МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И. С. ТУРГЕНЕВА»

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Материалы
VI Всероссийской научно-практической конференции
с международным участием (4 – 5 декабря 2020 г., г. Орел)

Научное электронное издание

Под общей редакцией
кандидата физико-математических наук, профессора Т. Н. Можаровой

Орёл
ОГУ имени И. С. Тургенева
2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И. С. ТУРГЕНЕВА»

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Материалы
VI Всероссийской научно-практической конференции
с международным участием (4 – 5 декабря 2020 г., г. Орел)

Научное электронное издание

Под общей редакцией
кандидата физико-математических наук, профессора Т. Н. Можаровой

Орёл
ОГУ имени И. С. Тургенева
2020

УДК 51+53+681.3
ББК 22.1+22.3+32.81(072.8)
С56

Редакционная коллегия:

Дорофеева В. И., кандидат физико-математических наук, доцент;
Зарубин А. Н., доктор физико-математических наук, профессор;
Можарова Т. Н., кандидат физико-математических наук, профессор;
Марков О. И., доктор физико-математических наук, профессор;
Селютин В. Д., доктор педагогических наук, профессор;
Тарасова О. В., доктор педагогических наук, профессор;
Федяев Ю. С., кандидат физико-математических наук, доцент.

С56 **Современные проблемы физико-математических наук** / материалы VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (4 – 5 декабря 2020 г., г. Орел): научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией кандидата физико-математических наук, профессора Т. Н. Можаровой. – Орел: ОГУ имени И. С. Тургенева, 2020. – 1 электрон. опт. диск (DVD-R). – Системные требования: стационарные и переносные компьютеры с операционной системой Windows версии 7 и выше; процессор x64 3,3 GHz и выше; 27,5 Mb свободной памяти HDD; цветной дисплей с диагональю экрана от 10.1” (1280 × 800 точек) и больше; наличие подключения к сети интернет, дисковод, мышь.

ISBN 978-5-99290923-4

В сборнике содержатся тексты докладов, прочитанных на VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, проходившей 4 – 5 декабря на базе физико-математического факультета Орловского государственного университета имени И. С. Тургенева.

Материалы издаются в авторской редакции с незначительной технической корректурой.

Сборник предназначен для преподавателей, научных работников, аспирантов и студентов физико-математических направлений.

ISBN 978-5-99290923-4 © ОГУ имени И. С. Тургенева, 2020

Технические требования к программному обеспечению:

Программа просмотра файлов Microsoft Word 97-2003, программа просмотра pdf-файлов

Компьютерная верстка: С. П. Строев.
Технический редактор: С. П. Строев.

Дата подписания к использованию: 26.12.2020
DVD-R. Объем – 4,7 Гб
Количество носителей – 1
Контактные данные:
ул. Комсомольская, 95, г. Орёл, 302026
oreluniver.ru

Содержание

Математический анализ и дифференциальные уравнения 11
Абдурагимов Г.Э. Численное решение краевой задачи для одного нелинейного интегрально-дифференциального уравнения второго порядка 11
Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение смешанной краевой задачи для уравнения лапласа в полубесконечном слое 13
Антоновская О.Г., Бесклубная А.В. О возможности применения квадратичной функции Ляпунова при решении задачи определения длительности переходных процессов в системе 19
Бородинова И.А. Задача Δ_s для обобщенного уравнения Эйлера-Дарбу с одним параметром 25
Васильев А.В., Васильев В.Б., Статинов Д.С. О некоторых уравнениях типа свертки в дискретных функциональных пространствах 30
Васильев А.В., Васильев В.Б., Скучас Д.А. О некоторых представлениях решений дискретных псевдодифференциальных уравнений 33
Георги В.С. Эвристический подход к решению задачи упаковки в контейнеры 37
Гилёва О.В., Чудинов В.В., Гилёв А.Ю. Моделирование оптимального расположения пасеки в зависимости от флористического состава фитоценоза естественного ландшафта 41
Евхута О.Н., Евхута Н.А. Производные Ньютона-Лейбница в банаховых пространствах 47
Жукова Г.С. Особенности асимптотики решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений 51
Зарубин А.Н. Задача типа Коши для дифференциально-разностного уравнения дробного порядка 58
Зарубин А.Н. Задача Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения Лаврентьева-Бицадзе 61
Можарова Т.Н. Об одной функциональной реализации пространства линейных непрерывных функционалов 72
Нигай Р.М. Моделирование жестких динамических систем 76
Отаров А.О. Применение одного метода дифференциального спуска к решению операторных уравнений 86
Платонов С.С. О преобразовании Бесселя функций из весовых классов Никольского 89
Резниченко И.О., Крутицкий П.А., Колыбасова В.В. О вычислении одного интеграла с квадратичной иррациональностью 92
Сербина Л.И. Об одной задаче для дробного уравнения влагопереноса 100
Соломатин О.Д. Решение дифференциально-операторного уравнения в нормированном пространстве функций действительной переменной 103
Соломатин О.Д. Сравнение скорости роста элементарных функций 105

Чаплыгина Е.В. О задаче типа Коши для функционально-дифференциального уравнения дробного порядка 107

Алгебра, топология и геометрия 111

Агафонцев В.В. О бинарной проблеме Гольдбаха 111

Батуров Д.П. О вложениях в плотные подпространства произведений 114

Васина О.Ю., Макаров Д.А., Сорокина М.М. О влиянии Q-замкнутости классов групп на подгрупповые функторы 117

Дубровина Т.В., Дубровин Н.И. Многообразия групп $L(p,n)$ и $L(\pi,2)$ 122

Дубровина Т.В. Цокольная высота многообразия групп 125

Прояева И.В., Колобов А.Н О трилинейных координатах 130

Математические методы в экономике 133

Базилевский М.П. Построение линейных регрессионных уравнений с помощью полносвязных регрессий в условиях превосходства количества факторов над числом наблюдений 133

Зеленина Л.И., Хаймина Л.Э., Деменкова Е.А., Деменков М.Е., Хаймин Е.С., Чикалина В.А. Анализ социально-экономической дифференциации населения по доходам 138

Зубкова Л.Н. Проектирование нечетких систем в задачах управления 145

Курбыко И.Ф. Прогнозирование динамики показателей социально-экономического развития Владимирской области 148

Теория вероятностей и математическая статистика 154

Горбунова А.В., Лебедев А.В. Нижние оценки нетранзитивности для трех и четырех случайных величин с полиномиальной плотностью на единичном отрезке 154

Лебедев А.В. Корреляционный анализ зависимых дискретных вероятностных пространств 162

Левизов С.В. О выпадении сочетания «6, 6» при бросании кубика 169

Методы дискретных особенностей в задачах математической физики 173

Воронина Г.В., Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в кусочно-однородном грунте 173

Дорофеева В.И., Соромотина А.А. Исследование процесса оседания бугра грунтовых вод под действием силы тяжести, двух дренажных устройств и полупроницаемого включения 177

Иванисова О.В., Лахтина А.А. Движение однородной пластины малой толщины в весомой жидкости 180

Лекомцев Д.Г. Математическое моделирование работы совершенной скважины вблизи прямолинейного контура питания и прямолинейной непроницаемой границы 186

Пивень В.Ф. Плоские граничные задачи фильтрации жидкости с произвольно расположенными источниками 191

Ставцев С.Л. Применение малоранговых аппроксимаций для решения задачи электродинамики 195

Физика конденсированного состояния 202

Аринцына К.И., Марков О.И. Исследование методом рамановской спектроскопии монокристаллов на основе висмута 202

Vasil'ev A.E., Ivanov O.N., Zhezhu M.V., Yapryntseva E.N. Synthesis of thermoelectric composite based on Bi2Te3 matrix with magnetic filler 208

Гаврищук Е.М., Мусаев М.А., Аббасов И.И., Алиев Н.Ш., Гусейнов Дж.И., Кадымзаде С.М., Рагимов Р.Ш. Диэлектрические свойства CVD ZnSe на переменном токе 212

Гасанов И.С., Алиев С.А., Мамедова Г.Х., Гурбанов И.И., Акбаров Е.М., Мамедов Ф.Е., Керимова А.Х. Сферическая аберрация плазменной линзы, формирующей ионные пучки 219

Джураев Х.Ш., Джураева Г.Х., Мелиев Н.Н. О регуляризации краевых задач для гиперболического уравнения 223

Джураев Х.Ш., Комилов К., Норматов З.С., Умаров А.Н., Нарзуллоев Н. Модельное исследование нелинейного нестационарного процесса теплопроводности в сплошных средах 227

Джураев Х.Ш., Хасанов С.Ш., Нарзуллоев Н. Модельное исследование температурной зависимости теплопроводности металлических материалов 236

Зо А., Гладков С.О. К вопросу модификации уравнения Навье-Стокса при учете дополнительных неоднородных слагаемых в высших порядках по длине свободного пробега 244

Иванов О.Н., Япрынцев М.Н., Васильев А.Е. Особенности текстурирования соединений на основе теллурида висмута 247

Марков О.И., Шмелёв Д.С. Моделирование фуллеренов висмута 252

Мусаев М.А., Аббасов И.И., Гаврищук Е.М., Гусейнов Дж.И., Нуриева С.Г., Алиева Л.А., Рагимов Р.Ш. Спектры зелёной фотолюминесценции образца CVD ZnSe с различных точек поверхности 256

Серебренников Д.А., Клементьев Е.С. Кластеры в интерметаллидах типа фазы Лавеса: структурные мотивы или физические объекты? 261

Информатика и информационные технологии 268

Гращенко Л.А., Кузьмин Н.С., Модин А.А. Признаки статистической локализации библиографических описаний в неструктурированных текстах 268

Дудникова А.И. О проблеме защиты инфраструктуры организации и методе её решения 274

Едемский В.А., Чуркин О.О. Оценка 2-адической сложности последовательностей Динга-Хеллесета четвертого порядка 277

Корниенко Д.В., Строев С.П. Сегментация клиентов компании инструментами Python 282
Новикова Е.В. Формирование финансовых и коммерческих организаций в агентной модели пространственного развития России 286
Полякова А.Ю. Цифровая трансформация общего образования и формирование стохастической культуры школьника: социальные и образовательные аспекты 291
Сафронов А.А., Кузьмин И.Е. Автоматизированный веб-скрепинг динамических элементов на Python 3 295
Храмцов Н.С. О проведении разметки коллекции текстов ключевыми словами 300
Черкасова В.В. Особенности программирования на ассемблере в 64-битной операционной системе Linux 305

Инженерные приложения физико-математических наук 310
Варгашкин В.Я. Анализ вклада мультипольных составляющих высшего порядка в основную погрешность ориентирования в безопорном пространстве при использовании резервной системы отсчета, связанной с анизотропией микроволнового реликтового излучения ранней Вселенной 310
Гладков С.О., Богданова С.Б. К теоретическому описанию движения шарика между двумя концентрическими жесткими сферами 319
Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу о возможных формах желоба при условии постоянства силы реакции движущегося по нему телу 324
Голубева О.И. Алгоритмы получения функций тестопригодности полюса элемента комбинационной схемы 327
Голубева О.И. Троичное моделирование комбинационных схем с использованием SAT-решателей и его применение при верификации 335
Калинин Н.М., Тарасов К.Е. Выполнение геометрических построений с использованием систем автоматизированного проектирования Компас-3D 341
Киреева И.Ю., Наумкина Т.С., Румянцев В.С. Учебная лабораторная установка для изучения магнитных свойств ферромагнетиков 346
Корнаева Е.П., Корнаев А.В. Численные модели для исследования реологических и тепловых эффектов в подшипниках жидкостного трения 351
Маркин Н.И., Музалевская М.А., Катунин А.А., Шарифов Н.К., Марганова О.Н. Проектирование образовательной деятельности 359
Марчук Е.А., Малолетов А.В. Fuzzy-управление гибридным реконфигурируемым тросовым роботом 362
Миназетдинов Н.М. Задача электрохимического копирования периодическим электродом-инструментом 367
Никитина М.А., Шмаков И.Г. Связь сейшевых колебаний с распределением сейсмичности вблизи озера Байкал 372
Пилипенко А.П., Лобанова В.А. Способ определения доминирующего механизма отказа IGBT модулей паяной конструкции 376

Побережский С.Ю., Гладков С.О. О некоторых тепловых свойствах бинарных растворов жидкостей 383
Сарьян В.К., Русаков А.А., Любушин А.А., Дубнов Д.В. Типовые процессы как возможный инструмент сейсмопрогноза 386
Свиридюк Г.А., Келлер А.В. Обратная задача динамических измерений как задача оптимального управления 394
Семин А.Г., Кошелева Ю.А., Музалевская М.А. Разработка программы контроля геометрических параметров изделий путем статического анализа с применением контрольных карт Шухарта. Карты среднего и размахов 401
Толпаев В.А., Ахмедов К.С. Аппроксимационные математические модели зависимости пластового давления от накопленного объема добытого газа 404
Толпаев В.А., Ахмедов К.С. Применение кубических сплайнов в расчетах прогнозных дебитов газовых скважин 410
Турин В.О., Павлова В.Н., Ставцев Д.И. Численный расчёт зависимости химического потенциала ферми-газа свободных электронов от температуры 417
Филимонова О.Н., Викулин А.С. Моделирование гидродинамической нестабильности компримирования атмосферного воздуха при адсорбционной очистке 424

Методика преподавания точных наук в школе и вузе 428
Андреева В.Н. Тематические валеоминутки на уроках математики в 5, 6 классах «ДИЗ» (Делай и Запоминай) 428
Власов Д.А. Возможности инструментального средства WolframAlpa в реализации прикладной направленности преподавания учебной темы «Собственные значения и векторы матрицы» 435
Галкина А.В. Из опыта формирования вычислительных навыков у учащихся на уроках математики 441
Гомбоева И.С. Электронный текст как средство дистанционного обучения 447
Гусейнов Д.И., Адгезалова Х.А., Гасанов О.М., Гадымалиева Л.Б. Микроэлектроника и наноэлектроника в педагогической деятельности средней школы 452
Донцова Ю.А. Применение цифровых технологий на уроках математики 455
Дронов В.М., Рогожина Т.С. Результаты сравнительного анализа различных форм обучения с помощью дистанционных и традиционных образовательных технологий по физике студентов строительных специальностей 459
Евсеева Е.Г. Направления развития методики обучения теории вероятностей и математической статистике будущих инженеров 463
Ельчанинова Г.Г., Рыманова Т.Е. К вопросу о воспитании познавательного интереса школьников к математике 469

Кокорев А.В., Орехова С.С., Сучкова Е.Е. Анализ результатов выполнения задания №15 профильного ЕГЭ по математике 475
Корогодина И.В. Гироскоп для лекционных демонстраций 481
Кузьмичева А.Н., Ставцева Л.А., Марков О.И. Знакомство школьников с основами нанотехнологий в школе на уроках физики и во внеурочной деятельности 485
Логунов И.С. Некоторые важные равносильности 490
Логунов И.С. Об одной планиметрической задаче 493
Малыхина О.А. К проблеме выбора содержания курса «Введение в профессию» для академических бакалавров направления 44.03.05 «Педагогическое образование» (профили подготовки: «Математика», «информатика») 495
Мельников Р.А., Саввина О.А., Черноусова Н.В. Непрерывность математического образования на примере вычисления площади круга 498
Мешков С.В., Самойлов С.А., Тимофеева Ю.Н., Цуканов Е.М. Применение программного пакета Maple в процессе изучения комплексного анализа 502
Новикова Е.В. Методика обучения построению сечений многогранников плоскостью на примере задач одного типа 507
Оборотова С.О. Роль финансовой грамотности в процессе обучения математики 511
Овсянникова Т.Л. Использование среды GeoGebra при обучении графическому способу решения уравнений с параметрами 515
Попов И.Н. Изоморфизм алгебраических структур: применение к решению задач 520
Рогозянская Е.А., Еремеева Н.П., Закалкина Е.В. Влияние различных видеопроизводственных решений на вовлеченность студентов в онлайн-обучение 527
Саватеева Е.С., Русакова В.Н. Некоторые аспекты преподавания темы "Корреляционный анализ данных" студентам естественнонаучных направлений подготовки 531
Симоновская Г.А. О математической подготовке бакалавров экономических направлений 535
Синчуков А.В. Потенциал теоремы полной вероятности и формулы Байеса для профессиональной подготовки будущего бакалавра менеджмента 539
Соболев С.К., Томашпольский В.Я. Лемма об аддитивном свойстве отрезков и её применение 546
Тарасов К.Е. К вопросу об изучении основ теории вероятностей в общеобразовательных учреждениях в соответствии с требованиями ФГОС 549
Тверской Н.В. Индивидуальная работа на занятиях по физике в вузе 553
Федосова Е.Ю., Филиппов В.В. Усовершенствование методики преподавания физики в школе на основе физического эксперимента 559

Филимонова Л.В. Различение режимов работы с обучающимся на основе используемого языка коммуникации при изучении физики 563
Филиппов В.В., Золотухина А.О. О взаимосвязи знаний по физике и математике по результатам ЕГЭ 567
Цуканов Б.Д. Магнитное вращение плоскости поляризации в прозрачных средах 570
Чернобровкина Ю.В., Чернобровкина И.И. Формирование межпредметных связей в рамках учебных предметов информатики и математики 576
Черных Г.А. Автоматизированный программный комплекс проведения онлайн занятий 580
Чижикова Ю.В. Методические аспекты изучения стандартной библиотеки контейнеров STL языка C++ 586
Шумакова Е.О., Шарафутдинова А.М., Ахкамова Ю.А., Алябьева Ю.В. Учебно-исследовательские проекты по профильным математическим дисциплинам 590
Юшин В.Н. Лекционная демонстрация модели принципа автофазировки на примере маятника Дубошинского 593
Яковлева Д.С. Достижения современной физики как важный аспект преподавания 596
Яковлева Д.С. Проблемы преподавания курса общей физики на инженерных направлениях подготовки 600

Математический анализ и дифференциальные уравнения

УДК 519.624

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Э. Абдурагимов, к.ф.-м.н., доц.
Дагестанский государственный университет
e-mail: *gusen_e@mail.ru*

В настоящей работе приводится численная реализация итерационным методом краевой задачи для одного нелинейного интегрально - дифференциального уравнения второго порядка.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, итерация.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + \left(\int_0^1 x(s)\, ds \right)^{\frac{p}{q}} = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \; x(1) = 0, \tag{2}$$

где $1 < q < p < \infty$.

Существование и единственность положительного решения краевой задачи (1)-(2) обеспечивает требование ([1]) $1 < \frac{p}{q} < 4$.

Рассмотрим частный случай $p = 4$, $q = 2$. Краевая задача (1)-(2) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} \left(\int_0^1 x(s)\, ds \right)^2 + \alpha t, \quad 0 < t < 1, \tag{3}$$

где α —произвольный положительный параметр, удовлетворяющий условию $x'(0) = \alpha$.

Приближенное положительное решение рассматриваемой задачи было получено методом итераций, при этом сходимость итераций независимо от начального приближения гарантируют соответствующие априорные оценки [1]. С помощью программы на ЭВМ был подобран угол α^* наклона касательной к графику положительного решения в начальной точке так, чтобы выполнялось второе граничное условие $x(1, \alpha^*) = 0$. Определившись с начальным условием,

Таблица 1 — Положительное решение задачи (1)-(2) при $\alpha^* = 9,64581$

t	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
x	0,00	0,87	1,54	2,03	2,32	2,41	2,32	2,03	1,54	0,87	0,00

указанным выше методом с заданной точностью были получены все последующие приближения положительного решения, представленные в таблице 1. На рисунке 1 представлен график положительного решения задачи (1)-(2), полученный после интерполирования табличных данных.

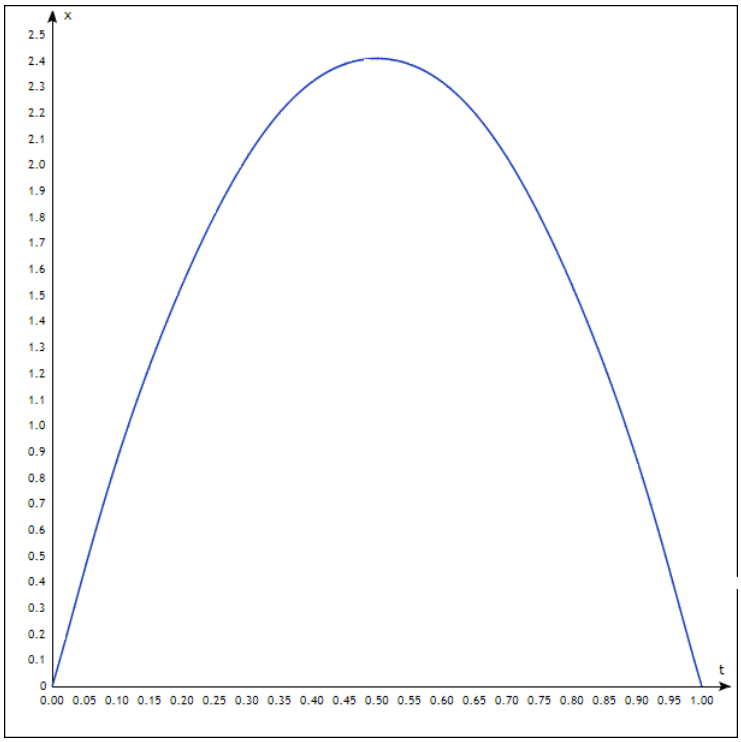


Рисунок 1 – Положительное решение задачи (1)-(2)

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи типа Штурма-Лиуввиля для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения второго порядка // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2012. — Выпуск 2. — С. 77–80.

УДК 517.958

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

О.Д. Алгазин, к.ф.-м.н., доц.
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
e-mail: *mopi66@yandex.ru*
А.В. Копаев, к.ф.-м.н., доц.
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
e-mail: *kopaev50@mail.ru*

Для полубесконечного слоя в пространстве произвольной размерности дано решение смешанных краевых задач Дирихле-Неймана (краевые условия 1-го и 2-го рода) и Дирихле-Неймана-Робена (краевые условия 1-го, 2-го и 3-го рода) для уравнения Лапласа в классе функций медленного роста. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, гармонические функции, смешанная краевая задача, функции медленного роста.

Введение

Гармонические функции двух и трёх переменных описывают многие стационарные процессы подземной гидродинамики [1], электромагнетизма [2], теплопроводности [3]-[6] и т. д. Поэтому поиск решений различных краевых задач для уравнения Лапласа (и новых более простых форм решений) является весьма актуальным. В данной работе дается решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа для полубесконечного слоя в пространстве произвольной размерности в классе функций медленного роста. Правые части краевых условий являются функциями медленного роста, в частности полиномами.

1. Постановка задачи

Введём следующие обозначения:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ,$$

$$(x, y, z) = (x_1, \dots, x_n, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} \ , \ \ y \in \mathbb{R} \ , z \in \mathbb{R},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{лапласиан}, \ \ \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Рассмотрим смешанную краевую задачу:

$$\Delta u(x, y, z) = 0 \ , \qquad x \in \mathbb{R}^n \ , \qquad y > 0, \qquad 0 < z < a \ , \tag{1}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad y > 0, \tag{2}$$

$$\partial_z u(x, y, a) = \psi(x, y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad y > 0, \tag{3}$$

$$\alpha \partial_y u(x, 0, z) + \beta u(x, 0, z) = f(x, z), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < z < a. \tag{4}$$

Здесь α и β – постоянные, одновременно не равные нулю. Если одна из них равна нулю, то имеем смешанную задачу Дирихле-Неймана, если обе отличны от нуля – смешанную задачу Дирихле-Неймана-Робена.

Решение будем искать в классе функций медленного роста:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |u(x,y,z)|\,(1+|(x,y)|)^{-m}dxdy < C$$

для некоторого $m \geq 0$ и для каждого $z \in (0,a)$. Здесь $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,

$$|(x,y)| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + y^2}.$$

Заданные функции в правых частях краевых условий $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $f(x,z)$ считаем функциями медленного роста.

Если функции в правых частях краевых условий от x не зависят, то получим плоскую задачу для полуполосы:

$$\Delta u(y,z) = 0\ , \qquad y > 0, \qquad 0 < z < a\ , \tag{5}$$

$$u(y,0) = \varphi(y), \qquad y > 0, \tag{6}$$

$$\partial_z u(y,a) = \psi(y), \qquad y > 0, \tag{7}$$

$$\alpha\partial_y u(0,z) + \beta u(0,z) = f(z), \qquad 0 < z < a. \tag{8}$$

2. Схема решения задачи

1) Продолжим функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, заданные на $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x,y): x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$ на всю гиперплоскость $\mathbb{R}^{n+1}$, доопределяя их при $y < 0$ произвольно с сохранением медленного роста, например, как чётную по y или как нечётную. Продолженные функции обозначим $\tilde{\varphi}(x,y)$ и $\tilde{\psi}(x,y)$. Рассмотрим смешанную задачу Дирихле-Неймана для слоя:

$$\Delta u_1(x,y,z) = 0\ , \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}\ , \qquad 0 < z < a\ , \tag{9}$$

$$u_1(x,y,0) = \tilde{\varphi}(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{10}$$

$$\partial_z u_1(x,y,a) = \tilde{\psi}(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{11}$$

Эта задача решена в [7]. Если $\tilde{\varphi}(x,y)$ и $\tilde{\psi}(x,y)$ − полиномы от (x,y), то её решения $u(x,y,z)$ также являются полиномами от (x,y,z) [8].

2)Теперь рассмотрим смешанную задачу для полубесконечного слоя:

$$\Delta u_2(x,y,z) = 0\ , \qquad x \in \mathbb{R}^n\ , \qquad y > 0, \qquad 0 < z < a\ , \tag{12}$$

$$u_2(x,y,0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad y > 0, \tag{13}$$

$$\partial_z u_2(x,y,a) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad y > 0, \tag{14}$$

$$\alpha\partial_y u_2(x,0,z) + \beta u_2(x,0,z) = \tilde{f}(x,z), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < z < a, \tag{15}$$

где $\tilde{f}(x,z) = f(x,z) - \alpha\partial_y u_1(x,0,z) - \beta u_1(x,0,z)$.

Решение этой задачи будем искать в виде ряда

$$u_2(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,y)\sin(\lambda_k z)\,, \qquad \lambda_k = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right). \tag{16}$$

Предполагая, что этот ряд сходится и сходятся ряды, полученные двукратным дифференцированием его по x, y и z.Эта функция удовлетворяет первым двум граничным условиям. Для определения коэффициентов $a_k(x,y)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла уравнению Лапласа и третьему граничному условию.

Подставляя $u_2(x,y,z)$ в уравнение Лапласа и третье граничное условие, получим

$$\Delta a_k(x,y) - \lambda_k^2 a_k(x,y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad y > 0, \qquad (17)$$

$$\alpha \partial_y a_k(x,0) + \beta a_k(x,0) = \tilde{f}_k(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (18)$$

где

$$\tilde{f}_k(x) = \frac{2}{a}\int_0^a \tilde{f}(x,z)\sin(\lambda_k z)\,dz.$$

То есть коэффициенты ряда являются решением краевой задачи для уравнения Гельмгольца в полупространстве. Решения ищутся в классе функций медленного роста. В случае краевого условия Дирихле ($\alpha = 0, \beta = 1$) решение записывается в виде интеграла [9] (там решается более общее уравнение). В случае краевого условия Робена ($\alpha = 1, \beta = -h$) подстановкой (при условии, что производные по y от $a_k(x,y)$ тоже имеют медленный рост)

$$b_k(x,y) = \partial_y a_k(x,y) - h a_k(x,y)$$

задача Робена сводится к задаче Дирихле в классе функций медленного роста и последующему решению ОДУ 1-го порядка (с параметром x). Решение этого ОДУ в классе функций медленного роста единственное

$$a_k(x,y) = -\int_0^\infty b_k(x,y+\xi)\,e^{-h\xi}\,d\xi.$$

3. Решение задачи

1) Функция $u_1(x,y,z)$ является решением задачи (9), (10), (11), где $\tilde{\varphi}(x,y)$ и $\tilde{\psi}(x,y)$ – заданные функции медленного роста. Эта задача имеет единственное решение в классе функций медленного роста, которое записывается в виде свертки [7],

$$u_1(x,y,z) = \tilde{\varphi}(x,y) * K_n(x,y,z) + \tilde{\psi}(x,y) * L_n(x,y,z).$$

В частности, если $\tilde{\varphi}(x,y)$ и $\tilde{\psi}(x,y)$ – полиномы, то и $u_1(x,y,z)$ тоже полином [8].

В случае $n = 0$ (для плоской задачи (5), (6), (7), когда $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ не зависят от $x, \varphi(x,y) = \varphi(y), \psi(x,y) = \psi(y)$),

$$u_1(y,z) = \tilde{\varphi}(y) * K_n(y,z) + \tilde{\psi}(y) * L_n(y,z),$$

$$K_0(y,z) = \frac{1}{a}\frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi z}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)},$$

$$L_0(y,z) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right),$$

$$u_1(y,z)=\frac{1}{a}\sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi(y-t)/2a)}{\mathrm{ch}(\pi(y-t)/a)-\cos(\pi z/a)}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(t)\ln\left[\frac{\mathrm{ch}(\pi(y-t)/2a)+\sin(\pi z/2a)}{\mathrm{ch}(\pi(y-t)/2a)-\sin(\pi z/2a)}\right]dt,$$

где $\tilde{\varphi}(t)$ и $\tilde{\psi}(t)-$ продолжения функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ с положительной полуоси y на всю ось.

Например, если $\varphi(t)$ продолжена как чётная функция, а $\psi(t)$ продолжена как нечётная функция, то

$$u_1(y,z)=\frac{1}{a}\sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi(y-t)/2a)}{\mathrm{ch}(\pi(y-t)/a)-\cos(\pi z/a)}dt+$$

$$+\frac{1}{a}\sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi(y+t)/2a)}{\mathrm{ch}(\pi(y+t)/a)-\cos(\pi z/a)}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(t)\ln\left[\frac{\mathrm{ch}(\pi(y-t)/2a)+\sin(\pi z/2a)}{\mathrm{ch}(\pi(y-t)/2a)-\sin(\pi z/2a)}\right]dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(t)\ln\left[\frac{\mathrm{ch}(\pi(y+t)/2a)+\sin(\pi z/2a)}{\mathrm{ch}(\pi(y+t)/2a)-\sin(\pi z/2a)}\right]dt.$$

В этом случае

$$\tilde{f}(z)=f(z)-\alpha\partial_y u_1(0,z)-\beta u_1(0,z)=$$

$$=f(z)-\alpha\frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\int\limits_{0}^{\infty}\widetilde{\psi}(t)\frac{\mathrm{sh}(\pi t/2a)}{\mathrm{ch}(\pi t/a)+\cos(\pi z/a)}-$$

$$-\beta\frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\int\limits_{0}^{\infty}\widetilde{\varphi}(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2a)}{\mathrm{ch}(\pi t/a)-\cos(\pi z/a)}dt.$$

Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)-$ полиномы, заданные на положительной полуоси, а $\widetilde{\varphi}(t)$ и $\widetilde{\psi}(t)-$ те же самые полиномы на всей оси, то $u_1(y,z)$ тоже полином от (y,z) [8]. Например, если

$\varphi(t)=b_3t^3+b_2t^2+b_1t+b_0, \psi(t)=0$ и соответственно $\widetilde{\varphi}(t)=b_3t^3+b_2t^2+b_1t+b_0, \widetilde{\psi}(t)=0$, то [8]

$$u_1(y,z)=$$

$$=\frac{1}{a}\sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}(b_3t^3+b_2t^2+b_1t+b_0)\frac{\mathrm{ch}(\pi(y-t)/2a)}{\mathrm{ch}(\pi(y-t)/a)-\cos(\pi z/a)}dt=$$

$$=b_3(y^3-3yz^2+6ayz)+b_2(y^2-z^2+2az)+b_1y+b_0.$$

В этом случае

$$\tilde{f}(z) = f(z) - \alpha\partial_y u_1(0,z) - \beta u_1(0,z) =$$
$$= f(z) + (3\alpha b_3 + \beta b_2)z^2 - (6\alpha a b_3 + 2a\beta b_2)z - (\alpha b_1 + \beta b_0).$$

В случае $n = 1$

$$K_1(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}\big(\rho(a-z)\big)}{\mathrm{ch}(a\rho)}\rho J_0(\rho|(x,y)|)d\rho\,,$$

$$L_1(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}(\rho z)}{\mathrm{ch}(a\rho)}J_0(\rho|(x,y)|)d\rho,$$

J_0 – функция Бесселя 1-го рода.

В случае $n > 1$ для вычисления $K_n(x,y,z)$ и $L_n(x,y,z)$ применяем рекуррентную формулу [7]

$$H_{n+2}(r,z) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}H_n(r,z), \qquad r = |(x,y)|.$$

2) Функция $u_2(x,y,z)$ является решением задачи (12), (13), (14), (15), где $\tilde{f}(x,z)$- функция медленного роста по x. Как функцию переменного z, её можно разложить в ряд Фурье по $\sin(\lambda_k z)$, $\lambda_k = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, поэтому ищем $u_2(x,y,z)$ в виде ряда (16), где $a_k(x,y)$ – решения краевой задачи в классе функций медленного роста для уравнения Гельмгольца для полупространства (17), (18).

В случае плоской задачи, когда правые части граничных условий (2), (3), (4) не зависят от x, имеем

$$u_2(y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y)\sin(\lambda_k z)\,, \qquad \lambda_k = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right),$$

$$a_k''(y) - \lambda_k^2 a_k(y) = 0, \;\; y > 0, \tag{19}$$

$$\alpha a_k'(0) + \beta a_k(0) = \tilde{f}_k, \tag{20}$$

где

$$\tilde{f}_k = \int_0^a \tilde{f}(z)\sin(\lambda_k z)\,dz.$$

Решение ОДУ (19) в классе функций медленного роста, удовлетворяющее граничному условию (20) имеет вид

$$a_k(y) = a_k e^{-\lambda_k y}, \quad a_k = \frac{f_k}{-\alpha\lambda_k + \beta},$$

и формальное решение задачи (12), (13), (14), (15) для случая, когда правые части граничных условий (2), (3), (4) не зависят от x, дается рядом

$$u_2(y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k y}\sin(zy)\,, \qquad \lambda_k = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right),$$

$$a_k = \frac{2}{a(-\alpha\lambda_k + \beta)} \int_0^a \tilde{f}(z) \sin(\lambda_k z)\, dz.$$

Если заменить этот ряд его отрезком, то полученная функция будет точно удовлетворять уравнению (12), краевым условиям (13), (14) и приближенно краевому условию (15).

Рассмотрим теперь случай, когда правые части граничных условий (2), (3), (4) зависят от $x \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$.

Если граничное условие (18) является условием Дирихле ($\alpha = 0, \beta = 1$), то решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца (17), (18) в классе функций медленного роста дается интегралом [9]

$$a_k(x,y) = \frac{\lambda_k^\nu y}{2^{\nu-1}\pi^\nu} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_k(t) \frac{K_\nu\left(\lambda_k\sqrt{|x-t|^2+y^2}\right)}{\left(\sqrt{|x-t|^2+y^2}\right)^\nu} dt, \qquad \nu = \frac{n+1}{2}, \qquad (21)$$

$K_\nu -$ функция Макдональда.

Формальное решение задачи (12), (13), (14), (15) для $\alpha = 0, \beta = 1$ дается рядом (16) с коэффициентами (21). Если заменить ряд (16) его отрезком, то полученная функция будет точно удовлетворять уравнению (12), краевым условиям (13), (14) и приближенно краевому условию (15).

Если граничное условие (18) является условием Робена ($\alpha = 1,\ \beta = -h, h > 0$), то указанной в пункте 2 подстановкой задача (17), (18) сводится к задаче Дирихле и её решение дается интегралом

$$a_k(x,y) = -\frac{\lambda_k^\nu y}{2^{\nu-1}\pi^\nu} \int_0^\infty e^{-h\xi} d\xi \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_k(t) \frac{K_\nu\left(\lambda_k\sqrt{|x-t|^2+(y+\xi)^2}\right)}{\left(\sqrt{|x-t|^2+(y+\xi)^2}\right)^\nu} dt, \quad (22)$$

$K_\nu -$ функция Макдональда, $\nu = \frac{n+1}{2}$.

Формальное решение задачи (12), (13), (14), (15) для $\alpha = 1, \beta = -h, h > 0$, дается рядом (16) с коэффициентами (22). Если заменить ряд (16) его отрезком, то полученная функция будет точно удовлетворять уравнению (12), краевым условиям (13), (14) и приближенно краевому условию (15).

3) Решение задачи (1), (2), (3), (4)

$$u(x,y,z) = u_1(x,y,z) + u_2(x,y,z).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М. - Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1948. 729 с.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
4. Карташев Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.

5. Лыков В.А. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
6. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
7. Алгазин О. Д., Копаев А. В. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое// Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. №1. С. 3-13. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13
8. Алгазин О. Д. Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и математическое моделирование. 2017. № 06. С. 1-18. DOI: 10.24108/mathm.0517.0000082
9. Алгазин О. Д. Построение методом подобия фундаментального решения задачи Дирихле для уравнения типа Келдыша в полупространстве // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. №1. С. 4-15. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-4-15

УДК 517.926

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ

О.Г. Антоновская, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
e-mail: *olga.antonovsckaja@yandex.ru*
А.В. Бесклубная, к.пед.н.
ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
e-mail: *antbeskl@gmail.com*

В работе описана методика определения момента окончания переходного процесса в непрерывной динамической системе, использующая прямой метод Ляпунова. Переходный процесс в системе считается законченным при попадании траектории системы в полосу, содержащую устойчивое состояние равновесия, соответствующее основному рабочему режиму. Функция Ляпунова выбирается в классе положительно определенных квадратичных форм и строится для соответствующей линеаризованной системы.

Ключевые слова: непрерывная динамическая система, состояние равновесия, метод функций Ляпунова.

При исследовании динамических свойств реальных систем важной является проблема определения длительности переходных процессов в той или иной системе. Переходные процессы – это процессы, возникающие в динамических системах при различных воздействиях, переводящих их из одного стационарного состояния в другое стационарное состояние. Время установления и есть время, определяющее длительность переходного процесса. Изучение переходных процессов – важный шаг при анализе динамических свойств и качества рас-

сматриваемой системы [1], поскольку они определяются характером установившегося движения. Таким образом, анализ переходных процессов в системе позволяет не только исследовать устойчивость стационарного режима, но и оценивать быстроту приближения переходного процесса к стационарному режиму. То есть позволяет ставить задачу анализа быстродействия системы.

Для оценки времени протекания переходного процесса в нелинейной системе качественно-численными методами особое значение приобретает задача определения момента окончания переходного процесса [2,3]. В принципе, переходный процесс длится бесконечно долго, однако обычно считается, что он закончился, как только регулируемая величина устанавливается с заданной точностью. Поэтому исследование переходных процессов в непрерывной динамической системе означает прежде всего составление дифференциальных уравнений математической модели, решение которых может проводиться любыми методами. Конечно, если это возможно, предпочтительным является применение аналитических методов, но имеет смысл применять и численные методы интегрирования. При этом переходному процессу соответствует траектория математической модели реальной системы, стремящаяся к устойчивому стационарному решению, а момент окончания переходного процесса определяется моментом попадания траектории в некоторую окрестность этого решения, которая определяется техническим критерием установления рабочего режима [3]. Следует отметить, что понятие «окрестность» здесь трактуется достаточно широко, т.е. имеется в виду некоторое множество, содержащее стационарное решение, которое может оказаться неограниченным [2,3]. А переходные процессы далеко не всегда являются апериодическими. Поэтому момент первого попадания траектории на это множество может не означать окончание переходного процесса в системе, т.к. траектория может это множество покинуть. То есть решаемая задача перекликается с задачей исследования устойчивости «в большом» [4]. При решении этой задачи, в частности, может быть использован прямой метод Ляпунова [4]. Причем на практике удобнее всего использовать функции Ляпунова наиболее простого вида. Например, положительно определенные квадратичные формы, построенные как функции Ляпунова для соответствующих линеаризованных систем [5, С.120-132, 6, 7].

В работе предложена методика определения момента окончания переходного процесса в непрерывной динамической системе. Критерием окончания переходного процесса считается факт попадания траектории системы в заданную полосу.

Будем рассматривать нелинейную непрерывную динамическую систему, математическая модель которой есть система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

которая имеет асимптотически устойчивое состояние равновесие $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. И пусть функции f_i непрерывно дифференцируемы до второго порядка включительно.

Рассмотрим множество положительно определенных квадратичных форм

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_i x_j \quad (K_{ij} = K_{ji}, i, j = 1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

и выберем квадратичную форму (2) так, чтобы она была функцией Ляпунова соответствующей (1) линеаризованной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1,2,...,n). \tag{3}$$

И пусть критерием окончания переходного процесса в системе является попадания ее траектории в «σ- полосу»

$$| \sum_{k=1}^{n} p_k x_k | \leq \sigma, \tag{4}$$

где σ мало. Так как в окрестности $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ для рассматриваемой квадратичной формы $dV / dt < 0$ в силу системы (1) [8], то попадание траектории системы на поверхность уровня $V(x_1, x_2, ..., x_n) = V_0$, вписанную в «$\sigma$-полосу» (4), является гарантией того, что она не покинет рассматриваемой «σ-полосы» с течением времени. Найдем значение V_0 для такой поверхности уровня.

Для того, чтобы поверхность уровня $V(x_1, x_2, ..., x_n) = V_0$ касалась гиперплоскостей

$$\sum_{k=1}^{n} p_k x_k = \pm\sigma, \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы она имела общую точку с (5) и, при этом, векторы $\vec{N}_1 = \{V'_{x_1}, V'_{x_2}, ...V'_{x_n}\}$ и $\vec{N}_2 = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ были пропорциональны. Следует отметить что достаточно рассмотреть случай $+\sigma$.

Поскольку $K_{ij} = K_{ji}, i, j = 1,2,\ldots,n,$

$$V'_{x_i} = 2\sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_j, \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{6}$$

и условие пропорциональности векторов будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_j = p_i s, \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{7}$$

где s – коэффициент пропорциональности. Умножим каждое из равенств (7) на x_i соответственно и сложим их. В левой части получим выражение для

$V(x_1,x_2,...,x_n)=V_0$, а в правой – выражение $s\sum_{k=1}^{n} p_k x_k$. То есть $V_0 = s\sigma$, $s = V_0/\sigma$, а значит система (7) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_j = p_i V_0/\sigma. \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{8}$$

Система (8) есть система для нахождения координат точки касания поверхности уровня и гиперплоскости $\sum_{k=1}^{n} p_k x_k = \sigma$.

Система (8) представляет собой систему линейных уравнений, определителем которой является определитель $det\,K$ матрицы $K = (K_{ij})$. А т.к квадратичная форма (2) является положительно определенной, то $det\,K > 0$ и система (8) имеет единственное решение

$$x_i = \frac{V_0}{\sigma\, det\, K}\begin{vmatrix} K_{11} & \ldots & K_{1,i-1} & p_1 & K_{1,i+1} & \ldots & K_{1n} \\ K_{12} & \ldots & K_{2,i-1} & p_2 & K_{2,i+1} & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{1n} & \ldots & K_{i-1,n} & p_n & K_{i+1,n} & \ldots & K_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{9}$$

Подставляя значения (9) в выражение для $V(x_1,x_2,...,x_n)=V_0$, получаем

$$\frac{\sigma^2\, det^2\, K}{V_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij} \sum_{k=1}^{n} p_k A_{ki} \begin{vmatrix} K_{11} & \ldots & K_{1,j-1} & p_1 & K_{1,j+1} & \ldots & K_{1n} \\ K_{12} & \ldots & K_{2,j-1} & p_2 & K_{2,j+1} & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{1n} & \ldots & K_{j-1,n} & p_n & K_{j+1,n} & \ldots & K_{nn} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

т.к.

$$\begin{vmatrix} K_{11} & \ldots & K_{1,i-1} & p_1 & K_{1,i+1} & \ldots & K_{1n} \\ K_{12} & \ldots & K_{2,i-1} & p_2 & K_{2,i+1} & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{1n} & \ldots & K_{i-1,n} & p_n & K_{i+1,n} & \ldots & K_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} p_k A_{ki}, \tag{11}$$

в котором A_{ki} – алгебраическое дополнение элемента K_{ki} в матрице K, есть разложение определителя, стоящего в левой части по элементам столбца с номером i. Перегруппировывая слагаемые в правой части (10), получим, что

$$\frac{\sigma^2\, det^2\, K}{V_0} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{kj} A_{kj} p_j \begin{vmatrix} K_{11} & \ldots & K_{1,j-1} & p_1 & K_{1,j+1} & \ldots & K_{1n} \\ K_{12} & \ldots & K_{2,j-1} & p_2 & K_{2,j+1} & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{1n} & \ldots & K_{j-1,n} & p_n & K_{j+1,n} & \ldots & K_{nn} \end{vmatrix}, \tag{12}$$

поскольку все суммы вида

$$\sum_{i=1}^{n} K_{ji} A_{ki} = 0, \qquad (j \neq k) \tag{13}$$

т.к. представляют собой разложения по столбцу с номером k определителя, в котором столбцы с номерами k и j равны и содержат элементы $p_1, p_2, ..., p_n$.

В то же время выражение $\sum_{j=1}^{n} K_{kj} A_{kj}$ есть разложение по столбцу с номером k определителя $det\, K$. А значит (12) можно переписать в виде

$$\frac{\sigma^2 \, det\, K}{V_0} = \sum_{j=1}^{n} p_j \begin{vmatrix} K_{11} & \dots & K_{1,j-1} & p_1 & K_{1,j+1} & \dots & K_{1n} \\ K_{12} & \dots & K_{2,j-1} & p_2 & K_{2,j+1} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{1n} & \dots & K_{j-1,n} & p_n & K_{j+1,n} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Раскладывая теперь определители, стоящие в правой части (14) по столбцам, содержащим элементы $p_1, p_2, ..., p_n$, получим, что

$$\frac{\sigma^2 \, det\, K}{V_0} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ji} p_i p_j \,, \qquad (15)$$

а значит значение V_0 для поверхности уровня, вписанной в полосу, равно

$$V_0 = \frac{\sigma^2 \, det\, K}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ji} p_i p_j}. \qquad (16)$$

Замечание 1. Следует отметить, что поскольку квадратичная форма (2) является положительно определенной, то положительно определенной является и квадратичная форма

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j \quad (A_{ij} = A_{ji}, i, j = 1,2,\dots,n). \qquad (17)$$

В самом деле, поскольку матрица K является симметрической, то симметрической является и матрица $A = (A_{ij})$. А значит матрица K^{-1}, обратная к матрице K, есть $K^{-1} = (A_{ij} / det\, K)$. Критерием положительной определенности квадратичной формы (2) будет положительность собственных значений матрицы K положительны: $\lambda_i(K) > 0$, $i = 1,2,...,n$. Но тогда собственные значения обратной матрицы $\Lambda_i(K^{-1}) = \lambda_i^{-1}(K) > 0$. То есть положительными являются и собственные значения матрицы A, и квадратичная форма (17) положительно определена. А знаменатель выражения (16) есть положительное число.

Замечание 2. В случае $n = 2$ $A_{11} = K_{22}$, $A_{12} = -K_{12}$, $A_{22} = K_{11}$, а значит

$$V_{0в} = \frac{\sigma^2 (K_{11} K_{22} - K_{12}^2)}{K_{22} p_2^2 - 2K_{12} p_1 p_2 + K_{22} p_1^2}. \qquad (18)$$

Та же формула была получена в работе [8] другим методом.

Замечание 3. Знание величины (16) позволяет решать задачу определения момента окончания переходного процесса в системе (1), посредством числен-

ного исследования поведения ее траекторий. Если изменится значение управляющего параметра системы, то произойдет изменение стационарного режима. А значит, последует переходный процесс к новому стационарному режиму. Будем предполагать, что переходный процесс в системе закончится, как только траектория попадет в заданную «σ- полосу». Если при этом $dV/dt<0$, то $V(x_1,x_2,...,x_n)<V_0$ будет давать оценку области притяжения стационарного режима. Если же неравенство $dV/dt<0$ это не так, то можно использовать оценки работы [9] для области притяжения. То есть для определения времени установления переходного процесса построение траектории следует проводить до вхождения ее в «σ- полосу». Этот момент следует запомнить, но продолжать вычисления, пока траектория не попадет в область $V(x_1,x_2,...,x_n)<V_0$, либо не покинет «σ- полосу». В первом случае считаем моментом окончания переходного процесса момент вхождения траектории в полосу, во втором продолжаем построение траектории до следующего попадания в полосу. И повторяем всю процедуру для нового момента попадания.

Изложенная процедура позволяет не только решать задачу получения оценок времени установления переходных процессов, но также и задачу оптимизации переходных процессах при малых изменениях параметра в окрестности некоторого фиксированного его значения. Например, составляя, подобно [3], таблицу длительностей переходных процессов в зависимости от параметров (с заданным шагом) и анализируя представленные в ней результаты вычислений, характеризующие тем приближения переходного процесса к стационарному режиму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М. Наука, 1987. – 384 с.
2. Горюнов В.И., Ерусланов В.Н., Лобашов Н.И. Техническая полоса захвата одноконтурного синтезатора частоты // Техника средств связи. Сер. Техника радиосвязи. – 1990. – Вып. 2. – С. 88-94.
3. Антоновская О.Г., Горюнов В.И., Лобашов Н.И. К анализу формы и длительности переходных процессов при переключениях синтезатора с делителем частоты и пропорционально-интегрирующим фильтром по диапазону // Динамика систем: Межвуз. сб. Горький: Изд-во ГГУ, 1989. – С.59-72.
4. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. – М. Наука, 1967. – 224 с.
5. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. – М. Наука, 1970. – 240 с.
6. Антоновская О. Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т.49. – № 9. – С. 1220-1224.

7. Антоновская О. Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т.52. – № 3. – С. 276-281.
8. Антоновская О.Г., Зайцева М.Н. Построение условно-экстремальных функций Ляпунова при изучении поведения траекторий непрерывных динамических систем на плоскости // Международный научно-исследовательский журнал. – 2017. – № 8 (62). – Ч. 2, – С. 135-142.
9. Антоновская О. Г. Об одном способе оценки области притяжения устойчивого решения системы дифференциальных уравнений // Международный научный журнал «Инновационная наука». – 2015. – №9. – С. 11-15.

УДК 51

ЗАДАЧА Δ_s ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ДАРБУ С ОДНИМ ПАРАМЕТРОМ

И.А. Бородинова
Московский городской педагогический университет Самарский филиал
e-mail: *teacher79@mail.ru*
Ю.О. Яковлева
Самарский государственный технический университет
e-mail: *julia.yakovleva@mail.ru*

Для уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона гиперболического типа

$$U_{xy} - \frac{b}{x-y}U_x + \frac{a}{x-y}U_y + \frac{c}{(x-y)^2} = 0$$

решены краевые задачи при достаточно широком спектре его параметров. Обзор этих задач приведен в работе [1], там же содержится обширная библиография. Постановка одной из задач рассматривалась автором в работе [3].

Известно [1], что для уравнений

$$U_{xy} - \frac{b}{x-y}U_x = 0 \text{ и } U_{xy} + \frac{a}{x-y}U_y = 0$$

с одним параметром некоторые задачи в классической постановке являются некорректными, что приводит к постановке новых задач.

В настоящей работе уравнение

$$U_{xy} + \frac{\beta}{x-(\operatorname{sgn} y)y}U_y = 0,\ 0<\beta<1 \qquad (1)$$

рассмотрим в прямоугольной области H, ограниченной прямыми $y=1, y=-1, x=0, x=1$.

Для уравнения (1) в области H поставлена задача, которую можно считать видоизмененной задачей Δ_2. При этом в задаче Δ_2 вместо значения искомого решения на параллельных сторонах квадрата ($y=1, y=-1$) [1, 3] задаются среднее значения решения на внутренних параллельных отрезках принадлежащих области H. Однозначная разрешимость поставленной задачи доказана методом интегральных уравнений.

Рассмотрим множество $H=\bigcup_{i=1}^{4} D_i$

$$D_1\{(x,y)/0<x<y<1\},\ D_2\{(x,y)/0<y<x<1\}$$
$$D_3\{(x,y)/0<-y<x<1\},\ D_4\{(x,y)/0<x<-y<1\}.$$

Задача Δ_s: На множестве H найти решение уравнения (1), непрерывное в области $\overline{H}$, удовлетворяющее условиям:

$$\int_0^y U(t,y)dt=\varphi_1(y),0\le y\le 1, \tag{2}$$

$$\int_0^{-y} U(t,y)dt=\varphi_2(y),-1\le y\le 0, \tag{3}$$

условиям сопряжения на $y=x, y=-x$ соответственно:

$$x^{1-\beta}\nu_1(x)=\lim_{y\to x+0}(y-x)^{\beta}x^{1-\beta}U_y=\lim_{y\to x-0}x^{1-\beta}(x-y)^{\beta}U_y=\nu_2(x), \tag{4}$$

$$\nu_3(x)=\lim_{-y\to x-0}(x+y)^{\beta}U_y=\lim_{-y\to x+0}x^{1-\beta}(-y-x)^{\beta}U_y=x^{1-\beta}\nu_4(x). \tag{5}$$

На $y=0$: если

$$\lim_{y\to 0+0}\frac{\partial}{\partial x}\int_y^x U_y(x,t)(x-t)^{\lambda}dt=\lim\frac{\partial}{\partial x}\int_{-y}^x U_y(x,-t)(x-t)^{\lambda}dt+F(x) \tag{6}$$

$\lambda>0$, если $\lambda-\beta>0$ и

$$\lim_{y\to 0+0}\int_y^x U_y(x,t)(x-t)^{\lambda}dt=\lim\int_{-y}^x U_y(x,t)(x-t)^{\lambda}dt+F(x), \tag{6^0}$$

если $\lambda-\beta<0$.

Условия А, налагаемые на данные задачи:

$$\varphi_k(x)\in C^{(1)}[0,1],\varphi_k(0)=\varphi_k'(0)=0,k=1,2;$$
$$F(x)\in C^{(2)}[0,1],F(0)=F'(0)=0.$$

За основу решения задачи Δ_s возьмем решение видоизмененной задачи Коши в каждом из характеристических треугольников $D_k, k=\overline{1,4}$:

$$U(x,y)=\tau_1(x)+\int_x^y \nu_1(t)(t-x)^{-\beta}\,dt \text{ в } D_1; \tag{7}$$

$$U(x,y)=\tau_2(x)-\int_y^x \nu_2(t)(x-t)^{-\beta}\,dt \text{ в } D_2; \tag{8}$$

$$U(x,y)=\tau_3(x)+\int_{-y}^x \nu_3(t)(x-t)^{-\beta}\,dt \text{ в } D_3; \tag{9}$$

$$U(x,y)=\tau_4(x)-\int_x^{-y} \nu_4(t)(t-x)^{-\beta}\,dt \text{ в } D_4, \tag{10}$$

$\tau_k(x)$ - предельные значения решения на линиях $y=x, y=-x$, ν_k определены условиями сопряжения (4), (5). Неизвестные функции $\tau_k(x)$ ищем в классе $C^{(1)}[0,1]$, $\nu_k(x)\in C(0,1), k=\overline{1,4}$.

В этом случае формулы (7)-(10) определяют классическое решение задачи Коши для уравнения (1) в соответствующих областях.

Соотношения, получаемые из условий непрерывности на линиях $y=x, y=-x, y=0$ соответственно:

$$\tau_1(x)=\tau_2(x), \tag{11}$$

$$\tau_3(x)=\tau_4(x), \tag{12}$$

$$\tau_2(x)-\int_0^x \nu_2(t)(x-t)^{-\beta}\,dt=\tau_3(x)+\int_0^x \nu_3(t)(x-t)^{-\beta}\,dt. \tag{13}$$

Из условия (2) после преобразования имеем

$$\int_0^y \tau_1(t)dt+\int_0^y \nu_1(t)\frac{t^{1-\beta}}{1-\beta}dt=\varphi_1(y), \text{ откуда}$$

$$\tau_1(x)+\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\nu_1(x)=\varphi_1'(x). \tag{14}$$

$$-\tau_4(x)+\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\nu_4(x)=\varphi_2'(-x). \tag{15}$$

Из условия (3) получено аналогично

Из условия сопряжения (4), (5) следует

$$\begin{cases}\nu_1 x^{1-\beta}=\nu_2,\\ \nu_4 x^{1-\beta}=\nu_3,\end{cases}, \tag{16}$$

что с учетом (11), (12), (14), (15) приводит к соотношениям

$$\tau_2(x)=\varphi_1'(x)-\frac{\nu_2(x)}{1-\beta}, \tag{17}$$

$$\tau_3(x) = -\varphi_2'(x) + \frac{\nu_3(x)}{1-\beta}. \tag{18}$$

Подставляя (17), (18) в равенство (13) получаем уравнение $\nu_2(x) + \nu_3(x) + (1-\beta)\int_0^x [\varphi_2'(-x) + \varphi_1'(x)]$, единственное решение которого имеет вид [2,3]:

$$\nu_2(x) + \nu_3(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x E_{1-\beta}[(\beta-1)\Gamma(1-\beta)(x-t)^{1-\beta}]g(t)dt, \tag{20}$$

где $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$, $\alpha > 0$ - функция Миттаг-Лефлера [2].

Решение уравнения (20), после интегрирования по частям и дифференцирования по переменной x, запишем в виде

$$\nu_2(x) + \nu_3(x) = \int_0^x g'(t)E_{1-\beta}[(\beta-1)\Gamma(1-\beta)(x-t)^{1-\beta}]dt, \tag{21}$$

где $g'(t) = (1-\beta)[\varphi_2''(-x) + \varphi_1''(x)]$. (22)

Из условия сопряжения (6^0) при $\lambda - \beta < 0$ имеем

$$\int_0^x (\nu_2(t) - \nu_3(t)(x-t)^{\lambda-\beta} dt = F(x). \tag{23}$$

Применяя к уравнению (23) формулу обращения [2], с учетом условий А, получаем

$$\nu_2(x) - \nu_3(x) = \frac{1}{B(1+\lambda-\beta, \beta-\lambda)}\int_0^x F'(t)(x-t)^{\beta-\lambda-1}dt. \tag{24}$$

Из формул (21), (24) находим

$$\begin{aligned}\nu_2(x) &= \frac{1}{2}[\int_0^x g'(t)E_{1-\beta}[(\beta-1)\Gamma(1-\beta)(x-t)^{1-\beta}]dt + \\ &+ \frac{1}{B(1+\lambda-\beta,\beta-\lambda)}\int_0^x F'(t)(x-t)^{\beta-\lambda-1}dt],\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\nu_3(x) &= \frac{1}{2}[\int_0^x g'(t)E_{1-\beta}[(\beta-1)\Gamma(1-\beta)(x-t)^{1-\beta}]dt - \\ &- \frac{1}{B(1+\lambda-\beta,\beta-\lambda)}\int_0^x F'(t)(x-t)^{\beta-\lambda-1}dt].\end{aligned} \tag{26}$$

Далее $\tau_2(x), \tau_3(x)$ находим из формул (17), (18); $\tau_1(x), \tau_4(x)$ из формул (11), (12); $\nu_1(x), \nu_4(x)$ из соотношений (16), (25), (26).

В случае $\lambda - \beta > 0$ условие сопряжения (6) приводит к уравнению

$\int_0^x [\nu_2(t) - \nu_3(t)](x-t)^{\lambda-\beta-1} dt = \frac{1}{\lambda-\beta} F(x)$, единственное решение его [2], с учетом условия А,

$$\nu_2(t) - \nu_3(t) = \frac{1}{(\alpha-\beta)B(\lambda-\beta, 1-\lambda+\beta)} \int_0^x F'(t)(x-t)^{\beta-\lambda} dt .$$

Далее проведя аналогичные рассуждения, подставим найденные $\tau_k, \nu_k, (k = \overline{1,4})$ в формулы (7)-(10) получаем решение задачи Δ_2^s.

Единственность решения задачи следует из единственности решения задачи Коши.

Существование решения доказано непосредственной проверкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бушков В.Н., Родионова И.Н. О постановке краевых задач для уравнения Эйлера-Дарбу в области, содержащих две линии сингулярности коэффициентов уравнения // О вопросах и проблемах современных математических и естественных наук. – III международная научно-практическая конференция. – Сборник научных трудов. Г. Челябинск - 2016.
2. Самко С.Г., Килбас А.А, Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // Наука и техника.- Минск. – 1987.
3. Бородинова И.А. Краевая задача с интегральными условиями для обобщенного однопараметрического уравнения Эйлера-Дарбу // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции Герценовские чтения - 2019. – СПб, 2019. – С. 10-11.

УДК 517.968

О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ ТИПА СВЕРТКИ В ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. В. Васильев
ООО «Севергрупп ТТ»
e-mail: *alexvassel@gmail.com*
В. Б. Васильев
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: *vbv57@inbox.ru*
Д. С. Статинов
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: *646635@bsu.edu.ru*

Для исследования дискретных уравнений в свертках в полупространстве описываются некоторые факты, связанные с их голоморфными свойствами. Это позволяет использовать в исследовании аппарат периодической задачи Римана.

Ключевые слова: дискретная свертка, дискретное функциональное пространство, аналитичность, периодическая задача Римана.

Введение

Теория уравнений в свертках разработана достаточно полно и имеются различные методы их приближенного решения (см,, например, [1]). Однако с вычислительной точки зрения для построения конечной аппроксимации гораздо удобнее иметь дело с дискретным объектом. С этой целью были начаты исследования дискретных уравнений в свертках.

Дискретное полупространство и дискретное преобразование Фурье

Мы рассматриваем пространство $L_2(h\mathbb{Z})$ функций u дискретного аргумента $\tilde{x} \in h\mathbb{Z}, h > 0$, с нормой

$$||u||_{L_2(h\mathbb{Z})} = \left(\sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}} |u(\tilde{x})|^2 h \right)^{1/2}.$$

Для таких функций определено дискретное преобразование Фурье

$$\tilde{u}(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} u(\tilde{x}) h,$$

которое устанавливает изометрию между пространствами $L_2(h\mathbb{Z})$ и $L_2(\hbar\mathbb{T})$, $\hbar = h^{-1}$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$.

Здесь мы рассмотрим случай $h\mathbb{Z}_\pm$ и покажем как применение дискретного преобразования Фурье приводит к краевым задачам теории аналитических функций. По определению, пространство $L_2(h\mathbb{Z}_\pm)$ состоит из функций пространства $L_2(h\mathbb{Z})$, которые обнуляются вне $h\mathbb{Z}_\pm$. Исследование разрешимости уравнений в свертка на дискретной полуоси

$$au(\tilde{x}) + \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}_+} K(\tilde{x} - \tilde{y}) u(\tilde{y}) h = v,$$

где K, v – заданные функции дискретного аргумента, существенно опирается на приводимые ниже факты.

Сначала для $\tau > 0$ вычислим дискретное преобразование Фурье

$$\sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}_+} e^{i\tilde{x}\xi}e^{-\tau\tilde{x}}h = h\sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}_+} e^{i\tilde{x}(\xi+i\tau)} = h\sum_{\frac{\tilde{x}}{h}\in\mathbb{Z}_+} e^{i\frac{\tilde{x}}{h}hz}, \quad z = \xi + i\tau.$$

Значит,

$$\sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}_+} e^{i\tilde{x}\xi}e^{-\tau\tilde{x}}h = \frac{h}{1-e^{ihz}} = \frac{h}{2} - \frac{h}{2i}\operatorname{ctg}\frac{hz}{2}$$

Аналогичные вычисления для $\tau < 0$ дают похожий результат

$$\sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}_-} e^{i\tilde{x}\xi}e^{-\tau\tilde{x}}h = -\frac{h}{2} + \frac{h}{2i}\operatorname{ctg}\frac{hz}{2}$$

Эти вычисления при были приведены в [4] для $h = 1$.

Аналитичность и периодическая задача Римана

Согласно приведенным вычислениям, чтобы найти фурье-образы характеристических функций $\chi_{h\mathbb{Z}_\pm}(\tilde{x})$, следует изучить вопрос о граничных значения интеграла

$$\Phi(z) = \frac{ih}{4\pi}\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \varphi(x)\operatorname{ctg}\frac{h(z-x)}{2}dx, \quad z \in \hbar\Pi_\pm,$$

где $\Pi_\pm$ – верхняя и нижняя полу-полосы в комплексной плоскости $\mathbb{C}$

$$\Pi_\pm = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \xi + i\tau, \xi \in \mathbb{T}, \pm\tau > 0\}.$$

С учетом развитой теории периодической задачи Римана [5] о нахождении пары аналитических в верхней и нижней полу-полосах функций, которая представляет собой периодический аналог классической краевой задачи Римана [2, 3], мы сделаем замену переменных $hx = y$ и обозначим $hz = \zeta \in \Pi_\pm, \Psi(\zeta) = \Phi(\frac{\zeta}{h})$. Тогда. $\zeta = h\xi + hi\tau$ и

$$\Psi(\zeta) = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\frac{y}{h}\right)\operatorname{ctg}\frac{\zeta-y}{2}dy, \quad \zeta \in \Pi_\pm,$$

Применяя периодические аналоги формул граничных значений из [5], имеем

$$\Psi^+(h\xi) = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(\left(\frac{y}{h}\right))\operatorname{ctg}\frac{y-h\xi}{2}dy + \frac{\varphi(\xi)}{2}$$

$$\Psi^-(h\xi) = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(\left(\frac{y}{h}\right))\operatorname{ctg}\frac{y-h\xi}{2}dy - \frac{\varphi(\xi)}{2}$$

Возвращаясь назад к переменной x, получаем окончательный вид для граничных значений

$$\Phi^+(\xi) = \frac{h}{4\pi i} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \varphi(x) \operatorname{ctg} \frac{h(x-\xi)}{2} dx + \frac{\varphi(\xi)}{2},$$

$$\Phi^-(\xi) = \frac{h}{4\pi i} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \varphi(x) \operatorname{ctg} \frac{h(x-\xi)}{2} dx - \frac{\varphi(\xi)}{2}.$$

Определим оператор в пространстве $L_2(\hbar\mathbb{T})$

$$(H_h^{per}\varphi)(\xi) = \frac{h}{4\pi i} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \varphi(x) \operatorname{ctg} \frac{h(x-\xi)}{2} dx$$

и два оператора

$$P_h = \frac{1}{2}(I + H_h^{per}), \quad Q_h = \frac{1}{2}(I - H_h^{per}),$$

где I – единичный оператор.

Ортогональные подпространства

Обозначим $\mathbb{A}_\pm$ два подпространства функций $u_\pm(\xi)$ из $L_2(\hbar\mathbb{T})$, которые допускают аналитическое продолжение в $\hbar\Pi_\pm$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}_\pm} \int\limits_{-\hbar\pi}^{+\hbar\pi} |u_\pm(\xi + i\tau)|^2 d\xi < +\infty.$$

Т е о р е м а 1. Пространство $L_2(\hbar\mathbb{T})$ единственным образом представимо в виде ортогональной суммы подпространств

$$L_2(\hbar\mathbb{T}) = \mathbb{A}_+ \oplus \mathbb{A}_-,$$

и для любой функции $u \in L_2(\hbar\mathbb{T})$ это разложение принимает вид

$$u(\xi) = (P_h u)(\xi) + (Q_h u)(\xi).$$

Прообразы ортогональных подпространств

Здесь мы опишем прообразы подпространств $\mathbb{A}_\pm$ относительно преобразования Фурье.

Т е о р е м а 2. Справедливы следующие соотношения

$$\widetilde{L_2(h\mathbb{Z}_+)} = \mathbb{A}_+, \quad \widetilde{L_2(h\mathbb{Z}_-)} = \mathbb{A}_-$$

где знак "$\sim$" над пространством обозначает его фурье-образ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. — М.: Наука. — 1971. — 352 с
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — 3-е изд. испр. — М.: Наука. — 1977. — 640 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — 3-е изд. испр. — М.: Наука. — 1968. — 511 с
4. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. Discrete singular operators and equations in a half-space // Azerb. J. Math. — 2013. — Vol. 3. — No 1. — P. 84–93.
5. Васильев А. В., Васильев В. Б. Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках // Дифференц. уравнения — 2015. — Т. 51. — № 5. — С. 642–649.

УДК 517.953

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. В. Васильев
ООО «Севергрупп ТТ»
e-mail: *alexvassel@gmail.com*
В. Б. Васильев
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: *vbv57@inbox.ru*
Д. А. Скучас
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: *skuchas.dmitrij@bk.ru*

Рассматривается эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в дискретном полупространстве. Для специального значения индекса периодической факторизации выписывается представление решения, основанного на разложении периодического ядра преобразования Гильберта.

Ключевые слова: дискретное уравнение, дискретное преобразование Фурье, периодическая факторизация, представление решения.

Введение

Исследование дискретные псевдодифференциальных операторов и уравнений [4, 5] было инициировано общей теорией краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений [1].

Пусть $\mathbb{Z}^m$ - целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m$ - m-мерный куб, $h > 0, \hbar = h^{-1}$. Для функций u_d дискретного аргумента, определенных на $h\mathbb{Z}^m$, мы вводим дискретное преобразование Фурье

$$\tilde{u}_d(\xi) \equiv (F_d u_d)(\xi) = \sum_{x \in h\mathbb{Z}^m} u_d(x) e^{ix\cdot\xi} h^m, \quad , \xi \in \hbar\mathbb{T}^m.$$

Пусть $A_d(\xi)$ - периодическая функция в $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Оператор вида

$$(A_d u_d)(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{y \in h\mathbb{Z}^m} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} A_d(\xi) e^{i(y-x)\cdot\xi} u_d(y) h^m d\xi, \quad x \in D_d,$$

$D_d = D \cap h\mathbb{Z}^m$, D - область в $\mathbb{R}^m$, мы называем дискретным псевдодифференциальным оператором в дискретной области D_d. С этим оператором связывается уравнение

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \tag{1}$$

где v_d – заданная функция в D_d.

В случае $D = \mathbb{R}^m$ для разрешимости оказывается достаточным условие эллиптичности. В случае произвольной области исследование представляется затруднительным. В случае полупространства $\mathbb{R}^m_+$ разрешимость уравнение (1) мы изучаем в дискретных аналогах $H^s(h\mathbb{Z}^m_+)$ пространств Соболева–Слободнцкого [5].

Специальное представление символа

Для исследования уравнения в дискретном полупространстве ключевую роль играет факторизация периодического символа. Оно тесно связано с теорией классической краевой задачи Римана [2, 3].Обозначим

$$\Pi_\pm = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \xi + i\tau, \xi \in \mathbb{T}, \pm\tau > 0\}.$$

– полу-полосы в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Следующее определение приведено в [5].

О п р е д е л е н и е. Периодической факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi)$ называется его представление в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,+}(\xi) A_{d,-}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\pm}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в полу-полосы $\hbar\Pi_\pm$ по последней переменной ξ_m при почти всех фиксированных $\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}$ и удовлетворяют оценкам

$$|A^{\pm 1}_{d,+}(\xi)| \le c_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm\frac{æ}{2}}, \quad |A^{\pm 1}_{d,-}(\xi)| \le c_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm\frac{\alpha - æ}{2}},$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h,

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left(\sum_{k=1}^{m-1} (e^{-ih\xi_k} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_m + i\tau)} - 1)^2 \right), \quad \xi_m + i\tau \in \hbar\Pi_\pm.$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической факторизации.

Специальное представление ядра

Такое представление появляется в связи с тем фактом, что при условии $æ - s = -n + \delta, |\delta| < 1/2$, уравнение (1) становится пере-определенным в том

смысле, что решение существует, но принадлежит более узкому пространству, входящему в $H^s(h\mathbb{Z}^m_+)$.

С учетом специфики периодического ядра оператора можно получить следующее представление.

Т е о р е м а 1. Имеется единственный набор функций $c_j(\xi') \in H^{s_j}(\hbar\mathbb{T}^{m-1})$, $s_j = s - æ + j + 1/2$, $j = 0, 1, \cdots, n$, таких, что справедливо следующее представление

$$\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \cot\frac{h(\eta_m - \xi_m)}{2} g(\xi', \eta_m) d\eta_m = \sum_{j=0}^{n} c_j(\xi')(e^{ih\xi_m} - 1)^{-j} +$$

$$(e^{ih\xi_m} - 1)^{-n} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \cot\frac{h(\eta_m - \xi_m)}{2} g(\xi', \eta_m)(e^{ih\eta_m} - 1)^n d\eta_m,$$

где

$$c_j(\xi') = ih \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} (e^{ih\xi_m} - 1)^j g(\xi', \xi_m) d\xi_m, \quad j = 0, 1, \cdots, n,$$

$\forall\ g(\xi', \xi_m) \in H^{-n-\delta}(\hbar\mathbb{T}^m), n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2.$

Представление решения дискретного уравнения

Выберем правую часть v_d уравнения (1) из пространства функций $H_0^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^m_+)$, допускающих продолжение на все пространство $H_0^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^m)$ с нормой

$$||v_d||^+_{s-\alpha} = \inf ||\ell v_d||_{s-\alpha}$$

где infimum берется по всевозможным продолжениям ℓ.

Определим оператор, действующий по последней переменной

$$(H_h^{per}\varphi)(\xi', \xi_m) = \frac{h}{4\pi i} p.v. \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \varphi(\xi', x) \operatorname{ctg}\frac{h(x - \xi_m)}{2} dx$$

и два оператора

$$P_h = \frac{1}{2}(I + H_h^{per}), \quad Q_h = \frac{1}{2}(I - H_h^{per}),$$

где I – единичный оператор.

С учетом Теоремы 1 доказывается

Т е о р е м а 2. Пусть $æ - s = -n + \delta, |\delta| < 1/2$, Тогда уравнение (1) имеет решение в пространстве $H^s(h\mathbb{Z}^m_+)$, для которого справедливо представление

$$\tilde{u}_d(\xi) = \sum_{j=0}^{n} b_j(\xi') \left(\frac{e^{ih\xi_m} - 1}{h}\right)^{-j} A^{-1}_{d,+}(\xi) + \tilde{U}_d(\xi),$$

где

$$\tilde{U}_d(\xi) = \left(\frac{e^{ih\xi_m}-1}{h}\right)^{-n} A^{-1}_{d,+}(\xi)(P_h(A^{-1}_{d,-}(\xi',\eta_m)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi',\eta_m)\left(\frac{e^{ih\eta_m}-1}{h}\right)^{n}))(\xi',\xi_m),$$

$$b_j(\xi') = h\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\left(\frac{e^{ih\xi_m}-1}{h}\right)^{j} A^{-1}_{d,-}(\xi',\xi_m)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi',\xi_m)d\xi_m,$$

Имеет место оценка

$$||U_d||_s \le c||v_d||^+_{s-\alpha}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука. — 1973. — 232 с.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — 3-е изд. испр. — М.: Наука. — 1977. — 640 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — 3-е изд. испр. — М.: Наука. — 1968. — 511 с.
4. Vasilyev V. B. Discrete pseudo-differential operators and boundary value problems in a half-space and a cone // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2018. — V. 39. —No 2.— C. 289–296.
5. Васильев В. Б. Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2019. — Т. 160. — С. 18–27.

УДК 51

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ В КОНТЕЙНЕРЫ

В.С. Георги
Дагестанский государственный университет
e-mail: *georgywaleed1993@hotmail.com*

В статье рассматривается задача упаковки в контейнеры, и различные способы ее решения с помощью алгоритмов линейной эвристики. Информация о временной сложности, гарантии приближения, производительности в худшем случае проанализирована и собрана в итоговой таблице 1 в конце данной статьи. Полученные результаты позволяют делать вывод о наибольшей эффективности алгоритмов и Harmonic-k, и Refined-Harmonic в решении задачи упаковки в контейнеры.

Ключевые слова: OPT, RFF, ACM, алгоритм, контейнер, Временная сложность.

Постановка задачи

В задаче упаковки в контейнеры предметы разного размера должны быть упакованы в конечное количество контейнеров, каждый из которых имеет фиксированный заданный объем, таким образом, чтобы минимизировать количество используемых контейнеров [4].

Имеется конечный набор I элементов, размером s(i) $\in Z^+$, когда $i \in$ I, положительный целочисленный определяющий емкость контейнера B и положительное целое число K. Возможно ли разбить множество I на непересекающиеся множества $I_1, \dots, I_K$ так, чтобы сумма размеров элементов в каждом I_J равна B или меньше? Решение является оптимальным, если оно имеет минимальное K. Возможная формулировка задачи: минимизировать $K = \sum_{j=1}^{n} y_j$, при условии, что K ≥ 1 [3]

$$\sum_{i \in I}^{n} s(i)x_{ij} \le B_{y_j} ,\forall\, j \in \{1, \dots, n\}\,,\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\,,\ \forall\, i \in I$$

$$y_j \in \{0,1\},\ \forall\, j \in \{1, \dots, n\}\,,\quad x_{ij} \in \{0,1\},\ \forall\, i \in I\ \forall\, j \in \{1, \dots, n\}$$

где $y_j = 1$ если контейнер j был использован и $x_{ij} = 1$ если предмет i был упакован в контейнер j [3].

Алгоритмы аппроксимации упаковки в контейнеры

Для некого списка элементов L, число $A(L)$ обозначает количество контейнеров, используемых, когда алгоритм A применяется к списку элементов L, а $OPT(L)$ обозначает оптимальное число для данного списка. Абсолютно худший коэффициент производительности R_A для алгоритма A определяется следующим образом [2]:

$$R_A \equiv \inf\{r \ge 1 : \frac{A(L)}{OPT(L)} \le r \text{ для всех списков } L\}$$

С другой стороны, асимптотический коэффициент в наихудшем случаи R_A^{∞} определяется следующим образом:

$$R_A^\infty \equiv \inf\{ r \geq 1 : \exists N > 0, \frac{A(L)}{OPT(L)} \leq r \text{ для всех списков } L \text{ где } OPT(L) > N\}$$

Алгоритмы линейной эвристики

Next-Fit *(NF)*

Время работы может быть ограничено *O(n log(n))* где *n* является количеством элементов. Для каждого списка L является верным то, что $NF(L) \leq 2 * OPT(L) - 1$ и, следовательно, $R_{NF} = 2$. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ существует список L который удовлетворяет следующее правила: OPT(L) = N и $NF(L) = 2 * OPT(L) - 2$. Так же $R_{NF}^\infty(\alpha) \leq 2$ для каждого $\alpha \geq 1/2$, и $R_{NF}^\infty(\alpha) \leq 1/(1-\alpha)$ для каждого $\alpha \leq 1/2$. Для каждого алгоритма A который является AF алгоритмом, верно то, что $R_A^\infty(\alpha) \leq R_{NF}^\infty(\alpha)$ [1].

Next-*k*-Fit *(NkF)*

Для k ≥ 2, NkF обеспечивает результаты, которые являются лучше по сравнению с результатами NF, однако увеличение k до значений, больших, чем 2, не улучшает производительность алгоритма в его худшем случае. Если алгоритм A является AAF алгоритмом и $m = \lfloor 1/\alpha \rfloor \geq 2$ то $R_A^\infty(\alpha) \leq R_{N2F}^\infty(\alpha) = 1 + 1/m$ [1].

First-Fit *(FF)*

В 2013 году верхняя граница для FF была улучшена Доза и Сгалл до $FF(L) \leq \lfloor 1.7OPT \rfloor$ [8]. Они также представили пример списка ввода L, для FF(L) который соответствует этой границе [6].

Best-Fit *(BF)*

Аналогично *First-fit,* в 2013 году верхняя граница для BF была улучшена Доза и Сгалл до $FF(L) \leq \lfloor 1.7OPT \rfloor$ [9]. Они также представили пример списка ввода L, для BF(L) который соответствует этой границе.

Worst-Fit *(WF)*

Этот алгоритм может вести себя так же плохо, как Next-Fit, тогда когда $NF(L) = 2OPT(L) - 2$. Кроме того, является верным, что $R_{WF}^\infty(\alpha) = R_{NF}^\infty(\alpha)$ Поскольку WF является алгоритмом AF, существует алгоритм AF такой, что $R_{AF}^\infty(\alpha) = R_{NF}^\infty(\alpha)$ [1].

Refined-First-Fit *(RFF)*

Элементы делятся на четыре класса. Элемент *i* является A-piece, B_1-piece, B_2-piece или X-piece, если его размер находится в интервале (1/2, 1], (2/5, 1/2], (1/3, 2/5] или (0, 1/3] соответственно [7]. Точно так же корзины делятся на четыре класса: Класс 1, если *i* является *A*-piece. Класс 2, если *i* является B_1-piece. Класс 3, если *i* является B_2-piece, но не (*mk*)th категории B_2-piece не предоставленной ранее, для любого целого числа k ≥ 1. Класс 4, если *i* является *X*-piece.

Было доказанно, что он обеспечивает гарантию приближения равную $RFF(L) \leq \left(\frac{5}{3}\right).OPT(L) + 5$ и предоставил семейство списков L_k где $RFF(L_k) = \left(\frac{5}{3}\right) OPT(L_k) + \frac{1}{3}$ когда OPT(L) $=$ 6k + 1 [11].

Harmonic-*k*

Алгоритм Harmonic-k разбивает интервал размеров (0,1] гармонически на k-1 частей $I_j := (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j})$ для $1 \leq j < k$ и $I_k := (0, \frac{1}{k}]$ так, что $\bigcup_{j=1}^{k} I_j = (0,1]$. Алгоритм действует следующим образом: если следующий элемент $i \in L$ является I_j элементом для $1 \leq j \leq k$, то элемент помещается в первый открытый B_j контейнер, содержащий менее *j* частей, иначе алгоритм открывает новый контейнер, если такого контейнера не существует [5].

Его временная сложность равна $\mathcal{O}(|L|Log|L|))$. Ли и Ли определили последовательность $\sigma_1 = 1, \sigma_{1-1} := \sigma_1(\sigma_1 + 1)$ когда $i \geq 1$, и доказали, что когда $\sigma_1 < k < \sigma_{l+1}$ то является верным что $R_{Hk}^{\infty} \leq \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\sigma_1} + \frac{k}{\sigma_{l+1}(k-1)}$. Когда k $\to \infty$ то является верным что $R_{Hk}^{\infty} \approx 1.6910$. Кроме того, они представили ряд примеров худшего случая, где $R_{Hk}^{\infty} = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\sigma_1} + \frac{k}{\sigma_{l+1}(k-1)}$ [10].

Refined-Harmonic (RH)

Основная идея данного алгоритма состоит в том, чтобы уменьшить большое количество контейнеров, содержащих элементы, которые являются чуть больше, чем 1/2. Алгоритм классифицирует предметы по следующим интервалам:

$$I_1 := \left(\frac{59}{96}, 1\right], I_\alpha := \left(\frac{1}{2}, \frac{50}{96}\right], I_2 := \left(\frac{37}{96}, \frac{1}{2}\right], I_b := \left(\frac{1}{3}, \frac{37}{96}\right]$$

$$I_j := (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}] \text{ где j} \in \{3, \ldots, \text{k} - 1\} \text{ и } I_k := (0, \frac{1}{k}].$$

Было доказано, что, когда $k = 20$, является верным что $R_{RH}^{\infty} \leq 33/228$ [10].

Таблица 1 – Сравнение алгоритмов по различным параметрам

Алгоритм	**Гарантия приближения**	**Список наихудшего случая *L***	**Временная сложность**
Next-Fit (NF)	$NF(L) \leq 2OPT(L) - 1$	$NF(L) = 2OPT(L) - 2$	$\mathcal{O}(\|L\|)$
First-Fit (FF)	$FF(L) \leq \lfloor 1.7OPT(L) \rfloor$	$FF(L) = \lfloor 1.7OPT(L) \rfloor$	$\mathcal{O}(\|L\|\log(\|L\|)$
Best-Fit (BF)	$BF(L) \leq \lfloor 1.7OPT(L) \rfloor$	$BF(L) = \lfloor 1.7OPT(L) \rfloor$	$\mathcal{O}(\|L\|\log(\|L\|)$
Worst-Fit (WF)	$WF(L) \leq 2OPT(L) - 1$	$WF(L) = 2OPT(L) - 2$	$\mathcal{O}(\|L\|\log(\|L\|)$
Almost-Worst-Fit (AWF)	$R_{AWF}^{\infty} \leq 17/10$	$R_{AWF}^{\infty} = 17/10$	$\mathcal{O}(\|L\|\log(\|L\|)$

Refined-First-Fit (RFF)	$RFF(L) \leq \left(\frac{5}{3}\right) OPT(L) + 5$	$RFF(L) = \left(\frac{5}{3}\right) OPT(L) + \frac{1}{3}$ (когда OPT(L) = 6k + 1)	$\mathcal{O}$(|L|log(|L|)
Harmonic-k (Hk)	$R_{Hk}^{\infty} \leq 1.69103$ когда k→∞	$R_{Hk}^{\infty} \geq 1.69103$	$\mathcal{O}$(|L|log(|L|)
Refined Harmonic (RH)	$R_{Hk}^{\infty} \leq \frac{373}{228} \approx 1.63597$		$\mathcal{O}$(|L|)

ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson, David S. Near-optimal bin packing algorithms. – Massachusetts Institute of Technology – 1973 – 401 с.
2. Gonzalez, Teofilo F. Handbook of approximation algorithms and metaheuristics. – Volume 2 Contemporary and emerging applications – 2018 – 796 с.
3. Ullman J. D. The performance of a memory allocation algorithm. Technical Report 100 Princeton Univ – 1971 – 17 с.
4. Garey M. R., Graham R. L., Ullman J. D. Worst-case analysis of memory allocation algorithms // Proceedings of the Fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. – 1972. – doi:10.1145/800152.804907 – S2CID 26654056 – С. 143–150.
5. Garey M. R., Graham R. L., Johnson, D. S., Yao, Andrew Chi-Chih. Resource constrained scheduling as generalized bin packing. // Journal of Combinatorial Theory – 1972. – doi:10.1016/0097-3165(76)90001-7. ISSN 0097-3165. – Series A. 21 (3) – С. 257–298
6. Xia B., Tan Z. Tighter bounds of the First Fit algorithm for the bin-packing problem. // Discrete Applied Mathematics. – 2010. – 158 (15) – doi: 10.1016/j.dam.2010.05.026. – С.1668–1675.
7. Dósa G., Sgall J. First Fit bin packing: A tight analysis. // 30th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2013). – 2012. – Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik. – 20 – С. 538–549.
8. György D., Sgall J. Optimal Analysis of Best Fit Bin Packing. // Automata, Languages, and Programming – 41st International Colloquium (ICALP). – 2014. – Lecture Notes in Computer Science. 8572. – doi:10.1007/978-3-662-43948-7:36. ISBN 978-3-662-43947-0. С. 429–441.
9. Lee C. C., Lee D. T. A simple on-line bin-packing algorithm. // Journal of the ACM. – 1985. – 32(3) – doi:10.1145/3828.3833. S2CID 15441740. С. 562–572.
10. Yao, Chi-Chih A. New Algorithms for Bin Packing. // Journal of the ACM. 1980 – 27(2) – С. 207–227.

УДК 51

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПАСЕКИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ФЛОРИСТИЧЕСКОГО СОСТАВА ФИТОЦЕНОЗА ЕСТЕСТВЕННОГО ЛАНДШАФТА

О.В. Гилёва
Бирский филиал Башкирского государственного университета
e-mail: *olga-gileva@mail.ru*
В.В. Чудинов, к.ф.-м.н.
Бирский филиал Башкирского государственного университета
e-mail: *chudinovvv@rambler.ru*
А.Ю. Гилёв
Бирский филиал Башкирского государственного университета
e-mail: *gilevayu@mail.ru*

В работе описана математическая модель динамики численности домашних пчел системой интегро-дифференциальных уравнений. При формировании взятка учитывается разнообразие медоносных растений на данной местности, их свойства, плотность произрастания, погодные условия и время начала цветения. Предложен алгоритм автоматизации нахождения наиболее оптимального с точки зрения производства торгового мёда месторасположения пасеки на заданной территории с известным флористическим составом и плотностью расположения медоносных растений.

Ключевые слова: динамика численности пчел, моделирование, пасека, медосбор, фитоценоз, пчеловодство.

1. Введение

Методы имитационного компьютерного моделирования динамики численности популяций насекомых давно используются в биологии и экологии. Математическое моделирование не только формализует данные объектов и процессов, но и дает возможность предсказывать течение процесса, дать его количественное описание, а также на основе модели можно давать рекомендации по оптимальному управлению процессом. В предложенной модели жизненный цикл насекомого описывается системой интегро-дифференциальных уравнений. В систему входят уравнения, описывающие сбор пыльцы и нектара. Построенная модель позволяет рассчитывать нектаровыделение с медоносных растений территории с учетом влияния абиотических факторов (температура, осадки, влажность почвы и т.д.). Модель позволяет рассчитывать динамику медосбора, время и объёмы максимального медосбора при прогнозируемых погодных условиях, а также определить координаты «точки» расположения семьи, гарантирующие наибольший медосбор.

2. Постановка задачи

Медосбор пчелиной семьи в течение весенне-летнего периода зависит от флористического состава фитоценоза (видовой состав и пространственное распределение) в районе пасеки.

Нашей задачей является нахождение координаты точки (*x*, *y*) положения улья, в которой медосбор примет своё максимальное значение в зависимости от нектаровыделения, плотности произрастания медоносов и пыльценосов, погодных условий, с учетом динамики развития пчелиной семьи за сезон.

3. Математическая модель

Пусть популяция домашних медоносных пчел, занимающая один улей, задается функцией *n(c, t)* в момент времени *t* с разделением по возрасту *c*. Изменение численности пчел, учитывающее возрастные стадии, описывается уравнением типа Ферстера [8] в области $\{(c,t)|0 \le c \le C_{max}, 0 \le t \le T\}$, где C_{max} – наибольшая продолжительность жизни пчел.

Уравнение динамики численности насекомых имеет вид

$$\frac{\partial n(\mathrm{c},t)}{\partial t} + \frac{\partial n(\mathrm{c},t)}{\partial \mathrm{c}} = -n(\mathrm{c},t)\cdot R(\mathrm{c},t), \qquad (1)$$

где R(c, t) – функция, описывающая влияние различных биологических факторов на смертность пчел на разных стадиях развития, например, таких как интенсивности работы, наличие в улье корма (пыльцы, меда) и т.д. [2]

Начальное и граничные условия заданы в виде

$$\begin{cases} \mathrm{n}(\mathrm{c},0) = \mathrm{g}(\mathrm{c}); \\ n(\mathrm{C}_{max},t) = 0; \\ n(0,t) = V(t), \end{cases} \qquad (2)$$

где g(c) – функция распределения популяции по возрасту в момент времени *t*=0;

V(*t*) – функция продуктивности матки

$$V(t) = \left(e^{-\alpha_1\left(t-180\ \left[\frac{t}{365}\right]\cdot 365\right)^2} + e^{-\beta_1\left(t-180-\left[\frac{t}{365}\right]\cdot 365\right)^4} \right) \cdot e^{-\gamma(t-730)^2} \cdot 1000, \quad (3)$$

где α_1, β_1 и γ – биологические константы, $\left[\frac{t}{365}\right]$ – целая часть. Дифференциальное уравнение выписано путём обобщения и аппроксимации экспериментальных данных, приведённых в литературе [1, 5].

Численность пчелиной семьи *N*(*t*) в момент времени t, определяется из равенства

$$N(t) = \sum_{i=1}^{5} N_i(t) = \sum_{i=1}^{5} \int_{T_{i-1}}^{T_i} n(\mathrm{c},t)dc, \qquad (4)$$

здесь величина $N_i(t)$ – численность насекомых в *i-ой* стадии, $\tau_0 = 0$, $T_i = \sum_{k=0}^{i} \tau_k$, $T_5 = \mathrm{C}_{max} - \sum_{k=0}^{4} \tau_k$.

Для развития пчелиной семьи очень важным является наличие пищи: нектара, пыльцы, а затем мёда и перги, если пищи будет недостаточно, то пчелы ограничивают яйценоскость матки и даже могут уничтожить часть расплода

(явление каннибализма) [7]. Учет влияния пищевых ресурсов описан функцией $R(\mathrm{c}, t)$ [2]. Предполагаем, что семья не имеет ограничений в жизненном пространстве.

Введём функции: количество нектара $h(t)$, мёда – $H(t)$ и пыльцы – $P(t)$ в улье в момент времени *t*. Динамику поступления нектара в улей описываем дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_2 f_6 f_7 N_5 A_H f_n - \alpha_3 N_5 - \alpha_4 N_2 - \alpha_5 h(t-5), \qquad (5)$$

где $f_n = exp\left(-\left(((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)/\sqrt{2}\sigma\right)^2 + 1/2\right)$ функция эффективности работы пчелы, зависящая от расстояния между ульем и медоносами, σ – биологическая константа [1]. $A_h(t)$ – количество доступного нектара, выделяемое медоносными растениями, произрастающими в районе пасеки, f_6 – фактор влияния температуры, f_7 – фактор влияния осадков, $h(t–5)$ – количество нектара, перешедшего в товарный мед с учётом времени вызревания мёда – 5 дней, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ – константы [3].

Количество доступного нектара $A_h(t)$ определяется зависимостью

$$A_h(t) = \sum_{i=1}^{m} f_6 f_7 f_8 f_9 A_h^i(t), \qquad (6)$$

здесь $A_h^i(t)$ – продуктивность *i*-ого медоноса, f_8 – фактор влияния влажности почвы, f_9 – фактор влияния засухи [3], *m* – количество медоносов в фитоценозе ландшафта.

Математическая зависимость нектаровыделения от плотности произрастания медоносных растений, их свойств, погодных условий была построена нами на основе экспериментальных значений ежедневного медосбора [4, 5].

$$A_h^i(t) = A_i exp\left(-\frac{\left(t - \left(t_i^0 + \sigma_i/2\right)\right)^2}{\sigma_i^2 \cdot \gamma_i}\right),$$

где t_i^0 – время начала цветения *i*-й культуры, σ_i – длительность цветения *i*-го растения в днях, $\gamma_i = const$, A_i – амплитуда (максимальный взяток с *i*-го медоносного растения) [3].

Строго говоря, начало цветения *i*-го растения t_i^0 и длительность его цветения σ_i зависят от региона произрастания. Известны работы, в которых приведены интервалы отставания начала цветения медоносных культур $\bar{t}_i$ от времени начала цветения t_0 некоторых первоцветов, например орешника [6], $t_i^0 = t_0 + \bar{t}_i$. Учет времени t_0 позволяет прогнозировать медосбор за весь сезон [3].

Динамика образования мёда в улье описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dH}{dt} = \alpha_5 h(t-5) - \theta(-h)(\alpha_6 N_4 + \alpha_7 N_5 + \alpha_8 N_2), \qquad (7)$$

где – $\theta(-h)$ функция Хевисайда, $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$ – константы.

Динамика поступления пыльцы в улей описывается аналогично дифференциальным уравнением

$$\frac{dP}{dt} = \alpha_9 f_6 f_7 N_5 A_p - \alpha_{10} N_2, \quad (8)$$

где α_9, α_{10} – константы, $A_p(t)$ – доступное количество пыльцы, продуцируемое растениями, определяется из выражения

$$A_p(t) = \sum_{i=1}^{m} f_6 f_7 f_8 f_9 A_p^i(t), \quad (9)$$

Аналитическая модель динамики взятка во времени получается:

$$A_h(t, t_0, x, y) = \sum_{i=1}^{m} A_h^i(t, t_0, x, y) = \sum_{i=1}^{m} A_h^i(t) \iint_S A_i(x, y) dx dy. \quad (10)$$

Таким образом, мы имеем модель численности популяции домашних медоносных пчел, модель сбора мёда и пыльцы и динамическую модель потенциального взятка на исследуемом ландшафте.

Для расчета оптимального расположения пасеки за основу берется топографическая карта исследуемой местности с отмеченными невозможными для медосбора объектами (речки, овраги и т.п.), на рисунке 1 они указаны черным цветом.

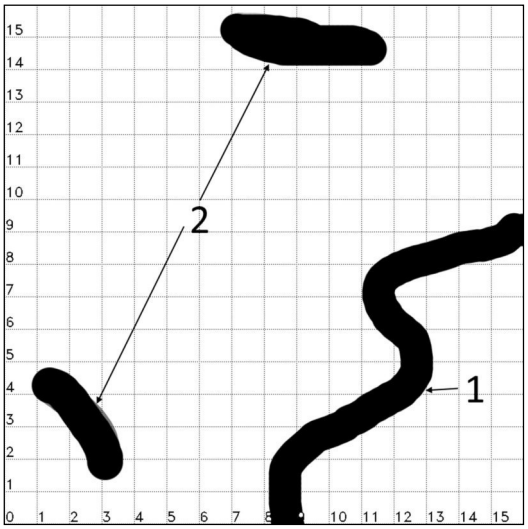


Рисунок 1 – Карта местности (1 – река, 2 – овраг)

После обследования предположительного места расположения пасеки, выявляется состав медоносов и их топография. Результаты обследования наносятся на карту фитоценоза медоносов в виде цветовых пятен с градацией серого от 0 до 100. Отсутствию медоносных растений соответствует 0 (белый цвет), самому богатому медоносу – 100 (черный цвет), сверху накладываем инвертированную карту местности (то есть труднодоступные места для медосбора становятся белыми - медосбор равен нулю (рисунок 2).

