жариков, А.А. Литвин, В.А. Ковалёв // Медицинские Новости. - 2008. - №10. – Режим доступа: http://www.mednovosti.by/journal.aspx?article=4013

РАЗРАБОТКА ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ

Е.Г. Чалыкина, магистрант
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»
e-mail: *ekaterina_chalykina@rambler.ru*
И.В. Сухан, ст. преп.
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»
e-mail: *irina-sukhan@yandex.ru*

В статье описан процесс исследования и самостоятельной разработки в области экспертных систем.

Тенденция современного мира — максимальная автоматизация окружающих процессов. Человечество стремиться использовать и развивать приобретаемые знания во всех сферах деятельности. Наиболее рентабельным является развитие компьютерных технологий. На протяжении последнего столетия ведется активное исследование и разработка интеллектуальных машин — устройств, способных к мышлению, приближенному к человеческому. Такой вид мышления определяется термином Искусственный Интеллект (далее ИИ). Основные направления, в которых на текущий момент ведется активное исследование и разработка:

1. Интерпретация знаний — представление экспертных знаний (знаний, подкрепленных фактами, опытом использования, актуальностью и значимостью в конкретизированной сфере) в виде, воспринимаемом электронно-вычислительной машиной (далее ЭВМ) [1];
2. Манипулирование знаниями — определение различных возможностей оперирования ЭВМ полученными знаниями, описание алгоритмов решения прикладных задач с использованием полученных знаний. Данное направление также подразумевает пополнение базы начальных знаний (далее БЗ) ЭВМ самостоятельно [1];
3. Общение — наименование направления говорит само за себя: описание и разработка методов коммуникации между человеком и ЭВМ [1];
4. Восприятие — разработка методов представления у ЭВМ информации о зрительных образах, обучение ориентации в пространстве, самостоятельная интерпретация воспринимаемых образов в текстовый вид [1];
5. Обучение — направление, которое смежно используется во всех остальных. Описание методов осуществления выводов ЭВМ на основании БЗ, решение новых, ранее не рассмотренных системой задач самостоятельно, путем оперирования имеющимися знаниями [1];
6. Поведение — каждая система разрабатывается в какой-либо сфере, в связи с этим необходимо описание поведенческих процедур для обеспечения корректного поведения системы с окружающей средой и людьми. Данное направление, к сожалению, на текущий момент развито наименее качественно.

Основными представителями ИИ являются нейронные сети и экспертные системы. Безусловно есть и другие, однако именно эти на текущий момент представляют наибольшую актуальность в виду основополагающих подходов,

используемых при их разработке. Нейронные сети базируются на идее создания структуры системы, близкой к человеческому мозгу: получение, обработка, интерпретация входящей информации с использованием искусственных нейронов, составляющих ИНС (Искусственную нейронную сеть) — математическая модель, а также её программная или аппаратное воплощение, построенное по принципу организации и функционирования биологических нейронных сетей — сетей нервных клеток живого организма [3]. Экспертные системы (далее ЭС) в своей структуре используют логический подход, который основан на моделировании рассуждений на базе начальных знаний, получение на основании анализа конкретных обоснованных выводов. Знания в ЭС представляются в качестве правил, на основании которых система выполняет самостоятельные конкретные и, что немаловажно, обоснованные выводы [1].Основной идеей разработки ЭС является частичная, а в дальнейшем, возможно и полная, передача полномочий человека-эксперта ЭВМ для решения сложных, не поддающихся алгоритмическому решению задач в какой-либо конкретизированной области. Помимо ощутимой выгоды в рамках оптимизации процесса получения результата в определенной сфере при помощи ЭС также выступает неоспоримое преимущество системы перед человеком: решения человека не всегда можно считать объективными, ведь на них, помимо знаний, может влиять психологическое и физическое состояние, в то время как ЭС таким рискам не подвержена.

Вопрос актуальности применения именно технологии ЭС для решения задачи очень важен. Для ответа на него используется так называемы «Критерий применимости экспертных систем» — набор правил, по соответствию которым задача считается решаемой ЭС [1].

Структуру любой ЭС условно можно представить в соответствии с рисунком 1:

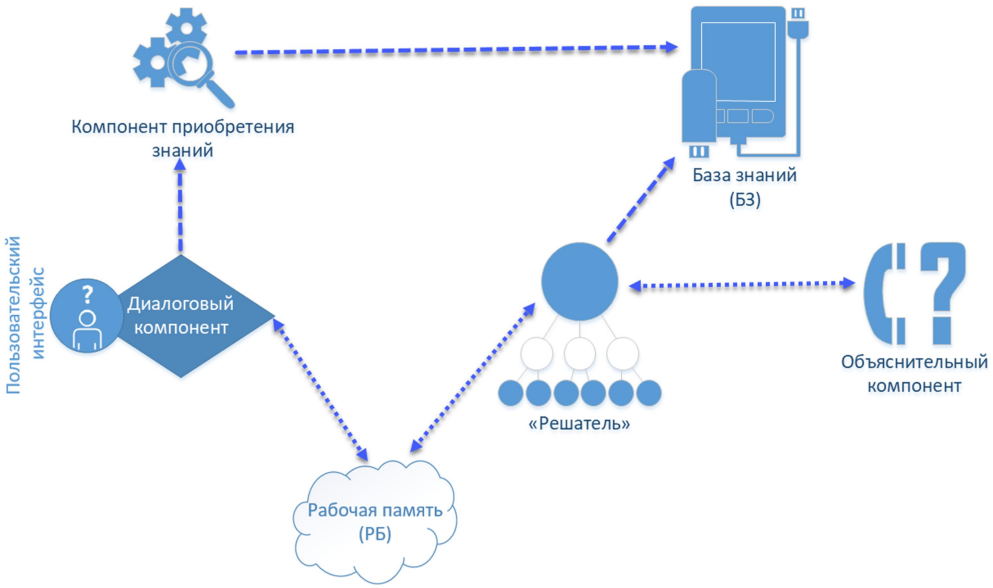


Рисунок 1 — Структура типичной экспертной системы [2]

Теоретическая составляющая вопроса об ЭС очень обширна, несмотря на относительную молодость данного направления. Даже малую часть осветить в данной статье не представляется возможным, однако в конце статьи читатель

может ознакомиться со списком рекомендуемой литературы, которая поможет сформировать некоторое понимание вопроса.

В виду обусловленной значимости исследований и разработки в области ИИ в качестве научной работы была выбрана тема разработки ЭС. На текущий момент достигнуты следующие результаты:

1. Изучена методология разработки проекта в области ЭС, результатом чего выступает прототип ЭС, выполняющий функцию эксперта в подборе литературы в соответствии с требованиями пользователя.Основной целью разработки прототипа стало исследование основных критериев и методов разработки ЭС, определение наиболее жизнеспособных алгоритмов, знакомство с методологией разработки ЭС в целом. Обзор процесса разработки прототипа ЭС и конкретные результаты представлены в ранее опубликованной статье «Разработка экспертных систем», ссылка на которую приведена ниже, в разделе «Использованная литература» [2].После разработки прототипа, его тестирования и отладки следующим этапом исследовательской деятельности стала разработка полноценной ЭС в конкретизированной области.
2. Определена предметная область, предполагаемая к перенесению на ЭС: Определение психологического отклонения личности.

Основная цель проекта: разработать ЭС, которая посредством диалогового модуля определяет психоэмоциональное состояние респондента. Система должна обладать удобным пользовательским интерфейсом, способной к самообучению (получению новых правил на базе имеющихся знаний), интерпретации полученных результатов интервью на естественный язык и выгрузке итоговых данных в файл для дальнейшего использования. Не предполагается, что система предоставит результат своего исследования респонденту, так как целью взаимодействия ЭС с человеком является выявление возможных психологических отклонений у подростков для обеспечения своевременной профессиональной поддержки духовной составляющей личности школьника/студента.

При изучении теоретической составляющей задачи было принято решение изменения инструментов и методов разработки ЭС. Для разработки выбран язык VisualProlog — мощный и типобезопасный язык программирования высокого уровня, сочетающий в себе самые лучшие черты логических, функциональных и объектно-ориентированных парадигм программирования последовательным и элегантным способом [4]. Для разработки прототипа ЭС был использован язык CLIPS, однако в виду наличия объективных преимуществ VisualProlog: 1. Единственная в мире Prolog-система со 100% оболочкой выполненной в идеологии Visual и рядом высокоуровневых компонент, которые упрощают разработку программ для систем Windows; 2. Мощность языка Prolog в сочетании с современной системой пользовательских интерфейсов (GUI — GraphicalUserInterface) делает простой и интуитивно понятной разработку систем, основанных на знаниях, систем поддержи принятия решений; было принято решение об изменении языка разработки [5].

Изменения языка разработки — не единственное отклонение от ранее принятых методов. При разработке прототипа была использована продукционная модель представления знаний, которая позволяет представить знания в при-

вычном виде причинно-следственного образца. Данная модель представляет собой логическую цепочку предложений типа «Если (условие), то (действие)», где условие — это образец, по которому осуществляется поиск в базе; действие — действия или операторы, выполняемые при успешном исходе поиска [1]. Полностью отказываться от данной модели представления БЗ не является обязательным. В текущем проекте разработки полноценной ЭС было принято решение смежно рассматривать две модели: продукционную и семантическую. Обоснованием данного решения становится оправданная сложность БЗ, которую необходимо объединить в связную структуру. Предполагается, что семантическая сеть позволит реализовать поставленные требования, так как позволяет представить знания в виде сетевой структуры.

Иными словами, семантическая сеть отображает совокупность объектов предметной области и отношений между ними.

На этапе тестирования готового продукта требуется произвести анализ устойчивости каждой модели и выбрать наиболее подходящую. Данная манипуляция не повлияет на общую работу системы, так как модели представления БЗ определены в разных классах.

Для построения базы знаний будущей ЭС был произведен комплексный анализ более десяти различных методов определений психологического состояния личности: графические, ассоциативные, проективные и др. В итоге был определен комплексный подход системы, базирующийся на трудах следующих выдающихся людей:

- Леопольд Сонди — венгерский ученый, психолог. Является автором одноименного теста, позволяющего определить наличие психологических отклонений.
- Уильям Занг — психиатр, автор знаменитой Шкалы Занга (Цанга) для самооценки депрессии. Его шкала, являет собой комплексный подход к самоанализу.
- Макс Люшер — швейцарский психолог и разработчик цветового теста Люшера, являющегося средством оценки психологического состояния через субъективное восприятие цвета.
- Карл Леонгард — выдающийся немецкий психиатр, невролог, психолог.

В качестве БЗ используются именитые тесты представленных ученых, а именно результаты, которые получаются непосредственно в процессе ответов респондента. Интервью (процесс взаимодействия ЭС с человеком посредством диалогового модуля) охватывает сразу ассоциативное и визуальное восприятие человека, что позволяет сформировать более комплексный подход к анализу. Также на протяжении интервью на каждом вопросе активен таймер, по достижении конкретного значения коэффициент доверия к ответу уменьшается. Данная мера является вынужденной, так как зачастую респонденты осознанно подходят к ответам, пытаясь фальсифицировать результат на более положительный, по их мнению. При исчерпании коэффициента доверия результат интервью считается недействительным, о чем респонденту сообщает система. Также в процессе взаимодействия с пользователем необходимо использовать мониторинг достоверности ответа, в качестве которого предполагаются к использова-

нию специфические вопросы. Последнее пока находится на стадии идеи, так как для определения перечня вопросов-маркеров на текущий момент недостаточно знаний в области психологии.

Таким образом, готовая ЭС должна стоить обоснованный однозначный вывод о психоэмоциональном состоянии респондента на основании правил, полученных из анализа трудов вышеописанных ученых с использованием программных средств проверки достоверности результата.

Разработка пользовательского интерфейса определена на менее высокий приоритет, в виду оправданной сложности разработки структуры знаний, поэтому тестирование устойчивости системы будет производиться в консольном приложении.

Резюмируя текущий статус разработки ЭС, получено следующее: описаны основные модули программы, определены процедуры для разработки диалогового окна: интерпретация входящих данных; ведется активная разработка моделей представления данных с учетом специфики правил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джарратано Д. Экспертные системы. Принципы разработки и программирование. – М.: Вильямс, 2007. – 1152 с.
2. Чалыкина Е.Г., Сухан И.В. Разработка экспертных систем// Молодой ученый. Международный научный журнал. – 2019.– 254.– №16. – С.16-20.
3. Национальная библиотека им. Н. Э. Баумана: [Электронный ресурс]: Искусственная нейронная сеть. Материал из Национальной библиотеки им. Н. Э. Баумана.,[2016]. URL:https://ru.bmstu.wiki/ (дата обращения: 02.09.2019)
4. Официальный сайт VisualProlog (англ) [Электронный ресурс]. URL: https://www.visual-prolog.com/(дата обращения: 02.09.2019)
5. Энциклопедия языков программирования: [Электронный ресурс]: Реализация VisualProlog. сост.: Дымченко С., [2009]. URL: http://progopedia.ru/ implementation /visual-prolog/ (дата обращения: 02.09.2019)

О СОЗДАНИИ И ПЕРСПЕКТИВАХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОРПУСА ТЕКСТОВ РОССИЙСКИХ НАУЧНЫХ СТАТЕЙ КАК НАБОРА ОТКРЫТЫХ ДАННЫХ

Т.А. Юдина
НИУ Высшая школа экономики, МИЭМ
e-mail: *tayudina_2@edu.hse.ru*
А.М. Баранов
НИУ Высшая школа экономики, МИЭМ
e-mail: *ambaranov@edu.hse.ru*

Ключевые слова: открытые данные, набор данных, машиночитаемый корпус, компьютерная лингвистика, анализ текста.

1. Введение

В настоящее время ценность автоматического анализа текста возрастает с каждым днём в связи с увеличением объема информации. Для того чтобы решать задачи, связанные с автоматическим анализом, необходимы качественно размеченные корпуса данных в «машиночитаемой» форме.

Научные статьи относятся к тем видам публикации, для которых задачу автоматического анализа необходимо решить, однако решение усложняется существованием различных областей науки, каждая из которых обладает своими специфическими особенностями, и наличием большого количества различных нетекстовых элементов, таких как формулы, таблицы, рисунки и т.д. Также важной проблемой, которая тоже требует решения, является огромное количество статей с плохо выраженной или совсем отсутствующей структурой.

Существует задача сегментации текста, которая заключается в разделении текста на сегменты таким образом, чтобы каждый сегмент являлся тематически согласованным, а точки отсечения указывали на изменение темы [1]. Умение автоматически выделять разделы в научных статьях может помочь оценить качество публикации по её структуре, найти работы, в которых не соблюдается заявленная структура, автоматизировать процесс проверки статей при их редактировании, подготовке к печати и рецензировании.

На данный момент сегментация научных статей на русском языке является сложной задачей из-за отсутствия набора данных для обучения и тестирования. Одним из самых больших корпусов на русском языке является Национальный корпус русского языка [2]. Несмотря на то, что в данном корпусе представлены научные, научно-популярные, учебные тексты и научные статьи, данный корпус не содержит подкорпуса научных статей, размеченного по сегментам и нетекстовым структурам. Другим крупным проектом является «Открытый корпус» (OpenCorpora) [3]. Этот корпус тоже является морфологически, синтаксически и семантически размеченным, но в нем также нет научных статей, размеченных по сегментам и структурам, а значит, можно утверждать, что существует необходимость в создании такого корпуса научных статей.

В связи с этим целью данной работы является создание наиболее тематически разнообразного корпуса текстов научных статей, размеченных по разделам и нетекстовым структурам.

2. Источники корпуса текстов научных статей и его полнота

Для создания корпуса текстов прежде всего необходимо привести их к машиночитаемому формату. Для этого нужно преобразовать скачанные из общего доступа научные журналы в подходящий текстовый формат. Такая работа была проведена: все исходные статьи были преобразованы из pdf-формата в формат txt и размечены. Полученный в результате набор данных Russian_scientific_journals опубликован на платформе Github [4] для возможного использования другими исследователями. Общее количество документов, опубликованной версии набора данных составило 95 документов (состояние на сентябрь 2019 г.), всего в этих документах встречается 216406 слов, среди них уникальных – 70726.

Данный корпус состоит из 7 журналов (таблица 1), которые охватывают следующие научные сферы (таблица 2).

Таблица 1 – Журналы, входящие в корпус

Название журнала	ID-журнала в корпусе	Количество статей из журнала в корпусе	ISSN печатной версии	РИНЦ	Количество уникальных слов в журнале	Среднее количество слов в документе
Academia. Архитектура и строительство	25208	18	2077-9038	Да	20589	3986
Acta Nature (русскоязычная версия)	30787	8	2075-8243	Да	7249	2969
Academia: Танец. Музыка. Театр. Образование	51003	12	2227-4855	Да	5667	1262
Advanced Science	51290	7	Нет	Да	6204	3010
Aliter	51832	8	Нет	Да	11929	4133
Alatoo Academic Studies	53910	6	1694-5263	Да	4214	1677
Academy	54932	36	2412-8236	Нет	11386	950

Таблица 2 – Тематические рубрики

Раздел рубрикатора ГРНТИ	Код	ID-журналов, представляющих данную рубрику
Общественные науки в целом	00.00.00	54932
Философия	02.00.00	51832, 53910, 54932
История. Исторические науки	03.00.00	51832, 53910
Социология	04.00.00	53910
Экономика. Экономические науки	06.00.00	53910, 54932
Государство и право. Юридические науки	10.00.00	53910
Политика. Политические науки	11.00.00	51832, 53910
Науковедение	12.00.00	51832
Культура. Культурология	13.00.00	51003
Народное образование. Педагогика	14.00.00	51003, 53910, 54932
Психология	15.00.00	54932
Языкознание	16.00.00	53910
Литература. Литературоведение. Устное народное творчество	17.00.00	53910
Искусство. Искусствоведение	18.00.00	51003
Массовая коммуникация. Журналистика. Средства массовой информации	19.00.00	53910
Информатика	20.00.00	51290, 30787
Религия. Атеизм	21.00.00	51832
Математика	27.00.00	51290, 30787, 54932
Физика	29.00.00	51290, 30787
Химия	31.00.00	53910
Биология	34.00.00	30787, 53910
Общие и комплексные проблемы естественных и точных наук	43.00.00	53910
Энергетика	44.00.00	51290
Электротехника	45.00.00	51290
Электроника. Радиотехника	47.00.00	51290, 53910
Связь	49.00.00	51290
Автоматика. Вычислительная техника	50.00.00	51290
Биотехнология	62.00.00	30787
Строительство. Архитектура	67.00.00	25208
Медицина и здравоохранение	76.00.00	30787, 53910
Общие и комплексные проблемы технических и прикладных наук и отраслей народного хозяйства	81.00.00	53910
Организация и управление	82.00.00	53910

3. Особенности разметки «машиночитаемого» формата корпуса текстов научных статей

Создание корпуса начинается с выбора удобного формата данных. Существует несколько популярных форматов для разметки данных: Json, YAML, XML. В основном, данные форматы используют подход «ключ-значение», но для решаемой задачи разметки научных статей такой способ хранения не подходит, т.к. может возникнуть ситуация, когда одна пара «ключ-значение» является частью значения другой пары.

Поэтому был придуман свой формат хранения данных. В итоге при разметке использовались следующие тэги:

<title></title> - название статьи. В этот тэг входит информация о заголовке данной статьи. Может встречаться несколько раз в документе. Как правило, в самом начале и в конце документа (зависит от журнала).

<author></author> - авторы статьи. В этом тэге находится информация обо всех авторах статьи, если они перечисляются через запятую или пустую строку.

<abstract></abstract> - аннотация. Аннотацией является краткое содержание научной статьи, которое встречается сразу после заголовка и перечисления авторов. В тэге также остается само слово «Аннотация».

<key_words></key_words> - ключевые слова. В тэге содержится список из всех идущих подряд ключевых слов вместе со словосочетанием «Ключевые слова:».

<introduction></introduction> - вступление. Может начинаться со слов «Вступление» или «Введение», которые являются частью тэга, или с предложения, вводящего в предметную область. Введение, как правило, является небольшим: один или два абзаца. Признаком его окончания является смена темы: переход к обзору литературы или к основной части.

<main></main> - основная часть (если статья состоит только из трех частей). В большинстве научных статей строгая структура неявно выражена или отсутствует. В таких случаях используется данный тэг, т.к. вступление и заключение в статьях в большинстве своём используют, а остальные сегменты такие как обзор литературы, методология, экспериментальная часть и обсуждение чаще всего строго не выделяют.

<experimental part></experimental part> - экспериментальная часть. Данная часть либо бывает строго выражена заголовком, либо самим текстом. Как правило, авторы в данной части переходят непосредственно к описанию своих действий.

<results></results> - результаты. Данная часть текста встречается, как правило, после экспериментальной. Её можно опознать либо по заголовку, либо по специфическим клише. В данной части часто могут встречаться таблицы и графики.

<conclusion></conclusion> - заключение. Встречается после основной части, начинается с клише. Иногда оформлено в виде списка.

<bibliography></bibliography> - список литературы. Содержит соответствующий заголовок и пронумерованный список.

<references></references> - ссылки. Список литературы на английском языке и другие ссылки.

<subtitles></subtitles> - подзаголовки. В данный тэг попадают различные заглавия частей, которые встречаются в тексте. Например, «1. Введение» или «Экспериментальная часть».

<picture></picture> - рисунок и подписи к нему. Данный тэг встречается в тексте там, где изображение «разбивает» текст документа в исходном представлении. Обычно само описание рисунка в pdf-формате выносится за пределы текста. В данной же разметке оно добавляется к соответствующему тэгу.

<table></table> - таблицы. В данном тэге содержатся названия колонок в таблице и сами данные.

<list of abbreviations></list of abbreviations> - список сокращений. Встречается в некоторых журналах, идет после ключевых слов. Определяется с помощью подзаголовка «Список сокращений».

Распределение слов по вышеперечисленным тэгам представлено в таблице 3.

Таблица 3 – Распределение всех слов и уникальных слов по тэгам

Название тэга	Общее количество слов в данном тэге по всему корпусу	Количество уникальных слов в данном тэге по всему корпусу
Title	1472	953
Author	3772	1124
Abstract	12697	5169
Key_words	1489	917
Introduction	12739	5816
Main	122954	31789
Experimental part	5159	2084
Results	7855	2724
Conclusion	12290	5662
Bibliography	18480	7065
References	10411	3954
Subtitles	447	280
Picture	4218	2012
Table	2147	943
List of abbreviations	276	234

4. Примеры использования представляемых данных

Данный набор научных статей будет полезен тем исследователям в области анализа данных и лингвистики, которые хотят изучить особенности разделов научных статей. Также данный корпус можно использовать совместно с корпусом научных статей для сегментации RussianArticles-8K [5]. Это коллекция из 8040 научных статей, взятых автоматически из источника КиберЛенинка. По исходным данным был осуществлён автоматический поиск с использованием клише, встречающихся в сегментах одного типа, с целью найти статьи, в которых присутствуют удобные для выделения сегменты. Таким образом, для

корпуса были взяты и предобработаны 900 документов (по 300 документов каждого класса: введение, основная часть, заключение) и 106 документов, вручную размеченных на сегменты ранее выделенных классов.

5. Заключение переработать в соответствии со введением

В этой работе мы представляем большой помеченный набор данных Russian_scientific_journals, состоящий из взятых из разных областей науки статей, которые были размечены для решения задачи сегментации. В данном корпусе были выделены нетекстовые элементы и главные структурные части научных статей такие, как аннотация, ключевые слова, введение, основная часть, экспериментальная часть, результаты, заключение, список литературы и ссылки. Данный корпус может оказать значительную помощь исследователям при решении проблем, связанных с анализом научных статей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hearst M. A. Multi-paragraph segmentation of expository text //Proceedings of the 32nd annual meeting on Association for Computational Linguistics. – Association for Computational Linguistics, 1994. – С. 9-16.
2. Национальный корпус русского языка [Электронный ресурс]. URL: http://www.ruscorpora.ru/new/ (дата обращения: 13.09.2019).
3. OpenCorpora [Электронный ресурс]. URL: http://opencorpora.org/ (дата обращения: 13.09.2019).
4. Github [Электронный ресурс]. URL: https://github.com/yudinatatiana/Russian_scientific_journals (дата обращения: 13.09.2019).
5. Github [Электронный ресурс]. URL: https://github.com/yudinatatiana/RussianArticles-8K (дата обращения: 13.09.2019).

Инженерные приложения физико-математических наук

УДК 519.718

ПОЛУЧЕНИЕ ДОСТАТОЧНЫХ МНОЖЕСТВ И ДОПУСТИМЫХ ФУНКЦИЙ ЧАСТИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

О.И. Голубева, к.т.н., доц.
Томский государственный университет
e-mail: *golubeva-o@yandex.ru*

Рассматриваются методы поиска подмножеств переменных достаточных для реализации частичной булевой функции, при различных представлениях функции, и получения соответствующих им допустимых функций. Кроме того, рассматривается возможность практического применения методов.

Ключевые слова: достаточные множества переменных, допустимая функция, частичная булева функция.

В данной работе рассматривается задача получения достаточных множеств и допустимых функций частичных булевых функций. Она находят свое применение, например, в задачах анализа и синтеза логических схем [1, 2].

Обозначим через $F(X)$ – частичную булеву функцию, принимающую значения на множестве $\{0, 1, *\}$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Множества M_F^0, M_F^1 и M_F^* представляют множества нулевых, единичных и неопределенных значений функции F. $F(X)$ может быть задана любыми двумя из этих множеств. Множества M_F^0, M_F^1 и M_F^* могут быть представлены булевыми функциями F^0, F^1 и F^* соответственно.

Частичная функция F может быть также задана вектором своих значений длины 2^n, где значения функции перечислены в порядке значений в таблице истинности. Зная множества M_F^0, M_F^1 и M_F^* (или любые два из них), легко представить F в векторном виде.

Пусть α – набор значений переменных X, а $X' \subseteq X$. Обозначим $(\alpha|_{X'})$ проекцию α на переменные множества X'.

Подмножество переменных X' множества X ($X' \subseteq X$) называется *достаточным* для (реализации) частичной функции $F(X)$, если существует частичная функция $F'(X')$ такая, что для любого набора α значений переменных X выполняется хотя бы одно из двух условий: 1) $F(\alpha) = F'(\alpha|_{X'})$, 2) $F(\alpha) = *$ (определение согласуется с определением из [3]). При этом *функцию* $F'(X')$ назовем *допустимой* для (реализации) частичной функции $F(X)$.

Заметим, что функция $F'(X)$, полученная любым доопределением, в том числе частичным, частичной функции $F(X)$, является допустимой для $F(X)$.

Множество $X' \subseteq X$ является достаточным для $F(X)$ тогда и только тогда, когда существует доопределение F до булевой функции (реализация F), в котором все переменные множества $X \setminus X'$ фиктивные.

Обозначим $(\alpha \mid x_{i_j} = \tau)$ набор α значений переменных X, в котором переменной x_{i_j} присвоено значение τ.

Известен эффективный алгоритм получения всех достаточных множеств частичной функции, представленной векторно ([3]). Из всех достаточных множеств можно выбрать одно X^m (например, минимальной мощности или с подходящим множеством переменных и т.д.) и далее получить допустимую функцию, зависящую только от переменных X^m.

В [1, 2] рассмотрен алгоритм получения одного безызбыточного достаточного множества X^S переменных и функции $F'(X^S)$ допустимой для частичной функции $F(X)$. При этом алгоритм не гарантирует получения достаточного множества минимальной мощности.

Рассмотрим этот алгоритм.

Алгоритм 1.

В алгоритме переменные множества X рассматриваются в некотором заданном порядке $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$. $j = 1$. $X^S = X$. $F'(X^S) = F(X)$.

1. Рассмотрим переменную x_{i_j}. Если $j > n$, выход.

2. Если существует такой набор α значений переменных X^S, что $F'(\alpha \mid x_{i_j} = 0) \neq *$, $F'(\alpha \mid x_{i_j} = 1) \neq *$ и $F'(\alpha \mid x_{i_j} = 0) \neq F'(\alpha \mid x_{i_j} = 1)$, то $j = j + 1$ и переходим на п. 1, иначе на п. 3.

3. Для каждого вектора α значений X^S: если одно из значений $F'(\alpha \mid x_{i_j} = 0)$ или $F'(\alpha \mid x_{i_j} = 1)$ равно 0 или 1, то и второму из них присваиваем это же значение.

4. Удаляем переменную x_{i_j} из $F'(X^S)$ и из X^S. $j = j + 1$ и переходим на п.1.

Утверждение. Функция $F'(X^S)$, полученная Алгоритмом 1, является допустимой для реализации частичной функции $F(X)$.

Алгоритм может быть применен к частичной функции представленной векторно, BDD, ДНФ, множествами M_F^1 и M_F^0 и т.д.

Для повышения эффективности можно применить алгоритм N раз, используя различный порядок переменных, и выбрать наиболее подходящее множество X^S (например, минимальной мощности) и соответствующую функцию $F'(X^S)$.

Если рассмотреть все возможные перестановки переменных, то будут получены все безызбыточные достаточные множества и соответствующие им допустимые функции частичной функции. При этом для сокращения перебора пе-

рестановки переменных необходимо рассматривать в таком порядке, чтобы использовать полученный промежуточный результат для всех возможных дальнейших решений. Например, рассматриваем порядок переменных (x_1, x_2, x_3) и далее (x_1, x_3, x_2), при этом достраиваем решение, полученное для переменной x_1.

Назовем переменную частичной функции $F(X)$ *сильно существенной*, если она является существенной при любом доопределении частичной функции или, другими словами, входит в любое достаточное множество этой функции.

Утверждение**.** Переменная x_{i_j} частичной функции сильно существенна тогда и только тогда, когда существует такой набор α значений переменных X, что $F(\alpha \mid x_{i_j} = 0) \neq *$, $F(\alpha \mid x_{i_j} = 1) \neq *$ и $F(\alpha \mid x_{i_j} = 0) \neq F(\alpha \mid x_{i_j} = 1)$.

Назовем переменную частичной функции *несущественной*, если она не входит ни в одно безызбыточное достаточное множество.

Утверждение**.** Если выполняется условие $(M_F^1 \cup M_F^0 \mid x_{i_j} = 1) = \varnothing$ или $(M_F^1 \cup M_F^0 \mid x_{i_j} = 0) = \varnothing$, то переменная x_{i_j} частичной функции является несущественной.

Можно выполнить некоторое сокращение перебора при построении всех безызбыточных достаточных множеств с помощью Алгоритма 1, предварительно определив сильно существенные и несущественные переменные частичной булевой функции, но, несмотря на это, подход, основанный на переборе перестановок переменных, требует в общем случае больших вычислительных затрат.

Рассмотрим другой подход к получению достаточных множеств частичных функций, заданных множествами M_F^1 и M_F^0. Данный подход предложен профессором Н.Г. Парватовым. Он основан на построении булевой *матрицы сумм* $M(F)$ и позволяет свести задачу построения достаточных множеств к задаче покрытий строк матрицы $M(F)$.

В строках булевой матрицы $M(F)$ содержатся различные суммы $(a_i^1 \oplus a_j^0)$, где $a_i^1 \in M_F^1$ и $a_j^0 \in M_F^0$. Столбцам сопоставляются переменные функции F.

Множество U переменных функции F назовем *покрывающим матрицу* $M(F)$, если каждая строка матрицы содержит единицу в некотором столбце, соответствующем некоторой переменной из множества U.

Теорема**.** Система достаточных множеств частичной функции $F(X)$ совпадает с системой множеств, покрывающих матрицу $M(F)$.

В частности, любое безызбыточное покрывающее множество булевой матрицы $M(F)$ соответствует некоторому безызбыточному достаточному множеству частичной функции.

Задача поиска покрывающего множества булевой матрицы в данной статье не рассматривается.

Таким образом, применяя вышеизложенные методы можно найти необходимое достаточное множество (например, минимальной мощности) и соответствующую допустимую функцию [2].

Рассмотрим получение множеств M_F^0 и M_F^1 для построения матрицы $M(F)$ при различных представлениях функций.

Если частичная функция задана ROBDD функций F^0 и F^1, то по ROBDD можно получить ОДНФ [2].

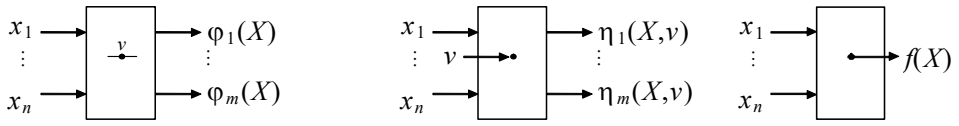
ОДНФ $O(f_w)$ функции f_w, представленной ROBDD с корнем w, может быть получена следующим образом: 1) $O'(f_w) = value(w)$, если w – терминальная вершина, иначе $O'(f_w) = \bar{x} \cdot O'(f_{low(w)}) \vee x \cdot O'(f_{high(w)})$, где x – переменная, соответствующая вершине w, а $low(w)$ и $high(w)$ – потомки вершины w, по значениям 0 и 1 переменной x. 2) Раскрыв скобки $O'(f_w)$, получим ОДНФ $O(f_w)$.

Отметим, что $O'(f_w)$ для каждой вершины ROBDD получаем один раз.

Каждая конъюнкция ОДНФ функции F^1 (F^0) представляет интервал булевых векторов, на которых функция обращается в 1 (0), причем интервалы, соответствующие различным конъюнкциям, не пересекаются. Соответственно по конъюнкциям ОДНФ F^1 и F^0 можно получить множества M_F^1 и M_F^0 и по ним построить матрицу сумм $M(F)$.

Раннее в работах [1, 2] было рассмотрено применение задачи получения достаточных множеств для частичных функций полюсов элементов схем. Рассмотрим получение частичной функции полюса элемента схемы.

Рассмотрим комбинационную схему с n входами, m выходами и входными переменными $X = \{x_1, ..., x_n\}$; $\varphi_i(X)$, $i = \overline{1,m}$, – функция, реализуемая i-ым выходом схемы. Рассмотрим полюс v схемы (рисунок 1а).



а) б) в)

Рисунок 1 – а) Комбинационная схема и полюс v; б) полюсу v сопоставлена входная переменная v в) полюсу v сопоставлен выход

Назовем *функцией обнаружения константной неисправности* 1(0) булеву функцию $D^1(X)$ ($D^0(X)$) такую, что $D^1(\alpha) = 1$ ($D^0(\alpha) = 1$) тогда и только тогда, когда α является тестом для неисправности константа 1 (неисправности константа 0) на полюсе v.

Функция наблюдаемости $B(X)$ – это булева функция, такая что $B(\alpha) = 1$ тогда и только тогда, когда α – это входной набор, который обеспечивает смену значения хотя бы на одном из выходов схемы при смене значения на рассматриваемом полюсе v.

Следовательно,

$$B_i(X) = \varphi_i^1(X) \oplus \varphi_i^0(X), \quad i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

$$B(X) = B_1 \vee ... \vee B_m, \tag{2}$$

где B_i – функция наблюдаемости полюса v на i-ом выходе схемы.

Обозначим через $f(X)$ функцию, реализуемую полюсом v. *Функции* 1-*управляемости* – $C^1(X)$, и 0-*управляемости* – $C^0(X)$, имеют вид:

$$C^1(X) = f(X);\ C^0(X) = \overline{f}(X). \tag{3}$$

Функции D^1 и D^0 можно получить на основе функций наблюдаемости и управляемости по формулам:

$$D^1(X) = B(X) \cdot C^0(X);\ D^0(X) = B(X) \cdot C^1(X). \quad (4)$$

Формулы (1) – (4) справедливы для любого представления булевых функций.

а) б)

Рисунок 2 – Схема: а) S^1 – S с неисправностью константа 1 на полюсе v; б) S^0 – S с неисправностью константа 0 на полюсе v

Сопоставим входную переменную v полюсу v схемы. Обозначим через $\eta_i(X, v)$, $i = \overline{1,m}$, функцию, реализуемую на i-ом выходе схемы, где переменная v – входная переменная. Функции $\eta_i(X, v)$ в некотором представлении могут быть получены по структурному описанию схемы с рисунка 1б.

$\eta_i(X, v)$ порождает функции $\varphi_i(X)$, $\varphi_i^1(X)$ и $\varphi_i^0(X)$: $\varphi_i(X) = \eta_i(X, f(X))$, $\varphi_i^1(X) = \eta_i(X,1)$, $\varphi_i^0(X) = \eta_i(X,0)$.

Функции $\varphi_i^1(X)$ и $\varphi_i^0(X)$ в некотором представлении могут быть получены из функции $\eta_i(X, v)$ или из структурного описания схем S^1 и S^0 (рисунок 2). Заметим, что схемы S^1 и S^0 с рисунка 2 – это подсхемы схемы S, которые могут быть упрощены после подстановки в полюс v 1 и 0 соответственно.

Полюсу элемента схемы соответствует частичная функция, принимающую значения на множестве {0, 1, *}. Функции $D^1(X)$ и $D^0(X)$ представляют соответственно области нулевых и единичных значений этой частичной функции, а $\overline{B}(X)$ представляет область неопределенных значений функции.

Введем отношение частичного порядка между элементами схемы e_i и e_j: $e_i < e_j$, если выход i-го элемента связан с входом j-го элемента.

Рассмотрим пример получения в виде BDD (ROBDD) или ДНФ (ОДНФ) функций, реализуемых схемой, по структурному описанию схемы. Запишем элементы схемы в линейном порядке $e_{k1}, e_{k2}, \ldots, e_{kt}$ так, чтобы выполнялись все отношения между элементами, т.е. если $e_{ki} < e_{kj}$, то e_{ki} в линейном порядке предшествует элементу e_{kj}. Упорядочивание элементов выполним, например, с помощью топологической сортировки. Тогда двигаясь по элементам от первого к последнему в полученной последовательности и применяя функции, реализуемые элементами, к BDD или ДНФ функций, реализуемых на входах элементов, получим BDD или ДНФ функций, реализуемых на выходах каждого из элементов схемы и на выходах схемы в целом. При построении ДНФ помимо получения ДНФ функций, реализуемых на выходах элементов схемы, будем также получать ДНФ инверсий этих функций.

Пример**.**

Рассмотрим пример для частичной функции, рассмотренной в [2]. Построим достаточные множества для функции F = (**01**0111******).

$M_F^0 = \{0010,0110\}$, $M_F^1 = \{0011,0111,1000,1001\}$.

Матрица сумм $M(F)$ для этой частичной функции будет следующей:

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	1	0
1	1	1	1

У полученной матрицы два покрывающих множества: x_1x_4 и x_3x_4. Они соответствуют двум безызбыточным достаточным множествам функции F.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубева О.И. Получение частичной функции и допустимых функций полюса элемента комбинационной схемы // Кулагинские чтения: техника и технологии производственных процессов: XVIII Междунар. Науч.-практ. Конф.: сб. Ст. / Забайкал. гос. ун-т. Чита. 28 – 30 ноября 2018. – Чита: ЗабГУ, 2018. – Ч. 2. – С. 271 – 276.
2. Golubeva O., Construction of Permissible Functions and their Application for Fault Tolerance // 2019 IEEE International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Tomsk, Russia. 18−20 April 2019. 5 pp.
3. Парватов Н.Г., Голубева О.И. Нахождение достаточных множеств частичной функции // Материалы Двенадцатой конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». – Томск: ТГУ, 2018. С. 77.

УДК 519.715

ТРОИЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМБИНАЦИОННЫХ И СИНХРОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНЫХ СХЕМ

О.И. Голубева, к.т.н., доц.
Томский государственный университет
e-mail: *golubeva-o@yandex.ru*

Предлагаются методы точного троичного моделирования комбинационных и синхронных последовательностных схем. Методы являются развитием ранее предложенных методов, основанных на ДНФ и ROBDD представлениях булевых функций, а также на применении SAT-решателей.

Ключевые слова: точное троичное моделирование, комбинационная схема, последовательностная схема, граф переходов схемы, граф переходов-выходов схемы.

В данной работе рассматривается задача точного троичного моделирования комбинационных и синхронных последовательностных схем. Выполняется дальнейшее развитие ранее предложенных методов точного троичного моделирования [1−3], предлагаются более эффективные решения задачи.

Троичное моделирование находит широкое применение. В частности, троичное моделирование применяется при верификации схем [4]. Верификация выполняется с целью проверки функционального соответствия проектируемого устройства исходному заданию.

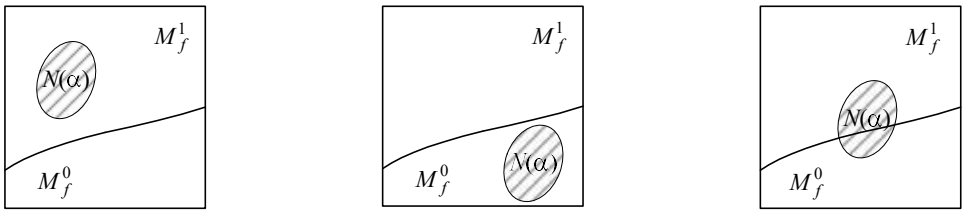
Обозначим символом × неопределенное значение из множества {0, 1}. Вектор $\alpha = (\alpha_0,...,\alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0,1,\times\}$, $i = \overline{1,n}$, будем называть *троичным вектором*. Троичный вектор $\alpha = (\alpha_0,...,\alpha_n)$ задает интервал $N(\alpha)$ в булевом пространстве размерности n. Будем говорить, что троичный вектор α представляет множество булевых векторов $N(\alpha)$.

Рассмотрим полностью определенную булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Будем множество $M_f^1 = \{\gamma \in E_n^2 : f(\gamma) = 1\}$ ($M_f^0 = \{\gamma \in E_n^2 : f(\gamma) = 0\}$) называть областью единичных (нулевых) значений функции f.

В работе [1] задача троичного моделирования рассматривается как задача получения значения интервального расширения булевой функции. Здесь для краткости опустим определение интервального расширения и будем говорить о троичном значении булевой функции на троичном векторе.

Определим точное троичное моделирование булевой функции f на троичном векторе α следующим образом. Если интервал $N(\alpha)$ полностью лежит в области M_f^1 (M_f^0), т.е. $\forall\gamma \in N(\alpha): f(\gamma) = 1$ (0), то точное троичное значение $f(\alpha)$ равно 1 (0), если интервал $N(\alpha)$ пересекается с обеими областями, т.е. $\exists\gamma_i \in N(\alpha): f(\gamma_i) = 1$ и $\exists\gamma_j \in N(\alpha): f(\gamma_j) = 0$, то значение при моделировании – ×.

Проиллюстрируем точное троичное значение булевой функции $f(x_1,...,x_n)$ на троичном векторе $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ на диаграмме (рисунок 1).



а) б) в)

Рисунок 1 – а) $f(\alpha) = 1$, б) $f(\alpha) = 0$, в) $f(\alpha) = \times$

На рисунке 1 прямоугольником представлено булево пространство размерности n. Оно разделено на области M_f^1 и M_f^0. Интервал $N(\alpha)$ может полностью содержаться в области единичных (нулевых) значений, как на рисунке 1а (1б), в этом случае $f(\alpha) = 1(0)$, или же может пересекаться с обеими областями, как на рисунке 1в, тогда $f(\alpha) = \times$.

Рассмотрим комбинационную схему с n входами и m выходами. $X = \{x_1, ..., x_n\}$ – входные переменные схемы, $Y = \{y_1, ..., y_m\}$ – ее выходные переменные.

Рассмотрим троичное моделирование комбинационной схемы. Задача точного троичного моделирования комбинационной схемы определяется как задача точного троичного моделирования булевых функций, реализуемых схемой.

Если мощность интервала $N(\alpha)$ невелика, то троичное моделирование выполним с помощью двоичного моделирования по структурному описанию схемы на всех векторах из $N(\alpha)$. Значения на выходах получим согласно определению точного троичного моделирования. Далее рассмотрим методы, которые целесообразно применять при большой мощности интервала $N(\alpha)$.

Задача троичного моделирования комбинационных схем с применением SAT-решателей была кратко рассмотрена в работе [3]. Здесь представим предложенный метод подробнее.

В дальнейшем под подстановкой констант будем подразумевать также и сокращение (упрощение) схемы (или формулы), если оно целесообразно.

Построим некоторым известным способом КНФ $P(X, Y, V)$ по структурному описанию комбинационной схемы. КНФ $P(X, Y, V)$ зависит от множеств переменных X, Y и множества переменных V, соответствующих выходам элементов схемы:

$$P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, V) . \quad (1)$$

Выполним подстановку констант (определенных значений) в переменные множества X из вектора α. Получим КНФ:

$$P^*(X^*, Y, V). \quad (2)$$

Рассмотрим два подхода к троичному моделированию. В первом подходе для получения точного значения троичного моделирования на выходе j подставим вместо переменной y_j КНФ P^* сначала 1, исключим дизъюнкты для элементов схемы не связанных с выходом j и решим задачу выполнимости КНФ, а затем подставим 0 и, после исключения дизъюнктов, также решим задачу выполнимости КНФ. Если решение получено в обоих случаях, то результат моделирования − ×. Если только для 1(0), то получим 1(0).

При данном подходе можно сократить вычисления следующим образом. Предварительно выполним двоичное моделирование по структурному описанию схемы на некотором количестве случайных булевых векторов из $N(\alpha)$. Если в результате моделирования на выходе j получены как значение 1, так и значение 0, то результат моделирования – ×, если получено одно значение на всех векторах (1 или 0), то решим задачу выполнимости КНФ только для второго из них (0 или 1).

Возможен также второй вариант троичного моделирования, при котором задача выполнимости решается сразу для всех выходов. При этом получим все выполняющие наборы для КНФ P^*. Если в полученных выполняющих наборах на выходе j встречается только значение 1(0), то результат моделирования для этого выхода – 1(0), иначе – ×.

Отметим, что данные подходы к троичному моделированию применимы также и для последовательностных схем. В этом случае моделирование выполняется по комбинационному эквиваленту схемы. Дополнительные методы сокращения вычислений, применимые при моделировании последовательностных схем, представлены в работе [3].

Задача троичного моделирования булевой функции, представленной ROBDD, была рассмотрена в статье [2]. Здесь предлагается детализация ранее предложенного решения.

Введем бинарную операцию $\cup$ над троичными аргументами. $z = x \cup y$, где x и y – троичные значения, определим следующим образом: 1) если один из аргументов принимает значение ×, то z = ×, 2) $1 \cup 1 = 1$, 3) $0 \cup 0 = 0$, 4) $1 \cup 0 = \times$, 5) $0 \cup 1 = \times$.

Метод троичного моделирования булевой функции, представленный в [2], заключается в следующем.

Вычислим троичное значение булевой функции f, представленной ROBDD графом, на троичном векторе α, выполнив сокращенный обход графа. При таком обходе для вершин вычисляются троичные значения. Если для некоторой вершины троичное значение уже вычислено, то оно сохраняется и при необходимости используется при прохождении других путей.

Метод.

Вычисление троичного значения булевой функции f, представленной ROBDD, на троичном векторе α сокращенным обходом графа.

1) Для функции $f_w(X)$, представленной ROBDD с корнем w, троичное значение $f_w(\alpha)$ вычисляется следующим образом:

если w – терминальная вершина со значением 0 (1), то $f_w(\alpha) = 0$ (1),

иначе:

а) если α_x равно 1, то $f_w(\alpha) = f_{high(w)}(\alpha)$,

б) если α_x равно 0, то $f_w(\alpha) = f_{low(w)}(\alpha)$,

в) если α_x равно ×, то $f_w(\alpha) = f_{low(w)}(\alpha) \cup f_{high(w)}(\alpha)$,

где x – переменная, соответствующая вершине w, $low(w)$ и $high(w)$ – потомки вершины w по значениям 0 и 1 переменной x, α_x – значение компоненты вектора α, соответствующей переменной x.

2) Обход графа прекращается:

а) как только для некоторой вершины графа получено значение ×. Тогда $f(\alpha) = \times$. Или

б) получено значение в корне ROBDD. Оно является значением $f(\alpha)$.

Отметим, что п. 1в метода может быть реализован следующим образом:

в) если α_x равно ×, то

$f_l = f_{low(w)}(\alpha), f_h = f_{high(w)}(\alpha)$,

если f_l равно f_h, то $f_w(\alpha) = f_l$, иначе $f_w(\alpha) = \times$.

Метод может быть реализован с предложенным предварительным выходом по значению × или без него в зависимости от выбранных способов представления данных и реализации метода.

Рассмотрим пример рекурсивной реализации метода. Псевдокод процедуры представлен на рисунке 2.

```
TSim(w){

    if f[w] = 1 then return v[w]; end if

    if α_x = 1 then

        v[w] ← TSim(high(w)); f[w] ← 1; return v[w]

    end if

    if α_x = 0 then

        v[w] ← TSim(low(w)); f[w] ← 1; return v[w]

                    end if

    // если α_x = ×

    f_h ← TSim(high(w))

    if f_h = × then return × endif

    f_l ← TSim(low(w))

    if f_l = × then return × endif

    if f_h = f_l then v[w] ← f_l; else v[w] ← ×; endif

    f[w] ← 1; return v[w]

}
```

Рисунок 2 – Псевдокод рекурсивной процедуры, реализующей метод троичного моделирования по ROBDD

Здесь используются два вспомогательных массива: f и v, в каждом из которых каждой вершине графа (в том числе терминальным вершинам) сопостав-

лено значение. $f[i]$ – содержит 0, если значение вершины i графа еще не было вычислено, иначе – 1. $v[i]$, при $f[i] = 1$, содержит вычисленное значение в вершине i. Для каждой терминальной вершины j в элемент $v[j]$ записываем значение вершины j (1 или 0), а в $f[j]$ заносим 1. Параметр процедуры – вершина ROBDD. Перед запуском процедуры обнуляем массив f. Запускаем процедуру с параметром – корнем ROBDD.

Отметим, что это не единственный возможный способ реализации метода.

Предложенное решение задачи троичного моделирования легко модифицируется на решение задачи: определить, является ли конъюнкция k импликантой булевой функции f. Эта задача эквивалентна задаче: определить, равно ли $f(\alpha)$ единице, где α – троичный вектор, соответствующий конъюнкции k. При решении этой задачи условие 2 прекращения обхода графа выглядит следующим образом.

2) Обход графа прекращается:

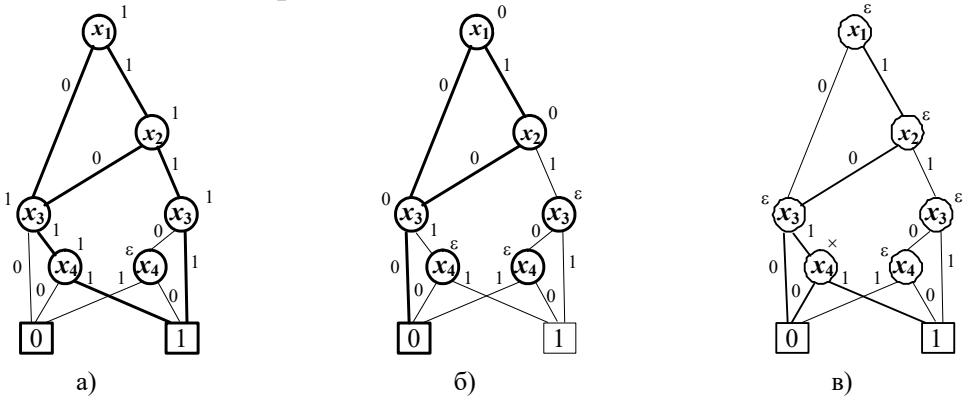
а) как только достигнута терминальная вершина 0. Тогда конъюнкция k не является имликантой. Или

б) получено значение в корне ROBDD. Если оно равно 1, то конъюнкция k является имликантой, иначе – нет.

Аналогично решается задача: определить, является ли конъюнкция k импликантой $\overline{f}$, а также другие варианты задачи.

Пример.

Рассмотрим вычисление точного троичного значения функции, представленной ROBDD, предложенным методом. На рисунке 3 представлено вычисление $f(\alpha)$ для трех троичных векторов. При вычислении необходимо обойти только дуги, выделенные толстыми линиями. Около вершин ROBDD указаны значения, полученные при завершении выполнения метода с применением предварительного выхода по значению ×. Не вычисленные значения в вершинах ROBDD обозначены через ε.



а) б) в)

Рисунок 3 – Иллюстрация вычисления точных значений функции f на троичных векторах:

а) $(\overset{x_1}{\times}, \overset{x_2}{\times}, \overset{x_3}{1}, \overset{x_4}{1})$, б) $(\overset{x_1}{\times}, \overset{x_2}{0}, \overset{x_3}{0}, \overset{x_4}{\times})$, в) $(\overset{x_1}{1}, \overset{x_2}{\times}, \overset{x_3}{\times}, \overset{x_4}{\times})$

Рассмотрим синхронную последовательностную схему с n входами, m выходами и p линиями обратных связей. $X = \{x_1, ..., x_n\}$ – входные переменные

схемы, $Y = \{y_1, ..., y_m\}$ – ее выходные переменные, $Z = \{z_1, ..., z_p\}$ – внутренние переменные схемы.

Система функций переходов схемы имеет вид:

$$z_j^t = \psi_j(x_1^t,\ldots,x_n^t,z_1^{t-1},\ldots,z_p^{t-1}),\ j = \overline{1,p}. \quad (1)$$

Необходимо выполнить точное троичное моделирование схемы при заданных входной троичной последовательности $\alpha^1,\alpha^2,...,\alpha^k$ и троичном векторе начального состояния δ^0 и получить троичную последовательность значений внутренних переменных – $\delta^1,\delta^2,...,\delta^k$, и троичную последовательность выходных значений – $\beta^1,\beta^2,...,\beta^k$.

Будем двоичный вектор $\tau^i = (\tau_1^i,...,\tau_p^i)$ значений переменных Z называть *кодом состояния* q_i. $Q = \{q_1,...,q_t\}$, $t = 2^p$, – множество всех состояний схемы.

В данной статье предлагается метод решения поставленной задачи, являющийся развитием ранее предложенных методов [1, 5].

Будем представлять полное состояние схемы троичным вектором (α,δ), где α – вектор значений X, а δ – вектор значений Z. Ранее был предложен подход (см. [1, 3]), позволяющий выполнять точное троичное моделирование пошагово по комбинационному эквиваленту схемы длины 1. При этом на каждом шаге t вычисляется точное множество внутренних состояний, достижимых из множества состояний $N(\delta'^{t-1})$ (состояния $N(\delta'^{t-1})$ достижимы на шаге $t-1$) и множества входных векторов $N(\alpha^t)$. Переход от последовательности $\delta^1,...,\delta^k$ к последовательности $\delta'^1,...,\delta'^k$ и обратно был представлен ранее (см. [1]).

Будем определять возможные переходы схемы по системе ROBDD представлений булевых функций, реализуемых комбинационным эквивалентом схемы длины 1, которую получим, например, из структурного описания схемы.

Определим возможные переходы из (α^t,δ'^{t-1}).

Если мощность множества $N(\alpha^t) \times N(\delta'^{t-1})$ невелика, то можно выполнить троичное моделирование, выполнив двоичное моделирование на всех булевых векторах из $N(\alpha^t) \times N(\delta'^{t-1})$. Далее рассмотрим методы, которые целесообразно применять при большой мощности интервала $N(\alpha^t) \times N(\delta'^{t-1})$.

Предварительно выполним следующие шаги сокращения вычислений [3, 5].

1) С помощью двоичного моделирования на случайных двоичных векторах (α^{*i},τ^i), где $(\alpha^{*i},\tau^i) \in N(\alpha^t) \times N(\delta'^{t-1})$, получим часть состояний S^1, в которые можно попасть из состояний $N(\alpha^t) \times N(\delta'^{t-1})$.

2) Выполним троичное моделирование (приближенное или точное) функций переходов на векторе (α^t,δ^{t-1}) и найдем троичный вектор δ^{*t} их значений. Множество $S_2 = Q \backslash N(\delta^{*t})$ представляет множество тех состояний, в которые схема не может попасть из состояний $N(\alpha^t) \times N(\delta'^{t-1})$.

Шаги 1 и 2 сокращения вычислений применяются до основных вычислений. Для каждого из неопределенных после шагов 1 и 2 состояний $q_j \in S_3$, где $S_3 = Q \backslash (S_1 \cup S_2)$, определим возможность переходов в них из состояний (α^t,τ^i), где $\tau^i \in N(\delta'^{t-1})$.

Применение SAT-решателей рассмотрено в [3]. Рассмотрим применение ROBDD при решении задачи.

Рассмотрим модификацию одного из подходов, кратко представленного в [5]. Отметим, что в статье [5] также предложено другое решение для задачи построения графа переходов схемы с кратким описанием возможности его применения для троичного моделирования.

Построим ROBDD $G_{ji}^{\psi'}(X)$, представляющий входные векторы, на которых выполняется переход из состояния i в состояние j. Выполним точное троичное моделирование $G_{ji}^{\psi'}(X)$ на векторе α^t. Если $G_{ji}^{\psi'}(\alpha^t) \neq \varnothing$, то переход возможен, иначе – нет.

Рассмотрим получение $G_{ji}^{\psi'}(X)$. Для построения $G_{ji}^{\psi'}(X)$ сначала получим ROBDD $G_k^{\psi}(X,Z)$ каждой функции ψ_k, $k=\overline{1,p}$, системы (1) (например, по структурному описанию схемы).

Процедура. Получение функций $G_{ji}^{\psi'}(X)$.

Для состояния q_j схемы с кодом $\tau^j=(\tau_1^j,...,\tau_p^j)$ получим $G_{ji}^{\psi'}(X)$, выполнив логическое произведение p ROBDD $G_{ki}^{\psi}(X)=G_k^{\psi}(X,\tau_i)$ или их инверсий. Причем, если $\tau_k^j=1$, $k\in\{1,...,p\}$, то в произведение входит $G_{ki}^{\psi}(X)$, если $\tau_k^j=0$, то в произведение входит $\overline{G}_{ki}^{\psi}(X)$.

Таким образом, процедура совпадает с процедурой, описанной в [5], но расширена на случай произвольного порядка переменных при получении ROBDD.

Подстановка констант в ROBDD при получении $G_{ki}^{\psi}(X)=G_k^{\psi}(X,\tau_i)$ выполняется по известным правилам. Заметим, что в Процедуре вместо $G_{ki}^{\psi}(X)$ и $\overline{G}_{ki}^{\psi}(X)$ можно получить $G_{ki}^{\psi^*}(X)$ и $\overline{G}_{ki}^{\psi^*}(X)$, подставив также и константы из α^t, и выполнять их произведение.

Данный метод можно распространить также на ДНФ и другие представления булевых функций.

Замечания 1.1 и 1.2 из [5] остаются в силе и для троичного моделирования.

В данной статье опустим описание вычисления значений на выходах.

Заметим, что предложенный метод определения возможных переходов можно, с необходимыми модификациями, применить для построения графа переходов или переходов-выходов схемы, рассмотренного в [5]. Отличие от ранее предложенного метода в том, что в данном методе не накладывается ограничение на порядок переменных при разложении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубева О. И. Интервальные расширения булевых функций и троичное моделирование последовательностных схем // Таврический научный обозреватель. 2017. №5 (22). С. 208–220.
2. Голубева О. И. Троичное моделирование комбинационных схем с использованием ROBDD // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. – Саратов: Издат. центр «Наука», 2018. С. 112–114.
3. Голубева О.И. Троичное моделирование схем с применением SAT-решателей // Кулагинские чтения: техника и технологии производственных процессов: XVIII Междунар. Науч.-практ. Конф.: сб. Ст. [в 3 ч.] / Забайкал. гос. ун-т. Чита. 28 – 30 ноября 2018. – Чита: ЗабГУ, 2018. – Ч. 2. – С. 266 – 270.
4. Черемисинова Л. Д. Верификация логических описаний с функциональной неопределенностью на основе моделирования // Образовательные ресурсы и технологии. 2016. №2 (14). С. 409–416.
5. Голубева О. И. Построение графа переходов последовательностной схемы // Современные проблемы физико-математических наук: материалы IV Всероссийской науч.-практ. конф. с международным участием, (22-25 ноября 2018 г., г. Орёл). – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2018. – Ч. 1. – С. 230 – 235.

УДК 519.718

CONSTRUCTION OF CONTROLLABILITY, OBSERVABILITY AND STUCK-AT FAULT DETECTION FUNCTIONS

O. Golubeva
Tomsk State University
e-mail: *golubeva-o@yandex.ru*
D. Ruday
Tomsk State University
e-mail: *zzzing5@yandex.ru*

Methods for constructing testability functions, namely, controllability, observability and stuck-at fault detection functions, are considered. This work discusses the details of a possible process for computing testability functions. The focus is on obtaining functions in ROBDD and DNF.

Key words: testability functions, controllability function, observability function, stuck-at fault detection function, ROBDD, DNF.

The methods of constructing testability functions, namely, controllability, observability and stuck-at faults detection functions, are considered [1 – 3]. This work discusses the details of a possible process for computing testability functions. The main attention is made to their construction in the ROBDD and DNF.

Consider a combinational circuit S with n inputs and m outputs. X, $X = \{x_1, ..., x_n\}$, is the set of input variables of the circuit. $\varphi_i(X)$, $i = \overline{1,m}$, is a Boolean function performed by the i^{th} output of the fault-free circuit S.

Consider a line v of the circuit S (figure 1a). S^1 (S^0) is the circuit S with a stuck-at-1 (stuck-at-0) fault on line v (figure 2); $\varphi_i^1(X)$ ($\varphi_i^0(X)$) is a Boolean function performed by the i^{th} output of the circuit S^1 (S^0).

a) b)

Figure 1 – Combinational circuit S and a) line v; b) function $f(X)$

Call the *stuck-at*-1 (*stuck-at*-0) *fault detection function* on line v a Boolean function $D^1(X)$ ($D^0(X)$) such that $D^1(\alpha) = 1$ ($D^0(\alpha) = 1$) iff α is a test for the stuck-at-1 (stuck-at-0) fault on line v.

a) b)

Figure 2 – The circuit: a) S^1 – S with the stuck-at-1 fault on line v; b) S^0 – S with the stuck-at-0 fault on line v

$D^1(X)$ ($D^0(X)$) represents all test vectors for the single stuck-at-1 (stuck-at-0) fault on line v.

The observability function of line v is a Boolean function $B(X)$ such that $B(\alpha) = 1$ iff α is an input vector that provides different values on at least one of the circuit outputs for different values on line v.

Consequently,

$$B_i(X) = \varphi_i^1(X) \oplus \varphi_i^0(X), \quad i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

$$B(X) = B_1 \vee \ldots \vee B_m. \tag{2}$$

where B_i is the observability function of line v at the i^{th} output of the circuit.

The observability function $B_i(X)$ represents all input vectors that provide different values at the i^{th} circuit output for different values on line v.

The 1-*controllability* (0-*controllability*) *function* $C^1(X)$ ($C^0(X)$) represents input vectors providing a value 1 (0) on line v. The 1-*controllability function* is performed by the output of the sub-circuit corresponding to line v; its inversion is the 0-*controllability function*. Denote as $f(X)$ a Boolean function performed on line v of the circuit (figure 1b). Then:

$$C^1(X) = f(X),\ C^0(X) = \overline{f}(X). \tag{3}$$

The stuck-at fault detection functions can be constructed by the following formulas:

$$D^1(X) = \bigvee_{i=1}^{n} (\varphi_i \oplus \varphi_i^1),$$

$$D^0(X) = \bigvee_{i=1}^{n} (\varphi_i \oplus \varphi_i^0). \tag{4}$$

The stuck-at fault detection functions can be also constructed by the formulas using controllability and observability functions [1]:

$$D^1(X) = B(X) \cdot C^0(X),$$
$$D^0(X) = B(X) \cdot C^1(X). \quad (5)$$

Testability functions can be obtained from the structural description of the circuit and formulas (1) – (5) [1, 3]. Formulas (1) – (5) are true for any representation of Boolean functions. Functions $\varphi_i^1(X)$ and $\varphi_i^0(X)$ in some representation can be obtained from the structural description of circuits S^1 and S^0 (figure 2). Circuits S^1 and S^0 in figure 2 are sub-circuits of the circuit S, which can be simplified after substituting constants 1 and 0 into line v, respectively. Note that this is not the only way of obtaining functions $\varphi_i^1(X)$ and $\varphi_i^0(X)$ [1, 3].

ROBDDs of Boolean functions implemented by a combinational circuit can be obtained from the structural description of the circuit as follows [4]. First, the ROBDDs of all input variables of the circuit are constructed. Then, by levels, from the circuit inputs to the outputs, ROBDDs of all intermediate subfunctions are constructed. When constructing the ROBDD of the next circuit element, the Boolean function implemented by this element is applied to ROBDD at the inputs of the element. ROBDDs of elements, the outputs of which are the circuit outputs, represent the Boolean functions implemented by the circuit.

Note that to obtain ROBDD in the described way, the elements can also be considered in the following linear order: any element e is situated after all elements outputs of which are inputs of the element e.

Computing ROBDD for the circuit in this way, we obtain the ROBDDs of functions implemented on each element of the circuit (on each circuit line).

Note that this way of obtaining functions, implemented by elements (lines) of the circuit, is also suitable for other representations of functions. For example, DNF. In general case, when obtaining DNFs for functions implemented by the circuit, it is necessary to obtain DNFs of the function and its inversion of each element.

1-controllability functions are implemented on elements (lines) of the fault-free circuit.

Let's define a circuit with a linear list of elements, where each element of the list represents one element of the circuit and contains its description (number of inputs, inputs numbers, function implemented by the element, etc.). The list of elements in the program can be specified, for example, by an array or a list. Order the list of elements so that each element e_i is situated in the list after all elements outputs of which are inputs of e_i. Such ordering can be performed, for example, using topological sorting.

Describe an example of implementation of sorting for a list of elements.

1) With each element e_i of the list, associate the number d_i with a value equal to the number of inputs of the element that are not the primary inputs of the circuit. d_i is the number of e_i inputs that have not yet been viewed during the construction of the resulting list.

2) Include in the result list all elements (in any order) for which d_i is equal to 0.

3) Remove the elements chosen in 2 from the initial list, and for each element whose inputs are the outputs of these elements, decrease the number d_i of inputs that have not yet been viewed by the corresponding value.

4) If the list is not empty, then return to 2, otherwise exit.

Moving from the beginning to the end of the list, it is possible to obtain the Boolean functions, implemented by the circuit, perform binary simulation or other manipulations on the circuit.

Note that this work presents a possible process for calculating testability functions using formulas (1) – (5). However, they can also be obtained using other methods of representing the circuit in the program and obtaining ROBDD (DNF) of functions implemented by the circuit.

REFERENCES

1. O. Golubeva. Elaboration and Research of Methods of Simulation and Testability Measures Estimation of Logical Circuits. Ph.D. thesis. Tomsk State University: Russian Federation. 2000. (In Russian)
2. O. Golubeva, “Stuck-at fault detection, controllability and observability functions of the combinational circuit gate pole”, Tomsk State University Journal of Control and Computer Science, no. 1 (30), pp. 77–86, March 2015. (In Russian)
3. Golubeva O., “Construction of Permissible Functions and their Application for Fault Tolerance”, 2019 IEEE International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Tomsk, Russia. 18−20 April 2019.
4. Karpov Yu.G. MODEL CHECKING. Verification of Parallel and Distributed Systems. St. Petersburg, BHV-Petersburg, 2010. 551 p.

УДК 621.01; 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СКОРОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ И НАПРЯЖЕНИЙ В ДВУХЗВЕННОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Л.А. Кондратенко, д.т.н., проф.
НИЯУ (МИФИ)
e-mail: *kondrat.leonid@yandex.ru*
Л.И. Миронова, д.т.н., проф.
МАИ (НИУ)
e-mail: *mironova_lub@mail.ru*

Применяемые в промышленности устройства для обработки глубоких отверстий в деталях энергетических и нефтегазохимических установок, в гребных валах и валах турбобуров, добычи нефти и бурения скважин на нефть и газ и др., представляют собой механические системы, содержащие входное и выходное звенья, соединенные длинными силовыми линиями. В статье разработан метод исследования систем с бесконечным числом степеней свободы. Этот метод основан на уравнениях количества движения и момента количества движения в дифференциальной форме. Решение полученных систем уравнений в частных производных с использованием преобразования по Лапласу дало возможность получить общие уравнения движения, а затем после некоторых упрощений перейти к обыкновенным дифференциальным уравнениям, учитывающим динамические особенности систем с распределенными параметрами. Решение таких уравнений модернизированным методом Рунге-Кутты дало результаты, хорошо сходящиеся с натурными экспериментами.

Ключевые слова: распределенные параметры, механическая система, колебания, напряжение, скорость, преобразования по Лапласу, гидропривод, частотные характеристики.

1. Введение

Двухзвенные механические системы, содержат входное звено-двигатель и выходное звено – исполнительный орган (режущая часть сверла, долото, фреза и т.п.), соединенные длинными силовыми магистралями. Подобные простейшие механизмы Бабаков И.М. [1] относит к системам с бесконечным числом степеней свободы. Такие системы применяют при глубоком сверлении, бурении скважин и др.

Для более эффективного применения отмеченных устройств важно с максимальной точностью поддерживать рациональные режимы работы, обычно включающие требуемые скорость движения исполнительного органа и напряжения в магистралях, которые могут изменяться в зависимости от условий работы. При наличии разнообразных воздействий решать подобные задачи по определению отмеченных режимов и параметров, свидетельствующих о необходимости их изменений, можно лишь, имея соответствующую теорию и методы исследования.

Изучению процессов в длинных силовых магистралях механических систем, обычно описываемых с помощью дифференциальных уравнений в частных производных, посвящен ряд работ, например [1]-[9] и т.д. При этом лишь в [2], [8], [9] авторы учитывают наличие на выходе нагрузки.

В большинстве случаев механические системы работают под действием переменных внешних воздействий при наличии различных нелинейностей, в том числе и существенных (люфт, ограничения давлений и перемещений, зона нечувствительности и др.). В опубликованной литературе не удалось найти сведений о точном решении задач по определению параметров движения таких систем.

В данной работе предлагается новый метод решения подобных задач. Здесь в отличие от обычно применяемых методов в явной форме учитываются колебания скоростей и напряжений, а также различные нелинейности, как существенные, так и несущественные.

2. Вывод основных уравнений

Для решения этой задачи при рассмотрении продольных колебаний в прямом твердом стержне в случае отсутствия массовых сил использовано уравнение количества движения в дифференциальной форме [5]

$$\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \tag{1}$$

и уравнение продольных колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где $\upsilon = \partial u / \partial t$; u – перемещение вдоль оси x; σ – продольное (нормальное) напряжение; ρ – плотность материала; E – модуль упругости.

Получив из (1), (2) $\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и интегрируя это по x, полагая, что при $x = 0$ $\sigma = \text{const}$, а затем дифференцируем полученное по t

$$E^{-1}\frac{\partial\sigma_x}{\partial t}=\frac{\partial\upsilon}{\partial x}. \tag{3}$$

С использованием этого выражения приходим к итоговой системе

$$\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=-\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \qquad \frac{1}{E}\frac{\partial\sigma}{\partial t}=-\frac{\partial\upsilon}{\partial x}. \tag{4}$$

Пользуясь таким же приемом для крутильных колебаний получим систему

$$\rho r\frac{\partial\Omega}{\partial t}=-\frac{\partial\tau}{\partial x}, \quad rG\frac{\partial\Omega}{\partial x}=-\frac{\partial\tau}{\partial t}. \tag{5}$$

где $\Omega=\partial\varphi/\partial t$; τ – максимальные касательные напряжения; φ, x – соответственно, угол поворота сечения магистрали и продольная координата с нулем в центре ведущего конца привода; G – модуль сдвига материала; ρ – плотность материала.

Системы уравнений (4), (5) позволяют описать изменения напряжений в элементарном объеме и скорости движения элементарных участков магистрали. Рассматривая крутильные колебания и полагая G, ρ постоянными и проводя

при нулевых начальных условиях одномерное преобразование по Лапласу этих уравнений [10], получим

$$\rho r\, s\ \Omega(s) = -\frac{d\tau(s)}{dx}; \quad rG\frac{d\Omega(s)}{dx} = -s\tau(s), \tag{6}$$

где s – комплексная переменная, $s = j\omega$; ω – круговая частота колебаний; $j = \pm(-1)^{1/2}$.

Допустим, что особенности передачи движения при сдвиге подобны особенностям при продольных колебаниях. В этом случае, следуя феномелогической модели Зинера [11] для элементарного объема, уравнение передачи движения можно записать в форме

$$\tau + \frac{\eta}{G_2}\frac{d\tau}{dt} = G_1\theta + \eta\frac{d\theta}{dt}, \tag{7}$$

где θ, η – деформация и вязкость; G_1, G_2 – изотермический и адиабатический модули сдвига. К примеру, для литейной стали 1Х15Н15М2К3ВТ разница между значениями таких модулей составляет около 30%.

Если уравнение (7) переписать в операторной форме, а затем при нулевых начальных условиях применить преобразование по Лапласу, то упругую характеристику силовой линии сможем описать выражением

$$G_\omega(s) = \frac{\tau(s)}{\theta(s)} = G_u(\omega) + jG_\upsilon(\omega). \tag{8}$$

Здесь G_u, G_υ – соответственно, ординаты комплексной функции $G_\omega(j\omega)$ по вещественной и мнимой осям; ω - частота колебаний..

Положим далее, что особенности взаимодействия поперечных волн с границей раздела подобны взаимодействиям продольных волн и во многом определяются волновым сопротивлением [12]

$$-\frac{\tau}{\Omega} = \rho a_2 \tag{9}$$

где a_2 – скорость движения поперечных волн.

Если рассматривать гармонические колебания, распространяющиеся по магистрали, то введем в рассмотрение операторное волновое сопротивление $Z_b(j\omega) = \frac{\tau(j\omega)}{\Omega(j\omega)}$, которое с учетом известных соотношений [12] можем представить в форме.

$$Z_b(j\omega) = \frac{j\omega G_u(\omega)\sqrt{\rho / G_u(\omega)}\sqrt{1 + j\dfrac{G_\upsilon(\omega)}{G_u(\omega)}}}{j\omega} = \frac{G_u(\omega)\theta(j\omega)}{j\omega}j, \tag{10}$$

где $\theta(j\omega) = \pm\sqrt{\dfrac{j\omega}{G_u(\omega)}[\rho j\omega + \psi(j\omega)]}$ -операторный коэффициент распространения волн; $\psi(\omega) = -\dfrac{\rho\omega E_\upsilon(\omega)}{E_u(\omega)}$ - внутреннее трение.

При ψ=0, $G_\omega = G_u = G$, ρ= *const* можно записать

$$\theta(s) = \pm s\sqrt{\frac{\rho}{G}}. \tag{11}$$

Продифференцировав первое уравнение из системы (6) по координате x, исключив затем с помощью второго уравнения производную $d\Omega(s)/dx$ и применив соотношение (11), получим [13,14]

$$\frac{\partial^2 \tau(s)}{\partial x^2} - \theta^2(s)\tau(s) = 0\,. \qquad (12)$$

В результате решения этого уравнения при соответствующих граничных условиях для согласованной нагрузки получим уравнение движения

$$\Omega_2(s)[1 + h_k \vartheta_k(s)s + J\vartheta_k(s)s^2] = \frac{\Omega_1(s)}{chA} - M_c(s)\vartheta_k(s)s\,. \qquad (13)$$

Здесь $\vartheta_k(s) = \vartheta_{k0} Z_n(s)$; $\vartheta_{k0} = \dfrac{l}{GrW_{p2}}$; $Z_k(s) = \dfrac{thA}{A}$; $A = \theta(s)l$; W_{p2} - полярный момент сопротивления сечения стержня.

Выполнив подобные преобразования применительно к продольным колебаниям и гидроприводу, получим уравнения, имеющие такой же вид, как и уравнение (13). Так для объемного гидропривода, полагая, что утечки через гидромотор существенно выше протечек через насос, получено уравнение движения [15]

$$\Omega(s)\{s^2 J\vartheta_s(s) + s[J\tau + \vartheta_s(s)h] + 1 - c + \tau h\} = Q(s)(1-c)\Psi(s) - M_c(s)[\vartheta_s(s)s + \tau], \quad (14)$$

где $\vartheta_s(s) = \dfrac{1}{E_g(s)}\vartheta_{0s}(s)Z(s)$; $\tau = \dfrac{K_{ym}}{w^2}$; $\vartheta_{0s} = \dfrac{Lf_1}{\kappa w^2}$; $Z(s) = \dfrac{thA_1}{A_1}$; $\theta_{01}(s) = \sqrt{\dfrac{\rho_0}{\kappa}}$; $A_1 = \theta_{01}(s)L$

$E_g(s)$, $\Psi(s)$ – многочлены, полученные при преобразованиях; w – объемная постоянная гидромотора; Q – расход насоса; $\theta_{01}(s)$ – операторный коэффициент распространения волн в напорной магистрали; J, c, h –параметры гидропривода; ρ_0, κ – плотность и объемный модуль упругости жидкости; Ω – частота вращения выходного вала; M_c – момент сопротивления.

При этом граничные условия определялись по балансу расходов жидкости, поступающей в трубопроводы и вытекающей из них.

Для отмеченной задачи уравнение (14) алгебраическим способом разлагалось на два

$$Q(s)\Psi(s) = w\Omega(s) + \tau w^2 p(s) + \vartheta_s(s)w^2 sp(s);$$
$$p(s)w\,(1-c) = M_c(s) + h\,\Omega(s) + Js\,\Omega(s)\,. \qquad (15)$$

где p – перепад давлений на гидромоторе.

Из системы уравнений (15) получим при $M_c = 0$ передаточную функцию

$$W_{pq}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{(Js+h)\Psi(s)}{s^2 J\vartheta_s(s) + s[J\tau + \vartheta_s(s)h] + 1 - c + \tau h}\,. \qquad (16)$$

Входящие в (16) комплексные функции $\Psi(s)$ и $\vartheta(s)$ заменим их вещественными частями $\Psi(\omega)$ и $\vartheta(\alpha)$, где $\alpha = l\omega\sqrt{\dfrac{\rho}{\kappa}}$, которые оказались существенно больше по модулю их мнимых частей. После перехода к оригиналам уравнений (15) с помощью обратного преобразования Лапласа получим систему уравнений

$$Q(t)\Psi(\omega) = w\,\Omega(t) + \tau w^2 p(t) + \vartheta(\alpha) w^2 \frac{dp}{dt};$$

$$p(t) w\,(1-c) = M_c(t) + h\,\Omega(t) + J\frac{d\Omega}{dt} \qquad (17)$$

3. Результаты исследований

Моделирование проводилось для электрогидропривода II Д № 2,5. Предохранительные клапаны были настроены на давление p = 15 МПа. Длина каждой из обеих гидравлических магистралей составила l= 22 м.

С учетом уравнений (17) и особенностей создания давлений в напорной и подпиточной магистралях для данного гидропривода составлена система уравнений из 4-х дифференциальных уравнений первого порядка. Решение этой системы уравнений осуществлялось с помощью модернизированного метода Рунге-Кутты 4-го порядка [16], где при постоянном шаге счета на каждом из четырех этапов цикла вычисления, производился учет нелинейных факторов (трение, однонаправленное вращение, ограничение по давлению), а для каждой вводимой частоты вынужденных колебаний ω производился пересчет значения α и функций Ψ (ω), ϑ_s (α).

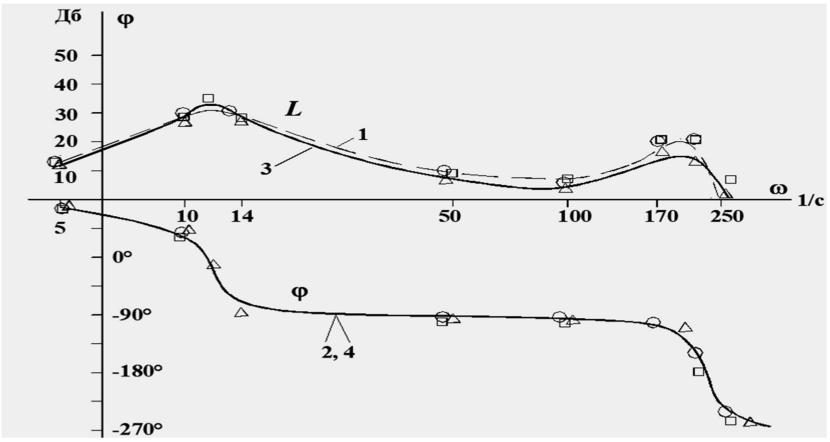


Рисунок 1 – Логарифмические амплитудная (L) и фазовая (φ) частотные характеристики машиностроительного гидропривода: кривые 1, 2 – расчетные кривые имитационной модели; кривые 3, 4 – кривые, полученные по эксперименту

Моделирование осуществлялось с помощью ПЭВМ при шагах счета H = = 10^{-4};$2*10^{-4}$сек. Ошибка не превышала 10%.

На рис.1 нанесены также кривые, полученные с помощью передаточной функции (16), и точки, определенные при натурном эксперименте. Видно, что численное моделирование, выполненное по изложенной методике, весьма точно отражает процессы в системе с распределенными параметрами упругих магистралей.

Используя описанный метод, были получены осциллограммы переходного процесса данного механизма (рис.2).

Следует отметить, что время счета одного шага вычислений составляет 0,02-0,04 мс, что существенно ниже известных программных комплексов [17].

Высокая скорость и точность счета разработанного метода позволяет:

1) специалистам более точно учитывать реакцию механизма на внешние воздействия и вырабатывать соответствующие технологические и конструкторские решения;

2) использовать предложенный алгоритм в конструкциях, например роботах, содержащих компьютер, для быстрой и своевременной оценки различных ситуаций и оперативного принятия решения.

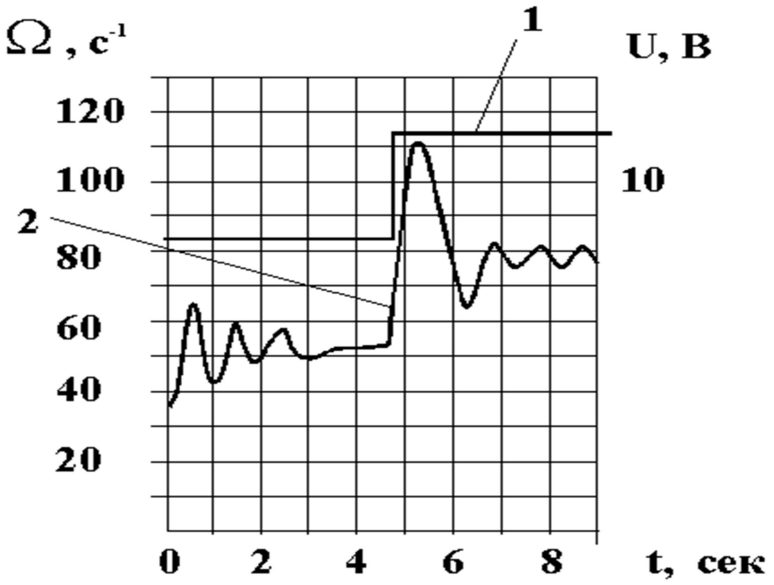


Рисунок 2 – Расчетная осциллограмма переходного процесса в электрогидроприводе: 1) U- управляющее навпряжение; 2) Ω - частота вращения вала

4. Выводы

Предложенный метод решения систем нелинейных дифференциальных уравнений, учитывающих распределенные параметры силовых магистралей механизмов, позволяет проводить разнообразные численные эксперименты по изучению параметров движения и напряженного состояния в различных механических системах и получать результаты, адекватно отражающие процессы в таких системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: ГТТЛ, 1958, .628 с.
2. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро-пневмосистем. – М.: Машиностроение, 1977, 423 с.
3. Маркин Д.Н. Теоретические основы электроакустики. – СПб.: СПбГУКиТ, 2010, 91 с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965, 716 с.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1972, Т.2, 568 с.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1965, 608 с.
7. Фролов К.В. (гл. ред.) Машиностроение. Том I-4. Автоматическое управление. Теория / под общ. ред. Е.А. Федосова. – М.: Машиностроение, 2000, 688 с.

8. Кондратенко Л.А., Миронова Л.И. Имитационное моделирование нелинейных приводов с распределенными параметрами силовых магистралей / Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – №1. – С. 92 – 97.
9. Кондратенко Л.А. Колебания и методы управления скоростью движения технологических объектов. – М.: МГОУ, 2005, 448 с.
10. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С. Математические основы теории автоматического регулирования. – М.: Высшая школа, 1971, 727 с.
11. Постников В.С. Внутреннее трение. – М.: Металлургия, 1974, 350 с.
12. Яворский Б.М., Детлаф А.А.Справочник по физике. – М.: Наука, 1974, 942 с.
13. Кондратенко Л.А., Терехов В.М., Миронова Л.И. Об одном методе исследования крутильных колебаний стержня и его применении в технологиях машиностроения/ Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2017. – №1. – С. 133 – 137.
14. Kondratenko L., Dmitriev V., Mironova L. Simulation of a drive with a long connecting link. 26th International Conference Vibroengineering, St. Petersburg, Russia. JVE International LTD. Vibroengineering Procedia. 2017, Vol. 12. ISSN 2345-0533, pp.231-236.
15. Адаменко А.И., Кондратенко Л.А. Влияние глубины скважины на динамику винтовых забойных двигателей / Проблемы машиностроения и надежность машин. – 2001 – №6. – С. 28-33.
16. Kamke E. [Differentialgleichungen, losungsmethoden und losungen] Handbook of ordinary differential equations. Leipzig, 1959. 703 s.
17.EULER [Электронный ресурс]: программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем // ЗАО «АвтоМеханика». М. 1993–2011. URL: http://www.euler.ru/index.php/euler

УДК 621.396.946:537.8

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ МОНИТОРИНГ ОБЪЕКТОВ РАДИОСВЯЗИ

И.В. Корогодина, к.пед.н.
Академия ФСО России
e-mail: *ekorogodin@yandex.ru*
С.Ю. Бондаренко
Академия ФСО России
В.А. Соловьев
Академия ФСО России

В статье обсуждаются вопросы по нормированию электромагнитных полей. Проводится сравнительный анализ отечественных и зарубежных экологических стандартов по электромагнитной безопасности объектов радиосвязи.

Ключевые слова: экологический мониторинг, экологическая безопасность, электромагнитное поле.

При анализе экологических проблем, касающихся защиты человека от ЭМП техногенного происхождения, в научной среде принято употреблять понятие «электромагнитная безопасность». Первоначально оно ассоциировалось преимущественно с медико-биологическими проблемами окружающей среды, позднее к ним прибавились вопросы об электромагнитной совместимости оборудования, а также стандартизация источников ЭМИ.

Нормирование ЭМП – сложный процесс, включающий различные виды медико-биологических исследований (гигиенические, клинико-физиологические, экспериментальные, др.), технические работы по физическому моделированию полей, электродинамическую имитацию воздействий ЭМП на биологические объекты, экономическое обоснование работ по нормированию, социальные исследования и др. Электромагнитный мониторинг технических средств, выступающих источниками ЭМП, предполагает определение значений факторов воздействия и их сопоставление с предельно допустимым уровнем (ПДУ) вредного фактора по биологически активному параметру электромагнитных полей и излучений для обеспечения безопасности населения (сохранения генетического фонда) и гарантии разумного природопользования. В нормативно-методической документации электромагнитного мониторинга установление ПДУ обеспечивает санитарно-гигиеническое сертифицирование объектов ЭМИ, включая объекты в информационно-коммуникационной сфере [1].

Принципы построения нормативно-методической документации и предельно допустимые уровни были установлены на основе результатов фундаментальных исследований, проведенных в середине 70-х – начале 80-х годов XX в. В зависимости от устройств измерений ЭМИ, экономических и технических условий эксплуатации технических устройств и развития методов диагностики состояния здоровья понятие о предельно допустимых уровнях электромагнитных полей радиочастотного диапазона трансформировалось. Так, например, в 1968 г. ПДУ величины напряженности электрического поля высо-

кочастотного диапазона был утвержден на уровне $E = 0{,}2$ В/м в отличие от указанного в современных нормативных документах – $E = 10$ В/м. Значительно строже настоящих были ПДУ 1978 г.: $E = 20$ В/м (НЧ диапазон), $E = 10$ В/м (СЧ диапазон), $E = 4$ В/м (ВЧ диапазон), $E = 2$ В/м (ОВЧ диапазон). Позднее было доказано, что передающие технические средства, которые отвечают низким значениям ПДУ, сильно теряют в своей функциональности и имеют низкий экономический эффект, что привело к пересмотру нормирующих параметров для требований по электромагнитной безопасности на объектах радиосвязи.

Согласно нормативным документам, действующим в Российской Федерации, в качестве ПДУ по электромагнитному фактору был принят показатель: минимальное значение уровня ЭМП, которое не способно даже временно вызывать у человека нарушения гомеостаза (включая репродуктивную функцию) как в период воздействия ЭМИ, так и в отдаленные сроки после его прекращения. Кроме того, опасные значения контролируемых величин определены в двух случаях – профессионального и непрофессионального видов биологического влияния ЭМИ – с учетов расстояния и времени воздействия.

Проведение электромагнитного мониторинга осуществляется:

– для уровня электрического поля – по значению напряженности E, В/м;

– для уровня магнитного поля – по значению магнитной индукции B, Тл;

– в зоне сформировавшейся волны (дальней зоне) – по плотности потока энергии (ППЭ), Вт/м^2.

В экологических стандартах европейских стран и рекомендациях ряда международных организаций и комиссий ПДУ отдельно для контролируемых и неконтролируемых условий по источникам частотного диапазона 0,003–300/400 МГц отображается в значениях напряженности электрического и магнитного полей и устанавливается на уровне 25 – 60 В/м для электрической и 0,07 – 0,16 А/м для магнитной составляющей ЭМП. Для коротковолновой составляющей ПДУ отображается в интенсивности облучения (мкВт/см^2), и верхняя граница рекомендуемых значений составляет 300 – 2000 мкВт/см^2.

В Германии и Великобритании установлены единые ПДУ для сотрудников и населения, а именно:

– в Германии в частотном диапазоне до 30 МГц предельное значение составляет $E = 3000$ В/м и $H = 7{,}5$А/м, а для коротких волн – от 2,5 до 10 мВт/см^2;

– в Великобритании в частотном диапазоне до 1550 МГц – нижнее значение $E = 0{,}125$В/м и $H = 0{,}00033$ А/м, а для коротких волн – 10 мкВт/см^2 [2].

Для частот более 10 МГц в основу большинства зарубежных стандартов положено пороговое значение удельного поглощения мощности (*SAR*), равное 0,4 Вт/кг, начиная с которого можно ожидать опасные биологические эффекты.

В стандартах США, INIRC/IRPA, CENELEC и др. отмечено, что *SAR* не должна превышать для обслуживающего персонала радиотехнических объектов 0,4 Вт/кг, а для гражданского населения – 0,08 Вт/кг. Значения ПДУ для профессиональной и непрофессиональной категорий различаются в 5 раз по мощности (или в $\sqrt{5}$ раз по напряженности поля). В целом можно отметить, что с

развитием новых медико-биологических способов оценки опасности излучений техногенного происхождения в области сертификации принимаются более жесткие ограничения воздействия ЭМП, которые учитывают различия в возрасте и состоянии здоровья персонала и населения [3].

Обеспечение экологической безопасности по электромагнитному фактору является актуальной проблемой в области информационно-коммуникационных систем. В настоящее время на территории РФ размещается значительное количество функциональных передатчиков НЧ, СЧ, ВЧ, СВЧ-диапазонов. С точки зрения мониторинга электромагнитной безопасности функционирования передающих радиоцентров принято выделять две зоны возможного неблагоприятного действия ЭМП. Первая зона – это территория, где размещены все службы, обеспечивающие работу радиопередатчиков и комплекса антенн. Она находится под охраной, куда допускаются только лица, профессионально связанные с обслуживанием передатчиков, коммутаторов и антенно-фидерных систем. Вторая зона – это прилегающие к передающему радиоцентру территории, доступ на которые неограничен, в том числе включающие жилые постройки. В этой части зоны возникает угроза превышения ПДУ облучения населения.

Серьезную опасность по электромагнитному фактору имеют наземные станции спутниковой связи. Диаграмма направленности их антенн имеет ярко выраженный узко направленный основной луч – главный лепесток. В его пределах даже на большом удалении от источника излучения плотность потока энергии может достигать величин порядка более 100 Вт/м^2. Экологический мониторинг показал, что станция мощностью 225 кВт, работающая в диапазоне 4 – 6 ГГц, создает на расстоянии 100 км ППЭ = 2,8 Вт/м^2. Узконаправленные диаграммы излучения имеют и антенны радиорелейной связи. При относительно невысокой мощности (10 – 30 Вт) в диапазоне частот от 5 до 40 ГГц имеют ППЭ 4 – 7 Вт/м^2. С точки зрения электромагнитной безопасности на объектах спутниковой и радиорелейной связи возможны два опасных случая облучения: непосредственно в районе антенны и при приближении к оси главного луча на всем его протяжении [4].

Для реализации принципов электромагнитной безопасности на объектах радиосвязи были разработаны Государственные системы стандартов (ГОСТы) и Санитарные правила (СанПиНы). СанПиНы по электромагнитной безопасности входят в группу стандартов безопасности труда. Они содержат: требования по видам опасных и вредных факторов; предельно допустимые значения параметров ЭМП и излучений; методы контроля нормируемых параметров; методы защиты работающих от опасных и вредных факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слукин В.М. Техногенные электромагнитные излучения как фактор экологии населенных пространств // Академический вестник УралНИИпроект РААСН. – 2010 г. – № 4. – С. 112-116.
2. Сподобаев Ю.М., Кубанов В.П. Основы электромагнитной экологии – М.: Радио и связь, 2000. – 240 с.

3. EMF Exposure Standards. Applicable in Europe and Elsewhere = Стандарты воздействия ЭМП. Применяется в Европе и других странах. March 2006. Ref: 2006-450-0006: [Электронный ресурс]. – URL:http://www.eurelectric.org.
4. Иванов В.Ф., Мысливцев Т.О., Троицкий Б.В. Вариант повышения точности местоопределения источников коротковолнового радиоизлучения // Геомагнетизм и аэрономия. – 2013. – № 2. – С. 233–238.

УДК 519.6

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИЛ

О. Н. Масина, д.ф.-м.н., доц.
ЕГУ им. И.А. Бунина
e-mail: *olga121@inbox.ru*
А. А. Петров
ЕГУ им. И.А. Бунина
e-mail: *xeal91@yandex.ru*

Работа посвящена построению и анализу моделей технических систем с учетом действия нестационарных сил и с учетом условий оптимальности. Предложен метод построения динамических управляемых моделей с использованием полиномиальной регрессии. Результаты могут найти применение в задачах конструирования автоматизированного транспорта и систем доставки груза, в робототехнике, а также в задачах управления движением летательных аппаратов.

Ключевые слова: оптимизация, полиномиальная аппроксимация, динамические модели, технические системы.

Развитие методов математического моделирования является актуальным для решения задач исследования и проектирования систем наземноного, воздушного и водного транспорта, космических аппаратов, а также систем управления некоторыми производственными технологическими процессами [1]. Целью работы является развитие метода построения динамических моделей управления движением технических объектов с использованием полиномиальной аппроксимации, а также поиск оптимальных параметров таких моделей. Изучению систем с аппроксимацией нелинейными функциями, используемой для упрощения решения граничной задачи, посвящены многие современные работы, в частности [2, 3].

Рассмотрим базовую модель динамики технической системы. Пусть движение объекта массой m осуществляется в декартовых координатах x, y с начальной точкой (0, 0) и делится на два этапа. На первом этапе, соответствующем интервалу $(0,\, t_1)$, объект перемещается на плоскости xoy под воздействием постоянной векторной тяги $(f_{x_1},\, f_{y_1})$ до достижения высоты h. На втором этапе, соответствующем интервалу $(t_1,\, t_2)$, объект перемещается с постоянной векторной тягой $(-f_{x_2},\, f_{y_2})$, достигая конечной точки $L(l, 0)$. На объект действует сила тяготения. Движение считается допустимым, если значение $x(t)$ является постоянно возрастающим от 0 до l, $y(t)$ возрастает на первом этапе до высоты h и убывает до нуля на втором этапе. При этом в момент приземления t_2, то есть когда $y(t_2) = 0$, получаем $x(t_2) = l$. Движение считается оптимальным, если на перемещение объекта тратится меньше топлива.

Критерий оптимальности имеет вид:

$$\int_0^{t_1} (f_{x_1} + f_{y_1})dt + \int_{t_1}^{t_2} (f_{x_2} + f_{y_2})dt \to \min\,. \qquad (1)$$

Задача оптимального управления заключается в нахождении параметров $f_{x_1}, f_{y_1}, f_{x_2}, f_{y_2}$ и значений t_1, t_2, чтобы движение объекта из начальной точки $(0,0)$ в конечную $L(l,0)$ с промежуточным достижением высоты h осуществлялось с минимальным расходом топлива.

Движение объекта на первом и на втором этапах соответственно описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{array}{c} m\ddot{x} = f_{x_1}, \\ m\ddot{y} = f_{y_1} - mg, \end{array} \quad t \in [0, t_1], \tag{2}$$

$$\begin{array}{c} m\ddot{x} = f_{x_2}, \\ m\ddot{y} = -f_{y_2} - mg, \end{array} \quad t \in (t_1, t_2]. \tag{3}$$

С помощью пакета Mathematica при заданных начальных условиях для модели (2), (3) найдены оптимальные параметры [4].

От модели (2), (3) перейдем к модели, в которой векторная тяга задается с помощью функций от времени, что позволяет учесть дополнительное ограничение на нулевую скорость в конечной точке и перейти от движения в два этапа, соответствующим двум интервалам времени, к единственному этапу, соответствующему интервалу $t \in (0, t_2)$, а именно, рассмотрим уравнение

$$\begin{array}{c} m\ddot{x} = p_{11} + p_{12}t, \\ m\ddot{y} = p_{21} + p_{22}t + p_{23}t^2 - mg, \end{array} \tag{4}$$

где m – масса, $p_{11}, \ldots, p_{23}$ – параметры системы. Критерий оптимальности имеет вид [5]:

$$\int_0^{t_2} (p_{11} + p_{12}t)^2 + (p_{21} + p_{22}t + p_{23}t^2)^2 dt \to \min. \tag{5}$$

Нами решается задача поиска оптимальных параметров. Под решением будем понимать любую параметрическую кривую, удовлетворяющую (4), а под оптимальным решением будем понимать параметрическую кривую, удовлетворяющую, помимо этого, критерию (5).

Решения для модели (4) в общем виде без учета критерия оптимальности имеют вид:

$$p_{11} = \frac{6lm}{t_2^2}, \quad p_{12} = -\frac{12lm}{t_2^3}, \tag{6}$$

$$p_{21} = \frac{m(gt_2^2 + 32h)}{t_2^2}, \quad p_{22} = -\frac{192hm}{t_2^3}, \quad p_{23} = \frac{192hm}{t_2^4}. \tag{7}$$

Из (6), (7) следует единственность траекторий, удовлетворяющих постановке задачи в силу модели (4) для каждого значения t_2. В этом случае выполнение критерия (5) сводится к выбору оптимального значения t_2 в зависимости от параметров h, l, m. На основе разработанной программы на языке Python найдено оптимальное значение t_2 с учетом критерия вида (5). На рисунке 1 представлена зависимость значений t_2 от значений h, l при $m = 1$.

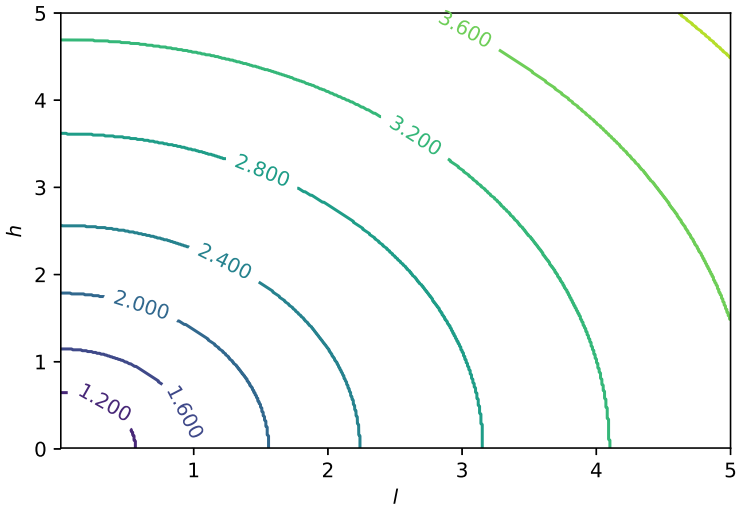


Рисунок 1 – Зависимость значений t_2 от значений h, l при $m = 1$

Траектории системы (4) представляют собой параболы с ветвями, направленными вниз и максимумом в $(h, \frac{l}{2})$. На рисунке 2 представлена зависимость $\dot{y}$ от $\dot{x}$ и y.

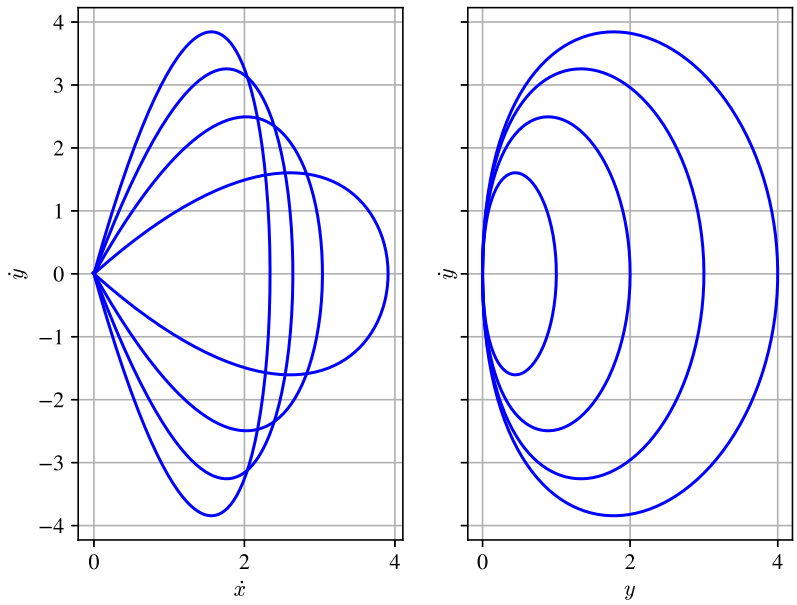


Рисунок 2 – Зависимости $\dot{y}$ от $\dot{x}$ и y для системы (4)

Исходя из рисунка 2, можно заключить, что качественный характер зависимости не изменяется. На основе проведенного исследования можно сделать вывод, что дальнейшей перспективой является изучение модели (4), задаваемой с помощью параметрических кривых различных степеней. Трехмерная модель рассмотрена в работе [6].

В настоящей работе предложен подход к моделированию технических си-

стем, основанный на оптимизации с учетом применения полиномиальной регрессии параметрических кривых. Рассмотрена двумерная линейная модель движения под воздействием постоянной векторной тяги и ее обобщение на случай, когда на систему действуют нестационарные силы. Для нестационарной модели найдены оптимальные параметры движения с применением аналитических и численных методов. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы в задачах конструирования автоматизированного транспорта и систем доставки груза, в робототехнике, а также в задачах управления движением летательных аппаратов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверченков В.И., Федоров В.П., Хейфец М.Л. Основы математического моделирования технических систем. — М.: Флинта. — 2016. — 271 с.
2. Grzegorz Andrzejczak. Spline reproducing kernels on R and error bounds for piecewise smooth LBV problems // Applied Mathematics and Computation. — 2018. — V. 320. — P. 27–44.
3. Ghasemi M. High order approximations using spline-based differential quadrature method: Implementation to the multi-dimensional PDEs // Applied Mathematical Modelling. — 2017. — V. 46. — P. 63–80.
4. Масина О.Н. Вопросы управления движением транспортных систем // Транспорт: наука, техника, управление. — 2006. — № 12. — С. 10–12.
5. Петров А. А. Разработка алгоритмов стохастической оптимизации на языке Python // Материалы областного профильного семинара «Школа молодых ученых про проблемам естественных наук» (Елец, 12 октября 2018 г.). — Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина. — 2018. — С. 3–5.
6. Druzhinina O.V., Masina O.N., Petrov A.A. The Synthesis of the Controlled Systems Optimal Parameters Search Algorithms // Communicationsin Computer and Information Science (CCIS). — Springer. — 2019. — V. 974. — P. 306–320.

УДК 621.382.2/.3

ЗАВИСИМОСТЬ ТЕПЛОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ СИЛОВОГО ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО МОДУЛЯ ОТ ПОЛОЖЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ЧИПА НА ПОДЛОЖКЕ

С.И. Матюхин, д.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sim1@mail.ru*
В.И. Казаков
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *veniamin.818@yandex.ru*
К.Ю. Фроленков, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sim1@mail.ru*

Методами компьютерного моделирования в программной среде Comsol Multiphysics исследована зависимость теплового сопротивления силового полупроводникового модуля от положения полупроводникового чипа на подложке. Показано, что это сопротивление вследствие ухудшения условий охлаждения резко возрастает при приближении чипа к краю подложки.

Ключевые слова: силовой полупроводниковый модуль, теплоперенос, тепловое сопротивление, компьютерное моделирование, Comsol Multiphysics.

1. Введение

Одной из важнейших проблем современной силовой электроники является обусловленная нагреванием полупроводниковых приборов ограниченность плотности коммутируемых токов. Это, в свою очередь, накладывает ограничения на размеры приборов при их миниатюризации и приводит к появлению предельной мощности, которая может быть преобразована при помощи этих приборов.

Очевидно, что увеличение этой мощностипри заданной температуре корпуса и неизменном тепловом сопротивлении прибора будет приводить к росту его температуры, снижению его эксплуатационных характеристик и потере работоспособности. Таким образом, увеличение коммутируемых токов и рабочих напряжений при проектировании силовых полупроводниковых приборов, как правило, должно быть сопряжено с решением ряда задач, связанных с их охлаждением и/или понижением их теплового сопротивления.

Особенно актуальными эти задачи становятся для полупроводниковых приборов в модульном исполнении. Примером такого прибора является силовой IGBT-модуль паяной конструкции(рисунок 1)[1].

Силовые модули паяной конструкции представляют собой многослойные структуры из различающихся материалов, одним из которых выступает непосредственно полупроводниковый элемент.В процессе работы такие элементы (чипы) испытывают циклические изменения температуры. При этом расчет теплового сопротивления модуля является нетривиальной задачей, так как теп-

ло внутри модуля неравномернораспространяется по всем элементам многослойной конструкции.

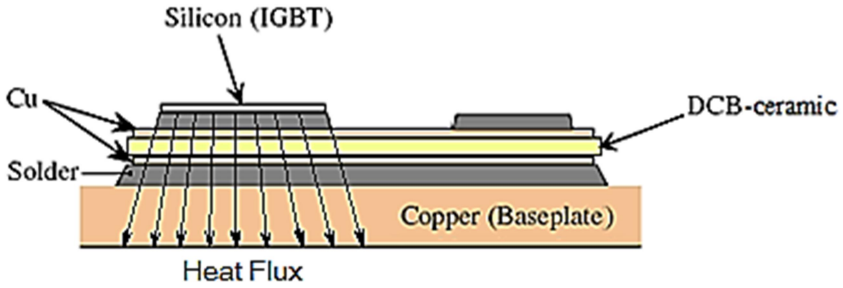


Рисунок 1 – СтруктурасиловогоIGBT-модуля паяной конструкции.

Ранее [2, 3] эта задача была решена методами компьютерного моделирования процессов теплопереноса в программной среде Comsol Multiphysics[4, 5]. В настоящей работе теми же методами исследована зависимость теплового сопротивления модуля от положения полупроводникового чипа на подложке.

2. **Постановка задачи и результаты компьютерного моделирования**

При расчетах, с учетом результатов работ [2, 3], использовалась модельная структура силового модуля, состоящая из: 1) медного основания толщиной 3,3 мм; 2) алюминий-оксидной керамики (Al_2O_3–0.7TiC) толщиной 0,38 мм; 3) кремниевого чипа толщиной 0,13 мм. Размеры подложки, состоящей из медного основания и керамики, выбирались равными 50×100 мм. Размеры полупроводникового чипа варьировались: вначале они считались равными 10×10 мм, а затем те же самые расчеты были проведены для чипа с размерами 5×5 мм.

Суть этих расчетов заключалась в следующем.

При номинальной тепловой мощности P_{tot}, выделяющейся в полупроводниковом чипе, и заданной температуре основания модуля T_C, путем численного решения нестационарногоуравнения теплопроводности находилось распределение температуры в модельной структуремодуля и максимальное значение температуры чипов $T_{j\max}$. Далее, исходя из формулы

$$R_{th} = \frac{T_{j\max} - T_C}{P_{tot}}, \qquad (1)$$

вычислялось тепловое сопротивление R_{th} модуля.

Температура T_C принималась равной 293 K. Вычисления R_{th} производились при двух значениях мощности P_{tot} – 600 и 1200 Вт и разных значениях координат x и y одного из углов квадратного чипа относительно угла подложки (рисунок 2).

Графики зависимости теплового сопротивления R_{th} от положения чипа на подложке представлены на рисунках 3 и 4.

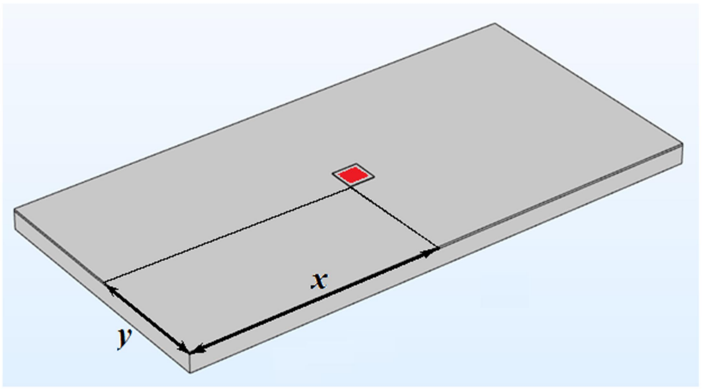


Рисунок 2 – Расположение полупроводникового чипа на подложке

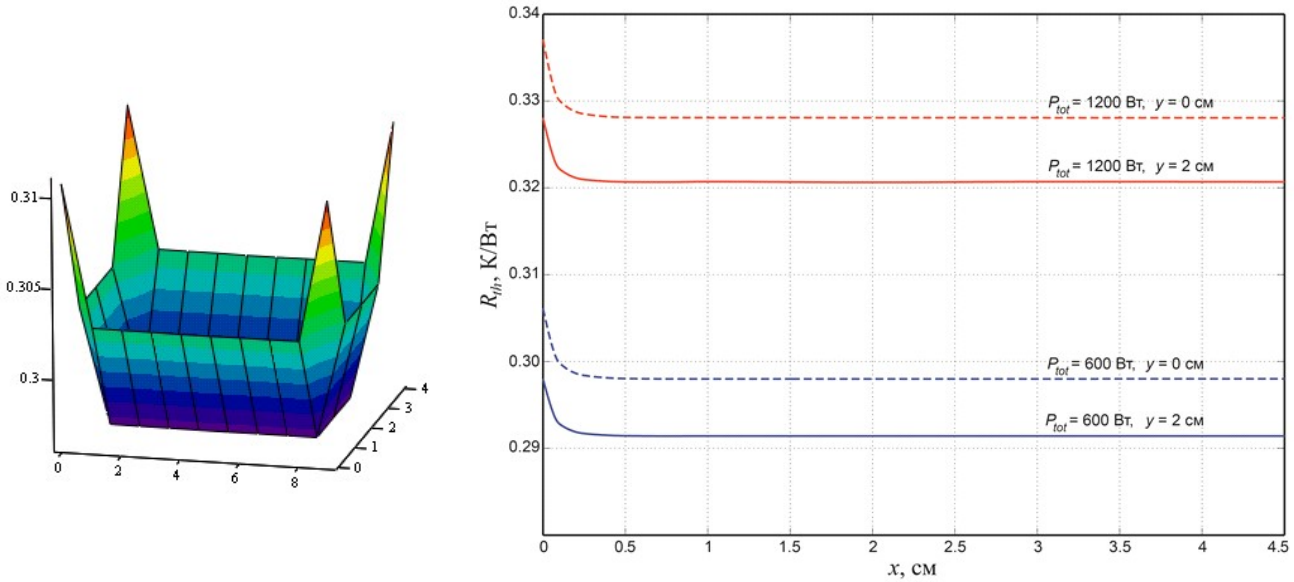


Рисунок 3 – Зависимость теплового сопротивления силового модуля от положения на подложке полупроводникового чипа с размерами 10×10 мм.

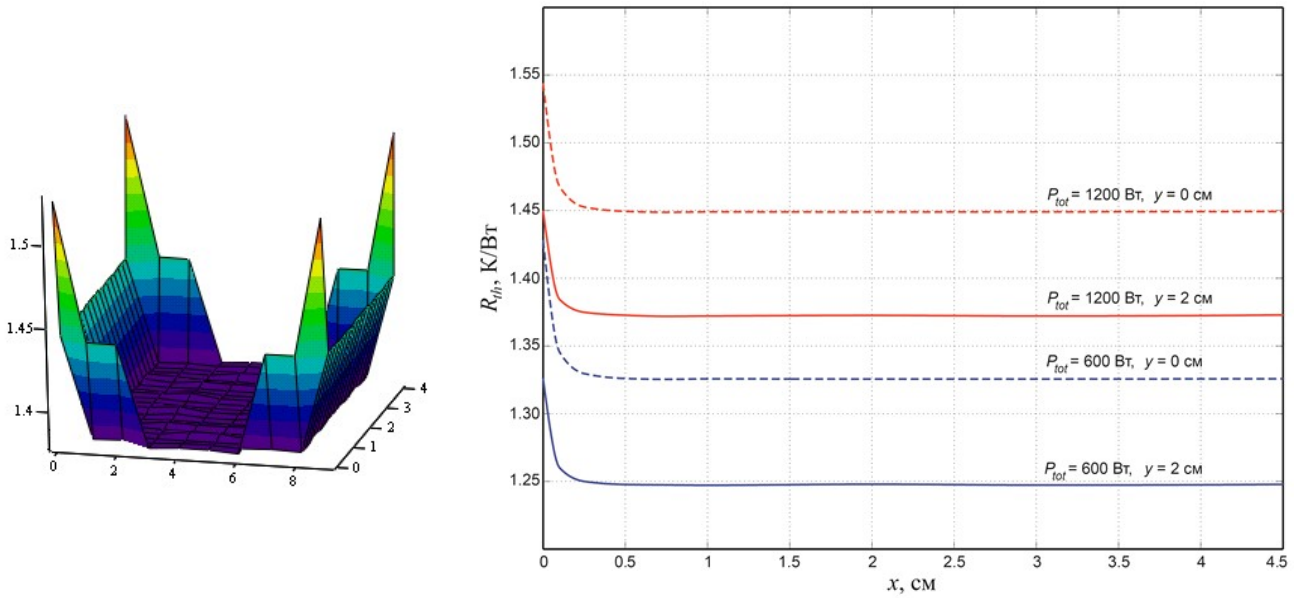


Рисунок 4 – Зависимость теплового сопротивления силового модуля от положения на подложке полупроводникового чипа с размерами 5×5 мм.

3. Обсуждение результатов моделирования

Анализ полученных результатов (рисунки 3, 4) позволяет сделать следующие выводы:

1. Тепловое сопротивление силовых модулей вследствие температурной зависимости теплопроводности материалов зависит от рассеиваемой на чипах мощности P_{tot} и растет вместе с этой мощностью.

2. Тепловое сопротивление модулей R_{th} падает с увеличением площади чипов S_0. Причем, увеличение этой площади в 4 раза приводит к уменьшению R_{th} также примерно в 4 раза. Следовательно, $R_{th} \sim S_0^{-1}$, что согласуется с существующими теоретическими представлениями [6, 7] о природеи методах расчета теплового сопротивления.

3. Тепловое сопротивление R_{th} практически не зависит от положения полупроводникового чипа на подложке, если чип находится достаточно далеко от её края. Однако оно резко возрастает при приближении чипа к краю подложки.

Это связано с тем, что при приближении чипа к краю отсекается часть теплового конуса, по которому распространяется тепло (рисунок 1), вследствие чего ухудшаются условия охлаждения чипа. При этом, как показывают рисунки 3 и 4, характерное расстояние от края, на котором проявляется изменение R_{th}, не зависит от размеров и, соответственно, площади чипа S_0, а определяется суммарной толщиной подложки *d*, которая в нашей модели принимала значение 3,68 мм.

Такое значение критического расстояния от края подложки согласуется с существующими представлениями о том, что в качестве хорошего приближения для угла расхождения теплового потока (угла теплового конуса) может быть выбран угол $\alpha \approx 45^0$ [8].

4. Заключение

Итак, полученные в настоящей работе результаты показывают, что вследствие ухудшения условий охлаждения полупроводникового чипа тепловое сопротивление силового модуля может резко возрастать, если расстояние от чипа до края подложки становится меньше суммарной толщины подложки. При этом рост теплового сопротивления может привести к перегреву полупроводникового элемента или его части, снижению эксплуатационных характеристик модуля или даже к выходуэтого прибора из строя.

Этот эффект оказывается не столь важным, если линейные размеры модуля существенно превосходят его толщину и размеры входящих в его конструкцию полупроводниковых элементов. В этом случае эти элементы можно расположить внутри модуля достаточно далеко от края подложки. Однако ситуация может резко измениться при уменьшении размеров модуля или при попытке размещения внутри модуля нескольких чипов, суммарная площадь поверхности которых становится сравнимой с площадью подложки. В этом случае для надежной работы модуля между чипами и краем подложки следует оставлять дополнительное расстояние, сравнимое с толщиной подложки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Флоренцев С.Н. Силовые IGBT-модули – основа современного преобразовательного оборудования // Электронные компоненты. – 2002. – №6. – С.11-17.
2. Матюхин С.И., Малый Д.О., Вишняков А.С., Заночкин Е.А., Петрухин А.Д. Компьютерное моделирование теплопереноса в силовых IGBT-модулях паяной конструкции // Сб. трудов III Междунар. научно-практической конф. «Современные проблемы физико-математических наук». – Орёл: ОГУ им. И.С. Тургенева. – 2017. – С.242-245.
3. Матюхин С.И., Малый Д.О., Вишняков А.С. Компьютерное моделирование переходного теплового сопротивления IGBT-модулей паяной конструкции // Сб. трудов IV Междунар. научно-практической конф. «Современные проблемы физико-математических наук». – Орёл: ОГУ им. И.С. Тургенева. – 2018. – С.270-273.
4. Матюхин С.И., Макулевский Г.Р., Деев О.В. Современное программное обеспечение для моделирования в электронике // Информационные системы и технологии. – 2014. – №2 (82). – С.58-71.
5. ComsolMultiphysics User's Guide, - Comsol. – 2012. – 1292 p.
6. Давидов П.Д. Анализ и расчет тепловых режимов полупроводниковых приборов.– М.: Энергия. – 1967. – 144 с.
7. Incropera F.P., DeWitt D.P., Bergman T.L., Lavine A.S. Principles of Heat and Mass Transfer.– N.Y.: John Wiley & Sons. – 2013. –1072 p.
8. Xu Y., Hopkins D.C. Misconception of Thermal Spreading Angle and Misapplication to IGBT Power Modules // Applied Power Electronics Conference and Exposition. – 2014. – P.545-551.

УДК 621.9.019

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИЧИН ВОЗНИКНОВЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ДЕФЕКТОВ НА ШЛИФОВАННЫХ КРЕМНИЕВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПЛАСТИНАХ ПОСЛЕ ТЕРМООБРАБОТКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРЕМНИЙОРГАНИЧЕСКИХ ПЛЁНОК

С.И. Матюхин, д.ф.-м.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sim1@mail.ru*
К.Ю. Фроленков, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sim1@mail.ru*
М.Д. Санников, аспирант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *qwerty78963214@mail.ru*
Е.Ю. Орлов, аспирант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *oelamer@gmail.com*

Статья посвящена исследованию причин возникновения механических дефектов на поверхности шлифованных пластин монокристаллического кремния, возникающих в результате термообработки при проведении диффузии из поверхностного источника, и разработке рекомендаций по улучшению техпроцесса с целью минимизации подобных дефектов.

Ключевые слова: диффузия, двухсторонняя шлифовка, поверхностные дефекты кремния, силовые полупроводники.

1. Введение

В настоящее время при производстве силовых полупроводниковых приборов с блокирующими характеристиками используется технология создания глубоких p-n-переходов с помощью диффузии примеси в шлифованные монокристаллические кремниевые пластины из поверхностного источника. Эта технология за счёт простоты оборудования и дешевизны до сих пор имеет ряд конкурентных преимуществ перед ионной имплантацией. Однако использование данной технологии приводит к образованию ряда характерных дефектов, наиболее серьёзными из которых являются механические дефекты на поверхности пластин после термообработки в процессе диффузии из поверхностного источника.

Целью данной работы является исследование возможности уменьшения количества указанных дефектов.

Для достижения поставленной цели необходимо:

- проанализировать действующую технологию изготовления глубоких p-n-переходов;
- исследовать полупроводниковые кремниевые пластины на этапе создания p-n-переходов;

− выдвинуть гипотезу о возможных причинах возникновения механических дефектов на поверхности пластин и спланировать эксперимент (или серию экспериментов) для проверки гипотезы;
− на основании результатов эксперимента составить рекомендации для модернизации диффузионных процессов.

2. Теоретический анализ

Наиболее распространённым методом диффузии из поверхностного источника является диффузия из кремнийорганической плёнки. В качестве материала для таких плёнок используют тетраэтоксисилан (ТЭОС) или этилсиликат (ЭТС – 40). К преимуществам этих пленок относятся [1]:
− возможность широкого варьирования составов;
− отсутствие необходимости использования сложного вакуумного оборудования;
− легкость организации процесса в технологическом масштабе, возможность контроля любого этапа технологической цепи;
− возможность нанесения покрытий на материалы любой формы; создание организованных наноструктур.

Однако применение данной технологии для производства силовых полупроводниковых приборов имеет ряд особенностей:

1. Изначально рассматриваемая технология разрабатывалась для применения в микроэлектронике, где используются полированные полупроводниковые пластины. (14 класс по ГОСТ 2789-59). В то же время из-за особенностей технологии диффузии из поверхностных плёнок в силовых полупроводниках используются шлифованные полупроводниковые пластины (8-10 класс по ГОСТ 2789-59). Известно, что такие пластины имеют разветвлённую область рельефного слоя и слоя микротрещин на поверхности (рисунок 1) [3].

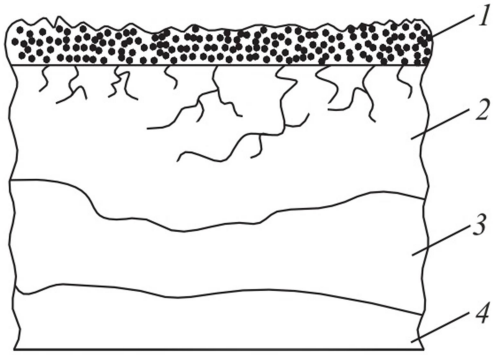


Рисунок 1 – Структура нарушенного при механической обработке поверхностного слоя: 1 рельефный слой; 2 – микротрещины; 3 – область скопления дислокаций; 4 – монокристалл [3]

Так как рельефный слой удаляется после механической и химической очистки пластин, в данной работе его не рассматриваем.

В структурном отношении область микротрещин представляет собой аморфные или мелкокристаллические состояния кремния, склонные к образованию механических дефектов, таких как выкрашивание и сколы [3].

Теоретически толщина слоя микротрещин на исследуемых пластинах должна составлять порядка 10-11 мкм.

Это подтверждается исследованиями поверхности, проведёнными в ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет» с помощью зондового микроскопа СММ 2000 (рисунок 2, рисунок 3) и оптического микроскопа Axioskop 2 MAT (рисунок 4)

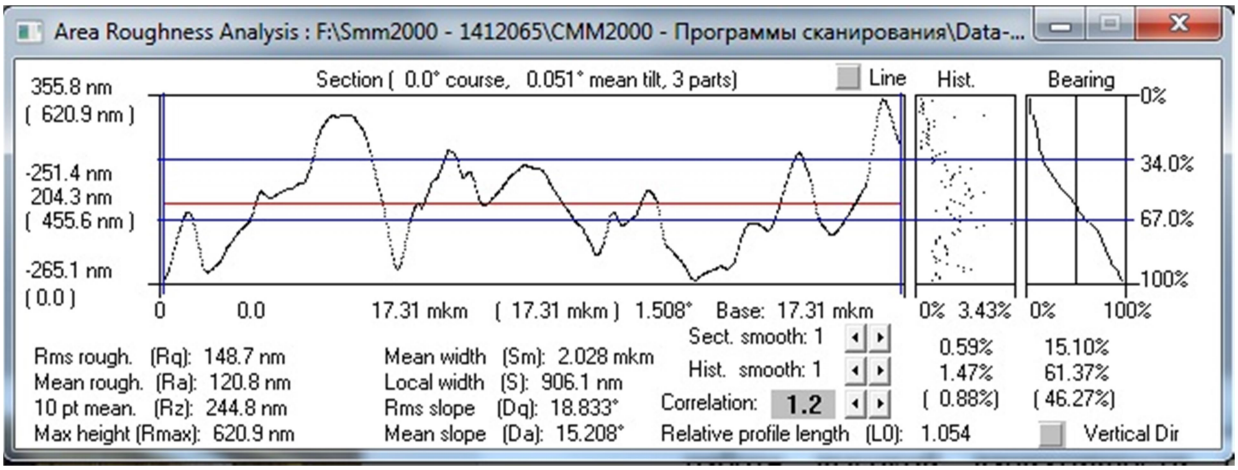


Рисунок 2 – Данные о шероховатости исследуемой пластины полученные с помощью зондового микроскопа СММ 2000

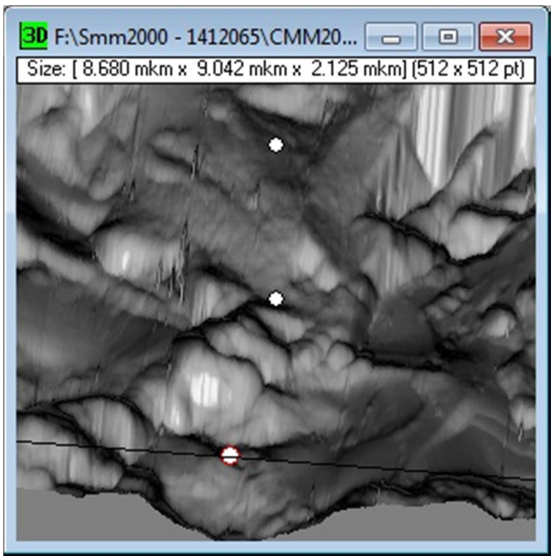


Рисунок 3 – 3D модель поверхности исследуемой пластины полученная с помощью зондового микроскопа СММ 2000

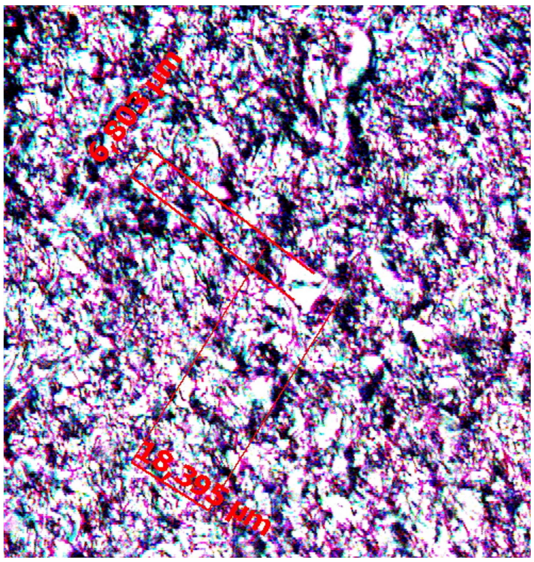


Рисунок 4 – Фотография поверхности исследуемой пластины, полученная с помощью оптического микроскопа Axioskop 2 MAT через камеру AxioCam MRc 5

2. Реакция создания плёнки - поверхностного источника примеси из ТЭОС и ЭТС – 40 состоит из двух частей: гидролиз ТЭОС ($(C_2H_5O)_4Si$) в гидроксил кремния ($Si(OH)_4$) (рисунок 5) и образование из него устойчивой неорганической полимерной сетки SiO_2 (рисунок 6) [1].

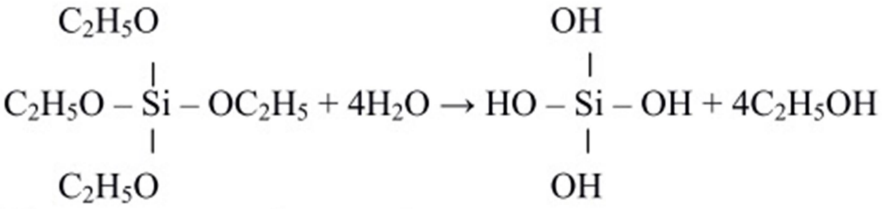


Рисунок 5 – реакция гидролиза ТЭОС [1]

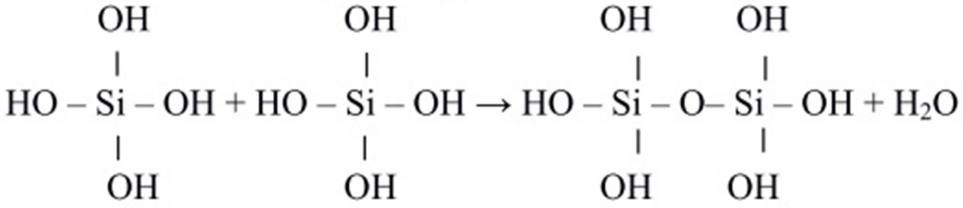


Рисунок 6 – реакция образования силоксановой связи в переодической сетке SiO_2 [1]

Для достижения глубоких p-n переходов (70-100 мкм), согласно традиционной технологии, используются в качестве легирующего компонента алюминий (Al), в сочетании с предельными температурными режимами диффузии (чуть ниже температуры плавления кремниевых пластин - 1414,85°C) в окислительной среде. Исходя из этого, можно предположить, что реакция гидролиза и поликонденсации проходит в полном объёме, в результате чего мы получаем слой оксида кремния как на поверхности, так и внутри трещин. В свою очередь кристаллическая решётка оксида кремния сильно отличается постоянной кристаллической решётки от кристаллической решётки монокристаллического кремния. Это приводит к механическим напряжениям на границе SiO_2 – полупроводник.

3. Анализ причин возникновения брака

Все описанные в данной работе исследования проводились на пластинах из монокристаллического кремния с ориентацией 111.

Внешний вид характерного дефекта изображён на рисунке 7.

Рисунок 7 – Внешний вид дефекта, полученный на оптическом микроскопе МБС-10 в рассеянном свете

Видно, что он имеет много треугольных граней, характерных для разломов по линиям роста для монокристаллического кремния с ориентацией 111.

Отсюда можно предположить, что:

1) данный дефект является следствием низкой прочность области микротрещин на поверхности кремния;

2) данный дефект является результатом механических напряжений, созданных плёнкой SiO_2.

Для проверки этих гипотез были предложены следующие исследования:

- провести процесс диффузии на пластинах, с которых операцией щелочного травления была удалена область микротрещин;
- провести процесс диффузии на стандартных шлифованных пластинах без применения ТЭОС в поверхностном источнике примеси. Это было достигнуто путём изготовления ряда диффузионных композиций без ТЭОС (для поиска состава, воспроизводящего стандартный профиль p-n перехода).

Эксперименты проводились на участке диффузионных процессов АО «Протон-Электротекс». Для экспериментов использовались кремниевые пластины (КОФ) с удельным сопротивлением 70 Ом/см диаметром 42мм. Для увеличения достоверности результата, на основании экспертного мнения, была принята выборка в 700 штук пластин. Критериями годности являлось:

- соответствие электрофизических параметров пластины, измеряемых после процесса ГД: поверхностного сопротивления; времени жизни неосновных носителей заряда; глубины диффузионного перехода;
- отсутствие механических дефектов на поверхности пластины.

4. Результаты экспериментов и их обсуждение

На пластинах с травленной поверхностью, после операции диффузии не было выявлено механических дефектов на поверхности. Однако при измерении электрофизических параметров пластин обнаружено несоответствие поверхностного сопротивления и глубины диффузионного перехода пластин. Это связано со спецификой механизма диффузии алюминия в кремний из поверхностного источника. Следовательно, изменение шероховатости поверхности пластины не является решением проблемы образования данного типа дефектов.

На стандартных пластинах после операции диффузии из поверхностного источника без ТЭОС также не было выявлено механических дефектов на поверхности. При измерении электрофизических параметров было зафиксировано уменьшение поверхностного сопротивления. Это связано с изменением механизма диффузии из поверхностного источника, из-за отсутствия полимерной сетки оксида кремния на поверхности пластины. Что привело к увеличению концентрации диффундировавшей примеси. Стандартный профиль p-n перехода (с учётом всех критериев годности) был воспроизведён путём подбора состава диффузионной композиции. Однако отсутствие полимерной плёнки негативно сказалось на равномерности залегания примеси по площади пластины (это было зафиксировано по изменению равномерности поверхностного сопротивления, являющимся вторичным признаком для количественной оценки примеси) (рисунок 8), что в теории может сказаться на надёжностных характеристиках конечных силовых полупроводниковых приборов.

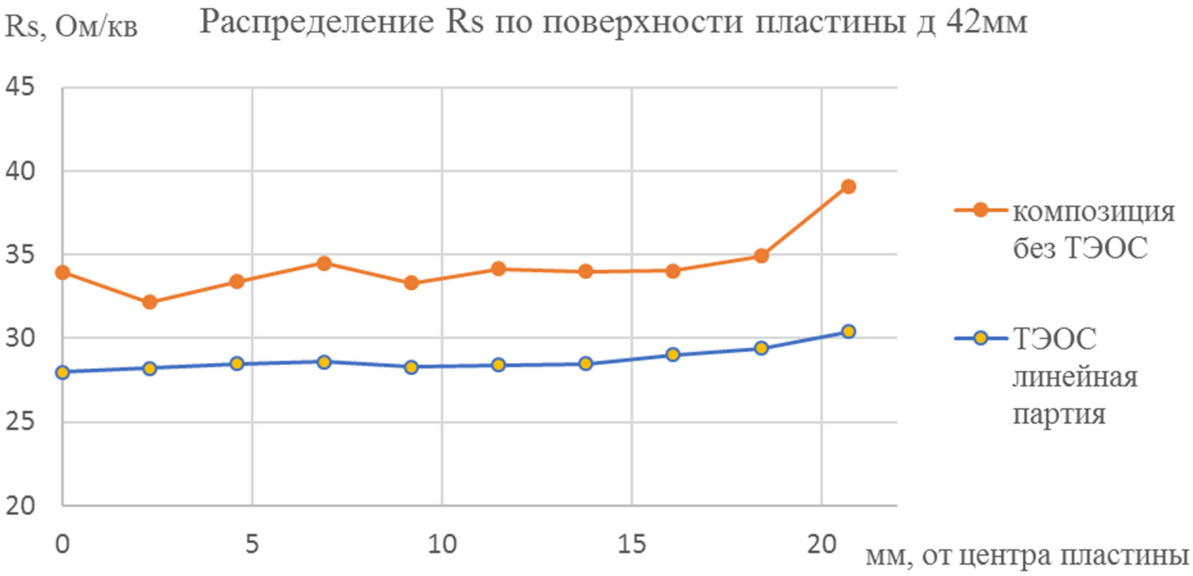


Рисунок 8 – Сравнение распределения поверхностного сопротивления по площади пластин с полимерной плёнкой из ТЭОС и без неё

Из полученных результатов следует, что замена ТЭОС в диффузионной композиции для создания поверхностного источника на полимерный компонент, снижающий механические напряжения на поверхности пластин, или полный отказ от полимерного компонента, позволит уменьшить количество механических дефектов на поверхности пластин.

5. Заключение

Как показывают результаты нашей работы, механические дефекты на поверхности шлифованных кремниевых пластин после термообработки являются следствием совокупного воздействия таких факторов как низкая прочность кремния в области микротрещин и высокие механические напряжения на границе SiO2 – полупроводник.

Оптимальным решением для уменьшения количества подобных дефектов является замена типа плёнки – поверхностного источника примеси на материал, создающий меньшие механические напряжения или полный отказ от плёнкообразующего материала, формирующего поверхностный источник.

ЛИТЕРАТУРА

1. Томильскайте, В. А. Нанесение покрытий на основе высокочистого диоксида кремния и органических соединений / В. А. Томильскайте, Е. С. Файбисович, Н. С. Кузьмин // Молодежь и наука: сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска [Электронный ресурс]. — Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2013. — Режим доступа: http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2013/section042.html, свободный.
2. Санников М. Д. Тютякин А.В. К выбору метода контроля распределения концентраций примесей при производстве силовых полупроводниковых // Теория и практика современной науки. – Издательство: ООО "Институт

управления и социально-экономического развития" (Саратов). – 2017. – 6 – 24 – С. 754-758.
3. Королёв М.А., Крупкина Т.Ю., Ревелева М.А. Технология, конструкции и методы моделирования кремниевых интегральных микросхем. Часть 1 Технологические процессы изготовления кремниевых интегральных схем и их моделирование. – 2-е изд. (электронное). – М.: БИНОМ. – 2012. – 396 с.

УДК 621.9.047; 532.528

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ С УЧЁТОМ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ ВЫХОДА ПО ТОКУ ОТ ПЛОТНОСТИ ТОКА

Н. М. Миназетдинов, к.ф.–м.н., доц.
Российский новый университет
e-mail: *nminazetdinov@yandex.ru*

Представлена математическая модель двумерной задачи электрохимической обработки металла (анода) четырехгранным электродом-инструментом (катодом), с учетом разрывной функции выхода по току от плотности тока. При решении соответствующей нелинейной краевой задачи для регулярной в области межэлектродного промежутка функции используется аналогия с задачами теории потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости. Представлены результаты расчетов.

Ключевые слова: электрохимическая обработка металлов, идеальный процесс, идеальная несжимаемая жидкость, теория функции комплексной переменной.

Электрохимические способы обработки металлов относятся к перспективным методам изготовления деталей из высокопрочных сплавов [1, 2].

Один из важнейших элементов электрохимического формообразования — состав электролита, который наряду с электрическим и гидродинамическим режимами определяет основные показатели процесса. Для обработки основных материалов используются электролиты, являющиеся растворами солей.

Закон распределения выхода по току η для реакций анодного растворения металла зависит от значений плотности тока j_a в точках анодной границы. В работе [3] введена скачкообразная функция:

$$\eta(j_a) = 0 \text{ при } j_a < j_{cr};\ \eta(j_a) = a_0 - a_1/j_a \text{ при } j_a \geq j_{cr},\ \eta(j_{cr}) = \eta_{cr} > 0, \quad (1)$$

где j_{cr} — критическое значение плотности тока. При $j_a = j_{cr}$ включается или выключается механизм анодно-анионной активации металла [1] в соответствующих точках границы. Постоянные a_0, a_1, j_{cr}, η_{cr} характеризуют свойства системы металл – электролит [1]. График зависимости (1) представлен на рис.1.

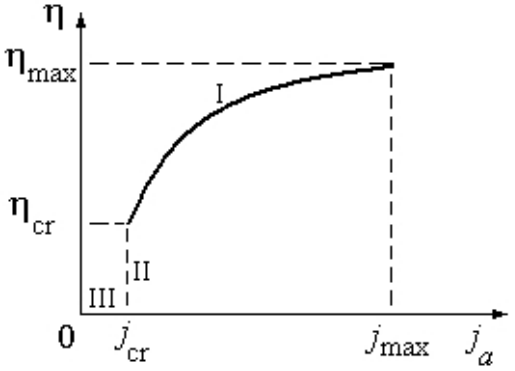


Рисунок 1

С учётом зависимости (1) рассмотрим численно-аналитическое решение плоской задачи, связанной с определением установившейся формы [1] поверхности детали при её обработке четырехугольным катодом-инструментом.

Схема сечения межэлектродного промежутка представлена на рис.2. Система декартовых координат $(x_1,\, y_1)$ связана с катодом, граница которой — четырехугольный симметричный контур. Ограничимся рассмотрением левой симметричной части межэлектродного промежутка. Здесь линия DEF соответствует границе катода, $CBAR$ — граница анода, CD и FR — линии симметрии. Катод осуществляет поступательное перемещение в сторону анода с постоянной скоростью V_c.

Согласно модели процесса, описанной в [3], потенциал $u(x_1, y_1)$ электрического поля в межлектродном промежутке — гармоническая функция, которую можно принять за мнимую часть комплексного потенциала электрического поля $W(z_1) = \nu(x_1,\, y_1) + iu(x_1,\, y_1)$, где $z_1 = x_1 + iy_1$, $\nu(x_1,\, y_1)$ — функция тока [4]. На границах электродов потенциал принимает постоянные значения $u = u_a$ и $u = u_c$ на границах анода и катода соответственно.

На участке BC анодной границы $j_a > j_{cr}$, и условие, определяющее форму анодной границы, выражается равенством [3]:

$$\left|\frac{dW_1}{dz_1}\right| = \frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{1}{\kappa a_0}\left(a_1 + \frac{\rho V_c}{\varepsilon}\cos\theta\right), \tag{2}$$

где κ — удельная электропроводность среды; ε — электрохимический эквивалент металла; ρ — плотность материала анода; θ — угол между вектором $\mathbf{V}_c$ скорости подачи катода и вектором $\mathbf{n}_1$ нормали к анодной границе. В точке C значения плотности тока j_a и выхода по току η равны j_{max} и η_{max} соответственно (рис.1). В точке B плотность тока уменьшается до значения j_{cr}.

На участке AB анодной границы выполняется условие

$$j_a = j_{cr}, \quad \frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{j_{cr}}{\kappa}. \tag{3}$$

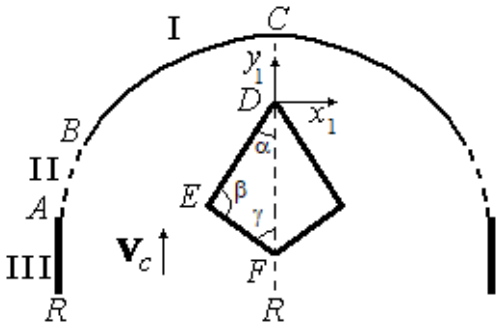


Рисунок 2 – Геометрия межэлектродного промежутка

В процессе обработки из-за увеличения межэлектродных зазоров на анодной границе возникают участки, на которых плотность тока меньше j_{cr}. На этих участках растворение металла не происходит. В данной задаче необрабатываемый участок моделируется линией AR, на которой плотность тока изменяется от значения j_{cr} в точке A до нуля в бесконечно удаленной точке R.

Введём безразмерный комплексный потенциал

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

где

$$\psi(x, y) = \frac{u_1(z) - iu_c}{u_a - u_c},\ z = \frac{z_1}{H} = x + iy,\ H = \kappa(u_a - u_c)/j_0,\ j_0 = \rho V_c/\varepsilon,$$

$\varphi(x, y)$ – гармоническая функция сопряженная с функцией $\psi(x, y)$. Тогда $\psi = 0$ на границе DEF катода; $\psi = 1$ на границе $CBAR$ анода. Условия (2) и (3) в безразмерных переменных представим в виде следующих равенств

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = b(a + \cos\theta), \quad b = \frac{1}{a_0}, \quad a = \frac{a_1}{j_0}. \tag{4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = c, \quad c = \frac{j_{cr}}{j_0}. \tag{5}$$

Известно [4], что электростатическое поле аналогично полю скоростей потенциального течения жидкости, при этом скорость $\mathbf{V}$ течения является аналогом напряженности электрического поля. Условия (4) и (5) определяют распределение скорости $V = |\mathbf{V}|$ на неизвестных участках анодной границы [5]. Согласно этой аналогии, из условия (4) следует, что на участке BC выполняется соотношение

$$V = b(a + \cos\theta),\ \theta = \arg(\mathbf{V}), \tag{6}$$

а на участке AB из формулы (5) получается

$$V = c. \tag{7}$$

Далее рассматривается соответствующая гидродинамическая задача об определении свободных границ BC и AB с заданными на них условиями (6) и (7) соответственно. На рис.3а представлена схема расположения линий тока течения жидкости.

Введём параметрическую переменную $t = \xi + i\delta$, область изменения которой – четверть единичного круга $G_t\,(|t| < 0, \xi > 0, \delta > 0)$, представлена на рис. 3б. Соответствующие точки на рис.2 и рис.3б обозначены одинаковыми буквами.

Решение задачи сводится к определению двух аналитических функций [6]: комплексного потенциала течения $W(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ и функции Жуковского $\chi(t) = \ln\left(dW/\left(V_0 dz\right)\right) = r - i\theta$, $r = \ln(V/V_0)$, где $V_0 = c$.

На границах области G_t комплексный потенциал $W(t)$ течения удовлетворяет условиям

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t = \exp(i\sigma),\ \sigma \in [0, \pi/2];\ t = i\delta,\ \delta \in [0, 1];\ t = \xi,\ \xi \in [0, r], \\ 0, & t = \xi,\ \xi \in [f, d], \end{cases}$$

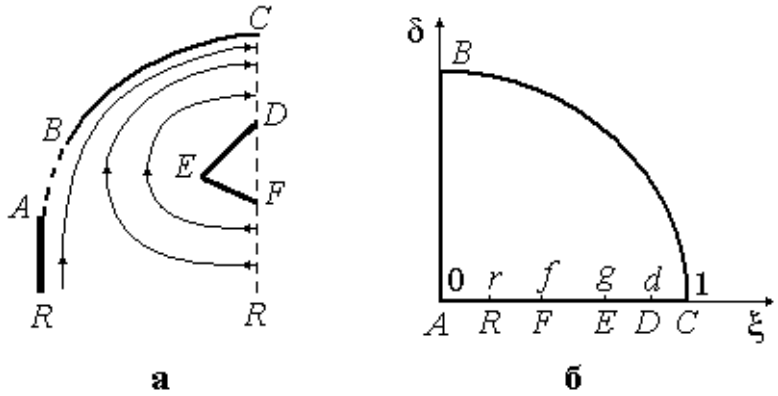


Рисунок 3 – а) схема линий тока течения жидкости ; б) вспомогательная область G_t.

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \xi \in [r, f], \\ \varphi_0 = \text{const}, & \xi \in [d, 1]. \end{cases}$$

Значение φ_0 соответствует величине электрического тока, протекающего через анодную границу. Область изменения комплексного потенциала — прямоугольник со сторонами равными единице и φ_0.

Производную комплексного потенциала и значение параметра φ_0 можно определить с помощью конформных отображений [4]

$$\frac{dW}{dt} = N\frac{F(t)}{\sqrt{t^2 - d^2}},\ N = \frac{i}{I_0},\ I_0 = \int_d^1 \frac{F(x)}{\sqrt{x^2 - d^2}}dx, \tag{8}$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{I_0}\int_f^d \frac{F(x)}{\sqrt{d^2 - x^2}}dx, \tag{9}$$

где

$$F(x) = \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2d^2)(x^2-f^2)(1-x^2f^2)(x^2-r^2)(1-x^2r^2)}}.$$

Представим функцию $\chi(t)$ Жуковского в виде [6, 7]

$$\chi(t) = \chi_0(t) + \omega(t), \tag{10}$$

где $\chi_0(t)$ — функция Жуковского для задачи, в которой полагается, что на участке BC так же как и на участке AB выполняется условие (7), а функция $\omega(t)$ регулярна в области G_t и непрерывна на его границе.

Для функций $\chi(t)$ и $\chi_0(t)$ выполняются граничные условия

$$\operatorname{Re}\chi(i\delta) = \operatorname{Re}\chi_0(i\delta) = 0,\ \delta \in \{0, 1\}. \tag{11}$$

$$\operatorname{Im}\chi(\xi) = \operatorname{Im}\chi_0(\xi) = \begin{cases} -\pi/2, & \xi \in [0, r), \\ -\pi, & \xi \in (r, f), \\ -(\gamma + \pi/2), & \xi \in (f, g), \\ \alpha - \pi/2, & \xi \in (g, d), \\ 0, & \xi \in (d, c]. \end{cases} \tag{12}$$

$$\operatorname{Re}\chi_0(i\delta) = 0,\ t = \exp(i\sigma),\ \sigma \in [0, \pi/2]. \tag{13}$$

Условие (6) представим в виде

$$b(a + \cos\theta(t)) = c\,\exp(r(t)),\ t = \exp(i\sigma),\ \sigma \in [0, \pi/2],\ r(i) = 0. \tag{14}$$

Из условия (14), следует

$$\theta_B = \theta(i) = \arccos(c/b - a). \tag{15}$$

Для обеспечения плавного перехода границы AB на полубесконечную прямую AR в точке перехода A потребуем выполнение условия Бриллуэна-Вилла [6, 7]

$$\theta'(\delta) = 0 \text{ при } \delta = 0. \tag{16}$$

Функция $\chi_0(t)$ имеют логарифмические особенности в точках $R\,(t = r)$, $F\,(t = f)$, $E\,(t = g)$, $D\,(t = d)$. Используя граничные условия (11) – (13) и известные особенности функции $\chi_0(t)$ с помощью метода особых точек [6], получим

$$\chi_0(t) = \ln\left(F_1^{\alpha_1}(t, r)\,F_1^{-\alpha_2}(t, f)F_1^{-\alpha_3}(t, g)\,F_1^{-\alpha_4}(t, d)\right), \tag{17}$$

$$F_1(x, y) = \frac{(x - y)(1 + xy)}{(x + y)(1 - xy)}.$$

Где $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1/2 - \gamma/\pi$, $\alpha_3 = 1 - \beta/\pi$, $\alpha_4 = 1/2 - \alpha/\pi$, а α, β, γ – величины, определяющие углы катода (см. рис.2).

Из формул (11) – (14) получим граничные условия для неизвестной функции $\omega(t)$

$$\operatorname{Re}\omega(i\delta) = 0,\ \delta \in [0, 1];\ \operatorname{Im}\omega(\xi) = 0,\ \xi \in [0, 1], \tag{18}$$

$$b\,(a + \cos\theta\,(T + \mu)) = c\exp(\lambda), \tag{19}$$

$$T = \operatorname{Im}\chi_0(\exp(i\sigma)),\ \mu = \operatorname{Im}\omega(\exp(i\sigma)),\ \lambda = \operatorname{Re}\omega(\exp(i\sigma)),\ \sigma \in [0, \pi/2].$$

По принципу симметрии Шварца функцию $\omega(t)$ аналитически продолжим через границы области G_t на весь круг $|t| \le 1$ и представим в виде степенного ряда с вещественными коэффициентами

$$\omega() = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}t^{2n-1}. \tag{20}$$

Используя формулы (10),(17), (20), получим

$$\theta(\delta) = \theta_0(\delta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{2n-1} \delta^{2n-1} \tag{21}$$

$$\theta_0(\delta) = \frac{\pi}{2} - F_2(\delta, r) + 2\left(\alpha_2 F_2(\delta, f) + \alpha_3 F_2(\delta, g) + \alpha_4 F_2(\delta, d)\right),$$

$$F_2(x, y) = \operatorname{arctg}(x, y) - \operatorname{arctg}(x/y).$$

Дифференцируя выражение (21), найдём

$$\theta'(\delta) = \theta_0'(\delta) - b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{2n-1} (2n-1) \delta^{2n-2} \tag{22}$$

$$\theta_0'(\delta) = -F_3(\delta, r) + 2\left(\alpha_2 F_3(\delta, f) + \alpha_3 F_3(\delta, g) + \alpha_4 F_3(\delta, d)\right),$$

$$F_3(x, y) = y/(1 + x^2 y^2) - y/(x^2 + y^2).$$

Подставив равенство (22) в формулу (16), получаем выражение

$$-F_3(0, r) + 2\left(\alpha_2 F_3(0, f) + \alpha_3 F_3(0, g) + \alpha_4 F_3(0, d)\right) - b_1 = 0,$$

из которого следует

$$r = -P + \sqrt{P^2 + 1}, \tag{23}$$

$$P = \frac{b_1}{2} - \left(\alpha_2 \left(f - \frac{1}{f}\right) + \alpha_3 \left(g - \frac{1}{g}\right) + \alpha_4 \left(d - \frac{1}{d}\right)\right).$$

Безразмерные координаты (x, y) точек искомых границ определяются из параметрической зависимости

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\exp\left(-\chi(t)\right)}{c} \frac{dW}{dt} = \frac{i(t-g)^{1-\beta/\pi}}{cI_0(t-r)(t-f)^{\gamma/\pi}(t-d)^{\alpha/\pi}} \frac{F_4(t)}{F_5(t)} \exp(-\omega(t)). \tag{24}$$

$$F_4(t) = \frac{t(t^2+1)}{1+tr} \left(\frac{1+tg}{(t+g)(1-tg)}\right)^{1-\beta/\pi},$$

$$F_5(t) = \left((t+f)(1-tf)\right)^{1-\gamma/\pi} (1+tf)^{\gamma/\pi} \left((t+d)(1-td)\right)^{1-\alpha/\pi} (1+td)^{\alpha/\pi}.$$

Интегрируя выражение (24) на отрезках $[g, d]$ и $[f, g]$, найдём, соответственно, безразмерные длины L_1, L_2 отрезков DE, EF

$$L_1 = L_1(d, f, g, r),\ L_2 = L_2(d, f, g, r),\ L_1 \sin(\alpha) = L_2 \sin(\gamma). \tag{25}$$

Для численного решения задачи задаются геометрические величины α, β, γ, L_1, L_2; характерная плотность тока j_0; величины j_{cr}, η_{cr} (см.рис. 1) ; коэффициент a_0. Значение коэффициента a_1 находится с помощью формулы $a_1 = j_{cr}(a_0 - \eta_{cr})$. Коэффициенты разложения (20) определяются методом коллокаций из уравнения (19). Система уравнений, для вычисления коэффициентов

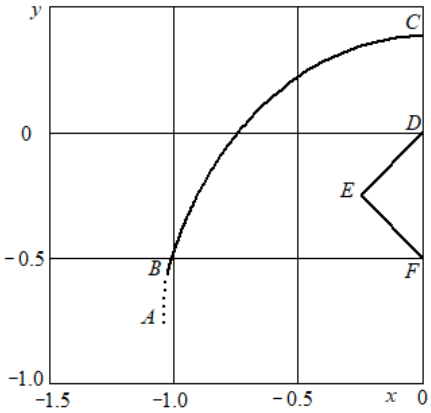


Рисунок 4 – Результаты расчета анодной границы

ряда (20) решается методом Ньютона совместно с уравнениями (23), (25), предназначенными для определения параметров d, f, g, r.

На рис. 4 представлены результаты расчета анодной границы при $\alpha = \gamma = \pi/4$, $\beta = \pi/2$, $L_1 = L_2 = \sqrt{2}/4$, $j_0 = 100\,\text{А/см}^2$,$j_{cr} = 50\,\text{А/см}^2$, $\eta_{cr} = 0.5$, $a_0 = 0.7$.

Участок BC, на котором выполняется условие (4), отмечен сплошной линией, переходной участок AB, на котором выполняется условие (5) — пунктирной линией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов А. Д., Козак Е. Высокоскоростное электрохимическое формообразование. — М.: Наука. — 1990. — 272 с.
2. Житников В. П., Зайцев А. Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка. — М.: Машиностроение. — 1994. — 413 с.
3. Котляр Л. М., Миназетдинов Н. М. Моделирование электрохимического формообразования с использованием криволинейного электрода при ступенчатой зависимости выхода по току от его плотности // Прикладная механика и техническая физика. — 2016. — Том 57. — Номер 1. — С. 146–155.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука. — 1987. — 688 с.
5. Каримов А. Х, Клоков В. В, Филатов Е. И. Методы расчёта электрохимического формообразования. — Казань.: Изд-во Казан. ун-та. — 1990. — 386 с.
6. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука. — 1977. — 536 с.
7. Миназетдинов Н. М. Об одной задаче теории электрохимической обработки металлов // Прикладная механика и техническая физика. — 2009. — Том 50. — Номер 3.— С. 214–220.

УДК 550.34.012

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ГРИНА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИНТЕТИЧЕСКИХ СЕЙСМОГРАММ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

М. А. Никитина
ИТПЗ РАН
e-mail: *margarita@mitp.ru*
С. Ж. Орунбаев
Central Asian Institute of Applied Geosciences (CAIAG), Bishkek, Kyrgyz Republic
e-mail: *s.orunbaev@gmail.com*

Разработан метод построения синтетических сейсмограмм для кусочно-однородных многослойных упругих сред. Предложенный подход основан на методе функции Грина с использованием временной δ-образной последовательности (непрерывное ядро Дирихле). Данный метод планируется апробировать на землетрясении с магнитудой 4.7, которое произошло в 40 км от города Бишкек (Киргизстан). Данное событие записывалось на вертикальном массиве акселерометров с разделением по слоям среды.

Ключевые слова: Функция Грина, упругая среда, многослойная среда, синтетические сейсмограммы

Одним из основных уравнений геофизики является волновое уравнение упругой среды. Решая волновое уравнение, можно получить различные параметры среды или параметры источника. Общепризнанным методом решения таких задач является метод функции Грина [1], [2], [3], [4]. Упомянутый подход широко используется в различных областях физики, где требуется решение дифференциальных уравнений с разными типами граничных условий.

Целью настоящего исследования является разработка метода построения синтетических сейсмограмм для кусочно-однородных многослойных упругих сред. Данный метод представляет собой реализацию алгоритма пересчёта волновых форм от источника к приемнику с учетом параметров сред и затухания, характеризуемого добротностью, различной для разных слоев.

Специфика поставленной задачи требует тщательного подхода не только к методам решения, но и к полноте используемых для сравнения с расчетом эмпирическим данных. Математическая модель описывает ситуацию кусочно-однородной многослойной среды. В качестве примера для апробации полученного метода был выбран массив сейсмодатчиков, расположенных в скважине вблизи города Бишкек. Бишкек располагается в районе высокой сейсмической опасности, что упрощает поиск удобного для сравнения с расчетом землетрясения. Скважина, пробуренная на территории института CAIAG, имеет глубину 150 м (рис. 1) и пересекает различные четвертичные осадочные слои. В самом верхнем 80-метровом слое суглинков, чередуются слои гравийно-песчаной и песчаной толщ различной толщины (рис. 1), ниже 80 м обнаружен только толстый гравийно-галечный слой. Скважина оснащена трехкомпонентным акселерометром на поверхности и комплексом из пяти трехкомпонентных скважинных акселерометров, расположенных на глубинах 10, 25, 45, 85 и 145 м.

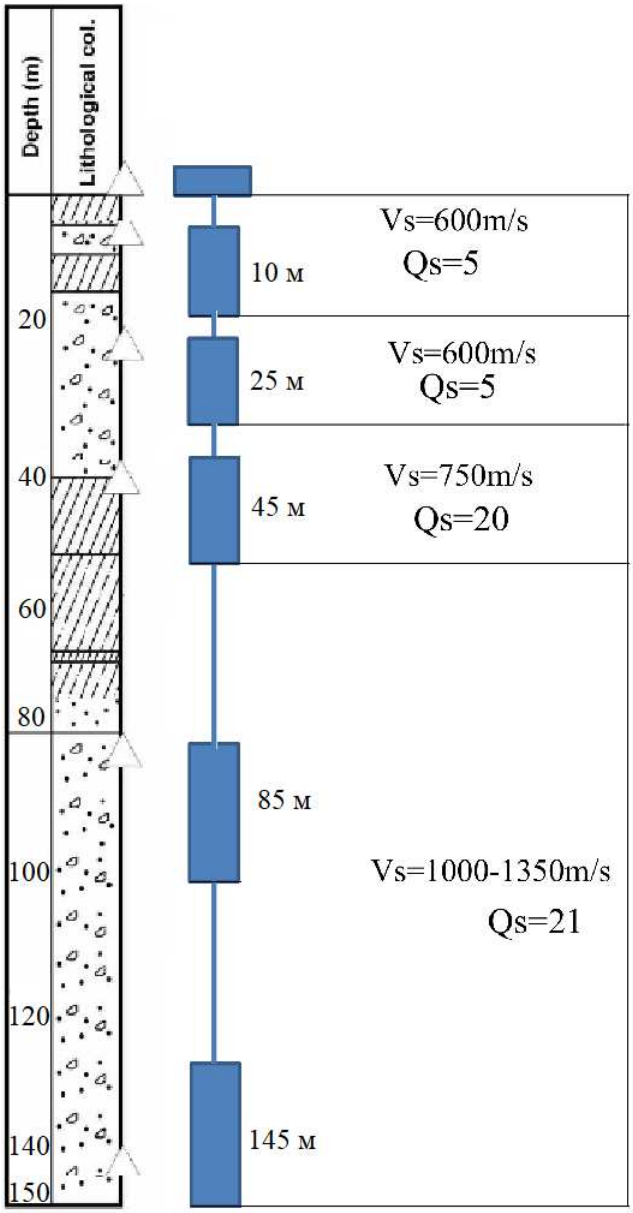


Рисунок 1 – Описание массива акселерометров с указанием основных параметров сред, где V_s — скорость продольной волны, а Q_s — добротность.

Мы будем использовать для сравнения сейсмограммы землетрясения магнитудой $M_b = 4.7$, произошедшего 18 марта 2011 года. Событие локализовано в 40 км к северо-востоку от системы датчиков (рис. 2) на глубине 2 км. Землетрясение регистрировалось датчиками, установленными на глубине 10 м, 15 м, 25 м, 45 м и 145 м. На записи землетрясения можно ясно выделить время прихода S-волны. Однако время прихода P-волны можно оценить лишь с использованием кросс-корреляционного анализа, проведённого на представленных сейсмограммах [5], где видно, что этот импульс распространяется со скоростью, близкой к скорости прямой P-волны.

Как говорилось ранее, для моделирования синтетических сейсмограмм мы

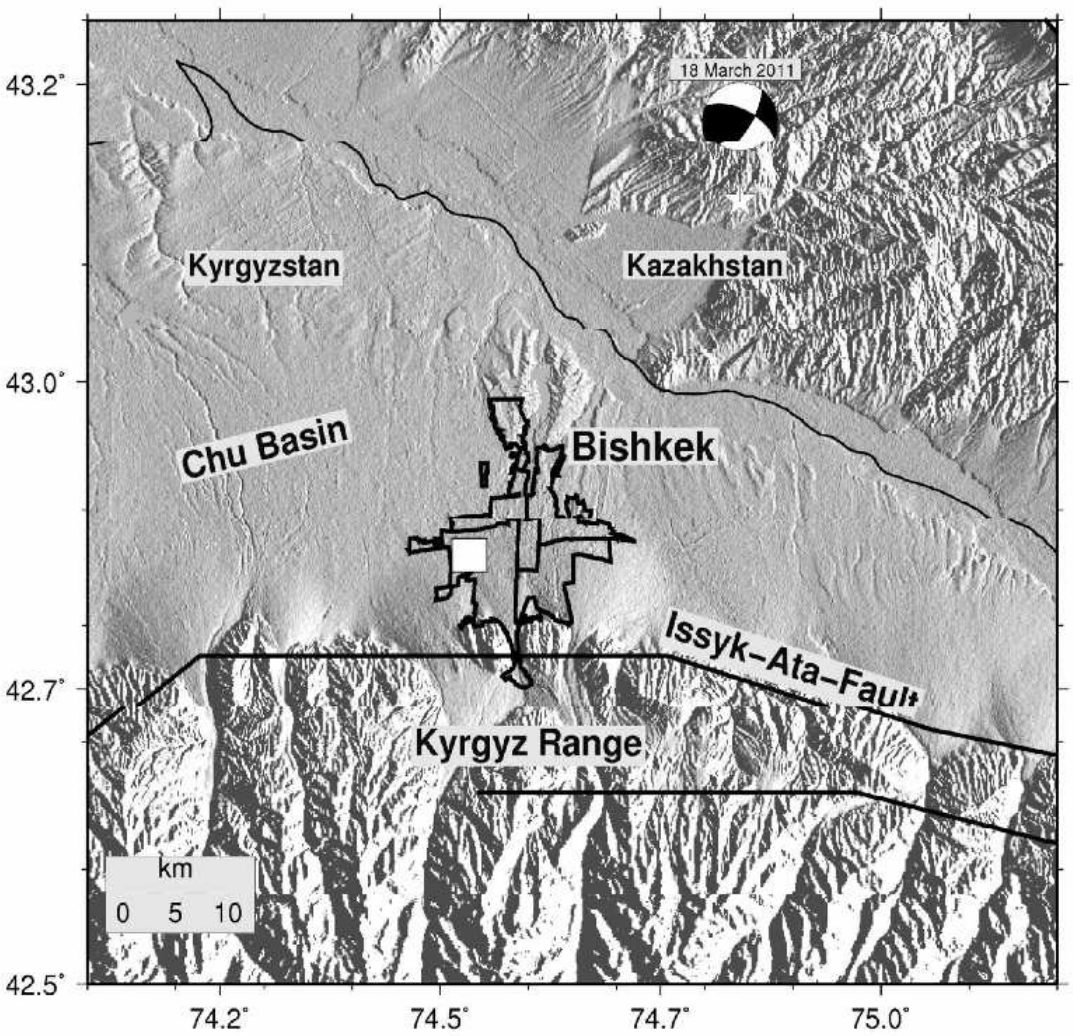


Рисунок 2 – Карта города Бишкек с указанием расположения землетрясения (показан его механизм очага) и системы датчиков (□). Черные линии показывают положение хребта и разлома сверху вниз соответственно

будем использовать метод функции Грина. В рамках данного подхода смещение $u_\gamma(\mathbf{r},t)$ рассчитывается по формуле (1), где $\mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{t})$ — функция источника, а $\hat{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1;t-t_1)$ — это функция Грина для нижнего однородного полупространства ниже 145 м.

$$u_\gamma(\mathbf{r},t) = u_{0,\gamma}(\mathbf{r},t) + \int \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t_1 G_{\gamma\eta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1;t-t_1)F_\eta(\mathbf{r}_1,t_1), \qquad (1)$$

где $u_0(\mathbf{r},t)$ — это решение однородного уравнения движения с условием $\mathbf{F}=\mathbf{0}$. Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Для удобства расчётов мы положим $u_0(\mathbf{r},t)=0$. В качестве модели источника землетрясения рассматривается двойной диполь без момента, параметры которого были получены в ходе обработки практических сейсмограмм [5].

Стоит отметить, что в реальной среде функция источника $\mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{t})$ растяну-

та по времени и, следовательно, отличается от $\delta(t)$-функции. Поэтому мы будем использовать δ-функциональную последовательность: непрерывное ядро Дирихле (см. рис. 3).

$$\delta_D(t,\tau) = \frac{\sin(t/\tau)}{\pi t}. \tag{2}$$

Данное представление превращается в $\delta(t)$-функцию ($\delta_D(t,\tau) \rightarrow \delta(t)$) при устремлении τ к 0.

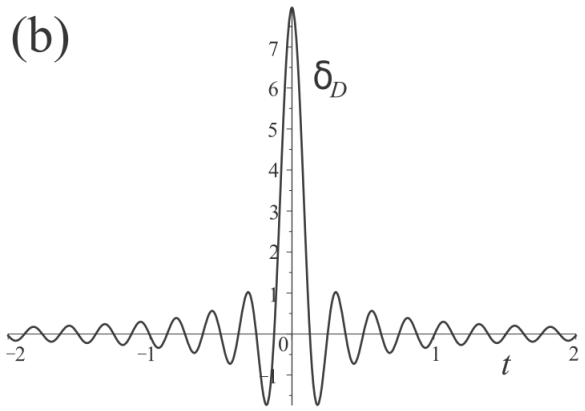


Рисунок 3 – Иллюстрация δ-образной последовательности для непрерывного ядра Дирихле при $\tau = 0.04$.

При таком подходе параметр τ - это характерная ширина квази-δ-функции $\delta_D(t,\tau)$. Чтобы учесть затухание волны среде, мы введем экспоненциальный множитель:

$$\mathcal{D}_\mathrm{s} = \exp\left[-(\omega/2Q_\mathrm{s})t\right], \tag{3}$$

где Q — добротность среды с предполагаемой дисперсией на частоте ω. Добавив к этому равенство смещений и их производных на границах слоев, мы получим учет изменения волн при переходе из слоя в слой. Таким образом данный подход учитывает всю картину изменения волновых форм в кусочно-однородной многослойной упругой среде, что позволит нам моделировать события различных типов, строить соответствующие синтетические сейсмограммы на различном уровне и сравнивать их с наблюденными. В наших расчетах в качестве базиса используются сейсмограммы, полученныена нижнем уровне. С использованием данных сейсмограмм рассчитываются параметры δ-функции. Значения параметров модели определяются посредством минимизации разницы между реальной и синтетической сейсмограммами с использованием метода наименьших квадратов.

Предложенная схема расчета была ранее апробирована на слабых событиях вблизи острова Валаам [1]. Представленная здесь улучшенная версия метода представляется удобной для численных расчётов и минимизирует аналитические расчеты в аналогичных и более сложных задачах. В частности функция Грина

для упругих волн в бесконечном полупространстве позволяет учесть помимо вкладов объёмных S- и P-волн также вклад поверхностных волн типа Рэлея.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18-35-00335). Особую благодарность авторы хотят выразить д.ф.-м.н. М.В. Родкину за участие в обсуждении данной задачи, а также за помощь в редакционной работе над текстом данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nikitina M. A., Val'kov A. Yu. Modeling of local seismic events in the area of Valaam's island// https://arxiv.org/abs/1711.09448
2. Kumagai H. Extreme Environmental Events: Complexity in Forecasting and Early Warning, chap. Volcano Seismic Signals, Source Quantification of. —Springer, New York. — 2014.
3. Val'kov A. Yu., Kuzmin V., Romanov V., Nikitina M., Kozhevnikov S., Meglinski I. Field of a point source in a semi-infinite elastic medium// Waves in random and complex media. — 2012.— V. 22 — 423-434
4. Val'kov A. Yu., Kuzmin V. L., Romanov V. R., Nikitina M. A. Boundary effect on multiple scattering of elastic waves in a half-space// NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS. — 2015. — V. 6 — 524–536
5. Parolai S., Bindi, D., Ullah, S., Orunbaev, S., Usupaev, S., Moldobekov, B., Echtler, H. The Bishkek vertical array (BIVA): acquiring strong motion data in Kyrgyzstan and first results //Journal of seismology. — 2013. — V. 17. — №. 2. – P. 707-719.

ВЛИЯНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА ЦИКЛОСТОЙКОСТЬ МНОГОКРИСТАЛЬНЫХ IGBT МОДУЛЕЙ

А.П. Пилипенко, аспирант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *anastasiiia.pilipenko@gmail.com*

Разработка силовых полупроводниковых приборов должна обеспечивать достижение требуемых показателей надежности разрабатываемых изделий. Одним из важнейших критериев приемки перед постановкой на производство IGBT модуля нового типа является положительные результаты испытаний в режиме электротокового циклирования.

В настоящее время не существует универсального математического аппарата, позволяющего по заданным параметрам вычислить циклостойкость рассматриваемого типа приборов. Это связано с тем, что несмотря на внешнюю схожесть, каждый модуль уникален. Различия обусловлены как конструктивными, так и технологическими особенностями, включая свойства используемых при сборке модуля материалов, зависящих, в том числе, от вариабельности характеристик используемых поставщиком сырья и технологии его обработки. Данные факторы являются переменными, и предугадать их значения, особенно в совокупности, можно лишь с определенной долей вероятности.

К конструктивным особенностям относятся, например, топология DBC подложки, влияние которой на циклостойкость многокристальных модулей было исследовано авторами в [1]; диаметр сварочной проволоки на кристаллах; толщина слоев меди и керамики DBC подложки; толщина припоя. К технологическим факторам следует, в том числе, отнести особенности применяемого технологического оборудования, высота и геометрия сварных петель силовой цепи на кристаллах, параметры технологического процесса, равномерность толщины по всей площади паяных швов, качество сварных соединений.

Для определения наиболее значимых факторов, влияющих на циклостойкость многокристальных IGBT модулей, были подготовлены и испытаны образцы модулей, содержащие по три параллельных кристалла транзисторов и диодов на ключ, соединенные по схеме полумоста, с номинальным напряжением коллектор-эмиттер, равным 1200 В, и предельным током 600 А. Подготовка образцов проводилась в соответствии с планом эксперимента, представленным в Таблице 1. Сравнительные испытания проводились на автоматическом испытательном стенде в соответствии с режимом, приведенном в Таблице 2. Данный режим был выбран с целью нагрузки интересующих элементов конструкции, а именно паяного шва между чипом и DBC подложкой и сварных соединений.

Таблица 1 – План эксперимента

№	Параметр	Стандартное значение	Измененное значение
1	Порядок расположения кристаллов на DBCподложке (топология DBC)	Подключение ближайшего к эквипотенциальной точке кристалла непо-	Подключение ближайшего к эквипотенциальной точке кристалла на DBCчерез обратный диод

		средственно на DBC	
2	Толщина сварной проволоки на кристаллах	380 мкм	500 мкм
3	Материал проволоки	Алюминий	Алюминий, покрытый медью
4	Высота петель	120 %	135 %
5	Среднее значение усилия на сдвиг, варьируемое параметрами процесса ультразвуковой сварки	1650 сН	1950 сН
6	Особенности установки ультразвуковой сварки	Мощный ультразвуковой генератор	Стандартный ультразвуковой генератор

Таблица 2 – Условия испытания

№	Параметр	Значение
1	Амплитуда тока	400 А
2	Охлаждение	Водяное
3	Длительность импульса	3 с
4	Перепад температуры в течение одног цикла (по ТЧП)	85 °С

Исследование образцов для Эксперимента № 1 позволило определить существенное влияние топологии DBC подложки на равномерность распределения тока и температуры между параллельными кристаллами транзисторов, что было подробно описано авторами в [1]. Подключение ближайшего к эквипотенциальной точке кристалла транзистора обеспечило более равномерное (на 61 %) распределение тока между чипами и, как следствие, более равномерный (на 3 %) нагрев параллельных кристаллов по сравнению с первоначальным подключением данного кристалла напрямую благодаря положительному влиянию импеданса алюминиевых проводников, соединяющих кристалл транзистора с медной дорожкой DBC через обратный диод.

Из результата Эксперимента № 2 следует вывод о значительном влиянии на циклостойкость многокристальных IGBT модулей диаметра сварочной проволоки, используемой для разварки кристаллов. Образцы, кристаллы которых были разварены проволокой диаметром 500 мкм, выдержали на 25 % больше элекротермоциклов до отказа по сравнению со стандартными образцами, развариваемыми проволокой диаметром 380 мкм.

Как известно из существующих источников [2], отрыв сварных соединений относится к одной основных причин отказов силовых полупроводниковых модулей. Чаще всего это связано с реструктуризацией поверхности кристалла под действием циклирования и появлению микротрещин в сварном соединении. Исследователи показывают [3], что при замене материала сварочной проволоки на медь циклостойкость прибора возрастает. Для экспериментального подтверждения справедливости данного утверждения на исследуемом типе приборов были подготовлены образцы, кристаллы которых разварены проволо-

кой, 380 мкм диаметра которой состоял на 60 % из медного «сердечника» и на 40 % из алюминиевой оболочки. Однако провести испытания подготовленных образцов в режиме ЭТЦ было невозможно, так как используемая модификация проволоки содержала медь высокой твердости, что привело к появлению микротрещин на поверхности кристаллов и, как следствие, отказу образцов. Испытание планируется повторить с использованием подходящей проволоки данного типа.

Высота сварных петель является крайне значимым фактором, влияющим на циклостойкость приборов. По результатам эксперимента, уменьшение высоты петель всего на 15 % спровоцировало снижение ресурса испытываемых образцов в 2 раза. Это объясняется тем, что высота петли влияет на амплитуду движения проволоки при термомеханической нагрузке во время ЭТЦ [4].

Далее в Экспериментах 5 и 6 авторами статьи исследовалась величина допустимого «коридора технологических параметров», включая отличие в устройстве оборудования для ультразвуковой сварки. По мере подготовки в дальнейших публикаций планируется показать величину допустимых отклонений, не влияющую на циклостойкость исследуемых приборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веревкин В.В., Стригунов С.Л., Пилипенко А.П., Волобуев К.А. Влияние топологии многокристальных IGBT модулей на распределение тока между транзисторными чипами в статических режимах работы // Вестник МЭИ. — 2019. — Выпуск 6.
2. Dagdelen T. Failure Analysis of Thick Wire Bonds // A thesis presented to the University of Waterloo in fulfillment of the thesis requirement for the degree of Master of Applied Science in Mechanical Engineering. // Waterloo, Ontario, Canada. - 2013. - 42.
3. Scheuermann U. Extension of operation temperature range to 200 C enabled by Al/Cu wire bonds // Power Electronics Europe. 2012. — Issue 4. — P. 18-20.
4. Dagdelen T., Abdel-Rahman E., Mustafa Yavuz M. Reliability Criteria for Thick Bonding Wire // Materials (Basel) — 2018. — 11(4):618. — Published 2018 Apr 17. — doi:10.3390/ma11040618.

УДК 536.24.001.57

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ПУЛЬСИРУЮЩЕМ С МАЛЫМИ АМПЛИТУДАМИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ В КВАДРАТНОМ КАНАЛЕ

М.С. Пурдин, к.т.н., ст.преп.
ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»
e-mail: *PurdinMS@mpei.ru*

В работе представлена методика численного моделирования теплообмена при пульсирующем с малыми амплитудами ламинарном течении в квадратном канале, основанная на теории пограничного слоя. Представлены и проанализированы зависимости изменения числа Нуссельта по длине канала квадратного поперечного сечения в зависимости от числа Прандтля, амплитуды и частоты колебаний.

Ключевые слова: теплообмен, пульсации, квадратный канал, ламинарное течение.

1. Введение

Микроэлектронные устройства, применяемые в современных вычислительных системах и аппаратах, выделяют большое количество теплоты. Плотность теплового потока может достигать 70 кВт/м^2 на поверхностях кристаллов центральных процессоров [1]. Это приводит к необходимости разработки новых средств отвода теплоты с микроканальными структурами, в которых течет жидкость. Малый размер каналов обуславливает ламинарный режим течения.

В качестве способа интенсификации иногда рассматривается наложение пульсаций на течение. Имеется ряд работ [2–13], посвященных закономерностям теплоотдачи при пульсирующем течении. Объективный анализ работ показывает, что значительной интенсификации теплообмена достичь невозможно, а наложение пульсаций приводит к сильному увеличению гидродинамического сопротивления и мощности на прокачку. Значительное расхождение в полученных значениях числа Нуссельта и отсутствие сравнений результатов с другими авторами подвергает сомнению полученные результаты различных работ. От очередности интегрирования во времени и способа определения величин, входящих в число Нуссельта сильно зависит результат, особенно при амплитудах колебаний расхода, отнесенных к среднему во времени, $A \geq 1$. Это также отмечено в работах [9], [10]. В последней предложено четыре способа определения числа Нуссельта при пульсирующем течении, однако ни один из них не носит физического смысла.

Имеются исследования влияния пульсирующего течения на теплообмен на начальном гидродинамическом участке круглого канала [11], [12], [13], тем не менее отсутствуют детальные исследования теплообмена при пульсирующем ламинарном течении на начальном гидродинамическом участке плоского канала. Имеющиеся на настоящий момент результаты исследований не дают однозначного ответа на вопрос о том, как меняется теплоотдача с изменением режимных параметров пульсирующего ламинарного течения. Таким образом, проведение расчетных исследований в данной области важно с практической и теоретической точки зрения.

2. Постановка задачи

Распределение составляющих скорости при пульсирующем ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале описываются уравнениями движения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \tag{1}$$

и неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{2}$$

где p – давление, t – время, u, υ и w – составляющие скорости вдоль осей x, y и z, ν – кинематическая вязкость, ρ – плотность.

Такая форма уравнений (1) и (2) соответствует теории пограничного слоя и получена путем отбрасывания членов, входящих в полную систему уравнений Навье-Стокса, с малым порядком величины [14]. Так как $\upsilon \wedge w << u$, то нет необходимости в решении уравнения сохранения импульса для поперечной составляющей скорости. Они оказывают некоторое влияние при решении уравнений тепло- или массопередачи, как и уравнения движения (1). При $\mathrm{Re} < 100$ пренебречь решением уравнения движения для поперечной составляющей скорости невозможно, так как длина начального участка становится сопоставимой или меньше высоты канала, а поперечная составляющая скорости становится сопоставимой или больше продольной составляющей. Область исследования ограничена по числу Рейнольдса в диапазоне $100 < \mathrm{Re} < 2000$.

Для скорости имеем уравнения (1) и (2), которые необходимо дополнить третьим выражением, а также формулой для нахождения градиента давления.

Градиент давления для каждого сечения и момента времени несложно подобрать опираясь на интегральное уравнения неразрывности $\frac{\partial < u >}{\partial x}=0$ (знак $< >$ означает осреднение по сечению или периметру). Метод подробно описан в работе [15].

Вторую поперечную составляющую скорости можно приближенно вычислить по формуле $wy = \upsilon z$, впервые предложенной R.W. Hornbeck (см. [16]).

Распределение температуры при пульсирующем ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале описывается уравнением энергии

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{3}$$

где T – температура, λ – теплопроводность, c_p – теплоемкость.

В безразмерном виде для пульсирующего течения уравнения (1), (2) имеют вид:

$$\mathrm{S}^2\frac{\partial U}{\partial t_\omega}+U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}+W\frac{\partial U}{\partial Z}=\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}+P, \tag{4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}+\frac{\partial W}{\partial Z}=0, \tag{5}$$

где $P = -\dfrac{d_г \mathrm{Re}}{\rho < \bar{u} >} \dfrac{dp}{dx}$ – безразмерный градиент давления, $\mathrm{Re} = < \bar{u} > d_г / \nu$ – число Рейнольдса, $d_г = h$ – гидравлический диаметр, h – высота квадратного канала, $\mathrm{S} = d_г \sqrt{\omega / \nu}$ – безразмерная частота колебаний, $t_\omega = \omega t$ – безразмерное время, $U = u / < \bar{u} >$, $V = \upsilon \mathrm{Re} / < \bar{u} >$ и $W = w \mathrm{Re} / < \bar{u} >$ – безразмерные продольная и поперечные составляющие скорости, $X = x / \left(d_г \mathrm{Re} \right)$, $Y = y / d_г$ и $Z = z / d_г$ – безразмерные продольная и поперечные координаты, ω – круговая частота, знак $\bar{}$ означает осреднение во времени.

На рисунке 1 представлена схема расчетной области с граничными условиями (г.у.) для расчета распределения составляющих скорости. На входе в канал, при $X = 0$, задан равномерный профиль скорости без поперечных составляющих ($U = 1 + A \sin \omega t$, $V = 0$, $W = 0$). Это упрощение справедливо для чисел Рейнольдса Re > 100, когда толщина динамического пограничного слоя мала по сравнению с высотой канала. На стенке, при $Y = Y_0$, или $Z = Z_0$ задано условие прилипания ($U = 0$, $V = 0$, $W = 0$). При $Y = 0$ или $Z = 0$ задано условие симметрии ($\dfrac{\partial U}{\partial Y} = 0$, $\dfrac{\partial U}{\partial Z} = 0$, $V = 0$, $W = 0$). Длина расчетной области X_0 подбирается такой, чтобы она не оказывала влияния на результаты расчетов.

На практике перед входом в канал имеется некоторое предвключенное пространство. При $A > 1$ поток жидкости часть периода движется в обратном направлении и заходит в это пространство, что представляет проблему для моделирования пульсирующего течения, связанную с большим количеством его геометрических параметров. При $A > 1 \wedge A \approx 1$ в некоторые моменты времени поперечная составляющая скорости становится сопоставима или больше продольной составляющей скорости. Кроме того, при $A \approx 1$ возможно возникновение вторичных колебаний, так как в предвключенном пространстве происходит встречное натекание двух потоков, что может приводить к неустойчивости относительно оси симметрии и образованию вихрей. Для этих случаев модель необходимо дополнять уравнением движения для поперечной составляющей скорости. Рассматриваемая модель не учитывает предвключенного пространства и возможной асимметрии потока, поэтому амплитуда колебаний средней по сечению скорости ограничена диапазоном $0 < A << 1$.

В безразмерном виде уравнение (3) имеет вид:

$$\mathrm{Pr} \left(\mathrm{S}^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial t_\omega} + U \frac{\partial \vartheta}{\partial X} + V \frac{\partial \vartheta}{\partial Y} + W \frac{\partial \vartheta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Z^2}, \qquad (6)$$

где $\mathrm{Pr} = \nu / a$ – число Прандтля, $a = \lambda / \left(\rho c_p \right)$ – температуропроводность, $\vartheta = \left(T - T_0 \right) / \left(T_с - T_0 \right)$ – безразмерная температура жидкости при г.у. *I* рода на стенке ($\vartheta = \lambda \left(T - T_0 \right) / \left(d_г q_с \right)$ – при г.у. *II* рода), T_0 – температура жидкости на входе в канал, $T_с$ – температура стенки, $q_с$ – тепловой поток на стенке.

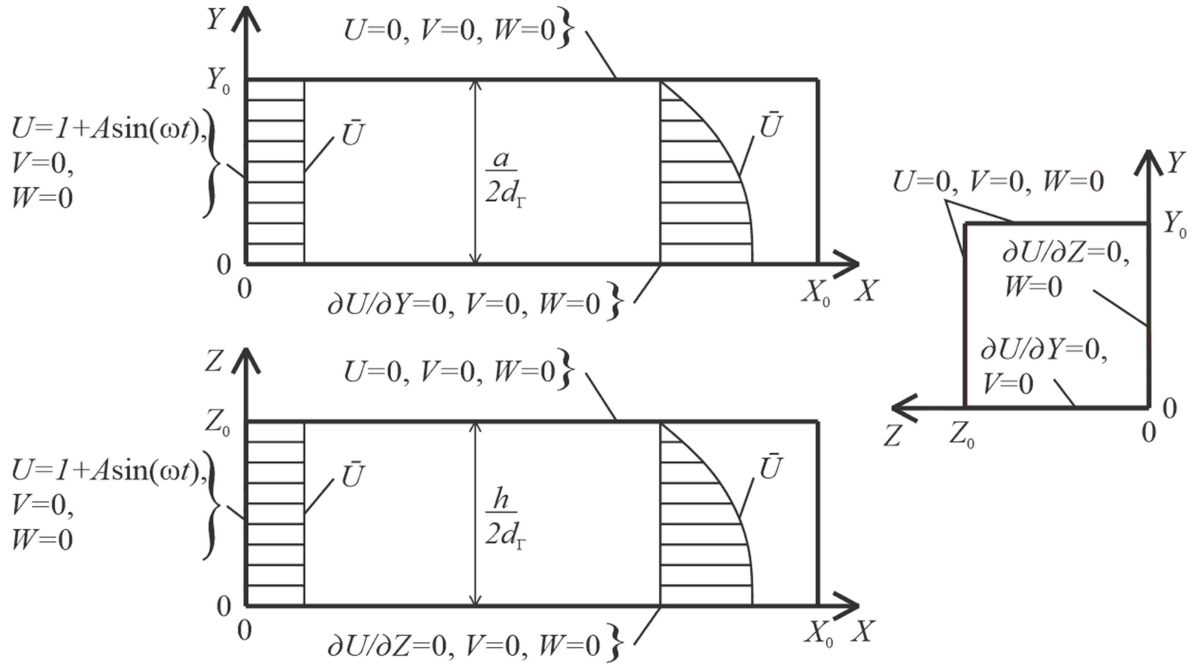


Рисунок 1 – Схема расчетной области для расчета составляющих скорости

На рисунке 2 представлена схема расчетной области с граничными условиями для расчета распределения температуры.

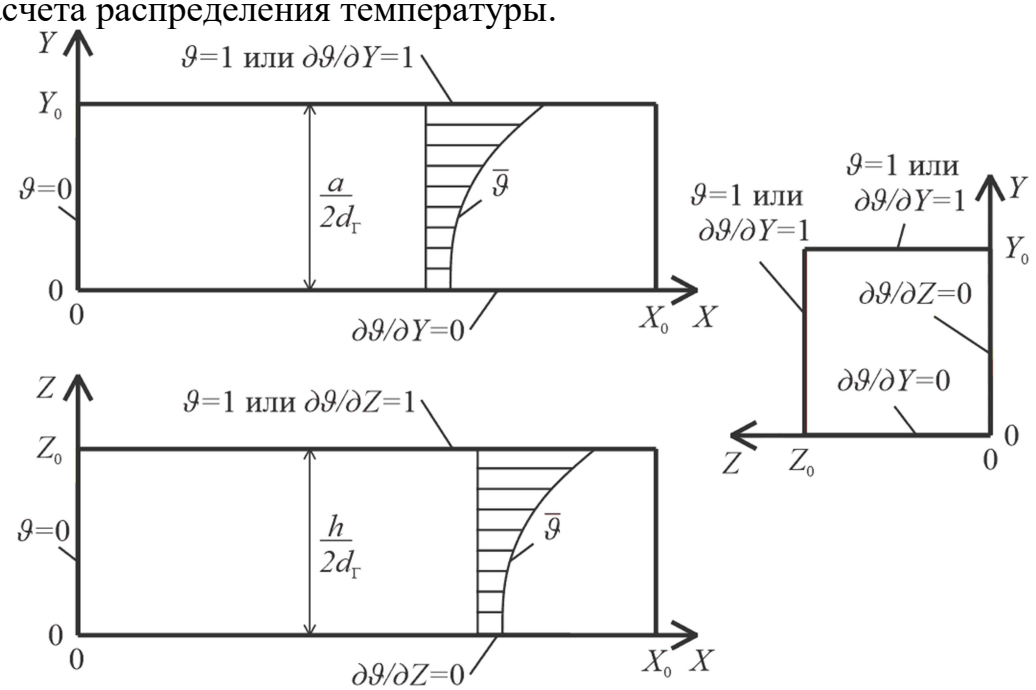


Рисунок 2 – Схема расчетной области для расчета температуры

3. Методика численного моделирования

Решения уравнений (4), (5) и (6) находились методом конечных разностей. Производная по времени аппроксимирована с помощью неявной безусловно устойчивой двухслойной по времени разностной схемы. Для аппроксимации конвективных членов уравнения движения применена схема «против потока», так как даже при $A < 1$ при $S > 1$ возможно возникновение возвратных течений вблизи стенки [17], что может привести к неустойчивости решения и получению неверных результатов. Результаты расчетов гидродинамики с возвратными течениями не применялись при решении уравнения энергии, для конвективных членов которого применена неявная двухслойная схема с первым

порядком. Для аппроксимации первых производных в уравнении неразрывности применена неявная двухслойная схема с первым порядком точности. Для аппроксимации вторых производных уравнений (4) и (6) применена центрально-разностная схема со вторым порядком точности.

Для решения полученных систем линейных уравнений применен метод Гаусса-Зейделя. Написана программа, реализующая вычисления на видеокарте с применением библиотеки C++AMP.

Интегрирование по сечению канала проводится методом Симпсона, а во времени – методом трапеций. Порядок точности интегрирования не уступает порядку точности разностной аппроксимации дифференциальных уравнений, что позволяет эффективно использовать машинные ресурсы.