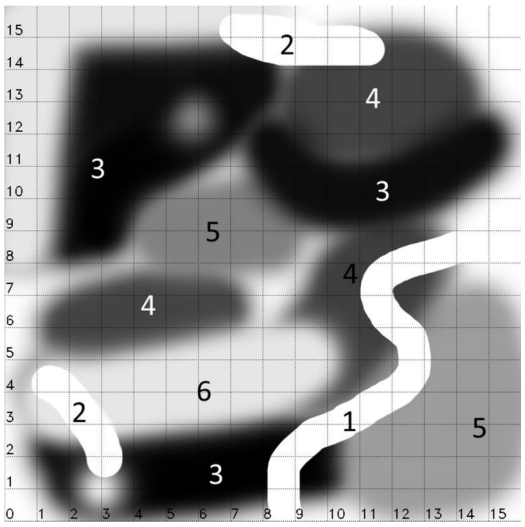


Рисунок 2 – Карта фитоценоза ландшафта
(3 – посадка липы, 4 – малина, 5 – подсолнечник, 6 – гречиха)

После расчета мы получаем картину потенциального медосбора, показывающую места наиболее выгодные для расположения пасеки (рисунок 3, область 1). Линиями уровня показаны объемы медосбора в зависимости от флористического состава фитоценоза территории. При расположении улья в "точке" (5,11) (рисунок 3) медосбор будет вестись с медоносных участков 3 и 4 (рисунок 2).

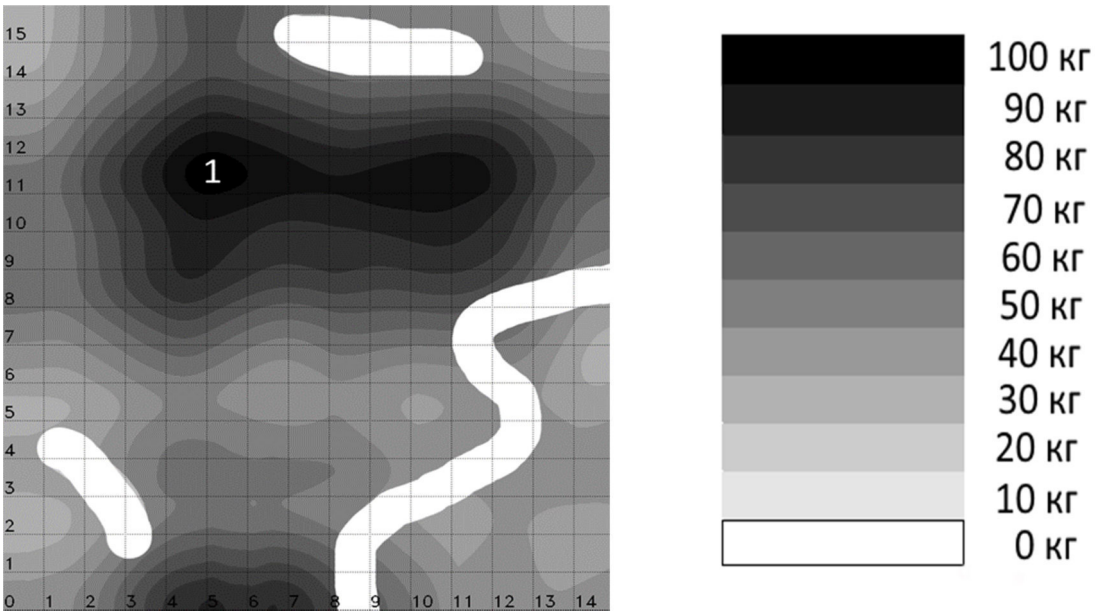


Рисунок 3 – Потенциальный медосбор для данного флористического состава фитоценоза ландшафта из расчета на 1га

В течении сезона в зависимости от времени цветения того или иного медоноса картина будет меняться, а, следовательно, каждый раз мы будем получать новую карту наиболее выгодного расположения пасеки. С помощью программы мы можем максимально точно указывать куда и когда следует перевозить семью, чтобы каждый раз получать наибольшую продуктивность или наилучшее развитие семьи.

4. Вывод

Таким образом наша модель позволяет рассчитывать время и объёмы максимального медосбора, оптимальное расположение пасеки на конкретной территории с заданным флористическим составом фитоценоза. Изменяя набор видов медоносных растений, учитывая сроки их зацветания, продолжительность и объем цветения, а также изменять местоположение пасеки в течении сезона, можно в каждой местности успешно бороться с безвзяточными периодами, что способствует увеличению количества и повышению качества товарного мёда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин Н.Л., Котова Г.Н. Справочник по пчеловодству. М.: «Колос», 1981.
2. Гилёва О.В., Чудинов В.В., Морозкин Н.Д. Математическая модель жизненного цикла медоносной пчелы. //"Достижения и приложения современной информатики, математики и физики": Материалы Всероссийской научно-практической заочной конференции. - Нефтекамск: РИЦ БашГУ, 2012.-С.74-77.
3. Гилёва О.В., Чудинов В.В., Чудинова Т.П. Математическая модель выделения нектара медоносными растениями при абиотических воздействиях. // Новые технологии в промышленности и сельском хозяйстве: материалы 1-ой Всероссийской заочной научно-практической конференции, декабрь 2012 г./ ООО «Международный центр технологий», г.Бийск, 2012.- С.353-360.
4. Жабцев В.М. Пчеловодство: Настольная книга. – М.: АСТ; Мн.: Харвест, 2005.
5. Ковалев А.М. и др. Учебник пчеловода. М., «Колос», 1970.
6. Кокорев Н.М., Чернов Б.Я. Медоносная база – М.: ТИД Континент-Пресс/Континенталь-Книга, 2005.
7. Лонин И.С. Как уберечь пчелосемьи от ослабления летом и гибели осенью и зимой. М.: "Мир и согласие", 2004
8. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Биофизическая динамика продукционных процессов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004

УДК 517.988

ПРОИЗВОДНЫЕ НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

О. Н. Евхута, к.ф.-м.н., доц.
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова, Новочеркасск, Российская Федерация
e-mail: *evhuta@gmail.com*
Н. А. Евхута, к.ф.-м.н., доц.
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова, Новочеркасск, Российская Федерация
e-mail: *evhuta@gmail.com*

Изучаются взаимосвязи между классическими производными и, введёнными авторами, NL-производными. Рассматриваются теоремы о NL-производных.

Ключевые слова: производные, NL-производные, производные Гато, производные Картана, обобщенные производные, интеграл Курцвейля-Хенстока.

Принято считать, что все встречающиеся на практике функции оказываются дифференцируемыми (в смысле Фреше), а сами эти производные непрерывны. Функции "с особенностями" при этом оказываются дифференцируемыми в каком-либо слабом смысле.

При переходе к функциям в банаховых пространствах $f:\ \Omega\ (\subset X) \to Y$ ситуация меняется — хорошо известно, что здесь многие функции, как правило, не дифференцируемы. При этом часто оказывается, что такие функции дифференцируемы "формально" (формальной процедурой линеаризации), но соответствующие полученные при этом линейные операторы не являются производными. В этой связи, естественно, пытаться дать такое определение производной, чтобы эти формальные производные оказывались бы настоящими (в соответствующем смысле) и чтобы эти производные обладали свойствами, которые бы позволяли их использовать в приложениях.

Одно из таких определений было предложено в [3, 4]. В отличие от классических определений NL-производные в отдельных точках не определены (точно также как производные в теории обобщенных функций). Но для функций $f:\ \Omega\ (\subset X) \to Y$ они оказываются определенными как функции $f:\ \Omega\ (\subset X) \to L(X,Y)$.

Рассмотрим скалярный случай. При этом нам понадобится определение интеграла Курцвейля–Хенстока и его аналогов для функций в банаховых пространствах [1, 2, 6].

О п р е д е л е н и е. Число I будем называть интегралом Курцвейля–Хенстока от определенной на отрезке $[a,b]$ скалярной функции f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая, определенная на отрезке $[a,b]$, положительная функция $\delta(x)$, что для всякого разбиения отрезка $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_s = b$ с отмеченными точками $\xi_\sigma \in [x_{\sigma-1}, x_\sigma]$

($\sigma = 1, 2, \ldots, s$), удовлетворяющими условию $[x_{\sigma-1}, x_\sigma] \subset (\xi_\sigma - \delta(x_\sigma), \xi_\sigma + \delta(x_\sigma))$ верно неравенство $\left| I - \sum\limits_{\sigma=1}^{s} f(\xi_\sigma)(x_\sigma - x_{\sigma-1}) \right| < \varepsilon$.

Понятие интеграла Курцвейля–Хенстока совпадает с введенными более ста лет назад интегралами Перрона и Данжуа, определения которых были существенно более сложными. Интеграл Курцвейля–Хенстока обобщает понятие интегралов Римана и Лебега и охватывает различные классы несобственных интегралов. Появился интеграл Курцвейля–Хенстока в 1957 году в работе чешского математика Ярослава Курцвейля и далее, начиная с 1961, усилиями Ральфа Хенстока и ряда других математиков была разработана теория этого интеграла [6].

Если непрерывная функция $f(\cdot)$ на отрезке $[a, b]$ имеет производную всюду за исключением счетного множества точек, то ее производная $f'(\cdot)$ интегрируема по Курцвейлю–Хенстока и при этом справедлива формула Ньютона–Лейбница $f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f'(t)\, dt$.

Пусть $f: \Omega\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция (Ω — область в $\mathbb{R}$). Будем говорить, что функция $g: \Omega \to \mathbb{R}$ является NL-*производной функции* f *на* Ω, если для любых $a, b \in \mathbb{R}$ с отрезком $[a, b] \in \Omega$ справедливо равенство

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b g(t)\, dt.$$

Для интегралов Курцвейля–Хенстока имеет место понятие интеграла с переменным верхним пределом, который естественно называть NL-примитивной (NL-первообразной). Значимость такого определения видна из теорем, подробно рассмотренных в статье [5].

Приведем теперь классические теоремы о свойствах дифференцируемых функций в банаховых пространствах. К таковым принято относить теоремы Ролля, Дарбу, Лагранжа, Коши, формулу Ньютона–Лейбница. Следует отметить, что при переносе этих теорем на общий случай возникает ряд переходе значительных трудностей. В настоящее время не существует единого подхода к аналогам этих теорем для функций в банаховых пространствах. Поэтому мы здесь остановимся только на двух: теореме Лагранжа и формуле Ньютона–Лейбница, которые играют основную роль в теории приближенных методов.

Т е о р е м а 1. Пусть функция $f: \Omega\ (\subseteq X) \to Y$ имеет производную Гато в каждой точке $x \in \Omega$. Пусть $a, b \in \Omega$ и отрезок $[a, b]$, соединяющий точки a и b, лежит в Ω. Тогда:

(а) при $Y = \mathbb{R}$

$$f(b) - f(a) = f'((1-\theta)a + \theta b)(b - a),$$

где θ — некоторое число из $(0, 1)$.

(b) в общем случае для любого непрерывного линейного функционала $\ell \in Y^*$

$$\ell[f(b) - f(a)] = \ell[f'((1-\theta)a + \theta b)(b-a)]$$

где θ — некоторое число из $(0,1)$, зависящее от ℓ.

Основные приложения этой теоремы связано со следующим неравенством, которого часто также называют теоремой Лагранжа: *если функция* $f\colon\ \Omega\ (\subseteq X) \to Y$ *имеет производную Гато в каждой точке* x *отрезка* $[a,b] \subset \Omega$ *и* $\|f'(x)\| \le k$ *для всех внутренних точек* x *этого отрезка, то:*

$$\|f(b) - f(a)\| \le k\|b-a\| \qquad \left(k = \max_{0<\theta<1} \|f'((1-\theta)a + \theta b)\|\right).$$

В некоторых приложениях этого неравенства ограничение о том, что отрезок $[a,b]$ целиком лежит в области Ω является серьезным ограничением. В таких случаях для некоторых областей Ω справедливо более слабое, чем $\|f(b) - f(a)\| \le k\|b-a\| \qquad \left(k = \max_{0<\theta<1} \|f'((1-\theta)a + \theta b)\|\right)$ утверждение *если функция* $f\colon\ \Omega\ (\subseteq X) \to Y$ *имеет производную Гато в каждой точке связной области* Ω *с* $\gamma(\Omega) < \infty$ *и* $a, b \in \Omega$*, то:*

$$\|f(b) - f(a)\| \le \gamma(\Omega) k\|b-a\| \qquad \left(k = \max_{0<\theta<1} \|f'((1-\theta)a + \theta b)\|\right),$$

где

$$\gamma(\Omega) = \sup_{x_1, x_2 \in \Omega} \frac{\mathsf{C}(x_1, x_2)}{\|x_1 - x_2\|}$$

здесь $\mathsf{C}(x_1, x_2)$ *— расстояние Картана между точками* $x_1, x_2 \in \Omega$, т. е. точная нижняя граница длин лежащих в Ω ломаных, соединяющих точки x_1 и x_2.

Следствием этой теоремы является следующее: *дифференцируемая функция* $f\colon\ \Omega\ (\subseteq X) \to Y$ *в случае связной области* Ω *является постоянной, если и только если ее производная равна нулю.*

Т е о р е м а 2. Пусть функция $f\colon\ \Omega\ (\subseteq X) \to Y$ имеет NL-производную в каждой точке $x \in \Omega$. Пусть $a, b \in \Omega$ и отрезок $[a,b]$, соединяющий точки a и b, лежит в Ω. Тогда:

$$f(b) - f(a) = \left(\int_0^1 f'((1-\theta)a + \theta b)\, d\lambda\right)(b-a),$$

где интеграл понимается в смысле Петтиса–Курцвейля–Хенстока.

Последнее равенство равносильно равенствам

$$\ell[f(b) - f(a)] = \int_0^1 \ell[f'((1-\theta)a + \theta b)(b-a)]\, d\lambda \qquad (\ell \in Y^*).$$

Т е о р е м а 3. Пусть функция $f\colon\ \Omega\ (\subseteq X) \to Y$ имеет NL-производную некоторой окрестности точки $x \in \Omega$ и пусть эта производная определена в каждой точке этой окрестности и непрерывна в точке x. Тогда производная в точке x функции f является ее производной Картана.

Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству теоремы о дифференцируемости функций многих переменных с непрерывными частными производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bartle R. G. A Modern Theory of Integration. (Graduate Studies in Mathematics, 32). — American Mathematical Society: Providence, Rhode Island. — 2001. — 458 p.
2. Gordon R. A. The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock. (Graduate Studies in Mathematics, 4.) — American Mathematical Society: Providence, Rhode Island. — 1994. — 396 p.
3. Евхута Н. А., Евхута О. Н., Забрейко П. П. Теоремы о гладкости нелинейных операторов и приближенные методы.// Доклады национальной академии наук Беларуси. — 2013. —Выпуск 57. — Номер 5. — С. 5–10.
4. Евхута Н. А., Евхута О. Н., Забрейко П. П. Свойства гладкости интегральных операторов Урысона и метод Ньютона-Канторовича.// Доклады национальной академии наук Беларуси. — 2015. — Выпуск 59. — Номер 2. — С. 23–28.
5. Евхута Н. А., Евхута О. Н., Забрейко П. П. NL - производные и NL - примитивные в дифференциальном и интегральном исчислении. // Доклады национальной академии наук Беларуси. — 2016. — Выпуск 60. — Номер 5. — С. 34–40.
6. Лукомский С. Ф. Интегральной исчисление (функции одной переменной). — Издательство Саратовского университета. — Саратов. — 2005. — 144 с.
7. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — Главная редакция физико-математической литературы. — М: Наука.— 1974. — 480 с.
8. Семенов Л. А. О некотором классе исключительных множеств.// Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. — 1976. — Ярославль. — С. 133–135.

УДК 517.9

ОСОБЕННОСТИ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г.С. Жукова, д.ф.-м.н., проф.
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
e-mail: *GSZHukova@fa.ru*

Строится асимптотика решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае кратного спектра у предельного оператора. Предложен алгоритм поиска асимптотических последовательностей разложения решений по малому параметру. Обсуждаются условия, обеспечивающие построение приближенных решений заданной точности.

Ключевые слова: малый параметр, системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, асимптотика решений по малому параметру, асимптотическая последовательность разложений, кратный спектр у предельного оператора, приближенные решения заданной точности.

1. Введение

Присутствие в дифференциальных уравнениях и системах малого параметра, необходимость изучения асимптотики решений по параметру диктуется, прежде всего, обилием реальных прикладных задач и множеством практических примеров. Такие уравнения описывают, в частности, высокочастотные колебания и неравномерные переходы от одних физических характеристик к другим. Они распространены в задачах химической и биологической кинетики, лазерной технологии, квантовой механике и роботостроении, теории гироскопов и отражательных клистронов, задачах оптимального управления, баллистики, гидродинамики, теории массового обслуживания и др.

Асимптотический анализ дифференциальных уравнений и систем, коэффициенты которых разлагаются в степенные ряды по целым степеням малого параметра, имеет развитую теорию в случае регулярной зависимости от параметра, когда разложения всех коэффициентов начинаются с нулевой степени. В регулярном случае характер зависимости решений от параметра будет аналогичен. Говоря о сингулярно возмущенных уравнениях – уравнениях, в которых коэффициент при старшей производной имеет множителем малый параметр в положительной степени – изучены отдельные классы задач. Причем обобщение предложенных алгоритмов на другие классы уравнений сопряжено с принципиальными трудностями, диктуемыми открывшимися особенностями сингулярной зависимости от параметра.

Известно, что точно решить дифференциальные уравнения удается лишь в исключительных случаях. Поэтому актуальна разработка эффективных приближенных методов интегрирования. Теория возмущений занимает одно из центральных мест среди приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Однако в задачах с малым параметром при старшей производной возникают особенности – при равенстве параметра нулю понижается порядок урав-

нения, что влечет различие фазовых траекторий исходной и вырожденной систем, существенно усложняя получение приближенных решений. Кроме того, важная черта сингулярно возмущенных задач – существование решений экспоненциального типа с чрезвычайно большим показателем изменяемости, имеющих ярко выраженный характер погранслоев, существенных только в малых окрестностях краевых закреплений, точек приложения сосредоточенных сил, мест резкого изменения геометрии конструкции. Стандартные схемы численного интегрирования такого класса дифференциальных уравнений малоэффективны.

Одна из основных трудностей при изучении сингулярно возмущенной системы (1) заключается в том, что ее решения также сингулярно зависят от малого параметра. Причем асимптотические разложения начинаются с отрицательных, изначально неизвестных степеней параметра. И идут они, в общем случае, по дробным, заранее неизвестным степеням малого параметра, что также не повторяет характер асимптотики коэффициентов уравнений. Поэтому необходим метод правильного описания сингулярной зависимости решений от параметра.

Выявленные особенности определенным образом влияет на структуру асимптотического разложения решений систем вида (1), формируют в решениях новые типы сингулярностей, которые требуют изучения и описания.

2. Обсуждение постановки задачи и полученных результатов

Рассмотрим систему из n сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^h \frac{dX}{dt} = A(t,\varepsilon)X, \tag{1}$$

где $t \in [0,T]$; ε – малый вещественный параметр, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$; h – натуральное число, называемое для (1) порядком сингулярности; $X(t,\varepsilon)$ – векторная функция.

Предполагается, что матричная функция $A(t,\varepsilon)$ непрерывна по $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ и допускают при $\varepsilon \to +0$ равномерно на $[0,\mathrm{T}]$ асимптотическое разложение

$$A(t,\varepsilon) \sim A_0(t) - \sum_{s\geq 1} \varepsilon^s A_s(t) \tag{2}$$

по последовательности $\{\varepsilon^s\colon\ s \geq 0\}$, коэффициенты которого $A_s(t)$ принадлежат $\mathbb{C}^\infty[0,T]$.

Работа ставит целью изучить структуру зависимости решений от малого параметра, указать процедуру поиска асимптотической последовательности их разложений по параметру.

Асимптотическим интегрированием частных случаем системы (1) занимались и занимаются многие авторы. Результаты исследований показали, что вид асимптотики решений диктуется, в первую очередь, поведением спектра пре-

дельного оператора $A_0(t) = A(t,0)$. Наиболее изучен случай $h = 1$ в предположении, что $A_0(t)$ имеет на $[0, \mathrm{T}]$ простое собственное значение $\mu_0(t)$. В такой ситуации у задачи (1) соответствующее фундаментальное решение

$$X(t,\varepsilon) = \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \mu(t,\varepsilon)dt)\right)V(t,\varepsilon) \qquad (3)$$

имеет асимптотическое разложение вида

$$\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\left(\mu_0(\tau)+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\,\mu_s(\tau)\right)d\tau\right)\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\,V_s(t). \qquad (4)$$

Здесь $V_0(t) \not\equiv 0;\ \mu_s(t), V_s(t)\ (s \geq 0)$ – скалярные и векторные функции соответственно. Оказалось, что фигурирующая в (3) векторная функция $V(t,\varepsilon)$ имеет разложение, аналогичное (2) – по асимптотической последовательности $\{\varepsilon^s,\ s \geq 0\}$. Разложение скалярной функции $\mu(t,\varepsilon)$ в показателе степени экспоненты тоже идет по целым степеням параметра ε, как и в (2), но начинается с отрицательной степени малого параметра, равной числу $(-h)$, то есть взятому с противоположным знаком порядку сингулярности изучаемого уравнения (1). Поэтому решение вида (4) имеет сингулярную зависимость от малого параметра ε с порядком сингулярности, равным числу $(-h)$ или большим его, если $\mu_0(t) \equiv 0$.

Изучим случай, когда в векторном сингулярно возмущенном дифференциальном уравнении (1) предельный оператор $A_0(t)$ имеет тождественно кратное собственное значение $\lambda_0(t)$ постоянной на $[0,T]$ алгебраической и геометрической кратности.

Без ограничения общности будем считать $\lambda_0(t)$ единственным собственным значением оператора $A_0(t)$. Действительно, в противном случае, когда $A_0(t)$ имеет несколько изолированных собственных значений и $\lambda_0(t)$ – одно из них, с постоянными по t алгебраической и геометрической кратностями, можно предварительно применить метод асимптотического расщепления и, используя преобразующий оператор [20, 21], получить уравнение вида (1), где предельный оператор будет обладать указанным в предположении свойством.

Оказалось, что наличие в уравнении (1) у предельного оператора $A_0(t)$ тождественно кратного собственного значение $\lambda_0(t)$ существенно усложняет ситуацию, делает ее более разнообразной, вносит качественные изменения в поведение решений и структуру асимптотики (4), что продиктовано возникающими в задаче внутренними резонансами.

В первую очередь, становится неоднозначным выбор асимптотической последовательности разложения решений. Применение в рассматриваемом случае метода асимптотического расщепления не решает проблемы до конца, как это имело место при простом спектре у оператора $A_0(t)$, а лишь позволяет свести задачу к интегрированию аналогичной системы вида (1) меньшей размерности,

у предельного оператора которой это собственное значение $\lambda_0(t)$ является единственным и тождественно кратным.

Случай, когда в векторном дифференциальном уравнении (1) предельный оператор $A_0(t)$ имеет тождественно кратное собственное значение $\lambda_0(t)$ постоянной на $[0,T]$ алгебраической и геометрической кратности, изучался для ряда конкретных видов системы (1). Некоторые особенности такого случая указаны в работах [1–25]. Основной, на наш взгляд, особенностью оказалось то, что разложение решений идут по дробным степеням параметра ε, что первым, по-видимому, заметил на конкретном примере Я.Д. Тамаркин [7–9].

Как показали наши исследования, в общем случае асимптотическая последовательность разложения решений системы (1) не поддается исчерпывающему описанию только в терминах спектра предельного оператора $A_0(t)$. Сингулярная зависимость решений от параметра не столь проста, как разложения по степенным асимптотическим последовательностям вида

$$\{\varepsilon^s \ \ (s \geq 0)\} \ \ \text{или} \ \ \{\varepsilon^{s/r},\ r \in \mathbb{N} \ \ (s \geq 0)\}.$$

В итоге, если $A_0(t)$ имеет тождественное кратное собственное значение $\lambda_0(t)$, то в формуле (3) векторная функция $V(t,\varepsilon)$ и скалярная функция $\mu(t,\varepsilon)$ разлагаются по некоторым асимптотическим последовательностям вида

$$\{\varepsilon^{k_s}: \ \ k_s \in \mathbb{Q}, \ \ \ k_0 < k_1 < \cdots \ \ (s \geq 0)\} \qquad (5)$$

с дробными возрастающими степеням k_s .

В общем случае, если $\lambda_0(t)$ является тождественно m-кратным собственным значением предельного оператора $A_0(t)$, то соответствующие m фундаментальные решения системы (1) разлагаются не по целым степеням малого параметра (что имеет место в формуле (2)), а по асимптотическим последовательностям вида (5).

Вместо формулы (4) асимптотика этих соответствующих фундаментальных решений системы (1) имеет вид:

$$\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\left(\lambda_0(\tau)+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^{k_{is}}\lambda_{is}(\tau)\right)d\tau\right)\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^{k_{is}}V_{is}(t), 1 \leq i \leq m. \qquad (6)$$

Здесь $\lambda_{is}(t)$, $V_{is}(t)$ (s ≥ 0) – скалярные и векторные функции соответственно, k_{is}– несократимые рациональные дроби ($0 = k_{i0} < k_{i1} < \cdots$).

При этом, как и в (4), решения вида (6) сингулярно зависят от малого параметра; их порядки сингулярности равны числу $(-h)$, или больше его, если $\lambda_0(t) \equiv 0$.

Таким образом, основная проблема при интегрировании новых классов сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и систем вида (1) переместилась в задачу правильного выбора асимптотической последовательности (5), по которой следует вести разложение решений. Только после этого бу-

дет возможно использование для анализа задачи богатого арсенала методов асимптотического анализа.

Сложность выявленной проблемы объясняется тем, что в (6) разложения начинаются с отрицательных, изначально неизвестных степеней параметра, и идут они, в общем случае, по дробным, заранее неизвестным степеням малого параметра. Поэтому необходим метод правильного описания сингулярной зависимости решений от параметра. В общем случае на роль асимптотической последовательности разложения решений может претендовать, в принципе, любая вида (5).

Как оказалось, на значения k_s влияют многие факторы. В работе предложен конструктивный критерий определения чисел k_s $(s \geq 0)$ по исходным данным задачи, базирующийся на построении для (1) по исходным данным задачи некоторого вспомогательного скалярного дифференциального уравнения вида

$$\mu^n + \sum_{\nu \geq m} \varepsilon^\nu l_{0\nu}(t) + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \sum_{s \geq 1} \mu^s l_{s\nu}(t) = 0. \qquad (7)$$

Задача свелась к нахождению все малых решений уравнения (7), для чего был использован метода диаграмм, обоснованный в [7-9]. Основным аппаратом при разработке темы явились методы теории операторов в функциональных пространствах, методы теории возмущений, техника работы с асимптотическими разложениями.

Доказано, что в общем случае дифференциальное уравнение (1) при отсутствии точек поворота имеет формальные решения вида (3), где

$$\varepsilon^{-h}\mu(t,\varepsilon) = \varepsilon^{k_0}\lambda_0(t) + \cdots + \varepsilon^{k_{i_0-1}}\mu_{i_0-1}(t) + \varepsilon^{k_{i_0}} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{s}{\widehat{k}_{i_0}}} \mu_{i_0+s}(t), \qquad (8)$$

k_i, $\mu_i(t)$ $(1 \leq i \leq i_0)$ – соответственно, коэффициент наклона и корень определяющего уравнения некоторого звена $(i+1)$-й диаграммы уравнения (7). Число $\widehat{k}_{i_0}$ – знаменатель в записи рационального числа k_{i_0} как несократимой дроби. При этом $\lambda_0(t)$, $\mu_i(t)$ $(1 \leq i \leq i_0 - 1)$ – тождественно кратные корни, $\mu_{i_0}(t)$ – простой корень соответствующего определяющего уравнения звена $i_0 -$ й диаграммы уравнения (7). Аналогичное разложение имеет векторная функция $V(t,\varepsilon)$ из формулы (3).

Шаг i_0, на котором произойдет «стабилизация» асимптотической последовательности (5), по которой идет разложение решения, конечен. Причем $k_{i_0} < 0$ или $k_{i_0} \geq 0$, но $k_{i_0-1} < 0$.

Применяя традиционную схему (см., например, [1, 3, 6, 13, 20–22]), нетрудно показать, что построенные формальные решения системы (1) при естественных дополнительных условиях имеют асимптотический характер и явля-

ются равномерно на [0,T] асимптотическими представлениями при $\varepsilon \to +0$ для некоторых точных фундаментальных решений системы (1).

Обратим внимание, что при построении формальных решений системы (1) существенно использовалось требование бесконечной дифференцируемости по t ее коэффициентов. Однако для построения приближенных решений заданной точности достаточно знания конечного числа первых членов в разложении (2) и конечного числа их производных.

Поэтому, анализируя полученные расчетные формулы, по которым вычисляются коэффициенты разложения (6), можно установить минимальную гладкость функций $A_s(t)$ $(s \geq 0)$, достаточную для построения приближенных решений заданной точности.

Так, например, при вычислении коэффициентов λ_{is}, $V_{is}(t)$ из формулы (6) участвуют функции:

$$A_j^{(k)}(t), \qquad j \leq [(s+n)/n], k \leq \alpha_{js}, \qquad \text{где } \alpha_{js} = [(s-jn+n)/(nh-1)].$$

Поэтому для построения непрерывно дифференцируемого q −приближения к фундаментальной системе решений уравнения (1) достаточно знания первых $q+2-[2/n]$ членов разложения (2) и выполнения следующих условий их гладкости:

$$A_j \in \mathbb{C}^{\alpha_j}([0,T];\mathbb{R}^n), \qquad j = \overline{1, q+2-[2/n]},$$

где

$$\alpha_j = [(n(q+2)-2-jn)/(nh-1)] + 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. Букжалёв Е.Е. Об одном способе исследования задачи Коши для сингулярно возмущенного линейного однородного дифференциального уравнения произвольного порядка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2018. – № 2. –С. 3–12.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высшая школа. – 1990. – 208 с.
4. Григоренко В.К. Асимптотическое представление решений линейного дифференциального уравнения в случае кратных корней характеристического уравнения // Украинский математический журнал. –1977. – Т. 29. – № 2. – С. 249–254.
5. Дмитриев М.Г., Жукова Г.С., Петров А.П. Асимптотический анализ модели "власть-общество" для случая двух устойчивых распределений власти // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16. – № 5. – С. 23–34.

6. Елисеев А.Г. Теория сингулярных возмущений для систем дифференциальных уравнений в случае кратного спектра предельного оператора. I-П // Известия Академии наук СССР, серия мат. – 1984. – Т. 48. – № 5. – С. 999–1041.
7. Жукова Г.С. Асимптотика решений линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Доклады Академии наук Украинской ССР. Серия А: Физико-математические и технические науки. – 1987. – № 12. – С. 7–12.
8. Жукова Г.С. Аналог метода диаграммы Ньютона для одного класса сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. I // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 10. – С. 1670-1684.
9. Жукова Г.С. Аналог метода диаграммы Ньютона для одного класса сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. II // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 9. – С. 1500–1509.
10. Жукова Г.С. Асимптотическое решение сингулярно возмущенных дифференциальных систем с вырождением // Системные технологии. – 2018. – № 2 (27). – С. 81–86.
11. Жукова Г.С. Структура асимптотики решений одного класса сингулярно возмущенных систем // Научно-технический вестник Поволжья. –2019. – № 4. – С. 15–18.
12. Жукова Г.С. Асимптотический анализ краевых задач // Системные технологии. – 2020. – № 1 (34). – С. 146–154.
13. Коняев Ю.А. Асимптотические и аналитические методы решения некоторых классов прикладных модельных задач. – М.: Изд-во РУДН. – 2005. – 160 с.
14. Кузьмина Р.П. Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Изд. 2-е, доп. – М.: Изд-во Ин-та компьютерных исследований. – 2015. – 328 с.
15. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука. – 1981. – 398 с.
16. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука. – 1981. – 400 с.
17. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во URSS. – 2017. – 552 с.
18. Орлик Л.К., Жукова Г.С. Операторные уравнения и смежные вопросы устойчивости дифференциальных уравнений: монография. – Москва: ИНФРА-М. – 2020. – 296 с.
19. Тамаркин Л.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград: Тип. М.П. Фроловой. – 1917. – 308 с.

20. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – 2-е изд. – М.: Изд-во Либроком. – 2009. – 352 с.
21. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – Киев: Наукова думка. – 1966. – 249 с.
22. Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Выща школа. – 1989. – 287 с.
23. Щитов И.Н. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Физматлит. – 2013. – 172 с.
24. Zhukova G. Asymptotic methods for solving boundary value eigenvalue problems // E3S Web of Conferences.Topical Problems of Green Architecture, Civil and Environmental Engineering, TPACEE 2019. – 2020. –C. 09022.
25. Farid Khwaja S., Olde Daalhuis A. B. Computation of the coefficients appearing in the uniform asymptotic expansions of integrals // Studies in Applied Mathematics. – 2017. – 139. – № 4. – P. 551–556.

УДК 517.968.22

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А.Н. Зарубин, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева»
e-mail: *aleks_zarubin@mail.ru*

Исследуется задача типа Коши для уравнения дробного порядка с запаздывающим и опережающим аргументом в классе непрерывных по Гельдеру функций.

Ключевые слова: функциональное уравнение, дифференциально-разностное уравнение, сосредоточенное отклонение.

1. Введение

В приложениях часто возникает необходимость решать аналоги задачи Коши для дифференциально-разностных уравнений дробного порядка, в постановке которых требуется учитывать их специфику.

Предлагаемая работа изучает дифференциально-разностное уравнение дробного порядка α, $0<\alpha<1$, с некарлемановскими сосредоточенными сдвигами опережающе-запаздывающего типа вида

$$D_0^{\alpha} y(x) = \sum_{k=-1}^{1} a_{k+1} y(x - k\tau),\ 0 < x < 3\tau,\ 0 < \alpha < 1, \qquad (1)$$

при начальных условиях

$$y(x) = r(x), -\tau \le x \le 0, \quad (2)$$

$$y(x) = \rho(x), 3\tau \le x \le 4\tau, \quad (3)$$

$$D_0^{\alpha-1} y(x)\Big|_{x=j\tau} = b_j \, (j = 0,1,2), \quad (4)$$

где $r(x), \rho(x), \alpha, b_0, b_1, b_2$ - заданные функции и постоянные величины, причем

$$D_0^{\alpha} y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \text{ - } \quad (5)$$

дробная производная [1, с.43] порядка α, $0 < \alpha < 1$, Римана-Лиувилля;
$\Gamma(\beta)$ - гамма-функция [2, с.8].

2. Однозначная разрешимость

Задача К. Найти на промежутке $0 < x < 3\tau$ решение $y(x)$, уравнения (1) из класса $H_{\alpha}(0 < \alpha < 1)$, удовлетворяющее условиям последействия (2), преддействия (3) и начальным условиям (4), условию согласования $r(0) = D_0^{\alpha-1} y(0)$, где $r(x), \rho(x), \alpha, b_0, b_1, b_2$ - заданные непрерывные достаточно гладкие функции и постоянные величины.

Теорема 1. Пусть функции $r(x), \rho(x) \in H_{\alpha}$ и $a_0 = a_2$, $a_1 > \sqrt{2}a_0 > 0$. Тогда решение задачи К (1)-(4) в области $0 < x < 3\tau$ существует, непрерывно и единственно.

Доказательство.

Произведем редукцию опережающе-запаздывающего уравнения дробного порядка (1) к системе трех уравнений дробного порядка без отклонений аргумента x.

Вводя вектор

$$\overline{y}(x) = (y_0(x), y_1(x+\tau), y_2(x+2\tau))^T, x \in (0,\tau), \quad (6)$$

где

$$y_k(x) = y(x), x \in (k\tau, (k+1)\tau)(k = 0,1,2), \quad (7)$$

уравнение (1) представим с учетом (2), (3), в форме системы трёх уравнений относительно функций $y_k(x), x \in (k\tau, (k+1)\tau)(k = 0,1,2)$ и приведем в них замену x на $x + k\tau(k = 0,1,2)$:

$$D_0^{\alpha} \overline{y}(x) = \mathrm{A}\overline{y}(x) + \overline{m}(x), x \in (0,\tau), \quad (8)$$

где

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \ \overline{m}(x) = (m_0(x), m_1(x), m_2(x))^T \equiv (a_2 r(x-\tau), 0, a_0 \rho(x+3\tau))^T.$$

При $a_0 = a_2$, $a_1 > \sqrt{2}a_0 >$ о матрица А является симметрической, причем

$$\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{T}_{\mathrm{A}}=\Lambda_{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix}\gamma_0 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_1 & 0\\ 0 & 0 & \gamma_2\end{pmatrix},\ \mathrm{T}_{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\overline{P_0}\\ \overline{P_1}\\ \overline{P_2}\end{pmatrix}, \tag{9}$$

$\gamma_j=a_1-(-1)^j j\sqrt{2}a_0 2^{1-j}$ $(j=0,1,2)$ - её собственные значения.

Умножая слева матричное уравнение (8) на $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{-1}$ из (9), учитывая $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{A}=\Lambda_{\mathrm{A}}\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{-1}$, после преобразований получим три отдельных уравнений дробного порядка без отклонений аргумента:

$$D_0^{\alpha}q_j(x)=\lambda_j q_j(x)+h_j(x),0<x<\tau(j=0,1,2), \tag{10}$$

где

$$q_j(x)=<\overline{P_j},\overline{y}(x)>,h_j(x)=<\overline{P_j},\overline{m}(x)>- \tag{11}$$

скалярные произведения векторов, а

$$D_0^{\alpha-1}q_j(x)\big|_{x=0}=C_j(j=0,1,2)- \tag{12}$$

начальное условие, причем

$$C_j=<\overline{P_j},\overline{b}>,\overline{b}=(b_0,b_1,b_2)^{\mathrm{T}}.$$

Множество решений $q_j(x),x\in(0,\tau)(j=0,1,2)$ трёх неоднородных уравнений дробного порядка (10) содержит все решения $y(x)=y_j(x),x\in(j\tau,(j+1)\tau)(j=0,1,2)$ опережающе-запаздывающего уравнения дробного порядка (1), которые, в силу (6), (7), (9), можно выделить из (11) в виде

$$\overline{y}(x)=\mathrm{T}_{\mathrm{A}}\begin{pmatrix}q_0(x)\\ q_1(x)\\ q_2(x)\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Таким образом, поставленная задача K для опережающе-запаздывающего уравнения дробного порядка (1) в промежутке $0<x<3\tau$ относительно искомой функции $y(x)$ редуцирована к трём задачам Коши для трёх уравнений дробного порядка (10) без отклонений в промежутке $0<x<\tau$ относительно функций $q_j(x)$ $(j=0,1,2)$ вида (11).

Задача K_j**.** Найти на промежутке $0<x<\tau$ решение $q_j(x)\in H_\alpha$ уравнения (10), $h_j(x)\in H_\alpha$, удовлетворяющее начальному условию (12).

Лемма 1. Пусть функция $h_j(x) \in H_\alpha (j = 0,1,2)$. Тогда решение задачи K_j (10), (11) при $0 < x < \tau$ существует, непрерывно и единственно.

Доказательство леммы производится аналогично [1, с.597-602]. Искомое решение $q_j(x)$ задачи K_j для уравнения (10) при начальном условии (12) имеет вид

$$q_j(x) = C_j x^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(\lambda_j x^\alpha) + \int_0^x h_j(t)(x-t)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(\lambda_j (x-t)^\alpha) dt, 0 < x < \tau (j = 0,1,2), \tag{14}$$

где $\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(z)$ - функция [1, с.33] Миттаг-Леффлера.

Решение $q_j(x), 0 < x < \tau$ (14) задачи K_j, в совокупности с (13), дает решение $y(x)$, $0 < x < 3\tau$ задачи K.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника. – 1987. – 688 с.
2. Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа. – 1962. – 248 с.

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

А.Н. Зарубин, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева»
e-mail: *aleks_zarubin@mail.ru*

Исследуется начально-краевая задача Трикоми для нелокального уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе. Задача однозначно разрешима.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, дифференциально-разностное уравнение, сосредоточенное запаздывание и опережение.

1. Введение

Уравнения в частных производных с сосредоточенным или функциональным карлемановским или некарлемановским запаздыванием и опережением по временной и (или) пространственной переменным служат математическими моделями для многих прикладных задач (вихреобразование, перемежаемость, формирование сложных когерентных пятен [1]; многослойные оболочки и пластины [2]; плазма [3]; колебания кристаллической решётки [4]).

Данная работа посвящена методу исследования краевой задачи Трикоми для нелокального уравнения смешанного типа Лаврентьева – Бицадзе с сосре-

доточенным запаздыванием и опережением по пространственной и временной переменным вида

$$b_0H(y-h)U_{xx}(x,y-h)+b_1U_{xx}(x,y)+b_2H(y)U_{xx}(x,y+h)+$$
$$+(\operatorname{sgn} y)\sum_{n=-n_1}^{n_2}a_{n+n_1}U_{yy}(x-n\tau,y)=0 \qquad (1)$$

в области $D=D^+\cup D^-\cup I$, где

$$D^+=\{(x,y):0<x<(n_2+1)\tau,0<y<2h\}=\bigcup_{k=0}^{n_2}(\bigcup_{j=0}^{1}D_{kj}^+)$$

и $D^-=\bigcup_{k=0}^{n_2}D_{k0}^-=\bigcup_{k=0}^{n_2}(\bigcup_{j=0}^{n_2}D_{k0}^{\gamma_j})$- эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_{kj}^+=\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,\ jh<y<(j+1)h\}(k=\overline{-n_1,n_2+1};j=0,1);$$

$$D_{k0}^{\gamma_j}=\{(x,y):-y\sqrt{b_1}+k\tau\gamma_j<x\gamma_j<y\sqrt{b_1}+(k+1)\tau\gamma_j,-\gamma_j\tau/2\sqrt{b_1}<y<0\}$$

$(k=\overline{-n_1,n_2+1},)$; γ_j^2 – собственные значения матрицы коэффициентов a_{n+n_1}; $I=\bigcup_{k=0}^{n_2}I_k, I_k=\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,y=0\}$; $H(\xi)$ – функция Хевисайда;

$n_1,n_2\in N;0<\tau,h,a_{n+n_1},b_m(m=0,1,2)\equiv const.$

Пусть

$$D_k=D_{k0}^-\bigcup_{j=0}^{1}D_{kj}^+\cup I_k(k=\overline{-n_1,n_2+1})$$

и

$$J=\bigcup_{k=0}^{n_2-1}J_k, J_k=\{(x,y):x=(k+1)\tau,0<y<2h\}.$$

Тогда $D=\bigcup_{k=0}^{n_2}D_k\bigcup_{j=0}^{n_2-1}J_j$.

2. Постановка задачи. Редукция

Без ограничения общности и для наглядности рассмотрим уравнение (1) при $n_1=n_2=1,$ то есть

$$b_0H(y-h)U_{xx}(x,y-h)+b_1U_{xx}(x,y)+b_2H(y)U_{xx}(x,y+h)+$$
$$+(\operatorname{sgn} y)\left[a_0U_{yy}(x+\tau,y)+a_1U_{yy}(x,y)+a_2U_{yy}(x-\tau,y)\right]=0, \qquad (2)$$

$(x,y)\in D=D_0\cup D_1\cup J_0.$

Задача Т. Найти в области $D=D_0\cup D_1\cup J_0$ решение $U(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D\setminus(J_0\cup I))$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$U(x,y)=r(x,y),(x,y)\in\overline{D}_{-1}; \qquad (3)$$

$$U(x,y)=\rho(x,y),(x,y)\in\overline{D}_2; \tag{4}$$

$$U(x,y)=\delta(x,y),(x,y)\in\overline{D_{02}^{+}\cup D_{12}^{+}}; \tag{5}$$

$$U(x,\gamma_j(k\tau-x)/\sqrt{b_1})=\Psi_{kj}(x),k\tau\le x\le(2k+1)\tau/2(j,k=0,1); \tag{6}$$

условиям сопряжения

$$U(x,0-)=U(x,0+)=\omega(x),0\le x\le 2\tau, \tag{7}$$

$$U_y(x,0-)=U_y(x,0+)=\nu(x),0<x<2\tau,x\ne\tau, \tag{8}$$

условиям согласования

$$r(0,0)=\Psi_{0j}(0);r(0,2h)=\delta(0,2h);\rho(2\tau,2h)=\delta(2\tau,2h); \tag{9}$$

$r(0,y)=\rho(2\tau,y),0<y<2h,$ а $\gamma_j=\sqrt{a_1+(-1)^j a_0}\,(j=0,1);$

где $r(x,y),\delta(x,y),\rho(x,y),\Psi_{kj}(x)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции; $\omega(x),\nu(x)$ – функции из (7),(8), подлежащие определению в процессе решения задачи.

Теорема 1. Если $r(x,y)\in C(\overline{D}_{-1})\cap C^4(D_{-1});\rho(x,y)\in C(\overline{D}_2)\cap C^4(D_2),$

$\delta(x,y)\in C(\overline{D_{02}^{+}\cup D_{12}^{+}})\cap C^4(D_{02}^{+}\cup D_{12}^{+});$

$\Psi_{kj}(x)\in C[k\tau,(2k+1)\tau/2]\cap C^2(k\tau,(2k+1)\tau/2)$

$(k,j=0,1);\ a_0=a_2;a_1>a_0>0;b_0=b_2;b_1>b_0>0;$

$r(o,y)=\rho(2\tau,y),0<y<2h;\Psi_{oj}(0)=r(0,0);r(0,2h)=\delta(0,2h);$

$\rho(2\tau,2h)=\delta(2\tau,2h),$ то существует единственное решение задачи Т.

Доказательство.

В терминах функций

$$U_k(x,y)=U(x,y),(x,y)\in D_k\,(k=\overline{-1,2}) \tag{10}$$

опережающе-запаздывающее уравнение смешанного типа (2) представим, с учетом (3),(4), в форме системы двух уравнений, каждое из которых определено соответственно в областях D_0 и D_1, причем во втором уравнении произведем замену x на $x+\tau$:

$$b_0H(y-h)\begin{pmatrix}U_0(x,y-h)\\U_1(x+\tau,y-h)\end{pmatrix}_{xx}+b_1\begin{pmatrix}U_0(x,y)\\U_1(x+\tau,y)\end{pmatrix}_{xx}+b_2H(y)\begin{pmatrix}U_0(x,y+h)\\U_1(x+\tau,y+h)\end{pmatrix}_{xx}+$$

$$+(\operatorname{sgn}y)A\begin{pmatrix}U_0(x,y)\\U_1(x+\tau,y)\end{pmatrix}_{yy}=-(\operatorname{sgn}y)\begin{pmatrix}a_2r(x-\tau,y)\\a_0\rho(x+2\tau,y)\end{pmatrix}_{yy},(x,y)\in D_0, \tag{11}$$

где $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_0\\ a_2 & a_1\end{pmatrix}.$

При $a_0 = a_2; a_1 > a_0 > 0,$ матрица A является симметрической, причем

$$T^{-1}AT = \Lambda_A = \begin{pmatrix} \gamma_0^2 & 0 \\ 0 & \gamma_1^2 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{2}T,$$

а $\gamma_j^2 (j = 0,1)$ – ее собственные значения.

Умножая слева матричное уравнение (11) на $T^{-1},$ полагая $T^{-1}A = \Lambda_A T^{-1},$ после преобразований получим два отдельных опережающе-запаздывающих только по переменной y уравнений смешанного типа

$$\begin{aligned} & b_0 H(y-h)(U_0(x, y-h) + (-1)^j U_1(x+\tau, y-h))_{xx} + \\ & + b_1 (U_0(x,y) + (-1)^j U_1(x+\tau, y))_{xx} + \\ & + b_2 H(y)(U_0(x, y+h) + (-1)^j U_1(x+\tau, y+h))_{xx} + \\ & + \gamma_j^2 (\operatorname{sgn} y)(U_0(x,y) + (-1)^j U_1(x+\tau, y))_{yy} = \\ & = -a_0 (\operatorname{sgn} y)(r(x-\tau, y) + (-1)^j \rho(x+2\tau, y))_{yy}, (x,y) \in D_0 (j = 0,1). \end{aligned} \tag{12}$$

В терминах функций (10) и

$$U_{kj}(x,y) = U_k(x,y) = U(x,y), (x,y) \in D_{kj}^{\pm} (k, j = 0,1) \tag{13}$$

каждое уравнение из (12) представим, с учетом (5) , в форме систем двух уравнений смешанного типа, в которых первые и вторые уравнения определим соответственно в областях $D_{00} = D_{00}^- \cup D_{00}^+ \cup I_0$ и $D_{01} = D_{01}^+$ и во вторых уравнениях систем сделаем замену y на $y + h$:

$$\begin{aligned} & B \begin{pmatrix} U_{00}(x,y) + (-1)^j U_{10}(x+\tau, y) \\ H(y)[U_{01}(x, y+h) + (-1)^j U_{11}(x+\tau, y+h)] \end{pmatrix}_{xx} + \\ & + \gamma_j^2 (\operatorname{sgn} y) \begin{pmatrix} U_{00}(x,y) + (-1)^j U_{10}(x+\tau, y) \\ H(y)[U_{01}(x, y+h) + (-1)^j U_{11}(x+\tau, y+h)] \end{pmatrix}_{yy} = \\ & = -a_0 (\operatorname{sgn} y) \begin{pmatrix} r(x-\tau, y) + (-1)^j \rho(x+2\tau, y) \\ H(y)[r(x-\tau, y+h) + (-1)^j \rho(x+2\tau, y+h)] \end{pmatrix}_{yy} - \\ & - b_2 H(y+h) \begin{pmatrix} 0 \\ H(y)[\delta(x, y+2h) + (-1)^j \delta(x+\tau, y+2h)] \end{pmatrix}_{xx}, \end{aligned} \tag{14}$$

$(x,y) \in D_{00} = D_{00}^+ \cup D_{00}^- \cup I_0,$ где $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 H(y) \\ b_0 H(y) & b_1 \end{pmatrix},$ а $j = 0,1.$

При $b_0 = b_2; b_1 > b_0 > 0,$ матрица B является симметрической и коммутативной матрице $A,$ причем $T^{-1}BT = \Lambda_B = \begin{pmatrix} \alpha_0^2 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 \end{pmatrix},$ а $\alpha_k^2 = b_1 + (-1)^k b_0 H(y),$ $(k = 0,1),$ собственные значения матрицы $B.$

Умножая слева матричное уравнение (14) на T^{-1}, полагая $T^{-1}B = \Lambda_B T^{-1}$, после преобразований получим четыре отдельных уравнений смешанного типа без отклонений аргументов:

$$Q_{jk}^2 q_{jkxx}(x,y) + (\operatorname{sgn} y) q_{jkyy}(x,y) = \frac{1}{\gamma_j^2} m_{jk}(x,y)(j,k=0,1), \tag{15}$$

$$(x,y) \in D_{00} = D_{00}^- \cup D_{00}^+ \cup I_0,$$

где

$$\begin{aligned} q_{jk}(x,y) &= \frac{1}{4}[(U_{00}(x,y) + (-1)^j U_{10}(x+\tau,y)) + \\ &+ (-1)^k H(y)(U_{01}(x,y+h) + (-1)^j U_{11}(x+\tau,y+h))], \\ m_{jk}(x,y) &= -a_0(\operatorname{sgn} y) f_{jk}(x,y) - b_0 H(y+h) g_{jk}(x,y); \end{aligned} \tag{16}$$

причем

$$f_{jk}(x,y) = \frac{1}{4}\left[(r(x-\tau,y) + (-1)^j \rho(x+2\tau,y)) + (-1)^k H(y)(r(x-\tau,y+h) + (-1)^j \rho(x+2\tau,y+h))\right]_{yy};$$

$$q_{jk}(x,y) = \frac{1}{4}(-1)^k H(y)\left[(\delta(x,y+2h) + (-1)^j \delta(x+\tau,y+2h))\right]_{xx};$$

а $Q_{jk}^2 = \alpha_k^2 / \gamma_j^2 (j,k=0,1)$.

Множество решений четырех неоднородных уравнений смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе (15) содержит все решения опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2), которые можно выделить, в силу (16), (10), используя соотношение

$$\begin{aligned} U(x,y) = U_{jk}(x,y) &= q_{00}(x - j\tau, y - kh) + (-1)^j q_{10}(x - j\tau, y - kh) + \\ &+ (-1)^k H(y - kh)(q_{01}(x - j\tau, y - kh) + (-1)^j q_{11}(x - j\tau, y - kh)), \\ &(x,y) \in D_{jk}^{\pm}, (j,k = 0,1). \end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, поставленная задача Т для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ относительно искомой функции $U(x,y)$ редуцирована к четырем задачам Трикоми для четырех уравнений смешанного типа (15) без отклонений в области $D_{00} = D_{00}^+ \cup D_{00}^- \cup I_0$ относительно функций $q_{jk}(x,y)(j,k=0,1)$ вида (16).

Задача $\mathbf{T_{jk}}$. Найти в области $D_{00} = D_{00}^+ \cup D_{00}^- \cup I_0$ решение $q_{jk}(x,y) \in C(\overline{D}_{00}) \cap C^2(D_{00} \setminus I_0)$ уравнения (15)-(16), удовлетворяющее условиям

$$q_{jk}(0,y)=q_{jk}(\tau,y)=\bar{r}_{jk}(y)\equiv\frac{1}{4}[(r(0,y)+(-1)^j\rho(2\tau,y))+$$
$$+(-1)^k(r(0,y+h)+(-1)^j\rho(2\tau,y+h))],0\le y\le h; \quad (18)$$

$$q_{jk}(x,h)=\bar{\delta}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{4}[(\delta(x,h)+(-1)^j\delta(x+\tau,h))+$$
$$+(-1)^k(\delta(x,2h)+(-1)^j\delta(x+\tau,2h))],0\le x\le\tau; \quad (19)$$

$$q_{jk}(x,-x/Q_{jk})=\overline{\Psi}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{4}(\Psi_{0j}(x)+(-1)^j\Psi_{1j}(x+\tau)),0\le x\le\tau/2; \quad (20)$$

условиям сопряжения

$$q_{jk}(x,0-)=q_{jk}(x,0+)=\bar{\omega}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{4}(\omega(x)+(-1)^j\omega(x+\tau)),0\le x\le\tau; \quad (21)$$

$$q_{jky}(x,0-)=q_{jky}(x,0+)=\bar{\nu}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{4}(\nu(x)+(-1)^j\nu(x+\tau)),0<x<\tau; \quad (22)$$

причем, согласно (9), $\bar{r}_{jk}(0)=\overline{\Psi}_{jk}(0);\bar{r}_{jk}(h)=\bar{\delta}_{jk}(0);\bar{r}_{jk}(h)=\bar{\delta}_{jk}(\tau)$,
где $\bar{r}_{jk}(y),\overline{\Psi}_{jk}(x),\bar{\delta}_{jk}(x)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции; $\bar{\omega}_{jk}(x),\bar{\nu}_{jk}(x)$ – функции, подлежащие определению в процессе решения задачи T_{jk}.

Здесь и далее $j,k=0,1$.

3. Однозначная разрешимость задачи Т.

Единственность решения задачи T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D=D^+\cup D^-\cup I$ следует из того, что однородная задача Т имеет тривиальное решение $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$ в смысле её эквивалентности, согласно (16),(17), тривиальному решению $q_{jk}(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}_{00}=D_{00}^+\cup D_{00}^-\cup I_0$ однородной задаче T_{jk} для однородного уравнения (15) при однородных условиях (18)-(20).

Доказательство этого факта основано на установлении знакоопределенности интеграла

$$\beta_{jk}=\int_0^\tau\bar{\omega}_{jk}(x)\bar{\nu}_{jk}(x)dx.$$

Лемма 1. Если $q_{jk}(x,y)$ – решение однородного уравнения (15) в области $\overline{D}_{00}^+$ из класса $C(\overline{D}_{00}^+)\cap C^2(D_{00}^+)$, обращающееся в нуль при $x=0,x=\tau(0\le y\le h)$ и $y=h(0\le x\le\tau)$, то

$$\beta_{jk}\le 0 \quad (23)$$

и

$$\beta_{jk} + \iint\limits_{D_{00}^{+}} [Q_{jk}^2 q_{jkx}^2(x,y) + q_{jky}^2(x,y)]dxdy = 0. \qquad (24)$$

Лемма 2. Если $q_{jk}(x,y) \in C(\overline{D}_{00}^{-}) \cap C^2(D_{00}^{-}) -$ решение однородного уравнения (15) в области D_{00}^{-}, обращающееся в нуль на характеристике $x = -Q_{jk}y (0 \le x \le \tau/2)$, то

$$\beta_{jk} \ge 0. \qquad (25)$$

Доказательство лемм 1,2 можно провести аналогично [5],[6].

Из неравенств (23),(25) следует $\beta_{jk} = 0$, а потому из равенства (24) получим положительно определенную форму равную нулю и, значит, $q_{jkx}(x,y) \equiv 0$, $q_{jky}(x,y) \equiv 0$, т.е $q_{jk}(x,y) \equiv const$ в D_{00}^{+}. Однородность граничных условий в D_{00}^{+} и $q_{jk}(x,y) \in C(\overline{D}_{00}^{+})$ позволяют утверждать, что $q_{jk}(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_{00}^{+}$ и, в частности, $q_{jk}(x,0) = 0$, $0 \le x \le \tau$. Последнее равенство в совокупности с однородным условием (20) обеспечивает тривиальность решений $q_{jk}(x,y) \equiv 0$ первой задачи Дарбу в $\overline{D}_{00}^{-}$.

Из полученной тривиальности решений $q_{jk}(x,y)$ в $\overline{D}_{00}^{+}$ и $\overline{D}_{00}^{-}$ следует тривиальность $q_{jk}(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_{00}$. Таким образом, единственность решения задачи T_{jk} для уравнения (15) и граничных условий (18)-(20) в области $\overline{D}_{00}$ доказана.

Тривиальность решения однородной задачи T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) и однородных граничных условий (3)-(6) в области $\overline{D}$ следует из $q_{jk}(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_{00}$ и равенств (17),(13): $U(x,y) = U_{jk}(x,y) \equiv 0, (x,y) \in \overline{D}_{jk}$. Это означает единственность решения задачи T для уравнения (2) при граничных условиях (3)-(6) в области $\overline{D}$.

Доказательство существования решения $U(x,y)$ задачи T в области $\overline{D}$ для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) основано на решениях задач T_{jk} $(j,k = 0,1)$ в области эллиптичности D_{00}^{+} и гиперболичности D_{00}^{-} для уравнения (15).

Задача Неймана – Дирихле. Найти в области D_{00}^{+} решение $q^{+}{}_{jk}(x,y) \in C(\overline{D}_{00}^{-}) \cap C^2(D_{00}^{-})$ уравнения (15)

$$Q_{jk}^2 q_{jkxx}^{+}(x,y) + q_{jkyy}^{+}(x,y) = \frac{1}{\gamma_j^2} m_{jk}^{+}(x,y) \equiv -\frac{1}{\gamma_j^2}[a_0 f_{jk}(x,y) + b_0 g_{jk}(x,y)], (x,y) \in D_{00}^{+}, \quad (26)$$

удовлетворяющее условиям (18), (19), (22).

Задача Дарбу. В области D_{00}^- найти решение $q_{jk}^-(x,y) \in C(\overline{D}_{00}^-) \cap C^2(D_{00}^-)$ уравнения (15)

$$Q_{jk}^2 q_{jkxx}^-(x,y) - q_{jkyy}^-(x,y) = \frac{1}{\gamma_j^2} m_{jk}^-(x,y) \equiv -\frac{a_0}{\gamma_j^2} f_{jk}(x,y), (x,y) \in D_{00}^-, \quad (27)$$

удовлетворяющее условиям (20),(22).

Вопрос существования решения $q_{jk}(x,y)$ задачи T_{jk} для уравнения (15) в области $D_{00} = D_{00}^+ \cup D_{00}^- \cup I_0$ связан с разрешимостью полного [7] сингулярного интегрального уравнения относительно $\overline{\nu}_{jk}(x), 0 < x < \tau,$ которое будет получено из функциональных соотношений между $\overline{\nu}_{jk}(x)$ и $\overline{\omega}_{jk}(x)$, привнесённых на $y = 0, 0 < x < \tau$ решениями задачи Неймана-Дирихле из D_{00}^+ и задачи Дарбу из D_{00}^-.

Лемма 3. Если имеют место включения $\overline{r}_{jk}(y) \in C[0,h] \cap C^2(0,h)$;

$\overline{\delta}_{jk}(x) \in C[0,\tau] \cap C^2(0,\tau); \overline{\nu}_{jk}(x) \in C^1(0,\tau),$ то существует единственное решение задачи Неймана-Дирихле $q_{jk}^+(x,y) \in C(\overline{D}_{00}^+) \cap C^2(D_{00}^+)$, которое имеет вид

$$q_{jk}^+(x,y) = \frac{1}{Q_{jk}} \int_0^\tau \overline{\delta}_{jk}(\xi) \frac{\partial}{\partial y} G_{jk}(x,\xi,y) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{Q_{jk}} \int_0^\tau \overline{\nu}_{jk}(\xi) G_{jk}(x,\xi,y-h) d\xi + \frac{1}{2Q_{jk}\gamma_j^2} \int_0^h dt \int_0^\tau m_{jk}^+(\xi,t) \Gamma_{jk}(x,\xi;y,t) d\xi + \quad (28)$$

$$+ Q_{jk} \int_0^h \overline{r}_{jk}(\xi) \frac{\partial}{\partial x} R_{jk}(x,\xi,y) d\xi, (x,y) \in \overline{D}_{00}^+,$$

где

$$G_{jk}(x,\xi,\eta) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (M_{jkp}^+(x,\xi,\eta) - M_{jkp}^-(x,\xi,\eta)),$$

$$\Gamma_{jk}(x,\xi,y,t) = \begin{cases} -G_{jk}(x,\xi,h-t+y) - G_{jk}(x,\xi,h-t-y), t \ge y; \\ G_{jk}(x,\xi,y+h+t) + G_{jk}(x,\xi,y-h+t), y \ge t; \end{cases}$$

$$R_{jk}(x,\xi,y) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (N_{jkp}(x,\xi,-y) + N_{jkp}(x,\xi,y));$$

причем

$$M_{jkp}^{\pm}(x,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\gamma_{jkp}^{\pm}(-x,\xi,\eta)}{\gamma_{jkp}^{\pm}(x,\xi,\eta)};$$

$$N_{jkp}(x,\xi,\eta)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{\sigma^{+}_{jkp}(\tau-x,\xi,\eta)\sigma^{-}_{jkp}(x,\xi,\eta)}{\sigma^{-}_{jkp}(\tau-x,\xi,\eta)\sigma^{+}_{jkp}(x,\xi,\eta)};$$

а

$$\gamma^{\pm}_{jkp}(z,\xi,\eta)=ch(Q_{jk}\pi(h(1+2p)\pm\eta)/\tau)-\cos(\pi(\xi+z)/\tau);$$

$$\sigma^{\pm}_{jkp}(t,\xi,\eta)=ch(\pi(p\tau+t)/2hQ_{jk})\pm\cos(\pi(\xi+\eta)/2h).$$

Доказательство формулы (28) состоит в построении для уравнения (26) суммы решений двух вспомогательных задач Нейман-Дирихле

$$q^{+}_{jk}(x,y)=q^{1}_{jk}(x,y)+q^{2}_{jk}(x,y),$$

где $q^{s}_{jk}(x,y)(s=1,2)$ удовлетворяет уравнению

$$Q^{2}_{jk}q^{s}_{jkxx}(x,y)+q^{s}_{jkyy}(x,y)=(2-s)\frac{1}{\gamma^{2}_{j}}m^{+}_{jk}(x,y),(x,y)\in D^{+}_{00};$$

и условиям

$$q^{s}_{jk}(0,y)=q^{s}_{jk}(\tau,y)=(s-1)\bar{r}_{jk}(y),0\le y\le h;$$

$$q^{s}_{jk}(x,h)=(2-s)\bar{\delta}_{jk}(x),0\le x\le\tau;$$

$$\left.\frac{\partial q^{s}_{jk}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}=(2-s)\bar{\nu}_{jk}(x),0<x<\tau$$

в форме рядов $q^{1}_{jk}(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_{njk}(y)\sin(n\pi x/\tau),(x,y)\in\bar{D}^{+}_{00},$

$$q^{2}_{jk}(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_{njk}(x)\cos((2n+1)\pi y/2h),(x,y)\in\bar{D}^{+}_{00},$$

в которых $C_{njk}(y),A_{njk}(x)-$ решения соответствующих двухточечных краевых задач.

Функциональное соотношение между $\bar{\nu}_{jk}(x)$ и $\bar{\omega}_{jk}(x)$, привнесённое из D^{+}_{00} на $y=0,0\le x\le\tau,$ найдем из решения задачи Неймана-Дирихле (28), полагая $y=0$ и дифференцируя:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}'_{jk}(x)&=\frac{1}{2\tau Q_{jk}}\int_{0}^{\tau}\bar{\nu}_{jk}(\xi)[ctg(\pi(\xi-x)/2\tau)-ctg(\pi(\xi+x)/2\tau)]d\xi-\\&-\frac{1}{Q_{jk}}\int_{0}^{\tau}\bar{\nu}_{jk}(\xi)\frac{\partial}{\partial x}\bar{G}_{jk}(x,\xi)d\xi+\lambda_{jk}(x),0<x<\tau,\end{aligned}\qquad(29)$$

где $\overline{G}_{jk}(x,\xi)=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p M^{-}_{jkp}(x,\xi,-h)$, а $\lambda_{jk}(x)$ – интегральное выражение, состоящее из двух последних слагаемых продифференцированных при $y=0$ в (28), причем $\overline{G}_{jk}(x,\xi)\in C^2(0<x,\xi<\tau),\lambda_{jk}(x)\in C^1(0,\tau)$.

Лемма 4. Если выполняются включения $\overline{\nu}_{jk}(x)\in C^1(0,\tau)$, $\overline{\Psi}_{jk}(x)\in C[0,\tau/2]\cap C^2(0,\tau/2)$ и $\overline{\Psi}_{jk}(0)=\overline{r}_{jk}(0)$, то существует единственное решение задачи Дарбу $q^{-}_{jk}(x,y)\in C(\overline{D}^{-}_{00})\cap C^2(D^{-}_{00})$, которое имеет вид

$$q^{-}_{jk}(x,y)=\frac{1}{Q_{jk}}\int_0^{x+yQ_{jk}}\overline{\nu}_{jk}(\xi)d\xi-\overline{\Psi}_{jk}(0)+\overline{\Psi}_{jk}((x-yQ_{jk})/2)+\overline{\Psi}_{jk}((x+yQ_{jk})/2)-B_{jk}(x,y)+$$
$$+B_{jk}((x-yQ_{jk})/2,-(x-yQ_{jk})/2Q_{jk})+B_{jk}((x+yQ_{jk})/2,-(x+yQ_{jk})/2Q_{jk}), \quad (30)$$

$(x,y)\in\overline{D}^{-}_{00}$, где $B_{jk}(x,y)=\frac{a_0}{2Q_{jk}\gamma_j^2}\int_0^y dt\int_{x-(y-t)Q_{jk}}^{x+(y-t)Q_{jk}}f_{jk}(\xi,t)d\xi.$

Доказательство формулы (30) следует из общего решения неоднородного уравнения (27) колебания струны

$$q^{-}_{jk}(x,y)=L^1_{jk}(x-yQ_{jk})+L^2_{jk}(x+yQ_{jk})-B_{jk}(x,y),(x,y)\in\overline{D}^{-}_{00};$$

$L^s_{jk}(\xi)\in C^2[0,\tau](s=1,2)$ и краевых условий (20), (22).

Функциональное соотношение между $\overline{\nu}_{jk}(x)$ и $\overline{\omega}_{jk}(x)$, привнесенное из D^{-}_{00} на $y=0$, $0\le x\le\tau$, найдем из решения (30) задачи Дарбу, полагая в нем $y=0$ и дифференцируя:

$$\overline{\omega'_{jk}}(x)=\frac{1}{Q_{jk}}\overline{\nu}_{jk}(x)+\varphi_{jk}(x),0<x<\tau, \quad (31)$$

где

$$\varphi_{jk}(x)=\overline{\Psi'}_{jk}(x/2)-\frac{a_0}{Q_{jk}\gamma_j^2}\int_0^{-x/2Q_{jk}}f_{jk}(x+tQ_{jk},t)dt,\text{ причем }\varphi_{jk}(x)\in C^1(0,\tau).$$

Вопрос существования решения задачи T_{jk}(15),(18)-(20), в силу условий сопряжения (21)-(22) и функциональных соотношений (29),(31) сведен к разрешимости полного сингулярного интегрального уравнения нормального [7] типа

$$\overline{\nu}_{jk}(x)-\frac{1}{2\tau}\int_0^{\tau}\overline{\nu}_{jk}(\xi)[ctg(\pi(\xi-x)/2\tau)-ctg(\pi(\xi+x)/2\tau)]d\xi+$$
$$+\int_0^{\tau}\overline{\nu}_{jk}(\xi)\frac{\partial}{\partial x}\overline{G}_{jk}(x,\xi)d\xi=Q_{jk}(\lambda_{jk}(x)-\varphi_{jk}(x)),0<x<\tau,$$

которое, записанное в форме характеристического уравнения (индекс [7] равен нулю) с регулярным членом в правой части, единственным образом обратимо

методом сингуляризации [8],[9] в классе функций $\overline{\nu}_{jk}(x)$, удовлетворяющих условию Гельдера, и приведено к уравнению Фредгольма

$$\overline{\nu}_{jk}(x)+\int_0^{\tau}\overline{\nu}_{jk}(t)W_{jk}(x,t)dt=F_{jk}(x),0<x<\tau, \qquad (32)$$

где

$$W_{jk}(x,t)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\overline{G}_{jk}(x,t)+\frac{1}{4\tau}\int_0^{\tau}[ctg(\pi(\xi-x)/2\tau)-ctg(\pi(\xi+x)/2\tau)]\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{G}_{jk}(\xi,t)d\xi,$$

$$F_{jk}(x)=\frac{1}{2}Q_{jk}[\lambda_{jk}(x)-\varphi_{jk}(x)]+$$

$$+\frac{Q_{jk}}{4\tau}\int_0^{\tau}[ctg(\pi(\xi-x)/2\tau)-ctg(\pi(\xi+x)/2\tau)][\lambda_{jk}(\xi)-\varphi_{jk}(\xi)]d\xi,$$

причем $W_{jk}(x,t)\in C^1(0<x,t<\tau), F_{jk}(x)\in C^1(0,\tau)$.

Разрешимость уравнения [10] Фредгольма (32) следует из единственности решения задачи T_{jk} в области $\overline{D}_{00}$.

Определив $\overline{\nu}_{jk}(x)$ из уравнения (32), найдем $\overline{\omega}_{jk}(x)$ из (29) или (31), а затем по формулам (28) и (30) получим решения $q^{+}_{jk}(x,y)$ и $q^{-}_{jk}(x,y)$ задачи Неймана-Дирихле и Дарбу соответственно в областях D^{+}_{00} и D^{-}_{00}. Таким образом, существование решения задачи T_{jk} в области $D_{00}=D^{+}_{00}\cup D^{-}_{00}\cup I_0$ доказано.

Вернемся к задаче Т для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D=D^{+}\cup D^{-}\cup I$.

Её решение, в силу (17) и (28), имеет в области $\overline{D}^{+}=\bigcup_{j,k=0}^{1}\overline{D}^{+}_{jk}$ вид:

$$U(x,y)=U^{+}_{jk}(x,y)=q^{+}_{00}(x-j\tau,y-kh)+(-1)^j q^{+}_{10}(x-j\tau,y-kh)+$$

$$+(-1)^k(q^{+}_{01}(x-j\tau,y-kh)+(-1)^j q^{+}_{11}(x-j\tau,y-kh)),(x,y)\in\overline{D}^{+}_{jk},(j,k=0,1);$$

а в области $\overline{D}^{-}=\bigcup_{j=0}^{1}\overline{D}^{-}_{j0}$, согласно (17) и (30):

$$U(x,y)=U^{-}_{j0}(x,y)=q^{-}_{00}(x-j\tau,y)+(-1)^j q^{-}_{10}(x-j\tau,y),(x,y)\in\overline{D}^{-}_{j0}(j=0,1).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.А., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка. –1986. –280с.
2. Онанов Г.Г., Скубачевский А.Л. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики

деформируемого тела //Прикл. механика. – 1979. – т.15. – №5. – с39-47 .
3. Самарский А.А. О некоторых проблемам теории дифференциальных уравнений //Дифференц. уравнения. – 1980. –т.16. –№11. – с.1925-1935.
4. Маслов В.П. Операторные методы. – М.: Наука. –1973. –544с.
5. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. – М.,Наука. – 1973. – 712 с.
6. Зарубин А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. – Орел, ОГУ. 1999. – 225 с.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука. – 1977. – 640 с.
8. Флайшер Н.М. Новый метод решения в замкнутой форме для некоторых классов сингулярных интегральных уравнений с регулярной частью //Revue Roum. De Math. pures et appl. – 1965. – т.10. – №5. –р.615-620.
9. Бабурин Ю.С. Сингуляризация сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. – Рязань. –1977. – в 10.с.3-11.
10. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. – М.,Наука. – 1975. – 304с.

УДК 517.983

ОБ ОДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Т.Н. Можарова, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева»
e-mail: *tatjana.mozharova@yandex.ru*

В работе приводится построение посредством обобщенного преобразования Фурье Т функциональной реализации сопряженного пространства Н*. Показывается, что

Н* ≈ Р = [ρ; σ) и в пространстве Р оператор $\varphi_0(A)^*$ реализуется как оператор умножения на характеристическую функцию $\varphi_0(t)$ оператора $\varphi_0(A)$. Указанные построения были использованы автором при получении условий разрешимости неоднородного операторного уравнения $\varphi_0(A)(x) = y$, $y \in H$.

Ключевые слова: обобщенное преобразование Фурье, сопряженное пространство, характеристическая функция оператора.

Пусть H – полное локально-выпуклое пространство с топологией, заданной счётной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}$, p = 1, 2, …, и A – линейный и непрерывный оператор порядка $\beta \neq 0, \infty$, типа $\alpha < \infty$; $A(H) \subset H$.

Функцию $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k$, $x_k \in H$, удовлетворяющую условию

$$A[f(\lambda)] = \lambda f(\lambda) \qquad \text{и} \qquad l_0\{f(\lambda)\} = 1, \quad l_0 \in H^*,$$

будем называть собственной вектор-функцией оператора A([2]).

Пусть $f(\lambda)$ – целая, порядка ρ и типа σ. Известно ([1]), что в рассматриваемых условиях $\rho \geq \frac{1}{\beta}$ и $\sigma \geq \frac{\beta}{\alpha e}$. Далее предполагаем, что р-типы $\sigma_p < \sigma$, $\forall$р, и $\{x_k\}$ – полна в H.

Рассмотрим выражение

$$\varphi_0(A)(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k(x),\ c_k \in \boldsymbol{C},$$

с характеристической функцией

$$\varphi_0(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k,\ c_k \in \boldsymbol{C}.$$

Пусть $\varphi_0 \in \left[\frac{1}{\beta}; \frac{\beta}{\alpha e}\right)$. Известно ([1]), что в этих условиях $\varphi_0(A)$ – линейный непрерывный оператор, действующий из H в H.

Заметим, что оператор $\varphi_0(A)$ действует на $f(\lambda)$ следующим образом:

$$\varphi_0(A)(f(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k(\mathrm{f}(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k \mathrm{f}(\lambda) = \varphi_0(\lambda) \cdot f(\lambda).$$

Поскольку $\varphi_0(A)(H) \subset H$, $[\varphi_0(A)]^*(H^*) \subset H^*$. Для пространства H^* рассмотрим следующую функциональную реализацию P.

Введём оператор $T: H^* \to P$ такой, что $\forall s \in H^*$ соответствует целая скалярная функция $\varphi(\lambda)$:

$$T(s) = <s, f(\lambda)> = \varphi(\lambda), \quad \forall s \in H^*.$$

Как известно, оператор $[\varphi_0(A)]^*$ определён и непрерывен на H^*.

Обозначим

$$s' = [\varphi_0(A)]^*(s), \qquad s,\ s' \in H^*.$$

Тогда

$$T(s') = <s', f(\lambda)> = <[\varphi_0(A)]^*(s), f(\lambda)> = <s,\ \varphi_0(A)(f(\lambda))> =$$
$$= <s,\ \varphi_0(\lambda) \cdot f(\lambda)> = \varphi_0(\lambda) \cdot <s, f(\lambda)> = \varphi_0(\lambda)\ \varphi(\lambda),$$

где $\varphi_0(\lambda)$ – характеристическая функция оператора $\varphi_0(A)$.

Заметим, что $\forall\ s \in H^*$.

$$|<s, f(\lambda)>| = |\varphi(\lambda)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} s(x_k)\lambda^k\right| \leq \mathrm{C} \| f(\lambda) \|_{p_s} < \mathrm{C} e^{\left(\sigma_{p_s} + \varepsilon\right)|z|^{\rho}},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \| \cdot \|_{p_s}.$$

Таким образом, при условии $\sigma_p < \sigma$, $\forall p$, $P \subset [\rho;\ \sigma)$.

Покажем однозначность отображения

$$\forall\ s \in H^* \xrightarrow{\mathrm{T}} \varphi(\lambda) \in P \subset [\rho;\ \sigma).$$

Пусть $s_1 \neq s_2$, а $T(s_1) = \varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\lambda) = T(s_2)$.

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{\infty}[s_1(x_k)-s_2(x_k)]\lambda^k=0,$$

а значит,

$$s_1(x_k)-s_2(x_k)=(s_1-s_2)(x_k)=0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ .$$

Т.к. система $\{x_k\}$ полна в H, то $s_1-s_2=\mathbf{0}\in H^*$, что противоречит условию $s_1\neq s_2$.

В рассматриваемых условиях это соответствие также является взаимнооднозначным. Действительно, пусть $\varphi\in[\rho;\ \sigma)$. Тогда

$$\varphi(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\lambda^n\ ,\ b_n\in\boldsymbol{C}.$$

Покажем, что этой функции φ соответствует функционал $s_\varphi\in H^*$, такой, что $T(s_\varphi)=\varphi(\lambda)$.

Известно [1], что в данных условиях для функционала $s\in$H* справедливо представление

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n l_0\left\{\mathrm{A}^n(x)\right\},\quad x\in H,\ d_n\in\boldsymbol{C},\ \forall n.$$

Для функции $\varphi(\lambda)$ положим

$$s_\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n l_0\left\{\mathrm{A}^n(x)\right\},\ x\in H.$$

Покажем, что этот функционал $s_\varphi\in H^*$.

Имеем:

$$|b_n l_0\{A^n(x)\}|=|b_n|\cdot|l_0\{A^n(x)\}|\le C(\varepsilon)\left[\frac{(\sigma_1+\varepsilon)e\rho}{n}\right]^{\frac{n}{\rho}}\|\mathrm{A}^n(x)\|_{p_0}\ \le$$

$$\le C(\varepsilon)\left[\frac{(\sigma_1+\varepsilon)e\rho}{n}\right]^{\frac{n}{\rho}}\left[\left(\alpha_{p_0}+\varepsilon\right)n\right]^{\beta n}\|x\|_q,\ \ \exists \mathrm{p}_0,\ \mathrm{q},\ \ \forall\varepsilon>0,$$ где σ_1 – тип функции $\varphi(\lambda)$, $\sigma_1<\sigma$.

В случае $\rho>\dfrac{1}{\beta}$

$$|b_n|\cdot|l_0\{A^n(x)\}|<C(\varepsilon)\left[\frac{(\sigma_1+\varepsilon)e\rho}{n}\right]^{\beta n}\left[\left(\alpha_{p_0}+\varepsilon\right)n\right]^{\beta n}\|x\|_q,\ \ \forall\varepsilon>0,\ \ \exists \mathrm{p}_0,\ \mathrm{q}.$$

Такая же оценка имеет место при $\rho=\dfrac{1}{\beta}$. Т.к. $\forall \mathrm{p}\quad \alpha_p\le\alpha$, то при достаточно малом $\varepsilon>0$

$$(\sigma_1+\varepsilon)\,e\rho\left(\alpha_{p_0}+\varepsilon\right)<1.$$

Следовательно, $|s_\varphi(x)|\le C\,\|x\|_{\mathrm{q}},\ \forall\, x\in H,$ и $\ s_\varphi\in H^*$.

Покажем, что функционалу s_φ соответствует функция $\varphi(x)$.

$$T(s_\varphi) = <s_\varphi, f(\lambda)> = \sum_{n=0}^{\infty} b_n l_0\{A^n(f(\lambda))\} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n l_0\{\lambda^n f(\lambda)\} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n l_0\{f(\lambda)\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n = \varphi(\lambda).$$

Таким образом, показали, что $P = [\rho; \sigma)$.

Если в пространстве H^* действует оператор $[\varphi_0(A)]^*$, то в пространстве P (вообще говоря), действует двойственный ему (дуальный) оператор $[\varphi_0(A)]^{*^{\circ}}$. Однако для простоты изложения, будем полагать, что оператор $[\varphi_0(A)]^*$ действует в P, причём, как показано выше,

$$[\varphi_0(A)]^*(\varphi) = \varphi_0 \varphi, \ \forall \varphi \in P.$$

Построенная функциональная реализация пространства линейных непрерывных функционалов может быть использована для получения условий разрешимости неоднородных операторных уравнений $\varphi_0(A)(x) = y$, $y \in H$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можарова Т.Н. О существовании и непрерывности оператора *φ(A)* на алгебре H // Continuum. Математика. Информатика. Образование. – 2019. – № 2(14). – С. 22 – 26.
2. Можарова Т.Н. О свойствах интерполирующей функции // Вестник науки. Сборник научных работ преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов физико-математического факультета. – 2014. – Выпуск 13. – С.34 – 38.

УДК 51

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЖЕСТКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р.М. Нигай, к.т.н.
Российский университет транспорта(МИИТ)
e-mail: *Ruslan1010@mail.ru*

Изложены особенности моделирования динамических систем, адаптированных к реальным производственным технологическим процессам. Изложен подход к решению задач численно-аналитическим методом моделирования жестких динамических систем. Подход основан на решении систем дифференциальных уравнений высоких порядков при помощи элементарных функций с использованием процедур прецизионного поиска корней характеристического полинома системы. При этом рассматриваются решения для всех возможных видов корней. Для типовых входных воздействий приведены аналитические выражения и рассмотрены области применения предложенного подхода в моделировании сложных технических систем в конкретных инженерных задачах.

Ключевые слова: моделирование, корни полинома, жесткие динамические системы.

1. Введение

В настоящее время во многих технологических процессах, например, сверлении глубоких отверстий в трубных досках, применяется высокоточное интеллектуальное оборудование. Точность расположения большого количества отверстий в заготовке зависит не только от точности позиционирования исполнительного органа, но и от динамических явлений, обусловленных силовым взаимодействием данного исполнительного органа с объектом, значительной удаленностью его от входного звена, передающего движения, и др. факторов, присущих специфики процесса. Отсюда возникает необходимость исследования динамических объектов с повышенными требованиями к прецизионной системе параметров движения и максимального учета всех составляющих движения системы. Такие системы составляют жесткие динамические системы.

Изучение особенностей динамических явлений в процессах передачи движения неразрывно связано с разработкой математической модели и ее поведенческого алгоритма. Многие исследования динамических систем, адаптированных к конкретным технологическим процессам, включают различные подходы к построению математической модели. Например, эти модели строятся на рассмотрении системы дифференциального уравнения Лагранжа второго рода и нахождения решения в обобщенных координатах [1]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i, \quad i=1, 2, \ldots, s, \tag{1}$$

где T – кинетическая энергия; q_i, $\dot{q}$ – обобщенная координата и ее производная; Q_i – обобщенная сила, s – число составляющих переменных в системе.

Или в основе метода приняты известные уравнения количества движения в дифференциальной форме для продольных и крутильных колебаний, позволяющие связать колебания скоростей движения и напряжений в достаточно

сложных системах, имеющих как распределенные параметры, так и существенные нелинейности [2-4].

Следует отметить, что особенностью формализации сложного технического процесса является построение математической модели для жестких динамических систем с использованием дифференциальных уравнений высокого порядка. Как правило, у последних проявляется свойство жесткости. Это свойство состоит в том, что на интервале наблюдения для описания движения системы приходится использовать функции двух типов: быстро меняющиеся функции с большими производными (быстрые движения) и медленно затухающие функции с малыми производными (медленные движения). Особые сложности возникают, если моменты начала быстрых движений заранее неизвестны [5].

1.1. Особенности моделирования жестких динамических систем

Рассмотрим класс линейных динамических систем, описываемых уравнениями состояния

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \tag{2}$$

где x, u - n-мерный вектор состояния и m-мерный вектор входа соответственно; A, B - числовые матрицы соответствующих размеров.

Характеристическое уравнение для (2) имеет вид

$$\det\left(A - vI\right) = 0\,, \tag{3}$$

где I - единичная матрица размером $n \times n$; v - комплексная переменная.

Раскрывая определитель, получим полином $P(v)$ n-й степени по v, который является характеристическим многочленом A. По нему находят n значений собственных чисел (полюсы системы) v как корни характеристического уравнения (3): $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

В случае, если собственные числа v_i, i =1, n, отличаются на несколько порядков и

$$v_{\max} / v_{\min} = 10^4 - 10^6\,, \tag{4}$$

где $v_{\max}$ и $v_{\min}$ - соответственно максимальный и минимальный модули корней характеристического полинома системы, то системы (2) относят к жестким системам [6].

В настоящее время для решения систем линейных дифференциальных уравнений, например (1), применяются различные численные методы. К наиболее известным и широко используемым методам можно отнести такие, как неявные и явные методы Эйлера, Адамса, Рунге--Кутта и др.

При моделировании жестких систем этими методами возникают определенные сложности. Это связано с выбором интервала интегрирования и шага вычислений, определения устойчивости решений, поскольку необходимо сделать большое количество вычислений. Кроме этого, при очень малых шагах моделирования приходится проводить большое количество операций для по-

строения переходного процесса, в связи, с чем начинает проявляться ошибка округления, вызванная ограниченностью разрядной сетки ЭВМ.

Среди известных способов для решения жестких систем наиболее успешно реализуется программа, разработанная К. Гиром [7]. В методе Гира используются формулы предсказания и коррекции переменного порядка и с переменным шагом. Однако итерационный характер этого алгоритма требует альтернативного выбора между точностью расчета и возрастанием количества операций и, как следствие, ведет к увеличению влияния ошибок округления [5]. Предлагается следующий подход.

2. Суть подхода и постановка задачи

Один из возможных способов моделирования жестких систем - получение решений при помощи элементарных функций [8]. Алгоритм такого подхода основан на следующих процедурах: запись исходной системы дифференциальных уравнений в форме переменных состояния, определение характеристического полинома системы, нахождение его корней и определение по корням решения исходной системы дифференциальных уравнений в аналитическом виде при типовых входных воздействиях.

Аналитический вид решения определяет ряд преимуществ этого подхода. К основным преимуществам можно отнести следующие факторы: учет в решении всех составляющих (как быстрых, так и медленных), что особенно важно при моделировании жестких систем; возможность получения решения с точностью разрядной сетки ЭВМ для любого момента времени, а также полная алгоритмическая независимость от решения в предыдущей точке; отсутствие итерационности, возможность предварительной оценки характера переходного процесса по виду корней. Все вышеперечисленное позволяет говорить об актуальности разработки подобных методов моделирования.

Однако обзор практических схем моделирования показал отсутствие методов, основанных на использовании элементарных функций для решения систем дифференциальных уравнений высокого порядка. Это объясняется в основном отсутствием точных аналитических формул определения корней для полиномов высокой степени (выше 3-й). Применение известных методов, таких, например, как методы Хичкока, Ньютона, Данилевского [7] и др., дают хорошие результаты для полиномов невысокого порядка (до 5-го), при более высоких степенях полинома эти методы работают очень «грубо». Так, например, ошибка метода Хичкока для системы 4-го порядка имеет величину 10^{-5}, для системы 6-го порядка она возрастает до 10^{-2}.

Рассмотрим следующий подход к моделированию жестких систем, базирующийся на основе элементарных функций с процедурой высокоточного поиска корней характеристического полинома системы [5].

Интерактивная методика отыскания корней v_1, v_2, …, v_n, использует численно-аналитическую процедуру, в которой применяется сочетание различных итерационных способов отыскания корней: методы Ньютона, Данилевского, Хичкока и др. в сочетании с оценкой области расположения корней и исключением найденного корня из дальнейшего поиска.

Известные методы поиска корней полиномов в начале счета, как правило, используют произвольное начальное приближение к корню. Если у системы высокого порядка корни расположены далеко от начального приближения, то метод не обеспечивает высокой точности, либо может вообще не дать результата.

Отметим одно из известных свойств алгебраических полиномов [9]. Их корни могут быть действительными или комплексно-сопряженными, причем на комплексной плоскости все они лежат в пределах кольца, ограниченного окружностями с радиусами

$$R = 1 + \frac{a_{\max}}{a_n}, \quad R = 1 + \frac{a'_{\max}}{a_n}. \qquad (5)$$

где $a_{\max}$ - наибольший по модулю коэффициент полинома; $a'_{\max}$ - следующий наибольший по модулю коэффициент, т. е. без учета $a_{\max}$; a_n - коэффициент при n-й степени.

Применяя это свойство, можно в известных методах в качестве начальных приближений использовать значения R или r, что существенно сокращает количество итераций для нахождения значения корня и повышает эффективность и точность метода.

Как правило, существующие программы нахождения корней полиномиальных уравнений не являются комплексированными, т. е. используют один какой-то метод, что ограничивает их эффективность. В рассматриваемой версии в разработанной процедуре используется сочетание ряда методов, которые обеспечили возможность последовательного уточнения определяемых корней.

Так, выбор начального приближения (5) дает корни систем высокого (до 40-го) порядка с ошибкой не больше 10^{-8}. Далее, для уточнения значения корня используются процедуры «координатного спуска» и «наискорейшего спуска», после чего ошибка снижается до 10^{-12}. Найденные значения корней являются начальными для работы интерактивной системы уточнения корня.

Работа интерактивной системы основана на следующих соображениях. Пусть полином $P(v)$ n-й степени имеет n корней любого вида. Рассматривая поведение модуля полинома $P(v)$ в трехмерном пространстве (рисунок 1), где оси координат составляют действительную, мнимую оси комплексной плоскости и некоторую ось g, образуемой значениями g = |P(v)|, мы можем определить контуры невязки полинома, в которых любая точка внутри контура дает приближение к корню на порядок точнее [5].

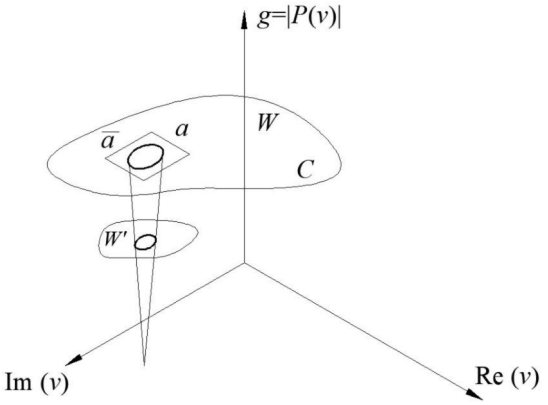


Рисунок 1 – Пространство конфигураций

Описанная процедура может быть повторена: в квадрате со сторонами $a/100$ в геометрическом центре последнего контура и т. д., пока величина невязки полинома для данных координат корня не достигнет установленной точности. При этом точность нахождения координат корня определяется длиной разрядной сетки используемой ЭВМ. Как показал эксперимент, по мере приближения курсора к истинным координатам корня контур, образуемый сечением тела полинома плоскостью W, параллельной плоскости Re(v), Im(v) (рис. 1), стремится к окружности, а в трехмерном пространстве он имеет вид воронки с основанием в точке с координатами корня [5]. Это свойство позволяет при достаточно близком (величина невязки не превышает 10^{-14}) расположении курсора к корню эффективно использовать метод «наискорейшего спуска», после чего ошибка определения корня оказывается не хуже 10^{-20} (для ПЭВМ типа IBM PC).

Процедура формирования свободной составляющей решения системы (2) в зависимости от типа корня определяется следующей постановкой задачи.

2.1. Простые корни

Пусть среди корней v_1, v_2, ..., v_n характеристического многочлена $P(v)= 0$, полученного из (3), нет кратных. Тогда решение системы уравнений (2) запишется в следующем виде

$$X = c_1 x + c_2 x + \ldots + c_n x_n , \tag{6}$$

где

$$x_1 = \exp(v_1 t);\ x_2 = \exp(v_2 t);\ x_n = \exp(v_n t). \tag{7}$$

Здесь c_1, c_2, c_n – постоянные интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих какую-либо рассматриваемую динамическую систему. Отметим, что эти постоянные определяются из начальных и граничных условий. Они в свою очередь однозначно определены для каждого данного значения v. Функции (7) также определены на всей числовой прямой $-\infty < t < \infty$.

2.2. Кратные корни

Пусть среди совокупности всех попарно различных корней v_1, v_2, ..., v_m, $m < n$, характеристического многочлена $P(v) = 0$, полученного из (3), u_j имеет кратность k_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, так, что

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n\,. \tag{8}$$

Положим, что

$$x_1 = \exp(v_1 t);\ x_2 = t\exp(v_1 t);\ x_{k(1)} = t^{k(1)-1}\exp(v_1 t);$$

$$x_{k(1)+1} = \exp(v_2 t);\ x_{k(1)+1} = t\exp(v_2 t);\ x_{k(1)+k(2)} = t^{k(2)-1}\exp(v_2 t);$$

$$\ldots,\ x_n = t^k \exp(v_m t)\,. \tag{9}$$

Тогда все функции (9) являются решениями системы (2), т. е. при любых комплексных постоянных c_1, c_2, …, c_n функция (6) будет решением этого уравнения. Оно является общим, так как каждое решение уравнения (2) может быть получено по формуле (6) при надлежащем выборе констант c_1, c_2, …, c_n. При этом константы c_1, c_2, …, c_n однозначно определяются для каждого данного решения x. Функции (9) определены на всей числовой прямой $-\infty < t < \infty$.

2.3. Комплексно-сопряженные корни

Пусть $v = m + is$ и $v = m - is$ есть пара комплексно-сопряженных корней характеристического полинома системы (2). Тогда

$$x_1 = t^r \exp(vt) \text{ и } \overline{x}_1 = t^r \exp(\overline{v}t) \tag{10}$$

два комплексно-сопряженные решения из системы (9). В случае действительного решения x часть суммы (6), соответствующая этим решениям, может быть записана в виде

$$x = ct^r \exp\left[(m+is)t\right] + ct^r \exp\left[(m-is)t\right]. \tag{11}$$

Для всех случаев корней постоянные интегрирования c_1, c_2, …, c_n определяются методом подстановки начальных условий.

Реакция системы, включающая свободную и вынужденную составляющие, определяется через фундаментальную матрицу

$$X(t) = D\ diag \exp(v_i t)\,. \tag{12}$$

Таким образом, реакция системы может быть определена выражением

$$x(t) = D\ diag \exp\left[v_i (t - t_0)\right] D^{-1} x_0 +$$

$$+ D\ diag \exp(v_i t) \int_{t_0}^{t} diag\ \exp(-v_i s)\, D^{-1} B u(s)\, ds\,. \tag{13}$$

Здесь x_0 – вектор начального состояния; D – матрица $n \times n$, $D = D(t)$.

В работе [5] проведено моделирование жесткой линейной динамической системы 2-го порядка. Метод реализован в виде пакета программ, написанного на алгоритмическом языке Паскаль для персональной ЭВМ типа IBM PC. По

желанию пользователя решения выдаются в аналитическом, цифровом или графическом виде.

3. Алгоритм интерактивной процедуры поиска корней характеристического полинома системы

Поиски различных схем для моделирования систем продолжаются и в настоящее время. Наиболее эффективные и близкие по достигаемому результату метод настраиваемых параметров и метод воспроизведения полиномиальной модели.

Метод настраиваемых параметров основывается на процедуре поиска корней характеристического полинома системы и позволяет в максимальной степени использовать имеющуюся информацию о системе, что, в общем, всегда благоприятно сказывается на получаемых результатах. Однако, следует отметить, что эффективность метода находиться в сильной зависимости от точности нахождения корней характеристического полинома системы, используемые в методе алгебраические операции (например, перемножение матриц), по количеству элементарных арифметических операций на шаге ставит метод между явными и неявными методами. Также следует отметить ограничение на шаг интегрирования в вызываемом устойчивостью метода. По этому показателю метод приближается к явным схемам.