По завершению расчета определялись средние во времени значения теплового потока на стенках $<\overline{Q}>=\dfrac{\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{Z_0}\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial Y}\right)_{Y=Y_0}dZ+\int_0^{Y_0}\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial Z}\right)_{Z=Z_0}dY\right)dt_\omega}{2\pi\left(Y_0+Z_0\right)}$, средней массовой температуры жидкости $\overline{\vartheta_ж}=\dfrac{\int_0^{2\pi}\int_0^{Z_0}\int_0^{Y_0}\vartheta U dY dZ dt_\omega}{2\pi Y_0 Z_0 <\overline{U}>}$, температуры стенки $\overline{\vartheta_с}=\dfrac{\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{Z_0}\vartheta_{Y=Y_0}dZ+\int_0^{Y_0}\vartheta_{Z=Z_0}dY\right)dt_\omega}{2\pi\left(Y_0+Z_0\right)}$ и числа Нуссельта $\mathrm{Nu}=\dfrac{<\overline{Q}>}{\overline{\vartheta_с}-\overline{\vartheta_ж}}$.

4. Результаты расчетов

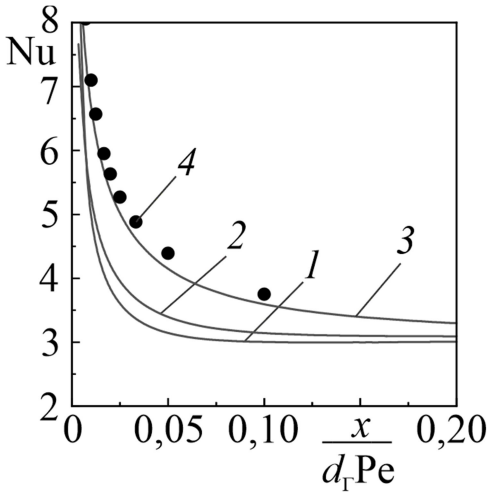


Рисунок 3 – Изменение числа Нуссельта по длине канала при развивающемся стационарном течении

1 – при г.у. *I* рода на стенке, *2* – *II* рода, *3* – осредненное по длине канала число Нуссельта при г.у. *I* рода, *4* – экспериментально полученное в работе [18] осредненное по длине канала число Нуссельта при г.у. *I* рода.

До настоящего времени исследований теплообмена при развивающемся пульсирующем ламинарном течении в квадратном канале экспериментальным или аналитическим методами не проводилось. Верифицировать работу программы можно только с помощью сравнения с результатами исследований

Wibulswas [18] для развивающегося стационарного течения, задавая $A = 0$. На рисунке 3 представлены результаты расчетов в программе. Видно, что они хорошо совпадают с экспериментальными данными.

Результаты расчетов теплообмена при пульсирующем с малыми амплитудами ламинарном течении в квадратном канале представлены на рисунке 4. Значительным отличием от пульсирующего течения в плоском канале или круглой трубе является отсутствие ярко выраженных колебаний числа Нуссельта по длине, вызванных тепловой волной. При Pr = 7 и S = 8 можно наблюдать не более одного минимума или максимума. Видно, что с увеличением числа Прандтля длина тепловой волны уменьшается. При уменьшении S, Pr и/или увеличении амплитуды колебаний происходит значительное уменьшение числа Нуссельта.

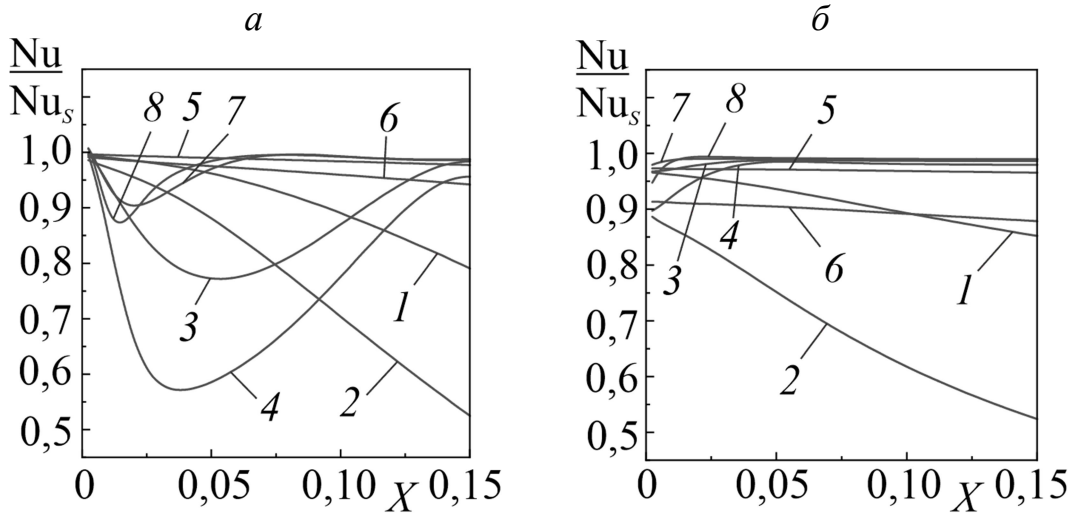


Рисунок 4 – Отношение числа Нуссельта к его стационарному значению

а – при г.у. *I* рода на стенке, *б* – *II* рода; *1* – A = 1/3, S = 1, Pr = 0,7; *2* – A = 2/3, S = 1, Pr = 0,7; *3* – A = 1/3, S = 8, Pr = 0,7; *4* – A = 2/3, S = 8, Pr = 0,7; *5* – A = 1/3, S = 1, Pr = 7; 6 – A = 2/3, S = 1, Pr = 7; 7 – A = 1/3, S = 8, Pr = 7; *8* – A = 2/3, S = 8, Pr = 7.

5. Заключение

Представлена и реализована методика численного моделирования теплообмена при пульсирующем с малыми амплитудами ламинарном течении в квадратном канале, основанная на теории пограничного слоя. Проведен краткий анализ влияния числа Прандтля, безразмерной частоты и амплитуды колебаний на число Нуссельта. Обнаружено, что при пульсирующем с малыми амплитудами ламинарном течении в квадратном канале число Нуссельта уменьшается.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант № МК-2636.2018.8.

ЛИТЕРАТУРА

1. 8th and 9th Generation Intel Core Processor Families and Intel Xeon E Processor Family Datasheet // Intel Corporation. – October 2018. – Doc. No. 337344-002.
2. AI-Haddad A.A., AI-Binally N. Prediction of heat transfer coefficient in pulsating flow // Int. J. Heat and Fluid Flow. – 1989. – V. 10. – N. 2. – P. 131 – 133.
3. Siegel R., Perlmutter M. Heat transfer for pulsating laminar duct flow // J. Heat Transfer. – 1962. – V. 84. – P. 111–122.

4. Persoons T., Saenen T., Van Oevelen T., Baelmans M. Effect of flow pulsation on the heat transfer performance of a minichannel heat sink // J. Heat Transfer. – 2012. – Vol. 134. – P. 1–7.
5. Nandi T.K., Chattopadhyay H. Numerical investigations of simultaneously developing flow in wavy microchannels under pulsating inlet flow condition // Int. Com. Heat Mass Transfer. – 2013. – Vol. 47. – P. 27–31.
6. Mehta B., Khandekar S. Local experimental heat transfer of single-phase pulsating laminar flow in a square mini-channel // Int. J. Thermal Science. – 2015. – Vol. 91. – P. 157–166.
7. Yuan H., Tan S., Wen J., Zhuang N. Heat transfer of pulsating laminar flow in pipes with wall thermal inertia // Int. J. Thermal Science. – 2016. – Vol. 99. – P. 152–160.
8. Blythman R., Persons T., Jeffers N., Murray D.B. Heat transfer of laminar pulsating flow in a rectangular channel // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2019. – Vol. 128. – P. 279–289.
9. Hemida H.N., Sabry M.N., Abdel-Rahim A., Mansour H. Theoretical analysis of heat transfer in laminar pulsating flow // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2002. – Vol. 45. – P. 1767–1780.
10. Guo Z., Sung H.J. Analysis of the Nusselt number in pulsating pipe flow // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1997. –Vol. 40. – P. 2486–2489.
11. Cho Y.W., Hyun J.M. Numerical solutions of pulsating flow and heat transfer characteristics in a pipe // Int. J. Heat and Fluid Flow. – 1990. – V. 11. – N. 4. – P. 321–330.
12. Kim S.Y., Kang B.H., Hyun J.M. Heat transfer in the thermally developing region of a pulsating channel flow // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1993. – V. 36. – N. 17. – P. 4257–4266.
13. Chattopadhyay H., Durst F., Ray S. Analysis of heat transfer in simultaneously developing pulsating laminar flow in a pipe with constant wall temperature // Int. Comm. in Heat and Mass Transfer. – 2006. – V. 33. – P. 475–481.
14. Шлихтинг Г. Теория Пограничного слоя // 1974. – М.: Наука. – 712 с.
15. Purdin M.S. Developing low-amplitude pulsating laminar flow in a flat channel // IJERT – 2019. – V. 12. – N. 4. – P. 570–578.
16. Hornbeck R.W. Numerical marching techniques for fluid flows with heat transfer // NASA. – 1973. – SP-297.
17. Валуева Е.П., Пурдин М.С. Пульсирующее ламинарное течение в прямоугольном канале // Теплофизика и аэромеханика. – 2015. – № 6. – С. 761–773.
18. Wibulswas P. Laminar-flow heat-transfer in non-circular ducts // London. – 1966. – 150 p.

УДК 532

ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОТОКОВ К ГАЗОДОБЫВАЮЩИМ СКВАЖИНАМ ПО УТОЧНЕННОМУ ЗАКОНУ ДАРСИ

В.А. Толпаев, д.ф.-м.н., проф.
ООО «Газпром проектирование» Ставропольский филиал
e-mail: *TolpaevVA@scnipigaz.ru*
К.С. Ахмедов, к.т.н.
АО «СевКавНИПИгаз»
e-mail: *AhmedovKS@scnipigaz.ru*
А.М. Кравцов, к.ф.-м.н.
АО «СевКавНИПИгаз»
e-mail: *KravcovAM@scnipigaz.ru*
М.Т. Петросянц, м.н.с.
АО «СевКавНИПИгаз»
e-mail: *PetrosyancMT@scnipigaz.ru*
М.А. Бондаренко, м.н.с.
АО «СевКавНИПИгаз»
e-mail: *PetrosyancMT@scnipigaz.ru*

В работе предлагается методика уточнения законов фильтрации сжимаемых флюидов в пористых средах. Приводятся теоретические обоснования границ применимости ряда классических законов фильтрации, и строятся уточнения классических моделей фильтрационных течений в пористых средах.

Методика уточнения законов фильтрации, рассмотренная в работе, основана на применение первого начала термодинамики – закона сохранения энергии. С этой целью в статье предложено в качестве основного закона фильтрации применять преобразованную форму записи дифференциального закона сохранения энергии вдоль потока флюида.

Получены оценки для условий существования устойчивого плоскорадиального потока сжимаемого флюида к скважине.

Ключевые слова: закон фильтрации, закон Дарси, закон сохранения энергии вдоль потока.

В настоящее время в инженерной практике, при проектировании новых объектов, ревизии объектов находящихся в эксплуатации, широко используются методы компьютерного моделирования гидродинамики технических и технологических процессов. Ныне существующие компьютерные симуляторы, имеют модульную структуру, состоят из ряда универсальных блоков. Одним из таких блоков, в случае моделирования фильтрационных потоков, является блок, отвечающий за корректное описание физико-механических свойств пористой матрицы, включающей в себя фильтрационный поток с сопутствующим набором его физико-механических свойств, термодинамику и механику взаимодействия фильтрационного потока с фильтрационной матрицей.

Главными сложностями в процессе описания компьютерной модели гидродинамики фильтрационного потока является адекватный моделируемому процессу подбор закона фильтрации и установление четкого соответствия меж-

ду диапазонами изменения параметров фильтрационного потока и границ применимости фильтрационного закона. Как правило, программные симуляторы в своем арсенале имеют небогатый выбор классических вариантов фильтрационных законов и предлагают программное средство для редактирования существующих и создания новых моделей фильтрационных течений. Классические законы фильтрации имеют очень узкие границы применимости и, с целью их практического применения, должны быть снабжены уточняющими членами.

Для вывода уравнения фильтрации флюида в пористой среде воспользуемся первым началом термодинамики. Сформулируем для потока флюида закон сохранения в дифференциальной форме

$$-\frac{dp}{\rho} = c \cdot dc + c_p dT + dW_g + dW_в + dW_{тр} \tag{1}$$

Здесь $\frac{dp}{\rho}$ - работа сил давления по изменению элемента объема флюида в потоке, которая представляется суммой работы по изменению скорости элемента объема флюида ($c \cdot dc$) и его температуры ($c_p dT$), работы затраченной на преодоление сил тяжести (dW_g), работы, затраченной на преодоление внешних сил ($dW_в$) и преодоление сил трения различной природы ($dW_{тр}$), существующих в потоке или проявляющихся в результате взаимодействия с пористой матрицей.

Если почти вся работа идет на расширение флюида, сопровождаемое его ускорением в потоке, то можно в правой части выражения (1) оставить только первое слагаемое, пренебрегая остальными, ввиду их малости

$$-\frac{dp}{\rho} = c \cdot dc \quad . \tag{2}$$

Оценим решение задачи фильтрации в простейшем случае – установившейся плоскорадиальной фильтрации газа к скважине в отсутствие трения.

Проинтегрируем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \rho c = 0 \quad , \tag{3}$$

с учетом предложенного уравнения фильтрации, записанного в дифференциальной форме

$$c \cdot dc = -\frac{dp}{\rho}, \tag{4}$$

и адиабатического характера для процесса фильтрации газа к скважине [1]

$$\frac{p}{p_{пл}} = \left(\frac{\rho}{\rho_{пл}} \right)^{\gamma}, \tag{5}$$

где γ – показатель адиабаты, $p_{пл}$, $\rho_{пл}$ – давление и плотность газа в незатронутой фильтрационным течением части пластовой системы.

Установившееся плоскорадиальное течение к скважине описывается уравнением неразрывности вида

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \cdot \rho \cdot c\right) = 0 . \tag{6}$$

Интегрируя уравнение один раз, получим

$$\rho \cdot c = \frac{C_1}{r} \tag{7}$$

Числовая величина константы интегрирования C_1 определяется из условия на забое скважины

$$C_1 = r_c \cdot \rho_{зб} \cdot c_1 \tag{8}$$

Здесь r_c, $\rho_{зб}$, c_1 –радиус забоя скважины, плотность газа и скорость течения газа на забое скважины, соответственно.

Проинтегрируем уравнение фильтрации, с учетом адиабатического характера течения газа (5), получим

$$c^2 - c_{\max}^2 = -\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_{пл}}{\rho_{пл}}\left(\frac{p}{p_{пл}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \tag{9}$$

Значение константы интегрирования c_{max} определяется из условия равенства нулю скорости в незатронутой течением части пластовой системы

$$c_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{p_{пл}}{\rho_{пл}}}. \tag{10}$$

Выражение для скорости фильтрации (9), с учетом найденного выражения для c_{max} и введенного обозначения (10), можно записать проще

$$c = c_{\max} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_{пл}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \tag{11}$$

Подставим найденное выражение для скорости фильтрации в интеграл уравнения неразрывности, получим

$$\rho c_{\max} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_{пл}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{r_c \cdot \rho_{зб} \cdot c_1}{r} \tag{12}$$

Окончательно, распределение давления газа по радиальной координате при установившемся плоскорадиальном фильтрационном течении газа к скважине примет вид

$$\left(\frac{p}{p_{зб}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \frac{c_{\max}}{c_1} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_{пл}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{r_c}{r} \tag{13}$$

Дебит скважины Q связан с параметрами фильтрационного потока на забое скважины так

$$Q = F_c \cdot c_1 \cdot \frac{\rho_{зб}}{\rho_{ат}} \tag{14}$$

Здесь F_c –поверхность забоя, через которую фильтруется флюид, в качестве оценки для F_c можно использовать выражение

$$F_c = 2\pi \cdot r_c \cdot h_c \cdot m, \tag{15}$$

где h_c – глубина вскрытой части пласта, m – величина просветности для горной породы на забое скважины, $\rho_{зб}$,. $\rho_{ат}$ –плотность флюида на забое скважины и

при нормальных условиях, соответственно. Из последней формулы может быть получена оценка для дебита скважины, по известным значениям пластового и забойного давления

$$Q = F_c \cdot c_{\max} \cdot \frac{\rho_{зб}}{\rho_{ат}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_{зб}}{p_{пл}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

Из полученной оценки для дебита скважины, в частности, следует, что теоретически возможная величина дебита ограничена значением

$$Q_{max} = 2\pi \cdot r_c \cdot h_c \cdot m \cdot \frac{\rho_{зб}}{\rho_{ат}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_{пл}}{\rho_{пл}}} \qquad (16)$$

Скорость газа при его расширении не может превышать критической (скорости звука в газе при действующих термодинамических условиях (p, T)). Критическая скорость достигается при критическом давлении на забое скважины $p_{кр} = \beta_{кр}\, p_{пл}$, $\beta_{кр}=(2/(\gamma+1))^{\gamma/(\gamma-1)}$ ($\beta_{кр} \approx 0.5$). Как правило, при эксплуатации месторождений углеводородов, таких технологических показателей не достигают, поскольку пластовые давления высоки, а депрессии на пласт не превышают нескольких атмосфер. Такая ситуация, теоретически, возможна при низких пластовых давлениях, на завершающем этапе эксплуатации месторождения углеводородов. При скоростях фильтрации ниже критической газ расширяется адиабатически до давления на забое скважины $p_{зб}$.

На практике, чаще всего, нельзя пренебречь силами трения в процессе фильтрации флюида к скважине, например, в силу слабой проницаемости пористой матрицы. Рассмотрим наиболее простой случай, когда присутствует вязкое трение в потоке флюида и потеря давления на трение в канале пористой матрицы, при малых числах Рейнольдса, описывается уравнением Гагена-Пуазейля

$$\frac{\Delta p_{тр}}{\Delta l} = \frac{32\mu \cdot c}{d^2}, \ \mathrm{Re} < 2000. \qquad (17)$$

Здесь $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho \cdot d \cdot c}{\mu}$ - число Рейнольдса, d –характерный диаметр канала в пористой матрице, μ – динамическая вязкость флюида, Δl – длина канала. Добавим в закон фильтрации (2) член, отвечающий за вязкое трение

$$c \cdot dc + \frac{dl}{dr} \cdot \frac{32\mu \cdot dr \cdot c}{\rho \cdot d^2} = -\frac{dp}{\rho}. \qquad (18)$$

Здесь dl/dr характеризует извилистость каналов вдоль радиального потока, примем ее постоянной.

Выражая из (18) скорость, можно преобразовать уравнение фильтрации к форме записи известного закона Дарси

$$c = -\frac{1}{\rho \cdot \dfrac{dc}{dr} + \dfrac{dl}{dr} \cdot \dfrac{32\mu}{d^2}} \cdot \frac{dp}{dr}, \qquad (19)$$

где $\frac{dp}{dr}, \frac{dc}{dr}$ градиенты давления и скорости вдоль радиального потока флюида, соответственно. В законе Дарси принято, что $\frac{1}{\rho \cdot \frac{dc}{dr} + \frac{dl}{dr} \cdot \frac{32\mu}{d^2}} \approx \frac{k}{\mu} = const$, где k – коэффициент проницаемости пористой матрицы.

Очевидно, что закон Дарси может согласоваться с высокой степенью точности с практически наблюдаемыми течениями флюида, лишь в случае постоянного градиента скорости в потоке, например, в плоскопараллельном течении к галерее, а также постоянной плотности потока, например, при движении слабо сжимаемого флюида. В остальных случаях наблюдаются значительные расхождения с реально регистрируемыми характеристиками течения. Различия тем больше, чем больше меняются градиент скорости и плотность флюида вдоль потока.

Построим решение задачи об установившемся плоскорадиальном потоке сжимаемого флюида к скважине с учетом уточненного закона фильтрации (18). Уравнение неразрывности (6) и закон фильтрации (18) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dr}{r} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} = 0, \\ \rho \cdot c \cdot dc + \lambda \cdot c \cdot dr + dp = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Здесь $\lambda = \frac{dl}{dr} \cdot \frac{32\mu}{d^2}$.

Учитывая соотношение для скорости звука в потоке флюида

$$c_0^2 = \frac{dp}{d\rho} \tag{21}$$

Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций скорости и плотности потока сжимаемого флюида

$$\begin{cases} \frac{dc}{c} + \frac{\lambda \cdot dr}{\rho \cdot c} + \frac{c_0^2}{c^2} \frac{d\rho}{\rho} = 0, \\ \frac{dr}{r} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Условием течения флюида к скважине является dρ/dr > 0, разрешим систему (21) относительно dρ/dr

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{\frac{\rho}{r} - \frac{\lambda}{c}}{1 - \frac{c_0^2}{c^2}}. \tag{22}$$

Скорость фильтрации не превосходит скорости звука в потоке $c < c_0$, поэтому во всех точках в области фильтрации должно выполняться условие $\frac{\rho}{r} - \frac{\lambda}{c} > 0$, получаем

$$\frac{\rho \cdot c}{r} > \lambda \tag{23}$$

Ранее в работе [2] в рамках классической постановки задачи о плоскорадиальной фильтрации сжимаемого флюида к скважине, для радиуса R границы области фильтрации была получена оценка

$$R = \frac{\gamma\left(1 - \left(\frac{\rho_{зб}}{\rho_{пл}}\right)^{\gamma+1}\right)}{(\gamma+1)} \cdot \frac{\rho_{пл}}{\rho_{зб}} \cdot \frac{\kappa}{c_1}, \tag{24}$$

где γ – показатель адиабаты сжимаемого флюида, $\kappa = \frac{k \cdot p_{пл}}{2\eta \cdot m}$ - коэффициент пьезопроводности пористого материала пласта, k – коэффициент проницаемости породы пласта, η – кинематическая вязкость флюида. Оценка была построена асимптотическими методами, решение классической задачи фильтрации строилось в приближении плоской волны для дальней зоны области фильтрации.

С учетом решения уравнения неразрывности (7), (8) и обозначения для λ, имеем окончательно

$$\frac{r_c \cdot \rho_c \cdot c_1 \cdot d^2}{32 \cdot \frac{dl}{dr}} \cdot \frac{1}{r^2} > \mu \tag{25}$$

С учетом (14), (15) можно условие (25) записать иначе

$$\frac{\rho_{am} \cdot Q \cdot d^2}{64 \cdot h_c \cdot m \cdot \frac{dl}{dr}} \cdot \frac{1}{\pi \cdot r^2} > \mu \tag{26}$$

Полученная формула качественно согласуется с формулой (24) из работы [2].

Исходные уравнения (6), (18) описывают установившуюся фильтрацию вязкого флюида в пористой среде. Таким образом, полученное соотношение (25) является условием устойчивости фильтрационного потока. Как следует из записанного выражения, условия существования установившегося течения определяются диаметром и извилистостью фильтрационных каналов, а также плотностью флюида и его скоростью. Область установившейся фильтрации имеет конечные размеры, поскольку начиная с некоторого значения r, условие устойчивости потока перестает выполняться. Размеры области тем больше, чем меньше вязкость флюида. Следует отметить также, что как следует из условия (26), продуктивность скважины пропорциональна площади области фильтрации в плане.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика // Изд-во «Недра», М.: - 1993 г., 416 с.
2. Толпаев В.А., Ахмедов К.С., Кравцов А.М. Квазистационарная динамическая модель течения флюида к скважине // Ученые записки Забайкальского государственного университета. – 2018. №4, Т. 13 – с. 24-30

УДК 621.382.3:536.24.01

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКА ТЕПЛА ПРИ ТЕПЛООТВОДЕ В ПОДЛОЖКУ В ТРАНЗИСТОРНОЙ СТРУКТУРЕ ПОДЛОЖКА-ПОЛУПРОВОДНИК-ПАССИВАЦИЯ МЕТОДОМ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА РАСПОЛОЖЕННОГО НА ГРАНИЦЕ ПОЛУПРОВОДНИК-ПАССИВАЦИЯ

В. О. Турин, к.ф.-м.н.
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева
e-mail: *voturin@mail.ru*
Е. Н. Пиляева
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева
e-mail: *k.piliaeva@yandex.ru*
И. В. Головин
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева
e-mail: *garik57region@gmail.com*

Ранее была решена задача о распространении тепла в транзисторной структуре подложка-полупроводник-пассивация методом изображений для случаев точечного и линейного источника тепла, расположенного на границе полупроводник-пассивация, без учёта теплоотвода в пассивацию. Подложка рассматривалась как полупространство примыкающее снизу к неограниченному по бокам слою полупроводника. Было показано, что даже в случае идеального теплоотвода в подложку, поток тепла при переходе из полупроводника в подложку имеет поперечный размер порядка толщины слоя полупроводника, а с уменьшением коэффициента теплопроводности подложки размер потока тепла на границе подложка-полупроводник существенно возрастает. В нашей работе, пока только для случая точечного источника тепла, получено решение более общей задачи о распространении тепла в транзисторной структуре подложка-полупроводник-пассивация. Мы, используя метод изображений, рассчитали поперечный размер потока тепла на границе подложка-полупроводник в зависимости от значения коэффициента теплопроводности подложки для различных значений коэффициента теплопроводности пассивации. Согласно нашему исследованию, появление возможности теплоотвода в пассивацию приводит к увеличению поперечного размера потока тепла на границе подложка-полупроводник, хотя доля тепла уходящего в подложку уменьшается. Наше исследование должно помочь в оптимизации проектирования транзисторных структур с учётом теплоотвода в пассивацию, что актуально, например, для мощных транзисторов на основе широкозонных полупроводников, таких как GaN и SiC, когда тепловыделение в активной области прибора, расположенной близко к пассивации, очень высоко. Кроме этого, наши результаты подтверждают ранее выработанную практическую рекомендацию для приборно-технологическом моделирования с учётом эффекта саморазогрева. Мы рекомендовали выбирать поперечный размер моделируемой области полупроводникового слоя транзисторной структуры так, чтобы он в разы превышал свою толщину.

Ключевые слова: теплопроводность, транзисторная структура подложка-полупроводник-пассивация, метод изображений, теплоотвод в подложку и пассивацию, эффект саморазогрева.

1. Введение

Первые полевые транзисторы (ПТ) на основе широкозонного полупроводника нитрида галлия (GaN) были созданы в 1993 году [1, 2]. Современные ПТ на основе GaN обеспечивают выходную мощность в СВЧ электронике и коммутируемые токи в силовой электронике в разы выше, чем транзисторы на основе традиционных полупроводников. Транзисторы на основе GaN могут работать при температурах до 300-400 градусов Цельсия, что существенно выше, чем у аналогов на основе GaAs и Si. Пробивное напряжение и радиационная стойкость транзисторов на основе GaN в несколько раз превышает характеристики GaAs и Si транзисторов. Благодаря уникальным свойствам,

применение GaN-транзисторов существенно улучшает параметры современных наземных и спутниковых телекоммуникационных систем. Этот класс приборов является перспективным для использования в радарах с активной фазированной антенной-решеткой (АФАР) и в системах радиоэлектронной борьбы, в контроллерах энергетических систем, в электрических и гибридных транспортных средствах. Соответственно, исследование, разработка и совершенствование GaN-транзисторов является приоритетными направлением НИОКР в области современной полупроводниковой техники.

С 1993 года до настоящего времени в мире активно ведутся работы по исследованию ПТ на основе GaN и улучшению их характеристик, направленные, в частности, на преодоление эффекта саморазогрева.

Известно, что в GaN HEMT пассивация поверхности прибора улучшает характеристики транзистора за счёт подавления поверхностных ловушечных уровней. Соответственно, тенденция к использованию пассивации сохраняется, с соответствующим плохим теплоотводом с поверхности прибора [3].

Но существует и противоположная тенденция - использование пассивации с более высоким коэффициентом теплопроводности для улучшения теплоотвода с поверхности прибора [4]. Для улучшения теплоотвода с поверхности прибора даже используется нанесение нанокристаллической алмазной плёнки [5]. Исследуется возможность улучшения теплоотвода от активной области прибора с использованием нанесения на поверхность нескольких слоёв графена [6].

Соответственно, актуальным является исследование влияния теплоотвода с поверхности GaN ПТ. При этом, кроме приборно-технологического моделирования, важно и аналитическое решение характерных задач о распространении тепла в транзисторной структуре, что необходимо для качественного понимания этого процесса и критического анализа результатов моделирования.

В работах [7, 8, 9] впервые было проведено моделирование GaN MESFET в программе приборно-технологическое моделирования TCAD Sentaurus компании Synopsys с учётом саморазогрева без учёта теплоотвода с поверхности прибора в пассивацию. Такое приближение оправдано наличием толстого слоя пассивации с низким коэффициентом теплопроводности. В [8, 9], в дополнение к приборно-технологическому моделированию, решена и задача о распространении тепла от точечного и линейного источников в структуре подложка-полупроводник-пассивация методом изображений без учёта теплоотвода в пассивацию. Решение этой задачи показывает, что даже в случае идеального теплоотвода в подложку, поток тепла при переходе из полупроводника в подложку имеет поперечный размер порядка толщины слоя полупроводника, а с уменьшением коэффициента теплопроводности подложки размер потока тепла на границе подложка-полупроводник существенно возрастает.

В нашей работе, пока только для случая точечного источника тепла, получено решение более общей задачи. Мы, используя метод изображений, рас-

считали поперечный размер потока тепла на границе подложка-полупроводник в транзисторной структуре подложка-полупроводник-пассивация в зависимости от значения коэффициента теплопроводности подложки для различных значений коэффициента теплопроводности пассивации.

2. Применение метода изображений

Распределение температуры в пространстве с коэффициентом теплопроводности k от точечного источника тепла с мощностью q, расположенного в точке пространства с радиус-вектором $\vec{r_q}$ при температуре на бесконечном удалении от источника равной T_0 определяется следующим образом:

$$T(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi k|\vec{r} - \vec{r_q}|} + T_0. \tag{1}$$

Перегрев в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ определяется так:

$$\Delta T(\vec{r}) = T(\vec{r}) - T_0. \tag{2}$$

Плотность потока тепла в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ определяется так:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r_q}}{|\vec{r} - \vec{r_q}|^3}. \tag{3}$$

Рассмотрим распространение тепла от точечного источника с мощностью q, расположенного в слое полупроводника толщиной d с теплопроводностью k_1 на расстоянии a от подложки - полупространства с теплопроводностью k_2 и на расстоянии $b = d - a$ от пассивации - полупространства с теплопроводностью k_3. Введем обозначения:

$$\alpha_{12} = \frac{1 - k_2/k_1}{1 + k_2/k_1}, \tag{4}$$

$$\alpha_{13} = \frac{1 - k_3/k_1}{1 + k_3/k_1}. \tag{5}$$

Коэффициенты α_{12} и α_{13} аналогичны вводимым в оптике коэффициентам отражения на границе первой среды со второй и первой с третьей, соответственно.

Случай идеального теплоотвода из полупроводника в одно из полупространств реализуется тогда, когда $k_2 = \infty$ или $k_3 = \infty$. При этом задаётся изотермическое граничное условие на поверхности контакта полупроводника с этим полупространством. Если $k_2 = \infty$, то $\alpha_{12} = -1$. Если $k_3 = \infty$, то $\alpha_{13} = -1$. Случай отсутствия теплоотвода из полупроводника в одно из полупространств реализуется тогда, когда $k_2 = 0$ или $k_3 = 0$. При этом задаётся адиабатическое граничное условие на поверхности контакта полупроводника с этим полупространством. Если $k_2 = 0$, то $\alpha_{12} = 1$. Если $k_3 = 0$, то $\alpha_{13} = 1$.

Суть метода изображений [10] заключается в том, что температурное поле и тепловой поток в слое полупроводника рассчитывается суммированием температурных полей и потоков тепла от исходного источника и источников - изображений, расположенных во всём пространстве, которое заполнено материалом

с теплопроводностью k_1. По аналогии с оптикой и электростатикой, первые два изображения получаются как отражение исходного источника в верхней и нижней границах между полупроводником и полупространствами - пассивацией и подложкой, соответственно. Последующие изображения получаются как отражение нижних изображений в верней границе, а верхних изображений в нижней границе и т.д.

Полагаем координату x_q и y_q источника равными нулю. Координату z_{sub} плоскости контакта полупроводника с подложкой тоже полагаем равной нулю. Соответственно, координаты источника тепла $x_q = 0$, $y_q = 0$ и $z_q = a$. Отметим, что в области полупроводника $0 \leq z \leq d$. Все изображения источника тепла имеют координату $x = 0$ и некоторую координату z_{im}.

Для обезразмеривания будем делить мощность источников тепла на q, их координату на d, а перегрев ΔT на характерную температуру T_d:

$$T_d = \frac{q}{4\pi k_1 d}. \tag{6}$$

Для обезразмеривания будем делить плотность потока тепла на характерную величину j_d:

$$j_d = \frac{q}{4\pi d^2}. \tag{7}$$

Отметим, что рассматриваемая задача имеет осевую симметрию и цилиндрическая система координат наиболее подходит для её решения. Как горизонтальную координату будем использовать x, как вертикальную z. Угловая координата, в силу осевой симметрии задачи, входить в решение не будет.

Имеем четыре серии источников тепла:

1. Первая серия источников тепла включает как источники-изображения, так и исходный источник ($i = 0$):

$$\tilde{q}_{1,i} = (\alpha_{12}\alpha_{13})^i, \ i = 0, 1, 2... \ . \tag{8}$$

Соответствующие z координаты :

$$\tilde{z}_{1,i} = \tilde{a} + 2i. \tag{9}$$

Безразмерное расстояние между i-ым источником тепла первой серии и точкой полупроводника с координатами (x, z) определяется так:

$$\tilde{r}_{1,i} = \sqrt{\tilde{x}^2 + (\tilde{z} - (\tilde{a} + 2i))^2}. \tag{10}$$

Безразмерный перегрев от источников первой серии имеет вид:

$$\Delta\tilde{T}_{1,i} = \frac{(\alpha_{12}\alpha_{13})^i}{\sqrt{\tilde{x}^2 + (\tilde{z} - (\tilde{a} + 2i))^2}}. \tag{11}$$

Составляющая безразмерной плотности тока от источников первой серии вдоль оси z равна:

$$\tilde{j}_{z,1,i} = \frac{(\alpha_{12}\alpha_{13})^i (\tilde{z} - (\tilde{a} + 2i))}{(\tilde{x}^2 + (\tilde{z} - (\tilde{a} + 2i))^2)^{3/2}}. \tag{12}$$

Через плоскость $z = 0$ от источников первой серии проходит полная мощность

$$\tilde{I}_{1,\tilde{z}=0} = -0,5 \sum_{i=0}^{i=\infty} \left(\alpha_{12}\alpha_{13}\right)^i = -0,5 \frac{1}{1-\alpha_{12}\alpha_{13}}. \tag{13}$$

Знак (-) показывает, что тепло идёт вниз. Через плоскость $z = d$ от источников первой серии проходит мощность

$$\tilde{I}_{1,\tilde{z}=1} = 0,5 - 0,5 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha_{12}\alpha_{13}\right)^i = 0,5 \left(\frac{1-2\alpha_{12}\alpha_{13}}{1-\alpha_{12}\alpha_{13}}\right). \tag{14}$$

2. Вторая серия источников тепла:

$$\tilde{q}_{2,i} = \left(\alpha_{12}\alpha_{13}\right)^i \alpha_{12},\ i = 0, 1, 2... \tag{15}$$

Соответствующие координаты:

$$\tilde{z}_{2,i} = -(\tilde{a} + 2i) = -\tilde{z}_{1,i}. \tag{16}$$

Безразмерный перегрев от источников второй серии имеет вид:

$$\Delta\tilde{T}_{2,i} = \frac{\left(\alpha_{12}\alpha_{13}\right)^i \alpha_{12}}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \left(\tilde{z} + (\tilde{a} + 2i)\right)^2}}. \tag{17}$$

Составляющая безразмерной плотности тока от источников второй серии вдоль оси z равна:

$$\tilde{j}_{z,2,i} = \frac{\left(\alpha_{12}\alpha_{13}\right)^i \alpha_{12} \left(\tilde{z} + (\tilde{a} + 2i)\right)}{\left(\tilde{x}^2 + \left(\tilde{z} + (\tilde{a} + 2i)\right)^2\right)^{3/2}}. \tag{18}$$

Через плоскости $z = 0$ и $z = d$ от источников второй серии проходит мощность

$$\tilde{I}_{2,\tilde{z}=0} = \tilde{I}_{2,\tilde{z}=1} = 0,5\alpha_{12} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\alpha_{12}\alpha_{13}\right)^i = 0,5 \frac{\alpha_{12}}{1-\alpha_{12}\alpha_{13}} \tag{19}$$

3. Третья серия источников тепла:

$$\tilde{q}_{3,i} = \left(\alpha_{12}\alpha_{13}\right)^i \alpha_{13},\ i = 0, 1, 2... \tag{20}$$

Соответствующие координаты:

$$\tilde{z}_{3,i} = 1 + \tilde{b} + 2i. \tag{21}$$

Безразмерный перегрев от источников третей серии имеет вид:

$$\Delta\tilde{T}_{3,i} = \frac{\left(\alpha_{12}\alpha_{13}\right)^i \alpha_{13}}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \left(\tilde{z} - (1 + \tilde{b} + 2i)\right)^2}}. \tag{22}$$

Составляющая безразмерной плотности тока от источников третьей серии вдоль оси z равна:

$$\tilde{j}_{z,3,i} = \frac{\left(\alpha_{12}\alpha_{13}\right)^i \alpha_{13} \left(\tilde{z} - (1 + \tilde{b} + 2i)\right)}{\left(\tilde{x}^2 + \left(\tilde{z} - (1 + \tilde{b} + 2i)\right)^2\right)^{3/2}}. \tag{23}$$

Через плоскости $z = 0$ и $z = d$ от источников третьей серии проходит мощность

$$\tilde{I}_{3,\tilde{z}=0} = \tilde{I}_{3,\tilde{z}=1} = -0,5\alpha_{13} \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_{12}\alpha_{13})^i = -0,5\frac{\alpha_{13}}{1-\alpha_{12}\alpha_{13}} \tag{24}$$

4. Четвертая серия источников тепла:

$$\tilde{q}_{4,i} = (\alpha_{12}\alpha_{13})^{i+1}, \ i = 0, 1, 2... \tag{25}$$

Соответствующие координаты:

$$\tilde{z}_{4,i} = -(1 + \tilde{b} + 2i) = -\tilde{z}_{3,i}. \tag{26}$$

Безразмерный перегрев от источников четвёртой серии имеет вид:

$$\Delta\tilde{T}_{4,i} = \frac{(\alpha_{12}\alpha_{13})^{i+1}}{\sqrt{\tilde{x}^2 + (\tilde{z} + (1 + \tilde{b} + 2i))^2}}. \tag{27}$$

Составляющая безразмерной плотности тока от источников четвёртой серии вдоль оси z равна:

$$\tilde{j}_{z,4,i} = \frac{(\alpha_{12}\alpha_{13})^{i+1}\left(\tilde{z} + (1 + \tilde{b} + 2i)\right)}{\left(\tilde{x}^2 + (\tilde{z} + (1 + \tilde{b} + 2i))^2\right)^{3/2}}. \tag{28}$$

Через плоскости $z = 0$ и $z = d$ от источников четвёртой серии проходит мощность

$$\tilde{I}_{4,\tilde{z}=0} = \tilde{I}_{4,\tilde{z}=1} = 0,5 \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_{12}\alpha_{13})^{i+1} = 0,5\frac{\alpha_{12}\alpha_{13}}{1-\alpha_{12}\alpha_{13}} \tag{29}$$

4. Зависимость тепловой мощности вытекающей из полупроводника в подложку от радиуса

Через плоскость $z = 0$ от источников всех серий проходит мощность:

$$\tilde{I}_{z=0} = \tilde{I}_{i=1,z=0} + \tilde{I}_{i=2,z=0} + \tilde{I}_{i=3,z=0} + \tilde{I}_{i=4,z=0} = -0,5\left(1 - \frac{\alpha_{12} - \alpha_{13}}{1 - \alpha_{12}\alpha_{13}}\right). \tag{30}$$

Здесь знак (-) показывает, что тепло распространяется вниз.

Через плоскость $z = d$ от источников всех серий проходит мощность:

$$\tilde{I}_{\tilde{z}=1} = \tilde{I}_{i=1,\tilde{z}=1} + \tilde{I}_{i=2,\tilde{z}=1} + \tilde{I}_{i=3,\tilde{z}=1} + \tilde{I}_{i=4,\tilde{z}=1} = 0,5\left(1 + \frac{\alpha_{12} - \alpha_{13}}{1 - \alpha_{12}\alpha_{13}}\right). \tag{31}$$

Будем рассматривать источник тепла, расположенный на границе полупроводника с пассивацией, т.е. положим $\tilde{a} = 1$ (соответственно $\tilde{b} = 0$). Теперь найдём зависимость потока тепла J из полупроводника в подложку при $z = 0$

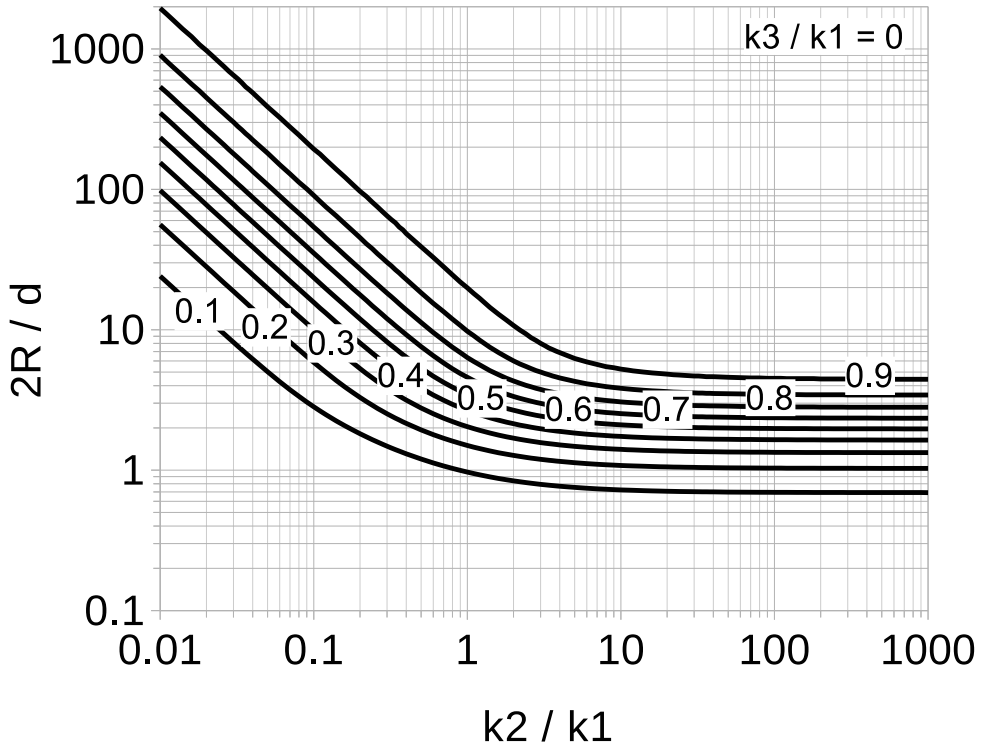


Рисунок 1 – Воспроизведён график для случая отсутствия теплоотвода в пассивацию из статей [8, 9]: $k_3/k_1 = 0$. Нижняя линия - 10 % от всей мощности точечного источника тепла, следующая - 20 %, и т.д.

через круг радиуса R с центром на оси симметрии:

$$\tilde{J}(\tilde{R}) = 0,5 \int_0^{\tilde{R}} \sum_{i=0}^{\infty} (\tilde{j}_{z,1,i} + \tilde{j}_{z,2,i} + \tilde{j}_{z,3,i} + \tilde{j}_{z,4,i}) \tilde{x} d\tilde{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (\tilde{J}_{1,i}(\tilde{R}) + \tilde{J}_{2,i}(\tilde{R}) + \tilde{J}_{3,i}(\tilde{R}) + \tilde{J}_{4,i}(\tilde{R})). \quad (32)$$

После взятия соответствующих интегралов, имеем:

$$\tilde{J}_{1,i}(\tilde{R}) = 0,5 \left(\alpha_{12}\alpha_{13}\right)^i (1+2i) \left[\frac{1}{\sqrt{\tilde{R}^2 + (1+2i)^2}} - \frac{1}{1+2i} \right]. \quad (33)$$

$$\tilde{J}_{2,i}(\tilde{R}) = -0,5 \left(\alpha_{12}\alpha_{13}\right)^i \alpha_{12} (1+2i) \left[\frac{1}{\sqrt{\tilde{R}^2 + (1+2i)^2}} - \frac{1}{1+2i} \right]. \quad (34)$$

$$\tilde{J}_{3,i}(\tilde{R}) = 0,5 \left(\alpha_{12}\alpha_{13}\right)^i \alpha_{13} (1+2i) \left[\frac{1}{\sqrt{\tilde{R}^2 + (1+2i)^2}} - \frac{1}{1+2i} \right]. \quad (35)$$

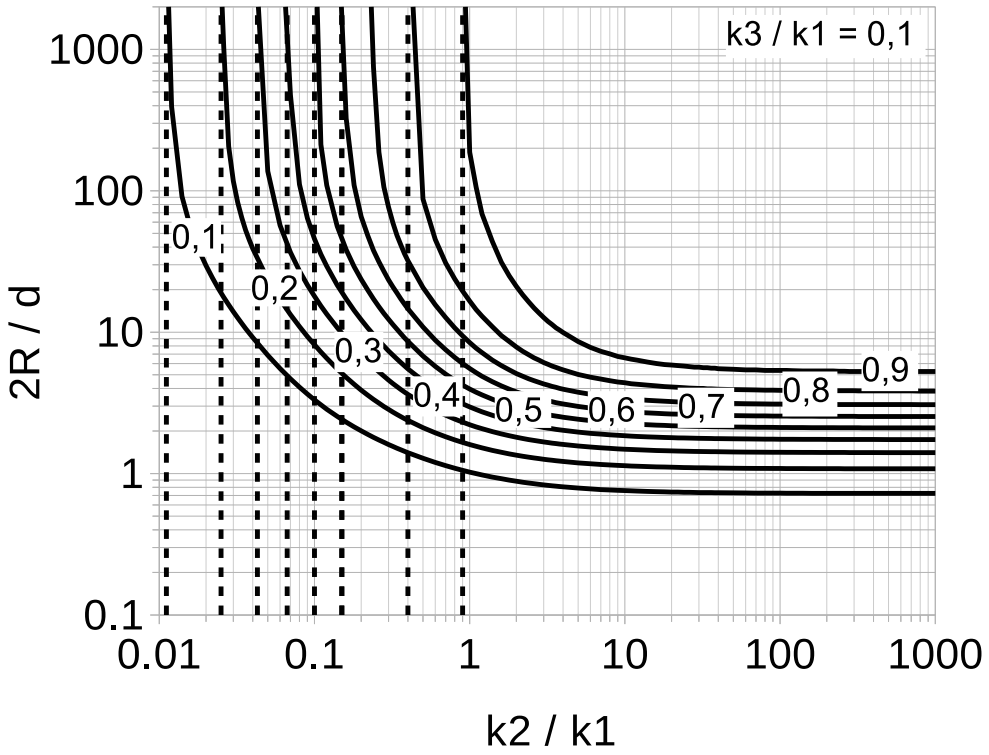


Рисунок 2 – Случай плохого теплоотвода в пассивацию: $k_3/k_1 = 0,1$. Пунктиром показаны теоретические значения k_2/k_1 ниже которых соответствующая доля мощности точечного источника тепла в подложку уже не уходит.

$$\tilde{J}_{4,i}(\tilde{R}) = -0,5\,(\alpha_{12}\alpha_{13})^{i+1}\,(1+2i)\left[\frac{1}{\sqrt{\tilde{R}^2+(1+2i)^2}} - \frac{1}{1+2i}\right]. \qquad (36)$$

Для анализа геометрического размера потока тепла из полупроводника в подложку мы, при заданном значении k_3/k_1 для заданного значения $\tilde{J}(\tilde{R})$, находим соответствующий радиус $\tilde{R}$ в зависимости от k_2/k_1. Для k_3/k_1 мы рассматривали ряд значений 0, 0,1, 1, 10 и представили каждый случай на отдельном рисунке. При заданном k_3/k_1, на каждом рисунке мы представили значения $\tilde{J}(\tilde{R})$ из ряда 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Для источников всех серий при расчётах максимальное i выбиралось равным 1000. Визуально заметное изменение графиков отмечалось при максимальном i существенно меньшем 1000. На рисунке 1 представлена зависимость $\tilde{R}(k_2/k_1)$ при $k_3/k_1 = 0$. Этот рисунок воспроизводит результат из статей [8, 9], где не учитывался теплоотвод в пассивацию. На рисунке 2 представлен случай $k_3/k_1 = 0,1$, на рисунке 3 случай $k_3/k_1 = 1$, на рисунке 4 случай $k_3/k_1 = 10$. На каждом рисунке нижняя зависимость $\tilde{R}(k_2/k_1)$ при условии $\tilde{J} = 0,1$, следующая при условии $\tilde{J} = 0,2$ и т.д. Самая верхняя кривая для случая $\tilde{J} = 0,9$.

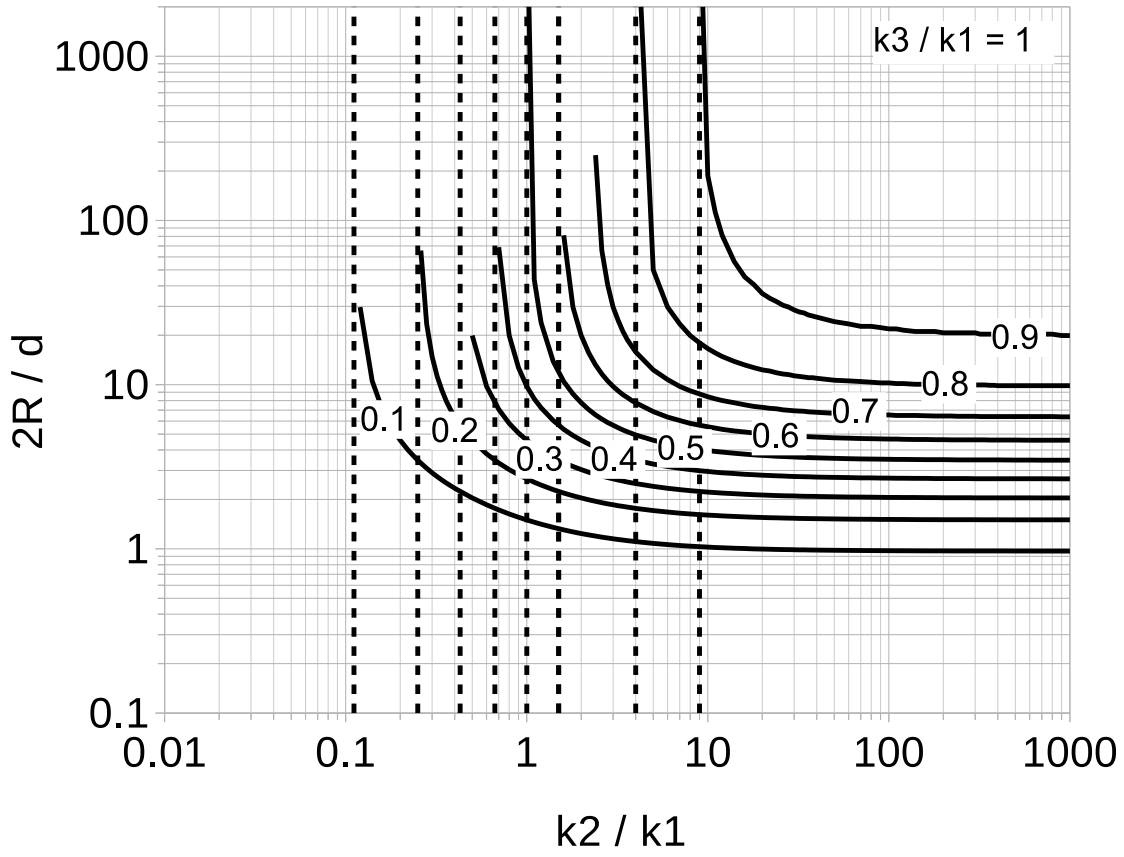


Рисунок 3 – Теплопроводности пассивации и полупроводника совпадают: $k_3/k_1 = 1$.

Отметим, что

$$\lim_{\tilde{R}\to\infty} \tilde{J}(\tilde{R}) = \tilde{I}_{z=0} = -0,5\left(1 - \frac{\alpha_{12} - \alpha_{13}}{1 - \alpha_{12}\alpha_{13}}\right). \tag{37}$$

Соответственно, задавая значение k_3/k_1 и значение $\tilde{I}_{z=0}$, можно численно решить это уравнение чтобы найти соответствующее значения k_2/k_1. Это значит, что при k_2/k_1 меньше найденного значения, при заданном k_3/k_1, в подложку уходит доля тепла меньше заданного значения $\tilde{I}_{z=0}$, а при k_2/k_1 больше найденного значения, при заданном k_3/k_1, в подложку уходит доля тепла больше заданного значения $\tilde{I}_{z=0}$. Соответствующие критические значения k_2/k_1, найденные для заданных значений $\tilde{J}(\tilde{R})$ из ряда 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, при заданном значении k_3/k_1, отмечены на рисунках пунктирными линиями.

5. Выводы

В нашей работе, для транзисторной структуры подложка-полупроводник-пассивация, используя метод изображений, мы рассчитали размер потока тепла из полупроводника в подложку на границе подложка-полупроводник, в зависимости от значения коэффициента теплопроводности подложки для различных значений коэффициента теплопроводности пассивации.

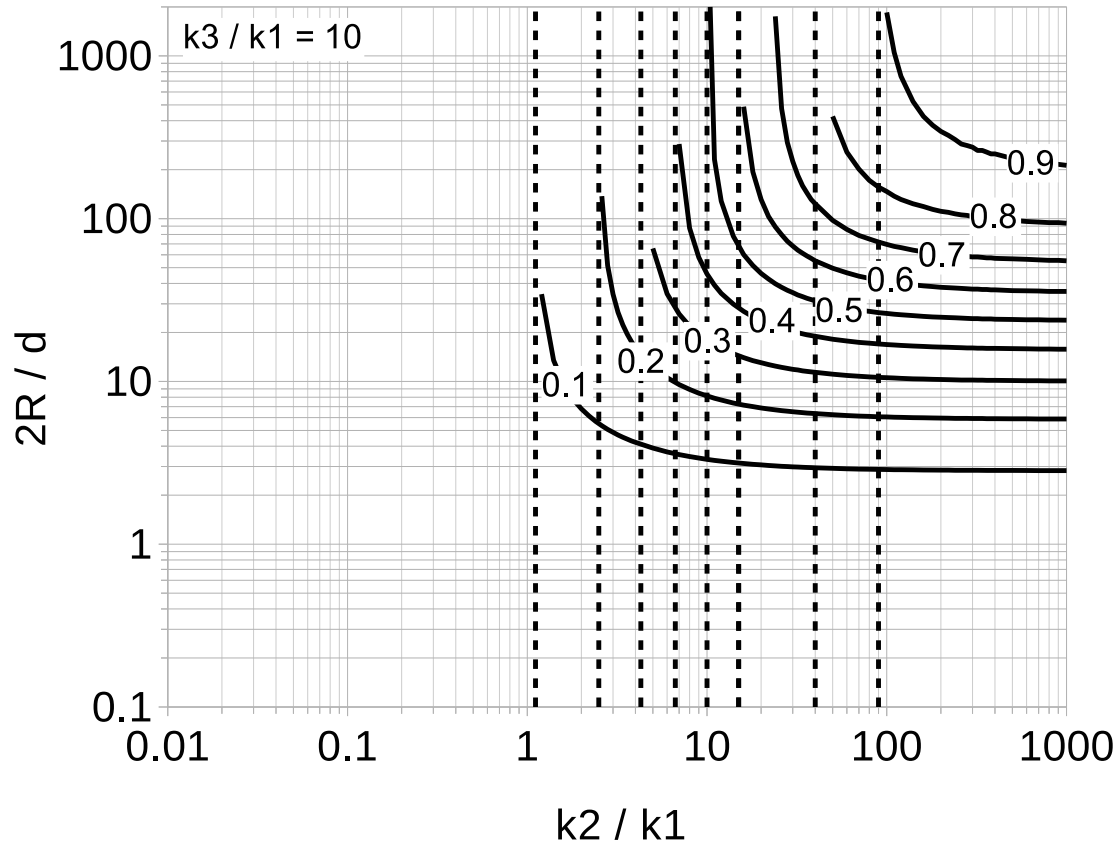


Рисунок 4 – Случай хорошего теплоотвода в пассивацию: $k_3/k_1 = 10$.

Согласно нашему исследованию, улучшение условий теплоотвода в пассивацию приводит к увеличению размера потока тепла на границе подложка-полупроводник, хотя доля тепла уходящего в подложку уменьшается.

На рисунке 5 в двойном логарифмическом масштабе представлена зависимость модуля вертикальной составляющей плотности потока тепла на границе полупроводника с пассивацией от поперечной координаты x для случая плохого теплоотвода в пассивацию $k_3/k_1 = 0,1$ для различных условий теплоотвода в подложку. На рисунке непрерывными линиями показаны случаи $k_2/k_1 = 0,1,\ 0,5,\ 0,8$ ($\alpha_{12} = 0,82,\ 0,33,\ 0,11$), когда вертикальная составляющая плотности потока тепла в пассивацию всегда положительна (тепло только втекает в пассивацию). Мелким пунктиром показан граничный случай $k_2/k_1 = 1$ ($\alpha_{12} = 0$). Крупным пунктиром показаны случаи $k_2/k_1 = 1,25,\ 2,\ 10$ ($\alpha_{12} = -0,11, -0,33, -0,82$), когда вертикальная составляющая плотности потока тепла в пассивацию в некоторой точке становится отрицательной (тепло начинает втекать из пассивации обратно в полупроводник).

Можно сделать вывод, что, в случае лучших условий теплоотвода в подложку чем в пассивацию, часть тепла ушедшего в пассивацию тепла возвращается в полупроводник на достаточно большом удалении от оси симметрии, что и приводит к увеличению поперечного размера потока тепла на границе

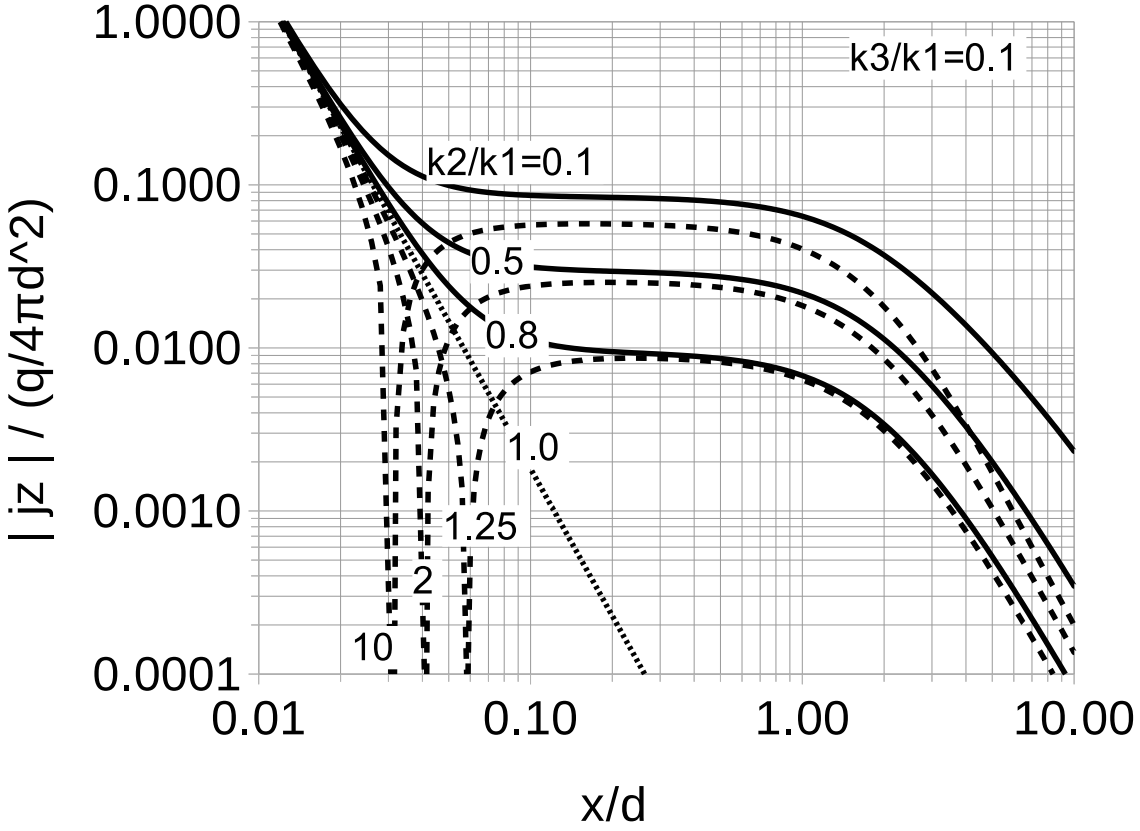


Рисунок 5 – Зависимость модуля вертикальной составляющей плотности потока тепла на границе полупроводника с пассивацией от поперечной координаты x для случая плохого теплоотвода в пассивацию $k_3/k_1 = 0,1$ для различных условий теплоотвода в подложку.

подложка-полупроводник, хотя доля тепла уходящего в подложку и уменьшается.

Наше исследование должно помочь в оптимизации проектирования транзисторных структур с учётом теплоотвода в пассивацию, что актуально, например, для мощных транзисторов на основе широкозонных полупроводников, таких как GaN и SiC, когда тепловыделение в активной области прибора, расположенной близко к пассивации, очень высоко. Кроме этого, наши результаты подтверждают ранее выработанную практическую рекомендацию для приборно-технологическом моделирования с учётом эффекта саморазогрева [8, 9]. Мы рекомендовали выбирать поперечный размер моделируемой области полупроводникового слоя транзисторной структуры так, чтобы он в разы превышал свою толщину, и тем больше, чем хуже теплоотвод в подложку.

В дальнейшей работе мы планируем рассмотреть и случай линейного источника тепла. Планируется исследовать случаи, когда источник тепла находится в толще полупроводника, а не только на поверхности контакта полупроводника с пассивацией. Следуя идее о возможности улучшения теплоотвода от актив-

ной области прибора с использованием нанесения на поверхность нанокристаллической алмазной плёнки [5] или нескольких слоёв графена [6], мы планируем рассмотреть транзисторную структуру подложка-полупроводник-теплоотвод-пассивация.

Авторы благодарны Министерство науки и высшего образования Российской Федерации и Орловскому государственному университету имени И.С. Тургенева за поддержку Е. Н. Пиляевой и И. В. Головина при обучении в магистратуре. Авторы признательны профессору А. А. Баландину (Университет Калифорнии в г. Риверсайд, США) за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Khan M. A. et al. Metal semiconductor field effect transistor based on single crystal GaN // Applied Physics Letters.—1993. — Vol. 62. — No. 15.—P. 1786-1787.
2. Khan M. A. et al. High electron mobility transistor based on a GaN heterojunction // Applied Physics Letters.—1993.—Vol. 63. —No. 9. —P. 1214-1215.
3. Harvard E. et al. Performance of AlGaN/GaN high-electron mobility transistors with AlSiN passivation // IEEE Transactions on Electron Devices.—2011.—Vol .58. —No. 1.—P. 87-94.
4. Wang L. et al. The role of ultrathin AlN barrier in the reduction in the hot electron and self-heating effects for GaN-based double-heterojunction high electron mobility transistors // Journal of Applied Physics.—2010.—Vol. 108. — No. 5.—P. 054501.
5. Tadjer M. J. et al. Reduced self-heating in AlGaN/GaN HEMTs using nanocrystalline diamond heat-spreading films // IEEE Electron Device Letters.—2012.—Vol. 33. — No. 1.—P. 23-25.
6. Yan Z., Nika D. L. and Balandin A. A. Thermal properties of graphene and few-layer graphene: applications in electronics // IET Circuits, Devices & Systems. — 2015. — Vol. 9. — No. 1. — P. 4-12.
7. Turin V. O., Balandin A. A. Performance degradation of GaN field-effect transistors due to thermal boundary resistance at GaN/substrate interface // Electron. Lett. — 2004. — Vol. 40. — No. 1. — P. 81-83.
8. Turin V. O., Balandin A. A. Simulation of Self-Heating and Temperature Effect in GaN-based Metal-Semiconductor Field-Effect Transistor // Mater. Res. Soc. Symp. Proc. — 2006. — 0892-FF13-05.1.
9. Turin V. O., Balandin A. A. Electrothermal simulation of the self-heating effects in GaN-based field-effect transistors // Journal of Applied Physics. — 2006. — Vol. 100. — P. 054501.
10. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Том 3. Электричество и магнетизм. — 5-е изд. — М.: Физматлит. — 2009. — 656 стр.

УДК 629.785

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОРБИТАМ

Р.А. Уперчук
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва
e-mail: *uperchuk.roman@yandex.ru*

В данной работе рассмотрена задача о движении космических аппаратов по околоземным эллиптическим орбитам. Выполнен расчёт радиальной, трансверсальной, полной составляющих скоростей для девяти выбранных положений и времени полёта до этих положений из перицентра по уравнению Кеплера. Осуществлено моделирование при помощи MathCAD четырёх эллиптических траекторий с целью исследования изменения параметров орбит.

Ключевые слова: эллиптическая орбита, уравнение Кеплера, элементы орбиты, космический аппарат, околоземной полёт, законы Кеплера.

1. Введение

В настоящее время космические аппараты (КА) используются для решения широкого круга задач в различных сферах общественной жизни. Параллельно со стремительным техническим прогрессом в данной отрасли растёт число выводимых в околоземное пространство КА, а также неуклонно увеличивается количество отработавших блоков, превратившихся в космический мусор. Обеспечение выполнения КА основных функций, потребность в эффективном управлении и предотвращении вероятных столкновений с естественными и искусственными космическими телами требует моделирования траекторий, что составляет актуальность выбранной темы. Данная работа посвящена построению и исследованию траекторий четырёх эллиптических орбит, попарно отличающихся одним из элементов.

2. Математическая модель задачи

Для построения траектории КА в виде кривой в трёхмерном декартовом пространстве необходимо задание шести элементов орбиты [1]:

- Эксцентриситете *(формула для эллиптической орбиты)*

$$e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi}, \text{ где} \qquad (1)$$

  r_α и r_π – радиусы апогея и перигея соответственно.
- Угол истинной аномалии υ, *град;*
- Долгота восходящего узла *Ω, град;*
- Наклонение орбиты *i, град;*
- Фокальный параметр*p (формула для эллиптической орбиты)*

$$p = \frac{2 r_\alpha r_\pi}{r_\alpha + r_\pi}; \qquad (2)$$

- Аргумент перицентра*ω, град*.

Согласно законам Кеплера, траектории движения космических тел представляют собой конические сечения, которые могут быть описаны в полярных координатах уравнением орбиты:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\upsilon}. \tag{3}$$

В инерциальной геоцентрической системе координат параметрические уравнения эллиптической орбиты задаются следующим образом [2]:

$$\begin{cases} x = r(\cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i) \\ y = r(\sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i), \text{ где} \\ z = r\sin u\sin i \end{cases} \tag{4}$$

u – аргумент широты, *град*, $u = v + \omega$.

Расчёт радиальной и трансверсальной составляющих скорости производится соответственно по формулам:

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin\upsilon; \quad V_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e\cos\upsilon); \; V = \sqrt{V_r^2 + V_\tau^2}, \text{ где} \tag{5}$$

μ – гравитационный параметр (для Земли $\mu = 398602\frac{км^3}{c^2}$).

Формула периода обращения спутника при движении по эллиптической орбите имеет вид:

$$T = 2\pi\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}, \text{ где} \tag{6}$$

a – большая полуось эллиптической орбиты, *км*.

Уравнение Кеплера для связи времени движения КА с его положением на орбите имеет вид:

$$t - \tau_\pi = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}(E - e\sin E), \text{ где} \tag{7}$$

τ_π – время прохождения КА через перицентр, *с*;

E – угол эксцентрической аномалии, *град*.

Уравнение связи между истинной и эксцентрической аномалиями имеет вид:

$$tg\frac{\upsilon}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{E}{2}. \tag{8}$$

С целью удобства визуализации выполняется построение Земли в виде шара с радиусом, являющимся средним радиусом Земли ($R=6371км$). Параметрические уравнения сферы с центром в начале координат имеют вид [3]:

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi; \; \theta \in [0,\pi], \; \varphi \in [0,2\pi]. \\ z = R\cos\theta \end{cases} \tag{9}$$

3. Результаты расчёта и их анализ

В рамках данной работы выполнено моделирование 4 эллиптических орбит с элементами, представленными в таблице 1. Можно заметить, что два соседних номера отличаются попарно одним из элементов (долготой восходящего узла, наклонением или аргументом перицентра). Для вычисления скорости и её составляющих выбрано 9 положений, время полёта до каждого из них отсчитывается при условии, что время прохождения КА через перицентр равно нулю. Большее число положений делает исследование избыточным, поскольку элементы скоростей симметричны относительно осей эллипса.

Таблица 1 – Исходные данные для моделирования

№ орбиты	r_α, *км*	r_π, *км*	*Ω, град*	*i, град*	*ω, град*
1	16371	8371	60	20	30
2			50	20	30
3			50	40	30
4			50	40	60

Для моделирования выбрана вычислительная система MathCAD [4], на которой написана программа, позволяющая моделировать орбиту методом перебора значений угла истинной аномалии с шагом в 0,001 рад в системе уравнений (4) с использованием формул (1-3). При помощи данной программы также осуществляется решение следующих частных задач по формулам (5-7):

- Расчёт периода движения КА по эллиптической орбите;
- Расчёт компонент скорости КА;
- Расчёт времени полёта между до выбранных положений.

Положения заданы значениями угла истинной аномалии, который по формуле (8) переводится в угол эксцентрической аномалии, а затем по уравнению (7) вычисляется время. Результаты вычислений при помощи MathCAD представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Расчёт скоростей и времени движения до выбранных положений

ν, град	*E, град*	t, *с*	V_r, *км/с*	V_τ, *км/с*	*V, км/с*
0	*0*	0	0	7,938	7,938
30	21,69	564,7	0,970	7,678	7,739
45	32,99	871,4	1,371	7,370	7,497
60	44,87	1209	1,680	6,968	7,168
90	71,14	2039	1,940	5,999	6,304
120	102,17	3197	1,680	5,029	5,302
135	119,84	3947	1,371	4,627	4,826
150	138,92	4821	0,970	4,319	4,426
180	180,0	6847	0	4,059	4,059

По полученным числовым данным можно заметить, что радиальная скорость симметрична относительно малой, а трансверсальная – относительно большой оси эллипса, что согласуется с механикой космического полёта. Гра-

фик зависимости скорости КА от положения КА (через угол истинной аномалии) показан на рисунке 2.

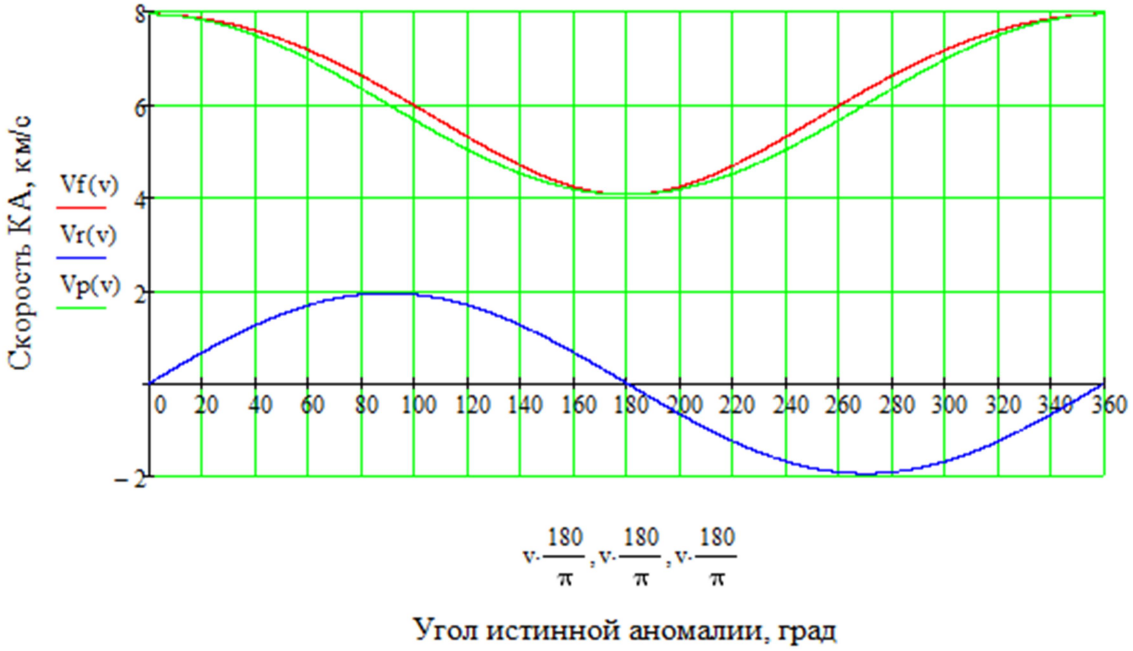


Рисунок 2 – График скорости КА (Цвета: красный – полная, синий – радиальная, зеленый – трансверсальная составляющие скорости)

Построение орбит выполнено на одном графике при помощи функции «График разброса». Земной шар смоделирован при помощи функции «График поверхности»(рисунок 3).

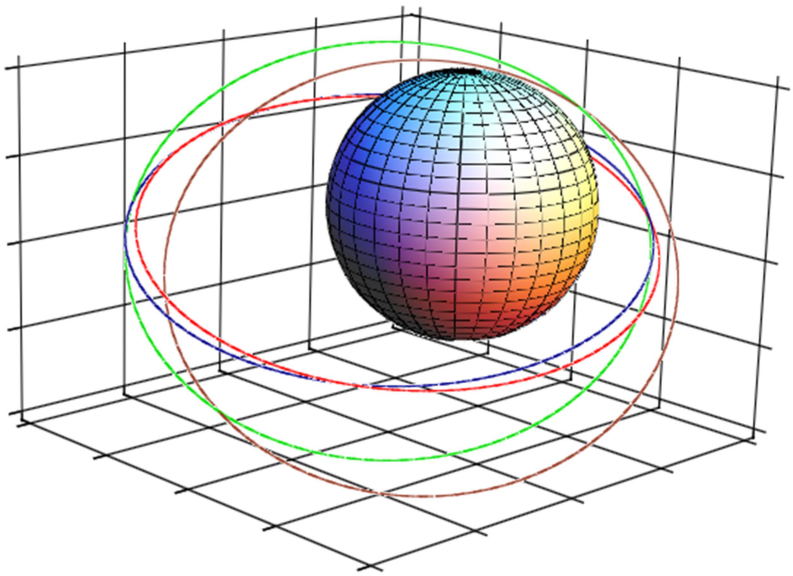


Рисунок 3 – Моделирование орбит (Цвета: красный – 1, синий – 2, зеленый – 3, коричневый – 4)

На рисунке 3 видно, как изменяется пространственное положение орбиты при поочередном изменении её элементов. Результаты данного исследования, а также написанная программа могут быть также использованы при изучении небесной механики для демонстрации влияния выбора элементов орбиты на её положение в трёхмерной системе координат.

В дальнейшем планируется исследование движения КА по эллиптическим орбитам с учётом гравитационных возмущений по уравнениям в оскулирующих элементах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирер С. А. Механика космического полета. Орбитальное движение [Текст] //М.: Ин-т прикладной математики им. МВ Келдыша. – 2013.
2. Охоцимский, Д. Е. Основы механики космического полета [Текст] / Д. Е. Охоцимский, Ю. Г. Сихарулидзе. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
3. Кадомцев С. Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Физматлит, 2010.
4. Ракитин В. И. Руководство по методам вычислений и приложения MATHCAD. – Физматлит, 2005.

О ПРОВЕДЕНИИ ВЗАИМНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ ПРОЕКТНЫХ РАБОТ ШКОЛЬНИКОВ ВСЕРОССИЙСКОГО КОНКУРСА НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЕКТОВ «БОЛЬШИЕ ВЫЗОВЫ»

Ю.В. Хрипунов, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *phyrexia@yandex.ru*
М.А. Музалевская, к.э.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *inf_muz@mail.ru*
А.А. Катунин, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *katunin57@gmail.com*
Н.К. Шарифов, ассистент
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *sharifovn1991@mail.ru*

В данной статье рассматривается проведение взаимной экспертизы проектных работ школьников всероссийского конкурса научно-технологических проектов «Большие вызовы».

Ключевые слова: всероссийский конкурс, научно-технологический проект, умный город, современная энергетика, беспилотный транспорт и логистические системы.

Всероссийский конкурс научно-технологических проектов школьников включает в себя два этапа: региональный и дистанционный. Региональный этап проходит очно в ОГУ имени И.С. Тургенева в формате ежегодной конференции «МИФ». На дистанционном этапе школьники со всех уголков страны присылают работы на сайт конкурса. Из рекомендованных участников регионального и дистанционного этапов отбираются участники проектной образовательной программы «Большие вызовы», которая проходит на базе образовательного центра «Сириус» в летний период. Работы принимаются по направлениям, соответ-

ствующим большим научно-технологическим вызовам. Целью конкурса является вовлечение старшеклассников в научно-техническое исследование и проектирование в прорывных областях, интересных скоростью развития технологий и перспективами внедрения найденных решений.

Проведение всероссийского конкурса научно-технологических проектов «Большие вызовы» становится ежегодным и привлекает все большее количество участников по различным перспективным направлениям, предложенным организаторами конкурса, таким как: 1. Агропромышленные и биотехнологии. 2. Беспилотный транспорт и логистические системы. 3. Большие данные, искусственный интеллект, финансовые технологии и кибербезопасность. 4. Генетика, персонализированная и прогностическая медицина. 5. Когнитивные исследования. 6. Космические технологии. 7. Нанотехнологии. 8. Нейротехнологии и природоподобные технологии. 9. Новые материалы. 10. Освоение Арктики и мирового океана. 11. Современная энергетика. 12. Умный город. С работой конкурса можно ознакомиться на официальном сайте образовательного центра «Сириус» [1].

Орловский государственный университет принимает активное участие в развитии большинства направлений, предложенных организаторами всероссийского конкурса. В данной статье рассматривается работа экспертов по трем направлениям: беспилотный транспорт и логистические системы, современная энергетика и умный город. Для проведения взаимной экспертизы на конкурсе проектов по каждому из предложенных направлений было представлено несколько сотен работ. Экспертам каждого региона, в частности Орловского, было предложено оценить несколько десятков из них.

На конкурсе были предложены критерии оценки проектов, включающие в себя: целеполагание, анализ существующих решений и методов, методику работы и качество результата. При проведении очного тура по отбору на конкурс участников из нашего региона, эксперты предложили также и критерий, учитывающий личные качества докладчика в процессе представления проекта, то есть насколько уверенно участник представляет проект и отвечает на вопросы аудитории, так как умение защитить свою работу и убедить аудиторию в полезности сделанного продукта также является необходимой составляющей качеств успешного специалиста.

Все проекты, представленные на взаимную экспертизу, несомненно, представляют большую ценность для их создателей, как прошедшие экспертизу в своем регионе и достойные для прохождения следующего этапа всероссийского конкурса. Соответствие проектов критериям, предъявляемым условиями конкурса, было различно. Практически все проекты включали в себя целеполагание и методику работы, но не во всех работах достаточно полно проводился анализ существующих решений и методов. Качество результатов варьировалось от моделей до работающих прототипов и устройств, готовых к применению на производстве. Следует отметить, что большинство представленных работ были именно проектные, то есть с четко поставленной целью и с демонстрацией работающих прототипов, что соответствовало критериям, предъявляемым к конкурсным работам. В большинстве работ приводился анализ стоимо-

сти проекта по сравнению с аналогами, что также входило в критерии оценки проектов.

Темы представленных проектов были самые разнообразные: ориентированные как на нужды региона, так и на общероссийскую тематику. Во всех работах школьникам оказывалось всесторонне сотрудничество заинтересованных сторон, например, проект по созданию «умного пешеходного перехода» в одном из регионов, поддержала государственная инспекция безопасности дорожного движения. Определенная часть работ была посвящена этой тематике, например, были представлены работы по созданию «умных» пешеходных переходов и светофоров. Также было множество проектов, посвященных непосредственно теме «Умный дом», то есть системам управления функционированием жилых помещений и ее дальнейшему развитию в масштабе «Умный город». Большая часть проектов по этим направлениям была решена с помощью микроконтроллера Ардуино, который является очень популярным инструментом решения такого рода задач, благодаря своей доступности и возможности понимания принципа работы для тех, кто хочет что-то понять. Например, с его помощью можно создать «умную» систему полива растений в теплице или робота для очистки окон в высотных зданиях, где затруднительно выполнять работу вручную и необходимо применять элементы системы автоматизации процесса.

Одной из интересных тем в разделе по современной энергетике была задача о рассмотрении новых вариантов применения светодиодных ламп в целях экономии электроэнергии, и выработка простых правил экономии электроэнергии в жилых помещениях при использовании бытовой техники. Приятно видеть, что участники проекта всесторонне оценивают свои работы, воспринимая их не как «поделки в стол», а как проекты с дальнейшей перспективой развития, учитывая стоимость расходных материалов и затраченные усилия.

Мнения экспертов, после оценки работ школьников, единодушно совпали: конкурс нужен, он стимулирует школьников к инженерному творчеству, к развитию, к получению новых знаний; учит работать в команде, общаться со сверстниками, наставниками; быть интересными для окружающих, примером в стремлении достичь поставленной цели; делать шаги на пути к выбору профессии, так как лучше один раз сделать, чем сто раз услышать. Отдельную благодарность следует выразить наставникам проектов, так как без них ничего бы не получилось: подсказать, рассказать, поделиться опытом осваивания новых технологий, ведь учитель и ученик всегда взаимосвязаны и учатся друг у друга, тем более в наше время стремительной смены технологий.

Проведение конкурса научно-технологических проектов является одним из этапов постепенного внедрения в образовательный процесс «проектного обучения», то есть создание продукта, который может быть внедрен в производство или использован как прототип. Школьники, участвуя в предложенном конкурсе, делают первые шаги на пути к взрослой жизни в нашем университете и стране. Хотелось бы пригласить всех участников всероссийского конкурса научно-технологических проектов «Большие вызовы» продолжить обучение в нашем университете для дальнейшей реализации проектов уже в качестве студентов, для работы над своими проектами, так как конкурсы среди школьников

переходят в студенческую среду, и лучшие студенты будут рекомендованы на работу на предприятия города и области.

Один из экспертов, представляющих орловский государственный университет по направлению «беспилотный транспорт и логистические системы» был приглашен организационным комитетом конкурса на летнюю образовательную программу «Большие вызовы» на базе образовательного центра Сириус. Программа объединяет участников рынка автономного, подключенного и электрического транспорта с целью интенсивного развития и популяризации новых видов наземного транспорта. В Орловской области недавно стартовал проект «Многопрофильный многофункциональный кампус «Кадры для цифровой промышленности»». Этот проект подразумевает формирование исследовательских команд школьников и студентов для работы над новыми перспективными проектами, связанными в том числе, с программированием беспилотных летательных аппаратов, при участии и под руководством преподавателей и сотрудников нашего университета.

Следует отметить, что всероссийский конкурс научно-технологических проектов «Большие вызовы» на базе образовательного центра «Сириус» помогает также непосредственно решать образовательные задачи, такие как: ранняя профориентация учащихся и популяризация естественнонаучного образования и нанотехнологий [2]; поддержка образовательного процесса учебным контентом, иллюстрирующим изучаемые закономерности и явления примерами из практики; организация проектной и исследовательской деятельности учащихся; доступ к коллекции учебных и методических материалов для организации занятий дополнительного образования, организации конкурсов, самостоятельного знакомства с материалами; организация образовательного процесса с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий.

ЛИТЕРАТУРА

1. https://konkurs.sochisirius.ru/#directions – всероссийский конкурс научно-технологических проектов «Большие вызовы» ОЦ «Сириус»
2. https://stemford.org – образовательная онлайн-платформа для школьников и педагогов в области нанотехнологий

УДК 539.3

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА МАТЕМАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА МНОГОЧАСТИЧНОГО АДГЕЗИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

С.И. Якушина, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *Jakushina@rambler.ru*
В.Ю. Преснецова, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *alluvian@mail.ru*
В.М. Пресняков, магистрант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *vadim1024@rambler.ru*
Л.Ю. Фроленкова, д.т.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *larafrolenkova@yandex.ru*
В.С. Шоркин, д.ф-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *VShorkin@yandex.ru*

В настоящее время большой практический интерес представляет изучение контактных механических явлений, возникающих между между твердыми деформируемыми телами. При описании и количественной оценке этих явлений существенную роль играет учет их адгезионного взаимодействия [1-6].

Аналитически возможно проанализировать нарушения целостности материалов и конструкций, если известны их физические характеристики [7].

Было предложено множество критериев для прогнозирования предела прочности материалов с учетом их адгезионных и когезионных характеристик. В частности, в работе [8] рассматриваются выводы, которые можно использовать для подбора материала, обладающего нужными адгезионными свойствами по отношению к заданному.

При наличии, однако, качественного описания адгезионного контактного взаимодействия, программное обеспечение для реализации количественного описания практически полностью отсутствует. Была разработана специальная программная система для упрощения процесса расчета многочастичного адгезионного взаимодействия твердых материалов [9].

Целью разработки указанной программной системы явилось упрощение расчета параметров многочастичного адгезионного взаимодействия твердых материалов.

К основным задачам программной системы следует отнести следующее:

- создание и хранение математических моделей расчета многочастичного адгезионного взаимодействия твердых материалов;
- объединение математических моделей в блоки по смыслу;
- поиск математических моделей и их отображение по запросу;
- ведение статистики результатов расчетов.

Функции, которыми будет обладать программная система, будут полезны научным сотрудникам для количественных расчетов и создания корректных математических моделей:

- удобный пользовательский интерфейс;
- свободный доступ к численному расчету математических моделей. В дальнейшем полученные результаты должны сохраняться для статистической обработки;
- возможность предоставлять научным сотрудникам доступ к закрытой части программной системы, что позволит создавать математические модели и представлять их в виде программного кода;
- возможность наглядно отображать результаты расчетов параметров математических моделей;
- возможность при необходимости гибко менять программный код математической модели;
- возможность создавать для математических моделей формы ввода данных и алгоритмы расчета, которые должны выполняться по приоритету;
- возможность скрывать или отображать математические модели и объединять их в блоки.

Программная система расчета многочастичного адгезионного взаимодействия твердых материалов будет представлять из себя веб-приложение (рисунок 1) со сложной структурой, где пользователи взаимодействуют при помощи браузеров с сервером, на котором хранятся база данных и скрипты.

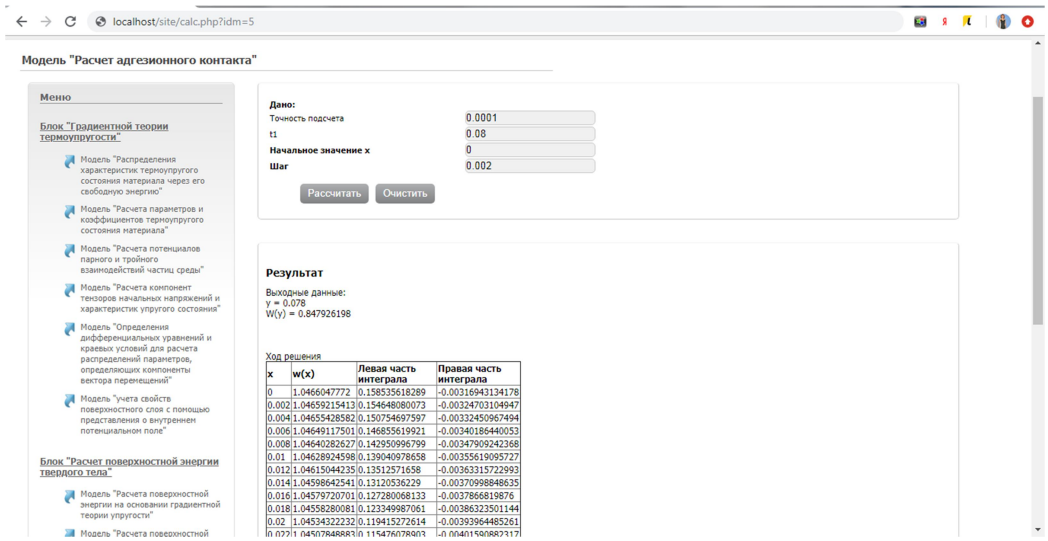


Рисунок 1 – Программная система расчета многочастичного адгезионного взаимодействия твердых материалов

Использование программной системы позволит:

1. В процессе выбора композиционных материалов для различных целей в строительстве, атомной промышленности, электронике и т.д. исключить необходимость проведения дорогостоящих экспериментов.
2. Разработать рекомендации для промышленных предприятий по выбору оптимального состава композиционных материалов, обеспечивающих их долговечность.
3. Провести дальнейшие научные исследования с целью выявления положи-

тельного и отрицательного воздействия адгезии подвижных элементов конструкций.

4. Создать инновационные формы и методы обучения на основе использования разработанной программной системы.

Перспективой развития разработанной программной системы расчета многочастичного адгезионного взаимодействия твердых материалов в будущем будет являться расширение функциональных возможностей и наполнение математическими моделями [9]. Выделим основные возможности, которые будут реализованы в будущем:

1. Распознавание формул на естественном математическом языке.
2. Построение удобного визуального редактора математических блоков.
3. Расширение возможностей визуализации данных с добавлением анимации.
4. Вывод математических моделей в формат Mathcad.
5. Формирование офлайн-десктопных приложений на основе математических моделей.
6. Импорт данных для расчетов из математических пакетов.
7. Персональная подборка математических моделей для пользователей по ключевым словам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. Б. А. Введенский. – М.: Сов. энциклопедия, 1960. – Т. 1. – С. 19.
2. Берлин, А. А. Основы адгезии полимеров / А. А. Берлин, В. Е. Басин. – М.: "Химия", 1974. – 408 с.
3. Зимон, А. Д. Адгезия пленок и покрытий / А. Д. Зимон. – М.: Химия, 1977. – 352 с.
4. Фроленкова, Л. Ю. Методы расчета адгезии твердых тел: монография / В. С. Шоркин, Л. Ю. Фроленкова. – Орел: ОрелГТУ, 2008. – 126 с.
5. Дерягин, Б. В. Адгезия твердых тел / Б. В. Дерягин, Н. А. Кротова, В. П. Смилга. – М., 1973. – 280 с.
6. Фроленкова, Л. Ю. Инженерные методы определения адгезионной прочности соединения твердых тел / Л. Ю. Фроленкова // Известия ОрелГТУ, серия "Фундаментальные и прикладные проблемы техники и тех-нологии". – 2009. – № 1/273 (559). – С. 53 – 60.
7. Фроленкова, Л.Ю. Теоретическая оценка характеристик прочности адгезионных и когезионных соединений упругих тел : диссертация ... доктора технических наук : 01.02.04 / Фроленкова Лариса Юрьевна; [Место защиты: Орловский государственный технический университет]. - Орел, 2013. - 335 с.
8. Якушина С.И. Антиадгезионное контактное взаимодействие/ С.И. Якушина// Актуальные проблемы в машиностроении. -2019.-том 6,№1-4-Новосибирск,2019.-С.200-203
9. Пресняков В. М. Программная система расчета многочастичного адгезионного взаимодействия твердых материалов: выпускная квалификационная работа (ВКР) магистра по направлению подготовки 09.04.03 – Прикладная информатика, направленность (профиль) «Корпоративные информационные системы» / В. М. Пресняков ; рук. В. Ю. Преснецова. - Орёл : [б. и.], 2019. – 93 с.

Физика конденсированного состояния

УДК 05; 06

ВОЛЬТ–АМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРИСТАЛЛОВ $MnGaInSe_4$

Н.Н. Нифтиев, д.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
e-mail: *namiq7@bk.ru*
Ф.М. Мамедов, к.ф.-м.н., доц.
Институт Катализа и Неорганической химии
им. Академика М. Нагиева НАН Азербайджана

Исследованы температурная зависимость вольт-амперные характеристики кристаллов $MnGaInSe_4$. Показано, что ток в нелинейной области вольт-амперной характеристики обусловлен полевым эффектом.

Ключевые слова: ВАХ, электропроводность, кристалл, температура, полевой эффект.

Интенсивное развитие оптоэлектроники ставит задачу разработки и исследования новых эффективных полупроводниковых материалов, на основе которых могут быть созданы полупроводниковые приборы с новыми функциональными возможностями. В этом плане вызывает интерес группа тройных соединений типа $A^{II}B_2^{III}X_4^{VI}$ (где A - Mn, Fe, Ni, Co; B - Ga, In; X - S, Se, Te), ряд из которых уже получен, однако изучен недостаточно [1-8]. Эти соединения перспективны для создания на их основе лазеров, модуляторов света, фотодетекторов и других функциональных устройств, управляемых магнитным полем. В данной работе приводятся результаты исследования температурных зависимостей вольт-амперных характеристик (ВАХ) в кристаллах $MnGaInSe_4$.

Соединение $MnGaInSe_4$ синтезировано сплавлением исходных тройных соединений $MnIn_2Se_4$ и $MnGa_2Se_4$ в ваккумированных кварцевых ампулах при температуре 1300К. Показано, что соединение кристаллизуется в тригональной сингонии с параметрами решетки: a = 3.9812Å, c = 12.9904 Å, V = 178.32 Å, пространственная группа P-3m1[9]. Образцы изготавливались путем механической обработки слитка. Контакты к образцам создавались вплавлением индия на противоположные поверхности (сэндвич-структура). Для исследования электрических свойств использовали вырезанные из слитков пластинки размером порядка 2 × 4 × 6 мм.

На рис. 1 при различных температурах представлены ВАХ для структур In– $MnGaInSe_4$–In. На ВАХ выявляются два участка: линейный ($J \propto U$) и область более резкого роста тока ($J \propto U^n$, $n > 1$). Видно, что при малых напряжениях ток, проходящий через образец, подчиняется закону Ома. При дальнейшем

увеличении напряжения начинает нарушаться закон Ома, ток растет по степенному закону ($J \propto U^n$).

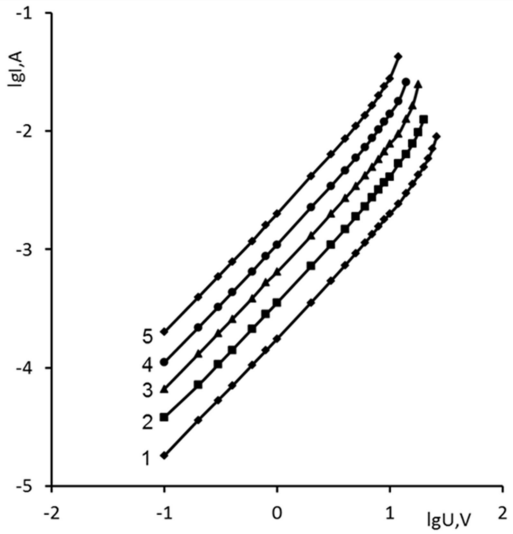


Рисунок 1 – Темновые ВАХ структур In–$MnGaInSe_4$–In при температурах T, K: 1 - 291, 2 - 317, 3 - 331, 4 - 351, 5 – 376

На рис. 2, а для области резкого роста тока представлены зависимости электропроводности от электрического поля при различных температурах в координатах $lg\sigma \propto \sqrt{F}$. Как известно, теория экспоненциальногоростаэлектропроводностивпервыевыдвинутаФренкелем [10]:

$$\sigma = \sigma_0 \exp(\beta\sqrt{F}), \quad (1)$$

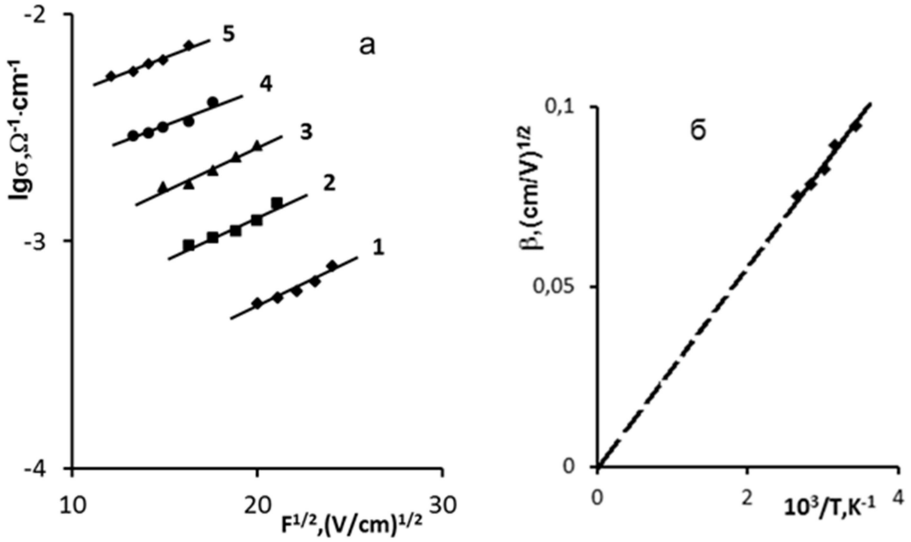


Рисунок 2 – a – зависимость электропроводности кристаллов $MnGaInSe_4$ напряженности поля F при температурах T, K: 1 - 291, 2 - 317, 3 - 331, 4 - 351, 5 – 376.
b – температурная зависимость коэффициента Френкеля β.

где σ_0 – проводимость в слабых полях, β-коэффициент Френкеля:

$$\beta = \frac{\sqrt{e^3}}{kT\sqrt{\pi\varepsilon\varepsilon_0}}, \quad (2)$$

e– заряд электрона, ε - диэлектрическая проницаемость среды, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура. По наклону прямых на рис. 2, a были определены значения β при различных температурах. Они заключены в пределах $(7\div10)\cdot10^{-2}$ $(см/В)^{1/2}$. Температурная зависимость β, определенная из зависимости σ $(F^{1/2})$ при различных температурах, приведена на рис. 2, b. Как видно из рисунка, наблюдается рост β с уменьшением температуры, при этом хорошо выполняется зависимость $\beta \propto 10^3/T$. Такоетемпературноеизменениеβсогласуетсястеорией Френкеля и экстраполяция прямой $\beta \propto 10^3/T$, согласноформуле (2), приводитвначалокоординат.

Таким образом, на основе исследований ВАХ показано, что ток в нелинейной области обусловлен полевым эффектом.

ЛИТЕРТУРА

1. Niftiyev N.N., Taqiev O.B. Thermallystimulated currents in $MnGaInS_4$ single crystals // Inorganic materials, 2003, v.39, №6, p.576-578.
2. SharmaR., RastogiA., KohliS. etal. Growth phasses in theformationofsemiconductingmanganeseindiumsulphide thinfilmandtheireffektontheopticalabsorption // Physica B: PhysicsofCondensedMater, 2004, v.351, №1-2, p.45-52.
3. Tsuboi N., Ogihara K., Suda Y. etal. Crystal structure and prorertiesof defect – chalcopyrite – type $MnGa_2S_4$ // Jpn. J. Appl. Phys, 2005, 44, p.725-728.
4. TorresT. SagredoV., DeChalbaudL. etal. Maqnetic and structural characterization of the semiconductor $FeIn_2Se_4$ // PhysicaB: Condensed Mater., 2006, v.384, №1-2, p.100-102.
5. Боднарь И.В., Рудь В.Ю., Рудь Ю.В. Фоточувствительные структуры на монокристаллах $MnIn_2S_4$: создание и свойства // Физика и техника полупроводников. 2009, т. 43, в. 11, с.1549-1552.
6. Боднарь И.В., Павлюковец С.А., Труханов С.В., Федотова Ю.А. Мессбауэровские и магнитные исследования тройного соединения FeIn2Se4 // Физика и техника полупроводников. 2012, т. 46, в. 5, с. 624- 628.
7. Нифтиев Н.Н., Тагиев О.Б., Мурадов М.Б., Мамедов Ф.М. Электрические свойства FeGa2Se4 на переменном токе// ФТП, 2014, т.48, в.11, с.1469-1472.
8. Нифтиев Н.Н., Мамедов Ф.М. Диэлектрические свойства слоистых монокристаллов FeGaInS4 в переменном электрическом поле // ФТП, 2016, т. 50, в. 9, с.1225-1229.
9. Mammadov F.M., Aliyeva M.Kh., Amiraslanov I.R., Niftiyev N.N. Sinthez and cryctal structure of the the $MnGaInSe_4$ compound // Azerbaijan chemical journal, 2017, № 4,s.69 - 72.
10. Френкель Я.И. К теории электрического пробоя в диэлектриках электронных полупроводниках // ЖЭТФ, 1938, 8, с.1292-1301.

Наноструктуры и наноматериалы

ИССЛЕДОВАНИЕ МОНОКРИСТАЛЛОВ Bi, Bi-Sb, Bi-Sb-Te, Bi-Sb-Sn МЕТОДОМ СКР

К.И. Аринцына, аспирант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *ksenya.arintcyna@yandex.ru,*
О.И. Марков, д.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *O.I. Markov@mail.ru*

В работе приводятся результаты экспериментального исследования методом комбинационного рассеяния монокристаллов Bi, Bi-Sb, Bi-Sb-Te, Bi-Sb-Sn в области частот 50-2600 $см^{-1}$. Проведено сравнение рамановских спектров и сделан предварительный анализ полученных результатов.

Ключевые слова: спектроскопия комбинационного рассеяния, монокристаллы Bi, Bi-Sb, Bi-Sb-Te, Bi-Sb-Sn.

Явление изменения длины волны света при рассеянии называется комбинационным или рамановским рассеянием [1].

Основой аналитических применений КРС является то, что каждое химическое соединение имеет свой специфический спектр КРС, поэтому эти спектры могут служить для идентификации данного соединения. Параметры некоторых линий в спектрах КРС сохраняются при переходе от одного соединения к другому, содержащему тот же структурный элемент. Такая характеристичность параметров линий КРС лежит в основе структурного анализа молекул с неизвестным строением [2].

Большое значение имеет КРС при исследовании кристаллов [3]. Для КРС основное значение имеет оптическая ветвь колебаний. Метод КРС стал основным при изучении динамики кристаллической решётки, изучении различных квазичастиц (фононов, поляритонов, магнонов и др). Вместе с тем разработаны эффективные методы анализа по спектрам КРС кристаллов микроскопических размеров и кристаллических порошков [2].

Рамановские спектры монокристаллов были получены с помошью конфокального рамановского микроскопа Renishaw inVia Qontor, использование которого позволяет проводить исследование неровных поверхностей образца, удерживать образец в фокусе во время исследования вручную, получать спектрохимические рамановские 3D-изображения, показывающие химический состав и геометрическую форму поверхности.

В данных исследованиях использовалось лазерное излучение 532 нм, краевой фильтр от 50 $см^{-1}$, угол падения 90°, мощность 35-70 мВт. Для образцов Bi и Bi-Sb происходило снятие спектра в точке, а для образцов Bi-Sb-Te и Bi-

Sb-Sn из-за слабого рамановского сигнала использовалась функция Streamline, с помощью которой измерение проводится в целой полосе и полученные значения усредняются.

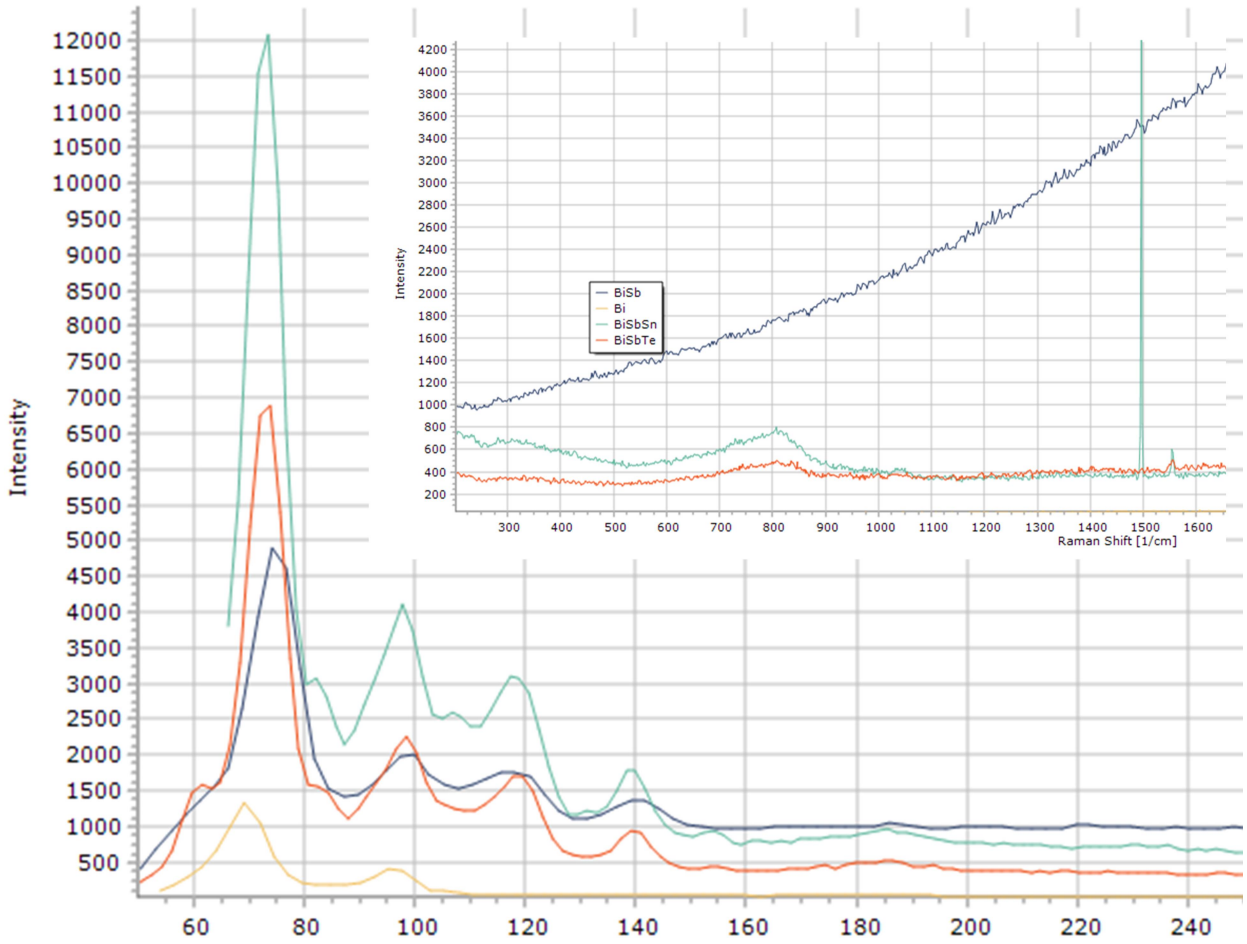


Рисунок 1 – Спектры комбинационного рассеяния образцов Bi, Bi-Sb, Bi-Sb-Te, Bi-Sb-Sn для длины волны лазерного излучения 532 нм

Пики для монокристалла Bi находятся на 75 $см^{-1}$ и 98 $см^{-1}$ и характеризуют 100% висмут. В кристалле Bi-Sb наблюдаются еще два пика 115 $см^{-1}$и 140 $см^{-1}$, характерные для 100% сурьмы.

В экспериментальных данных для образца Bi-Sb виден небольшой сдвиг для первого пика по сравнению с образцом Bi, что согласуется с результатами, указывающими, что частоты мод чистого висмута медленно увеличиваются с добавлением сурьмы [4].

Отношение частот A_{1g}/E_g =1,31 для висмута; A_{1g}/E_g =1,21 для сурьмы. Эти значения близки для значений кристалла с тригональной симметрией.

Интенсивности для экспериментальных данных посчитаны в программе Spectragryph. Сравнивая результаты с данными работы Циттера [4], получаем, что отношения интенсивностей пиков в образцах в несколько раз больше, а для 100% висмута интенсивность первого пика даже меньше, чем второго. Для кристаллов Bi-Sb этот эффект исчезает. В проведенных измерениях ни для одного из образцов такого эффекта не наблюдается: абсолютно все измерения

показывают более высокую интенсивность первого пика по сравнению с остальными.

FWHM - полная ширина на уровне половинной амплитуды посчитана вручную на графиках из-за того, что программа Spectragryph считает амплитудное значение от нуля, а не от точки ближайшего минимума.

Ширина пиков совпадает с данными, приведенными Циттером [4] для первого, второго и четвертого пиков. Третий пик в статье имеет ширину 5 $см^{-1}$, тогда как для образцов получена ширина 11 $см^{-1}$. Это может говорить о том, что в нем может скрываться дополнительный пик (125 $см^{-1}$) низкой интенсивности (рис.2).

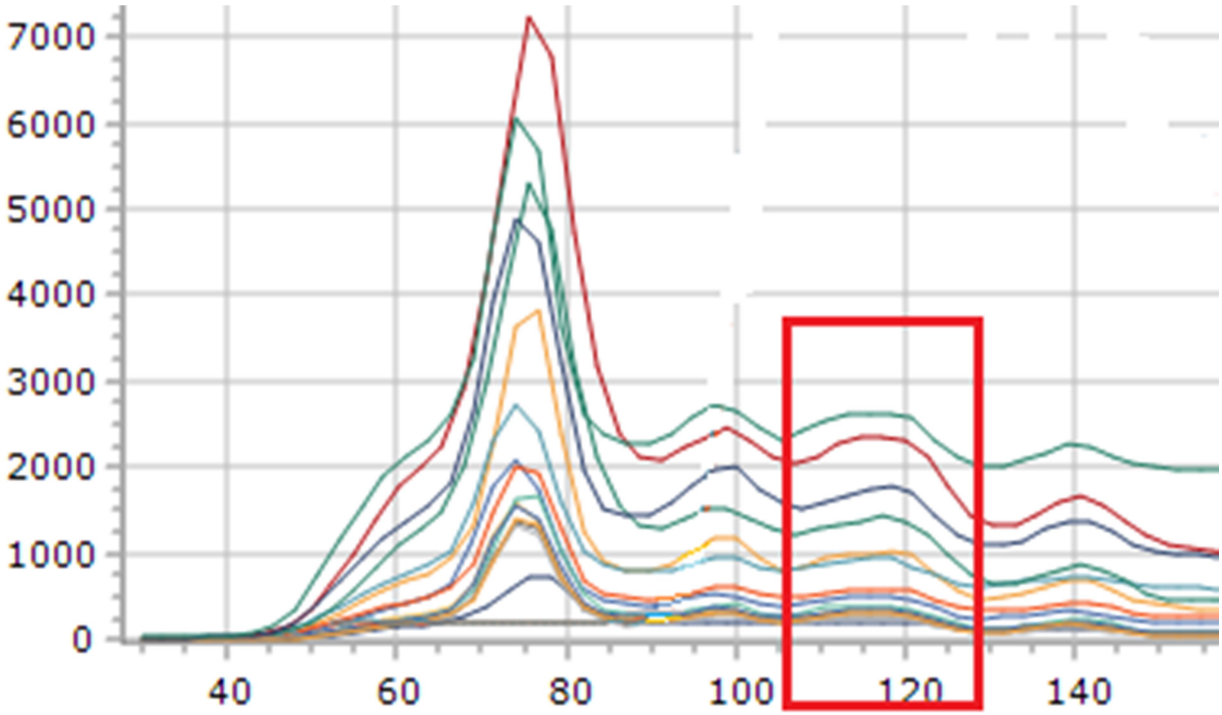


Рис. 2 – Спектр комбинационного рассеяния кристалла Bi-Sb для длины волны лазерного излучения 532 нм

Концентрация висмута в кристалле зависит от интенсивностей пиков. Чем больше характеристические интенсивности элемента в кристалле, тем больше его процентное содержание. Кроме того, на процентное содержание влияет наличие пика на 125 $см^{-1}$.

Таким образом можно предположить, что в образце Bi-Sb содержание висмута 70-80%.

В образце Bi-Sb-Te содержание теллура 0.02%, что приводит к низкой интенсивности пиков, характеризующих данный элемент. На спектре (рис.1) виден «порог» на 60 $см^{-1}$, который отсутствует в образцах Bi и Bi-Sb (данных для образца Bi-Sb-Te в диапазоне от 50 до 65 $см^{-1}$ нет).

По сравнению со спектром Bi-Sb пики стали более острыми и появился пик небольшой интенсивности на 1556 $см^{-1}$, который также виден в образце Bi-Sb-Sn.

В образце Bi-Sb-Sn между пиками имеются «выступы», имеется пологий пик небольшой интенсивности на 1050 $см^{-1}$ и возможный пик на 155 $см^{-1}$.

Полученные результаты говорят о возможности исследования с помощью рамановской спектроскопии процентного содержания элемента в кристалле, а также о содержании в нем примесей даже очень малого объема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Отто М. Современные методы аналитической химии. — М.: Техносфера, 2008.
2. Сущинский М. М., Комбинационное рассеяние света и строение вещества, М., 1981.
3. Рассеяние света в твердых телах, под ред. М. Кордоны, Г. Гюнтеродта, пер. с англ., в. 1-4, М., 1979.
4. R. N. Zitter and P. C. Watson, Raman and x-ray spectra of single-crystal Bi-Sb alloys, Physical Review B, 1974.

УДК 537.9

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СТЕПЕНИ ЦИРКУЛЯРНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ СПИНОВЫХ СВЕТОДИОДОВ С ИНЖЕКТОРОМ (In,Fe)Sb

А.В. Кудрин
НИФТИ ННГУ им. Н. И. Лобачевского
e-mail: *alex2983@yandex.ru*
М.В. Ведь
НИФТИ ННГУ им. Н. И. Лобачевского
e-mail: *turok.89rus@rambler.ru*
М.В. Дорохин
НИФТИ ННГУ им. Н. И. Лобачевского
e-mail: *dorokhin@nifti.unn.ru*
В.П. Лесников
НИФТИ ННГУ им. Н. И. Лобачевского

В рамках данной работы показана возможность использования разбавленного магнитного полупроводника (In,Fe)Sb в качестве функционального слоя в приборной структуре, а именно в качестве ферромагнитного инжектора в спиновом светоизлучающем диоде. Исследованы люминесцентные характеристики, а также температурная зависимость степени циркулярной поляризации светодиода с инжектором (In,Fe)Sb.

Ключевые слова: спиновый светоизлучающие диоды, разбавленные магнитные полупроводники, спиновая инжекция, полупроводниковые гетероструктуры A_3B_5.

1. Введение

Разбавленными магнитными полупроводниками (РМП) называют немагнитные материалы, легированные магнитными примесями (3d переходными металлами), и поэтому объединяющие магнитные и полупроводниковые свойства [1]. Основным преимуществом РМП является совместимость с современными полупроводниковыми технологиями [2]. С другой стороны, недостатком большинства РМП, существенно ограничивающим их применение в настоящее время, является низкое значение температуры Кюри. На сегодняшний день, наиболее изученный материал (Ga,Mn)As сохраняет ферромагнитные свойства лишь до 200 К [3], это значит, что прибор спинтроники на основе этого материала сохранит работоспособность лишь до 200 К. В связи с этим, задача повышения температуры Кюри разбавленных магнитных полупроводников является одной из наиболее актуальных в технологии спинтроники. В последние годы активно ведутся работы по сильному легированию материалов A3B5 атомами Fe для получения РМП. Так, в работе [4] с применением метода импульсного лазерного осаждения (ИЛО) были впервые получены тонкие слои разбавленного магнитного полупроводника (In,Fe)Sb с содержанием Fe 13%, температура Кюри в которого превышала 300К. В [5] также были получены

ферромагнитные слои (In,Fe)Sb (содержание Fe=16%) с температурой Кюри выше 300К с использованием МЛЭ.

Ранее, в нашей работе [6] было показано, что слои (In,Fe)Sb могут быть использованы в спиновых светоизлучающих диодах в качестве функционального контактного слоя при нанесении на GaAs p-типа проводимости. Исходя из вольт-амперных характеристик и зонных диаграмм было обнаружено, что механизмы инжекции в таких структурах будут близки к таковым в диодах с барьером Шоттки (рисунок 1) [6].

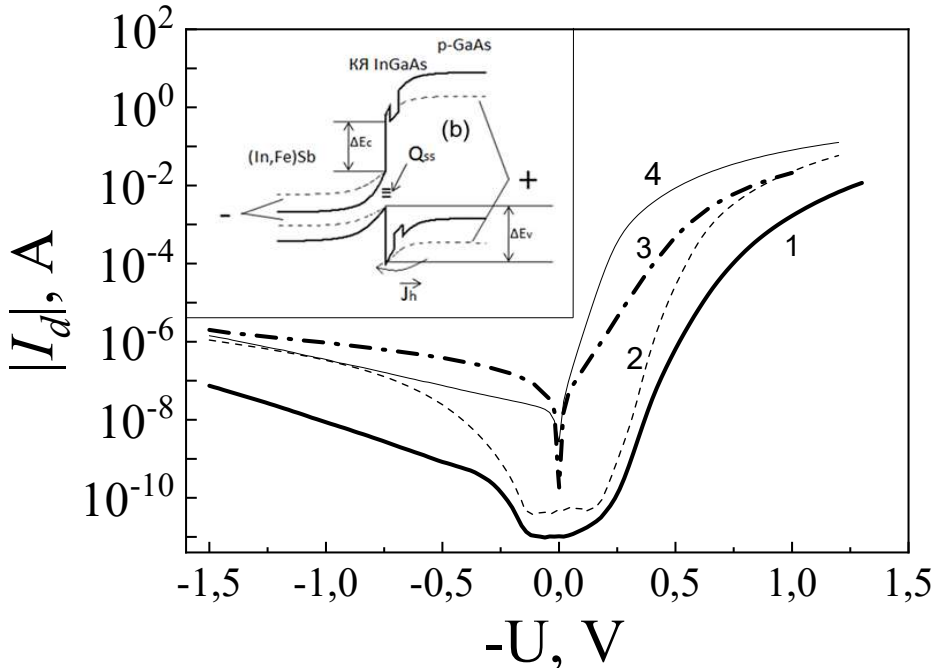


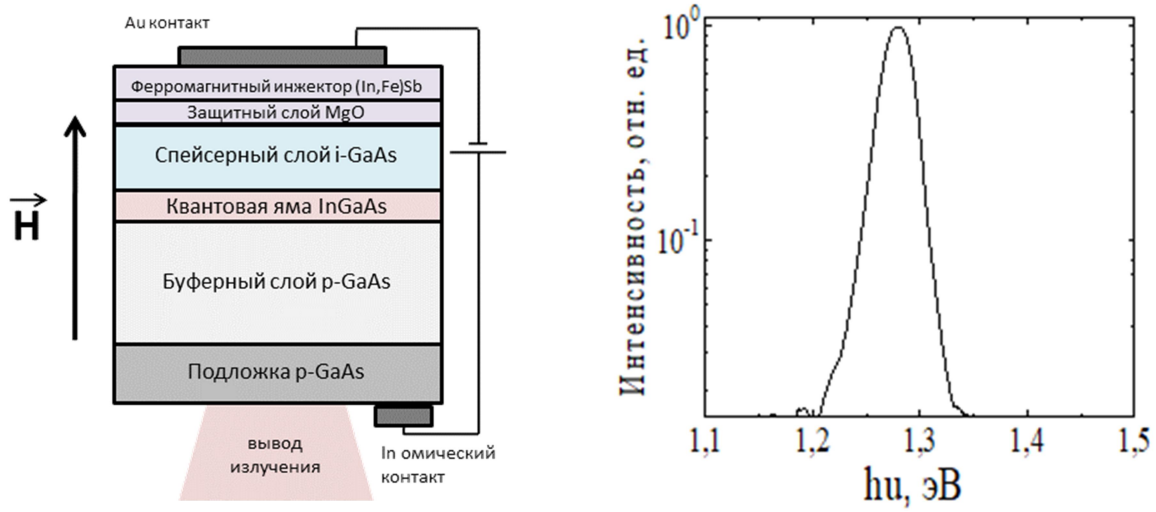
Рисунок 1 – Вольтамперные характеристики образца с контактом (In,Fe)Sb/p-GaAs (2 и 4) и контрольной структуры с контактом Шоттки Al/p-GaAs (1 и 3). Температура измерений – 77 (1 и 2) и 300K (3 и 4). На вставке – схематическое изображение зонных диаграмм контакта (In,Fe)Sb/GaAs/InGaAs/p-GaAs [6]

Также, в работе [7] было исследование влияние слоя (In,Fe)Sb, нанесенного методом импульсного лазерного осаждения, на излучательные свойства спиновых светодиодов на основе КЯ InGaAs/GaAs. Было показано, что осаждение (In,Fe)Sb методом ИЛО на спейсерный слой GaAs влияет на интерфейс (In,Fe)Sb/GaAs. Осаждение защитного слоя диэлектрика MgO между этими слоями позволяет минимизировать это влияние [7].

2. Методика эксперимента

Поскольку осаждение MgO показало улучшение качества поверхности раздела (In,Fe)Sb/GaAs, для исследования циркулярной поляризации электролюминесценции была сформирована структура спинового светоизлучающего диода на подложке p-GaAs с одной квантовой ямой InGaAs/GaAs, инжектором (In,Fe)Sb и защитным слоем MgO. На первом этапе полупроводниковая часть структуры была выращена методом МОС-гидридной эпитаксии при температуре 600 °C. На подложке p-GaAs были последовательно выращены следующие слои: буферный слой p-GaAs, квантовая яма (КЯ) $In_xGa_{1-x}As$ и спейсерный слой i-GaAs толщиной 15 нм. Затем, данная структура была покрыта защитным слоем MgO толщиной 1 нм.

На третьем этапе был нанесен слой (In,Fe)Sb толщиной 40 нм методом ИЛО при температуре 250 °С. На последнем этапе изготовления на структуры были нанесены Au контакты, затем с помощью фотолитографии и химического травления были изготовлены мезаструктуры размером 500 мкм, и был сформирован омический контакт к подложке. Схема образца представлена на рисунке 2а.



а б

Рисунок 2 – (а) Схема структуры для исследования циркулярной поляризации электролюминесценции. (б) Спектр электролюминесценции исследуемого образца. Ток через структуры – 10мА, температура измерений – 77К.

Для исследований электролюминесценции на образцы подавалось прямое смещение (на Au контакт подавался отрицательный потенциал по отношению к подложке). Возбуждаемое ЭЛ излучение регистрировалось со стороны подложки. При внесении структур в магнитное поле, направленное перпендикулярно поверхности, излучение становится частично циркулярно-поляризованным. Степень циркулярной поляризации ЭЛ рассчитывается по формуле

$$P_{EL} = \frac{(I_1 - I_2)}{(I_1 + I_2)} \cdot 100\%, \qquad (1)$$

где P_{EL} – степень циркулярной поляризации электролюминесценции I_1, I_2 – относительные интенсивности люминесценции, измеренные для света, поляризованного по левому и по правому кругу соответственно.

3. Экспериментальные результаты и обсуждение

Спектр ЭЛ исследуемой структуры, измеренный при температуре 77К и токе 10мА, представлен на рисунке 2б. На нём присутствует 1 доминирующий пик с энергией 1,28 эВ, соответствующей излучательному переходу в квантовой яме InGaAs с заданным содержанием In.

На рисунке 3 представлены зависимости степени циркулярной поляризации ЭЛ от магнитного поля, измеренные в диапазоне температур от 10 до 200К.

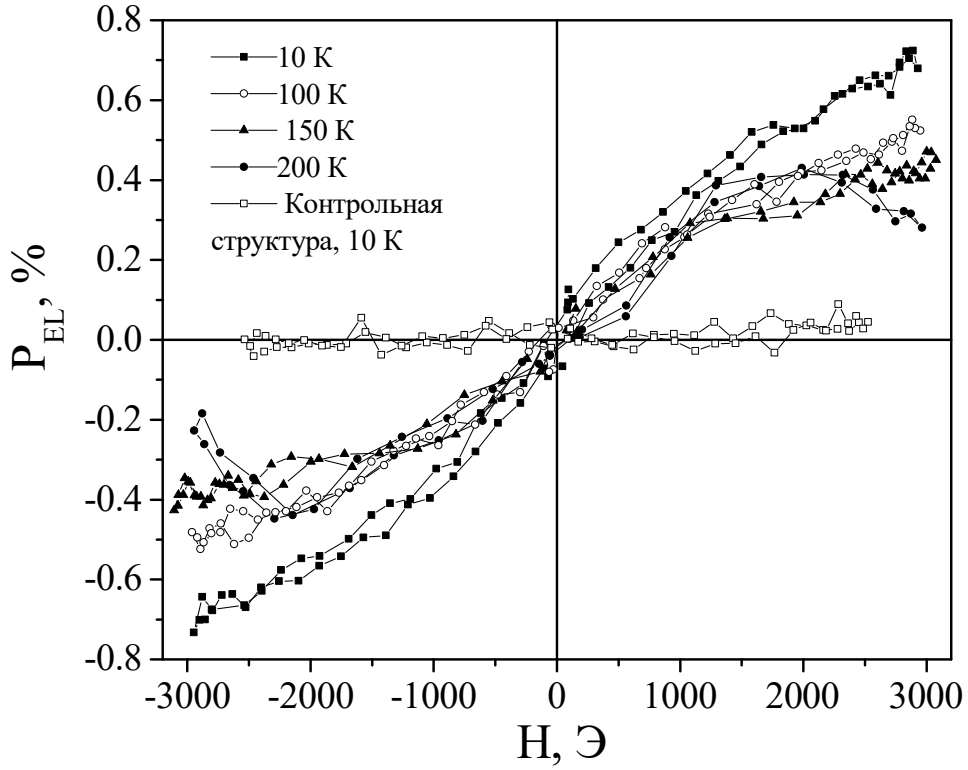


Рисунок 3 – Магнитополевые зависимости степени циркулярной поляризации P_{EL} исследуемого образца, измеренные при разных температурах, а также для контрольной структуры при 10К. Ток через структуру – 10мА.

Как видно из рисунка 3, P_{EL} (B) является функцией, нелинейно зависящей от магнитного поля. Максимальное значение степени циркулярной поляризации, связанное с насыщением намагниченности, наблюдается при температуре 10К и составляет ~ 0,7%. Такой тип зависимости P_{EL} (B) связан с магнитными свойствами (In,Fe)Sb, а сравнительно высокое значение степени поляризации - инжекцией спин-поляризованных электронов из ферромагнитного слоя (In,Fe)Sb. С увеличением температуры интенсивность ЭЛ и степень циркулярной поляризации монотонно уменьшаются. При температурах выше 200 К интенсивность ЭЛ становится сопоставим с уровнем шума, что не позволяет достоверно проводить измерения степени циркулярной поляризации. Следует отметить, что в аналогичном образце, но без MgO электролюминесценция не была обнаружена в диапазоне токов диода 1-200 мА. Это свидетельствует о том, что MgO является защитным слоем, который предотвращает негативное влияние (In,Fe)Sb на люминесцентные характеристики структуры. Наблюдаемое на рисунке 3 изменение формы зависимости P_{EL} (B) с увеличением температуры можно отнести к различным механизмам намагничивания в слое (In,Fe)Sb. В частности, Зеемановское расщепление в InSb может давать как увеличение, так и уменьшение степени циркулярной поляризации в зависимости от температуры и величины магнитного поля [8].

Также следует отметить, что была исследована циркулярная поляризация ЭЛ контрольной структуры без ферромагнитного инжектора (In,Fe)Sb (Au контакт осаждался непосредственно на спейсерный слой GaAs). Зависимость P_{EL} от магнитного поля для такой структуры показана на рисунке 3 (пустые

квадраты). Значение степени циркулярной поляризации для контрольной структуры не превышало 0,1%.

Таким образом, был сформирован и исследован спиновый светоизлучающий диод на основе гетероструктуры GaAs/InGaAs с ферромагнитным инжектором в виде разбавленного магнитного полупроводника (In,Fe)Sb и разработаны методы увеличения интенсивности ЭЛ путем модификации интерфейса ферромагнетик/полупроводник. Также в данной работе была получена спиновая инжекция электронов из РМП (In,Fe)Sb в полупроводниковую структуру на основе GaAs с дальнейшей рекомбинацией и испусканием излучения ЭЛ из области квантовой ямы. Зависимости степени циркулярной поляризации P_{EL} от магнитного поля были измерены в диапазоне температур от 10 до 200К. Максимальное значение P_{EL} было получено при температуре 10К и составило 0.7%.

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, проект № 18-37-00358 (изготовление спиновых светодиодов и измерение поляризации) и стипендии Президента Российской Федерации СП-2450.2018.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Holub M., Bhattacharya P. Spin-polarized light-emitting diodes and lasers // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2007. – V.40, P. R179–R203.
2. Zutic I., Fabian J., Das Sarma S. Spintronics: Fundamentals and applications // J. Rev. Mod. Phys. – 2004. – V.76, P. 323–410.
3. Chen L., Yang X., Yang F., Zhao J., Misuraca J., Xiong P., Molnár S. V. Enhancing the Curie Temperature of Ferromagnetic Semiconductor (Ga,Mn)As to 200 K via Nanostructure Engineering // Nano Lett. – 2011. – V.11, P. 2584–2589.
4. Kudrin A., Danilov Yu., Lesnikov V., Dorokhin M., Vikhrova O., Pavlov D., Usov Yu., Antonov I., Kriukov R., Alaferdov A., and Sobolev N. High-temperature intrinsic ferromagnetism in the (In,Fe)Sb semiconductor // J. Appl. Phys. – 2017. – V.122, P. 183901.
5. Tu N. T., Hai P. N., Anh L. D. and Tanaka M. High-temperature ferromagnetism in new n-type Fe-doped ferromagnetic semiconductor (In,Fe)Sb // Appl. Phys. Express. – 2018. – V.11, P. 063005.
6. Ved M., Dorokhin M., Lesnikov V., Pavlov D., Usov Yu., Kudrin A., Demina P., Zdoroveishchev A., Danilov Yu. Diode Structures Based on (In, Fe)Sb/GaAs Magnetic Heterojunctions // Tech. Phys. Lett.– 2019. – V.45, P. 668–671.
7. Dorokhin M., Ved'M., Lesnikov V., Zdoroveyshchev A., Danilov Yu., Demina P. and Kudrin A. Fabrication and luminescent properties of (In,Fe)Sb/GaAs/InGaAs diodes // Book of Abstracts of 6th International School and Conference "Saint Petersburg OPEN 2019".– 2019. – P. 164–165.
8. Terent'ev Ya., Mukhin M., Toropov A., Nestoklon M., Meltser B., Semenov A., Solov'ev V., and Ivanov S. Photoluminescence studies of Zeeman effect in type-II InSb/InAs nanostructures // Phys. Rev. B.– 2013. – V.87, P. 045315.

УДК 537.622.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫХ И ТЕРМОМАГНИТНЫХ СВОЙСТВ ТОНКИХ ПЛЁНОК CoPt

Ю.М. Кузнецов, асп., м.н.с.
НИФТИ ННГУ «Нижегородский физико-технический институт Нижегородского государственного университета»
e-mail: *yurakz94@list.ru*
М.В. Дорохин, д.ф.-м.н., доц.
НИФТИ ННГУ «Нижегородский физико-технический институт Нижегородского государственного университета»
e-mail: *dorokhin@nifti.unn.ru*
А.В. Здоровейщев, к.ф.-м.н., в.н.с.
НИФТИ ННГУ «Нижегородский физико-технический институт Нижегородского государственного университета»
e-mail: *zdorovei@gmail.com*
О.В. Вихрова, к.ф.-м.н., в.н.с.
НИФТИ ННГУ «Нижегородский физико-технический институт Нижегородского государственного университета»
e-mail: *vikhrova@nifti.unn.ru*
А.В. Кудрин, к.ф.-м.н., с.н.с.
НИФТИ ННГУ «Нижегородский физико-технический институт Нижегородского государственного университета»
e-mail: *alex2983@ya.ru*
П.Б. Дёмина, м.н.с.
НИФТИ ННГУ «Нижегородский физико-технический институт Нижегородского государственного университета»
e-mail: *demina@phys.unn.ru*

Тонкие плёнки CoPt представляют большой интерес в исследовании магнитных свойств в виду возможности практического применения данных слоёв в качестве инжекторов в спиновых светоизлучающих диодах. Наличие сильной магнитной анизотропии в подобных системах позволяет наблюдать гигантские поперечные термомагнитные явления, что открывает перспективы использования подобных плёнок в качестве рабочих слоёв в термомагнитных преобразователях энергии. В работе исследованы гальваномагнитные и термомагнитные характеристики плёнок CoPt, сформированные на полуизолирующих подложках арсенида галлия методом электронно-лучевого осаждения в вакууме.

Ключевые слова: эффект Холла, эффект Нернста-Эттингсгаузена, намагниченность, петля гистерезиса, доменная стенка, спин-зависимое рассеяние.

1. Введение

Одним из основных направлений развития современной альтернативной электроники является спинтроника, в которой принцип работы электронных приборов основан на использовании спина свободных носителей заряда. Для практической реализации приборов спинтроники необходимо разработать

тонкоплёночные материалы, обладающие ферромагнитным упорядочением с температурой Кюри близкой к комнатной. Основной методикой исследования магнитных свойств тонких плёнок является хорошо изученный эффект Холла (аномальный эффект Холла) [1,2]. Однако, такая методика имеет ряд ограничений, снижающих возможности для исследования транспортных и магнитных свойств высокоомных структур, или не позволяющих определять их параметры с необходимой точностью. Дополнительным методом исследования, а в определённых случаях альтернативным методом, являются эффекты, основанные на комплексе термоэлектрических и термомагнитных явлений (Продольный и поперечный эффекты Нернста – Эттингсгаузена [3]). Данные методики, в совокупности с эффектом Холла, позволяют достоверно определить характер рассеяния носителей, и, как следствие, более точно определить транспортные параметры структур. Параметры аномального эффекта Нернста-Эттингсгаузена, в частности его знак, дают информацию о характере рассеяния носителей в ферромагнитных материалах выше и ниже точки Кюри и, в ряде случаев о механизмах ферромагнитного упорядочения.

2. Обыкновенные эффекты Холла и Нернста-Эттингсгаузена

Величина напряжённости электрического поля Холла определяется выражением:

$$\vec{E}_{HALL} = \vec{j} \cdot \vec{B} \cdot R_H, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{j}$ – плотность пропускаемого через структуру тока, $\boldsymbol{B}$ – индукция магнитного поля, R_H – постоянная Холла, определяемая выражением:

$$R_H = -A_r / e \cdot n, \tag{2}$$

где e – заряд электрона, n – концентрация свободных носителей заряда, A_r – Холл-фактор, который можно выразить через время релаксации импульса τ и фактор рассеяния r [3]:

$$A_r = <\tau^2> / <\tau>^2 = 3\pi^{1/2}\Gamma(3/2+2r)/4\Gamma^2(2+r). \tag{3}$$

Величина фактора рассеяния характеризует вид рассеивающего центра и показывает степенную зависимость между кинетической энергией ε свободного носителя заряда и временем релаксации импульса.

Непосредственно из эффекта Холла величину фактора рассеяния и, как следствие, Холл-фактора, определить невозможно. Существует несколько методик определения фактора рассеяния, одной из которой является методика на основе эффекта Нернста-Эттингсгаузена – явления возникновения поперечной разности потенциалов при создании в исследуемой структуре градиента температур *gradT*. По аналогии с эффектом Холла, для напряжённости электрического поля Нернста-Эттингсгаузена можно записать выражение:

$$\vec{E}_{NE} = Q \cdot \vec{B} \cdot gradT, \tag{4}$$

где Q – постоянная обыкновенного эффекта Нернста-Эттингсгаузена, определяемая выражением:

$$Q = (1/2 - r) A_r k\mu / e, \tag{5}$$

где μ - истинная подвижность свободных носителей заряда. Проводя в совокупности эффекты Холла и Нернста-Эттингсгаузена по методике, описанной ниже, можно получить значения двух постоянных и, по формулам (1) – (5), получить систему уравнений, из которой можно вычислить величину фактора рассеяния и более точно рассчитать транспортные параметры.

3. Аномальные эффекты Холла и Нернста-Эттингсгаузена

Особенностью исследования ферромагнитных структур в эффектах Холла и НЭ является эффект спин-зависимого рассеяния свободных носителей заряда на рассеивающих магнитных центрах, что приводит к искажению линейной магнитополевой зависимости напряжений Холла и Нернста-Эттингсгаузена. Математически аномальные эффекты описываются введением в выражения (1) и (4) дополнительных членов:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{HALL} &= R_H \cdot \vec{j} \cdot \vec{B} + R_S \cdot \vec{j} \cdot \vec{M}, \\ \vec{E}_{NE} &= Q \cdot \vec{B} \cdot gradT + Q_S \cdot \vec{M} \cdot gradT, \end{aligned} \tag{5}$$

где R_S – константа аномального эффекта Холла, $\boldsymbol{M}$ – намагниченность структуры, Q_S – постоянная аномального эффекта Нернста-Эттингсгаузена.

Важно отметить, что величина аномального эффекта Холла определяется величиной спин-зависимого рассеяния свободных носителей заряда, то есть разностью степени рассеяния носителей с различной ориентацией спина. в том время как величина аномального эффекта Нернста-Эттингсгаузена определяется разностью спин-зависимого рассеяния «горячих» и «холодных» носителей заряда. Этот факт приводит к тому, что наличие большого аномального эффекта Холла не является гарантией наличия сопоставимого аномального эффекта Нернста-Эттингсгаузена и наоборот. Одним из путей создания большой температурной разности спин-зависимого рассеяния, является наличие в структуре большого числа магнитных неоднородностей различной природы.

4. Исследуемые структуры

В качестве исследуемых структур выступали тонкие (около 8нм) металлические плёнки CoPt, сформированные на подложке полуизолирующего GaAs (100) методом электронно-лучевого осаждения в вакууме. Наличие ферромагнетизма в подобных плёнках было экспериментально подтверждено в ряде работ [4]. Практический интерес к этим плёнкам обусловлен возможностью их широкого применения при создании элементов спинтроники (спиновых светоизлучающих диодов, магниторезистивных элементов, зондов для исследований методом магнито-силовой микроскопии и др.) [4].

Структуры были получены при одинаковых технологических условиях. Отличие структур заключается в соотношении толщин слоёв Co и Pt (таблица 1).

Таблица 1 – Параметры исследуемых структур CoPt

Обозначение структуры	Соотношение компонент Co_xPt_y
Структура 1	1:5
Структура 2	2:5

Структура 3	3:5
Структура 4	4:5

Целью исследования данных структур является анализ влияния относительной концентрации кобальта и платины на величины аномального и нормального эффектов Холла и Нернста-Эттингсгаузена с целью сопоставления с феноменологической теорией описания данных эффектов и корректировки технологического процесса создания подобных слоёв для реализации интеграции в приборы спинтроники.

5. Феноменологическая теория аномального эффекта Нернста-Эттингсгаузена в слоях CoPt

В плёнках CoPt в виду низкой подвижности свободных носителей заряда обыкновенные составляющие эффектов Холла и Нернста-Эттингсгаузена малы ($R_H << R_S$ и $Q << Q_S$), что позволяет упростить систему (5) и привести её к виду:

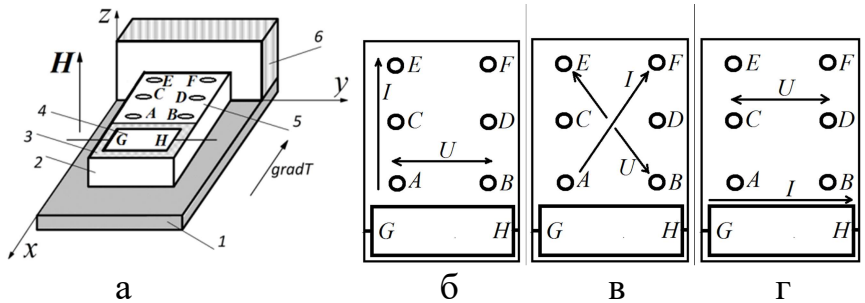
$$\vec{E}_{HALL} = \vec{j} \cdot \vec{M} \cdot R_S, \qquad \vec{E}_{NE} = Q_S \cdot \vec{M} \cdot gradT. \tag{6}$$

Малость обыкновенных составляющих в формуле (5) будет далее подтверждена экспериментально. Величина аномальных коэффициентов зависит от степени магнитной неоднородности подобных систем. В случае сильной магнитной анизотропии величина аномального эффекта, как Холла так и Нернста-Эттинсгаузена, может доминировать над обыкновенными эффектами, связанными, в первую очередь, с подвижностью свободных носителей заряда. Ширина петли гистерезиса намагниченности структуры будет определяться доменной структурой тонкой ферромагнитной плёнки, которая в свою очередь зависит от относительной концентрации входящих в систему компонент.

6. Методики исследования

В качестве методик исследования магнитных свойств структур выступали регистрация магнитополевой зависимости напряжений Холла и Нернста-Эттингсгаузена.

Принципиальная схема крепления структуры показана на рисунке 1а. Верхняя грань образца условно разделяется в соотношении 1:2. На меньшей части устанавливается резистор. Грань, противоположная грани 2, прижимается к металлическому массивному радиатору 6, который будет охлаждать образец.



а б в г

Рисунок 1 – а - Схематический вид крепления образца на шести контактном держателе с целью регистрации эффектов Холла и Нернста-Эттингсгаузена. б – Схема измерения удельного сопротивления, в – Схема измерения эффекта Холла, г – Схема измерения эффекта Нернста-Эттингсгаузена

На рисунках 1б-1г показана распайка образца – на поверхности структуры формируется 6-омических контактов из индия. Контакты служат для измерения слоевого сопротивления (рисунок 1б), сопротивления Холла (рисунок 1в), коэффициента Нернста-Эттингсгаузена (рисунок 1г). На рисунках одиночными стрелочками показано направление протекания тока, двойными – регистрируемое напряжение.

Слоевое сопротивление регистрируется стандартной четырёхзондовой схемой Ван-Дер-Пау [5]. Методики регистрации эффекта Холла хорошо изучены и представлены в обширном ряде литературы, например [1-2,6-8]. Для регистрации магнитополевой зависимости напряжения Нернста-Эттингсгаузена через резистор *GH* пропускается электрический ток, что приводит к разогреву одной грани структуры. За счёт отвода тепла радиатором в объёме структуры создаётся градиент температуры. Напряжение регистрируется с контактов *CD*. Магнитное поле ориентируется поперёк плёнки. Дополнительно с методикой регистрации напряжения Нернста-Эттингсгаузена можно ознакомится в работах [9-12].

7. Результаты эксперимента

В ходе эксперимента были зарегистрированы магнитополевые зависимости постоянной Холла (рисунок 2) и напряжения Нернста-Эттингсгаузена (рисунок 3). Эффект Холла проводился при средней температуре структуры 300К. Эффект Нернста-Эттингсгаузена проводился при температуре холодной грани структуры 300К. Температура горячей грани в эксперименте оценивалась около 370К.

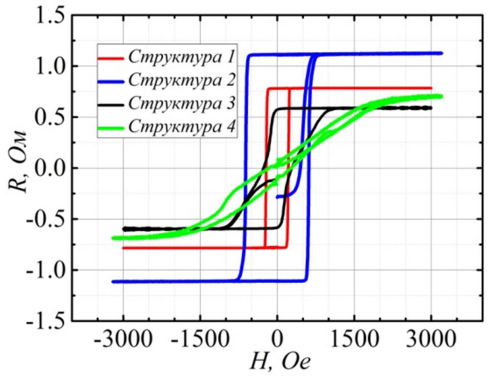


Рисунок 2 – Экспериментально полученная магнитополевая зависимость сопротивления Холла исследуемых структур

Магнитополевая зависимость сопротивления Холла на всех структурах имеет вид петли гистерезиса, что свидетельствует о наличии ферромагнитного порядка в исследуемых металлических слоях. В зависимости от соотношения Co и Pt меняется характер петли, в частности вклад аномальной составляющей эффекта и величины коэрцитивной силы. Из анализа петель можно заключить, что увеличение Pt приводит к увеличению вклада нормального эффекта Холла, что обусловлено проводимостью по немагнитному слою платины. Различие в величине ширины петли объясняется особенностями доменных стенок в магнитоупорядоченной металлической системы, тогда как различие в величине сопротивления Холла требует дополнительных исследований.

Магнитополевая зависимость напряжения Нернста-Эттингсгаузена повторяет магнитополевую зависимость сопротивления Холла, что согласуется с литературными данными [13]:

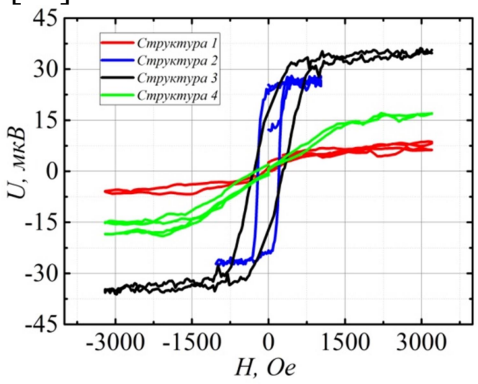


Рисунок 3 – Экспериментально полученная магнитополевая зависимость напряжения Нернста-Эттингсгаузена

Стоит отметить, что ширина петли отличается от соответствующей ширины петли от магнитополевой зависимости напряжения Холла. Данный факт объясняется более высокой (около 50К) средней температурой исследуемой структуры. Как было сказано выше, величина аномального эффекта Нернста-Эттинсгаузена, в отличии от аномального эффекта Холла, определяется не влиянием спинзависимого рассеяния свободных носителей заряда, а разностью спинзависимого рассеяния «горячих» и «холодных» электронов, движение которых вызвано не градиентом электрического потенциала, а градиентом температуры между холодной и горячей гранями образца. В структурах, содержащих высокую относительную концентрацию Co или Pt (структуры 1 и 4 соответственно) эта разница фактора рассеяния невелика, что приводит к наблюдению низкого значения напряжения Нернста-Эттингсгаузена, хотя амплитуда аномального эффекта Холла высокая. Проводимость в таких системах происходит, в основном, по одному из слоёв, в которых присутствует спин-зависимое рассеяние, которое слабо зависит от температуры, что отражается на величине аномального эффекта Нернста-Эттингсгаузена. Когда относительные толщины слоёв кобальта и платины сравниваются (структуры 2 и 3), наблюдается резкий рост аномального эффекта с одновременным увеличением ширины петли. При этом происходит уменьшение вклада нормальной составляющей вследствие уменьшения подвижности носителей за счёт большого количества доменных стенок. На подобных структурах наблюдается гигантский термомагнитный эффект, что открывает перспективы дальнейшего их исследования с целью создания на их основе термомагнитных преобразователей энергии.

8. Выводы

В работе показано, что у намагниченной структуры наблюдается гигантский поперечный термоэлектрический эффект, который сохраняется до тех пор, пока поддерживается разность температур или плёнка не размагничивается. Результаты данного эффекта являются прекрасной демонстрацией применения тепловой спинтроники, что позволяет получить

ещё одну степень свободы при развитии приборов электроники, работающих на принципе управлением спинов свободных носителей заряда.

Исследования эффекта Холла проведены при поддержке гранта РНФ (проект 17-79-20173). Исследования эффекта Нернста-Эттингсгаузена проведены при поддержке гранта РФФИ (№18-37-00358).

ЛИТЕРАТУРА

1. Nagaosa N., Sinova J., Onoda S., MacDonald A.H., Ong N.P. Anomalous Hall effect // Rev. Mod. Phys. – 2010. – 82. – 2. – P. 1539-1592.
2. Кудрин А.В., Данилов Ю.А. Аномальный эффект Холла. – Нижний Новгород. – 2017. – 16 с.
3. Цидильковский И.М. Термомагнитные явления в полупроводниках. – М.:Москва. – 1960. – 396 с.
4. Темирязев А.Г., Темирязева М.П., Здоровейщев А.В., Вихрова О.В., Дорохин М.В., Дёмина П.Б., Кудрин А.В. Формирование доменной структуры в многослойных плёнках CoPt с помощью магнитного зонда атомно-силовой микроскопии// Физика твёрдого тела. – 2018. – 60. – 11. – С. 2158-2165.
5. Поклонский Н.А., Белявский С.С., Вырко С.А., Лапчук Т.М. Четырёхзондовый метод измерения электрического сопротивления в полупроводниках. – М.:Минск. – 1998. – 48 с.
6. Житинская М.К., Немов С.А., Иванова Л.Д. Эффекты Нернста-Эттингсгаузена, Зеебека и Холла в монокристаллах Sb_2Te_3// Физика твёрдого тела. – 2002. – 44. – 1. – С. 41-46.
7. Черноглазов К.Ю., Николаев С.Н., Рыльков В.В., Семисалова А.С., Зенкевич А.В., Тугушев В.В и др. Аномальный эффект Холла в поликристаллических плёнках $Si_{1-x}Mn_x$ (x~0.5) с самоорганизованным распределением кристаллов по форме и размеру// Письма в ЖЭТФ. – 2016. – 103. – 7. – С. 539-546.
8. Павлов Д.А., Планкина С.М., Кудрин А.В. Эффект Холла. – Нижний Новгород. – 2013. – 24 с.
9. Kuznetsov Yu, Dorokhin M., Kudrin A., Vikhrova O. Anomalous Nernst-Ettingshausen effect in δ<Mn>GaAs/InGaAs ferromagnetic semiconductor heterostructures// IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series.. – 2018. – 993. – P.012015.
10. Kuznetsov Yu, Dorokhin M., Kudrin A., Lesnikov V., Demidov E., Karzanov V. Investigation of the magnetic properties of manganese silicide grown on i-GaAs substrate by pulsed laser deposition// IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series.. – 2018. – 1124. – P.061004.
11. Кондорский В.И., Васильева Р.П., Архипов Ю.Н., Черемушкина А.В. Исследование нормального и аномального эффектов Нернста-Эттингсгаузена в ферромагнитных металлах выше точки Кюри// Письма в ЖЭТФ. – 1969. – 10. – С. 78-80.
12. Кулеев И.Г., Лончаков А.Т., Штрапенин Г.Л., Арапова И.Ю. Поперечный эффект Нернста-Эттингсгаузена в кристаллах HgSe:Fe,Ga, содержащих примеси железа со смешанной валентностью// Физика твёрдого тела. – 1997. – 39. – 10. – С. 1767-1774.

13. Арсеньева А.Д., Васильева Р.П., Ведяев А.В., Грановский А.Б., Мяликгулыев Г.М., Печенников А.В., и др. Аномальный эффект Нернста-Эттингсгаузена в аморфных ферромагнитных сплавах// Физика твёрдого тела. – 1991. – 33. – 5. – С. 1443-1446.

УДК 538.91+54-123+519.65

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАЛЫХ ВИСМУТ-ФУЛЛЕРЕНОВ

О.И. Марков, д.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *O.I.Markov@mail.ru*
Д.С. Шмелёв, магистрант
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *tailsneogenesis@gmail.com*

Объектом исследований являются малые фуллерены на основе висмута. В статье представлены результаты компьютерного моделирования квантово-химическими методами структуры и энергетических параметров фуллеренов висмута Bi_{2n}, n=1,…,9.

Ключевые слова: фуллерен, висмут, квантово-химические методы.

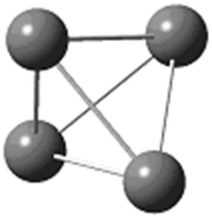
Фуллерен (стандартное обозначение C_n, n – чётное) — это аллотропная модификация соединений атомов углерода, молекула, в которой атомы углерода соединены простыми и двойными связями и образуют полностью или частично замкнутую ячеистую структуру (ячейки представляют собой многоугольники, чаще всего с 5-7 сторонами). Молекула фуллерена может иметь произвольную форму; как правило, это сфера, эллипсоид или трубка. Фуллерен C_{60} был впервые получен и идентифицирован группой английских и американских исследователей под руководством Х. Крото, Р. Кёрла и Р. Смолли в 1985 г.

Можно предположить, что замкнутую полую структуру могут образовывать не только атомы углерода. Естественным было бы ожидать, что нитрид бора, являющийся изоэлектронным аналогом углерода, может образовывать молекулу подобной формы. Такие структуры были получены лишь в 1998 году. На настоящий момент открыто несколько десятков неуглеродных фуллеренов, имеющих различную структуру и состав. Часто синтезу предшествует теоретическое предсказание, позволяющее оценить свойства материала. Так, в 2001 году были предложены модели фуллеренов из диборида магния [1]. В 2007 году был предсказан фуллерен, состоящий полностью из бора B_{80} [2], а в 2014 году вышла статья, в которой было сообщено об успешном синтезе борного фуллерена B_{40} [3].

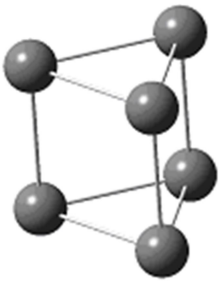
Актуальным для настоящей работы является вопрос о существовании молекул малых фуллеренов вида C_{2n}, n<10, рассмотренный в [4]. Объектом наших исследований являются малые фуллерены и нанокластеры размером до

60 атомов на основе висмута. Причина выбора висмута в качестве перспектив-перспективного элемента для создания наноструктурированных материалов имеет несколько оснований. Некоторые из них состоят в том, что висмут и его сплавы относятся к классу полуметаллов и узкозонных полупроводников и обладают широким комплексом любопытных свойств. Огромный интерес представляет сильная зависимость энергетических параметров висмута от температуры, давления и прочих внешних факторов. Эта характерная особенность висмута позволяет изготавливать из него приборы и устройства различного назначения. Особое значение имеет практическое применение висмута при создании термоэлектрических преобразователей. Наноструктуры висмута с изменением размеров могут переходить из полупроводникового состояния в полуметаллическое, что может оказать существенное влияние при создании функциональных материалов.

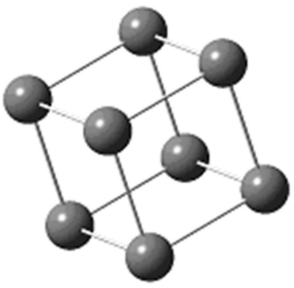
Объемный висмут широко исследовался как теоретически, так и экспериментально, но имеющиеся работы по висмутовым наноструктурам крайне немногочисленны [5–12], а вопрос о «классических» фуллеренах на основе висмута поднимался лишь в [12]. Висмут обладает слоистой структурой и тем самым обнаруживает сходство в структуре с графитом, что служит предпосылкой для построения фуллеренов, аналогичных углеродным. Проведённые исследования кластеров висмута указывают на существование стабильных малых фуллеренов и кластеров. Предыдущие исследования [8-11] кластеров на базе висмута основывались на предположении о слоистой структуре кластеров типа «Лодка». В данном исследовании изначально предполагалась структура с внутренней полостью, поэтому далее такие кластеры будем именовать фуллеренами.



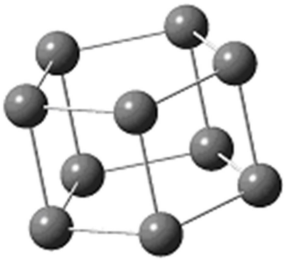
а



б



в



г

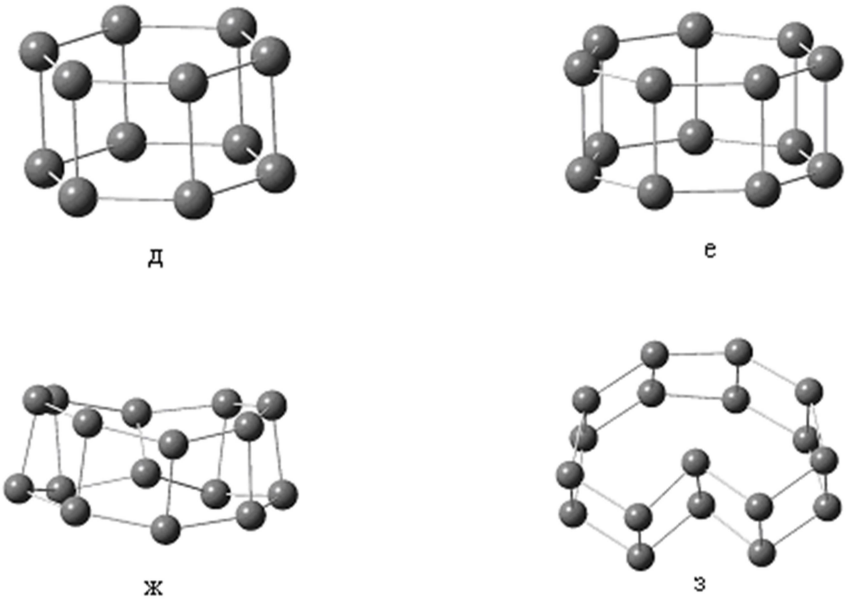


Рисунок 1 – Оптимальная структура фуллеренов Bi_{2n}, n=1...9: а) 4-атомного; б) 6-атомного; в) 8-атомного; г) 10-атомного; д) 12-атомного; е) 14-атомного, ж) 16-атомного; з) 18-атомного.

В целом для малых висмутовых фуллеренов (рис. 1) характерной оптимальной структурой является правильная или близкая к правильной призматическая. Основанием такой геометрии также может служить слоистость висмута. Характерная длина межатомной связи изменяется незначительно и меньше 3,15 Å. Квантовая химия представляет собой набор методов (Хартри-Фока HF и функционала плотности DFT), позволяющих рассчитывать структуру и энергетические характеристики кластеров относительно небольших размеров. В частности, интерес представляет влияние структурных особенностей наночастиц на ширину щели, определяющую её оптические свойства.

Далее приведены энергетические характеристики малых фуллеренов. Зависимость ширины запрещённой зоны фуллерена от n (n=2,…,9) показана на рис. 2.

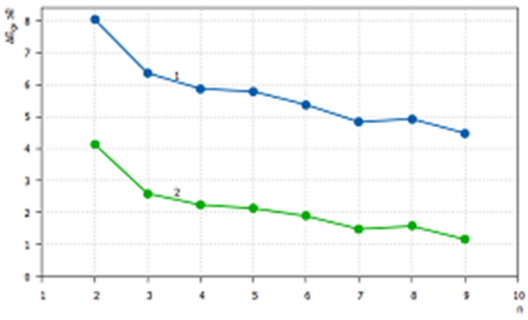


Рисунок 2 – Зависимость ширины запрещенной зоны от n для фуллеренов вида Bi_{2n}, n=1,...,9. 1 –RHF/CEP-121G, 2 – DFT-RB3LYP/CEP-121G.

Из графика следует, что запрещённая зона сужается с увеличением числа атомов в кластере. Согласно методу Хартри-Фока, малые фуллерены являются изоляторами; метод функционала плотности указывает на меньшую ширину

запрещённой зоны, соответствующую с ростом n переходу в полупроводниково-полупроводниковое состояние. Как и ожидалось, обе кривые имеют идентичный характер и различаются на некоторую стабильную величину — энергию корреляции электронов, не учитываемую в методе HF. Зависимость энергии ионизации фуллерена от n приведена на рис. 3.

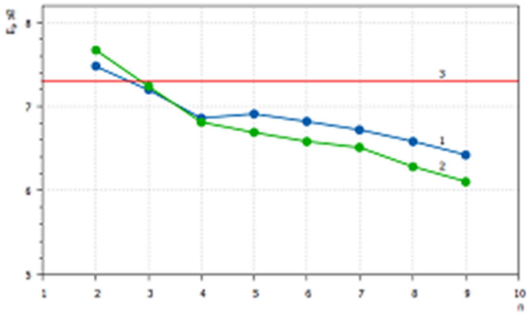


Рисунок 3 – Зависимость энергии ионизации от n для фуллеренов вида Bi_{2n}, n=1…9.
1 – HF/CEP-121G, 2 – DFT-B3LYP/CEP-121G, 3 – энергия ионизации атома висмута (7,3 эВ).

Энергия ионизации фуллеренов неплохо соотносится со значением энергии ионизации для изолированного атома висмута (7,3 эВ). Небольшое превышение для 4-атомного фуллерена вызвано, вероятно, особенностями направленности связей атомов кластера. Оба метода дают достаточно близкие значения энергии; наблюдается вполне логичное незначительное снижение энергии ионизации с ростом числа атомов.

Зависимость энергии диссоциации фуллерена от n приведена на рис. 4.

График указывает, что энергия диссоциации изменяется немонотонно, выделяя менее стабильные структуры с n=3, n=7. Небольшой общий разброс энергии — порядка 1 эВ — характеризует малые фуллерены как незначительно различающиеся по стабильности структуры.

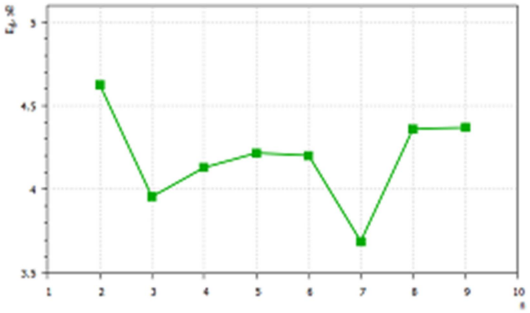


Рисунок 4 – Зависимость энергии диссоциации от n для фуллеренов вида Bi_{2n}, n=1,...,9 – DFT-B3LYP/CEP-121G.

Таким образом, проведено изучение в кластерном приближении электронной структуры фуллеренов с использованием квантово-химических методов. Выполнены расчеты ширины запрещенной зоны, энергии ионизации, энергии диссоциации для кластеров разных размеров в диапазоне от 4 до 18 атомов. Показано, что основные особенности электронной структуры висмута проявляются уже на малых фуллеренах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чернозатонский Л.А. Бифуллерены и бинанотрубы из диборидов // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 74, № 6. С. 369–373.
2. Gonzalez Szwacki N., Sadrzadeh A., Yakobson B.I. B80 Fullerene: An Ab Initio Prediction of Geometry, Stability, and Electronic Structure // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 98, № 16, id. 166804.
3. Zhai H.-J. et al. Observation of an all-boron fullerene // Nat. Chem. – 2014. – Vol. 6. – pp. 727–731.
4. Melker, A.I., Lonch V. Atomic and Electronic Structure of Mini-Fullerenes: From Four to Twenty // Materials Physics and Mechanics. – 2012. – Vol. 13. – pp. 22-36.
5. Kuznetsov A.N. et al. Ab Initio Calculations on Bismuth Cluster Polycations // Chemistry – A European Journal. – 2001. – Vol. 7. – pp. 2821-2828.
6. Liming Gao et al. Size- and charge-dependent geometric and electronic structures of Bi_n (Bin-) clusters (n=2-13) by first-principles simulations // The Journal of Chemical Physics. – 2008. – Vol. 128, Issue 19, id. 194304. – pp. 1-9.
7. Esmail A., Abdel-Fattah M., Elsayed-Ali H.E. Nonuniformity in lattice contraction of bismuth nanoclusters heated near its melting point // Journal of Applied Physics. – 2011. – Vol. 109, id. 084317. – pp. 1-6.
8. Хрипунов Ю.В., Марков О.И., Грибанов Е.Н. Моделирование нанокластеров висмута квантово-химическими методами // Сборник материалов IV Всероссийской конференции по наноматериалам. М. ИМЕТ РАН. 2011. С. 136.
9. Грибанов Е.Н., Марков О.И., Хрипунов Ю.В. Квантово-химическое моделирование кластеров висмута // Межвуз. сб. науч. тр. «Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов». Вып. 3. – Тверь: ТГУ, 2011. – С. 27-32.
10. Gribanov E.N., Markov O.I., Khripunov Yu.V. When Does Bismuth Become a Semimetal? // Nanotechnologies in Russia. – 2011. – Vol. 6, №№9-10. – pp. 593-596.
11. Грибанов Е.Н., Марков О.И., Хрипунов Ю.В. Расчет кластеров висмута квантово-химическими методами // Химическая физика и мезоскопия. – 2012. – Т. 14, № 1 – С. 40-46.
12. Kharissova O.V. et al. Computational chemistry calculations of stability for bismuth nanotubes, fullerene-like structures and hydrogen-containing nanostructures. // Journal of Molecular Modeling. – 2012. – Vol. 18, Issue 8. – pp. 3981-3992.

УДК 538.911, 538.958

ВИРТУАЛЬНЫЕ ПОДЛОЖКИ Ge/Si(001) ДЛЯ СОЗДАНИЯ ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ ГЕТЕРОСТРУКТУР НА ОСНОВЕ GaAs

Д.С. Прохоров
НИФТИ ННГУ им. Н. И. Лобачевского
e-mail: *dprokhrov95@mail.ru*
А.В. Рыков
НИФТИ ННГУ им. Н. И. Лобачевского
e-mail: *rikov@nifti.unn.ru*
В.Г. Шенгуров
НИФТИ ННГУ им. Н. И. Лобачевского
e-mail: *shengurov@phys.unn.ru*

В работе представлены результаты исследований виртуальных подложек Ge/Si(001), выращенных методом химического осаждения с помощью «горячей проволоки». Подложки использовались для роста структур на основе GaAsc квантовыми ямами InGaAs методом газофазной эпитаксии. Полученные слои A3B5 и Ge являются монокристаллическими с шероховатостью поверхности rms< 1 нм.

Ключевые слова: гетероструктуры, эпитаксия, HWCVD, МОСГФЭ, полупроводниковые приборы.

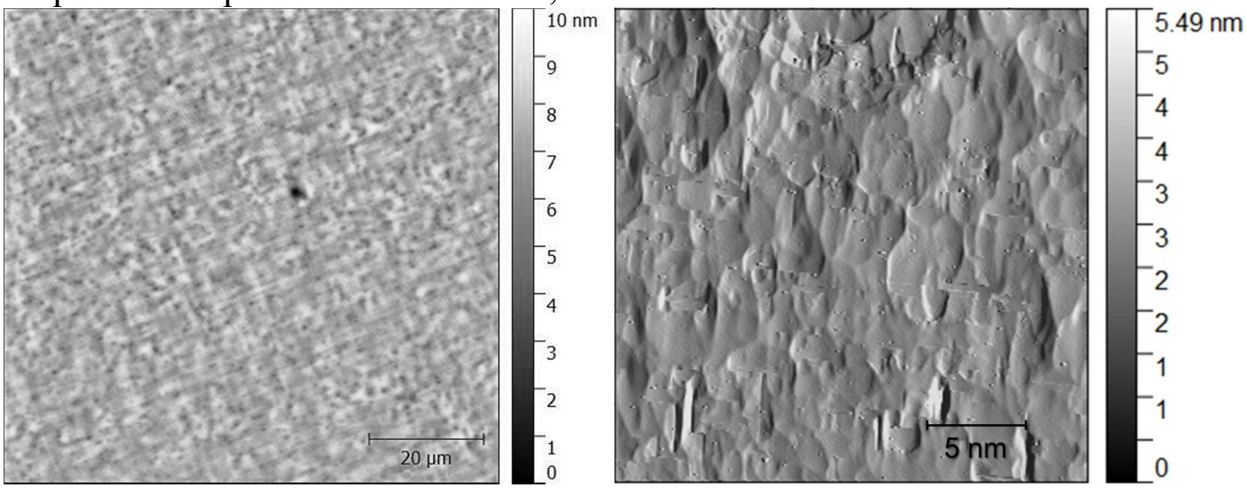
Рост структур на основе полупроводников A3B5 на кремниевых подложках является перспективным способом интеграции оптоэлектроники с кремниевой технологией[1]. Si и GaAs имеют существенные различия постоянных решетки и коэффициентов теплового расширения, в то время как германий имеет промежуточные значения для данных параметров. Поэтому Geшироко используется как буфер для выращивания структур A3B5на подложке Si.

В данной работе для эпитаксиального роста высококачественных слоев Gena кремниевых подложках использовался метод химического осаждения из газовой фазы с горячей проволокой (hot-wirechemicalvapordeposition, HWCVD). Данный метод основан на разложении газообразного соединения не на подложке кремния, а на металлической поверхности (танталаили вольфрама), нагретой до высокой температуры (1300-1500°C) и расположенной вблизи подложки. В НИФТИ впервые удалось применить данный метод для роста высококачественных слоев Ge на Si[2]. Проведенные нами исследования позволили выявить условия роста морфологически и структурно совершенных слоёв Ge (в том числе и толщиной 0,2 мкм) на Si(001) подложках. Поверхность слоев однородная, значение среднеквадратичной поверхностной шероховатости не превышает 0,8 нанометра. Электронографические исследования слоев Ge указывает на высокое структурное совершенство кристалла, что является необходимым условием для успешного применения виртуальных подложек Ge/Si(001) в качестве буферного слоя для эпитаксиального роста GaAs. Одним из основных преимуществ этого метода является то, что рост слоев Ge

проводится при низкой температуре (300-350°С) без участия плазмы.Другим преимуществом метода является наличие атомарного водорода, который является сурфактантом и обеспечивает послойный рост Ge. Целью работы является исследование структурного совершенства как слоев Ge на Si, так и слоев GaAs на виртуальных подложках Ge/Si(001).

В исследуемых в данной работе структурах рост слоев Ge проводился методом HWCVD на двухдюймовых кремниевых подложках с ориентацией (001)±0,5. После предэпитаксиальногоотжига подложек при 800°С в течение 10 минутв высоковакуумной установке, температуру подложки снижали до 350°С, нагревали танталовую полоску до 1350°С, а в камеру роста напускали моногерман GeH_4 до давления $4 \cdot 10^{-4}$ Торр, и выращивали слой Ge толщиной 0,75мкм. Кристаллическое совершенство выращиваемых слоев исследовалось методом рентгеновской дифракции. Морфология поверхности слоёв исследовалась методом атомно-силовой микроскопии.

По данным рентгеновской дифракции значение полуширины кривой качания для слоя Gecоставляет 0,043°. По данным атомно-силовой микроскопии слои Германия имели терасчатую структуру, что свидетельствует о слоевом механизме роста (рисунок 1, а). Среднеквадратичная шероховатость поверхности германия составляет 0,7 нм.



а б

Рисунок 1 – АСМ изображения поверхности а) Ge на Si(001) и б) структуры GaAs/InGaAs/GaAs на Ge/Si(001).

На полученных виртуальных подложках Ge/Si(001) методом газофазной эпитаксии из металлорганических соединений и гидридов выращивались светоизлучающие диодные структуры на основе GaAsc квантовой ямой InGaAs. Ранее было показано отсутствие антифазных доменов в активной области светоизлучающей структуры InGaAs/GaAs на подложке Si(100) без дополнительной разориентации [3]. На рисунке 2, а) показана поверхность светоизлучающей структуры. Характерно отсутствие антифазных границ, а также низкая шероховатость поверхности (rms = 0.68 нм).

Для контроля оптического качества структуры выращивались одновременно на виртуальной подложке Ge/Sii на подложке GaAs. Спектры фотолюминесценции, полученные при комнатной температуре, показаны на рисунке 2.

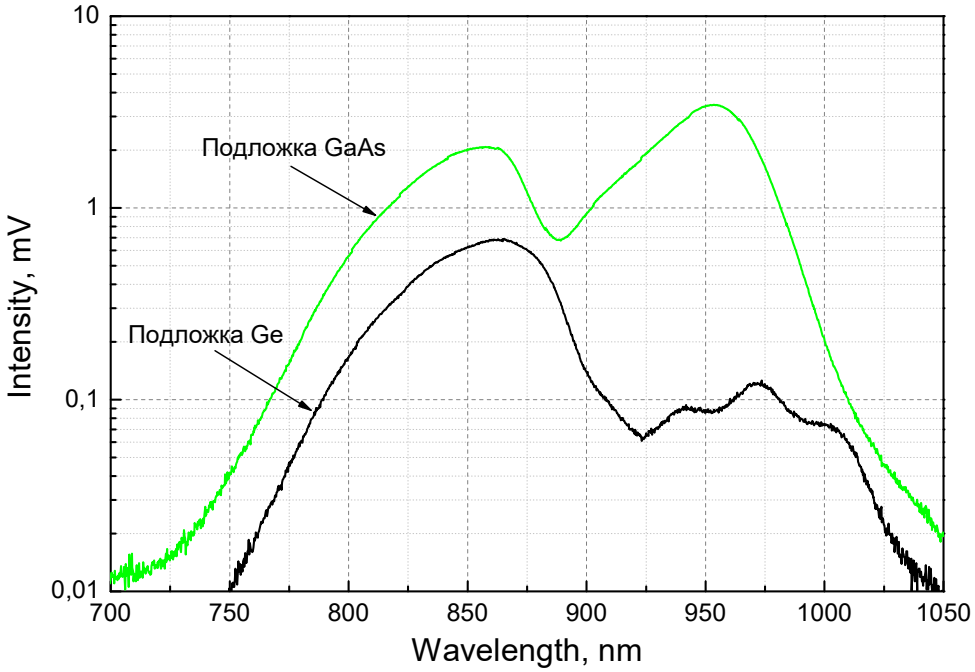


Рисунок 2 – Фотолюминесценция структуры GaAs/InGaAs/GaAs, выращенной на подложках Ge/Si(001) и GaAs.

Характерен существенный спад интенсивности ФЛ для структур на кремниевой подложки по сравнению с контрольными, что связано с большим количеством дислокаций несоответствия. Плотность дислокаций оценивалась методом наведенного тока в растровом электронном микроскопе [3,4], и в структуре на Ge/Si, спектр которой показан Рисунке 2, плотность электрически активных дефектов составляет $8 \cdot 10^7$ см$^{-2}$. Для дальнейшего улучшения структурного качества предлагается проводить циклический отжиг при росте структуры A3B5.

Работа проводилась при поддержке РФФИ (№18-32-00636мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.Б. Болховитянов, О.П. Пчеляков.Эпитаксия GaAs на кремниевых подложках современное состояние исследований и разработок // Успехи физических наук. – 2008. – Т. 178(5). – С. 459-480.
2. В.Г. Шенгуров С.А. Денисов, В.Ю. Чалков Ю.Н. Бузынин М.Н. Дроздов А.Н. Бузынин П.А. Юнин. Тонкие монокристаллические слои Ge на 2-дюймовых подложках Si // Письма в ЖТФ. – 2015. – Т. 41(1). – С. 71-78.
3. A V Rykov, M V Dorokhin, P S Vergeles, V A Kovalskiy, E B Yakimov, M V Ved', N V Baidus, A V Zdoroveyshchev, V G Shengurov, S A Denisov.Structural investigation of light-emitting A3B5 structures grown on Ge/Si(100) substrate // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. –V. 1124. – P. 022037.
4. А.В. Рыков, П.С. Вергелес, А.В. Здоровейщев, В.А. Ковальский, Н.В. Байдусь, М.В. Дорохин, В.Г. Шенгуров, С.А. Денисов. Вариации дислокационных фильтров в структурах A3B5 на подложке Ge/Si. // Материалы XXIII Международного симпозиума «Нанофизика и наноэлектроника». – 2019. - Т. 2. - С. 815-816.

TECHNIQUE OF DETERMINATION OF ELECTRICAL CONDUCTIVITY OF LAYERED SEMICONDUCTOR MATERIALS

V.V. Filippov
Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk
Southwest State University, Kursk
e-mail: *wwfilippow@mail.ru*
S.E. Lusyanin
Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk
e-mail: *luzyanin_se@mail.ru*
S.V. Mitsuk
Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk
e-mail: *directorat-iemitn@yandex.ru*

В данной работе описан оригинальный метод определения электропроводности слоистых полупроводниковых материалов. Предлагаемая методика проста в применении, не требует сложной аппаратуры, допускает применение ЭВМ и полагает изготовление минимального числа контактов на образце, которые практически не оказывают влияния на состояние его поверхности. Достоинством полученных в работе расчетных формул является то, что они не зависят от материала пленки и являются электродинамическими по своему характеру.

Ключевые слова: полупроводник, анизотропия, слоистая структура, измерение электропроводности.

Nowadays in semiconductor electronics and microelectronics the film structures possessing anisotropy and heterogeneity of physical properties have received wide circulation. One of the widest classes of materials of electronic technical equipment are layered semimagnet semiconductors. In particular, the given materials are perspective for creation of lasers on their basis, modulators of light, photodetectors and other functional devices controlled by magnetic field [1, 2]. Application of the given materials in electronics demands development of the reliable and in the same time simple methods of research of their physical properties.

In the given work the boundary problem for potential of the electric field arising at measurement of the electrical conductivity of layered semiconductors is formulated and solved. On the basis of the received analytical decision the technique of determination specific conductance of layered materials is developed. The results allow not only to supervise and measure the value of conductivity of a sample, but also to model an electric field in volume of a sample with the help of the computer.

According to the suggested technique it is necessary to put four square contacts of small area on the surface of the researched layered semiconductor sample under the circuit on fig. 1 and to make a number of measurements of voltage between them at the current transmission through a sample. In our technique electric current is originally transmitted through contacts 1, 2, and the potential difference is measured between contacts 3, 4 after that current contacts serve 1, 3, and measuring contacts are 2,4.

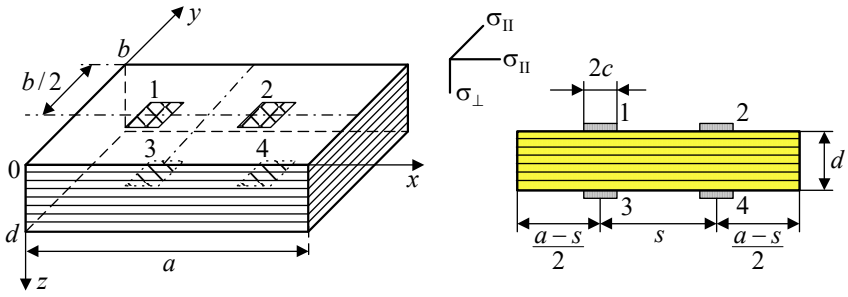


Figure 1 – The circuit of position of contacts on a researched layered sample

As is known, at probe measurements current lines of conductivity in a sample are distributed non-uniformly on section of a sample. In this connection it is necessary to calculate distribution of electric potential in a sample. Tensor of electrical conductivity in layered materials in chosen system of coordinates we shall present as

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{II} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\perp} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

where $\sigma_{II} = \langle \sigma_z \rangle$ – is the average value of electrical conductivity along axis z, $\sigma_{II} = \langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle$ – is conductivity on axes x and y [3].

According to the given diagonal aspect $\hat{\sigma}$ the equation for potential will be written down as follows

$$\sigma_{II} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sigma_{II} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \sigma_{\perp} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 . \tag{2}$$

Boundary conditions for potential follow from the requirement of equality of a normal component to zero everywhere on the surface of a sample, for the exception of the points under current contacts [4].

Omitting the full formulation and the decision of the boundary problem (taking into consideration their bulkiness), we shall present final expression for a voltage between contacts 3, 4 at course of a current I_{12}:

$$U_{3,4} = \frac{I_{12}}{\sigma_{II}} \cdot \frac{d}{a \cdot b} L_1, \tag{3}$$

$$L_1 = \frac{16 \cdot \gamma}{d} \sum_{\substack{k=1,3,5... \\ n=0,2,4...}} \left[\Theta_{nk} \frac{\sin^2(\alpha_k s/2)}{\eta_{kn} \mathrm{sh}(\gamma \eta_{kn} d)} \cdot \frac{\sin^2(\alpha_k c)}{(\alpha_k c)^2} \cdot \frac{\sin^2(\beta_n c)}{(\beta_n c)^2} \right]. \tag{4}$$

Similarly by the decision of a corresponding boundary problem it is possible to determine a potential difference between contacts 2, 4 at course of a current through electrodes 1, 3:

$$U_{2,4} = \frac{I_{13}}{\sigma_{\perp}} \cdot \frac{d}{a \cdot b} L_2, \tag{5}$$

$$L_2 = 1 + \frac{8}{\gamma \cdot d} \sum_{\substack{k=0,1,2... \\ n=0,2,4...}} \left[\Theta_{nk} \frac{\cos[\alpha_k (s+a)/2] \cos[\alpha_k (s-a)/2]}{\eta_{kn} \operatorname{cth}(\gamma \eta_{kn} d/2)} \frac{\sin^2(\alpha_k c)}{(\alpha_k c)^2} \frac{\sin^2(\beta_n c)}{(\beta_n c)^2} \right]. \quad (6)$$

In the above-stated expressions the following denotations are entered:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\sigma_{II}}{\sigma_\perp}},\ \alpha_k = \frac{\pi k}{a},\ \beta_n = \frac{\pi n}{b},\ \eta_{kn} = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_n^2},\ \Theta_{n,k} = \begin{cases} 1,\ n \neq 0,\ k \neq 0; \\ 1/2,\ n \text{ или } k = 0; \\ 0,\ n = k = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Voltage $U_{2,4}$ и $U_{3,4}$ have been calculated as a difference of the average potentials under contact platforms.

Received expressions (3) - (7) according to suggested technique are basic for definition of an electrical conductivity tensor component of layered semiconductor materials.

The essence of the suggested technique consists of the following.

1. To put contacts to a sample according to fig. 1.
2. To determine a voltage $U_{3,4}$ passing current through contacts 1, 2.
3. Passing current through contacts 1, 3 to determine voltage $U_{2,4}$.
4. To calculate the following relation from the experiment

$$Q = \frac{R_1}{R_2} = \frac{U_{3,4}/I_{12}}{U_{2,4}/I_{13}}. \quad (8)$$

5. To construct the schedule (table) of the theoretical dependence Q. It is simple to show, that

$$Q(\gamma) = \frac{U_{3,4}/I_{12}}{U_{2,4}/I_{13}} = \frac{\sigma_\perp}{\sigma_{II}} \frac{L_1}{L_2} = \frac{L_1}{\gamma^2 L_2} = Q(a,b,d,s,c,\gamma). \quad (9)$$

6. By comparison of experimental and theoretical values of Q we determine the quantity γ.
7. According to expressions (4), (6) to calculate L_1 , L_2 for received γ at known geometrical parameters of a sample and contacts.
8. We determine components of electrical conductivity tensor. According to expressions (3), (5):

$$\sigma_{II} = \frac{I_{12}}{U_{3,4}} \cdot \frac{L_1}{s \cdot d},\quad \sigma_\perp = \frac{I_{13}}{U_{2,4}} \cdot \frac{L_2}{s \cdot d}. \quad (10)$$

Or, knowing γ and σ_{II} , we receive the average value of specific electrical conductivity in a direction perpendicular to the layers of a sample $\sigma_\perp = \gamma^2 \sigma_{II}$. The advantage of the received formulas is that they do not depend on electrical conductivity of the material of a film and are electrodynamic by character.

Possible restriction of the suggested method of measurement of electrical conductivity is that for construction of theoretical dependence $Q(\gamma)$it is necessary to calculate the value of the function determined by double summation, therefore application of the given method means the use of modern computers. For the acceleration of calculations it is possible to construct preliminary table with the big pitch and to choose a band for more exact calculation of parameter $Q(\gamma)$ in it.

One of the basic advantages of the suggested method of determination of electrical conductivity is that the technique assumes manufacturing of the minimal number of contacts on a sample which practically do not influence the surface. After carrying out of measurements contacts of the small area can be easily removed from the surface of a sample, for example with the help of etchant. The usage of the so-called 'sandwich' method when each contact is rendered on ther whole surface of a sample, perpendicular to lines of a current, is connected to significant experimental costs and time. Particularly, the surface of a sample is damaged (if it is not carried out by sputtering), the opportunity of simultaneous studying of conductivity in mutually perpendicular directions on the same sample therefore anisotropy of conductivity in layered materials is incorrectly determined is excluded. The main condition of applicability of the suggested technique is obligatory presence of flat surface. The influence of transitive resistance of contacts can be excluded in case of carrying out the measurements of voltage by means of compensative method.

REFERENCE

1. Kovalyuk Z. D. [et al] Ferromagnetism of layered GaSe semiconductors intercalated with cobalt // Semiconductors. – 2012. - Volume 46, Issue 8. – P. 971–974.
2. Abdinov A. Sh. [et al] Electrical and photoelectric properties of electrochemically fabricated $SnO_2/Cd_{0.4}Zn_{0.6}S/CdTe$ solar cells // Semiconductors. – 2006. - Volume 40, Issue 12. – P. 1442–1444.
3. Litovchenko V.G. Fundamentals of physics of semiconductor layered systems. – Kiev: Naukova Dumka, 1980, 284 p.
4. Mirolyubov N.N. [et al.]. Methods for calculating electrostatic fields. - Moscow: Higher School, 1963. - 415 p.

Математические методы в экономике

АГЕНТ-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ КООПЕРАЦИОННЫХ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ ПРЕДПРИЯТИЯМИ

Н.В. Кошуняева
ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова»
e-mail: *n.koshunyaeva@narfu.ru*

Ключевые слова: агент, многоагентное моделирование, имитационное моделирование, логистика, граф, графодинамика.

Кооперационные связи между контрагентами в современной экономике являются формой взаимодействия, необходимой для развития предприятий.

Несмотря на то, что существует множество аналитических моделей кооперационных связей, транспортной задачи, моделей логистических систем, эти модели не дают четкого представления о поведении рассматриваемых систем во времени. Для построения таких моделей приходится формулировать множество допущений, что не всегда оправдано в реальной жизни. Помимо этого, аналитические модели не всегда пригодны для изучения систем в динамике, что связано с «жестким» заданием их структуры для поиска оптимального решения. Всё большее развитие сейчас получают методы имитационного моделирования. Поэтому, для исследования кооперационных связей между контрагентами двух видов будем применять агентное моделирование, как одну из разновидностей имитации. Мультиагентный подход к моделированию кооперационных связей между предприятиями отличается кардинальным образом от традиционных аналитических и численных способов оптимизации, так как основан на децентрализованном способе построения модели. Данный метод базируется на принципе самоорганизации, являющейся фундаментальным свойством живых систем, Самоорганизация позволяет живым системам сохранять устойчивость в условиях воздействия внешних дестабилизирующих факторов. Поэтому мультиагентный метод является более гибким и в большей степени адаптирован к высокой динамичности окружающей среды.

Ключевым элементом в таких моделях является агент, который представляет собой некоторую активную сущность, способную воспринимать информацию из окружающей среды, обрабатывать её, принимать решения и выполнять их.

В модели будут использованы два типа агентов. Предположим, что контрагенты первого вида – это поставщики (агенты первого типа), а контрагенты второго вида – покупатели (агенты второго типа). Каждый агент

первого и второго типов имеют свои критические параметры, в зависимости от которых они могут либо продолжать функционировать, либо прекратить своё функционирование.

Учитывая, что структура кооперационных связей не зафиксирована, а изменяется во времени, вследствие взаимодействия агентов, то изучение «жизни» такой структуры можно рассматривать с использованием графодинамики. Данный термин впервые ввел профессор М.А. Айзерман.

Структура взаимодействия агентов двух типов может быть смоделирована в виде двудольного графа, вершины которого соответствуют автономным функциональным единицам – агентам, а рёбра отображают взаимодействия между агентами первого и второго типов. Взаимодействие заключается в предоставлении поставщиками однотипного товара (услуги) покупателю. Такое взаимодействие может инициироваться между любым агентом из одной доли графа и любым – из другой доли, повторяется многократно, причем каждое последующее взаимодействие возможно лишь после завершения предыдущего.

На дискретной временной шкале выделяются моменты времени, образующие горизонт моделирования. Известен начальный момент и стандартные операции, выполняющие простейшие действия над графами. Учитывая, что бизнес всегда активен, то агенты из каждой доли могут разделяться или, наоборот, объединяться. Помимо этого, агенты могут прекратить своё функционирование в связи с конкуренцией, тогда соответствующие элементы будут удалены и графа, или же, наоборот, могут появляться новые агенты, а значит, в граф будут введены новые элементы.

Функционирование агентов приводит к изменениям состояний графа. Переходные процессы, переводящие граф из одного состояния в другое будут представлены в виде клеточного автомата, где заголовками столбцов будут являться агенты первого типа, заголовками строк – агенты второго типа, а на пересечении строк и столбцов будут распределяться мощности связей (стоимость товара) между этими агентами.

В дальнейшем исследовании предполагается реализация такой модели с использованием агентного подхода в имитационной среде моделирования. В качестве средства моделирования удобно использовать систему AnyLogic, компании XJ Technologies с встроенным языком Java на платформе Eclips, позволяющую создавать имитационные модели различных видов: дискретно-событийные, агентные модели и системую динамику. Типичными логистическими задачами, решаемыми с использованием данной системы имитационного моделирования, являются планирование и оптимизация перевозок, оптимизация логистической сети, проектирование сетей поставок, проектирование и оптимизация работы склада.

Таким образом, моделируя функционирование системы на определенном участке времени будем получать различные двудольные графы и различные состояния клеточного автомата, где будет представлена динамика системы во времени.

При моделировании системы, должны учитываться принципы работы системы кооперационных связей между предприятиями, а также должен осуществляться процесс принятия решений. При этом проведенные симуляции на основе разработанной модели позволят получить реалистичные результаты, а также сделать выводы относительно эффективности задаваемых стратегий.

Вводя в систему дополнительные типы агентов – промежуточные звенья в кооперационных связях между контрагентами-поставщиками и контрагентами-покупателями, можно совершенствовать модель. Анализ улучшенной модели также удобно производить с использованием агентных методов, позволяющих реализовывать различные стратегии взаимодействия агентов. В процессе функционирования модели определяется решение, удовлетворяющее всех участников. При этом динамика модели в полной мере отражает динамику самой системы с различными непредвиденными обстоятельствами.

Таким образом, мультиагентные технологии позволяют создавать более реалистичные модели, позволяющие принимать оптимальные управленческие решения. Агент-ориентированный подход, положенный в основу рассмотренной системы, приводит к кардинальным изменениям в организации кооперационных связей между предприятиями. При этом централизация и жесткое управление сменяются полной децентрализацией и гибкостью построенной модели. Ожидаемый результат - высокая эффективность системы и надежность в принятии управленческих решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивашкин Ю.А. Мультиагентное моделирование в имитационной системе Simplex3: учебное пособие – М.: Лаборатория знаний. – 2016. – 350 с.
2. Макаров В.Л., Бахтизин А.Р. Новый инструментарий в общественных науках – агент-ориентированные модели: общее описание и конкретные примеры // Экономика и управление. – 2009. –Номер. 12/50
3. Толуев Ю.И. Имитационное моделирование логистических сетей // Логистика и управление цепями поставок. – 2008. –Номер. 2/25
4. AnyLogic. Логистика и цепочки поставок. [электронный ресурс] Режим доступа – URL: https://www.anylogic.ru/supply-chains/

УДК 519.22

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

И.Ф. Курбыко, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
e-mail: *levizov@rambler.ru*

Работа посвящена статистическому анализу одномерных временных рядов, иллюстрирующих динамику отдельных статистических показателей развития информационного общества в России. Конечным результатом исследования является прогнозирование показателей на основе адаптивных моделей.

Ключевые слова: цифровая экономика, временной ряд, экспоненциальное сглаживание, модель прогнозирования.