Использование алгоритмов воспроизведения полиноминальной модели позволяет проводить моделирование практически с любым шагом т.е. метод по этому показателю приближается к неявным, однако, точность метода существенно зависит от степени полиномиальной модели, а эффективность ограничивается системами сспредельнным распределением корней.

Интерактивная методика отыскания корней v_1, v_2, ..., v_n характеристического полинома $P(x)$ использует численно – аналитического процедуру, в которой применяются сочетания различных итерационных способов отыскания корней – методы Ньютона, Данилевского, Хичкока и др. в сочетании с оценкой области расположения корней и исключением найденного корня из дальнейшего поиска, а также методы линейной алгебры и минимизации функционала невязки.

Поиск отыскания корней полинома осуществляем в комплексной плоскости, принимая $(x, y) = (\mathrm{Re}v, \mathrm{Im}v)$.

Тогда полином запишем в виде

$$P_n(v) = \sum_{k=0}^{n} a_k v^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (x + jy)^k = P_n(x, y);\ x = \mathrm{Re};\ y = \mathrm{Im}. \qquad (14)$$

Процедура определения корней полинома (14) может быть реализована на следующем алгоритме действий:

Поиск начального приближения к корню или к компактному расположению нескольких корней.

Грубое уточнение области расположения отдельного корня.

Окончательное уточнение корня.

Отделение найденного корня.

Проверка корня на кратность.

В процессе решения задачи используется анализ невязок решения в различных точках комплексной плоскости. Очевидно, что этим невязками будут значения полинома в данной точке

$$P_n(x, y) = \mathrm{Re}\, P_n(x, y) + j\, \mathrm{Im}\, P_n(x, y). \qquad (15)$$

Значения полинома $r_n(x, y) = \mathrm{Re}\ P_n(x, y)$ и $s_n(x, y) = \mathrm{Im}\ P_n(x, y)$ в некоторой точке (x, y) определяются по алгоритму Горнера при подстановке (x, y) в (14). Известные операции этого алгоритма сводятся к вычислению на каждом шаге чисел r_n и s_n.

В качестве функционала невязки используется величина

$$I(x, y) = r_n^2 + s_n^2 = \left| P_n(x, y) \right|^2. \qquad (16)$$

При конкретном выборе конкретных алгоритмов реализации рассматриваемых задач необходимо проводить предварительные исследования с целью использования в вычислительной технике опыта поиска экстремумов в конечномерных пространствах. Поскольку в точке корня функционал невязки (16) I (x,y) достигает экстремума, то в данном случае практически отсутствуют ограничения на x и y.

Таким образом, в каждой точке корня $x=\mathrm{Re}v_i$, $y=\mathrm{Im}v_i$ необходимым и достаточным признаком этого факта будет обращение в нуль частных производных

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial I}{\partial y} = 0.$$

Кроме того имеется возможность и непосредственного вычисления невязки $\mathrm{I}P_n(x, y)\mathrm{I}^2$ и проверки её на допустимый уровень ошибки.

В качестве примера рассмотрим одну из процедур вышеописанного алгоритма действий «Грубое уточнение области расположения отдельного корня». Используем для уточнения значения корня процедуру «покоординатного спуска».

Суть процедуры заключается в следующем, наложим на комплексную плоскость $W(x, jy)$ сетку со сторонами H и размером ячейки h и будем считать величину невязки полинома q в узлах сетки, рис 2.

При этом направление движения для вычисления невязок выбирается следующим образом, фиксируем сначала первую переменную (например, x) и выбираем направление движения по второй переменной (y) и следующего условия: если величина невязки, полученная на первом больше, чем на втором, то продолжаем движение, в противном случае направление движения необходимо поменять на противоположное.

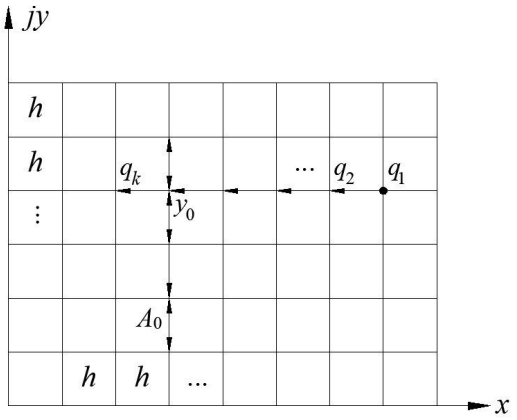


Рисунок 2 – Сетка со сторонами H

После k-того шага величина невязки, полученная на предыдущем шаге, должна оказаться меньше невязки, полученной на последующем шаге. Это соответствует попаданию в седловину полиномиальной кривой для данного шага по координате y. Фиксируем это значение как y_0 и проделываем те же действия с переменной x. В результате получаем точку A_0 с координатами (x_0, y_0). Рассчитываем величину невязки полинома q_0 для точки A_0.

Далее, накрываем окрестность точки A_0 сеткой со сторонами h и ячейками размером h/10. Повторяем процедуру как и для сетки со сторонами H. В результате получаем точку A_1 с координатами (x_1, y_1) и величиной невязки q_1. Сравниваем q_0 и q_1. Если q_0 окажется больше q_1, то продолжаем расчет по выше приведенной схеме, в противном случае на n-ом шаге окажется, что величина q_0 меньше либо равна q_1, тогда нужно прекратить вычисления.

Координаты точки A_n (x_n, y_n) будут соответствовать действительной и мнимой частями одного корня полинома. Дальнейшее уменьшение величины ошибки невозможно из-за ограничений разрядности сетки используемой ЭВМ. Для различных видов корней (действительные различные, кратные, комплексно-сопряженные) ошибка оказывается не хуже 10-7- для ПЭВМ типа IBMPC/XT/AT.

Программа нахождения корней характеристического полинома системы дифференциальных уравнений высокого порядка на примере моделирования работы лентопротяжного механизма изложена в литературе [10].

4. Область применения подхода для моделирования сложных технических систем в инженерных задачах

Во многих практических задачах теории управления, динамики твердых тел, устойчивости движения и др. исследуются переходные процессы систем, испытывающих типовое входное воздействие вида

$$u = b_i t^r \exp(at)\cos(\omega t). \qquad (17)$$

где a, b, ω – параметры процесса.

Для жестких динамических систем, математическая модель которых включает дифференциальные уравнения высокого порядка, часто используемый метод последовательных приближений не применим, поскольку за первым приближением искомой величины, надо определять второе, третье приближение и т.д.

Или, например, в работе [11] исследовалась реакция привода на гармоническое изменение скорости движения ведущего звена или момента сопротивления, действующего на исполнительный орган при согласованной нагрузке. При этом момент сопротивления системы изменялся по закону

$$M_r(t) = M_0\left[1 + b_i \sin(\Omega t)\right], \tag{18}$$

где M_0 – начальный момент сопротивления; b_i – параметры процесса; Ω – скорость вращения выходного звена. В рамках заданной инженерной точности задача была решена численным методом Рунге-Кутты.

Исследование переходных процессов с достаточно высокой точностью в указанных выше задачах можно получить при помощи аналитического выражения (13).

Интегральная часть формулы (13) сводится к линейным комбинациям табличных интегралов [12]

$$\int t^n e^{at} D dt = \frac{e^{at}}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{(n+1)n \times \ldots \times (n-k+2)(n-k+1)}{(a^2 - \omega^2)} D_1 ;$$

$$D = \begin{vmatrix} \sin(\omega t + c) \\ \cos(\omega t + c) \end{vmatrix};\ D_1 = \begin{vmatrix} \sin(\omega t + c + kz) \\ \cos(\omega t + c + kz) \end{vmatrix};\ z = \arcsin\left(-\omega / \sqrt{a^2 + \omega^2}\right). \tag{19}$$

5. Выводы

Предложенный подход в численно-аналитическом методе моделирования жестких динамических систем дает точное решение (с точностью разрядной сетки ЭВМ) с любым шагом и для любого момента времени. Полученные формулы позволяют с использованием ЭВМ рассчитывать достаточно широкий круг динамических задач, адаптированных к технологическим процессам изготовления сложных конструкций. Правильная оценка динамики позволит найти рациональные режимы работы оборудования с применением робототехники и гибких автоматизированных производственных модулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратенко Л.А., Миронова Л.И. Математическая модель процесса обработки отверстий на станках с ЧПУ // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – №4. – С. 80 – 87.
2. Кондратенко Л.А., Миронова Л.И. Имитационное моделирование нелинейных приводов с распределенными параметрами силовых магистралей // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – №1. – С. 92 – 97.

3. Кондратенко Л.А., Терехов В.М., Миронова Л.И., Потеря устойчивости работы приводов вращения с длинными стальными силовыми линиями // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – №2. – С. 40 – 44.
4. Кондратенко Л.А., Миронова Л.И Динамические особенности механического привода с эластичной силовой линией // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2019. – №2. – С. 94 – 99.
5. Малахов Н.А., Нигай Р.М. Численно-аналитический метод моделирования жестких динамических систем // Известия высших учебных заведений. Изд. ИТМО, Ленинград, Приборостроение. – Т. XXXIV. – 1991. – № 8, – С. 5.
6. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Наука. – 1989.
7. Крылов В. И. Вычислительные методы высшей математики. – Минск: Высшая школа. – 1972. – Т. 1.
8. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука. – 1970.
9. Дьяконов В. П. Справочник по алгоритмам на языке Бейсик для персональных ЭВМ. – М.: Наука. – 1987.
10. Нигай Р.М., Нигай Е.Р., Миронова Л.И. Интерактивный поиск корней характеристического полинома системы дифференциальных уравнений высокого порядка. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020614389.
11. Кондратенко Л.А., Миронова Л.И., Терехов В.М. Потеря устойчивости работы приводов вращения с длинными стальными силовыми линиями / Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – №2. – С. 40 – 44.
12. Прудников А. П. Интегралы и ряды. – М.: Наука. – 1981.

УДК 519.63

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОГО МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СПУСКА К РЕШЕНИЮ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.О. Отаров
Каракалпакский государственный университет имени Бердаха
e-mail: *otarov_39@mail.ru*

Данная работа является непосредственным обобщением и развитием метода связного дифференциального спуска [1,2,5] решения систем конечномерных уравнений применительно к решению операторных уравнений, рассматриваемых в сепарабельных банаховых пространствах.

Ключевые слова: рекурентная последовательность, задача Коши, скалярное уравнение, дифференциальный спуск.

Основные обозначения и определения. B - действительное сепарабельное банахово пространство; B^* - сопряженное с B пространство; $\|x\|_B$ - норма

элемента $x \in B$; H - сепарабельное гильбертово пространство; (f,x) - значение на элементе $x \in B$ линейного относительно x функционала $f \in B^*$; $D(A)$ - область определения, а $R(A)$ - область значений оператора A; $l_p(p \geq 1)$ - пространство числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...)$, сходящихся в p-ой степени и с нормой $\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right]^{\frac{1}{p}}$; α_i - решение первых i уравнений системы (2); α_{ni} - элемент, принадлежащий к α_i и соответствующий начальному условию x_n, $n = 0,1,2,...$ для рекуррентной последовательности задач Коши (3); x_{ni} приближение к α_{ni}; n_i - число делений отрезка $\left[f_i(x_{ni-1}), 0 \right]$; $h_i = f_i(x_{ni-1}) / n_i$ - шаг интегрирования при приближенном интегрировании задачи Коши (3).

Пусть дано уравнение

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

с дважды непрерывно дифференцируемым по Фреше нелинейным оператором P, действующим из B в действительное сепарабельное гильбертово пространство H с нулем θ. В силу сепарабельности, в H существует [3,4, 6] система $\{\varphi_i\}_1^{\infty}$ элементов φ_i, $i = 1,2,...,$ удовлетворяющих условиям: 1) система $\{\varphi_i\}_1^{\infty}$ полна в H; 2) элементы $\varphi_1, \varphi_2, ... \varphi_i$ линейно независимы при любом i. Тогда система скалярных уравнений

$$f_i(x) = (P(x), \varphi_i) = 0, \quad i = 1,2,... \tag{2}$$

эквивалентна уравнению (1) и функционалы $f_i(x)$, $i = 1,2...$, определяемые левой частью (2) имеют области определения, совпадающие с областью определения оператора P. В частности, если $\{\varphi_i\}_1^{\infty}$ - ортонормированная система элементов в H со свойствами 1) и 2), то функционалы $f_i(x)$, $i = 1,2,...$ совпадают с коэффициентами Фурье элемента $P(x) \in H$, $x \in B$. Тогда по известной теореме Рисса – Фишера [3, 4,6] ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (P(x), \varphi_i)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2(x)$ сходится при любом $x \in B$, т.е.

$$f(x) = \left((P(x), \varphi_1), (P(x), \varphi_2), ... \right)$$

является элементом пространства l_2 при всех $x \in B$.

Теорема 1. Решения $x_i(t_i)$, $i = 1,2,...$ рекуррентной последовательности задач Коши

$$\frac{dx_i}{dt_i}=\frac{a_i^{i-1}(x)}{\left(f_i',a_i^{i-1}\right)},\quad x_i^0=x_i\left(t_i=t_i^0\right)=x_{i-1}\left(t_{i-1}-0\right)=\alpha_{0i-1},$$

$t_i^0=f_i\left(\alpha_{0i-1}\right),\ \ \alpha_{00}=x_0,\ \ i=1,2,...$

определены, по крайней мере, на таких отрезках $\left[t_i^0,\delta_i\right]$, что $0\in\left[t_i^0,\delta_i\right]$ и $\alpha_{oi}=x_i(0)$.

Теорема 2. Для того чтобы

$$\lim_{i\to\infty}\left\|f\left(\alpha_{0i}\right)\right\|_{l_p}=0$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор $f(x)$ обладал $\left(l_p\right)$- свойством.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галанов Б.А. Об одном методе связного дифференциального спуска // В сб. «Математические методы в кибериетической технике», вып.1, Киев 1980, изд-во ИКАН УССР, с. 26-28.
2. Галанов Б.А. О сходимости одного непрерывного метода и его аппроксимаций // В сб. «Математические методы в кибернетической технике», вып. 7, Киев, 1970, изд-во ИКАН УССР, с. 31-40.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984, 752 с.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982, 272 с.
5. Отаров А.О. Численная реализация одного метода дифференциального спуска при решении нелинейных уравнений // Журнал «Вестник» КК филиала АН УзССР, г. Нукус, 1983, №2, с. 3-8.
6. Функциональный анализ / Под общей редакцией С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972, 544 с.

УДК 517.444

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ БЕССЕЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО

С. С. Платонов, д.ф.-м.н., проф.
Петрозаводский государственный университет
e-mail: *platonov@psu.karelia.ru*

Пусть функция f принадлежит классу Лебега $L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$, и пусть $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции f. В классической теореме Е. Титчмарша утверждается, что если функция f содержится в классе Липшица $Lip(r,p;\mathbb{R})$, $0 < r \le 1$, то $\widehat{f}$ принадлежит классам Лебега $L_q(\mathbb{R})$ при $\frac{p}{rp+p-1} < q \le \frac{p}{p-1}$. В настоящей работе получен аналог этого результата для преобразования Бесселя функций из весовых классов Никольского на полупрямой $[0,+\infty)$.

Ключевые слова: гармонический анализ Бесселя, интегральные преобразования Бесселя, весовые классы Никольского, обобщенные модули гладкости.

По определению комплекснозначная функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит классу Липшица $Lip(r,p;\mathbb{R})$, $0 < r \le 1$, $p \ge 1$, если $f \in L_p(\mathbb{R})$ и выполняется условие

$$\|f(x-t) - f(x)\|_{L_p(\mathbb{R})} = O(t^r)$$

при $t \to 0$.

Т е о р е м а 1 ([1], теорема 84). Пусть $f(x) \in Lip(r,p;\mathbb{R})$, $1 < p \le 2$, $0 < r \le 1$, и пусть $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции f. Тогда $\widehat{f}$ принадлежит классу Лебега $L_q(\mathbb{R})$ при

$$\frac{p}{p+rp-1} < q \le p', \tag{1}$$

где $p' = \frac{p}{p-1}$, причем границы $\frac{p}{p+rp-1}$ и p' в этом неравенстве точные.

В настоящей работе рассмотрен аналог теоремы 1 для преобразований Бесселя функций из весовых классов Никольского, состоящих из функций на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$. Приведем некоторые сведения из гармонического анализа Бесселя (подробную информацию о гармоническом анализе Бесселя см., например, в [2, 3, 4, 5]). Всюду далее α — произвольное действительное число большее чем $-\frac{1}{2}$. Будем обозначать через $\mathcal{D}_x$ дифференциальный оператор Бесселя, т.е.

$$\mathcal{D}_x := \partial_x^2 + (2\alpha+1)\, x^{-1}\partial_x,$$

где ∂_x — дифференцирование по x.

Пусть $d\mu(x) = x^{2\alpha+1}\,dx$ — мера на $\mathbb{R}_+$, $1 \le p \le \infty$, $L_{p,\alpha} := L_p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ — весовое пространство Лебега, $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ — норма в банаховом пространстве $L_{p,\alpha}$. Пусть $C_c^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ — множество четных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем.

Для любой функции $f \in C_c^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ обобщенный сдвиг Бесселя $T^y f(x) = u(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}_+$, определяется как решение следующей задачи Ко-

ши:

$$\mathcal{D}_y u(x,y) = \mathcal{D}_x u(x,y), \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial s}(x,0) = 0,. \tag{3}$$

В явном виде обобщенный сдвиг Бесселя задается формулой

$$T^y f(x) = u(x,y) = c_\alpha \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right)(\sin\varphi)^{2\alpha}\,d\varphi, \tag{4}$$

где

$$c_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}.$$

По формуле (4), оператор T^y продолжается на все функции $f \in L_{p,\alpha}$ и является линейным непрерывным оператором в банаховом пространстве $L_{p,\alpha}$.

Пусть h — произвольное положительное действительное число, k — произвольное натуральное число, $f \in L_{p,\alpha}$. Обобщенные конечные разности $\Delta_h^k f(x)$ и обобщенный модуль гладкости $\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha}$ порядка k определим формулами:

$$\Delta_h^1 f(x) = \Delta_h f(x) := f(x) - T^h f(x),$$

$$\Delta_h^k f(x) := \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(x)), \quad k > 1; \tag{5}$$

$$\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha} := \sup_{0<h\le\delta} \|\Delta_h^k f\|_{p,\alpha}, \quad \delta > 0. \tag{6}$$

Пусть $r > 0$ — действительное число, k — произвольное натуральное число, такое, что $2k > r$.

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x)$ принадлежит классу $H_{p,\alpha}^r$, $p \in [1,\infty]$, если $f \in L_{p,\alpha}$ и

$$\omega_k(f;\delta)_{p,\alpha} \le A_f\,\delta^r, \qquad \delta > 0, \tag{7}$$

где A_f — некоторое положительное число, не зависящее от δ.

Для $f \in H_{p,\alpha}^r$ определим полунорму

$$h_{p,\alpha}^r(f) := \sup_{\delta>0} \frac{\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha}}{\delta^r}. \tag{8}$$

Тогда $H_{p,\alpha}^r$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{H_{p,\alpha}^r} := \|f\|_{p,\alpha} + h_{p,\alpha}^r(f). \tag{9}$$

Можно доказать, что $H_{p,\alpha}^r$ не зависит от выбора k (см., [5]). Также в [5] содержатся другие описания пространств $H_{p,\alpha}^r$. Пространства $H_{p,\alpha}^r$ являются аналогами классических функциональных пространств Никольского $H_p^r(\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}$ (see [6]).

Для любой функции $f \in C_c^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ интегральное преобразование Бесселя определяется формулой

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\, j_\alpha(\lambda x)\, x^{2\alpha+1}\, dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+, \tag{10}$$

где $j_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя первого рода (см. [2] или [3]).

Для любого $p \in [1, +\infty)$ пусть $p' := \frac{p}{p-1}$. Если $1 < p \leq 2$ то для любой функции $f \in C_c^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ справедливо следующее неравенство Хаусдорфа – Юнга

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{p',\alpha} \leq A^{2/p'} \|f\|_{p,\alpha}, \tag{11}$$

где

$$A = 2^\alpha\, \Gamma(\alpha + 1). \tag{12}$$

Из (11) следует, что преобразование Бесселя $\mathcal{F}$ может быть единственным образом продолжено по непрерывности с $C_c^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ до линейного непрерывного отображения из банахова пространства $L_{p,\alpha}$, $1 < p \leq 2$, в банахово пространство $L_{p',\alpha}$. Продолженное отображение будет также обозначаться $\mathcal{F}$ и называться преобразованием Бесселя. Неравенство Хаусдорфа – Юнга (11) остается верным для $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Аналогом теоремы Титчмарша для преобразования Бесселя является следующая теорема.

Т е о р е м а. Пусть $f \in H^r_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq 2$, $r > 0$, и пусть $\mathcal{F}(f)$ — преобразование Бесселя функции f. Тогда $\mathcal{F}(f)$ принадлежит пространствам Лебега $L_{q,\alpha}$ при

$$\frac{p}{rp/(2\alpha+2) + p - 1} < q \leq \frac{p}{p-1}. \tag{13}$$

Отметим также предельный случай неравенства (13) при $\alpha \to -1/2$. При $\alpha = -1/2$, оператор Бесселя имеет вид $\mathcal{D} = d^2/dx^2$ и обобщенный сдвиг Бесселя принимает форму

$$T^y f(x) = \frac{1}{2}(f(x+y) + f(x-y));$$

отметим также, что $j_{-1/2}(x) = \cos x$ и преобразование Бесселя совпадает с косинус-преобразованием Фурье. Для случая $\alpha = -1/2$ неравенства (13) совпадают с неравенствами Титчмарша (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. — М., ОГИЗ, Гостехиздат. — 1948.

2. Левитан Б. М., Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи матем. наук. — 1951. — Т. 6. — No. 2. — С. 102–143.

3. Киприянов И. А., Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М., Наука. — 1997.

4. Triméche K., Generalized harmonic analysis and wavelet packets. — Gordon and Breach, Amsterdam. — 2001.

5. Платонов С. С., Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Известия РАН. Серия математическая. — 2007. — Т. 71. — No. 5. — С. 149–196.

6. Никольский С.М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М., Наука. — 1977.

УДК 519.644.5+517.956.224

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОДНОГО ИНТЕГРАЛА С КВАДРАТИЧНОЙ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬЮ

И. О. Резниченко
МГУ им. Ломоносова, физический факультет
e-mail: *liorb@mail.ru*
П. А. Крутицкий
ИПМ им. Келдыша РАН
e-mail: *biem@mail.ru*

В работе рассматривается вещественный интеграл с подынтегральной функцией, содержащей в общем случае два неприводимых квадратных трехчлена, один из которых находится под квадратным корнем. С помощью методов теории функций комплексного переменного интеграл вычисляется в явном виде. Интеграл возникает при выводе квадратурных формул для потенциалов, применяемых при решении краевых задач для уравнений математической физики.

Ключевые слова: интеграл с иррациональностью, квадратурная формула, потенциалы.

1. Введение

В процессе построения улучшенных квадратурных формул для потенциалов [1] возникает необходимость вычисления интеграла

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{S_1 U + S_0}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}},$$

где все коэффициенты, включая h, вещественные, кроме того, $C_2 > 0$ и $B_2 > 0$, а также

$$C_2U^2 + C_1U + C_0 > 0, \qquad B_2U^2 + B_1U + B_0 \geq 0$$

для всех вещественных U. Отсюда следует, что $C_1^2 - 4C_2C_0 < 0$ и $B_1^2 - 4B_2B_0 \leq 0$. Кроме того, исключим случай $B_1 = B_2C_1/C_2$, который подробно разобран в [1], т.е. будем считать, что

$$B_1 - B_2C_1/C_2 \neq 0. \tag{1}$$

Интеграл J_{12} имеет квадратичную иррациональность в знаменателе, и оба квадратных трехчлена в общем случае неприводимые. В [1] интеграл J_{12} вычислен явно при помощи замен, оставляющих рассмотрение интеграла и входящих в него величин в вещественной области, по методу, предложенному в [2], [3]. Однако при этом возникает множество различных условий на входящие в интеграл величины, что приводит к усложнению вычислений. В данной работе предложен иной способ вычисления интеграла, основанный на гиперболической замене. При таком подходе интеграл J_{12} распадается на сумму интегралов с комплексными параметрами.

2. Вычисление интеграла J_{12}

Поскольку квадратный трехчлен под корнем неотрицателен, его дискриминант неположителен, следовательно $B_1^2/(4B_2^2) - B_0/B_2 \le 0$. Поэтому положим $\chi_1^2 = B_0/B_2 - B_1^2/(4B_2^2) \ge 0$.

СЛУЧАЙ 1: $\chi_1 > 0$.

$$B_2U^2 + B_1U + B_0 = B_2\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2 + \chi_1^2\right] =$$

$$= B_2\chi_1^2\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2/\chi_1^2 + 1\right] = B_2\chi_1^2\left(\operatorname{sh}^2 t + 1\right),$$

где сделана гиперболическая замена

$$\operatorname{sh} t = \left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1, \quad U = \chi_1 \operatorname{sh} t - \frac{B_1}{2B_2}, \quad t = \operatorname{arcsh}\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right].$$

Теперь рассмотрим второй квадратный трехчлен в знаменателе и линейную функцию в числителе.

$$C_2U^2 + C_1U + C_0 = C_2\left(\chi_1^2 \operatorname{sh}^2 t - \frac{\chi_1 B_1}{B_2}\operatorname{sh} t + \frac{B_1^2}{4B_2^2}\right) + C_1\chi_1 \operatorname{sh} t + C_0 - \frac{B_1C_1}{2B_2} =$$

$$= C_2\chi_1^2 \operatorname{sh}^2 t + \left(C_1\chi_1 - \frac{\chi_1 B_1 C_2}{B_2}\right)\operatorname{sh} t + \frac{B_1^2C_2}{4B_2^2} - \frac{B_1C_1}{2B_2} + C_0 =$$

$$= \nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0 > 0,$$

$$S_1U + S_0 = S_1\chi_1 \operatorname{sh} t - \frac{B_1S_1}{2B_2} + S_0 = \epsilon_1 \operatorname{sh} t + \epsilon_0,$$

где

$$\nu_2 = C_2\chi_1^2 > 0, \quad \nu_1 = C_1\chi_1 - \chi_1 B_1 C_2/B_2,$$

$$\nu_0 = B_1^2C_2/(4B_2^2) - B_1C_1/(2B_2) + C_0, \quad \epsilon_1 = S_1\chi_1, \quad \epsilon_0 = S_0 - B_1S_1/(2B_2).$$

Поскольку $\nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0 > 0$, дискриминант этого квадратного трехчлена относительно $\operatorname{sh} t$ отрицательный, т.е.

$$\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0 < 0. \tag{2}$$

Кроме того, $\nu_1 \neq 0$ в силу (1). Учитывая, что $dU = \chi_1 \operatorname{ch} t\, dt$ и $\operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t$, запишем

$$J_{12} = \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int_{t_-}^{t_+} \operatorname{ch} t \cdot dt \frac{\epsilon_1 \operatorname{sh} t + \epsilon_0}{\left(\nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0\right) \operatorname{ch} t},$$

$$t_\pm = \operatorname{arcsh}\left[\left(\pm\frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right].$$

Разобьём знаменатель на произведение двух линейных функций от $\operatorname{sh} t$ с комплексными коэффициентами

$$J_{12} = \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int_{t_-}^{t_+} dt \frac{\epsilon_1 \operatorname{sh} t + \epsilon_0}{\nu_2(\operatorname{sh} t - G_-)(\operatorname{sh} t - G_+)} =$$

$$= \frac{1}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int_{t_-}^{t_+} dt \left(\frac{\lambda_-}{\operatorname{sh} t - G_-} + \frac{\lambda_+}{\operatorname{sh} t - G_+}\right),$$

где $G_-,\ G_+$ — комплексные корни уравнения $\nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0 = 0$ относительно $\operatorname{sh} t$:

$$G_- = \frac{-\nu_1 - \sqrt{\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0}}{2\nu_2} = g_1 - ig_2, \quad G_+ = \frac{-\nu_1 + \sqrt{\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0}}{2\nu_2} = g_1 + ig_2,$$

$$g_1 = -\frac{\nu_1}{2\nu_2} \neq 0, \qquad g_2 = \frac{\sqrt{|\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0|}}{2\nu_2} > 0, \quad g_1, g_2 \in R; \quad G_+ = \overline{G_-}. \tag{3}$$

Отметим, что $g_2 \neq 0$ в силу (2). Коэффициенты $\lambda_\pm$ зависят от $G_\pm$:

$$\lambda_- = \frac{\epsilon_1 G_- + \epsilon_0}{G_- - G_+} = \frac{\epsilon_1 G_- + \epsilon_0}{-2g_2 i}, \qquad \lambda_+ = \frac{\epsilon_1 G_+ + \epsilon_0}{G_+ - G_-} = \frac{\epsilon_1 G_+ + \epsilon_0}{2g_2 i}. \tag{4}$$

Рассмотрим

$$\frac{\lambda_\pm}{\operatorname{sh} t - G_\pm} = \frac{\lambda_\pm}{(e^t - e^{-t})/2 - G_\pm} \cdot \frac{e^t}{e^t} = \frac{2\lambda_\pm e^t}{e^{2t} - 2G_\pm e^t - 1}.$$

Тогда, перейдя к замене $\zeta = e^t,\ d\zeta = e^t dt,\ dt = d\zeta/\zeta$,

$$\zeta_1 = \exp\left(\operatorname{arcsh}\left[\left(-\frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right]\right),$$

$$\zeta_2 = \exp\left(\operatorname{arcsh}\left[\left(\frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right]\right), \tag{5}$$

получим

$$J_{12} = \frac{1}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int_{t_-}^{t_+} dt \left(\frac{2\lambda_- e^t}{e^{2t} - 2G_- e^t - 1} + \frac{2\lambda_+ e^t}{e^{2t} - 2G_+ e^t - 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\zeta} \cdot \left(\frac{2\lambda_-\zeta}{\zeta^2 - 2G_-\zeta - 1} + \frac{2\lambda_+\zeta}{\zeta^2 - 2G_+\zeta - 1}\right) =$$

$$= \frac{2}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left(\frac{\lambda_-}{\zeta^2 - 2G_-\zeta - 1} + \frac{\lambda_+}{\zeta^2 - 2G_+\zeta - 1} \right).$$

В данном случае нельзя применить стандартные формулы для нахождения первообразной от вещественных подынтегральных функций поскольку в нашем случае коэффициенты комплексные. Введём обозначения: $Z_{1-} = G_- - \sqrt{G_-^2 + 1}$, $Z_{1+} = G_- + \sqrt{G_-^2 + 1}$,

$$Z_{2-} = G_+ - \sqrt{G_+^2 + 1}, \qquad Z_{2+} = G_+ + \sqrt{G_+^2 + 1}, \tag{6}$$

$$\gamma_- = \frac{1}{2\sqrt{G_-^2 + 1}}, \qquad \gamma_+ = \frac{1}{2\sqrt{G_+^2 + 1}}. \tag{7}$$

Знаменатель в (7) не обращается в ноль, т.к. $\nu_1 \neq 0$ в силу (1). В результате

$$J_{12} = \frac{2}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left(\frac{\lambda_-}{(\zeta - Z_{1-})(\zeta - Z_{1+})} + \frac{\lambda_+}{(\zeta - Z_{2-})(\zeta - Z_{2+})} \right) = \frac{-2}{\nu_2\sqrt{B_2}} \times$$

$$\times \left[\lambda_-\gamma_- \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left(\frac{1}{\zeta - Z_{1-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{1+}} \right) + \lambda_+\gamma_+ \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left(\frac{1}{\zeta - Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{2+}} \right) \right].$$

Принимая во внимание выражения (3), (4), (6), (7), получаем

$$\lambda_- = \overline{\lambda_+}, \quad Z_{1-} = \overline{Z_{2-}}, \quad Z_{1+} = \overline{Z_{2+}}, \quad \gamma_+ = \overline{\gamma_-}.$$

Тогда

$$J_{12} =$$

$$= \frac{-2}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left[\overline{\lambda_+\gamma_+ \left(\frac{1}{\zeta - Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{2+}} \right)} + \lambda_+\gamma_+ \left(\frac{1}{\zeta - Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{2+}} \right) \right].$$

Так как $\zeta_1,\ \zeta_2 \in R$, то под интегралом находится сумма двух комплексно сопряженных функций, поэтому интеграл J_{12} вещественный

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}} \cdot \operatorname{Re} \left[\lambda_+\gamma_+ \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left(\frac{1}{\zeta - Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta - Z_{2+}} \right) \right].$$

В итоге

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}} \times$$

$$\times \operatorname{Re} \left[\lambda_+\gamma_+ \Big(\ln(Z_{2-} - \zeta_2) - \ln(Z_{2-} - \zeta_1) - \ln(Z_{2+} - \zeta_2) + \ln(Z_{2+} - \zeta_1) \Big) \right]. \tag{8}$$

Логарифмы с комплексными аргументами $Z_{2\pm} - \zeta_l$, где $l = 1, 2$, преобразуются по формуле

$$\ln(Z_{2\pm} - \zeta_l) = \ln|Z_{2\pm} - \zeta_l| + i \arg(Z_{2\pm} - \zeta_l), \qquad l = 1, 2. \tag{9}$$

Рассмотрим величины, входящие в формулу (8). Поскольку $g_2 = \operatorname{Im} G_+$ и $\operatorname{Im} G_+ > 0$, то можно считать, что $\arg G_+ \in (0, \pi)$, тогда $\arg\left(G_+^2 + 1\right) \in (0, 2\pi)$ и $\arg\sqrt{G_+^2 + 1} = (1/2)\arg(G_+^2 + 1) \in (0, \pi)$, поэтому $\operatorname{Im}(\sqrt{G_+^2 + 1}) > 0$. Более того, если $\arg G_+ \in (0, \pi/2)$, то $\arg(\sqrt{G_+^2 + 1}) \in (0, \pi/2)$, а если $\arg G_+ \in (\pi/2, \pi)$, то $\arg(\sqrt{G_+^2 + 1}) \in (\pi/2, \pi)$. Следовательно

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\sqrt{G_+^2 + 1}) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} G_+) = \operatorname{sgn} g_1.$$

Положим

$$G_+^2 + 1 = g_1^2 - g_2^2 + 1 + 2g_1g_2i = |G_+^2 + 1|\exp(i\Psi), \qquad \Psi = \arg(G_+^2 + 1),$$

$$\cos\Psi = \frac{g_1^2 - g_2^2 + 1}{|G_+^2 + 1|}, \qquad |G_+^2 + 1| = \sqrt{(g_1^2 - g_2^2 + 1)^2 + 4g_1^2g_2^2}. \tag{10}$$

Используя тригонометрические формулы [4], получим

$$\sqrt{G_+^2 + 1} = \sqrt{|G_+^2 + 1|}\exp(i\Psi/2) = \sqrt{|G_+^2 + 1|}\left(\cos\frac{\Psi}{2} + i\sin\frac{\Psi}{2}\right),$$

$$\cos\frac{\Psi}{2} = \operatorname{sgn}(g_1)\sqrt{\frac{1 + \cos\Psi}{2}} = \operatorname{sgn}(g_1)\sqrt{\frac{|G_+^2 + 1| + g_1^2 - g_2^2 + 1}{2|G_+^2 + 1|}},$$

$$\sin\frac{\Psi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\Psi}{2}} = \sqrt{\frac{|G_+^2 + 1| - (g_1^2 - g_2^2 + 1)}{2|G_+^2 + 1|}}. \tag{11}$$

Поскольку $\arg\sqrt{G_+^2 + 1} = \Psi/2 \in (0, \pi)$, то $(-\Psi/2) \in (-\pi, 0)$. Следовательно

$$\gamma_+ = \frac{1}{2\sqrt{G_+^2 + 1}} = \frac{\exp(-i\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2 + 1|}},$$

$$\operatorname{Re}\gamma_+ = \frac{\cos(\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2 + 1|}} = \operatorname{sgn}(g_1)\frac{\sqrt{|G_+^2 + 1| + g_1^2 - g_2^2 + 1}}{2\sqrt{2}\,|G_+^2 + 1|},$$

$$\operatorname{Im}\gamma_+ = -\frac{\sin(\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2 + 1|}} = -\frac{\sqrt{|G_+^2 + 1| - (g_1^2 - g_2^2 + 1)}}{2\sqrt{2}\,|G_+^2 + 1|}, \tag{12}$$

где g_1 и g_2 определяются в (3), а $|G_+^2 + 1|$ в (10).

Л е м м а . Пусть $G_+ = g_1 + ig_2$, где $g_1,\ g_2$ — вещественные числа и $g_2 > 0$, тогда

$$g_2 = \operatorname{Im} G_+ > |\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2 + 1}|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя обозначения и соотношения из (10), (11), находим

$$\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2 + 1} = \sqrt{|G_+^2 + 1|}\sin\frac{\Psi}{2} =$$

$$= \sqrt{|G_+^2+1|}\sqrt{\frac{|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)}{2|G_+^2+1|}} = \sqrt{\frac{|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)}{2}}. \quad (13)$$

Поскольку $g_2 > 0$, можно проверить, что

$$|G_+^2+1| = \sqrt{(g_1^2-g_2^2+1)^2+4g_1^2g_2^2} < g_1^2+g_2^2+1,$$

поэтому

$$\frac{1}{2}(|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)) < g_2^2.$$

Из (13) вытекает, что

$$(\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1})^2 = \frac{1}{2}(|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)).$$

Следовательно,

$$(\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1})^2 < g_2^2,$$

откуда $|\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1}| < g_2$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. Если выполнены условия леммы, то

$$\operatorname{Im}(Z_{2\pm}-\zeta_l) = \operatorname{Im}(G_+ \pm \sqrt{G_+^2+1}) > 0, \quad l=1,2.$$

Поскольку $Z_{2\pm} = (G_+ \pm \sqrt{G_+^2+1})$ согласно (6), а ζ_1 и ζ_2 — вещественные числа, находим

$$Z_{2\pm}-\zeta_l = \operatorname{Re}(Z_{2\pm}-\zeta_l) + i\operatorname{Im}(Z_{2\pm}-\zeta_l),$$

$$\operatorname{Re}(Z_{2\pm}-\zeta_l) = g_1 \pm \sqrt{|G_+^2+1|}\cos\frac{\Psi}{2} - \zeta_l,$$

$$\operatorname{Im}(Z_{2\pm}-\zeta_l) = g_2 \pm \sqrt{|G_+^2+1|}\sin\frac{\Psi}{2},$$

$$|Z_{2\pm}-\zeta_l| = \sqrt{\left(g_1 \pm \sqrt{|G_+^2+1|}\cos\frac{\Psi}{2}-\zeta_l\right)^2 + \left(g_2 \pm \sqrt{|G_+^2+1|}\sin\frac{\Psi}{2}\right)^2}, \quad (14)$$

где $l=1,2$. По следствию к лемме, $\operatorname{Im}(Z_{2\pm}-\zeta_l) > 0$, поэтому можно считать, что $\arg(Z_{2\pm}-\zeta_l) \in (0,\pi)$, где $l=1,2$. Следовательно,

$$\arg(Z_{2\pm}-\zeta_l) = \arccos\frac{\operatorname{Re}(Z_{2\pm}-\zeta_l)}{|Z_{2\pm}-\zeta_l|} = \arccos\frac{g_1 \pm \sqrt{|G_+^2+1|}\cos(\Psi/2)-\zeta_l}{|Z_{2\pm}-\zeta_l|}, \quad (15)$$

где $l=1,2$. В (14), (15), используются обозначения из (3), (5), (10), (11).

Заметим, что

$$\lambda_+ = \frac{\epsilon_1 G_+ + \epsilon_0}{G_+ - G_-} = \frac{\epsilon_1(g_1+ig_2)+\epsilon_0}{2ig_2} = \frac{\epsilon_1}{2} - \frac{\epsilon_1 g_1+\epsilon_0}{2g_2}i,$$

поэтому

$$\operatorname{Re}\lambda_+ = \frac{\epsilon_1}{2}, \qquad \operatorname{Im}\lambda_+ = -\frac{\epsilon_1 g_1 + \epsilon_0}{2g_2}. \tag{16}$$

Положим

$$\lambda_+\gamma_+ = \Lambda_1 + i\Lambda_2, \quad \Lambda_1 = \frac{\epsilon_1}{2}\operatorname{Re}\gamma_+ + \frac{\epsilon_1 g_1 + \epsilon_0}{2g_2}\operatorname{Im}\gamma_+,$$

$$\Lambda_2 = \frac{\epsilon_1}{2}\operatorname{Im}\gamma_+ - \frac{\epsilon_1 g_1 + \epsilon_0}{2g_2}\operatorname{Re}\gamma_+,$$

где $\operatorname{Re}\gamma_+$, и $\operatorname{Im}\gamma_+$ однозначно определяются в (12) с использованием (3), (10). Применяя формулу (14), находим сумму логарифмов

$$s_1 = \ln|Z_{2-} - \zeta_2| - \ln|Z_{2-} - \zeta_1| - \ln|Z_{2+} - \zeta_2| + \ln|Z_{2+} - \zeta_1|.$$

Используя формулу (15), вычисляем сумму аргументов

$$s_2 = \arg(Z_{2-} - \zeta_2) - \arg(Z_{2-} - \zeta_1) - \arg(Z_{2+} - \zeta_2) + \arg(Z_{2+} - \zeta_1).$$

В формулах для s_1, s_2 использованы обозначения из (3), (5), (10), (11). Согласно (8) и (9), получим

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}} \cdot \operatorname{Re}\left[\lambda_+\gamma_+(s_1 + is_2)\right] = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}} \cdot \operatorname{Re}\left[(\Lambda_1 + i\Lambda_2)(s_1 + is_2)\right].$$

В итоге

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}} \cdot (\Lambda_1 s_1 - \Lambda_2 s_2).$$

Таким образом, в случае $\chi_1 > 0$ интеграл J_{12} вычислен явно.

СЛУЧАЙ 2: $\chi_1 = 0$. В этом случае

$$B_2U^2 + B_1U + B_0 = B_2\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2 + \chi_1^2\right] = B_2\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2 = B_2(U + \Omega)^2,$$

где $\Omega = B_1/(2B_2)$. Тогда

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{S_1U + S_0}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int_{-h/2}^{h/2} \operatorname{sgn}(U + \Omega) \frac{(S_1U + S_0)dU}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)(U + \Omega)}.$$

Введём обозначение

$$J_{12}^*(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{(S_1U + S_0)dU}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)(U + \Omega)}.$$

Тогда

$$J_{12} = \begin{cases} J_{12}^*(-h/2, h/2) & \Omega > h/2, \\ -J_{12}^*(-h/2, h/2) & \Omega < -h/2, \\ -J_{12}^*(-h/2, 0) + J_{12}^*(0, h/2) & \Omega \in (-h/2, h/2). \end{cases} \tag{17}$$

Положим

$$p_1 = -\frac{C_2(S_1\Omega - S_0)}{C_1\Omega - C_0 - C_2\Omega^2}, \quad p_2 = \frac{S_0}{\Omega} - \frac{C_0(S_1\Omega - S_0)}{\Omega(C_1\Omega - C_0 - C_2\Omega^2)},$$

$$p_3 = \frac{S_1\Omega - S_0}{C_1\Omega - C_0 - C_2\Omega^2}.$$

Несложно проверить, что

$$J_{12}^*(t_1,t_2) = \frac{1}{\sqrt{B_2}}\left[p_1\int_{t_1}^{t_2}\frac{UdU}{C_2U^2+C_1U+C_0} + p_2\int_{t_1}^{t_2}\frac{dU}{C_2U^2+C_1U+C_0} + \right.$$

$$\left. + p_3\int_{t_1}^{t_2}\frac{dU}{U+\Omega}\right]. \tag{18}$$

Интегралы в (18) табличные. Воспользуемся формулами (1.2.8.19) и (1.2.8.13) из [5]. Учитывая, что $C_1^2 - 4C_2C_0 < 0$, находим

$$J_{12}^*(t_1,t_2) = \frac{1}{\sqrt{B_2}}\left[p_3\ln|U+\Omega| + \frac{p_1}{2C_2}\ln\left|C_2U^2+C_1U+C_0\right| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{4C_2C_0-C_1^2}}\left(2p_2 - \frac{p_1C_1}{C_2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{2C_2U+C_1}{\sqrt{4C_2C_0-C_1^2}}\right)\right]\Bigg|_{U=t_1}^{U=t_2}. \tag{19}$$

Таким образом, во втором случае при помощи (17), (19) интеграл J_{12} вычислен явно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крутицкий П.А., Резниченко И.О., Колыбасова В.В. Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя. Дифференциальные уравнения, 2020, т. 56, N 9, с. 1270 — 1288.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 1 и 2. М.: Физматлит, 1973.

3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.

4. Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г. Математические формулы. М.: Физматлит, 1985.

5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 2002.

УДК 517.958:531.34

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА

Л.И. Сербина, д.ф.-м.н., проф.
ГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт»
e-mail: *lserbina@mail.ru*

Решение вопроса оптимального управления процессом влагопереноса в средах с фрактальной структурой, сведено к проблеме исследования разрешимости начально-краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка параболического типа.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, фрактальные структуры, нелинейная динамика, дробная производная Римана Лиувилля, дискретный аналог, интегральное уравнение, функция типа Митаг-Леффдера.

Введение

Достигнутые в последнее время определенные успехи математического моделирования динамических процессов массопереноса с ярко выраженными нелинейными свойствами связаны с использованием фрактального анализа, фундаментальной основой которого является математический аппарат дифференциальных уравнений с дробной производной. Это обусловлено тем, что дробные уравнения с производной не целого порядка по координатам с принципиально иной точки зрения объясняют многие нелинейные свойства системы, а дробные производные по времени позволяют учитывать количественные эффекты "остаточной" памяти и нелокальные свойства динамики процессов массопереноса в пористых средах [1].

Постановка задачи

Математическое описание эволюции широкого класса диффузионных процессов, в рамках общепринятой конвективно-диффузионной модели подземного массопереноса, связано со специальным классом решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка параболического типа.

Принцип локальности в случае одномерного движения влаги в почвенном слое $0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{r}$ приводит к следующему локальному существенно нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных параболического типа

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left[D(u)\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}\right] - \frac{\partial \mathrm{k(u)}}{\partial \mathrm{x}}, \qquad (1)$$

где $u = u(x;\ t)$- влажность в точке x в момент времени t; $D(u))$ и k(u) - коэффициенты диффузитивности и влагопроводности при влажности $\mathrm{u} = u(\mathrm{x}, \mathrm{t})$.

Характерной чертой модельного дифференциального уравнения целого порядка (1), полученного на основе закона Дарси и простых модельных представлений пористой среды в рамках евклидовой геометрии, является то, что оно дает возможность получить описание динамики влажности только в определенной области, вне которой должны быть использованы более адекватные

дифференциальные уравнения. Попытки учета в уравнении (1) нелинейных характеристик влагопереноса в большинстве практически интересных задач приводят при построении аналитических решений для этих задач к весьма громоздким выкладкам, что снижает общую эффективность от использования традиционного математического аппарата.

Почва и почвогрунт, обладающие сложной топологией парового пространства, хорошо интерпретируются как среды с фрактальной структурой. Как известно [3], внутренняя фрактальная структура насыщенной капиллярно-пористой среды протекания влияет появление хаотических режимов влагопереноса, с ярко выраженными нелинейными особенностями. Вследствие этого представляется весьма перспективным, что для учета при построении функциональных зависимостей, описывающих процессы влагопереноса с резко изменяющимися свойствами в пространстве и во времени, использовать аппарат дробного дифференцирования и интегрирования.

Процесс движения влаги в почвенном слое $[0, \mathrm{r}]$ в таких средах имеет фрактальную во времени природу и удовлетворительно описывается дробной производной Римана-Лиувилля по времени [2]. При определенной схематизации одномерное нелинейное движение влаги в коллоидно капилярно-пористом слое $0 < x < r$ описывается дифференциальным уравнением в частных производных дробного порядка

$$D_{0t}^{\alpha} u(x,\eta) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (2)$$

где $u = u(x,t)$ - влажность; D_{0t}^{α} - оператор дробного дифференцирования по времени t порядка $\alpha \in [0,1]$; α - коэффициент фрактальной диффузии, b- фактическая скорость фильтрации.

Уравнение дробного порядка (2), существенно дополняя общую картину представления нелинейной динамики линейным дифференциальным уравнением параболического типа целого порядка, позволяет обнаружить связь между нелинейными явлениями и фрактальной средой протекания, которые оставаясь в рамках целочисленного дифференцирования кажутся независимыми.

В качестве математической модели широкого класса задач, связанных с прогнозированием динамики влаги в почвогрунтах, интерпретируемых как среды с фрактальной структурой, выступает задача в следующей постановке:

Найти регулярное в любой точке $\mathrm{x} \in (0, \mathrm{r})$ и для любого момента времени $t > 0$ решение $\mathrm{u} = \mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$уравнения (1), ограниченное при $\mathrm{t} \to 0$ и удовлетворяющее условию:

$$u(0,t) = r(t), u_x(0,t) = v(t), 0 \le t \le T. \qquad (3)$$

В классе ограниченных функций построен численный алгоритм поиска приближенного решения задачи (3) для дробного уравнения (2). В основе численного алгоритма лежит аппроксимация на каждом шаге

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \qquad x_i \in [0,r], \ \ i = 0,1 \ldots, n$$

уравнения (2) дискретным дифференциальным уравнением дробного порядка:

$$D_{0t}^{\alpha} u_{i+1} = \lambda_i u_{i+1} + f_i(t), 0 < t < T,$$

где $\lambda_i = \frac{2b\lambda^2 h_i}{\delta_i}$, $\delta_i = 2(A_i - 1) - \lambda^2 h^2 - 2\lambda h_i \neq 0, v_i = u_x|_{x=x_i}$;

$$A_i = \exp[\lambda h_i] - \frac{f_i(t)}{\lambda_i}$$

$$= u_i + \frac{(A_i - 1)v_i}{\lambda} + \left\{ \frac{\left[2\left(h_i - \frac{1}{\lambda}\right)(A_i - 1) + 2h_i - \lambda h_i^2\right]}{2\lambda b h_i} \right\} D_{0t}^{\alpha} u_i(\eta).$$

Из аналога формулы Ньютона - Лейбница [1] следует, что уравнение (3) эквивалентно (в классе ограниченных решений) интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\mathrm{D}_{0t}^{-\alpha}\mathrm{D}_{0t}^{\alpha}\mathrm{u}_{i+1}(\eta) = \lambda_i \mathrm{D}_{0t}^{-\alpha}\mathrm{u}_{i+1}(\eta) + \mathrm{D}_{0t}^{-\alpha}\mathrm{f}_i\,,$$

$$\mathrm{u}_{i+1}(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^i \frac{\mathrm{u}_{i+1}(\xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}\,\xi + \mathrm{D}_{0t}^{-\alpha}\mathrm{f}_i(\xi). \qquad (4)$$

Единственное (ограничение при $t \to 0$) решение уравнения (4) задается формулой (см.[2])

$$\mathrm{u}_{i+1}(t) = \mathrm{D}_{0t}^{-\alpha}\mathrm{f}_i(\xi) + \lambda_i \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\frac{1}{\alpha}}[\lambda_i (t-\xi)^{\alpha}; \alpha]\, \mathrm{D}_{0\xi}^{-\alpha}\mathrm{f}_i(\eta)\mathrm{d}\xi,$$

где $\mathrm{E}_p(z, \mu)$ - функция типа Миттаг-Леффлера.

Приближенное численное решение дробного дифференциального уравнения (2), существенно дополняя общую картину представления нелинейной динамики влагопереноса линейным дифференциальным уравнением параболического типа целого порядка, позволяет обнаружить связь между нелинейными явлениями и фрактальной средой протекания, которые оставаясь в рамках целочисленного дифференцирования кажутся независимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000. 299
2. Нигматулин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация. // ТМФ. 1992. Т. 90. № 3. С. 405.
3. Сербина Л.И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.

УДК 517.547

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

О.Д. Соломатин, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

В статье рассматривается решение дифференциально-операторного уравнения в нормированном пространстве функций действительной переменной. Исследуется полученное решение рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: Нормированное пространство функций действительной переменной, дифференциально-операторное уравнение.

Найти решение следующей задачи:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au + t\cdot e^{-x^2}, \quad Af = e^{ix}f(x), \quad f\in M, \quad u(t,x)\Big|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{du}{dt}\Big|_{t=0} = 1.$$

Задачу решаем в нормированном пространстве M функций действительной переменной $x\in R$, определенных, непрерывных и ограниченных на всей числовой оси. M – нормированное пространство с нормой $\|f\| = \sup\limits_{|x|<\infty}|f(x)|$.

Оператор Af действует как оператор умножения функции $f(x)$ на e^{ix}.

Решение представляется в виде [1]:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{(1+x^2)(2n)!}t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{(2n+1)!}t^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\frac{(t-\varsigma)^{2n+1}}{(2n+1)!}A^n f(\varsigma)d\varsigma =$$

$$= \left[f(\varsigma) = \varsigma e^{-x^2}, \quad A^n f(\varsigma) = e^{inx}f(\varsigma) = e^{inx}\varsigma e^{-x^2}, \quad shx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] =$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(e^{\frac{ix}{2}}t\right)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(e^{\frac{ix}{2}}t\right)^{2n+1}e^{-\frac{ix}{2}}}{(2n+1)!} + e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\frac{(t-\varsigma)^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{inx}\varsigma d\varsigma =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^t(t-\varsigma)^{2n+1}\varsigma d\varsigma = \left[\begin{array}{l} u=\varsigma, \quad du = d\varsigma, \\ dv = (t-\varsigma)^{2n+1}d\varsigma, \quad v = -\dfrac{(t-\varsigma)^{2n+2}}{2n+2}\end{array}\right] = \\ \displaystyle = -\frac{\varsigma(t-\varsigma)^{2n+2}}{2n+2}\Big|_0^t + \int_0^t\frac{(t-\varsigma)^{2n+2}}{2n+2}d\varsigma = \int_0^t\frac{(t-\varsigma)^{2n+2}}{2n+2}d\varsigma \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} ch\left(e^{\frac{ix}{2}} t\right) + e^{-\frac{ix}{2}} sh\left(e^{\frac{ix}{2}} t\right) + e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{2n+2}}{(2n+2)!} e^{inx} d\varsigma =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} ch\left(e^{\frac{ix}{2}} t\right) + e^{-\frac{ix}{2}} sh\left(e^{\frac{ix}{2}} t\right) + e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{(2n+2)!} \int_0^t (t-\varsigma)^{2n+2} d\varsigma =$$

$$= A + e^{-x^2} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (t-\varsigma)^{2n+2}}{(2n+2)!} d\varsigma = A + e^{-x^2} \frac{1}{\lambda} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1} (t-\varsigma)^{2n+2}}{(2n+2)!} d\varsigma =$$

$$= A + e^{-x^2} \frac{1}{\lambda} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\frac{2(n+1)}{2}} (t-\varsigma)^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} d\varsigma =$$

$$= A + e^{-x^2} \frac{1}{\lambda} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\lambda}(t-\varsigma)\right)^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} d\varsigma = \left[n+1 = k, \quad e^{ix} = \lambda \right] =$$

$$= A + e^{-x^2} \frac{1}{\lambda} \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\lambda}(t-\varsigma)\right)^{2k}}{(2k)!} d\varsigma =$$

$$= A + e^{-x^2} \frac{1}{\lambda} \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\lambda}(t-\varsigma)\right)^{2k}}{(2k)!} - 1 \right) d\varsigma = \left[ch\, t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right] =$$

$$= A + e^{-x^2} \frac{1}{\lambda} \int_0^t \left(ch\left(\sqrt{\lambda}(t-\varsigma)\right) - 1 \right) d\varsigma = A + e^{-x^2} \frac{1}{\lambda} \int_0^t ch\left(\sqrt{\lambda}(t-\varsigma)\right) d\varsigma -$$

$$- e^{-x^2} \frac{1}{\lambda} \int_0^t d\varsigma = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda}(t-\varsigma) = p, \\ -\sqrt{\lambda} d\varsigma = dp \end{bmatrix} = A - e^{-x^2} \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}} \int_{\sqrt{\lambda}\cdot t}^{0} ch\, p dp - e^{-x^2} \frac{t}{\lambda} =$$

$$= A + e^{-x^2} \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}} sh\, p \Big|_0^{\sqrt{\lambda}\cdot t} - e^{-x^2} \frac{t}{\lambda} =$$

$$= A + e^{-x^2} \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}} sh\left(\sqrt{\lambda}\cdot t\right) - e^{-x^2} \frac{t}{\lambda} = A + e^{-x^2} \lambda^{-\frac{3}{2}} sh\left(\sqrt{\lambda}\cdot t\right) - e^{-x^2} \frac{t}{\lambda} =$$

$$= A + e^{-x^2} e^{-\frac{3ix}{2}} sh\left(e^{\frac{ix}{2}} t\right) - e^{-x^2} t e^{-ix} = \frac{ch\left(e^{\frac{ix}{2}} t\right)}{1+x^2} + e^{-\frac{ix}{2}} sh\left(e^{\frac{ix}{2}} t\right) +$$

$$+e^{-x^2}e^{-\frac{3ix}{2}}sh\left(e^{\frac{ix}{2}}t\right)-e^{-x^2}te^{-ix}=\frac{ch\left(e^{\frac{ix}{2}}t\right)}{1+x^2}+e^{-\frac{ix}{2}}\left(1+e^{-x^2-ix}\right)sh\left(e^{\frac{ix}{2}}t\right)-te^{-x^2-ix}.$$

Далее, можно вычислить характеристики роста полученного решения $u(t)=u(t,x)$ – целая векторнозначная функция со значениями в пространстве M имеет порядок роста $\rho(u)=1$ и тип $\sigma(u)=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соломатин О.Д., Ломакин Д.Е., Можарова Т.Н. К вопросу о структуре решений дифференциально-операторных уравнений в линейных топологических пространствах // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXI (3-9 мая 2020 г.) / Воронежский государственный университет; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Математический институт имени В.А. Стеклова РАН. – Воронеж: АНО «Наука-Юнипресс», 2020. – с. 188-189.

УДК 517.547

СРАВНЕНИЕ СКОРОСТИ РОСТА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

О.Д. Соломатин, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

В статье рассматривается сравнение роста показательной, логарифмической и степенной функций. Для решения поставленной задачи указан путь сравнения скорости роста данной функции со скоростью роста определенных эталонов.

Ключевые слова: элементарная функция, эталон роста, шкала роста.

Рассмотрим следующую элементарную задачу ([1], с. 145). Пусть даны три функции: показательная e^x, логарифмическая $\ln x$ и степенная x^α $(\alpha>0)$. Какая из них при $x\to+\infty$ $(x\in R)$ имеет наибольший порядок роста, а какая – наименьший?

Естественным является следующее определение. Если при $x\to+\infty$ функции $f(x)\to+\infty$ и $g(x)\to+\infty$, и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$, то говорят, что функция f имеет больший порядок роста, чем функция g. Если же $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, то говорят, что функция f имеет меньший порядок роста, чем функция g. Аналогично можно сравнивать быстроту роста функций при $x\to a$ и $x\to-\infty$.

Воспользовавшись правилом Лопиталя, нетрудно видеть, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty \text{ и } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0,\ \alpha>0.$$

Таким образом, при $x\to+\infty$ показательная функция растет быстрее любой степенной функции, а логарифмическая функция растет медленнее любой степенной функции.

Ответим теперь на поставленный вначале статьи вопрос более корректно. В работе автора $[2]$ вопрос сравнения быстроты роста элементарных функций решается путем сравнения скорости роста данной функции со скоростью роста определенных эталонов. Для этого строго вводятся определения порядка и типа роста функции, и рассматривается система шкал роста.

1. Степенная шкала роста. Эталон вида σx^ρ, где ρ – порядок, а σ – тип роста функции. На практике вычисление порядка и типа функции можно осуществлять по формулам:

$$\rho=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln f(x)}{\ln x},\quad \sigma=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{x^\rho}\quad (0<\rho<\infty).$$

2. Логарифмическая шкала роста, которую применяют для нахождения порядка и типа функции $f(x)$, имеющей нулевой порядок по степенной шкале. Эталоном в данном случае служат функции вида $\nu(\ln x)^\gamma$. Вычисление логарифмического порядка γ и логарифмического типа ν осуществляем по формулам:

$$\gamma=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln f(x)}{\ln\ln x},\quad \nu=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{(\ln x)^\gamma}\quad (0<\gamma<\infty).$$

3. Б-шкала роста, которую применяем для нахождения порядка и типа функции $f(x)$, имеющей бесконечный порядок по степенной шкале. Эталоном служат функции вида $e^{\omega x^\alpha}$. Вычисление Б-порядка α и Б-типа ω осуществляем по формулам:

$$\alpha=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln\ln f(x)}{\ln x},\quad \omega=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln f(x)}{x^\alpha}\quad (0<\alpha<\infty).$$

Заметим, что рассмотренные выше шкалы роста для измерения роста неотрицательных функций $f(x)$ при $x>0$ допускают и дальнейшее уточнение.

Вернемся к задаче, поставленной в начале статьи. Для функции $f(x)=x^\alpha$, $x>0$, $\alpha>0$ порядок $\rho=\alpha$, а тип $\sigma=1$. Для функции $f(x)=e^x$ имеем:

$$\rho=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln e^x}{\ln x}=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{x}{\ln x}=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{\frac{1}{x}}=+\infty,$$

тогда по Б-шкале для функции $f(x)=e^x$ находим:

$$\alpha=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln\ln e^x}{\ln x}=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln x}{\ln x}=1,$$

$$\omega=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln e^x}{x^1}=1.$$

Для функции $f(x)=\ln x,\ x>1$ по степенной шкале получим:

$$\rho=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln\ln x}{\ln x}=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{\ln x}=0,$$

тогда по логарифмической шкале для этой функции имеем:

$$\gamma=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln\ln x}{\ln\ln x}=1,\quad \nu=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln x}{\ln x}=1.$$

С более содержательными примерами можно познакомиться в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я., Мордкович А.Г., Куницкая Е.С. Математический анализ: Дифференциальное исчисление. Учебное пособие для студентов-заочников I курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1984.
2. Соломатин О.Д. Различные эталоны роста элементарных функций. Научно-методический журнал «CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование». – Елец, 2017. Выпуск № 2(6), с. 28-31.

УДК 517.968.22

О ЗАДАЧЕ ТИПА КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Е.В. Чаплыгина, к.ф.-м.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева»

e-mail: *lena260581@yandex.ru*

Исследуется дифференциально-разностное уравнения дробного порядка с запаздыванием в классе непрерывных по Гельдеру функций.

Ключевые слова: дробная производная, функция Миттаг-Леффлера, опережающе-запаздывающее уравнение.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение дробного порядка

$$\sum_{k=-1}^{1}b_{k+1}D_0^{\alpha}y(x-k\tau)=y(x),\ 0<x<3\tau,\ 0<\alpha<1, \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$y(x) = r(x), -\tau \le x \le 0, \tag{2}$$

$$y(x) = \rho(x), 3\tau \le x \le 4\tau, \tag{3}$$

$$D_0^{\alpha-1} y(x)\big|_{x=j\tau} = a_j \, (j = 0,1,2), \tag{4}$$

где $r(x)$, $\rho(x)$, α, a_j, b_j $(j = 0,1,2)$ - заданные функции и постоянные величины, причем

$$D_0^{\alpha} y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} - \tag{5}$$

дробная производная[1,с.43] порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1,$ Римана-Лиувилля; $\Gamma(\beta) -$ гамма-функция [2, с.8].

Задача G. Найти решение $y(x)$ уравнения (1) на промежутке $0 < x < 3\tau$ из класса $H_\alpha (0 < \alpha < 1)$, удовлетворяющее условиям (2)-(4) и $r(0) = D_0^{\alpha-1} y(0)$.

Теорема. Пусть функции $r(x)$, $\rho(x) \in H_\alpha$ и $b_0 = b_2$, $b_1 > \sqrt{2} b_0 > 0$. Тогда решение задачи (1)-(4) в промежутке $0 < x < 3\tau$, существует, непрерывно и единственно.

Доказательство.

Сведем уравнение (1) к системе трех уравнений дробного порядка без отклонений аргумента x.

Вводя вектор

$$\overline{y}(x) = (y_0(x), y_1(x+\tau), y_2(x+2\tau))^T, \; x \in (0,\tau) \tag{6}$$

где

$$y_k(x) = y(x), x \in (k\tau, (k+1)\tau) \; (k = 0,1,2), \tag{7}$$

с учетом (2), (3), уравнение (1) представим в форме системы трех уравнений относительно функций $y_k(x), x \in (k\tau, (k+1)\tau)(k = 0,1,2)$ и приведем в них замену x на $x + k\tau$:

$$\mathrm{B} D_0^{\alpha} \overline{y}(x) = \overline{y}(x) + \overline{m}(x), \; x \in (0,\tau), \tag{8}$$

где

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \\ 0 & b_2 & b_1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{m}(x) = (m_0(x), m_1(x), m_2(x))^{\mathrm{T}} = (-b_2 D_0^{\alpha} r(x-\tau), 0, -b_0 D_0^{\alpha} \rho(x+3\tau))^{\mathrm{T}}.$$

При $b_0 = b_2$, $b_1 > \sqrt{2} b_0 > 0$ матрица B является симметрической, причём

$$\mathrm{T}^{-1} \mathrm{B} \mathrm{T} = \Lambda_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \beta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},\mathrm{T}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\overline{p_0}\\ \overline{p_1}\\ \overline{p_2}\end{pmatrix},$$

$\beta_j = b_1 - (-1)^j \sqrt{2} b_0 2^{1-j}$ $(j = 0,1,2)$ - ее собственные значения.

Матричное уравнение (8), умноженное слева на T^{-1}, в силу $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{B} = \Lambda_{\mathrm{B}}\mathrm{T}^{-1}$, после преобразований приводится к трём отдельным уравнениям дробного порядка без отклонений аргумента

$$D_0^{\alpha} q_j(x) = \frac{1}{\beta_j} q_j(x) + h_j(x), 0 < x < \tau (j = 0,1,2), \tag{9}$$

где

$$q_j(x) = <\overline{p_j}, \overline{y}(x)>, h_j(x) = \frac{1}{\beta_j} < \overline{p_j}, \overline{m}(x)> - \tag{10}$$

скалярные произведения векторов, а

$$D_0^{\alpha-1} q_j(x)\Big|_{x=0} = c_j (j = 0,1,2) - \tag{11}$$

начальное условие, причем

$$c_j = <\overline{\overline{p_j}, \overline{a}}>, \overline{a} = \left(a_0, a_1, a_2\right)^{\mathrm{T}}.$$

Множество решений $q_j(x), x \in (0,\tau)(j = 0,1,2)$ трёх уравнений (10) содержит все решения $y(x) = y_j(x), x \in (j\tau, (j+1)\tau)(j = 0,1,2)$ уравнения (1), которые, в силу (6), (7), можно выделить из (10) в виде

$$\overline{y}(x) = \mathrm{T}\begin{pmatrix}q_0(x)\\ q_1(x)\\ q_2(x)\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Таким образом, поставленная задача для уравнения (1) в промежутке $0 < x < 3\tau$ относительно искомой функции $y(x)$ сведена к трем задачам для трех уравнений дробного порядка (9) в промежутке $0 < x < 3\tau$ относительно $q_j(x)$ $(j = 0,1,2)$ вида (10).

Задача G_j**.** Найти решения $q_j(x) \in H_{\alpha}$ на промежутке $0 < x < \tau$ уравнения (9), $h_j(x) \in H_{\alpha} (j = 0,1,2)$, удовлетворяющее условию (11).

Лемма. Пусть функция $h_j(x) \in H_{\alpha} (j = 0,1,2)$, тогда решение задачи G_j (9), (10) при $0 < x < \tau$ существует, непрерывно и единственно.

Доказательство леммы аналогично [1, с. 597-602]. Искомое решение $q_j(x)$ задачи G_j для уравнения (9) при условии (11) имеет вид

$$q_j(x) = c_j x^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\frac{1}{\beta_j} x^{\alpha}\right) + \int_0^x h_j(t)\left(x-t\right)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\frac{1}{\beta_j}\left(x-t\right)^{\alpha}\right) dt, \tag{13}$$

$0 < x < \tau (j = 0,1,2)$, где $\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(z)$ - функция [1 с. 33] Миттаг-Леффлера.

Решение $q_j(x), 0 < x < \tau$ (13) задачи G_j, в совокупности с равенством (12), дает решение $y(x)$, $0 < x < 3\tau$ исходной задачи.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника. – 1987. – 688 с.
2. Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа. – 1962. – 248 с.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука. – 1976. – 352 с.

Алгебра, топология и геометрия

УДК 511.2

О БИНАРНОЙ ПРОБЛЕМЕ ГОЛЬДБАХА

В.В. Агафонцев, к.т.н.
e-mail: *fon-valery-ag@yandex.ru*

В статье представлено доказательство утверждения о том, что любое чётное число большее 4 представимо суммой двух простых чисел.

Ключевые слова: бинарная проблема Гольдбаха, простые числа.

Обратимся к истории возникновения бинарной проблемы Гольдбаха, цитируя [1, с. 360]. “В 1742 году Гольдбах в письме к Эйлеру поставил проблему доказать, что каждое нечётное число может быть представлено в виде суммы трёх простых чисел (нечётные числа берутся, начиная с 7). Эйлер в ответном письме высказал гипотезу, что имеет место гораздо более сильное утверждение, а именно, что каждое чётное число (начиная с 4) может быть представлено в виде суммы двух простых чисел. Эти проблемы получили название проблемы Гольдбаха – Эйлера” (конец цитаты). Последнюю из этих проблем называют *бинарной проблемой Гольдбаха* [2, с. 4].

Сделаем попытку ″усечённого″ доказательства бинарной проблемы Гольдбаха, а именно: представим доказательство утверждения о том, что *любое чётное число большее 4 представимо суммой двух простых чисел*. ″Усечённым″ доказательство называем потому, что в нём не рассматривается представление чётного числа 4 двумя простыми числами. Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема. *Для любого чётного числа большего 10 существует меньшее чётное число большее 4 такое, что разность этих чисел равна сумме хотя бы одной пары двух простых чисел, каждое из которых больше 2.*

Доказательство. Для удобства изложения условимся помечать **чётные** числа первыми двумя буквами ***ev*** английских слов *even numbers*, означающих чётные числа; **нечётные** числа будем помечать первыми двумя буквами ***od*** английских слов *odd numbers*, означающих нечётные числа.

Пусть Q_{ev} – *любое* чётное число, $Q_{ev}>10$. Очевидно, множество P простых чисел меньших Q_{ev} не является пустым. Выберем из множества P такие простые числа p_1 большие 2, для которых выполняется условие:

$$Q_{ev} = p_1 + m_{od} \quad (1)$$

Здесь m_{od} – *любой* элемент (число) множества M_{od} нечётных чисел, дополняющий p_1 до Q_{ev} при условии:

$$m_{od} > 7 \quad (2)$$

Докажем, что такое условие выполнимо. Действительно, так как в выражении (1) число Q_{ev} является *любым* чётным числом большим 10, то взяв, например, $Q_{ev} = 12$ и выбрав $p_1 = 3$, получим $m_{od} = 9$. Отметим, что выбрать в данном случае $p_1 \geq 5$ нельзя, так как получим $m_{od} \leq 7$ и потому не выполнится условие (2). Следовательно, в соответствии с условием (2) мощность множества M_{od} представится одним числом 9.

Если $Q_{ev} = 14$, то:

1) выбрав $p_1 = 3$, получим $m_{od} = 11$;
2) выбрав $p_1 = 5$, получим $m_{od} = 9$.

В соответствии с условием (2) мощность множества M_{od} представится двумя числами: 11, 9.

Если $Q_{ev} = 16$, то:

1) выбрав $p_1 = 3$, получим $m_{od} = 13$;
2) выбрав $p_1 = 5$, получим $m_{od} = 11$;
3) выбрав $p_1 = 7$, получим $m_{od} = 9$.

В этом случае в соответствии с условием (2) мощность множества M_{od} представится тремя числами: 13, 11, 9.

Если $Q_{ev} = 18$, то:

4) выбрав $p_1 = 3$, получим $m_{od} = 15$;
5) выбрав $p_1 = 5$, получим $m_{od} = 13$;
6) выбрав $p_1 = 7$, получим $m_{od} = 11$.

Отметим, что в данном случае выбрать $p_1 = 11$ нельзя, так как получим $m_{od} = 7$ и не выполнится условие (2). Следовательно, в соответствии с условием (2) мощность множества M_{od} представится тремя числами: 15, 13, 11. Во всех этих случаях условие $m_{od} > 7$ выполнимо. Очевидно, данное условие будет выполнимо и для всех последующих чётных чисел $Q_{ev} > 18$.

Так как множество M_{od} состоит из нечётных чисел больших 7, то каждый элемент этого множества можно представить в виде

$$m_{od} = p_2 + q_{ev}, \qquad (3)$$

где p_2 – *любое* простое число большее 2, но меньшее m_{od}; q_{ev} – *любое* чётное число, безусловно меньшее Q_{ev} и дополняющее p_2 до m_{od}.

Равенство (1) с учётом равенства (3) примет такой вид:

$$Q_{ev} - q_{ev} = p_1 + p_2 \qquad (4)$$

Здесь p_1 и p_2 – суть простые числа, каждое из которых больше 2; q_{ev} – чётное число; Q_{ev} – чётное число большее 10.

Так как $Q_{ev} > 10$, то выполнимо такое неравенство:

$$Q_{ev} - (p_1 + p_2) > 10 - (p_1 + p_2) \qquad (5)$$

Значение правой части неравенства (5) будет максимальным при минимальном значении суммы $p_1 + p_2 = 6$, учитывая, что каждое из простых чисел p_1 и p_2 больше 2. Значение левой части неравенства (5), исходя из равенства (4), равно q_{ev}. Следовательно, $q_{ev} > 4$. Теорема доказана, то есть *для любого*

чётного числа большего 10 существует меньшее чётное число большее 4 такое, что разность этих чисел равна сумме хотя бы одной пары двух простых чисел, каждое из которых больше 2. Что и требовалось доказать.

Следствие. *Любое чётное число большее 4 может быть представлено суммой двух простых чисел, каждое из которых больше 2.*

Доказательство. Рассмотрим число $Q_{ev} - q_{ev}$. Во-первых, это число чётное, так как входящие в него числа являются *любыми* чётными числами при условии $Q_{ev} > 10$ и $q_{ev} > 4$. Во-вторых, число $Q_{ev} - q_{ev}$ меньше числа Q_{ev}. В третьих, число $Q_{ev} - q_{ev} > 4$, что следует из равенства (4), так как $p_1 + p_2 > 4$. Следовательно, рассматривая *любое* чётное число $Q_{ev} > 10$ как *большее*, а число $Q_{ev} - q_{ev} > 4$ как *меньшее* чётное число, можно применить данную теорему. Получим:

$$Q_{ev} - (Q_{ev} - q_{ev}) = \mathbf{q_{ev}} = p_1 + p_2 \qquad (6)$$

Здесь p_1 и p_2 - суть простые числа, каждое из которых больше 2. Но число $q_{ev} > 4$. Следовательно, *любое чётное число большее 4 может быть представлено суммой двух простых чисел, каждое из которых больше 2*. Что и требовалось доказать.

Если учесть, что чётное число 4 *единственным* образом представляется суммой двух простых чисел (4 = 2+ 2), а также учесть, что все остальные случаи связаны с представлением чётных чисел больших 4, то можно сделать вывод о хорошем приближении следствия из рассмотренной выше теоремы к доказательству бинарной проблемы Гольдбаха.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухштаб А.А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966, 384 с.
2. Нестеренко Ю.В. Теория чисел. М.: Издат. центр Академия, 2008, 272 с.

УДК 515.12

О ВЛОЖЕНИЯХ В ПЛОТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Д. П. Батуров, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»
e-mail: *dbaturov@rambler.ru*

В статье доказывается, что если Y — нормальное пространство веса $\leq \tau$, то в предположении $2^{\aleph_0} = 2^{\tau}$ существует нормальное плотное подпространство $Z \subset \mathbf{R}^{2^{\aleph_0}}$ такое, что Y гомеоморфно замкнутому подпространству пространства Z.

Ключевые слова: гомеоморфное вложение, топологическое произведение, нормальное пространство.

В этой статье все топологические пространства предполагаются тихоновскими. Рассмотрим следующий вопрос. Пусть Y — нормальное пространство. Существует ли нормальное плотное подпространство Z произведения вещественных прямых такое, что Y гомеоморфно вкладывается в Z в качестве замкнутого подпространства?

Заметим, что если Y — линделефово пространство веса τ, то всегда существует линделефово плотное подпространство $Z \subset \mathbf{R}^{\tau}$ такое, что Y гомеоморфно замкнутому подпространству пространства Z. Пусть D — дискретное пространство мощности τ, $D \cup \{\xi\}$ — его одноточечная компактификация, тогда $C_p(D \cup \{\xi\})$ — линделефово плотное подпространство $\mathbf{R}^{D \cup \{\xi\}}$ [1, Предложение 0.3.6] и можно построить гомеоморфное вложение ϕ пространства Y в $\mathbf{R}^{D \cup \{\xi\}}$, для которого $\overline{\phi(Y)} \cap C_p(D \cup \{\xi\}) = \emptyset$. Для этого возьмем бесконечное $D_0 \subset D$ такое, что $|D \setminus D_0| = \tau$. Существует гомеоморфное вложение $\psi : Y \to \mathbf{R}^{D \setminus D_0}$ [2, Теорема 2.3.23], т.е. ψ каждой точке $y \in Y$ ставит в соответствие функцию g_y, определенную на $D \setminus D_0$, со значениями в $\mathbf{R}$. Рассмотрим отображение ϕ, которое каждой точке $y \in Y$ ставит в соответствие функцию

$$f_y(x) = \begin{cases} g_y(x) \text{ если } x \in D \setminus D_0, \\ 0 \text{ если } x \in D_0, \\ 1 \text{ если } x = \xi. \end{cases}$$

Тогда ϕ — гомеоморфное вложение Y в $\mathbf{R}^{D \cup \{\xi\}}$ и для любой функции $h \in C_p(D \cup \{\xi\})$ существует $x \in D_0$ такое, что $|h(x) - h(\xi)| < 1/2$, т.е. у функции h есть окрестность, отделяющая ее от $\phi(Y)$. Положим $Z = \phi(Y) \cup C_p(D \cup \{\xi\})$.

Если в предыдущем рассуждении вместо линделефовости Y предположить нормальность, то $Z = \phi(Y) \cup C_p(D \cup \{\xi\})$ не обязано быть нормальным (например, если $\tau = \aleph_1$, Y — дискретное пространство мощности $\aleph_1$, то Z не будет нормальным — это следует из Теоремы 1 [3]).

Мы докажем, что если Y — нормальное пространство веса $\leq \tau$, то в предположении $2^{\aleph_0} = 2^{\tau}$ существует нормальное плотное подпространство $Z \subset \mathbf{R}^{2^{\aleph_0}}$ такое, что Y гомеоморфно замкнутому подпространству пространства Z.

Т е о р е м а 1. Пусть τ — бесконечный кардинал. Следующие условия равносильны.

1) $2^{\aleph_0} = 2^\tau$.

2) Для любого нормального пространства Y веса $\leq \tau$ существует нормальное плотное подпространство $Z \subset \mathbf{R}^{2^{\aleph_0}}$ такое, что Y гомеоморфно замкнутому подпространству пространства Z.

Доказательство. $(2) \to (1)$ следует из результата Толла [5, Следствие 2.3]: если $2^{\aleph_0} < 2^\tau$, то никакое нормальное плотное подпространство $Z \subset \mathbf{R}^{2^{\aleph_0}}$ не может содержать замкнутое дискретное подпространство мощности τ, т.к. Z имеет свойство Суслина и $\chi(Z) \leq 2^{\aleph_0}$.

Докажем $(1) \to (2)$. Пусть Y — нормальное пространство веса $\leq \tau$, $X = [0,1]$ — единичный отрезок, тогда $C_p(X)$ — плотное подпространство $\mathbf{R}^X$. Построим гомеоморфное вложение $\phi : Y \to \mathbf{R}^X$, для которого $Z = \phi(Y) \cup C_p(X)$ нормально и $\overline{\phi(Y)} \cap C_p(X) = \emptyset$.

Пусть T — множество всех пар (A, B), где A и B — замкнутые дизъюнктные подмножества Y, и пусть P_0, P_1, X^* — подмножества X, для которых выполняются условия (i)–(iii) Леммы 3.2 из [4]. Для каждой пары $(A, B) \in T$ зафиксируем непрерывную функцию $\theta_{(A,B)}$, определенную на Y, со значениями в $[0,1]$, для которой $\theta_{(A,B)}(A) = \{0\}$, $\theta_{(A,B)}(B) = \{1\}$. Зафиксируем некоторое отображение λ множества X^* на T.

Зададим ϕ следующим образом: каждой точке $y \in Y$ поставим в соответствие вещественную функцию f_y, определенную на X, для которой

$$f_y(x) = \begin{cases} 0 \text{ если } x \in P_0, \\ 1 \text{ если } x \in P_1, \\ \theta_{(A,B)}(y) \text{ если } x \in X^* \text{ и } \lambda(x) = (A, B). \end{cases}$$

Докажем, что

а) ϕ — гомеоморфное вложение Y в $\mathbf{R}^X$,

б) $\overline{\phi(Y)} \cap C_p(X) = \emptyset$,

в) $\phi(Y) \cup C_p(X)$ нормально.

Из Теоремы 2.3.20 [2] следует (а), т.к. функции $x(y) = f_y(x)$ непрерывны на Y (если $x \in P_0$, то $x(Y) = \{0\}$, если $x \in P_1$, то $x(Y) = \{1\}$, а если $x \in X^*$, то $x(y) = \theta_{\lambda(x)}(y)$), а также разделяют точки и замкнутые множества (если A — замкнутое подмножество Y и $y_0 \in Y \setminus A$, то существует $x \in X^*$, для которого $\lambda(x) = (A, \{y_0\})$, тогда $x(A) = \{0\}$ и $x(y_0) = 1$).

Условие (б) следует из того, что множества P_0 и P_1 плотны в X, поэтому для любой функции $h \in C_p(X)$ существуют $x_0 \in P_0$ и $x_1 \in P_1$ такие, что $|h(x_0) - h(x_1)| < 1/2$, т.е. у функции h есть окрестность, отделяющая ее от $\phi(Y)$.

Докажем (в). Повторяя дословно доказательство Леммы 5.4 из [4], получим, что если $A \subset \phi(Y)$, $B \subset C_p(X)$ и $A \cap \overline{B} = \emptyset$, то существует счетное семейство $\widetilde{\mathcal{U}}$ базисных подмножеств $\mathbf{R}^X$, для которого $A \subset \bigcup \widetilde{\mathcal{U}}$ и $B \cap \bigcup \widetilde{\mathcal{U}} = \emptyset$.

Пусть теперь A и B — замкнутые дизъюнктные подмножества $\phi(Y)\cup C_p(X)$, $A_1 = A\cap\phi(Y)$, $A_2 = A\cap C_p(X)$, $B_1 = B\cap\phi(Y)$, $B_2 = B\cap C_p(X)$. Тогда существует счетное семейство $\widetilde{\mathcal{U}}$ базисных подмножеств $\mathbf{R}^X$, для которого $A_1 \subset \bigcup\widetilde{\mathcal{U}}$ и $B_2 \cap \bigcup\widetilde{\mathcal{U}} = \emptyset$.

Существует $x^* \in X^*$, для которого $\lambda(x^*) = (\phi^{-1}(A_1), \phi^{-1}(B_1))$, тогда $f_y(x^*) = 0$ если $y \in \phi^{-1}(A_1)$, $f_y(x^*) = 1$ если $y \in \phi^{-1}(B_1)$, т.е. $A_1 \subset W(x^*; O^*)$, $B_1 \cap W(x^*; O^*) = \emptyset$, где O^* — интервал $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Получаем: $A_1 \subset \bigcup\mathcal{U}'$, $B \cap \bigcup\mathcal{U}' = \emptyset$, где

$$\mathcal{U}' = \left\{U \cap W(x^*; O^*) : U \in \widetilde{\mathcal{U}}\right\}.$$

Поскольку $C_p(X)$ наследственно линделефово, $A_2 \subset C_p(X)$ и $A_2 \cap \overline{B} = \emptyset$, существует счетное семейство $\mathcal{U}''$ базисных подмножеств $\mathbf{R}^X$, для которого $A_2 \subset \bigcup\mathcal{U}''$, $B \cap \bigcup\mathcal{U}'' = \emptyset$.

Итак, для любых замкнутых дизъюнктных подмножеств A, $B \subset \phi(Y)\cup C_p(X)$ существует счетное семейство $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \cup \mathcal{U}''$ базисных подмножеств $\mathbf{R}^X$, для которого $A \subset \bigcup\mathcal{U}$ и $B \cap \bigcup\mathcal{U} = \emptyset$, поэтому [4, Лемма 2.4] $Z = \phi(Y) \cup C_p(X)$ — нормальное пространство. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А. В. Топологические пространства функций. — М.: Изд-во МГУ. — 1989. — 222 с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир. — 1986. — 752 с.
3. Baturov D. P. Normality in dense subspaces of products // Topol. Appl. — 1990. — V. 36. — P. 111–116.
4. Baturov D. P. On perfectly normal dense subspaces of products // Topol. Appl. — 2007. — V. 154. — P. 374–383.
5. Tall F. D. Normality versus collectionwise normality // K. Kunen, J. E. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam. — 1984. — P. 685–732.

УДК 512.542

О ВЛИЯНИИ Q-ЗАМКНУТОСТИ КЛАССОВ ГРУПП НА ПОДГРУППОВЫЕ ФУНКТОРЫ

О.Ю. Васина
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
e-mail: *vasinaaaaa1999@yandex.ru*
Д.А. Макаров
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
e-mail: *dima.shyrik2011@yandex.ru*
М.М. Сорокина, д.ф.-м.н., доц.
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
e-mail: *mmsorokina@yandex.ru*

Рассматриваются только конечные группы. Классом групп называется совокупность групп, содержащая вместе с каждой своей группой и все группы, ей изоморфные. Подгрупповым функтором называется отображение τ, сопоставляющее каждой группе G некоторую непустую совокупность $\tau(G)$ ее подгрупп, удовлетворяющее условию $(\tau(G))^{\varphi} = \tau(G^{\varphi})$ для любого изоморфизма φ группы G. В работе изучается влияние свойств классов групп на подгрупповые функторы. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется Q-замкнутым, если вместе с каждой своей группой класс $\mathfrak{F}$ содержит и все её фактор-группы. В теоремах 1 и 2 для непустого множества ω простых чисел установлены соответственно свойства подгруппового функтора, сопоставляющего каждой группе совокупность всех её $\mathfrak{F}^{\omega}$-достижимых подгрупп, и свойства подгруппового функтора, выделяющего в каждой группе совокупность всех её $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормальных максимальных подгрупп, в случае, когда класс групп $\mathfrak{F}$ является Q-замкнутым.

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, Q-замкнутый класс групп, подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}^{\omega}$-достижимая подгруппа, $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормальная максимальная подгруппа.

1. Введение

В теории конечных групп большую роль играют нормальные и субнормальные подгруппы в группах (см., например, [1, 2]). С развитием теории классов групп значение приобрели подгруппы, определяемые заданным классом групп $\mathfrak{F}$, такие, как $\mathfrak{F}$-нормальные, $\mathfrak{F}$-субнормальные, $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы и их различные обобщения [3, 4]. В последние десятилетия интенсивное развитие получила теория подгрупповых функторов, позволяющая устанавливать взаимосвязь между свойствами классов групп и внутренним строением самих групп [5]. Важные результаты в данном направлении принадлежат Л.А. Шеметкову, С.Ф. Каморникову, А.Н. Скибе, В.М. Селькину, А.Ф. Васильеву, В.Н. Семенчуку, В.С. Монахову и др. (см., например, перечень источников в [5, 6]).

Целью данной работы является изучение свойств двух подгрупповых функторов в зависимости от свойств заданного класса конечных групп. Решены следующие задачи: установлено влияние Q-замкнутости класса групп $\mathfrak{F}$ на свойства подгруппового функтора, выделяющего в каждой группе все её $\mathfrak{F}^{\omega}$-достижимые подгруппы (теорема 1); влияние Q-замкнутости класса групп $\mathfrak{F}$ на свойства подгруппового функтора, выделяющего в каждой группе все её $\mathfrak{F}^{\omega}$-

нормальные максимальные подгруппы (теорема 2). В доказательствах используются классические методы теории групп, а также методы теории классов групп и методы теории подгрупповых функторов.

2. Используемые определения и обозначения

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и определения для групп и классов групп стандартны (см., например, [2, 5]). Приведем лишь некоторые из них. Запись $H \leq G$ ($H < G$, $H <\cdot G$, $H \lhd G$) означает, что H – подгруппа (соответственно, собственная, максимальная, нормальная подгруппа) группы G; $Core_G(H)$ – ядро подгруппы H в группе G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H; $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π-подгруппа группы G, где π – непустое множество простых чисел [2].

Совокупность групп $\mathfrak{F}$ называется *классом* групп, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $G \cong G_1$ всегда следует, что $G_1 \in \mathfrak{F}$ ([2], с. 161). Класс групп $\mathfrak{F}$ называется Q-*замкнутым* (*замкнутым относительно фактор-групп*), если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$ всегда следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$ ([2], с. 161). Через $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{E}_\omega$ обозначаются соответственно классы всех конечных групп и всех конечных ω-групп.

Отображение τ, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую совокупность $\tau(G)$ её подгрупп, называется *подгрупповым функтором*, если $(\tau(G))^\varphi = \tau(G^\varphi)$ для любого изоморфизма φ каждой группы G ([5], с. 9).

3. Свойства подгруппового функтора, выделяющего $\mathfrak{F}^\omega$-достижимые подгруппы в группах

Определение 1. Пусть ω – непустое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Следуя [5], подгруппу H группы G назовем $\mathfrak{F}^\omega$-*достижимой подгруппой* группы G, если существует такая цепь подгрупп группы G вида

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G,$$

что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется одно из условий: $H_{i-1} \lhd H_i$ или $H_i/(Core_{H_i}(H_{i-1}) \cap O_\omega(H_i)) \in \mathfrak{F}$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой Q-замкнутый класс групп, ω – непустое множество простых чисел, τ – подгрупповой функтор, ставящий в соответствие каждой группе совокупность всех её $\mathfrak{F}^\omega$-достижимых подгрупп. Если G – конечная группа, $H \in \tau(G)$ и $N \lhd G$, то $HN/N \in \tau(G/N)$.

Доказательство. Пусть G – конечная группа, $H \in \tau(G)$ и $N \lhd G$. Покажем, что $HN/N \in \tau(G/N)$. Так как $H \in \tau(G)$, то, согласно условию, H – $\mathfrak{F}^\omega$-достижимая подгруппа группы G. Это означает, что существует цепь подгрупп группы G вида $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$ (1) такая, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется одно из условий: 1) $H_{i-1} \lhd H_i$; 2) $H_i/(Core_{H_i}(H_{i-1}) \cap O_\omega(H_i)) \in \mathfrak{F}$. Из (1) следует, что существует следующая цепь подгрупп группы G/N:

$$HN/N = H_0N/N \subseteq H_1N/N \subseteq \cdots \subseteq H_nN/N = G/N \text{ (2).}$$

Пусть $j \in \{1, \dots, n\}$. Тогда для j выполняется одно из условий 1) или 2).

1) Пусть $H_{j-1} \lhd H_j$. Тогда по теореме 1.59 [2, с. 46] $H_{j-1}N/N \lhd H_jN/N$.

2) Пусть $H_j/(Core_{H_j}(H_{j-1}) \cap O_\omega(H_j)) \in \mathfrak{F}$ (3). Покажем, что

$$(H_jN/N)/(Core_{(H_jN/N)}(H_{j-1}N/N) \cap O_\omega(H_jN/N)) \in \mathfrak{F}.$$

Введем следующие обозначения:

$Core_{H_j}(H_{j-1}) \cap O_\omega(H_j) = A$, $Core_{(H_jN/N)}(H_{j-1}N/N) \cap O_\omega(H_jN/N) = B/N$.

Покажем, что $AN/N \subseteq B/N$. Так как $A \subseteq Core_{H_j}(H_{j-1})$, то по теореме 1.59 [2, с. 46] $AN/N \subseteq Core_{H_j}(H_{j-1})N/N$ (4). Поскольку $Core_{H_j}(H_{j-1}) \lhd H_j$ и $N \lhd G$, то $Core_{H_j}(H_{j-1})N \lhd H_jN$ (5). Действительно, $(Core_{H_j}(H_{j-1})N)^{h_jn} = ((Core_{H_j}(H_{j-1})N)^{h_j})^n = ((Core_{H_j}(H_{j-1}))^{h_j}N^{h_j})^n = (Core_{H_j}(H_{j-1})N)^n = n^{-1}Core_{H_j}(H_{j-1})Nn = n^{-1}Core_{H_j}(H_{j-1})N = n^{-1}NCore_{H_j}(H_{j-1}) = NCore_{H_j}(H_{j-1}) = Core_{H_j}(H_{j-1})N$. Следовательно, (5) справедливо. Тогда по теореме 1.59 [2, с. 46] получаем, что $Core_{H_j}(H_{j-1})N/N \lhd H_jN/N$ (6). Далее, так как $Core_{H_j}(H_{j-1}) \subseteq H_{j-1}$, то $Core_{H_j}(H_{j-1})N \subseteq H_{j-1}N$ и по теореме 1.59 [2, с. 46] $Core_{H_j}(H_{j-1})N/N \subseteq H_{j-1}N/N$ (7). Поскольку $Core_{(H_jN/N)}(H_{j-1}N/N)$ – наибольшая нормальная подгруппа группы H_jN/N, содержащаяся в $H_{j-1}N/N$, то из (6) и (7) следует, что $Core_{H_j}(H_{j-1})N/N \subseteq Core_{(H_jN/N)}(H_{j-1}N/N)$ (8).

Из (4) и (8) заключаем, что $AN/N \subseteq Core_{(H_jN/N)}(H_{j-1}N/N)$ (9).

Далее, ввиду $A \subseteq O_\omega(H_j)$, имеем $AN/N \subseteq O_\omega(H_j)N/N$ (10). Покажем, что $O_\omega(H_j)N/N \subseteq O_\omega(\text{H}_jN/N)$. Действительно, так как $O_\omega(H_j) \lhd H_j$ и $N \lhd G$, то, как и выше, нетрудно проверить, что $O_\omega(H_j)N/N \lhd H_jN/N$ (11). Поскольку $O_\omega(H_j) \in \mathfrak{E}_\omega$, $O_\omega(H_j)N/N \cong O_\omega(H_j)/O_\omega(H_j) \cap N$ и $\mathfrak{E}_\omega$ – Q-замкнутый класс групп, то $O_\omega(H_j)N/N \in \mathfrak{E}_\omega$ (12). Так как $O_\omega(H_jN/N)$ – наибольшая нормальная подгруппа группы H_jN/N, принадлежащая классу $\mathfrak{E}_\omega$, то из (11) и (12) следует, что $O_\omega(H_j)N/N \subseteq O_\omega(H_jN/N)$ (13). Тогда из (10) и (13) получаем, что $AN/N \subseteq O_\omega(H_jN/N)$ (14).

Таким образом, из (9) и (14) заключаем, что $AN/N \subseteq B/N$ и по теореме 2.5 [2, с. 59] $(H_jN/N)/(B/N) \cong ((H_jN/N)/(AN/N))/((B/N)/(AN/N))$ (15).

Рассмотрим $(H_jN/N)/(AN/N)$: используя теоремы о гомоморфизмах, получаем $(H_jN/N)/(AN/N) \cong H_jN/AN = H_jNA/AN \cong H_j/H_j \cap AN \cong$

$\cong (H_j/A)/((H_j \cap AN)/A)$. Так как по (3) $H_j/A \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – Q-замкнутый класс групп, то $(H_jN/N)/(AN/N) \in \mathfrak{F}$. Тогда из (15) получаем, что $(H_jN/N)/(B/N) \in \mathfrak{F}$, что и требовалось доказать в пункте 2).

Тем самым установлено, что подгруппа HN/N группы G/N удовлетворяет определению $\mathfrak{F}^{\omega}$-достижимой подгруппы. Таким образом, $HN/N \in \tau(G/N)$. Теорема доказана.

4. Свойства подгруппового функтора, выделяющего $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормальные максимальные подгруппы в группах

Определение 2. Пусть ω – непустое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Следуя [5], максимальную подгруппу M группы G назовем $\mathfrak{F}^{\omega}$ - *нормальной максимальной подгруппой* группы G, если выполняется следующее условие: $G/(Core_G(M) \cap O_{\omega}(G)) \in \mathfrak{F}$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой Q-замкнутый класс групп, ω – непустое множество простых чисел, τ – подгрупповой функтор, ставящий в соответствие каждой группе X объединение множества $\{X\}$ и совокупности всех $\mathfrak{F}^{\omega}$ - нормальных максимальных подгрупп группы X. Если G – конечная группа, $M \in \tau(G)$ и $N \lhd G$, то $MN/N \in \tau(G/N)$.