В современных условиях активно развивающейся цифровой экономики важное значение приобретают научные разработки в сфере развития информационного общества в Российской Федерации. В частности, исследователей привлекают задачи социально-экономических преобразований (например, см. [1]-[2] и имеющуюся там литературу), связанных с внедрением в общественную жизнь информационных и коммуникационных технологий (ИКТ). С течением времени спектр применения таких технологий стремительно расширяется. В этой связи, в экономико-математическом моделировании весьма эффективными, особенно в целях краткосрочного прогнозирования, могут быть адаптивные методы, позволяющие учесть различную информационную ценность данных.

В настоящей работе изучается динамика группы статистических показателей $(CT0, CT1, ..., CT7)$, представленных одномерными временными рядами на основе данных [3], характеризующих применение ИКТ в России в течение 2010-2017 годов. Согласно терминологии [3] приняты следующие обозначения показателей: $CT0$ – доля внутренних затрат на научные исследования и разработки сектора ИКТ в общем объёме внутренних затрат на научные исследования и разработки, %; $CT1$ – объём инвестиций в основной капитал на оборудование для ИКТ, млн. рублей; $CT2$ – доля домашних хозяйств, имеющих доступ в сети Интернет, в общем числе домашних хозяйств, %; $CT3$ – доля организаций, получавших заказы на выпускаемые товары, работы, услуги по Интернету в общем числе обследованных организаций, %; $CT4$ – доля учреждений культуры, имевших веб-сайт в общем количестве обследованных учреждений культуры, %; $CT5$ – доля учреждений здравоохранения, использовавших интернет, в общем числе учреждений здравоохранения, %; $CT6$ – уровень цифровизации местной телефонной сети, %; $CT7$ – проникновение подвижной радиотелефонной (сотовой) связи на 100 человек населения, единиц. Таким образом, показатели $(CT0, CT1, ..., CT7)$

затрагивают различные стороны общественной жизни: экономику, науку, культуру, здравоохранение, телефонную связь.

Временные ряды, иллюстрирующие начальную динамику показателей, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Временные ряды

Год	T	$CT0_t$, %	$CT1_t$, млн. руб.	$CT2_t$, %	$CT3_t$, %	$CT4_t$, %	$CT5_t$, %	$CT6_t$, %	$CT7_t$, единиц
2010	1	1,3	170255,2	48,4	16,9	14,9	93,0	81,0	166,4
2011	2	1,5	248641,5	56,8	17,1	18,6	94,4	85,3	179,0
2012	3	2,9	293661,4	63,8	18,0	23,3	96,1	86,4	182,7
2013	4	2,2	283415,6	69,1	18,9	26,9	96,9	87,9	193,3
2014	5	2,3	292151,9	69,9	17,6	27,7	97,2	88,7	190,8
2015	6	3,7	304987,7	72,1	18,2	32,0	97,5	89,6	193,8
2016	7	3,6	284667,7	74,8	19,3	37,3	97,0	91,0	197,8
2017	8	2,5	389698,3	76,3	20,1	42,4	96,0	92,6	200,3

Целью работы является построение адаптивных моделей прогнозирования, аппроксимирующих временные ряды, соответствующих факторов $(CT0, CT1,...,CT7)$. В предположении, что динамика временного ряда может быть описана многочленом $\widetilde{VR}(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{k!} t^k$, Брауном Р.Г. и Майером Р.Ф. были получены формулы для расчёта моделей прогнозирования на основе многократного экспоненциального сглаживания $\{S_t = \alpha VR_t + \beta S_{t-1}, t = 1,2,...,T\}$ уровней исходного ряда $\{VR_t, t = 1,2,...,T\}$. Здесь α - константа сглаживания, $0 < \alpha < 1$; $\beta = (1-\alpha)$ – параметр адаптации; S_t - экспоненциальная средняя в момент времени t. Величина S_t может быть представлена в виде взвешенной суммы уровней моделируемого ряда: $S_t = \alpha \sum_{i=0}^{T-1} \beta^i VR_{t-i} + \beta^T S_0$. Таким образом, в расчёт включаются наблюдения с экспоненциально убывающим весом $(\alpha\beta^i)$ по мере их приближения к началу ряда. Например, при $\beta = 0{,}2$, вес уровня ряда VR_t в момент условного времени t будет равен $0{,}8 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}8$, вес уровня VR_{t-1} составит $0{,}8 \cdot 0{,}2^1 = 0{,}16$, а вес уровня VR_{t-2}, отвечающего более раннему наблюдению, окажется ещё меньше: $0{,}8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}032$. В практических задачах принято строить адаптивные модели порядка не выше второго.

В данной работе для прогнозирования временных рядов показателей $(CT1,...,CT7)$, отражающих развитие в виде линейной тенденции, используется модель Брауна, аппроксимирующая тренд, в виде: $\widetilde{CT}_{t+p} = \widetilde{c}_{0(t)} + \widetilde{c}_{1(t)} p$. В случае параболической тенденции прогноз на p шагов вперёд вычисляется по формуле: $\widetilde{CT}_{t+p} = \widetilde{c}_{0(t)} + \widetilde{c}_{1(t)} p + \widetilde{c}_{2(t)} p^2$. При этом коэффициенты адаптивных моделей рассчитываются через линейные комбинации экспоненциальных средних, поэтому модели учитывают свежие наблюдения так, что наиболее ценную информацию несут последние уровни ряда. Экспоненциальная средняя S_t выполняют роль фильтра, поглощая случайные колебания процесса,

представленного временным рядом. Причём её дисперсия меньше дисперсии исходного ряда. Характерно то, что, чем меньше значение константы сглаживания α, тем меньше дисперсия случайной переменной S_t. С другой стороны, с ростом α увеличивается вес последних наблюдений. Отсюда появляется проблема в выборе оптимальной величины α, в этой связи интересен алгоритм на основе трекинг-сигнала, своего рода индикатора, реагирующего на преобразования данных. Наиболее простой является модель нулевого порядка, которая построена для прогнозирования ряда $CT0_t$, не имеющего в данном случае тенденции развития. При этом выполняется однократное экспоненциальное сглаживание ряда и прогноз вычисляется по формуле: $CT0_{T+p} = \widetilde{c}_{0(T)} = S_T = S_{T-1} + \alpha(CT0_T - S_{T-1})$, $p = 1,2,....$

Таким образом, новый прогноз строится с учётом корректировки предыдущего прогноза, принимая в расчёт его ошибку $(CT0_T - S_{T-1})$, в этом и состоит сущность адаптации модели. Границы доверительного интервала прогнозируемого значения $CT0_{T+p}$ определяются формулой: $CT0_{t+p} \pm S_e \cdot t_{0,05}(T-1) \cdot \sqrt{\alpha/(\alpha-1)}$, где $S_e = \sqrt{\sum_{t=1}^{T}(CT0_t - S_t)^2/(T-1)}$; $t_{0,05}(T-1)$ – значение t-критерия Стьюдента на уровне значимости 0,05. В частности, при $\alpha = 0,9$; начальной величине $S_0 = \overline{CT0} = 2,5$; конечном значении условного времени $T = 8$ получена модель прогнозирования (на ближайшие годы) $CT0_{T+p} = \widetilde{c}_{0(T)} = 2,61$. Здесь средняя относительная ошибка сглаженных значений составляет $\varepsilon = 3,17(\%)$; средняя квадратичная ошибка: $S_e = 0,10$; доверительный интервал прогноза на ближайший период следующий: $(2,52;2,70)$. Таким образом, расчёты показали незначительное возрастание внутренних затрат на научные исследования и разработки сектора ИКТ по отношению к общему объёму внутренних затрат на исследования.

Для построения адаптивных моделей первого и второго порядка в целях прогнозирования динамики показателей $(CT1,...,CT7)$ разработан и реализован, согласно методике [4], следующий алгоритм.

1. Графический анализ данных и выбор порядка модели.
2. На основе 5-6 уровней ряда построение начальной модели методом наименьших квадратов, адекватной исходным данным по F-критерию Фишера.
3. Установка параметра α и расчёт начальных значений средних по формулам: $(SC_0^{[1]} = \widetilde{c}_{0(0)} - ((1-\alpha)/\alpha) \cdot \widetilde{c}_{1(0)}$, $SC_0^{[2]} = \widetilde{c}_{0(0)} - 2((1-\alpha)/\alpha) \cdot \widetilde{c}_{1(0)})$ для линейной модели;

$(SC_0 = \widetilde{c}_{0(0)} - ((1-\alpha)/\alpha)\widetilde{c}_{1(0)} + ((1-\alpha) \cdot (2-\alpha)/2\alpha^2) \cdot \widetilde{c}_{2(0)}$,

$SC_0^{[1]} = \widetilde{c}_{0(0)} - (2(1-\alpha)/\alpha) \cdot \widetilde{c}_{1(0)} + ((3(1-2\alpha)/\alpha^2) \cdot \widetilde{c}_{2(0)}$,

$SC_0^{[2]} = \widetilde{c}_{0(0)} - (3(1-\alpha)/\alpha) \cdot \widetilde{c}_{1(0)} + ((3(1-\alpha) \cdot (4-3\alpha))/2\alpha^2) \cdot \widetilde{c}_{2(0)})$ для параболической модели. Здесь $\widetilde{c}_{0(0)}, \widetilde{c}_{1(0)}, \widetilde{c}_{2(0)}$ – коэффициенты начальной модели в момент $t = 0$.

4. Вычисление последующих значений экспоненциальных средних для линейной модели: $SC_t = \alpha CT_t + (1-\alpha)SC_{t-1}$, $SC_t^{[1]} = \alpha SC_t^{[1]} + (1-\alpha)SC_{t-1}^{[1]}$; для

квадратичной модели: $SC_t = \alpha CT_t + (1-\alpha)SC_{t-1}$, $SC_t^{[1]} = \alpha SC_t + (1-\alpha)SC_{t-1}^{[1]}$, $SC_t^{[2]} = \alpha SC_t^{[1]} + (1-\alpha)SC_{t-1}^{[2]}$.

5. Корректировка коэффициентов моделей по рекуррентным формулам: $\widetilde{c}_{0(t)} = 2SC_t - SC_t^1$, $\widetilde{c}_{1(t)} = (\alpha/\beta)\cdot(SC_t - SC_t^{[1]})$ для линейной модели; $\widetilde{c}_{0(t)} = 3(SC_t - SC_t^{[1]} + SC_t^{[2]}$, $\widetilde{c}_{1(t)} = (\alpha/2\beta^2)\cdot((6-5\alpha)SC_t - 2(5-4\alpha)SC_t^{[1]} + (4-3\alpha)SC_t^{[2]})$, $\widetilde{c}_{2(t)} = (\alpha/\beta)^2\cdot(SC_t - 2SC_t^{[1]} + SC_t^2)$ для параболической модели.

6. Вычисление по новой модели точечного прогноза $C\widetilde{T}_{t+1}$ на один шаг вперёд и определение ошибки прогноза: $\left|CT_{t+1} - C\widetilde{T}_{t+1}\right|$.

7. В случае $t < T$, переход к следующему моменту времени и повторение шагов 4-6. Таким образом, модель последовательно корректируется по ходу получения нового уровня исходного ряда. В случае $t = T$, учтён последний уровень ряда, на выходе получаем параметры модели прогнозирования.

8. Оценка точности модели по формуле: $\varepsilon = \left(\sum_{t=1}^{T}\left|CT_t - C\widetilde{T}_t\right| / CT_t\right)\cdot 100(\%)$.

Следуя изложенному алгоритму, были рассчитаны модели для каждого временного ряда $(CT1_t,...,CT7_t)$ при различных возможных значениях $\alpha \in (0;1)$ с шагом 0,1. В интересах снижения ошибки прогноза выбраны модели с наименьшим значением $\varepsilon(\%)$. Расчёты выполнены с помощью инструментов процедур статистического пакета STADIA и Microsoft Excel. Уравнения полученных моделей, соответствующий параметр α, оценка $\varepsilon(\%)$ и прогноз показателей $(CT1,...,CT7)$ на ближайшие годы приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты моделирования

Адаптивная модель	ε, %	α	Единицы измерения	Прогноз показателей		
				2019 г.	2020 г.	2021 г.
				$p=2$	$p=3$	$p=4$
$CT0_t(p) = 2{,}61$	3,2	0,9	%	2,61	2,61	2,61
$CT1_t(p) = 361681{,}1 + 22395{,}45p$	11	0,1	млн. руб.	496472	428867,4	451263
$CT2_t(p) = 76{,}801 + 0{,}196p - 0{,}761p^2$	1,9	0,6	%	76,616	75,670	73,962
$CT3_t(p) = 19{,}817 + 0{,}452p$	3,4	0,4	%	20,722	21,174	21,626
$CT4_t(p) = 39{,}999 + 3{,}430p$	4,1	0,1	%	46,859	50,289	53,719
$CT5_t(p) = 96{,}792 + 0{,}224p$	0,9	0,4	%	97,230	97,464	97,688
$CT6_t(p) = 92{,}543 + 1{,}369p - 0{,}0039p^2$	1,2	0,6	%	95,274	96,634	97,990
$CT7_t(p) = 200{,}311 + 2{,}576p - 0{,}277p^2$	2,8	0,7	ед.	204,908	206,792	208,398

Свободный член в уравнениях моделей незначительно отличается от последнего известного уровня моделируемого ряда и характеризует в какой-то степени его трендовую составляющую, коэффициент при переменной p указывает на скорость роста показателя в ближайший период, а параметр при степени p^2 определяет ускорение в случае квадратичной модели. Графики

исходных данных и модели второго порядка, иллюстрирующие динамику пока-показателя $CT6$, представлены на рисунке 1. В дальнейшем представляет интерес верификация результатов прогнозирования с учётом поступления свежей информации по применению цифровых технологий.

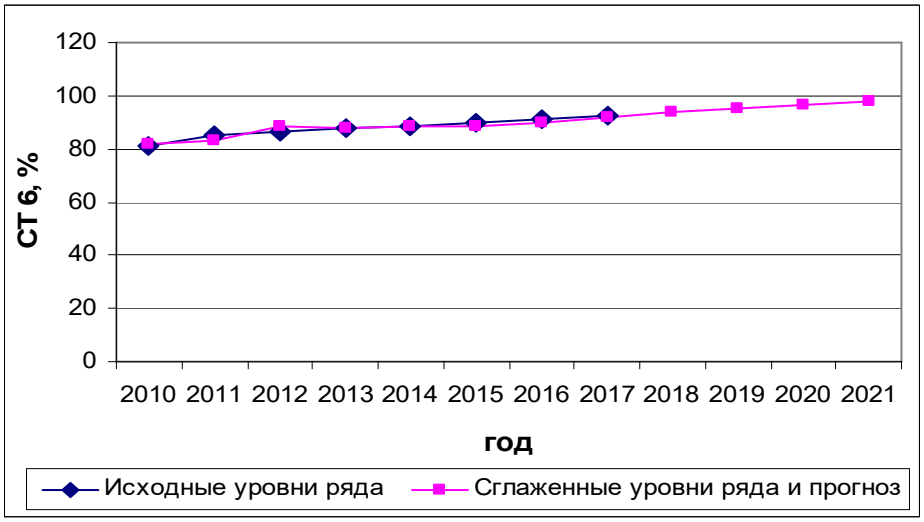


Рисунок 1 – Динамика показателя $CT6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грачев С.А., Доничев О.А., Левизов А.С. Цифровые технологии как важнейший ресурс экономического роста регионов // Региональная экономика: теория и практика. – 2019. – Т. 17. – № 5. – С. 804-817.
2. Осовин М.Н. Особенности построения российской модели цифровой экономики: проблемы и пути решения // Проблемы современной экономики. – 2018. – № 3. – С. 27-31.
3. Мониторинг развития информационного общества в Российской Федерации. Режим доступа: http://www.gks.ru/free_doc/new_site/figure/anketa1-4.html (дата обращения 27.08.2019).
4. Курбыко И.Ф., Левизов А.С., Левизов С.В. Методы прикладной статистики: учебное пособие. – Владимир: Изд-во ВлГУ. – 2018. – 184 с.

Методика преподавания математики, информатики, физики и астрономии в школе и вузе

УДК 517.956.225+517.542+517.443

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Е.С. Алексеева
Нижегородское математическое общество
e-mail: *kometarella@mail.ru*
А.Э. Рассадин
Нижегородское математическое общество
e-mail: *brat_ras@list.ru*

В работе представлен ещё один способ решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости. Также обсуждены роль и место предложенного способа в методике преподавания математики как в рамках вузовских курсов, так и в рамках различных программ повышения квалификации.

Ключевые слова: интеграл Пуассона, ряд Фурье, прямое и обратное преобразование Фурье, группа Ли, неприводимые унитарные представления группы, функция Грина.

Задача о нахождении точных решений $u(x,y)$ двумерного уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

является массовой проблемой, возникающей при решении различных стационарных задач гидро- и аэродинамики, теории упругости, теории передачи тепла, электро- и магнитостатики [1, 2], поэтому в технических вузах с расширенной программой по математике краевые задачи для уравнения (1) исследуются очень подробно [3, 4].

Изучение таких задач в курсах теории функций комплексного переменного начинается с задачи Дирихле для уравнения Лапласа, которая ставится следующим образом: найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в заданной области D, принимающее на её границе ∂D заданные значения: $u_0(\xi)=u(x(\xi),y(\xi))$, где $(x(\xi),y(\xi))$ — параметрическое уравнение границы ∂D [2-4]. При этом если от функции $u(x,y)$ требуется непрерывность в области $\overline{D}$, а функция $u_0(\xi)$ — не-

прерывна, то речь идёт о классической задаче Дирихле [2-4]. Если же функция $u_0(\xi)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода, а функция $u(x,y)$ должна быть ограничена в области D и непрерывна во всех точках непрерывности функции $u_0(\xi)$, то обсуждается обобщённая задача Дирихле [2-4].

Далее обычно изложение строится на рассмотрении двух хрестоматийных примеров — задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге единичного радиуса $D_1 = \{x^2 + y^2 < 1 \,|\, (x,y) \in R^2\}$, точное решение для которой в полярных координатах (r,φ) даётся интегралом Пуассона [2-4]:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \frac{1-r^2}{1-2\cdot r\cdot\cos(\varphi-\xi)+r^2} \cdot u_0(\xi)\cdot d\xi, \qquad (2)$$

и задачи Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости $D_2 = \{y > 0 \,|\, (x,y) \in R^2\}$, точное решение для которой выражается с помощью формулы Пуассона [2-4]:

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(\xi)\cdot d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}. \qquad (3)$$

При выводе формул (2) и (3) в руководствах [2-4] используются такие конформные отображения областей D_1 и D_2, которые переводят фиксированную точку $(x_0, y_0) \in D_{1,2}$ в начало координат единичного круга, давая тем самым возможность применить теорему о среднем для гармонических функций [2-4].

С другой стороны, хорошо известно, что формула (2) может быть получена в рамках метода разделения переменных для уравнения (1) на области D_1, а именно [1, 5]:

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} r^n \cdot (a_n \cdot \cos n\varphi + b_n \cdot \sin n\varphi), \qquad (4)$$

где коэффициенты a_0, a_n и b_n берутся из разложения в ряд Фурье граничного условия $u_0(\xi)$:

$$u_0(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} (a_n \cdot \cos n\varphi + b_n \cdot \sin n\varphi). \qquad (5)$$

Граница области D_1 является окружностью: $\partial D_1 = S^1$, которая с точки зрения теории групп Ли инвариантна относительно группы $SO(2)$ вращений евклидовой плоскости вокруг центра S^1 [6]. Далее, неприводимые унитарные представления группы $SO(2)$ имеют вид $\exp(in\varphi)$, где n — целое число, а действительная и мнимая часть этих функций образует базис разложений Фурье (4) и (5).

Эти факты указывают на то обстоятельство, что формулу (3) можно вывести, используя похожий метод, а именно, граница области D_2 — это прямая: $\partial D_2 = R^1$, инвариантная относительно сдвигов вдоль неё. Прямую R^1 можно

рассматривать как аддитивную группу вещественных чисел, неприводимые унитарные представления которой имеют вид $\exp(ikx)$ [6], следовательно, решение задачи Дирихле для верхней полуплоскости может быть построено с помощью преобразования Фурье.

Введём для решения $u(x,y)$ уравнения Лапласа его изображение по Фурье по переменной x:

$$U(k,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)\cdot\exp(-ikx)\cdot dx, \tag{6}$$

тогда уравнение (1) сведётся к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2U}{dy^2}-k^2\cdot U=0. \tag{7}$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$U(k,y)=U_1(k)\cdot\exp(-|k|y)+U_2(k)\cdot\exp(|k|y). \tag{8}$$

Из требования ограниченности функции (8) при $y\to+\infty$ получим, что $U_2(k)=0$, а функцию $U_1(k)$ определим с помощью формулы (6) из граничного условия на прямой $y=0$:

$$U_1(k)=U(k,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(x)\cdot\exp(-ikx)\cdot dx. \tag{9}$$

Таким образом, изображение по Фурье решения задачи Дирихле для верхней полуплоскости имеет вид произведения двух Фурье-образов:

$$U(k,y)=U(k,0)\cdot\exp(-|k|y), \tag{10}$$

следовательно, сама искомая функция является свёрткой обратных изображений Фурье сомножителей в формуле (10) [7].

Обратное преобразование Фурье от первого сомножителя согласно формуле (9) даёт граничное условие $u_0(x)$, а обратное преобразование Фурье от второго сомножителя в правой части формулы (10) также хорошо известно [7]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-|k|y+ikx)\cdot\frac{dk}{2\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{11}$$

Сворачивая правую часть формулы (11) с граничным условием $u_0(x)$, мы снова приходим к формуле (3).

Представленный выше вывод формулы (3) на основе преобразования Фурье не встречался нам в известной нам литературе.

Предложенный нами способ решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа на верхней полуплоскости может быть полезен при изложении этого материала на семинарах по повышению квалификации для сотрудников отечественных высокотехнологичных предприятий, потому что позволяет получить результат, не обращаясь к обширному корпусу фактов теории функций комплексного переменного, а концентрируя внимание слушателей на сути вопроса — так, как это делалось в известных курсах [8, 9].

Отметим, что в ряде руководств [1, 5] формулы (2) и (3) находятся с помощью техники функций источника:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\oint\limits_{\partial D}u_0(\xi)\cdot\frac{\partial G}{\partial n}\cdot d\xi\,, \qquad (12)$$

где G — функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1) в области D, однако изложение вывода формулы (12) также требует значительных временных затрат.

Таким образом, не только формула (2) может быть получена тремя различными способами, но и формулу (3) также можно вывести тремя различными способами. Безусловно, этот факт должен вызвать интерес у продвинутых студентов.

Благодарим к. ф.-м. н. А. О. Казакова и д. ф.-м. н. Н. Н. Шамарова за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Наука. – 1966. – 724 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – 5-е изд. испр. – М.: Наука. – 1987. – 688 с.
3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – 3-е изд. испр. – М.: Наука. – 1989. – 480 с.
4. Половинкин Е.С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного. – М.: Физматкнига. – 2003. – 208 с.
5. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – 2-е изд., стер. – М.: Наука. – 1969. – 288 с.
6. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука. – 1965. – 588 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т. 3. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк. – 1989. – 352 с.
8. Хинчин А.Я. Восемь лекций по математическому анализу. – 3-е изд.– М.-Л.: ОГИЗ. – 1948. – 260 с.
9. Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики.– М.: Наука. – 1967. – 176 с.

УДК 378

РОЛЬ ЗАКОНОВ ФИЗИКИ В АРМСПОРТЕ

А.М. Бойченко
Академия ФСО России
И.Е. Корогодин
Академия ФСО России
e-mail: *ekorogodin@yandex.ru*

Армспорт является одним из видов силовых единоборств. Эффективность приемов борьбы определяет специальная техника спортсмена. В основе двигательных задач атлета лежит правило равновесия рычага. Рычаг, как простой механизм, известен с древнейших времен. Изучение принципа его действия начинается еще в школьном курсе физики.

Ключевые слова: армрестлинг, динамическая и статическая нагрузки, момент вращения, правило равновесия рычага.

История возникновения армрестлинга (от англ. *arm* – рука, *wrestling* – борьба), как одного из видов борьбы, берет начало еще со времени зарождения спортивной деятельности человека. Проведение прямых поединков на руках отличались зрелищностью. Выиграть мог тот участник, кто не только обладал лучшими физическими данными, но и умело применял технику ведения поединка. Приемы борьбы в армспорте предполагают включение в работу рук атлета: динамическую и статическую нагрузку с участием лучезапястного, локтевого, плечевого, а также мелких суставов кисти. Вместе с тем сила человеческой руки ограничена, поэтому в технике армрестлинга активно используют возможности ее усиления за счет рабочих углов, применения момента вращения, правила равновесия рычага [1].

Из теории общей физики известно, чтобы получить выигрыш в силе целесообразно употреблять простые механизмы, к числу которых относится рычаг.

Рычаг – это твёрдое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси. Не создавая выигрыш в механической работе, данный механизм способен оказывать выигрыш в силе. Описание этого устройства встречается еще у древнегреческого математика и инженера Архимеда (III в. до н. э.). Согласно историческим документам, рычаг начали использовать еще в глубокой древности при постройке пирамид в Древнем Египте. Ученые считают, что при возведении пирамиды Хеопса с его помощью удавалось поднимать каменные плиты массой от 2,5 тонн на высоту до 147 метров.

На рисунке 1 изображен рычаг с горизонтальной осью вращения O, к концам которого (точки A и B) приложены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Плечи этих сил соответственно равны l_1 и l_2.

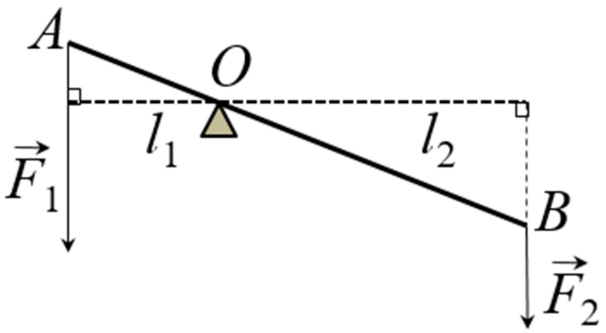


Рисунок 1 – Рычаг

Условие равновесия определяется правилом моментов:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2,$$

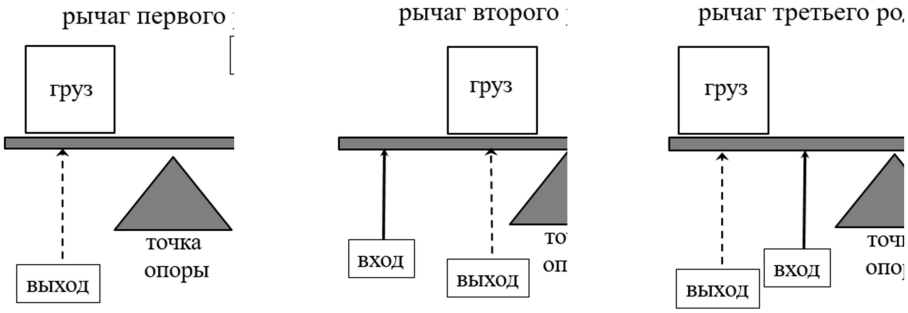
откуда правило рычага имеет вид

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Механизм рычага расположен в равновесии, если силы, действующие на него, обратно пропорциональны их плечам. Это означает, что выигрыш в силе определяется отношением расстояния от точки приложения силы (плечо l_1) к расстоянию между точкой приложения нагрузки и точки опоры (плечо l_2). С учетом взаимного положения точек опоры, приложения нагрузки и усилия рассматривают три рода рычагов.

В рычаге первого рода ("коромысло") опору помещают между точками приложения сил. Для его равновесия требуется, чтобы силы были направлены в одну сторону (рисунок 2, а).

В рычаге второго рода ("тачка") противоположно направленные силы действуют с одной стороны от опоры, но плечо l_1 больше по величине, чем плечо нагрузки l_2 (рисунок 2, б).



А Б В

Рисунок 2 – Виды рычагов

Для рычага третьего рода ("пинцет") точка приложения силы расположена между точкой опоры и точкой действия нагрузки. В нем плечо силы l_1 меньше плеча нагрузки l_2, в результате чего возникает выигрыш в скорости (рисунок 2, в).

Опорно-двигательный аппарат тела человека представляет собой сложную систему рычагов. Суставы, расположенные в соединении костей скелета,

служат точками опоры. Человек с помощью рычага получил возможность совершать перемещения, прилагая только силы мышц и вес собственного тела. При этом, согласно законам физики, количество работы мышц по выполнению механического действия остается постоянным, а выигрыш в силе приводит к проигрышу в скорости (и наоборот) [2].

Для того чтобы побеждать в поединках по армрестлингу, необходимо использовать знания об анатомическом строении руки. В армспорте наибольшее значение имеют сгибатели локтевого и лучезапястного суставов, осуществляющие работу в динамике, а также пронаторы предплечья, которые обеспечивают поворотное движение. Особенности техники спортсмена усиливают косвенную нагрузку на мышцы плечевого пояса, спины и ног. Как отмечают ведущие специалисты, успех в армрестлинге зависит не только от антропометрии атлета, но и от силы мышечных групп, повысить которую можно грамотным выбором точки опоры в движении, изменением момента вращения и пр. Лучшим примером могут служить поединки, когда в схватках со стокилограммовыми участниками мгновенно побеждают спортсмены, чей вес составляет всего 60-70 килограмм.

Являясь древнейшим видом спорта, армрестлинг был возрожден в 60-х годах XX века. Зрелищность, яркие эмоции зрителей сделали его популярным и востребованным. Вовлечение в армрестлинг все больше участников с олимпийскими устремлениями сделало армспорт из своего рода подкультуры одним из силовых видов спорта. В современном мире развитие армрестлинга контролирует Всемирная федерация армрестлинга (*WAF*), а с 1991 года – Европейская федерация армрестлинга (*EAF*).

Армрестлинг развивает силу и выносливость, улучшает скорость реакции, наращивает общую физическую работоспособность. Он способствует формированию воли и упорства, учит чувству долга и ответственности, и, таким образом, воспитывает черты, полезные при служении Отечеству. Поэтому армспорт был включен в спартакиады силовых ведомств, участие в которых выступает залогом развития готовности защищать государство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волокитин А.В., Телегин Р.С. Здоровье в движении : учебное пособие – Липецк, Липецкий государственный технический университет, 2018. – 58 с.
2. Иваницкий М.Ф. Анатомия человека (с основами динамической и спортивной морфологии): учебник для институтов физической культуры. – 14-е изд. – М. : Издательство «Спорт», Человек, 2018. – 624 с.

МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ КАК СПОСОБ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ УЧАЩИХСЯ

К.В. Бурцева, учитель математики
МБОУ – лицей № 22 имени А.П. Иванова г. Орла
e-mail: *burtsevakv@mail.ru*

Ключевые слова: мотивация, воспитание и обучение, учебная деятельность, межпредметные связи, интегрированный урок.

Назло неудачам, назло заварухам,
Чтоб ни было с вами – не падайте духом.
Бывает что носом, коленками, брюхом,
Что ж, падайте всем, но не падайте духом!

Это шутливое четверостишие иллюстрирует очень распространенную среди современных школьников проблему – они «падают духом» перед учебными предметами, и совсем не хотят учиться.

Специалисты все чаще выражают озабоченность увеличением числа школьников с трудностями в обучении. При этом имеются в виду дети с нормальным интеллектом, нормальными потенциальными возможностями, но отстающие в развитии от сверстников. Основным условием успешного обучения для учеников любого уровня подготовки является мотивация.

Существует несколько определений понятия «мотивация».

1) Мотивация – побуждение, вызывающее активность и определяющее его направленность. Мотивация ответственна за активную позицию ребёнка в обучении и личностном развитии.

2) Мотивация обучения — это общее название для процессов, методов, средств побуждения, учащихся к продуктивной познавательной деятельности, к активному освоению содержания образования.

3) Мотивация – основное средство, которое даёт возможность повысить уровень заинтересованности учащихся в учебном процессе, позволяет повысить их личный творческий потенциал.

Учебный процесс относят к сложным видам деятельности, поэтому мотивов для обучения очень много, и они могут не только проявляться отдельно в каждом человеке, но и сливаться воедино, формируя сложные мотивационные системы.

«Мотив – сложное психологическое образование, которое должен построить сам субъект» (Е.П. Ильин). Мотивы в обучении делятся на внешние и внутренние.

Внешние мотивы в обучении:

- Отметки;
- Вынужденный долг;
- Учёба ради престижа, лидерства, материального вознаграждения;
- Избегание наказания.

Внутренние мотивы в обучении:

- Удовлетворение от самой деятельности;
- Прямой результат деятельности;
- Стремление к успеху,
- Понимание необходимости для жизни;
- Учение как возможность общения.

Мотивация к учению складывается у ребенка из многих факторов: личность учителя, система подачи информации, реальное внимание педагога к деятельности каждого ученика и соответствующее его оценивание, социальная значимость его учебного поведения и т.д. Учителю важно понимать, что формировать и развивать мотивацию – не значит заложить готовые мотивы и цели в голову учащегося, а поставить его в такие условия и ситуации развертывания активности, где бы желательные мотивы и цели складывались и развивались бы с учетом прошлого опыта, индивидуальности, внутренних устремлений самого ученика. Ученику предстоит проделать трудный, но увлекательный путь познания, самосовершенствования. В плане мотивации необходимо организовать поиск того, что еще интересует учащегося и что еще может побудить его к действиям. Тогда эти элементы служат временным толчком к проявлению желательного поведения или его подкреплению. Необходимо стремиться к тому, чтобы ученик вновь поверил в себя.

Главная задача мотивации учения – организация учебной деятельности, которая максимально способствовала бы раскрытию внутреннего мотивационного потенциала личности ученика.

Мне, как учителю математики часто приходится сталкиваться с низко мотивированными учениками и слышать фразы на подобии: «Ну зачем мне эти задачи на движения, зачем они мне нужны». Я вообще считаю, что задачи начинающиеся со слов «из пункта А в пункт Б выехали автобус и автомобиль…» нужно исключить из школьных учебников, так как после этой фразы у 80% учеников полностью пропадает желание решать задачу.

Ученики не верят, что у них может получиться решить задачу или выучить параграф, ведь если до этого не получалось, то зачем пробовать снова. Учителю необходимо стремиться к тому, чтобы ученик вновь поверил в себя.

Я хотела бы выделить несколько основных причин отсутствия мотивации:

1. Низкая самооценка. Часто ученики говорят сами себе: «У меня не получится. Как не старайся, а контрольную по математике я не напишу, за задачи по физике я даже браться не буду, ни одной формулы не помню. И зачем тогда стараться?». Это достаточно распространенный тип учеников в школе. Низкая самооценка очень опасна, особенно в детском и юношеском возрасте, поскольку она задает программу поведения на всю оставшуюся жизнь.
2. Ориентация учебного материала на завтрашний день. Если в 8 классе говорить ребенку, что в 10 классе ему будет трудно писать контрольные по математике потому, что сейчас он не хочет научиться решать квадратные уравнения, то это – слова на ветер. Удаленные последствия, типа: «Не поступишь в институт, будешь дворником», для детей не страшны, они этой ситуации не пред-

ставляют, потому что в детстве кажется, что все плохое может случиться с кем угодно, только не с ним.
3. Однообразие учебного процесса, уроки абсолютно не отличающиеся один от другого. В этом случае ученики начинают скучать, а скука это один из главных врагов продуктивного обучения.
4. Отсутствие дифференцированного подхода к обучению. В классе обучаются дети с разными способностями, и в ходе обычного урока не у всех учеников есть гарантия успешно справиться с предложенной задачей.

Мотивационная сила учебной ситуации становится больше в случае, если учащимся предложены:
- значимый, интересный для них материал;
- задания, предполагающие разнообразные умения для их выполнения;
- имеется положительная обратная связь;
- есть возможность действовать самостоятельно при условии сформированности навыка самостоятельных действий у учащихся.

Учителю нужно стараться не навязывать учебных целей сверху. Совместная работа с ребенком по выработке целей и задач может оказаться значительно эффективнее. Необходимо помнить о том, что наказание за неправильное решение учебной задачи является крайней и наименее эффективной мерой, которая всегда вызывает негативные эмоции и отрицательно влияет на отношение ребенка к учебной деятельности.

Нужно стараться избегать установления временных ограничений там, где это представляется возможным, так как это не только подавляет развитие творчества, но и препятствует развитию внутренней мотивации. Необходимо следить за тем, чтобы учебные задания не только соответствовали возрасту, но имели уровень оптимальной сложности, способствовали проявлению мастерства и компетентности ребенка, регулировать уровень сложности заданий, повышая его с каждым разом. Желательно подбирать учебные задания с элементом новизны и непредсказуемости, что способствует формированию внутреннего интереса в процессе их выполнения.

Учителя школы призваны учить детей творчеству, воспитывать в каждом ребенке самостоятельную личность, владеющую инструментарием саморазвития и самосовершенствования, умеющую находить эффективные способы решения проблемы, опираясь на имеющийся жизненный опыт, осуществлять поиск нужной информации, критически мыслить, вступать в дискуссию, коммуникацию.

Педагог должен методически грамотно работать не только с «одаренными» детьми, но и с учащимися, которые в силу сложившихся социальных, экономических, экологических и прочих обстоятельств нуждаются в специальном отношении. При организации деятельности таких учащихся на уроке от учителя требуется специальная методическая подготовка, знание методов и приемов, позволяющих одновременно с обучением детей вести работу коррекции восприятия, памяти, внимания, развития речи, мыслительных операций. На каждом уроке предусматривается применение различных методов, приемов и

средств обучения. Метод обучения – это не только инструмент учителя, но и инструмент прикосновения к личности ученика. Как говорил Дьёрдь Пойа «Хороших методов существует столько, сколько существует хороших учителей».

На мой взгляд, большинство причин низкой мотивации учащихся можно устранить, используя межпредметные связи. Они позволяют внести занимательность и необычность даже в самые сложные темы. Использование межпредметных связей формирует интеллектуальные, творческие навыки. Дети учатся находить связь между различными областями человеческих знаний. Знания и умения, полученные таким образом, пригодятся не только при дальнейшем обучении, но и в конкретных жизненных ситуациях. Пробуждается познавательная активность учащихся, происходит всестороннее развитие его способностей.

Одна из задач, которую я предлагаю для решения всем своим ученикам это задача о путешествии Ломоносова в Москву. Девятнадцатилетний Михаил Ломоносов пешком преодолел путь в 1168 километров от деревни Мишанинской Архангельской области до Москвы за три недели. Ученикам предлагается вычислить какое расстояние проходил Ломоносов ежедневно, примерно рассчитать скорость и время движения. В качестве домашнего задания для учеников 6 класса, знакомых с темой масштаб, я предлагаю рассмотреть карту, найти начальный и конечный пункт движения Михаила Ломоносова, соединить прямой линией эти два населенных пункта и, используя масштаб карты вычислить расстояние по прямой. Можно сравнить полученные результаты и сделать вывод, почему получилось меньше.

Эта, казалось бы, простая межпредметная задача позволяет решить несколько проблем связанных с низкой мотивацией. Во-первых, учащиеся видят пример выдающейся личности с огромной силой воли, во вторых в задаче прослеживается связь математики, истории и географии, что позволяет ученикам уже в 6 классе увидеть связь между различными учебными предметами. В-третьих, межпредметные задачи помогают разнообразить урок и побудить в детях интерес к учёбе. В-четвертых, при выполнении подобных задач можно успешно дифференцировать домашнее задание, например слабые ученики и ученики среднего уровня могут вычислять скорость и расстояние в километрах, более сильным ученикам можно предложить самостоятельно найти информацию о старинных единицах измерения расстояния и перевести длины в другие единицы измерения.

Использование межпредметных связей при обучении уменьшает отрыв школьных знаний и умений от реальной жизни. Я считаю, что, основным средством повышения мотивации, учащихся являются межпредметные познавательные задачи. Решение таких задач приводит к успеху при условии их систематического использования учителями различных предметов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Депман И.Я., Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5-6 кл. сред. шк. – М.: Просвещение. – 1989. – 287 с.

2. Зверева Г.Ю. Развитие у школьников мотивации к учению // Молодой ученый. – 2015. – № 22. – с. 787-792.
3. Максимова В.Н. Межпредметные связи в процессе обучения. – М.: Просвещение, 1988. – 192 с.
4. Маркова А.К., Матис Т.А., Орлов А.Б. Формирование мотивации учения: Пособие – М.: Просвещение , 1983. – 192 с.
5. Полякова Е.С., Романов Ю.В. Средства историзации специальной подготовки учителя математики //Актуальные проблемы подготовки будущего учителя математики. Межвуз. сб. науч. тр. Выпуск 5. / Под ред. Ю.А. Дробышева и И.В. Дробышевой. – Калуга: Изд-во КГПУ им. К.Э. Циолковского, 2003. – с. 4 – 24.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩЕГО ЭКОНОМИСТА

Д.А. Власов, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова»
e-mail: *DAV495@gmail.com*

В рамках данной статьи выделены и охарактеризованы основные методические особенности эконометрической подготовки будущего экономиста, реализуемой в экономическом университете в рамках двух учебных дисциплин «Эконометрика: базовый уровень» и «Эконометрика: продвинутый уровень». Отмечается востребованность новых инструментальных средств, таких как *WolframAlpha* и *R*, для модернизации эконометрической подготовки, усиления её профессиональной прикладной направленности. Особое внимание уделяется проектированию эконометрической подготовки будущего экономиста, при этом в качестве одного из объектов проектирования предложена система диагностики уровня сформированности ключевых и предметных компетенций студентов.

Ключевые слова: методические особенности, информационная технология, инструментальное средство, моделирование, эконометрика, эконометрическая подготовка, бакалавр экономики.

Современные условия усложнения социально-экономических, финансовых отношений требуют пересмотра качества профессиональной подготовки будущего бакалавра и магистра экономики, в том числе в контексте эконометрической подготовки. Отметим, что эконометрическая подготовка будущего экономиста, реализуемая в Российском экономическом университете им. Г. В. Плеханова в рамках двух учебных дисциплин «*Эконометрика: базовый уровень*» (уровень бакалавриата) и «*Эконометрика: продвинутый уровень*» (уровень магистратуры) направлена на формирование у студентов научных представлений о эконометрических методах и моделях, позволяющих аналитически представлять закономерности экономической теории на основе использования математики, теории вероятностей и экономической статистики.

Ранее в работах автора рассмотрены различные компоненты методической системы прикладной математической подготовки будущего экономиста, а

также организационно-методические вопросы включения новых *Wolfram*-технологий в обучение эконометрике и проведение современных эконометрических исследований [1]. На необходимость целенаправленного формирования компетенций в области эконометрической подготовки указывают исследования [2, 3, 4], содержащие ориентиры для постановки прикладных математических дисциплин. Вопросы методически целесообразного включения новых информационных технологий и инструментальных средств в практику эконометрической подготовки студентов представлены в публикациях [5, 6]. Для развития методической системы эконометрической подготовки нам представляются востребованными исследования [7, 8, 9], отличающиеся богатой социально-экономической тематикой и содержащие передовые приемы и методы эконометрического анализа. Учитывая, что под методической системой обучения принято понимать множество взаимосвязанных компонентов, компоненты методической системы эконометрической подготовки будущего экономиста нам представляется следующими:

− «*Цель* эконометрической подготовки»,
− «*Содержание* эконометрической подготовки»,
− «*Методы* эконометрической подготовки»,
− «*Средства* эконометрической подготовки»,
− «*Формы* эконометрической подготовки»,
− «*Преподаватель* прикладных математических дисциплин»,
− «*Студент* экономического бакалавриата (магистратуры)».

С дидактической точки зрения эконометрическая подготовка расширяет представления студентов экономического бакалавриата и магистратуры о науке, позволяющей количественно исследовать закономерности на основе реальных данных. При этом, двумя центральными вопросами, отраженными в содержании учебных дисциплин «Эконометрика: базовый уровень» и «Эконометрика: продвинутый уровень», является вопрос о зависимости одной переменной от других и вопрос о прогнозировании переменной по имеющимся данным.

Остановимся на особенностях содержания эконометрической подготовки, процессе его отбора, структурирования и развертывания в рамках учебного процесса с использованием *нового электронного образовательного ресурса «Эконометрика и эконометрическое моделирование»*, внедренного на финансовом факультете РЭУ им. Г. В. Плеханова. С методической точки зрения нам представляется оправданным включение в первый раздел учебной дисциплины «Эконометрика: продвинутый уровень» вопросов, связанных с построением и исследованием линейных регрессионных моделей, уже знакомых большинству студентов экономической магистратуры. Даже на относительно простом уровне содержания возникают принципиально важные вопросы, связанные с практической реализацией получаемых результатов. В частности, считаем необходимым акцентировать внимание студентов на степени востребованности эконометрики и эконометрического моделирования, уровне пригодности получаемых результатов в практике принятия решений в различных областях хозяйственно-экономической деятельности.

В последствии необходимо реализовать переход от простейших моделей к более сложным эконометрическим моделям, характеризующимися одним или несколькими отклонениями от предпосылок классических эконометрических моделей. Так, студенты знакомятся с продвинутыми эконометрическими моделями для качественных зависимых переменных. Однако не все студенты экономической магистратуры готовы к полному погружению в теоретические основы эконометрики и эконометрического моделирования. Важной методической особенностью в этом контексте выступают новые инструментальные средства – набор вычислительных алгоритмов *WolframAlpha* и статистический пакет *R*.

Практика эконометрической подготовки свидетельствует о том, что необходимо предусмотреть модульность и вариативность её содержания. В рамках опытно-экспериментальной работы на финансовом факультете РЭУ им. Г. В. Плеханова свою эффективность подтвердила следующая логическая структура дидактических модулей.

Дидактический модуль 1. «Метод наименьших квадратов и его модификации».

Дидактический модуль 2. «Статистические свойства оценок параметров эконометрических моделей».

Дидактический модуль 3. «Основные приемы работы в инструментальном средстве *WolframAlpha*».

Дидактический модуль 4. «Парная и множественная модели в *WolframAlpha*».

Дидактический модуль 5. «Анализ эконометрической модели в *WolframAlpha*».

Дидактический модуль 6. «Информационные критерии в *WolframAlpha*».

Дидактический модуль 7. «Основные приемы работы в *R*-среде (*R*-studio)».

Дидактический модуль 8. «Понятие о фиктивных переменных».

Дидактический модуль 9. «Приемы сравнения вложенных моделей».

Дидактический модуль 10. «Приемы визуализаций, использования фиктивных переменный и прогнозирования в *R*-среде».

Дидактический модуль 11. «Проблема мультиколлинеарности».

Дидактический модуль 12. «Проблема гетероскедастичности».

Дидактический модуль 13. «Исследование проблем мультиколлинеарности и гетероскедастичности в *R*-среде».

Дидактический модуль 14. «Проблема автокорреляции».

Дидактический модуль 15. «Метод максимального правдоподобия и модели бинарного выбора».

Дидактический модуль 16. «Проблема автокорреляции и приемы построения модели бинарного выбора в *R*-среде».

Дидактический модуль 17. «Временные ряды».

Дидактический модуль 18. «Проблема эндогенности».

Дидактический модуль 19. «Исследование временных рядов и проблемы эндогенности в *R*-среде».

Дидактический модуль 20. Дополнительные вопросы эконометрики, в частности «Коллакационное моделирование» [10], «Нелинейная динамика» [11, 12].

Далее представим некоторые идеи проектирования системы диагностики уровня сформированности ключевых и предметных компетенций студентов в рамках эконометрической подготовки, связанные с исследованием [13]. Мы согласны, что недостаточное внимание к содержанию и недостаточная методическая проработка технологического блока «Диагностика» не позволяет преподавателю своевременно получать актуальную информацию об учебных успехах студентов. С целью совершенствования работы с *технологическим блоком «Диагностика»* нами предложены следующие процедуры, последовательная реализация которых позволяет сделать диагностический процесс более открытым и соответствующим принципам технологического целеполагания.

Технологическая процедура 1. «Разработка показателей оценивания».

Технологическая процедура 2. «Разработка критериев оценивания компетенций».

Технологическая процедура 3. «Разработка шкалы оценивания».

После реализации представленных трех технологических процедур необходимо осуществление коррекции структуры и содержания электронного образовательного ресурса «Эконометрика: продвинутый уровень», созданного на кафедре математических методов в экономике РЭУ им. Г. В. Плеханова для студентов экономической магистратуры. В частности, в блоке «Контроль» необходимо предусмотреть необходимое количество заданий по построению и исследованию эконометрических моделей различных социально-экономических ситуаций, разнообразить социально-экономическую тематику и автоматизировать систему первичной диагностики уровня сформированности компетенций студентов, включающую в основном, задания тестового вида. Важно отметить, что использование электронного образовательного ресурса «Эконометрика: продвинутый уровень» не исключает полного взаимодействия «Преподаватель» - «Студент» в рамках соответствующей учебной дисциплины, т.е. *электронный образовательный ресурс выступает дополнительным инструментом* достижения поставленных преподавателем дидактических целей. Более подробно остановимся на результате реализации первой технологической процедуры в рамках данной статьи.

Показатель оценивания 1. Знание приемов, алгоритмов и вычислительных методик расчетов параметров эконометрических моделей, используемых при анализе социально-экономических, финансовых и управленческих ситуаций.

Показатель оценивания 2. Умение использования информационных технологий и новых инструментальных средств для программной реализации приемов, алгоритмов и вычислительных методик расчетов параметров эконометрических моделей.

Показатель оценивания 3. Владение навыками построения и исследования социально-экономических, финансовых и управленческих ситуаций на основе положений и методов эконометрики и эконометрического моделирования. Понимание возможного результата эконометрического моделирования (его вида), а также навыки его содержательной интерпретации в терминах рассматриваемой ситуации.

В процессе работы с третьей технологической процедурой нами выделены три уровня: «*Пороговый (базовый)*», «*Продвинутый*» и «*Высокий (профессиональный)*», отличающиеся объемом, глубиной, степенью формализации и строгости усвоенного студентами экономической магистратуры учебного материала.

Таким образом, основные методические особенности эконометрической подготовки, представленные в данной статье, позволяют по-новому организовать развитие инновационных компонентов профессиональной компетентности будущих магистров экономики, вязанных с количественным обоснованием принимаемых решений на основе применения новых инструментальных средств. К таким методическим особенностям относятся:

- *техническая и инструментальная сложность содержания* обучения эконометрике и эконометрическому моделированию; многообразие социально-экономических, финансовых и управленческих ситуаций, требующих применения эконометрических методов, однако необходимость их методической адаптации к использованию в практике эконометрической подготовки будущего магистра экономики;
- *интеграция информационных и педагогических технологий* [14, 15] в практике эконометрической подготовки будущего магистра экономики; необходимость компенсационного раздела в содержании учебной дисциплины «Эконометрика: продвинутый уровень», направленного на относительное «выравнивание» уровня сформированности начальных (входных) компетенций студентов экономической магистратуры;
- *востребованность модульной структуры содержания* учебной дисциплины «Эконометрика: продвинутый уровень», способствующей реализации принципов вариативности и мобильности на трех уровнях: «Пороговый (базовый)», «Продвинутый» и «Высокий (профессиональный)», отличающихся объемом, глубиной, степенью формализации и строгости усвоенного студентами экономической магистратуры учебного материала;
- *методически целесообразное включение новых инструментальных средств* (в частности, *R*-среды, *Wolfram*-технологий) в практику эконометрической подготовки будущего магистра экономики, позволяющее реализовать её профессиональное прикладное усиление.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов Д. А. Применение Wolfram-технологий в обучении эконометрике и современных эконометрических исследованиях [Текст] / Д. А. Власов // Журнал педагогических исследований. – 2018. – Т. 3. – № 3. – С. 137-148.

2. Лихачев Г. Г. Компьютерное моделирование и математическое обеспечение экономико-социальных задач [Текст] / Г. Г. Лихачев, И. В. Сухорукова // Экономический анализ: теория и практика. – 2003. – № 5 (8). – С. 60-62.
3. Тихомиров Н. П. Методы эконометрики и многомерного статистического анализа [Текст] / Н. П. Тихомиров, Т. М. Тихомирова, О. С. Ушмаев – М.: Экономика, 2011. – 647 с.
4. Тихомирова Т. М., Проблемы обоснования мер по выходу России из демографического кризиса [Текст] / Н. П. Тихомиров, Т. М. Тихомирова // Плехановский научный бюллетень. – 2018. – № 2 (14). – С. 142-148.
5. Кожухова В. Н. Методические аспекты автоматической программной генерации экзаменационных билетов по математическим дисциплинам [Текст] / В. Н. Кожухова // Наука XXI века: актуальные направления развития. – 2019. – № 1-2. – С. 188-192.
6. Кожухова В. Н. Решение компьютерного практикума по высшей математике с использованием систем Geogebra и Wolframalpha [Текст] / В. Н. Кожухова / В сборнике: Российская наука: актуальные исследования и разработки Сборник научных статей VII Всероссийской научно-практической конференции. – Самара, 2019. – С. 32-36.
7. Сборник задач по эконометрике: Учеб. пособие для студентов вузов / Рос. экономич. акад. им. Г. В. Плеханова; Сост. Е. Ю. Дорохина и др., Под общ. ред. Н. П. Тихомирова. – М.: Экзамен, – 2003. – 224 с.
8. Тихомиров Н. П. Идентификация и управление режимом воспроизводства населения [Текст] / Н. П. Тихомиров // Социологические исследования. – 2016. – № 6 (386). – С. 41-48.
9. Эконометрика: Учебник для студентов вузов / Н. П. Тихомиров, Е. Ю. Дорохина; Рос. экономич. акад. им. Г. В. Плеханова. – М.: Экзамен, – 2003. – 510 с.
10. Бабешко Л. О. Коллокационные модели прогнозирования в финансовой сфере [Текст] / Л. О. Бабешко – М.: Экзамен, 2001. – 288 с.
11. Власов Д. А. Исследование нелинейных динамических экономических систем: Wolfram-технологии и дидактические аспекты [Текст] / Д. А. Власов // Инновационные технологии в машиностроении, образовании и экономике. – 2018. – Т. 17. – № 2 (8). – С. 10-16.
12. Петров Л. Ф. Методы нелинейной динамики как инструменты управления экономической эффективностью [Текст] / Л. Ф. Петров // Эффективное антикризисное управление. – № 2. – 2011. – С. 58-67.
13. Калинина Е. С. Интегративный подход в обучении математическим и естественнонаучным дисциплинам в вузах МЧС России [Текст] / Е. С. Калинина // Современное образование: содержание, технологии, качество. – 2018. – Т. 1. – С. 86-89.
14. Монахов В. М. Введение в теорию педагогических технологий: монография [Текст] / В. М. Монахов. – Волгоград: Перемена, 2006. – 319 с.

15. Смирнов Е. И. Технология наглядно-модельного обучения математике [Текст] / Е. И. Смирнов. – Ярославль, Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского, 1998. – 335 с.

УДК 372.853

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ПОЛУПРОВОДНИКАХ В 11 КЛАССЕ

О.М. Гасанов, к.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
e-mail: *1959oktay@mail.ru*
Х.А. Адгезалова, к.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
e-mail: *xatirafizik@mail.ru*
Дж.И. Гусейнов, к.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
e-mail: *cahangir.adpu@mail.ru*
А.М. Аллахвердиев, к.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

Был представлен перечень лабораторных работ компьютерного практикума по теме «Электрический ток в полупроводниках», которые можно применять при прохождении данной темы. Подробно представлены три лабораторные работы, которые внесут большой вклад в изучении и анализе при исследовании физических явлений в полупроводниках. Даны подробные рекомендации учителям для качественного проведения данных уроков.

Ключевые слова: мультимедийные программы, электрический ток в полупроводниках, документ – камера, интерактивная доска.

Из анализа мультимедийных программ нами были выбраны следующие программы: «Открытая физика», виртуальная физическая лаборатория «Лабораторные работы по физике для 11 класса». Учебные материалы представляют собой пакет программ, оформленный в виде CD-диска. Также в наше время очень удобно использовать лабораторные работы, предлагаемые в онлайне. Виртуальная физическая лаборатория «Лабораторные работы по физике для 11 класса» и лабораторные работы в онлайне выполнены в 3D, поэтому учащиеся могут исследовать свои установки в трех измерениях.

Рассмотрим перечень лабораторных работ компьютерного практикума по темам «Электрический ток в полупроводниках» и выясним, какой вклад в обучение школьников вносят эти работы из анализа целей.

Таблица 1 – Список лабораторных работ компьютерного практикума по теме «Электрический ток в полупроводниках»

№	Тема лабораторной работы	Цель
1.	Зависимость электропроводности металлов и полупроводников от температуры	Изучение характера зависимости сопротивления металлов и полупроводников от температуры; определение температурного коэффициент сопротивления металла и энергии активации проводимости полупроводника.
2.	Изучение основных параметров полупроводниковых диодов	Экспериментально исследовать зависимость силы тока через полупроводниковый диод, овладеть методикой измерений силы тока при прямом и обратном включении диода в электрическую цепь
3.	Снятие температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора	Изучение температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора

В рекомендуемом нами в разделе «Электрический ток в полупроводниках» представлено только три лабораторные работы. При помощи компьютерных технологий ученикам можно предложить выполнить самостоятельно и по желанию большее количество работ. Рекомендуемые работы представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Темы фронтальных лабораторных работ по разделам «Электрический ток в полупроводниках»

Традиционный практикум	Компьютерный практикум на базе «Виртуальная физическая лаборатория» в онлайн режиме
1. Проверка полупроводниковых приборов	1. Зависимость электропроводности металлов и полупроводников от температуры
2. Изучение основных параметров полупроводниковых диодов	2.Определение параметров диода поего ВАХ
3. Снятие температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора	3.Определение температурного коэффициента сопротивления полупроводникового резистора

При проведении компьютерных лабораторных работ желательно использовать документ – камеру, интерактивную доску (при их наличии).

Иногда учитель сталкивается с такой проблемой как нехватка компьютерных мест для учащихся. При помощи документ – камеры можно спроециро-

вать лабораторную работу на экран и продемонстрировать всему классу. Документ - камеры [1] можно использовать для корректировки работ учащихся. Если ученик неправильно выполняет работу, он вызывается к интерактивной доске, ученик помещает работу в поле зрения объектива камеры и объясняет решение. При этом все учащиеся класса принимают участие в обсуждении способов выполнения и оформления работы.

При использовании компьютерных лабораторных работ учитель сталкивается еще с двумя трудностями.

Во-первых, при организации регулярных занятий с группой учащихся необходимо иметь CD на всех компьютерах класса (CD-диск защищен от переписывания на жесткий диск компьютера и занимает слишком большой объем памяти).

Во-вторых, требуется значительная методическая работа для постановки конкретной исследовательской или практической задачи каждому учащемуся [2].

Первую трудность можно преодолеть с помощью локальной компьютерной сети. CD-диск устанавливается на устройство чтения: CDROM сервера компьютерного класса. И все учащиеся со своих рабочих мест обращаются к серверу и запускают программу на своих персональных компьютерах. Время обращения при этом увеличивается незначительно и практически не сказывается на темпе работы обучаемой группы. Еще один вариант - применить документ-камеру.

Безусловно, использование компьютера стимулирует мотивацию, поэтому, на наш взгляд, на начальных уроках следует выделить учащимся время на незапланированные эксперименты. Пусть они познакомятся даже с не относящимися к теме урока моделями, иначе они обязательно будут пытаться делать это при выполнении плановых лабораторных работ. После этого стоит обсудить с учащимися следующие вопросы:

- Какие модели с их точки зрения самые интересные?
- Что они узнали нового, поработав с той или иной моделью?
- Какие опыты они поставили, какие получили результаты?

Общий принцип построения предлагаемой нами методики проведения компьютерного практикума выглядел следующим образом. В начале очередного занятия формулируется тема предстоящей работы, определяется цель и выдвигается гипотез. После чего учащиеся получают разработанные автором дидактические материалы (см. приложение 2), запускают на своих персональных компьютерах виртуальную лабораторию и приступают к эксперименту.

Учащиеся самостоятельно знакомятся с теоретическим материалом работы, изложенным в соответствующей теме. На следующем этапе учащиеся задают начальные условия, следуя рекомендациям, и проводят исследование. Результаты работы заносятся в сводную таблицу и представляются в виде графиков и схем. Далее учащиеся приступают к анализу полученных результатов и оформлению вывода. В конце каждой лабораторной работы учащимся предлагается решить задачу для данной модели.

На всех деятельности учащихся по выполнению лабораторной работы учитель оказывает им необходимую консультационную поддержку [3].

Рассмотрим предлагаемую нами методику на примере программы «Открытая физика» по теме «Снятие температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора» (см. таблицу 3).

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ УРОКА:

1. Изучить явление изменения сопротивления полупроводникового резистора от температуры.
2. Построить график температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора. Пронаблюдать за ходом этой зависимости.

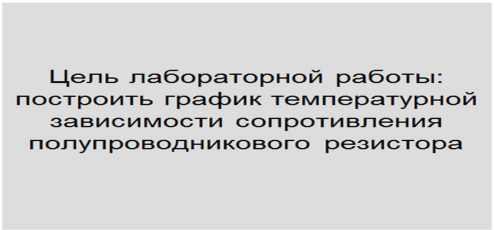
РАЗВИВАЮЩИЕ ЗАДАЧИ:

Развивать исследовательскую и творческую деятельность обучающихся, которая активизирует познавательные интересы учеников.

ВОСПИТАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ:

Добиваться последовательности и аккуратности записи результатов при экспериментальных исследованиях.

Таблица 3 – Разработка конспекта лабораторной работы

Этап 1 Организационный	
Слайд 1 **Тема лабораторной работы** Снятие температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора 	**Учитель** формулирует тему лабораторной работы **Ученики:** записывают тему в тетради.
Слайд 2 Цель лабораторной работы: построить график температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора 	**Учитель** проговаривает цель лабораторной работы **Ученики:** записывают цель в тетради.
Этап 2. Актуализация знаний	
Слайд 3	**Учитель:** Предлагает учащимся самостоятельно ответить на вопросы. Для поиска ответов разрешается использовать

1. Какие материалы можно считать полупроводниковыми? _____ 1 балл 2. Чем отличается проводимость полупроводников от проводимости металлов? _____ 1 балл 3. Какие типы проводимости существуют в полупроводниках? _____ 1 балл	конспекты уроков, а также Интернет. **Ученики:** отвечают на вопросы и записывают ответы в тетради.
Этап 3. Выполнение лабораторной работы	
Слайд 4 **Ход работы** Откройте тему «**Электрический ток в полупроводниках**», затем лабораторную работу: **построить график температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора**	**Учитель:** Откройте программу «Открытая физика 1.1». Найдите тему «Электрический ток в полупроводниках» **Ученики:** Открывают программу и находят тему лабораторной работы
Слайд 5 Откройте модель «**Построить график температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора**».	**Учитель:** откройте модель «Построить график температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора». Давайте разберем все величины данной лабораторной работы. **Ученики** называют обозначения и определяют, что это за величина. **Учитель:** обратите внимание, наверху есть значок «динамик». При нажатие «динамик» вы можете услышать теорию о температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора. При нажатии значка «текст» появиться теория о температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора. **Ученики** в любое время нажимают на значки и повторяют теорию по данной лабораторной работе.
Слайд 6	**Учитель:** Начертите таблицу. Установите t=20°C. Понаблюдайте за процессом изменения сопротивления полупроводникового резистора через каждые 20°C . Запишите данные в таблицу. Постройте график

Начертите таблицу. Установите t=20°C. Понаблюдайте за процессом изменения сопротивления полупроводникового резистора через каждые 20°C .Запишите данные в таблицу. Постройте график температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора. **Изменение температуры** / **Значение сопротивления полупроводникового сопротивления** 20°C 40°C 60°C	температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора. **Ученики** наблюдают и записывают данные в таблицу, строят график температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора и делают вывод.
Слайд 7 Нажмите кнопку «Выбор». Измените температуру t=10°C и пронаблюдайте за процессом изменения сопротивления полупроводникового резистора.	**Учитель:** теперь нажмите кнопку «Выбор» и измените температуру t=20°C. Понаблюдайте за процессом изменения сопротивления полупроводникового резистора через каждые 10°C . Запишите данные в таблицу. Постройте график температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора. **Ученики** наблюдают и записывают данные в таблицу, строят график температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора и делают вывод.
Слайд 8 Сделайте вывод о температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора _____ **1 балл** Какова температурная зависимость сопротивления полупроводникового резистора _____ **1 балл**	**Учитель:** сделайте вывод о температурной зависимости сопротивления полупроводникового резистора и ответьте на вопрос (вопрос на слайде 8). Сделайте рисунок данного опыта. **Ученики** делают вывод, что при увеличении температуры сопротивление полупроводникового резистора уменьшается**.** Объясняют явление.
Этап 4 Подведение итогов и рефлексия	
Слайд 9	**Домашнее задание:** подобрать дополнительную информацию по применению полу-

Домашнее задание: Приведите примеры по применению полупроводниковых резистров в быту и в технике	проводниковых резисторов в быту и в технике

Для того, что бы качественно провести данный урок, мы рекомендуем учителям:

- просмотреть и проделать данную лабораторную работу заранее;
- данная программа не работает, если установлена операционная система
- Linux. Необходимо проверить, чтобы была операционная система
- Microsoft Windows 98/2000/XP.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антикуз Е. В. Идеи использования документ – камеры в учебном заведении [электронный ресурс] / Е. В. Антикуз - Режим доступа: http://www.epson.ua/upload/publication/news/1095218/Epson_Creative_VI_Contest_Winners.zip
2. Лабораторные работы по физике : виртуальная физическая лаборатория [электронный ресурс] // ООО «Дрофа» – М. 2006 - Режим доступа : http://www.virtulab.net.
3. Умарова, Л. Х. Использование комплекса упражнений по физике, основанных на компьютерном модельном эксперименте : Дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 Москва, 2005. – 161 с.

УДК 377.031

ВОЗМОЖНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ В РЕШЕНИИ ПРОФЕССИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ БУДУЩИМИ ПОВАРАМИ, КОНДИТЕРАМИ

И.С. Гомбоева, к.пед.н.
ГПОУ «Приаргунский государственный колледж»
e-mail: *gomboevai@mail.ru*

В статье раскрываются возможности электронных таблиц в решении задач, связанных с профессией среднего профессионального образования «Повар, кондитер». Рассмотрены вычислительные задачи с арифметическим и геометрическим содержанием, а также задания с использованием встроенных функций MS Excel. Приведены примеры задач на построение диаграмм и графиков.

Ключевые слова: информатика, профессионально ориентированные задачи; повар, кондитер; электронная таблица.

Профессия «Повар, кондитер» среднего профессионального образования входит в список ТОП-50 наиболее востребованных на рынке труда, новых и

перспективных профессий и специальностей. Освоение профессии в колледже осуществляется параллельно с получением среднего общего образования. Причем, преподавание общеобразовательных дисциплин, в состав которых входит и информатика, выстраивается в контексте будущей профессиональной деятельности.

В ФГОС по профессии «Повар, кондитер» в качестве одной из общих компетенций обозначена компетенция ОК.09, согласно которой выпускник, освоивший образовательную программу, должен уметь использовать информационные технологии в профессиональной деятельности [2].

В процессе изучения информатики в колледже важным моментом является осознание студентами того, что использование средств информационно-коммуникационных технологий способствует более рациональному выполнению учебных, бытовых и профессиональных задач.

Рассмотрим примеры задач, связанных с профессией «Повар, кондитер», решение которых предполагает использование электронных таблиц.

Первую группу задач представляют задачи с арифметическим и геометрическим содержанием, при решении которых не требуется использование функций Excel, таких как, СУММ, КОРЕНЬ, СТЕПЕНЬ и др. Примеры таких задач можно взять из учебных пособий по математике [1,3,4].

Задачи на перевод единиц измерения:

Пример 1. Подготовьте таблицу соответствия между весом в фунтах и весом в килограммах для значений 1,2, 3 …, 40 фунтов (1 фунт = 453 г).

Пример 2. Подготовьте таблицу между соответствием объемов в литрах и $см^3$, $м^3$ для значений 1, 2, 3…50 л.

Пример 3. Подготовьте таблицу для перевода кКал (от 1 до 56) в кДж.

Пример 4. Для приготовления мармелада на 1 кг слив нужно 1,4 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить мармелад из 23 кг слив?

Пример 5. Для приготовления вишневого варенья на 1 кг. вишни нужно 1,4 кг. сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 3 кг. вишни?

Пример 6. В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 9 человек, кроме всего прочего, следует взять 0,3 фунта чернослива. Сколько граммов чернослива следует взять для пирога, рассчитанного на 12 человек? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

Пример 7. В летнем лагере на каждого участника полагается 40 г. сахара в день. В лагере 160 человек. Сколько килограммовых пачек сахара понадобится на весь лагерь на 6 дней?

Пример 8. При приготовлении рассола для томатов на 1 литр рассола требуется 60 г уксусной кислоты. Уксусная кислота продается в бутылках по 100 г. Какое наименьшее число бутылок нужно купить для приготовления 12 литров рассола?

Задачи на проценты и отношения:

Пример 1. Для очистки взято 90 кг. картофеля. Определите, какой должна быть масса отходов, если норма отходов установлена 30% массы брутто.

Пример 2. Хозяйка варит вишнёвое варенье, причём на 3 стакана вишни кладёт 2 стакана сахарного песка. Сколько песка нужно положить на 12 стаканов вишни?

Пример 3. Повару необходимо приготовить 15 порций бифштекса по 200 г в каждой. Сколько ему необходимо взять сырого мяса, если известно, что мясо при варке теряет 35% своей массы.

Пример 4. Молоко дает 25% сливок, сливки дают 20% масла. Сколько масла получается из 240 кг. молока?

Пример 5. Столовая ложка вмещает 20 г сахара, вместимость чайной ложки составляет 25% от столовой. Сколько граммов сахара окажется в стакане, если положить туда 3 столовых и 7 чайных ложек сахара?

Пример 6. В книге «Кухня для студентов» имеется рецепт гречневой каши. Для каши на 10 человек следует взять 6/10 пакета гречневой крупы. Сколько граммов крупы следует взять для каши, рассчитанной на 7 человек? Считайте, что 1 пакет равен 0,8 кг.

Пример 7. Суточная норма потребления витамина С для взрослого человека составляет 60 мг. В 100 г. зеленого горошка в среднем содержится 26 мг. Витамина С. Сколько процентов суточной нормы витамина С получил человек, выпивший 100 г. зленого горошка? Ответ округлите до целых.

Пример 8. Для фруктового напитка смешивают яблочный и виноградный сок в отношении 13:7. Какой процент в этом напитке составляет виноградный сок?

Задачи с геометрическим содержанием:

Пример 1. Печенье имеет форму ромба, диагонали которого равны 5 см. и 7 см. Верхняя часть печенья посыпана сахарной пудрой. Какова площадь посыпки?

Пример 2. Длина скатерти банкетной равна 208 см, а ее ширина –173 см. Найдите площадь скатерти.

Пример 3. За круглый стол необходимо рассадить 6 человек. Каким должен быть диаметр стола (в сантиметрах), чтобы на каждого из сидящих за столом 6 человек приходилось по 80 см. по окружности стола (принимаем $\pi \approx 3$).

Пример 4. Торт имеет форму цилиндра. Известна высота торта, радиус окружности основания. Его необходимо покрыть шоколадной глазурью (сверху и сбоку). Какова площадь покрытия поверхности торта?

Пример 5. Пирожное имеет форму шара, радиус которого равен 5 см. Его необходимо покрыть шоколадной глазурью. Какова площадь покрытия поверхности пирожного?

Пример 6. Какова должна быть высота цилиндрической кастрюли с диаметром дна 26 см, чтобы в ней можно было приготовить 0,75 л. плодово-ягодного киселя (ответ округлите до сотых).

Пример 7. Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка в полтора раза ниже второй, а вторая вдвое шире первой. Во сколько раз объем второй кружки больше объема первой?

Пример 8. Мякоть вишни окружает косточку толщиной, равной диаметру косточки. Считая шарообразной форму вишни и косточки, найдите отношение объема мякоти к объему косточки.

Вторая группа задач включает задачи, которые решаются с использованием функций Excel.

Задачи на нахождение суммы значений в диапазоне ячеек (функция СУММ):

Пример 1. В таблице представлена информация о количестве и цене оборудования кафе «Блинная». Оформите лист для нахождения общей стоимости всего оборудования (таблица 1).

Таблица 1 – Стоимость оборудования кафе «Блинная»

Наименование оборудования	Количество единиц, шт.	Цена за единицу, руб.	Итого, цена, руб.
Основное оборудование			
Холодильник	2	30000	
Кондиционер	2	27000	
Блинница	6	2400	
Миксер	2	1500	
Чайник	2	900	
Микроволновая печь	2	4500	
Плита	3	2000	
		Итого	

Пример 2. Известны данные о количестве реализованных и отпущенных изделиях кухни по ценам продажи за наличный расчет. Определите: 1) общее количество реализованных изделий; 2) общую сумму, полученную от продажи изделий (таблица 2).

Таблица 2 – Изделия кухни

Готовое изделие	Цена продажи, р. к.	Количество, шт.	Сумма, р. к.
Салат «Столичный»	110	10	
Рыба заливная с гарниром	330	10	
Борщ с капустой и картофелем	210	13	
Котлеты с картофельным пюре и сметанным соусом	320	7	
Рыба, жаренная на вертеле	300	10	
Кисель из кураги	20	13	
		Итого	

Пример 3. В таблице приведены данные о количестве булок хлеба, испеченных в первом квартале 2019 года пекарнями города (таблица 3).

Таблица 3 – Отчет о производстве хлеба пекарнями города

Хлебопекарня	Январь	Февраль	Март
«Домашняя выпечка»	3100	2800	3100
«Колос»	3700	3000	3650
«Лакомка»	3000	2700	3000
«Свой хлеб»	4000	3000	4100
«Хлебница»	3800	3100	3700

Определите: 1) общее число булок хлеба, испеченных на каждой пекарне; 2) общее число булок хлеба, испеченных за каждый месяц; 3) общее число булок хлеба, испеченных за все три месяца.

Подсчет количества числе в диапазоне ячеек (функции СЧЕТ, СЧЕТЕСЛИ):

Пример 1. На листе представлена информация о количестве реализованных изделий кухни работникам некоторой организации за день. В столбце С указывается количество блюд, либо символ «–». Определите количество блюд, реализованных работникам организации за день (таблица 4).

Таблица 4 – Информация о количестве реализованных изделий кухни

	A	B	C
1	№ п/п	Готовое изделие	Количество, шт.
2	1	Салат «Столичный»	-
3	2	Рыба заливная с гарниром	-
4	3	Борщ с капустой и картофелем	3
5	4	Котлеты с картофельным пюре и сметанным соусом	3
6	5	Рыба, жаренная на вертеле	-
7	6	Кисель из кураги	3

Пример 2. На листе представлен гигиенический план кафе. Определите количество областей, в которых очистка проводится «Ежедневно» (таблица 5).

Таблица 5 – Гигиенический план кафе

Область применения	Средство очистки	Периодичность очистки
Мытье мясных холодильников	Domestos	Ежедневно
Мытье посуды	Sunlight	По мере необходимости
Чистка плит, фритюрниц, грилей	Cif, Sunlight	Ежедневно
Дезинфекция столов, стульев	Domestos	По мере необходимости, не реже 2 раз в день
Чистка металлических поверхностей, разделочных столов	Cif	То же
Мытье полов, стен	Domestos	Ежедневно
Чистка и дезинфекция туалетных, ванных комнат и т.д.	Domestos	Не реже 3 раз в день
Стирка салфеток, скатертей, рабочей одежды и т.д.	OMO	По мере необходимости

Нахождение максимального, минимального и среднего значения в диапазоне ячеек (функции МАКС, МИН, СРЗНАЧ):

Пример 1. На листе представлены сведения о калорийности бобовых (таблица 6).

Таблица 6 – Калорийность бобовых

Продукт	**Ккал в 100 гр.**
Бобы	58
Горох лущенный (зерно)	323
Горох цельный (стручки)	303
Соя	395
Фасоль	309
Чечевица	310

Определите продукт с самой высокой и самой низкой калорийностью.

Пример 2. В таблице представлены сведения о содержании аскорбиновой кислоты в некоторых видах плодов и ягод (таблица 7).

Таблица 7 – Содержание аскорбиновой кислоты в плодах и ягодах

Виды плодов и ягод	**Содержание аскорбиновой кислоты, мг%**
Абрикосы	7,0
Виноград	3,0
Вишня	15,0
Груша	4,0
Земляника (садовая)	60,0
Крыжовник	50,0
Малина	30,0
Персики	10,0
Слива (садовая)	5,0
Смородина (черная)	300,0
Яблоки	7,0
Инжир	2,0

Какие из перечисленных плодов и ягод имеют самое высокое и самое низкое содержание аскорбиновой кислоты?

Пример 3. В таблице содержатся данные о количестве баллов, набранных участниками конкурса поваров по каждому критерию (используется десятибалльная система оценивания). Определите средний балл, набранный каждым участником (таблица 8).

Таблица 8 – Конкурс поваров

Номер участника	Критерии					Средний балл
	Ингредиенты	Мастерство	Натуральность	Эстетика	Идейное содержание	
1	10	10	9	9	9	
2	9	10	9	8	7	
3	10	8	9	8	10	
4	9	9	8	9	8	
5	9	10	7	10	10	
6	8	9	10	7	9	
7	10	10	10	10	10	

8	10	10	10	10	9	
9	10	9	10	8	10	
10	8	9	9	10	10	

Задачи с данными типа «Время»:

Пример 1. Повар поставил в духовку пиццу в 12 ч. 34 мин., а вынул в 12 ч. 54 мин. Какое количество времени готовилась пицца?

Пример 2. Имеются две заявки на аренду банкетного зала ресторана. Первая – на 09.06.2017 г., вторая – на 21.07.2017 г. Определите количество дней между событиями.

Пример 3. В конкурсе поварского искусства проводились замеры времени на выполнение одной операции (ручная нарезка овощей) участников соревнования. Данные представлены в таблице (таблица 9):

Таблица 9 – Конкурс поварского искусства

Конкурсант	Начало	Завершение
Медведев О.А.	10.00.00	10.03.15
Ежов А.Г.	10.00.00	10.04.00
Зайцева И.А.	10.00.00	10.03.16
Куницына К.Д.	10.00.00	10.03.55
Суслов В.Л.	10.00.00	10.04.45

Вычислите время выполнения операции каждым конкурсантом.

В третью группу заданий входят задачи, связанные с построением диаграмм и графиков.

Пример 1. Составьте таблицу «Рацион питания спортсмена». Наименование столбцов: Вид спорта, Белки, Жиры, Углеводы. Заполните таблицу не менее 10 записями. Постройте диаграмму, показывающую количество белков, жиров и углеводов, необходимых спортсменам, занимающимся конкретным видом спорта. По диаграмме определите, занятие каким видом спорта требует наибольшего и наименьшего количества белков, жиров и углеводов в рационе питания спортсмена.

Пример 2. Заполните таблицу (таблица 10):

Таблица 10 – Таблица значений

	A	B
1	**X**	**Y**
2	4	-2
3	4	5
4	6	6
5	7	7
6	7	9
7	5	11
8	-5	11
9	-7	9
10	-7	7
11	-6	6
12	-4	5
13	-4	-2
14	4	-2

По данным таблицы постройте рисунок вида (рисунок 1):

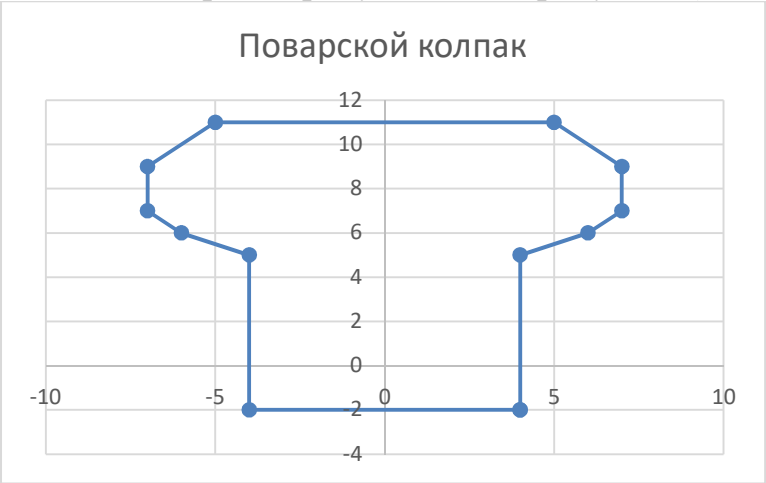


Рисунок 1 – Результат построения по таблице значений

Примечание: используйте тип диаграммы: точечная с прямыми отрезками.

Четвертая группа задач – задачи на работу со списками (сортировка и фильтрация данных):

Пример 1. На листе представлены данные о восьми видах плодов и ягод (таблица 11).

Таблица 11 – Плоды и ягоды

	A	B	C
	Виды плодов и ягод	**Содержание аскорбиновой кислоты, мг%**	**Содержание каротина (провитамина А), мг%**
	Абрикосы	7,0	1,95
	Груша	4,0	0,08
	Земляника (садовая)	60,0	0,1
	Малина	30,0	0,1
	Персики	10,0	1,1
	Слива (садовая)	5,0	0,22
	Смородина (черная)	300,0	0,32
	Яблоки	7,0	0,06

Отсортируйте данные:

а) по названию плодов и ягод (по возрастанию);

б) по названию плодов и ягод (по убыванию);

в) по содержанию аскорбиновой кислоты (по возрастанию);

г) по содержанию каротина (по убыванию).

Каждое задание выполните на отдельном листе одной рабочей книги.

Проведите фильтрацию данных, отобразив на экране, только те виды плодов и ягод, которые растут в вашем регионе.

Итак, электронные таблицы обладают достаточно большими возможностями по решению задач, связанных с профессией повар, кондитер и являются наглядным примером использования средств информационных технологий в будущей профессиональной деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коннова Е.Г. Математика. ЕГЭ-2015. Экспресс-подготовка: задания с кратким ответом. Все задания и методы их решения. – Ростов-на-Дону: Легион, 2014. – 384 с.
2. Приказ Министерства образования и науки РФ от 9 декабря 2016 г. № 1569 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по профессии 43.01.09 Повар, кондитер» // СПС Консультант Плюс[Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_210509/
3. Семенов А.Л. ЕГЭ: 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы В. – М.: Издательство «Экзамен», 2012. – 543 с.
4. Ященко И.В., Высоцкий И.Р. ЕГЭ-2014: Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий. – М.: АСТ: Астрель, 2014. – 123 с.

УДК 536.1

ВЛАЖНОСТНЫЙ РЕЖИМ ПОМЕЩЕНИЙ В ПРОГРАММЕ ФИЗИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ СТУДЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Д.В. Елаховский, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»
e-mail: *elahovsky@mail.ru*

Влажностный режим зданий различного назначения – важнейший фактор, характеризующий их эксплуатационные свойства, ибо он не только связан с теплотехническими характеристиками, но и оказывает большое влияние на долговечность ограждающих конструкций. С повышением влажности строительных материалов увеличивается коэффициент теплопроводности и, следовательно, влажные ограждающие конструкции обладают более низкими теплотехническими свойствами по сравнению с сухими. Изменение влажности строительных материалов сопровождается изменением объема, что приводит к расшатыванию их структуры и снижению долговечности конструкций в целом. Еще более существенное снижение долговечности увлажненных конструкций происходит при смене знака температуры воздуха. В этом случае происходит увеличение объема воды, находящейся в порах материала, на 9 %. Вода в порах не имеет возможности свободно расширяться при переходе в твердую фазу или перемещаться в теплую зону, поэтому в материале возникают напряжения, приводящие к разрушению. Кроме того, повышенная влажность ограждений оказывает влияние на влажностный режим воздушной среды в помещении, что является нежелательным с гигиенической точки зрения. Указанная проблематика не находит своего отражения в учебных планах строительных факультетов университета, аналогичная ситуация с рекомендованной физической литературой. В этой связи представляется полезным знакомство студентов с основными

аспектами формирования влажностной среды помещений, что будет способствовать повышению мотивационной составляющей физического образования в свете предполагаемой профессиональной деятельности.

Можно утверждать, что формирование влажностного режима помещений (а точнее сказать, температурно-влажностного режима, учитывая важную роль тепловых процессов) связано с «круговоротом воды в конкретном здании». Это связано с тем, что с одной стороны вода проникает во внутренние помещения с последующим испарением, а с другой – за счет искусственной вентиляции и естественной инфильтрации покидает здание.

Вода в жидком состоянии проникает различными путями внутрь зданий с последующим выделением на элементах конструкций, среди которых наиболее важными являются[1]:

- строительная влага в процессе строительства, которая выделяется на внутренних поверхностях, что приводит к высокой влажности воздуха внутри помещения и необходимости предварительного высушивания.
- метеорологическая влага на внешних поверхностях здания благодаря атмосферным осадкам (дождь, снег, град, роса). Для устранения ее последующего проникновения внутрь помещения через элементы ограждений применяются различные облицовочные материалы, не пропускающие влагу.
- грунтовая влага за счет капиллярного эффекта. Его устранение осуществляется использованием слоев гидроизоляционного материала.
- эксплуатационная влага вносится в зданиях с мокрыми производственными процессами, устранение которой требует специальных мер.

Наличие в атмосфере помещений паров воды (влажность воздуха) связано с испарением жидкости. Данный процесс возникает тогда, когда кинетическая энергия поверхностных молекул превышает так называемую скрытую теплоту. Отнесенная к одному молю воды, эта величина составляет ~$4\cdot10^4$ Дж/моль, что в 15 раз больше энергии молекул при комнатной температуре. Однако вследствие хаотичности теплового движения молекул воды всегда имеется некоторая доля молекул, обладающих энергией выше среднего значения, обеспечивающей возможность их перехода в газовую фазу. Для количественной оценки влажности воздуха используется масса водяного пара, находящегося в единице объема ($m_{\text{п}}$), или парциальное давление водяных паров (P_n). Эти величины называются абсолютной влажностью воздуха. Можно связать массовую характеристику влажности с парциальным давлением паров:

$$m_n = \frac{1.058 \cdot P_n}{1 + \dfrac{t}{273}} \qquad (1)$$

Кроме абсолютных характеристик влажности воздуха используется также и относительная величина, называемая относительной влажностью**:**

$$\varphi = \frac{m_n}{m_{n.нас}} 100 = \frac{P_n}{P_{нас}} 100 \qquad (2)$$

где m_n и P_n – характеристики абсолютной влажности воздуха при данной температуре, а $m_{\text{п.нас}}$ и $P_{\text{п.нас}}$–те же значения, соответствующие насыщенному пару

при той же температуре, которая в данной ситуации называется точкой росы. Конденсация влаги из воздуха может происходить не только на поверхностях ограждающих конструкциях, но и в толще самого ограждения.

Оценки показывают, что основным механизмом перемещения влаги в виде водяного пара внутри ограждения является наличие диффузионного потока от внутренней его стороны к наружной. Его возникновение связано с разностью парциальных давлений водяного пара внутри и вне помещения, особенно при наличии существенной разности температур в указанных областях. Поэтому в зимние время в период отопительного сезона наружное ограждение естественным образом разделяет воздушные среды с одинаковым атмосферным давлением, но разными парциальными давлениями водяного пара. В процессе диффузии водяного пара возможна ситуация, когда его температура в произвольном слое ограждения становится ниже точки росы, что приводит к конденсации пара и, соответственно, к увлажнению материала ограждения. В соответствии с законом диффузии (закон Фика), плотность диффузионного потока через ограждение j_m (масса примеси, диффундированной за единицу времени через единицу площади) пропорциональна градиенту концентрации и направлена в сторону уменьшения последней.

$$j_m = -D\frac{\Delta G}{d} \tag{3}$$

где D – коэффициент диффузии, d – толщина слоя, G –массовая концентрация (масса m водяного пара в объеме V. Массовая концентрация G = m/V в соответствии с уравнением Менделеева – Клапейрона пропорциональна парциальному давлению водяного пар. Если $P_в$ – парциальное давление пара внутри, а $P_н$ - с наружи помещения, то

$$j_m = \mu\frac{P_в - P_н}{d} = \mu\frac{\Delta P}{d} \tag{4}$$

где μ - коэффициент паропроницаемости материала. Он зависит от физических свойств данного материала и характеризует эффективность реализации диффузионного потока водяного пара. Физический смысл связан с количеством водяного пара, проходящего через 1 м^2 сечения материала толщиной 1 метр за 1 час при разности парциальных давлений водяного пара на его концах, равной 1 Па. Единица измерения коэффициента паропроницаемости – мг/Па·м·ч. Коэффициент паропроницаемости уменьшается с ростом плотности материала и со снижением влажности воздуха и растет при повышении температуры. Для деревянных ограждений имеет место зависимость μ от направления диффузионного потока. Оконное стекло и металлы являются паронепроницаемыми, воздух практически не сопротивляется проникновению пара сквозь свою толщу. Еще одной характеристикой материала с точки зрения потока водяного пара является сопротивление паропроницаемости:

$$R = d/\mu$$

Прилегающий к внутренней и наружной поверхностям ограждения воздух также оказывает сопротивление паропроницанию. Это так называемое сопротивление влагообмену, аналогичное сопротивлениям тепловосприятию и теплоотдаче, однако его численное значение позволяет пренебречь влиянием

этого параметра при практических расчетах. Также принимается равным нулю и сопротивление паропроницанию воздушных прослоек.

В общем случае для диффузии водяного пара через ограждение для одномерного случая можно записать уравнение, аналогичное уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\mu}{\beta\rho}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tag{5}$$

где β – удельная пароемкость материала с плотностью ρ, соответствующая массе водяного пара, проходящей через 1 кг вещества при разности парциальных давлений на его границах в 1 Па. Зависимость β от температуры и влажности затрудняет использование аналитических методов решения данного дифференциального уравнения, поэтому ограничимся стационарным режимом паропроницания, предполагающий постоянство влажностных характеристик материала ограждения. В этом случае $\frac{\partial P}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$, и поэтому распределение давления водяного пара по толщине ограждения однородного материала является линейным.

Рассмотрим многослойную плиту здания с известными геометрическими размерами слоев и величинами коэффициентов паропроницания материала, а также заданными значениями температуры внутреннего и наружного воздуха. Если предположить постоянство парциального давления водяного пара внутри помещения ($P_в$) и вне его ($P_н$), то в каждый момент времени распределение пара внутри ограждения можно считать стационарным. Если приравнять плотности диффузионного потока в каждом слое, то в результате получим, что плотность диффузионного потока j_nравна:

$$j_n = \frac{P_в - P_н}{R} \tag{6}$$

где $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$ - сумма всех сопротивлений паропроницаемостиR_iотдельных слоев.

На каждом участке парциальное давление пара изменяется линейно, а его изменение в пределах каждой зоны равно:

$$\Delta P_i = \frac{P_i}{R}(P_в - P_н) \tag{7}$$

Конкретная величина давления пара P_x в произвольной точке x ограждения равна

$$P_x = P_в - \frac{P_в - P_н}{R} P_x \tag{8}$$

Для получения абсолютных значений P_i на границах участков может быть применен графический метод, аналогичный используемому для определения температур *в многослойной плите* [2]. Необходимо также отметить, что приведенные формулы справедливы только при отсутствии конденсации пара внутри ограждения (или для тех слоев, где конденсации нет).

Рассмотрим теперь вопрос о возможности конденсации пара внутри ограждения, так как это влияет на его долговечность и на формирование тепловой среды помещений. Для этого сравним значения давления водяного ра P_x и давления насыщенного пара $P_{хнас}$ в зависимости от координатых внутри ограждения. Первую зависимость определим по ранее полученной формуле (8), она представляет собой ломаную линию. Для построения второй зависимости $P_{хнас}$ сначала найдем температуры в каждом слоев соответствии с методом, изложенным в [2], а затем, используя найденные значения температур, определим соответствующие им значения$P_{хнас}$. Еслиначиная с некоторого расстояния x от внутренней стенки здания давление пара становится больше давления насыщенного пара при той же температуре, то вся последующая часть ограждения будет подверждена конденсационному процессу и, соответственно, увлажнению. Еще на этапе проектирования зданий различного предназначения необходим обоснованный выбор конструктивных элементов ограждений, материал которых обладает необходимыми геометрическими, теплофизическими и влажностными характеристиками, а также порядка расположения отдельных слоев, обеспечивающих отсутствие увлажнения.

Расчет на конденсацию влаги в ограждении удобно делать графически. Для этого нужно построить линии изменения конкретных значений давлений водяного пара P_x внутри ограждения и давлений насыщенного пара $P_{хнас}$ и сопоставить их друг другом. Если они не пересекаются (то есть если фик P_x всегда ниже, чем график $P_{хнас}$), то конденсация отсутствует, если же график P_x пересекает график $P_{хнас}$, то конденсация водяного пара в ограждении возможна.

Рассмотрим влияние расположения слоев ограждения, обеспечивающего отсутствие его увлажнения [1]. Рассмотрим простейшую модель ограждения, представленного в виде двух слоев (1и 2).Известны геометрические размеры слоев d_1и d_2(предположим, что $d_1 > d_2$), коэффициенты теплопроводности материалов слоев $\lambda_1 > \lambda_2$ и коэффициенты паропроницаемости, при этом $\mu_1 < \mu_2$.

Таким образом, слой 1 обладает большим сопротивлением паропроницаемостии пониженным термическим сопротивлением. Пусть слой 1 образует внутреннюю стеку ограждения. В соответствии с указанными параметрами слоев, в первом слое происходит резкое падение давления пара по толщине и сравнительно медленное падение температуры. Такое поведение температуры в указанном слое обеспечит сравнительно медленный спад давления насыщенного пара. В результате к концу этого слоя относительная влажность в порах может стать даже немного ниже, чем внутри помещения и большая часть стены будет соответствовать теплому состоянию.

Если изменить расположение слоев, то реальная картина существенно изменится. При тех же диффузионных и тепловых потоках, что и в первом случае, линия зависимости парциального давления водяного параP_xподнимается, а линии давления насыщенного пара $P_{хнас}$ и линия температуры t(x) понижаются. В результате может оказаться, что начиная с некоторого значения парциальных

давлений станут больше соответствующих величин давлений насыщенного пара, что приведет к конденсация водяного пара и увлажнению стены. Если предварительный расчет подтверждает возможность такой конденсации, то следует добавить слой (или увеличить его толщину) пароизоляционного материала. Из приведенного примера также следует целесообразность расположения слоев в порядке возрастания значения паропроницаемости от внутренней стороны к наружной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тодес О.М. Курс лекций и задания по строительной физике. Ленинград, 1972.
2. Елаховский Д.В. Основы теплофизики. – учебное пособие. Петрозавод. гос. ун-т. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГу, 2018. – 114с.

ЗНАКОМСТВО СТУДЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ С ЛУЧИСТЫМ ТЕПЛООБМЕННЫМ ПРОЦЕССОМ

Д.В. Елаховский, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»
e-mail: *elahovsky@mail.ru*

Теплообменные процессы играют важную роль в строительной индустрии, учитывая их влияние на формирование условий жизнедеятельности людей и долговечность строительных конструкций. Возникновение теплопроводности и конвекции предполагает наличие среды, обеспечивающей тепловой контакт. При этом в случае теплопроводности указанная среда может находиться в любом агрегатном состоянии в отличие от конвективных процессов, реализуемых только при наличие жидкой и газообразной фазы. Указанные виды теплообмена в рамках физического образования студентов строительной специальности обсуждались как в рамках конференций [1], так и в режиме журнальных статей [2]. Рассмотрим такую модельную ситуации, когда твердотельный объект (в рамках рассматриваемых явлений именно такие объекты наиболее актуальны) с определенной температурой T °К в условиях высокого вакуума соседствует с другим предметом, температура которого в начальный момент времени равна нулю. Соответствующая аппаратура позволяет фиксировать температуры указанных тел в последующие моменты времени. Указанные вакуумные условия модельного эксперимента исключают влияние теплопроводности и конвекции на характер изменения температур тел, а нулевая температура одного из них устраняет влияние (хотя бы в течение некоторого времени) на температурные характеристики изначально нагретого тела. Температурные измерения показывают, что температура этого тела со временем уменьшается, а температура изначально не нагретого тела наоборот растет. Одновременно использование специальных приборов, например, радиометров, обнаруживает в пространстве энергетические потоки, генерируемые нагретым телом. Внутренняя энергия тела, связанная с тепловым движением частиц, образующих твердое

тело, зависит от температуры. В процессе теплового движения частиц вещества (колебание ионов кристаллической решетки, движение свободных электронов) возникают различного вида столкновения частиц, переводящие их в возбужденные состояния с последующей генерацией электромагнитных волн. Таким образом, возникновение энергетического потока вблизи нагретого объекта связано с уменьшением его внутренней энергии, и, как следствие, уменьшение его температуры. Этот энергетический поток получил название теплового излучения.

В рамках традиционного курса общей физики и в рекомендованной литературе практические аспекты излучательного теплообменного механизма, как правило, отсутствуют, поэтому знакомство с данной проблематикой представляется полезной, учитывая предполагаемую профессиональную деятельность студентов.

Для описания характеристик теплового излучения используются известные из соответствующего раздела курса физики: энергетический поток Ф, энергетическая светимость R, зависящие от температуры и особенностей структуры тела, а также испускательная $r_{\lambda,T}$и поглощательная $a_{\lambda,T}$ способности, зависящие от спектрального распределения излучения и температуры.

Любой объект конечных размеров способен не только быть источником теплового излучения, но и реагировать на излучение, попадающего на него от других излучателей. И как результат – разделение потока энергии $\Phi_{пад}$, попавшего на данный объект, на поглощенный поток $\Phi_{пог}$, отраженный поток $\Phi_{отр}$ и прошедший поток $\Phi_{пр,}$ при этом в соответствии с законом сохранения энергии

$$\Phi_{пад}=\Phi_{пог}+\Phi_{отр}+\Phi_{пр} \quad (1)$$

Если это равенство разделить на $\Phi_{пад}$, то

$$1=A+K+D \quad (2)$$

где: A, K и D – соответственно интегральные коэффициенты поглощения, отражения и пропускания излучения. Указанные интегральные коэффициенты объектов зависят от их структуры материала и температуры. В зависимости от величин интегральных коэффициентов различают абсолютно черное тело (а.ч.т.), для которого A=1, энергетическая светимость R^*и испускательная способностьr*, абсолютно белое тело (а.б.т), для которого К=1. Наиболее важным модельным представлением объектов с точки зрения строительной специфики являются серые тела, для которых поглощательная способность $a_{\lambda,T}=a_T$ не зависит от длины волны, а его спектр подобен спектру а.ч.т., но с меньшей интенсивностью. На пример, в инфракрасной части спектра многие элементы интерьера помещений соответствуют свойствам серых тел. В литературе величина a_T обозначается буквой ε и называется степенью черноты тела, зависящей от физических свойств тела и температуры.

Основные законы теплового излучения достаточно подробно излагаются в теоретическом фрагменте курса физике и рекомендованной литературе. Поэтому следует только отметить, что в технической литературе закон Стефана-Больцмана выглядит в такой формулировке:

$$R^*=c_0T^4/100 \quad (3)$$

где c_0=5.67 Вт/м^{2}К^4 – коэффициент излучения абсолютно черного тела. Для серых тел аналогичная формулировка закона выглядит так:

$$R=\varepsilon\cdot R^{*}=\varepsilon\cdot\sigma T^{4}=C\cdot T^{4}, \quad (4)$$

где C – коэффициент излучения серого тела.

Так как все поверхности помещений являются источниками теплового излучения, то учет этого обстоятельства необходим при анализе тепловой обстановки помещений различного предназначения. Тепловое излучение конструктивных элементов помещений, эксплуатируемых при достаточно низких температурах, в основном соответствует сравнительно узкому инфракрасному диапазону спектра, что позволяет рассматривать это излучение как монохроматическое с длинной волны, соответствующей максимальной интенсивности (закон смещения Вина). Как уже отмечалось, указанный спектральный диапазон теплового излучения позволяет при расчетах использовать модель серого тела. Так как воздух в помещениях в основном состоит из двухатомных молекул, которые не поглощают инфракрасное излучение, то при анализе лучистого теплообмена воздушная среда считается прозрачной. При расчете теплового излучения любого тела необходимо учитывать наличие других объектов, излучение которых как поглощается, так и отражается рассматриваемым телом. Рассмотрим лучистый теплообмен между телами, разделенными прозрачной средой**.**

Если плотность потока излучения первого тела R_1, а его интегральный коэффициент поглощения A_1, то при наличие излучения второго тел с плотностью потока R_2, вводится понятие об плотностиэффективном излучении данного тела с плотностью потока, равной сумме R_1и плотности отраженного потока:

$$R_{1\text{эфф}}+(1-A_1)R_2 \quad (5)$$

Это излучение зависит от физических свойств и температуры рассматриваемых тел, их геометрических размеров и формы а также их положения в пространстве. Именно это излучение фиксируется при использовании измерительной аппаратуры (пренебрегая многократными отражениями излучения). Для оценки плотности потока энергии, которой данное тело передает телам, участвующим в процессе лучистого теплообмена, вводится понятие о плотности потока результирующего излучения**,** равной разности плотностей потоков, излучаемых и поглощаемых данным телом:

$$R_{1\text{рез}}=R_1-A_1R_2 \quad (6)$$

Если рассмотреть баланс энергетических потоков как внутри непрозрачного тела так и вблизи его наружной поверхности, то соотношение между плотностями эффективного и результирующего излучения выглядит так:

$$R_{\text{эфф}}=R_{\text{рез}}\left(1-\frac{1}{A_1}\right)+\frac{R_1}{A_1} \quad (7)$$

В общем случае расчет лучистого теплообмена связан с учетом многократно затухающих поглощений и отражений.

Рассмотрим данную проблематику на примере теплообмена между двумя параллельными поверхностями, моделируемых в виде серых тел. Температуры поверхностей (T_1и T_2), плотности потоков излучения (R_1 и R_2), интегральные коэффициенты поглощения (A_1 и A_2) считаются известными. Динамика форми-

рования плотности потока результирующего излучения, передаваемого первым телом участнику теплообмена, включает в себя собственное излучение, генерируемое этим телом и многократно отраженное и поглощенное от поверхностей обоих объектов, так и излучение второго тела, также подтвержденное многократным отражательным и поглощательным эффектам.

Указанная процедура позволяет получить две бесконечные геометрические прогрессии, преобразование которых решает задачу учета многократных отражений и поглощений излучения [3]. Если использовать ранее введенные понятия о плотности потока эффективного излучения поверхности, то можно использовать более рациональный прием решения данной задачи [4].

В этом случае плотность потока результирующего излучения равна разности плотностей потоков эффективного излучения обеих поверхностей

$$R_{рез.1} = R_{1эфф} - R_{2.эфф} \tag{8}$$

При этом:

$$R_{1.эфф} = R_1 + (1 - A_1) \cdot R_{2.эфф} \tag{9}$$

$$R_{2.эфф} = R_2 + (1 - A_2) \cdot R_{1.эфф} \tag{10}$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$\mathrm{R}_{1,эфф} = \frac{R_1 + R_2 - A_1 R_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} \tag{11}$$

$$\mathrm{R}_{2,эфф} = \frac{R_1 + R_2 - A_2 R_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} \tag{12}$$

Окончательно для плотности потока результирующего излучения получаем:

$$R_{рез.1} = \frac{R_1 A_2 - R_2 A_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} \tag{13}$$

Как уже отмечалось, для серых тел коэффициенты поглощения соответствуют степени их черноты: $A_{11} = \varepsilon_1$, $A_{22} = \varepsilon_2$.Если воспользоваться законом Стефана – Больцмана:

$$R_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \quad R_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4$$

то в окончательном виде плотность поток результирующего излучения при теплообмене равна:

$$R_{рез} = \varepsilon_m \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right) = C\left(T_1^4 - T_2^4\right) \tag{14}$$

где $\varepsilon_m = \dfrac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}$ - приведенная степень черноты системы тел, участвующих в процессе лучистого теплообмена.

В том случае, когда $\Delta T = T_1 - T_2 << T_1,\ T_2$, приращение величины T^4 можно заменить дифференциалом $d\left(T^4\right) = 4T^3 \cdot dT$ Тогда [5]:

$$R_{рез} = T_{ср}^3 \left(T_1 - T_2\right) = \alpha_{изл} \left(T_1 - T_2\right) \tag{15}$$

где $T_{\text{ср}}$ – среднее значение температуры поверхностей: $T_{ср} = \left(T_1 + T_2\right)/2$, $\alpha_{изл} = 4T_{ср}C$ - коэффициент теплообмена излучением.

Вид этого выражения аналогичен закону конвекционного теплообмена.

При средней температуре $T_{ср}$=300 К коэффициент теплообмена излучением между поверхностями центрального отопления и воздухом помещения имеет порядок $\alpha_{изл}$ = 5 Вт/(м^2·град) и сравним с конвекционным.

Использованный метод расчета лучистого теплообмена можно использовать при более сложных ситуациях [4]. В том случае, когда одна из поверхностей (с площадью F_1 находится внутри другой, площадь которой F_2 в расчетах используется только часть энергетического потока, излучаемой большей поверхностью. В этом случае искомая формула для лучистого теплообмена принимает вид:

$$R_{12} = \varepsilon_n F_1 \left(T_1^4 - T_2^4\right) \tag{16}$$

где $\varepsilon_n = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{F_1}{F_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$.

Данные формулы справедливы только в том случае, когда меньшее тело имеет выпуклую форму, а также в случаях, когда выпуклое и вогнутое тела образуют замкнутое пространство, при этом меньшая поверхность используется в качестве расчетной.

Если рассматриваемые поверхности значительно отличаются от серых тел необходимо использовать испускательную способность $r_{\lambda,T}$ и поглощательную способность $a_{\lambda,T}$ рассматриваемых тел. В этом случае расчетная формула для лучистого теплообмена при заданных температурах имеет вид [4]:

$$R_{\text{рез1}} = \int \frac{r_{\lambda.1} a_{\lambda.2} - r_{\lambda.2} a_{\lambda.1}}{a_{\lambda.1} + a_{\lambda.2} - a_{\lambda.1} a_{\lambda.2}} d\lambda \tag{17}$$

Из формулы (17) следует, что изменение режима лучистого теплообмена (усиление или ослабление) связано с увеличение (или уменьшением) температуры излучающего тела и степени черноты системы. Альтернативный способ – использование экрана. Его роль рассмотрим на примере такой модели – две плоские параллельные поверхности, между которыми находится тонкостенный экран, при этом степень черноты всех элементов одинаковы [5]. При отсутствии экрана характер теплообмена описывается формулой:

$$\mathrm{R}_{\text{рез}} = \varepsilon_m \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

При наличии экрана интенсивность процесса лучистого теплообмена для указанной системы изменится, но при этом, учитывая стационарность тепловых процессов, энергетические потоки в левой и правой частях модели одинаковы:

$$R_{эк} = \varepsilon_m \sigma (T_1^4 - T_{эк}^4) = \varepsilon_n \sigma (T_{эк}^4 - T_2^4)$$

Последнее уравнение позволяет определить температуру экрана:

$$T_{эк}^4 = 0.5(T_1^4 + T_2^4) \tag{18}$$

И тогда плотность потока результирующего излучения при наличии экрана:

$$R_{эк} = 0.5 \varepsilon_m \sigma (T_1^4 - T_2^4) = R_{рез} / 2 \tag{19}$$

Полученная величина означает, что при использовании одного экрана передаваемая при теплообмене энергия уменьшается в два раза. Увеличение чис-

ла экранов с малой степенью черноты существенно увеличивает данный эффект.

ЛИТЕРАТУРА

1. Елаховский Д.В. Некоторые аспекты конвективного теплообмена в программе физического образования студентов строительной специальности // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы 4 Всероссийской научно-практической конференции. - Орел, 2018.-Т.2.-С.57-62.
2. Елаховский Д.В. Оценка температурных полей элементов строительных конструкций программе физического образования студентов строительной специальности. // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017, №7. – с.13-19
3. Тодес О.М. Курс лекций и задания по строительной физике. Ленинград, 1972.
4. Михеев М. А. Основы теплопередачи. Изд. 2-е, стереотип. М., «Энергия», 1977. – 344с.
5. Елаховский Д.В. Основы теплофизики. – учебное пособие. Петрозавод. гос. ун-т. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГу, 2018. – 114 с.

УДК 37.02

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО МАТЕМАТИКЕ В КОНТЕКСТЕ ПОВЫШЕНИЯ ОБРАЗОВАННОСТИ ШКОЛЬНИКОВ

Г.Г. Ельчанинова, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
Т.Е. Рыманова, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *barkarelez@mail.ru*

В статье исследуется вопрос проектирования образовательного процесса по математике в рамках повышения образованности школьников российской провинции. На основе анализа разных точек зрения рассматривается содержательное наполнение категории «образованность». Проводимая экспериментальная работа позволила выяснить пути решения данной проблемы. В качестве одного из средств повышения образованности подрастающего поколения можно использовать дистанционную межпредметную научно-образовательную олимпиаду. Результаты исследования свидетельствуют об эффективности проводимой работы.

Ключевые слова: образовательный процесс, образованность, дистанционная межпредметная научно-образовательная олимпиада.

В настоящее время все очевиднее просматриваются тенденции расшатывания традиционных устоев российской государственности, борьба за умы подрастающего поколения, за мировоззренческие позиции молодежи. При этом очень важно, чтобы молодые люди могли оценить в геополитическом масштабе

наследие предков с позиции современных тенденций развития общества и государства, осознать связь со своим народом, чувствовать собственную ответственность перед Отечеством. Данные постулаты являются базисной парадигмой образованности. От уровня последней напрямую зависят научная, экономическая, военная мощь государства, его позиции на международной арене. Таким образом, образованность всего российского общества – это залог национальной безопасности страны. Особое значение в данном контексте приобретает эта проблема для русской глубинки, так как от ее решения, во многом, зависит оживление, а в некоторых случаях и возрождение российской провинции, как центра хранения национальной культуры.

Проведенное нами исследование показало, что 8% шестиклассников, 7% семиклассников и восьмиклассников соответственно и 18% девятиклассников не знают, когда закончилась Великая Отечественная война. 8% респондентов из 6-х классов и 9% - из 10-х классов неправильно пишут слово «картофель». 17% шестиклассников ошиблись в нахождении значения числового выражения 7×8-2. 8% учащихся 6 классов не смогли назвать столицу Российской Федерации. Особенно плохо школьники владеют сведениями о своей малой родине [5]. Регулярно осуществляемый нами мониторинг свидетельствует, что ситуация в области образованности подрастающего поколения не улучшается. Отметим, что очень низкие результаты демонстрируют ребята, которые обучаются по стандартам второго поколения. Становится очевидным, что данная проблема приобретает особую актуальность.

В настоящее время все чаще появляются исследования о качестве учебного процесса, но, к сожалению, очень мало работ, нацеленных на решение вопросов образованности молодого поколения. Хотя в нашем отечественном образовании до 1917 года этому уделялось большое внимание. Данную категорию, согласно П.Ф. Каптереву, можно рассматривать не только как результат обучения, но и как степень культурности личности, усвоения ею историко-культурного наследия предшествующих поколений [2]. П.Г. Редкин указывал, что смысловая нагрузка понятия «образованность» для конкретного человека корректируется с изменением или развитием его собственного образования [3]. Анализ философской, психолого-педагогической, культурологической литературы по вопросу исследования свидетельствует, что в настоящее время нет единой точки зрения по данному вопросу. Часто образованность рассматривают как результат получения личностью определенных знаний, то есть как индикатор образования (Г.В. Акопов, С.Л. Иванова, С.Л. Ивашевский). Б.Г. Ананьев указывал на воспитательный аспект. Культурологические вопросы образованности исследовали Л.С. Выготский, М.М. Бахтин, А.Н. Леонтьев, Ю.М. Лотман, С.Л. Рубинштейн. Тезис о личностных детерминантах успешности в данном контексте рассматривали Г.В. Акопов, Н.А. Бакшаева, А.А. Вербицкий, А.Н. Леонтьев, Е.Н. Шиянов, Е.Ф. Ященко. Д.А. Леонтьев, М.К. Мамардашвили исследуют данную категорию как систему представлений личности о мире, сознание индивидуума. В настоящее время образованность часто связывают с гуманитарной сферой жизни человека и, соответственно, считается, что повыше-

ние образованности происходит только в ее развитии. Однако естественно-математические дисциплины имеют огромный потенциал и оказывают существенное влияние на повышение образованности подростка.

Таким образом, даже краткий обзор взглядов и мнений на проблему исследования свидетельствует о ее многогранности. Обобщая различные точки зрения, можно сказать, что образованность представляет интегративность культурности, познавательных процессов и синтеза современных знаний из разных научных областей.

Отметим, что вопросам образованности необходимо уделять особенно пристальное внимание в школьные годы [4]. Анализ программных документов, регламентирующих жизнь среднего учебного заведения, позволяет с высокой степенью вероятности констатировать, что вектор освоения подрастающим поколением основ научного знания сместился в основную школу. Кроме того, как показывают социологические исследования российского общества, в молодежной среде наблюдаются духовно-нравственные проблемы.

В решении данных проблем, по нашему мнению, можно выделить два основных направления, которые условно обозначим: федеральный уровень и региональный уровень. Кратко проясним обозначенные моменты.

1.Любое учебное заведение осуществляет образовательную деятельность согласно учебным планам. ФГОС на старшей ступени предполагает обязательное профильное обучение. Приведем в качестве примера учебный план для физико-математического направления.

Учебный план для учащихся 11 классов,

продолжающих освоение ООП СОО в соответствии с ФК ГОС

(утверждённым приказом Министерства образования РФ от 05.03.2004 №1089)

2018-2019 учебный год

Физико-математическая группа

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ КОМПОНЕНТ		
Обязательные учебные предметы на базовом уровне		
ИНВАРИАНТНАЯ ЧАСТЬ	**Учебные предметы**	**11**
	Русский язык	1
	Литература	3
	Иностранный язык (английский язык)	3
	История	2
	Обществознание (включая экономику и право)	2
	Химия	1
	Биология	1
	Астрономия	1
	Физическая культура	3
	ОБЖ	1
ВАРИАТИВНАЯ ЧАСТЬ	***Учебные предметы по выбору на профильном уровне***	
	Алгебра и начала анализа	4
	Геометрия	2
	Физика	5
ВСЕГО:		**29**

РЕГИОНАЛЬНЫЙ КОМПОНЕНТ	
Русский язык	1
Алгебра и начала анализа	1
ВСЕГО:	**31**
КОМПОНЕНТ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ	
Информатика и ИКТ	2
Практикум по подготовке к ЕГЭ по математике	1
ВСЕГО:	**3**
Предельно допустимая аудиторная учебная нагрузка	34

Представленный план позволяет выделить некоторые принципиально важные моменты, от которых зависит уровень образованности подрастающего поколения. Отметим, что среди предметов отсутствует география. На протяжении десятков лет изучение этой научной области в средней школе традиционно заканчивается географией зарубежных стран. Получается, что чиновники, рекомендуя средним учебным заведениям планы, не считают важным, чтобы молодое поколение знало государственное устройство, экономику, политические интересы и т.д. зарубежных стран. Данный факт вызывает особое недоумение в контексте современной геополитической ситуации. Второй момент, который вызывает вопросы, заполнение учебными предметами инвариантной и вариативной частей. Сравнение планов для разных классов показывает, что, например, дисциплина «Алгебра и начала анализа» в зависимости от профиля «прыгает» из блока «Обязательные учебные предметы на базовом уровне» в «Учебные предметы по выбору на профильном уровне» и наоборот. Наши исследования показывают, что такой подход снижает уровень математической грамотности. Мы считаем, что для повышения уровня образованности школьников необходимо сформировать список обязательных учебных дисциплин одинаковый для всех профилей, охватывающий все научные области, а профильные предметы должны разрабатываться в соответствие с профилем. Но, к сожалению, российское общество еще не осознало все риски для государства, которые несет такое проектирование учебного процесса в школе, следствием чего является проблема массового снижения образованности молодежи.

2.В связи с этим становится принципиально важным проведение целенаправленной, научно обоснованной работы в подростковой среде, направленной на решение данного вопроса в масштабе конкретно взятого региона. Можно выделить два аспекта: разработка и внедрение в учебно-воспитательный процесс учебных курсов, нацеленных на повышение образованности школьников, например, «Математика вокруг нас» [7], а также проведение научно-образовательных мероприятий.

Кафедра математики и методики ее преподавания Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина с 2015 года осуществляет исследование, направленное на поиск путей повышения уровня образованности школьников, в рамках которого ежегодно проводится региональная дистанционная межпредметная научно-образовательная олимпиада «На перекрестках наук».

Заметим, что такое название выбрано неслучайно, так как проверяются знания учащихся по нескольким предметным областям естественно-

математического цикла. В олимпиаде могут участвовать все желающие без предварительного отбора. Школьникам предлагаются вопросы из разных научных областей: математики, физики, географии, истории, литературы, логики, краеведения. В этом принципиальное отличие проводимой олимпиады от предметных олимпиад.

Однако приоритет отдается математическим задачам, их присутствует не менее 40% в предлагаемых заданиях, многие из них являются авторскими. Например, «Зрительный зал Елецкого драматического театра «Бенефис» состоит из партера, амфитеатра и четырех лож. В партере 9 рядов по 14 мест в каждом, в амфитеатре 3 ряда по 14 мест и 1 ряд по 6 мест, в каждой ложе – 7 мест. Какой процент зрительного зала составляют места в ложах? (6 класс, 2017 г., сост. к.п.н., доц. Т.Е. Рыманова); «На строительство Покровской церкви в г. Ельце прихожане Сергей и Николай Хренниковы пожертвовали 3 тыс. руб. серебром, а церковный староста купец Николай Матвеевич Криворотов и его брат Алексей Матвеевич Криворотов пожертвовали 2 тыс. руб. серебром. Сколько килограммов весили пожертвования Криворотовых и Хренниковых? (5 класс, 2019 г., сост. д.п.н., проф. О.А. Саввина)».

Для каждого класса подбираются от десяти до двенадцати вопросов в тестовой форме или с кратким ответом. Последнее задание - одинаковое для всех. Нужно в краткой форме ответить на вопрос «За что я люблю математику (или географию, или физику)?» Ученику предоставляется право выбора написать о любом предмете.

Необходимо отметить, что если с предметными задачами школьники справляются более или менее успешно, то задания общекультурного характера вызывают большие затруднения. Мы предполагали такой результат, поэтому изначально цели олимпиады не ограничивались только обучающими. Так, в поисках ответов на вопросы олимпиады ребята имели возможность познакомиться с новыми фактами не только из математики, но и из географии и истории Отечества. Творческое задание, предполагающее написать мини-сочинение: «За что я люблю (математику, физику, географию)», направлено на развитие у ребят культуры письменной речи, на формирование умения аргументированно излагать свои мысли. Отметим, что 70% участников отдают предпочтение математике. Выбор дистанционной формы проведения олимпиады позволяет помимо диагностических задач решать образовательные и общекультурные.

За пять лет собран и систематизирован большой банк заданий. Разработаны критерии оценивания работ школьников. Преподаватели осуществляют мониторинг и научную интерпретацию результатов, которые доводятся до сведения педагогической общественности [1, 5, 6, 8]. За эти годы приняли участие в научно-образовательной олимпиаде более 1300 школьников. Дистанционная форма ее проведения позволила охватить средние школы Ельца и многие районы Липецкой области. Некоторые ребята из года в год принимают участие в олимпиаде.

Отметим, что в результате проводимого исследования рассматриваются возможности проектирования научно-методической модели повышения обра-

зованности школьников через призму исторических традиций, культурного потенциала, менталитета российской провинции как социокультурный механизм прогресса. Все это обеспечивает определенный уровень мобильности, повышает конкурентоспособность и уровень самодостаточности личности. В результате подросток с позиции объекта учебно-воспитательного процесса переходит на позицию субъекта. Последнее должно стать важнейшей парадигмой образовательного пространства в современном обществе. В условиях российской реальности и международных вызовов для достижения поставленных целей необходимо предоставить четкие ориентиры их реализации всем участникам учебно-воспитательного процесса. Кроме того, повышение образованности подрастающего поколения малого города должно стать одной из приоритетных задач сохранения жизнеспособности российской глубинки не только для местных, но и федеральных органов власти.

ЛИТЕРАТУРА

1.Елецких И.А., Ельчанинова Г.Г., Рыманова Т.Е. К вопросу о национальной безопасности российского государства // Нравственные императивы в праве, образовании, науке и культуре. Часть 1: сборник материалов VII Международного молодежного форума /отв. Ред. Е.В. Сафронова. – Белгород: ИД «Белгород» НИУ «БелГУ», 2019. – С. 214-223.

2.Каптерев П.Ф. Избранные педагогические сочинения. – М.: Педагогика, 1982. – 707 с.

3.Редкин П.Г. Избранные педагогические сочинения / Сост. В.Я. Струминский. – М.: Госучпедиз, 1958. – С. 247-249.

4.Рыманова Т.Е. Проблема образованности подрастающего поколения в контексте новых образовательных стандартов // Эвристическое обучение математике. Материалы IV Международной научно-методической конференции. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2018. – с. 58-61.

5.Рыманова, Т.Е. Межпредметная олимпиада как средство определения уровня образованности современных школьников [Электронный документ] // Вестник Оренбургского государственного педагогического университета Серия «Педагогика» (история и теория математического образования). – 2017. № 2(22).

6.Рыманова Т.Е. Образованность подрастающего поколения как залог национальной безопасности страны. // Н.И. Лобачевский и математическое образование в России: материалы Международного форума по математическому образованию, 18-22 октября 2017 г. (XXXVI Международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов) – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – Т.1.- С.74-79.

7.Рыманова Т.Е. Проектирование образовательного процесса по математике в контексте стандартов второго поколения: учебно-методическое пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2017. – 37 с.

8.Рыманова Т.Е., Саввина О.А., Мельников Р.А. Научно-методические исследования в рамках образовательных стандартов второго поколения. // Концепция

развития математического образования: проблемы и пути реализации: материалы XXXIV Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. М.: Изд-во ООО «ТРП», 2015. С. 152-157.

О МЕТОДИЧЕСКИХ ПОДХОДАХ К ВВЕДЕНИЮ ПОНЯТИЯ «ПРОИЗВОДНАЯ» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Л.А. Железнова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева»,
e-mail: *zheleznova.lid@yandex.ru*

Тема «Производная» является одной из системно-образующих тем школьного курса математики 10-11 классов. Понятие «производная» является базовым для целого ряда разделов курса высшей математики. Именно поэтому без четкого и ясного понимания смысла этого математического термина невозможно глубокое изучение курса математики.

Учащиеся при изучении темы «Производная» испытывают ряд трудностей, которые связаны с тем, что: производная является одним из абстрактных понятий, её физический смысл которой достаточно трудно представить наглядно; определение производной базируется на понятий «предела», которому уделяется недостаточное количество времени в школьном курсе математики; при определении производной используются новые для обучающихся термины (приращение аргумента, функции и т.д.). В абсолютном большенстве школьных учебников математики изложение ведется на наглядно-интуитивной основе, без доказательств, только лишь с рядом пояснений.

Основное содержание раздела «Производная» составляют: понятие производной, техника дифференцирования, приложение производной к исследованию функций и решению задачи. В школьном курсе математики понятие производной базируется на понятие предела функции в точке. На основе знаний о пределе функции в точке может быть сформулировано определение производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента, при этом можно воспользоваться как геометрической иллюстрацией (подготовка к рассмотрению геометрического смысла производной), так и обратиться к физическим закономерностям. Выбор иллюстративного материала осуществляет учитель, но наиболее оптимальным, будет введение производной на геометрической основе, что позволит еще раз показать идею линеаризации (возможность замены части кривой в окрестности точки касания отрезком касательной) и подготовить учеников к изучению приложения производной к приближенным вычислениям. Полученные знания являются основной для изучения школьного курса математики.

Проведем сравнительный анализ наиболее часто использующихся в школах г.Орла и Орловской области для учащихся 10-11 классов в учебном процессе учебников авторов Мордковича А.Г. «Алгебра и начала анализа. 10-11

классы», Алимова Ш.А. «Алгебра и начала анализа.10-11класс», Колмогорова А.Н. «Алгебра и начала анализа. 10-11 классов» и Никольского С.М. и др. «Алгебра и начала анализа. 11 класс».

Рассмотрим учебник автора Мордковича А.Г. «Алгебра и начала анализа. 10-11 классы». [1,с. 156-163]. Учащиеся знакомятся с понятием «производной» во втором полугодии 10 класса. Вводятся понятия: «производная» с помощью предела последовательности, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, предел функции. В учебнике Мордковича А.Г. «Алгебра и начала анализа. 10-11 классы» приведена система заданий, предназначенная для формирования умений и навыков применения изученных понятий. Методическая особенность введения определения «производной» состоит в рассмотрении двух различных задач: физической (о скорости движения) и геометрической (о касательной к графику функции). Процесс решения этих задач приводит к возникновению новой математической модели. Изложением геометрического смысла производной начинается изучение этой темы. В учебнике представлен алгоритм исследования функций:

1.) найти производную функции;
2.) найти стационарные и критические точки;
3.) определить знаки производной на получившихся промежутках;
4.) опираясь на теоремы сделать соответствующие выводы о монотонности функции и экстремумах.

Исходя из выше изложенного можно сделать следующие выводы: теоретический материал по введению понятий математического анализа предложен на доступном для учащихся уровне, они могут самостоятельно знакомиться с материалом, разбирать примеры, которые предложены в учебники, и опираясь на них решать задачи, предлагаемые в задачнике. Предложены разноуровневые задачи в достаточно большом количестве. Учебник составлен так, что у учителя всегда есть возможность дополнительно позаниматься со школьниками или наиболее успешным по математике школьникам, предложить дополнительную работу на уроке и в домашнем задании.

Теперь рассмотрим учебник Никольского С.М. «Алгебра и начала анализа. 11 класс» [2,с.89-99]. Производная вводится в I полугодии 11 класса. «Производная» позволяет провести обобщение и систематизацию свойства различных функций – тригонометрических, логарифмических, степенных и др. Изучение темы «Производная» начинается с введения понятия приращения функции и формулировки правила его вычисления. Далее рассматриваются дифференцируемые функции. При помощи предела дается определение дифференцируемой функции в точке. На примере доказывается дифференцируемость функций. При введении понятия «производная» автор рассматривает задачи, связаные с приращением функции, основываясь на этом вводится определение производной.

Учебник Никольского С.М. рассчитан на обучение на базовом и профильном уровнях, что позволяет успешно организовать работу с учащимися различного уровня подготовки. В целом, учебник написан доступным для уча-

щихся языком, содержит большое количество примеров к изучаемым формулам и основным задачам. Учебник содержит материал для дополнительного повторения.

Подход к введению понятия «производная» у Колмогорова А.Н. [3,с. 251-263], отличается от других авторов тем, что глава, посвященная производной, начинается с пункта, в котором дается определение приращения функции. Понятие приращения рассматривается на примерах. Представлен пример нахождения углового коэффициента секущей через приращение функции. Далее автор объясняет, что такое касательная к графику функции и дает определение мгновенной скорости. Причем, определение предела не рассматривается, вместо этого Колмогоров А.Н. пользуется понятием «стремится к».

Проанализировав систему ознакомления учащегося с понятием производной в этом учебнике, можно выявить следующие особенности: Колмогоров А.Н. стремится вначале подвести достаточно большую базу примеров и соответствий, опираясь на более легкое понимание понятия и затем приступить к вычислениям.

В учебнике Алимова Ш.А. [4,с.229-251] вначале определение производной дается через механический смысл: производная – это мгновенная скорость. Рассмотрев задачу на скорость, Алимов Ш.А. переходит к точному определению производной через пределы, кратко объяснив значение понятия «предел» в той же задаче применительно к мгновенной скорости.

Проанализировав систему ознакомления учащихся с понятием производной в этих учебниках, можно выявить следующие особенности: короткое вступление главы о производных в учебнике Алимов Ш.А. дает возможность учащимся, получив минимум информации о производной, как можно быстрее приступить к вычислению производных. Далее, понятие производной обогащается новыми приложениями и свойствами и все это сразу подкрепляется задачами.

Анализ указанных школьных учебников математики позволяет систематизировать различные подходы к введению понятию «производной» и проследить методическую особенность учебников в изложении данного понятия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений - М.: Мнемозина, 2015. – 405 с.
2. Никольский С.М. Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений - М.: Просвещение, 2019. – 435 с.
3. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. сред.шк. – М.: Просвящение, 2019. - 320 с.
4. Алимов Ш.А. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений - М.:Просвещение, 2019. – 384 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ КОЛЛЕКТИВНЫХ ФОРМ УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ВУЗЕ

О.Е. Кириченко, к.пед.н., доц.
Академия ФСО России
e-mail: *koe_orel@mail.ru*

Развитие исследовательских способностей у обучающихся осуществляется во время учебной деятельности путем овладения предметными знаниями и умениями, а также путем развития самостоятельных исследовательских умений и навыков [1]. Причем исследовательские навыки можно формировать, используя как индивидуальные, так и коллективные формы обучения. Рассмотрим возможности использования в образовательном процессе коллективных форм учебно-исследовательской деятельности.

Для организации учебно-исследовательской деятельности и для использования коллективных форм обучения в образовательном процессе характерны следующие черты:

1) постановка общей учебной проблемы, решение которой направлено на формирование и развитие исследовательских навыков обучающихся;

2) активизация познавательной деятельности обучающихся путем их привлечения к решению выдвинутой проблемы;

3) проявление самостоятельности и настойчивости при овладении новыми знаниями и новыми способами деятельности;

4) изменение способа взаимодействия преподавателя и обучающегося, переход от авторитарного стиля преподавания к демократическому, при котором общение строится на творческом сотрудничестве, преподаватель выступает как организатор и консультант коллективного учебного исследования;

5) реализация общих для учебного исследования и для коллективной формы обучения дидактических, развивающих и воспитательных функций.

Рассмотренные общие черты, характерные как учебному исследованию, так и коллективным формам обучения приводят к выводу о целесообразности объединения исследовательской познавательной деятельности обучающихся по предметному содержанию с коллективной формой ее организации.

Коллективные формы учебно-исследовательской деятельности обучающихся при изучении математических дисциплин в вузе обусловлена использованием эвристического и исследовательского методов обучения в образовательном процессе и преимуществами различных видов коллективных форм организации обучения. Использование того или иного метода обучения определяется возможностью постановки познавательных проблемных ситуаций и их сложностью, использованием различных форм коллективной учебной работы, применением различных способов подачи теоретического и практического математического материала.

В процессе систематической и целенаправленной работы обучающихся по изучению математических объектов, исследованию их структуры, свойств и возможностей применения в прикладных задачах, развивается творческое мышление и стремление к исследовательской деятельности. При этом формируются такие способности, как способность выделять главное; анализировать, обобщать и систематизировать изученный материал; раскрывать некоторые прикладные аспекты определенных математических направлений; находить различные пути решения математической задачи и выделять наиболее рациональное из них; критически осмысливать полученные результаты и т.д. Эти задачи можно решить при систематическом вовлечении обучающихся в учебно-исследовательскую деятельность образовательного процесса математических дисциплин, но при этом необходимо учитывать, во-первых, уровень математической подготовки обучающихся, а во-вторых, готовность обучающихся к самостоятельной учебно-исследовательской деятельности в вузе.

Опыт свидетельствует, что успешность использования широких возможностей математической подготовки для развития способностей обучающихся к исследовательской деятельности в вузе в большой мере зависит от целенаправленной педагогической работы в этом направлении и эффективности ее организации. Необходимость активизации такой работы требует определения соответствующих приемов, способов, форм ее проведения.

Учитывая выше сказанное, преподаватель должен достаточно тщательного отбирать математическое содержание учебной дисциплины для использования коллективных форм учебно-исследовательской деятельности обучающихся в образовательном процессе.

Выделим наиболее важные условия использования коллективных форм учебно-исследовательской деятельности обучающихся в образовательном процессе математических дисциплин в вузе:

– корректировка математического содержания учебной дисциплины, в рамках учебной программы,
– выявление возможностей для использования в образовательном процессе эвристического и исследовательского методов обучения;
– учет уровня знаний обучающихся;
– выбор различных коллективных форм учебно-исследовательской деятельности обучающихся;
– высокая мотивация у обучающихся по выполнению заданий исследовательского характера.

Рассмотрим план организации коллективной формы учебно-исследовательской деятельности в образовательном процессе:

1 этап: постановка перед обучающимися проблемы или задачи исследовательского характера для самостоятельного коллективного выполнения.
2 этап: обсуждение плана выполнения задания; при необходимости, помощь и консультация преподавателя.

3 этап: руководство (в зависимости от вида коллективной учебно-исследовательской деятельности) коллективной деятельностью участников группы.

4 этап: обсуждение результатов исследования и формирование обучающимися нового знания как общего результата исследовательской деятельности всех.

5 этап: подведение итогов и оценка деятельности каждой группы.

В образовательном процессе математических дисциплин могут быть использованы фронтальные и групповые организационные формы коллективной учебно-исследовательской деятельности (под руководством преподавателя или самостоятельные) [2].

Фронтальные формы организации коллективной учебно-исследовательской деятельности обучающихся предполагают общую постановку учебной или исследовательской задачи, решение которой осуществляется обучающимися самостоятельно в рамках учебной группы. Данная форма работы целесообразна при изучении нового учебного предметного материала или в случае, когда обучающиеся не имеют достаточной подготовки к коллективной работе в малой группе. Фронтальная самостоятельная работа с преподавателем и без него имеет место в том случае, когда обучающиеся выполняют задачу исследовательского характера во время учебного занятия, при этом имеется общая познавательная цель, в процессе выполнения задания можно обмениваться мнениями, выдвигать гипотезы, консультироваться с преподавателем.

Групповые формы организации коллективной учебно-исследовательской деятельности обучающихся предполагают общую постановку учебной или исследовательской задачи, для решение которой обучающиеся объединяются в учебные малые группы, или микрогруппы. Данная форма работы целесообразна при систематизации и углублении уже изученного материала, а также при выполнении учебно-исследовательских заданий или научно-исследовательской работы большого объема.

Использование различных организационных коллективных форм учебных исследований определяется предметным содержанием учебной дисциплины, уровнем математической подготовки, исследовательских навыков обучающихся, а также умением работать в коллективе. Эффективность коллективной учебно-исследовательской деятельности обучающихся зависит от рационального выбора организационной формы или от сочетания различных форм, в зависимости от уровня учебного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириченко, О.Е. Формирование исследовательских навыков обучающихся в техническом вузе при изучении математических дисциплин // Научные труды факультета дополнительного профессионального образования и повышения квалификации. Выпуск 13. – Орел: ООО «Горизонт», 2016. – С. 35-38.
2. Кириченко, О. Е. Модель коллективной учебно-исследовательской деятельности обучающихся // Актуальные направления развития систем охраны, специальной связи и информации для нужд органов государственной власти

Российской Федерации: XI Всероссийская межведомственная научная конференция: материалы и доклады (Орёл, 5–6 февраля 2019 года). В 10 ч. Часть 10 / под общ. ред. П. Л. Малышева. – Орёл : Академия ФСО России, 2019.– С.146-149.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМЫ ПРОВЕДЕНИЯ УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЙ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ АКТИВИЗИРОВАТЬ ПОЗНАВАТЕЛЬНУЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Г.А. Кирюхина, к.ф.-м.н., доц.
Академия ФСО России
e-mail: *galina.kiriuhina.new@yandex.ru*

В связи с идеей модернизации высшей школы одной из приоритетных задач обучения является задача максимального развития обучающихся с учетом их интересов, способностей, возможностей и практических потребностей. Требования ФГОС 3++ определяют различные направления по совершенствованию образовательного процесса в высшей школе. Процесс обучения и воспитания в высшем учебном заведении необходимо строить так, чтобы создавать наилучшие условия для каждого обучающегося.

Основное внимание и большая часть учебного времени отводится самостоятельной работе обучающихся. Но традиционно главная роль возложена на преподавателя, который должен уметь не просто организовать обучение, а сделать его эффективным и оптимальным.

Основной формой проведения учебных занятий является лекция. Это самый известный, распространенный, эффективный и популярный способ изложения материала.

Для того чтобы лекция достигала поставленных образовательных целей, необходимо ее правильное логическое построение. Если структура лекции верна и логична, то и учебный материал будет донесен о обучающихся в должной степени, и будет активизирована их мыслительная деятельность и активность, и будет установлена энергетическая связь между читающим лекцию (преподавателем) и слушающим ее (обучающимся).

Это особенно важно при преподавании естественнонаучных и технических дисциплин, когда теоретически трудный материал нужно преподнести доступно обучающимся. Проблемы определенного рода возникают при работе преподавателя на первом году обучения: первокурсникам – вчерашним школьникам бывает сложно адаптироваться к новым учебным условиям. Педагог при подготовке к учебному занятию должен учитывать многие аспекты: объяснять новый материал, приводить различные примеры, методически верно обращать внимание на тонкости и «подводные камни» темы, указывать прикладную направленность для стимулирования обучения, применять различные формы преподавания, вносить элементы эвристического, наглядного, занимательного и

развивающего обучения. Конечно, это трудно, требует больших затрат времени и энергии педагога.

Приведем в качестве примера проведение лекции по теме «Основы гармонического анализа» – «Ряды Фурье». Это первая лекция по данной теме. После объявления ее названия перечисляются обучающие, развивающие и воспитательные цели с указанием формирующихся компетенций. На слайде компьютерной презентации высвечиваются список основной и дополнительной литературы (с иллюстрацией данных пособий), структура изучения темы, ее внутри предметные, структурно-логические и междисциплинарные связи.

Изложение теоретического материала необходимо начать с повторения школьного курса математики и физики о свойствах периодических функций и основных понятий тригонометрических рядов (рисунок 1).

Далее для введения определения ряда Фурье и коэффициентов Фурье на слайдах представляем необходимые формулы (с напоминанием методов вычисления интегралов) и выводим коэффициенты (рисунок 2).

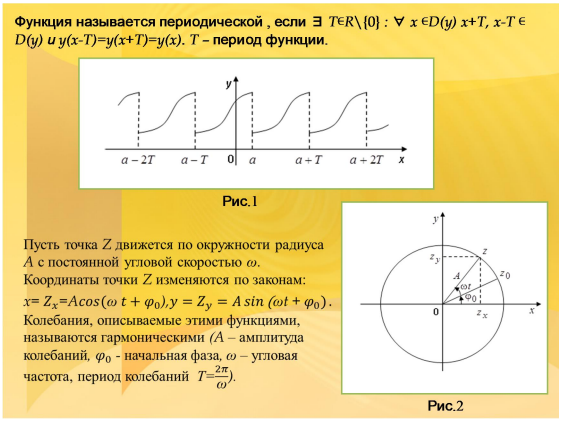


Рисунок 1

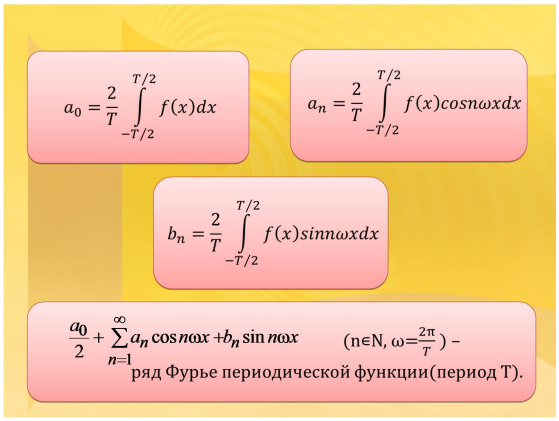


Рисунок 2

Так как при чтении лекции возникают новые понятия и имя ученого-математика, с которым связаны эти термины, то желательно обучающимся представить короткую историческую справку и сведения о жизни и деятельности Ж-Б. Ж. Фурье (рисунок 3). По той же причине при дальнейшем изложении высвечиваем слайд об исследованиях И. П. Г. Лежен-Дирихле (рисунок 4).

Рисунок 3

Рисунок 4

После формулировки условий и теоремы Дирихле рассматриваем алгоритм разложения функции в ряд Фурье и приводим решение конкретного при-

мера (аналогичного тому, который будет предложен в последующей контрольной работе).

Далее приводим приложения теории Фурье в различных областях науки и техники с демонстрацией компьютерной программы, реализующей применение гармонического анализа в экономике при оценке рынков (разработанную совместно с обучающимися старших курсов), а также иллюстрацию слайдов описания лабораторной работы, которая будет предложена обучающимся при изучении ими в дальнейшем другой технической дисциплины в целях пропедевтики и активизации обучения (рисунки 5, 6).

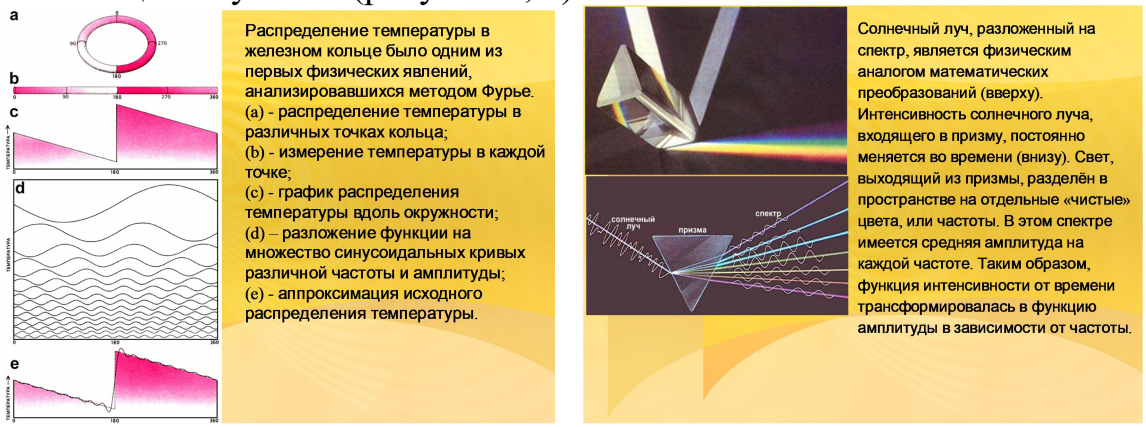


Рисунок 5

После изложения оставшегося запланированного учебного материала обучающимся предлагается просмотр короткого отрывка из художественного фильма о доказательстве теоремы Фурье, которая будет рассмотрена на следующей лекции.

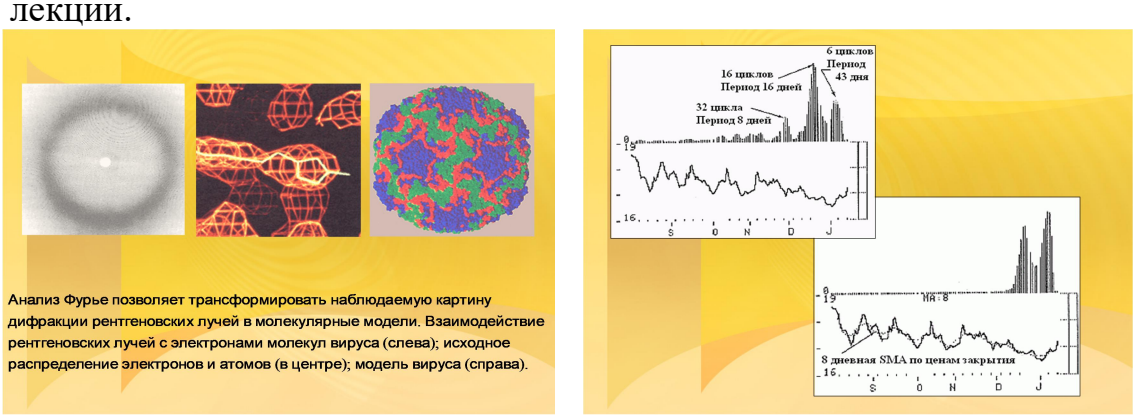


Рисунок 6

Для закрепления изученного обучающиеся с помощью преподавателя в игровой форме складывают электронный пазл с основными формулами данной темы.

В качестве задания для самостоятельной работы во внеаудиторное время предлагаем обучающимся установить географический объект, для вычисления координат которого понадобится нахождение n-ых сумм ряда Фурье из рассмотренного на лекции примера.

Лекцию завершаем замечательным высказыванием лорда У.Т. Кельвина об анализе Фурье.

В заключении отметим, что для решения поставленных перед преподавателем проблем необходимо организовывать учебный процесс по-иному и по-

стоянно совершенствовать формы и методы развития учебно-познавательного интереса обучающихся.

В данной работе мы не приводим методические указания и рекомендации по проведению лекции, а только предлагаем в качестве примера такую форму учебного занятия для оптимизации обучения и активизации познавательной деятельности обучающихся.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ВЫСШЕМ УЧЕБНОМ ЗАВЕДЕНИИ

А.В. Ковалев
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)
e-mail: *jamper84@bk.ru*

В последние время в нашей стране наблюдается быстрое развитие информационного общества. Современный мир уже нельзя представить без компьютерных технологий, они есть в каждом доме и каждый человек пользуется ими в той или иной степени, будь то телефон или цифровое телевидение. А ведь еще в 60 годах прошлого столетия, компьютер был достоянием исследовательских лабораторий и научных центров. Быстрый темп развития является причиной потребности высококвалифицированных специалистов в области высоких технологий. Появилась необходимость в поднятии уровня профессиональной подготовки выпускников высших учебных заведений. Современный специалист должен проявлять не только узкие знания пользователя, но и быть компетентным в математических основах. Именно, математическая культура является основополагающей для технологического прогресса.

На современном этапе возможность повышения качества подготовки выпускников высших учебных заведений зависит от нескольких факторов. Одним из важнейших является оптимизация учебного процесса, пересмотр учебных планов и программ, с целью привести их к наилучшему соответствию между квалификацией выпускника и изучаемых им предметов, а также важную роль играет поиск новых методов преподавания. Элементарные ошибки в расчетах, неумение анализировать и корректно интерпретировать результаты инженерных расчетов, полученных с использованием пакетов прикладных математических программ, могут привести к техногенным катастрофам [5].

В учебных планах необходимо отвести важную роль углубленному изучению математики, используя методы различных ее разделов, таких как дифференциальные уравнения, математический анализ, функциональный анализ и др. Это позволит развить у выпусков аналитическое мышление, компетентность в решении всевозможных прикладных задач, способность анализировать и устанавливать взаимосвязь при решении профессиональных задач в трудовой деятельности и, соответственно, принимать правильные решения.

Оптимизация учебного процесса – это «научно обоснованный выбор и осуществление наилучшего для данных условий варианта обучения с точки зрения успешности решения его задач и рациональности затрат времени учеников и учителей». Идея оптимизации учебного процесса была выдвинута Ю.К. Бабанским [1] еще в конце прошлого века.

Однако, как было подтверждено исследователями Л.П. Аристовой, М.А. Даниловым, О.Б. Тарнопольским, Л.В. Московкиным, одним из факторов оптимизации процесса обучения являются активизация познавательных процессов студентов и учет их индивидуальных особенностей.

Не секрет, что математическая подготовка абитуриентов и студентов в последние годы переживает кризис. На первый курс высшего учебного заведения поступают студенты со слабой математической подготовкой, с низким уровнем познавательной мотивации и отсутствием желания самостоятельной работы. Процесс обучения студентов сильно осложняется, и возникает потребность в поиске новых форм и методов преподавания.

Если проанализировать причины низкой успеваемости студентов первого курса, то можно выделить следующие:

1) отличие школьной программы в различных школах (поверхностное изучение математических основ, не затрагивающее доказательства различных утверждений, и как следствие, неумение обосновывать то или иное решение);
2) наличие пробелов в знаниях, навыках (неспособность самостоятельно решить поставленную задачу);
3) индивидуальные особенности школьника (например, медлительность при принятии решения, неуверенность в полученном результате);
4) неправильно сформированная система оценивания знаний (важен результат, а не процесс обучения).

В настоящее время методология преподавания математики ориентирована на так называемого «среднего студента», что приводит к ярко выраженной разнице в успеваемости студентов уже в конце первого года обучения. Студентам с низким уровнем подготовки сложно успевать за остальными. Загруженность образовательного процесса, нехватка времени на самостоятельную работу приводит к еще большему разрыву и, как следствие, отсутствие у студента всякого желания получать новые знания, умения и навыки [3].

Для того, чтобы ликвидировать низкий начальный уровень подготовки, учитывая индивидуальные особенности каждого ученика, а также повысить мотивацию к обучению, целесообразно разработать учебное пособие по разделам математики, содержащие задания нескольких уровней.

В пособии все задания делятся на четыре уровня. Первый уровень предназначен для восстановления знаний, полученных в школе. Решая такие задачи, ученик не только активирует имеющиеся знания, но и постепенно заполняет пробелы. Это позволит студенту подготовиться к изучению нового материала, а также поднимет мотивационную составляющую.

Второй уровень задач – это простые задачи по изучаемому предмету, для решения которых, требуются только школьные знания и умение повторить по

образцу. На данном этапе у студента появится уверенность в собственных силах, что приведет к развитию самостоятельность при решении упражнений. Именно, здесь сотрется разница между полученными знаниями, умениями и навыками в школе.

Третий уровень задач направлен на освоение преподаваемого на лекции материала и применении его для решения конкретных упражнений. Это активирует мыслительную деятельность студента.

Последний уровень задач направлен на активацию исследовательской деятельности студента и подготовке к дальнейшей научной деятельности.

Таким образом, данное пособие поможет студенту адаптироваться, разовьет самостоятельность и способность в дальнейшем вести активную научную деятельность.

К наиболее эффективным методам обучения можно отнести применение традиционного и интерактивного подхода [2]. Интерактивный метод может включать в себя, например, дискуссию, как на лекциях, так и на практических занятиях. На лекциях это может быть изучение нового материала посредством диалога со студентами, в котором преподаватель является собеседником. В ходе такого диалога учащиеся сами находят ответы на поставленные вопросы. При этом студенты учатся мыслить, высказывать свою точку зрения, подбирать весомые аргументы и доказывать свое мнение.

На практических занятиях диалог может состоять в виде групповой игры. Для таких занятий преподаватель подбирает задания, в зависимости от изучаемой темы, и определяет сюжет игры, например, викторина. Здесь могут быть задействованы различные видеоматериалы. Однако, не стоит забывать, что на занятии будущий специалист должен научиться принимать решение не только в коллективе. Самостоятельная работа на практическом занятии поможет развить у студента чувство ответственности за совершенные действия. Поэтому интерактивный метод должен сочетать в себе коллективное обсуждение и индивидуальную работу. В ходе такого занятия студенты учатся ставить цель, наблюдать, работать в команде, логически рассуждать, искать взаимосвязи, выделять главные и второстепенные факторы, выстраивать цепочку доказательств и принимать решение. Контроль знаний обучаемых при интерактивном методе обучения должен осуществляться по ходу занятия [4].

В результате таких занятий у студента разовьется логическое мышление, что позволит правильно оценить любую ситуацию, поставить конечную цель, выделить этапы достижения этой цели, нести ответственность за свое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1.Бабанский Ю.К., Паташник М.М. Оптимизация педагогического процесса (в вопросах и ответах) / Под общ. ред. Г.В. Гончарук; авт. вступ. ст. Ю.К. Бабанский. Киев, 1982.
2.Зеленина Н.А. Интерактивные формы и методы обучения математике студентов высших учебных заведений // Концепт. 2014. Т. 16.

3.Ковалева Л.А. Математические основы информационных технологий в деятельности органов внутренних дел. В сборнике: Проблемы информационного обеспечения деятельности правоохранительных органов. Материалы 2-й международной научно-практической конференции. 2016. с. 262-264
4.Ковалева Л.А., Чернова О.В. Особенности преподавания математики в образовательных организациях системы МВД России. В сборнике: Проблемы информационного обеспечения деятельности правоохранительных органов. сборник статей 5-й Международной научно-практической конференции. 2019. С. 156-159.
5. Миншин М. М. Формирование профессионально-прикладной математической компетентности будущих инженеров: на примере подготовки инженеров по программному обеспечению вычислительной техники и автоматизированных систем: дис. канд. пед. наук. – Тольятти, 2011. – 286 с.

УДК 501

НЕОБХОДИМОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

Л.А. Ковалева
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)
e-mail: *kova1eva1ida@yandex.ru*
О.В. Чернова
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)
e-mail*: chernova_olga@bsu.edu.ru*

Авторы полагают, невозможно заменить обучение дисциплин математического цикла, обучением ряду ее приложений. Не менее важно разъяснять сущность математических понятий, учитывать внутреннюю логику самой математики. В противном случае подготовленные инженеры-специалисты могут оказаться бессильными при изучении новых конкретных явлений, так как будут лишены необходимой математической культуры, будут не приучены к рассмотрению абстрактных математических моделей. Авторы надеются, что данная работа будет интересная не только тем, кто преподает математические дисциплины, но и тем, кто так или иначе соприкасается с ней в своей деятельности.

> Прежде всего, учащийся должен быть убежден, что доказательства заслуживают того, чтобы их изучали, что они необходимы…
> Цель юридического доказательства состоит в том, чтобы устранить сомнения – но именно такова и самая очевидная, и самая естественная цель математического доказательства…
> Только математику-профессионалу… может доставить удовольствие формальное обоснование каждого шага длинной цепочки рассуждений
>
> *Дж. Пойя* [1, с. 371]

Научно-технический прогресс и социально-экономические изменения, происходящие в последнее время в нашей стране, оказывают активное воздей-

ствие в том числе и на уровень образования выпускников высших учебных заведений и, в частности, на подготовку современных инженеров-специалистов. Завершая обучение в том или ином ВУЗе, будущий специалист должен быть готов к постоянному саморазвитию и самосовершенствованию.

Исходя из этого в современной науке и технике необычайно большое число будущих инженеров, юристов и офицеров полиции [2], социологов и т. д. нуждается в серьезной математической подготовке. Так, именно знание методов фундаментальных математических дисциплин дает специалистам возможность заниматься исследованием новых профессиональных проблем, использовать полученные теоретические достижения на практике. Естественно полагать, что богатый приобретенный опыт применения математических знаний к решению прикладных задач скажется и на квалификационной деятельности будущего специалиста.

Поэтому типичным заблуждением является тот факт, что математика не нужна. Еще М. В. Ломоносов писал: «Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит».

Воспитание привычки думать и умения правильно рассуждать, причем не только при решении задач математического характера,– одна из важнейших целей курса математики [3, с. 42].

Кроме того, систематическое изучение математических дисциплин развивает личностные качества человека: усидчивость, сосредоточенность, настойчивость и целеустремленность. Было бы неплохо для наших будущих инженеров-специалистов заложить эти качества еще в школьные годы. «Кто пропитался с детства математикой в такой мере, что усвоил себе ее неопровержимые доказательства, тот так подготовлен к восприятию истины, что нелегко допустит какую-нибудь фальшь», – говорит П. Гассенди [1]. Приведем еще одну цитату академика В. И. Арнольда. «Знакомство с математикой учит отличать правильное рассуждение от неправильного. А без этого умения человеческое сообщество превращается в легко управляемое демагогами стадо… Математическая безграмотность губительнее костров инквизиции» [4].

Тем не менее приходится констатировать тот факт, что школьное математическое образование по большей части несовершенно и не дает выпускникам общеобразовательной школы фундаментальных знаний, что служит определенным тормозом для продолжения вузовского математического образования на должном уровне.

В высшем профессиональном образовании также присутствуют определенные негативные моменты, одним из которых, если не самым важным, является сокращение аудиторных часов на изучение математических дисциплин.

Естественно, что все вышеперечисленное приводит к снижению качества математического образования, а, следовательно, уровня математической культуры обучающегося. Между тем ее уровень после завершения обучения в ВУЗе должен обеспечить умение разбираться в математических методах, необходимых для работы по специальности, но не изучавшихся в вузе, умение читать нужную для этого литературу, умение самостоятельно продолжать свое мате-

матическое образование. Достаточно глубокое математическое образование способствует также и повышению мотивации изучения специальных технических дисциплин, где математика становится инструментом открытия «нового», позволяет осуществлять творческий процесс разработки новой техники и технологий на качественно более высоком уровне.

Бесспорно, математика всегда считалась одним из самых трудных предметов. Здесь усвоение знаний требует серьезных интеллектуальных усилий, направленных на понимание и запоминание правил, на удержание этих знаний в активной памяти на протяжении всего курса обучения. Большинству обучающихся не подходит традиционный аксиоматически-логический стиль преподавания математики. И как следствие, определенной тенденцией является то, что все большее количество обучающихся, при изучении математики, ограничиваются только мыслями об аттестате. Время, проведенное на курсах математики, ими потрачено совершенно впустую. Так не лучше ли потратить на математику свое время и силы с максимальной для себя пользой, если уж этот предмет является основным даже для гуманитариев?

Изменив стиль преподавания, сделав изложение математического материала наглядным, при помощи большого количества геометрических иллюстраций и разнообразным, включив в лекционный курс интересные сведения из истории математики [5] можно изменить отношение к математике и повысить интерес к ее изучению. Надо сделать математику доступной и, как следствие, интересной.

Как показывается наш личный опыт преподавания математики в гуманитарных и технических ВУЗах, вполне реально преподавать эту науку так, чтобы студенты стали говорить: «Нам это интересно!».

Конечно курс математики для инженеров в настоящее время обязан учитывать современное интенсивное развитие разветвленной системы идей, понятий и методов, лежащих в основе приложений математики. Очевидно, что в процессе деятельности усвоения математических знаний студенты запоминают не только формулы, но и приемы их обоснования.

Как известно, в практической деятельности инженера математические знания используются не в виде готовых формул, а в виде реализации тех идей, которые лежат в основе обоснования той или иной формулы. [6, с. 143]

Необходимо подчеркивать, что конечной целью прикладного математического исследования является не создание абстрактной логической схемы, а эффективное решение вопроса, лежащего за пределами математики.

Для этого должны применятся любые разумные средства: все методы существенного приближения к истине достойны уважения! [3, с. 42]

В результате приобретенных в процессе обучения математических знаний у учащегося появляется то, что обычно называется математической культурой. Ее уровень после завершения обучения в ВУЗе должен обеспечить умение разбираться в математических методах, необходимых для работы по специальности, но не изучавшихся в вузе, умение читать нужную для этого литературу, умение самостоятельно продолжать свое математическое образование.

Достаточно глубокое математическое образование способствует также и повышению мотивации изучения специальных технических дисциплин, где математика становится инструментом открытия «нового», позволяет осуществлять творческий процесс разработки новой техники и технологий на качественно более высоком уровне.

В заключение, итог отметим, что на наш взгляд преподавание математики в ВУЗах должно быть подчинено следующим целям:

- ✓ ознакомить обучающихся с основными теоретическими сведениями, которые будут им необходимы для изучения общенаучных, общеинженерных и специальных дисциплин;
- ✓ развить логическое и алгоритмическое мышление;
- ✓ обучить студентов соответствующему математическому аппарату;
- ✓ выработать первичные навыки математического исследования прикладных вопросов;
- ✓ выработать умение самостоятельно разбираться в математическом аппарате, применяемом в литературе, связанной со специальностью студента;
- ✓ воспитать у студентов прикладную математическую культуру;
- ✓ познакомить обучающихся с ролью математики в современной жизни и особенно в современной технике.

К сожалению, в нынешних условиях ослабления школьной подготовки и постоянной борьбы кафедр против сокращения часов, отводимых на курс математики, все вышеперечисленные цели имеют лишь ориентировочный характер. Но и этот ориентир просто необходим!

ЛИТЕРАТУРА

1. Хрестоматия по истории математики: учеб. пособие для студ. физ.-мат. пед. ин-тов / под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение. – 1976. – 318 с.
2. Ковалева Л.А., Чернова О.В. Особенности преподавания математики в образовательных организациях системы МВД России. – Сб. статей 5-й Международной научно-практической конференции. – Белгород. – 2019. – С. 156-159.
3. Мышкис А.Д. О преподавании математики прикладникам. – Математика в высшем образовании. – № 1. – 2003. – С. 37-52.
4. Арнольд В.И. Математика с человеческим лицом. – Природа. – 1988. – №3. – С. 23-27.
5. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. – В 2 томах: пер. с нем. Ф. Клейн; под ред. В. Г. Болтянского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1987. – Т. I: Арифметика. Алгебра. Анализ. – 432 с.
6. Дорофеев С.Н., Давыдова Н.В., Пильщикова И.Ю. Гуманитаризация математического образования как фактор повышения качества подготовки будущих инженеров. – Изв. ВУЗ. Поволжский регион. Гум. науки. – Пенза. – 2010. –№ 2(14). – С. 143-152.

УДК 377.5

О РОЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНЦИИ СТУДЕНТОВ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ И РАЗВИТИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

А.В. Кокорев, к.ф.-м.н.
ФГБОУ ВО «Петербургский государственный университет путей сообщения имени Александра I»
e-mail: *pears911@mail.ru*
С.С. Орехова
МБОУ «Жилинская СОШ» Орловского района Орловской области
e-mail: *orekhovass1995@gmail.com*
Ю.В.Чернобровкина, асп.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *nikeli2009@yandex.ru*
Е.Е. Сучкова, к.э.н.
ФГБОУ ВО «Петербургский государственный университет путей сообщения имени Александра I»
e-mail: *suchkova@otjt.ru*

В статье исследуются проблемы связанные с ролью математического образования при формировании и развитии профессиональных компетенций у студентов среднего профессионального образования технического профиля.

Ключевые слова: математическое образование, математическая компетенция, компетентность, профессиональные компетенции, среднее профессиональное образование, компетентностый подход, предметная компетентность.

Математика всегда играла важную роль в формировании стиля мышления у студентов, что на сегодняшний момент не только не утратило своей значимости, а стало характерной особенностью развития образования 20-21 веков. Сегодня мы наблюдаем повышение важности математических знаний для специалистов разных профессий, в частности это касается студентов технических специальностей СПО [2].

Для формирования общих и профессиональных компетенций студенту необходимо освоить ряд учебных дисциплин, имеющих общепрофессиональное значение. Каждая учебная дисциплина способна внести вклад в повышение качества среднего профессионального образования. Значительная роль в этом принадлежит математике как универсальному междисциплинарному языку для описания и изучения объектов и процессов.

Концепция долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации, национальный проект «Образование», национальная доктрина образования в Российской Федерации, стратегия инновационного развития Российской Федерации на период до 2020 года, Государственные образовательные

стандарты являются основными документами, которые характеризуют стратегию развития образования в Российской Федерации. Основной целью этих документов является повышение качества образования и приведение его в соответствие с мировыми стандартами. В соответствии с новым федеральным государственным образовательным стандартом третьего поколения, основной акцент в учреждениях среднего профессионального образования делается на формирование профессиональных компетенций.

В настоящее время компетентностный подход является основным при реализации образовательной программы согласно ФГОС последнего поколения. Основное отличие компетентностного подхода от традиционной парадигмы заключается в том, что именно профессиональная компетентность и предметные компетенции составляют основы содержания подготовки в СПО.

Компетентность и компетенции выпускников СПО являются основным результатом учебной деятельности. Оценка уровня их сформированности определяет уровень качества всей подготовки будущих выпускников.

Отсюда следует, что качество математической подготовки в учреждениях СПО нужно реализовывать в соответствии с требованиями по формированию профессиональной компетенции у студентов. От уровня математической подготовки выпускников в большей степени зависит качество сформированности не только математической (как частное), но и профессиональной (итог, к чему стремиться) компетентности будущих выпускников СПО технического профиля.

В настоящее время математическая теория и являющиеся его основой математические методы и математические модели активно используются в различных сферах человеческой жизнедеятельности.

Очевидно, что на сегодняшний день, математический аппарат служит не столько для общего развития и для проведения различных расчетов, а в основном для развития математического склада ума. Математическое мышление является основой для дальнейшей практической деятельности специалистов технического профиля.

Единой целью всех математических курсов различных специальностей в системе СПО должно являться развитие умений использовать изученные ранее математические методы, совершенствование математической интуиции, формирование математической культуры.

Выпускники СПО должны владеть математическим аппаратом, который требуется для решения профессиональных практических задач, иметь достаточный уровень развития логического мышления, навыки перевода задачи профессионального уровня на язык математики.

Качественная математическая подготовка выпускников СПО будет максимально эффективно способствовать развитию профессионально значимых качеств, а следовательно, и формированию профессиональных компетенций. Для этого объем и содержание математических курсов должно соответствовать требованиямпрофессиональныхкурсовосновнойпрофессиональнойобразо-

вательнойпрограммы, а также быть частью единой системы естественнонаучных и специальных дисциплин.

Вопросами формирования и развития компетенций и компетентности исследовали многие ученые, такие как: Селевко Г.К., Дж. Равен, Краевский В.В., Каспиржак А.Г., Хуторской А.В., Деркач А.А., Зимняя И.А., Павловская А.М., Деркач А.А., Денищева Л.О., Глазков Ю.А. и др.

Теоретическим исследованием предметных компетенций занимались Э.Ф. Зеера, Н.В. Краевский, А.В. Хуторской и др.

Опираясь на анализ научно-методической литературы по исследуемой теме, считаем необходимым отличать синонимически используемые часто понятия «компетенция» и «компетентность».

С точки зрения Хуторского А. В. [6](доктор педагогических наук, член-корреспондент РАО), компетенция «это социальное требование (внешняя норма) к образовательной подготовке ученика, необходимой для его качественной продуктивной деятельности в определенной сфере».

Компетентность же, согласно Хуторскому А.В.[6], это «владение, обладание учеником соответствующей компетенцией (внутреннее качество ученика)».

Современная компетентностная парадигма не отрицает традиционную систему ЗУНов. Компетентность формируется на основе традиционных ЗУНов, но с точки зрения компетентностного подхода, формирование способности студентов СПО применять математические знания при решении профессионально ориентированных задач сводится к следующему:

- возникновению у выпускников прочных фундаментальных знаний;
- методы использования математического аппарата в будущей профессиональной деятельности;
- развитие умений и навыков, способствующих созданию и исследованию математических моделей.

Заметим, что некоторые компетенции оказываются более общими и значимыми, чем оставшиеся. Укажем иерархию компетенций в соответствии с типологией. Содержание образования разделяется на:

1. общее метапредметное,
2. межпредметное,
3. предметное.

В соответствии с этим разделением, выделим 3 уровня компетенций:

1) ключевые компетенции (касаются общего содержанию образования);

2) общепредметные компетенции (связанны с определенным кругом учебных предметов);

3)предметные компетенции

Предметные компетенции являются составной частью профессиональной компетентности. То есть в процессе формирования и развития предметных компетенций и заключается главный принцип, согласно которому и определяется содержание обучения при компетентностном подходе в СПО.

В педагогической литературе существуют различные точки зрения на определение «предметная компетентность». С точки зрения В.Г. Плаховой [4], предметная компетенция – это совокупность знаний, умений, навыков, формируемых в процессе обучения учебном предмету. Предметные компетенции опираются на специфические атрибуты области обучения.

Возникает вопрос, что же следует отнести к математическим компетенциям. Например, В.Г. Плахова[4] определяет математическую компетентность студентов как:

• психологическую готовность применять математические знания в решении актуальных математических научных проблем;

• опыт применения знаний в профессиональной математической деятельности;

• уверенность в своих возможностях успешно использовать математические методы при решении научных математических задач в будущей профессиональной деятельности;

• желание и готовность познавать новое, выходящее за рамки привычной деятельности.

В данной работе под математической компетенцией мы будем понимать способность обучаемых, позволяющую им применять систему усвоенных математических знаний, умений и навыков в исследовании математических моделей профессиональных задач, включающую умения логически мыслить, оценивать, отбирать и использовать информацию, самостоятельно принимать решения.

Математическая компетентность [4] основывается на следующих предметных компетенциях:

• алгебраическая (усвоение математического аппарата, требующегося для решения практико ориентированных задач, опыт построения математических моделей, формирование и развитие логического мышления);

• геометрическая (знание пространственных форм);

• функциональная (знание основных функциональных зависимостей и умение использовать их при исследовании реальных процессов);

• вероятностная (система знаний о понятии вероятности события, необходимая для моделирования физических процессов и явлений, умение применять методы обработки полученных в ходе эксперимента данных);

• топологическая (понимание свойств геометрических фигур на плоскости и в пространстве).

Фундаментальные теоретические математические знания не могут дать современному студенту требуемый набор компетенций, необходимый для будущей профессиональной деятельности. Современные условиях рынка труда требует от выпускников умений и навыков применения своих знаний на практике. Отсюда следует, что целями современного среднего образование должны стать определенные качества самой личности студента, формирование у него необходимых профессиональных компетенций.

Формирование математической компетенции студентов помогает объединить знания, умения и их прикладное применения в решении реальных производственных задач.

Согласно основной профессиональной образовательной программе, формирование общих и профессиональных компетенций в орловском филиале ПГУПС происходит с 2 курса. На 3 и 4 курсах продолжается их развитие и совершенствование.

Именно при изучении общих естественно-научных дисциплин на первых курсах обучения формируется фундамент, который требуется для будущей профессиональной деятельности, а также для дальнейшего развития личности самого студента.

В работе Арюковой А.О. [1] отмечается, что в настоящее время наблюдается существенная разница в подходах и целях при обучении математики в школе и техникуме. Основное отличие среднего профессионального образование проявляется в том, что формирование математических ЗУНов ориентированно в большей степени на практическую деятельность. Полученные знания, умения и навыки студенты должны научиться применять в постоянно меняющихся условиях профессиональной деятельности.

Без внедрения в учебный процесс различных активных и интерактивных методов обучения невозможно добиться развития интереса у студентов к физико-математическим дисциплинам. Необходимо также применение инновационных технологий, образовательных электронных ресурсов, информационных технологий [5], которые способствуют повышению уровня квалификации будущих специалистов.

Для повышения интереса преподавателями возможно использование следующих форм занятий: работа в группах, игровые формы обучения, а также проблемное обучение при решении прикладных и профессиональных задач.

Двумя важными целями обучения математическим дисциплинам в орловском филиале ПГУПС являются:

- фундаментальная математическая подготовка;
- формирование и развитие навыков применение математических знаний при решении профессиональных задач.

Фундаментальная математическая подготовка студентов техникума является базой для его будущей профессии. Именно основные теоретические знания по естественно-научным дисциплинам позволяют выпускнику быстро осваивать современные технологии, ориентироваться в основных принципах организации производства.

Для реализации названных целей требуется решение следующих задач:

- развитие навыков математического моделирования;
- формирование способности применения математических знаний на практике (оказывает решающее влияние на формирование профессиональных компетенций выпускника).

В течение всего периода обучения происходит формирование основных умений математического моделирования профессионально-ориентированных

задач, что способствует объединению теоретических знаний студентов (полученных на 1-2 курсах), и профессиональных требований, что позволяет искать различные способы расширения применения собственных теоретических знаний в будущей профессиональной деятельности.

Задачи, имеющие прикладную направленность, создают у студентов логический стиль мышления, умение оценивать промежуточный и итоговый результат, прогнозировать исход эксперимента, а также сравнивать, анализировать различные профессиональный ситуации, правильно оценивать и трактовать полученные результаты.

Одним из основных средств реализации прикладной направленности в процессе преподавании математических дисциплин является применение межпредметных связей: интегрированные занятие, интегрированные курсы, междисциплинарные курсы [3].Знания, полученные при изучении курса «Математика», «Прикладная математика», «Элементы высшей математики» и «Математическая логика» студентами СПО, будут применяться при решении профессионально-ориентированных задач на таких общепрофессиональных дисциплинах, как «Электронная техника», «Электротехника», «Теория электрических цепей», «Теория электросвязи», «Цифровая схематехника», «Радиотехнические цепи и сигналы».

При разработке содержания математического образования необходимо учитывать вышеизложенное задачи обучения, которые способствуют развитию математической компетентности у студентов СПО. Она выражается в следующих способностях:

- самостоятельное решение профессиональных проблем;
- умение применять математический аппарат;
- логическое мышление;
- анализирование полученных результатов;
- оценивание по соответствующим критериям явлений, процессов, объектов;
- исполнительская дисциплина;
- организованность.

Это и является профессиональными компетенциями, которые выпускник будет использовать в своей будущей профессиональной деятельности.

В заключении отметим, что компетентностый подход является непременным условием для реализации программы подготовки специалистов среднего звена. От качества же сформированности предметной (математической) компетенции зависит уровень профессиональной компетентности будущего выпускника. Значит, содержание курса математики в техникуме на протяжении всего обучения должно быть направленно не только на получение конкретных математических ЗУНов, а на формирование и развитие умения применять весь математический аппарат при решении профессиональных задач, т.е. на формирование математической компетентности. Поэтому необходима соответствующая методика преподавания математических дисциплин по всем специальностям технического профиля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арюкова О.А. Математика в формировании профессиональной компетенции в учреждениях СПО // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. –2018. – №10-1. –С. 37-40.
2. Ермолаева Е.Н.,Е.И. Куимова О важности фундаментальной математической подготовки студентов по направлению «строительство»// Известия ГУ им. Белинского. Физико-математические науки. – 2011. –№26.– С. 463-467.
3. Кокорев А.В., Одиноков А.С., Сучкова Е.Е., Корчевая О.Н. Совершенствование межпредметных связей студентов технических колледжей // Ученые записки.- 2019. – №2. – С. 243-248.
4. Плахова В.Г.Математическая компетенция как основа формирования у будущих инженеров профессиональной компетентности// Известия РГПУ. Аспиранские тетради– 2008. – №38. – С. 131-136.
5. Самсонов В.С, Насанова Б.Б. Информационные технологии как средство формирования профессиональных компетенций в СПО // Вестник Бурятского государственного университета - 2016– №1. – С. 164-166.
6. Хуторской А.В. Компетентностный подход и методология дидактики. К 90-летию со дня рождения В.В. Краевского // Вестник Института образования человека – 2016. – №1. – С. 11.

УДК 53

КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ В УСИЛЕНИИ ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА

И.В. Корогодина, к.пед.н.
Академия ФСО России
e-mail: *ekorogodin@yandex.ru*
Я.В. Яворский
Академия ФСО России
В.А. Халин
Академия ФСО России

В статье представлена методика изложения вопроса изучения комбинационного рассеяния, исходя из представлений классической электродинамики. Авторы освещают вопросы использования рамановской спектроскопии в работе ВКР-усилителя для модуляции сигнала в оптических средствах связи.

Ключевые слова: рассеяние света, комбинационное рассеяние света.

В рамках реформирования высшей школы особое внимание уделяется вопросам усиления прикладной направленности курса физики. В технических вузах важное значение имеет изучение принципов работы современных устройств и приборов, которые нашли применение в технике, в том числе в средствах связи. При передаче информации в оптических линиях связи акту-

альным является преобразование оптического сигнала, который представляет собой электромагнитное излучение.

В результате взаимодействия сигнала со средой возникает физическое явление рассеяния света. Особые свойства оптического сигнала связаны с молекулярным рассеянием в кристаллах. Еще с 1926 года в МГУ под руководством советских физиков Леонида Исааковича Мандельштама и Григория Самуиловича Ландсберга было развернуто экспериментальное изучение данного явления. 21 февраля 1928 года ученым удалось обнаружить молекулярное рассеяние света в кристаллах, о чем 27 апреля 1928 года был сделан доклад на научном коллоквиуме в МГУ. Позднее итоги работы были представлены в научных журналах. В том же 1928 году, фактически на неделю позже, чем Л.И. Мандельштам и Г.С. Ландсберг, молекулярное рассеяние удалось обнаружить индийским физикам Ч.В. Раману и К.С. Кришнану. И в историю физики комбинационное рассеяние света вошло под названием "эффекта Рамана" (Нобелевская премия по физике, 1930 г.) [1].

Физическая суть комбинационного рассеяния оптического сигнала состоит в том, что при взаимодействии с кристаллом возникают спектральные (комбинационные) линии, названные в научное литературе «спутниками», у которых наблюдается существенное изменение частоты по сравнению с падающим излучением. Молекулярное строение вещества определяет количество и расположение комбинационных линий в спектре излучения (рисунок 1).

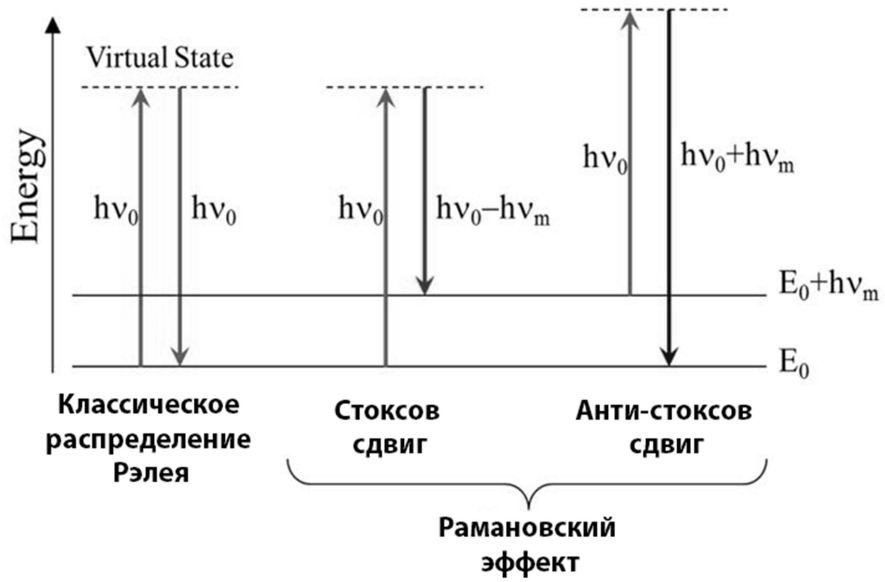


Рисунок 1 – Диаграмма спектральных линий при рассеяниях Рэлея и Рамана

Процесс изменения частоты рассеяния связан с дополнительной генерацией кристаллом светового кванта при одновременном поглощении и излучении порции энергии [2].

В курсе общей физики обосновать появление дополнительных компонент в спектре комбинационного рассеяния методически целесообразно можно исходя из представлений классической электродинамики. Для этого введем мо-

дель двухатомной молекулы в виде двух атомов, разделенных пружиной, где m_1, m_2 – массы атомов, x – смещение, K – прочность связи (рисунок 2).

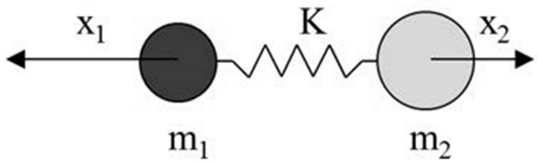


Рисунок 2 – Модель двухатомной молекулы

Используя закон Гука, закон смещения молекулы можно описать с помощью уравнения

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 x_2}{dt^2}\right) = -K(x_1 + x_2). \qquad (1)$$

Обозначим массу $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu$ и полное смещение $(x_1 + x_2) = q$. В результате замены уравнение (1) принимает вид:

$$\mu\left(\frac{d^2 q}{dt^2}\right) = -Kq. \qquad (2)$$

Решение дифференциального уравнения (2) относительно q будет

$$q = q_0 \cos(2\pi\nu_m t), \qquad (3)$$

где ν_m – частота молекулярной вибрации, определяется выражением

$$\nu_m = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{\mu}}. \qquad (4)$$

Из выражений (3) и (4) следует, что молекулы в кристалле вибрируют по гармоническому закону с частотой ν_m, пропорциональной силе сцепления K и обратно пропорциональной массе μ.

При падении на кристалл световой волны происходит взаимодействие ее с молекулой, в результате чего индуцируется дипольный момент:

$$p(t) = \chi E(t) = \chi E_0 \cos(2\pi\nu_0 t), \qquad (5)$$

где ν_0 – частота электрического поля волны. В нашем случае поляризуемость χ можно представить как линейную функцию смещения:

$$\chi(q) = \chi(0) + \left.\frac{\partial\chi}{\partial q}\right|_0 q + \ldots. \qquad (6)$$

Объединяя выражения (3), (5) и (6), получим дипольный момент молекулы в виде:

$$\begin{aligned} p(t) = \chi E = \chi(0) E_0 \cos(2\pi\nu_0 t) + \\ + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial\chi}{\partial q}\right|_0 E_0 q_0 \{\cos[2\pi(\nu_0 - \nu_i)t] + \cos[2\pi(\nu_0 + \nu_i)t]\} \end{aligned} \qquad (7)$$

Анализ выражения (7) позволяет говорить о двух компонентах в составе спектра вторичного излучения кристалла. Первый компонент не меняет частоту падающего света и носит название рассеяние Рэлея. Второй компонент связан с частотой вибрации молекул кристалла и представляет собой рамановское рассеяние. В физике рост частоты известен как антистоксов сдвиг, а ее снижение – как стоксов сдвиг [3].

Комбинационное излучение успешно используется для усиления оптических сигналов в волоконных линиях связи. В кварцевом волокне за счет комбинации стоксовых частот происходит сдвиг частоты сигнала на величину порядка ±13 ТГц. Данный эффект успешно применяется для усиления энергии сигнальной волны оптического сигнала в волоконных линиях связи в полосе частот комбинационного рассеяния за счет энергии волны накачки, увеличивая широкополосность передаваемого сигнала в пределах от 5 до 10 ТГц. Кроме того, за счет рамановского рассеяния можно осуществлять модуляцию падающей волны и обеспечить рост скорости передачи сигналов с 2,5 до 40 Гбит/с.

Таким образом, изучение вопроса о явлении комбинационного рассеяния, исходя из представлений классической электродинамики, становится более наглядным для восприятия студентами технических вузов. Обращение при этом к работе реальных устройств усиливает прикладную направленность курса физики, что позволяет успешно формировать профессиональные компетенции будущих выпускников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландсберг Г.С., Мандельштам Л.И. Новое явление при рассеянии света – предварительное сообщение // Журнал Русского физико-химического общества. Ч. физическая. - Л., 1928. - № 60. - С. 335-338.
2. Брандмюллер И., Мозер Г. Введение в спектроскопию комбинационного рассеяния света – Москва : Мир, 1964. - 628 с.
3. Беккер Ю. Спектроскопия – Москва: Техносфера, 2009. – 528 с.

УДК 372.851

СОСТАВЛЕНИЕ КОНТЕКСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КАК ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПРОЕКТ ШКОЛЬНИКА

Л.В. Кузнецова, учитель математики МБОУ СОШ № 1
e-mail: *larisakyznetsova@yandex.ru*
Л.В. Форкунова, доц.
ГБОУ ВО МО «Академия социального управления»
e-mail: *larisakyznetsova@yandex.ru*

Региональная модель внеурочной деятельности по математике для учащихся начальной, основной и средней школы Московской области среди прочего требует: 1) практико-ориентированного подхода к обучению математике; 2) развития новых форм получения математического образования в дистанционной форме, в частности, математических инернет-проектов на интернет-порталах, в социальных сетях и профессиональных интернет-сообществах. В статье представлен опыт реализации сетевого проекта «Контекстные математические задачи», позволяющего, на наш взгляд, реализовать оба этих требования.

Ключевые слова: сетевые проекты, проектная работа школьников, контекстная математическая задача.

Одной из приоритетных задач обучения математике в школе является формирование умения применять полученные знания на практике. В частности, в Концепции развития математического образования в РФ сказано, что «математическое образование должно предоставлять каждому обучающемуся возможность достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе» [1].

Одним из видов практико-ориентированных математических задач, могущим стать важным инструментом в достижении этой цели являются контекстные задачи.

Под контекстной математической задачей мы понимаем практико-ориентированные задачи, в условии которых описана конкретная жизненная ситуация, отнесенная к субъектному опыту учащегося и осознаваемая им как личностно значимая; требованием которых определяется необходимость: 1) принятия решения на основе имеющихся научных знаний (тренировочная задача); 2) постановки учебной проблемы (мотивационная задача)[2].

Требование личностной значимости решения такой задачи для учащегося, а также практически полное их отсутствие в современной учебно-методической литературе привело нас к созданию сетевого проекта «Контекстные математические задачи» [3], проходящего апробацию в рамках региональной модели внеурочной деятельности по математике для учащихся начальной, основной и средней школы. Участниками проекта на данный момент являются МБОУ СОШ № 1 г.о. Подольск, МБОУ СОШ № 14 г. Сергиев Посад, МОУ ООШ № 9 г.о. Клин Московской области, имеющие статус экспериментальных академических площадок ГБОУ ВО МО АСОУ.

Школам – участникам проекта были поставлены следующие задачи:

1) выделение математического аппарата для конструирования контекстных задач по классам;

2) подбор тематики задач с учетом субъектного опыта и интересов учащихся;

3) составление учащимися-участниками проекта контекстных задач, решающихся с использованием отобранного математического аппарата.

В МБОУ СОШ № 1 г.о. Подольск Московской области поставленные задачи реализуются через проектную деятельность школьников: учащиеся 4, 5, 7 классов в рамках внеурочной деятельности работают над своими проектами «Составляем контекстную задачу».

Процесс создания учеником контекстной задачи может быть использован в качестве проектной деятельности, так как работа по составлению такого рода заданий предполагает все этапы прохождения работы над проектом: постановка проблемы, планирование деятельности, поиск информации, сбор материала, получение продукта (в данном случае условие задачи с предложенными для нее вариантами решений) с последующей его демонстрацией и защитой.

Представим в данной статье опыт работы над составлением контекстных математических задач со своими учениками учителя математики МБОУ СОШ № 1 г.о. Подольск Кузнецовой Ларисы Викторовны.

Любой проект начинается с выбора темы. Для своих проектов «Составляем контекстную задачу» наши ученики выбирали как знакомые по учебникам математики темы: «Поездки», «Покупки», «Режим дня школьника», так и темы из повседневной жизни: «Коммунальные расходы», «Потребительская корзина», «Бюджет семьи». В ходе работы над сюжетом задачи с учениками 5 класса мы составили для некоторых из представленных выше тем (тем с экономическим содержанием)перечень характеристик, которые необходимо включать в условие задачи чтобы обеспечить вариативность решения (таблица 1).

Таблица 1 – Рекомендаций по составлению контекстных математических задач с экономическим содержанием

Тема проекта	Что включаем в условие	Варианты результатов решения
Поездки	1. Маршрут (пункты, которые могут встретиться на маршруте). 2. Средства передвижения -пешком; -различные виды транспорта; - цена на топливо; -расход топлива. 3. Оплата транспорта: - льготы; - транспортные карты типа Стрелка, Тройка и т.п.; - онлайн-оплата бонусами; - др. варианты.	1. Различная протяженность по времени. 2. Различная протяженность маршрута. 3. Различная стоимость поездки.
Покупки	1. Фактор, связанный с ценой: - цена товара в зависимости от ви-	1. Различная стоимость. 2. Различный вес.

	да магазина (виды цен: оптовая, розничная, рыночная (договорная)); - онлайн-оплата бонусами; - сезонность товара; - скидки, акции; - возможность доставки товара; - интернет– покупки; - оплата проезда до пункта покупки. 2. Факторы, связанные с весом покупки. 3. Факторы, связанные с ограничением в денежных средствах.	3. Разный набор товаров.
Коммунальные расходы	1. Расход воды в зависимости от температуры, количества проживающих в квартире, использования техники и т.д. 2. Расход электроэнергии.	Различная стоимость оплаты коммунальных услуг.
Составление бюджета	1.Бюджет семьи. 2. Личные расходы. 3. Потребительская корзина.	Варианты расходов за неделю, месяц.

Пример 1. Задачи учеников 4-5 классов по темам «Режим дня», «Поездки».

Задача №1.

Тебе надо на завтра приготовить домашнее задание по русскому языку, английскому языку, математике и окружающему миру. Домашние задания ты всегда делаешь утром. В школу тебе к 12:20. Во сколько тебе надо проснуться утром что бы успеть в школу?

1 вариант решения (вариант А. Будашевского, ученика 4 В класса)

На умывание я трачу 2 мин., на завтрак 15 мин. Я делаю русский язык 30 мин., английский - 15 мин., математику – 40 мин., окружающий мир – 35 мин., на обед – 10 мин., на одевание – 3 мин., на поход в школу – 10 мин.

1) 15 + 10 = 25 (мин.) – трачу на еду.

2)30+15+40+35=120 (мин.) – трачу на уроки.

3)10+3+2=15 (мин.) – трачу на всё остальное.

4) 25+120+15=160 (мин.) – трачу времени на всё вместе.

5) 160 мин. = 2 ч. 40 мин.

6)12 ч. 20 мин. – 2ч. 40 мин. =9 ч. 40 мин.

Ответ: мне надо проснуться в 9 ч. 40 мин.

2 вариант решения(вариант М. Каменевой, ученицы 4 В класса)

Я трачу на умывание 3 мин., завтракаю 3 мин. Русский язык я делаю 30 мин., английский – 5 мин., математику – 30 мин., окружающий мир – 20 мин. Рисова-

ние у меня начинается в 9 ч. 00 мин. Начинаю выходить за полчаса до начала. Прихожу домой в 11 ч. 00 мин. Одеваюсь 5 мин. На путь в школу трачу 1 мин.
1)30+5+30+20=85 (мин.) – трачу на уроки.
полчаса = 30 мин.
2)9 ч. – 30 мин. = 8 ч. 30 мин. – начинаю выходить на рисование.
Мне придётся делать уроки перед рисованием.
85 мин. = 1 ч. 25 мин.
3)8 ч. 30 мин. – 1 ч. 25 мин. – 3 мин. – 5 мин. – 3 мин = 6ч. 54 мин.
Ответ: мне придётся встать в 6 ч. 54 мин.

Задача №2.(составил ученик 5 Г класса С. Князькин)

Однажды я и мой папа решили поехать в цирк. И перед нами встал вопрос: «Сколько денег нам надо потратить на дорогу?»

Решение:

В цирк мы можем поехать на машине или общественным транспортом (на электричке и метро). Просчитаем стоимость дороги на автомобиле и электричке и метро.

Если ехать на машине, то надо учесть следующее:
1) 100 км в оба конца (от дома до цирка и обратно);
2) расход бензина на 100 км – 10 литров;
3) стоимость 1 литра бензина – 50 рублей;
4) оплата парковки: за первый час – 40 рублей, за каждый последующий – 30 рублей;
5) длительность спектакля 2 ч 30 мин.
Получаем:
1) 50х10 = 500 (руб.) – стоимость бензина на дорогу.
2) 40+30+ 30 = 100 (руб.) – стоимость стоянки.
3) 500 + 100 = 600 (руб.) – стоимость дороги.
Если же мы поедем на электричке и метро, получаем такие расходы:
1) стоимость билета (Гривно – Курский вокзал – Гривно) для взрослого – 264 рубля, для школьника – 132 рубля.
2) стоимость 1 поездки в метро – 55 рублей.
Тогда:
1) 264 + 132 = 396 (руб.) – стоимость проезда на электричке.
2) 55 х 4 = 220 (руб.) – стоимость проезда на метро.
3) 396 + 220 = 616 (руб.) – затраты на дорогу.

Ответы: затраты на дорогу в зависимости от выбора видов транспорта составят либо 600 рублей, либо 616 рублей. Так как большой разницы в стоимости поездки нет, то можно использовать для выбора вида транспорта другой критерий, например, комфорт.

Пример 2 Рекомендации по составлению контекстных математических задач, разработанные учениками 7 класса по теме «Путешествия».

Семиклассники предложили составлять более сложные сюжеты, используя знания географии. Вот как выглядят их рекомендации по теме «Путешествия», которые они условно разделили на 3 блока.

1 блок. Сюжетная линия.