Доказательство. Пусть G – конечная группа, $M \in \tau(G)$, $N \lhd G$. Покажем, что $MN/N \in \tau(G/N)$. Из условия $M \in \tau(G)$ следует, что либо 1) $M = G$, либо 2) M – $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормальная максимальная подгруппа группы G.

Рассмотрим каждый из случаев.

1) Пусть $M = G$. Тогда, по теореме 1.59 [2, с. 46] $MN/N = M/N = G/N \Rightarrow MN/N \in \tau(G/N)$.
2) Пусть M – $\mathfrak{F}^{\omega}$ – нормальная максимальная подгруппа группы G. Это означает, что $M <\cdot G$ (1) и $G/(Core_G(M) \cap O_{\omega}(G)) \in \mathfrak{F}$ (2).

Если N не содержится в M, то из условия $M <\cdot G$ следует, что $MN = G$ и поэтому $MN/N = G/N$. Следовательно, в этом случае $MN/N \in \tau(G/N)$.

Пусть $N \subseteq M$. Тогда $MN/N = M/N$. Из (1), ввиду леммы 3.17 [2, с. 112], получаем $MN/N <\cdot G/N$ (3). Покажем, что

$$(G/N)/(Core_{(G/N)}(M/N) \cap O_{\omega}(G/N)) \in \mathfrak{F}.$$

Введем обозначение: пусть $Core_{(G/N)}(M/N) \cap O_{\omega}(G/N) = X/N$, $Y = (Core_G(M) \cap O_{\omega}(G))N$, $Z = Core_G(M) \cap O_{\omega}(G)$.

Так как $Core_G(M) \cap O_{\omega}(G) \lhd G$ и $N \lhd G$, то, по лемме 1.53 (2) [2, с. 43], $Y \lhd G$ и, значит, существует фактор-группа G/Y. Согласно теореме 2.5 [2, с. 59], $G/Y \cong (G/Z)/(Y/Z)$ (4). В силу (2), имеем $G/Z \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ – Q-замкнутый класс групп, то из (4) следует, что $G/Y \in \mathfrak{F}$. Это означает, что, ввиду теоремы 2.5 [2, с. 59], $(G/N)/(Y/N) \in \mathfrak{F}$ (5).

Покажем, что $Y/N \subseteq X/N$. Действительно,

$$(Core_G(M) \cap O_{\omega}(G))N/N \subseteq Core_G(M)N/N \text{ (6)}.$$

Поскольку $Core_G(M) \lhd G$ и $N \lhd G$, то по лемме 1.53 (2) [2, с. 43] $Core_G(M)N \lhd G$. Тогда по теореме 1.59 [2, с. 46] $Core_G(M)N/N \lhd G/N$ (7). Поскольку $Core_G(M) \subseteq M$ и $N \subseteq M$, то $Core_G(M)N \subseteq M$ и, значит,

$$Core_G(M)N/N \subseteq M/N \text{ (8)}.$$

Так как, согласно определению, $Core_{(G/N)}(M/N)$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G/N, содержащаяся в M/N, то из (7) и (8) следует, что $Core_G(M)N/N \subseteq Core_{(G/N)}(M/N)$ (9). Из (6) и (9) получаем, что

$$Y/N \subseteq Core_{(G/N)}(M/N) \text{ (10).}$$

Далее, $Y/N \subseteq O_\omega(G)N/N$ (11). В силу леммы 1.53 [2, с. 43] и теоремы 1.59 [2, с. 46], имеем $O_\omega(G)N/N \lhd G/N$. Так как $O_\omega(G) \in \mathfrak{E}_\omega$, то $\pi(O_\omega(G)) \subseteq \omega$ и, согласно теореме 1.37 [2, с. 34], $\pi(O_\omega(G)/O_\omega(G) \cap N) \subseteq \omega$. Согласно теореме 2.4 [2, с. 59], $O_\omega(G)/O_\omega(G) \cap N \cong O_\omega(G)N/N$. Следовательно, $\pi(O_\omega(G)N/N) \subseteq \omega$ и поэтому $O_\omega(G)N/N) \in \mathfrak{E}_\omega$. Поскольку $O_\omega(G/N)$ − наибольшая нормальная подгруппа группы G/N, принадлежащая классу $\mathfrak{E}_\omega$, то $O_\omega(G)N/N \subseteq O_\omega(G/N)$ (12). Из (11) и (12) получаем, что $Y/N \subseteq O_\omega(G/N)$ (13).

Таким образом, из (10) и (13) следует, что $Y/N \subseteq X/N$. Тогда, по теореме 2.5 [2, с. 59], $(G/N)/(X/N) \cong ((G/N)/(Y/N))/((X/N)/(Y/N))$. Поскольку $\mathfrak{F}$ – Q-замкнутый класс групп, то последнее, ввиду (5), означает, что $(G/N)/(X/N) \in \mathfrak{F}$ (14).

Из условий (3) и (14) получаем, что $MN/N \in \tau(G/N)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. — 2-е изд. — М.: Наука. — 1977. — 240 с.
2. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. — Минск: Вышэйшая школа. — 2006. — 207 с.
3. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. — М.: Наука. — 1978. — 272 с.
4. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. — Berlin – New York: Walter de Gruyter. — 1992. — 891 p.
5. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. — Минск: Беларуская навука. — 2003. — 254 с.
6. Guo W. The Theory of Classes of Groups. — Beijing – New York: Science Press. — 2000. — 258 p.

УДК 512.54

МНОГООБРАЗИЯ ГРУПП $\mathfrak{L}(p,n)$ И $\mathfrak{L}(\pi,2)$

Т. В. Дубровина, к.ф.-м.н., доц.
Владимирский государственный университет
e-mail: *ndubrovin81@gmail.com*
Н. И. Дубровин, д.ф.-м.н., проф.
Владимирский государственный университет
e-mail: *ndubrovin81@gmail.com*

В работе получен базис тождеств наибольшего разрешимого многообразия p-групп цокольной высоты n.

Ключевые слова: многобразия групп, цокольная высота группы, p-группа, разрешимая группа

Цоколем конечной группы G называется подгруппа, порожденная всеми минимальными нормальными подгруппами группы G. Будем обозначать цоколь группы G через $\sigma(G)$. Из этого определения следует, что цоколь и любая нормальная подгруппа всей группы G, лежащая в цоколе, являются прямым произведением минимальных нормальных подгрупп (см. [1], стр.216). Нормальный ряд $1 = A_0 \lhd A_1 \lhd \cdots \lhd A_n = G$ назовем *цокольным рядом*, если $\sigma(G/A_i) = A_{i+1}/A_i$ для $i = 0, 1, \ldots, n-1$. При этом натуральное число n назовем *цокольной высотой* группы G и обозначим это число цок(G). Нормальную подгруппу A_i этого цокольного ряда назовем *i-ым цоколем группы* G и будем обозначать $\sigma_i(G)$.Таким образом, $\sigma(G) = \sigma_1(G)$ и, кроме того, $\sigma_n(G) = G$ в том и только том случае, когда $n =$ цок(G). Скажем, что многообразие групп $\mathfrak{M}$ (см. [1], с. 26) имеет *цокольную высоту* n, и будем записывать цок$(\mathfrak{M}) = n$, если любая конечная группа из многообразия $\mathfrak{M}$ имеет цокольную высоту, меньшую либо равную n, и существует конечная группа из $\mathfrak{M}$ цокольной высоты n. В противном случае будем говорить, что многообразие $\mathfrak{M}$ имеет *бесконечную цокольную высоту*.

Пусть γ – множество всех разрешимых многообразий групп (см. [1]), в экспоненту которых входят простые числа из π, а $\gamma_n = \{\mathfrak{M} \in \gamma \mid \text{цок}(\mathfrak{M}) \leq n\}$. В работе [3] доказано, что в γ_n существует наибольший элемент, который мы обозначим $\mathfrak{L}(\pi, n)$. Рассмотрим сначала случай $\pi = \{p\}$, где p – простое число. В этом случае многообразие $\mathfrak{L}(\pi, n)$ будем обозначать $\mathfrak{L}(p, n)$.

Л е м м а 1. 1) Если P – конечная p-группа, то $\sigma(P) = \{a \in Z(P) \mid a^p = 1\}$.

2) Если G есть p-группа цокольной высоты не выше n, то $G \in \mathfrak{L}(p, n)$.

3) Если $\{w_i \mid i \in I\}$ – базис тождеств многообразия $\mathfrak{L}(p, n-1)$, то $[w_i, x] = 1$, $w_i^p = 1$, где $i \in I$ и x не входит в w_i, есть базис тождеств многообразия $\mathfrak{L}(p, n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $\supseteq$ доказывается непосредственно. Пусть M – минимальная нормальная подгрупп группы P. Так как P – нильпотентная группа, то $[P, M] \subset M$. Но $[P, M] \lhd P$, поэтому $[P, M] = 1$, то есть

$M \subseteq Z(P)$. Ввиду [3, свойства 2) леммы 2] $M^p = 1$, что доказывает обратное включение.

2) В силу [3, теоремы 1] достаточно доказать, что, если $H \subseteq G$ и цок$(G) \leq n$, то цок$(H) \leq n$ для p-группы G. Доказательство проведем индукцией по n. Пусть утверждение доказано для $n-1$ и группа G такая, что цок$(G) = n$, H – произвольная подгруппа группы G. Тогда из п. 1) следует, что $\sigma(H) \supseteq \sigma(G) \cap H$. Отсюда

$$\text{цок}(H) = \text{цок}(H/\sigma(H)) + 1 \leq \text{цок}(H/(\sigma(G) \cap H)) + 1 = \\ = \text{цок}(H \cdot \sigma(G)/\sigma(G)) + 1 \leq n - 1 + 1 = n.$$

3) Тот факт, что указанные в формулировке соотношения являются тождествами в $\mathfrak{L}(p, n)$, следует из пп. 1) и 2). Обратно, пусть G – конечная группа, в которой выполняются эти тождества, и V – вербальная подгруппа, соответствующая словам w_i, $i \in I$. Тогда $G/V \in \mathfrak{L}(p, n-1)$, и V – элементарная абелева p-группа, лежащая в центре группы G. Но тогда G есть p-группа, и $V \subseteq \sigma(G)$. Отсюда цок$(G) = $ цок$(G/\sigma(G)) + 1 \leq $ цок$(G/V) + 1 \leq n - 1 + 1 = n$.

Т е о р е м а 1. Базисом тождеств многообразия $\mathfrak{L}(p, n)$ будут такие тождества

$$\left[[x_1, \ldots, x_i]^{p^{n-i-j+1}}, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}\right] = 1,\ 1 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq n - i + 1. \qquad (1)$$

В частности, базис тождеств многообразия $\mathfrak{L}(p, 2)$ таков:

$$[x, y, z] = 1,\ [x, y]^p = 1,\ x^{p^2} = 1, \qquad (2)$$

а базис тождеств многообразия $\mathfrak{L}(p, 3)$ следующий:

$$[x, y, z, t] = 1,\ [x, y, z]^p = 1,\ [x, y]^{p^2} = 1,\ x^{p^3} = 1. \qquad (3)$$

Доказательство теоремы непосредственно получается с применением индукции по n и с учетом п. 3 леммы 1 и коммутаторных соотношений.

Л е м м а 2. 1) Пусть π – некоторое множество простых чисел, A есть π'-группа автоморфизмов некоторой π-группы P и Q – произвольная A-инвариантная нормальная подгруппа в P. Тогда $C_{P/Q}(A) = C_P(A)Q/Q$.

2) Пусть P есть π-группа и A – некоторая π'-группа ее автоморфизмов. Тогда $P = [P, A]C_P(A)$. Если A – абелева группа, то указанное разложение прямое.

3) Пусть A есть p'-группа автоморфизмов, которая стабилизирует некоторый нормальный ряд p-группы P. Тогда $A = 1$.

Л е м м а 3. Пусть G – конечная разрешимая монолитическая группа, цоколь которой имеет экспоненту p. Тогда: 1) $\mathcal{F}(G)$ есть p-группа, причем $\mathcal{F}(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа группы G, 2) $C_G(\mathcal{F}(G)) = Z(\mathcal{F}(G))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение следует из теоремы Бернсайда-Виланда о строении конечных нильпотентных групп (см. [4, стр. 148]) и нильпотентности любой конечной p-группы (см. [4, стр. 146]).

Для того, чтобы установить равенство п. 2) достаточно доказать включение $_G(\mathcal{F}(G)) \subseteq \mathcal{F}(G)$. Предположим противное. Тогда, так как группа $G/\mathcal{F}(G)$ не содержит минимальных нормальных p-подгрупп, то в группе G существует подгруппа N такая, что $N \lhd G$, $\mathcal{F}(G) \subseteq N$, $N/\mathcal{F}(G) \cong L$ – абелева p'-группа, лежащая в $C_G(\mathcal{F}(G))$. Но тогда N – нильпотентная группа, поэтому $N \subseteq \mathcal{F}(G)$, что противоречит доказанному выше в п. 1).

Л е м м а 4. Пусть G – конечная разрешимая монолитическая группа с монолитом M экспоненты p. Тогда подгруппа Фиттинга, а, следовательно, и цоколь группы G/M либо p-группа, либо p'-группа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу п. 1) леммы 3 подгруппа Фиттинга $\mathcal{F}(G)$ группы G будет p-группой. Обозначим через $\phi\colon G \mapsto G/M$ естественный эпиморфизм. Если $\phi(\mathcal{F}(G)) = 1$, то $\mathcal{F}(G/M)$ является p'-группой. Следовательно, можно считать, что $\phi(\mathcal{F}(G)) \neq 1$. Пусть $N \lhd \phi(G)$, а N есть p'-группа. Так как $[\mathcal{F}(G), M] = 1$ (учитываем $[\mathcal{F}(G), M] \lhd G$, $[\mathcal{F}(G), M] \subseteq M$ и G – монолитная группа), то можно рассматривать N как p'-группу автоморфизмов p-группы $\mathcal{F}(G)$. Но тогда по лемме 2 $\mathcal{F}(G) = [\mathcal{F}(G), N \cdot C_{\mathcal{F}(G)}(N)]$. Но $[\mathcal{F}(G), N] \subseteq M$ и $C_{\mathcal{F}(G)}(N) \lhd G$, поэтому $M \subseteq C_{\mathcal{F}(g)}(N)$ и p'-группа N стабилизирует нормальный ряд $\mathcal{F}(G) \supset M \supset 1$ p-группы $\mathcal{F}(G)$. Тогда по лемме 2 $N = 1$ и лемма 4 доказана.

Если π – набор простых чисел, $p \in \pi$, то через p^* будем обозначать произведение простых чисел из π, не равных p, то есть $p^* = \prod_{q\in\pi, q\neq p} q$, а $s = \prod_{q\in\pi} q$.

Т е о р е м а 2. 1) Многообразие $\mathfrak{L}(\pi, 2)$ представимо следующим образом

$$\mathfrak{L}(\pi, 2) = \bigvee_{p\in\pi} \mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p*} \bigvee_{p\in\pi} \mathfrak{L}(p, 2). \tag{4}$$

2) Многообразие $\mathfrak{L}(\pi, 2)$ внутри многообразия $\mathfrak{A}_s^2$ определяется тождествами:

$$\left[[x, y]^{q^*}, z^{q^*}\right] = 1, \quad q \in \pi. \tag{5}$$

3) Многообразие $\mathfrak{L}(\pi, 2)$ содержит все конечные группы из $\mathfrak{A}_s^2$, цокольная высоты которых не выше, чем 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Включение $\mathfrak{L}(p, 2) \subseteq \mathfrak{L}(\pi, 2)$ имеет место по определению многообразий $\mathfrak{L}(\pi, 2)$, а включение $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p^*} \subseteq \mathfrak{L}(\pi, 2)$ следует из теоремы Машке. Итак, включение $\supseteq$ в (4) доказано. Остается доказать, что произвольная критическая группа G из $\mathfrak{L}(\pi, 2)$ лежит либо в $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p^*}$, либо в $\mathfrak{L}(p, 2)$ для некоторого $p \in \pi$. Это немедленно следует из леммы 3, если учесть, что $\mathcal{F}(G/\sigma(G)) = G/\sigma(G)$, если $G \in \mathfrak{L}(\pi, 2)$.

2) Докажем, что (5) – тождества многообразий $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p^*}$ и $\mathfrak{L}(p, 2)$. Если $p = q$, то это следует из определения многообразия $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p^*}$ и теоремы 1. Но если $p \neq q$, то $p \mid q^*$ и поэтому $[x, y]^{q^*} = 1$ – тождество в многообразиях $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p^*}$, $\mathfrak{L}(p, 2)$, следовательно (5) будет тождеством в $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p^*}$ и в $\mathfrak{L}(p, 2)$. Обратно, пусть G – критическая группа из $\mathfrak{A}_s^2$, в которой выполняются тождества (5). Обозначим

$p = \exp \sigma G$. Пусть $N \lhd G$ такая подгруппа, что $N \in \mathfrak{A}_s$, $G/N \in \mathfrak{A}_s$. Можно считать, что $N \neq \{1\}$, то есть $\sigma G = M \subseteq N$ (иначе $G \in \mathfrak{A}_p \subseteq \mathfrak{L}(\pi, 2)$). Из того, что группа G монолитична следует, что $\exp N = p$, и $G \in \mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_s$. Если $G' = \{1\}$, то ясно, что $G \in \mathfrak{L}(\pi, 2)$. Предположим, что $G' \neq \{1\}$, то есть $M \subseteq G' \subseteq N$. Из тождеств (5) следует, что $[G_p, G'_p] = \{1\}$ (G_p – силовская p-подгруппа группы G). Но тогда по теореме Машке фактор-группа G/G' действует на G' вполне приводимо, а поэтому из монолитичности группы G следует равенство $G' = M$. Из теоремы 1 следует, что $G_p \in \mathfrak{L}(p, 2)$, поэтому $G_p/M = G_p/G' \in \mathfrak{A}_p$. Но тогда $G/M = G/G' \in \mathfrak{A}_s$ и цок$(G) = 2$, что и требовалось доказать.

3) Предположим противное. Пусть G наименьший контрпример, то есть цок$(G) = 2$, $G \in \mathfrak{A}_s^2$, $G \notin \mathfrak{L}(\pi, 2)$. Если M_1, M_2 – различные минимальные нормальные подгруппы, то $G/M_1, G/M_2 \in \mathfrak{L}(\pi, 2)$. Но группа G вкладывается в группу $G/M_1 \times G/M_2$, то есть $G \in \mathfrak{L}(\pi, 2)$. Итак, можно считать, что G монолитична с монолитом M, $\exp M = p$. Из леммы 3 следует, что либо $G/M \in \mathfrak{A}_{p^*}$ и тогда $G \in \mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{p^*}$, либо $G/M \in \mathfrak{A}_p$ и тогда $G \in \mathfrak{L}(\pi, 2)$. В любом случае $G \in \mathfrak{L}(\pi, 2)$, что противоречит выбору группы G.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейман Х. Многобразия групп// Изд. Мир. — М.— 1969.
2. Kovacs Z., Neuman M. Just-non-Cross varieties of groups.// J. Austral. Math. Soc.— 1971. V. 12 — N2 — 129-144.
3. Дубровина Т.В.Цокольная высота многообразия групп// VI Всероссийская научно-практическая конференция "Современные проблемы физико-математических наук" (СПФМН-2020) — Орел– 2020.
4. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп// Изд. Наука. — М.— 1972.

УДК 512.54

ЦОКОЛЬНАЯ ВЫСОТА МНОГООБРАЗИЯ ГРУПП

Т. В. Дубровина, к.ф.-м.н., доц.
Владимирский государственный университет
e-mail: *ndubrovin81@gmail.com*

Дана характеристика некоторых многообразий групп конечной цокольной высоты.

Ключевые слова: многобразия групп, цокольная высота группы, многообразия групп

О п р е д е л е н и е. *Цоколем* конечной группы G называется подгруппа, порожденная всеми минимальными нормальными подгруппами группы G. Будем обозначать цоколь группы G через $\sigma(G)$.

Из этого определения следует, что цоколь и любая нормальная подгруппа всей группы G, лежащая в цоколе, являются прямым произведением минимальных нормальных подгрупп (см. [1], стр.216).

О п р е д е л е н и е. Нормальный ряд $1 = A_0 \lhd A_1 \lhd \cdots \lhd A_n = G$ назовем *цокольным рядом*, если $\sigma(G/A_i) = A_{i+1}/A_i$ для $i = 0, 1, \ldots, n-1$. При этом натуральное число n назовем *цокольной высотой* группы G и обозначим это число цок(G). Нормальную подгруппу A_i этого цокольного ряда назовем *i-ым цоколем группы G* и будем обозначать $\sigma_i(G)$.

Таким образом, $\sigma(G) = \sigma_1(G)$ и, кроме того, $\sigma_n(G) = G$ в том и только том случае, когда $n =$ цок(G).

О п р е д е л е н и е. Скажем, что многообразие групп $\mathfrak{M}$ (см. [1], с. 26) имеет *цокольную высоту* n, и будем писать цок$(\mathfrak{M}) = n$, если любая конечная группа из многообразия $\mathfrak{M}$ имеет цокольную высоту, меньшую либо равную n, и существует конечная группа из $\mathfrak{M}$ цокольной высоты n. В противном случае будем говорить, что многообразие $\mathfrak{M}$ имеет *бесконечную цокольную высоту*.

Л е м м а 1. Пусть M – минимальная нормальная подгруппа конечной разрешимой группы G. Тогда M есть элементарная абелева p-группа для некоторого простого p.

Л е м м а 2. Пусть G – конечная группа, тогда: 1) $\sigma(G)$ – характеристическая подгруппа группы G; 2) если G – разрешимая группа, то $\sigma(G)$ есть прямая сумма элементарных абелевых групп; 3) любая неединичная нормальная подгруппа группы G имеет нетривиальное пересечение с цоколем $\sigma(G)$; 4) если $A \lhd G$, то $\sigma(G) \cap A \subseteq \sigma(A)$; 5) если $\pi\colon G \mapsto H$ – эпиморфизм групп, то $\pi(\sigma(G)) \subseteq \sigma(H)$; 6) $\sigma\left(\prod_{i=1}^{n} G_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \sigma(G_i)$, где все G_i – конечные группы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обоснуем пятое утверждение. Пусть M – минимальный нормальный делитель группы G, не лежащий в $\operatorname{Ker}\pi$. Тогда $M \cap \operatorname{Ker}\pi = 1$ и $[M, \operatorname{Ker}\pi] = 1$. Отсюда вытекает, что M – минимальная нормальная подгруппа в H, поэтому $\sigma(\pi(G)) \subseteq \sigma(H)$.

Из пятого утверждения следует первое. Свойство 2) вытекает из леммы 1, а свойство 3) очевидным образом следует из определения цоколя группы.

Докажем свойство 4). Так как по свойству 1) $\sigma(A) \lhd G$, то для любой минимальной нормальной подгруппы M группы G будет справедливо либо равенство $M \cap \sigma(A) = 1$, либо включение $M \subseteq \sigma(A)$. Так как $M \lhd A$, то по свойству 3) $M \cap \sigma(A) \neq 1$, если $M \subseteq A$, откуда $M \subseteq \sigma(A)$, если $M \subseteq A$, и поэтому $\sigma(G) \cap A \subseteq \sigma(A)$.

Докажем оставшееся шестое равенство. Включение $\subseteq$ следует из свойства 5). Обратное включение следует из того, что, если M – минимальная нормальная подгруппа в группе G_k, то M будет такой же и в $\prod_{i=1}^{n} G_i$.

З а м е ч а н и е . В свойстве 4) леммы 2 включение может быть строгим. Действительно, пусть A – база сплетения $G := \mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p$. Тогда $\sigma(A) = A$, но цоколь $\sigma(G)$ совпадает с центром G и строго содержится в A.

П р и м е р. Нетрудно видеть, чго многообразия цокольной высоты 1 – это в точности многообразия $\mathfrak{A}_m$, т. е. многообразия абелевых групп экспоненты m, где m свободно от квадратов. Вообще, если $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ – различные простые числа, и $n = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, то цок$(\mathfrak{A}_m) = n$.

Из теоремы Машке следует, что цок$(\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_q) = 2$, цок$(\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_q\mathfrak{A}_r) = 3$, где p, q, r – различные простые числа. Более общий пример получим, если возьмем попарно взаимно простые числа $m_1, m_2, \dots, m_k$. Тогда

$$\text{цок}(\mathfrak{A}_{m_1} \dots \mathfrak{A}_{m_k}) = \text{цок}(\mathfrak{A}_{m_1}) + \dots + \text{цок}(\mathfrak{A}_{m_k}).$$

Это равенство можно доказать индукцией по числу k. Индукцией по числу $n = \text{цок}(\mathfrak{N})$ можно доказать, что, если цокольная высота многообразий $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{R}$ конечна, то многообразие $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ имеет конечную цокольную высоту в том случае, когда экспоненты $\exp(\mathfrak{N})$, $\exp(\mathfrak{R})$ взаимно просты. Тот факт, что взаимная простота экспонент есть необходимое условие иметь конечную цокольную высоту многообразия $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ вытекает из следующего примера: $\mathfrak{A}_p^2$ – локально нильпотентное многообразие бесконечной цокольной высоты (см. [2]).

Л е м м а 3. Если H – нормальная подгруппа конечной группы G, то 1) цок$(H) \le$ цок(G); 2) цок$(G/H) \le$ цок(G). Кроме того, если G_i $(1 \le i \le n)$ – конечные группы, то 3) цок $(\prod_{i=1}^{n} G_i) = \max_i$ цок(G_i).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Второе утверждение следует из свойства 5 леммы 2. Докажем неравенство 1) индукцией по числу $n = \text{цок}(G)$. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть для групп G_α цокольной высоты меньшей, чем n, утверждение доказано, и цок$(G) = n$. Обозначим $\pi : G \mapsto G/\sigma(G)$ естественный эпиморфизм. По предположению индукции, цок$(\pi(H)) \le$ цок$(\pi(G))$. Тогда

$$\text{цок}(H) = \text{цок}(H/\sigma(H)) + 1 \le \text{цок}(\pi(H)) + 1 \le \text{цок}(\pi(G)) + 1 = \text{цок}(G),$$

где применено свойство 4 леммы 2 и доказанное выше неравенство 2) настоящей леммы. Равенство 3) следует из свойства 6) леммы 2.

З а м е ч а н и е . 1). Неравенство цок$(G) \le$ цок$(H) +$ цок(G/H) для нормальной подгруппы H группы G, вообще говоря, неверно, как показывает упоминавшийся выше пример сплетения $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p$ и базовой подгруппы A. Здесь цок$(G/A) =$ цок$(A) = 1$, но цок$(G) = p > 2$, если простое p нечетно.

2) Неравенство цок$(H) \le$ цок(G) для произвольной подгруппы H группы G также неверно в общем случае. Простейший пример – неабелева простая конечная группа. Для разрешимых групп это неравенство опровергает следующий пример.

Пусть L – неабелева критическая группа многообразия $\mathfrak{A}_q\mathfrak{A}_p$, где p, q – различные простые числа. Тогда $\sigma(L) \in \mathfrak{A}_q$, $L/\sigma(L) \in \mathfrak{A}_p$.

Докажем, что для L существует точный неприводимый L-модуль над полем из p элементов. Пусть M – минимальный точный L-модуль над полем $\mathbb{Z}_p$. Предположим, что $C_L(\text{soc}M) \ne 1$ ($\text{soc}M$ – цоколь модуля M, а $C_L(\text{soc}M)$

– централизатор цоколя в модуле L). Тогда $\sigma(L) \subseteq C_L(\mathrm{soc}M)$ и поэтому $\sigma(L) \not\subseteq C_L(M/\mathrm{soc}M)$, ибо в противном случае группа $\sigma(L)$ действует на M тривиально (учитываем взаимную простоту $|\sigma(L)|$ и p). Получаем, что L действует на $M/\mathrm{soc}M$ точно, вопреки минимальности M. Итак, $C_L(\mathrm{soc}M) = 1$, то есть минимальный точный L-модуль M совпадает с $\mathrm{soc}M$ и, ввиду монолитичности группы L, группа L действует точно на одну из неприводимых компонент модуля M, то есть существует точный неприводимый L-модуль над полем $\mathbb{Z}_p$. Пусть $L \mapsto \mathrm{End}\,_{\mathbb{Z}_p}V$ есть точное неприводимое представление над полем из p элементов и $G = L \leftthreetimes V$ – соответствующее полупрямое произведение.Тогда V – главный неразложимый L-модуль и

$$V_{L_p} \subseteq \mathbb{Z}_p[L_p]_{\mathbb{Z}_p[L_p]} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p[L_p]_{\mathbb{Z}_p[L_p]},$$

где L_p – силовская p-подгруппа группы L. Следовательно силовская p-подгруппа G_p группы G при $p \geq 4$ имеет класс нильпотентности, а значит и цокольную высоту большую 4, в то время как цок$(G) = 3$, так как $\sigma(G) = V$ и цок$(G/V) = 2$.

Л е м м а 4. Пусть $G_1, \ldots, G_k$ – конечные группы такие, что цок$(H_i) \leq n$ для произвольной подгруппы H_i группы G_i $(1 \leq i \leq k)$. Тогда цокольная высота многообразия $\mathfrak{M} = \mathrm{var}\,\{G_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ меньше либо равна n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любая конечная группа из $\mathfrak{M}$ является фактором конечного прямого произведения групп G_i $(1 \leq i \leq k)$. Поэтому лемма 4 следует из неравенства 2) леммы 3 и из следующей леммы.

Л е м м а 5. Если D есть подпрямое произведение групп $H_1, \ldots, H_k$, цокольная высота которых не выше n, то и цок$(D) \leq n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. будем вести ииндукцией по порядку группы $\mathcal{F} = H_1 \times \cdots \times H_k$. Пользуясь тем, что D – подпрямое произведение, покажем сначала, что $D \cap H_i \lhd H_i$ для $1 \leq i \leq k$. Действительно, пусть $h_1 \in D \cap H_i$, $h_2 \in H_i$ – произвольные элементы. Выберем элемент $d \in D$, у которого i-ая координата равна h_2. Тогда $h_2^{-1}h_1h_2 = d^{-1}h_1d \in D \cap H_i$, поэтому $D \cap H_i \lhd H_i$. Пусть M есть минимальная нормальная подгруппа в H_i, не лежащая в $D \cap H_i$. На основании доказанного выше имеем, что $D \cap M = (D \cap H_i) \cap M = 1$. Если обозначить теперь через $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}/M$ естественный эпиморфизм, то по предположению индукции и неравенству 2) леммы 3 имеем, что цок$(D) =$ цок$(\pi(D)) \leq$ цок$(\mathcal{F}/M) \leq n$.

Итак, можно считать, что $\sigma(H_1) \times \cdots \times \sigma(H_k) = \sigma(\mathcal{F}) \subseteq D$. Нетрудно установить, что в таком случае $\sigma(F) \subseteq \sigma(D)$. Тогда

$$\text{цок}(D) = \text{цок}(D/\sigma(D)) + 1 \leq \text{цок}(D/\sigma(F)) + 1 \leq n - 1 + 1 = n,$$

где использовано предположение индукции и неравенство 2) леммы 3.

Т е о р е м а 1. 1) Многообразия цокольной высоты $\leq n$ образуют подрешетку в решетке всех локально конечных многообразий.

2) Пусть π – конечный набор простых чисел. Для любого натурального числа n существует наибольшее разрешимое многообразие цокольной высоты n, в разложении экспоненты которого входят простые числа из π. Это многообразие содержит все конечные разрешимые группы, все подгруппы которых имеют цокольную высоту не выше n, и в разложение экспоненты которых входят простые числа из π.

Доказательство. Если $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ локально конечные многообразия, то произвольная конечная группа из $\mathfrak{N} \vee \mathfrak{M}$ является фактором прямого произведения $A \times B$, где $A \in \mathfrak{N}$, $B \in \mathfrak{M}$ – конечные группы. Поэтому первое утверждение теоремы следует из леммы 4.

Пусть γ – множество всех разрешимых многообразий, в экспоненту которых входят простые числа из π, а $\gamma_n = \{\mathfrak{M} \in \gamma \mid \text{цок}(\mathfrak{M}) \leq n\}$. Очевидно, что γ и γ_n – подрешетки в решетке всех локально конечных многообразий. Рассмотрим γ_n как частично упорядоченное множество относительно отношения включения. Докажем, что γ_n индуктивное множество, то есть для любого линейно упорядоченного по включению семейства $\mathfrak{M}_i \in \gamma_n$, $i \in I$, существует верхняя грань.

Действительно, пусть $\mathfrak{M} = \operatorname{var}\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$. Обозначим через $s = \prod_{p_j \in \pi} p_j$. Принадлежность $\mathfrak{M} \in \gamma$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 6. Любое многообразие $\mathfrak{N} \in \gamma_n$ имеет класс разрешимости $\leq n$ и $\exp \mathfrak{N} \mid s^n$.

Доказательство получается индукцией по n.

Для завершения доказательства теоремы остается установить, что $\text{цок}(\mathfrak{M}) \leq n$. Пусть $A \in \mathfrak{M}$ – конечная группа. В силу локальной конечности многообразий из γ, справедливо соотношение $A \in \operatorname{var}\{\mathfrak{M}_{i1}, \ldots, \mathfrak{M}_{ik}\}$ для некоторых $i_1, \ldots, i_k$. Так как множество $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ линейно упорядочено, то отсюда следует, что $A \in \mathfrak{M}_j$ для некоторого $j \in \{i_1, \ldots, i_k\}$, поэтому $\text{цок}(A) \leq n$, что и требовалось доказать.

По лемме Цорна в множестве γ_n существует максимальный элемент. Но максимальный элемент из γ_n будет наибольшим ввиду того, что γ_n – решетка.

Последнее утверждение теоремы следует из леммы 4 и доказанного выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейман Х. Многобразия групп// Изд. Мир. — М.— 1969.
2. Kovacs Z., Neuman M. Just-non-Cross varieties of groups.// J. Austral. Math. Soc.— 1971. V. 12 — N2 — 129-144.

УДК 514(075.8):81(075.8)

О ТРИЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

И.В. Прояева, к.ф.-м.н., доц.
Оренбургский государственный педагогический университет
им. В.П. Чкалова
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте РФ (Оренбургский филиал)
e-mail: *docentirina@mail.ru*
А.Н. Колобов, к.т.н., доц.
Оренбургский государственный педагогический университет
им. В.П. Чкалова
Оренбургский государственный университет
e-mail: *KolobovAN@ya.ru*

Геометрия плоских фигур зародилась еще много веков назад, ими пользовались и их изучали еще древние египтяне. Многие древнегреческие и древнекитайские ученые изучали свойства плоских фигур, но особо их интересовал треугольник. По их мнению, это особая замечательная геометрическая фигура, имеет неисчерпаемое количество интересных свойств. Школьная программа по геометрии не может рассказать даже о хорошо известных свойствах треугольника. Лишь отдельный достаточно небольшой ознакомительного характера параграф отведен для теорем Чевы, Менелая, Эйлера и др. Из замечательных точек треугольника обучающиеся знакомятся только с точками пересечения медиан и высот, центрами вписанной и описанных окружностей. Курс геометрии в школе значительно ограничен временными рамками.

В педагогических университетах для изучения обучающимися геометрии плоских фигур отводится целый курс элементарной геометрии [1]. Однако, не все обучающиеся, изучившие этот курс и на экзамене получив «отлично», смогли в полной мере овладеть геометрией треугольника.

Известно, что каждый треугольник можно преобразовать с помощью изогонального сопряжения и с каждым треугольником можно связать особые координаты, которые называются трилинейными и барицентрическими координатами.

Напомним, что трилинейные координаты точки P - относительно треугольника *ABC* – это упорядоченная тройка чисел *x, y, z* , каждое из которых является расстоянием от точки *P* до прямых *BC, CA* и *AB*.

Можно показать, что если положить $\tilde{x}$ равным площади Δ *PBC,* $\tilde{y}$— площади Δ *PCA,* а $\tilde{z}$ — площади Δ *PAB*, то мы получим барицентрические координаты точки P. Отсюда следует, что трилинейные координаты точки связаны с барицентрическими следующим образом:

$$\tilde{x} = \mathrm{B\,C} \cdot \mathrm{x} \qquad \tilde{y} = AC \cdot y \qquad \tilde{z} = AB \cdot z \qquad (1)$$

Докажем, что трилинейные координаты определены с точностью до пропорциональности, без ссылки на свойства барицентрических координат.

Пусть *x, y* и *z* — ориентированные расстояния от некоторой точки *P* до прямых *BC, CA* и *AB* соответственно. Покажем, что на плоскости не существует точки P' для которой эти расстояния были бы равны λx, λy и λz соответственно $(\lambda \neq 1)$. Тогда можно считать, что тройки *(x, y, z)* и $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ при $A \neq 0$ (точки с координатами *(0,0,0)* не существует) определяют одну и ту же точку.

Поскольку отношение первой и второй координат (т. е. отношение расстояний до прямых *BC* и *CA)* для точек *P* и P' одно и то же, то из формулы $\frac{x}{y} = \frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle PCA}$ (углы тоже ориентированы, рис. 1) следует, что точка лежит на прямой *CP* (при $\lambda > 0$ – на луче CP, а при $\lambda < 0$ — на дополнении этого луча). Если $y - 0$, $x \neq 0$, то точка P' лежит на прямой *AC,* которая совпадает в таком случае с прямой *CP.* Если $x = y = 0$, *то* $P = C = P'$.

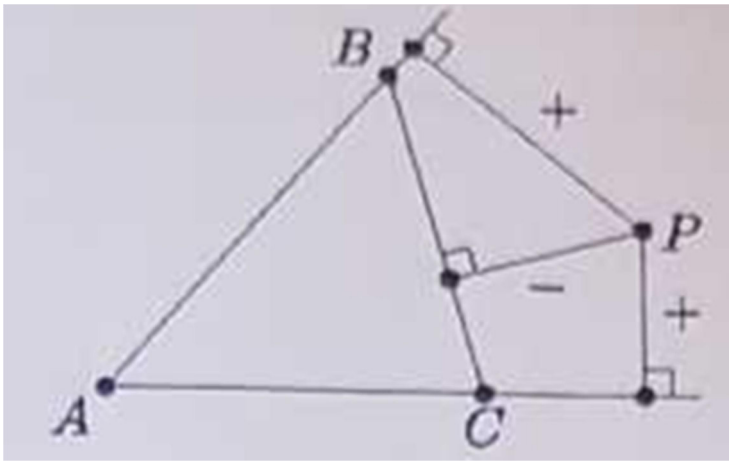


Рисунок 1 – Трилинейные координаты точки

Аналогично, точка P' лежит и на прямой *AP,* и на прямой *BP*, т. е. совпадает с точкой *P,* откуда $\lambda = 1$.

Итак, трилинейные координаты определены с точностью до пропорциональности, и если нам даны не сами расстояния от точки *P* до прямых *AB, BC* и *CA,* а только отношения этих расстояний, то точка *P* также восстанавливается однозначно.

Пусть теперь фиксированы первые две координаты точки (точнее их отношение), причём хотя бы одна из этих двух координат отлична от нуля, а третья координата меняется (рис.2).

Как мы уже знаем, точка *(a, b, z),* $a^2+b^2 \neq 0$, принадлежит некоторой прямой, т. е. можно рассматривать переменную *z* как координату вдоль этой прямой. Но это не обычная, а проективная координата. Например, в вершине C треугольника она принимает значение ∞ (бесконечность), а в несобственной точке прямой (т. е. при бесконечном удалении от точки C) — обычное конечное значение [2].

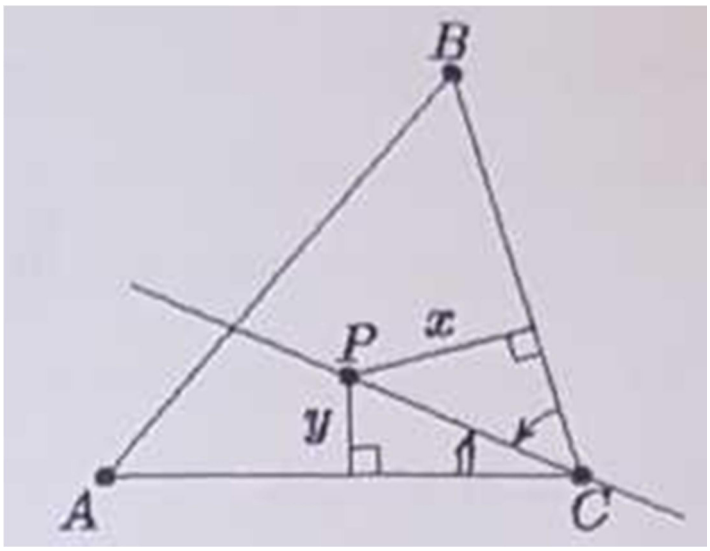


Рисунок 2 – Проективные координаты точек

Проиллюстрируем последнее утверждение: допустим, что точка *(a, b, z)* расположена настолько далеко от треугольника, что он «кажется точкой» (рис. 3). Поскольку заданы числа *a* и *b,* то и z — вполне определённое действительное число [3].

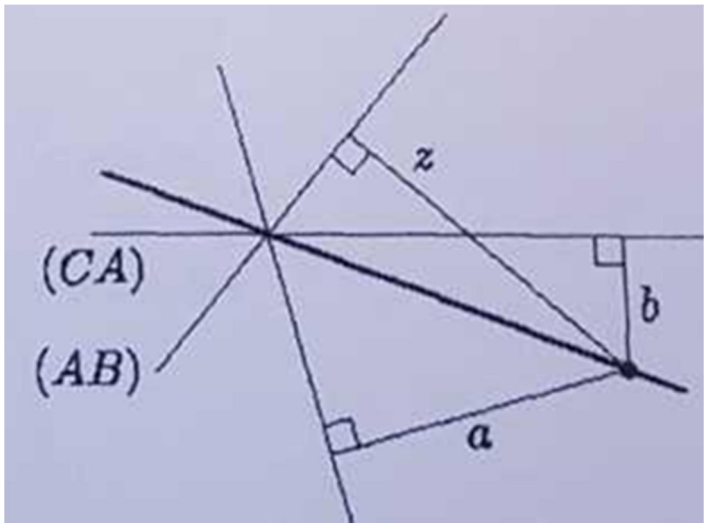


Рисунок 3 – Бесконечно удалённая точка

Необходимо отметить, что трилинейные координаты, обладая важными свойствами, применяются в разнообразных областях науки и техники. В Вузе изучаются при рассмотрении отдельных вопросов теоретической механики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прояева И. В., Сафарова А. Д. Организация самостоятельной работы студентов по подготовке к ГИА курсу «Геометрия», Издательство ОГПУ, Оренбург 2016.
2. Прояева И.В. Компетентностный подход в преподавании математических дисциплин на инженерных специальностях. //Материалы I Международной очно-заочной конференции. Оренбург, ПГУТИ, 2015.
3. В.В.Прасолов, Точки Брокара и изогональное сопряжение, М.: МЦНМО, 2000.

УДК 519.862.6

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПОЛНОСВЯЗНЫХ РЕГРЕССИЙ В УСЛОВИЯХ ПРЕВОСХОДСТВА КОЛИЧЕСТВА ФАКТОРОВ НАД ЧИСЛОМ НАБЛЮДЕНИЙ

М.П. Базилевский, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет путей сообщения»
e-mail: *mik2178@yandex.ru*

Известно, что модель множественной линейной регрессии можно оценивать с помощью метода наименьших квадратов только тогда, когда число её параметров не превосходит объема выборки. В настоящей статье показано, что с помощью моделей полносвязной линейной регрессии даже при наличии всего двух наблюдений можно строить множественные модели для сколь угодно большого числа факторов. Впервые получены оценки полносвязной регрессии для выборки из двух наблюдений. По выборке из двух наблюдений построена пятифакторная модель ВВП России.

Ключевые слова: регрессионная модель, модель полносвязной линейной регрессии, выборка, метод наименьших квадратов, ВВП России.

Введение

Модель множественной линейной регрессии имеет вид:

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{ij} + \varepsilon_i, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где n – объем выборки; m – количество независимых переменных; y_i и x_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ – известные значения зависимой и независимых переменных соответственно; α_i, $i = \overline{0,m}$ – неизвестные параметры; ε_i, $i = \overline{1,n}$ – ошибки аппроксимации.

Зачастую модель (1) оценивается с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Однако МНК можно применять только в том случае, когда справедливо неравенство

$$m + 1 \le n, \tag{2}$$

т.е. когда число параметров $(m+1)$ не превосходит количества наблюдений в выборке n. В противном случае МНК-оценки получить невозможно.

Целью данной работы является демонстрация того, что с помощью моделей полносвязной линейной регрессии даже при наличии всего двух наблюдений можно строить модели типа (1) для сколь угодно большого числа факторов.

1. Модели полносвязной линейной регрессии

Впервые модели полносвязной линейной регрессии были предложены в работах [1,2]. В статье [3] они были обобщены на случай многих переменных.

Пусть x_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ – наблюдаемые значения m ($m\ge 2$) входных переменных x_1, x_2, …, x_m. Предположим, что существуют их «истинные» значения x_{i1}^*, x_{i2}^*, …, x_{im}^*, $i=\overline{1,n}$, связанные с наблюдаемыми значениями равенствами:

$$x_{ij}=x_{ij}^*+\varepsilon_i^{(x_j)},\qquad i=\overline{1,n},\qquad j=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Допустим, что между «истинными» переменными x_1^*, x_2^*, …, x_m^* имеют место функциональные зависимости:

$$x_j^*=a_j+b_jx_m^*,\qquad j=\overline{1,m-1}, \tag{4}$$

где a_j, b_j, $j=\overline{1,m-1}$ – неизвестные параметры.

Совокупность уравнений (3), (4) – многофакторная модель полносвязной линейной регрессии без выходной переменной. Для её оценивания нужно решить следующую оптимизационную задачу:

$$S=\lambda_1\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i1}-a_1-b_1x_{im}^*\right)^2+\lambda_2\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i2}-a_2-b_2x_{im}^*\right)^2+\ldots$$

$$\ldots\lambda_{m-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i,m-1}-a_{m-1}-b_{m-1}x_{im}^*\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}-x_{im}^*\right)^2\to\min, \tag{5}$$

где λ_1, λ_2, …, λ_{m-1} – положительные весовые коэффициенты (лямбда-параметры).

Если лямбда-параметры заданы, то решение задачи (5) находится по следующему алгоритму.

1. С помощью численного решения нелинейной системы вида

$$b_p\left(D_{x_m}+\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j^2b_j^2D_{x_j}+2\sum_{j_1=1}^{m-2}\sum_{j_2=j_1+1}^{m-1}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}b_{j_1}b_{j_2}K_{x_{j_1}x_{j_2}}+2\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jb_jK_{x_jx_m}\right)=$$

$$=\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jb_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jb_jK_{x_jx_p}+K_{x_mx_p}\right),\ p=\overline{1,m-1}, \tag{6}$$

находятся оценки $\tilde b_1$, $\tilde b_2$, ..., $\tilde b_{m-1}$ параметров b_1, b_2, ..., b_{m-1}.

2. Определяются оценки $\tilde a_1$, $\tilde a_2$, ..., $\tilde a_{m-1}$ параметров a_1, a_2, ..., a_{m-1} по формулам:

$$\tilde a_j=\overline{x_j}-\tilde b_j\overline{x_m},\qquad j=\overline{1,m-1}. \tag{7}$$

3. Вычисляются оценки "истинных" значений переменной x_m^* с помощью формулы:

$$\tilde x_m^*=A_0+\sum_{j=1}^{m}A_jx_j, \tag{8}$$

где $A_0=\dfrac{-\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\tilde a_j\tilde b_j}{1+\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\tilde b_j^2}$; $A_j=\dfrac{\lambda_j\tilde b_j}{1+\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\tilde b_j^2}$, $j=\overline{1,m-1}$; $A_m=\dfrac{1}{1+\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\tilde b_j^2}$.

Свяжем оцененные «истинные» значения переменной $\tilde{x}_m^*$ со значениями переменной y моделью парной линейной регрессии:

$$y_i = c_0 + c_1 \tilde{x}_{im}^* + \varepsilon_i, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{9}$$

где c_0, c_1 – неизвестные параметры.

Совокупность уравнений (3), (4), (9) – многофакторная модель полносвязной линейной регрессии с выходной переменной y.

Пусть оцененная, например, с помощью МНК, модель (9) имеет вид:

$$\tilde{y} = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 \tilde{x}_m^*. \tag{10}$$

Тогда, подставляя в (10) выражение (8), получим:

$$\tilde{y} = \theta_0 + \sum_{j=1}^{m} \theta_j x_{ij}, \tag{11}$$

где $\theta_0 = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 A_0$; $\theta_j = \tilde{c}_1 A_j$, $j = \overline{1,m}$.

Уравнение (11) – вторичное уравнение многофакторной модели полносвязной линейной регрессии.

Подчеркнем основные преимущества полносвязных регрессий (3), (4), (9) над множественными моделями (1).

1. В монографии [4] доказано, что при сильной корреляции переменных y, x_1, x_2, ..., x_m знаки коэффициентов при объясняющих переменных во вторичном уравнении (11) совпадают с соответствующими знаками коэффициентов корреляции r_{yx_j}, $j = \overline{1,m}$.

2. Полносвязные регрессии лишены эффекта мультиколлинеарности, поэтому даже при наличии функциональной зависимости между объясняющими переменными вторичное уравнение (11) всегда можно построить.

Покажем далее, что полносвязные регрессии (3), (4), (9) обладают еще одним преимуществом по сравнению с множественными моделями (1).

2. Оценивание полносвязных регрессий по выборкам малого объема

Рассмотрим оптимизационную задачу (5) при известных лямбда-параметрах.

При $n = 1$ эта задача имеет вид:

$$S_1 = \lambda_1 \left(x_{11} - a_1 - b_1 x_{1m}^* \right)^2 + \lambda_2 \left(x_{12} - a_2 - b_2 x_{1m}^* \right)^2 + \ldots$$

$$\ldots \lambda_{m-1} \left(x_{1,m-1} - a_{m-1} - b_{m-1} x_{1m}^* \right)^2 + \left(x_{1m} - x_{1m}^* \right)^2 \to \min. \tag{12}$$

Приравнивая в этом выражении все квадраты к нулю, получим бесчисленное множество решений задачи (12):

$$\tilde{x}_{1m}^* = x_{1m}; \qquad \tilde{b}_j = v_j, \ \tilde{a}_j = x_{1j} - v_j x_{1m}, \ v_j \text{ – любое число}, \ j = \overline{1,m-1}. \tag{13}$$

При $n = 2$ задача (5) имеет вид:

$$S_2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{2} \left(x_{i1} - a_1 - b_1 x_{im}^* \right)^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^{2} \left(x_{i2} - a_2 - b_2 x_{im}^* \right)^2 + \ldots$$

$$...\lambda_{m-1}\sum_{i=1}^{2}\left(x_{i,m-1}-a_{m-1}-b_{m-1}x_{im}^{*}\right)^2+\sum_{i=1}^{2}\left(x_{im}-x_{im}^{*}\right)^2\to\min. \qquad (14)$$

Приравнивая в этом выражении все квадраты к нулю, получим, что

$$\tilde{x}_{im}^{*}=x_{im},\ i=\overline{1,2},$$

и

$$\begin{cases}a_j+b_jx_{1m}=x_{1j},\\ a_j+b_jx_{2m}=x_{2j},\end{cases}\qquad j=\overline{1,m-1}. \qquad (15)$$

Если определитель основных матриц линейных систем (15) $\begin{vmatrix}1 & x_{1m}\\ 1 & x_{2m}\end{vmatrix}\neq 0$, т.е. $x_{1m}\neq x_{2m}$, то каждая из них имеет единственное решение. При этом с помощью формул Крамера можно получить и единственное решение задачи (14):

$$\tilde{a}_j=\frac{x_{1j}x_{2m}-x_{2j}x_{1m}}{x_{2m}-x_{1m}},\qquad \tilde{b}_j=\frac{x_{2j}-x_{1j}}{x_{2m}-x_{1m}},\qquad j=\overline{1,m-1}. \qquad (16)$$

Заметим, что в этом случае значения функционала (14) и суммы квадратов остатков модели (9) будут равны 0.

Очевидно, что при $n>2$ задача (5) тоже будет иметь единственное решение (в определенных условиях). Но для его получения уже придется прибегать к реализации численных методов.

3. Пример

В качестве примера решалась задача моделирования ВВП России. Для этого были использованы статистические данные с сайта Федеральной службы государственной статистики (https://rosstat.gov.ru/) за период с 2017 по 2018 годы (см. таблицу 1) по следующим шести переменным: y – валовой внутренний продукт (ВВП) России (млрд руб.); x_1 – среднемесячная заработная плата по России (руб.); x_2 – численность занятых по России (тыс. человек); x_3 – численность безработных по России (тыс. человек); x_4 – наличие основных фондов в России (млн руб.); x_5 – потребление электроэнергии по России (млн кВт. час).

Таблица 1 – Исходные данные

Год	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2017	92101,35	39167	72142	3966,522	194649464	1089105
2018	103875,8	43724	72354,42	3656,963	206487253	1108134

Матрица парных коэффициентов корреляции для этих переменных представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Матрица парных коэффициентов корреляции

	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Y	1	1	1	-1	1	1
x_1	1	1	1	-1	1	1
x_2	1	1	1	-1	1	1
x_3	-1	-1	-1	1	-1	-1
x_4	1	1	1	-1	1	1
x_5	1	1	1	-1	1	1

Была поставлена задача по исходным данным построить линейное пятифакторное регрессионное уравнение.

Решить такую задачу с помощью традиционного подхода, основанного на оценивании множественной регрессии (1) с помощью МНК, не представляется возможным, поскольку, во-первых, не выполняется условие (2), во-вторых, все переменные связаны между собой функциональными зависимостями, что привело бы к эффекту совершенной мультиколлинеарности.

Для решения поставленной задачи с помощью формул (16) были найдены оценки неизвестных параметров полносвязной регрессии, по которым составлено её вторичное уравнение (11):

$$y = -871245{,}68 + 0{,}517x_1 + 11{,}086x_2 - 7{,}607x_3 + 0{,}0002x_4 + 0{,}124x_5 . \quad (17)$$

При этом значения лямбда-параметров задавались как для диагональной регрессии [4]:

$$\lambda_1 = 17{,}438 , \ \lambda_2 = 8025{,}483 , \ \lambda_3 = 3778{,}842 , \ \lambda_4 = 2{,}584 \cdot 10^{-6} .$$

Как видно, в уравнении (17) знаки коэффициентов при объясняющих переменных совпадают с соответствующими знаками коэффициентов корреляции (таблица 2).

Таким образом, доказано, что для оценки полносвязных регрессий с любым числом переменных достаточно всего двух наблюдений. Имея в распоряжении 2 наблюдения, с помощью полносвязной регрессии удалось построить пятифакторное регрессионное уравнение. Хочется отметить, что моделирование по выборкам малого объема автор считает крайней мерой, поскольку, как известно, для построения адекватной модели нужно использовать как можно больше информации. Однако в реальной ситуации, когда затруднительно осуществить сбор статистических данных, предложенный подход представляется оправданным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Базилевский М.П. Синтез модели парной линейной регрессии и простейшей EIV-модели // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7. – № 1(24). – С. 170–182.
2. Базилевский М.П. Исследование двухфакторной модели полносвязной линейной регрессии // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7. – № 2(25). С. 80–96.
3. Базилевский М.П. Многофакторные модели полносвязной линейной регрессии без ограничений на соотношения дисперсий ошибок переменных // Информатика и её применения. – 2020. – Т. 14. – № 2. – С. 92–97.
4. Базилевский М.П. Методы построения регрессионных моделей с ошибками во всех переменных: монография. – Иркутск: ИрГУПС, 2019. – 208 с.

АНАЛИЗ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ НАСЕЛЕНИЯ ПО ДОХОДАМ

Л.И. Зеленина, к.т.н, доц.
Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В.Ломоносова
e-mail: *l.zelenina@narfu.ru*
Л.Э. Хаймина, к.п.н, доц.
Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В.Ломоносова
e-mail: *l.khaimina@narfu.ru*
Е.А. Деменкова, к.т.н
Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В.Ломоносова
e-mail: *e.demenkova@narfu.ru*
М.Е. Деменков, к.т.н, доц.
Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В.Ломоносова
e-mail: *m.demenkov@narfu.ru*
Е.С. Хаймин
Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В.Ломоносова
e-mail: *e.khaymin@narfu.ru*
В.А. Чикалина
Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В.Ломоносова
e-mail: *chikalina.v@edu.narfu.ru*

В статье рассматривается процесс эконометрического моделирования при анализе социально-экономической дифференциации населения по доходам. Описывается процесс программной реализации проведенного исследования.

Ключевые слова: эконометрическое моделирование, социально-экономическая дифференциация населения, доходы, Python.

1. Введение

На социально-экономическую дифференциацию населения по доходам влияют многие демографические, географические, природные, экологические, экономические, социальные и другие факторы, которые делают невозможным единообразный подход к отдельным субъектам страны. Рост межрегиональных различий в доходах так же порождает миграцию между регионами и концентрацию большого количества населения в одном месте, что в итоге несет в себе больше минусов, чем плюсов.

Актуальность проводимого исследования выражается в значимости регионального экономического развития и конкурентоспособности субъектов страны, которые непосредственно тесно связаны с дефицитом денежного дохода, наиболее четко отражающем социально-экономическую дифференциацию населения по доходам.

Практическая значимость исследования заключается в применении его как одной из составляющих для анализа экономики рассматриваемого региона для дальнейшего его развития.

Для оценки взаимосвязей экономических показателей может быть использовано эконометрическое моделирование [3,6].

2. Построение модели

Для выполнения анализа социально-экономической дифференциации населения по доходам использовались данные с сайта Управления Федеральной службы государственной статистики по рассматриваемому региону за период с 2004 года по 2018 год. При этом за искомую переменную (у) был взят дефицит денежного дохода (млн. рублей в месяц). В качестве факторов, наиболее влияющих на дефицит денежного дохода, были определены следующие показатели:

x_1 – численность населения с денежными доходами ниже величины прожиточного минимума (тыс. человек);

x_2 – x_9 – распределение населения по величине среднедушевых денежных доходов по группам (в процентах, в зависимости от величины Среднедушевого денежного дохода);

x_{10} – x_{14} – распределение общего объема денежных доходов по 20-ти процентным группам населения (в процентах): выделялось 5 групп: от группы с наименьшим доходом до группы с наибольшим доходом;

x_{15} – коэффициент фондов (в разах);

x_{16} – коэффициент Джини;

x_{17} – величина прожиточного минимума (тыс. рублей);

x_{18} – соотношение среднедушевых денежных доходов населения с величиной прожиточного минимума (в процентах).

Для отбора факторных признаков использовалась рассчитанная матрица коэффициентов парной корреляции [1].

Таблица 1 – Фрагмент матрицы коэффициентов парной корреляции

	у	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
Y	1									
x_1	-0,680	1								
x_2	-0,610	0,659	1							
x_3	-0,757	0,937	0,838	1						
x_4	-0,859	0,903	0,767	0,958	1					

Анализ таблицы показал, что такие факторы как x_2, x_6, x_7, x_{10}-x_{16} и x_{18} оказывают наименьшее влияние на результативный признак.

Для определения мультиколлинеарности факторов был использован тест Фаррара-Глоубера. Отобразим некоторые промежуточные расчетные этапы.

- При проверке наличия мультиколлианерности всего массива переменных производился расчет матрицы межфакторных корреляций позволил определить взаимосвязь между факторами [2].

Таблица 2 – Фрагмент матрицы межфакторной корреляции

	x_1	x_3	x_4	x_5	x_8	x_9	x_{17}
x_2	1	0,937	0,903	0,473	-0,742	-0,762	-0,774
x_5	0,937	1	0,958	0,573	-0,817	-0,830	-0,807
x_6	0,903	0,958	1	0,738	-0,840	-0,924	-0,899

- Для определения наличия мультиколлинеарности каждой пары переменных были вычислены частные коэффициенты корреляции и их t-критерии.

Таблица 3 – Фрагмент таблицы частных коэффициентов корреляции

Частные коэффициенты корреляции					
r_{13}	-0,79838	r_{35}	-0,93648	r_{417}	-0,90422
r_{14}	0,81800	r_{38}	-0,93204	r_{58}	-0,82961
r_{15}	-0,90692	r_{39}	-0,82602	r_{59}	-0,95714

$$t_{ij} = \frac{r_{ij}\sqrt{n-k-1}}{\sqrt{1-r^2{}_{ij}}} \quad (1)$$

Таблица 4 – Фрагмент таблицы вычисленных значений

Частные коэффициенты корреляции					
t_{13}	-3,50789	t_{35}	-7,06454	t_{417}	-5,60190
t_{14}	3,76250	t_{38}	-6,80522	t_{58}	-3,93113
t_{15}	-5,69538	t_{39}	-3,87731	t_{59}	-8,74360

Рассчитанные значения после сравнения с табличным, показали мультиколлинеарность между некоторыми факторами. Так как отклонения от табличного значения не большие, то для короткой регрессии были выбраны факторы, которые меньше влияют на общую мультиколлинеарность, то есть F-критерии меньше остальных. Таким образом, были определены формулы длинной и короткой регрессий:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta_8 x_8 + \beta_9 x_9 + \beta_{17} x_{17} + \varepsilon_i \text{ (длинная регрессия)} \quad (2)$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_8 x_8 + \beta_{17} x_{17} + \varepsilon_i \text{ (короткая регрессия)} \quad (3)$$

Обе регрессии построены по методу наименьших квадратов. Для каждой из них была найдена остаточная сумма квадратов по формуле:

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2, \quad (4)$$

где i – номер наблюдения, y_i – реальные показатели зависимой переменной, x_i – показатели объясняющих переменных, $f(x_i)$ – прогнозируемое значение зависимой переменной.

Дисперсионный анализ					
	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	7	342170,9	48881,56	791,9563	1,32335E-09
Остаток	7	432,0578	61,72255		
Итого	14	342603			

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%
Y-пересечен	-486,9575299	375,1746683	-1,297948852	0,235433605	-1374,104649	400,1896	-1374,1	400,1896
x1	2,541742892	0,511791731	4,966361782	0,001625851	1,331547753	3,751938	1,331548	3,751938
x3	-2,902778128	5,885233946	-0,493230712	0,636945215	-16,81914504	11,01359	-16,8191	11,01359
x4	-5,126401242	8,095778203	-0,633219082	0,546713221	-24,26987472	14,01707	-24,2699	14,01707
x5	6,85357721	17,70232226	0,387156957	0,710141566	-35,00576332	48,71292	-35,0058	48,71292
x8	1,335638964	2,476940892	0,539229244	0,606445836	-4,521395539	7,192673	-4,5214	7,192673
x9	-1,3471841	7,294350117	-0,184688708	0,858710084	-18,59558129	15,90121	-18,5956	15,90121
x17	51,76812366	5,580476672	9,276649058	3,50179E-05	38,57239319	64,96385	38,57239	64,96385

Рисунок 1 – Дисперсионный анализ «длинной» регрессии

Дисперсионный анализ

	df	SS	MS	F	Значимость F
Регрессия	3	339293,7	113097,9	375,9306	2,32275E-11
Остаток	11	3309,326	300,8478		
Итого	14	342603			

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%
Y-пересеч	-202,775816	62,28638452	-3,255539996	0,007659445	-339,8672	-65,6844	-339,867	-65,6844
x1	1,132858562	0,251979618	4,495834121	0,000907412	0,5782552	1,687462	0,578255	1,687462
x8	0,656670697	1,421748125	0,46187555	0,653170971	-2,472576	3,785917	-2,47258	3,785917
x17	50,50456794	3,25215646	15,52956278	7,90552E-09	43,34662	57,66252	43,34662	57,66252

Рисунок 2 – Дисперсионный анализ «короткой» регрессии

Из таблицы видим, что P-значение у x_8 высокое, поэтому его можно исключить из короткой регрессии.

Дисперсионный анализ

	df	SS	MS	F	Значимость F
Регрессия	2	339229,5	169614,7	603,3419	9,11468E-13
Остаток	12	3373,505	281,1254		
Итого	14	342603			

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%
Y-пересеч	-196,2142825	58,62316413	-3,347043535	0,00581185	-323,9432	-68,4854	-323,943	-68,4854
x1	1,113161707	0,240066516	4,636888661	0,00057325	0,590102	1,636222	0,590102	1,636222
x17	51,64924333	2,035619645	25,37273771	8,5369E-12	47,21401	56,08448	47,21401	56,08448

Рисунок 3 – Дисперсионный анализ «короткой» регрессии после исключения фактора x_8

Сумма квадратов остатков длинной регрессии составила:

$RSS_{\text{длин}} = 432{,}0578$

Сумма квадратов остатков короткой регрессии составила:

$RSS_{\text{кор}} = 3373{,}505$

На основе F-статистики была определена целесообразность использования короткой регрессии:

$$y = -196{,}22 + 1{,}11 \cdot x_1 + 51{,}65 \cdot x_{17}\,, \qquad (5)$$

где x_1 – численность населения с денежными доходами ниже величины прожиточного минимума, x_{17} – величина прожиточного минимума для всего населения.

3. Оценка параметров и качества модели. Прогнозирование данных

Для подтверждения качества и точности модели использовались коэффициенты детерминации R^2, множественной корреляции R и средняя ошибка аппроксимации [4,5]:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 0.99 \quad (6)$$

$$R = \sqrt{R^2} = 0.995 \quad (7)$$

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{e_i}{y_i}\right| \cdot 100\% = 3.1\% \quad (8)$$

Значимость уравнения регрессии и его коэффициентов подтвердили F-критерий Фишера и t-статистика Стьюдента.

Условие однородности данных подтверждено при помощи теста Голдфелда-Куандта. Данный тест является процедурой тестирования неоднородности данных (гетероскедастичности) случайных ошибок регрессионной модели, которая применяется в том случае, когда есть предположения о том, что стандартное отклонение ошибок может быть пропорционально некоторой переменной, и о нормальности распределения случайных ошибок регрессионной модели.

При помощи коэффициентов эластичности и бета-коэффициентов было оценено влияние факторов на выбранную модель на основе формул (9) и (10):

$$Э_i = \alpha_i \cdot \bar{x_i}/\bar{y}, \quad (9)$$

где a_i – значение коэффициента, $\bar{x_i}$ – среднее значение фактора, $\bar{y}$ – среднее значение зависимой переменной.

$Э_1 = 0{,}5;$

$Э_{17} = 0{,}97.$

$$\beta_i = \alpha_i \cdot S_{xi}/S_y, \quad (10)$$

где a_i – значение коэффициента, S_{xi} – среднеквадратическое отклонение фактора, S_y – среднеквадратическое отклонение зависимой переменной.

$\beta_1 = 0{,}21;$

$\beta_{17} = 1{,}15.$

Из данных значений следует, что наибольшее влияние на «Дефицит денежного дохода» оказывает фактор x_{17} – «Величина прожиточного населения для всего населения».

Для прогнозирования дефицита денежного дохода на три последующих периода, были сначала найдены прогнозные значения факторов x_1 и x_{17} (в т.ч. при верхних и нижних границах) затем получены прогнозные значения результативного признака.

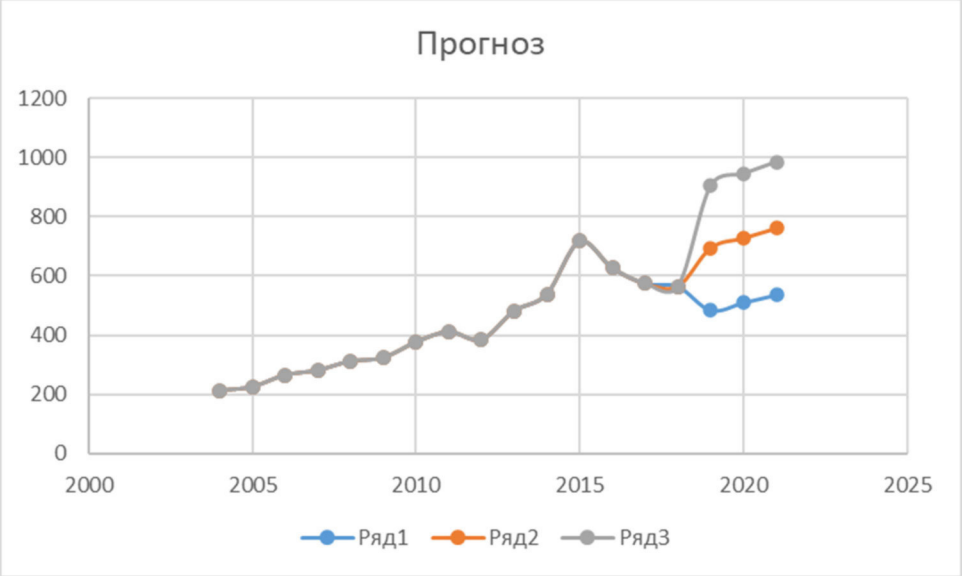


Рисунок 4 – Величина прожиточного минимума для всего населения

4. Разработка приложения

Для данного эконометрического анализа был выбран язык программирования Python, так как он является наиболее доступным в использовании и является мощным инструментом для создания программ различного назначения.

Для программной реализации выполненного анализа было использовано программное обеспечение Anaconda. Anaconda – инсталлятор, написанный на языках C и Python. Код был написан на высокоуровневом языке Python3 через интерактивную веб-оболочку Jupyter Notebook.

Для осуществления ввода данных пользователем используется функция askopenfilename() из модуля filedialog библиотеки Tk. При помощи нее создается диалоговое окно для открытия файла. Далее считываются данные из текстового файла и идет преобразование их в двумерный массив.

Следующим шагом было построение матрицы корреляций на основе функции np.corrcoef() из библиотеки NumPy.

Для дальнейшего шага был реализован алгоритм по методу наименьших квадратов при помощи функции np.linalg.det(). Данная функция позволяет рассчитать определитель заданной матрицы. Определитель рассчитывается через LU-разложение, используя библиотеку с открытым исходным кодом, содержащую методы для решения основных задач линейной алгебры LAPACK через подпрограмму z/dgetrf.

Интерфейс приложения был реализован через tk и содержит текстовое поле для ввода количества факторов и кнопку «Пуск». После запуска открывается

окно для выбора файла, а затем приложение выводит уравнение регрессионной модели и график прогноза развития дефицита денежного дохода.

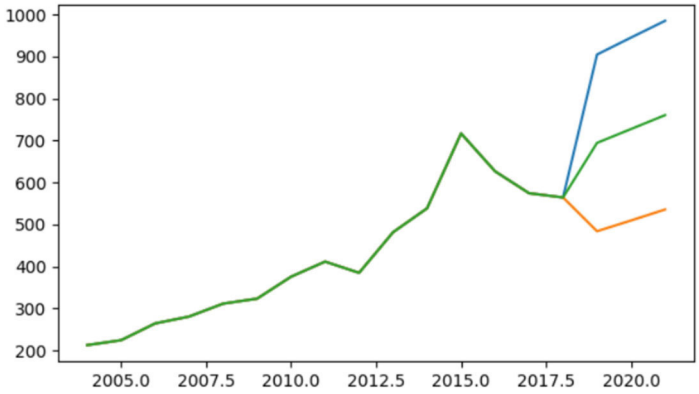


Рисунок 5 – Демонстрация работы приложения

Вывод

В результате проведенного исследования был выполнен анализ социально-экономической дифференциации населения по доходам, в частности дефицита денежного дохода, а также разработано приложение, выводящее модель и график по проведенному анализу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидова, О.А. Эконометрика: учебник и практикум для прикладного бакалавриата. – М: Юрайт. - 2016. – 334 с.
2. Молотникова, А. А. Основы эконометрики. – СПБ: Лань. - 2018. – 168 с.
3. Николаева, С.В, Красников, С.А., Зеленина Л.И., Сартаков М.В. Прогнозирование прибыли предприятия// Естественные и технические науки. – 2008. - №2(34). – с.455-459.
4. Розенцвайг, А.К. Методы эконометрического моделирования и анализа социально-экономических явлений. – Казань: КФУ. - 2014. – 121 с.
5. Соколов, Г. А. Введение в регрессионный анализ и планирование регрессионных экспериментов в экономике. – М: Инфра-М. - 2017. – 202 с.
6. Федькушова, С.И., Зеленина, Л.И. Прогнозирование экономических показателей на основе временных рядов// Концепт. – 2014. - №Т.26. – с.296-300.

УДК 004.825

ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Л.Н. Зубкова, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: ZubkovaLN@yandex.ru

В статье рассматриваются отдельные вопросы проектирования базы нечетких правил в задачах управления на основе математического инструментария лингвистических переменных и нечетких множеств.

Ключевые слова: нечеткое управление, продукционное правило, лингвистическая переменная, функция принадлежности.

Задачи управления представляют один из обширных классов задач и встречаются в различных сферах деятельности человека. Для решения задач управления предложены разнообразные инструменты и технологии. Рассмотрим один из инструментов – управление на основе нечеткой системы, использующей базу знаний в виде правил, представленных в лингвистической форме.

Центральным вопросом создания подобной системы становится вопрос проектирования правил как нечетких регуляторов, которые будут применяться в нечетком логическом выводе – механизме работы самой системы управления.

Существуют разные способы создания правил нечеткого управления. Например, на основе опыта и знаний эксперта, когда в словесном виде извлекаются опыт квалифицированного оператора и знания инженера по управлению, которые затем обобщаются в виде правил нечеткого управления в форме «если ... то». Или создается модель действий оператора, когда оператор запоминает манипуляции и моделирует действия в форме «если... то», фактически получая правила управления. Распространенным способом создания правил является обучение модели оборудования, когда можно провести эксперимент на реальном оборудовании или существует модель оборудования; например, при управлении роботами [3].

Можно отметить некоторые особенности нечеткого управления. Во-первых, правила нечеткого управления, будучи импликативными высказываниями типа «если...то», являются логическими, а их использование осуществляется через механизм логического вывода. Во-вторых, при нечетком управлении может использоваться большое число частных правил, работающих параллельно. Одни правила ориентированы на разные регулируемые величины, другие – поддерживают разные цели управления. Таким образом, в нечеткое управление вводятся методы принятия решений, свойственные человеку, в форме распределенных по отдельным состояниям и целям правил управления и нечетких выводов [4].

Как уже отмечалось, одним из центральных вопросов проектирования базы знаний является вопрос создания правил. Они могут быть построены на основе лингвистической информации, или на основе численных данных, полученных экспериментально или с датчиков реального оборудования.

Пусть требуется создать систему с m входами и одним выходом. Тогда проектируемая система будет описывать объект, который имеет векторный вход $\boldsymbol{x}$ с m элементами и один выход y. Обучающие или экспериментальные данные образуют множество пар $<\boldsymbol{x}^{(k)}, y^{(k)}>$, k=1, 2, …, N, где m-мерные векторы $\boldsymbol{x}^{(k)}$ имеют координатами значения сигналов, подаваемых на вход модуля нечеткого управления, $y^{(k)}$ - значение выходного сигнала (эталона), т.е. имеют вид $\left\langle x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_m^{(k)}, y^{(k)} \right\rangle$. k – счетчик примеров, N – количество примеров. Формируемые нечеткие правила должны стать основой модуля нечеткого управления, который корректно, с наименьшей погрешностью будет генерировать выходные сигналы на основе полученных входных сигналов.

На первом этапе производится разделение пространства входных и выходных сигналов на области. Для каждого входа и выхода число областей может отличаться друг от друга. Оно должно определяться содержанием того, что отражает конкретный сигнал, в каких качественно интерпретируемых диапазонах он принимает значения. Для ответа на этот вопрос нужно экспертное знание в предметной области, для которой нечеткая система проектируется. Например, пусть входной сигнал x_i фиксирует значение, переданное с датчика температуры, а эксперт предметной области указывает четыре температурных режима работы технической системы, для которой проектируется нечеткая система управления. Тогда целесообразно диапазон значений i-го входа разделить на четыре области, соответствующие четырем режимам работы системы. Каждая выделенная область должна получить свое название, то есть стать термом лингвистической переменной, описывающей соответствующий вход. Так, для лингвистической переменной X_i=«допустимая температура», описывающей вход i, экспертно определено следующее терм-множество $T=\{T_i^1$ =«низкая», T_i^2 =«ниже среднего», T_i^3 =«выше среднего», T_i^4 =«высокая»$\}$.

Для каждого терма T_i^s, как для нечеткого множества, нужно задать функцию принадлежности, определив ее тип и параметры. Причем последние могут быть назначены экспертно или подобраны на основе обучения на экспериментальных данных. Функция принадлежности должна отражать характер распределения наблюдаемых значений на i-ом входе.

Если экспертного знания о возможном числе диапазонов для i-го входа нет, то можно использовать кластерные процедуры, подбирая оптимальное число кластеров в соответствии с выбранным функционалом качества разбиения. Для решения подобной задачи можно использовать, например, алгоритм нечетких с-средних.

Формирование областей для каждого входа и выхода представляет комплексную задачу, которая интегрирует ряд подзадач: выполнение описательной статистики для понимания распределения и структуры данных для каждого входа и выхода, определение числа областей разделения для каждого входа и выхода на основе структуры данных и экспертного знания, формализация экспертного знания, определение вида и параметров для функций принадлежности термов, выбор метрики и функционала качества разделения на кластеры в случае использования кластерных процедур.

На следующем шаге определяется степень принадлежности обучающих данных к каждой из выделенных на предыдущем шаге областей, что позволяет для каждого *к*-го обучающего примера построить правило вида (1) и определить степень его истинности (2)

$$R^{(k)}: \text{Если } x_1^{(k)} \text{ есть } T_1^s \text{ и ... и } x_i^{(k)} \text{ есть } T_i^s \text{ и ... и } x_m^{(k)} \text{ есть } T_m^s, \text{ то } y^{(k)} \text{ есть } T_y^s \quad (1)$$

$$\gamma\left(R^{(k)}\right) = \mu_{T_1^s}(x_1) \cdot \mu_{T_2^s}(x_2) \cdot \ldots \cdot \mu_{T_i^s}(x_i) \cdot \ldots \cdot \mu_{T_m^s}(x_m) \cdot \mu_{T_y^s}(y) \quad (2)$$

Для *к* обучающих примеров будет получено *к* правил. Среди полученных правил могут оказаться противоречивые правила с одинаковым набором посылок и разными заключениями. В этом случае в базу нечетких правил включается правило с наибольшей степенью истинности.

Кроме того, при большом числе обучающих примеров получается достаточно много правил, среди которых будут одинаковые правила. Объемные группы одинаковых правил указывают на важность правила, представляющего группу, среди остальных. Это является основанием для введения коэффициента важности правила, который позволит ранжировать сами правила по важности их участия в общем логическом выводе.

Для решения проблемы избыточности и противоречивости базы правил возможно использовать рейтинги правил. Все примеры обучающей выборки предъявляются правилу *j*, рассчитываются степени истинности (2) для всех примеров в правиле *j*, в результате определяется рейтинг правила *j* как $\sum_j \gamma_j(R^{(k)})$.

Следующий этап состоит в определении отображения $f: (x_1, x_2, \ldots, x_m) \to \hat{y}$ на основе правил базы знаний, где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ – вектор входных сигналов, $\hat{y}$ - отклик нечеткой системы управления. Отображение $\boldsymbol{f}$ реализуется через алгоритм нечеткого вывода, включающий следующие этапы: определение степени истинности $\mu_{T_i^s}^j(x_i)$ каждой предпосылки *i* (*i*= 1, , *m*) каждого правила *j*, агрегирование степеней истинности предпосылок по каждому из правил, активизация заключений по каждому из правил (получение y_j), аккумулирование заключений по всем правилам и приведение к четкости (расчет $\hat{y} = \frac{\sum_j \tau_j y_j}{\sum_j \tau_j}$) [2].

База правил считается окончательно сформированной, если правила в ней хорошо адаптированы, то есть с наименьшей погрешностью генерируют выходные сигналы на основе тестовых входных сигналов. Задача адаптации правил фактически является самостоятельной задачей параметрической оптимизации, в которой оптимизируют значения параметров функций принадлежности термов, используемых в правилах, на основе обучающей выборки. Как правило, эта задача решается с помощью представления нечеткой продукционной модели управления в виде нечеткой нейронной сети, обучение которой «настраивает» параметры функций принадлежности [1].

Таким образом, при нечетком управлении в качестве способа представления обширных профессиональных знаний предметной области используются продукционные правила. Они позволяют в естественном виде представить

субъективные нечеткие понятия, свойственные человеку, описать профессиональные знания квалифицированного оператора. В качестве средства представления нечеткостей вводятся лингвистические переменные, нечеткие множества и функции принадлежности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов, В.В. Нечеткие модели и сети/ В.В. Борисов, В.В. Круглов, А.С. Федулов. – М.: Горячая линия – Телеком , 2007. – 284 с.
2. Рутковская, Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 452 с.
3. Прикладные нечеткие системы: Пер. с япон./ К. Асаи, Д. Ватада, С. Иван и др.; под редакцией Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. – М.: Мир, 1993. – 368 с.
4. Теория и методы разработки управленческих решений. Поддержка принятия решений с элементами нечеткой логики [Электронный ресурс]: учебное пособие / О.Н. Лучко [и др.]. — Омск: Омский государственный институт сервиса, 2012. — 110 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/12704.html

УДК 519.22

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ ВЛАДИМИРСКОЙ ОБЛАСТИ

И.Ф. Курбыко, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
e-mail: *levizov@rambler.ru*

Работа посвящена математическому моделированию динамики временных рядов, представляющих показатели социально-экономического развития Владимирской области. В качестве основного инструмента исследования выбраны адаптивные методы, позволяющие учитывать информационную неравноценность уровней ряда. Построен прогноз показателей на ближайший период на основе уравнений полиномиальных адаптивных моделей.

Ключевые слова: временной ряд, экспоненциальные средние, константа сглаживания, адаптивные модели, краткосрочный прогноз показателей.

Совершенствование методологии прогнозирования в сфере региональной экономики в условиях стремительно входящих в общественную жизнь цифровых технологий является важной научно-практической задачей. В математическом моделировании социально-экономических процессов большое внимание уделяется краткосрочному прогнозированию временных рядов на основе адаптивных моделей **(**в частности, см. работы [1-2] и приведённую там библиографию**).** При обработке данных по адаптивной методике, как правило, больший

вес получают более свежие наблюдения, что важно для конъюнктурных прогнозов.

Целью настоящей работы является построение адаптивных моделей и расчёт прогноза (на ближайшие годы) ряда социально-экономических показателей Владимирской области. Термин «адаптация» по отношению к прогнозированию означает следующее. Алгоритм расчёта состоит в последовательном построении математических моделей, параметры которых корректируются на каждом новом шаге с учётом ошибки прогноза, полученной в предыдущий момент времени. Таким образом, модель реагирует на ошибку, адаптируется к новым условиям в отличие от трендовой модели, построенной изначально методом наименьших квадратов по всему ряду исходных данных. С учётом последнего известного уровня $P(T)$ временного ряда $\{P(t), t = 1,2,...,T\}$, на выходе формируется полиномиальная модель со скорректированными параметрами, позволяющая строить прогноз в последующие моменты времени $(T+\tau), \tau = 1,2,...$. В данном случае принята гипотеза, что динамика изучаемых временных рядов может быть описана многочленом степени n, где $0 \le n \le 2$. Расчёты выполнены с использованием инструментария статистических программ Stadia и MS Excel.

Исходные данные сформированы на основании источников службы государственной статистики региона за 2000-2019 годы [3]. Использованы следующие обозначения показателей: P_1 – численность занятого в экономике населения, тыс. чел.; P_2 – величина прожиточного минимума в среднем на душу населения области, в месяц, рублей; P_3 – численность населения с денежными доходами ниже величины прожиточного минимума, тыс. чел.; P_4 – инвестиции в основной капитал, млн. рублей; P_5 – оборот розничной торговли, млн. рублей; P_6 – производство продуктов животноводства в хозяйствах всех категорий, тыс. тонн; P_7 – объем работ по виду деятельности «строительство», млн. рублей; P_8 – денежные доходы в среднем на душу населения в месяц, рублей; P_9 – объем валового регионального продукта (ВРП), млн. рублей. Абсолютные значения показателей $(P_1, P_2, ..., P_7)$ с 2000 года по 2019 год, P_7 и P_8 по 2018 год, представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Временные ряды социально-экономических показателей

Год	t	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
2000	1	702,5	823,8	704,2	4852,0	11652,4	61,3	2736,4	1252	35242,2
2001	2	705,0	1328	634,1	6224,2	14561,1	60,8	3141,4	1626	44915,4
2002	3	724,3	1493	543,4	8849,9	16801,2	62,9	3317,3	2101	53983,3
2003	4	715,6	1794	460,8	10326,7	20234,0	63.0	3226,8	2837	66681,4
2004	5	733,0	2102	448,5	12491,1	24935,4	55,3	5229,5	3364	74207,0
2005	6	736,5	2545	441,8	17326,9	31541,3	54,9	6448,3	4108	86926,8
2006	7	706,0	3147	378,4	22253,3	39511,8	55,9	7877,0	5627	112841,7
2007	8	733,0	3660	340,4	32824,6	62525,8	58,4	13839,6	7015	146663,0

2008	9	741,3	4460	292,4	46821,0	82004,0	60,5	20527,7	9480	175395,7
2009	10	697,5	5019	283,6	47888,4	82744,0	60,4	20078,3	10828	185824,6
2010	11	715,2	5514	250,4	47133,7	101592,6	63,7	21308,9	12956	224759,2
2011	12	728,7	6156	252,8	57987,0	122486,5	62,9	23516,8	14312	261222,6
2012	13	742,3	6301	214,7	60125,1	145963,6	70,9	26859,9	16229	286018,6
2013	14	740,9	6920	199,8	65291,7	164720,4	76,8	30132,6	18058	306641,4
2014	15	725,6	7770	200,9	75667,0	180715,6	70,5	32200,8	19530	327885,3
2015	16	717,7	9344	207,1	80478,3	192183,0	69,9	31525,1	22712	368489,2
2016	17	695,7	9269	204,3	78456,4	197302,9	70,0	32878,2	22365	393775,1
2017	18	697,5	9467	184,0	79555,4	209268,4	67,3	36761,5	23438	412942,7
2018	19	688,4	9561	180,6	74310,8	225731,2	54,5	40531,2	23632	440543,0
2019	20	692,1	10340	171,4	90084,5	238711,1	46,3	42565,1	-	-

Вычисление параметров адаптивных моделей выполнено согласно алгоритму [2]. В целях прогнозирования показателей $(P_1, P_2, ..., P_9)$ с явно выраженной динамикой на повышение или понижение уровней ряда выбрана линейная или квадратичная модель на основе графического анализа данных. Адаптивная модель первого порядка (линейная) представляет прогноз показателя на τ шагов вперёд по формуле: $\widetilde{P}(T+\tau) = a_{0T} + a_{1T}\tau$. Модель прогнозирования второго порядка (квадратичная) имеет вид: $\widetilde{P}(T+\tau) = a_{0T} + a_{1T}\tau + (1/2)a_{2T}\tau^2$. Модель нулевого порядка $\widetilde{P}(T+\tau) = a_{0T}$ используется для показателей, не имеющих тенденции развития. Согласно известной теореме Брауна-Майера, коэффициенты модели-полинома степени n рассчитываются через линейные комбинации экспоненциальных средних (сглаженных уровней временного ряда): $ES_t^{[m]} = \alpha ES_t^{[m-1]} + (1-\alpha)ES_{t-1}^{[m]}$ $(m = 1,2,...n+1)$. Здесь число α – константа сглаживания. Экспоненциальная средняя нулевого порядка для ряда $P(t)$ представляется в виде: $ES_t(P) = \alpha P(t) + (1-\alpha)ES_{t-1}(P) = (1-\beta)\sum_{i=0}^{T-1}\beta^i P(t-i) + \beta^T S_0$, где T – число наблюдений; $\beta = 1-\alpha$ – параметр дисконтирования данных, $0 < \beta < 1$; S_0 – начальное значение экспоненциальной средней; $P(t)$ и $P(t-i)$ – уровни временного ряда соответственно с номером t и $t-i$. Здесь $(1-\beta)\cdot\beta^i = (1-\beta)\cdot\exp(i\ln\beta)$, где $\ln\beta) < 0$, есть вес уровня ряда $P(t-i)$, который регулирует параметр адаптации β. Отсюда следует, что приближаясь к началу наблюдений, вес исходных данных падает по экспоненциальному закону, а экспоненциальная средняя $ES_t(P)$ является взвешенной суммой всех членов ряда. При $T \to \infty$, то есть с ростом числа наблюдений, сумма всех весов $(1-\beta)\sum_{i=0}^{T-1}\beta^i \to 1$ (приближается к единице).

Построение моделей включило следующие взаимосвязанные этапы работы. Вначале сделан выбор в пользу линейной или параболической модели и методом МНК, исходя из первых 6-7-ми уровней ряда, рассчитаны начальные параметры моделей: $\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2$. Затем была установлена константа сглаживания и

определены начальные экспоненциальные средние для линейной адаптивной модели: $ES_0 = \widetilde{a}_0 - (\beta/\alpha)\widetilde{a}_1$, $ES_0^1 = \widetilde{a}_0 - (2\beta/\alpha)\widetilde{a}_1$; для параболической модели: $ES_0 = \widetilde{a}_0 - (\beta/\alpha)\widetilde{a}_1 + (\beta(\beta+1)/2\alpha^2)\widetilde{a}_2$, $ES_0^1 = \widetilde{a}_0 - (3\beta/\alpha)\widetilde{a}_1 + (3\beta(4-3\alpha)/2\alpha^2)\widetilde{a}_2$. Далее последовательно с включением в обработку каждого нового члена ряда с номером t вычислены по рекуррентным формулам последующие значения экспоненциальных средних $ES_t^{[m]}$, на основе которых параллельно корректируются коэффициенты модели по формулам [2] и делается прогноз на шаг вперёд. Ошибка прогноза поступает на вход для расчёта новых значений экспоненциальных средних. В итоге на выходе для каждого ряда выстраиваются коэффициенты прогнозирующего полинома.

Отметим, что встаёт вопрос о выборе определённого значения $\alpha \in [0,1]$. Здесь возникает противоречие. С ростом α возрастает вес более поздних наблюдений, которым отвечают уровни ряда с большими номерами; с другой стороны, с убыванием α лучше сглаживаются случайные колебания, что следует из формулы дисперсии: $D[ES_t] = (\alpha/(2-\alpha))\sigma_P^2$, где σ_P^2 дисперсия исходного ряда. В данном случае, по каждому показателю $(P_1, P_2, ..., P_9)$ был построен ряд моделей при $\{\alpha = 0{,}1; 0{,}2; ...; 0{,}9\}$. Из этих значений выбрана константа $\alpha_в$, при которой была получена наименьшая средняя по модулю относительная ошибка аппроксимации известных уровней соответствующего ряда: $E_{отн.} = \left(\sum_{t=1}^{T} \left|P(t) - \widetilde{P}(t)\right| / P(t)\right) / T \cdot 100(\%)$ Далее был построен новый ряд моделей с константой $\{\alpha_k = \alpha_в \pm k/100, k = 0;1;2;...;9\}$, изменяющейся в окрестности величины $\alpha_в$. В конечном итоге, для прогнозирования по каждому показателю $(P_1, P_2, ..., P_9)$ отобраны модели с параметрами α_k, отвечающими минимальным значениям ошибки $E_{отн,k}(\%)$. Уравнения адаптивных моделей для показателей $(P_1, P_2, ..., P_9)$ и их характеристики представлены в таблице 2. Прогноз показателей на ближайшие годы 2020-2023 представлен в таблице 3.

Таблица 2 – Результаты расчёта адаптивных моделей

Уравнения моделей Прогнозирования	Параметр сглаживания α	Относительная ошибка $E_{отн}$, **%**
$\widetilde{P}_1(\tau) = 694{,}422 - 5{,}443\tau - 0{,}25878\tau^2$	0,10	1,72
$\widetilde{P}_2(\tau) = 10449{,}05 + 551{,}311\tau + 3{,}01372\tau^2$	0,24	6,65
$\widetilde{P}_3(\tau) = 171{,}7653 - 7{,}6481\tau + 0{,}08575\tau^2$	0,51	6,83
$\widetilde{P}_4(\tau) = 86592{,}04 + 3504{,}491\tau$	0,38	9,41
$\widetilde{P}_5(\tau) = 238023{,}4 + 12066{,}59\tau - 163{,}12\tau^2$	0,42	5,28
$\widetilde{P}_6(\tau) = 56{,}4$	0,40	4,42
$\widetilde{P}_7(\tau) = 42734{,}12 + 2649{,}738\tau + 35{,}54647\tau^2$	0,28	11,34

$\widetilde{P}_8(\tau) = 27411{,}2 + 2565{,}155\tau + 368{,}2214\tau^2$	0,55	4,61
$\widetilde{P}_9(\tau) = 456162{,}9 + 18847{,}69\tau - 1652{,}76\tau^2$	0,49	8,59

Таблица 3 – Прогноз показателей по адаптивным моделям

Показатель	Единицы измерения	Прогноз			
		2020	2021	2022	2023
		$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
P_1	тыс. чел.	688,7	682,5	675,8	668,5
P_2	рублей	11003	11564	12530	12703
P_3	тыс. чел.	164,2	156,8	149,6	142,5
P_4	млн. рублей	90096,54	93601,03	97105,52	100610,0
P_5	млн. рублей	249926,9	261504,1	272755,1	283679,9
P_6	тыс. тонн	56,4	56,4	56,4	56,4
P_7	млн. рублей	45619,40	48575,78	51603,25	54701,81
P_8	рублей	23693	33278	36764	40618
P_9	млн. рублей	474184,2	490552,7	505268,5	518331,5

Значение свободного члена в уравнениях моделей, приведённых в таблице 2, сформировавшееся к последнему периоду наблюдений, представляет как бы условие последующего развития соответствующего социально-экономического явления. Коэффициент при переменной "i" указывает на скорость (или прирост) развития. Коэффициент при степени "i^2" оценивает ускорение (изменение скорости) в ближайший период. Модель нулевого порядка $\widetilde{P}_6(\tau) = 56{,}4$ указывает на процесс, не содержащий тенденции развития. Графический анализ результатов моделирования показал достаточно хорошую точность отражения динамики показателей. В качестве примера на рисунке 1 проиллюстрирована динамика показателя P_5 с учётом прогноза.

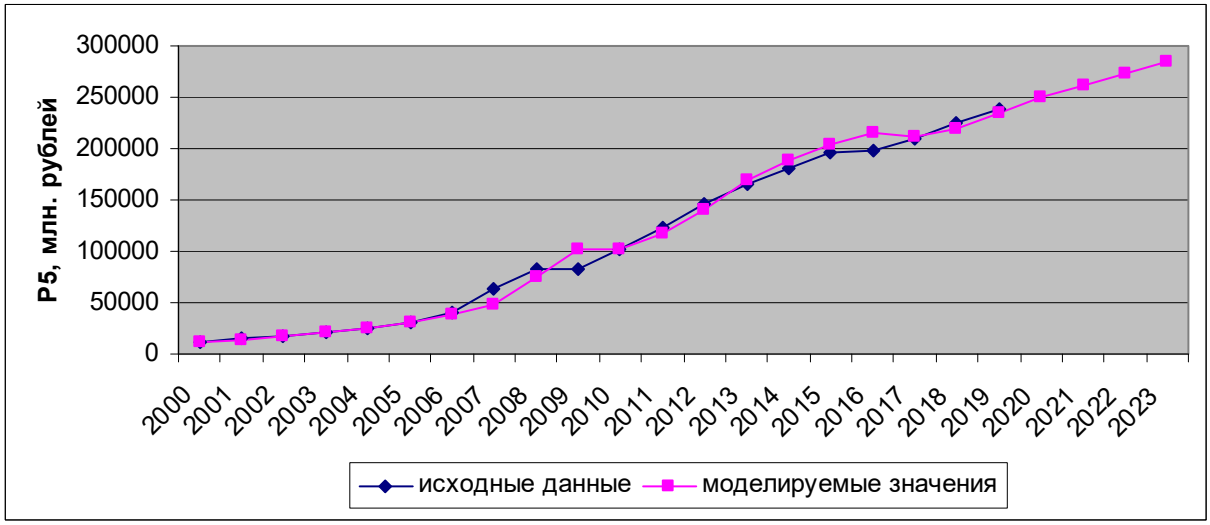


Рисунок 1 – Динамика оборота розничной торговли

Отметим, что недостатком адаптивной методики является тот факт, что величина α является единственным параметром, регулирующим степень поглощения случайных колебаний исходного ряда. Положительным фактором является гибкий и ясный инструментарий расчёта коэффициентов моделей, позволяющий к тому же уменьшить автокорреляцию в остатках. В условиях быстро изменяющегося внешнего и внутреннего рынка адаптивную методику полезно использовать в целях прогнозирования показателей развития региональной экономики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доничев О.А., Левизов А.С. Управление человеческими ресурсами в контексте динамики развития цифровой экономики // Российский университет в неустойчивом мире: глобальные вызовы и национальные ответы: материалы национальной научно-практической конференции. Ч. 1. – Иваново: Иван. гос. ун-т, 2019. – С. 279-283.
2. Курбыко И.Ф. Математическое моделирование динамики некоторых статистических показателей применения информационно-коммуникационных технологий // Современные проблемы физико-математических наук: материалы V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, (26-29 сентября 2019 г., г. Орёл): в 2 ч. Ч. 1. – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2019. – С. 398-402.
3. Краткосрочные экономические показатели Владимирской области / Федеральная служба государственной статистики. – [Электронный ресурс]. – URL: https://rosstat.gov.ru/region/ind1117/Main.htm (дата обращения 17.10.2020).