1.1. Цель путешествия:

- спортивная – пройти маршрут, преодолевая препятствия (примеры препятствий см. ниже);
- краеведческая – познакомиться с краеведческими объектами;
- научно-исследовательская (провести научное/учебное исследование);
- развлекательно-туристическая (порадоваться красотам и отдохнуть).

1.2. Маршрут:

- длительность (время: часы, дни);
- протяженность (км);
- сложность (наличие препятствий: склоны, леса разной проходимости, переправы через реки);

1.3. Исследуемые объекты:

- краеведческие (мемориалы, памятные места);
- биологические (растения, животные);
- экологические (загрязненные места города, района и т.д.; поиск разных растительных сообществ: злаковый луг, сосновый бор, пойменный луг и т.д.);
- географические (исследование разных форм рельефа, разные виды почвы, исследование малых рек, озер);
- палеонтологические и т.д.

2 блок. Экономическая составляющая.

2.1. Затраты на:

- обеспечение (в зависимости от цели);
- снаряжение (в зависимости от цели похода)
- продукты питания (в зависимости от длительности и есть ли возможность закупить по дороге).

2.2. Способ передвижения:

- только пешком;
- на транспорте и пешком.

3 блок. Непредусмотренное.

Дополнительные моменты общего характера, которые могут влиять на организацию похода, например, наличие населенных пунктов на маршруте, погодные условия и т.п.

Безусловно, перечень можно продолжить. Все зависит от осведомленности авторов их желания, возможностей, выбора темы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Концепция развития математического образования [Электронный ресурс]. URL: http://www.firo.ru/wp-content/uploads/2014/12/Concept_mathematika.pdf (дата обращения 06.09.2019).
2. Форкунова Л.В. Контекстные математические задачи в системе средств формирования финансовой грамотности учащихся / Л.В. Форкунова, М.В. Шабанова // Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе в свете идей Л.С. Выготского. Материалы III Международ-

ной научной конференции, 17 – 19 ноября 2016 г. Под ред. М.В. Егуповой, Л.И. Боженковой – ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет» (МПГУ), Издатель Захаров С.И. («СерНа»), 2016.
3. Сетевые проекты для школьников. [Информационная система]. URL: https://schoolprojects.ru/ (дата обращения 10.09.2019).

УДК 372.851

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ФИНАНСОВОЙ ГРАМОТНОСТИ

Н.И. Лобанова
МУДО ЦВР «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска»
e-mail: *lobantchik@yandex.ru*

Финансовая грамотность населения – актуальная проблема нашего общества. Для решения поставленной проблемы Министерство финансов и Всемирный банк с 2011 года реализуют проект «Содействие повышению уровня финансовой грамотности населения и развитию финансового образования в РФ»; разработана Национальная стратегия повышения финансовой грамотности на 2017-2023 годы [1].

Переход общества к рыночной экономике требует не только создания соответствующих экономических, финансовых, управленческих структур, но и формирования у людей финансовой грамотности. Экономически грамотные люди – это люди способные самостоятельно принимать грамотные финансовые решения. Знания о принятии экономических решений можно почерпнуть из специальной литературы, а умение грамотно экономически мыслить достигается только при решении практических задач. В связи с этим одной из важнейших задач современной школы является воспитание детей, как личности с развитым экономическим мышлением [2].

Экономическое образование опирается на экономическое мышление. Первичная характеристика экономического образа мышления – это калькуляция затрат и выгод, на которой основывается экономическое поведение [3].

Люди преследуют свои собственные цели и интересы, приспосабливаются к поведению друг друга, хотя и соблюдают при этом особые правила игры. Права собственности и другие правила игры определяют, какой выбор необходимо соблюдать [4].

Вопрос о грамотном распоряжении финансами является одним из самых важных вопросов в жизни современного человека. Но в большинстве своём выпускники стандартной общеобразовательной школы не может рассчитывать, оценивать и прогнозировать различные риски. Особая роль в экономическом образовании школьника принадлежит именно математике. Так именно решение практико-ориентированных финансовых задач позволит адаптировать теорети-

ческие основы школьного курса математики и лишенные практического смысла задачи к жизненным ситуациям, с которыми учащимся придётся сталкиваться в будущем [2;5;6;7].

В учебниках по математике можно найти задачи, в которых используются такие математические понятия, как себестоимость, прибыль, рентабельность, доход, объём производства продукции (работ и услуг). Но школьники часто видят в задаче только повод для математических действий. Её экономическое содержание проходит мимо внимания. Перед решением таких задач необходимо уяснить встречающиеся экономические понятия и то, как они связаны между собой, т.е. понять экономическую проблему [8].

В настоящее время развитие экономики (на любом из возможных уровней) существенно зависит от действующей системы кредитования. Поэтому владение методами решения задач о кредитах очень актуально. Рассмотрим задачи, в которых можно использовать различные схемы (математические модели) выплаты кредита банку со стороны заёмщика. Напомним, что кредит – это денежные средства, предоставленные банком заёмщику под определённые проценты за пользование деньгами [9], т.е. заёмщик отдаёт банку после окончания срока кредитования большую сумму, чем размер кредита.

Выбирая кредитную программу, потенциальные заёмщики ориентируются на процентную ставку кредита, хотя кроме этого существуют и различные методы погашения кредита, влияющие на размер денежных средств, потраченных на оплату услуг банка.

Существуют два метода погашения кредита: дифференцированные и аннуитетные платежи [10].

Итак, заёмщику необходимо погасить кредит (вернуть занятую у банка сумму денег) и оплатить услуги банка в соответствии с установленной процентной ставкой. Так вот, алгоритмом выплаты этих двух составляющих и отличаются дифференцированные и аннуитетные платежи.

При решении финансовых задач, применяя математические методы, необходимо освоить следующую последовательность умений [11]: излагать экономическую проблему; составлять соответствующую математическую модель; рационально переходить от одной модели к другой; анализировать полученные решения и правильно их трактовать.

С целью овладения соответствующими способностями рассмотрим решение следующей практической задачи: молодой семье при покупке квартиры недоставало 720 000 (0,72 млн.) руб. На эту сумму под 12% годовых на три года близлежащий банк согласился предоставить кредит. Какие схемы кредитных расчётов возможны, если, с учётом ежемесячных доходов семьи, за три года невозможно накопить (и передать банку) более 900 000 руб. Т.к. все расчёты оценочные, то будем округлять до тысяч рублей.

Самая простая и самая жёсткая схема – кредит вместе с кредитными процентами целиком возвращается через три года, т.е. когда проценты начисляются на проценты. Тогда долг в конце первого года составит $(0{,}72 \cdot 1{,}12)$ млн. руб., после второго $(0{,}72 \cdot 1{,}12) \cdot 1{,}12$ млн. руб., после третьего

$((0{,}72 \cdot 1{,}12) \cdot 1{,}12) \cdot 1{,}12 = 0{,}72 \cdot (1{,}12)^3 \cong 1{,}011$ млн. руб. Переплата за проценты составит около 290 000 руб. (40% от кредита) и не уложится в финансовые возможности семьи.

Вторая схема – аннуитет, предполагает равномерное погашение всего долга (кредит плюс кредитные проценты в равных долях на каждом платёжном периоде (промежутке времени, на котором начисляются проценты: год, месяц, день)).

Итак, нам надо подсчитать сумму всех выплат за три года при ежегодном начислении процентов и ежегодном погашении части долга.

Построим математическую модель выплат.

Пусть x руб. – сумма ежегодных выплат, S_0 руб. – сумма кредита, S_n руб. - долг после n лет использования кредита.

Тогда в начале года, следующего после оформления кредита, долг заёмщика возрастёт на 12% и будет равен $S_0 \cdot 1{,}12$, а после оплаты первого взноса $1{,}12S_0 - x$; на эту сумму начисляются проценты в следующем году: долг после оплаты второго взноса $(1{,}12S_0 - x) \cdot 1{,}12 - x$,

а после третьего $((1{,}12S_0 - x) \cdot 1{,}12 - x) \cdot 1{,}12 - x$.

После трёх лет использования кредита он должен быть погашен, т.о. последнее выражение должно быть равно нулю.

Из этого уравнения $x = \dfrac{(1{,}12)^3 S_0}{1{,}12^2 + 1{,}12 + 1}$

при $S_0 = 720\,000$

$x \cong 300000$ руб.

За три года будет выплачено $3x = 900\,000$ руб., переплата 180 000 руб.

При этом в первый год на погашение процентов кредита пойдёт

$S_0 \cdot 1{,}12 = 86{,}4$ тыс. руб., а на погашение самого кредита $x - 86{,}4 \cong 213{,}6$ тыс. руб.

Во второй год соответственно 60,8 тыс. руб. и 239,2 тыс. руб. В третий год 32 тыс. руб. и 268 тыс. руб.

Из этих данных следует, что если заёмщик досрочно, например, через 2 года, погашает кредит, то сокращает свою переплату на 32 тыс. руб.

Однако, похожие экономические задачи могут требовать нахождения более общего решения. В этих случаях вместо конкретных значений при построении математической модели используются параметры.

Пример. Необходим кредит в S_0 рублей. Банк может его выдать на срок n некоторых периодов (лет, месяцев, дней) под процентную ставку p в каждом из обозначенных периодов (p выражено десятичной дробью, например, p = 0,12 при 12%) и пусть x руб. – сумма возврата долга в каждом периоде кредитования. Обозначим S_n руб. – сумма долга после n периодов кредитования, а S –

сумма всех выплат за весь срок кредитования. Найти зависимость S от других параметров и провести анализ возможностей её минимизации.

Решение:

В последний день каждого периода кредитования оставшаяся сумма долга умножается на число $m = 1+ p$; после первой выплаты сумма долга составит $S_1 = S_0 \cdot m - x$ руб. [7]., после второй выплаты:

$$S_2 = S_1 \cdot m - x = (S_0 \cdot m - x) \cdot m - x = S_0 m^2 - x(1 + m) \text{ руб.},$$

после третьей выплаты

$$S_3 = S_2 \cdot m - x = S_0 \cdot m^3 - x(1 + m + m^2) \text{ руб.}$$

Используя метод математической индукции можно доказать, что

$S_n = S_0 \cdot m^n - x(1 + m + m^2 + ... + m^{n-1})$.

Так как в скобках возрастающая геометрическая прогрессия со знаменателем $m > 1$, то её сумма $1 + m + m^2 + ... + m^{n-1} = \dfrac{m^n - 1}{m - 1}$.

Окончательно имеем

$$S_n = S_0 m^n - \frac{m^n - 1}{m - 1} \cdot x \text{ - формула,} \qquad (1)$$

связывающая все исходные параметры при условии, что величина x от периода к периоду не изменяется, тогда $S = n \cdot x$.

Формула (1) содержит 5 параметров: S_n, S_0, $m = 1 + p$, n, x. При фиксированных значениях четырёх из них (при отсутствии каких-то других дополнительных условий) всегда можно найти значение пятого.

Например: $S_0 = \dfrac{1}{m^n}\left(S_n + \dfrac{m^n - 1}{m - 1}x\right)$; $x = \dfrac{S_0 m^n - S_n}{m^n - 1}(m - 1)$.

Если $m = 1{,}12$; $S_n = 0$, $n = 3$ и $x = 300\,000$, то $S_0 \approx 720\,000$ руб.

Если $m = 1{,}12$; $S_n = 0$, $S_0 = 720\,000$ и $n = 4$, то $x \approx 237\,000$ руб.

Т.е., если кредит взять не на 3, а на 4 года при тех же других условиях, то ежегодные выплаты уменьшатся на 300 000 – 237 000 = 63 000 рублей, но общие выплаты увеличатся на $4 \cdot 237000 - 3 \cdot 300000 = 48000$ руб.

Теперь решим аналогичную исходную задачу (построив математическую модель), используя схему дифференцированных платежей.

Задача. В июле планируется взять кредит в банке на сумму S_0 руб. на некоторый срок, целое число x лет. Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастает на p процентов по сравнению с концом прошлого года; с февраля по июль каждого года надо выплатить часть долга в таком размере, чтобы в июле каждого года долг был на одну и ту же сумму меньше долга на июль прошлого года. На сколько лет (x) надо взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения составит S рублей [12].?

Решение. Итак, долг выплачивается x лет, тогда каждый год гасится S_0 / x рублей, а после первого года выплата составит $\frac{S_0}{x} + S_0 \cdot p$, сумма долга $S_0(1+p) - \frac{S_0}{x} - S_0 \cdot p = \frac{(x-1)}{x} S_0$.

После второго года следует выплатить $\frac{S_0}{x} + \frac{(x-1)}{x} S_0 \cdot p$, а долг станет равным $\frac{x-1}{x} \cdot S_0(1+p) - \frac{S_0}{x} - \frac{(x-1)}{x} S_0 \cdot p = \frac{x-2}{x} S_0$.

Аналогично можно определить, что долг после 3-х лет станет равным $S_3 = \frac{x-3}{x} \cdot S_0$ руб., а после x лет $S_x = \frac{x-x}{x} \cdot S_0 = 0$.

Размер всех выплат после x лет составит:

$$S = \left(\frac{S_0}{x} + pS_0\right) + \left(\frac{S_0}{x} + p\frac{x-1}{x} S_0\right) + \left(\frac{S_0}{x} + p\frac{x-2}{x} S_0\right) + \ldots + \left(\frac{S_0}{x} + p\frac{1}{x} S_0\right) =$$

$$= S_0 + p\frac{S_0}{x}(x + x - 1 + x - 2 + \ldots + 1).$$

Выражение в скобках – сумма x членов арифметической прогрессии и поэтому равна $\frac{x+1}{2} \cdot x$.

Окончательно имеем: $S = S_0 + p\frac{S_0}{x} \cdot \frac{x+1}{2} \cdot x$ или

$$S = S_0 + \frac{p}{2} \cdot S_0(x+1). \qquad (2)$$

Эта формула моделирует процесс выплаты кредита при дифференцированных платежах и является итоговой формулой. Её можно использовать при проверке правильности расчётов или выборе более экономичной (для заёмщика) схемы кредитования.

Пусть, например, $S_0 = 720$ тыс. руб., $p = 0{,}12$, $x = 3$ (года).

Тогда $S = 720 + 0{,}06 \cdot 720 \cdot 4 = 720 \cdot 1{,}24 = 892{,}8$ тыс. руб.

Т.е. переплата по сравнению с аннуитетом на 10 тыс. руб. больше, но, если заёмщик погасит кредит досрочно, например, через 2 года, то сэкономит

$S_0 + 0{,}06 \cdot S_0(3+1) - S_0 - 0{,}06S_0(2+1) = 0{,}06S_0 \approx 44$ тыс. руб., т.е. больше, чем при аннуитете.

Платежи по годам будут следующими:

первый год: всего 326,4 тыс. руб.: из них погашение кредита 240 тыс. руб., процентов – 86,4 тыс. руб.;

второй год: всего 297,6 тыс. руб.: из них погашение кредита 240 тыс. руб., процентов – 57,6 тыс. руб.;

третий год: всего 268,8 тыс. руб.: из них погашение кредита 240 тыс. руб., процентов – 28,8 тыс. руб.

В формулах (1) и (2) выбирая определённый параметр неизвестным (в зависимости от условий кредитования) мы получаем различные схемы составления математических моделей кредитных расчётов, которые в своём комплексе должны давать одни и те же результаты.

Эту формулу (2) можно использовать при любой продолжительности этапов кредитования.

Анализ расчётных схем кредитования показывает, что схема с дифференцированными платежами хоть и более выгодна, но обычно недоступна заемщикам из-за слишком больших первоначальный платежей. Эта разница тем заметнее, чем на большее количество платежных периодов выдается кредит. Переплата при аннуитетных платежах, выданных на большой срок, может нивелироваться инфляцией и ростом доходов заемщика [12].

Для обеспечения сформированности финансовой грамотности школьников важное значение имеют теоретические знания экономических законов, явлений, понятий; умение находить и использовать информацию, а также умение вырабатывать собственные приемы и способы для принятия самостоятельных решений в стандартных и проблемных ситуациях; формирование навыков использования математических знаний при вычислении основных финансовых показателей [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондаурова И.К. Педагогические условия формирования финансовой грамотности учащихся 5-6 классов // Карельский научный журнал. – 2018. – Т. 7. – 23. – 2. – С. 23-25.
2. Винникова И.С., Кузнецова Е.А. Методы оценки уровня финансовой грамотности в школе// Карельский научный журнал. – 2017. – Т. 6. – 21. – 4. – С. 49-51.
3. Соколова Г.Н., Кобяк О.В. Экономико-социологический словарь, науч. ред. Соколова Г.Н. – Минск : Беларус. Навука, 2013. – 615 с.
4. Экономическое мышление / Технический словарь Том 1 - Режим доступа: http://www.ai08.org/index.php/term/,9da , дата обращения 27.07.2019.
5. Вендина А.А., Чечулина М.А. Практико-ориентированный подход в обучении решению финансовых задач // European Research. – 2016. –13. – 2. – С. 88–91.
6. Буланов Ю.Н., Часовников С.Н., Старченко Е.Н. Финансовая грамотность: системное содержание и практические аспекты применения в деятельности регионального банка//Финансовая аналитика: проблемы и решения. – 2016. – 302 – 20. – С. 33-45.
7. Винникова И.С., Кузнецова Е.А., Шутова Ю.Г., Стародубова Д.С. Педагогические особенности формирования финансовой грамотности у студентов экономических направлений подготовки // Интернет- журнал

«Мир науки» 2016, Том 4, номер 6 http://mir-nauki.com/PDF/39PDMN616.pdf (доступ свободный)
8. Пучков Н.П. Математика в экономике: Учебное пособие / Н. П. Пучков, А.Л. Денисова, А.В. Щербакова - Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. - 80 с.
9. Слепцова А.Н. Экономические задачи в заданиях ЕГЭ по математике // Сборник экономических задач и задач на оптимизацию по математике.- Чурапча, 2017.
10. Гущин Д.Д. Встречи с финансовой математикой [Электронный ресурс] / Д.Д. Гущин // С.-Пб, 2016 - Режим доступа: http: //решуегэ.рф, дата обращения 12.12.2018.
11. Лобанова Н.И. О формировании экономического мышления старшеклассников с помощью математических методов при решении экономических задач // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XV Международной научной конференции (с. Цей,15_20 июля 2019 г.)._Владикавказ: ЮМИ ВНЦ АН, – 2019. – С. 220-222.
12. Лобанова Н.И. Обучение старшеклассников решению экономических задач повышенной сложности // Актуальные проблемы современного образования. – 2019. – 26. – С. 48-58.
13. Вендина А.А. Чечулина М.А. Практико-ориентированный подход в обучении решению финансовых задач // European research. Народное образование. Педагогика. – 2016. – 4. – 14. – С. 88-91.

УДК 51(076.1) (075.4)

О СРАВНЕНИИ ЧИСЕЛ «ВРУЧНУЮ»

И.С. Логунов, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *logun96orel@mail.ru*

В статье приводятся примеры сравнения алгебраических и трансцендентных чисел без использования таблиц, калькулятора и компьютера.

Ключевые слова: действительное число, сравнение, таблицы, калькулятор, компьютер.

1. Трансцендентные числа

В элементарной математике, а также и вышей математике, часто требуется правильно расположить действительные числа на координатной прямой (числовой оси). При этом ни одно меньшее число не должно оказаться правее любого большего его числа. Это легко сделать, работая с числами в десятичной записи. Плохо обстоит дело со сложными радикалами и совсем плохо с различными логарифмами и т.д. Чем-либо кроме линейки и авторучки на экзамене, в частности ОГЭ и ЕГЭ, пользоваться запрещено. Приблизительные вычисле-

ния не годятся из-за возможности неточностей и погрешностей при округлении.

Тем не менее, достойная замена таблицам и калькулятору существует и она достаточно надежна.

Пример: Число π приближённо равно 3,1415926. Докажем это довольно просто. «Туманное» выражение «приближённо равно» заменим конечной серией понятных неравенств (доказать их довольно трудно, но достаточно просто знать их и уметь использовать):

$$3 < \pi < 4\,,$$
$$3{,}1 < \pi < 3{,}2\,,$$
$$3{,}14 < \pi < 3{,}15\,,$$
$$3{,}141 < \pi < 3{,}142\,,$$
$$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416\,,$$
$$3{,}14159 < \pi < 3{,}14160\,,$$
$$3{,}141592 < \pi < 3{,}141593\,,$$
$$3{,}145926 < \pi < 3.145927\,.$$

Теперь ясно, как строго показать, что число $\sqrt{2}$ приближённо равно 1,4142.

2. Иррациональные числа

Сравним числа $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3}$ и 1. Пусть, например $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3} < 1$. Преобразуем это неравенство, в итоге приведя его к какому-нибудь очевидному неравенству, которое будет либо верно - тогда наше предположение справедливо, либо неверно, и тогда $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3} > 1$. Заменим исходное неравенство равносильным ему неравенством $\sqrt{6}-1<\sqrt[3]{3}$, возведем обе его части в куб: $6\sqrt{6}-3\cdot 6\cdot 1+3\cdot\sqrt{6}\cdot 1-1<3$, далее $9\sqrt{6}<22$. Снова возводим обе части неравенства в квадрат, получаем $81\cdot 6<484$ или $486<484$. Получили неверное неравенство, значит исходное предположение также неверно и, значит, $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3}>1$.

Сравним числа $3+2\sqrt{2}$ и $\sqrt{34}$. Не зная, какое из них больше, ставим между ними галочку $\vee$ и считаем её неизвестным знаком неравенства. Убираем радикалы, для этого возводим обе части выражения в квадрат. Через несколько шагов станет ясно, какое из чисел больше, тогда понятно какой знак неравенства означает галочка $\vee$.

$$3+2\sqrt{2}\vee\sqrt{34}\,,$$
$$\Updownarrow$$
$$(3+2\sqrt{2})^2\vee 34\,,$$
$$\Updownarrow$$
$$9+12\sqrt{2}+8\vee 34\,,$$
$$\Updownarrow$$
$$17+12\sqrt{2}\vee 34\,,$$
$$\Updownarrow$$
$$12\sqrt{2}\vee 17\,,$$
$$\Updownarrow$$

$$(12\sqrt{2})^2 \vee 17^2,$$
$$\Updownarrow$$
$$288 \vee 289 \Rightarrow$$

галочка $\vee$ имеет смысл меньше $<$, значит $3+2\sqrt{2} < \sqrt{34}$.

Если оба сравниваемых числа отрицательные, то возводить в квадрат нельзя, так как в результате не будет эквивалентности. В таком случае нужно умножить обе части неравенства на -1 и при этом поменять знак выражения на противоположный. Галочку $\vee$ следует перевернуть и записать $\wedge$.

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee -\sqrt{3}\ ,$$
$$\Updownarrow$$
$$-1-\sqrt{5} \vee -2\sqrt{3}\ ,$$
$$\Updownarrow$$
$$1+\sqrt{5} \wedge 2\sqrt{3}\ ,$$
$$\Updownarrow$$
$$1+5+2\sqrt{5} \wedge 12\ ,$$
$$\Updownarrow$$
$$2\sqrt{5} \wedge 6\ ,$$
$$\Updownarrow$$
$$20 \wedge 36 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ галочка $\vee$ означает меньше $<$ и, в итоге, получим $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} > -\sqrt{3}$.

3. Логарифмы

Сравним числа $\log_2 3$ и $\log_5 8$.

Решение (1-й способ). Так как $1 < \log_2 3 < 2$ и $1 < \log_5 8 < 2$, то удвоим данные числа. Получим $2\log_2 3 = \log_2 9$ и $3 < \log_2 9 < 4$. Аналогично $2\log_5 8 = \log_5 64$ и $2 < \log_5 64 < 3$. Отсюда следует $2\log_2 3 > 2\log_5 8$ и $\log_2 3 > \log_5 8$.

Решение (2-ой способ). Так как $\log_2 3 = \log_4 9$ и по свойству функций $y = \log_t 9$ и $y = \log_5 t$ выполняется цепочка неравенств $\log_4 9 > \log_5 9 > \log_5 8$, то $\log_2 3 > \log_5 8$.

Теперь сравним два числа различной природы (логарифм и корень): $\log_2 11$ и $2+\sqrt{3}$.

Решение. $\sqrt{3} > \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$; $2+\sqrt{3} > 3{,}5 = \log_2(8\sqrt{2}) > \log_2(8\cdot 1{,}4) = \log_2(11{,}2) > \log_2 11$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ткачук В. В. Математика – абитуриенту. Том I – М.: ТЕИС, 1994. – 499 с.

УДК51 (092)

НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ НАСЛЕДИЕ АКАДЕМИКА АЛЕКСЕЯ ВАСИЛЬЕВИЧА ПОГОРЕЛОВА (К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

Р.А. Мельников, к.пед.н., доц.
ФГБОУВО Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина
e-mail: *roman_elets_08@mail.ru*

В статье освещается научно-педагогическое наследие известного отечественного математика, доктора физико-математических наук, профессора, академика Алексея Васильевича Погорелова, а также приводится краткий очерк его жизни.

Ключевые слова: выпуклая геометрия, дифференциальная геометрия, академик, автор, учебник геометрии.

Весной 2019 г. исполнилось 100 лет со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова – известного отечественного учёного-математика, доктора физико-математических наук, профессора, академика АН СССР, академика Национальной Академии Украины, заслуженного деятеля науки и техники Украины, почётного члена Московского математического общества. Его исследования, посвящённые вопросам выпуклой и дифференциальной геометрии, теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, а также теории оболочек по праву вошли в сокровищницу математической науки и принесли их автору всемирную известность. «При этом имя Погорелова знакомо каждому школьнику 1980-х годов прошлого века, поскольку он являлся автором школьного учебника геометрии, выдержавшего множество изданий» [5, С. 58].

А. В. Погорелов

Алексей Васильевич Погорелов родился 3 марта 1919 г.в маленьком городке Короча, в те времена относившемся к Курской губернии[1] (в наше время Короча – административный центр Корочанского района Белгородской области с населением около 6 тыс. жителей) в крестьянской семье. Его родителями были Василий Степанович и Екатерина Ивановна Погореловы[1]. В 1931 г. родители приняли решение переехать в г. Харьков, находившийся примерно в 100 км от их дома. Там шла грандиозная стройка – возводился тракторный завод. Отец будущего учёного устроился на строительство завода, а когда тот начал функционировать – стал работать кузнецом в одном из его цехов. Юного Алексея определили на учёбу в заводскую школу (ныне это средняя школа № 80 г. Харькова). Уже в то время проявились математические способности будущего академика.

[1]Губернско-территориальное деление в СССР было ликвидировано в 1923-1929 гг. и заменено делением на области и края.

Одноклассники, признававшие талант юноши, уважительно величали его «Паскаль». В 1937 г., будучи учеником десятого класса, Алёша Погорелов стал победителем городской олимпиады по математике. Летом того же года он стал студентом математического отделения физико-математического факультета Харьковского университета имени А.М. Горького (ныне Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина[2]). Интерес студента к математике подметил профессор Павел Александрович Соловьев[3] (1890-1945). Он предложил ему изучить книгу Т. Боннезена и В. Фенхеля «Теория выпуклых тел»(1934), написанную на немецком языке. В ней был собран материал, связанный с выпуклыми множествами. Авторы книги, как бы подвели черту под достижениями представителей немецкой геометрической школы К.Г. Брунна (1862-1939), Д. Гильберта (1862-1943) и Г. Минковского (1864-1909), выполнив весьма детальный обзор результатов, полученных в выпуклой геометрии евклидова пространства, вплоть до первой трети XX века. В монографии были описаны следующие вопросы: теория смешанных объёмов, изопериметрия, геометрические проблемы обобщённых решений и ряд других. После знакомства с этой книгой геометрия стала для Алексея Васильевича основным и самым любимым разделом математики. Но завершить обучение в университете ему не удалось, так как в октябре 1941 г. армия III рейха оккупировала г. Харьков.

Университет был эвакуирован в г. Кзыл-Орда (Казахстан), где во время Великой Отечественной войны функционировал Объединённый украинский университет. Студента Погорелова призвали на военную службу и отправили на лейтенантские курсы в Военно-воздушную академию им. Н.Е. Жуковского. В 1943–44 гг. как специалист по авиационным двигателям он стажировался в регулярной армии. А.В. Погорелов проходил военную службу в составеIII-го Украинского фронта. За участие в войне Алексей Васильевич был награждён орденом Отечественной войны II степени.

После окончания Академии в 1945 г. лейтенанта А.В. Погорелова направили на работу в Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ) инженером-конструктором. Он был включён в группу, занимавшуюся проектированием первой баллистической ракеты. Но Алексей Васильевич мечтал завершить университетское образование, чтобы продолжить занятия любимой геометрией. Поэтому он обратился к декану механико-математического факультета МГУ И.Г. Петровскому (1901-1973) с вопросом о возможности завершения своего обучения в стенах главного вуза столицы. Когда руководитель факультета узнал, что Алексей Васильевич четыре года учился в Харькове и кроме этого окончил Военно-воздушную академию им. Н.Е. Жуковского, то признал,

[2]Назван в честь своего основателя – Василия Назаровича Каразина (1773-1842). Харьковский университет учреждён в ноябре 1804 г. на основании грамоты, подписанной императором Александром I (1777-1825).

[3] Первый заведующий кафедрой общей математики Харьковского университета, ученик Д.М. Синцова (1867-1946).

что нет необходимости в формальном завершении учёбы. Тогда Погорелов выразил своё желание заниматься геометрией, на что И.Г. Петровский посоветовал ему обратиться к В.Ф. Кагану (1869-1953) – заведующему кафедрой дифференциальной геометрии МГУ. Во время встречи с Каганом Алексей Васильевич выразил желание заниматься выпуклой геометрией, после чего получил рекомендацию обратиться к А.Д. Александрову (1912-1999) – будущему ректору ЛГУ, на тот момент крупному специалисту в этой отрасли геометрии.

По счастливому стечению обстоятельств, оказалось, что А.Д. Александров находился в Москве в гостях у профессора МГУ Б.Н. Делоне (1890-1980). Этих двух учёных связывало общее увлечение – альпинизм (Александр Данилович был мастером спорта по альпинизму, а Борис Николаевич являлся зачинателем советского альпинизма). Алексею Васильевичу удалось встретиться с А.Д. Александровым, но их аудиенция длилась не более 10 минут, так как его собеседник спешил на вокзал. Александр Данилович предложил молодому человеку (хотя разница в их возрасте составляла всего 7 лет) решить задачу, связанную с получением оценки кратчайшего расстояния на выпуклой поверхности.

По рекомендации декана мехмата МГУ и профессора В.Ф. Кагана А.В. Погорелов поступил в заочную аспирантуру по специальности «Геометрия и топология». Его научным руководителем стал известный геометр Н.В. Ефимов (1910–1982). Так как Алексей Васильевич оставался военным, то обучение в аспирантуре давало ему один свободный от службы день, который он, как правило, тратил на изучение рукописи книги А.Д. Александрова «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей». В результате с поставленной Александровым задачей А.В. Погорелов справился в течение года. В это же время А.Д. Александров получил ценные результаты в нерегулярной выпуклой геометрии. Во время встречи на ленинградском геометрическом семинаре, руководимом А.Д. Александровым, А.В. Погорелов сообщил свои результаты, которые были высоко оценены его «дистанционным» наставником. С этого момента двух учёных связывала творческая дружба, временами переходившая в конкуренцию (особенно это проявилось во время их работы над школьным учебником геометрии).

В 1946 г. вышла в свет первая печатная работа А.В. Погорелова «Одна теорема о геодезических на замкнутой выпуклой поверхности». Статья была опубликована в Математическом сборнике [6].

В 1947 г. в стенах МГУ Алексей Васильевич успешно защитил кандидатскую диссертацию, в которой автор исследования доказал, что на любой замкнутой выпуклой поверхности существуют три замкнутых квазигеодезических.

В те годы в Московском энергетическом институте работал Н.И. Ахиезер (1901-1980), который до войны был профессором Харьковского университета. Наум Ильич получил назначение на должность директора математического института при университете г. Харькова и, узнав об успехе земляка, предложил

А.В. Погорелову вернуться в родной город. Алексей Васильевич согласился, демобилизовался из армии и переехал в Харьков.

В 1948 г. А.В. Погорелов защитил докторскую диссертацию на тему «Однозначная определённость выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны». Результаты, полученные в этом исследовании, нашли продолжение в его монографии «Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей» (1949). В этой работе автор получил весьма ценные результаты, основы которых были заложены в трудах О.Л. Коши, И.М. Либермана, С.Э. Кон-Фоссена, Г. Вейля, С.П. Оловянишникова, Н.В. Ефимова, А.Д. Александрова, С.Н. Бернштейна и Г.М. Адельсон-Вельского. Тем самым А.В. Погорелов решил проблему, над которой бились умы выдающихся математиков почти полтора века.

За этот труд и цикл статей, опубликованных в Докладах Академии наук СССР, тридцатилетний математик был удостоен (в 1950 г.) Государственной премии второй степени и фотографию молодого учёного разместили на обложке журнала «Огонёк».

А.В. Погорелов

В 1950 г. он возглавил кафедру геометрии ХГУ. Научная карьера А.В. Погорелова складывалась довольно успешно. В 1951 г. он был избран член-корр. АН Украины, в 1960 г. – член-корр. АН СССР, в 1961г. – академиком АН Украины, в 1976 г. – академиком АН СССР. С 1978 г. по 1981 г. он был председателем Харьковского научного центра АН УССР [2].

Алексей Васильевич вёл исследования в различных областях математики, однако главные результаты его относились к проблемам определения выпуклой поверхности её метрикой.

Работы, выполненные им в 1953-1955-е гг., подытожены в монографии «Некоторые вопросы геометрии в целом в римановом пространстве» (1957).

За вклад в решение проблемы Вейля для случая общего трёхмерного риманова пространства в 1959 г. сорокалетний ученый получил международную премию им. Н.И. Лобачевского.

В конце 1950-х – начале 1960-х годов акцент в исследованиях А.В. Погорелова сместился в сторону вопроса существования обобщенных решений уравнения Монжа-Ампера, а также общей геометрической теории этого уравнения. Результаты, полученные им по этой проблематике, опубликованы в монографиях: «Поверхности ограниченной внешней кривизны» (1956), «Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей» (1959), «Об уравнениях Монжа-Ампера эллиптического типа» (1960), «Некоторые вопросы теории

поверхностей в эллиптическом пространстве» (1960), «Некоторые результаты по геометрии в целом» (1961).

В 1960 г. А.В. Погорелов перешёл в Физико-технический институт низких температур АН Украины (ныне ФТИНТим. Б.Е. Веркина НАН Украины), где стал руководителем отдела геометрии. В составе коллектива учёных он принимал участие в разработке криотурбогенераторов и сверхпроводящих двигателей, связанных с ядерным оружием. Кроме этого, он участвовал в разработке теоретических основ создания искусственных трансурановых элементов.

За создание общей геометрической теории уравнений Монжа-Ампера со всеми геометрическими приложениями в 1962 г. удостоился Ленинской премии.

В начале 1960-х А.В. Погореловым были доказаны теоремы об однозначной определенности и жесткости замкнутых выпуклых поверхностей. Они легли в основу созданной им нелинейной теории тонких оболочек. Проблема устойчивости оболочек – тонких упругих тел – занимает одно из центральных мест в механике. Её решение очень важно для практики в связи с широким использованием тонкостенных конструкций в технике. Результатом его трудов в этом направлении стали монографии: «Геометрическая теория устойчивости оболочек» (1966), «Геометрические методы в нелинейной теории оболочек» (1967) и позднее «Изгибание поверхностей и устойчивость оболочек» (1986).

Ещё в 1900 г. на II международном математическом конгрессе, проходившем в Париже, немецкий математик Д. Гильберт сформулировал 23 проблемы, которые не были решены к началу XX века. Одна из них (4-я проблема Гильберта) заключалась в следующем: определить все (с точностью до изоморфизма) реализации систем аксиом классических геометрий (Евклида, Лобачевского и эллиптической), если исключить аксиомы конгруэнтности, содержащие понятие угла, и пополнить эти системы аксиомой неравенства треугольника.

В 1974 г. А.В. Погорелов решил эту проблему, над ней долго и безрезультатно бились такие учёные, как Г.К.В. Гамель (1877-1954), Г. Буземан (1905-1994) и другие. В монографии «Четвертая проблема Гильберта» (1974 г.) Алексей Васильевич дал исчерпывающий ответ на вопрос, сформулированный Д. Гильбертом.

Таким образом, А.В. Погорелов стал одним из лидеров математической науки в СССР. В разное время ему предлагали перейти работать в МГУ, МИАН им. В.А. Стеклова, но он предпочёл остаться в Харькове, хотя переезд в Москву сулил ему статус академика АН СССР, который он всё равно получил в 1976 г.

Энергичную научную, изобретательскую и общественную деятельность (неоднократно избирался депутатом Верховного совета УССР) А.В. Погорелов успешно сочетал с преподавательской. Он читал лекции по элементарной геометрии, аналитической геометрии и основаниям геометрии.

По этим разделам геометрии им были написаны учебные пособия. Время выхода этих учебников совпало со знаковым событием в отечественном математическом образовании – бурбакистской реформой.

В 1968 г. Министерством просвещения СССР была утверждена новая программа по математике для средней школы (опубликована в журнале «Математика в школе» в 1968 г. №2). Эта программа радикально отличалась от всех предшествующих программ отечественной школы. Она содержала не только целый ряд абсолютно новых для учителей вопросов, но и весьма непривычные для них трактовки общеизвестных математических понятий, равно как и необычную терминологию и символику. Как замечает известный отечественный методист И.Ф. Тесленко: «Опыт работы учителей по действующим программам и учебникам показал, что они перегружены формализованными знаниями, теоретико-множественными процедурами, неоправданным увлечением при изложении учебного материала во всех классах символическим языком, усложнённым содержанием задач и абстрактными понятиями» [7, С. 3-4].

Ещё 1960-х гг. А.В. Погорелов входил в состав комиссии по вопросам школьного образования, которую возглавлял А.Н. Колмогоров. Алексею Васильевичу концептуально не нравился учебник геометрии для средних школ, написанный коллективом авторов под общей редакцией А.Н. Колмогорова.

В 1969 г. в издательстве «Наука» вышла его «Элементарная геометрия (Планиметрия)», а в 1970 г. – «Элементарная геометрия (Стереометрия)».В основу этих книг была положена наглядная система аксиом. По этим книгам училось не одно поколение будущих учителей. Эти пособия стали предвестниками контрреформы. В результате появились новые учебные пособия по геометрии для школы, написанные А.В. Погореловым и Л.С. Атанасяном.

Учебное пособие «Геометрия 6-10» А.В. Погорелова прошло многоэтапную экспериментальную проверку в школах г. Харькова и Харьковской области, а также г. Севастополя и г. Киева. Далее апробация проходила в других союзных республиках. Так в 1973 г. в Самарканде (Узбекистан) работала Всесоюзная геометрическая конференция. После её закрытия А.В. Погорелова отвезли в одну из школ города, чтобы показать урок геометрии, проводившийся по его пособию. Выходя из кабинета, Алексей Васильевич сказал «Показали мне таких школьников, которые знают все. Удивительно!» [3].

Учебник «Геометрия 6-10» с 1982 г. стал действующим в массовой школе СССР. Вероятно, благодаря высокому авторитету автора и тому, что А.В. Погорелов совершенствовалсвой учебник, стремился устранить недостатки, эта книга долгие годы использовалась в средней школе. Миллионы детей СССР, а затем и России постигали основы систематического курса геометрии по этому учебнику. На Украине учебник «Геометрия» А.В. Погорелова был одним из основных и действовал с 1980 по 2007 гг.

За создание учебника «Геометрия 6-10» А.В. Погорелов получил звание «Отличник просвещения СССР» и был награждён Минпросом Украины медалью им. А.С. Макаренко.

В 1998 г. за вклад в науку А.В. Погорелов получил премию НАН Украины им. Н.Н. Боголюбова.

В 2000 г. умерла его жена Тамара Ивановна и Алексей Васильевич принял решение переехать в Москву – к сыну и внукам [4]. В столице России

он работал в МИАН им. В.А. Стеклова.

Алексей Васильевич умер 17 декабря 2002 года. Похоронен в Москве на Николо-Архангельском кладбище.

В честь учёного назван астероид 19919 Pogorelov, впервые обнаруженный в 1977 г. в Крымской астрофизической обсерватории.

В 2007 г. НАН Украины учредила премию им. А.В. Погорелова, которая вручается за значимые научные результаты в области геометрии и топологии.

В 2015 г. ул. Краснозвёздная г. Харькова была переименована в улицу Академика Погорелова.

Алексей Васильевич Погорелов был самородком, огранённым неутомимым трудом. Его неустанная работа на ниве науки и просвещения – пример самоотверженного служения Родине. Несомненно, научно-педагогическое наследие А.В. Погорелова требует переосмысления молодыми учёными, а его жизненный путь может служить им примером для подражания.

ЛИТЕРАТУРА

1.Архив РАО. Ф.25. Д.5243.

2.Ахиезер Н.И., Бланк Я.П., Марченко В.А., Митропольский Ю.А. Алексей Васильевич Погорелов (к пятидесятилетию со дня рождения) // Украинский математический журнал. – 1969. – Том 21. – № 3. – С. 354-360.

3.Зеленина Е. Не совсем элементарная геометрия Алексея Погорелова // Украинская техническая газета. – 25.03. 2009.

4. Карнацевич В.Л. Сто знаменитых харьковчан.– Харьков: Фолио. – 2005. – 510 с.

5. Мельников Р.А., Саввина О.А., Тарасова О.В. Академик, гражданин, автор учебников-долгожителей (к 100-летию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова) // Математика в школе. – 2019. – №1. – С. 58-68.

6. Погорелов А.В. Избранные труды. Т. 2: Основания геометрии, механика, физика. – Киев: Наукова думка. – 2008. – 398 с.

7. Тесленко И.Ф. Особенности обучения геометрии в 6-10 классах по учебнику Геометрия А.В. Погорелова. Методическое письмо. – Киев: Радяньска школа. – 1982. – 70 с.

УДК 372.851

СОЧЕТАНИЕ ТРАДИЦИОННЫХ И ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ИЗ ОПЫТА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ)

Р.А. Мельников, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *roman_elets_08@mail.ru*
О.А. Саввина, д.пед.н., проф.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *oas5@mail.ru*
Н.В. Черноусова, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *chernousovi@mail.ru*

Дополнительное математическое образование позволяет использовать такие формы обучения, которые затруднительно реализовать в обычной школьной практике из-за недостатка времени. В статье описывается авторский опыт проведения дополнительных математических занятий со школьниками во время зимних каникул.

Ключевые слова: дополнительное математическое образование, математическая викторина.

Дополнительное математическое образование позволяет использовать такие формы, которые затруднительно реализовать в обычной школьной практике из-за недостатка времени.

В ЕГУ им. И.А. Бунина ежегодно организуется работа площадки зимней МетаШколы «На перекрестках естественных наук» в рамках проведения зимней университетской школы «ОНИКС». Так, в январе 2019 года институтом математики, естествознания и техники учащимся школ и СПО были предложены разнообразные мероприятия. В первый день мастер-классы чередовались викторинами, практикумами, квестами. «Рождественская викторина» была отдельно проведена для младших и старших школьников. На мастер-классе «В мире геометрических тел» участники изготавливали модели фигур своими руками, используя при этом спицы, пластилин и пр. Применение аддитивной технологии 3D-печати для создания комплектующих бытовых предметов, примеры поэтапного создания деталей с помощью системы автоматизированного проектирования Компас 3D рассматривались на мастер-классе «Использование аддитивной технологии 3D-печати в сфере ремонтно-технического обслуживания бытовых приборов». Экологическийквест, как активная игровая форма обучения, требовал от школьников решения интеллектуальных задач с использованием творческого воображения, но включал и элементы интерактивной лекции по устойчивому развитию общества, определению экологического следа. А на мастер-классе «Секреты химиков и биологов» выполнялись лабораторные работы

по определению количества витамина С в продуктах, влиянию алкоголя на свойства белка, наличию бактерий в зубном налете и др.

В дни зимних каникул было уместно провести Рождественскую викторину. Для школьников 5-9-х классов занятие-викторина была проведена на тему «Встреча с удивительным миром чисел».

На «Встрече» ребята познакомились с историей происхождения числа, способами определения натурального числа, способами записи чисел нашими предками (славянская нумерация), приемами быстрого устного счета, природой действительных чисел, парадоксами при переходе к бесконечным множествам чисел.

Для того чтобы найти квадрат любого двузначного числа, надо разность между этим числом и 25 умножить на 100 и к получившемуся произведению прибавить квадрат дополнения данного числа до 50 или квадрат избытка его над 50-ю:

$$37^2 = 12 \cdot 100 + 13^2 = 1200 + 169 = 1369;$$

$$93^2 = 68 \cdot 100 + 43^2 = 6800 + 18 \cdot 100 + 7^2 = 8649.$$

Ребята имели возможность потренироваться в решении задач на числовые и алгебраические тождества и проверить свои знания и умения в решении заданий, сюжеты которых посвящены грядущему празднику Рождества Христова. Приведем примеры нескольких заданий.

Задание 1. Даны числа: 12, 21, 39, 128. Запишите их, используя славянскую нумерацию.

Задание 2. Даны числа, записанные славянскими цифрами…. Запишите их обычными арабскими.

В помощь ребятам была предоставлена таблица (таблица 1).

Таблица 1 – Славянские цифры

После рассказа, посвященного Евангельскому событию – Рождеству Христову, – ребятам было предложено изготовить звездочку с изображением на ней даты своего рождения, записанной славянскими цифрами. Участники встречи-викторины должны были найти среди макетов славянских цифр те, из которых нужно было составить дату дня рождения. Затем ребята показали друг другу звездочки и рассказали немного о себе.

В завершении встречи-викторины все ребята получили подарки в виде магнитов со славянской нумерацией и изготовленные собственными руками звездочки, которые можно использовать в качестве украшения для елки.

Второй день Школы предполагал проведение популярных лекций по математике, физике, работу радиокружка и знакомство с современными техническими средствами для студийной звукозаписи.

Для обучающихся 10-11-х классов в рамках занятия «Популярные лекции по математике» было предложено изучение темы «Решение нестандартных тригонометрических задач».

Содержательную основу занятия составило рассмотрение следующих вопросов:

1) тождественные преобразования выражений, содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции;

2) избранные методы решения тригонометрических уравнений (метод универсальной подстановки, метод введения вспомогательного угла).

Сначала перед аудиторией была поставлена следующая проблема. Как проверить является ли серия $x=2arctg\frac{1}{2}+2\pi n, n\in Z$ решением тригонометрического уравнения $3\cos x+4\sin x=5$?

Выяснилось, что никто из школьников не знает, как это сделать, хотя, надо признать, что все единодушно указали на то, что имеющееся выражение следует подставить вместо x в исходное уравнение. Дальнейших действий предложить слушатели не смогли. И это не удивительно, так как в современных (как, впрочем, и более ранних) учебниках алгебры и начал анализа отсутствует материал, связанный со свойствами обратных тригонометрических функций. Школьники знают лишь формулы (содержащие аркфункции), с помощью которых можно найти решение простейших тригонометрических уравнений. В таком случае не может быть и речи о более сложных задачах, в которых требуется найти значение какой-либо тригонометрической функции от какой-либо аркфункции или их линейной комбинации.

Все сделанные выкладки были подытожены в виде таблицы (таблица 2).

Таблица 2 – Соотношения между функциями и аркфункциями

	$\alpha=\arcsin x$	$\alpha=\arccos x$	$\alpha=arctg\ x$	$\alpha=arcctg\ x$
$\sin\alpha$	$x,$ $x\in[-1;1]$	$\sqrt{1-x^2},$ $x\in[-1;1]$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-x^2},$ $x\in[-1;1]$	$x,$ $x\in[-1;1]$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$tg\ \alpha$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$ $\lvert x\rvert<1$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$ $0<\lvert x\rvert\le 1$	X	$\frac{1}{x},$ $x\neq 0$

$ctg\,\alpha$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0<\lvert x\rvert\le 1$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$	$\frac{1}{x}$, $x\neq 0$	X

Далее участникам Школы было предложено решить несколько задач:

№ 1. Найти значения выражений:

а) $sin\left(arctg2\right)$;

б) $tg\left(arctg2-arctg\frac{12}{13}\right)$;

в) $cos\left(arcsin\frac{3}{5}+arcsin\frac{8}{17}\right)$;

г) $sin\left(2arctg\frac{3}{4}\right)$;

д) $sin^2\left(arctg2-arcctg\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

е) $tg\left(\frac{1}{2}arcsin\frac{5}{12}\right)$.

Далее была рассмотрена задача, имеющая несколько способов решения.

№ 2. Найти значение выражения $arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{2}{3}$.

Решение (1 способ).Так как $arctg\frac{1}{5}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ и $arctg\frac{2}{3}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то $arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{2}{3}\in\left(0;\pi\right)$.

Используя связь тангенса и котангенса, а также формулу тангенса суммы, можем найти

$$ctg\left(arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{tg\left(arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{2}{3}\right)}=$$

$$=\frac{1-tg\left(arctg\frac{1}{5}\right)\cdot tg\left(arctg\frac{2}{3}\right)}{tg\left(arctg\frac{1}{5}\right)+tg\left(arctg\frac{2}{3}\right)}=\frac{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}=1.$$

Из монотонности котангенса на $\left(0;\pi\right)$ следует, что $ctg\left(arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{2}{3}\right)=1$.

Тогда $arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{2}{3}=\frac{\pi}{4}$.

Решение (2 способ).

Используем рисунок 1, на котором изображен равнобедренный прямоугольный треугольник *ABC*.

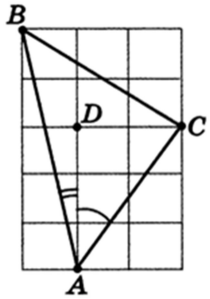


Рисунок 1 – Равнобедренный прямоугольный треугольник

Кроме того, пусть $\angle BAD = arcctg5 = arctg\frac{1}{5}$,

$\angle CAD = arctg\frac{2}{3}$.

Ясно, что $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD$ – угол при основании равнобедренного прямоугольного треугольника. Значит, $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ [1].

После решения задач № 1 и № 2 преподаватель вместе с аудиторией вернулись к решению уравнения $3\cos x + 4\sin x = 5$ и проверке найденного решения $x = 2arctg\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

В конце занятия был произведён обзор возможных методов решения тригонометрического уравнения $\sin x + \cos x = 1$.

Совместными усилиями удалось рассмотреть 5 методов: способ применения универсальной подстановки, способ возведения обеих частей уравнения в квадрат, использование формул двойного аргумента и основного тригонометрического тождества, выделение формулы косинуса разности, способ сведения к системе, состоящей из двух алгебраических уравнений путём введения двух переменных.

В ходе проведения интерактивной дидактической игры «Рождественская викторина» были выявлены «проблемные темы» в содержании единого государственного экзамена по математике. Таковыми для обучающихся 10-11-х оказались текстовые задачи на движение, проценты и части, смеси и сплавы. Задачи предлагались с новогодней фабулой.

Например, задача 1: Про обиженного снеговика. Дед Мороз не разрешил замерзшему Снеговику погреться у костра, опасаясь, что тот растает. Снеговик обиделся и поплелся прочь со скоростью 4 км/ч. Через два часа дед Мороз отправил за ним Снегурочку на санях со скоростью 6 км/ч. За сколько времени Снегурочка догонит Снеговика?

Задача предполагала составления следующей таблицы (таблица 3) – модели принятия задачи:

Таблица 3 – Таблица принятия задачи

	Скорость *v, км/час*	*Время* *t, час*	*Путь* *s, км*
Снеговик	4		
		∨ на 2	||

Снегурочка	6		

После обозначения искомой величины за *x,* получается таблица (таблица 4) – модель решения задачи:

Таблица 4 – Таблица-модель решения задачи 1

	Скорость *v, км/час*	*Время* *t, час*	*Путь* *s, км*
Снеговик	4	x +2	4(x + 2)
		∨ на 2	||
Снегурочка	6	X	6x

К сожалению, несмотря на привлекательность новогодней фабулы, ребята затруднялись построить математическую модель задачи (сложность задачиравна 4: две задачные ситуации соединены одной явной связью) [2].

Учащиеся проявили интерес к задаче на проценты. Задача 2: Пытаясь получить философский камень, Николас Фламель сплавил два слитка, в которых содержалось золота 84% и 64% соответственно. Полученный сплав весил 50 г и содержал 76% золота. Пока это был лучший результат. Однако ни повторить опыт, ни усовершенствовать его Фламель не мог, так как забыл взвесить исходные слитки перед началом опыта. Помогите Николасу Фламелю – определите сколько весил каждый из сплавленных слитков.

Но желание помочь Николасу Фламелю было недолгим – один интерес не помог справиться с задачей. Некоторые школьники вообще недоумевали: викторина математическая, а предлагают задачи по химии!

При проведении популярных лекций по математике школьникам был предложен табличный способ решения и данной задачи (таблица 5).

Таблица 5 – Таблица-модель решения задачи 2

	Слиток	Золото	Примесь
1	X	84% 0,84x	
2	У	64% 0,64y	
1 + 2	50	76% 38	

Связи между величинами очевидны, они порождают систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 50, \\ 0,84x + 0,64y = 38. \end{cases}$$

Конечно, решения предложенных задач не инвариантны! И вместе с участниками были рассмотрены все возможные решения. Главное, что требовалось – выработать общие рекомендации к решению текстовых задач. Для составления таблиц «принятия задачи» возможно придерживаться схемы:

1. Для заполнения верхней строки таблицы ответьте на вопрос: какая формула моделирует задачные ситуации?

2. Для определения числа строк в таблице уточните количество рассматриваемых ситуаций и их явную (неявную) связь.

3. Заполните ячейки таблицы, внеся в них числовые данные из условия.

Для того чтобы таблица «принятия задачи» «переросла» в таблицу – модель решения задачи необходимо обозначить одну из неизвестных величин за x (желательно искомую), проследить связи по ячейкам таблицы, последняя из них и приведет к записи уравнения или их системы.

Представляется, что в настоящее время, когда школьники практически не расстаются с компьютерами, и гаджетами такие формы организации образования, как экскурсии, викторины, математические соревнования, позволят решить проблемы гиподинамии, Интернет-аддикции и пр. Дополнительное математическое образование имеет для этого большие перспективы. Ребятам предоставляется возможность не только получить новые математические знания, но и смастерить что-то своими руками, приобрести коммуникативный опыт и в тоже время обогатить свой культурный уровень.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ельчанинова Г. Г., Мельников Р. А. Элементарная математика. Часть 3. Тригонометрия. – Елец: ЕГУ им. И. А. Бунина. – 2017. – 100 с.
2. Черноусова Н.В. Развитие познавательной самостоятельности студентов педагогических факультетов в процессе поиска решения текстовых алгебраических задач: дисс. канд. пед. наук: 13.00.02. – М. – 1997.

УДК 372.851+514.113.5

О ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

Т.Л. Овсянникова, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *otl19@yandex.ru*

В статье рассматриваются особенности применения векторно-координатного метода к построению сечений многогранников. Приведены решения задач на сечение куба, пирамиды, призмы.

Ключевые слова: преподавание геометрии, сечения многогранников, векторно-координатный метод.

Одним из наиболее существенных аспектов математического развития личности является формирование пространственного воображения. Свободное оперирование пространственными образами весьма важно как при дальнейшем изучении математики, так и для многих направлений практической деятельности (в частности, инженерных).

Среди стереометрических задач, способствующих развитию пространственного воображения, традиционно выделяется класс задач на построение се-

чений (по приблизительным оценкам этот тип задач охватывает около 15% вариантов задачи 14 в ЕГЭ). В школьном курсе – как правило, класс пространственных фигур ограничен многогранниками и телами вращения.

Задачи на построение сечений объективно трудны для учащихся, а на их решение отводится мало времени.

В практике построения сечений наиболее распространёнными являются методы: следов, внутреннего проектирования, использования аксиом и теорем геометрии. Существует ещё один метод, которому, к сожалению, не всегда уделяется достаточно внимания. Это векторно-координатный метод построения сечений многогранников [1, 2]. Его основным достоинством представляется возможность использования обобщённых способов решения за счёт сведения геометрической задачи к алгебраической. Применение этого метода наиболее удобно тогда, когда хотя бы одна из граней многогранника, участвующих в построении, представляет собой прямоугольник, что делает удобным введение прямоугольной декартовой системы координат (вообще говоря, в ряде случаев может быть удобнее использование аффинной системы координат, но её изучение, как правило, не предусматривается даже в классах с углублённым обучением математике).

Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач сводится к следующему:

– выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения;
– находим координаты необходимых для нас точек;
– решаем задачу, используя метод координат;
– переходим от аналитических соотношений к геометрическим.

Рассмотрим особенности применения этого метода на примерах.

Пример 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка P – середина его ребра AD. Построить сечение куба плоскостью α, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой B_1D.

Решение. Построим чертёж к задаче (рисунок 1).

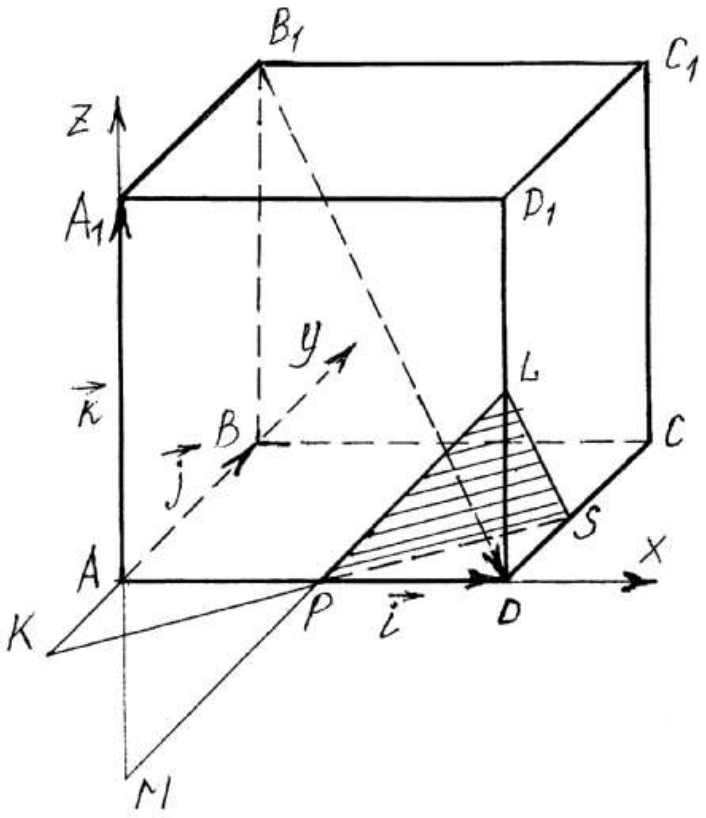


Рисунок 1 – Чертёж к примеру 1

Введём прямоугольную декартову систему координат A*xyz*, где $\vec{i} = \overrightarrow{AD}, \vec{j} = \overrightarrow{AB}, \vec{k} = \overrightarrow{AA_1}$.В этой системе координат*P*(0,5;0;0), *D*(1;0;0), B_1(0;1;1). Так как по условию плоскость α перпендикулярна прямой B_1D, то вектор $\overrightarrow{B_1D}$(1;–1; –1) является нормальным вектором для плоскости *α*. Зная нормальный вектор плоскости и координаты принадлежащей ей точки *P*, составим уравнение α: 2*x*–2*y*–2*z*–1= 0. Решив систему $\begin{cases} 2x - 2y - 2z - 1 = 0, \\ x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ найдём точку*K*(0; –0,5;0) пересечения плоскости *α* и оси A*y*и построим её. Через точки *K* и *P* проведём прямую, которая, очевидно, принадлежит и плоскости сечения, и плоскости основания. *KP* пересекает ребро *CD* в точке *S*. Аналогично из системы $\begin{cases} 2x - 2y - 2z - 1 = 0, \\ x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ находим точку *M*(0;0; –0,5) пересечения плоскости *α* и оси *Az*. Прямая *MP* пересекает ребро DD_1 в точке *L*.*PLS* – искомое сечение.

Пример 2 Дана правильная четырёхугольная пирамида *SABCD*, диагональ основания которой в 1,5 раза меньше высоты *SO*, точка *P* – середина ребра *BC*. Построить сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точку *K* – середину ребра *AD* и параллельно плоскости (*SDP*).

Решение. Построим чертёж к задаче (рисунок 2). Введём прямоугольную декартову систему координат *Oxyz*, где $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OE}$, где *E*∈*SO* и *SE*=2*OE*. В этой системе координат найдём координаты точек: *D*(0; –1;0),

P(–0,5;0,5;0), S(0;0;3), K(0,5;–0,5;0). Зная координаты трёх точек плоскости составим её уравнение – (SDP): $9x+3y–z+3=0$.

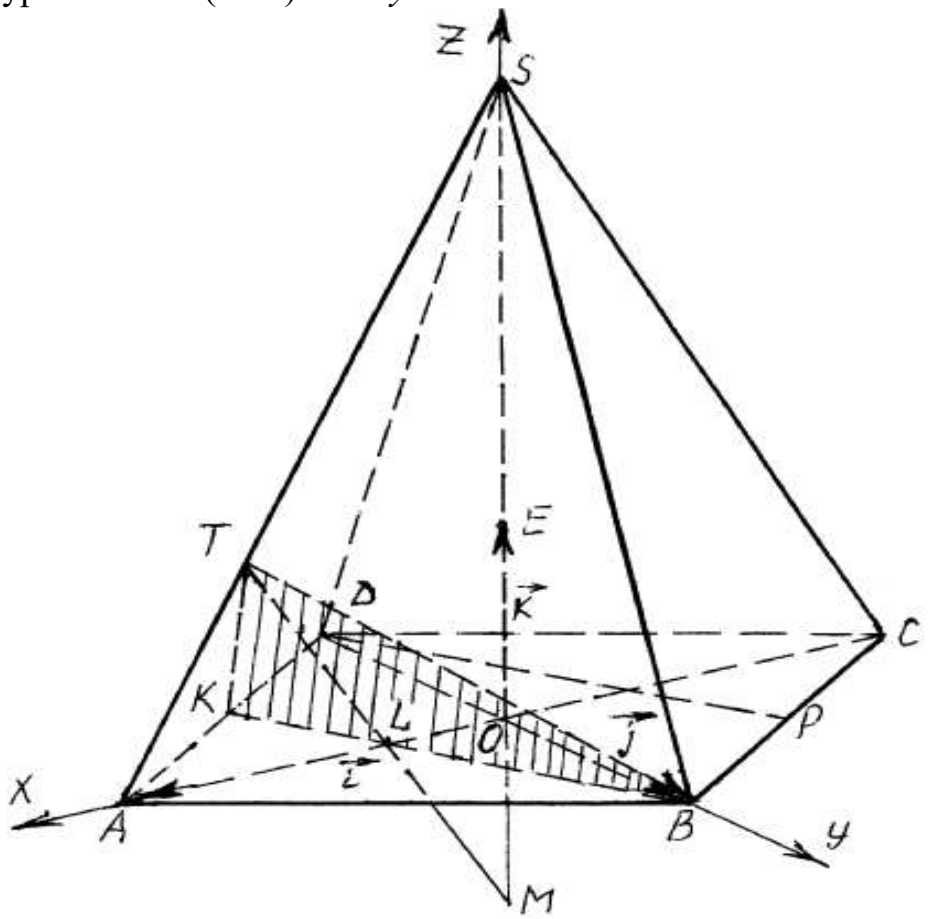


Рисунок 2 – Чертёж к примеру 2

Так как по условию плоскость α параллельна плоскости (SDP), то они имеют одинаковые нормальные векторы $\vec{n}(9;3;-1)$. Составим уравнение плоскости α: $9x+3y–z–3=0$. Найдём точки пересечения плоскости α с осями координат: $L\left(\frac{1}{3};0;0\right)$,$B$(0;1;0), M(0;0; –1) и построим их. Далее строим точку $T=ML\cap SA$. BKT – искомое сечение.

Пример 3. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, боковые грани которой – квадраты. Построить сечение призмы плоскостью α, проходящей через точку P – середину ребра BB_1, параллельно прямым BA_1 и CB_1.

Решение. Построим чертёж к задаче (рисунок 3)

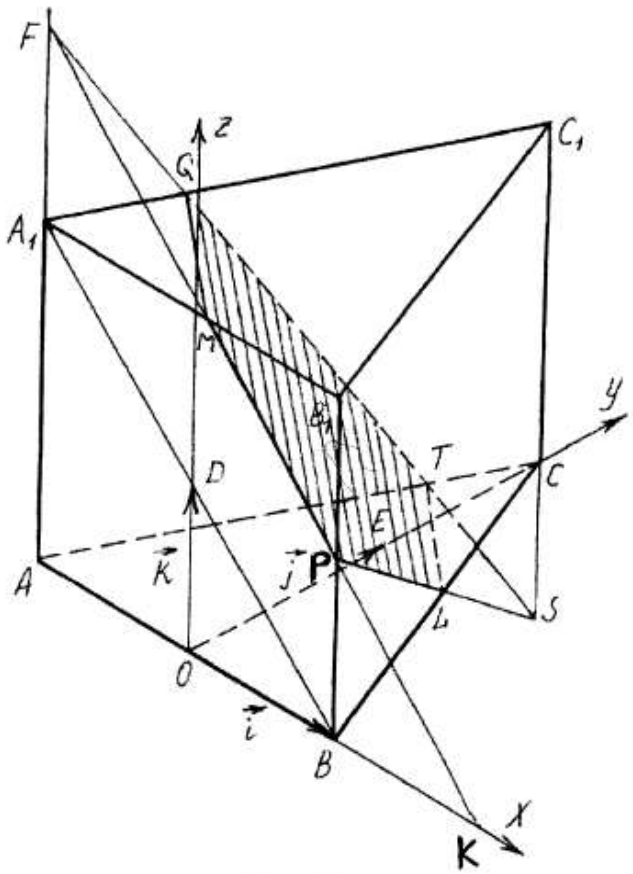


Рисунок 3 – Чертёж к примеру 3

Введём прямоугольную декартову систему координат *Oxyz*, где точка *O* – середина ребра *AB*, $\vec{i} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OE}$ ($E \in CO$), $\vec{k} = \overrightarrow{OD}$*(OD* $||AA_1$*),* причём *OD=OE=OB*. В этой системе координат *P*(1;0;1), *B*(1;0;0), B_1(1;0;2), A_1(–1;0;2), *C*(0;$\sqrt{3}$;0). Векторы $\overrightarrow{A_1B}$ (2;0; –2) и $\overrightarrow{CB_1}$(1; –$\sqrt{3}$;2) являются направляющими векторами плоскости α. Зная их и координаты точки *P*, составим уравнение плоскости α: $x+\sqrt{3}y+z-2=0$. Плоскость α пересекает ось *Ox*в точке *K*(2;0;0), а прямую CC_1 – в точке *S*(0;$\sqrt{3}$; –1). Построим точки *K* и *S*,а затем точки $M=KP\cap A_1B_1$, $F=KP\cap AA_1$, $Q=FS\cap A_1C_1$, $T=FS\cap AC$, $L=PS\cap BC$. Пятиугольник *PMQTL* – искомое сечение.

Владение векторно-координатным методом дополняет использование других методов построения сечений многогранников, расширяя возможности поиска решения задач по данной теме. Желательно, чтобы учащиеся применяли различные способы решения задач, оценивая их рациональность. Такие занятия на построение сечений многогранников развивают у школьников вкус к предмету и стимулируют интерес к поискам эффективных средств решения задач.

ЛИТЕРАТУРА

1 Потоскуев Е.В. Векторно-координатный метод решения задач стереометрии. ФГОС. – М.: Экзамен, 2019. 223 с.

2 Леваков В.В. Решение заданий С2 ЕГЭ по математике координатно-векторным методом: Методические рекомендации. – Саратов МОУ «СОШ №34 с УИП», 2013. – URL: https://kolosshcola.edusite.ru/DswMedia/s223maya.pdf

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПАКЕТОВ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ПРИОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ

Е.С. Ольнева, студ.
ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова»
e-mail: *olnevaa@mail.ru*
О.Н. Троицкая, к.пед.н., доц.
ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова»
e-mail: *o.troitskaya@narfu.ru*

Анализ федеральных образовательных стандартов высшего образования для направлений бакалавриата 440000 Образование и педагогические науки показал, что выпускники должны обладать компетенциями в области применения методов и средств математики и информатики при решении прикладных задач. Например, выпускники должны быть:

- способными использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве [1];
- готовы применять качественные и количественные методы в психологических и педагогических исследованиях [2];
- способными использовать современные компьютерные и информационные технологии в профессиональной деятельности [3];
- способными использовать современные методы и технологии обучения и диагностики [4].

Данные требования стандартов можно реализовать путем применения образовательных возможностей пакетов прикладных математических программ. Об этом впервые было сказано ещё в 19 веке, когда Ада Лавлейс предложила написала первую в истории человечества компьютерную программу – алгоритм, представляющий собой список операций (рекурсивные вложенные циклы) для вычисления чисел Бернулли. Именно она является автором первой компьютерной программы, написанной еще до появления понятия «компьютер». В 1842 году Луиджи Менабреа составил и опубликовал статью на французском языке «Элементы аналитической машины Чарльза Беббиджа». После издания трудов Менабреа математик Ада Лавлейс решила осуществить их перевод на английский язык. В течение года она работала над текстом, дополняя своими «примечаниями переводчика». Водной из заметок Лавлейс написала первую в истории человечества компьютерную программу – алгоритм, представляющий собой список операций (рекурсивные вложенные циклы) для вычисления чисел Бернулли.

Восемь примечаний Ады Лавлейс позволили заложить основы современного программирования, поскольку они раскрыли основные принципы работы аналитической машины, базовые возможности машины, а также поэтапный алгоритм программирования для решения задач на аналитической машине Бебби-

джа [5]. Ею были введены такие понятия, как цикл, рабочая переменная, хранилище (память), «мельница» (процессор). Она была одна из немногих, кто понимал принципы работы машины, ее функционал и дальнейшие перспективы.

Дальнейшее развитие математических программ привело к появлению целого ряда пакетов, направленных на решение различных задач данной области человеческого знания.

В настоящее время существует достаточное количество пакетов прикладных программ для решения всевозможных задач из разных разделов математики. Среди них наиболее распространенными в высших учебных заведениях являются: Maple, Maxima, MATLAB, Mathcad, Mathematica и SMath Studio. Рассмотрим перечисленные программные средства более подробно.

Maple – это программный пакет, система компьютерной математики. Первая версия программы возникла в результате встречи в ноябре 1980 года в университете Уотерлу. Исследователи хотели приобрести мощный компьютер для работы в Macsyma – первой системе символьной математики. Вместо этого было решено, что они разработают собственную систему, которая сможет работать на более дешевых компьютерах. Первая ограниченная версия была впервые продемонстрирована на конференции в 1982 году.

Система Maple предназначена для символьных вычислений, при этом она имеет средства, которые позволяют решать дифференциальные уравнения и находить определенные интегралы. Maple поддерживается на разных операционных системах: Windows 7, Windows 8.1, Windows 10, Mac OS, Linux. Основными языками интерфейса являются английский и японский. Maple – постоянно обновляемая программа, последняя версия была выпущена в апреле 2019 года. Существенным недостатком данного программного пакета является наличие только платной версии.

Maxima – это свободно распространяемая система компьютерной алгебры, программируемая на языке Common Lisp. В ее основу была положена системы Macsyma. В 1998 году Уильям Шелтер опубликовал исходный код версии DOE Macsyma. Впоследствии новая версия программы получила название Maxima, которая в настоящий момент поддерживается независимой группой пользователей и разработчиков.

В настоящее время программный продукт является стабильно обновляемым, последняя версия 5.43.0 вышла 31 мая 2019 года. Он обладает широкими функциональными возможностями, позволяющими, например, проводить, как аналитические, так и численные вычислений, осуществлять построение графиков. По своему встроенному инструментарию Maxima близка к Maple и Mathematica. Одна из особенностей программы заключается в том, что она обладает высокой степенью переносимости (кроссплатформенность). Это позволяет работать Maxima на основных современных операционных системах, таких как Mac OS, Solaris, BSD и Linux, а также на Microsoft Windows и Android. Интерфейс системы поддерживается на русском языке.

MATLAB – это пакет прикладных программ и одноимённый язык программирования, который используется в этом пакете. Название происходит

от сокращения «Matrix Laboratory». История развития вычислительной среды и языка программирования берут свое начало еще в конце 1970-х годов. Язык MATLAB был разработан Кливом Моулером. Целью разработки было предоставить своим студентам доступ к программным библиотекам LINPACK и EISPACK без необходимости изучения языка программирования Фортран. В1983 году вовремя визита Клива Моулера в Стэнфордский университет инженер Джон Литтл познакомился с MATLAB. Понимая, что новый язык программирования имеет большой коммерческий потенциал, он присоединился к существующей команде разработчиков. Первоначально разработанный пакет программ предназначался для упрощения работы Джона Литтла, который занимался проектировкой систем управления, однако MATLAB нашел свое применение и в различных отраслях техники, науки и экономики. Помимо этого, данный пакет программ применяется и в образовании, например, в обучении линейной алгебре и численным методам [6].

Программный продукт является активно обновляемым (последняя версия была выпущена 20 марта 2019 года). Обладая кроссплатформенностью, MATLAB может функционировать на таких операционных системах, как Windows, Linux, Mac OS, Solaris. После выпуска версии R2010b поддержка Solaris и Windows была прекращена [7]. Программа является проприетарным программным продуктом, т. е. частной собственностью компании MathWorks. Каждый набор инструментов необходимо приобретать отдельно. Тем не менее, существуют студенческая версия, а также лицензия для домашнего использования по существенно сниженным ценам.

Mathcad – это программное обеспечение, которое направлено на создание интерактивных документов с математическими расчетами и визуальным сопровождением. Программное обеспечение первоначально было разработано сотрудником компании Mathsoft Алленом Раздовом. Первая версия была выпущена в 1986 году в операционной системе DOS (Disk Operating System). С 2006 года Mathsoft стала частью корпорации PTC (Parametric Technology Corporation). Цель создания Mathcad заключалась в том, чтобы позволить упросить рутинные расчеты механическом, химическом, электрическом и гражданском строительстве [8].

В настоящее время система переведена на 10 разных языков, включая русский. По состоянию на август 2018 года существует две активно поддерживаемые платных версии Mathcad и бесплатная экспресс-версия, доступная для пользователей. Одним из существенных недостатков приложения, помимо наличия платных версий, является то, что Mathcad поддерживается только на операционной системе Windows. Последний официально поддерживаемый выпуск системы для Mac OS был выпущен 8 января 1998 [9].

Дальнейшее развитие Mathcad привело к созданию технологии MAS (Mathcad Application Server). Она заключается в реализации удаленного доступа к программному обеспечению системы компьютерной алгебры или ранее созданным Mathcad-документам через технологию Web Calc. Пользователю, ис-

пользующему MAS, не нужно приобретать Mathcad, загружать и запускать файлы формата exe [10].

Wolfram Mathematica (далее – Mathematica) – это коммерческий программный пакет (система компьютерной алгебры). Первый выпуск системы вышел 23 июня 1988 года, разработчиком которой стал Стивен Вольфрам. Mathematica основана на идеях, сформулированных Крисом Коулом и более ранней системе Вольфрама SMP (Symbolic Manipulation Program) [11]. Название пакета было предложено Стивом Джобсом, сооснователем компании Apple. Стивен Вольфрам в [12] пишет: «… Сначала было Omega (да, как Alpha), а затем PolyMath. Стив подумал, что это паршивые имена. Я дал ему списки названий, которые я рассмотрел, и настаивал на его предложениях. Некоторое время он ничего не предлагал. Но однажды он сказал мне: «Вы должны назвать это Mathematica». Последующие версии программного продукта были выпущены компанией Wolfram Research. Последняя версия 12.0 датируется 16 апрелем 2019 года.

В настоящее время Mathematica активно применятся во многих технических, научных, инженерных, математических и вычислительных областях. Широкое использование системы стало возможным благодаря наличию аналитического, численного, теоретико-численного и линейно-алгебраического функционала для вычисления. Пакет обладает кроссплатформенностью. Поддерживается наследующих операционных системах: Windows, Mac OS, Linux. Mathematica доступна на английском, китайском и японском языках.

SMath Studio – это бесплатная, с закрытым исходным кодом, математическая программа (система компьютерной алгебры). Целью разработки является альтернатива коммерческому проекту MathCad. В 2005 году Андреем Ивашовым была выпущена пробная версия SMath Studio для карманных персональных компьютеров. Внешний вид, имеющийся математический инструментарий схожи с математическим пакетом MathCad, что позволяет быстро адаптироваться при работе с программой. К преимуществам программы можно отнести:

а) кроссплатформенность;
б) многоязычный интерфейс (программа поддерживается на 43 разных языках, полностью переведена на русский);
в) активно поддерживается разработчиками. Ежегодно выходят новые обновления программы. Последняя версия 0.99.7030 была выпущена 1 апреля 2019 года [13];
г) развитая поддержка единиц измерения, из которых более двухсот встроенных, существует возможность создавать собственные;
д) встроенная помощь с примерами реализации различных математических задач;
е) возможность коллективно выполнять математические расчеты через Интернет;
ж) возможность работы с файлами расширения MathCad.xmcd.
з) наличие облачной версии SMath Studio [14].

Проведенный анализ позволил определить три программных продукта, которые можно рекомендовать для обучения студентов основам математического анализа. Это Maxima, SMath Studio и Mathcad. В основу анализа были положены следующие критерии: кроссплатформенность, наличие облачной версии, наличие постоянного обновления, дружелюбность интерфейса, наличие бесплатной версии, наличие русскоязычного интерфейса. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие их использование.

Например, Maxima поддерживает операции с полиномами (преобразования и вычисление рациональных и степенных выражений и т. д.), вычисления с применением элементарных функций (логарифмических, экспоненциальных тригонометрических), вычисления с использованием специальных функций, в т. ч. эллиптических функций и интегралов, вычисление пределов, производных, определённых и неопределённых интегралов и т.д. За счет удобного графического интерфейса любой пользователь (без специальной ИТ-подготовки) сможет произвести необходимые ему расчеты.

Как показал проведенный опрос первокурсников направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями), профили «Математика» и «Информатика», серьезные затруднения они испытывают, решая задания на применение производной при построении графиков функций. Maxima позволяет убедиться в правильности построенного графика (рисунок 1).

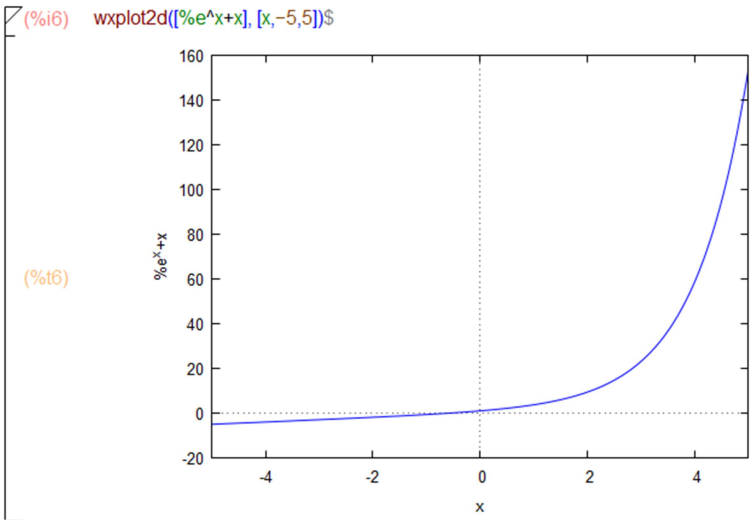


Рисунок 1 – Построение графика функции y(x)=ex+x

Если Maxima имеет стилевое оформление, схожее с языками программирования, то Smath Studio является аналогом листа тетради, в который пользователь вводит математические выражения. Программа позволяет реализовать операции линейной алгебры, в частности с матрицами. При этом студенты испытывают трудности при выполнении некоторых операций, например, при умножении матриц. Программа позволяет проводить соответствующие вычисления параллельно с вычислениями в обычной тетради. Умножение матриц можно выполнить двумя способами:

1) вводятся переменные, которым присваиваются с помощью инструмента матрицы, затем находят их произведение с помощью выбранного на панели Арифметика оператора скалярного умножения × ;

2) с помощью инструмента вводится матрица, затем на панели Арифметика выбирается оператор скалярного умножения ×, далее снова с помощью инструмента вводится матрица и, наконец, ставится знак равенства.

На рисунке 2 проиллюстрирован результат умножения двух матриц.

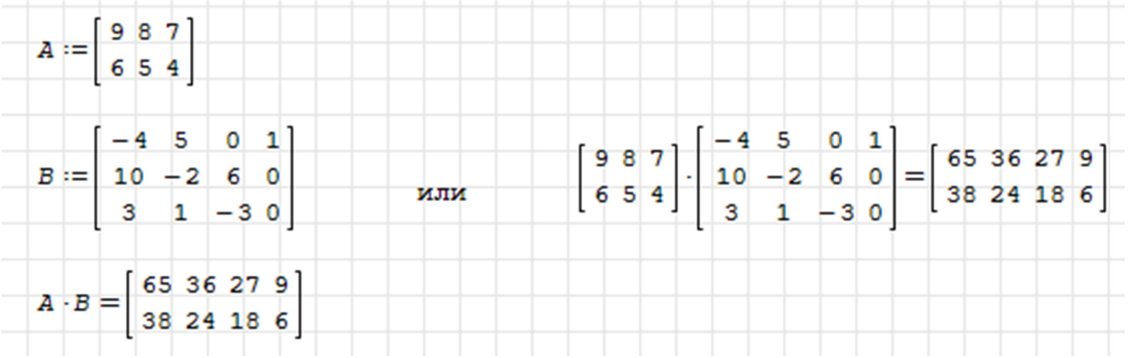


Рисунок 2 – Умножение матриц

С помощью программы Mathcad преподаватель может проиллюстрировать возможные исходы при определении суммы бесконечного ряда. На рисунке 3 представлены результаты нахождения суммы двух рядов. В первом случае в качестве ответа получено число, во втором – бесконечность.

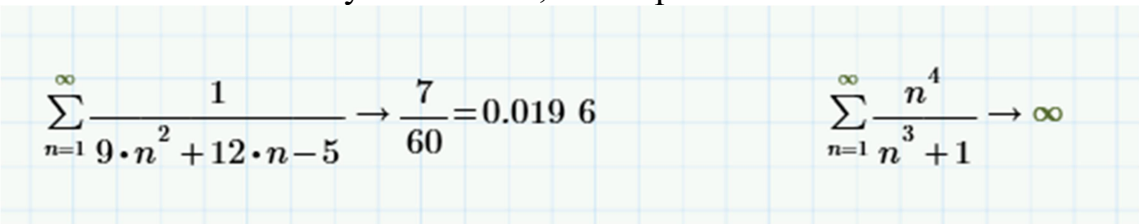


Рисунок 3 – Нахождение суммы рядов

Таким образом, рассмотренные выше пакеты прикладных математических программ позволят студентам избавиться от трудоемких, утомительных и однообразных вычислений, а преподаватели смогут больше времени уделять на анализ условий задач, использовать различные методы и способы для их решения и проводить анализ полученных результатов, тем самым повышая эффективность образовательного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Приказ «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (уровень бакалавриата)» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_192459/– Загл. с экрана.
2. Приказ «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.02 Психолого-педагогическое образование (уровень бакалавриата)» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_192835/– Загл. с экрана.
3. Приказ «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.03 Специ-

альное (дефектологическое) образование (уровень бакалавриата)» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_ LAW_188308/ – Загл. с экрана.
4. Приказ «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (уровень бакалавриата)» [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.consultant.ru/document /cons_doc_LAW _194939/ – Загл. с экрана.
5. Асланов, Р. М. Ада Августа Лавлейс (посвящается 200-летию со дня рождения) [Электронный ресурс] // Актуальные проблемы истории естественно-математических и технических наук и образования. – С. 72-82. –Режим доступа: https://publications.hse.ru/mirror/pubs/share/folder/tkysan6o4t/direct/178506876– Загл. с экрана.
6. Moler, C. The Origins of MATLAB [Electronic resource]. – Mode of access: https://www.mathworks.com/company/newsletters/articles/matlab-incorporates-lapack.html – Title from screen.
7. Platform Road Map for MATLAB and Simulink [Electronic resource]. – Mode of access: https://www.mathworks.com/support/requirements/platform-road-map.html– Title from screen.
8. PTC Mathcad [Electronic resource]. – Mode of access: https://www.ptc.com/en/products/mathcad/ – Title from screen.
9. Archived copy MathSoft Mathcad PLUS 6.0 [Electronic resource]. – Mode of access: https://web.archive.org/web/20090611154512/http://www.versiontracker.com/dyn/moreinfo/macos/2770 – Title from screen.
10. Мамонова, Т. Е. Информационные технологии. Организация информационных процессов. Технология компьютерного моделирования [Текст]: учебное пособие.– Томск: ТПУ, 2012. – 278 с.
11. Pollack, A. A Top Scientist’s Latest: Math Software [Electronic resource]. – Mode of access: https://www.nytimes.com/1988/06/24/business/a-top-scientist-s-latest-math-software.html– Title from screen.
12. Wolfram, S. Steve Jobs: A Few Memories [Electronic resource]. – Mode of access: http://blog.wolframalpha.com/2011/10/06/steve-jobs-a-few-memories/#more-15338– Title from screen.
13. Математическая программа SMath Studio [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.smath.com/%d0%be%d0%b1%d0%b7%d0%be%d1%80/SMath Studio/%d1%80%d0%b5%d0%b7%d1%8e%d0%bc%d0%b5 – Загл. с экрана.
14. Ивашов, А. Добро пожаловать в облачную версию SMath Studio [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.smath.com/cloud/ – Загл. с экрана.

УДК 37.012

ЗАДАНИЯ МЕЖПРЕДМЕТНОГО СОДЕРЖАНИЯ В КУРСЕ ФИЗИКИ, КАК СПОСОБ РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ КОНВЕРГЕНТНОГО ОБУЧЕНИЯ

Т.С. Рогожина, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»
e-mail: *tatiana1703t@mail.ru*
В.М. Дронов, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»
e-mail: *vladi-dronov@mail.ru*
М.Н. Барашев, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»

В статье рассматриваются различные пути реализации конвергентных образовательных технологий в преподавании курса «Физика». Предлагается в качестве наиболее доступного способа – решение задач межпредметного содержания, включающее в себя проблематику других естественных наук.

Понятие «конвергентные технологии», появилось в науке сравнительно недавно и подразумевает интеграцию нанотехнологий, биотехнологий, информационно-коммуникационных и когнитивных технологий для получения результатов, которые можно достичь только при использовании этих направлений одновременно. Суть заключается во взаимопроникновении и объединении четырёх глобальных научных и технологических направлений, в результате взаимодействия которых возможно появление высокотехнологичных проектов.

Конвергентное обучение — это направление на формирование такой междисциплинарной образовательной среды, в которой студенты будут воспринимать мир целостно, а не раздроблено на отдельные дисциплины. Системное мышление и межотраслевая коммуникация, - это навыки, которыми должны обладать наши выпускники. Цели, которые ставит перед собой курс «Физика», разработанный на основе конвергентных образовательных технологий - это формирование представления о единстве и целостности природы, из которого вытекают основные законы, связывающие микро- и макромиры, Землю и Космос, физические и химические явления между собой; формирование естественнонаучного мировоззрения.

Курс освещает специфику научного знания, раскрывает современную научную картину мира и убедительно показывает, что законы развития любой системы носят глобальный характер.

Методология конвергентного образования:

− взаимодействие научных дисциплин (предметов), прежде всего, естественных;

- реализация междисциплинарных проектных и исследовательских практик;
- взаимопроникновение наук и технологий.
- Ключевые принципы конвергентного образования:
- междисциплинарный синтез естественнонаучного знания;
- переориентация учебной деятельности с познавательной на проективно-конструктивную;
- модель познания – конструирование;
- сетевая коммуникация;
- обучение не предметам, а различным видам деятельности;
- надпредметные знания через НБИК-технологии (нано–, био–, инфо-, когнитивные)
- ведущая роль самоорганизации в процессах обучения.

Основной сложностью в преподавании дисциплины физика, является проблема преподнесения большого объема материала студентам различных специальностей с учетом направленности их предметной подготовки. Справиться с этой задачей помогает внедрение конвергентных технологий. В соответствии с приведенной выше методологией, в рамках преподавания дисциплины реализуются принципы конвергентного обучения: проблемные вопросы выносятся на обсуждение в процессе семинарских занятий; реализуется технология проектной деятельности, в основе которой лежит развитие познавательных интересов и навыков студентов на основе критического мышления, умения ориентироваться в информационном пространстве; педагогический контроль может осуществляться с помощью компьютерных программ, позволяющих повысить его эффективность и снять часть нагрузки с преподавателя (электронные банки тестовых заданий).

Конвергентное образование даёт больше возможностей обучающимся определиться с точкой зрения относительно научных теорий и приверженности к ним, хотя сегодня трудно точно сказать, какие открытия будут совершаться в ближайшие годы и какие будут рождаться по их итогу теории. Очень важными для общества сейчас являются нанотехнологии, которые приобретают всё большую популярность в строительстве, в энергетике, в полимерной промышленности и других различных областях; важны информационные технологии, которые укоренились в нашей жизни. На основе конвергентного обучения происходит переориентация образования на компетентностный, системно-деятельностный, метапредметный, личностно-ориентированный подходы, а также реализуется переориентация учебной деятельности с познавательной на проективно-конструктивную.

Ведущими идеями курса являются: идея единства, целостности и системной организации природы. Система обучения строится на следующих принципах, определяющих содержание курса: принцип связи обучения с жизнью; принцип систематичности и последовательности обучения; принцип научности; принцип доступности; принцип сознательности и творческой активности студентов; принцип наглядности.

Решение задач – это способ применения полученных знаний на практике. Причем, с одной стороны, сам процесс решения помогает более глубоко и сознательно понять явление, с другой – знание природного явления есть непременное условие умения решать задачи.

Дополнение курса «Физика» решением задач естественнонаучного содержания, на основе вышеизложенных идей и принципов, поможет сформировать модель курса, в основе которой всестороннее, глубокое изучение материального мира, естественнонаучной картины мира, что позволяет сформировать научное диалектическое мировоззрение, креативное мышление и вызвать интерес к познанию природы.

Задания межпредметного содержания в курсе физики, можно рассматривать, как способ реализации концепции конвергентного обучения. Разрабатываемое пособие представляет собой сборник задач межпредметного содержания, посвященных интеграции предметов естестеннонаучного цикла – физики, химии, биологии, геологии, астрономии [1]. Условия задач содержат обширный познавательный материал, анализ различных природных явлений, а также постановку проблемы, требующей научного объяснения. Физика рассматривается в качестве основы для реализации естественнонаучных знаний при решении межпредметных задач [2]. Её понятия, законы и теории являются исходными при систематизации и обобщении естественно-научных знаний, средством осмысления ведущих идей курса. Они определяют логику развития содержания учебного пособия.

Например, в разделе «Термодинамика» студентам предлагается применить изученные понятия для объяснения разнообразных биологических, химических, физиологических явлений. Рассматриваются задачи по объяснению явлений, с которыми встречаются в быту. Количественные задачи предлагают расчет энергопотребления человека в сутки, температуру нагревания комнаты, в которой находится человек, мощность, развиваемую человеком при прыжке и мощность сердца человека. Содержание задачи, как правило, включает в себя полную информацию о том явлении, относительно которого будет задан вопрос и к которому нужно применить знания, полученные в курсе физики. Все задачи снабжены подробными ответами и решениями с подробными пояснениями, что позволяет применять данные задачи для самопроверки усвоенных знаний.

Раздел «Электрические явления» составляют задачи качественного и количественного характера. В качественных задачах предлагается объяснить явления электризации предметов и вещей, встречающиеся в повседневной жизни. Количественные задачи содержат информацию, как о лечебном действии тока, так и о поражающем. В них предполагается применение изученных формул для расчета заряда, прошедшего через тело человека, как в первом, так и во втором случае. Рассказывается о влиянии тока на свойства жидкостей, дается схема получения «живой» и «мертвой» воды». Кратко излагаются принципы электрокардиографии и дается вопрос о происхождении в организме биологических потенциалов, рассматривается образование электрического заряда в грозовой

туче и предлагается вычислить заряд, который протекает между тучей и замлей при разряде.

«Электромагнитные явления» включает задачи, предлагающие объяснить, какое влияние оказывает магнитное поле Земли на намагничивание железных руд, на стальные корпуса кораблей, на металлические оконные решетки, предлагается «спасти больного», изобретя способ очистки раны от железных опилок. В задачах представлены модели магнитных «вечных» двигателей, и предлагается объяснить их способ работы или несостоятельности. Занятие затрагивает разнообразные магнитные явления, от их проявления в неживой природе, до влияния магнитного поля на живые организмы (пчел, птиц, людей), также рассматриваются принципы применение магнитного поля при диагностике заболеваний. Все необходимые сведения сообщаются студентам в условии задачи. Раздел «Оптические явления» предлагает вникнуть в тонкости человеческого зрения, рассмотреть глаз человека, как оптическую систему и, исходя из этого, рассчитать его оптические характеристики. Ряд задач содержит сведения, взятые из литературных и исторических источников. На их основе сформулированы задачи о человеке-невидимке, и линзе изо льда и об Архимеде. Имеются вопросы, связанные с ролью свечения в жизни животных и ролью солнечного света в жизни растений и всего живого на Земле [3].

Разнообразие представленных явлений, принадлежащих к разным областям знаний, каждое из которых может быть объяснено с помощью законов физики воспитывает у студентов представление о цельности мира и общности его законов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рогожина Т.С. Дронов В.М. Применение конвергентных образовательных технологий в курсе «Концепции современного естествознания» Педагогические параллели: материалы VI Междунар. науч.-практ. конф. 25 октября – 2 ноября 2018 года. – СПб.: СПбГАСУ, 2018. – С 710-714.
2. Тарасова, М.А. Методологический подход к формированию межпредметных связей естественных наук. – Орел: ООО «Полиграфическая фирма «Картуш». – 2010. – 46 с.
3. Рогожина, Т.С. Межпредметные задачи естественнонаучного содержания. – Орел: ОрелГТУ. – 2010.– 68 с.

УДК 372.851

РАЗВИТИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

Д.С. Романчук, асп.
ГОУ ВО «Московский государственный областной университет»
e-mail: *romanchuk.ds@yandex.ru*
А.К. Глухова, асп.
ГОУ ВО «Московский государственный областной университет»
e-mail: *glukhovaak06@mail.ru*

Ключевые слова: геометрическое мышление, модель развития геометрического мышления, стадии развития геометрического мышления, уровни развития геометрического мышления

В настоящее время в подходе к обучению на первый план выходит развитие личности обучающегося на основе овладения УУД (универсальных учебных действий). В особенности определяющим остаётся самостоятельное открытие знаний, а позиция обучающегося – как активного участника образовательного процесса. Таким образом, предполагается ориентация на достижение основного результата образования – развитие на основе освоения УУД, познания, освоения мира личности обучающегося, его активной учебно-познавательной деятельности, формирование его готовности к саморазвитию и непрерывному образованию. Обращаясь к требованиям ФГОС ООО, выделим, что в обучении должен быть реализован системно-деятельностный подход[3].

Отметим, что вопросы преподавания геометрии являются одними из самых сложных. В методических рекомендациях для учителей, подготовленных на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года, в частности, говорится: «Таким образом, налицо искусственно созданный перекос в сторону изучения алгебры, который закладывается в основной школе из-за недостаточного внимания к развитию геометрической интуиции и повышенного внимания к формальнологической стороне курса математики»[2, с. 4].Также в рекомендациях была приведена таблица «Основные характеристики экзаменационной работы ЕГЭ 2019 г. по математике (профильный уровень)», в которой был отражен средний процент выполнения заданий и описаны проверяемые требования. Так образом, из неё хорошо видно, что самый минимальный процент выполнения 2,7% был у задания 16(задача на планиметрию). Четвёртое место по минимальному проценту выполнения занимает задание 14(задача на стереометрию) всего 5,6%. Оба задания направлены на то, чтобы проверить умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами [2, с. 24].