Теория вероятностей и математическая статистика

УДК 519.2

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ НЕТРАНЗИТИВНОСТИ ДЛЯ ТРЕХ И ЧЕТЫРЕХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ НА ЕДИНИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

А. В. Горбунова, к.ф.-м.н.
Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова Российской академии наук
e-mail: *avgorbunova@list.ru*
А. В. Лебедев, д.ф.-м.н., доц.
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: *avlebed@yandex.ru*

Работа продолжает исследования в области изучения проблемы нетранзитивности отношения стохастического предшествования. В частности, рассматривается нетранзитивность для случаев трех и четырех случайных величин с непрерывным распределением, заданным многочленами четвертой степени для функций распределения на единичном отрезке. Получены нижние оценки для максимальных вероятностей, а также соответствующие им выражения для плотностей и функций распределения.

Ключевые слова: нетранзитивность, стохастическое предшествование, распределения с полиномиальной плотностью на отрезке, нетранзитивные триплеты.

Введение

В теории и реальной жизни нередко встречаются системы, в которых объекты между собой находятся в отношении превосходства, обладающего свойством нетранзитивности. Хотя, конечно, более привычной является ситуация, в которой, если один объект превосходит в некотором смысле второй, а второй — третий, то первый ожидаемо должен превосходить третий. Однако свойство нетранзитивности как раз и заключается в нарушении такой логики, т. е. на самом деле третий объект будет превосходить первый, а не наоборот.

Классическим примером вышеописанного взаимодействия между объектами, понятным абсолютно каждому, является игра в «камень, ножницы, бумага». Здесь «камень» обыгрывает «ножницы», «ножницы» обыгрывают «бумагу», а «бумага» — «камень». Описание множества других примеров из различных сфер человеческой жизни, которые по своей сути являются довольно парадоксальными и могут затруднить правильное принятие решений, можно найти в серии статей А. Н. Поддьякова, например, [1, 2, 3].

Что касается математики и ее приложений, более подробный обзор можно найти в работах авторов [4, 5, 6].

К первому упоминанию данной проблемы с точки зрения теории вероятностей можно отнести работу С. Трыбулы совместно с Г. Штейнгаузом, причем в качестве практического приложения была рассмотрена прочность материалов, которая имеет непрерывное распределение, как и многие другие характеристики различных реальных объектов [7, 8].

Авторы настоящей работы продолжают начатые в [4, 5] исследования данного явления в контексте изучения классов непрерывных распределений, в которых может возникнуть отношение нетранзитивности.

1. Нетранзитивность случайных величин

Здесь и далее свойство нетранзитивности будет рассматриваться в вероятностно-статистическом аспекте. Для внесения ясности конкретизируем определение термина для случая трех случайных величин. Итак, пусть заданы случайные величины X_1, X_2 и X_3 такие, что

$$\mathbf{P}(X_1 < X_2) > \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{P}(X_2 < X_3) > \frac{1}{2}$$

и

$$\mathbf{P}(X_3 < X_1) > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, ситуация нетранзитивности возникает, если

$$p_{X_1X_2X_3} = \min\{\mathbf{P}(X_1 < X_2), \mathbf{P}(X_2 < X_3), \mathbf{P}(X_3 < X_1)\} > \frac{1}{2}.$$

Из [7, 8] следует, что

$$\max_{X_1,X_2,X_3} p_{XYZ} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618.$$

В работах [9, 10] изучалась комбинация из n случайных величин, причем в [11] было показано, что максимум вероятностей составляет следующую величину

$$\max_{X_1,\ldots,X_n} \min\{\mathbf{P}(X_1 < X_2), \ldots, \mathbf{P}(X_{n-1} < X_n), \mathbf{P}(X_n < X_1)\} =$$

$$= 1 - \left(4\cos^2\frac{\pi}{n+2}\right)^{-1}, \quad n \geqslant 3.$$

Изучение стандартных семейств непрерывных распределений позволяет сделать вывод о том, что в большинстве случаев (например, речь может идти о равномерном, нормальном и показательном распределениях) нетранзитивности быть не может, однако в ситуации распределений с полиномиальной плотностью на единичном отрезке нетранзитивность возможна, начиная с третьей степени для плотности и, соответственно, с четвертой степени для функций распределения [4, 5].

Причем заметим, что с учетом того, что любое распределение может быть аппроксимировано многочленами, анализ подобным образом заданных распределений представляет практический интерес, поскольку неверный с точки зрения наличия или отсутствия нетранзитивности выбор многочлена, не соответствующего свойствам исходного распределения, может негативно повлиять на конечный результат.

Итак, будем рассматривать непрерывные распределения, заданные многочленами степени $N \geqslant 4$ на отрезке $[0,1]$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{N} f_k x^k, \quad \sum_{k=1}^{N} f_k = 1, \quad x \in [0,1].$$

На коэффициенты f_k, $1 \leq k \leq N$, накладываются ограничения в силу требования неотрицательности плотности распределения. Ниже будет рассмотрен вопрос нетранзитивности для полиномиальных распределений при $N = 4$ в случае трех и четырех случайных величин.

2. Случай трех случайных величин

Итак, рассмотрим три непрерывные случайные величины X_1, X_2 и X_3 с кубическими плотностями на отрезке $[0,1]$. В силу теоремы Маркова–Лукача [12, с. 89] о представлении любого неотрицательного на некотором отрезке многочлена, эти плотности могут быть записаны следующим образом:

$$p_{X_1}(x) = K_1\big(x(a_1 + a_2x)^2 + (1-x)(a_3 + a_4x)^2\big),$$
$$p_{X_2}(x) = K_2\big(x(b_1 + b_2x)^2 + (1-x)(b_3 + b_4x)^2\big),$$
$$p_{X_3}(x) = K_3\big(x(c_1 + c_2x)^2 + (1-x)(c_3 + c_4x)^2\big).$$

где

$$K_1 = \frac{12}{6a_1^2 + 8a_1a_2 + 3a_2^2 + 6a_3^2 + 4a_3a_4 + a_4^2},$$
$$K_2 = \frac{12}{6b_1^2 + 8b_1b_2 + 3b_2^2 + 6b_3^2 + 4b_3b_4 + b_4^2},$$
$$K_3 = \frac{12}{6c_1^2 + 8c_1c_2 + 3c_2^2 + 6c_3^2 + 4c_3c_4 + c_4^2}$$

и $x \in [0,1]$. Коэффициенты K_i, $i = \overline{1,3}$, в данном случае выполняют роль корректирующих констант, которые обеспечивают свойство нормированности для каждой из плотностей. Функции распределения вычисляются как $F_{X_i}(x) = \int_0^x p_{X_i}(x)dx$, $i = \overline{1,3}$, и для $i = 1$, например, $F_{X_1}(x)$ примет вид

$$F_{X_1}(x) = \frac{(3a_2^2 - 3a_4^2)x^4 + (8a_1a_2 - 8a_3a_4 + 4a_4^2)x^3 + (6a_1^2 - 6a_3^2 + 12a_3a_4)x^2 + 12a_3^2x}{6a_1^2 + 8a_1a_2 + 3a_2^2 + 6a_3^2 + 4a_3a_4 + a_4^2},$$

при $i = 2$ и $i = 3$ выражения для функций распределения будут аналогичными. Далее вычислим, например, вероятность $P_{X_1X_2}$. В итоге получим

$$P_{X_1X_2} = P(X_1 < X_2) = \int_0^1 F_{X_1}(x)dF_{X_2}(x) = \frac{A_1}{B_1}, \tag{1}$$

где

$$B_1 = 70(6a_1^2+8a_1a_2+3a_2^2+6a_3^2+4a_3a_4+a_4^2)(6b_1^2+8b_1b_2+3b_2^2+6b_3^2+4b_3b_4+b_4^2),$$

$$\begin{aligned}
A_1 = {} & 12a_1^2(105b_1^2 + 168b_1b_2 + 70b_2^2 + 35b_3^2 + 42b_3b_4 + 14b_4^2)+ \\
& +16a_1a_2(84b_1^2 + 140b_1b_2 + 60b_2^2 + 21b_3^2 + 28b_3b_4 + 10b_4^2)+ \\
& +3a_2^2(140b_1^2 + 240b_1b_2 + 105b_2^2 + 28b_3^2 + 40b_3b_4 + 15b_4^2)+ \\
& +12a_3^2(175b_1^2 + 252b_1b_2 + 98b_2^2 + 105b_3^2 + 98b_3b_4 + 28b_4^2)+ \\
& +8a_3a_4(147b_1^2 + 224b_1b_2 + 90b_2^2 + 63b_3^2 + 70b_3b_4 + 22b_4^2)+ \\
& +a_4^2(252b_1^2 + 400b_1b_2 + 165b_2^2 + 84b_3^2 + 104b_3b_4 + 35b_4^2).
\end{aligned}$$

Вероятности $P_{X_2X_3}$ и $P_{X_3X_1}$ выражаются аналогичным образом с поправкой на соответствующие коэффициенты для плотностей и функций распределения, т. е. b_j, c_j и c_j, a_j, $j = \overline{1,4}$, для числителей A_2, A_3 и знаменателей B_2, B_3 в формуле (1).

Теперь, чтобы вычислить оценку для максимума вероятности $p_{X_1X_2X_3}$ необходимо решить оптимизационную задачу относительно коэффициентов a_j, b_j и c_j. Заметим, что от пропорционального изменения коэффициентов плотности не меняются. Значит, в качестве наборов коэффициентов достаточно рассмотреть точки на единичной гиперсфере в $\mathbb{R}^4$. Для этого перейдем к гиперсферическим координатам и будем решать эту задачу численно относительно девяти углов θ_i, ϕ_i и ψ_i, $i = \overline{1,3}$, при условии, что $0 \leqslant \theta_i, \phi_i \leqslant \pi$, $0 \leqslant \psi_i \leqslant 2\pi$.

Итак, делаем следующую замену переменных для X_1:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sin\theta_1 \sin\phi_1 \sin\psi_1, \\
a_2 &= \sin\theta_1 \sin\phi_1 \cos\psi_1, \\
a_3 &= \sin\theta_1 \cos\phi_1, \\
a_4 &= \cos\theta_1.
\end{aligned}$$

Для случайных величин X_2 и X_3 замена переменных будет идентичной только относительно переменных b_j и c_j, соответственно.

Оптимизационная задача была решена методом Нелдера–Мида в программной среде Python. Несмотря на то, что данный метод является методом безусловной оптимизации, он позволяет получить результат для функции нескольких переменных без необходимости вычисления ее градиента, что делает его применимым к негладким функциям. Тем не менее, в силу наличия большого количества локальных максимумов у исследуемой характеристики конечный результат сильно зависит от выбора начального приближения, поэтому решив данную задачу,

мы можем пока утверждать только о том, что нами получена оценка нижней границы максимальной вероятности.

В итоге, нижняя оценка для максимума минимумов вероятностей случайных величин X_1, X_2 и X_3 равна

$$\widehat{\max_{X_1,X_2,X_3}} p_{X_1X_2X_3} \approx 0.5350.$$

А сами случайные величины описываются следующими плотностями и функциями распределений:

$$p_{X_1}(x) \approx 15.783x - 47.665x^2 + 35.987x^3,$$

$$p_{X_2}(x) \approx 0.854x + 9.438x^2 - 10.292x^3,$$

$$p_{X_3}(x) \approx 3.034 - 18.631x + 34.374x^2 - 16.706x^3;$$

$$F_{X_1}(x) \approx 7.891x^2 - 15.888x^3 + 8.997x^4,$$

$$F_{X_2}(x) \approx 0.427x^2 + 3.146x^3 - 2.573x^4,$$

$$F_{X_3}(x) \approx 3.034x - 9.3154x^2 + 11.458x^3 - 4.1764x^4.$$

Соответствующие графики представлены на рисунках 1 и 2, где графики для X_1 изображены сплошной линией, для X_2 — пунктиром, для X_3 — штрих-пунктиром.

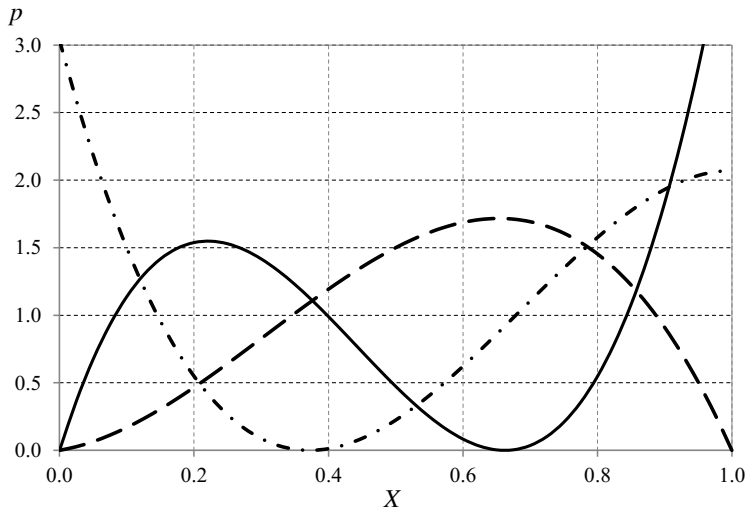


Рисунок 1 – Графики плотностей распределений. Случай трех случайных величин

3. Случай четырех случайных величин

Добавим к рассмотренным выше случайным величинам X_1, X_2 и X_3 случайную величину X_4, для которой плотность распределения описывается выражением

$$p_{X_4}(x) = K_4\big(x(d_1 + d_2x)^2 + (1-x)(d_3 + d_4x)^2\big),$$

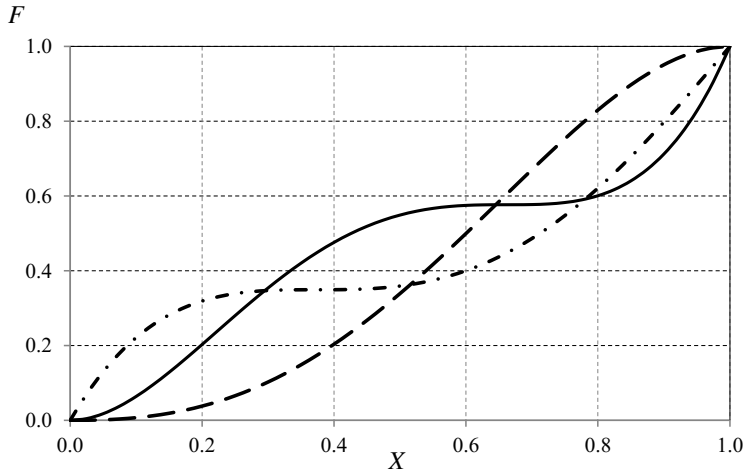


Рисунок 2 – Графики функций распределений. Случай трех случайных величин

где

$$K_4 = \frac{12}{6d_1^2 + 8d_1d_2 + 3d_2^2 + 6d_3^2 + 4d_3d_4 + d_4^2},$$

а функция распределения определяется как

$$F_{X_4}(x) = \frac{(3d_2^2 - 3d_4^2)x^4 + (8d_1d_2 - 8d_3d_4 + 4d_4^2)x^3 + (6d_1^2 - 6d_3^2 + 12d_3d_4)x^2 + 12d_3^2x}{6d_1^2 + 8d_1d_2 + 3d_2^2 + 6d_3^2 + 4d_3d_4 + d_4^2}.$$

Тогда выражения для вероятностей $P_{X_3X_4}$ и $P_{X_4X_1}$ будут также описываться формулами аналогичными (1).

Далее с помощью описанного выше метода получим нижнюю оценку для максимума $p_{X_1X_2X_3X_4}$, т. е. снова перейдем к гиперсферическим координатам и решим оптимизационную задачу, но уже относительно двенадцати углов. В итоге для значения

$$\widehat{\max_{X_1,X_2,X_3,X_4}} p_{X_1X_2X_3X_4} \approx 0.5423$$

будем иметь следующий набор плотностей и функций распределения

$$p_{X_1}(x) \approx 6.420x - 7.261x^2 + 0.841x^3,$$

$$p_{X_2}(x) \approx 3.456 - 25.666x + 57.895x^2 - 35.685x^3,$$

$$p_{X_3}(x) \approx 2.925 - 10.860x + 9.063x^2 + 1.935x^3,$$

$$p_{X_4}(x) \approx 17.109x - 49.305x^2 + 35.522x^3;$$

$$F_{X_1}(x) \approx 3.210x^2 - 2.420x^3 + 0.210x^4,$$

$$F_{X_2}(x) \approx 3.456x - 12.833x^2 + 19.298x^3 - 8.921x^4,$$

$$F_{X_3}(x) \approx 2.925x - 5.430x^2 + 3.021x^3 + 0.484x^4,$$

$$F_{X_4}(x) \approx 8.554x^2 - 16.435x^3 + 8.881x^4.$$

Соответствующие графики представлены на рисунках 3 и 4, типы линий те же, что и для случая трех величин, а для X_4 — короткий пунктир.

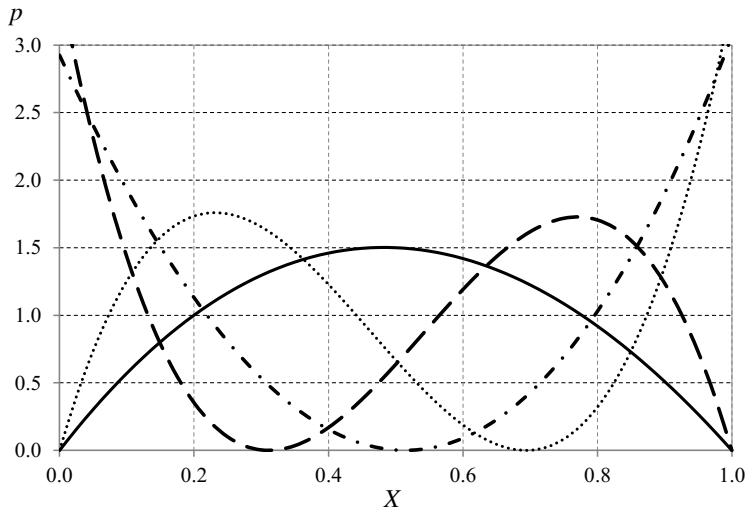


Рисунок 3 – Графики плотностей распределений. Случай четырех случайных величин

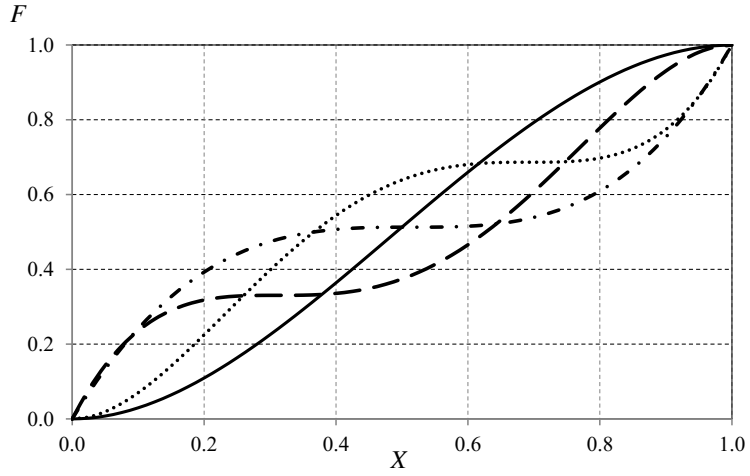


Рисунок 4 – Графики функций распределений. Случай четырех случайных величин

Заключение

В работе исследуется эффект нетранзитивности для случаев трех и четырех непрерывных случайных величин с полиномиальной плотностью. Представлены выражения для плотностей и функций распределения этих случайных величин, заданные многочленами третьей и четвертой степеней, соответственно, полученные при оценке нижней границы максимума вероятностей.

Отметим, что наборы найденных плотностей демонстрируют симметрию в случае четырех величин (рис. 3) и асимметрию в случае трех (рис. 1), что может быть связано с влиянием четности их числа. Для графиков функций распределения (рис. 2, 4) в обоих случаях характерен эффект «переплетения», многократного взаимного пересечения, ранее отмеченного в [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Поддьяков А. Н. Нетранзитивность превосходства при взаимодействиях: междисциплинарный анализ // Управление большими системами. — 2007. — Вып. 10. — С. 171–182.
2. Поддьяков А. Н. Нетранзитивность — кладезь для изобретателей // Троицкий вариант. Наука. — 2017. — №. 242. — С. 14–14.
3. Поддьяков А. Н. Принцип нетранзитивности превосходства в разных парадигмах // Вопросы психологии. – 2019. – № 2. – С. 3–16.
4. Лебедев А. В. Проблема нетранзитивности для трех непрерывных случайных величин // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 6. С. 91–103.
5. Лебедев А. В. Нетранзитивные триплеты непрерывных случайных величин и их приложения // Информатика и ее применения. — 2019. — Т. 13. — Вып. 6. — С. 20–26.
6. Горбунова А. В., Лебедев А. В. Эффекты стохастической нетранзитивности в системах массового обслуживания // Управление большими системами. — 2020. — Вып. 85. — С. 23–50.
7. Steinhaus H., Trybula S. On a paradox in applied probabilities // Bull. de l'Acad. Polon. Sci. — 1959. — V. 7. — P. 67–69.
8. Trybula S. On the paradox of three random variables // Zastos. Matem. — 1961. — V. 5. — No. 4. — P. 321–332.
9. Trybula S. On the paradox of n random variables // Zastos. Matem. (Appl. Math.). — 1965. — V. 8. — No. 2. — P. 143–156.
10. Usyskin Z. Max–min probabilities in the voting paradox // Ann. Math. Stat. — 1964. — V. 35. — No. 2. — P. 857–862.
11. Богданов И. И. Нетранзитивные рулетки // Матем. просвещение. — 2010. — Сер. 3. — Вып. 14. — С. 240–255.
12. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука. — 1973. — 552 с.

УДК 519.2

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ЗАВИСИМЫХ ДИСКРЕТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А. В. Лебедев, д.ф.-м.н., доц.
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: *avlebed@yandex.ru*

Рассматривается известная проблема отсутствия независимых событий в некоторых дискретных вероятностных пространствах (конечных или счетных). Предлагается изучать такие пространства с точки зрения того, насколько слабо зависимые события в них существуют. Это можно оценить с помощью минимального абсолютного значения коэффициента корреляции индикаторов событий (в случае счетного пространства берется нижняя грань). Рассмотрены примеры вероятностного пространства с простым числом равновозможных исходов, конечного пространства с весами и иррациональностью, геометрического пространства с простым числом исходов и счетного пространства с вероятностями, заданными суммой трех геометрических прогрессий.

Ключевые слова: независимость, зависимость, случайное событие, дискретное вероятностное пространство, коэффициент корреляции, простое число

Введение

Понятие независимости событий является одним из центральных понятий теории вероятностей. События A и B называются *независимыми*, если выполнено равенство $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, и *зависимыми* иначе.

Рассмотрим только дискретные пространства элементарных событий Ω. Исключим из рассмотрения случай, когда одно из событий A или B совпадает со всем пространством элементарных событий Ω или невозможным событием $\varnothing$. Для этого необходимо положить размер пространства $|\Omega| \geq 2$.

Заметим, что существуют вероятностные пространства, в которых нет независимых событий. Например, если $|\Omega| = 3$, то легко показать, что в таком пространстве не может быть независимых событий (при любом наборе вероятностей).

Пространства, в которых есть независимые события, называются *независимыми*, в противном случае — *зависимыми* (согласно терминологии из [1]). Изучение дискретных вероятностных пространств с этой точки зрения представляет собой интересное направление исследований. Далее, если установлено, что в пространстве имеется пара независимых событий, можно задаться вопросом, есть ли там наборы из нескольких событий, независимых попарно или в совокупности, или каким-то более сложным способом, есть ли там бесконечно много независимых событий и т.д.

Данной тематике посвящены отечественные работы [1, 2], известен также ряд работ зарубежных исследователей [3]–[6]. Зависимые и независимые пространства упоминаются в [5, 6]. В книге о контрпримерах в теории вероятностей [7, §4.1] приведены некоторые примеры зависимых пространств.

В [1] изучался вопрос о построении дискретных вероятностных пространств, в которых существуют или не существуют независимые события. В частности, пусть в конечном вероятностном пространстве Ω вероятности исхо-

дов являются рациональными числами, тогда они могут быть выражены правильными несократимыми дробями. Их можно представить также в виде n_k/n, где n — наименьшее общее кратное знаменателей этих несократимых дробей, а n_k — некоторые натуральные числа. Оказывается, если в Ω существуют независимые события, то n — составное число (обратное утверждение неверно). Если же n — простое число, то в Ω нет независимых событий (обратное утверждение также неверно). Из этих результатов следует, что если вероятности всех исходов равны, то в Ω нет независимых событий тогда и только тогда, когда $|\Omega|$ является простым числом. Последний результат получен ранее в [3].

Набор вероятностей исходов в дискретном вероятностном пространстве можно интерпретировать как распределение целочисленной случайной величины, а произвольные события — как соответствующие множества значений, принимаемых этой величиной. Например, при бросании игрального кубика (когда число очков выпадает равновероятно от 1 до 6), события, что число очков делится на 2 и на 3, независимы. Однако для случайной величины, равновероятно принимающей значения, например, от 1 до 5 или от 1 до 7, таких событий нет.

Можно изучать и счетные пространства. Например, в [3] показано, что если для вероятностей p_n, $n \geq 1$, выполняется $p_{n+1} < p_n$ и $p_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_{n+k}$, то независимые события существуют; в [4] показано, что если $p_{n+1} \leq p_n^2$, то независимых событий не существует, а если множество значений вероятностей событий содержит сколь угодно малый интервал $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, то существует бесконечно много независимых событий.

В [2] рассматривались дискретные вероятностные пространства, в которых вероятности исходов зависят от параметра λ, принадлежащему некоторому множеству. Введено понятие событий, независимых относительно семейства распределений, и понятие семейства вероятностных распределений без независимых событий. Дано простое необходимое условие существования событий, независимых относительно семейств распределений степенного ряда. Приведены примеры семейств распределений, имеющих независимые события, семейств без независимых событий, а также семейств, не являющимися ни теми, ни другими.

На первый взгляд, зависимые пространства представляются менее перспективной темой для исследований, чем независимые. Однако все меняется, если применить к ним не качественный, а количественный анализ, и вместо простой фиксации факта, что все события там зависимы (а независимых нет), измерить силу этой зависимости, например, с помощью коэффициента корреляции Пирсона (применительно к индикаторам событий). А именно, полагаем

$$\rho(A, B) = \frac{\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\sqrt{\mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(A))\mathbf{P}(B)(1 - \mathbf{P}(B))}}.$$

Теперь можно количественно оценить зависимость пространства через то, насколько слабо зависимые события в нем существуют, т.е. через минимальный по

абсолютному значению коэффициент корреляции.

Далее мы продемонстрируем это на примерах конечных и счетных пространств.

1. Пространство с простым числом равновозможных исходов

Пространства с конечным числом равновозможных исходов являются классическими объектами изучения теории вероятностей с XVII века.

Пусть Ω_p — дискретное вероятностное пространство с p равновозможными исходами, где p — простое число. Как было отмечено выше, Ω_p тогда является зависимым. Исследуем, как эта зависимость падает с ростом p.

Л е м м а 1. Для любых событий A и B из Ω_p верно

$$|\rho(A,B)| \geq \frac{4}{p^2}.$$

Л е м м а 2. Существуют последовательности событий $A_p, B_p \subset \Omega_p$ такие, что

$$\mathbf{P}(A_p) \to 1/2, \quad \mathbf{P}(B_p) \to 1/2, \quad \mathbf{P}(A_pB_p) \to 1/4,$$
$$|\rho(A_p,B_p)| \sim \frac{4}{p^2}, \quad p \to \infty.$$

В доказательстве используются результаты из теории чисел [8].

Обозначим минимальный по абсолютной величине коэффициент корреляции индикаторов двух событий в Ω_p через ρ_p^*.

Т е о р е м а 1.

$$|\rho_p^*| \sim \frac{4}{p^2}, \quad p \to \infty.$$

С л е д с т в и е 1. Для событий $A_p^*, B_p^* \subset \Omega_p$, на которых реализуется ρ_p^*, верно

$$p^2\big|\mathbf{P}(A_p^*B_p^*) - \mathbf{P}(A_p^*)\mathbf{P}(B_p^*)\big| = \big|p|A_p^*B_p^*| - |A_p^*||B_p^*|\big| = 1 \qquad (1)$$

при всех достаточно больших p.

Было проведено компьютерное моделирование для $3 \leq p \leq 1000$, которое показало, что на самом деле (1) выполняется, начиная с $p = 3$.

На рис. 1 представлены графики оптимальных (в смысле минимизации коэффициента корреляции по абсолютному значению) вероятностей событий, где для определенности полагаем $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$. На рис. 2 представлены значения $p^2|\rho_p^*|$ в зависимости от p. Наблюдается медленная сходимость к теоретическому пределу, равному 4.

2. Конечное пространство с весами и иррациональностью

В [1] была предложена модель, в которой каждому исходу приписывалось положительное число, которое можно назвать *весом*, и вероятность исхода определялась отношением его веса к сумме весов всех исходов. Тогда, если один из весов иррационален, а остальные рациональны, независимых событий быть не может.

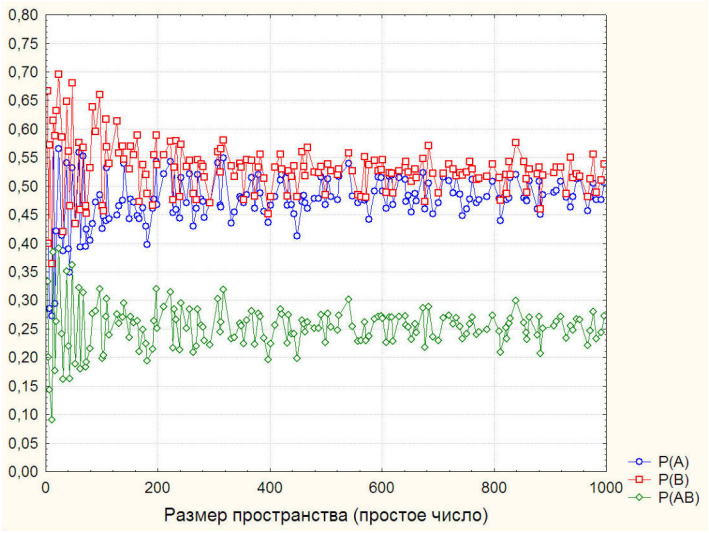


Рисунок 1 – Графики оптимальных вероятностей

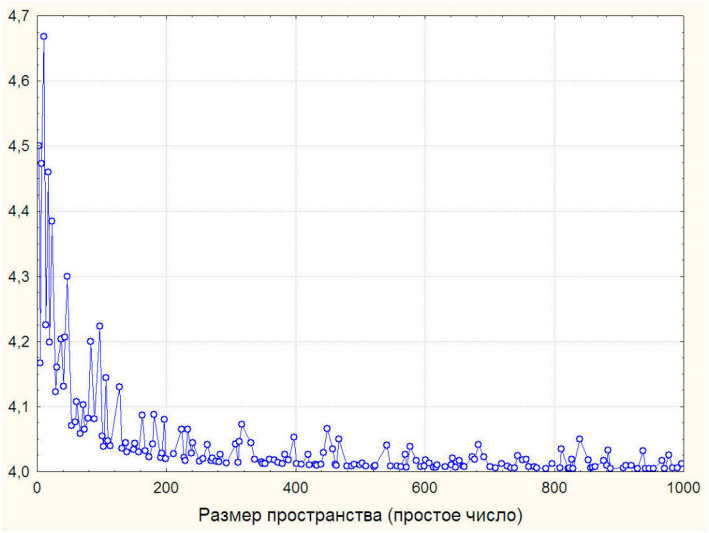


Рисунок 2 – График значений $p^2|\rho_p^*|$

Рассмотрим зависимое пространство Ω_n из n исходов, в котором первый исход имеет вес $1+\delta$, где δ — иррациональное число, $|\delta| < 1$ (например, вес $\sqrt{2}$), а остальные имеют единичные веса. Тогда

$$p_1 = \frac{1+\delta}{n+\delta}; \quad p_k = \frac{1}{n+\delta}, \quad 2 \le k \le n. \tag{2}$$

Обозначим минимальный по абсолютной величине коэффициент корреляции индикаторов двух событий в Ω_n через ρ_n^*. Рассмотрим здесь лишь простейший случай по виду n.

Т е о р е м а 2. Пусть $n = 4m$, $m \ge 1$, тогда

$$\limsup_{n\to\infty} n|\rho_n^*| \le |\delta|.$$

Отметим, что в книге [7, §4.1] приведен аналогичный пример, а именно,

$$p_1 = 1-(n-1)\varepsilon; \quad p_k = \varepsilon, \quad 2 \le k \le n,$$

где ε — иррациональное число из интервала $(0, 1/(n-1))$. В частности, при $\varepsilon = 1/(n+\delta)$ получаем в точности (2).

3. Геометрическое пространство с простым числом исходов

В [6] рассматривалось пространство с конечным числом исходов, вероятности которых убывают в геометрической прогрессии: $p_k = q^k$, $1 \le k \le n$, где q — единственный положительный корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = 1.$$

Тогда при любом составном $n = st$, $s, t \ge 2$, пространство является независимым. Так, в нем независимыми оказываются события

$$A = \{1, \ldots, s\}, \quad B = \{1, s+1, 2s+1 \ldots, (t-1)s+1\}. \tag{3}$$

При всех простых n пространство является зависимым.

Такое пространство назовем (для краткости) *геометрическим*.

Положим n равным простому числу p и исследуем, как зависимость падает с ростом p. Как и ранее, будем обозначать минимальный по абсолютной величине коэффициент корреляции через ρ_p^*.

Т е о р е м а 3.

$$\limsup_{p\to\infty} 2^p |\rho_p^*| \le \sqrt{6}.$$

В доказательстве для оценки используются множества (3) с $s = 2$, $t = (p+1)/2$ (можно делить, поскольку $p+1$ — четное число при $p \ge 3$).

Таким образом, удалось доказать, что $\rho_p^* = O(2^{-p})$, $p \to \infty$.

Однако выбор множеств (3) здесь не оказывается оптимальным. Компьютерный анализ показывает, что на самом деле зависимость убывает быстрее, и похоже, что $\rho_p^* = O(4^{-p})$, $p \to \infty$. К сожалению, возникающая структура найденных программой оптимальных множеств совершенно не очевидна, чтобы использовать ее в общем случае. Например, при $p = 11$ получаем:

$$\begin{array}{lll} A^* = \{1,2,3,5,6,10,11\}, & \mathbf{P}(A^*) \approx 0{,}924; & \\ B^* = \{3,6,7,8,10,11\}, & \mathbf{P}(B^*) \approx 0{,}154; & 4^{11}\rho_{11}^* \approx 1{,}97, \\ A^*B^* = \{3,6,10,11\}, & \mathbf{P}(A^*B^*) \approx 0{,}142; & \end{array}$$

а при $p = 13$:

$$\begin{array}{lll} A^* = \{1,2,3,6,8,10,11\}, & \mathbf{P}(A^*) \approx 0{,}896; & \\ B^* = \{1,3,4,7,9,10,11,12,13\}, & \mathbf{P}(B^*) \approx 0{,}699; & 4^{13}\rho_{13}^* \approx 0{,}89. \\ A^*B^* = \{1,3,10,11\}, & \mathbf{P}(A^*B^*) \approx 0{,}627; & \end{array}$$

При этом число операций, которые необходимо выполнить программе, растет как $O(4^p)$, что затрудняет компьютерный анализ при больших p. Уточнение

теоретической асимптотики в данном случае остается для дальнейших исследований.

4. Счетные пространства и слабая независимость

Счетные дискретные вероятностные пространства также могут быть как зависимыми, так и независимыми.

В книге [7, §4.1] приведен пример зависимого счетного пространства:

$$p_1 = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} p_k; \quad p_k = 2^{-k!}, \quad k \geq 2.$$

Напротив, счетное пространство с вероятностями

$$p_k = (1-\lambda)\lambda^k, \quad k \geq 0, \quad 0 < \lambda < 1, \tag{4}$$

является независимым, как показано в [2, 4]. В нем независимы, в том числе, события вида

$$A = \{0, \ldots, s-1\}, \quad B = \{0, s, 2s, \ldots\}, \quad s \geq 2,$$

поскольку

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \lambda^s, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^s}, \quad \mathbf{P}(AB) = 1 - \lambda.$$

В случае счетных вероятностных пространств минимум коэффициента корреляции по абсолютному значению следует понимать в смысле его нижней грани, которую также можем обозначить через ρ^*. Отметим, что эта нижняя грань может и не достигаться. Например, в пространстве может не быть независимых событий, но существовать сколь угодно слабо зависимые, тогда $\rho^* = 0$.

Пространства с $\rho^* = 0$ можно назвать *слабо независимыми*, в то время как пространства с независимыми событиями — *сильно независимыми*. Из сильной независимости пространства, естественно, следует слабая.

Рассмотрим пространство, в котором вероятности (4) искажены следующим образом:

$$p_0 = 1 - \lambda; \quad p_k = (1-\lambda)\lambda^k + \varepsilon((1-\mu)\mu^{k-1} - (1-\nu)\nu^{k-1}), \quad k \geq 1, \tag{5}$$

где

$$0 < \nu < \mu < \lambda < 1, \quad (1-\lambda)\lambda + \varepsilon(\nu - \mu) > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Т е о р е м а 4. Пространство с вероятностями исходов, заданными формулами (5), является слабо независимым.

Заключение

Автором предложен корреляционный анализ зависимых дискретных вероятностных пространств. Получены асимптотические результаты для минимального по абсолютному значению коэффициента корреляции индикаторов событий. В теоремах 2 и 3 получены верхние оценки, уточнение асимптотики в этих

случаях остается для дальнейших исследований. Для счетных пространств введены понятия сильной и слабой независимости.

Как подчеркнуто в [2], свойство независимости вероятностного пространства не обладает непрерывностью относительно вероятностей исходов, сколь угодно малое изменение этих вероятностей может его нарушить. Напротив, коэффициент корреляции меняется непрерывным образом (при условии, что все вероятности остаются положительны), и в этом смысле представляет собой более регулярную характеристику пространства.

Отметим, что анализ счетного вероятностного пространства на независимость представляет собой в общем случае алгоритмически неразрешимую задачу, поскольку множество всех пар событий, которые нужно проверить, несчетно. Однако эта задача успешно решается в важных частных случаях [2, 3, 6]. Перебор значений коэффициента корреляции для всех пар событий также невозможен, но возможны оценки в частных случаях, по каким-то последовательностям и т.п.

Автор благодарен О.П. Виноградову за полезные идеи, замечания и предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов О. П. Простые числа и независимость // Современные проблемы математики и механики. — 2011. — Т. 7. — N 1. — С. 16–21.

2. Виноградов О. П. О независимых событиях в семействах дискретных распределений // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25. — N 4. — С. 116–124.

3. Shiflett R. C., Shultz H. S. An approach to independent sets // Mathematical Spectrum. — 1979/80. — V. 12. — N 1. — P. 11–16.

4. Skekely G. J., Mori T. F. Independence and atoms // Proc. Amer. Math. Soc. — 2002. — V. 130. — N 1. — P. 213–216.

5. Edwards W., Shiflett R., Shultz H. Dependent probability spaces // College Mathematics Journal. — 2008. — V. 39. — N 3. — P. 221–226.

6. Ionascu E. J., Stancu A. A. On independent sets in purely atomic probability spaces with geometric distribution // Acta Mathematica Universitatis Comenianae. — 2010. — V. 79. — N 1. — P. 31–38.

7. Стоянов Й. Контрпримеры в теории вероятностей. — М.: МЦНМО. — 2014. — 294 с.

8. Shparlinski I. E. Modular hyperbolas // Japan. J. Math. — 2012. — V. 7. — N 2. — P. 235–294.

УДК 519.813

О ВЫПАДЕНИИ СОЧЕТАНИЯ « 6, 6 » ПРИ БРОСАНИИ КУБИКА

С.В. Левизов, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
e-mail: *levizov@rambler.ru*

Получена оценка длительности «игры» с бросанием игральной кости – до выпадения двух «шестёрок» подряд.

Ключевые слова: рекуррентные последовательности, дифференцирование функционального ряда, математическое ожидание, дисперсия.

Рассмотрим ситуацию: кубик (с пронумерованными гранями) бросается до тех пор, пока дважды подряд не выпадет грань с цифрой «6». Как долго («в среднем») может продолжаться такая «игра»?

Иными словами, нам нужно вычислить математическое ожидание дискретной случайной величины X ={количество бросаний, приводящих к окончанию выше-описанной «игры»}. Для этого попытаемся рассчитать соответствующие вероятности событий: X_n = {дубль «6» впервые возникает после n-го бросания}, n = 1, 2, …

Пусть $P(X_n) = p_n$. При оценке вероятностей p_n будем интерпретировать исходы, возникающие после n бросаний кубика, в виде последовательностей цифр 1, 2, …, 6.

Рассмотрим величину T(n)– количество «цепочек» длины n, составленных из этих цифр – таких, которые заканчиваются сочетанием «6, 6» (до этого не встречавшимся). Понятно, что вероятность p_n будет равна величине $\frac{T(n)}{(6)^n}$ (количество всех «подходящих» последовательностей длины *n* делится на количество всех возможных последовательностей длины *n*,составленных из цифр от 1 до 6). Оценим величину T(n), выписывая подходяшие цепочки цифр: T(1) = 0, T(2) = {6,6} = 1. Очевидно, что для n = 3 подходящими являются последовательности {1,6,6}; {2,6,6}; {3,6,6}; {4,6,6}; {5,6.6}, т.е. T(3) = 5. В общем случае – для последовательностей длины $n \geq 3$ – разобьём множество всех подходящих цепочек на два подмножества: A(n) = {цепочки, начинающиеся с цифр 1,2,3,4,5} и B(n) = { цепочки, начинающиеся с цифры 6}.

Ясно при этом, что величина $T(n) = |A(n)| + |B(n)|$, где $|A(n)|$ и $|B(n)|$ означают «мощности» (т.е. количество элементов) множеств A и B соответственно.

Докажем (по индукции), что «мощность» (количество элементов) множества A(n) равна величине $|A(n)| = 5 \cdot T(n-1)$, а «мощность» множества B(n) равна $|B(n)| = 5 \cdot T(n-2)$. В самом деле, для n = 3 имеем:

$A(3) = \{1,6,6;\ 2,6,6;\ 3,6,6;\ 4,6,6;\ 5,6,6\} \Rightarrow |A(3)| = 5 = 5 \cdot T(2)$;

$B(3) = \varnothing \Rightarrow |B(3)| = 0 = 5T(1) \Rightarrow T(3) = |A(3)| + |B(3)| = 5 + 0 = 5.$

Далее, для получения подходящей (т.е. заканчивающейся двумя «шестёрками», не встречавшимися подряд ранее, цепочки длины n = 4, необходимо и достаточно дописать слева любую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 к любой предыдущих (длины n = 3) цепочек – таковых получится всего $5 \cdot A(3) = 6 \cdot A(3) = 6 \cdot 5 = 30$. Всего получается $T(4) = 30$ подходящих цепочек. Из них – с цифры 6 будут начинаться будут начинаться такие : 6,1,6,6; 6,2,6,6; 6,3,6,6; 6,4,6,6; 6,5,6,6 – всего 5 штук, т.е. $|B(4)| = 5 = 5T(2)$, а все прочие (начинающиеся не с «6») составят множество A(4) и их будет всего $|A(4)| = 30 - 5 = 25 = 5 \cdot 5 = 5 \cdot T(3)$ штук. Таким образом, на первых шагах гипотеза о том, что $|A(n)| = 5 \cdot T(n-1)$ и $|B(n)| = 5 \cdot T(n-2)$ подтверждается.

Пусть теперь гипотеза верна на n-м шаге. Тогда на основе уже построенных цепочек длины n выстроим подходящие цепочки длины (n + 1). Для этого необходимо и достаточно либо дописать слева одну из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 к любой предыдущих цепочек из множества A(n) – всего таковых получится $6|A(n)|$; либо дописать слева любую из цифр 1, 2, 3, 4, 5 к цепочкам из множества B(n), их получится $5|B(n)|$. Всего получается $T(n+1) = 6|A(n)| + 5|B(n)|$ подходящих цепочек длины (n+1). Из них с цифры 6 будут начинаться те, которые получились добавлением слева «шестёрки» во множество A(n), т.е. $|B(n+1)| = A(n) = 5 \cdot T(n-1)$. Все прочие составят множество A(n+1) и их будет:

$|A(n+1)| = T(n+1) - |B(n+1)| = 6|A(n)| + 5|B(n)| - |A(n)| = 5 \cdot [|A(n)| + |B(n)|] = 5T(n)$,

что и показывает справедливость гипотезы на n-м шаге.

Одновременно мы доказали рекурсивную формулу для вычисления величины T(n) :

$$T(n) = 5 \cdot [|A(n)| + |B(n)|] = 5 \cdot [T(n-1) + T(n-2)] \text{ для всех } n \geq 3. \qquad (1)$$

Иначе говоря, возникает возвратная последовательность чисел («типа Фибоначчи»).

При этом $T(0) = T(1) = 0$; $T(2) = 1$; $T(3) = 5$; $T(4) = 30$, $T(5) = 175$, и т.д.

Далее вычисляем математическое ожидание:

$$M(X) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{n}{6^n} T(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{6^{n+1}} T(n+1), \text{ поскольку } T(1) = 0.$$

Нам нужно уточнить величину n-го элемента последовательности, полученной выше. Воспользуемся для этого методом, применявшимся в [1] (см. с.21-25).

А именно – будем искать T(n) в виде линейной комбинации геометрических прогрессий со знаменателями α и β, которые являются корнями «характеристического» уравнения, соответствующего полученной последовательности:

$(q)^n = 5((q)^{n-1} + (q)^{n-2}) \Rightarrow (q)^2 = 5q + 5 \Rightarrow q = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$, т.е. $\alpha = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{5-3\sqrt{5}}{2}$.

Тогда $T(n) = C_1 (\alpha)^{n-1} + C_2 (\beta)^{n-1}$, где коэффициенты C_1 и C_2 найдутся из системы

$$\begin{cases} T(1) = C_1 + C_2 = 0 \\ T(2) = C_1\alpha + C_2\beta = 1 \end{cases} ; \text{ отсюда } C_1 = -C_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}.$$

Значит, $$M(X) = \sum_{n=1`}^{\infty} \frac{n+1}{6^{n+1}} \; T(n+1) = \frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(6)^{n+1}} \cdot \left[\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] =$$

$$= \frac{1}{18\sqrt{5}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left[\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{12} \right)^n - \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{12} \right)^n \right].$$

Полученный ряд представляет собой разность двух равномерно сходящихся (для $|x| < 1$) рядов вида

$$\frac{1}{18\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(x)^n, \text{ где } x = \left(\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{12} \right).$$

Находим сумму каждого из них, применяя операцию дифференцирования ряда к сумме геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(x)^n = (2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots)' = (x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x)^{n+1}\right)' =$$

$$= \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} = -1 + \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Для нашего случая получаем:

$$M(X) = \frac{1}{18\sqrt{5}} \left[-1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{5+3\sqrt{5}}{12}\right)^2} + 1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{5-3\sqrt{5}}{12}\right)^2} \right] = \frac{1}{18\sqrt{5}} \left[\frac{144}{(7-3\sqrt{5})^2} - \frac{144}{(7+3\sqrt{5})^2} \right] =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{5}} \left[\frac{(7+3\sqrt{5})^2 - (7-3\sqrt{5})^2}{(7-3\sqrt{5})^2 (7+3\sqrt{5})^2} \right] = \frac{8}{\sqrt{5}} \left[\frac{(49 + 42\sqrt{5} + 45) - (49 - 42\sqrt{5} + 45)}{(49-45)^2} \right] = \frac{8}{\sqrt{5}} \; \frac{84\sqrt{5}}{16} = 42.$$

Таким образом, «средняя длительность» нашей «игры» составит 42 (бросания).

Рассчитаем также и дисперсию случайной величины X. Получим следующее:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = M(X^2) - (42)^2 = M(X^2) - 1764.$$

$$M(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (n)^2 p_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n)^2 \frac{T(n)}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 \frac{T(n+1)}{6^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{6^{n+1}} \left[\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{1}{18\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 \left[\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{12} \right)^n - \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{12} \right)^n \right].$$

Вновь имеем разность двух равномерно сходящихся рядов вида

$$\frac{1}{18\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (x)^n, \text{ где } x = \left(\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{12} \right).$$

Вычисляем их суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)(x)^n - (n+1)(x)^n \right] = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x)^{n+2} \right)'' - \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x)^{n+1} \right)' =$$

$$= \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 \right)'' - \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x \right)' = \left(\frac{2}{(1-x)^3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1 \right) =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} - 1.$$

Обозначая (для упрощения вычислений) $\alpha = \frac{5-3\sqrt{5}}{12}$, $\beta = \frac{5+3\sqrt{5}}{12}$, получим:

$$1-\alpha = 1 - \frac{5-3\sqrt{5}}{12} = \frac{7+3\sqrt{5}}{12}, \quad 1-\beta = 1 - \frac{5+3\sqrt{5}}{12} = \frac{7-3\sqrt{5}}{12},$$

и тогда

$$M(X^2) = \frac{1}{18\sqrt{5}} \left[\frac{2}{(1-\alpha)^3} - \frac{2}{(1-\beta)^3} - \frac{1}{(1-\alpha)^2} + \frac{1}{(1-\beta)^2} \right] = \frac{2}{18\sqrt{5}} \left[\frac{12^3}{(7-3\sqrt{5})^3} - \frac{12^3}{(7+3\sqrt{5})^3} \right] -$$

$$- \frac{1}{18\sqrt{5}} \left[\frac{12^2}{(7-3\sqrt{5})^2} - \frac{12^2}{(7+3\sqrt{5})^2} \right] = \frac{2 \cdot 12^3}{18\sqrt{5}} \left[\frac{(7+3\sqrt{5})^3 - (7-3\sqrt{5})^3}{(7-3\sqrt{5})^3 (7+3\sqrt{5})^3} \right] -$$

$$- \frac{12^2}{18\sqrt{5}} \left[\frac{(7+3\sqrt{5})^2 - (7-3\sqrt{5})^2}{(7-3\sqrt{5})^2 (7+3\sqrt{5})^2} \right] =$$

$$= \frac{2 \cdot 12^3}{18\sqrt{5}} \left[\frac{(7+3\sqrt{5})^3 - (7-3\sqrt{5})^3}{(49-45)^3} \right] - \frac{12^2}{18\sqrt{5}} \left[\frac{(7+3\sqrt{5})^2 - (7-3\sqrt{5})^2}{(49-45)^2} \right] =$$

$$= \frac{2 \cdot 12^3}{18\sqrt{5}} \left(\frac{6\sqrt{5}}{4^3} \cdot 192 \right) - \frac{12^2}{18\sqrt{5}} \left(\frac{6\sqrt{5}}{4^2} \cdot 14 \right) = 18 \cdot 192 - 3 \cdot 14 = 3456 - 42 = 3414.$$

Окончательно тогда: $D(X) = 3414 - 1764 = 1650$.

Среднее квадратичное отклонение составляет: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1650} \approx 40{,}62$.

Отметим, что аналогичный результат (для случая бросания монеты) получен ранее в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьёв Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука. - 1984. - 144 с.
2. Левизов С.В. Об игре до первого дубля. - Современные проблемы физико-матем. наук: материалы V Всероссийской научно-практ. конференции, г. Орёл : ОГУ им. И.С. Тургенева, 2019.– 562 с. ; ISBN 978-5-9929-0677- 6.

УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА «РАЗНОЦВЕТНЫХ» ЖИДКОСТЕЙ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ

Г.В. Воронина
Многопрофильный колледж ФГБОУ ВО Орловский ГАУ
e-mail: *voroninagaly@yandex.ru*
Ю.С. Федяев, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *FedyaevYS@gmail.com*

Ставится задача об эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в кусочно-однородном грунте. С помощью теории потенциала исследование задачи сводится к решению системы из интегрального уравнения на границе раздела сред и дифференциального уравнения движения границы с заданным начальным условием.

Ключевые слова: эволюция границы раздела жидкостей, модель «разноцветных» жидкостей, кусочно-однородный грунт.

Рассмотрим стационарную фильтрацию жидкости в однородном грунте проницаемости K. Вязкость фильтрующейся жидкости постоянная и поэтому в безразмерных величинах положим $\mu = 1$. Из уравнения неразрывности и закона Дарси следует, что квазипотенциал скорости φ в области фильтрации D удовлетворяет уравнению эллиптического типа

$$\nabla_M\big(K\nabla_M(\varphi(M))\big) = 0, \;\; M \in D. \qquad (1)$$

Здесь ∇_M — оператор Гамильтона по координатам точки наблюдения M.

Уравнение (1) выполняется всюду в области D за исключением особых точек, в которых располагаются источники и стоки течения. Эти точки моделируют работу нагнетательных и эксплуатационных скважин.

Считаем, что в области фильтрации D присутствует поверхность σ (в плоскопараллельном случае кривая), которая её делит на части D_1 и D_2 с проницаемостями K_1 и K_2. Полагаем, что в каждой из областей проницаемость постоянна, а на границе σ проницаемость изменяется скачком. Течение в области D_1 описывает потенциал φ_1, а в области D_2 потенциал φ_2, которые удовлетворяют уравнению (1).

На границе сопряжения должны выполняться условия непрерывности давлений и неразрывности фильтрационного течения, которые имеют вид:

$$\varphi_1^+(M) = \varphi_2^-(M),\ \ K_1\left(\frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial n_M}\right)^+ = K_2\left(\frac{\partial\varphi_2(M)}{\partial n_M}\right)^-,\ \ M \in \sigma. \qquad (2)$$

Задача сопряжения состоит в отыскании потенциала, который удовлетворяет уравнению (1), граничным условиям (2) и имеет заданные особые точки в области фильтрации. Решение задачи сопряжения определяется с точностью до некоторой постоянной. Её можно определить, задав значение потенциала в некоторой точке области D (например, на бесконечности). При отыскании поля скоростей фильтрующейся жидкости значение этой константы не существенно, так как по закону Дарси имеем

$$\vec{v}_\nu(M) = K_\nu \nabla_M \varphi_\nu(M),\ \ \nu = 1{,}2,\ \ M \in D_\nu. \qquad (3)$$

Решение задачи сопряжения (1), (2) ищем в виде

$$\varphi_\nu(M) = \frac{1}{K_\nu}\big(\varphi_0(M) + \varphi_*(M)\big),\ \ \nu = 1{,}2,\ \ M \in D_\nu. \qquad (4)$$

где $\varphi_0(M)$ — заданный потенциал при $K_1 = K_2 = 1$, $\varphi_*(M)$ — потенциал возмущения, вызванного наличием границы σ. Потенциал $\varphi_0(M)$ содержит особые точки, создающие течение жидкости, а $\varphi_*(M)$ не имеет особенностей в области фильтрации.

Будем искать потенциал возмущения $\varphi_*(M)$ в виде потенциала двойного слоя, непрерывно распределённого с плотностью g по границе σ:

$$\varphi_*(M) = \int_\sigma g(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N}\,d\sigma_N,\ \ M \in D. \qquad (5)$$

Здесь $\Phi(M,N)$ — фундаментальное решение уравнения (1). Оно является потенциалом течения в точке M, создаваемого стоком полного расхода $\Pi = -1$, расположенным в точке N. Отметим, что в плоскопараллельном случае граница σ это простая (без самопересечений) гладкая кривая. В трёхмерном случае граница σ это гладкая поверхность.

В случае плоскопараллельной фильтрации в однородной среде фундаментальное решение имеет вид

$$\Phi(M,N) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{NM}}, \qquad (6)$$

где R_{NM} — расстояние между точками N и M.

Обозначим

$$\mathcal{K}(M,N) = \frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} = \nabla_M\Phi(M,N)\cdot\vec{n}_N. \qquad (7)$$

В случае трёхмерной фильтрации в однородной среде фундаментальное решение имеет вид

$$\Phi(M,N) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{NM}}, \qquad (6')$$

Учитывая (7) потенциал возмущения (5) запишем в виде

$$\varphi_*(M) = \int\limits_{\sigma} g(N)\mathcal{K}(M,N)d\sigma_N\,,\ \ M \in D. \tag{8}$$

Предельные значения потенциала возмущения равны

$$\varphi_*^{\pm}(M) = \varphi_*(M) \pm \frac{1}{2}g(M),\ \ M \in \sigma. \tag{9}$$

где $\varphi_*(M)$ — прямое значение потенциала двойного слоя на границе σ. Для нормальной производной потенциала возмущения имеем

$$\frac{\partial\varphi_*^{\pm}(M)}{\partial n_M} = \frac{\partial\varphi_*(M)}{\partial n_M},\ \ M \in \sigma. \tag{10}$$

Для касательной составляющей градиента функции $\varphi_*^{\pm}(M)$ получим

$$\mathrm{Grad}\,\varphi_*^{\pm}(M) = \mathrm{Grad}\,\varphi_*(M) \pm \frac{1}{2}\mathrm{Grad}\,g(M)\,,\ \ M \in \sigma. \tag{11}$$

Формулы (10) и (11) запишем в виде

$$\nabla_M\varphi_*^{\pm}(M) = \nabla_M\varphi_*(M) \pm \frac{1}{2}\mathrm{Grad}\,g(M)\,,\ \ M \in \sigma. \tag{12}$$

Подставляя предельные значения (9) и (10) в (2) получим, что потенциала возмущения (5) удовлетворяет второму условию (2), а первое условие приводит к сингулярному интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода:

$$g(M) - 2\lambda\int\limits_{\sigma} g(N)\mathcal{K}(M,N)d\sigma_N = 2\lambda\varphi_0(M),\ \ M \in \sigma. \tag{13}$$

Здесь параметр $\lambda = (K_1 - K_2)/(K_1 + K_2)$, $\lambda \in (-1;1)$, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Выражение (3) с учётом (4) примет вид

$$\vec{v}_\nu(M) = \nabla_M\varphi_0(M) + \nabla_M\int\limits_{\sigma} g(N)\mathcal{K}(M,N)d\sigma_N\,,\ \ \nu = 1{,}2,\ \ M \in D_\nu. \tag{14}$$

Скорость на границе σ найдём как полусумму предельных значений скоростей фильтрации при подходе из области D_1 и D_2 соответственно:

$$\vec{v}(M) = \frac{\vec{v}_1^{+}(M) + \vec{v}_2^{-}(M)}{2},\ \ M \in \sigma. \tag{15}$$

Для выражение (15) с учётом (3), (4), (12) и непрерывности невозмущённого поля скоростей на σ получим

$$\vec{v}(M) = \nabla_M\varphi_0(M) + \nabla_M\int\limits_{\sigma} g(N)\mathcal{K}(M,N)d\sigma_N\,,\ \ M \in \sigma. \tag{16}$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Таким образом, решение задачи сопряжения сводится к решению интегрального уравнения (13). Далее используя найденную плотность двойного

слоя g по формуле (8) находим потенциал возмущения $\varphi_*(M)$. Тогда по формулам (4) и (14) находим потенциал течения и поле скоростей фильтрации в области фильтрации D.

Для нахождения движения границы раздела «разноцветных» жидкостей Γ_t необходимо указать уравнение её движения. Это уравнение имеет вид

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}(M), \;\; M \in \Gamma_t. \tag{17}$$

Здесь скорость фильтрации определяется по формулам (14) либо (16). Для однозначного решения уравнения (17) необходимо задать начальное положение границы раздела «разноцветных» жидкостей Γ_0

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0(M), \;\; M \in \Gamma_0. \tag{18}$$

Таким образом, задача об эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в кусочно-однородном грунте сводится к решению интегрального уравнения (13) и последующем решении задачи Коши для дифференциального уравнения (17) при начальном условии (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пивень В.Ф. Математические модели фильтрации жидкости. – Орёл: Изд-во ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет», ПФ «Картуш». – 2015. – 408 с.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус». – 1995. – 520 с.

УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОСЕДАНИЯ БУГРА ГРУНТОВЫХ ВОД ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ, ДВУХ ДРЕНАЖНЫХ УСТРОЙСТВ И ПОЛУПРОНИЦАЕМОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

В. И. Дорофеева, к.ф.-м.н.,доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *dorofeevavi@gmail.com*
А. А. Соромотина
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *shelter1317@gmail.com*

В работе исследуется поведение бугра грунтовых вод под действием силы тяжести, двух дренажных устройств в случае наличия полупроницаемого включения произвольной формы. Строятся поля сокростей процесса оседания бугра для различных значений мощности и координат расположения стоков. Численный эксперимент проведен с использованием метода дискретных особенностей.

Ключевые слова: математическое моделирование, метод дискретных особенностей, полупроницаемое включение.

Рассмотрим двумерную задачу об одновременной фильтрации двух жидкостей в пористой среде в постановке Лейбензона-Маскета при наличии двух дренажных устройств и одного полупроницаемого включения произвольной формы [1, 2]. При пренебрежении вязкостью и плотностью внешней жидкости получаем систему интегрального и дифференциального уравнений, которая описывает опускание грунтовых вод под действием силы тяжести и при наличии двух дренажных устройств для откачки воды и одного полупроницаемого включения в пласте грунта:

$$g_t(\bar{x},t) - 2\sum_{k=S_1,t} G[g_k,L_k](\bar{x},t) = -2\Pi(\bar{x})K_1 + 2\phi_{0_1} + 2\phi_{0_2},$$

$$g_{S_1}(\bar{x},t) - 2\lambda_{S_1}\sum_{k=S_1,t} G[g_k,L_k](\bar{x},t) = 0,$$

где $G[g_k,L_k](\bar{x},t)=\int\limits_{L_k} g_k(\bar{y})\Omega(\bar{x},\bar{y})dl_y$, $\Omega(\bar{x},\bar{y}) = \dfrac{\partial\Phi_1(\bar{x},\bar{y})}{\partial\mathbf{n}_y}$,

$\lambda_{S_1} = \dfrac{(K(\bar{x}) - K_1(\bar{x}))}{(K(\bar{x}) + K_1(\bar{x}))}$, $\Phi_1(\bar{x},\bar{y})$-ф-я Грина-потенциал стока с полным расходом, равным -1, $\Pi(\bar{x}) = -x_2$-потенциал силы тяжести, $K(\bar{x})$-проницаемость вне замкнутого контура L_{S_1}, $K_1(\bar{x})$-проницаемость внутри замкнутого контура L_{S_1}, границы L_{S_1} и L_t входят в область протекания процесса.

Дифференциальное уравнение движения границы L_t:

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial t} = V_{0_1} + V_{0_2} + \sum_{k=S_1,t}\mathbf{V}[g_k,L_k](\bar{x}) \quad \text{на} \quad L_t,$$

здесь $V_{0_1} = Kgrad\phi_{0_1}$,$V_{0_2} = Kgrad\phi_{0_2}$ -скорости квазипотенциалов невозмущенного течения ϕ_{0_1}, ϕ_{0_2}.

Область совместной фильтрации жидкостей ограниченна непроницаемой прямой L_I, разделяющей грунт и непроницаемые породы. Задача исследовалась при наличии одного включения при $\lambda_{S_1} = 0.8$. Первоначальная высота бугра $H_0 = 2.2$. на рисунках 1, 2 представлены поля скоростей в начальный момент времени для различных параметров исходных данных.

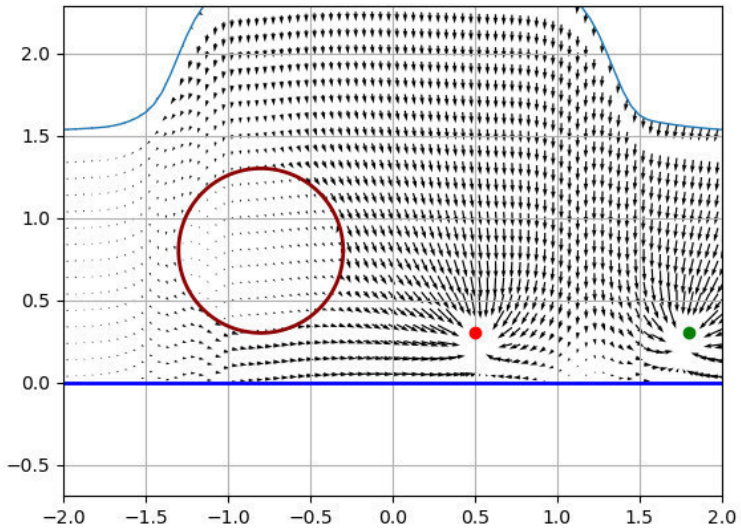


Рисунок 1 – Поле скоростей для стоков с координатами (0,5;0,3),(1,7;0,3) с одинаковой мощностью.

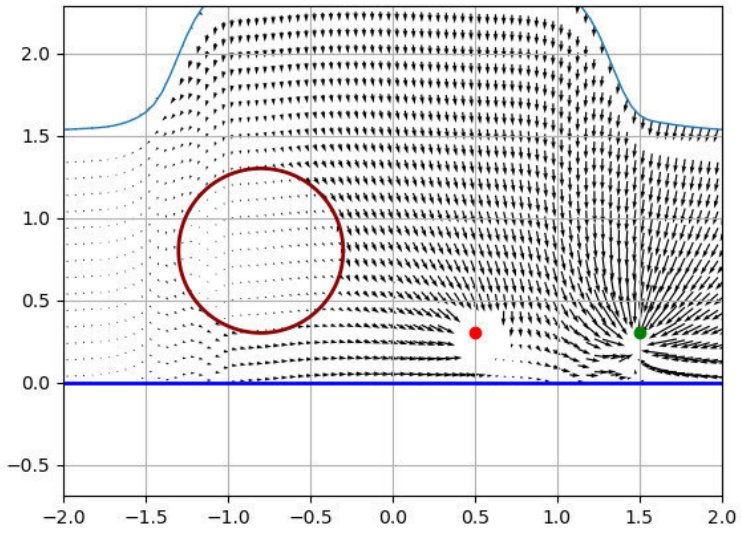


Рисунок 2 – Поле скоростей для стоков с координатами (0,5;0,3),(1,5;0,3) с мощностью 1,5 и 3,5 соответственно.

На рисунке 3 представлено поле скоростей в начальный момент времени для двух стоков и одного полупроницаемого включения.

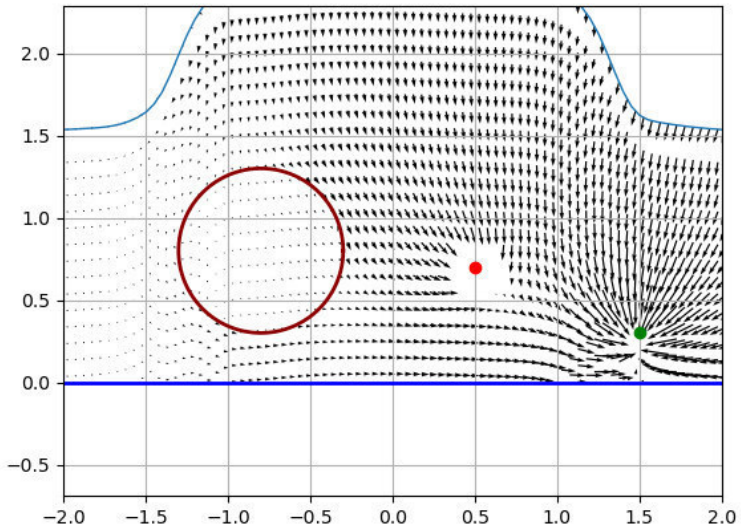


Рисунок 3 – Поле скоростей для стоков с координатами (0,5;0,7),(1,3;0,3) с мощностью 1,5 и 4,5 соответственно.

Численные расчеты выполнены с использованием метода дискретных особенностей при количестве $n = 400$ точек разбиения границы L_t. Для простоты граница полупроницаемого включения выбрана в форме окружности.

Представленные рисунки показывают, что построенная математическая модель достаточно хорошо описывает процесс опускания бугра грунтовых вод при наличии полупроницаемого включения и системы дренажный устройств, т.к. полученные поля скоростей соответсвуют происходящим процессам фильтрации. Дальнейшие исследования направлены на исследование процесса эволюции в указанных условиях и получении времени достижения системы дренажных устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорофеева В. И., Никольский Д. Н. Математическое моделирование двумерного процесса изменения уровня грунтовых вод под действием силы тяжести методом дискретных особенностей // Вычислительные методы и программирование. — 2011.— Том.12, — Номер. 1 — С. 82–86.

2. Дорофеева В. И., Афанаскина И. В., Чистякова К. Г. Исследование задачи оседания грунтовых вод при наличии полупроницаемых включений и дренажной системы // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование. —2016. —С. 143–144.

УДК 532.5

ДВИЖЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ В ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

О.В. Иванисова, к.ф.-м.н.
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет» (г. Краснодар)
e-mail: *zah-ivanisov@yandex.ru*
А.А. Лахтина
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет» (г. Краснодар)
e-mail: *alena.lakhtina@mail.ru*

В настоящей работе получена математическая модель изменения формы свободной поверхности весомой жидкости при движении пластины малой толщины вблизи её границы. Исследовано изменение поведения коэффициента нормальной силы и изменение формы свободной поверхности при разных числах Фруда.

Ключевые слова: движение пластины малой толщины, весомая жидкость, преобразование Фурье, форма свободной поверхности.

В работе рассматривается обтекание безвихревым потоком несжимаемой весомой жидкости с постоянной скоростью υ_∞ телесной пластины малой толщины, расположенной на глубине *H* под линией раздела сред.

Введем оси координат следующим образом: ось *Ox* направим по нижней границе пластины длины 2*l*, в сторону невозмущенного потока, а ось *Oy* направим вверх против силы тяжести g и проведем через середину пластины.

Течение описывается потенциалом скорости $\varphi(x,y)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \text{ при } y < H, \text{ кроме точек пластины,} \tag{1}$$

и условиям на границе раздела сред

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{1}{\upsilon_\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \text{ при } y = H, \tag{2}$$

$$p = p_\infty \Leftrightarrow \upsilon_\infty\frac{\partial\varphi}{\partial x} + g\eta + \mu\varphi = 0 \text{ где } \mu > 0. \tag{3}$$

Из условий (2) и (3) следует, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \nu\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = H, \tag{4}$$

$$\nu = \frac{g}{\upsilon_\infty^2}, \varepsilon = \frac{\mu}{\upsilon_\infty}, \mu > 0 - \text{коэффициент диссипативных сил.}$$

Потенциал $\varphi(x,y)$ удовлетворяет условиям на бесконечности:

$$\varphi(x,y) \to \infty \text{ при } y \to -\infty \text{ равномерно по } x, \tag{5}$$

$$|\nabla\varphi| \to 0 \text{ при } x \to -\infty \text{ для всех } y, \tag{6}$$

$$|\varphi(x,y)| < C = const \text{ при } x \to +\infty. \tag{7}$$

На границе телесной пластины, заданной уравнением $y = f_\pm(x)$, должно быть выполнено условие непротекания:

$$\frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial y} = v_{\infty} \frac{\partial f_{\pm}}{\partial x} \text{ при } |x| \le l. \quad (8)$$

Здесь индексы «+» и «–» обозначают соответственно верхнюю и нижнюю границы пластины.

Обозначим через $\delta(x)$ толщину пластины

$$\delta(x) = f_{+} - f_{-}, \quad (9)$$

а через f_{cp} – среднюю линию пластины

$$f_{cp} = \frac{1}{2}(f_{+} + f_{-}). \quad (10)$$

Будем учитывать влияние малой толщины пластины с помощью распределения источников, тогда потенциал возмущенного течения около пластины представим как потенциал течения, образованного слоями вихрей и источников:

$$\varphi = A\gamma + Bq, \quad (11)$$

где оператор $A\gamma$ – потенциал вихревого слоя; оператор Bq – потенциал простого слоя.

Слой источников вызывает разрыв нормальных к слою составляющих скорости

$$q = \frac{1}{v_{\infty}}\left(\frac{\partial \varphi_{+}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{-}}{\partial y}\right) = \delta'(x). \quad (12)$$

Таким образом, интенсивность простого слоя определяется производной от функции распределения толщины пластины.

Вихревая интенсивность

$$\gamma = \frac{1}{v_{\infty}}\left(\frac{\partial \varphi_{+}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{-}}{\partial x}\right) \quad (13)$$

связана с перепадом давления формулой

$$\frac{p_{-} - p_{+}}{\rho {v_{\infty}}^2} = \gamma(x) + \frac{g}{{v_{\infty}}^2}(f_{+} - f_{-}) = \gamma(x) + \nu \int_{-l}^{x} q(s)ds. \quad (14)$$

Запишем краевые условия непротекания пластины (8) в операторной форме:

$$\overline{A_y}\gamma + \overline{B_y}q = v_{\infty} \frac{df_{cp}}{dx}, \quad (15)$$

где черточки над операторами означают результат формальной подстановки $y = 0$.

В формуле (3) устремим μ к нулю, выразим неизвестное значение η и представим его в операторной форме следующим образом:

$$\eta = -\frac{v_{\infty}}{g}(A_x\gamma + B_x q) \text{ при } y = H. \quad (16)$$

Для решения краевой задачи используем метод, основанный на применении преобразования Фурье, который подробно описан в [1].

Решение краевой задачи используем для нахождения потенциалов $A\gamma$ и Bq.

$$A\gamma = \frac{1}{4\pi i}\int_{-l}^{+l}\gamma(\xi)\int_{\sigma}\frac{1}{\alpha}\left(-sign(y)\cdot e^{-|\alpha|\cdot|y|}+\frac{|\alpha|+\nu}{|\alpha|-\nu}e^{-2|\alpha|H+|\alpha|y}\right)e^{-i\ (x-\xi)}d\alpha d\xi,$$

$$Bq = \frac{1}{4\pi}\int_{-l}^{+l}q(\xi)\int_{\sigma}\frac{1}{|\alpha|}\left(-e^{-|\alpha|\cdot|y|}+\frac{|\alpha|+\nu}{|\alpha|-\nu}e^{-2|\alpha|H+|\alpha|y}\right)e^{-i\alpha(x-\xi)}d\alpha d\xi,$$

где σ – контур вдоль действительной оси, который обходит точки $\alpha = \pm\nu$ сверху. Введем безразмерные величины:

$$\bar{h}=\frac{H}{l},\bar{x}=\frac{x}{l},\bar{\gamma}(s)=\frac{\gamma(\xi)}{\upsilon_\infty l},\bar{\alpha}=\alpha l,\ \overline{q}(s)=\frac{q(\xi)}{\upsilon_\infty l},\bar{\nu}=\nu l,\ \overline{\eta}=\frac{\eta}{l}$$

и подставим $A\gamma$ и Bq в уравнение (15).

Получим интегральное уравнение для определения вихревой интенсивности:

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{-1}^{+1}\bar{\gamma}(\bar{s})d\bar{s}\int_{\sigma}sign(\bar{\alpha})\left(1+e^{-2|\bar{\alpha}|\bar{h}}+\frac{2\bar{\nu}}{|\bar{\alpha}|-\bar{\nu}}e^{-2|\bar{\alpha}|\bar{h}}\right)e^{-i\bar{\alpha}(\bar{x}-\bar{s})}d\bar{\alpha}= \quad (17)$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\bar{q}(\bar{s})d\bar{s}\int_{\sigma}\left(e^{-2|\bar{\alpha}|\bar{h}}+\frac{2\bar{\nu}}{|\bar{\alpha}|-\bar{\nu}}e^{-2|\bar{\alpha}|\bar{h}}\right)e^{-i\bar{\alpha}(\bar{x}-\bar{s})}d\bar{\alpha}+\frac{d\overline{f_{cp}}(\bar{x})}{d\bar{x}}.$$

Считаем, что форма телесной пластины $\overline{f_{\pm}}$ известна, значит, известны $\bar{q}$ и $\overline{f_{cp}}$.

После определения $\bar{\gamma}(\bar{s})$ получим выражение для вычисления коэффициента нормальной силы c_y:

$$c_y=\int_{-1}^{1}\frac{p_- - p_+}{\rho\upsilon_\infty^2}ds=\int_{-1}^{1}[\bar{\gamma}(s)-\bar{\nu}s\bar{q}(s)]\,ds. \quad (18)$$

Используя формулу (16), можно определить изменение свободной поверхности жидкости $\bar{\eta}(\bar{x})$:

$$\bar{\eta}(\bar{x})=-\frac{1}{\bar{\nu}}\Big(\frac{1}{4\pi i}\int_{-1}^{+1}\bar{q}(\bar{s})d\bar{s}\int_{\sigma}\left(sign(\bar{\alpha})\frac{2\bar{\nu}}{|\bar{\alpha}|-\bar{\nu}}e^{-|\bar{\alpha}|\bar{h}}\right)e^{-i\bar{\alpha}(\bar{x}-\bar{s})}d\bar{\alpha}- \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\bar{\gamma}(\bar{s})d\bar{s}\int_{\sigma}\left(\frac{2\bar{\nu}}{|\bar{\alpha}|-\bar{\nu}}e^{-|\bar{\alpha}|\bar{h}}\right)e^{-i\bar{\alpha}(\bar{x}-\bar{s})}d\bar{\alpha}\Big).$$

В дальнейшем безразмерные величины будем рассматривать без черточки сверху.

В работе [1] с помощью теории вычетов было получено, что интегральное уравнение (17) преобразуется к виду:

$$\int_{-1}^{1}\gamma(\xi)\left(\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{x-\xi}+\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+4h^2}\right)-k_1(x-\xi)\right)d\xi=$$
$$=-\frac{df_{\text{ср}}(x)}{dx}+\int_{-1}^{1}q(\xi)\left(\frac{h}{\pi}\cdot\frac{1}{(x-\xi)^2+4h^2}-k_2(x-\xi)\right)d\xi, \qquad (20)$$

где

$$k_1(x)=\begin{cases}-\dfrac{\nu}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{\beta x}}{\beta^2+\nu^2}(\nu\cos(2\beta h)+\beta\sin(2\beta h))d\beta\,, & x<0,\\ \dfrac{\nu}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x}}{\beta^2+\nu^2}(\nu\cos(2\beta h)+\beta\sin(2\beta h))d\beta-2\nu e^{-2\nu h}\cos(\nu x)\,, & x>0.\end{cases}$$

$$k_2(x)=\begin{cases}-\dfrac{\nu}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{\beta x}}{\beta^2+\nu^2}(\beta\cos(2\beta h)-\nu\sin(2\beta h))d\beta\,, & x<0,\\ -\dfrac{\nu}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x}}{\beta^2+\nu^2}(\beta\cos(2\beta h)-\nu\sin(2\beta h))d\beta+2\nu e^{-2\nu h}\sin(\nu x)\,, & x>0.\end{cases}$$

С помощью теории вычетов вычислим обратное преобразование Фурье в соотношении (19) и получим

$$\eta(x)=-\frac{1}{\nu}\left(\int_{-1}^{1}q(\xi)k_3(x-\xi)d\xi+\int_{-1}^{1}\gamma(\xi)k_4(x-\xi)d\xi\right), \qquad (21)$$

где

$$k_3(x)=\begin{cases}-\dfrac{\nu}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{\beta x}}{\beta^2+\nu^2}(\nu\cos(\beta h)+\beta\sin(\beta h))d\beta\,, & x<0,\\ \dfrac{\nu}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x}}{\beta^2+\nu^2}(\nu\cos(\beta h)+\beta\sin(\beta h))d\beta-2\nu e^{-\nu h}\cos(\nu x)\,, & x>0.\end{cases}$$

$$k_4(x)=\begin{cases}-\dfrac{\nu}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{\beta x}}{\beta^2+\nu^2}(\beta\cos(\beta h)-\nu\sin(\beta h))d\beta\,, & x<0,\\ -\dfrac{\nu}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x}}{\beta^2+\nu^2}(\beta\cos(\beta h)-\nu\sin(\beta h))d\beta+2\nu e^{-\nu h}\sin(\nu x)\,, & x>0.\end{cases}$$

Для численного решения уравнения (20) применим метод дискретных вихрей [2] и получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma(s_j)\left(\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{x_i-s_j}+\frac{x_i-s_j}{(x_i-s_j)^2+4h^2}\right)-k_1(x_i-s_j)\right)= \tag{22}$$

$$=-\frac{df_{cp}(x_i)}{dx}+\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}q(s_j)\left(\frac{h}{\pi}\cdot\frac{1}{(x_i-s_j)^2+4h^2}-k_2(x_i-s_j)\right),$$

где $x_i=-1+\left(i-\frac{1}{4}\right)\frac{2}{N}$, $i=\overline{1,N}, s_j=-1+\left(j-\frac{3}{4}\right)\frac{2}{N}$, $j=\overline{1,N}$.

Решение системы (22) — значения функции $\gamma(s_j)$, $j=\overline{1,N}$ — используем для определения изменения формы свободной поверхности:

$$\eta(x)=-\frac{2}{\nu N}\left(\sum_{j=1}^{N}q(s_j)k_3(x-s_j)+\sum_{j=1}^{N}\gamma(s_j)k_4(x-s_j)\right), \tag{23}$$

а так же для вычисления коэффициента нормальной силы:

$$c_y=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\gamma(s_j)-\nu s_j q(s_j)\right). \tag{24}$$

Расчеты проводились для пластинки, форма которой определяется уравнениями: $f_+(x)=-x^2+1$, $f_-(x)=0$.

На рисунке 1 представлены графики изменения формы свободной поверхности при h =0.5 и N = 40. Согласно рисунку 1, при уменьшении значения числа Фруда $Fr=\frac{1}{\sqrt{2\nu}}$, колебания волн учащаются.

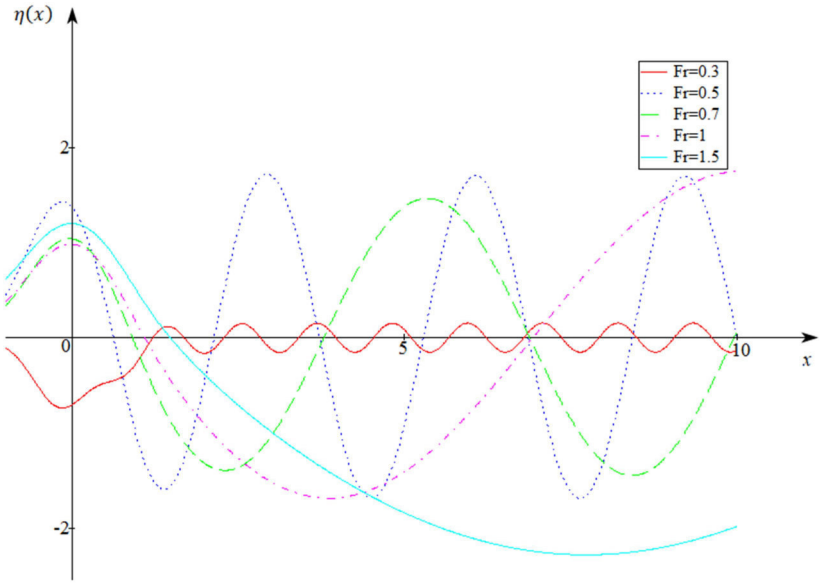


Рисунок 1 — Форма свободной поверхности при h = 0.5

На рисунке 2 изображено влияние глубины погружения пластинки на значение коэффициента нормальной силы при малых числах Fr при N = 50. За-

метим, что при малых Fr коэффициент нормальной силы начинает вести себя немонотонно при уменьшении глубины погружения пластины.

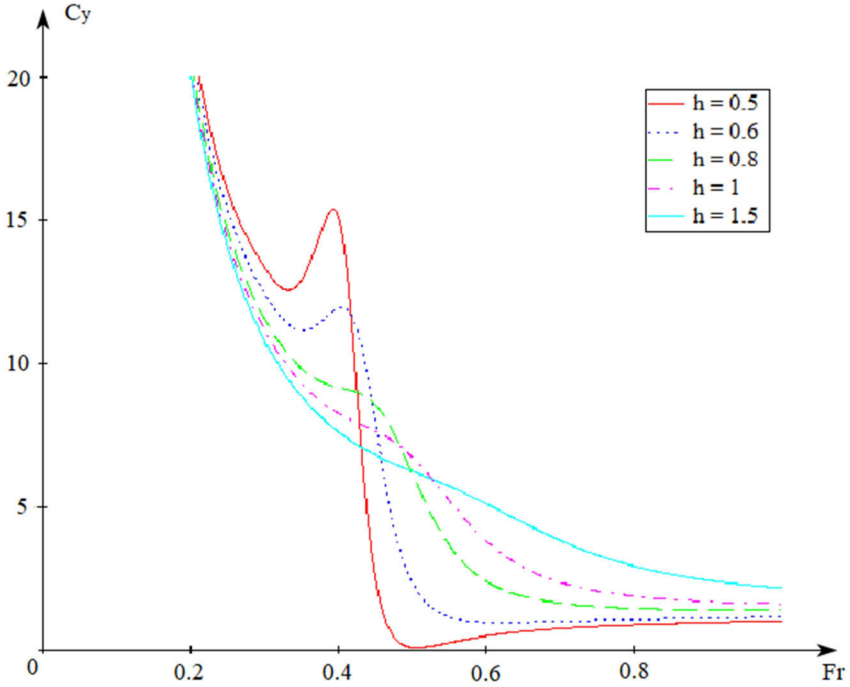


Рисунок 2 — Зависимость коэффициента нормальной силы от малых чисел Фруда $Fr = \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванисова О.В. Напряженно-деформированное состояние объектов в верхней мантии: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Иванисова Ольга Владимировна; КубГУ. — Краснодар, 2012. — 145 с.
2. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. — М.: Наука, 1965. — 242 с.

УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ ВБЛИЗИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО КОНТУРА ПИТАНИЯ И ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ НЕПРОНИЦАЕМОЙ ГРАНИЦЫ

Д. Г. Лекомцев
Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева
e-mail: *lekomtcevdg@yandex.ru*

Рассмотрена задача о математическом моделировании работы совершенной скважины в анизотропном однородном слое грунта при наличии в пористой среде прямолинейной границы (контура питания или непроницаемой границы). Для упрощения исследования произведен переход на вспомогательную плоскость с применением гомеоморфных (аффинных) преобразований. В работе сравнивается влияние контура питания или непроницаемой границы на дебит скважины. На большом удалении от прямолинейной границы, она не оказывает существенного влияния на дебит. Анизотропия грунта оказывает существенное влияние на дебит скважины.

Ключевые слова: скважина, пористая среда, дебит, тензор проницаемости, анизотропия, контур питания

Несмотря на развитие альтернативной энергетики объемы добычи нефти продолжают увеличиваться, при этом наиболее легкодоступные залежи уже исчерпаны и на данный момент идет активная эксплуатация месторождений со сложной геологической структурой [1]. Кроме этого, создание новых водозаборов требует разработки математических моделей работы скважин в сложных геологических условиях [2]. Современные исследования показывают, что породы-коллекторы многих месторождений демонстрируют признаки анизотропии [3, 4, 5], которая может меняться в процессе эксплуатации скважины [6].

Стоком мощности Q промоделируем приток флюида к совершенной эксплуатационной скважине, размещенной в точке O плоскости Oxy. Грунт пласта описывается коэффициентом проницаемости K, который в случае анизотропной однородной среды является тензором второго ранга $K = (K_{ij})$ [7], $i, j = 1, 2$, компоненты (K_{ij}) – постоянные. Рассмотрим работу скважины в случае, когда в среде имеется прямолинейная бесконечная граница (геологический сброс или граница бассейна свободной жидкости) σ: $x = -d$, где d - наименьшее расстояние от центра скважины до границы σ. Контур скважины моделируем окружностью σ_C: $x^2 + y^2 = R_C^2$. Обобщенный потенциал $\varphi(z)$ удовлетворяет всюду в области D уравнению [8]:

$$\nabla \cdot (K \cdot \varphi(z)) = 0, \quad z \in D \tag{1}$$

Будем предполагать, что давления на контуре питания σ_Π и на контуре скважины σ_C постоянны, то есть для обобщенного потенциала $\varphi(z)$ будут верны условия:

$$\varphi(z) = \varphi_\Pi, \quad z \in \sigma_\Pi, \quad \varphi(z) = \varphi_C, \quad z \in \sigma_C, \tag{2}$$

где φ_Π и φ_C - не равные друг другу константы. Чтобы исследовать действие на дебит Q различных компонентов тензора проницаемости K введем коэффициенты [9]:

$$\alpha = K_{22}/K_{11} > 0, \quad \beta = K_s/K_{11} > 0, \quad \gamma = K_a/K_{11}, \quad \left(\beta^2 < \alpha\right). \tag{3}$$

где $K_s = (K_{12} + K_{21})/2$, $K_a = (K_{12} - K_{21})/2$.

Как следует из вида уравнения (1), задача (1)-(2) весьма сложна. Для ее упрощения перейдем на вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, применив гомеоморфные (аффинные) преобразования координат. Прямое преобразование декартовых координат плоскостей z и ξ [8]

$$\xi = (1+a)x + by, \quad \eta = bx + (1-a)y, \tag{4}$$

и обратное ему

$$x = \frac{(1-a)\xi - b\eta}{1-a^2-b^2}, \quad y = \frac{(1+a)\eta - b\xi}{1-a^2-b^2}, \tag{5}$$

где $\mu^2 = a^2 + b^2$, $a^2 + b^2 < 1$, $a = (K_{22} - K_{11})/(K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D(K_s)})$, $b = (K_{12} + K_{21})/(K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D(K_s)})$, $D(K_s) = K_{11}K_{22} - (K_{12} + K_{21})^2/4$.

Для изучения воздействия анизотропии грунта на дебит используем относительный дебит [10]

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{Q_{01}} - 1, \tag{6}$$

где Q_{01} — дебит скважины вблизи прямолинейной непроницаемой границы в изотропном грунте.

В случае непроницаемой границы определим Q_{01} по формуле [11]

$$Q_{01} = \frac{2\pi(C - C_0)}{\ln\left(\frac{R_{\Pi}^2}{2dR_C}\right)} \tag{7}$$

где C и C_0 - постоянные давления на контурах скважины и питания, далее везде положим $C = 1$, $C_0 = 0$, $R_C = 1$. Следуя [10, 12, 13] определим Q_1 в случае непроницаемой границы по формуле

$$Q_1 = \frac{2\pi\sqrt{D(K_s)}(C - C_0)}{\ln(2d'R'_C)} \tag{8}$$

где $R'_C = R_C\sqrt{1 - |\mu^2|}$ - «эффективный» радиус скважины на плоскости ζ [9], $d' = d(1 - |\mu^2|)/\sqrt{b^2 + (1-a)^2}$ - расстояние от центра скважины до непроницаемой границы на плоскости ζ [9]. Вслед за [11], положим, что контур питания удален много дальше непроницаемой границы $R_{\Pi} >> d$.

Аналогично, для изучения воздействия анизотропии грунта на дебит используем относительный дебит [10]

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{Q_{02}} - 1, \tag{9}$$

где Q_{02} — дебит скважины в изотропном грунте вблизи прямолинейного контура питания.

Согласно [14, 15] дебит Q_{02} скважины в изотропной однородной среде вблизи контура питания определим из соотношения

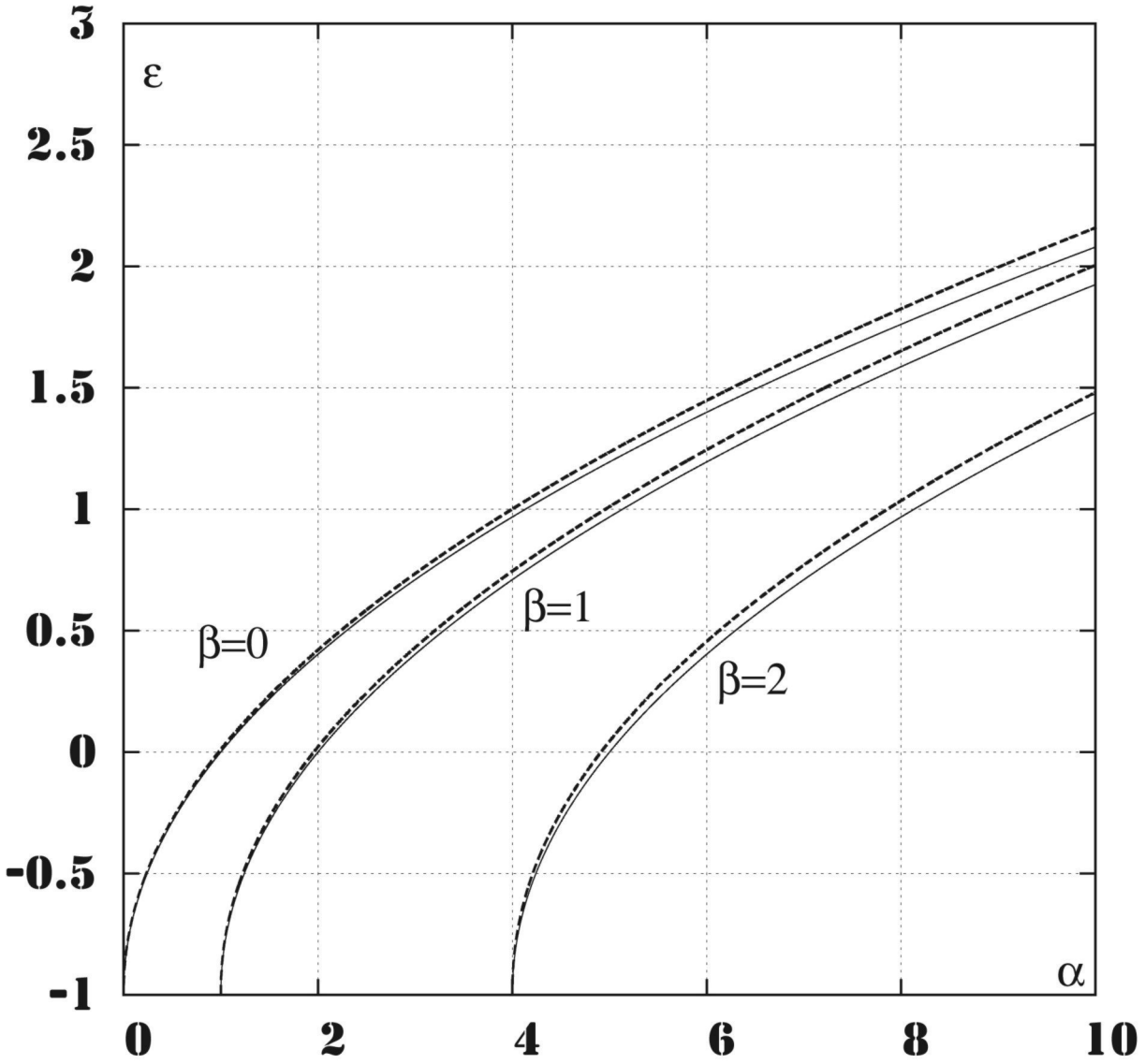


Рисунок 1 – Зависимости относительного дебита скважины ε от коэффициентов α и β

$$Q_{02} = \frac{2\pi(C - C_0)}{\ln(\frac{2d}{R_C})} \tag{10}$$

В случае расположения скважины вблизи контура питания определим Q_2 по формуле [9]

$$Q_2 = \frac{2\pi\sqrt{D(K_s)}(C - C_0)}{\ln(\frac{2d'}{R'_C})} \tag{11}$$

На рисунке 1 представлены графики зависимости относительного дебита скважины ε от коэффициентов α и β при условии, что размер скважины на много порядков меньше расстояния до прямолинейной границы. Случай прямолинейного контура питания показан сплошной линией, а случай прямолинейной непроницаемой границы - пунктиром.

Результаты моделирования демонстрируют, что анизотропные свойства пористой среды могут оказывать сильное влияние на дебит скважины. Это проявляется в увеличении или уменьшении Q_1 и Q_2 по отношению к Q_{01} или Q_{02}, соответственно. В случае, когда непроницаемая граница или контур питания удалены в бесконечность формулы (8) и (11) дают сходные результаты. Представленная в данной работе математическая модель фильтрации в анизотропной однородной среде может применяться для тестирования математических моделей, возникающих при решении более сложных задач фильтрации [16, 17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайн Н. Геология, разведка, бурение и добыча нефти. — М.: ЗАО «Олимп - Бизнес». — 2004. — 752 с.
2. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Основы фильтрации воды. — М.: Мир. — 1971. — 452 с.
3. Семенов А. А. Экспериментальные исследования фильтрационных течений в анизотропных пористых средах: Автореф. дис. канд. тех. наук. — М., РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина. — 2007. — 26 с.
4. Дмитриев Н. М. Модели фильтрации в анизотропных средах: Автореф. дис. док. тех. наук. — М., Государственная академия нефти и газа им. И. М. Губкина. — 1997. — 34 с.
5. Nordquist T. Permeability Anisotropy of Resedimented Mudrocks. — Cambridge: Massachusetts Institute of Technology. — 2015. — 277 p.
6. Графутко С. Б. Изменения анизотропных свойств пласта под действием фильтрационного потока: Автореф. дис. канд. тех. наук. — М., Государственная академия нефти и газа им. И. М. Губкина. — 1993. — 28 с.
7. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. — М.: Физматлит. — 2007. — 480 с.
8. Пивень В. Ф. Математические модели фильтрации жидкости. — Орел: Издательство ФГБОУ ВПО Орловский государственный университет, ПФ Картуш. — 2015. — 408 с.
9. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. — 2012. — Т.47. — № 3. — С. 69–74.
10. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Исследование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. — 2014. — Т.59. — № 3. — С. 83–88.

11. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Каневская Р. Д. Подземная гидромеханика. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. — 2006. — 488 с.

12. Лекомцев Д. Г. Математическое моделирование работы совершенной скважины, вблизи прямолинейной непроницаемой границы, в анизотропном грунте // Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании (12-15 декабря 2016 г., Москва). — г. Москва — 2016. — С. 101–103.

13. Лекомцев Д. Г. Работа совершенной скважины, вблизи прямолинейной непроницаемой границы, в анизотропной пористой среде // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: Сборник трудов IV международной конференции (20–26 сентября 2016 г., г. Воронеж). — Воронеж. — 2016. — С. 207–209.

14. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. — М.: Гостоптехиздат. — 1963. — 396 с.

15. Лекомцев Д. Г. Работа совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропной пласте грунта // Сборник тезисов, материаля Девятнадцатой Всероссийской конференции студентов-физиков и молодых ученых (20–26 сентября 2013 г., г. Архангельск). — Екатеринбкрг-Архангельск — 2013. — С. 70–73.

16. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Вычислительная механика сплошных сред. — 2016. — Т.9. — № 4. — С. 389–399.

17. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г. Математическое моделирование работы скважины в случае двумерной фильтрации в анизотропном неоднородном пласте // Вычислительные методы и программирование. — 2020. — Т.21. — № 1. — С. 87–95.

УДК 517.958:532+517.968:23

ПЛОСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

В. Ф. Пивень, д.ф.-м.н., проф.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *PivenVF@gmail.com*

Исследуются первая и вторая краевые задачи, задача сопряжения, когда произвольные источники фильтрационного течения могут быть на границах и вне границ. Решения задач найдены в конечном виде для случая канонических границ (прямая, окружность), а в случае произвольных гладких границ редуцированы к граничным сингулярным интегральным уравнениям.

Ключевые слова: первая и вторая краевые задачи, задача сопряжения, сингулярные интегральные уравнения.

В отличие от известных работ в гидродинамике [1,2] и теории фильтрации [3], в которых конкретные источники располагаются на непроницаемых границах, нами исследуются первая и вторая краевые задачи, задача сопряжения, когда произвольные источники фильтрационного течения могут быть на границах и вне границ. Решения задач найдены в конечном виде для случая канонических границ (прямая, окружность), а в случае произвольных гладких границ редуцированы к граничным сингулярным интегральным уравнениям.

1. Следуя [4], рассмотрим плоское стационарное фильтрационное течение несжимаемой жидкости в однородной изотропной недеформируемой пористой среде проницаемости k. Течение характеризуем в комплексной плоскости $z = x + iy$ комплексным потенциалом $W = k\varphi + i\psi$ (φ и ψ — потенциал и функция тока). $W = W(z)$ — аналитическая функция z всюду в области D течения за исключением изолированных особых точек $W(z)$, которые моделируют источники течения.

Учтём заданные источники течения, которые характеризуем в безграничной среде проницаемости $k = 1$ особыми точками комплексного потенциала $W_0(z)$:

$$W_0(z) = f_0(z) + f(z), \tag{1.1}$$

где функция $f_0(z)$ имеет особые точки на граничных кривых, а функция $f(z)$ — вне этих кривых. Представим комплексные потенциалы в случае, когда область течения D среды проницаемости $k = 1$ ограничена кривой σ_1, на которой задан потенциал либо непроницаемой кривой σ_2 в виде

$$W_0(z) = W_0(z) + W_*(z), \quad z \in D, \tag{1.2}$$

а в случае кривой Γ — границы сопряжения областей D_1 и D_2 ($D = D_1 \cup D_2$), проницаемости сред в которых k_1 и k_2:

$$W_\nu(z) = W_0(z) + W_*(z), \quad z \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2. \tag{1.3}$$

Здесь $W_*(z)$ — комплексный потенциал возмущений, обусловленных наличием границ σ_1, σ_2 и Γ.

Учитывая (1.1)–(1.3) и обозначая $W_0^{\pm}(z) = W_0(z)$ на границах σ_1, σ_2 и Γ, запишем условия для $W*(z)$. Имеем

$$W_*^+(z) + \overline{W}_*^+(z) = 2\alpha_1(z) - [W_0(z) + \overline{W}_0(z)], \quad z \in \sigma_1, \tag{1.4}$$

$$W_*^+(z) - \overline{W}_*^+(z) = i2\alpha_2(z) - [W_0(z) - \overline{W}_0(z)], \quad z \in \sigma_2, \tag{1.5}$$

в которых орты к σ_1 и σ_2 направлены внутрь области D. В частности, если σ_1 — граница водоёма покоящейся жидкости ($\alpha_1(z) = 0$), а σ_2 — «нулевая» линия тока ($\alpha_2 = \mathrm{const} = 0$), то

$$W_*^+(z) + \overline{W}_*^+(z) = [W_0(z) + \overline{W}_0(z)], \quad z \in \sigma_1, \tag{1.4'}$$

$$W_*^+(z) - \overline{W}_*^+(z) = -[W_0(z) - \overline{W}_0(z)], \quad z \in \sigma_2. \tag{1.5'}$$

На границе Γ имеем условие сопряжения

$$(1-\lambda)W_*^+(z) - W_*^-(z) - \lambda\overline{W}_*^-(z) = \lambda[W_0(z) + \overline{W}_0(z)], \quad z \in \Gamma, \tag{1.6}$$

где $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda \in (-1, 1)$, орт к Γ направлен в D_1. Условия (1.4)–(1.6) имеют место во всех точках границ за исключением особых точек функции $f_0(z)$ входящей в $W_0(z)$.

На бесконечности потребуем выполнения условия

$$W_*(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \text{при} |z| \to \infty, \tag{1.7}$$

которое выражает затухание потока возмущений на бесконечности.

Таким образом, по заданным источникам течения (задан $W_0(z)$) и проницаемости среды найти комплексный потенциал $W_*(z)$, удовлетворяющий условию (1.4) (первая краевая задача) либо условию (1.5) (вторая краевая задача) либо условию (1.6) (задача сопряжения), а также условию (1.7), если область содержит бесконечно удалённую точку.

2. Каждую из границ σ_1, σ_2 и Γ моделируем прямой линией с выбранной на ней координатной осью Ox. Если ось Ox — граница $\Gamma : y = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ сопряжения областей $D_1(y > 0)$ и $D_2(y < 0)$, проницаемости сред в которых k_1 и k_2, а $W_0(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z)$ (функция $f_0(z)$) имеет особые точки на Ox, функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — при $y > 0$ и $y < 0$), то течение описывают комплексные потенциалы

$$W_1(z) = W_0(z) + \lambda\left[\overline{f_0(\bar{z})} + \overline{f_1(\bar{z})} + f_2(z)\right], \quad z \in D_1,$$

$$W_2(z) = W_0(z) - \lambda\left[f_0(z) + f_1(z) + \overline{f_2(\bar{z})}\right], \quad z \in D_2.$$

Если ось Ox — граница водоёма σ_1 либо непроницаемая граница σ_2 и течение происходит в области $D_1(y > 0)$ среды проницаемости $k = 1$, то его комплексный потенциал

$$W(z) = W_0(z) - \overline{W_0(\bar{z})},\ z \in D_1, \text{ либо } W(z) = W_0(z) + \overline{W_0(\bar{z})},\ z \in D_1,$$

где $W_0(z) = f_0(z) + f_1(z)$, $\overline{W_0(\bar{z})} = \overline{f_0(\bar{z})} + \overline{f_1(\bar{z})}$.

Пусть теперь окружность $z = ae^{i\theta}$ (a — её радиус, $\theta \in [0, 2\pi]$) моделирует каждую из границ σ_1, σ_2 и Γ. Пусть окружность — граница Γ сопряжения областей D_1 ($|z| > a$) и D_2 ($|z| < a$) сред проницаемостей k_1 и k_2, а $W_0(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z)$, функция $f_0(z)$ имеет особые точки при $|z| = a$, а функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — при $|z| > a$ и $|z| < a$, причём

$$f_j = O(z),\ j = 0, 1 \text{ при } |z| \to 0, \quad f_2(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \text{ при } |z| \to \infty. \tag{2.1}$$

Тогда течение характеризуют комплексные потенциалы

$$W_1(z) = W_0(z) + \lambda \left[\overline{f_0\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)} + \overline{f_1\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)} + f_2(z) \right], \quad z \in D_1,$$

$$W_2(z) = W_0(z) - \lambda \left[f_0(z) + f_1(z) + \overline{f_2\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)} \right], \quad z \in D_2.$$

Пусть окружность — граница σ_1 либо σ_2 и $W_0(z) = f_0(z) + f(z)$, причём $f_0(z)$ и $f(z) = f_1(z)$, $z \in D_1$ ($|z| > a$), $f(z) = f_2(z)$, $z \in D_2$ ($|z| < a$) удовлетворяют условиям (2.1). Тогда имеем

$$W(z) = W_0(z) - \overline{W_0\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)} \quad \text{либо} \quad W(z) = W_0(z) + \overline{W_0\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)},$$

где $\overline{W_0\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)} = \overline{f_0\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)} + \overline{f\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)}$, $\overline{f\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)} = \begin{cases} \overline{f_1\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)}, & z \in D_1, \\ \overline{f_2\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)}, & z \in D_2. \end{cases}$

3. Пусть теперь σ_1, σ_2 и Γ — произвольные замкнутые гладкие кривые, в точке z_0 каждой из них расположен приведённой мощности $m = q/2\pi$ источник ($q > 0$) или сток ($q < 0$) и течение в среде проницаемости $k = 1$ характеризует комплексный потенциал $W_0(z) = m \ln(z - z_0) + f(z)$, особые точки $f(z)$ лежат вне кривых. Следуя [4], представим $W_*(z)$ комплексным потенциалом двойного слоя, выраженным через фундаментальные решения $F_1(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{z-\zeta}$ в случае границ σ_1, Γ и $F_2(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1}{z-\zeta}$ для границы σ_2. Для задачи сопряжения имеем

$$W_\nu(z) = W_0(z) + \int_\Gamma \left[2\lambda m \ln \left| 1 - \frac{z_0}{\zeta} \right| + g(\zeta) \right] \frac{\partial F_1(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}\, d\ell_\zeta, \quad z \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2,$$

где $g(z)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(z) - 2\lambda \int_\Gamma K(z,\zeta) \left[2\lambda m \ln \left| 1 - \frac{z_0}{\zeta} \right| + g(\zeta) \right] d\ell_\zeta = 2\lambda [m \ln |z| + \operatorname{Re} f_0(z)], \quad z \in \Gamma,$$

$K(z,\zeta) = \dfrac{\cos(\vec R, \hat{\vec n}_\zeta)}{2\pi R}$, $\vec R = \vec{\zeta z}$, $R = |z - \zeta|$, орт $\vec n_\zeta$ направлен в D_1.

В случае границы σ_1 имеем комплексные потенциалы для внешней задачи

$$W(z) = W_0(z) + \int_{\sigma_1} \left[2m \ln \left| 1 - \frac{z_0}{\zeta} \right| + g_1(\zeta) \right] \frac{\partial F_1(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}\, d\ell_\zeta + \int_{\sigma_1} g_1(\zeta)\, d\ell_\zeta, \quad z \in D,$$

где $g_1(z)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g_1(z) + 2\int_{\sigma_1} \left\{ K(z,\zeta) \left[2m \ln \left| 1 - \frac{z_0}{\zeta} \right| + g_1(\zeta) \right] + g_1(\zeta) \right\} d\ell_\zeta = \\ = 2[\alpha_1(z) - m \ln |z| - \mathrm{Re} f_0(z)], \quad z \in \sigma_1$$

и внутренней задачи

$$W(z) = W_0(z) + \int_{\sigma_1} \left[2m \ln \left| 1 - \frac{z_0}{\zeta} \right| + g_1(\zeta) \right] \frac{\partial F_1(z,\zeta)}{\partial n_\zeta} \, d\ell_\zeta \quad z \in D,$$

где $g_1(z)$ отвечает интегральному уравнению

$$g_1(z) + 2\int_{\sigma_1} K(z,\zeta) \left[2m \ln \left| 1 - \frac{z_0}{\zeta} \right| + g_1(\zeta) \right] d\ell_\zeta = \\ = 2[\alpha_1(z) - m \ln |z| - \mathrm{Re} f(z)], \quad z \in \sigma_1.$$

В случае границы σ_2 имеем для внешней и внутренней задачи комплексный потенциал

$$W(z) = W_0(z) + \int_{\sigma_2} \{2m[\arg\zeta - \arg(\zeta - z_0)] + g_2(\zeta)\} \frac{\partial F_2(z,\zeta)}{\partial n_\zeta} \, d\ell_\zeta, \\ z \in D,$$

где $g_2(z)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g_2(z) - 2\int_{\sigma_2} K(z,\zeta) \{2m[\arg\zeta - \arg(\zeta - z_0)] + g_2(\zeta)\} \, d\ell_\zeta = \\ = 2[\alpha_2 - m \arg z - \mathrm{Im} f(z)], \quad z \in \sigma_2.$$

Граничные интегральные уравнения второго рода с непрерывной правой частью относятся к уравнениям типа Фредгольма, так как их ядро $K(z,\zeta)$ имеет слабую сингулярность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: «Янус», 1995. — 520 с.
2. Сетуха А. В. Численные методы решения краевых задач с обобщенными граничными условиями и их приложения к аэродинамике: автореферат дис. . . . д-ра ф.-м. наук: 01.01.07 / Ин-т вычисл. математики. — М., 2003. — 33 с.
3. Полубаринова–Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1997. — 663 с.
4. Пивень В. Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. — Орёл: Картуш, 2006. — 508 с.

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МАЛОРАНГОВЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

С.Л. Ставцев, к.-ф.м.н., доц.
ИВМ РАН
e-mail: *sstass2000@mail.ru*

Для решения интегрального уравнения в задаче дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем объекте в работе применены малоранговые аппроксимации больших плотных матриц. В случае большого волнового числа матрица системы становится плохо обусловленной, поэтому для решения системы итерационным методом с такой матрицы необходимо использовать предобуславливатель. В работе построен предобуславливатель, который является разреженной матрицей. В работе построен метод обращения предобуславливателя, использующий малоранговые аппроксимации для хранения сомножителей *LU* разложения разреженной матрицы-предобуславливателя.

Ключевые слова: интегральные уравнения, дифракция электромагнитных волн, быстрые матричные методы, параллельные алгоритмы, предобуславливатель.

1. Введение

Решение больших задач на компьютере часто связано с использованием огромных вычислительных ресурсов, поэтому для решения больших задач используют вычислительные системы с распределенной памятью, а также специальные численные методы аппроксимаций плотных матриц. В статье на примере решения задачи дифракции электромагнитных волн представлены особенности применения методов малоранговых аппроксимаций для суперкомпьютеров.

В данной работе задача дифракции электромагнитных волн, имеющих высокие частоты, сведена к решению гиперсингулярных интегральных уравнений (также как в работах [1], [2]). Для того, чтобы решить систему с большой плотной матрицей, разработан метод малоранговых аппроксимаций для суперкомпьютеров. Система со сжатой матрицей решается методом *GMRES*. Для того, чтобы снизить число итераций в итерационном алгоритме в статье предложен предобуславливатель, использующий мозаично-скелетную аппроксимацию исходной матрицы, а для обращения которого также используются малоранговые аппроксимации.

2. Электродинамическая задача

Рассмотрим задачу дифракции на идеально проводящей поверхности Σ , которая может быть как замкнутая, так и разомкнутая.

Для монохроматической волны с частотой ω справедливы уравнения Максвелла:

$$\nabla \times \vec{E} = i\mu\mu_0\omega\,\vec{H};\ \nabla \times \vec{H} = -i\varepsilon\varepsilon_0\omega\,\vec{E}. \quad (1)$$

На идеально проводящей поверхности выполняется граничное условие

$$\vec{\mathrm{n}} \times \left(\vec{E} + \vec{E}_0\right) = 0, \quad (2)$$

где $\vec{E}_0$ - заданная функция, определенная падающей волной (будем предполагать, что волна плоская), $\vec{n}$ - вектор нормали к поверхности.

Для выделения единственного решения необходимо задать дополнительные условия

$$\left\{\frac{d\vec{E}}{d\tau} - ik\vec{E} = o(|x|^{-1}), \frac{d\vec{H}}{d\tau} - ik\vec{H} = o(|x|^{-1}), |x| \to \infty. \right. \quad (3)$$

Согласно [1] задача сводится к интегральному уравнению электрического поля относительно неизвестной функции $\vec{j}(y)$:

$$\vec{n} \times \int_{\Sigma} \vec{j}(y)(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,F(x-y) + k^2 F(x-y))\,d\sigma = -\vec{n} \times \vec{E}_0(x), x \in \Sigma, \quad (4)$$

где $k = \omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$ - волновое число и

$$F(R) = \frac{\exp(ikR)}{R}, \quad R = |x-y|. \quad (5)$$

В уравнении (4) интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару.

Для численного решения уравнения (4) использовалась численная схема, представленная в работах [3], [4]. Согласно этой схеме поверхность равномерно разбивается на ячейки σ_i, $i = 1, \ldots, n$, на каждой ячейки вводится ортонормированный базис $\vec{e}_{i1}$, $\vec{e}_{i2}$. Для каждой ячейки σ_i предполагается, что $\vec{j}_i = \vec{j}(x_i)$, где x_i - центр масс ячейки. Каждая ячейка считается плоской. После дискретизации интегрального оператора возникает матрица, которая состоит из блоков 2×2 вида:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \vec{E}_{1j}(x_i) \cdot \vec{e}_{1i} & \vec{E}_{2j}(x_i) \cdot \vec{e}_{1i} \\ \vec{E}_{1j}(x_i) \cdot \vec{e}_{2i} & \vec{E}_{2j}(x_i) \cdot \vec{e}_{2i} \end{pmatrix},$$

$$\vec{E}_{1j}(x_i) = \int_{\partial\sigma_j} \vec{Q}(x_i)\,de_2 + k^2\vec{e}_{1j}\int_{\sigma_j} \frac{\exp(ikR)}{R}\,d\sigma\,, \quad (6)$$

$$\vec{E}_{2j}(x_i) = \int_{\partial\sigma_j} \vec{Q}(x_i)\,de_1 + k^2\vec{e}_{2j}\int_{\sigma_j} \frac{\exp(ikR)}{R}\,d\sigma\,, \vec{Q}(x) = \nabla_y \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|}.$$

В (6) контурный и поверхностный интегралы вычисляются численно.

3. Мозаично-скелетные аппроксимации

Задача сведена к решению системы алгебраических уравнений

$$Az = b \quad (7)$$

с плотной матрицей A. Для аппроксимации матрицы использовался мозаично-крестовый метод [5], [6], [7], [8]. Согласно этому методу матрица иерархически разбивается на блоки и с помощью алгоритма неполной крестовой аппроксимации малоранговые матричные блоки вычисляются независимо друг от друга. Параллельный алгоритм построения аппроксимации матрицы представлен в работе [6].

Проведем исследование метода аппроксимации матрицы. Во всех примерах данной статьи Σ из интегрального уравнения (4) является круглым цилиндром с диаметром 15 см и высотой 25 см.

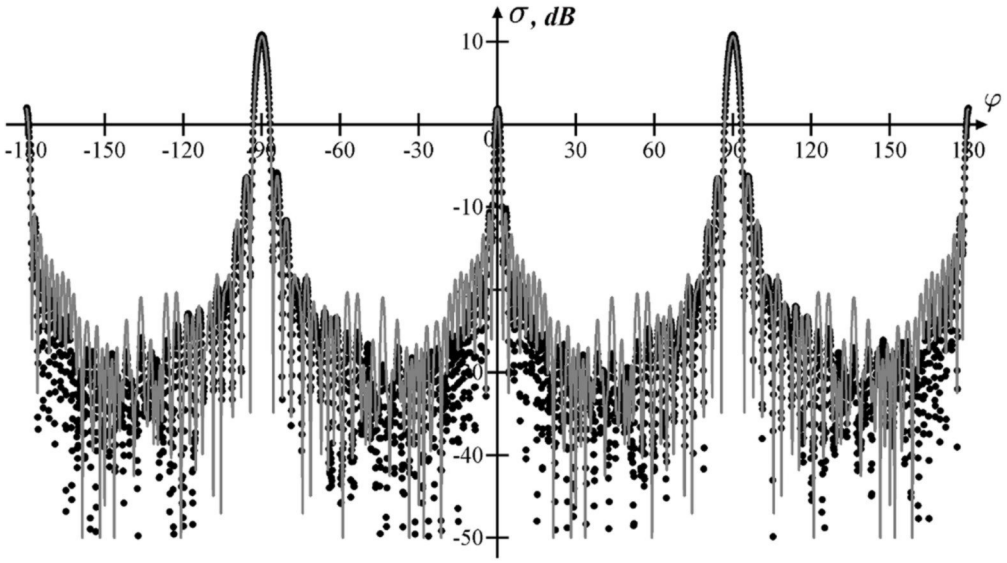


Рисунок 1 — ЭПР на цилиндре, 16 ГГц

На рисунке 1 приведена эффективная площадь обратного рассеивания (ЭПР) для частоты 16 ГГц при вертикальной поляризации. Величина σ для разных ортов $\vec{\tau}(\varphi)$ волновых векторов в случае волны, падающей под углом φ на поверхность Σ, рассчитывается по формуле

$$\sigma(\vec{\tau}) = \frac{4\pi}{|\vec{E}_0|^2}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{j}_i - \vec{\tau}\cdot(\vec{\tau}\cdot\vec{j}_i)\right)k^2\exp(-ik\vec{\tau}\cdot\overrightarrow{x_i})|\sigma_i|\right|^2, \qquad (8)$$

где $\vec{j}_i$ – ток ячейки σ_i, $\overrightarrow{x_i}$ – радиус вектор ее центра.

На рисунке 1 черными точками показаны результаты эксперимента, а серой линией - результаты расчетов с помощью интегрального уравнения. В расчетах число ячеек бралось равным 192156, число правых частей - 2048, точность аппроксимации матрицы 10^{-3}, точность решения системы $5\cdot10^{-3}$.

В таблице 1 приведено число итераций, при решении системы (7) методом *GMRES* необходимое для решения системы с 2048 правыми частями с точностью $5\cdot10^{-3}$ для разных частот и разного числа ячеек n.

Таблица 1 — Число итераций

n	2 ГГц	4 ГГц	8 ГГц	16 ГГц
7872	1862	2355	4390	9410
21760	2821	4261	6025	11237
30400	3651	4791	7285	12990
45784	4262	5689	8269	21103

Как видно из данных таблицы 1, с ростом частоты число итераций значительно растет, что требует значительных объемов оперативной памяти и значительно затрудняет расчеты.

4. Предобуславливатель

Уменьшим число итераций в методе *GMRES*, применив для решения системы (7) предобуславливатель. Технология построения и использования предобуславливателя описана в монографии [9].

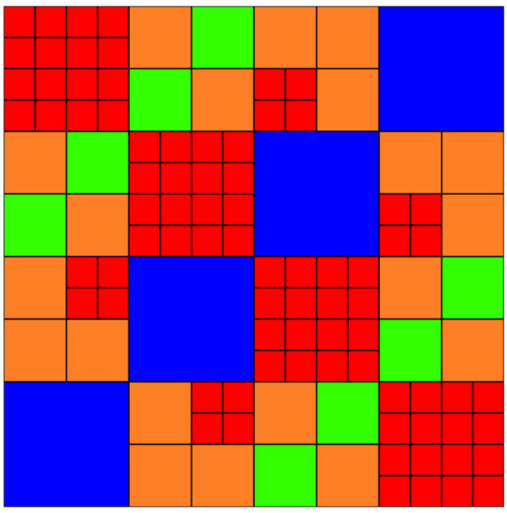


Рисунок 2 — Мозаичная структура матрицы

Согласно методу мозаично-скелетных аппроксимаций матрица разбивается на блоки. Блоки, соответствующие взаимодействию далеких областей, предполагаются малоранговыми. Для остальных блоков вычисляются все элементы матрицы. Немалоранговые блоки будем называть плотными. Для малоранговых блоков строится аппроксимация с заданной точностью. Пусть для блока размера $m \times n$ построена аппроксимация ранга r. Если для блока с параметрами m, n, r выполняется условие $m \cdot n < r(m + n)$, то такой блок также предполагается плотным. На рисунке 2 плотные блоки изображены красным цветом.

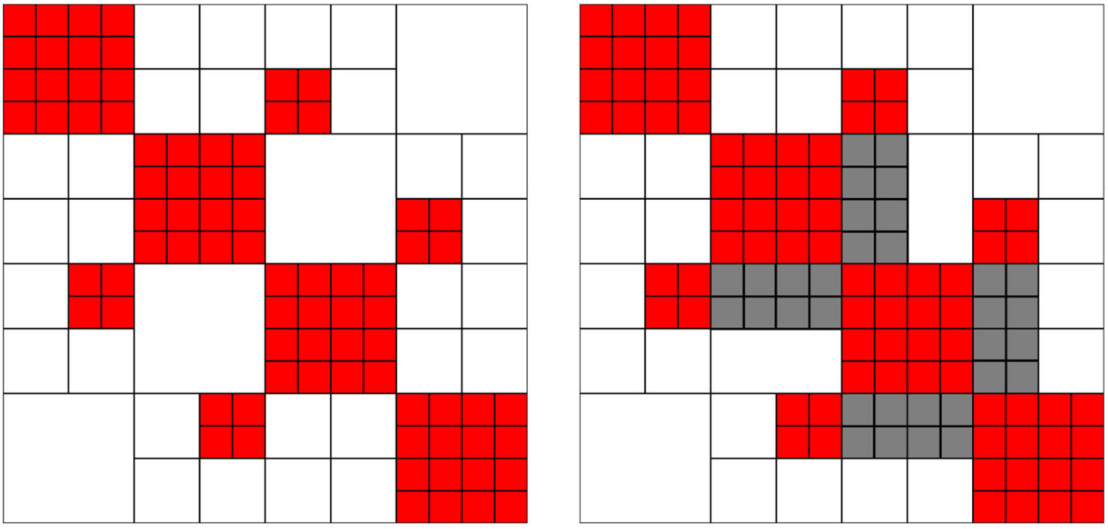


Рисунок 3 — Ненулевые блоки предобуславливателя и ненулевые блоки LU разложения предобуславливателя

В качестве предобуславливателя M системы (7) выбрана матрица из мозаично-скелетного представления, в которой оставлены только плотные блоки, а малоранговые блоки предполагаются нулевыми (см. рисунок 3). Матрица M является разреженной, поэтому для этой матрицы LU разложение строится быстрее, чем для матрицы A. Факторы LU разложения матрицы M также являются разреженными, поэтому для хранения матриц L и U требуется оперативной па-

мяти гораздо меньше, чем N^2 (N – число неизвестных в системе (7)). В тоже время быстро решается система с предобуславливателем:

$$My = c. \quad (9)$$

Для построения LU разложения разреженной матрицы M на многопроцессорных вычислительных системах можно использовать стандартные пакеты. Например, в работе [4] для решения разреженной системы использовался пакет *MUMPS*. И в данной работе, и в работе [4] принцип использования разреженной системы в качестве предобуславливателя один и тот же. В обеих случаях:

- исходная матрица A представляется в малоранговом формате, при этом определяется структура матрицы и расположение в ней плотных блоков;
- согласно информации о структуре плотных блоков блоки предобуславливателя M распределяются по процессорам;
- параллельно рассчитывается LU разложение разреженной матрицы;
- для того, чтобы решить систему (7) методом *GMRES* с помощью LU разложения матрицы M на каждом шаге итерации решается система (9).

Основным недостатком использования пакета *MUMPS* является то, что множители LU разложения матрицы M занимают гораздо больше памяти, чем исходная матрица M. Это видно непосредственно из примера рисунка 3. Для того, чтобы уменьшить память, новые блоки, возникающие в матрицах L и U, сжимаются с помощью алгоритма неполной крестовой аппроксимации. На рисунке 3 такие блоки отмечены серым цветом.

5. Примеры расчетов

В таблице 2 показана эффективность предобуславливателя для решения систем разного размера N. В таблице показано p_1 - число итераций без предобуславливателя, p_2 - число итераций с предобуславливателем. Частота излучения в примере 8 ГГц.

Таблица 2 — Эффективность предобуславливателя при решении системы

N	34122	94872	167676	376800
p_1	4684	7563	9777	14514
p_2	949	1051	1116	1488

Таким образом, построенный преобуславливатель значительно уменьшает число итераций в решателе системы. Однако, такой предобуславливатель, построенный с использованием стандартного пакета по решению разреженных систем (в том числе *MUMPS*), требует большого числа оперативной памяти.

В таблице 3 показана память (в гигабайтах), которая требуется для решения задачи дифракции на отдельных этапах: M_1 – это память, необходимая для хранения малоранговых блоков матрицы A из системы (7); M_2 – это память, необходимая для хранения плотных блоков матрицы A, используемых для по-

строения предобуславливателя, то есть память на матрицу M; M_3 – память, необходимая для хранения множителей LU разложения матрицы M без сжатия дополнительных блоков; M_4 – память, необходимая для хранения множителей LU разложения матрицы M со сжатием дополнительных блоков; M_4 – память, необходимая для хранения матрицы A без сжатия.

Таблица 3 — Память, необходимая для решения задачи дифракции на отдельных этапах

f	4 ГГц	8 ГГц	12 ГГц	16 ГГц
N	34122	94872	167676	376800
M_1	1,50	3,92	7,70	19,20
M_2	0,394	1,732	2,725	4,220
M_3	5,3	24,4	113,3	202,8
M_4	2,72	11,0	20,5	62,4
M_5	8,67	67,06	209,47	1057,82

На суперкомпьютерах без использования предобуславливателя удалось построить ЭПР на цилиндре только для частоты 16 ГГц (см. рисунок 1). Использование предобуславливателя позволило получить решение интегрального уравнения для цилиндра на частотах 32 ГГц и 64 ГГц.

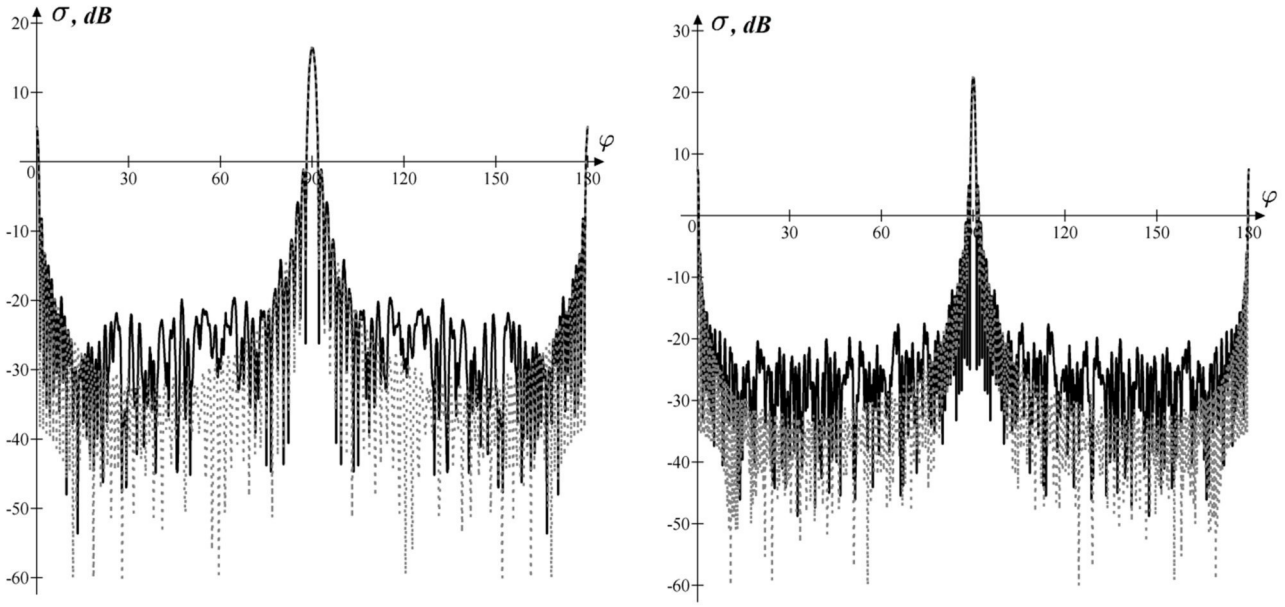


Рисунок 4 — ЭПР цилиндра на 32ГГц (слева) и 64 ГГц (справа)

На рисунке 4 черным цветом показаны ЭПР, полученные из решения интегрального уравнения, а серыми пунктирными линиями показаны ЭПР, полученные методом физической оптики [10]. Расчеты выполнены на суперкомпьюре Жорес [11]. Для частоты 32 ГГц решалась система с 1507200 неизвестными, а для частоты 64 ГГц – с 2006928 неизвестными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Colton D., Kress R. Integral methods in scattering theory. — New York: John Willey&Sons. — 1983. — 271 c.
2. Лифанов И.К., Ставцев С.Л. Интегральные уравнения и распространение звука в мелком море // Дифференциальные уравнения. — 2004. — 40 — 9 — С. 1256–1270.
3. Aparinov A.A., Setukha A.V., Stavtsev S.L. Low rank methods of approximations in an electromagnetic problem // Lobachevskii journal of mathematics. — 2019. — 40 — 11 — С. 1771–1780.
4. Stavtsev S. Low rank structures in solving electromagnetic problems // Lecture notes in computer science. — 2020. — 11958 LNCS — С. 165–172.
5. Tyrtyshnikov E. E. Incomplete cross approximation in the mosaic skeleton method // Computing. — 2000. — 64 — 4 — С. 367–380.
6. Aparinov A., Setukha A., Stavtsev S. Supercomputer modelling of electromagnetic wave scattering with boundary integral equation method // Communications in Computer and Information Science. — 2017. — 793 — С. 325–336.
7. Ставцев С.Л. Применение метода неполной крестовой аппроксимации к решению задач аэродинамики методом дискретных вихрей // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. — 2013. — 188 — С. 99–106.
8. Aparinov A.A., Setukha A.V., Parallel Implementation for Some Applications of Integral Equations Method // Lobachevskii journal of mathematics. — 2018. — 39 — 4 — С. 477–485.
9. Chen K. Matrix Preconditioner Techniques and Applications. — Cambridge: Cambridge University Press. — 2005. — 592 c.
10. Saez de Adana F., Gutierrez O., Gonzalez I., Catedra M.F., Lozano L. Practical Applications of Asymptotic Techniques in Electromagnetics. — London, Boston: Artech House. — 2011. — 231 c.
11. Zacharov I., et.al. Zhores - Petaflops supercomputer for data-driven modeling, machine learning and artificial intelligence installed in Skolkovo Institute of Science and Technology. arxiv preprint: 1902.07490

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ РАМАНОВСКОЙ СПЕКТРОСКОПИИ МОНОКРИСТАЛЛОВ НА ОСНОВЕ ВИСМУТА

К.И. Аринцына
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *ksenya.arintcyna@yandex.ru*
О.И. Марков, д.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *O.I.Markov@mail.ru*

В работе приводятся результаты экспериментального исследования методом комбинационного рассеяния монокристаллов на основе висмута. Проведено сравнение рамановских спектров и сделан предварительный анализ полученных результатов. Проведено исследование участка поверхности образца, содержащего дефекты.

Ключевые слова: спектроскопия комбинационного рассеяния, монокристаллы Bi, Bi-Sb, Bi-Sb-Te, Bi-Sb-Sn.

Основные методы спектроскопии, используемые для обнаружения колебаний в молекулах, основаны на процессах инфракрасного поглощения и комбинационного рассеяния. Они широко используются для получения информации о химических структурах и физических формах, для идентификации веществ по характерным спектральным картинам и для количественного определения вещества в образце. Образцы могут быть исследованы во всем диапазоне физических состояний; например, в виде твердых тел, жидкостей или паров, в горячем или холодном состоянии, в виде микроскопических частиц или в виде поверхностных слоев. Эти методы очень разнообразны и позволяют решать множество интересных и сложных аналитических задач. Рамановское рассеяние используется менее широко, чем инфракрасное поглощение, в основном из-за проблем с деградацией образца и флуоресценцией. Однако последние достижения в области приборостроения значительно упростили оборудование и уменьшили количество возникающих проблем. Эти достижения, наряду со способностью спектроскопии комбинационного рассеяния света исследовать водные растворы, образцы внутри стеклянных контейнеров и образцы без какой-либо подготовки, привели к быстрому росту применения метода. На практике современная рамановская спектроскопия проста, переменные параметры прибора немногочисленны и спектральные манипуляции минимальны. На этом фоне открываются широкие возможности рамановской спектроскопии для получения уникальной информации исследуемого вещества [1].

В данной работе рамановские спектры образцов исследовались с помощью конфокального рамановского микроспектрометра inVia Qontor Renishaw. Калибровка лазера осуществлялась по образцу кремния, имеющего пик на длине волны 520 нм. В данной задаче использовались краевые фильтры для погашения рэлеевского рассеяния от 50 $см^{-1}$ и от 100 $см^{-1}$, через которые проходит

только стоксова составляющая рассеянного света. Использование таких фильтров заметно уменьшает время интегрирования, но появляется заметное влияние флуоресценции. Все результаты проводились при угле падения = 90^0. Использовались лазеры 532нм и 785нм. Диаметр пятна лазера - 2 мкм. Все точки выбирались на «чистой» поверхности без дефектов.

Использовалась мощность 7 мВт, что составляла 1% от максимальной. При увеличении мощности появлялось темное пятно от лазера. Время интегрирования - 10 секунд.

При увеличении времени интегрирования увеличивается возможность попадания в спектр следов космических частиц. Следы удалялись вручную для ведения контроля за процессом.

1. Образец Bi

Получили 4 острых пика и аморфный пятый пик, однако при уменьшении интенсивности падающего луча остаются видны только первые два. «Горб» на правой части графика - это люминесценция от окисной пленки, однако ее заметное влияние проявляется, начиная с 400 $см^{-1}$ и не влияет на характеристические спектры образцов (рис.1).

В чистом висмуте наблюдаются два пика 72 и 99 $см^{-1}$, соответствующие 100% висмуту [2].

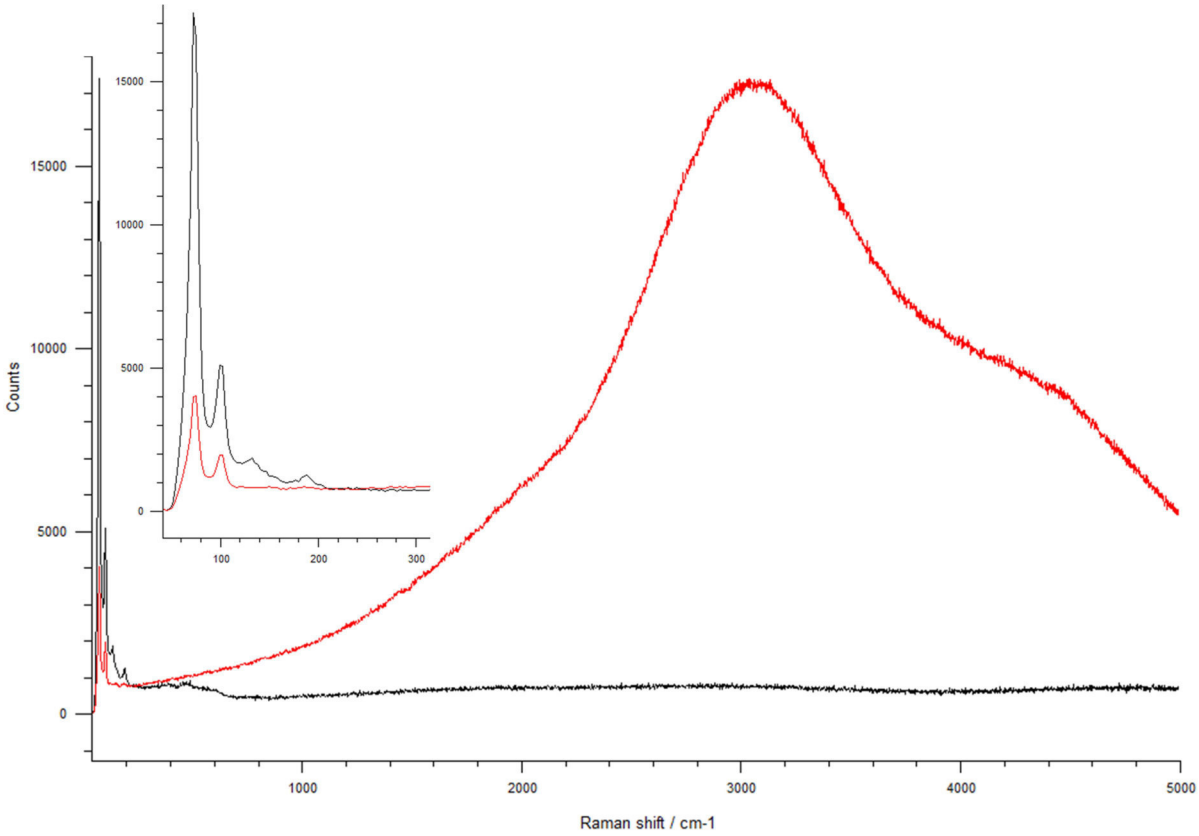


Рисунок 1 - Рамановский спектр образца Bi

2. Образец Bi-Sb

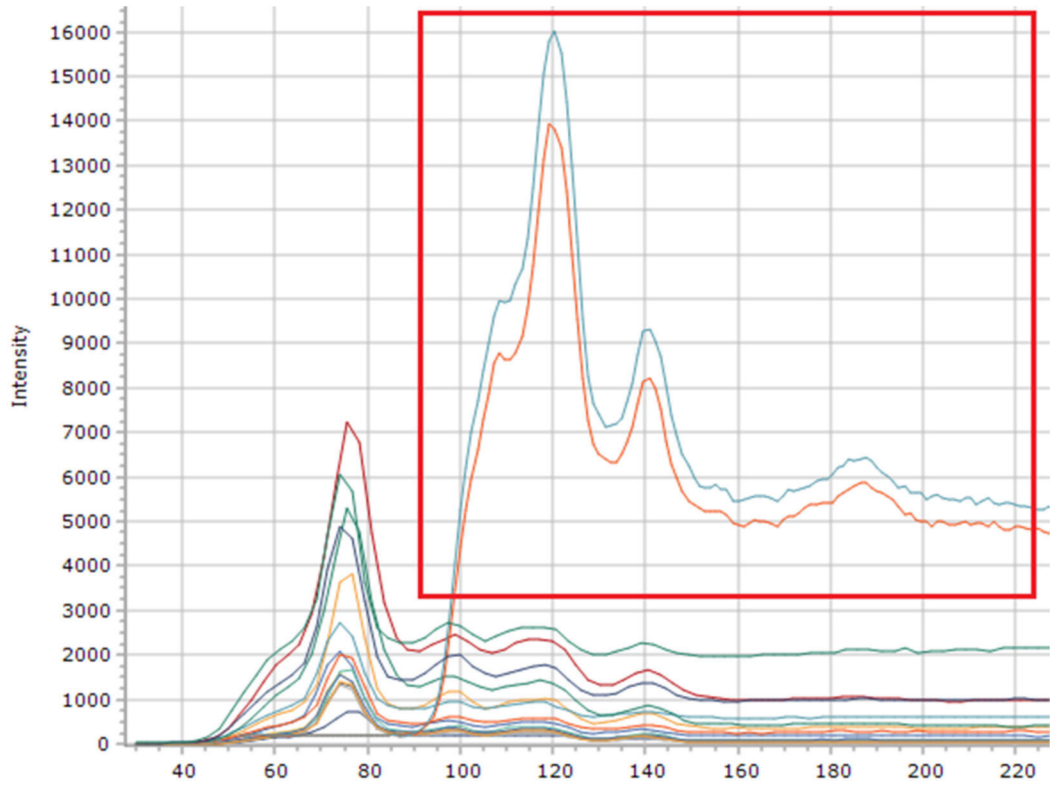


Рисунок 2 – Рамановский спектр образца Bi-Sb

На рисунке 2 представлены спектры образца Bi-Sb. Два верхних спектра сделаны с помощью лазера 785 нм и фильтром от 100 см$^{-1}$ (выделены красным квадратом на рисунке), все остальные – с помощью лазера 532 нм и фильтром от 50 см$^{-1}$.

В экспериментальных данных для образца Bi-Sb виден небольшой сдвиг для первого пика по сравнению с образцом Bi, что согласуется с данными, указывающими, что частоты мод чистого Bi медленно увеличиваются с добавлением Sb [3].

В кристалле висмут-сурьма наблюдаются кроме пиков 75 см$^{-1}$ и 98 см$^{-1}$ еще два пика 116 см$^{-1}$ и 140 см$^{-1}$, характерные для 100 % сурьмы (рис.3) [3].

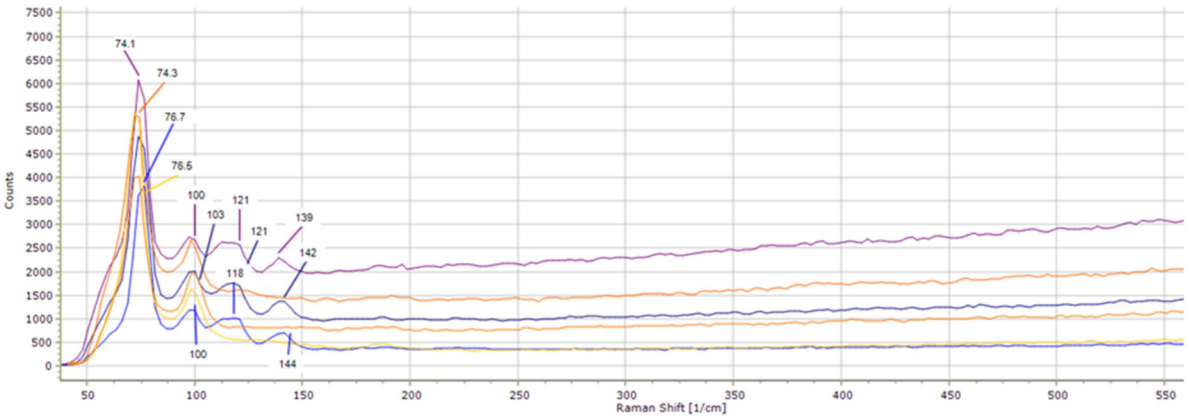


Рисунок 3 – Сравнение образцов Bi (синий и фиолетовый цвет)
и Bi-Sb (желтый и оранжевый цвет)

Из-за значительной разницы в интенсивности в исследовании с помощью лазера 785 нм пики на 113 $см^{-1}$ и 120 $см^{-1}$ не сливаются в один и явно различимы. Третий пик на 140 $см^{-1}$ остается на своем месте. Кроме того, появляется дополнительный пик на 187 $см^{-1}$.

Для образца Bi-Sb было сделано картирование участка поверхности (мощность 10%). Лазер представлял собой линию, разделенную на пиксели, которая «сканировала» поверхность. В результате был получен гиперспектральный куб, яркость которого напрямую зависит от интенсивности полученного спектра. Сопоставив с фотографией поверхности, можно сделать вывод, что интенсивность возрастает в трещинах (рис.4).

3. Образец Bi-Sb-Te

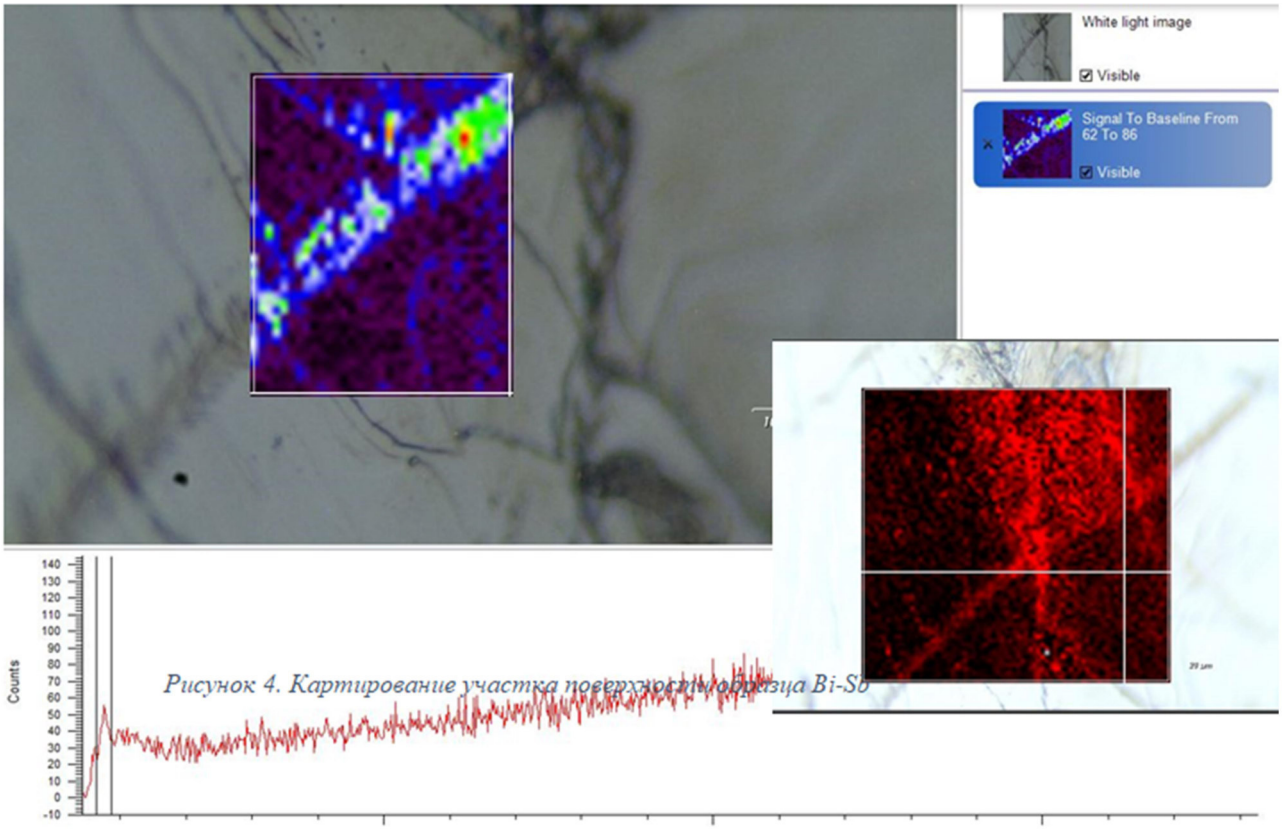


Рисунок 4 – Картирование участка поверхности образца Bi-Sb

Параметры измерения, применяемые для образцов Bi и Bi-Sb, для данного образца не подошли, поэтому была использована функция усреднения значений. Отсутствие возможности измерения рамановского спектра в точке может говорить о низкой плотности вещества по сравнению с предыдущими образцами.

Дополнительных пиков высокой интенсивности, характеризующих теллур, обнаружено не было. По сравнению с образцом Bi-Sb на спектрах Bi-Sb-Te видны сдвиги пиков влево, однако они могли появиться из-за использования различных параметров измерения. Пики в образце, содержащем теллур, более острые (особенно на 120 $см^{-1}$), кроме того, виден «порог» на 60 $см^{-1}$, который отсутствует в предыдущих образцах (рис.5).

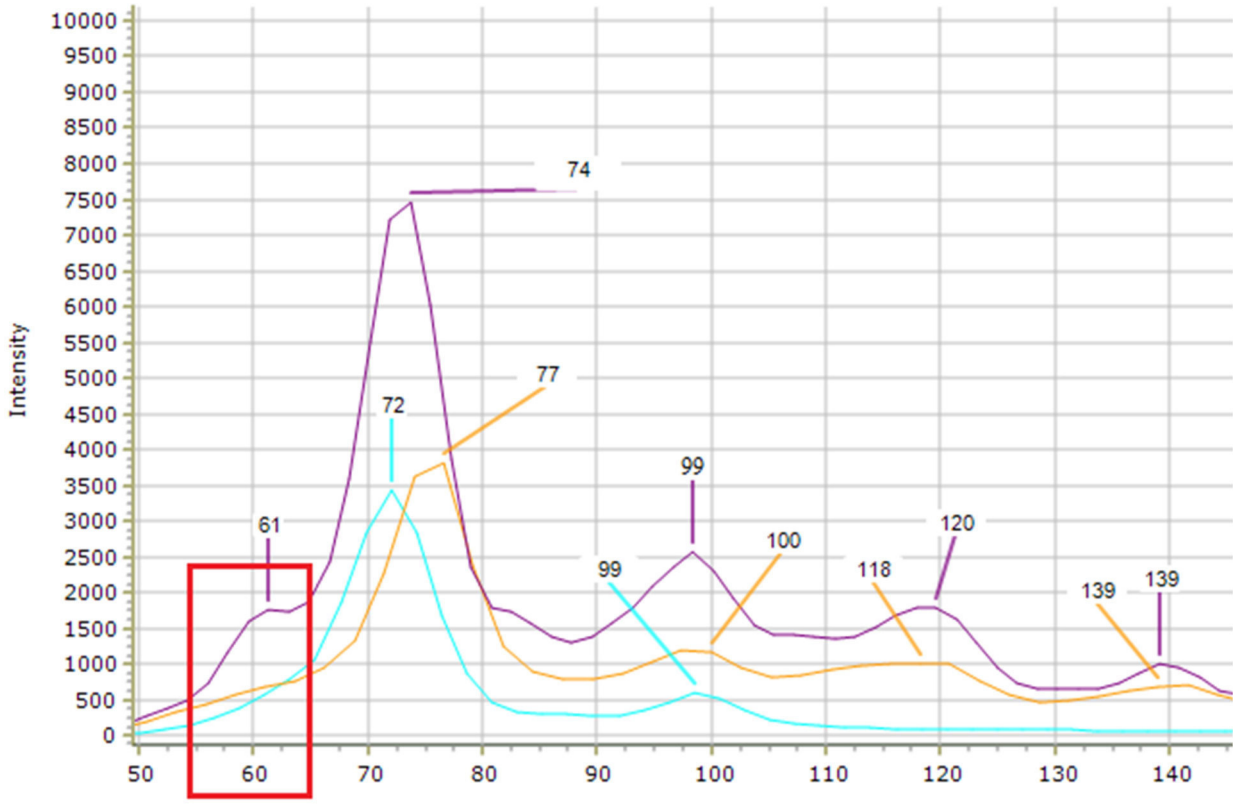


Рисунок 5 – Сравнение спектров. Bi (голубой цвет), Bi-Sb (оранжевый), Bi-Sb-Te (сиреневый)

4. Образец Bi-Sb-Sn

Из-за слабого рамановского сигнала, спектры снимались с помощью функции Streamline, усредняющей полученные значения.

Положение всех пиков высокой интенсивности в спектрах образцов Bi-Sb-

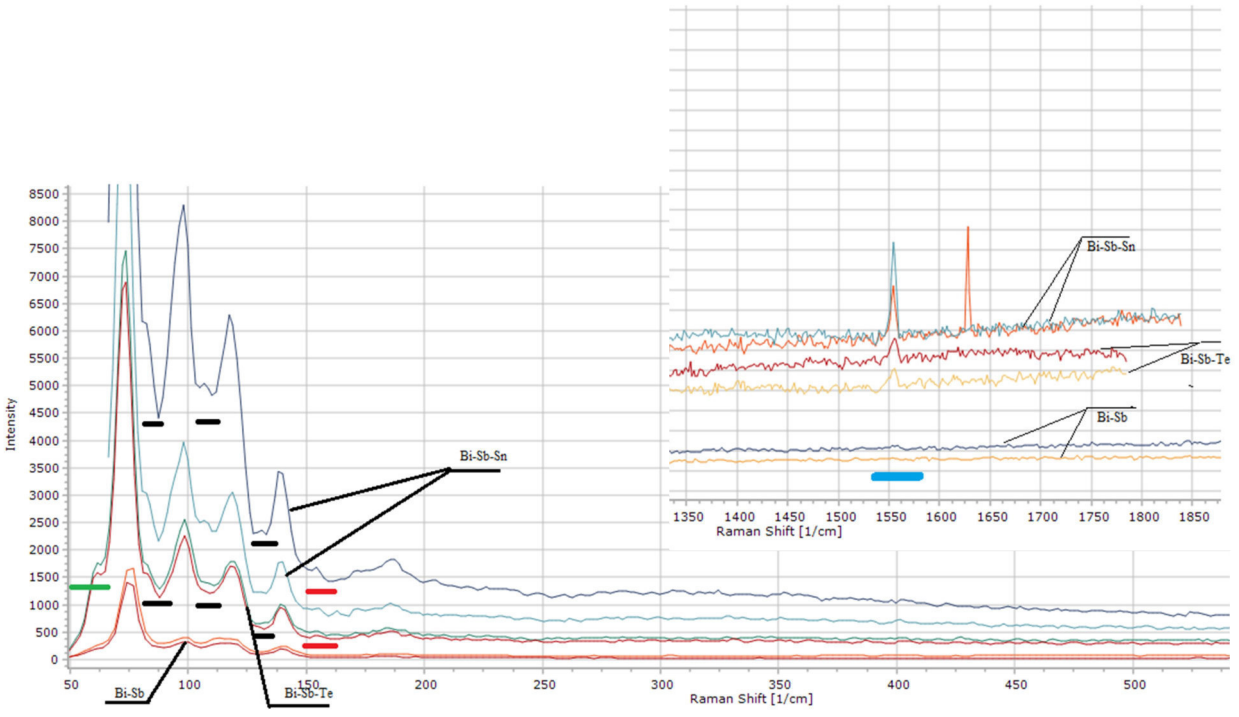


Рисунок 6 - Сравнение спектров Bi-Sb, Bi-Sb-Te, Bi-Sb-Sn

Sn и Bi-Sb-Te совпадают (рис. 6). Между пиками в образце Bi-Sb-Sn имеются выступы, которых в образце Bi-Sb-Te нет (на рисунке подчеркнуты черными линиями). Возможен пик на 155см$^{-1}$ в Bi-Sb-Sn (отмечен красной линией), в образце Bi-Sb-Te он отсутствует. Спектры в образце Bi-Sb-Sn получились только от 65 см$^{-1}$, поэтому не видно, есть ли выступ в диапазоне от 50 до 65 см$^{-1}$, имеющийся в спектре образца Bi-Sb-Te (отмечен зеленой линией).

Четких характерный линий, отличающих образцы Bi-Sb-Te и Bi-Sb-Sn, не найдено. Отличие спектров этих образцов от образца Bi-Sb состоит в присутствии пика небольшой интенсивности на 1556 см$^{-1}$ (на рисунке подчеркнут синей линией).

Полученные результаты говорят о возможности исследования с помощью рамановской спектроскопии процентного содержания элемента в образце, содержания в нем примесей очень малого объема и поверхностных дефектов. Для получения более подробных заключений, необходимы дальнейшие исследования с расширением спектрального диапазона и увеличением мощности падающего лазерного луча.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ewen S., Dent G. Modern Raman spectroscopy : a practical approach. - 2005. – 3-5 p.
2. Jingjing Li. Ultrafast and incoherent raman studies of optical phonons of different symmenhtes in Sb, Bi, Bi_2Te_3 and Bi_2Se_3. A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Physics) in The University of Michigan. - 2012. - 119 p
3. Zitter R. N. and Watson P. C. Raman and x-ray spectra of single-crystal Bi-Sb alloys, Physical Review B, 1974

SYTNHESIS OF THERMOELECTRIC COMPOSITE BASED ON Bi_2Te_3 MATRIX WITH MAGNETIC FILLER

A.E. Vasil'ev
Belgorod State University
e-mail: *vasil'ev@bsu.edu.ru*
M.N. Yaprintsev, candidate of physics and mathematics
Belgorod State University
e-mail: *yaprintsev@bsu.edu.ru*
O.N. Ivanov, doctor of physics and mathematics
Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov
e-mail: *olniv@mail.ru*
M.V. Zhezhu
Belgorod State University
e-mail: *zhezhu@bsu.edu.ru*
E.N. Yapryntseva
Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov
e-mail: *yaprintseva@bstu.edu.ru*

1. Introduction

Developing the bulk micro- and nanocomposites containing a thermoelectric material as matrix with different filler inclusions is fruitful and promising way to improve thermoelectric performance of the matrix thermoelectric material [1]. Several mechanisms can simultaneously be involved to vary the thermoelectric properties (specific electrical resistivity, ρ, Seebeck coefficient, S, and thermal conductivity, k) of the composite. In turn, these properties govern the thermoelectric figure-of-merit, $ZT=(S^2/\rho)kT$, where T is absolute temperature. The inclusions themselves can act as scattering centers for electrons and phonons affecting ρ and k, respectively, whereas matrix/filler interfaces can result in S increase via electron energy filtration effect. Resulted enhancing in ZT of the bulk thermoelectric composites is crucially dependent on material, size and concentration of the filler inclusions. Applying the metallic inclusions possessing ferro- or antiferromagnetic ordering allows implementing new thermoelectromagnetic effects, which can additionally improve the thermoelectric properties of the bulk composites [2, 3].

2. Materials and methods

2.1 Materials

High pure compounds Bi_2O_3, SeO_2, TeO_2, $Ni(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$, KOH, ethylene glycol, hydrazine hydrate ($N_2H_4 \cdot H_2O$), acetone, ethanol were taken without any purifications. All manipulations were carried out with standard laboratory equipment and a magnetic stirrer.

2.2 Matrix Bi_2Te_3 synthesis

The simple polyol method was used to synthesize starting Bi_2Te_3-matrix. As a common procedure, the high pure precursors (Bi_2O_3, SeO_2, TeO_2), were taken without any purifications, in a stoichiometric proportion. Then the reagents were dis-

solved in ethylene glycol, with some addition of alkaline agent (KOH) for controlling pH-value. The obtained solution transferred to a round-bottom flask and heated to boiling point. After evaporation of water impurity, the flask with solution then sealed with a reflux and maintained for 4 h at 458 K. The resulted dark suspension was cooled to room temperature. The powder was purified by filtration and washing for 3 times with ethanol and acetone. Then, the powder was dried in argon atmosphere at 523 K for 2 hours.

2.3 Ni nanoparticles synthesis (filler)

In a standard methodic used in, 5 g $Ni(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$ was dissolved in 400 ml ethylene glycol. Subsequently, 10 g KOH was added into the solution. The mixture was heated to 353 K under vigorously stirring to homogeneity. Then the resulted sol was cooled to room temperature. Hydrazine hydrate was slowly added follow. The reaction mixture heated to 373 K and maintained to 1 h to complete the reduction process from Ni^{2+} to Ni^0. The obtained powder was collected by strong neodymium magnet and washed with ethanol and acetone to remove organic impurities.

2.4 Bulk nanocomposite

To produce bulk nanocomposites with different amount of filler the as-prepared powders of Bi_2Te_3 and Ni were mixed in planetary mill for 30 min to homogeneous mixture. The filler content was changed from 0 to 10 wt%.

The powders mixture was further used to compact bulk samples by SPS in graphite mold at 573 K and 40 MPa uniaxial pressure for 5 min.

2.5 Characterization

The density of the bulk materials, measured by Archimed method, was estimated to be ~95%.

Morphology and size of each component of the composite were attested by transmission electron microscopy (Jeol 2100 microscope).

Crystal structure and phase content were determined by X-Ray diffraction method (Ultima IV diffractometer).

Microstructure of the bulk samples were observed by scanning electron microscopy (Quanta 600 microscope). Energy dispersive X-ray spectroscopy (EDS) was used to estimate Ni content from areas of the bulk samples.

3. Results and discussion

3.1 Ni-powder characterization

According to XRD analysis, the sintered powder is single-phase and the patterns of the diffractogram exactly corresponded to cubic phase of metal Ni. XRD patterns of them presented in Figure 1 (a).

The TEM image is shown in Figure 1 (d). The morphology of the Ni particles was presented by irregularly shaped agglomerate nanoparticles with an average size of agglomerate ~190 nm.

3.2 Matrix characterization

The phase composition of the matrix was defined by XRD analysis. Diffraction peaks showed in Figure 1 (b) exactly indexed as a pure Bi_2Te_3-phase with *R3m* symmetry group without other impurities.

The particles of the powder studied by TEM were hexagonal shaped and highly crystalline with a size 200 nm (Figure 1 (e)).

3.3 Composite characterization

All of the bulk composites have a similar XRD image and microstructure. For example, XRD picture (Figure 1 (c)) Bi_2Te_3 with 10wt% Ni filler shows that SPS compacted bulk sample was consisted of matrix and filler phase without any visible structure changes in each phase.

The SEM-image taken from the fractured surfaces showed in Figure 1 (f). The bulk samples have disordered grain structure with an average diameter grain size of ~ 400 nm and 50 nm thickness. The filler was disturbed uniformly throughout the volume (gray areas showed in the SEM picture). The size was extracted from histograms of the grain size distribution. One can see, the growth of grains occurred during the fabrication of material consisting of the starting nanosized powder.

The EDS analysis showed that Ni detected in each phase area. This fact indicates that Ni partially dissolved in matrix phase.

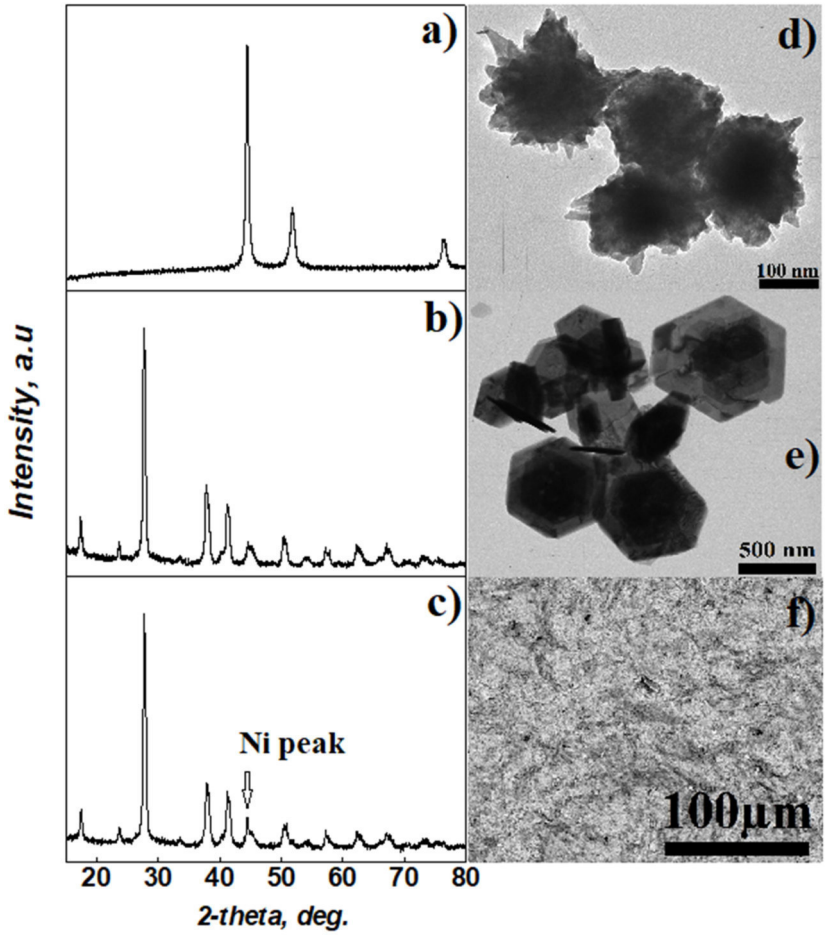


Figure 1 - The XRD patterns of the (a) Ni powder, (b) Bi_2Te_3 and composite (c) Bi_2Te_3 with 10wt% Ni; TEM pictures of the Ni(d) and Bi_2Te_3(e) powders; SEM picture from fracture surface of the composite

4. Conclusion

Finally, the fine nanocomposites were successfully prepared by combination of soft chemistry and ball milling method. The bulk samples are completely ready to measurement their thermoelectric properties.

Acknowledgments

This work was also financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation under project No 0625-2020-0015. All of studies were carried out by the scientific equipment of joint research centre "Technologies and Materials" at the Belgorod State University.

REFERENCES

1. W. Liu, X. Yan, G. Chen, Z. Ren. Recent advances in thermoelectric nanocomposites // NanoEnergy. - 2012. – No 1. - P. 1: 42-49.
2. W. Zhao, Z. Liu, P. Wei, Q. Zhang, W. Zhu, X. Su, X. Tang, J. Yang, Y. Liu, J. Shi, Y. Chao, S. Lin and Y. Pei. Magnetoelectric interaction and transport behaviours in magnetic nanocomposite thermoelectric materials // Nature Nanotech. – 2017. - No 12. – P. 55-61.
3. W. Zhao, Z. Liu, Z. Sun, Q. Zhang, P. Wei, X. Mu, H. Zhou, C. Li, S. Ma,D. He, P. Ji, W. Zhu, X. Nie, X. Su, X. Tang, B. Shen, X. Dong, J. Yang, Y. Liu, J. Shi. Superparamagnetic enhancement of thermoelectric performance // Nature. – 2019. – Vol. 549 – P. 247-252.

УДК 538.95

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА CVD ZnSe НА ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ

Е.М. Гаврищук, д.х.н., проф.
Институт химии высокочистых веществ Российской АН
М.А. Мусаев, д.ф.н., проф.
Азербайджанский Университет Нефти и Промышленности
e-mail*: m_musaver@yahoo.com*
И.И. Аббасов, к.ф.-м.н., доц.
Азербайджанский Университет Нефти и Промышленности
e-mail: *ibrahimabbasov179@gmail.com*
Н.Ш. Алиев, к.ф-м.н., доц.
Институт Радиационных Проблем НАНА
e-mail: *nabi.aliyev.1958@mail.ru*
Дж.И. Гусейнов, д.ф.н., доц.
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
e-mail: *cahangir.adpu@mail.ru*
С.М. Кадымзаде
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
e-mail: *qedimzadesevinc@gmail.com*
Р.Ш. Рагимов, к.ф.-м.н., доц.
Бакинский Государственный Университет
e-mail: *rehim@rehimli.info*

Исследованы температурные и частотные зависимости удельной электропроводности полукристаллического CVD ZnSe в переменном электрическом поле в области T=20-180 ℃ и f = 25 -10^6 Гц и определено, что проводимость имеет активационный характер. Проанализированы температурные и частотные зависимости тангенса угла диэлектрических потерь действительной и мнимой частей комплексной диэлектрической проницаемости. Установлено, что в этом кристалле имеется механизм спонтанной поляризации, обусловленный тепловым движением.

Ключевые слова: селенид цинка, электропроводность, переменное поле, диэлектрическая проницаемость, диэлектрические потери.

1. Введение

Селенид цинка является важным и многообещающим составным полупроводниковым материалом с очень широким применением в оптических и электронных устройствах, таких как сине-зеленые лазерные диоды (LD), белые светоизлучающие диоды (LED), оптические управляемые переключатели, настраиваемые лазерные источники среднего ИК диапазона для приложений дистанционного зондирования, фотоэлектрические и фотоэлектрохимические устройства [1,2]. Наибольший интерес селенид цинка представляет как материал, прозрачный в инфракрасной области спектра, и прежде всего для изготовления оптических элементов высокомощных технологических лазеров на углекислом газе, CO_2 – лазеров. При возбуждении электромагнитными волнами разной

длины, заряженными частицами, теплом и другими методами кристаллы ZnSe проявляют интенсивные люминесцентные свойства в видимой и ИК области спектра [1-4].

Одной из наиболее важных физических величин, которая описывает электрические и оптические свойства твердых тел является диэлектрическая проницаемость.Всестороннее изучение диэлектрических свойств сопровождается обширной информацией о молекулярной структуре и межмолекулярных взаимодействиях материалов, а точное моделирование частотно-зависимой диэлектрической проницаемости имеет большое значение в исследовании от дальнего взаимодействия Ван-дер-Ваальса для твердых тел и адсорбции [5]. Коэффициент усиления полупроводниковых лазерных структур напрямую выражается через диэлектрическую проницаемость, поэтому знание закона ее пространственной дисперсии важно для правильного расчета параметров таких структур. Информация о температурной и частотной зависимости действительной (ε') и мнимой (ε'') частей комплексной диэлектрической проницаемости (ε), тангенсе угла диэлектрических потерь (tgδ), электропроводности при постоянном (σ_{dc}) и переменном (σ_{ac}) электрических полях, а также о закономерностях изменения этих параметров в процессе установления максимально возможной поляризации очень важна при проектировании и определении эффективности материалов в технических применениях в области оптоэлектронных систем [5]. В данной работе исследованы зависимости указанных выше диэлектрических параметров для полукристаллического CVD ZnSe от частоты и температуры.

2. Методика эксперимента

Образец для исследования, был получен методом химического осаждения из газовой фазы (Chemical Vapour Deposition, метод CVD) с использованием в качестве исходных реагентов цинка и смеси газообразного селеноводорода [2]. CVD-метод наиболее перспективен для получения образцов ZnSe с высокими эксплуатационными характеристиками, так как эти образцы обладают низким содержанием примесей и собственных дефектов. Полукристаллический CVD селенид цинка, получаемый методом химического осаждения из паров, с размером зерна 50-70 мкм характеризуется высокой пропускающей способностью в диапазоне 0,5-15 мкм и низким поглощением при 10,6 мкм [1-4,6].

Измерение диэлектрических параметров исследуемого образца проводилось с помощью цифровых измерителей иммитанса Е7-20 (частота $25{-}10^6$ Гц). Этот прибор, работающий по мостовой схеме, позволяет проводить измерение модуля полного сопротивления цепи $|Z|$, ёмкости C и угла сдвига фаз между током и напряжением в широком диапазоне частот. Для измерения были изготовлены образцы из поликристаллических CVD-ZnSe кристаллов в виде плоских конденсаторов и в качестве обкладок была использована серебряная паста.

Диапазон частот переменного электрического поля составлял 25 -10^6 Гц. На образец подавалось напряжение 1 В. На основе выражения для электроемкости плоского конденсатора $\varepsilon' = \frac{Cd}{\varepsilon_0 S}$ и связью между действительной и мнимой частями диэлектрической проницаемости $\varepsilon''=\varepsilon' tg\delta$ определялись значения $\varepsilon' и\ \varepsilon''$, а величина электропроводности σ как $\sigma = \frac{S}{Rd}$, где R (Ом) - сопротивление, d-толщина образца, S-площадь контакта [5].

3. Результаты и их обсуждение

В работе изучены температурные зависимости удельной электропроводности $\sigma(T)$ поликристаллического CVD-ZnSe при различных значениях частоты переменного электрического поля. Электропроводность рассчитана по измеренным значениям емкости *C* и тангенса угла диэлектрических потерь tgδ при использовании соотношения $\sigma = \omega C\text{tg}\delta$, где $\omega = 2\pi f$. Тот факт, что логарифм удельной электропроводности $(lg\sigma)$ линейно зависит от обратной температуры $(\frac{10^3}{T})$, дает основание говорить о том, что проводимость имеет активационный характер [6]. Исследования показывают, что энергия активации процесса проводимости в некоторой степени зависит от частоты приложенного поля и изменяется в интервале 0.05−0.15 эВ. По мере увеличения частоты приложенного переменного электрического поля энергия активации уменьшается.

Исследована частотная зависимость $ac-$ проводимости поликристаллических кристаллов CVD-ZnSe при различных температурах. В исследованном температурном диапазоне электропроводность CVD ZnSe сначала остается постоянной в низкочастотном диапазоне, а затем растет с увеличением частоты. На рис.1 представлена частотная зависимость удельной электропроводности CVD-кристаллов ZnSe в двойном логарифмическом масштабе при температурах 1-T=20℃, 2-T=50℃, 3- T=80℃, 4-T=100℃, 5-T=120℃, 6-T=150℃, 7-T=180℃. Как видно из рисунков, при всех температурах на зависимости электропроводности от частоты приложенного переменного поля наблюдаются линейные участки, что непосредственно свидетельствует о степенной зависимости электропроводности от частоты. Анализ показывает, что в исследуемых образцах в диапазоне частот 25-10^6 Hz с ростом частоты электропроводность увеличивается по закону

$$\sigma \sim \omega^s \qquad (1)$$

Степенная частотная зависимость электропроводности указывает на наличие неомического переноса заряда. Эта релаксационная проводимость часто связана с электронным прыжком через локализованные состояния в присутствии фононов. Из частотной зависимости электропроводности определен показатель степенной зависимости. Было установлено, что в частотном диапазоне исследования значение показателя степенной зависимости в высокотемпера-

турной области больше, чем в низкотемпературной, и в обеих областях его значение меньше единицы ($s < 1$). Например, при относительно низких температурах (20−120 ℃) в интервале частот $3 \cdot 10^4$–10^6 Гц степенной показатель (s) имеет значения 0.22−0.41; а при температуре 375 K той же частоты s изменяется в области 0.39−0.56.

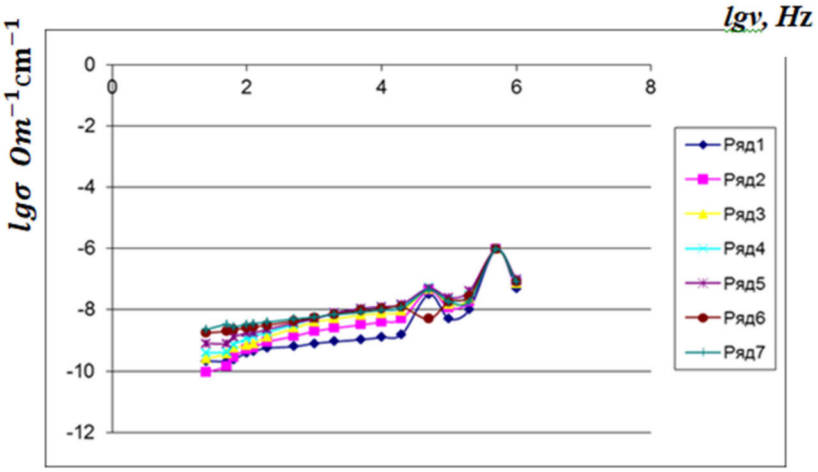


Рисунок 1 – Частотная зависимость электропроводности поликристаллического CVD ZnSe: 1-20℃, 2-50℃, 3- 80℃, 4-100℃, 5-120℃, 6-150℃, 7-180℃

Поскольку поляризация диэлектриков зависит от частоты переменного электрического поля, приложенного к образцу, диэлектрическая проницаемость также должна иметь частотную зависимость. Зависимость диэлектрической проницаемости от частоты f называют дисперсией диэлектрической проницаемости. Важная роль отводится анализу дисперсии диэлектрической проницаемости при исследовании свойств электронных и фононных процессов в полупроводниковых соединениях. Исследование зависимости диэлектрической проницаемости от частоты внешнего поля позволяет выявить механизмы поляризации в исследуемом кристалле.

На рис. 2 представлены графики частотной зависимости действительной составляющей комплексной диэлектрической проницаемости ε' кристаллов CVD ZnSe при различных температурах. Как видно из рисунка в области низких частот ε' кристаллов CVD ZnSe остается практически постоянной и имеет наибольшее значение, приближаясь к статической диэлектрической проницаемости. Согласно полученным экспериментальным результатам, с ростом частоты внешнего поля действительная составляющая комплексной диэлектрической проницаемости уменьшается. Наиболее резкая дисперсия наблюдалась при сравнительно низких частотах (25-10^3 Hz). Так, с увеличением частоты от 25 Hz до 1 kHz значение ε'от $\varepsilon' = 138$ уменьшается до $\varepsilon' = 15$. Разница составляет Δε'=123, а их соотношение равно ~9 . При всех температурах, в диапазоне частот $10^3 - 10^6$ Hz действительная составляющая комплексной диэлектрической проницаемости слабо зависит от частоты. По мере увеличения темпера-

туры частотная дисперсия ε′ усиливалась, и для температуры T=180 ℃ наблюдалась очень сильная зависимость ε′ от частоты (рис. 2, кривая 7).

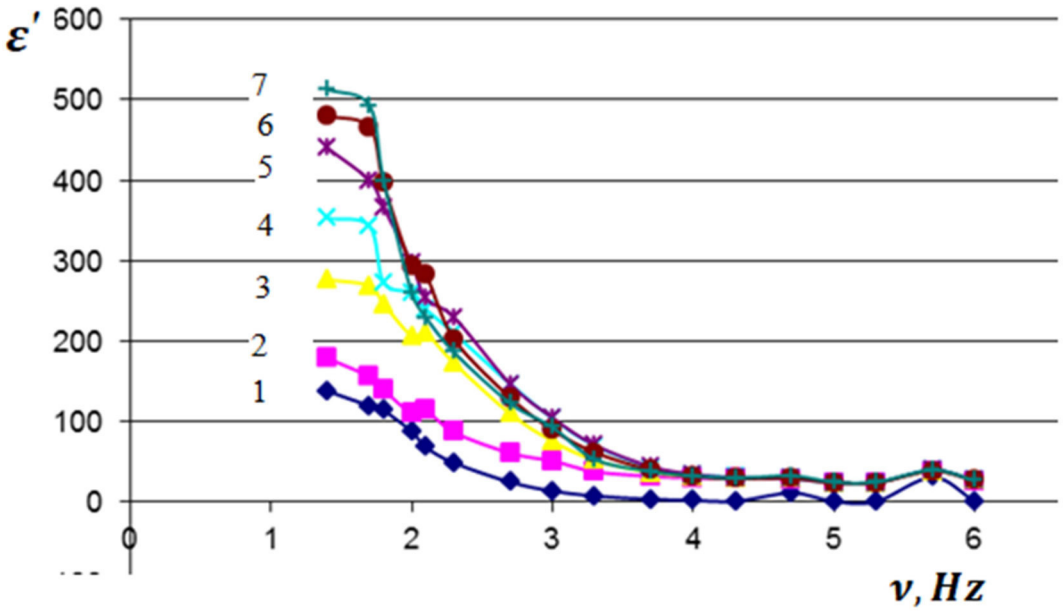


Рисунок 2 – Частотная зависимость действительной части диэлектрической проницаемости CVD ZnSe: 1-20℃, 2-50℃, 3- 80℃, 4-100℃, 5-120℃, 6-150℃, 7-180℃.

Когда кристаллический материал подвергается воздействию переменного электрического поля, изменяются формы электронных облаков вокруг атомов и определенная часть электрической энергии превращаясь в тепловую, рассеивается. Значение мнимой части комплексной диэлектрической проницаемости (ε'') представляет собой потери в материале при изменении вектором электрического поля своего направления с течением времени. Мнимая часть диэлектрической проницаемости, которая является мерой потерь энергии в материалах, также называется коэффициентом потерь. Диэлектрические потери - это часть энергии электрического поля, рассеиваемая в диэлектрике в виде тепла Джоуля-Ленца из-за наличия активной составляющей поляризационного тока. Способность материала поглощать энергию внешнего электрического поля характеризуется диэлектрическими потерями.

Мнимая и действительная части комплексной диэлектрической проницаемости связаны между собой соотношением $\varepsilon'' = \varepsilon' tg\delta$. Спектральные зависимости мнимой составляющей комплексной диэлектрической проницаемости (ε'') кристаллов CVD ZnSe при различных температурах приведены на рис. 3. Как видно из графиков, с ростом частоты мнимая часть диэлектрической проницаемости монотонно уменьшается, но значение ε'' всегда остается больше нуля ($\varepsilon'' > 0$). С ростом частоты в низкочастотном интервале (25−1000 Hz) мнимая часть диэлектрической проницаемости уменьшается быстрее, чем в высокочастотном интервале ($10^3 - 10^6$ Hz). В низкочастотном интервале, как правило, значение мнимой составляющей намного больше, чем значение действительной части диэлектрической проницаемости.

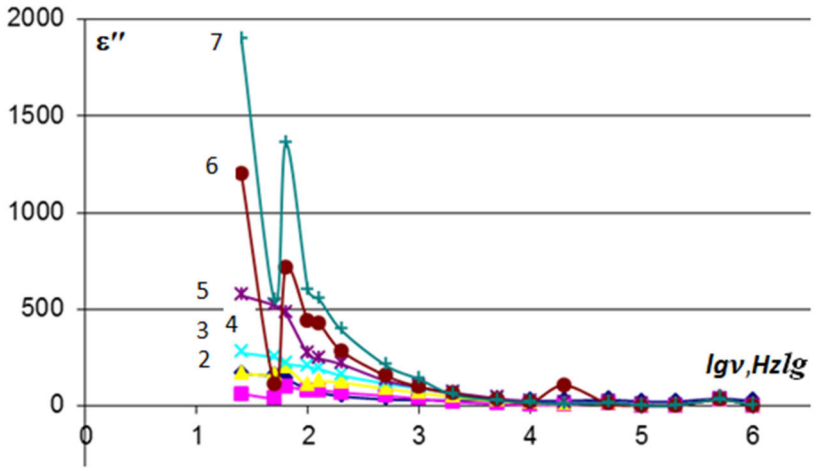


Рисунок 3 – Частотная зависимость мнимой части диэлектрической проницаемости CVD ZnSe: 1-20℃, 2-50℃, 3- 80℃, 4-100℃, 5-120℃, 6-150℃, 7-180℃

Диэлектрические потери, которые определяются не только кристаллической структурой, но и составляющими элементами, типом и количеством примесей, являются одним из важных характеристик материалов и функционально зависят от частоты приложенного внешнего электрического поля. Так как твердые вещества обладают различными кристаллическими сингониями и составными компонентами, в них возможны разнообразного вида диэлектрические потери.

Известно, что в случае параллельного соединения C_R и R тангенс угла диэлектрических потерь описывается соотношением [8]

$$tg\delta = \frac{I_a}{I_r} = \frac{I}{\omega C_R R} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} \qquad (2)$$

где C_R – электроемкость, R – сопротивление образца, I_a – активный ток, I_r – реактивный ток, ε_0 – электрическая постоянная. Как следует из уравнения (2) при низких частотах тангенс угла диэлектрических потерь в основном обусловлен электропроводностью и убывает с ростом частоты, так как ток емкостной проводимости возрастает с ростом частоты, а сквозная проводимость от частоты не зависит.

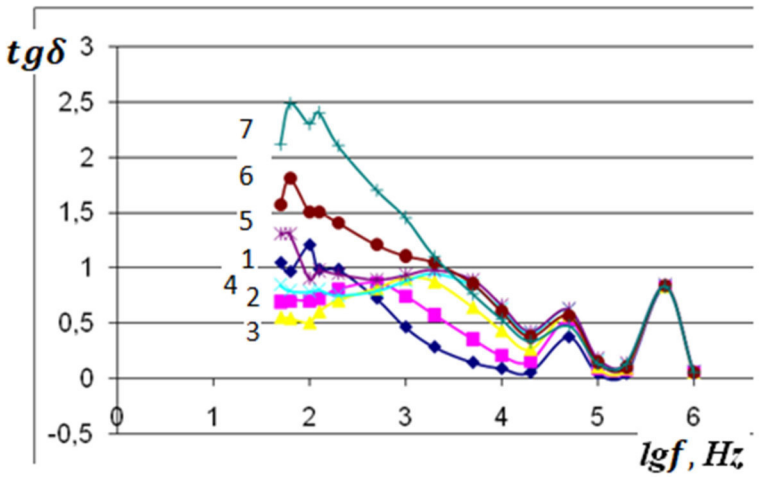


Рисунок 4 – Частотная зависимость тангенса угла диэлектрических потерь в CVD ZnSe: 1-20℃, 2-50℃, 3- 80℃, 4-100℃, 5-120℃, 6-150℃, 7-180℃

На рис. 4 показаны зависимости tg δ от частоты f в переменном токе при различных температурах для кристаллов CVD ZnSe. Для tgδ характерно снижение значений при увеличении частоты. Характерной особенностью зависимости tg δ(f) в CVD ZnSe является наличие максимума при частоте f = $2 \cdot 10^4$Гц. Наблюдаемые на рис. 4 релаксационные максимумы могут быть связаны со спонтанной поляризацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Qi, X. Zhang, M. Jiang, Q. Wang, D. Lia, Brief Communications Optical Constants Of Zinc Selenide In Visible And Infrared Spectral Ranges // Journal of Applied Spectroscopy, 2017, Vol. 84, No. 4, pp. 679-682.
2. Feng B., Cao J., Han D., Yang S., Yang J. Study on growth mechanism and optical properties of ZnSe nanoparticles // J. Mater. Sci: Mater. Electron. Journal of Materials Science: Materials in Electronics 2015. no.26. P. 3206.
3. Кульчицкий Н., Наумов А., Семенов В. Современные оптоэлектронные приборы на основе селенида цинка фотоника // Фотоника. 2015. № 6. С.90.
4. Новиков В.П., Гаврищук Е.М., Мазавин С.М., Тимофеев О.В. Крупногабаритный мультиспектральный материал селенида цинка, полученный методом CVD для диапазона 0,5 – 14 микрон // Контенант, Научно-Технический Журнал .2016. № 1. С. 109
5. Афанасьев М.С., Чучева Г.В., Набиев А.Э., Гусейнов Дж.И., Алиев Н.Ш. Диэлектрические свойства сегнетоэлектрических пленок Ba0.8Sr0.2TiO3 на переменном токе // THE CAUCASUS. ECONOMIC AND SOCIAL ANALYSIS JOURNAL OF SOUTHERN CAUCASUS, (2019) T: 5, №: 32, с. 115-119.
6. Гаврищук Е.М., Бабаев С.С., Мусаев М.А., Аббасов И.И., Гусейнов Дж.И. Комбинационное рассеяние света в кристаллах CVD ZnSe / Материалы V Международной научной конференции «ОПТИКА НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР 2019», Могилев 2019, с. 185-191.
7. В. И. Томилин, Н. П. Томилина, В. А. Бахтина Физическое материаловедение. Часть 1, Пассивные диэлектрики, Красноярск СФУ, 2012, 281 с.
8. Физика активных диэлектриков. Учебное пособие / авт.-сост. Поплавко Ю.М., Переверзева Л.П., Раевский И.П. Ростов н /Д: Изд-во ЮФУ, 2009. – 480 с.

УДК 621384

СФЕРИЧЕСКАЯ АБЕРРАЦИЯ ПЛАЗМЕННОЙ ЛИНЗЫ, ФОРМИРУЮЩЕЙ ИОННЫЕ ПУЧКИ

И.С. Гасанов, С.А. Алиев, Г.Х. Мамедова, И.И. Гурбанов, Е.М. Акбаров, Ф.Е. Мамедов, А.Х. Керимова
Институт физики. НАНА
e-mail: *sabir.eliyev.1950@mail.ru*

Целью данного исследования является экспериментальный выбор саморегулирующегося режима работы линзы Габора, способного фокусировать ионные пучки с помощью электромагнитного поля посредством плазменной оптики. Исследованы возможности достижения более плотного распределения тока за счет уменьшения аберрации линзы. Исследованы также причины сферической аберрации плазменных линз с высокой оптической силой, обсуждаются методы ее уменьшения и устранения. Показано, что оптимизированная плазменная линза может использоваться в ионно-оптических исследованиях и технологиях обработки поверхности.

Ключевые слова: ионный пучок, плазменная оптика, плазменно-ионная технология.

Введение

Вопросы получения, управления и переноса на большие расстояния интенсивных ионных пучков остаются актуальными. Ионные пучки широко используются в научных исследованиях, технике, в том числе при обработке поверхностей. В устройствах типа «Токамак» можно дополнительно подогревать термоядерные реакции, вводя интенсивные ионные пучки с большой плотностью. Плазменные линзы обладает высокой оптической силой среди линз для фокусировки осевых пучков [1]. Ее называют линзой Габора или линзой с пространственным зарядом. Оптическая сила линзы Габора в два раза превышает оптическую силу электростатической линзы и в четыре раза больше оптической силы магнитной линзы, и она может фокусироваться интенсивные ионные пучки, поскольку объемный заряд ионов не изменяет распределение потенциала в линзе.

Свойства плазменной линзы рассматриваются в контексте оптики плазмы, которая является неотъемлемой частью динамики плазмы. Электрическое поле внутри линзы создается пространственным зарядом электронов, накопленных в электромагнитной ловушке. Поскольку электрическое поле перпендикулярно магнитному полю, силовые линии магнитного поля имеют постоянный потенциал [2]. Здесь силы, действующие на ионы, только кумулятивные. По этой причине плазменные линзы используются для фокусировки и переноса интенсивных и высокоэнергетических пучков ионов. Аберрации (искажения) линз в оптике света и частиц являются одной из основных недостатков его характеристик. Качество фокусировки напрямую связано с аберрациями линз. Наибольшее влияние на плазменные линзы оказывает сферическая аберрация [3]. Целью данной работы является экспериментальный выбор саморегулирующегося режима работы линзы Габора, способного фокусировать

ионные пучки с помощью электромагнитного поля посредством плазменной оптики.

Экспериментальная часть

Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 1. Ионы из источника – дуаплазмотрона извлекаются, разгоняются и проходят через линзу. Вторичные электроны, вылетевшие из стенки компенсатора за счет ионно-электронной эмиссии, накапливаются в линзе и создают радиальное электрическое поле. Пучок ионов, проходящий через линзу, фокусируется. Радиальное распределение плотности тока фиксируется диафрагмой, а ток пучка измеряется посредством коллектора.

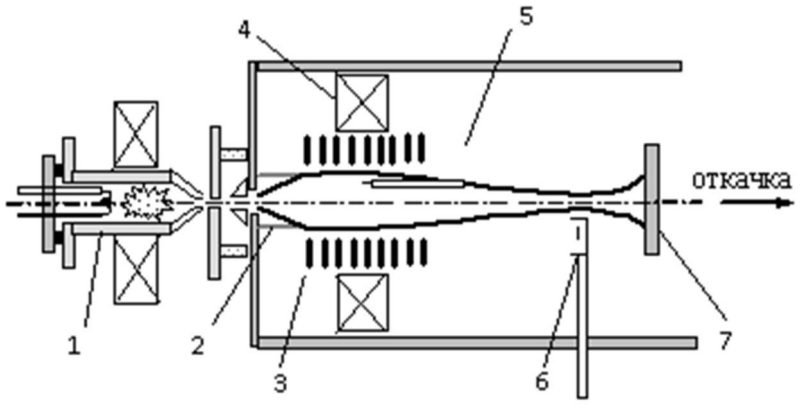


Рисунок 1 – Схема экспериментального устройства:
1-ионный источник - дуаплазматрон; 2-компенсатор; 3- линза;
4-постоянный магнит; 5- электростатический зонд; 6-диафрагма; 7-коллектор.

Магнитное поле создается постоянным магнитом, а линза расположена так, что магнитное поле полностью ее покрывает. Распределение потенциала на электродах линзы контролируется извне. Потенциал центрального электрода самый высокий, а потенциал электродов на краях равен нулю. Осевое распределение магнитного поля вдоль оси показано на рисунке 2.

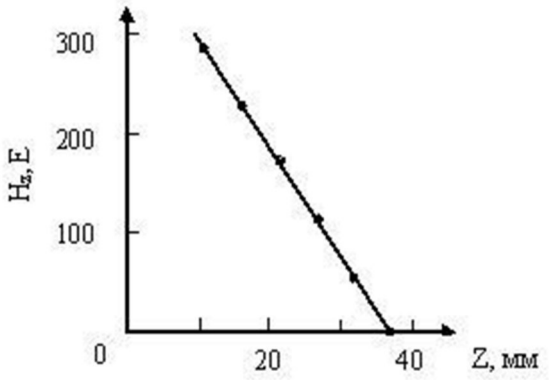


Рисунок 2 – Распределение магнитного поля в линзе

Нами было установлено, что в эффективном режиме действия плазменной линзы с плавающими потенциалами электродов, из-за низкой равновесной концентрации вторичных ионов, реализуются наибольшие по величине

радиальные электрические поля порядка $3\cdot 10^3$ В/см, вследствие ограниченной протяженности области поля диокотронная неустойчивость не развивается. Измерения и расчеты показывают что, поскольку все поле внутри плазменной линзы является фокусирующим, оптическая сила плазменной линзы в тех же условиях и при тех же параметрах во много раз превышает оптическую силу электрических и магнитных линз. $F_B \sim 10^4$ см; $F_E \sim 10^3$ см; $F_{pl} \sim 20$ см [3,4].