Это ещё раз подчёркивает актуальность вопроса преподавания геометрии в школе. Не остаётся без внимания и необходимость преодоления барьера перед решением геометрических задач обучающимися.

Заметим, что на данном этапе образования целесообразно делать акцент на развитии геометрического мышления, так как оно является **совокупностью**

мышления пространственного и логического, и позволяет мыслить понятиями.

Отметим, что ещё в XX веке Н.М. Бескин в книге «Методика геометрии» выделил следующие цели преподавания геометрии в школе: сообщение геометрических сведений, логическое развитие и развитие пространственного мышления. Перечисленные цели актуальны и в настоящее время. Например, знания геометрического материала применяются при изучении других предметов, в особенности они необходимы в профессиональной деятельности.

Обратимся к модели развития геометрического мышления vanHiele. В модели рассматриваются шесть уровней развития мышления: 0) предпознание; 1) визуальный; 2) аналитический; 3)неформальная дедукция; 4)формальная дедукция; 5) строгость. Для каждого из уровней приводится подробное описание. Другой составляющей модели являются стадии (информация, управляемая ориентация, разъяснение, свободная ориентация, интеграция), через которые должен пройти обучающийся перед каждым уровнем. Третьей составляющей модели являются её свойства: последовательность, независимость от возраста, переход внутреннего свойства во внешнее, развитие языка, распознание несоответствий, объяснение роли учителя [1, 4].

В качестве примера, рассмотрим данную модель для учеников 7-9 классов. В этом возрасте обучающиеся обычно находятся на третьем или четвёртом уровне. Для третьего уровня: обучающиеся понимают связи «если …, то», выводят одну особенность из другой, используют дедукцию, объединяют фигуры в классы. В то же время, обучающиеся не имеют представления о роли формальных определений, аксиом, теорем и их обратимости. Объектами мысли на данном уровне являются свойства форм, «изделиями мысли»–отношения среди свойств геометрических объектов.

На четвёртом уровне обучающиеся способны понять важность дедукции, необходимость аксиом, определений, между которыми выстраивают логические отношения. У обучающихся появляется понимание о различии между утверждением и обратным к нему, взаимном отношении необходимого и достаточного условий. Объектами мысли являются отношения среди свойств геометрических объектов, «изделиями мысли» – дедуктивные аксиоматические системы для геометрии. Исходя из этого, на данном уровне рационально предлагать к изучению теоремы не «в готовом виде», а создавать проблемные ситуации, рассматривать задачи, подобранные в соответствии с уровнем обучающегося, при решении которых, обучающийся способен самостоятельно открыть и сформулировать тот или иной геометрический факт, решить ту или иную задачу, что ведёт к лучшему усвоению материала.

Рассмотрим стадии данной модели. На стадии информации совместная деятельность обучающихся и учителя проходит относительно объектов изучения в форме беседы. Таким образом начинается работа обучающихся с новым объектом. Среди целей обсуждения можно выделить возможность учителя понять интерпретацию школьниками языка, их мышление, для дальнейшей коррекции работы. На стадии управляемой ориентации происходит самостоятель-

ная деятельность каждого обучающегося по строгому алгоритму, выстроенному учителем. На стадии разъяснения обучающиеся готовы сформулировать содержание нового объекта своими словами, переходят к формулировке с использованием математической терминологии для описания нового объекта. Стадия свободной ориентации подразумевает организацию учителем деятельности по изучению задач, которые могут быть решены различными способами с использованием уже полученных знаний и приобретённых ранее навыков. На данной стадии важно правильно подобрать подходящие задачи. В статье CsikosCsaba [5] приведена схема 1, иллюстрирующая факторы, влияющие на успеваемость обучающихся. Стоит отметить, что в роли факторов, влияющих на выбор задания, может выступать совокупность дидактических целей, методов обучения, уровня подготовленности обучающихся, материальной оснащенностью и уровнем методической подготовки учителя. На последней стадии, стадии интеграции, обучающиеся систематизируют полученные знания. Учителю целесообразно давать обзор полученных знаний, помогая обучающимся в синтезе [1, 4].

Для полного понимания построения данной модели рассмотрим её свойства. Внутреннее и внешнее – внутренние объекты одного уровня становятся объектами изучения на следующем уровне. Например, на уровне предпознания осознаётся только форма фигуры, и только на визуальном уровне она анализируется, обнаруживаются её свойства и компоненты. Последовательность – обучающийся проходит каждый уровень последовательно. Терминология – «на каждом уровне есть свои обозначения и свои системы связей, которые их соединяют» [1, с. 4]. Развитие – переход от одного уровня к другому зависит не столько от возраста, сколько от преподавания. Распознавание несоответствий– иллюстрацией этого свойства может являться ситуация, когда учитель объясняет и использует терминологию на уровне более высоком, чем уровень, которым обладают обучающиеся, в следствии чего может возникнуть непонимание обучающимися логики рассуждений. Последнее свойство – объяснение роли учителя, а именно понимание того, что роль учителя заключается в мотивировании продвижения школьников.

Схема 1 – Зависимость между характеристиками математических заданий и успеваемостью обучающихся

Рассматривая в совокупности составляющие модели vanHiele – уровни, стадии, свойства – получаем систему методических рекомендаций, в частности, направленных на развитие геометрического мышления, и по обучению геометрии в целом.

Опираясь на модель развития геометрического мышления vanHiele при организации образовательного процесса на уроках геометрии в качестве инструментов, позволяющих построить образовательное пространство для развития личности обучающихся и обеспечения их активной учебно-познавательной деятельности, можно использовать проблемное обучение, организовывать творческую, в том числе, исследовательскую деятельность, использовать таблицы вопросов и советов Д. Пойа и т. д.

К сожалению, данная модель не получила широкого распространения в отличии от теории Пиаже. Однако, на наш взгляд, данная модель может помочь грамотно построить образовательный процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровских, А. В. Развитие геометрического мышления школьников [Текст] / А. В. Боровских, Э. Рейхани, Н. Х. Розов // Теория и практика инновационной деятельности в образовании. – М.: МАКС Пресс, 2007. – С. 28–46.
2. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года по МАТЕМАТИКЕ[Электронный ресурс] / Федеральный институт педагогических измерений.- URL : http://fipi.ru/sites/default/files/document/1567500409/matematika_2019.pdf (дата обращения: 05.09.2019)
3. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17.12.2010 № 1897об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования [Электронный ресурс] / Минобрнауки России. – URL :https://fgos.ru/LMS/wm/wm_fgos.php?id=osnov (дата обращения: 05.09.2019)
4. Ambrus G., Munkácsy K., Szeredi É., Vásárhelyi É., Wintsche G. Matematika módszertanipéldatár [Szöveg] / MatematikatanításiésMódszertaniKözpont. – Budapest, 2013. – 653 o.
5. Csíkos, Cs. Probléma alapútanulásés matematika in evelés / Cs. Csíkos //Iskolakultúra. – 2010. – № 12. – O. 52-61. – URL :http://epa.oszk.hu/00000/00011/00153/pdf/2010-12.pdf(letöltésidőpontja: 03.09.2019). - Nyomtatottpublikációelektronikusváltozata.

УДК 378:004.9

ОТДЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА «ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

А.А. Русаков
ФГБОУ ВПО «МИРЭА – Российский технологический университет»
e-mail: *vmkafedra@yandex.ru*
В.Н. Русакова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *v.n.rusakova@yandex.ru*
Е.С. Саватеева
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *katrin_s@mail.ru*

В статье рассматриваются вопросы преподавания дисциплины «Основы математической обработки информации и информационные технологии». В частности, проблему нехватки аудиторных часов на отработку необходимых навыков предлагается хотя бы частично решить за счет заинтересованности студентов в выполнении проектных работ профессиональной направленности с применением соответствующих математико-статистических методов.

Ключевые слова: методика обучения математике, проектная работа студентов, методы математико-статистической обработки информации, информационные технологии.

Реалии таковы, что у студентов многих гуманитарных и даже естественнонаучных направлений подготовки курс математики сводится к минимально-ознакомительной доле занятий (выходит не более 36 аудиторных часов!) в рамках дисциплины «Основы математической обработки информации и информационные технологии». Столь небольшое число часов позволяет дать учащимся лишь отдельные математико-статистические инструменты для возможного применения в будущей профессиональной деятельности. Но использование таких методов требует отработанных навыков их приложения к решению определенного вида задач.

Во многом разрешить ситуацию позволяет использование программы MS Excel для выполнения необходимых расчетов. Применение статистических функций и пакета анализа после актуализации технических навыков работы в табличном редакторе не вызывает принципиальных затруднений у студентов, кроме того, – не только дает возможность значительно сократить время, затрачиваемое на элементарные вычисления, но и зачастую упрощает сам алгоритм применения того или иного статистического метода к решению учебной задачи.

Усвоение порядка указанных действий предполагается при выполнении заданий практической работы в MS Excel под контролем преподавателя [6], но для закрепления навыков необходима самостоятельная работа студента над задачей. Важную роль здесь может сыграть грамотная организация проектной ра-

боты студентов. При этом необходимо учитывать несколько существенных моментов.

Важно, чтобы в проектной деятельности участвовали все студенты группы. Можно предложить совместную работу на 2-3 человек, но принципиальным является прохождение каждым всех этапов учебного исследования.

Небольшое число аудиторных встреч ограничивает и возможности текущего консультирования студентов по работе над проектом. Поэтому задание желательно сформулировать уже на этапе лекционных занятий, построить индивидуальную траекторию выполнения проекта, акцентировать внимание студентов на важных для решения задачи конкретного учебного исследования моментах при чтении теоретического материала.

Кроме «чисто научного интереса» существенную роль в успешности такой работы играет мотивация. С одной стороны, подготовку проекта можно поставить необходимым условием для допуска к зачету, с другой – сформулировать задание таким образом, чтобы оно затрагивало будущие профессиональные интересы студентов.

Остановимся на последнем более подробно.

Можно пойти привычным путем и предложить готовую тематику для проектов. Однако, это и требует больших временных затрат от преподавателя – ведь тогда необходимо, хотя бы поверхностно ознакомиться с обширной проблематикой той области знаний, в которой будут формулироваться задачи, и существует значительный риск не угадать с предпочтениями студентов, а, как следствие и не заинтересовать их предложенной работой. Поэтому задачу подбора статистического материала для исследования тоже стоит предложить самим учащимся.

Для студентов 1-2 курса тот факт, что они учатся не только выполнять предлагаемые преподавателем задания, но и самостоятельно формулировать постановку задачи на основе ими же «добытых» в научных источниках статистических данных становится уникальным и неоценимым по глубине развития эвристической составляющей опытом. Для подобной деятельности требуется четкое понимание критериев применимости того или иного математико-статистического метода к имеющемуся набору опытных данных, что предполагает мотивацию овладения студентом соответствующим учебным материалом в полном объеме.

Например, студентам естественнонаучных направлений подготовки в качестве источника опытных данных можно предложить, в том числе, учебные пособия [1] или [7], поставив условием – применять к содержащемуся там статистическому материалу методы, отличные от приведенных в соответствующих разделах книг.

Так, в [1] в качестве примера двумерного распределения приводятся результаты определения (для контроля качества) содержания углерода в пробах стали и прочности их на разрыв, полученные в течение квартала. Подсчитываются средние значения и стандартные отклонения каждой из величин, а также коэффициент корреляции между ними. Но для данных распределений можно

также вычислить, например, другие числовые характеристики, доверительные интервалы для средних, проверить гипотезу о возможном законе распределения. Интересный результат может дать также проверка приводимых в литературе вычислений при помощи инструментов MS Excel (см. [5]).

Для широты охвата методов математической обработки информации можно предложить студентам подбирать статистический материал под требования конкретного инструмента исследователя. Очевидно, в этом случае, в достаточной мере изученным окажется только соответствующий материал. Но здесь, возможно, более ценным будет создание ситуации успешного опыта самостоятельного применения таких методов, преодоление страха перед математикой, особенно сильного у учащихся с гуманитарным складом ума. Тем более, публичная презентация студентами своих работ позволит еще раз повторить изученные математико-статистические методы, а, быть может, познакомиться с новыми, и расширить знания о возможностях их применения в будущей профессиональной деятельности.

Этапы работы над проектом будут отличаться от традиционных [4] лишь в плане того, что метод исследования будет выбран заранее.

Для более четкого определения границ поиска статистического материала следует заранее обозначить ряд требований.

1. Опытные данные должны быть получены в исследовании, содержательно соответствующему направлению обучения студента.

2. Число испытаний должно быть достаточным для получения достоверного результата при использовании выбранного метода обработки информации.

3. В работе обязательна ссылка на источник статистических данных.

4. Источником материала для учебного исследования может служить только научное или учебное издание, сайты, публикующие такие издания или официальные сайты различных государственных структур, публикующих статистическую информацию, например, https://www.gks.ru – сайт Федеральной службы государственной статистики.

Приведем примеры сформулированных студентами различных направлений подготовки задач, и решенных ими математико-статистическими средствами MS Excel в рамках проектной деятельности.

1. Составить прогноз изменения индекса человеческого развития (ИЧР) по данным доклада [2], подготовленного для Программы развития Организации Объединенных наций, на 5 лет, в предположении, что между переменной x (года) и переменной y (ИЧР) имеет место линейная зависимость.
2. По данным распределения основных показателей обстановки с пожарами в соответствии с возрастом их виновников [3] выяснить, существенно ли влияние возрастной группы на количество пожаров за год.

Подводя итог сказанному, можно заключить, что грамотная организация самостоятельной работы, предполагающая проектную деятельность студентов позволяет нивелировать возможные пробелы в знаниях учащихся, обусловленные недостаточным количеством аудиторных часов, выделяемых на дисципли-

ну, позволяя студентам усвоить методологическую базу для дальнейших самостоятельных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дёрффель К. Статистика в аналитической химии. Пер. с нем. – М. : Мир, 1994. – 268 с.
2. Индексы и индикаторы человеческого развития. Обновленные статистические данные 2018. Доклад подготовлен для Программы развития Организации Объединенных наций (ПРООР) / Селим Джахан [и др.]. – Электронный ре-
   сурс: http://hdr.undp.org/sites/default/files/2018_human_development_statistical_update_ru.pdf
3. Распределение основных показателей обстановки с пожарами в 2011-2014 гг. в соответствии с возрастом их виновников // https://sites.google.com/site/statistikapozaro/home/rezultaty-rascetov/vozrast-vinovnikov-pozara
4. Русаков А.А., Русакова В.Н., Ильина Н.А., Саватеева Е.С. Научно-методические аспекты развития навыков исследовательской работы у студентов гуманитарных и прикладных направлений подготовки на занятиях по математике. - Ученые записки Орловского государственного университета. Серия «Гуманитарные и социальные науки» : научный журнал. – Орел : изд-во ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет». – 2014. - №5(61). – С. 386-392.
5. Русаков А.А., Русакова В.Н., Халатова Б.Ш. Обучение применению возможностей MS Excel для определения выборочных характеристик на примере распределения количества меди в растворе // Современная образовательная среда: теория и практика. Сборник материалов II Международной научно-практической конференции. Редколлегия: О.Н. Широков [и др.]. – Чебоксары : ЦНС "Интерактив плюс", 2018. – С. 158-162.
6. Русакова В.Н., Саватеева Е.С., Русаков А.А., Алехин Е.И. Математико-статистическая обработка результатов экспериментальных исследований. Учебно-методическое пособие для студентов гуманитарных и прикладных направлений подготовки и преподавателей вузов. – Орел, Изд-во Орловского государственного университета им. И.С. Тургенева, 2016. – 154 с.
7. Чарыков А.К. Математическая обработка результатов химического эксперимента : Учеб. пособие для вузов. – Л. : Химия, 1984. – 168 с.

УДК 372.851

К ВОПРОСУ О ПОВЫШЕНИИ ФИНАНСОВОЙ ГРАМОТНОСТИ СТАРШЕКЛАССНИКОВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ ЧЕРЕЗ РЕШЕНИЕ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ФИНАНСОВЫХ ЗАДАЧ

Т.М. Сафронова, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *stm657@mail.ru*
Н.В. Черноусова, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *chernousovi@mail.ru*
М.И. Сафронова, магистрант
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *maria_safronova_96@mail.ru*

В статье рассматривается проблема повышения финансовой грамотности учащихся старших классов в контексте обучения школьников решению практико-ориентированных финансовых задач. Авторами предложена конкретная методика обучения учащихся решению указанного вида заданий. Рассматриваются конкретные задачи, предложенные в 2019 году на едином государственном экзамене по математике профильного уровня. В заключение сделан вывод о том, что особенностью методики является нацеленность на анализ реальных финансовых ситуаций, описанных в задачах, на пояснение и осознанное создание математической модели.

Ключевые слова: финансовая грамотность, практико-ориентированные финансовые задачи, кредит, долг, математическая модель, обучение поиску решения задач.

Переход России к рыночной модели экономических отношений, вылившийся в почти девятилетний трансформационный кризис, а также последующий период трансформации экономики страны с его взлетами и падениями де факто поставили перед российским обществом ряд актуальных задач, в числе которых – решение проблемы формирования финансовой грамотности и финансовой дееспособности населения страны [3].

В этой связи перед современной школой как одним из важнейших социальных институтов поставлена задача подготовки школьников к современным экономическим реалиям, преодолению сопутствующих трудностей на всем пути взросления и становления личности.

Адаптация школьников к современным экономическим условиям в рамках школьного образования предполагает получение элементарных экономических и, в частности, финансовых знаний, развитие экономического мышления.

Анализ результатов отечественных и международных исследований в части оценки уровня финансовой грамотности учащихся позволяет сделать вывод о том, что российские школьники не умеют применять имеющиеся у них достаточные математические знания в конкретных жизненных ситуациях. В этой связи важно отметить, что формирование соответствующих прикладных уме-

ний и навыков школьников предполагает не только корректировку содержания обучения, но и методики обучения математике.

В рамках настоящей статьи авторами предложена методика обучения школьников решению практико-ориентированных финансовых задач. Важно отметить, что указанный вид задач традиционно рассматривают как цель и средство обучения. Основной акцент предлагаемой методики заключается в том, что практико-ориентированные задачи должны стать предметом изучения.

Приведем примеры заданий с финансово-экономическим содержанием, предложенных в 2019 году на едином государственном экзамене по математике профильного уровня.

Задача 1 (досрочный ЕГЭ– март 2019): «В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере *S*млн рублей, где *S* – **целое** число. Условия его возврата таковы:

–каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

–с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

–в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн. рублей)	*S*	0,7 *S*	0,3 *S*	0

Найдите наименьшее *S*, при котором каждая из выплат будет больше 3 млн. рублей [1]».

Задача 2 (основной экзамен – май 2019): «В июле планируется взять кредит в банке на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

–каждый январь долг возрастает на *x*% по сравнению с концом предыдущего года;

–с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

–в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

Найдите *x*, если известно, что за весь период выплатили на 15 % больше, чем взяли в кредит [1]».

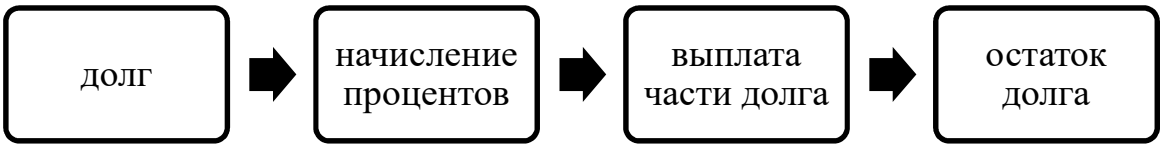
Задача 3 (резервный день – июнь 2019):«В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 419375 рублей. Условия его возврата таковы:

–каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

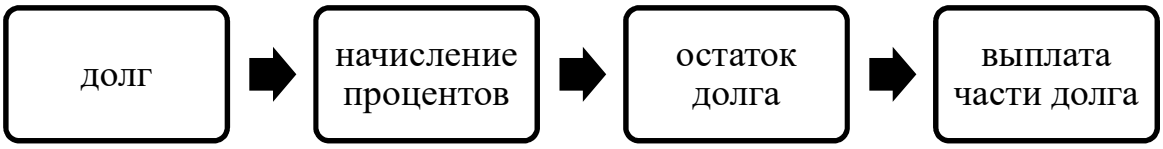
–с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)[1]?»

Такие задачи многие школьники решают составлением таблицы, внося заданные в условии задачи изменения кредита в соответствующие столбцы:



Но в задаче 1 приведена таблица, содержащая значения остатков долга, а значит, при решении именно этой задачи методически целесообразно изменить приведенную последовательность при составлении таблицы – модели решения задачи:



Таким образом, получим следующую модель поиска решения:

	Долг	Начисление процентов	Остаток долга	Выплаты части долга
июль 2019 – июль 2020	*S*	*1,3S*	*0,7S*	*0,6 S*
июль 2020 – июль 2021	*0,6 S*	*1,3·0,7S*	*0,3 S*	*0,61S*
июль 2021 – июль 2022	*0,61S*	*1,3·0,3S*	*0*	*0,39S*

В результате получим систему трех неравенств: $\begin{cases} 0,6s > 3, \\ 0,61s > 3. \\ 0,39s > 3. \end{cases}$

Решение составленной системы и приведет к ответу: $S = 8$.

Задача 2, казалось бы, с похожими задачными ситуациями. При подготовке к единому экзамену надо воспользоваться первой схемой решения, показать, что она возможна, но излишне загромождена формулами, приводит к нерациональным выводам. В задачах, имеющих в фабуле указание – об изменении долга на одну и ту же постоянную величину, – именно это условие и является центральным. Обратим внимание, что сумма кредита неизвестна, но не является искомой. Берут кредит на 15 лет и делят его на 15 равных частей. Обозначим через*15S* – величину кредита. Тогда остаток по кредиту, согласно условию задачи, будет равномерно убывать: *15S; 14S; 13S; …; S.* Сколько же выплатили банку?

Значит, банку вернули $15s+\frac{15sx}{100}+\frac{14sx}{100}+...+\frac{sx}{100}$. Учитывая условие задачи, получим следующее уравнение: $\frac{15sx}{100}+\frac{14sx}{100}+...+\frac{sx}{100}=0{,}15\cdot 15s$. Используя формулу суммы арифметической прогрессии и тождественные преобразования, получаем: $x=\frac{15}{8}=1{,}875$.

Задача 3 кажется школьникам проще: известна сумма кредита, известны проценты по кредиту, известно, что кредит будет полностью погашен равными платежами.

Если действовать по общей методической схеме, обозначив за v величину равного платежа, то получим уравнение:

$$\left(\left(\left(419375\cdot 1{,}2-v\right)\cdot 1{,}2-v\right)\cdot 1{,}2-v\right)\cdot 1{,}2-v=0.$$

А после выполнения преобразований: $v=\frac{419375\cdot 1{,}2^4}{1{,}2^3+1{,}2^2+1{,}2+1}$. И ответ: 162 000 рублей.

Прорешивая большое количество однотипных задач, школьники заучивают формулы. Например, решая серии задач, подобных задаче 3, они стараются запомнить формулу: $v=\frac{s\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}+...+\left(1+\frac{p}{100}\right)+1}$

где s– сумма, взятая в банке в кредит, p – величина начисляемых процентов, v – величина равного платежа.

В критериях проверки и оценки решений задания 17 – задачи с экономическим содержанием – содержатся строгие указания по выставлению баллов [2]. Математическая модель решения задачи обязательна. Школьники должны не просто записать отдельное равенство, набор уравнений и т.п. Предложенное решение должно состоять из трех частей: пояснения к составлению модели, модели и ее исследования, а также решения, приводящего к ответу.

Термин «математическая модель» используется в широком смысле. Различные задачи могут быть решены составлением различных моделей: словесных, табличных, графических, с помощью составления аналитической формулы и т.д. Школьников следует обучать самому процессу поиска решения задачи, показывать, что одна и та же ситуация может быть сведена к различным математическим моделям, решение которых приводит к получению верного ответа. В связи с этим для проверки решенной задачи отсутствуют жесткие критерии, касающиеся применения какой-либо конкретной модели. Заучивание формул не позволяет выпускнику даже претендовать на высокий балл. Иными словами, предлагаемые в школе готовые модели, готовые формулы – «медвежья услуга»

не только в рамках сдачи единого государственного экзамена. Таким образом, достижение навыка осознанного построения математических моделей при решении практико-ориентированных финансовых задач есть неотъемлемая составляющая комплементарных процессов повышения финансовой грамотности и формирования финансовой дееспособности старшеклассников при обучении математике в условиях динамичных флуктуаций финансовой системы Российской Федерации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-413-480013\19).

ЛИТЕРАТУРА

1. ЕГЭ 2019 [Электронный ресурс]. URL: http://alexlarin.net/ege19.html (дата обращения: 05.08.2019).
2. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2019 года. Математика. URL: http://fipi.ru/ege-i-gve-11/dlya-predmetnyh-komissiy-subektov-rf (дата обращения: 28.08.2019).
3. Сафронова, Т. М. Формирование финансовой грамотности школьников в процессе обучения математике [Текст] / Т. М. Сафронова, Н. В. Черноусова, М. И. Сафронова //Научно-методический журнал «Continuum. Математика. Информатика. Образование». – Елец – 2018. № 4 (12). – С. 129-134.

К ВОПРОСУ О ПОДГОТОВКЕ ШКОЛЬНИКА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

Г.А. Симоновская, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *simonovskaj_g@mail.ru*

В данной статье рассматривается один из подходов к решению проблемы подготовки школьников к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике (на примере задач экономического содержания).

Ключевые слова: единый государственный экзамен по математике, задача с экономическим содержанием.

Математическая подготовка школьника включат в себя не только знания теоретического материала, но и сформированные умения применять эти знания при решении практических задач. При подготовке школьника к сдаче итогового экзамена по математике (основного государственного экзамена (ОГЭ), единого государственного экзамена (ЕГЭ)) необходимо уделить достаточно внимания именно заданиям с прикладным содержанием. Одним из примеров таких заданий – это задачи с экономическим содержанием. В рамках школьного курса математики весьма трудно уделить достаточно внимания решению таких задач.

Тем не менее, задачи с экономическим содержанием включены в ЕГЭ и вызывают у учащихся трудности при решении, обусловленные отсутствием практики решения подобных задач, отсутствия навыков систематичного и последовательного анализа задач, построения необходимой модели решения, непониманием встречающихся терминов и т.д. [1]

Для решения этой проблемы чаще всего предлагается введение различных элективных курсов по обучению решению задач с экономическим содержанием. В рамках этих курсов рассматриваются основные темы школьного курса математики, которые содержат инструменты для составления моделей при решении экономических задач и могут помочь формированию понятийного экономического аппарата у старшеклассников, повторению необходимых формул и алгоритмов решения задач с экономическим содержанием. Такие курсы призваны демонстрировать практическую ценность математики, позволяют активизировать учебную деятельность, формировать знания и способности к деятельности, которые актуальны и востребованы практикой, рынком труда.

Но не всегда возможно организовать функционирование таких узконаправленных курсов. Часть школьников ориентированы лишь на не высокий уровень при прохождении ЕГЭ по математике и не заинтересованы (не мотивированы) на получении высоких баллов за экзамен. Да и учитель ставит перед собой более широкую задачу - все выпускники должны успешно выполнить первую часть контрольно-измерительных материалов экзамена и одну-две задачи из второй части.

Решение данной проблемы, на наш взгляд, можно осуществить через постепенное, точечное, но систематичное внедрение данных заданий на уроках математики посвященных повторению и обобщению изученного ранее материала. Такой подход позволит учителю не торопясь рассмотреть задачи экономического содержания, начиная с самых простых, ученик постепенно усвоит основные подходы к решению таких задач и закрепит их на протяжении достаточного промежутка времени. Такой подход будет весьма эффективен при формировании экономических понятий, обучению применения математического аппарата для решения практических задач, построению математических моделей. Учащиеся постепенно выработают умения и навыки решения прикладных задач, необходимых как в учебе, так и в жизни.

Так, например, после того как школьник детально познакомился понятием «проценты», можно рассмотреть следующие понятия и задания.

Пусть некоторая величина подвержена поэтапному изменению. При этом каждый раз ее изменение составляет определенное число процентов от значения, которое эта величина имела на начальном этапе. Так вычисляются простые проценты.

При применении сложных процентов накопленная сумма процентов добавляется во вклад по окончании очередного периода начислений. При этом каждый раз ее изменение составляет определенное число процентов от значения, которое эта величина имела на предыдущем этапе. В этом случае имеем

дело со «сложными процентами» (т.е. используются начисления «процентов на проценты»).

Первоначальная сумма и полученные проценты в совокупности называются накопленной (наращенной) суммой.

Далее школьникам предлагается заполнить таблицу 1.

Если банковская ставка равна 10%, а первоначальная сумма 100 руб., то накопленная сумма за пять лет при применении простых и сложных процентов будет иметь вид:

Таблица 1 - Накопленная сумма с использованием простых и сложных процентов.

На начало	Простые проценты	Сложные проценты
1-й год	100	100
2-й год	110	110
3-й год	120	121
4-й год	130	133
5-й год	140	146

При решении задач необходимо обратить внимание учеников на механизм начисления процентов не только по вкладам, но и по кредитам.

Например, если банк выдаст кредит (S) клиенту, то через год клиент должен банку не только сумму кредита, но и некий процент (r). Возникает необходимость введения нового коэффициента $b, b = 1 + 0,01r$. С учѐтом этого, долг клиента банку через год можно записать следующим образом:

$S + r\%$ от $S = S + 0,01r \cdot S = S(1 + 0,01r) = bS$.

Возможно, предложить ученикам подготовить маленькие сообщения посвященные разъяснению экономических терминов, некоторые из которых в дальнейшем послужат как ключевые при решении экономических задач.

После того как такого вида задачи школьники научатся быстро и с пониманием выполнять, можно переходить к задачам более сложным: задачам на кредиты.

Задачи на кредиты обычно относятся к одному из трех типов, различаемые по виду платежа. Сначала разбирается решение первого типа задач на кредиты.

Выплаты кредита производятся равными платежами. Эта схема еще называется «аннуитет». При решении задач, связанных с аннуитетными платежами, очень удобно заполнять следующую таблицу2:

S – сумма кредита;

$r\%$ - годовые (ежемесячные) проценты.

$b = 1 + 0,01r$ – коэффициент

x – ежегодная (ежемесячная) выплата

Таблица 2 – Кредит с аннуитетными платежами

Год	Долг с %	Выплата	Долг после выплаты
0			S
1 год	Sb	x	$Sb - x$
2 год	$(Sb - x)b = Sb^2 - xb$	x	$Sb^2 - xb - x$

3 год	$\left(Sb^2-xb-x\right)b=Sb^3-xb^2-xb$	x	Sb^3-xb^2-xb-x
4 год	$\left(Sb^3-xb^2-xb-x\right)b=Sb^4-xb^3-xb^2-xb$	x	$Sb^4-xb^3-xb^2-xb-x$
…	…	…	…
n год	$Sb^n-xb^{n-1}-xb^{n-2}-\ldots-xb$	x	Полная выплата, долг равен 0

Нахождение количества лет (месяцев) выплаты кредита.

Задача. Максим хочет взять кредит 1,5 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей? [2]

Решение: кредит $S=1500000$ руб; ставка $r=10\%$ годовых. Вводится коэффициент $b=1+0,01r$. Ежегодная выплата $x\le 350000$ руб.

Далее школьнику необходимо заполнить таблицу3.

Таблица 3 – Нахождения количества лет

Год	Долг с %	Выплата	Долг после выплаты
0			
1 год	$1500000\cdot 1,1=1650000$	350000	1300000
2 год	$1300000\cdot 1,1=1430000$	350000	1080000
3 год	$1080000\cdot 1,1=1188000$	350000	838000
4 год	$838000\cdot 1,1=921800$	350000	571800
5 год	$571800\cdot 1,1=628980$	350000	278980
6 год	$278980\cdot 1,1=306878$	306878	0

Ответ: 6 лет.

К заполнению таблицы 4 сводится решение и следующей задачи.

Задача. 31 декабря 2014 года Сергей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12%), затем Сергей переводит в банк 3512320 рублей. Какую сумму взял Сергей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)? [2]

Решение: ставка $r=12\%$, $b=1,12$, ежегодная выплата $x=3512320$ рублей. Количество лет (n) 3 года. Сумма кредита (S) -?

Таблица 4 – Нахождения суммы кредита

Год	Долг с %	Выплата	Долг после выплаты
0			S
1 год	Sb	x	$Sb-x$
2 год	$\left(Sb-x\right)b=Sb^2-xb$	x	Sb^2-xb-x
3 год	$\left(Sb^2-xb-x\right)b=Sb^3-xb^2-xb$	x	Sb^3-xb^2-xb-x

$$Sb^3-xb^2-xb=x,$$

$$Sb^3-\left(b^2+b+1\right)x=0,$$

$$S=\frac{\left(1+b+b^2\right)x}{b^3}.$$

Подставляя значения, получаем ответ 8436000 рублей.

Ответ: 8436000 рублей.

При внедрении таких заданий в ход циклов уроков, позволит заинтересовать ученика, нацелить его на более высокий результат при прохождении итогового экзамена по математике. Внедрение подобного рода заданий по различным темам, представленным в заданиях ЕГЭ по математике профильного уровня второй части, на наш взгляд, можно практиковать достаточно успешно при проведении уроков математики на протяжении всего школьного курса. Необходимо, лишь, выработать учителю систему заданий и периодично возвращаться к их рассмотрению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михеева, С.А. Школьное экономическое образование. Методика обучения и воспитания. [Текст]: Учебник для студентов педвузов/ С.А. Михеева. – Издательство «Вита-Пресс», 2013 г. – 176 с.
2. Образовательный портал "Решу ОГЭ": математика. https://math-ege.sdamgia.ru/prob_catalog

УДК 378

ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ДИСЦИПЛИН ПО ВЫБОРУ СТУДЕНТОВ (НА ПРИМЕРЕ ДИСЦИПЛИНЫ «R И WOLFRAM-ТЕХНОЛОГИИ В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ»)

А.В. Синчуков, к.пед.н., доц.

ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова»

e-mail: *AVSinchukov@gmail.com*

В статье раскрыт потенциал педагогического проектирования для отбора, структурирования и оптимизации содержания дисциплины по выбору студентов «*R*-среда и *Wolfram*-технологии в экономике и финансах», играющей важную роль в усилении прикладной направленности обучения математике в экономическом университете. Представленная система дидактических принципов позволяет актуализировать поисковую, исследовательскую деятельность студентов экономического бакалавриата в рамках работы с новыми инструментальными средствами анализа социально-экономических проблем и ситуаций.

Ключевые слова: дидактический принцип, информационная технология, *Wolfram*, моделирование, бакалавр экономики, профессиональная подготовка, экономическое образование.

Решение проблемы совершенствования содержания дисциплин по выбору студентов лежит на наш взгляд в плоскости уточнения системы принципов его проектирования. Практика профессиональной подготовки будущего бакалавра экономики в Российском экономическом университете им. Г. В. Плеханова позволяет сделать вывод о полноте следующей *системы дидактических принципов проектирования* содержания дисциплин по выбору студентов.

1. «*Принцип фундаментализации*».

Реализация принципа фундаментализации содержания дисциплин по выбору студентов предполагает акцент на фундаментальные, комплексные составляющие профессиональной компетентности, связанные с формированием научной картины мира, естественно-научной методологии и достаточным уровнем общей подготовки. В современных условиях, характеризующихся постоянными изменениями, фундаментальные представления выпускников являются основой для профессиональной гибкости, востребованной на рынке труда. Также фундаментальные знания и связаны со способностями к освоению новых технологий и принципов профессиональной деятельности, так и для последующей профессиональной подготовки на уровне магистратуры.

2. «*Принцип профессиональной направленности*».

Принцип профессиональной направленности содержания дисциплин по выбору студентов дополняет теоретический учебный материал и учебные задачи, имеющие абстрактный вид; конкретными профессиональными объектами (в контексте профессиональной подготовки будущего экономиста – социально-экономическими проблемами и ситуациями). Учет данного принципа проектирования содержания дисциплин позволяет акцентировать внимание студентов на интегративном характере экономико-математического моделирования. В частности, можно указать на востребованность прикладных задач социально-экономической тематики.

3. *Принцип интеграции информационных и педагогических технологий* [1, 2].

Новые подходы к повышению качества профессиональной подготовки выпускников экономического университета требуют проведения логико-методического анализа содержания и новых средств обучения, согласования изучаемых математических и экономических понятий, объектов, законов, с прикладными и исследовательскими возможностями новых инструментальных средств. Наиболее полно проявляется данный дидактический принцип при работе с новым электронным образовательным ресурсом «*R*-среда и *Wolfram*-технологии в экономике и финансах».

4. «*Принцип научности и связи теории с практикой*».

Согласно принципу научности и связи теории с практикой содержание дисциплин по выбору студентов должно быть адекватно достижениям современной науки, а элементы теории не должны преподноситься абстрактно и значит, должны быть адаптированы до уровня практического применения, в том числе в рамках учебно-познавательной деятельности студентов.

Отметим, что приведенные ранее дидактические принципы дополнены следующими:

- принцип прикладной направленности обучения;
- принцип непрерывности и преемственности между дидактическими модулями образующими содержание,
- принцип академической мобильности и вариативности;

− принцип направленности на исследовательскую, поисковую деятельность студентов.

Система дисциплин по выбору студентов играет важную роль в совершенствовании прикладной математической подготовки будущего бакалавра экономики, некоторые педагогические аспекты которой рассмотрены в публикациях [3, 4]. Ранее была установлена связь прикладной математической подготовки с развитием модельных представлений выпускников экономического университета, была отмечена востребованность информационных технологий для развития методической системы прикладной математической подготовки [5, 6, 7].

В рамках данной статьи мы представим результаты проектировочной деятельности по формированию содержания одной из дисциплин по выбору студентов «*R*-среда и *Wolfram*-технологии в экономике и финансах», позволяющей формировать компетенции в области использования современных инструментальных средств в практике принятия решений в различных областях хозяйственно-экономической деятельности. Отметим, что в процессе технологического целеполагания в виде последовательности дидактических задач и дидактических модулей использованы принципы и рекомендации, представленные в исследовании [8].

Дидактическая задача 1. Разработка инструментальной основы практического применения математического аппарата *Wolfram*-технологий.

Дидактическая задача 2. Развитие у студентов экономического бакалавриата представлений об инструментальных возможностях *Wolfram*-технологий, количественных методах и математического моделирования, приемов построения и исследования математических моделей социально-экономических проблем и ситуаций.

Дидактическая задача 3. Пополнение банка прикладных задач социально-экономической тематики, основанных на ситуациях, встречающихся в экономике, финансах, управлении и социальной сфере.

Дидактическая задача 4. Освоение студентами экономического бакалавриата новых средств визуализации количественных исследований и математического моделирования.

Дидактическая задача 5. Формирование у студентов экономического бакалавриата компетенций по применению *Wolfram*-технологий в исследовании прикладных задач социально-экономического и финансового содержания и последующей содержательной интерпретации полученных результатов.

Дидактический модуль 1. «*Введение в Wolfram-технологии*».

Основные понятия в области количественных методов и математического моделирования, данные и классификация данных, типы данных, правила ввода данных при работе с *WolframAlpaha*, встроенные операторы продуктов серии *Wolfram* (*Wolfram*, *WolframAlpha*, *WolframDemonstrationProject*).

Дидактический модуль 2. «Операции с математическими объектами в Wolfram».

Алгебраические уравнения высших степеней и их приближенное решение на основе *Wolfram*-технологий, определение нулей заданной функции; моделирование числовых последовательностей, вычисление и визуализация пределов функций; визуализация графиков функций одной переменной; визуализация наклонных асимптот; производная функций и техника её приближенного вычисления; определение критических точек функции на основе *Wolfram*-технологий; исследование функции на локальные и глобальные экстремумы и точки перегиба; нахождение промежутков монотонности и выпуклости заданной функции.

Дидактический модуль 3. «Знакомство с R и R-Studio».

Рекомендации по установке *R* и *R-Studio*. Знакомство с консольным интерфейсом и приемами работы с ним. Необходимость загрузки и последующей активации библиотек *R*-среды. Основные типы данных, используемых в среде *R*. Базовые навыки программирования переменных. Обзор базовых математических функций, применяемых в среде *R*. Пользовательские функции и приемы их конструирования в *R*. Пользовательские библиотеки: их подключение и использование в практике экономико-математического моделирования. Обзор простейших логических конструкций и реализация условных операторы в среде *R*.

Дидактический модуль 4. «Основные математические объекты и операции над ними в среде R (R-Studio)».

Определенный и несобственный интегралы – непосредственное и численное интегрирование. Визуализация графиков функций одной и нескольких переменных. Линии уровня, поверхности уровня и приемы их визуализация в среде *R*. Реализация численного дифференцирование функций. Техника определения точных и приближенных значений частных производных первого и высших порядков. Нахождение и визуализация градиента при исследовании функций нескольких переменных. Нахождение гессиана при исследовании функций нескольких переменных [9]. Разностные уравнения и техника их приближенного решения.

Знакомство с вычислительными задачами в области алгебры линейных пространств: приемы решения задач векторной алгебры, приемы решения задач алгебры матриц, приемы точного и приближенного решения систем линейных алгебраических уравнений [10]. Техника осуществления преобразований матриц линейных операторов и определения их собственных чисел и собственных векторов. Знакомство с графическими возможностями в области аналитической геометрии: приемы построения прямых и семейств прямых на плоскости, а также кривых второго порядка.

Дидактический модуль 5. «Исследование прикладных задач социально-экономического содержания в среде R (R-Studio)».

Приемы определения коэффициентов эластичности и других предельных величин, используемых при анализе социально-экономических проблем и ситуаций [11]. Техника вычислений доходностей по вкладам денежных средств при различных условиях и ограничениях. Техника вычислений последовательности

и величин выплат по кредитам при различных условиях и ограничениях; Задачи линейного и нелинейного программирования: графический и аналитические методы [12, 13]. Частные приемы при построении и исследовании производственной и транспортных моделей. Приемы визуализации линий уровня целевой функции и области допустимых решений. Техника решения простейших многокритериальных задач, в основе которых композиция двух критериев, первый из которых – минимизация рисков, второй – максимизация доходностей.

Представленные результаты проектировочной деятельности по формированию содержания учебной дисциплины «*R*-среда и *Wolfram*-технологии в экономике и финансах» определяют дальнейшие направления совершенствования прикладной математической подготовки будущего бакалавра экономики в условиях реализации принципа вариативности и академической мобильности.

Таким образом, проектировочный процесс по отбору содержания дисциплин по выбору студентов для непрерывного экономического образования должен строиться на достижениях современной педагогической науки и учитывать приоритетные направления развития математики, математического моделирования и возможности инструментальных средств, а внедрение в практику подготовки экономиста научно-обоснованного содержания обучения способствует обеспечению и требуемого уровня сформированности ключевых и предметных компетенций выпускников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов В. М. Педагогические объекты. Педагогическое проектирование. KnowHow – технологии: учеб. пособие. [Текст] / В. М. Монахов, А. Н. Ярыгин – Тольятти, 2004. – 38 с.
2. Власов Д. А. Интеграция информационных и педагогических технологий в системе прикладной математической подготовки будущего специалиста [Текст] / Д. А. Власов // Сибирский педагогический журнал. – 2009. – № 2. – С. 109-117.
3. Власов Д. А. Методы обучения как компонент методической системы прикладной математической подготовки [Текст] / Д. А. Власов // Ярославский педагогический вестник. – 2009. – № 4 (61). – С. 125-129.
4. Власов Д. А. Проблемы проектирования содержания прикладной математической подготовки будущего специалиста [Текст] / Д. А. Власов // Сибирский педагогический журнал. – 2009. – № 8. – С. 33-42.
5. Асланов Р. М. Электронное обучение вчера, сегодня, завтра. проблемы и перспективы [Текст] / Р. М. Асланов, О. Г. Игнатова // Continuum. Математика. Информатика. Образование. – 2018. – № 1 (9). – С. 28-35.
6. Зверева А. И. Совершенствование технологий преподавания высшей математики для студентов экономического университета [Текст] / В сборнике: Управление региональным развитием: проблемы, возможности, перспективы развития Сборник научных статей по материалам Международной научно-практической конференции с международным участием. Ответственный редактор Е. А. Ильина. – 2018. – С. 191-195.

7. Муханов С. А. Использование информационных технологий для индивидуализации обучения математике на примере темы «Дифференциальные уравнения» [Текст] / С. А. Муханов, А. А. Муханова, А. И. Нижников // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования. – 2018. – № 1 (43). – С. 72-77.
8. Власов Д. А. Особенности целеполагания при проектировании системы обучения прикладной математике [Текст] / Д. А. Власов // Философия образования. – 2008. – № 4 (25). – С. 278-283.
9. Сухорукова И. В. Высшая математика (для гуманитарных специальностей) учебное пособие [Текст] / И. В. Сухорукова, О. И. Савина – Москва, Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, 2018. – 112 с.
10. Татарников О. В. Линейная алгебра. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата [Текст] / Под общей редакцией О. В. Татарникова. – М.: Издательство Юрайт, 2014. – 334 с.
11. Власов Д. А. Применение математических методов для измерения неравенства распределения доходов населения [Текст] / Д. А. Власов // Системные технологии. – 2018. – № 1 (26). – С. 26-28.
12. Татарников О. В. Математика для экономистов. Практикум: учебное пособие для академического бакалавриата [Текст] / Под общей редакцией О. В. Татарникова. – М.: Издательство Юрайт, 2014. – 285 с.
13. Татарников О. В. Математика для экономистов. Теория и практика: учебник для академического бакалавриата [Текст] / Под общей редакцией О. В. Татарникова. – М.: Издательство Юрайт, 2014. – 598 с.

ОПЫТ РЕАЛИЗАЦИИ ВОЛОНТЕРСКОГО СТУДЕНЧЕСКОГО СОЦИАЛЬНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЕКТА «ТЬЮТОР» В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

О.Н. Троицкая, к.пед.н, доц.
ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова»,
e-mail: *o.troitskaya@narfu.ru*
Е.Д. Вохтомина, студ.
ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова»,
e-mail: *eva.vohtomina@yandex.ru*

Статья посвящена описанию социально-образовательного проекта в области математики и информатики, реализуемого студентами Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Представлены этапы проекта и раскрыты особенности их организации.

Ключевые слова: социально-образовательный проект, математика, информатика, тьютор, опыт педагогической деятельности.

Один из вопросов, который сегодня широкого обсуждается в средствах массовой информации, на уровне Министерство просвещения Российской Федерации и на региональном уровне, - повышение качества образования и его доступности для российских школьников. Нормативной основой решения данной проблемы служат введенные в действие федеральные образовательные стандарты и Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». Они подчеркивают значимость реализации проектной деятельности как одного из способов модернизации и развития системы образования с учетом основных направлений социально-экономического развития Российской Федерации. Так, в статье 20 закона «Об образовании в Российской Федерации» указано, что «инновационная деятельность ориентирована на совершенствование научно-педагогического, учебно-методического … обеспечения системы образования и осуществляется в форме реализации инновационных проектов и программ» [1].

Сегодня можно говорить о всё возрастающем интересе к организации и последующей реализации социально-образовательных проектов. Именно они позволяют в полной мере осуществить интеграцию образовательной и научной деятельности в школе и вузе, обеспечить популяризацию научного знания, а также включить учащихся школ и студентов в общественно-полезную социальную практику.

Так, например, с целью формирования у учащихся активной гражданской позиции проходит Всероссийская акция «Я – гражданин России». Она позволяет формировать у учащихся навыки проектной, исследовательской и творческой деятельности, презентации достигнутых результатов. Как отмечено в [2], учащиеся привлекаются к решению актуальных социальных проблем.

Л.М. Жучкова, описывая в [3] социальный проект «Доброе сердце», указывает на то, что сегодня за счет социального проектирования можно обеспе-

чить реальное участие школьников в решении проблем не только школы, но и города. Подростков больше всего воодушевляет идея сделать что-либо самостоятельно, «на уровне взрослых». Необходимо предоставить им возможность проявить себя, свои способности в настоящем деле. Именно жизненность социального проекта привлекает школьников.

Особой популярностью в последнее время пользуются социально-образовательные проекты, посвященные Великой отечественной войне 1941-1945 г.г. Например, проект – кинолекторий «Я только слышал о войне», посвящённый 70-летию Победы в Великой Отечественной войне [4], предполагает не только просмотр 100 фильмов, рекомендованных Министерством культуры РФ к показу в школах, но и анализ представленных ситуаций. Школьники на примерах осознают, что такое настоящая дружба, вера в себя и свою страну, что значит защищать Родину.

В рамках проекта «Великая Отечественная война 1941 – 1945 г.г. в картинах художников» [5] школьники смогут понять, прочувствовать то, что происходило в 1941 – 1945 годах. У них будет сформировано представление о жизни людей и о значении искусства во время Великой Отечественной войны. Проект позволит воспитать патриотические чувства, уважение к старшему поколению, сумевшему выстоять и добыть Великую Победу в годы Великой Войны.

По мнению М.С. Гарастюк, социально-образовательный проект «Гражданин» является эффективным средством формирования гражданско-патриотического отношения школьников к своей стране [6]. Он направлен на решение стоящей перед государством задачи по формированию гражданской ответственности и правового самосознания, духовности и культуры, инициативности, самостоятельности, толерантности у подрастающего поколения.

Значимость социально-образовательных и социальных проектов подтверждается проведением Всероссийских конкурсов. Так, например, уже в очередной раз подряд проходит программа и форум «Лучшие социальные проекты России» [7]. К числу задач программы следует отнести следующие: 1) сбор и систематизация практик реализации социальных проектов в России; 2) анализ полученных проектов Экспертным советом в области социального маркетинга; 3) составление и распространение каталога лучших социальных проектов среди бизнес, государственных и некоммерческих организаций.

Данные примеры позволили задуматься о возможности создания и реализации такого проекта силами студентов Высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова в Архангельске. Тем более, что в областном центре в течение 45 лет функционирует Архангельский центр помощи детям «Лучик». Его воспитанники – это дети, которые не только нуждаются в моральной поддержке со стороны взрослых, но и, как минимум, в помощи при выполнении домашних заданий по математике и информатике.

Нами были выделены этапы проекта.

1. *Подготовительный:* выяснение образовательных потребностей воспитанников ГБУ АО «АЦПД «Лучик» в результате проведения беседы с руководством. В результате была разработана информационная карта проекта (таблица 1).

Таблица 1 – Информационная карта проекта

1. Полное название проекта	Волонтерское студенческое движение «Тьютор»
2. Сроки выполнения проекта	Сентябрь 2016 г.- сентябрь 2019 г.
3. Участники проекта	- студенты 1, 2, 3, 4 курсов Высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем, - воспитанники ГБУ АО «АЦПД «Лучик», - преподаватели Высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем
4. Краткое описание проекта	*Две взаимосвязанные цели:* 1) удовлетворение образовательных потребностей воспитанников ГБУ АО «АЦПД «Лучик» в области математики и информатики и формирование мотивации к изучению данных разделов науки; 2) воспитание гражданской ответственности будущих педагогов – студентов Высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем. *Задачи:* 1. Развивать у воспитанников ГБУ АО «АЦПД «Лучик» интерес к математике путем включения их в деятельность решения нестандартных математических задач. 2. Расширить представления воспитанников ГБУ АО «АЦПД «Лучик» об информатике как о науке, областях её применения, научить использовать достижения информатики в своей повседневной жизни. 3. Подготовить воспитанников ГБУ АО «АЦПД «Лучик», обучающихся в 9 классе, к сдаче ОГЭ по математике и информатике путем систематизации их знаний, приобретенных за весь предыдущий период обучения. 4. Помочь воспитанникам ГБУ АО «АЦПД «Лучик», испытывающим трудности в изучении математики, путем проведения консультаций один раз в неделю (60 минут) с тьюторами (студентами направления «Педагогическое образование» Высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем). 5. Сформировать опыт педагогической деятельности у студентов Высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем *Методы*: организация тьюторства, создание и реализация программ дополнительного образования, вовлечение в конкурсы, реализуемые САФУ *Ожидаемые результаты* 1. В проводимые мероприятия будут включены 26

	студентов и 15 воспитанников. 2. Студенты подготовят и прочитают 7 научно-популярных лекций по информатике. 3. Будет составлена и реализована программа «Занимательная математика» для учащихся 5-6 классов. 4. Воспитанники будут привлечены к участию в следующих мероприятиях САФУ: Болгарский математический турнир «Перперикон», Областной турнир по экспериментальной математике для учащихся, областной конкурс краеведческих математических задач «Архангельская область в математических задачах», Ежегодная региональная научно-практическая конференция «Научно-исследовательская деятельность учащихся в области математика, прикладной математики и информатики».

2. *Основной*: практическая реализация замысла проекта.

В ходе данного этапа студенты четко определили направления своей деятельности.

Четвёртый курс выбрал проведение научно-популярных лекций по информатике. Они предложили воспитанникам следующие темы: «Создай свой сайт!», «Компьютерный дизайн и его возможности», «Как стать программистом», «Мультфильм своими руками», «Безопасность в Интернете», «Тесты и работа с ними – взгляд изнутри», «Информатика в помощь математике». Затем в ходе группового обсуждения студенты, опираясь на теорию И.С. Якиманской, выделили в структуру занятия три этапа. Первый этап – это беседа с воспитанникам ГБУ АО «АЦПД «Лучик», в ходе которой происходит выявление содержания их субъектного опыта, касающегося рассматриваемой темы. Второй этап – это пятнадцатиминутная интерактивная лекция, направленная на согласование субъектного опыта детей с новым для них научным материалом. На третьем этапе у воспитанников ГБУ АО «АЦПД «Лучик» происходит построение нового субъектного опыта, связанного с применением научных знаний. Они, используя составленную лектором инструкцию, с помощью присутствующих консультантов, в роли которых выступают студенты университета, занимаются практической деятельностью.

Студенты 1-3 курсов проявили желание помочь испытывающим трудности в изучении математики и информатики воспитанникам ГБУ АО «АЦПД «Лучик». Студенты, выступая в роли тьюторов, выявили основные проблемы детей. Установив удобный график консультаций, будущие педагоги начали посещать воспитанников центра один раз в неделю в течение всего учебного года. В рамках занятий студенты помогают воспитанникам делать домашние задания, готовиться к промежуточным контрольным и самостоятельным работам, восполнять пробелы в изучении предыдущего материала.

Студент 2 курса составил программу кружка «Занимательная математика», который посещали воспитанники, обучающиеся в 5 и 6 классах. При под-

боре задач он опирался на задания конкурса «Кенгуру». При этом будущий педагог отметил, что дети самостоятельно решали задания, оцениваемыми в 3 балла, с его помощью - задания, оцениваемыми в 4 балла. Наибольшие трудности воспитанники испытывали при решении заданий, оцениваемых в 5 баллов. Тем не менее, в январе 2017 года воспитанники АЦПД «Лучик» впервые стали участниками Болгарского математического турнира «Перперикон», который проходил на базе САФУ имени М.В. Ломоносова.

В течение последних трех лет идёт активная подготовка воспитанников ГБУ АО «АЦПД «Лучик», обучающихся в 9 классе, к сдаче ОГЭ по математике и информатике. К данному процессу осенью 2018 года подключился и студент первого курса, обучающийся по направлению «Прикладная математика и информатика». Проводимые занятия позволяют школьникам систематизировать полученные знания, углубить их за счет расширения спектра решаемых заданий, а студентам приобрести существенный опыт педагогической деятельности.

3. *Заключительный*: подведение итогов и формулировка выводов.

На третьем этапе будут подведены итоги проекта, выявлены недостатки, уточнены направления совершенствования и развития данного проекта. Так, одним из возможных направлений станет включение воспитанников ГБУ АО «АЦПД «Лучик» в образовательный проект кафедры экспериментальной математики и информатизации образования САФУ имени М.В. Ломоносова, рабочее название которого «Киберпространство: нереальная реальность».

ЛИТЕРАТУРА

1. Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. №273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» http://ivo.garant.ru/#/document/70291362/paragraph/1:0
2. Всероссийская акция «Я – гражданин России» http://vcht.center/catalog/events/xvi-vserossijskaya-akciya-ya-grazhdanin-rossii/
3. Жучкова Лариса Михайловна Социальный проект "Доброе сердце" http://festival.1september.ru/articles/598027/
4. Кинолекторий «Я только слышал о войне» http://nsportal.ru/shkola/vneklassnaya-rabota/library/2015/10/04/sotsialno-obrazovatelnyy-proekt-kinolektoriy-ya-tolko
5. Проект «Великая Отечественная война 1941 – 1945 г. в картинах художников» http://nsportal.ru/shkola/vneklassnaya-rabota/library/2015/09/29/sotsialno-obrazovatelnyy-proekt
6. «Гражданин» http://ped-kopilka.ru/blogs/marina-stanislavovna-garastyuk/socialno-obrazovatelnyi-proekt-grazhdanin-kak-yefektivnoe-sredstvo-formirovanija-grazhdansko-patrioticheskogo-vospitanija-shkolnikov-iz-opyta-raboty-obrazovatelnogo-uchrezhdenija.html
7. Программа и Форум «Лучшие социальные проекты России» http://socprojects.org/#main

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ В ПРОЦЕССЕ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОГО ОБУЧЕНИЯ

О.В. Фадеева, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВПО «Самарский государственный технический университет»
e-mail: *faoks@yandex.ru*

В данной статье рассматривается один из способов реализации мультидисциплинарности в образовании – создание и реализация на базе университетов центров проектного обучения и функционирование в их рамках междисциплинарных проектных групп, направленных на решение конкретных научно-технических и инжиниринговых задач. Это выдвигает на первый план введение новых образовательных программ и технологий, которые подчеркивают непрерывную связь фундаментальных дисциплин с дисциплинами естественно научного цикла и демонстрируют возможности решения практических и научных задач профессиональной деятельности.

Ключевые слова: междисциплинарность, проектное обучение, компетенция, образовательные программы.

Тема междисциплинарности в образовании была актуальна всегда, в том числе как средство повышения эффективности различных видов интеллектуальной деятельности, будь то обучение, или решение практических задач, или проведение научных исследований. Модернизация XXI века, охватившая практически все сферы государства и общества, привела к глобальным изменениям российской системы образования в плане приоритетов, содержания, структуры. В частности, в последние десятилетия кардинально изменился подход к высшему инженерному образованию, и не только в России. Инженерное образование во всем мире становится более практико-ориентированным, позволяющим выпускникам ВУЗов сразу после получения диплома инкорпорироваться в производственный процесс (без получения дополнительного образования на реальном производстве). Изменения, происходящие в современной инженерной деятельности, формируют новые требования к бакалаврам, магистрам и специалистам инженерно-технического профиля. В своей работе они должны совмещать нескольких ролей – это и исследователь, и организатор работы «команды», и руководитель. Все это формирует новый подход к формам, методам и содержанию современного инженерного образования.

В соответствии с этим меняется и миссия инженерных и технических вузов. Традиционно их основной целью являлось формирование у обучающихся широкой базы практических знаний, умений и навыков, современного инженерного мышления. На новом этапе стратегической целью становится подготовка технологической элиты, квалификация и культура инженерной мысли которой будет определять потенциал развития промышленности и качество жизни страны.

Стремление к достижению поставленной цели приводит порой к серьезной реструктуризации ВУЗа. Университеты совершенствуют образовательные программы и учебные планы, обеспечивают демонстрацию связи учебного ма-

териала с будущей инженерной деятельностью, перспективами технического и технологического развития общества. Жемчужинами в модернизированной вузовской структуре все чаще становятся центры проектного обучения и междисциплинарные проектные команды, в которых и воплощаются обновленные методы организации образовательного процесса.

Основные направления деятельности таких университетских центров проектного обучения – это технологическое, методическое и административное сопровождение процесса проектно-ориентированного обучения, а так же планирование и организация проектно-ориентированного обучения студентов в составе междисциплинарных проектных групп.

Часто решение новых задач предполагает так же «пересборку» образовательного процесса путем постепенного перехода от традиционных принципов конструирования учебных планов к проектному обучению и индивидуальному подходу, внедрение нового механизма конструирования междисциплинарных компетенций, принципиально отличающегося от существующих практик. Суть изменений состоит в переходе к проектно-ориентированному обучению одаренных студентов в составе межпрофессиональных групп на базе гибких модульных программ и механизма индивидуального формирования образовательных траекторий обучающихся.

При этом образовательные программы университета, как правило, претерпевают изменения, направленные на поэтапный переход к новой структуре процесса обучения – от синхронного поточно-группового учебного процесса к асинхронному индивидуально-ориентированному обучению. Последнее имеет в своей основе гибкие модульные образовательные программы и механизмы персонифицированного конструирования и навигации образовательных траекторий обучающихся, особенно в области вариативных компонентов профильной подготовки.

Содержательное наполнение новых образовательных программ, включение в их вариативную составляющую учебных проектных модулей будет ориентировано, в том числе, на достижение таких результатов обучения, как междисциплинарные и метапрофессиональные компетенции, которые и будут обеспечивать прогресс и эффективное приложение профессиональных компетенций будущих специалистов.

Таким образом, обучающиеся – участники междисциплинарных проектов благодаря новому содержанию, а также активным методам обучения и технологии практико-ориентированного обучения, в результате кроме системы сформированных компетенций, соответствующих их профилю подготовки, получат кроме того набор надпрофессиональных и метапрофессиональных компетенций, что сделает их уникальными в своем роде высококвалифицированными специалистами. Такие профессионалы способны к глобальному стратегическому мышлению на различных уровнях, склонны к междисциплинарному мышлению, инновациям и саморазвитию, владеют современными информационными технологиями. Такие специалисты будут служить образцом для подражания, способствовать развитию инженерных наук и прогрессу в целом.

За первые годы существования подобных центра проектного обучения на базе университетов уже достигнуты значительные результаты.

К примеру, в Самарской области на базе архитектурно-строительной академии Самарского государственного технического университета одной из междисциплинарных проектных команд был разработан новый вид очистных сооружений для предприятий мясной и молочной промышленности – мембранный биореактор с плоскими мембранами, который смог объединить в себе преимущества биологической очистки и мембранного разделения [1].

В Тольяттинском государственном университете успешно реализуется междисциплинарный проект «Formula-student», в рамках которого проектная команда должна в течение учебного года спроектировать, изготовить и презентовать гоночный болид [2].

Описанные примеры не являются единичными. Это свидетельствует о том, что инициатива создания междисциплинарных проектных команд позволила сгенерировать целый ряд неординарных и перспективных разработок, уже готовых к выходу на рынок. Еще более интересна в них образовательная составляющая для студентов, которые станут участниками междисциплинарных проектных групп. Образование, полученное в рамках такого научно-исследовательского проекта, даст не только возможность приобретения бесценного опыта в научно-исследовательской, менеджерской и проектной сферах. Оно так же сформирует базовые навыки работы в смежных отраслях, что является чрезвычайно востребованным на рынке труда по причине тесной связи различных отраслей экономики и промышленности.

Получение именно такого нового качества образовательных результатов, основанных на комплексе инженерных компетенций, и является целью создания системы университетского междисциплинарного проектного обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Междисциплинарные образовательные программы: http://cpo.samgtu.ru/mezhdisciplinarnye-obrazovatelnye-programmy
2. Ельцов В.В., Скрипачев А.В. Проект «Formula-Student» как площадка для практико-ориентированной инженерной подготовки выпускников вуза // Инженерное образование. – 2013– № 13– С.12–19.

УДК 378.096

ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО ФИЗИКЕ НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ОБУЧЕНИЯ ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ

Б.Д. Цуканов, к.пед.н., доц.
Академия ФСО России
e-mail: *tsbd@yandex.ru*

В статье рассматриваются вопросы специфики обучения иностранных студентов по программе предвузовской подготовки. Основное внимание уделено проблеме языкового барьера, который осложняет работу преподавателей и студентов. Рассмотрены причины языковых затруднений студентов из Юго-Восточной Азии и пути их смягчения. Проанализированы требования к аудиторным занятиям по физике с точки зрения совмещения задач предметной и языковой подготовки студентов.

Ключевые слова: предвузовская подготовка, физика, речевая деятельность, учебно-методические материалы, обучение физике иностранных студентов.

Одним из показателей эффективности деятельности вузов является международная деятельность, которая оценивается по количеству иностранных студентов, обучающихся по программам бакалавриата, специалитета, магистратуры. В последние годы наблюдается большой рост числа студентов из Китая, Индии, Вьетнама и африканских государств. Однако в российских вузах обучается лишь около 3% молодых людей, получающих высшее образование за пределами своих стран. Для увеличения притока иностранцев в вузы России требуется совершенствовать систему подготовительных факультетов, которые организуют изучение русского языка на уровне разговорной речи, овладение обучающимися специальной терминологией по общенаучным дисциплинам, получение системы знаний и умений для освоения будущей профессии.

Факультеты, центры или отделения довузовской (предвузовской) подготовки работают во всех крупных вузах. В 1997 году приказом Минобразования России в качестве образовательного стандарта предвузовского обучения утверждены "Требования к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников факультетов и отделений предвузовского обучения иностранных граждан (отраслевой стандарт)" по пяти основным профилям обучения [1].

В системе дисциплин, изучаемых по программе естественнонаучного профиля, важное место принадлежит физике. Характерно, что результатом ее изучения должны быть не только предметные знания и умения, но, в первую очередь, освоение всех видов речевой деятельности (чтение, аудирование, говорение, письмо). Важно отметить, что изучение физики начинается едва ли не одновременно с изучением русского языка. На занятиях по русскому языку предварительное изучение специальной лексики для курса физики малоэффективно потому, что, во-первых, понятий и формулировок в предметной области используется достаточно много и, во-вторых, такое изучение не обеспечивает связей слов с объектами и явлениями и часто сводится к формальному перево-

ду. В результате получается, что обучающийся понимает слова, но не понимает смысла фразы.

Следует отметить специфические моменты в организации обучения иностранных студентов из Юго-Восточной Азии. Главным их них является хорошая базовая подготовка по физике и большие затруднения в изучении русского языка. Например, вьетнамские студенты легко используют латинский алфавит, быстро осваивают кириллицу. Они уверенно пишут по-русски, но предпочитают чтение слуховому восприятию. С большим трудом произносят длинные слова, поскольку в родном языке таковые отсутствуют. Нет во вьетнамском языке и некоторых звуков русского языка, например, [ж], [ц], [щ] и др. Вьетнамцы часто путают звуки [ы] и [и], неправильно ставят ударения, имена их могут состоять из двух букв и даже одной, а короткое слово может иметь до шести значений в зависимости от тональности.

Вместе с тем, учебные группы для предвузовской подготовки обычно бывают малочисленными, что открывает большие возможности для личностно ориентированного обучения, с применением различных методик и форм организации учебной деятельности. Это требует не только владения методикой преподавания физики, но также специальной страноведческой и лингвометодической подготовки.

Занятия по программе предвузовской подготовки должны иметь особую структуру и содержательное наполнение, обеспечивать сочетание различных форм представления информации и речевой деятельности. По форме организации такие занятия являются лекционно-практическими (иначе – групповыми) и требуют активной совместной деятельности преподавателя и студента [2].

Введение новых физических понятий, физических величин и их единиц, анализ явлений и процессов, формулирование законов осуществляется объяснительно-иллюстративным методом. Практические методы используются при повторении новых слов и выражений, ответах на вопросы, чтении и пересказывании фрагментов текста, оформлении конспекта и работе с ним.

На занятиях по физике традиционно используются наглядные методы: выполнение расчетов и рисунков на доске, демонстрация физических опытов, видеофильмов и видеофрагментов, использование компьютера с интерактивными обучающими программами. Компьютер в комплексе с мультимедийным проектором является мощным средством визуализации учебной информации и показать в динамике средствами анимации формулировки и уравнения законов, физические явления в макро и микромире, реальные технические устройства, виртуальные конструкторы электрических цепей и виртуальные эксперименты. Следует добавить о видеофрагментах и видеодемонстрациях. Визуальная информация обычно вызывает у студентов живой интерес, но речевые пояснения они воспринимают как непонятную помеху. По этой причине предпочтительно выключить звук и дополнить видеоряд комментариями преподавателя.

Для начального этапа обучения иностранных студентов очень важно выработать определенные языковые нормы (стандарты речи или единый языковый режим) [2,3]. Их сущность можно свести к следующим положениям

- речевая деятельность студентов должна формироваться поэтапно в соответствии с уровнем подготовки обучающихся;

- используемые учебно-методические пособия и дидактические материалы должны быть адаптированы для студентов-иностранцев;

- следует использовать простые речевые конструкции и, по возможности, короткие слова;

- для лучшего запоминания и понимания формулировки законов и определения должны иметь типовую форму;

- новые слова и выражения преподаватель произносит по слогам, четко выговаривая звуки, с выделением ударения и записью слов на доске;

- проговорить слова и определения преподаватель должен несколько раз, после чего поручить это студентам;

- поскольку говорение и аудирование вызывают особые затруднения, то в условиях малой группы важно обеспечить упражнение каждого курсанта в этих видах речевой деятельности.

В условиях языкового барьера важно использовать все доступные средства, способствующие развитию речевой компетенции обучающихся. Чтение и перевод печатного текста студенты выполняют с помощью программ-переводчиков для компьютеров и смартфонов. Однако основными источниками учебной информации остаются пока преподаватель и печатные учебные пособия. Они же обеспечивают управление аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работой обучающихся.

Учебный материал по физике для предвузовского обучения должен соответствовать современным научным представлениям, требованию аргументированности физических законов, содержать примеры их применения; включать использование аудиовизуальных дидактических материалов; иметь доступный и понятный язык изложения, сформировать систему предметных знаний для продолжения образования в российском вузе [4].

Изложение учебного материала должно быть предельно кратким, но научно обоснованным, содержательным и наглядным, структурированным в соответствии с программой и логикой учебной дисциплины. В качестве средства, позволяющего выполнить перечисленные требования и совместить освоение предметного материала с языковой подготовкой мы предлагаем использовать конспекты (рабочие тетради) с печатной основой. Для конспектирования теоретического материала, изучаемого на занятии, понадобится три-четыре страницы формата А5 (сложенный стандартный лист). В каждом конспекте напечатаны номер и тема занятия, номера и названия учебных вопросов, основные определения и формулировки законов, тексты задач для закрепления изучаемой теории. Оставлены свободными участки для выполнения рисунков и графиков, записи формул и уравнений физических законов, выполнения математических преобразований, обозначений величин и их единиц.

Соотношение печатной основы и свободной части в конспектах не одинаково. На первых занятиях студенты записывают только то, что видят на доске или экране. Соответственно и печатная основа содержит больше текста и урав-

нений. Примерно через полгода обучающиеся могут записать услышанное предложение из знакомых слов. В видеофрагментах обычно показывается практическое применение изучаемого материала или экспериментальная проверка теоретических выводов и потому записи в тексте можно ограничить названием фильма на русском языке с последующим переводом на родной язык. Процедура перевода займет меньше времени, если название фильма имеется в печатной части конспекта. Имея лазерный принтер, такие материалы можно быстро распечатать из подготовленной базы текстов для каждого курсанта. Это позволит более эффективно использовать время на групповом занятии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Требования к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников факультетов и отделений предвузовского обучения иностранных граждан (отраслевой стандарт) // Электронный ресурс. Режим доступа: http://www.edu.ru/documents/view/5042/
2. Хвалина Е.А. Методологические аспекты преподавания физики иностранным учащимся на этапе довузовской подготовки // Электронный ресурс. Режим доступа: http://www.rusnauka.com/7._DN_2007/Pedagogica/18257.doc.htm
3. Дорохова О.В. Модель интегративного предвузовского обучения иностранных студентов общеобразовательным дисциплинам // Предвузовская подготовка иностранных студентов в СПбГПУ / Под ред. Д.Г. Арсеньева, О.В. Дороховой, А.И. Сурыгина. Серия «Проблемы обучения иностранных студентов». – Выпуск 3. С-Пб.: Издательство Политехнического университета. – 2005, 172 с. С. 27-63.
4. Кулик С. С. и др. Образовательные технологии в обучении физике, математике и инженерной графике иностранных студентов // Мир науки. – 2016. – Т. 4. – № 2. – С. 1-6.

УДК 372.853

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ НА БИОЛОГО-ХИМИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЯХ

И.И. Чернобровкина, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *iichernobrovkina@yandex.ru*

В статье речь пойдет об особенностях преподавания физики на направлениях «биология-химия», из опыта работы на данных направлениях.

Ключевые слова: методика преподавания физики в ВУЗе.

Дисциплина «Физика» входит в учебные планы следующих специальностей биолого-химического направления: география, почвоведение, биология, экология и природопользование (в Орловском государственном университете). Эта дисциплина одно семестровая и изучается, как правило, на втором курсе.

Основная сложность освоения дисциплины состоит в том, что студенты, поступающие на данные направления, не сдавали в школе ЕГЭ по физике и более того, основательно подзабыли полученные школьные знания по физике ко второму курсу университета. Это выяснилось в результате анкетирования и опроса студентов.

Вторая сложность состоит в том, что курс является скорее обзорным. На освоение курса, согласно учебному плану, отводится 16 лекционных часов (всего 8 лекций) и 20 часов практических (или лабораторных) занятий. За это время необходимо ознакомиться практически со всеми разделами физики, что приводит к тщательному отбору материала и сжатости его изложения.

Третьей особенностью является тот факт, что студенты данных направлений также не сдавали ЕГЭ по математике на профильном уровне. И вычислительные навыки у них слабо развиты. Знание формул, перевод в систему СИ – также порой вызывают затруднения.

В силу специфики всего вышесказанного, основными целями изучения дисциплины "Физика" являются

1. Овладения знаниями фундаментальных физических законах и принципах, лежащих в основе современной физической картины мира;

2. Овладение умениями проводить наблюдения, применять полученные знания по физике для объяснения разнообразных физических явлений и свойств веществ; уметь практически использовать физические знания; оценивать достоверность естественно-научной информации;

3. Развитие познавательных интересов, интеллектуальных и творческих способностей в процессе приобретения знаний и умений по физике;

4. Использование приобретенных знаний и умений для решения практических задач повседневной жизни, возможность применения знаний при решении задач, возникающих в последующей профессиональной деятельности.

Основной задачей изучения дисциплины является обеспечение уровня знаний, который позволит студентам:

а) эффективно воспринимать и осваивать физическую информацию;

б) сформировать научный взгляд на мир.

Выделим основные компетенции, которые являются общими в программах для всех вышеназванных специальностей и которые формируются в результате изучения физики:

1) способность к самоорганизации и самообразованию; 2) владение базовыми знаниями фундаментальных разделов физики, необходимом для освоения физических основ в экологии и природопользовании, географии, биологии.

Эти компетенции формируются в результате работы над лекционным материалом, подготовке к практическим занятиям, самостоятельного изучения отдельных тем, подготовке рефератов.

В связи со всем вышесказанным для изучения выбраны следующие разделы физики:

1. Механика

2. Основы молекулярной физики и термодинамики

3. Электродинамика

4. Колебания и волны

5. Оптика.

Раздел «Механика» непосредственно на связан с будущей профессиональной деятельностью студентов, но знания, полученные при изучении этого раздела однозначно пригодятся в повседневной жизни и реализуют вышеназванные компетенции.

Раздел «Основы молекулярной физики и термодинамики» имеет межпредметные связи с химией, поэтому его необходимо рассмотреть, проводя аналогии с вопросами химии.

Следующие разделы также реализуют компетенции, приведенные в программе.

Таким образом, лекционный материал следует тщательно выбирать с учетом специфики направления подготовки и достижения компетенций.

Часть этого материала выносится на самостоятельное изучение в силу небольшого количества аудиторных лекционных часов.

Для рефератов предлагаются следующие темы:

1.Использование свойств газов в географии (биологии, почвоведении).

2. Устройство и принцип работы различных термометров.

3. Капиллярные явления в природе.

4. Полимеры и их применение.

5. Испытание материалов на прочность при ударе.

6. Сопротивление твердых тел деформированию при динамических нагрузках.

7. Силы инерции в природе и технике. Силы Кориолиса.

8. Силы трения в природе и технике.

9. Плазма-четвертое состояние вещества.

10. Влияние магнитного поля Земли на здоровье человека. Геопатогенные зоны.

11. Гипотезы о природе шаровой молнии.

12. Физическое описание явления фильтрации жидкости.

13. Молния и газовый разряд в природных условиях.

14. Оптические явления в природе.

15. Дифракционные методы исследования структуры вещества.

На практических занятиях не следует давать задачи повышенной сложности. Часто при решении задач придется использовать знания математического анализа, а именно – нахождение производных и интегралов. Так, например, рассмотрим решение задачи:

Тело, массой 4 кг, движется прямолинейно и зависимость пройденного телом расстояния от времени описывается уравнением: $s(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 1$ м/с^2; $D = -0{,}2$ м/с^3. Определите силу, действующую на тело в конце первой секунды.

Решение: согласно второму закону Ньютона, F = ma = m$\frac{dv}{dt}$. Сначала найдем скорость точки: v = $\frac{ds}{dt}$ = B + 2Ct+3Dt^2, и тогда ускорение a = $\frac{dv}{dt}$ = 2C + 6Dt. Далее останется только подставить исходные данные и ответ будет получен: F = 3,2 Н.

Самые «сильные» межпредметные связи физики и профильных дисциплин рассматриваемых профилей – это в разделе «Основы молекулярной физики и термодинамики». Приведем пример задачи:

В сосуде вместимостью 1 л находится кислород массой 1 грамм. Определите концентрацию молекул в сосуде.

Как показывает практика, студенты предпочитают, если это возможно, решать задачи «по действиям», т.е. производить вычисления поэтапно, а не выводить формулу и подставлять данные в самом конце.

В данной задаче потребуется молярная плотность водорода (M = 0,032 кг/моль).

Решение: объединенный газовый закон, связывающий давление газа, его температуру и концентрацию молекул гласит: p = nkt. Тогда n = $\frac{p}{kt}$. Применяя формулу pV = $\frac{m}{M}Rt$ и выражая из нее сразу отношение $\frac{p}{t}$ = $\frac{mR}{MV}$, в итоге получим искомуэ формулу для нахлждения числа молекул: n = $\frac{mR}{MkV}$. Подставляя исходные данные – получим ответ: n = 1,88·10^{25}.

Эта задача вызовет затруднение в выражении формул.

Приведем еще пример задачи: Определите число атомов в 1 кг водорода и массу атома водорода.

Эта задача, как правило, не вызывает затруднений у студентов, поскольку здесь надо только правильно выписать формулу и подставить в нее исходные значения. Но также потребуются значения постоянной Авогадро (N_A = 6,02·10^{23}моль$^{-1}$) и молярной плотности водорода (M = 0,002 кг/моль).

Решение: N = $\frac{m}{M}$ N_A = $\frac{1}{0,002}$ 6,02·10^{23} = 3,01·10^{26}. Рассчитаем массу атома водорода: m_0 = $\frac{m}{N}$ = 3,32·10^{-27} (кг).

При решении этой задачи могут возникнуть трудности в вычислениях (работа со степенями).

Для подготовки к занятиям преподавателям и студентам можно порекомендовать источники [1] и [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. – 11-е изд., стер. - М.: Издательский центр «Академия». – 2006. – 560 с.
2. Трофимова Т.И. Курс физики. Задачи и решения: учеб. пособие для учреждения высш. проф. образования. – 4-е изд., испр. - М.: Издательский центр «Академия». – 2011. – 592 с.

УДК 372.851

СХЕМА ГОРНЕРА В КУРСЕ АЛГЕБРЫ

И.И. Чернобровкина, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *iichernobrovkina@yandex.ru*
Ю.В. Чернобровкина, асп.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»
e-mail: *nikeli2009@yandex.ru*

В статье речь пойдет о возможностях использования схемы Горнера при решении различных алгебраических задач.

Ключевые слова: методика преподавания математики в школе и в ВУЗе, схема Горнера.

Схема Горнера – общеизвестная схема, используемая в алгебре многочленов. До недавнего времени эту тему изучали только в курсе «Алгебра многочленов» в вузах, в школьном курсе ее практически не использовали. Но в настоящее время, в школах, особенно в классах с углубленным изучением математики, ее активно применяют при решении различных задач. Так, например, в действующем учебнике Никольского С.М. [1] при изучении раздела «Рациональные уравнения и неравенства», в теме «Теорема Безу» рассматривается возможность деления многочлена f(x) на двучлен (x – a) с помощью схемы Горнера.

Если многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ разделить на (x – a), то коэффициенты частного и остаток от деления находят по схеме Горнера:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
x_0	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1}x_0$	$b_{n-3} = a_{n-2} + b_{n-2}x_0$	…	$b_0 = a_1 + b_1 x_0$	$c = a_0 + b_0 x_0$

Рассмотрим задачи, при решении которых можно применить схему Горнера.

Задача 1. Разделить с остатком многочлен f(x) на (x – a).

Пример: разделить с остатком $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$ на (x + 2).

Решение: составим схему Горнера:

	2	0	-3	2
-2	2	-4	5	-8

Тогда можно записать $f(x) = (2x^2 - 4x + 5)(x + 2) - 8$, т.е. частное от деления $g(x) = (2x^2 - 4x + 5)$ и остаток r = -8.

Задача 2. Найти значение многочлена f(x) при x = a.

Пример: $f(x) = x^4 + 5x^3 - 3x + 6$ при x = 2.

Значение многочлена при данном x можно найти непосредственной подстановкой в многочлен, но можно и по схеме Горнера:

	1	5	0	-3	6
2	1	7	14	25	56

Таким образом, f(2) = 56.

Задача 3. Выяснить, является ли число корнем многочлена.

Чтобы некоторое число a было корнем многочлена, достаточно показать, что последнее число в ячейке схемы будет равно нулю. Этим способом удобно подбором решать уравнения, особенно больших степеней.

Пример. Показать, что x =1 является корнем многочлена $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 2x^3 - x + 2$.

Решение: составим схему Горнера:

	2	-5	2	0	-1	2
1	2	-3	-1	-1	-2	0

Поскольку остаток от деления равен нулю, то x = 1 является корнем многочлена.

Задача 4. Используя схему Горнера, определить кратность k корня многочлена.

Пример: с помощью схемы Горнера определить кратность k корня x = 2 многочлена $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ [2, стр. 12].

Решение: составим схему Горнера для данного многочлена:

	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	0
2	1	-1	-1	-2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	7			

Согласно таблице, можно расписать: $f(x) = (x^4 - 3x^3 + x^2 + 4)(x - 2) = (x^3 - x^2 - x - 2)(x - 2)^2 = (x^2 + x + 1)(x - 2)^3$. И кратность корня x = 2 равна 3.

Задача 5. Найти такие значения a и b, при которых число α было бы корнем многочлена f(x) кратности не ниже k.

Пример: Найти такие значения a и b, при которых число α = 1 было бы корнем многочлена $f(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1$ кратности не ниже k = 3.

Решение: составим схему Горнера и учтем, что в трех строках в последних ячейках должны быть нули (см. пример 2).

	1	-1	-4	a	B	1
1	1	0	-4	-4 + a	-4 + a + b	-3 + a+b = 0
1	1	1	-3	-7 + a	-11 + 2a + b = 0	
1	1	2	-1	-8 + a = 0		

Решая систему из уравнений, полученных в таблице, находим a=8, b= -5.

Задача 6. Разложение многочлена по степеням

Пример: Разложить многочлен $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ по степеням (x + 2).

Решение: данную задачу можно решить, используя формулу Тейлора или схему Горнера. С использованием схемы Горнера решение будет выглядеть следующим образом:

	4	-3	0	2
-2	4	-11	-22	-42 = f(-2)
-2	4	-19	$6 = f'(-2)$	
-2	4	$-27 = \frac{f''(-2)}{2!}$		
-2	$4 = \frac{f'''(-2)}{3!}$			

И тогда разложение многочлена f(x) по степеням (x + 2) примет вид:

$f(x) = -42 + 60(x + 2) – 27 (x + 2)^2 + 4(x + 2)^3$.

Задача 7. Вычислить значение многочлена f(x) при заданных значениях x.

В данном случае имеется ввиду использование в решении сразу двух способов: разложение многочлена по степеням и схемы Горнера.

Пример: вычислить значение многочлена $f(x) = x^4+5x^3 + 9x^2 +7$ при x = 3,1 и x = 2,9.

Решение: вычисление значений f(3,1) и f(2,9) непосредственной подстановкой значений переменной в многочлен затруднительно. Ближайшим целым числом к данным значениям переменной является 3. Поэтому сначала удобно разложить многочлен f(x) по степеням (x – 3) по формуле Тейлора, используя схему Горнера:

	1	5	9	0	7
3	1	8	33	99	304 = f(3)
3	1	11	66	297= $f'(3)$	
3	1	14	108= $\frac{f''(3)}{2!}$		
3	1	17 = $\frac{f'''(3)}{3!}$			
3	1 = $\frac{f^{(4)}(3)}{4!}$				

Таким образом, $f(x) = 304 + 297(x – 3) + 108 (x – 3)^2 + 17 (x – 3)^3 + (x – 3)^4$.

При x = 2,9 имеем $f(2,91) = 304 + 297(2,9 – 3) + 108 (2,9 – 3)^2 + 17 (2,9 – 3)^3 + (2,9– 3)^4 = 304 - 29,7 +1,08 - 0,017 + 0,0001 = 275,3631$.

При x = 3,1 имеем $f(3,1) = 304 + 297(3,1 – 3) + 108 (3,1 – 3)^2 + 17 (3,1 – 3)^3 + (3,1 – 3)^4 = 304 + 29,7 +1,08 + 0,017 + 0,0001 = 334,7971$.

Задача 8. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь.

Пример: разложить на простейшие дроби рациональную дробь $\frac{x^4+7x^3+4x^2-25x+1}{(x+5)^6}$.

Решение: Разложим числитель по степеням (x + 5) по формуле Тейлора, используя схему Горнера:

	1	7	4	-25	1
-5	1	2	-6	5	-24 = f(-5)
-5	1	-3	9	40= $f'(-5)$	
-5	1	-8	49 = $\frac{f''(-5)}{2!}$		
-5	1	-13 = $\frac{f^{(3)}(-5)}{3!}$			
-5	1 = $\frac{f^{(4)}(-5)}{4!}$				

Тогда дробь примет вид $\frac{(x+5)^4-13(x+5)^3+49(x+5)^2+4\ (x+5)-24}{(x+5)^6}$. Разделив почленно, получим $\frac{1}{(x+5)^2} - \frac{13}{(x+5)^3} + \frac{49}{(x+5)^4} + \frac{40}{(x+5)^5} + \frac{24}{(x+5)^6}$. Данное преобразова-

ние удобно, например, при решении задачи интегрирования рациональных дробей.

Таким образом, мы привели основные типы задач, которые можно решать с помощью схемы Горнера и использовать этот материал возможно как в школьном курсе алгебры, так и при изучении алгебры многочленов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.
2. Солодовников А.С., Родина М.А. Задачник – практикум по алгебре. Ч. IV. Учеб. пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед.ин-тов. – М.: Просвещение, 1985. – 127 с.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УЧАЩИХСЯ ВНЕ УРОКОВ МАТЕМАТИКИ

Ю.В. Чернобровкина, асп.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *Nikeli2009@yandex.ru*
А.В. Кокорев, к.ф.-м.н.
ФГБОУ ВО «Петербургский государственный университет путей сообщения имени Александра I»
e-mail: *pears911@mail.ru*

Модернизация системы образования в Российской Федерации – тема, ставшая особенно актуальной за последние четверть века. В условиях постоянно увеличивающегося потока информации, развития технологий и совершенствования оборудования, перед государством встала необходимость в подготовке кадров, способных ориентироваться и приспосабливаться к быстро меняющимся условиям работы, самообучаться, креативно мыслить и находить новые пути решения проблем. Все это повлекло за собой изменения в образовательной системе.

На сегодняшний день в сфере образования происходит активное внедрение ФГОС второго поколения. Согласно национальной образовательной инициативе «Наша новая школа» от 4.02.2010 «Модернизация и инновационное развитие - единственный путь, который позволит России стать конкурентным обществом в мире 21-го века, … важнейшими качествами личности становятся инициативность, способность творчески мыслить и находить нестандартные решения, умение выбирать профессиональный путь, готовность обучаться в течение всей жизни ... Школьное обучение должно быть построено так, чтобы выпускники могли

самостоятельно ставить и достигать серьёзных целей, умело реагировать на разные жизненные ситуации…» [3].

В связи с этим актуальной проблемой «новой школы» является обучение учащихся способам самостоятельного поиска, анализа и переработки новой информации. Формированию данных навыков и умений способствует целенаправленное развитие исследовательской компетентности школьников.

Под исследовательской компетентностью школьников будем понимать способность учащихся самостоятельно получать новые знания, выдвигать гипотезы, находить пути их обоснования, определять цель, объект и предмет исследования, ставить перед собой задачи для достижения цели, проводить исследования (наблюдения, эксперименты), обобщать полученный результат.

Учебная деятельность включает в себя как урочную, так и внеурочную деятельность. Формирование исследовательской компетентности в рамках внеурочной деятельности обладает большим потенциалом и разнообразием форм реализации в силу ее специфики. Так, внеурочная деятельность в большей мере направлена на развитие интересов и творческих способностей учащихся, построение пространства для самовыражения и саморазвития, где учебные предметы выступают в качестве инструмента достижения цели.

Обучение приемам исследовательской деятельности может проходить постепенно, в несколько этапов, плавно снижая уровень контроля учителя-наставника и увеличивая самостоятельность и инициативность учащегося. В таком ключе можно выделить три этапа:

1) Учитель предлагает тему исследования (выдвигает проблему) и план ее раскрытия (решения). Реализовать раскрытие темы предлагается ученику.

2) Учитель предлагает тему, но учащийся сам решает, что нужно для полного ее раскрытия.

3) Тема, план реализации и сама реализация полностью лежат на ученике. Учитель выступает в качестве советчика-наставника.

Важным навыком для обучающихся является умение представлять результаты своего исследования. При этом ученик переосмысливает проделанную работу, выделяет основные ее этапы и наиболее важные результаты, учится доступно, интересно и наглядно презентовать свой проект-исследование. Выступить с презентацией можно перед классом или на конференции школьного или более высокого уровня. Участие в конференциях имеет свои достоинства. Например, формируется навык выступления перед публикой, анализируются доклады других участников. В результате обучающийся не только получает дополнительные знания, вдохновляется, находит темы для дальнейших исследований, но и подмечает новые приемы исследования, способы подачи материала, особенности или недочеты других выступающих, что помогает ему скорректировать в дальнейшем свою работу и повысить ее качество.

Вовлечение учащихся в исследовательскую деятельность также способствует повышению интереса к предмету. Практика показывает, что у обучающихся среднего звена (5-9 класс) часто возникают проблемы по

математике. Проведя опрос среди учеников, можно увидеть, что многие считают данный предмет «сложным». Велик процент детей, убежденных, что у них «нет склонности к математике». Для популяризации данного предмета в 6 «В» классе в 2017-2018 учебном году в МБОУ-лицее №4 г. Орла был введен факультатив «Занимательная математика». Кроме освоения рабочей программы, в рамках данного факультатива осуществлялась подготовка проектов для конференций разного уровня (неделя математики, МИФ, Поликарповские чтения).

В 2017 году для выступления на конференциях учащимися были выполнены работы «Многогранники в природе» и «Математические парадоксы и софизмы». Последняя работа заняла третье место на Всероссийской молодежной научно-практической конференции МИФ-2017 и первое место на школьной неделе математики. Основной частью данной работы было решение геометрических софизмов. По результатам конференции МИФ-2017 был выпущен сборник, включивший в себя тезисы выступлений победителей и призеров (рисунок 1).

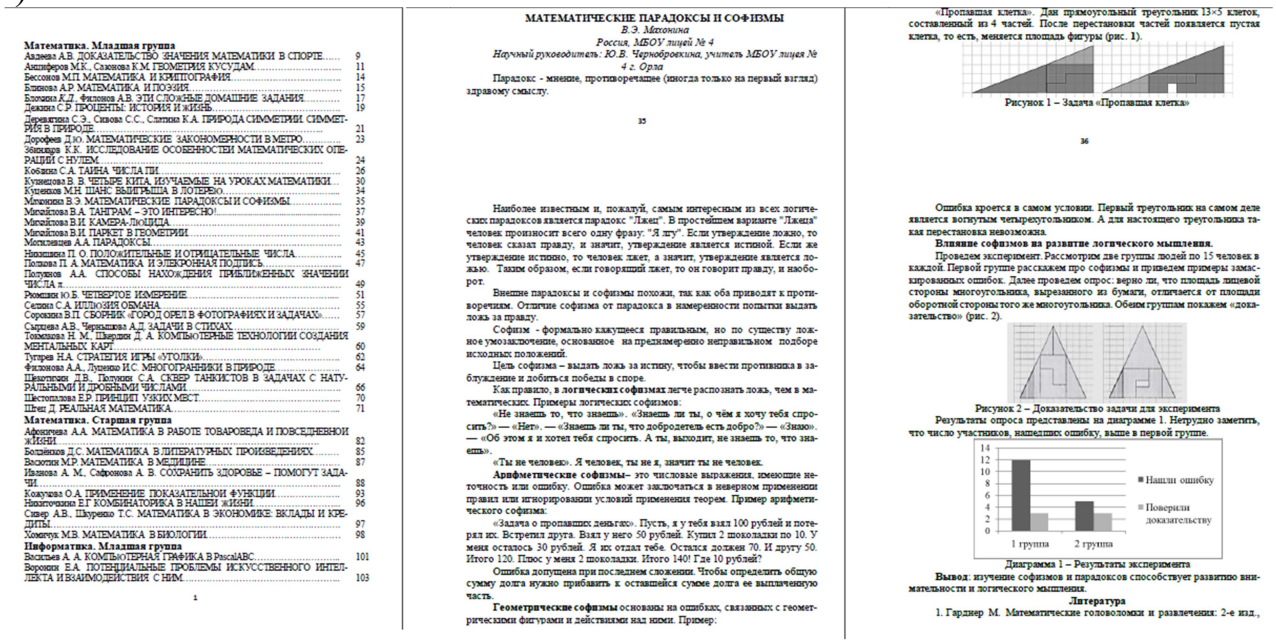


Рисунок 1 – Статья в сборнике по материалам конференции МИФ-2017

Продолжая работу в рамках внеурочной деятельности к 2019-2020 учебному году удалось расширить круг учащихся, вовлеченных в исследовательскую деятельность, повысить интерес к предмету, добиться конкретных результатов на конференциях.

Организация исследовательской деятельности рассматривается сегодня как мощная инновационная образовательная технология. Она служит средством комплексного решения задач воспитания, образования и развития. Поэтому на сегодняшний день необходимо создать каждому обучающемуся условия, необходимые для саморазвития и реализации его интеллектуальных и творческих способностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаханов, Н. Х. Программа «Наша новая школа». Модернизация системы работы с математически одарёнными школьниками / Н. Х. Агаханов, О. К. Под-липский, Д. А. Терёшин // Труды 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Ч. XII. – М.: МФТИ. – 2010 – С. 34 – 35.

2. Выготский, Л. С. Умственное развитие детей в процессе обучения / Л. С. Выготский. – М.: Книга по Требованию.– 2013. – 135 с.

3. Приказ Президента Российской Федерации от 04.02.2010 № Пр-271 «Национальная образовательная инициатива «Наша новая школа» // Президентская инициатива «Наша новая школа». – Режим доступа: http://nasha-novaya-shkola.ru/.

4. Хуторской А. В. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования // Народное образование. – 2003. – № 2. – С. 58-64.