Эффект фокусировки интенсивного расходящегося ионного пучка, фокусируемого системой извлечения на малом (порядка 7 см) расстоянии от средней плоскости линзы, свидетельствует о наличии в ней большого радиального электрического поля. Оценка средней величины поля из выражения для фокусного расстояния $f = \frac{R}{2\theta}\cdot\frac{W}{ev}$ при полученном в эксперименте значении $f \sim (5-6)\,см$ дает результат ~ 3 кВ/см, то есть практически вся приложенная к электродам линзы разность потенциалов распределена по радиусу. Из показанных на рисунке 3 непосредственно измеренных распределений потенциала в средней плоскости линзы видно, что в системе действительно реализуется сильные электрические поля, соответствующие приведенной выше оценке.

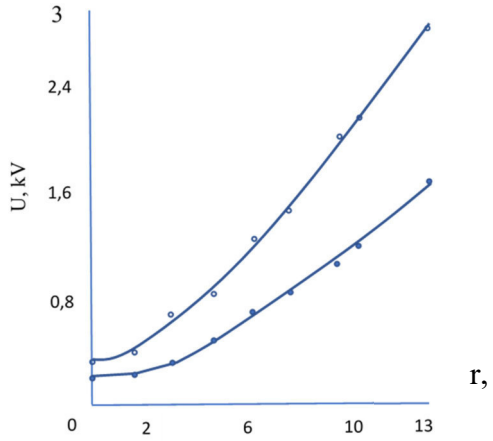


Рисунок 3 – Радиальное распределение потенциала в центральной плоскости линзы:
●-U_l=2dkV, - U_l=3 kV, U_s=20 kV, p=$7\cdot 10^{-6}$ c.s.мм

Эксперименты показывают более резкий фокус ионного пучка ,который получается на краю ионного потока. Близкие к оси линзы ионы почти не чувствуют воздействия электрического поля. Измерения показывают, что это связано с тем, что потенциал в центре линзы может увеличиваться до 300 вольт (Рисунок 4) [4]. Это означает, что приосевая область является эквипотенциальной. Следовательно, ионы, рассеянные по оси, не фокусируются. В результате диаметр пучка в фокусе расширяется, а плотность ионного тока становится меньше. Существует несколько причин образования положительного потенциала: неправильное размещение электродов относительно магнитного поля, неоптимальное распределение потенциала по электродам, накопление вторичных ионов в остаточном газе на оси. Генерация вторичных ионов слабая в условиях высокого вакуума (p = 10^{-5} *мм.рт.ст.*). Цилиндрические электроды следует располагать симметрично относительно

точки с максимальным значением магнитного поля, а их длину следует опреде-определять экспериментально в зависимости от распределения магнитного поля. Кроме того, распределение электрического потенциала по электродам следует выбирать таким образом, чтобы нулевое значение потенциала фиксировалось в центре линзы [5,6].

Заключение

Путем экспериментального выбора саморегулирующегося режима работы линзы Габора удалось добиться более плотного распределения ионного тока. За счет воздействия на ионного пучка радиального электрического поля электрон-ионная и диокотронная неустойчивости в плазменной линзе не могут развиваться. Поддерживая достаточно высокую оптическую силу линзы, можно уменьшить аберрацию за счет ограничения диокотронной, электронно-ионной и других более интенсивных неустойчивостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. Москва, ФИЗМАТЛИТ, (2006) 576 с.
2. Гасанов И.С., Проценко И.М. Динамика формирования импульсного ионного пучка плазменной линзой. ЖТФ, т. 52, № 9, с 1783-1786 (1982).
3. Гончаров А.А., Добровольский А.Н., Задорожный В.Ф. О трансформации радиального профиля интенсивного ионного пучка плазменной линзой // ЖТФ, 1997, т.67, №8, с.97-99.
4. I.S.Hasanov, V.A.Orudjev, I.I.Gurbanov, E.M. Akberov. Space Charge Lenses for Intensive Ion Beams Formation. ACTA Physika Polonica A, vol. 135, No 4, p. 841-844 (2019). DOI: 10.12693/APhysPolA.135.841
5. Гасанов И.С., Гончаров А.А., Проценко И.М. Плазмооптические системы формирования и фокусировки ионных пучков. Препринт ИФ УН УССР, Киев (1990) 39 с.
6. Goncharov A.A. The electrostatic plasma lens. Review of Scientific Instruments 84, 021101 (2013); https://doi.org/10.1063/1.4789314

УДК 519.633.9

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Х.Ш. Джураев, д.ф.-м.н., доц.
Таджикский национальный университет
e-mail: *hayrullo_58@mail.ru*
Г.Х. Джураева, к.ф.-м.н., м.н.с.
Таджикский национальный университет
Н.Н. Мелиев ст. преп.
Таджикский государственный педагогический университета им. С. Айни

Рассматриваются методы регуляризации краевых задач для уравнения гиперболического типа.
Ключевые слова: регуляризация, краевые задачи, уравнение гиперболического типа.

1. Рассмотрим уравнение с частными производными

$$a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b(t)\frac{\partial u}{\partial t}=d(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-e(x)\frac{\partial u}{\partial x}+(c_2(x)-c_1(t))u(x,t), \qquad (1)$$

являющееся уравнением с частными производными гиперболического типа. При высокоинтенсивных процессах слагаемое $a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ играет существенную роль. Предполагаем, что $a(t)\ge a_0>0, d(x)\ge d_0>0$, $b(t)\ge 0$, $e(x)\ge 0$, $c_1(t)\ge 0$, $c_2(x)\ge 0$ непрерывные заданные на $[0,t_0]$ и $[0,l]$ функции. Будем икать решение уравнения (1) при краевых условиях

$$\left(\gamma_1\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}+\gamma_2 u(x,t)\right)\Big|_{\Gamma}=\begin{cases}0 & при \quad x=0 \quad и \quad x=l,\\ \varphi(x) & при \quad t=0,\\ \psi(x) & при \quad t=t_0,\end{cases} \qquad (2)$$

где γ_1, γ_2 – числа, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные непрерывные функции на отрезке $[0,l]$. При условии $\gamma_1=0$ имеем первую граничную задачу, при $\gamma_2=0$ – вторую, а при $\gamma_1\ne 0$ и $\gamma_2\ne 0$ третью.

Уравнение (1) определяет класс гиперболических уравнений, для которых смешанная задача, в том числе и краевая, может быть решена методом Фурье [1,2]. Если $X_k(x,\lambda_k)$ есть k-ая собственная функция краевой задачи

$$d(x)\frac{d^2\chi(x)}{dx^2}+e(x)\frac{d\chi(x)}{dx}+c_2(x)(1-\lambda^2)\chi(x)=0,$$

$$\left(\gamma_1\frac{d\chi(x)}{dx}+\gamma_2\chi(x)\right)\Big|_{x=0}=\left(\gamma_1\frac{d\chi(x)}{dx}+\gamma_2\chi(x)\right)\Big|_{x=l}=0,$$

а λ_k – отвечающее ей собственное значение и $T_k(t,\lambda_k)$ – решение уравнения

$$a(t)\frac{d^2T(t)}{dt^2}+b(t)\frac{dT(t)}{dt}+c_1(t)(1+\lambda^2)T(t)=0,$$

удовлетворяющее предельным условиям

$$\left(\gamma_1\frac{dT(t)}{dt}+\gamma_2T(t)\right)\Big|_{t=0}=\varphi_k,\quad \left(\gamma_1\frac{dT(t)}{dt}+\gamma_2T(t)\right)\Big|_{t=t_0}=\psi_k,$$

то общее решение (1), (2) имеет вид:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_kT_{1k}(t,\lambda_k)+\psi_kT_{2k}(t,\lambda_k)]\frac{\chi_k(x,\lambda_k)}{\phi_k(t_0,\lambda_k)} \qquad (3)$$

где φ_k и ψ_k - коэффициенты Фурье для разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по базису $\{X_k(x,\lambda_k)\}$, а

$$T_{1k}(t,\lambda_k)=$$
$$=\gamma_1(T_{2k}'(t_0)T_{1k}(t)-T_{1k}'(t_0)T_{2k}(t))+\gamma_2(T_{2k}(t_0)T_{1k}(t)-T_{1k}(t_0)T_{2k}(t)),$$
$$T_{2k}(t,\lambda_k)=\gamma_1(T_{1k}'(0)T_{2k}(t)-T_{2k}'(0)T_{1k}(t))+\gamma_2(T_{1k}(0)T_{2k}(t)-T_{2k}(0)T_{1k}(t)),$$
$$\phi_k(t_0,\lambda_k)=\gamma_1^2(T_{1k}'(0)T_{2k}(t_0)-T_{1k}'(t_0)T_{2k}'(0))+\gamma_1\gamma_2(T_{1k}(0)T_{2k}'(t_0)+$$
$$+T_{1k}'(0)T_{2k}(t_0)-T_{1k}'(t_0)T_{2k}(0)-T_{1k}(t_0)T_{2k}'(0))+\gamma_2^2(T_{2k}(t_0)T_{1k}(0)-T_{1k}(t_0)T_{2k}(0)).$$

Из вида функции (3) следует, что имеется такое k_0, при котором $\phi_k(t_0,\lambda_k)=0$ и в этом случае решения либо не существуют, либо оно неединственное. Неустойчивость решения вида (3) возможно из-за того, что при $k\to\infty$ $\phi_k(t_0,\lambda_k)$ может быть сколь угодно близка к нулю (например, это имеет место для уравнения колебания струны, так как в этом случае $\phi_k(t_0,\lambda_k)=\sin\left(\frac{k\pi t_0}{l}\right)$).

Известно [1, стр.525], что если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют непрерывную производную в промежутке $[0,l]$ и удовлетворяют предельным условиям (2), то функция $u(x,t)$ вида (3) удовлетворяет краевым условиям (2), а также уравнению (1). Это означает, что можно почленно дифференцировать ряд (3) по t и x два раза и полученные ряды равномерно сходятся в промежутке $[0,l]$ при всяком фиксированном t. Следовательно, формула (3) дает точное решение задачи (1), (2).

В практических задачах коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $c_1(t)$, $d(x)$, $e(x)$, $c_2(x)$ и граничный условий $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ получаются в результате измерений, то есть вместо функций $a(t)$, $b(t)$, $c_1(t)$, $d(x)$, $e(x)$, $c_2(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ известно h и δ – приближения этих функций соответственно по параметрами t и x:

$$\|a(t)-\tilde{a}(t)\|\le h,\quad \|b(t)-\tilde{b}(t)\|\le h,\quad \|c_1(t)-\tilde{c}_1(t)\|\le h,$$
$$\|d(x)-\tilde{d}(x)\|\le \delta,\|e(x)-\tilde{e}(x)\|\le \delta,\quad \|c_2(x)-\tilde{c}_2(x)\|\le \delta, \qquad (4)$$
$$\|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)\|\le \delta,\quad \|\psi(x)-\tilde{\psi}(x)\|\le \delta.$$

Тогда вместо нахождения $u(x,t)$ можно ставить лишь задачу о нахождении приближенного решения. Если *a(t), b(t), c_1(t), d(x), e(x), c_2(x),* $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывно дифференцируемые функции в $[0,l]$ и $[0,t_0]$, то формула (3) дает искомое решение задачи (1), (2). Однако можно указать приближенные начальные значения функций *a(t), b(t), c_1(t), d(x), e(x), c_2(x),* $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, которые не обладают свойством непрерывной дифференцируемости. Например, исходные функции *a(t), b(t), c_1(t), d(x), e(x), c_2(x),* $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ задаются в виде ломаных линий. Поэтому в качестве приближенного решения задачи (1), (2) с приближенными исходными данными вида (4) нельзя брать точное решение $u(x,t)$ этой задачи в виде (3). Такое решение может не существовать, а если существует, то оно не обладает свойством устойчивости к малым отклонениям *a(t), b(t), c_1(t), d(x), e(x), c_2(x),* $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Для решения задачи (1), (2) используют в основном методы регуляризации, из которых наибольшее применение (в силу своей универсальности) получили метод приближенно-аналитических и специальных рядов. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки, причем их реализация требует своего, как правило, сложного и дорогостоящего математического обеспечения [3-5].

В связи с этим представляет интерес объединение методов решения задачи (1), (2) на основе использования общего математического подхода в доступной для инженерных расчетов форме – теория обратное и некорректное задачи.

Считая, что для точно заданных исходных данных решение в виде (3) существует, в заметке строится семейство регуляризирующих алгоритмов (РА) задачи (1), (2), обладающих свойством устойчивости к малым изменениям исходных данных. При этом используется условия стабилизации и согласование параметра регуляризации для задачи (1), (2). Эти понятия можно вести следующим образом [4, 5]:

Определение 1. $R(\varphi,\psi,x,t,\alpha)$ называется регуляризируемым решением для задачи (1), (2), если существует функционал $s(\alpha,x,t)$ удовлетворяющий условию

$$|R(\varphi,\psi,x,t,\alpha)-u(x,t)|\le s(\alpha,x,t)$$

для любого α, принадлежащего $(0,\alpha_0]$ и для всякого $x\in[0,l]$ и $0<t\le t_1$, $R(\varphi,\psi,x,t,\alpha)\to u(x,t)$, $s(\alpha,x,t)\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Определение 2. $\widetilde{R}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},x,t,\alpha)$ называется вполне регуляризируемым решением для задачи (1), (2), если существует функционал $c(\alpha,\delta,h,x,t)$ удовлетворяющий условию

$$\left|\widetilde{R}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},x,t,\alpha)-R(\varphi,\psi,x,t,\alpha)\right|\le c(\alpha,\delta,h,x,t)$$

для любого α, принадлежащего $(0,\alpha_0]$ и для всякого $x\in[0,l]$ и $0<t\le t_1$, $\widetilde{R}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},x,t,\alpha)\to u(x,t)$, $c(\alpha,\delta,h,x,t)\to 0$, $\alpha(\delta,h)\to 0$ при $\delta\to 0$ и $h\to 0$.

2. Сначала предположив, что *a(t), b(t), c_1(t), d(x), e(x), c_2(x)* точно, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ приближенно заданные функции, строим приближенные решения. Следуя [5], в качестве приближенного решения (1), (2) с приближенными исходными данными будем брать значение однопараметрического семейства операторов

$$R(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},x,t,\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}r(k,\alpha)\cdot[\widetilde{\varphi}_k\cdot T_{1k}(t,\lambda_k)+\widetilde{\psi}_k\cdot T_{2k}(t,\lambda_k)]\cdot\frac{X(x,\lambda_k)}{\phi_k(t_0,\lambda_k)} \qquad (5)$$

где $r(k,\alpha)$ – стабилизирующие множители, определенные для всяких $\alpha\ge 0$ и $k=\overline{1,\infty}$, $\alpha=\alpha(\delta)$, который удовлетворяют условиям 1)-7), указанным в работах [4,5].

На основе определения доказываются следующие теоремы [5]:

Теорема 1. *Если стабилизирующий множитель $r(k,\alpha)$ ограничен свойством 1)-6), то для каждого фиксированного $t>0$ оператор $R(\varphi,\psi,x,t,\alpha)$ вида (4) является регуляризирующим для задачи (1)-(2) и имеет место оценка*

$$\left|R(\varphi,\psi,x,t,\alpha)-u(x,t)\right|\le s(\alpha,x,t),$$

где $u(x,t)$ – точное решение задачи (1)-(2) вида (3), $s(\alpha,x,t)=C\cdot\omega(\alpha)$, $\omega(\alpha)$ – функции корректности задачи.

Теорема 2. *Пусть вместо $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ известны их приближения $\widetilde{\varphi}(x)$ и $\widetilde{\psi}(x)$ из $L_2(0,l)$ и t заданное число из $(0,t_1)$. Тогда имеет место оценка*

$$\left|R(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},x,t,\alpha)-R(\varphi,\psi,x,t,\alpha)\right|\le c(\alpha,\delta,h,x,t).$$

Здесь $c(\alpha,\delta,h,x,t)=C\cdot\delta\cdot(\sqrt{\omega_1(\alpha,t)}+\sqrt{\omega_2(\alpha,t)})$.

$$\omega_1(\alpha,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[r(k,\alpha)\frac{T_{1k}(t,\lambda_k)}{\phi_k(t_0,\lambda_k)}\right]^2,\ \omega_2(\alpha,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[r(k,\alpha)\frac{T_{2k}(t,\lambda_k)}{\phi_k(t_0,\lambda_k)}\right]^2.$$

Теорема 3. *Если $\alpha=\alpha(\delta)$ есть корень уравнения*

$$\sqrt{\omega_1(\alpha,t)}+\sqrt{\omega_2(\alpha,t)}=\frac{\omega(\alpha)}{C\cdot\sqrt{\delta}}=\frac{\varepsilon}{3\delta}.$$

то выполняется равенство

$$\lim_{\delta\to 0}R(\varphi,\psi,x,t,\alpha)=u(x,t).$$

ЛИТЕРАТУРА
1. Смирнов В.И. Курс высшей математики, изд.2, т. IV. – М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1951, 804 с.
2. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. – М.: Наука, 1988, 432 с.
3. Джураев Х.Ш. - Дифференциальные уравнения, 2007, т.43, №5, с.721-725.
4. Джураев Х.Ш. Некорректно поставленные задачи математической физики (монография) //Издатель: Германия. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012, - 156 с.
5. Джураев Х.Ш. Регуляризация краевых задач для гиперболического уравнения (статья) Математические заметки, -2013, выпуск 2, -№2. -С.202-208.

МОДЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

Х.Ш. Джураев, д.ф.-м.н., доц.
Таджикский национальный университет
e-mail: *hayrullo_58@mail.ru*
К. Комилов, д.ф.-м.н., проф.
Таджикский национальный университет
З.С. Норматов, к.ф.-м.н., м.н.с.
Таджикский национальный университет
А.Н. Умаров, ст. преп.
Дангаринский государственный университет
Н. Нарзуллоев, к.ф.-м.н., доц.
Таджикский национальный университет
e-mail: *naimnn@mail.ru*

Исследуется нелинейные нестационарные задачи теплопроводности в сплошных средах. Анализ проведенных исследований показывает, что метод искусственной гиперболизации для решения задач теплопроводности и нахождения коэффициента теплопроводности достаточно эффективен как в условиях точных, так и возмущенных входных данных.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, метод искусственной гиперболизации.

Исследование математических моделей аналитического решения обратных задач нестационарной теплопроводности является приближенным и для изучения прямых задач может быть недостаточным. Решение таковых задач является объектом исследования численным методом.

В ряде работ [1-5] проведены исследования процесса переноса тепла в конденсированных средах, однако данные разных авторов заметно расходятся между собой.

В соответствие с вышеизложенным, во многих случаях по данным измерений температуры в заданной точке можно определить законы изменения параметров нелинейного уравнения теплопроводности. Задачи такого рода являются обратными задачами явления тепломассопереноса. Теплофизические параметры задачи входят в виде коэффициентов или множителей в нелинейные уравнения теплопроводности. Следовательно, теоретическое нахождение теплофизических параметров, в частности определение нелинейного коэффициента теплопроводности из нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности в различных конденсированных средах методом искусственной гиперболизации является важной задачей.

Математическая модель нелинейной нестационарной теплопроводности для тела одномерной геометрии представляется записью уравнения в следующем каноническом виде [6]:

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = div\left(\lambda(T)gradT\right), \qquad (1)$$

где $\rho(T)$ - плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$; $c(T)$ - удельная теплоёмкость, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; $\lambda(T)$- нелинейный показатель теплопроводности, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; T-абсолютная температура, К.

Согласно [7-11], распространение тепла, описываемое уравнением (1) осуществляется с бесконечной скоростью. Это следует из фундаментального решения нелинейного уравнения (1). Этот факт приводит к противоречию в распределении тепла, поскольку каждое из экспериментально полученных данных отображают хотя и значительную, но ограниченную скорость распределения тепла. Для преодоления этого противоречия в [7,9] предложена гипотеза о искусственной гиперболизации, полагающая что распределение тепла имеет не только диффузионной характер, но и волновой. В этих работах в традиционном законе Фурье о пропорциональности теплового потока антиградиенту температуры, выражающем диффузионную структуру распределения тепла, добавлено слагаемое указывающее быстроту изменения теплового потока в виде $\alpha\frac{\partial q(r,t)}{\partial t}$, где α – параметр регуляризации (время, в течение которого устанавливается термодинамическое равновесие между градиентом температуры и тепловым потоком), или время релаксации теплового потока.

Следуя этому методу, добавляя к левой части уравнения (1) слагаемое следующего вида $\alpha\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial t^2}$, запишем его в цилиндрических координатах:

$$\alpha\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r\rho(T)c(T)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right). \qquad (2)$$

Введя целочисленную функцию

$$G(T_\alpha) = \int_{T_{\alpha 0}}^{T_\alpha} \lambda(T_\alpha) dT_\alpha \tag{3}$$

уравнение (2) можно привести к виду линейного нестационарного волнового уравнения теплопроводности

$$\alpha \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\beta(T_\alpha)}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial G}{\partial r} \right), \tag{4}$$

где $\beta(T) = \dfrac{\lambda(T)}{\rho(T)c(T)}$ – нелинейный коэффициент температуропроводности.

Для решения уравнения (4) предположим, что на внутренней поверхности цилиндра температура равна T_1, а на наружной T_2.

По аналогии с [9], определим выражение для поля температуры:

$$\begin{aligned} G_\alpha(r,t) = G_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r)^{2k}}{\beta^k (2k)!} \sum_{n=0}^{k} C_n^k \alpha^{k-n} \frac{d^{2(k-n)} G_1(t)}{dt^{2(k-n)}} - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)^{2k+1}}{\beta^k (2k+1)!} \sum_{n=0}^{k} C_n^k \alpha^{k-n} \frac{d^{2(k-n)} g_1(t)}{dt^{2(k-n)}}, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$G_1 = \int_{T_1}^{T} \lambda(T) dT, \quad g_1 = -\lambda(T_1) \left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=R}.$$

Подставляя выражение (5) в функцию теплового потока

$$g_\alpha(r,t) = -\lambda(T) \frac{\partial G_\alpha}{\partial r},$$

получим выражение для плотности теплового потока:

$$\begin{aligned} g_\alpha(r,t) = g_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(h-r)^{2k-1}}{\beta^{k-1}(2k-1)!} \sum_{n=1}^{k} C_n^{k-1} \alpha^{k-1-n} \frac{d^{2(k-1-n)} G_1(t)}{dt^{2(k-1-n)}} + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(h-r)^{2k}}{\beta^k (2k)!} \sum_{n=1}^{k} C_n^k \alpha^{k-n} \frac{d^{2(k-n)} g_1(t)}{dt^{2(k-n)}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Следовательно, из полученных выражений (5) и (6) можно определить значения температуры и теплового потока. Если в начальный момент времени задана температура, то искомые теплофизические характеристики среды (теплопроводность λ, удельная теплоёмкость c_p, плотность ρ) на поверхности вещества можно определить с помощью найденных решений.

Согласно (3), коэффициент теплопроводности нелинейно зависит от температуры, то есть $\lambda(T_\alpha)$. Поскольку явный вид данной зависимости неизвестен, эту функцию разложим в ряд Тейлора по малому параметру $(T_\alpha - T_0)$. С точностью до квадратичных членов по малому параметру имеем:

$$\lambda(T_\alpha) = \lambda_0(T_0) + \frac{1}{2!} \frac{d\lambda_0}{dT} (T_\alpha - T_0) + \frac{1}{3!} \frac{d^2 \lambda_0}{dT^2} (T_\alpha - T_0)^2, \tag{7}$$

где $\lambda_0(T_0)$ – известное значение коэффициента теплопроводности при начальной температуре T_0.

Далее подставляя (5) и (7) в (3) получим приближенное выражение для нелинейного коэффициента теплопроводности:

$$\lambda_0(T_0)(T_\alpha - T_0) + \frac{1}{4}\frac{d\lambda_0}{dT}(T_\alpha - T_0)^2 + \frac{1}{18}\frac{d^2\lambda_0}{dT^2}(T_\alpha - T_0)^3 =$$
$$= G_1(t) + \sum_{k=1}^{N}\frac{(h-x)^{2k}}{\beta^k(2k)!}\sum_{n=1}^{k}C_n^k\alpha^{k-n}\frac{d^{2(k-n)}G_1(t)}{dt^{2(k-n)}} - (h-x)g_1(t) + \quad (8)$$
$$+ \sum_{k=1}^{N}\frac{(h-x)^{2k+1}}{\beta^k(2k+1)!}\sum_{n=0}^{k}C_n^k\alpha^{k-n}\frac{d^{2(k-n)}g_1(t)}{dt^{2(k-n)}}.$$

Это выражение, представляет собой кубическое уравнение относительно $(T_\alpha - T_0)$. Решение этого уравнения согласно [14] имеет вид:

$$T_{3\alpha}(r,t) = T_0 - \frac{3q}{p + \sqrt[3]{p^3 + \frac{27}{2}q^2 + 27q\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{p^3 + \frac{27}{2}q^2 - 27q\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}};$$
$$T_{1,2\alpha}(r,t) = T_0 - \frac{2\left(\frac{p}{3} + \sqrt[3]{p^3 + \frac{27}{2}q^2 + 27q\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{p^3 + \frac{27}{2}q^2 - 27q\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}\right)}{-(T_0 + T_{3\alpha}(r,t)) \pm \sqrt{D(r,t)}} \quad (9)$$

где

$$D(r,t) = \left(T_{3\alpha}(r,t)\right)^2 -$$
$$-4\left(\frac{p}{3} + \sqrt[3]{p^3 + \frac{27}{2}q^2 + 27q\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{p^3 + \frac{27}{2}q^2 - 27q\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}\right);$$
$$p = \frac{3a_0a_2 - a_1^2}{3a_0^2};\ q = \frac{2a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1a_2}{3a_0^2} + \frac{a_3}{a_0};\ a_0 = \frac{1}{18}\cdot\frac{d^2\lambda_0}{dT^2}\bigg|_{T=T_0};\ a_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{d\lambda_0}{dT}\bigg|_{T=T_0};$$

$a_2 = \lambda_0(T_0);\ a_3 = -G_\alpha(r,t).$

Используя решения (9) определим плотность теплового потока:

$$q_\alpha(r,t) = -\left(\lambda_0(T_0) + \frac{1}{2}\frac{d\lambda_0(T_0)}{dT}(T_\alpha - T_0) + \frac{1}{3!}\frac{d\lambda_0^2(T_0)}{dT^2}(T_\alpha - T_0)^2\right)\frac{\partial T_{1,2,3\alpha}}{\partial r}. \quad (10)$$

В рассматриваемом случае, из (10) для функций температуры и плотности теплового потока в каждой точке $r = h$ получим состояние равновесия, то есть

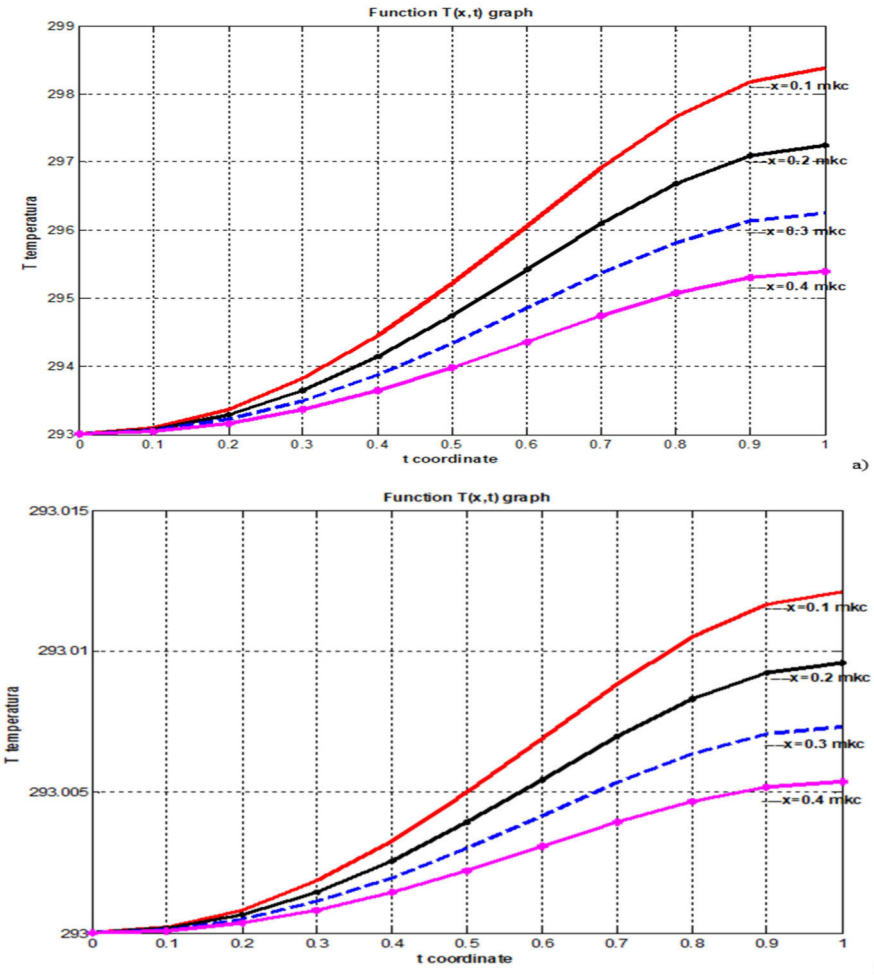
$$q_\alpha(r,t)\big|_{x=h} = -\left(\lambda_0(T_0) + \frac{1}{2}\frac{d\lambda_0(T_0)}{dT}(T_\alpha - T_0) + \frac{1}{3!}\frac{d\lambda_0^2(T_0)}{dT^2}(T_\alpha - T_0)^2\right)\frac{\partial T_{1,2,3\alpha}}{\partial r}\bigg|_{r=h} \quad (11)$$

Из выражения (11) можно найти значения коэффициентов $\lambda_1(T_0) = \frac{d\lambda_0(T_0)}{dT}$ и $\lambda_2(T_0) = \frac{d\lambda_0^2(T_0)}{dT^2}$, которые являются довольно громоздкими и поэтому здесь не приводятся.

Для подробного анализа зависимости плотности теплового потока от времени на основе выражений (9), проведем численный расчет на примерах образцов из вольфрама и стали марки 40Х. Начальную температуру образцов T_0 принимаем равной 293*К*. Физические данные стали марки 40Х (плотность $\rho=7.918*10^4$ *кг/м*^{3}, удельная теплоемкость $c_\rho=364.726$*Дж/(кг*К))* и вольфрама (плотность ρ=19300 *кг/м*^{3}, удельная теплоемкость $c_\rho=0.126$ *Дж/(кг*К))* взяты из работы [11].

На рис. 1 (а, б) представлены зависимости изменения температуры от времени для исследуемых образцов. На рис. 1 в) представлены результаты работы [12]. Из сравнения этих рисунков видно, что результаты наших расчетов качественно совпадают с результатами работы [12].

На рис. 2 (а, б) представлены зависимости теплового потока от времени для исследуемых образцов.



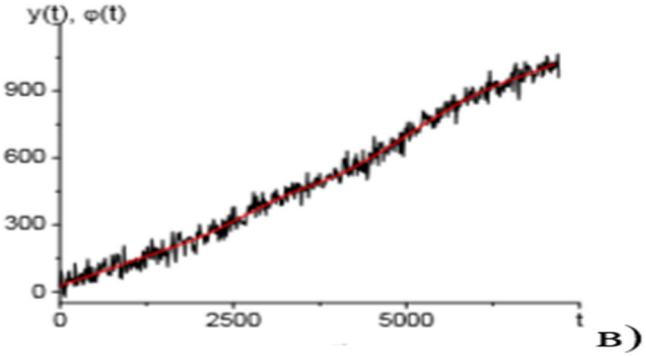


Рисунок 1 – Зависимость численного расчета изменения температуры от времени для различных значений *x: x=0.1мкм; 0.2 мкм; 0.3 мкм; 0.4 мкм*:
а) – стали марки 40Х; б) – вольфрам; в) – точные изменение температуры и зашумленных данных [12].

Анализ результатов, представленных на рис.1 и 2, позволят сделать вывод о том, что расхождение между нелинейной нестационарной температурой, рассчитанной с применением решений нелинейной задачи теплопроводности для вольфрамового образца равна 0.100*mkm*, а для стали марки 40Х тоже 0.100 *mkm*. Из полученных результатов численного расчета следует, что в течение времени *t* мкс температура увеличивается до 2930.14*K* (вольфрама), до 1600*K* (стали марки 40Х), и плотности теплового потока в вольфраме q_{max}=14 (вт/м^2) и в стали марки 40Х q_{max}=14 (вт/м^2) также увеличиваются.

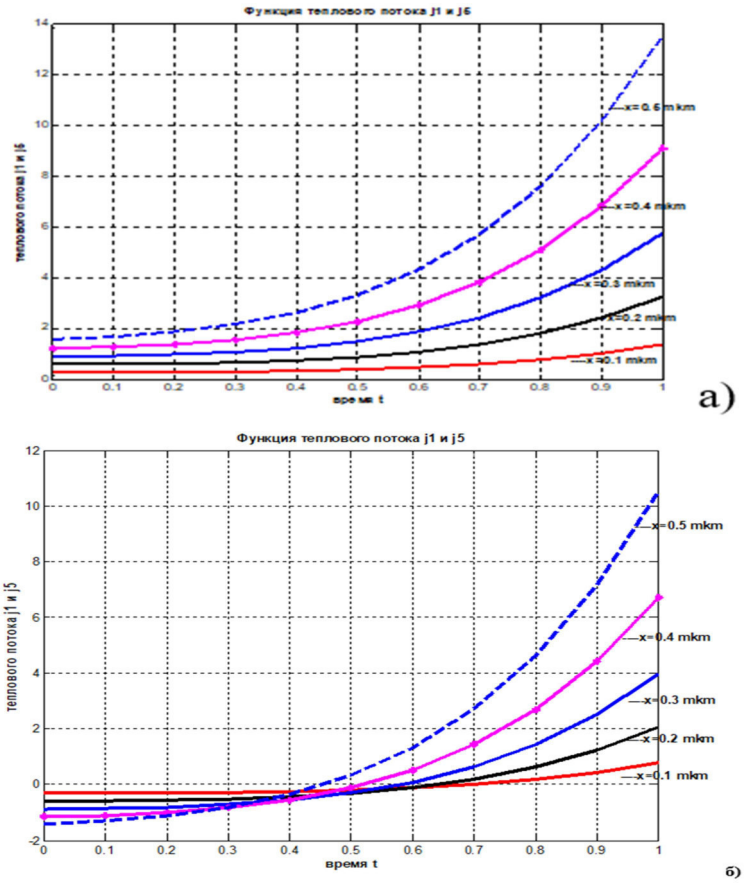


Рисунок 2 – Изменение плотности теплового потока вольфрама (а) и стали марки 40Х (б) от времени для различных значений x: x=0.1мкм; 0.2 мкм; 0.3 мкм; 0.4 мкм; 0.5 мкм.

С целью оценки точности предложенного приближенно-аналитического метода исследована теплопроводность образцов из вольфрама и стали марки 40Х. Полученные данные сравнивались с известными результатами [1, 13-15] для аналогичных образцов. Приведем результаты численного расчета зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. При выбранных параметрах рассчитанные значения коэффициентов теплопроводности $\lambda_1(T_0)$ и $\lambda_2(T_0)$ практически совпадают с литературными данными [11]: $\lambda(T_0)$ =162.8 для вольфрама, а для стали марки 40Х, $\lambda(T_0)$ =40.62.

В работе [1] проведено исследование теплопроводности металлов и сплавов в жидком состоянии, и результаты сравнены с известными литературными данными. Для нержавеющей стали и большинства жидких металлов и сплавов это исследование существенно расширяет исследованный интервал температур.

В [13] приведены результаты численных расчетов по определению корреляции показателя теплопроводности от температуры для стали 40Х. В данной работе температурная зависимость получена на основе табличных данных методом наименьших квадратов:

$$\lambda(T)= 40{,}62 + 0{,}013T - 4{,}847\cdot10^{-5}\,T^2 + 2{,}405\cdot10^{-8}T^3,\ (Вт/\ (м\cdot К)).$$

В этой работе начальная температура образца T_0 принималась равной 300K, начальная скорость изменения температуры полагалась равной 0. Время релаксации теплового потока для стали марки 40Х принималась равной $\tau_r = 5\cdot10^{-10}$ с.

В [14] предложено экспериментально-расчетная схема определения теплопроводности теплоизоляционных материалов который позволяет исследовать изменение этой характеристики в широком интервале температур. Сравнение полученных экспериментальных значений теплопроводности различных теплоизоляционных материалов со справочными данными показало их совпадение в пределах 5% во всем температурном интервале измерений.

Проведен численной расчет зависимости коэффициента теплопроводности от температуры, на основе выражений (9) образца из стали марки 40Х и вольфрама. Результаты выражаются формулами:

$$\lambda(T_\alpha) = 40.62 - 0.0238\cdot(T_\alpha - T_0) - 0.0005\cdot10^{-4}\cdot(T_\alpha - T_0)^2,\ (Вт/\ (м\cdot К))$$

для стали марки 40Х;

$$\lambda(T_\alpha) = 162.8 - 0.0626\cdot(T_\alpha - T_0) - 0.0001\cdot10^{-4}\cdot(T_\alpha - T_0)^2,\ (Вт/\ (м\cdot К))$$

для вольфрама.

При нахождение этих выраженный начальная температура образцов T_0 принималась равной 293K. Величина стабилизации для стали марки 40Х равно $\alpha = 2.6519\cdot10^{-8}$ с, а для вольфрама $\alpha = 1.8296\cdot10^{-7}$ с.

На рис. 3 (а, б, в) представлены результаты численного расчета зависимости коэффициента теплопроводности от температуры.

Из рисунков видно, что с увеличением температуры среды значения коэффициента теплопроводности $\lambda(T_\alpha)$ нелинейно уменьшаются. На рис. 4 (а, б) представлены результаты работ [14, 15]. Полученные значения качественно совпадают с приведёнными результатами.

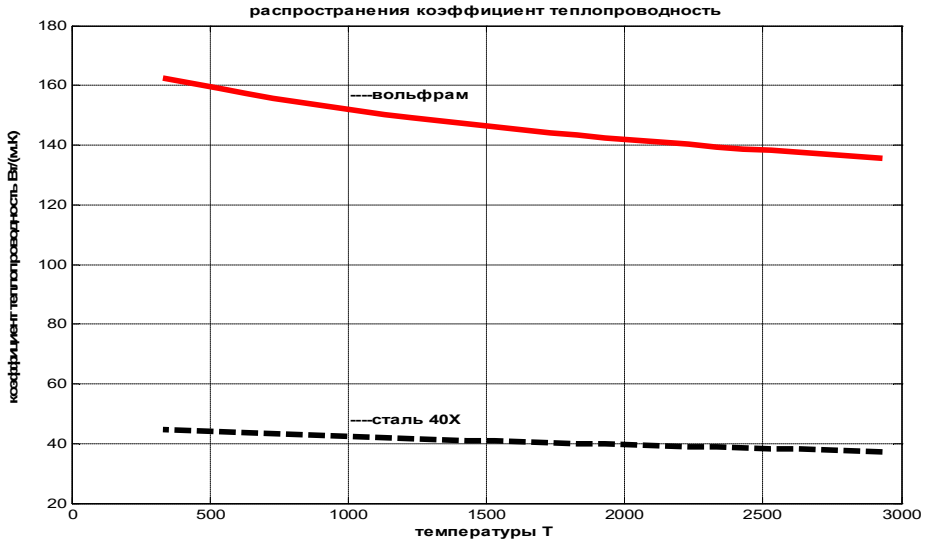


Рисунок 3 - Результаты численного расчета коэффициента теплопроводности от температуры: а) –вольфрам; б) –сталь марки 40Х; в) вольфрам и сталь марки 40Х

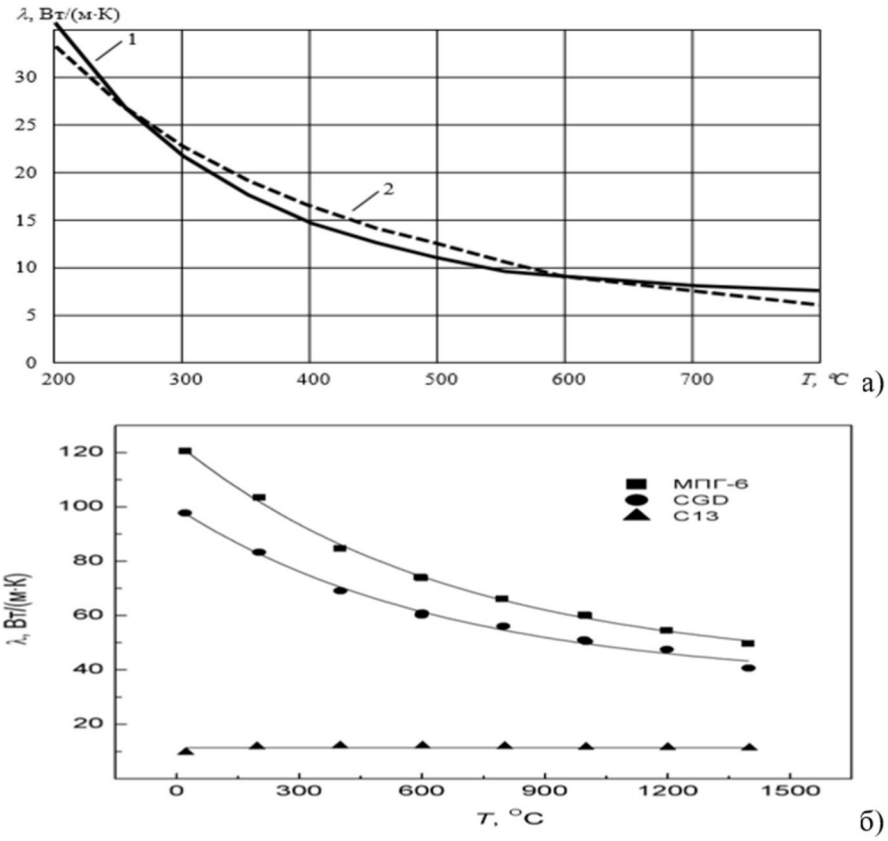


Рисунок 4 - Температурные зависимости коэффициента теплопроводности: а) – результаты работы [14]; б) – результаты работы [15]

Анализ проведенных исследований показывает, что метод искусственной гиперболизации для решения задач теплопроводности и нахождения коэффициента теплопроводности достаточно эффективен как в условиях точных, так и возмущенных входных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станкус С.В., Савченко И.В., Багинский А.В., Верба О.И., Прокопьев А.М., Хайрулин Р.А. ТВТ, 46 (4), 795 (2008). DOI: doi.org/10.1134/S0018151X08050222
2. И.А. Васильева, Д.П. Волков, Ю.П. Заричник. Теплофизические свойства вещества. (Инфра-М., М., 2004).
3. Пономарев С.В., Балабанов П.В., Трофимов А.В. // Измерительная техника, (1), 44 (2004). DOI: 10.32446/0368-1025it.2020-4-20-26 [Ponomarev S.V., Balabanov P.V., Trofimov A.V. Measurement Techniques. 47 (1). 66 (2004). DOI: 10.32446/0368-1025it.2020-4-20-26]
4. Сивухин Д.В. Термодинамика и молекулярная физика. (Физматлит МФТИ, М., 2006)
5. Фокин В.М., Бойков Г.П., Видин Ю.В. Основы технической теплофизики. (Издательство Машиностроение-1, М., 2004)
6. Бек Дж. Блакуэла Б., Сент. Клэр Ч. мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности. (Мир, М., 1989)
7. Джураев Х.Ш., Комилов К., Норматов З.С. Исследование процессов тепло- и массопереноса в конденсированных средах методом искусственной гиперболизации. (Сино, Душанбе, 2019)
8. Джураев Х.Ш. Асомиддинов, М.М. Сафаров, А.Н. Умаров. Научно-технический вестник Поволжья, №1. 19 (2018). DOI: 10.24153/2079-5920-2018-8-1
9. Джураев Х.Ш., Умаров А.Н., Салмони Абдурахим, // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. №3. 104 (2019).
10. Алиев Б., Джураев Х.Ш. // Докл. АН РТ, 47(3). 92 (2004).
11. А.И. Волков, И.М. Жарский. Большой химический справочник. (Современная школа, Минск, 2005)
12. В.Т. Борухов, И.В. Гайшун, В.И. Тимошпольский // Доклады НАН Беларуси. 51 (6). 30 (2007).
13. Mehdi Jadidi. // Australian journal of basic and applied sciences. No. 3(2.2). 652(2009).
14. Мацевитый Ю.М., Лушпенко С.Ф., Ведь В.Е., Иванов В.А. // Интегрированные технологии и энергосбережение. №1. 50 (2004).
15. Жмуриков Е.И., Савченко И.В., Станкус С.В., Tecchio L. Измерения теплофизических свойств графитовых композитов для конвертора нейтронной мишени. (ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 2010).

МОДЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Х.Ш. Джураев, д.ф.-м.н., доц.
Таджикский национальный университет
e-mail: *hayrullo_58@mail.ru*
С.Ш. Хасанов, м.н.с.
Таджикский национальный университет
Н. Нарзуллоев, к.ф.м.н., доц.
Таджикский национальный университет
e-mail: *naimnn@mail.ru*

Для численного расчета теплофизических свойств металлических материалов в работах [1-4] используется метод наименьший квадратов. С учетом результатов этой работы можно рассчитывать температурную зависимость теплофизических свойств и термодинамических функций металлических материалов.

Ключевые слова: теплопроводность металлических материалов, метод наименьших квадратов.

Имеется математическая модель исследуемого физического явления [5-9]. Среди данных, которые могут служить исходной информацией для моделирования этого явления (краевых условий, геометрических параметров и свойств объекта) имеется одна (в некоторых случаях не одна) физическая величина (в общем случае - функция переменных модели), которая требует количественного уточнения своих эффектов.

С помощью усреднения результатов измерений, рассчитывается значение коэффициентов теплопроводности для трех исследованных методов по выражению

$$\lambda(T) = \frac{K(Q - Q_к)}{T_r - T_x}, \quad (1)$$

где K = δ/(2F) – коэффициент, учитывающий геометрию стандартного образца; δ – глубина стандартного образца; $F = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь покрытия стандартного образца; $Q = \frac{U^2}{R}$ – тепловой поток от нагревателя; $Q_к$ – лучевые тепловые потери; $T_к = \sum_{i=3}^{6} \frac{T_i}{4}$ – средняя температура покрытия стандартного образца со стороны нагревателя; $T_x = (T_1 + T_2)/2$ – средняя температура покрытия стандартного образца со стороны холодильника.

Величина лучевых тепловых потерь, входящих в выражение (1), находится по формуле

$$Q_к = \alpha_к(T_\gamma - T_c)F_к, \quad (2)$$

где $\alpha_к$ – коэффициент теплообмена со стороны фронтального покрытия корпуса;

$F_к = \pi\left(h_к d_к + \frac{1}{2}(d_к^2 - d^2) \right)$ – участок внешнего фронтального покрытия корпуса.

Выше переведенную теорию можно использовать в случае линейной зависимости теплопроводности. Обычно в качестве базиса используются экспериментальные данные из работ [1-4].

Согласно методу обратной задачи и стабилизирующих функций [10-14], теплопроводность является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных. Результатом расчёта является нахождение распространения тепла на поверхности слоя. Исходя из условий локальных минимумов функции температуры находится собственное значения уравнения теплопроводности для металлических материалов. Такая процедура численного расчёта, к сожалению, не позволяет с высокой точностью определить значения этих параметров. Именно эту задачу – нахождения температурной зависимости теплопроводности, далее мы будем рассматривать.

Напомним, что задача определения температурной зависимости теплопроводности является обратной задачей. Идея применения данного метода стабилизирующих функций при решении обратных задач были использована авторами [6,7, 12-14].

Согласно [6, 7, 14], с целью определения значения λ, построим следующее выражение

$$\lambda(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 , \tag{3}$$

где $a_i \ (i = 0,1,2)$ — постоянные параметры. Определим параметры $a_i \ (i = 0,1,2)$ многочлена (3), протекающего через три точки $\left(T_0, \lambda(T_0)\right)$, $\left(T_1, \lambda(T_1)\right)$, $\left(T_2, \lambda(T_2)\right)$, решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_0 T_0^2 + a_1 T_0 + a_2 = \lambda(T_0), \\ a_0 T_1^2 + a_1 T_1 + a_2 = \lambda(T_1), \\ a_0 T_2^2 + a_1 T_2 + a_2 = \lambda(T_2). \end{cases} \tag{4}$$

Подставляя найденные значения $a_i \ (i = 0,1,2)$ в (3) получим:

$$\lambda(T)=(a_0T_0^2+a_1T_0+a_2)\frac{(T-T_1)(T-T_2)}{(T_0-T_1)(T_0-T_2)}+$$
$$+(a_0T_1^2+a_1T_1+a_2)\frac{(T-T_0)(T-T_2)}{(T_1-T_0)(T_1-T_2)}+ \quad (5)$$
$$+(a_0T_2^2+a_1T_2+a_2)\frac{(T-T_0)(T-T_1)}{(T_2-T_0)(T_2-T_1)}.$$

или

$$\lambda(T)=a_0\left(\frac{(T-T_1)(T-T_2)}{(T_0-T_1)(T_0-T_2)}T_0^2+\frac{(T-T_0)(T-T_2)}{(T_1-T_0)(T_1-T_2)}T_1^2+\frac{(T-T_0)(T-T_1)}{(T_2-T_0)(T_2-T_1)}T_2^2\right)+$$
$$+a_1\left(\frac{(T-T_1)(T-T_2)}{(T_0-T_1)(T_0-T_2)}T_0+\frac{(T-T_0)(T-T_2)}{(T_1-T_0)(T_1-T_2)}T_1+\frac{(T-T_0)(T-T_1)}{(T_2-T_0)(T_2-T_1)}T_2\right)+$$
$$+a_2\left(\frac{(T-T_1)(T-T_2)}{(T_0-T_1)(T_0-T_2)}+\frac{(T-T_0)(T-T_2)}{(T_1-T_0)(T_1-T_2)}+\frac{(T-T_0)(T-T_1)}{(T_2-T_0)(T_2-T_1)}\right).$$

Тогда искомыми величинами при решении задачи теплопроводности будет вектор параметров $a_i\ (i=1,2,3)$ или часть его компонентов. Определение этих величин дает решение задачи теплопроводности.

Сведения о теплофизических характеристиках металлических материалов обобщены в трудах [11-13]. Особенно нужно отметит, что в [4,11-13] изучен химический состав металлических материалов и приведены основные теплофизические характеристики теплоемкости, коэффициенты теплопроводности и линейного расширения металлов и сплавов при температурах от 0 до 3000 К.

С целью оценки точности предложенного экспериментально-расчетного метода [10-13] проведем численные расчеты по формулам (5). Для этого используем данные и табличные значения, приведенные в работах [10-13].

Используя эти табличные значения, определяем коэффициенты $a_i\ (i=1,2,3)$, в результате имеем следующие выражения:

– для особо чистого алюминия a_0=-5.06558*10^{-4}; a_1=-5.1444; a_2=258.535021;

$$\lambda(T)=258.535021-5.1444T-5.06558*10^{-4}T^2; \quad (6)$$

– для железа Fe a_0=0,005715062; a_1=0,12655763; a_2=1,098735751;

$$\lambda(T)=1.098735751+0.12655763T+0.005715062T^2; \quad (7)$$

– для конструкционных материалов a_0=-0,000406063; a_1=0,003602407; a_2=0,325708831;

$$\lambda(T)=0.325708831+0.003602407\ T-0.000406063\ T^2; \quad (8)$$

– для циркония Zr a_0=0,000139693; a_1=-0,00415774; a_2=0,225809189;

$$\lambda(T)=0.225809189-0.00415774\ T+0.000139693\ T^2; \quad (9)$$

– для алюминия Al a_0=-0,048908366; a_1=0,642378464; a_2=0,408212183;

$$\lambda(T) = 0.408212183 + 0.642378464\,T - 0.048908366\,T^2; \quad (10)$$

– для диоксида урана UO_2 при ρ=10960кг/м^3 a_0=0,000946609; a_1=-0,020457; a_2=0,149497954;

$$\lambda(T) = 0.149497954 - 0.020457\,T + 0.000946609\,T^2; \quad (11)$$

В таблицах 1-6 и на рисунках 1-6 приведены результат численного расчёта значения коэффициента теплопроводности по формулам (6), (7), (8), (9), (10) и (11), соответственно в зависимости от температуры для различных металлических материалов.

Таблица 1 – Температурные зависимости теплопроводности особо чистого алюминия

T, K	300	400	500	600	700	800	900	933,61
λ	243,097	237,949	232,80	227,65	222,5	217,35	212,19	210,46
λ в [1]	237	240	236	230	225	218	210	208

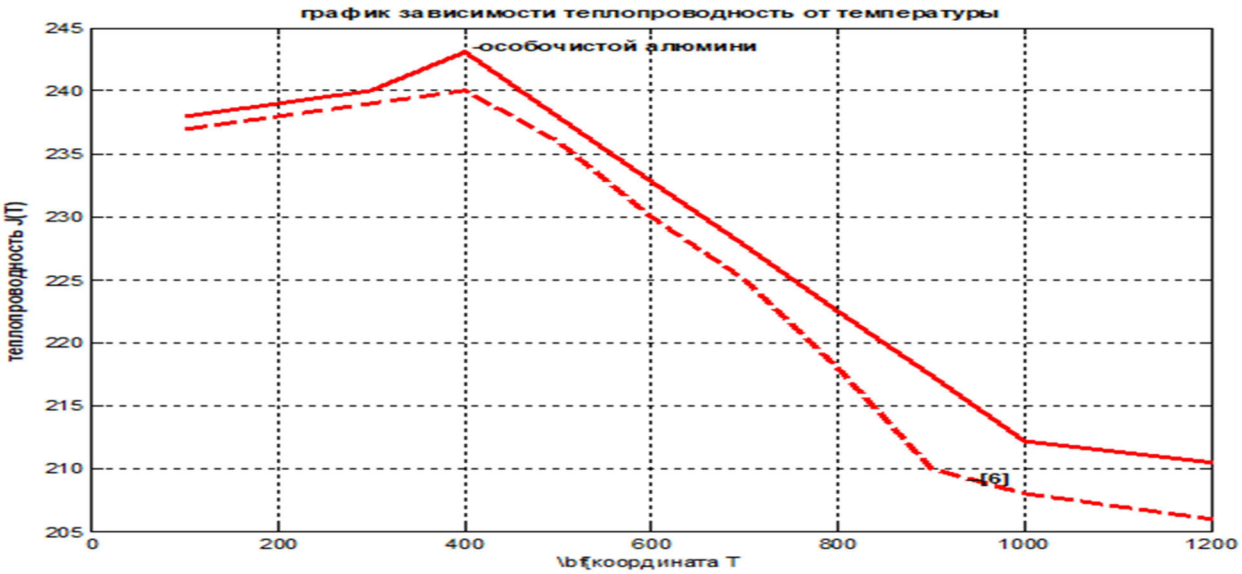


Рисунок 1 – Температурные зависимости теплопроводности особо чистого алюминия

Таблица 2 – Температурные зависимости теплопроводности железа Fe

T, K	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1200
λ	97,79	86,848	77,0498	68,3946	60,8824	54,51	49,287	45,2	42,26	40,467	40,3
λ в [3]	98	87	77	68	60	55	50	45	42	41	40

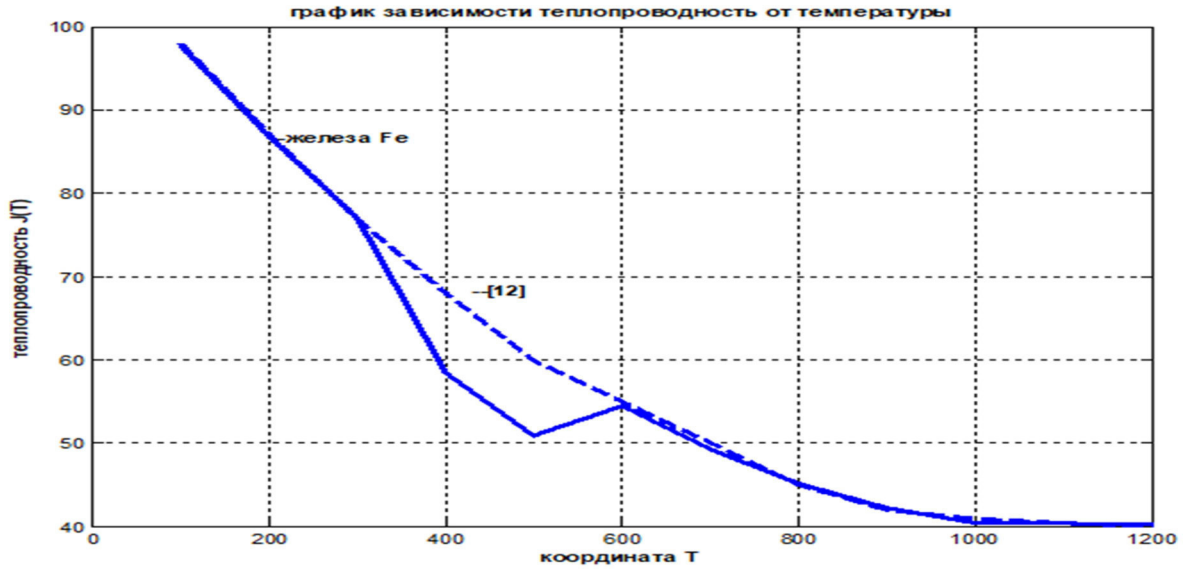


Рисунок 2 – Температурные зависимости теплопроводности железа Fe

Таблица 3 – Температурные зависимости теплопроводности конструкционных материалов

T, K	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1200	1400
λ	33,13	33,286	33,36	33,357	33,27	33,1	32,85	32,52	32,11	31,046	29,66
λ в [3]	33	33,2	33,3	33,4	33,5	33,6	33,2	32,1	31,6	30,8	30

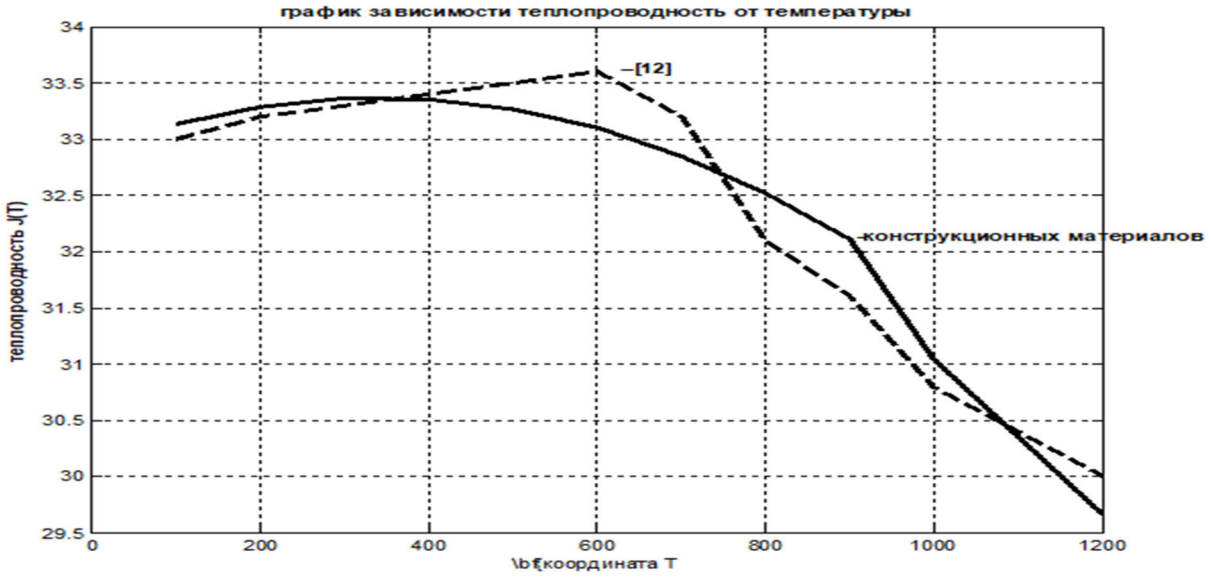


Рисунок 3 – Температурные зависимости теплопроводности конструкционных материалов

Таблица 4 – Температурные зависимости теплопроводности циркония Zr

T, K	100	223	293	373	473	573	673	773	873	973	1073
λ	22,179	21,72	21,48	21,22	20,9	20,7	20,4	20,2	20,0	19,86	19,7
λ в [3]	22,3	21,7	21,4	21,2	20,9	20,6	20,4	20,2	20,1	19,9	19,8

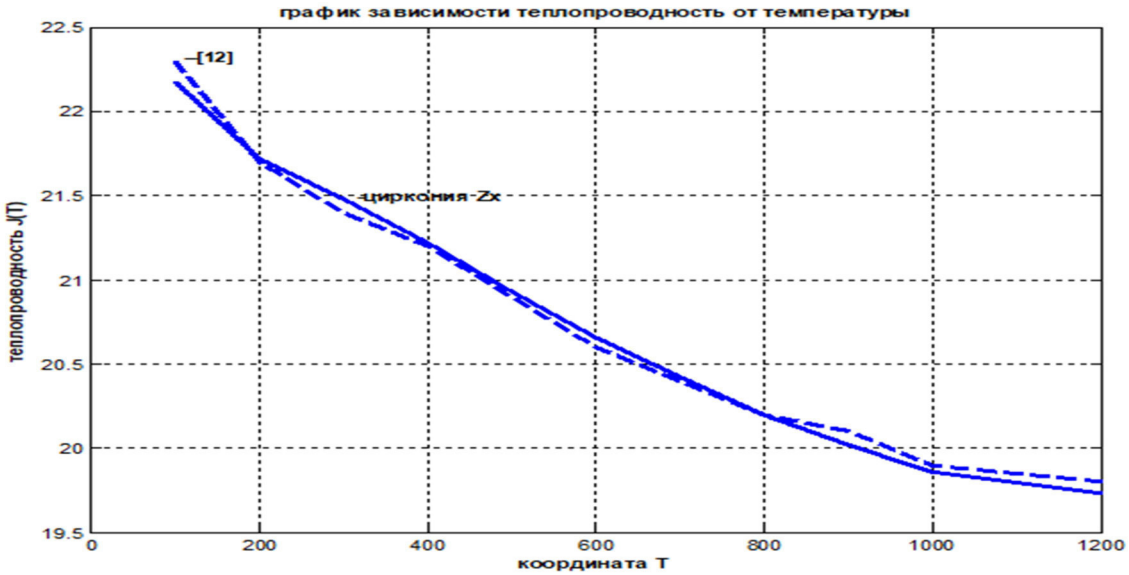


Рисунок 4 – Температурные зависимости теплопроводности циркония Zr

Таблица 5 – Температурные зависимости теплопроводности алюминия Al

T, K	273	293	393	493	593	693	793	893	993	1093	1293
λ	179,74	187,05	217,74	238,64	249,77	251,1	242,67	224,45	196,4	157,67	53,74
λ в [3]	197	201	207	213	222	233	251	271	282	61	62

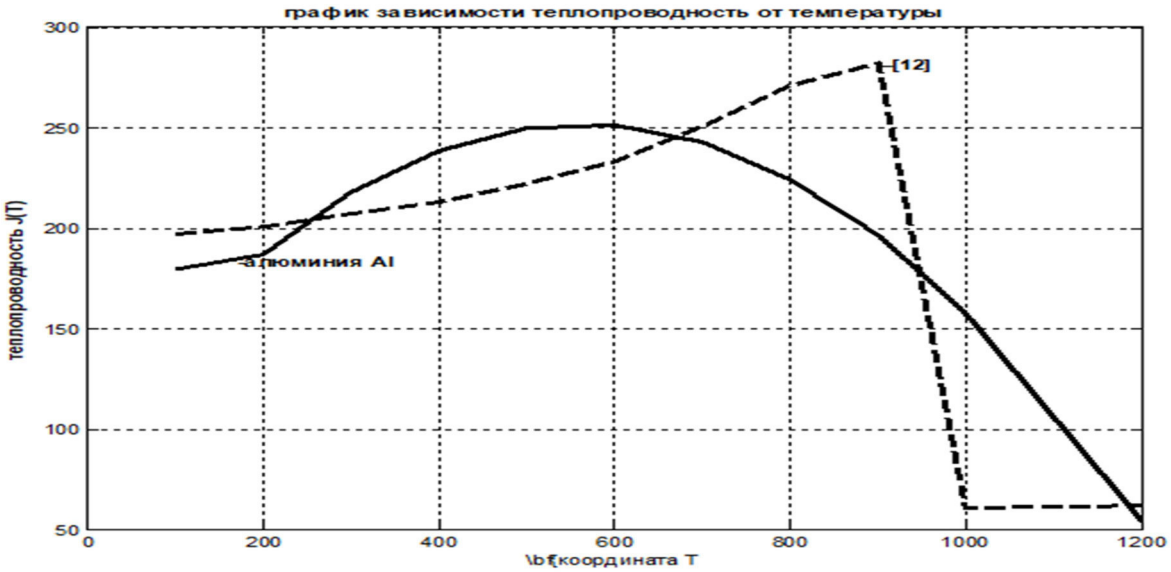


Рисунок 5 – Температурные зависимости теплопроводности алюминия Al

Таблица 6 – Температурные зависимости теплопроводности диоксида урана UO_2

T, K	273	300	373	473	573	673	773	873	973	1073	1173
λ	10,07	9,66	8,64	7,39	6,34	5,47	4,79	4,31	4,01	3,9	3,98
λ в [4]	10,35	9,7	8,46	7,15	6,19	5,46	4,88	4,41	4,22	4,03	3,71

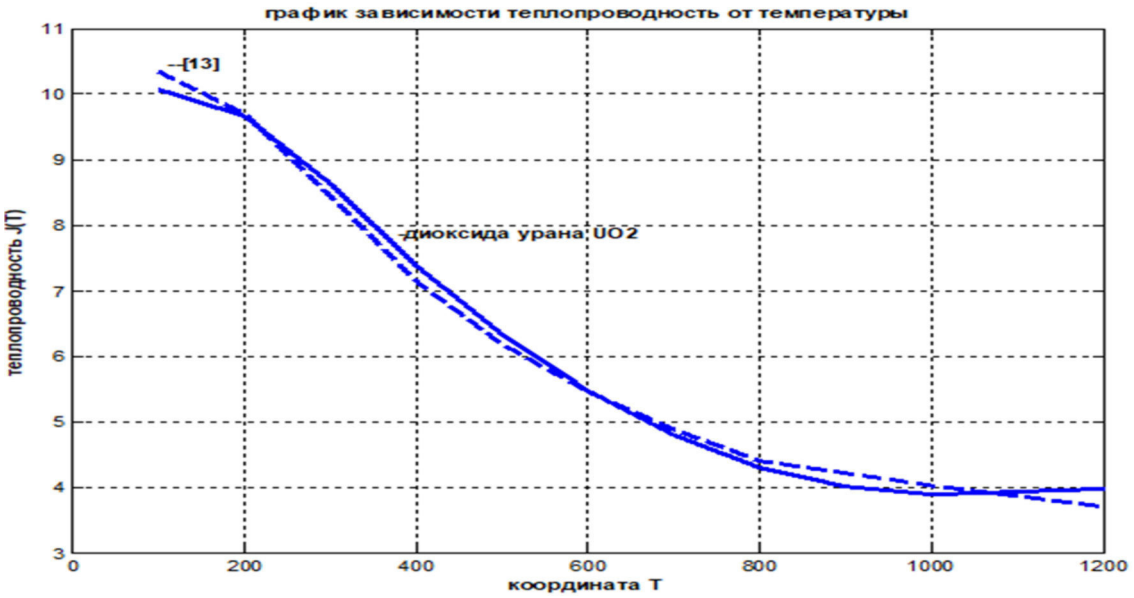


Рисунок 6 – Температурные зависимости теплопроводности диоксида урана UO_2

В таблицах 1-6 полученные данные сравнивались с известными результатами [2-4]. Сравнение показывает, что теплопроводность отличается незначительно во всем температурном интервале проведенных модельных исследований.

Причем, теплопроводность алюминия сообщает покрытиям хорошие электроизолирующие свойства, высокую прочность, однако композиции на его основе отличаются невысоким термическим коэффициентом линейного расширения. Этот недостаток отсутствует в механических смесях [2]. В этой связи, в начале температурного диапазона теплопроводность алюминия несколько меньше теплопроводности особо чистого алюминия (таблица 1 и 5), однако при повышении температуры становится более высокой, чем у сравниваемого образца.

Из рис. 1-6 видно, что с ростом температуры теплопроводность металлических материалов уменьшается.

Тем ни менее, модельных исследований у этих материалов минимальный уровень теплопроводности не является достаточным для обработки экспериментальных данных. В связи с этим было проведено численный метод исследования, в небольшой степени влияющей на исследуемое свойство, а именно, нелинейности теплопроводности металлических материалов.

В заключение отметим, что предложенная модель определения теплопроводности металлических материалов позволила исследовать изменение этой характеристики для различных металлов и сплавов в широком интервале температур.

Сравнение полученных значений теплопроводности различных металлических материалов со справочными данными показало их совпадение в пределах (0,1%-0,2%) во всем температурном интервале изменений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Низомов З. Измерение удельной теплоемкости твердых тел методом охлаждения / З. Низомов, Б. Гулов, Р. Саидов, З. Авезов // Вестник национального университета. -2010. -Вып. 3(59). -С. 136-141.
2. Ведь В.Е. Оценка эффективности тепловой изоляции головок цилиндров ДВС /В.Е. Ведь // Интегрировании технологии и энергосбережения. -1999. -№2. –С.81-85.
3 Чиркин В.С. Теплофизические свойства материалов ядерной техники: справочник /В.С.Чиркин //– М.: Атомиздат, 1968. – 468 с.
4. Кириллов П.Л. Тепломассообмен в ядерных энергетических установках: учебник для вузов /П.Л Крилов, Г.П. Богословская //–М.: Энергоатомиздат, 2000. –456 с.
5. Джураев Х.Ш. Исследование процессов тепло и массопереноса в конденсированных средах методом искусственной гиперболизации / Х.Ш. Джураев, К. Комилов, З.С. Норматов // -Душанбе: Сино. -2019.-101 с.
6. Джураев Х.Ш. Определение теплопроводности некоторых жидких растворов с помощью математической модели явление переноса тепло / Х.Ш. Джураев, З.Ш. Асомиддинов, М.М. Сафаров, А.Н. Умаров // Научно-технический вестник Поволжья, 2018. - №1. -С.19-22.
7. Джураев Х.Ш. Модельное исследование нелинейного нестационарного процесса теплопроводности для одномерной геометрии. / Х.Ш. Джураев, А.Н. Умаров, Салмони Абдурахим // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2019. -№3. –С.104.
8. Джураев Х.Ш. Исследование нелинейного нестационарного процесса теплопроводности в одномерной геометрии /Х.Ш. Джураев, К. Комилов, З.С. Норматов, А.Н. Умаров // Материалы международной научно-практической конференции «Энергетика- основной фактор развития экономики».-Кушониён: Типография Институт энергетики Таджикистан (ИЭТ) ТНУ. -2019. -С. 142-145.
9. Джураев Х.Ш. Температурные зависимости коэффициента температуропроводности при низких значениях теплопроводности /Х.Ш.Джураев, Н.Нарзуллоев, А.Н.Умаров // Материалы Республиканской научно-практической конференции, посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» на тему «Современные проблемы физики конденсированное состояние и ядерная физика». Душанбе: Типография ТНУ. -2020. -С.134-137.
10. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена / О.М. Алифанов // -М.: Машиностроение. -1988. –280 с.
11. Алифанов О.А. Идентификация математических моделей сложного теплообмена. / О.А. Алифанов //-М.: Изд. МАИ, 1999. – 252 с.

12. Джураев Х.Ш. Математическое моделирование нелинейных явлений стационарной теплопроводности /Х.Ш. Джураев, А.М. Наджмиддинов // - Душанбе: Ирфон. -2017. -120 с.
13. Хасанов С.Ш. Моделирование обработки экспериментальных результатов по теплоемкости металлов и сплавов /С.Ш. Хасанов, Х.Ш. Джураев, З. Низомов //Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. Часть 2. -2015. - с. 16-19.
14. Хасанов С.Ш. Математическое моделирование теплового расчета конденсированных среды в зависимости от температуры / С.Ш.Хасанов, З.Ш.Асомиддинов, Х.Ш.Джураев, З.С.Норматов, М.М.Сафаров //Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2017. - №1/4. -С.87-90.

К ВОПРОСУ МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА ПРИ УЧЕТЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СЛАГАЕМЫХ В ВЫСШИХ ПОРЯДКАХ ПО ДЛИНЕ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА

Зо Аунг, С.О. Гладков
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)

В работе приведен подробный вывод уравнения Навье – Стокса с учетом высших поправок по длине свободного пробега молекул. Вычисления сделаны с помощью классического кинетического уравнения Больцмана.

Задача, которой посвящена настоящая статья, связана с решением проблемы вычисления дополнительных поправок к уравнению Навье – Стокса в виде ряда по числу Кнудсена. В большом количестве монографий и оригинальных статьей, так или иначе связанных с гидродинамической теорией жидкостей и газов, которые были нами предварительно просмотрены (например, [1] – [20]) мы не обнаружили решение этой задачи.

Речь идет о вычислении дополнительных поправок к правой части уравнения Навье – Стокса в виде аддитивных слагаемых по числу Кнудсена, определяемого стандартным образом, как $Kn = \frac{l}{L}$, где $l -$ длина свободного пробега молекул жидкости, $L -$ некоторый характерный линейный размер.

Интерес к этому вопросу носит вполне объективный характер, который связан с тем, что в последнее время довольно модными объектами исследования становятся наночастицы, размер которых лежит в диапазоне $10^{-4} - 10^{-6} см$.

Совершенно понятно, что когда речь заходит о размерах такого порядка, то классическое уравнение Навье – Стокса следует несколько модифицировать,

поскольку в этом случае длина свободного молекул жидкости (или газа) будет сравнима с линейным размером наночастицы.

Для решения поставленной задачи мы воспользуемся хорошо проверенным, как теорией, так и практикой, методом кинетического уравнения Больцмана (см., к примеру, [21], [22]). С его помощью мы приведем подробный вывод основного уравнения гидродинамики, в котором учтем все дополнительные слагаемые с точностью членов порядка τ_p^3 по времени релаксации τ_p, где $\mathbf{p}-$ импульс молекулы.

1. Вывод уравнения Навье-Стокса с учетом поправок по числу Кнудсена

Запишем классическое кинетическое уравнение Больцмана в традиционном виде [21] (см. также [22])

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla f+\mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=L(f), \tag{1}$$

где $f=f(t,\mathbf{p},\mathbf{r})-$ искомая функция распределения, $\mathbf{v}-$ скорость молекул, $\mathbf{F}-$ сила, действующая на молекулы, которая в нашем случае просто равна нулю. $L(f)-$ интеграл столкновений. Его явное выражение для максвелловского газа можно записать как (см. [22])

$$L(f)=n\sum|\mathbf{v}-\mathbf{v}_1|\sigma\left[f(\mathbf{v})f(\mathbf{v}_1)-f(\mathbf{v}')f(\mathbf{v}_1')\right],$$

где $n-$ концентрация молекул, $\sigma-$ сечение рассеяния. Заметим, что явный вид этого выражения нам далее не понадобится.

В рамках решаемой нами задачи можно воспользоваться приближением времени релаксации (так называемое «тау-приближение» [21]) и в соответствии с [21] будем искать решение в виде ряда

$$f=f_0+f_1+f_2+\dots\ , \tag{2}$$

где квазиравновесная функция распределения

$$f_0=\frac{1}{Z}e^{-\frac{\varepsilon(p)-\mathbf{pV}}{T}}\ . \tag{3}$$

Заметим, что ряд (2) представляет собой разложение по параметру $\frac{l}{L}$, где $l-$ длина свободного пробега молекул, а $L-$ некоторый характерный размер (в случае, если рассматривается, например, обтекание шара, то его можно считать равным радиусу шара R).

В результате всех вычислений мы приходим к обобщенному уравнению Навье-Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}=-\frac{\nabla P}{\rho}+\nu\Delta\mathbf{V}-\nu^2\tau^*\Delta^2\mathbf{V}+\nu^3\tau^{**2}\Delta^3\mathbf{V}-\nu^4\tau^{***3}\Delta^4\mathbf{V}+\dots, \tag{4}$$

где времена $\tau^{**},\tau^{***},\dots$ легко вычисляются.

Если речь идет об обычных телах, то число Кнудсена мало и последние слагаемые в правой части уравнения (4) можно опустить, что приводит нас к традиционному уравнению гидродинамики. Однако, если речь заходит о движении в вязкой жидкости нанообъектов, то необходимо использовать не уравнения НС, а уравнения в виде (4).

Заключение

1. С помощью кинетического уравнения Больцмана приведен подробный алгоритм вывода уравнения Навье – Стокса в виде ряда по числу Кнудсена;
2. Найдено обобщенное уравнение Навье – Стокса, учитывающее следующие поправки по числу Кнудсена, приводящие к бигармоническому оператору Лапласа в правой части основного уравнения гидродинамики;
3. Подчеркивается важная роль этого слагаемого при изучении свойств наночастиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прандтль Л., Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. В 2-х т. - М., ГИТТЛ, 1933-1935.
2. Ламб Г. Гидродинамика. - М., ГИТТЛ, 1947.
3. Христианович С.А., Гальперин В.Г., Миллионщиков М.Д., Симонов Л.А. Прикладная газовая динамика. - М., ЦАГИ, 1948.
4. Жуковский Н.Е. Собрание сочинений. Том. 2. Гидродинамика. - М., ГИТТЛ, 1949.
5. Липман Г.В., Пакет А.Е. Введение в аэродинамику сжимаемой жидкости. - М., ИЛ, 1949.
6. Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. - М., ГИТТЛ, 1955.
7. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. - М., Физматгиз, 1959.
8. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. - М., ГИИЛ, 1963
9. Серрин Д. Математические основы классической механики жидкости. - М., ГИИЛ, 1963
10. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. В 2-х ч. - М., Физматлит, 1963.
11. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. - М., Мир, 1964.
12. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. В 2-х ч. - М., Наука, 1965-1967.
13. Рауз Х. Механика жидкости. - М., Стройиздат, 1967.
14. Седов Л.И. Механика сплошной среды . В 2-х т. - М., Наука, 1970.
15. Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. - М., Наука, 1971.
16. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М., МГУ, 1971-1990.
17. С.О. Гладков. О доказательстве единственности гидродинамического решения Стокса. Известия вузов. Физика. 2018. Т. 61. В. 6. СС. 103 – 105.

18. S.O. Gladkov. The theory of thermal conductivity and hydrodynamics of Maxwell gas, which is under the influence of an external sound wave. Solid State Communications. 1995. V. 94. N9. PP.789 – 791.
19. С.О. Гладков. О конвективном движении газа в цилиндрическом объеме. Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 12. СС. 71 – 75.
20. С.О. Гладков. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра. ЖТФ. 2018. Т. 59. В. 3. СС. 377 – 341.
21. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Физическая кинетика. Т. 10. М.: Наука. 1979. 528 с.
22. П. Резибуа, М. Де Лернер. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М.: Мир. 1980. 423 с.

ОСОБЕННОСТИ ТЕКСТУРИРОВАНИЯ СОЕДИНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТЕЛЛУРИДА ВИСМУТА

О.Н. Иванов, д.ф.-м.н.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова
e-mail: *olniv@mail.ru*
М.Н. Япрынцев, к.ф.-м.н.
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: *yaprintsev@bsu.edu.ru*
А.Е. Васильев
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: *vasil'ev@bsu.edu.ru*

Способность поликристаллических соединений Bi_2Te_3 к текстурированию определяется, во-первых, анизотропией формы частиц исходного порошка, используемого для получения объемного поликристаллического материала, и, во-вторых, способом компактирования и/или спекания объемного материала. При получении порошка Bi_2Te_3 химическими методами синтеза из различных растворов часто формируются наночастицы в виде тонких гексагональных пластинок [1-5]. Bi_2Te_3 имеет слоистую анизотропную кристаллическую структуру со следующим расположением атомных слоев вдоль кристаллографической оси «*c*»: – $Te^{(1)}$ – Bi – $Te^{(2)}$ – Bi – $Te^{(1)}$ – (надстрочные индексы у Te обозначают два различных координатных состояния у атома теллура). Два слоя $Te^{(1)}$ связаны слабыми Ван-дер-Ваальсовыми связями. В процессе синтеза свободные атомы Te или ионы Te^{2-}, присутствующие в растворе, образуют с атомами растущего кристалла ковалентные связи. Дело в том, что если одиночный атом Te или ион Te^{2-} присоединяется к атомарно-гладкой поверхности кристалла, образованной слоем $Te^{(1)}$, то существует большая вероятность обратного процесса отрыва такого атома или иона от поверхности кристалла с переходом его опять в раствор (из-за слабости Ван-

дер-Ваальсова взаимодействия). В результате кристалл Bi_2Te_3 растет гораздо быстрее в кристаллографических направлениях «*a*» и «*b*», чем в направлении «*c*», т.е. имеет место двумерный (2D) рост. Формирование тонких гексагональных пластинок соответствует модели «насыщения зарождения», в рамках которой предполагается, что в растворе в основном присутствуют индивидуальные атомы или ионы теллура и висмута, а число кластеров Bi_2Te_3 мало [4]. Кроме того, в растворе обязательно должны присутствовать в достаточно большом количестве «зародыши» Bi_2Te_3, ранее сформированные в виде наночастиц по механизму «непрерывного зарождения». Такая наночастица представлена на рис.1. Формирование геометрически правильных гексагональных пластинок (рис. 2) происходит на таких идеальных «зародышах», для которых: а) противоположные поверхности представляют собой две параллельные поверхности из слоев теллура, ориентированные перпендикулярно кристаллографическому направлению «*c*»; б) поверхностные слои теллура заняты атомами $Te^{(1)}$, т.е. число атомных слоев в зародыше должно быть кратно 5; в) на внешних поверхностях зародыша не существует каких-либо уступов или дефектов кристаллической решетки. Идеальные «зародыши» растут в базисной плоскости за счет присоединения индивидуальных атомов Bi и Te в кристаллографических направлениях «*a*» и «*b*», формируя гексагональные пластинки, как это показано на рис. 2.

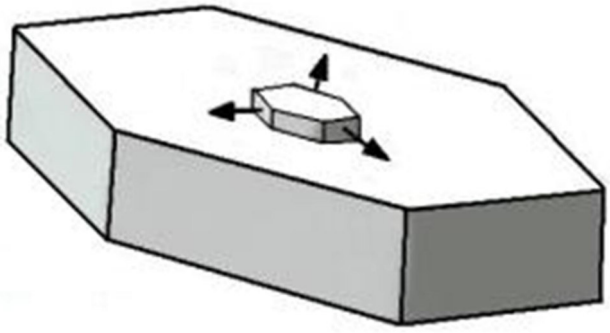


Рисунок 1 – Схематическое изображение формирования наночастицы Bi_2Te_3 в модели «непрерывного зарождения» [4]

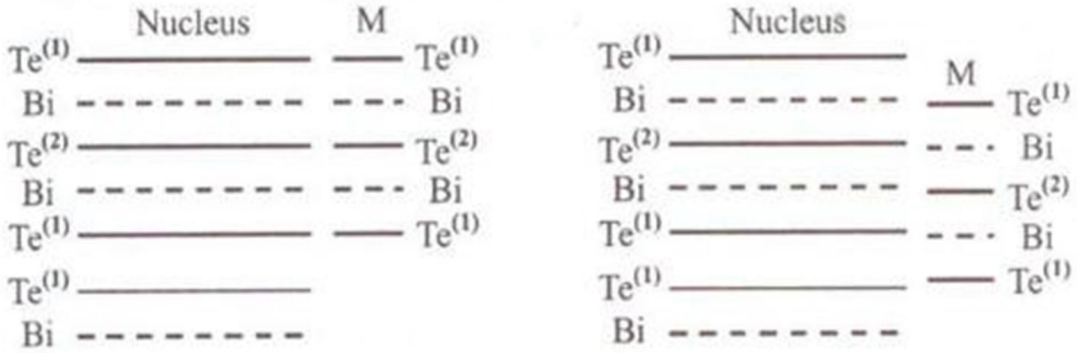


Рисунок 2 – Схематическое изображение роста зародыша Bi_2Te_3 при идеальном сопряжении (слева) атомных плоскостей зародыша (nucleous) и молекулы (M) в процессе роста и в случае разупорядочения этих плоскостей (справа) в модели «насыщения зарождения» [4]

Необходимо подчеркнуть, что поперечные размеры пластинок гораздо

больше их толщины, т.е. пластинки являются двумерными объектами с боль-большим значением фактора формы (фактор формы характеризуется отношением соответствующих размеров).

Наличие двумерных частиц в исходном порошке является необходимым, но не достаточным условием для получения объемного текстурированного материала. Будет ли объемный материал текстурированным или нет, также зависит от способа компактирования исходного порошка и/или спекания скомпактированного материала. В случае использования способов, основанных на изостатическом прессовании (холодное изостатическое прессование и горячее изостатическое или квазиизостатическое прессование), когда к компактируемому телу прикладывается одинаковое давление со всех направлений, тело будет сдавливаться однородно по всей своей поверхности. В результате компактируемый материал будет характеризоваться хаотической ориентацией зерен, подобно хаотической ориентации двумерных частиц в исходном порошке, хотя сами зерна остаются высоко-анизотропными по форме. Физические свойства материала с хаотической ориентацией зерен будут изотропными, хотя свойства самих зерен будут оставаться анизотропными.

При использовании различных способов компактирования порошка, состоящего из двумерных частиц, и основанных на одноосном прессовании (холодное прессование в пресс-формах, искровое плазменное спекание), в компактируемом материале зерна упорядочиваются, т.е. развивается текстура. Двумерные частицы располагаются преимущественно в плоскости, ориентированной перпендикулярно направлению приложения одноосного давления. Это направление и есть ось текстуры. Текстурирование помогает уменьшить механические напряжения, создаваемые во время прессования. Учитывая частичное упорядочение зерен, два специальных направления должны быть введены для характеризации текстуры. Первое направление – ось текстуры, т.е. направление, перпендикулярное плоскости с преимущественной ориентацией зерен, и второе направление должно лежать в этой плоскости. В результате, анизотропия физических свойств, характерная для монокристалла и для каждого отдельного зерна, частично восстанавливается в текстурированном материале.

Схематическое изображение зеренной структуры текстурированного и нетекстурированного материалов на основе Bi_2Te_3 приведены на рис. 3. При построении изображений считалось, что каждое зерно имеет форму параллелепипеда. Такая форма позволяет ясно показать анизотропию физических (термоэлектрических) свойств. Если длинная сторона параллелепипеда параллельна кристаллическим слоям структуры, то термоэлектрические свойства, измеренные вдоль этой стороны, будут определяться свойствами, характерными для плоскостей «a – b» (ρ_{ab}, k_{ab} и S_{ab}), тогда как термоэлектрические свойства, измеренные перпендикулярно этой стороне, будут соответствовать свойствам, определяемым осью «c» (ρ_c, k_c and S_c). Для нетекстурированного образца с хаотической ориентацией зерен, термоэлектрические свойства будут, естественно, изотропными, т.е. не будут

зависеть от направления измерения (ρ_i, k_i and S_i). Чтобы подчеркнуть эту изо-изотропию свойств, форма нетекстурированного образца на рис. 3 выбрана в виде сферы.

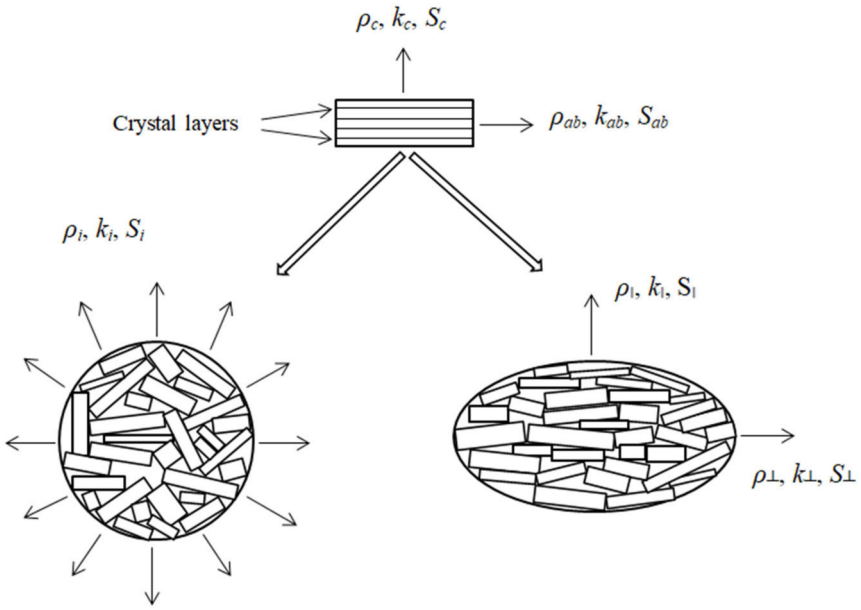


Рисунок 3 – Схематическое изображение зеренной структуры нетекстурированного (слева) и текстурированного (справа) материала на основе Bi_2Te_3.
Вверху представлено изображение отдельного монокристаллического зерна

Для текстурированного образца, зерна преимущественно упорядочены в плоскости, ориентированной перпендикулярно оси текстуры, т.е. оси «*c*» зерен преимущественно ориентированы вдоль оси текстуры, а плоскости «*a* – *b*» - перпендикулярно этой оси. В результате, анизотропия физических свойств, характерная для монокристалла, частично восстанавливается при текстурировании, т.е. свойства, измеренные вдоль и перпендикулярно оси текстуры, будут различны. При измерении вдоль оси текстуры, термоэлектрические свойства $\rho_\parallel$, $k_\parallel$ и $S_\parallel$, будут определяться в основном вкладами ρ_c, k_c и S_c, а при измерении в перпендикулярном направлении термоэлектрические свойства $\rho\perp$, $k\perp$ и $S\perp$ будут определяться уже вкладами ρ_{ab}, k_{ab} и S_{ab}. Чтобы подчеркнуть анизотропию свойств текстурированного образца, его форма на рис. 3 выбрана как эллипсоид. Различие в больших полуосях эллипсоида и будет характеризовать анизотропию термоэлектрических свойств, измеренных вдоль этих полуосей.

Для того чтобы характеризовать различие в термоэлектрических свойствах нетекстурированных и текстурированных образцов, полезно ввести следующие тензоры

$$T_{NT} = \begin{vmatrix} T_i & 0 & 0 \\ 0 & T_i & 0 \\ 0 & 0 & T_i \end{vmatrix} \quad (1)$$

для нетекстурированного образца, и

$$T_T = \begin{vmatrix} T_\perp & 0 & 0 \\ 0 & T_\perp & 0 \\ 0 & 0 & T_\parallel \end{vmatrix} \quad (2)$$

для текстурированного образца, где $T = \rho$, k и S.

Тензор T_{NT} соответствует изотропным термоэлектрическим свойствам нетекстурированного образца, тогда как тензор T_T определяет анизотропные термоэлектрические свойства текстурированного образца, которые различны для двух направлений. Это различие свойств зависит от исходной анизотропии свойств, характерных для монокристалла, и степени текстурирования, которая характеризует степень упорядочения зерен в текстурированном материале (чем выше степень текстурирования, тем больше анизотропия свойств).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, проект № 0625-2020-0015. При исследованиях было использовано оборудование Центра коллективного пользования «Технологии и материалы» Белгородского национального исследовательского университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Deng, X.S. Zhou, G.D. Wei, J. Liu, C.W. Nan, S.J. Zhaoю Solvothermal preparation and characterization of nanocrystalline Bi_2Te_3 powder with different morphology // J. Phys. Chem. Solids. – 2002. – Vol.63. – P. 2119-2122.
2. Y. Xu, Z. Ren, W. Ren, G. Cao, K. Deng, Y. Zhongю Hydrothermal synthesis of single-crystalline Bi_2Te_3 nanoplates // Mater. Lett. – 2008. – Vol. 62. – P. 4273-4265.
3. X.B. Zhao, X.H. Ji, Y.H. Zhang, B.H. Luю Effect of solvent on the microstructures of nanostructured Bi_2Te_3 prepared by solvothermal synthesis // J. Alloys. Compd. – 2004. – Vol. 368. – P. 349-352.
4. X.B. Zhao, X.H. Ji, Y.H. Zhang, G.S. Cao, J.P. Tu. Hydrothermal synthesis and microstructure investigation of nanostructured bismuth telluride powder // Appl. Phys. A: Mater. Sci. Process. – 2005. – Vol. 80. – P. 1567-1571.
5. S. Chen, K. Cai, S. Shen. Synthesis via a microwave-assisted wet chemical method and characterization of Bi_2Te_3 with various morphologies // J. Electron. Mater. – 2016. – Vol. 45. – N. 3. – P.1425 – 1432.

УДК 538.91+54-123+519.65

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУЛЛЕРЕНОВ ВИСМУТА

О.И. Марков, д.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *O.I.Markov@mail.ru*
Д.С. Шмелёв
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail*: tailsneogenesis@gmail.com*

Объектом исследований являются фуллерены на основе висмута. В статье представлены результаты компьютерного моделирования фуллеренов висмута Bi_n n=20, 30, 40. .Вычисленные параметры: оптимальная геометрия, характерная длина межатомной связи, ширина запрещенной зоны (HF/DFT), энергия ионизации (HF/DFT).

Ключевые слова: фуллерен, висмут, квантово-химические методы.

1. Введение

Хорошо известны большие углеродные фуллерены, начиная с открытия Крото, Смолли и Керлом в 1985 г [1]. Фуллерен (общепринятое обозначение C_n , n – четное) — это аллотропная модификация углерода, иначе говоря, молекула, в которой атомы углерода образуют полностью или частично замкнутую ячеистую структуру (ячейки представляют собой многоугольники, чаще всего с 5-7 углами). Естественно предположить, что замкнутую фуллереноподобную структуру могут образовывать не только атомы углерода. В 2007 году было предсказано фуллереноподобное образование, состоящее полностью из бора B_{80} [2], а в 2014 году опубликована работа, в которой сообщалось об благополучном синтезе борного фуллерена B_{40} [3].

Объектом настоящих исследований являются фуллерены и нанокластеры на базе висмута. Причина предпочтения висмута в качестве перспективного элемента для создания наноструктурированных материалов на основе фуллеренов имеет несколько важных оснований. Одно из них состоит в том, что висмут и его твердые растворы причисляются к классу полуметаллов и узкозонных полупроводников и обладают широким спектром интересных свойств. Отсюда следует сильная зависимость энергетических параметров объемного висмута от температуры, давления и других внешних физических факторов. Эта специфическая особенность объемного висмута позволяет создавать приборы и датчики различного назначения, обладающие очень высокой чувствительностью к внешним воздействиям. Наиболее известное практическое применение висмута состоит в создании термоэлектрических преобразователей. Как было установлено ранее, наноструктуры висмута с изменением размеров могут переходить из полупроводникового состояния в полуметаллическое, что может оказаться существенным моментом в создании

новых функциональных материалов. В данной работе исследовались фуллере-фуллерены основной группы Bi_n ,n = 20,30, 40.

2. Результаты исследования

Физические свойства объемного висмута достаточно широко исследовались и в теоретическом и экспериментальном плане, но публикации по висмутовым наноструктурам весьма немногочисленны [4–12]. Исследования «классических» фуллеренов на базе висмута проводились лишь в работах [11, 13]. Хорошо известно, что монокристаллический висмут имеет кристаллическую слоистую структуру и т.о. выказывает сходство с графитом. Это может послужить предпосылкой для создания фуллеренов, аналогичных углеродным. Наши предыдущие исследования [7-10] кластеров на основе висмута изначально базировались на предположении слоистой структуры кластеров типа «лодка». В настоящем исследовании предполагалась фуллереноподобная структура, вследствие этого далее такие кластеры далее будут именоваться фуллеренами. Ранее проведённые расчеты кластеров висмута указывали на существование стабильных малых фуллеренов [13], для которых характерной оптимальной структурой является правильная призматическая или близкая к ней. Причиной такой геометрии также может послужить слоистость объемного висмута. Характерная длина межатомной связи таких структур изменяется незначительно и остается меньше 3,15 Å, что свойственно объемному висмуту. Квантовая химия содержит набор методов Хартри-Фока (HF) и функционала плотности (DFT), позволяющих рассчитывать геометрические и энергетические характеристики кластеров сравнительно небольших размеров. В данном, исследовании наибольший интерес представляет изучение влияния структурных особенностей фуллереноподобных наночастиц на ширину щели, определяющую их физические свойства.

В качестве примера на рис.1 приведена геометрическая форма одного из фуллеренов Bi_{20}

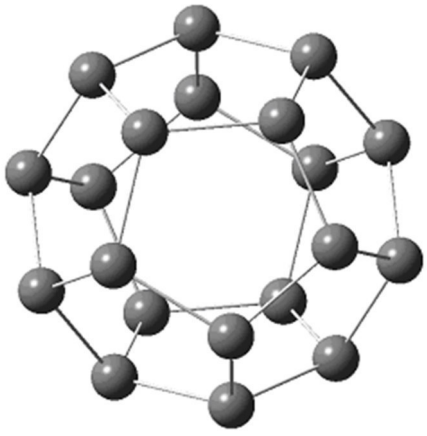


Рисунок 1 – Фуллерен Bi_{20}

Рассчитанные оптимальные расстояния между атомами висмута в рассматриваемых кластерах отображены на графике (Рис.2). Они немного растут с увеличением n и имеют тенденцию приближаться к межатомным расстояниям в монокристаллах объемного висмута, составляющих 3,15 Å.

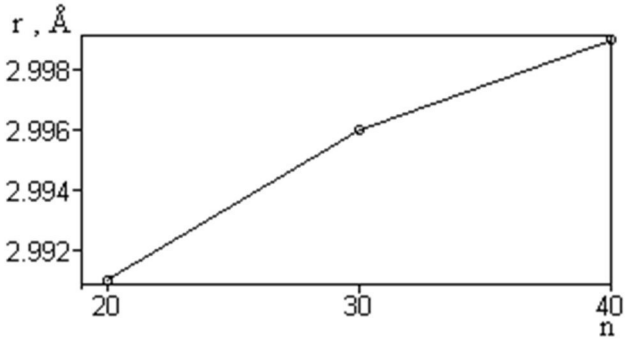


Рисунок 2 – Зависимость межатомных расстояний в фуллеренах висмута Bi_n

Ширина запрещенной зоны рассмотренных фуллеренов рассчитывалась как методом HF , так и DFT. Результаты расчета приведены на рис.3.

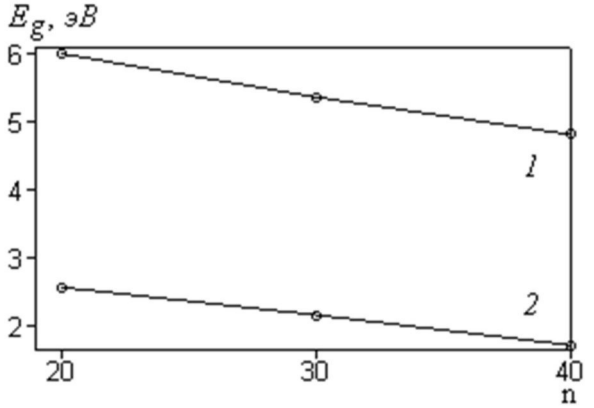


Рисунок 3 – Зависимость ширины запрещенной зоны фуллеренов висмута, рассчитанная методами HF (кривая 1) и DFT (кривая 2)

Ширина запрещённой зоны для двух методов ведёт себя аналогично малым фуллеренам [13], т.е. с ростом n медленно сужается. Различие между данными, полученными разными методами отличаются достаточно велико, и, согласно расчету методом HF, висмутовые фуллерены являются диэлектриками, а методом DFT полупроводниками.

Данные по расчету энергии ионизации в кластерах представлены графически на рис.4. Энергия ионизации фуллеренов в целом незначительно уменьшается с ростом n; причем, методы HF и DFT также дают несколько отличающуюся по значениям и по характеру зависимость от числа атомов в фуллерене n.

Большее доверие вызывают результаты, полученные методом HF , потому что они лучше всего коррелируют с литературными данными, а именно, с энергией ионизации висмута 7,3 эВ, а также работой выхода для поликристалла висмута, составляющей 4,4 эВ.

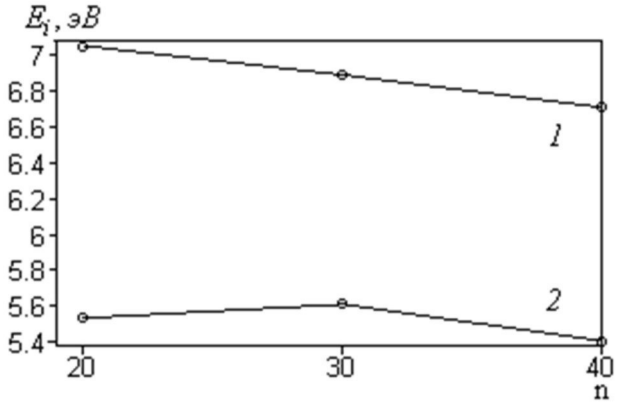


Рисунок 4 – Зависимость энергии ионизации фуллеренов висмута, рассчитанная методами HF (кривая 1) и DFT (кривая 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kroto H, W., Heath J.R., O'Brien S.C., Curl R.F., Smalley R.E. C60: Buckminsterfullerene // Nature. –1985. – Vol.318, – P.162.
2. Gonzalez Szwacki N., Sadrzadeh A., Yakobson B.I. B80 Fullerene: An Ab Initio Prediction of Geometry, Stability, and Electronic Structure // Phys. Rev. Lett. – 2007. Vol. 98, – № 16. – P. 166804.
3. Zhai H.-J. et al. Observation of an all-boron fullerene // Nat. Chem. – 2014. – Vol. 6. – P. 727–731.
4. Kuznetsov A.N., Kloo L., Lindsjo M., Rosdahl J., Stoll H. Ab Initio Calculations on Bismuth Cluster Polycations. // Chemistry A. European Journal. – 2001. – Vol. 7. – pp. 2821-2828.
5. Liming G., Pinglin L., Heqiang L., Shunfang Li., Xiao G. Z. Size- and charge-dependent geometric and electronic structures of Bi_n (Bin-) clusters (n=2-13) by first-principles simulations. / / The Journal of Chemical Physics. – 2008. – Vol. 128, – Issue 19, id. 194304. – pp. 1-9.
6. Esmail A., Abdel-Fattah M., Elsayed-Ali H. E.Nonuniformity in lattice contraction of bismuth nanoclusters heated near its melting point. // Journal of Applied Physics. – 2011. – Vol. 109, id. 084317. – pp. 1-6.
7. Хрипунов Ю.В., Марков О.И., Грибанов Е.Н Моделирование нанокластеров висмута квантово-химическими методами // Сборник материалов IV Всероссийской конференции по наноматериалам. М. ИМЕТ РАН. – 2011. – С.136.
8. Грибанов Е.Н., Марков О.И., Хрипунов Ю.В. Квантово-химическое моделирование кластеров висмута // Межвуз. сб. науч. тр. «Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов». Вып. 3. – Тверь: ТГУ– 2011. – С. 27– 32.
9. Gribanov E.N., Markov O.I., Khripunov Yu.V. When Does Bismuth Become a Semimetal? // Nanotechnologies in Russia. – 2011. – Vol. 6, №№9-10. – pp. 593–596.

10. Грибанов Е.Н., Марков О.И., Хрипунов Ю.В. Расчет кластеров висмута квантово-химическими методами // Химическая физика и мезоскопия. – 2012. – Т. 14. – № 1. – С. 40-46.
11. Kharisova O.V., Osorio M., Va´zquez M. S., Kharisov B.I. Computational chemistry calculations of stability for bismuth nanotubes, fullerene-like structures and hydrogen-containing nanostructures. //Journal of Molecular Modeling. – 2012. – Vol. 18, – Issue 8. – pp. 3981– 3992.
12. Грибанов Е.Н., Марков О.И., Хрипунов Ю.В. Квантово-химическое моделирование кластеров на основе висмута // Materials Physics and Mechanics. – 2020. –Т. 43. – № 1. – С. 72-83.
13. Марков О.И., Шмелев Д.С. Моделирование малых висмут - фуллеренов. В сб. V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук». Орёл, ОГУ. 2019. – С. 383-387.

УДК 538.95

СПЕКТРЫ ЗЕЛЁНОЙ ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ ОБРАЗЦА CVD ZnSe С РАЗЛИЧНЫХ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ

М.А. Мусаев, д.ф.н., проф.
Азербайджанский Университет Нефти и Промышленности
e-mail: *m_musaver@yahoo.com*
И.И. Аббасов, к.ф.-м.н., дос.
Азербайджанский Университет Нефти и Промышленности
e-mail: *ibrahimabbasov179@gmail.com*
Е.М. Гаврищук, д.х.н., проф.
Институт химии высокочистых веществ Российской АН
e-mail: *egavr@ihps-nnov.ru*
Дж.И. Гусейнов, д.ф.н., дос.
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
e-mail: *cahangir.adpu@mail.ru*
С.Г. Нуриева
Бакинский Государственный Университет
e-mail: *aliyeva-s@list.ru*
Л.А. Алиева
Институт Физики Азербайджанской НАН
e-mail: *lale-al.@gmail.com*
Р.Ш. Рагимов, к.ф.-м.н., доц.
Бакинский Государственный Университет
e-mail: *rehim@rehimli.info*

Исследованы спектры зелёной ФЛ в области длин волн 540-565нм при возбуждении излучением ксеноновой лампы нелегированного образца CVD ZnSe с различных точек

поверхности – при нормальном падении квантов на полированную и шлифованную поверх-поверхность одного того же образца (T=300K).

Ключевые слова: поликристаллический селенид цинка, метод химического осаждения из газовой фазы (CVD), зелёная полоса спектров ФЛ поликристаллического ZnSe, спектры фотолюминесценции.

Селенид цинка и в настоящее время сохраняет актуальность как наиболее перспективный широкозонный материал типа A_2B_6 для полупроводниковой оптоэлектроники, в том числе для приборов коротковолновой полупроводниковой электроники, систем отображения информации, светодиодной техники, детекторов рентгеновского излучения и прозрачных окон для лазеров в ИК областях. Селенид цинка обладает необходимым набором физико-химических параметров для создания на его основе светодиодов сине-голубых источников спонтанного [1,2] и вынужденного [3] излучений. Кроме этого, в последнее время интенсивно изучается роль поверхности в люминесцентных процессах [4,5,6]. Это связано с тем, что в этих структурах электрические, фотоэлектрические и оптические свойства подвержены сильному влиянию электронных процессов, происходящих на их поверхности.

Цель данной работы заключается исследовании спектров фотолюминесценции, охватывающих область 540-565нм, наблюдаемых с разных точек образца при возбуждении ксеноновой лампы: при нормальном падении квантов на полированную и шлифованную поверхность нелегированного одного того же образца CVD ZnSe. Все измерения проводились при комнатной температуре (T=300K). Образцы поликристаллического CVD ZnSe толщиной 3 mm были получены методом химического осаждения из газовой фазы [7]. Выращивание кристаллов из паровой фазы происходит при более низкой температуре по сравнению с расплавной технологией. Это способствует снижению концентрации объемных дефектов, а также позволяет уменьшить загрязнение растущего кристалла материалом ампулы.

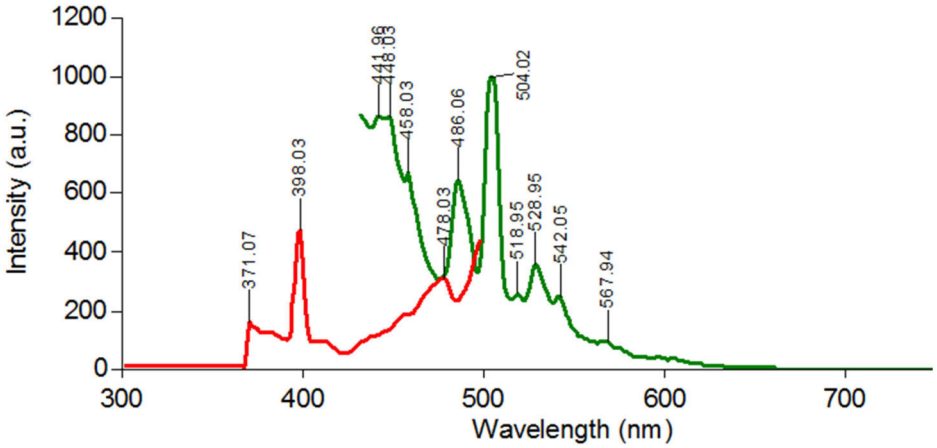


Рисунок 1 – Спектр ФЛ поликристаллического CVD ZnSe при возбуждении ксеноновой лампой , λ_{ex}=370 nm, зелёная линия ; красная линия – спектр возбуждения максимума 542нм

Исследование люминесцентных свойств поликристаллического CVD ZnSe проводилось с помощью спектрофлуориметра Cary Eclipse производства фирмы Varian. В качестве источника излучения используется ксеноновая лампа с продлённым временем жизни, работающая в импульсном режиме с шириной импульса 2 мкс и мощностью 75 кВт. Монохроматоры спектрофлуориметра имеют дифракционные решетки с параметрами 1200 штрихов/мм и программное обеспечение, позволяющее определить длину волны до 0,01 нм. Оба монохроматора обладают высокоскоростными сканирующими способностями.

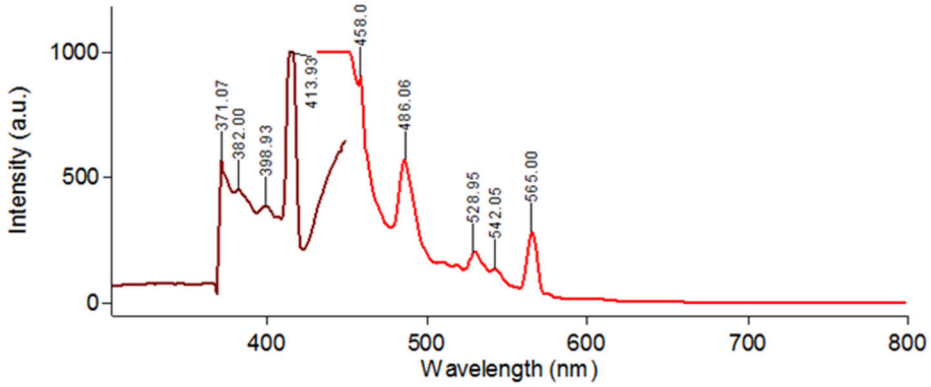


Рисунок 2 – Спектр ФЛ поликристаллического CVD ZnSe при возбуждении ксеноновой лампой , λ_{ex}=414 nm, красная линия; фиолетовая линия – спектр возбуждения максимума 565нм

Программное обеспечение прибора позволяет выбирать различные режимы измерений и контролировать при этом рабочие элементы. Спектры излучения (рис.1-4) были сняты при спектральной ширине щели 2,5 нм и регистрировались в диапазоне длин волн от 400 до 900 нм со спектральным разрешением ~0,024 нм. Возбуждение образца осуществлялось светом с длиной волны λ_{ex} = 370нм и 414нм ($hv_{ex} > E_g$) с полированной и со шлифованной поверхности поликристаллического образца CVD ZnSe (T=300K). В этом случае наблюдаемые спектры ФЛ образца охватывают широкую спектральную область в диапазоне 440-800нм.

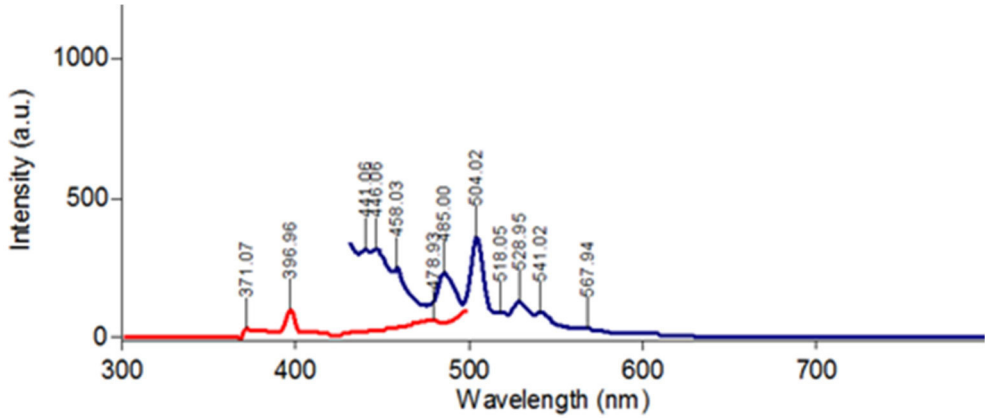


Рисунок 3 – Спектр ФЛ поликристаллического CVD ZnSe при возбуждении ксеноновой лампой, λ_{ex}=414 nm, фиолетовая линия; красная линия – спектр возбуждения максимума 542нм

Спектры люминесценции, показанные на рис. 1,2 регистрировались при возбуждении с полированной поверхности образца излучением ксеноновой лампы при длинах волн λ_{ex} = 414нм ($hv_{ex} > E_g$). Наряду со спектром ФЛ, на рис.1, 2 показаны спектры возбуждения (СВЛ) для максимумов 542нм и 565нм и видно, что максимумы СВЛ для 542нм лежат в области длин волн от 370нм до 479нм, а для максимума 565 нм – в области от 370нм до 414нм.

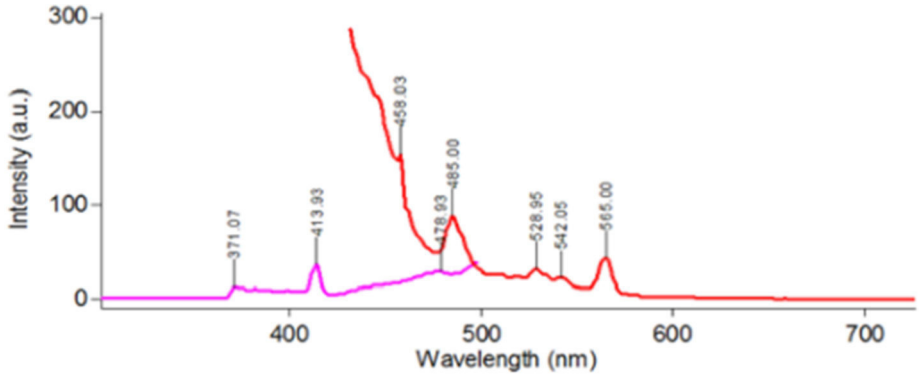


Рисунок 4 – Спектр ФЛ поликристаллического CVD ZnSe при возбуждении ксеноновой лампой , λ_{ex}=414 nm, красная линия; оранжевая линия – спектр возбуждения максимума 565нм

Спектры люминесценции, показанные на рис. 3,4 регистрировались при возбуждении со шлифованной поверхности образца излучением ксеноновой лампы при длинах волн λ_{ex} = 370нм и 414нм нм ($hv_{ex} > E_g$). В этом случае также наряду со спектром ФЛ на рис. 3, 4 показаны СВЛ для максимумов 541нм и 565нм и видно, что максимумы СВЛ для 541нм и 565нм лежат в области длин волн от 370нм до 479нм.

Как видно из рис. 1,3 пик при длине волны 542нм наиболее эффективно возбуждается фотонами свечения λ_{ex} = 398нм , а пик при 565нм (рис. 2,4) возбуждается при λ_{ex} = 414нм. Максимумы СВЛ λ_{ex} = 398нм ,414нм лежат в области собственного поглощения CVD ZnSe, а зеленые полосы с максимумами 541нм и 565нм, которые наблюдаются с разных точек поверхности образца, относятся к одному и тому же центру свечения. Поэтому можно предполагать, что в кристаллах с малым содержанием меди (как фоновой примеси) зелёная полоса в спектре люминесценции наблюдается за счёт возбуждения светом из области собственного поглощения CVD ZnSe и не зависит от обработки поверхности исследуемого образца. Авторы [8,9,10] предполагают, что зелёное свечение обусловлено переходом электронов с мелкого донора на ассоциативный акцепторный центр, который включает в себя кислород и медь-$\{Cu_iO_{se}\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Георгобиани, А.Н., Котляревский, М.Б. Проблемы создания инжекционных светодиодов на основе широкозонных полупроводниковых соединений // Известия АН СССР. Сер. Физика. 1985. т.49,№10. С. 1916.
2. Ильчук, Г.А., Рудь, В.Ю., Рудь, Ю.В., Бекимбетов Р.Н., Иванов-Омский, В.И., Украинец, Н.А. Фоточувствительность структур на основе

монокристаллов ZnSe // ФТП. Физика и техника полупроводников. 2000. №. 7. С. 809.
3. Бережной, К. В., Насибов, А.С., Шапкин, П.В., Шпак, В.Г., Шунайлов, С.А., Яландин, М.И. Излучение пластин селенида цинка при возбуждении импульсным электрическим полем // Квантовая электроника. 2008.т.38, № 9. С. 829.
4. Billie L Abrams, Paul H Holloway. Role of the surface in luminescent processes // Chem. Rev. Chemical Reviews. 2004. no. 12. P. 5783.
5. Manhas, M, Vinay Kumar, Ntwaeaborwa, O M, Swart, H.C. Structural, surface and luminescence properties of $Ca_3B_2O_6:Dy^{3+}$ phosphors // Ceram. Int. Ceramics International**.** 2016. no 5. P. 5743.
6. Abbasov, I., Musayev, M., Huseynov, J., Kostyrko, M., Babayev, S., Eyyubov, G. , Aliyeva S. Photoluminescence spectra of polycrystalline ZnSe in different experimental geometries // Ukr. J. Phys. Opt. Ukrainian Journal of Physical Optics. 2020. no. 2. P. 103. doi: 10.3116/16091833/21/2/103/2020
7. Девятых, Г.Г., Гаврищук, Е.М., Даданов А.Ю. Исследование кинетики химического осаждения селенида цинка из газовой фазы в горизонтальном проточном реакторе // Высокочистые вещества. 1990. № 4. С. 174.
8. Морозова, Н.К., Мирошникова, И.Н. Аномальное краевое свечение ZnSe, сильно легированного кислородом // ФТП. Физика и техника полупроводников, 2020. № 1. С. 59
9. Морозова, Н. К., Каретников, И. А., Блинов, В. В., Гаврищук, Е. М. Исследование спектров инфракрасной люминесценции ZnSe, содержащего медь и кислород // ФТП. Физика и техника полупроводников. 2001. № 5. С. 534
10. Иванова, Г.Н., Касиян, В.А., Недеогло, Д.Д., Опря, С.В. Влияние способа легирования кристаллов n-ZnSe медью на структуру центров свечения длинноволновой люминесценции // ФТП. Физика и техника полупроводников. 1998. № 2. С. 171.

УДК 534.16

КЛАСТЕРЫ В ИНТЕРМЕТАЛЛИДАХ ТИПА ФАЗЫ ЛАВЕСА: СТРУКТУРНЫЕ МОТИВЫ ИЛИ ФИЗИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ?

Д.А. Серебренников, к.ф.-м.н.,
Балтийский федеральный университет им. И. Канта
e-mail: *dimafania@mail.ru*
Е.С. Клементьев
Балтийский федеральный университет им. И. Канта
e-mail: *EKlementev@kantiana.ru*

В работе исследуется возможность применения модели суператома для описания низкоэнергетической динамики кристаллической решетки структурных соединений типа фазы Лавеса. Приводится сравнение экспериментальных и модельных спектров плотности фононных состояний соединений $LaAl_2$ и YNi_2.

Ключевые слова: фазы Лавеса, модель суператома, фононы.

1. Введение

Соединения на основе ковалентных связей с гибридизацией атомных орбиталей часто склонны к образованию кристаллических структур с двумерными атомными слоями или трехмерными кластерами в форме тетраэдров, октаэдров и других многогранников. Как правило, силы, действующие внутри кластера, намного сильнее сил, действующих между этими кластерами [1]. Примером могут служить различные минералы, наиболее известным из которых является кварц. Его кристаллическая структура состоит из тетраэдров SiO_4, связанных друг с другом общими атомами кислорода, и образующих таким образом бесконечный каркас связанных тетраэдров. Кварц существует в двух формах: тригональной α-фазе и высокотемпературной гексагональной β-фазе. Тетраэдры сохраняют свой размер и форму во время α-β-перехода, поэтому фазовые переходы в кварце носят смещающий характер и определяются мягкими фононными модами, не искажающими тетраэдры. Такие моды колебаний получили название rigid-unit modes (RUMs) в работах [1-3]. С целью определения набора RUM в кварце авторы работ [1-3] разработали новый подход, основанный на приближении, согласно которому каждый тетраэдр рассматривается как бесконечно жесткий кластер. Используя далее молекулярное моделирование было выявлено, что низкочастотная динамика решетки кварца связана в основном с движением и наклоном тетраэдров, в то время как искажения тетраэдров порождают высокочастотные фононные моды.

Подобная минералам каркасно-кластерная структура часто наблюдается и в других соединениях, например высших боридах или фазах Лавеса (рисунок 1).

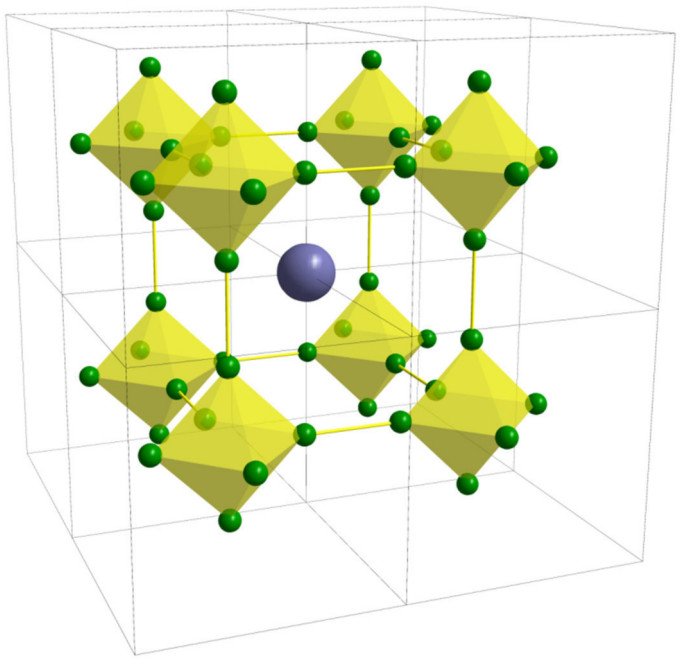


Рисунок 1 – Кристаллическая структура гексаборидов (структура типа CaB_6)

Из измерений методом неупругого рассеяния нейтронов Алексеев и др. [4-6] определили парциальные плотности фононных состояний (ПФС) в гекса- и додекаборидах методом «изотопического контраста» и обнаружили, что тепловые колебания атомов металлов в основном сосредоточены в области низких энергий, в то время как высокоэнергетические колебания в основном связаны с движениями борных кластеров, включая его деформацию. Эти особенности позволили авторам настоящей работы применить схожий к RUM подход, а именно модель «суператома» (МС) для описания низкоэнергетической динамики решетки этих систем [7,8]. Основная идея модели заключается в том, что «суператом» рассматривается как единая частица с массой, равной сумме масс всех атомов, входящих в кластер. В этой модели мы пренебрегаем высокочастотными фононными модами, связанными с искажениями кластера, и анализируем только низкочастотные колебания решетки. Используя этот подход, мы количественно описали аномальное смягчение продольных акустических фононных мод, имеющих место в GdB_6, TbB_6 и DyB_6 в [7].

В этой работе мы также стремимся применить концепцию «суператома» для описания низкоэнергетической динамики решетки интерметаллических соединений типа фазы Лавеса.

2. Описание модели

Суть МС заключается в идентификации каждого кластера прочно связанных атомов как суператома, масса которого равна сумме масс атомов в кластере. В наших ранних работах [7,8] использование модели не привело к изменению пространственной группы: в случае гексаборидов структура типа CaB_6 была упрощена до структуры типа CsCl (обе структуры принадлежат к простран-

ственной группе 221); что касается додекаборидов, структура типа UB_{12} была преобразована в структуру типа NaCl (обе структуры имеют 225 пространственных групп). Причина этого, очевидно, заключается в высокой симметрии рассматриваемых систем.

Модель способна значительно упростить кристаллическую структуру, пренебречь высокочастотными фононными модами, связанными с колебаниями атомов внутри кластера, и уменьшить количество феноменологических параметров, необходимых для моделирования динамики решетки. В соответствии с классической теорией гармонического осциллятора и нашими более ранними результатами по высшим боридам необходимые условия для применимости МС (как мы видим это в данный момент) можно резюмировать следующим образом: химические связи между атомами в кластере должны быть очень жесткими, помимо этого в системе должна быть большая иерархия масс, то есть «суператом» должен состоять из легких элементов, тогда как другие атомы должны быть намного тяжелее. Оба условия определяют высокочастотные колебания атомов в кластере и минимизируют их вклад в низкочастотную часть, моделируемую МС. Очевидно, МС нельзя использовать для анализа взаимодействий между атомами в кластерах, в то же время все другие межатомные взаимодействия можно количественно описать с помощью любого метода, который определяет матрицу силовых констант в системе. В настоящей и предыдущих работах мы использовали простой метод Борна фон Кармана [9]. Метод основан на гармоническом приближении. Если местоположение атома можно описать через радиус-вектор $r(t) = r(k) + r(N)$, где $r(k)$ - радиус-вектор k атома в элементарной ячейке, а радиус-вектор $r(N)$ определяет номер ячейки, тогда уравнение движения можно выразить следующим образом:

$$m_k \ddot{u}_{kN} = -\sum_{k'} \sum_{N'} V(kN, k'N') u_{k'N'} \quad (1)$$

где m - масса атома; u - смещение атома из положения равновесия; $V(kN, k'N')$ - межатомный потенциал между атомами (k, N) и (k', N').

В самом общем случае $V(kN, k'N')$ является тензором второго ранга, т.е. каждое межатомное взаимодействие описывается 6 силовыми константами:

$$V(kN, k'N') = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix} \quad (2)$$

где V_{xy} - силовая константа, определяющая x-составляющую силы, действующей на атом (kN), из-за смещения атома (k', N') в направлении y.

В модели Борна фон Кармана компоненты матрицы $V(kN, k'N')$ рассматриваются непосредственно как переменные модели. При этом, предполагая, что силы являются центральными силами, количество параметров модели сокращается до двух:

$$L = \frac{d^2 V(kN,k'N')}{dr_0^2}, T = \frac{1}{r_0} \frac{dV(kN,k'N')}{dr_0} \quad (3)$$

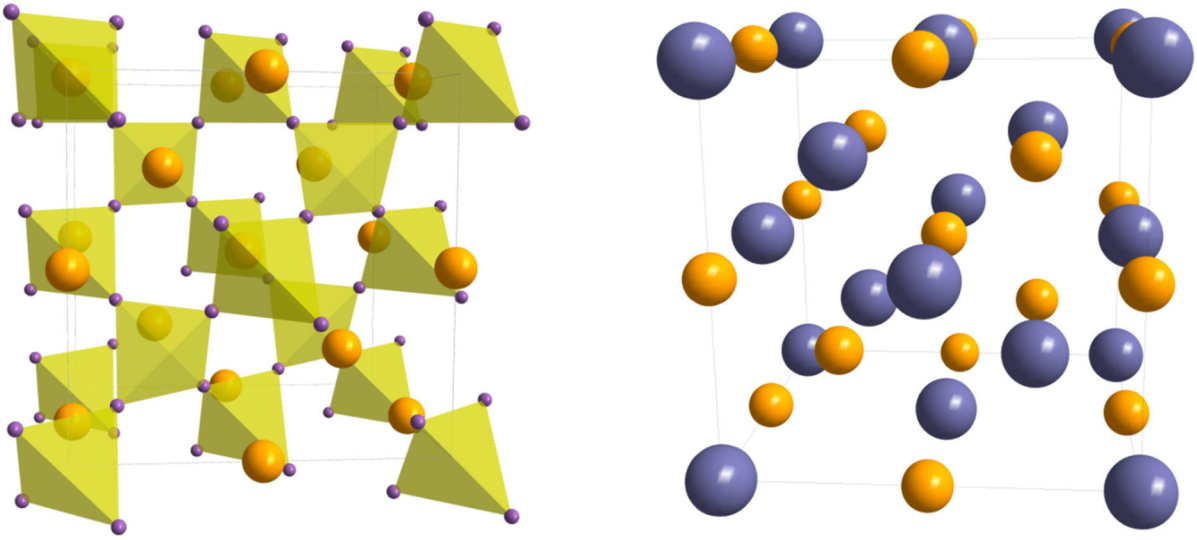
$$r_0 = r_0(k, N) - r_0(k', N') \quad (4)$$

где L - продольная константа; T - поперечная константа; $r_0(k, N)$ и $r_0(k', N')$ - положения равновесия атомов (k, N) и (k', N') соответственно. Таким образом, постоянная межатомной силы, отвечающая за продольную или поперечную жесткость связи, присваивается каждой химической связи с ограничением только короткодействующих взаимодействий. Для более детального описания динамики решетки, можно ввести дополнительные силовые константы для учета взаимодействий между атомами более высоких координационных сфер.

3. Результаты и обсуждение

$LaAl_2$ и YNi_2 относятся к фазам Лавеса со структурой типа $MgCu_2$ (C15). Кубическая кристаллическая структура имеет 227 пространственную группу (Fd3m), постоянные решетки составляют a = 8,149 Å для $LaAl_2$ и a = 7,203 Å для YNi_2. В этих структурах атомы La и Y упорядочены, как в структуре алмаза, а атомы Al и Ni образуют каркас из общих тетраэдрических вершин (рисунок 2).

С точки зрения МС, фазы Лавеса со структурой типа $MgCu_2$ представляют особый интерес по нескольким причинам. Во-первых, отметим, что каждые два соседних тетраэдра имеют один общий атом. Это означает, что масса «суператома» должна быть в два раза меньше суммы масс всех атомов, входящих в кластер. Во-вторых, химическая связь между атомами в кластере не является ковалентной, поэтому мы не можем утверждать, что эти связи являются слишком жесткими. С другой стороны, как минимум 200 интерметаллидов имеют структуру C15, что позволяет нам изучать соединения с большим массовым соотношением и без него.



a) *b*)

Рисунок 2 – Кристаллическая структура $MgCu_2$ (*a*) и NaTl (*b*)

Для настоящего исследования мы использовали $LaAl_2$ и YNi_2, для которых измеряли спектры неупруго-рассеянных нейтронов на времяпролетном спектрометре DIN-2PI на реакторе ИБР-2 в Дубне. Измерения проводились при энергии падающих нейтронов E_i = 5 мэВ при комнатной температуре в режиме приобретения нейтронами энергии. Образцы располагались на расстоянии 20 м

сразу за замедлителем нейтронов, траектория полета вторичной части составляла 7 м. На основе экспериментальных данных была определена обобщенная плотность состояний фононов в $LaAl_2$ и YNi_2 (рис. 3).

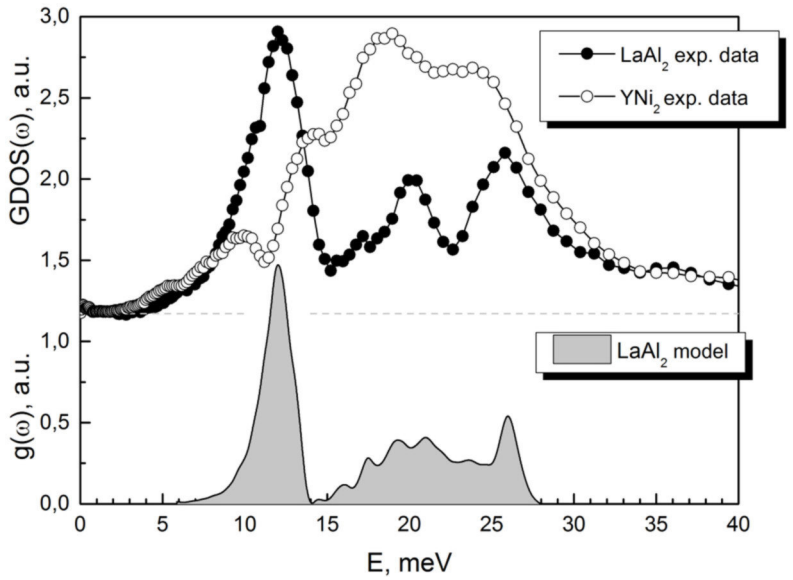


Рисунок 3 – Обобщенная плотность фононных состояний YNi_2 (полые символы) и $LaAl_2$ (закрытые символы). Линия представляет результат ПФС для $LaAl_2$, рассчитанный с использованием МС

Как видно из рис. 3, большая разница масс между атомами Al и La (m(La)/m(Al) = 5,3) определяет особую форму ПФС $LaAl_2$, которую можно разделить на две части, а именно низкоэнергетическую часть с высокоинтенсивным пиком при 12 мэВ, связанную с движениями атомов La, и высокоэнергетическую часть, определяемую динамикой атомов Al. Это достаточное условие для МС, которая, следовательно, может быть применима к $LaAl_2$. Замена тетраэдров на «суператомы» приводит к трансформации кристаллической структуры из типа $MgCu_2$ в тип NaTl с сохранением пространственной группы 227 (рисунок 2). Как упоминалось ранее, масса «суператома» в два раза меньше суммы масс атомов, образующих тетраэдр, поскольку каждый атом принадлежит двум смежным кластерам. ПФС $LaAl_2$, рассчитанная с помощью МС, представлена на рисунке 3 ниже, параметры модели представлены в таблице 1.

Таблица 1 — Силовые константы, используемые для построения МС $LaAl_2$. Атомы маркируются в соответствии с программой UNISOFT

Пара атомов	Межатомное расстояние, Å	Коорд. Сфера	Продольная константа, Н/м	Поперечная константа, Н/м
La_a – La_a	5.77	1	2.000	4.600
La_a – La_b	3.53	1	6.000	0.000
La_a – Al_a*	4.08	1	10.000	0.000
La_a – Al_b*	3.53	1	3.000	0.000
Al_a* – Al_a*	5.77	1	15.000	1.000
Al_a* – Al_b*	3.53	1	5.000	0.000

Моделирование динамики решетки проводилось с использованием программного пакета UNISOFT [10].

Из рисунка 3 видно, что рассчитанный спектр охватывает практически все возбуждения решетки до 28 мэВ. Полное совпадение экспериментальных и модельных результатов обнаружено в области низких энергий, тогда как при более высоких энергиях соответствие менее удовлетворительное. Что касается параметров модели, представленных в таблице 1, то следует отметить, что значения некоторых силовых констант хорошо совпадают со значениями силовых констант, приведенных в работе [11]. Этот факт частично подтверждает, что использование приближения «суператома» не приводит к модификации распределения электронной плотности вне кластера. Это позволяет анализировать межатомные взаимодействия в системе, за исключением взаимодействий внутри «суператома».

Что касается системы YNi_2, характеризующейся малым соотношением масс (m(Y)/m(Ni) = 1.5), становится невозможным разделить высокоэнергетическую и низкоэнергетическую части спектра (рисунок 3). Парциальная часть ПФС атомов Y простирается в область более высоких энергий, т.е. в область энергий колебательного спектра атомов Ni. В этом случае мы уже не можем пренебрегать колебаниями атомов никеля, и МС оказывается неприменимой.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант 19-02-00953-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hammonds K.D., Dove M.T., Giddy A.P., Heine V., Winkler B., Rigid-unit phonon modes and structural phase transitions in framework silicates // American Mineralogist. – 1996. - V. 81 - PP. 1057-1079.
2. Dove Giddy, Heine V., On the application of mean-field and landau theory to displacive phase transition // Ferroelectrics. – 1992. - V. 136. - PP. 33-49.
3. Giddy A., Dove M.T., Pawley, Heine V., The determination of rigid-unit modes as potential soft modes for displacive phase transitions in framework crystal structures // Acta Cryst. – 1993. - V. A49. – PP. 697-703.
4. Rybina A.V., Nemkovski K.S., Alekseev P.A., Mignot J-M., Clementyev E.S., Jonson M., Capogna L., Dukhnenko A.V., Lyashenko A.B., Filippov V.B., Lattice dynamics in ZrB_{12} and LuB_{12}: Ab initio calculations and inelastic neutron scattering measurements // Physical Review B. – 2010. - V. 82. – P. 024302.
5. Nemkovski K.S., Alekseev P.A., Mignot J-M., Rybina A.V., Iga G., Takabatake T., Shitsevalova N.Yu., Paderno Yu.B., Lazukov V.N., Nefeodova E.V., Tiden N.N., Sadikov I.P., Lattice dynamics in the Kondo insulator YbB_{12} // J. of Sol. State Chem. – 2006. - V. 179. - PP. 2895-2899.
6. Alekseev P.A. High borides: determining the features and details of lattice dynamics from neutron spectroscopy // Uspekhi Fizicheskikh Nauk, 2015, v. 58, n. 4, pp. 330-344

7. Serebrennikov D.A., Clementyev E.S., Alekseev P.A., Analysis of the crystal lattice instability for cage-cluster systems using the superatom model // JETP. – 2016. - V. 3. - PP. 452-460.
8. Serebrennikov D.A., Clementyev E.S., Alekseev P.A., Simple superatom model for lattice dynamics of dodecaborides RB_{12} (R = Zr, Yb, Lu) // J. of Alloys and Compounds. – 2017 - V. 726 - PP. 323-329.
9. Lovesey S.W., Springer T. Dynamics of Solids and Liquids by Neutron Scattering. Topics in Current Physics by Helmut K.V. Lotsch, Volume 3 // Springer-Verlag Berlin Heidelberg – 1977 - P. 79
10. Eckold G., Stein-Arsic M., Weber H.J., UNISOFT - a program package for latticedynamical calculations // J. Appl. Crystallogr. – 1987 – V. 20 – PP. 134-139
11. Yeh C.T., Reichardt W., Renker B., Nucker N., Loewenhaupt M., Lattice dynamics of YAl_2 and $LaAl_2$ – a further contribution to the La-Y puzzle // J. Phys. Colloques. – 1981. - V. 42. - PP. C6-371 – C6-373.

ПРИЗНАКИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ОПИСАНИЙ В НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ ТЕКСТАХ

Л.А. Гращенко, к.ф.-м.н.
ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»
e-mail: *graschenko@mail.ru*
Н.С. Кузьмин
ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»
e-mail: *kuzyan15@gmail.com*
А.А. Модин
ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»
e-mail: *modin.schura2011@outlook.com*

В статье приводятся результаты экспериментов по автоматической локализации из неструктурированных полнотекстовых русскоязычных документов одиночных и групповых (в составе списков) библиографических описаний, оформленных в нотации ГОСТ Р 7.0.100-2018 или близко к таковой. Описываются такие статистические особенности библиографических описаний как параметры распределения длин (в символах), частоты встречаемости знаков предписанной пунктуации и автокорреляционные свойства.

Ключевые слова: библиографические данные, статистические характеристики, обработка естественного языка, локализация объектов.

В числе актуальных задач автоматической обработки текстов на естественных языках выделяется задача извлечения библиографической информации, используемой для идентификации документа и проведения библиографического поиска. Указанную задачу можно охарактеризовать как частный случай извлечения метаинформации в рамках предметной области Natural Language Processing [2]. Точнее можно говорить об извлечении информации из структуры, представленной совокупностью именованных сущностей [1].

Процесс выделения библиографической информации состоит из трёх этапов: (1) локализация библиографических данных, (2) определение границ объекта и определение его типа, (3) идентификация полей, извлечение библиографических данных и их интерпретация. В данной работе представлены результаты экспериментов по определению информативных признаков для статистической локализации отдельных и групповых (в составе списка) библиографических описаний в полнотекстовых неструктурированных текстах документов на русском языке.

Основная масса текстов на русском языке, в которых можно ожидать появление библиографических ссылок и описаний, подпадает под действие стандартов ГОСТ 7.1-2003, ГОСТ-7.0.5-2008 и ГОСТ 7.0.100-2018. Речь идет, прежде всего, о научной и учебной литературе, публицистике, официальной документации и т.п. Конечно, востребованными являются и иные форматы

(стили) представления библиографических описаний, но в данной работе будет рассматриваться именно локализация библиографических описаний в нотации указанных стандартов. Причем в первую очередь рассматриваются библиографические описания книг и статей в периодических изданиях, как наиболее традиционных видов изданий.

Так, на основе 10 тысяч случайно отобранных библиографических описаний с портала Российской Государственной Библиотеки (www.rsl.ru) было установлено, что 61% из них представлены книгами, 17% – статьями, 15% – диссертациями, 5% – электронными документами на оптических носителях и 2% – другими источниками.

В соответствии с вышеуказанными стандартами, источником библиографической информации являются библиографические записи, библиографические описания и библиографические ссылки (цитирования). При этом, библиографическое описание (БО) является основной частью библиографической записи (БЗ), и отличается от библиографической ссылки (БС) тем, что в нем чётко прописан порядок следования и форматирования полей (элементов), содержащих библиографические сведения. Также в отношении БО применяется понятие предписанной пунктуации – набора знаков, используемых для разделения полей внутри БО. Таким образом, извлечение библиографической информации из текстов предполагает идентификацию таких объектов как БЗ, БО и БС и интерпретацию составляющих их полей, содержащих библиографические сведения.

БО в общем случае представляет собой фрагмент текста ограниченного диапазона длин – строку, составленную из произвольно следующих буквенно-числовых подстрок (поля библиографических сведений), разделенными символами из набора знаков предписанной пунктуации (ЗПП). Помимо обычных грамматических знаков препинания, между элементами БО присутствуют ЗПП, а на протяжении длины БО должна наблюдаться повышенная относительно текста в целом частота встречаемости символов из набора ЗПП. Тогда локализацию библиографических описаний можно производить с помощью метода скользящего окна некоторой эффективной ширины, соразмерной со средней длиной БО. Далее, так как БО являются структурированными сущностями, то относительно знаков предписанной пунктуации они могут проявлять некоторые циклические или периодические свойства. Поэтому на участках текста, где локализованы одиночные или групповые БО, могут наблюдаться экстремальные значения соответствующих показателей. В качестве такого показателя рассматривался средний коэффициент автокорреляции (СКА), рассчитываемый на двоичной последовательности, полученной путем перекодирования символов текста на ширине скользящего окна. При этом символы из набора ЗПП кодировались «1», остальные – «0».

Для экспериментов использовалась выборка объемом около 350000 библиографических описаний, полученная из размеченных списков литературы к текстам, размещенным на открытых веб-ресурсах Российской

государственной библиотеки (www.rsl.ru), Национальной электронной библио-библиотеки (rusneb.ru) и Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru). Выборка из 2000 полнотекстовых документов пяти основных функциональных стилей была взята из размещенного в сети Интернет и размеченного экспертами Национального корпуса русского языка (www.ruscorpora.ru). Общая длина текстов выборки более 20 миллионов символов.

Прежде всего, на основе списков литературы к книгам, статьям и диссертациям были изучены распределения длин БО и установлено, что они описываются логнормальным законом (рисунок 1). На основании приведенных параметров распределений для исследования статистических свойств БО выбрана ширина скользящего окна 256 символов, которое перемещается по тексту с шагом 128 символов (коэффициент перехлеста 0,5).

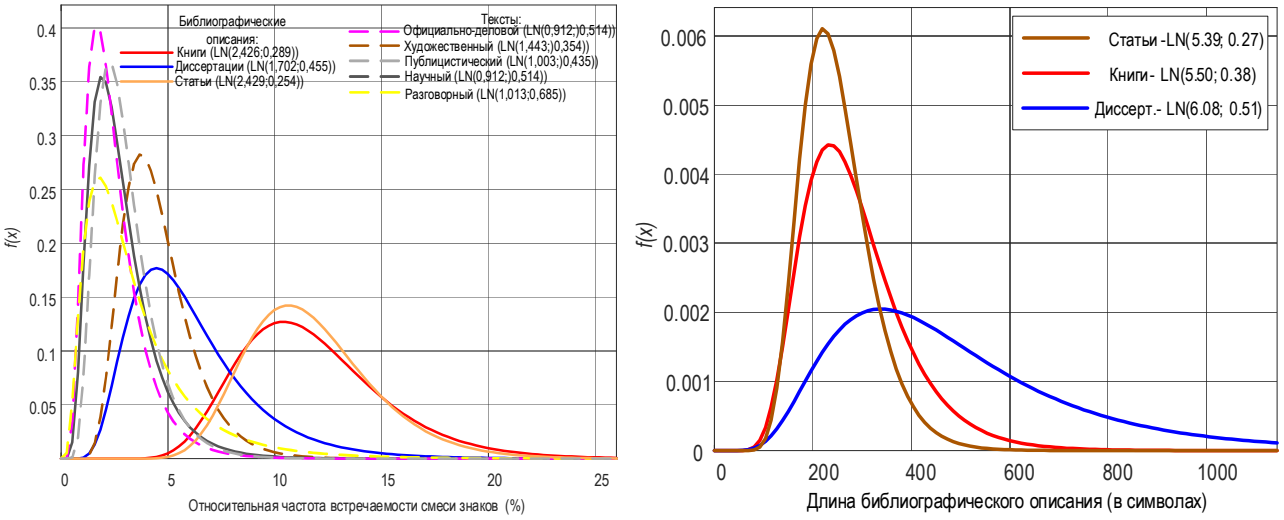


Рисунок 1 – Распределение длин библиографических описаний в текстах статей, книг и диссертаций (справа), а также распределения частот встречаемости полного набора ЗПП в текстовых и библиографических блоках длины 256 (слева)

В результате усреднения данных по блокам текстов всех стилей был подобран порог частоты встречаемости ЗПП в БО различной направленности, равный 0.045. Таким образом, при превышении частоты ЗПП на участке текста длиной 256 символов указанного порога, такой блок считается содержащим БО, иначе – обычным текстом. Вероятности ошибок сформированного таким образом наивного байесовского классификатора первого (α) и второго (β) рода равны 0.0122 и 0.0054 соответственно. Такой классификатор хоть и позволяет выявить практически все места локализации БО, но также захватывает некоторые синтаксические конструкции, такие как адреса, перечисления фамильно-именных групп, табличные данные, математические и формальные выражения, законодательные акты.

Поэтому были определены параметры для байесовской модели распознавания библиографических блоков на основе СКА (рисунок 2). Для снижения затрат на расчет СКА была произведена оптимизация такого параметра, как максимальный индекс коэффициента автокорреляции, используемого для расчета. Установлено, при сдвиге k = 30-31 достигается минимальное значение суммы ошибок классификатора (рисунок 3).

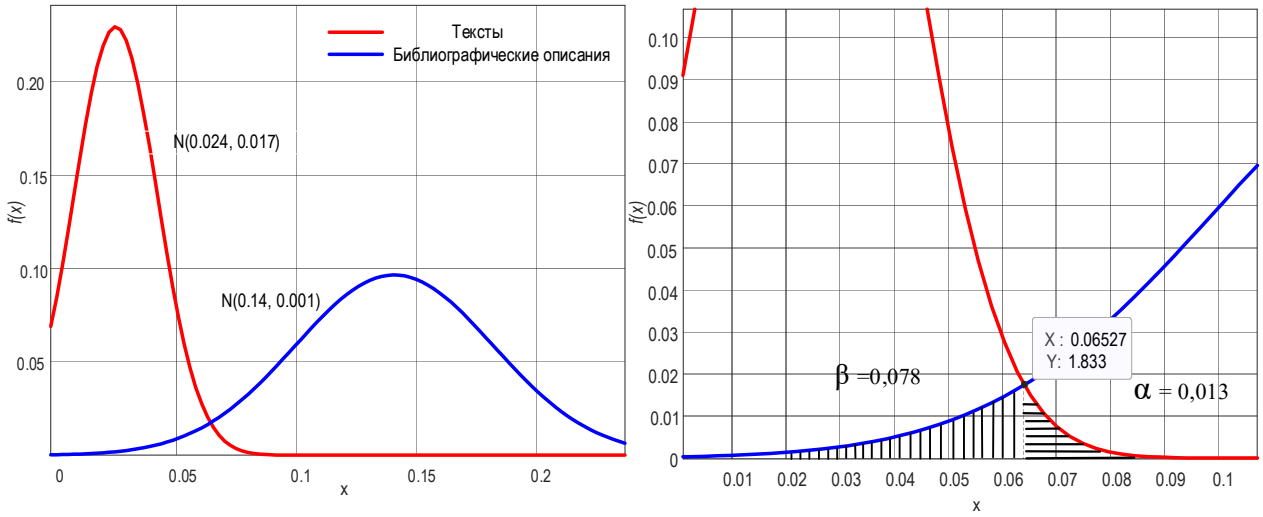


Рисунок 2 – Параметры наивного байесовского классификатора блоков текста (порог и ошибки первого и второго рода) по среднему коэффициенту автокорреляции

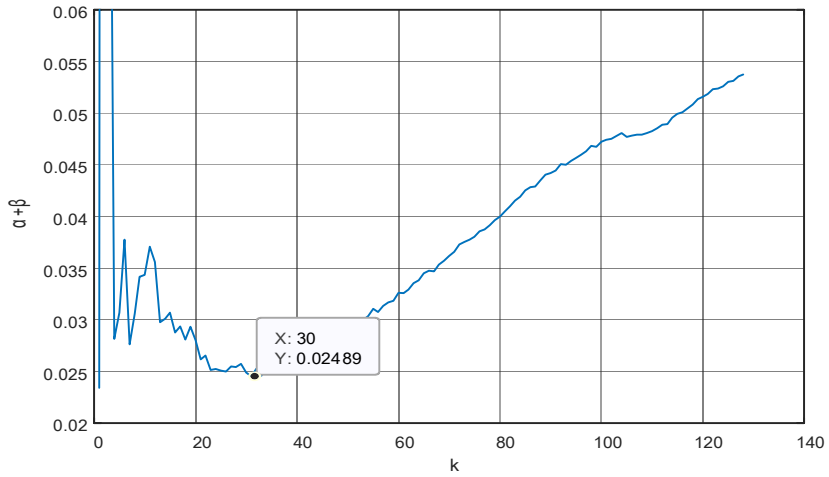


Рисунок 3 – Сумма ошибок наивного байесовского классификатора библиографических описаний на основе СКА для различных сдвигов

При некоторой доработке предложенный способ учета автокорреляционных свойств для локализации библиографических ссылок может быть применен для визуализации структуры документов (рисунок 4).

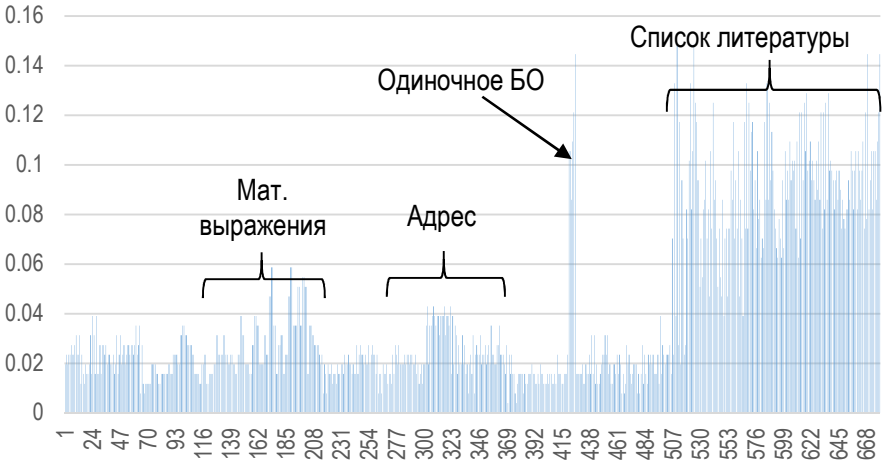


Рисунок 4 – Пример значений среднего коэффициента автокорреляции для текста документа, содержащего одиночные и групповые библиографические описания

На основании рассмотренных статистических особенностей библиографических описаний в первом приближении была предпринята попытка использовать их в качестве признаков (в исходном виде, без каких-либо преобразований) при построении простых классификаторов, разделяющих фрагменты текста на ширине скользящего окна на два класса – текстовые блоки и библиографические блоки. Тем самым возникает возможность локализовать библиографические описания в неструктурированном полнотекстовом документе. Первые два классификатора построены на основе наивного байесовского подхода – решение принимается на основе сравнения с порогом значения одиночного признака.

Также построены три бинарных классификатора на основе линейной регрессии с порогом принятия решения равном 0 (заданы два класса: -1 – текстовый блок, +1 – библиографический блок). Первый: на основе относительных частот шести наиболее употребимых символов ЗПП: запятой (x_1), точки (x_2), двоеточия (x_3), точки с запятой (x_4), дефиса (x_5) и прямого слэша (x_6). Все шесть коэффициентов имеют высокую значимость.

$$F_1(x)=-0{,}94-9{,}40\cdot x_1+18{,}14\cdot x_2+22{,}48\cdot x_3+9{,}55\cdot x_4+3{,}58\cdot x_5+62{,}94\cdot x_6 \quad (1)$$

Второй классификатор строился на основе значения СКА (x_7), а третий – с учетом частоты смеси знаков ЗПП (x_8).

$$F_2(x)=-0{,}93+62{,}94\cdot x_7 \quad (2)$$

$$F_3(x)=-1{,}46+20{,}36\cdot x_8-3{,}16\cdot x_7 \quad (3)$$

Для экспериментальной проверки представленных решений дополнительно к описанному набору исходных данных с привлечением добровольцев было аннотировано 500 полнотекстовых документов – по сто текстов каждого стиля. Каждый документ содержал список литературы из 80-150 библиографических описаний, также 121 документ содержал одиночное БО, 230 содержали парное БО, а 149 содержали одиночное и парное БО в различных частях текста.

Результаты испытаний классификаторов сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Точность, полнота, F1-мера и значения площади под кривой (AUC) для моделей локализации библиографических описаний

Классификатор	Полнота	Точность	F_1-мера	AUC
Байесовский классификатор по порогу частоты ЗПП	0,821	0,647	0,734	0,821
Байесовский классификатор по порогу СКА	0,830	0,701	0,760	0,848
Линейная регрессия (по частоте отдельных ЗПП) - F_1	0,839	0,684	0,754	0,844
Линейная регрессия (по СКА) – F_2	0,836	0,695	0,759	0,849
Линейная регрессия (по СКА и частоте смеси ЗПП) – F_3	0,764	0,688	0,724	0,810

Следует отметить, что полученные значения показателя AUC-ROC можно охарактеризовать как хорошие, что свидетельствует о перспективности

рассмотренных статистических показателей в качестве классификационных признаков для решения задачи извлечения библиографической информации из полнотекстовых документов.

На основании результатов проделанной работы можно сформулировать следующие выводы и рекомендации:

- Для текстов научного стиля было выявлено большое количество ложноположительных срабатываний, что связано с обилием математических выражений, в которых содержится большое количество знаков пунктуации. Поэтому относительная частота встречаемости ЗПП является плохим предиктором для длинных БО, характерных для текстов диссертаций. В исходном виде использование данного признака не целесообразно.
- Полученные значения полноты, точности и F-меры классификаторов, сопоставимы с результатами, достигнутыми в ранее выполненных исследованиях при использовании структурных методов распознавания.
- Представляется перспективным повышать полноту классификации представленных компактных моделей, с тем чтобы достичь необходимой точности на следующем этапе обработки, а именно, при применении регулярных выражений к отобранным фрагментам текстов.
- Экспериментальные данные свидетельствуют, что исследованные статистические особенности и модели применимы не только к текстам на русском зыке, но и к другим алфавитным языкам.

Представленные результаты носят предварительный и промежуточный характер и в дальнейшем будут уточняться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогорцев, С.В. Извлечение библиографии из текстов регулярными выражениями / С.В. Колмогорцев, П.В. Сараев // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2017. – № 20. – С. 82-88.
2. Chenet, M.: Identify and extract entities from bibliography references in a free text. Master thesis. University of Twente (2017).

О ПРОБЛЕМЕ ЗАЩИТЫ ИНФРАСТРУКТУРЫ ОРГАНИЗАЦИИ И МЕТОДЕ ЕЁ РЕШЕНИЯ

А.И. Дудникова
Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева
e-mail: *roksil98@mail.ru*

Разработана и протестирована система мониторинга на базе Flow-протоколов, позволяющая обеспечить защищенность инфраструктуры организации. В статье описываются принципы, на основании которых формировалась система, а также общее описание её работы.

Ключевые слова: система мониторинга, NetFlow, стек ELK, визуализации.

1. Введение

Согласно серии отчетов Cisco по информационной безопасности [1] основной упор организации уделяют защите периметра. Во внутренней сети, основные меры ограничиваются установкой антивирусного программного обеспечения. Однако вектор атак злоумышленников постоянно видоизменяется, путем выявления новых способов проникновения в инфраструктуру организации, минуя периметровые средства защиты. В космической отрасли важна стабильная работа компьютерных сетей, следовательно, необходим инструмент, позволяющий осуществлять мониторинг сетевого трафика, для выявления активности в рамках инфраструктуры организации, с целью обнаружения угроз безопасности в пределах локальной сети, пропущенных периметровыми средствами защиты.

2. Источники данных для мониторинга

В качестве источников данных для мониторинга можно использовать: «сырой» трафик с дальнейшей его передачей системам обнаружения вторжений, анализ событий с сетевых устройств или анализ потоков трафика [2]. В первом случае для предотвращения обхода средств защиты необходимо ставить сенсоры в разрыв сетевого соединения, таким образом, их число в сети, становится слишком большим. Использование событий с сетевых устройств позволяет проводить анализ уже после зафиксированного инцидента.

Решить проблему эффективности источника данных можно, проводя анализ потоков трафика.

3. Общее описание системы мониторинга

Физическая схема решения состоит из маршрутизатора с поддержкой Flow-протокола, обеспечивающего сбор, формирование пакетов в потоки, и дальнейшее перенаправление на NetFlow сервер, выполняющий функции сбора, хранения сетевого трафика, с его последующим анализом.

В основе коллектора и анализатора лежит стек ELK отраженный на рисунке 1. Стек позволяет «на лету» масштабировать решение при добавлении нового сетевого устройства, работать с различными источниками данных, а также

осуществлять их хранение посредством нереляционной базы данных, являющейся частью стека [3].

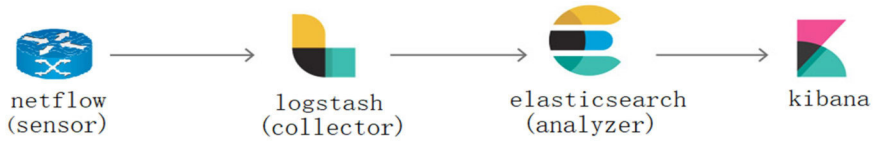


Рисунок 1— Схематическое отображение решения

Собранные метаданные от протокола NetFlow обрабатываются, путем внесения изменений в конфигурацию раздела фильтрации коллектора, с целью получения дополнительных сведений, в дальнейшем применяемых в качестве входных данных для анализа.

Для обнаружения угроз безопасности, миновавших периметр, в функционал решения дополнен возможностью определения репутации адресов источника и назначения. Для этого решение было интегрировано с источником данных Threat Intelligence. Платформа MISP позволяет интегрировать фиды сторонних организаций [4], а Memcached выступает посредником между системой хранения данных и платформой Threat Intelligence. При обнаружении совпадений собранных сведений с данными включенными в черный список фида, в визуализации фиксируется событие, путем отображения наименования фида и клиента, взаимодействующего с вредоносным ресурсом. Пример рабочей визуализации отображен на рисунке 2.

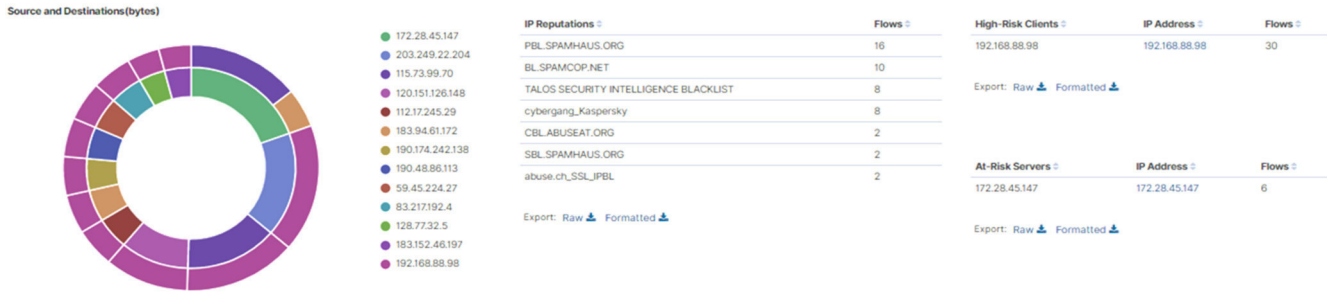


Рисунок 2 — Определение репутации адресов источника и назначения

4. Дополнительные возможности системы мониторинга

Так как в основе решения лежит взаимодействие сетевых устройств, работоспособность веб-сервера и платформ в рамках ELK стека, необходимо отслеживать доступность перечисленных компонентов. Поэтому в систему был интегрирован дополнительный функционал, позволяющий получить такого рода данные, реализуемые через протоколы: snmp, syslog и платформу beats.

5. Тестирование системы мониторинга

Тестирование системы производилось путем генерации данных с использованием утилиты iperf3 [5], с последующим сравнением объема переданных и

полученных сведений в рамках развернутой системы мониторинга. Результаты продемонстрированы на рисунке 3. Таким образом, можно говорить о корректности сбора данных в рамках системы.

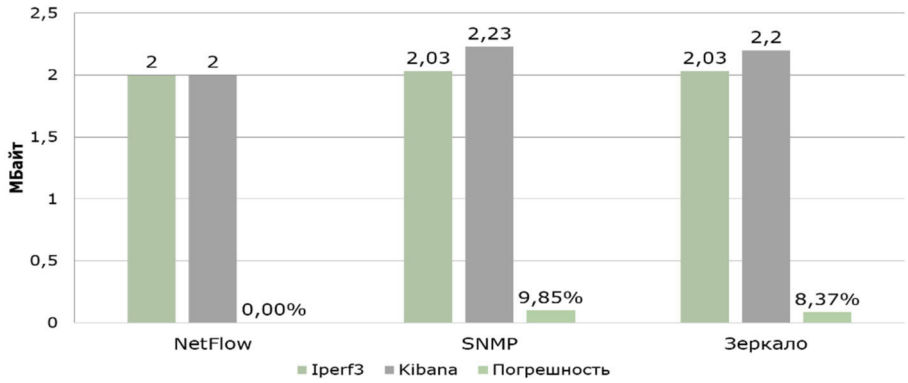


Рисунок 3– Результаты тестирования системы мониторинга

6. Выводы

В ходе работы разработана и протестирована система мониторинга с возможностью проактивного поиска угроз, где в качестве источника данных используются трафик от сетевого устройства, поддерживающего flow-протокол. Данная система решает проблему выявления подозрительной активности в рамках инфраструктуры организации.

Преимуществами данного устройства являются: открытый программный код, интеграция с платформой Threat Intelligence для автоматизации поиска угроз безопасности в собранном трафике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пранав Шукла, Шарат Кумар. Elasticsearch, Kibana, Logstash и поисковые системы нового поколения.— М.:Питер . — 2019. — 352 с.
2. Пранав Шукла, Шарат Кумар. Learning Elastic Stack 7.0.— Packt Publishing. — 2019. — 474 с.
3. Рич Коллиер. Machine Learning with the Elastic Stack.— Packt Publishing. — 2019. — 304 с.
4. Дэн Нобл. Monitoring Elasticsearch.— Packt Publishing. — 2016. — 180 с.
5. Вай Так Вонг. Advanced Elasticsearch 7.0.— Packt Publishing. — 2019. — 560 с.

УДК 519.7

ОЦЕНКА 2-АДИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДИНГА-ХЕЛЛЕСЕТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА[1]

В. А. Едемский
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
e-mail: *vladimir.edemsky@novsu.ru*
О. О. Чуркин
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
e-mail: *oo_churkin@novreg.ru*

Оценена 2-адическая сложность обобщенных циклотомических последовательностей Динга-Хеллесета четвертого порядка с периодом pq, где p и q - нечетные простые числа. Показано, что рассматриваемые последовательности имеют высокую 2-адическую сложность.

Ключевые слова: бинарные последовательности, циклотомия, 2-адическая сложность

Введение

Бинарные последовательности широко применяются в криптографии и связи. Для криптографических приложений последовательность должна обладать высокой сложностью. 2-адическая сложность последовательности определяется как наименьшее число ячеек регистра сдвига с обратной связью по переносу (feedback with carry shift register), порождающего последовательность [1]. В отличие от линейной сложности 2-адическая сложность последовательностей исследована в меньшей степени. Таким образом, важно изучить 2-адическую сложность известных последовательностей и найти последовательности с высокой линейной сложностью и 2-адической сложностью. Цель этой работы заключается в исследовании 2-адической сложности обобщенных циклотомических последовательностей Динга-Хеллесета четвертого порядка с периодом pq. Ранее, 2-адическая сложность ряда обобщенных циклотомических последовательностей Динга-Хеллесета была изучена в [2, 3] для $q = p+2$ и НОД$(p-1, q-1) = 2$ соответственно.

1. Постановка задачи

Пусть p и q - различные нечетные простые числа, такие что НОД$(p-1, q-1) = 4$ и $e = (p-1)(q-1)/4$. Обозначим через g общий примитивный корень по модулям p и q. Пусть x - целое число, удовлетворяющее сравнениям: $x \equiv g \pmod p$, $x \equiv 1 \pmod q$. На протяжении всей работы через $\mathbb{Z}_N$ будем обозначать кольцо классов вычетов по модулю N для натурального N, а через $\mathbb{Z}_N^*$ его мультипликативную группу. Обобщенные циклотомические классы Динга-Хеллесета четвертого порядка по модулю pq определяются следующим образом:

$$D_i = \{g^{i+jd}x^t : j = 0, 1, \ldots, e/4-1,\ t = 0, 1, 2, 3\},\ i = 0, 1, 2, 3.$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта No 19-51-53003.

В этом случае, справедливо разбиение:

$$\mathbb{Z}_{pq}^{*} = \bigcup_{i=0}^{3} D_i.$$

Введем $P = \{p, 2p, \ldots, (q-1)p\}$, $Q = \{0, q, 2q, \ldots, (p-1)q\}$ и определим следующие множества

$$C_0 = D_0 \cup D_1 \text{ и } C_1 = D_2 \cup D_3.$$

Ясно, что $\mathbb{Z}_{pq} = C_0 \cup C_1 \cup P \cup Q$ и $|C_j| = (p-1)(q-1)/2, j = 0, 1$.

Обобщенная циклотомическая последовательность Динга-Хеллесета $s^{\infty} = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$ четвертого порядка с периодом pq может быть определена как

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \pmod{pq} \in C_0 \cup Q, \\ 1, & \text{если } i \pmod{pq} \in C_1 \cup P. \end{cases} \tag{1}$$

Линейная сложность таких последовательностей исследована в [4, 5, 6]. Целью этой статьи является оценка её 2-адической сложности.

В завершение раздела напомним формулу для вычисления 2-адической сложности последовательности.

Пусть $s^{\infty} = \{s_0, s_1, \ldots, s_N\}$ - бинарная последовательность периода N и $S(x) = s_0 + s_1 x + \cdots + s_{N-1} x^{N-1} \in \mathbb{Z}[x]$. Согласно [1], 2-адическая сложность s^{∞} может быть вычислена по формуле:

$$\Phi(s^{\infty}) = \left\lfloor \log_2 \left(\frac{2^N - 1}{\text{НОД}\,(S(2), 2^N - 1)} + 1 \right) \right\rfloor,$$

где $\lfloor x \rfloor$ - наибольшее целое число, которое меньше или равно x.

Новый метод изучения 2-адической сложности был недавно предложен в [7]. Он базируется на применении обобщенных гассовых сумм, именно этот метод будет использован в работе.

2. Обобщенные гауссовы суммы

В этом разделе рассмотрим обобщенные гауссовы суммы, введенные в [7], и их свойства.

Отображение $\phi(m) = (m \bmod p, m \bmod q)$ задает изоморфизм кольца классов вычетов $\mathbb{Z}_{pq}$ и прямого произведения $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$. Пусть $H_j = \{g^{j+4u} \bmod q, u = 0, 1, (q-3)/4\}, j = 0, 1, 2, 3$. Тогда H_j - классические циклотомические классы четвертого порядка по модулю q и $|H_j| = (q-1)/4$. Также определим $G_0 = H_0 \cup H_2$ и $G_1 = H_1 \cup H_3$ - циклотомические классы второго порядка по модулю q, здесь $|G_j| = (q-1)/2, j = 0, 1$.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из определений обобщенных и классических циклотомических классов.

Л е м м а 1.

$$D_j = \phi^{-1}\left(\mathbb{Z}_p^* \times H_j\right), j = 0, \ldots, 3.$$

Пусть c - натуральное число, такое что $c \neq 1$ и НОД$(c, q) = 1$. Определим $\eta_j(c) = \sum\limits_{i \in G_j} c^i,\ j = 0, 1$. Тогда, как и в [7], получаем, что

$$(\eta_0(c) - \eta_1(c))^2 \equiv q \pmod{(c^q - 1)/(c - 1)}. \tag{2}$$

Далее, пусть $\zeta_0(c) = \sum\limits_{i \in H_0 \cup H_1} c^i,\ \zeta_1(c) = \sum\limits_{i \in H_2 \cup H_3} c^i$. Согласно определению, $\zeta_j(c^u) \equiv \zeta_j(c) \pmod{c^q - 1}$ для $u \in H_0$ и

$$\zeta_0(c) + \zeta_1(c) = (c^q - 1)/(c - 1) - 1. \tag{3}$$

Л е м м а 2. Если $q = x^2 + 4y^2, x \equiv 1 \pmod 4$, то $\zeta_0(c), \zeta_1(c)$ удовлетворяют сравнениям:

(i) $z^2 + z - y(\eta_0 - \eta_1)/2 + (q + 1)/4 \equiv 0 \pmod{(c^q - 1)/(c - 1)}$ для $q \equiv 5 \pmod 8$;

(ii) $z^2 + z - y(\eta_0 - \eta_1)/2 - (q - 1)/4 \equiv 0 \pmod{(c^q - 1)/(c - 1)}$ for $q \equiv 1 \pmod 8$.

Утверждение этой леммы доказывается вычислением произведения $\zeta_0(c) \cdot \zeta_1(c)$ по модулю $(c^q - 1)/(c - 1)$ и применением (3).

3. 2-адическая сложность

По условию p и q взаимно просты, следовательно, можно найти целые числа u, v, такие что $1 = up + vq$. Тогда существуют $a, b \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие сравнению $1 \equiv ap + bq \pmod{pq}$.

Л е м м а 3.

$$\sum_{i \in C_j} 2^i \equiv \zeta_j\left(2^{ap}\right) \sum_{f \in \mathbb{Z}_p^*} 2^{fbq} \pmod{2^{pq} - 1}, j = 0, 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c \in G_j$ для $j = 0, 1$. Тогда

$$\sum_{i \in \phi^{-1}\left(\mathbb{Z}_p^* \times \{c\}\right)} 2^i \equiv \sum_{i \in \phi^{-1}\left(\mathbb{Z}_p^* \times \{c\}\right)} 2^{iap + ibq} \equiv 2^{cap} \sum_{f \in \mathbb{Z}_p^*} 2^{fbq} \pmod{2^{pq} - 1}.$$

Так как $C_j = \bigcup_{c \in G_j} \phi^{-1}\left(\mathbb{Z}_p^* \times \{c\}\right)$, то утверждение этой леммы следует из последнего сравнения.

Л е м м а 4. Пусть s^∞ определена по (1). Тогда

$$S(2) \equiv \zeta_1\left(2^{ap}\right) \sum_{f \in \mathbb{Z}_p^*} 2^{fbq} + \sum_{i=1}^{q-1} 2^{ip} \pmod{2^{pq} - 1}. \tag{4}$$

Эта лемма следует из (1) и леммы 3.

Воспользовавшись свойствами простых чисел, получаем следующее утверждение.

Л е м м а 5. Пусть p и q - нечетные различные простые числа и $ap+bq \equiv 1 \pmod{pq}, a, b \in \mathbb{N}$. Тогда:

1. НОД $(2^p-1, 2^q-1) = \gcd\left(2^p-1, 2^{bq}-1\right) = 1$;
2. НОД $\left(2^{bq}-1, 2^{pq}-1\right) = \gcd\left(2^q-1, 2^{pq}-1\right)$;
3. НОД $\left(2^q-1, 2^p-1, \frac{2^{pq}-1}{(2^p-1)(2^q-1)}\right) = 1$.

Следующее утверждение является основным результатом статьи.

Т е о р е м а. Пусть s^∞ - бинарная последовательность периода pq, определенная по (1). Тогда для её 2-адической сложности справедлива оценка

$$\bar{\Phi}(s^\infty) \geq pq - p - q.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы покажем, что НОД $\left(\frac{2^{pq}-1}{(2^p-1)(2^q-1)}, S(2)\right) = 1$. Предположим, что это не так, пусть $r > 1$ - простой делитель НОД $(2^{pq}-1, S(2))$ и r не делит $(2^p-1)(2^q-1)$. Тогда порядок 2 по модулю r равен pq и pq делит $r-1$. Из леммы 5 следует, что r не делит $2^{bq}-1$ и по (4) получаем, что $S(2) \equiv -\zeta_1(2^{ap}) - 1 \pmod{r}$, значит $\zeta_1(2^{ap}) \equiv -1 \pmod{r}$. Далее, воспользуемся леммой 2 при $c = 2^{ap}$, рассмотрев два случая.

1). Пусть $q \equiv 5 \pmod 8$. Тогда $-y(\eta_0 - \eta_1)/2 + (q+1)/4 \equiv 0 \pmod{r}$ или $4y^2(\eta_0 - \eta_1)^2 \equiv (q+1)^2 \pmod{r}$. Согласно (2) для $q = x^2 + 4y^2$, получаем, что $x^2q + 2q + 1 \equiv 0 \pmod{r}$. Так как q делит $r-1$, то $r = 1 + 2dq$, где d - натуральное число. Значит

$$0 \equiv 2d(x^2q + 2q + 1) \equiv -x^2 - 2 + 2d \pmod{r}.$$

Из последнего сравнения имеем, что $-x^2 - 2 + 2d = l(1 + 2dq)$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$, что невозможно.

2). Для $q \equiv 1 \pmod 8$ получаем противоречие тем же самым способом.

Таким образом, НОД $\left(\frac{2^{pq}-1}{(2^p-1)(2^q-1)}, S(2)\right) = 1$ и $\Phi(s^\infty) \geq pq - p - q$.

Согласно теореме, рассматриваемые последовательности обладают высокой линейной сложностью.

З а м е ч а н и е. Пусть r делит $2^p - 1$, тогда, согласно лемме 4, $S(2) \equiv -(q-1)/2 + q - 1 \equiv (q-1)/2 \pmod{r}$. Следовательно, НОД $(2^p-1, S(2))$ = НОД $(q-1, 2^p-1)$. Значит, если $q < 1 + 2p$, то НОД $(2^p-1, S(2)) = 1$ и $\Phi(s^\infty) \geq pq - q$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Klapper A., Goresky M. Cryptanalysis based on 2-adic rational approxiamtion // In: CRYPTO 1995, LNCS. –1995. 963.– P. 262–273

2. Yan M., Yan T., Li Y. Computing the 2-adic complexity of two classes of Ding-Helleseth generalized cyclotomic sequences of period of twin prime products// arXiv:1912.06134

3. Yan M., Yan T., Sun Y., Sun S. The 2-Adic Complexity of Ding-Helleseth Generalized Cyclotomic Sequences of Order 2 and Period pq// IEEE Access.— 2020, 8.—P. 140682–140687.

4. Bai E., Fu X., Xiao G. On the linear complexity of generalized cyclotomic sequences of order four over Z_pq // IEICE Trans. Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences.— 2005. E88-A(1). — P.— 392–395.

5. Yan T., Hong L., Xiao G. The linear complexity of new generalized cyclotomic binary sequences of order four// Information Sciences.— 2008. 178(3). —P. 807–815.

6. Edemskiy V., Sokolovskiy N. Notes about the linear complexity of Ding-Helleseth generalized cyclotomic sequences of length pq over the finite field of order p or q//ITM Web of Conferences.—2017. 9. 01005.

7. Zhang L., Zhang J.,Yang, M., Feng K. On the 2-Adic Complexity of the Ding-Helleseth-Martinsen Binary Sequences// IEEE Trans. Inform. Theory.— 2020.— DOI: 10.1109/TIT.2020.2964171.

СЕГМЕНТАЦИЯ КЛИЕНТОВ КОМПАНИИ ИНСТРУМЕНТАМИ PYTHON

Д.В. Корниенко, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
С.П. Строев, к.экон.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

В статье рассматривается задача сегментации клиентов телекоммуникационной компании инструментами языка программирования Python. Исходные данные задачи представляют собой сведения о 4000 клиентах компании, каждый из которых описывается набором признаков. В работе методами кластерного анализа, реализованными в Python, проведено разбиение данной выборки на однородные группы, по которым определяются профили клиентов компании.

Ключевые слова: сегментация клиентов, предварительная обработка данных, кластерный анализ, инструменты Python.

Задачи привлечения новых и удержания существующих клиентов – это основные приоритетные задачи любой компании, осуществляющей свою деятельность в отрасли с высоким уровнем конкуренции. Принципиальный подход к решению этих задач заключается в понимании и удовлетворении потребностей максимально возможного числа существующих или потенциальных клиентов компании. Однако в условиях ограниченности ресурсов создание продукта (оказание услуг) для каждого клиента в отдельности не представляется возможным и экономически обоснованным. Возникает противоречие между неоднородностью потребностей клиентов и возможностями компании по их удовлетворению в условиях органиченности ресурсов. Одним из эффективных инструментов разрешения данного противоречения является сегментирование потребителей [1].

Под сегментанцией потребителей принято понимать процесс определения групп существующих или потенциальных потребителей в пределах одного конкретного рынка [1]. В результате сегментации выделяются определенные группы потребителей со схожими потребностями и поведением. Далее компания может концентрировать свои ресурсы на удовлетворение потребностей наиболее перспективных или прибыльных групп потребителей.

К настоящему времени телекоммуникационные компании обладают значительными технологическими возможностями по сбору и хранению большого объема информации о клиентах и потребляемых ими услуг. Для анализа подобной информации применяются специализированные программные продукты, реализующие, в том числе, различные технологии машинного обучения и нейросетевого моделирования [2]. При этом многие специалисты в области интеллектуального анализа данных при выборе программных инструментов останавливаются на языке программирования Python.

Целью данной работы является демонстрирование возможностей инструментов Python по решению задачи сегментации клиентской базы телекоммуникационной компании.

Решение задачи сегментации осуществлялось в несколько этапов. На первом этапе исследовалась структура исходных данных, а именно, объем выборки, признаки и их типы, наличие пропусков в данных. На втором этапе проводился поиск оптимального разбиения исходной выборки на совокупность однородных групп. На третьем, заключительном, этапе по результатам разбиения проводилась разметка исходной выборки с целью дальнейшего построения профиля клиента по каждой группе. В данной статье приведем основные результаты выделенных этапов решения задачи сегментации.

На первом этапе для получения предварительной информации об имеющемся наборе данных, изначально хранящемся в текстовом файле, использовался объект DataFrame библиотеки pandas [3] и его следующие методы и свойства (таблица 1).

Таблица 1 – Инструменты pandas для предварительного анализа структуры данных

Метод/свойство	Краткое описание
.read_table()	Метод для загрузки данных из файла
.head()/. tail()	Свойства, позволяющие просмотреть заданное число первых / последних строк объекта DataFrame
.shape	Свойство, возвращающее размерность объекта
.columns	Свойство, возвращающее заголовки столбцов (признаков)
.info()	Свойство, возвращающее информацию о типе признаков
.isnull().sum()	Цепочка методов, возвращающая информацию о наличие пропусков

В результате установлено, что исходный массив содержит 4000 строк, каждая из которых содержит данные о клиенте по десяти количественным признакам (таблица 2). В выборке отсутствуют пропущенные значения.

Таблица 2 – Структура признакового пространства

Признак	Тип	Признак	Тип
Возраст	Целый	Звонков ночью за месяц	Целый
Среднемесячный расход	Вещественный	Звонки в другие города	Целый
Средняя продолжительность разговоров	Вещественный	Звонки в другие страны	Целый
Звонков днем за месяц	Целый	Доля звонков на стационарные телефоны	Целый
Звонков вечером за месяц	Целый	Количество SMS за месяц	Целый

В формализованной постановке задачу сегментации потребителей можно рассматривать как задачу кластерного анализа [4]. В связи с этим на втором этапе решения задачи для поиска оптимального разбиения исходной выборки на совокупность однородных групп использовались методы кластерного анализа, реализованные в библиотеке SciPy, а также возможности библиотеки NumPy по обработке массивов и инструменты визуализации библиотеки matplotlib.

Решение задачи кластерного анализа осуществлялось агломеративными иерархическими алгоритмами [4], программная реализация которых доступна в модуле scipy.cluster.hierarchy. Выбор данной группы алгоритмов объясняется тем, что в результате их работы формируется полное дерево вложенных кластеров, которое предоставляет значительные возможности по его дальнейшему

анализу. Если бы имелась предварительная информация о заданном (желаемом) количестве искомых групп клиентов, то также использовались бы методы неиерархической кластеризации, в частности, метод *k*-средних.

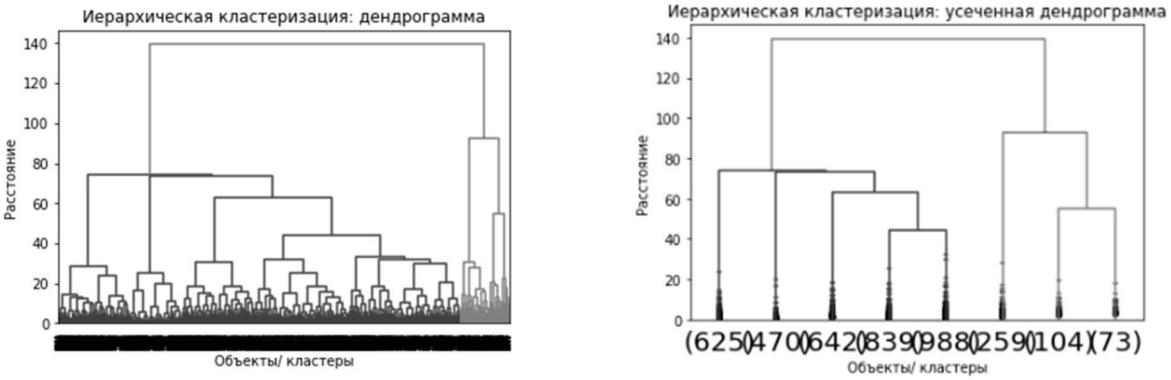
Реализация агломеративной иерархической кластеризации проводилась с помощью следующих методов модуля scipy.cluster.hierarchy (таблица 3).

Таблица 3 – Методы агломеративной иерархической кластеризации модуля scipy.cluster.hierarchy

Метод	Краткое описание
linkage()	Метод, выполняющий агломеративную иерархическую кластеризацию с заданным правилом расчета расстояний между вновь образующимися кластерами. В данном случае применялось правило Уорда (Ward). Метод возвращает массив расстояний между кластерами.
dendrogram()	Метод, формирующий на основе полученной матрицы расстояний дендрограмму.
fcluster()	Метод, позволяющий выделить из полученного полного дерева вложенных кластеров определенную совокупность кластеров.

Перед выполнением кластеризации проводилась нормализация данных.

На рисунке 1*а* представлено получившее полное дерево вложенных кластеров, а на рисунке 1*б* в целях наглядности показано усеченное дерево с восемью последними образовавшимися кластерами, внизу которых указано число объектов, входящих в каждый из кластеров.



а) *б*)

Рисунок 1 – *а*) исходная дендрограмма; *б*) усеченная дендрограмма

Для определения оптимального числа кластеров, на которое следует разбить исходную выборку, воспользуемся так называемым «методом локтя» [4], в соответствии с которым оптимальным числом кластеров считается значение абциссы точки, меняющей характер поведения функции однородности кластеризации (рисунок 2).

Из рисунка видно, что убывание функции однородности кластеров (верхняя кривая) значительно замедляется при абциссе равной 8, а также в этой точке достигается локальный максимум скорости изменения убывания функции однородности (нижняя кривая).

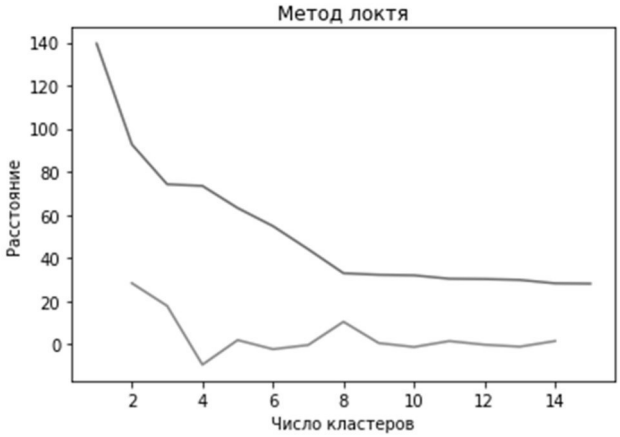


Рисунок 2 – Графическая иллюстрация «метода локтя»

Таким образом, в исходной выборке оптимальное число однородных групп клиентов равно восьми. Выделение заданного числа кластеров из полного дерева проводилось с использованием метода fcluster(), результатом работы которого является вектор. Каждый элемент данного вектора указывает номер кластера, которому принадлежит соответствующий объект исходной выборки.

На заключительном этапе проводилась разметка исходной выборки объектов полученными метками (номерами) кластеров. Для этого в объект DataFrame, содержащий исходную выборку, в качестве столбца (признака) добавлялся вектор, генерируемый методом fcluster(). В результате каждому объекту (клиенту) поставлен в соответствие номер кластера (сегмента), которому он принадлежит. С помощью механизма группировки groupby(), которому в качестве параметра передавался столбец с метками кластеров, выделены объекты, принадлежащие каждой из восьми образовавшихся групп. Выделенные группы могут использоваться для формирования профилей клиентов.

Основным результатом данной работы является демонстрирование возможностей различных инструментов языка программирования Python по поиску решения задачи сегментации клиентов. Направления дальнейшего развития работы могут быть связаны с исследованием важности имеющегося набора признаков и, как следствие, анализом устойчивости построенной кластеризации к их колебаниям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дибб С. Практическое руководство по сегментированию рынка / С. Дибб, Л. Симкин. – СПб.: Питер, 2001. – 240 с.
2. Паклин Н.Б. Бизнес-аналитика: от данных к знаниям. – 2-е изд. перераб. и доп. – СПб.: Питер, 2010. – 704 с.
3. Хейдт М. Изучаем pandas. – М.: ДМК Пресс, 2018. – 438 с.
4. Everitt B.S., Landau S., Leese M., Stahl D. Cluster Analysis / B.S. Everitt, S. Landau, M. Leese, D. Stahl. – 5th edition. Chichester, UK: Wiley Publishing, 2011. – 330 p.

УДК 519.876.5

ФОРМИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ И КОММЕРЧЕСКИХ ОРГАНИЗАЦИЙ В АГЕНТНОЙ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗВИТИЯ РОССИИ

Е.В. Новикова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *catalina.novi@mail.ru*

В статье представлено информационное обеспечение и решение одной из задач наполнения модели пространственного развития России. Разработан модуль формирования финансовых и коммерческих организаций в разрезе регионов и экономической деятельности. План счетов формируется и заполняется по образцу для каждой организации. Предоставляется программное обеспечение модуля. Приведены результаты расчетов.

Ключевые слова: агент-ориентированное моделирование, прогнозирование экономических процессов, информационное наполнение, алгоритм.

1. Введение

Актуальность построения модели пространственного развития России [1-4] обусловлена необходимостью разработки разнообразных инструментов для прогнозирования эффективности социально-экономических мер, предусмотренных Стратегией пространственного развития России [5]. В основе данной модели лежит компьютерная программа, а ее интеграция обеспечивает анализ и результаты реальных данных о населении, экономике и инфраструктуре страны [6,7]. В модель пространственного развития России входят следующие модули: демография, экономика, финансы, система образования и государственное управление. Каждому региону России соответствует регион в модели, чтобы отразить расположение жителей, инфраструктуры и производства, для которых сформированы население, организации и административные органы [1]. В каждом регионе также есть секторы образования, труда, производства и обслуживания, представленные торговыми организациями. Административные функции разделены между федеральными и региональными органами власти и выполняются через бюджетные организации. Финансовая система централизована и выражается в модели Центральным банком и региональными коммерческими банками.

Агентами в модели являются физические лица и домохозяйства, а также юридические лица (коммерческие, бюджетные и финансово-кредитные организации). Организации в модели делятся на два типа: коммерческие и финансовые. Бухгалтерский баланс и рабочие места в разрезе профессий и уровней образования определяются для каждой организации.

2. Обоснование необходимости разработки модуля

В большинстве случаев реальные статистические данные об организации по регионам отображаются в агрегированном формате. Поэтому задача ввода

данных в общую базу данных модели - сложный и трудоемкий процесс. Для повышения функциональности было решено написать модуль, который обеспечил бы формирование в модели финансовых и коммерческих организаций в разрезе отраслевой структуры и видов экономической деятельности.

Диаграмма вариантов использования (рисунок 1) отражает место разработанного модуля в агентной модели.

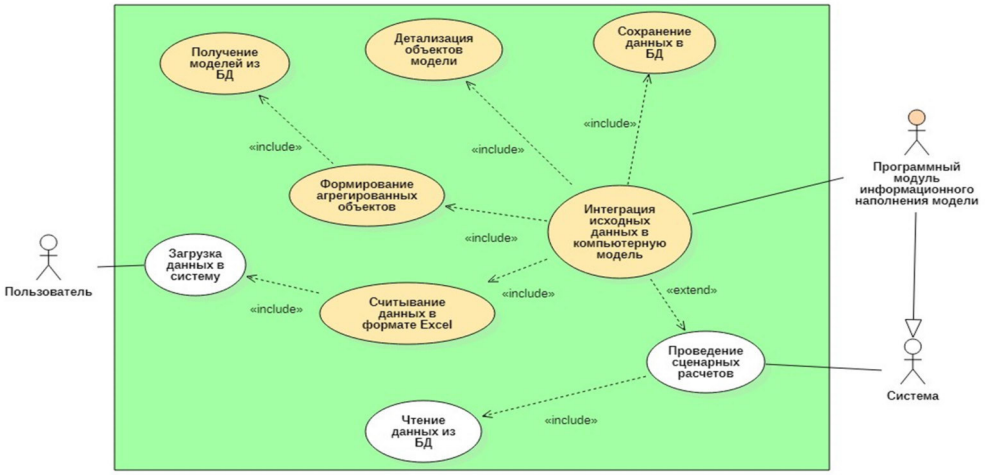


Рисунок 1 – Диаграмма вариантов использования модуля

Модуль обеспечивает автоматическую генерацию запросов к базе данных и проверку правильности результатов модели. Это упрощает работу исследователя при обращении к модели и освобождает его от рутинных вычислений и действий.

3. Проектирование модуля

Стадия проектирования достаточно сложный, но тем не менее очень важный процесс разработки программного обеспечения. В качестве унифицированного языка представления этапов проектирования и описания программы, а также протекающих в ней процессов, был выбран UML. Ключевая роль диаграммы деятельности (рисунок 2) заключается в отображении контроля над последовательностью действий и их самих между основными блоками разработанного обеспечения. Данными блоками являются контроллер общей базы данных модели и обработчик ее данных.

Как видно из схемы, работа разработанного модуля делится на две части:

1) Загрузка и обработка данных (обработчик данных);
2) Подключение к базе данных, загрузка и выгрузка данных из нее (контроллер баз данных).

Программный модуль представляет собой исполняемый файл приложения, что позволяет использовать его как отдельное приложение. Представление, позволяющее взаимодействовать с таблицей в режиме реального времени, позволяет редактировать её перед экспортом или перед запуском программы модуля.

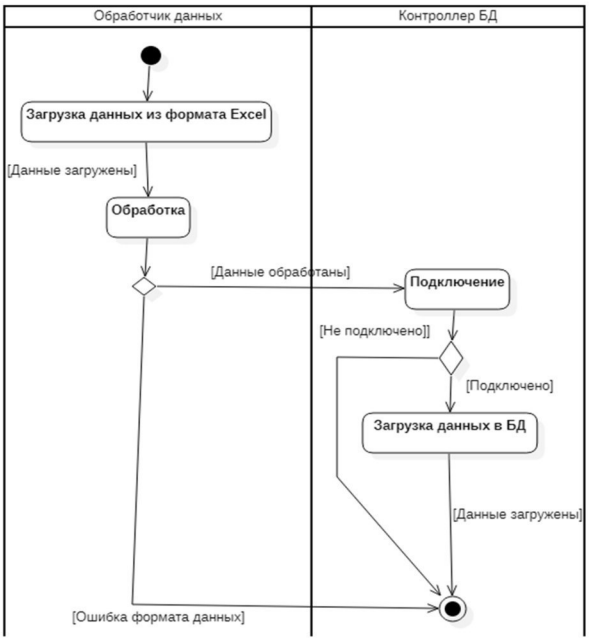


Рисунок 2 – Диаграмма деятельности компонентов модуля

4. Алгоритм генерации данных

Изначально в общей базе данных модели пространственного развития представлены укрупненные данные, характеризующие отдельные отрасли в региональном разрезе. Задача реализации алгоритма заключается в детализации исходных обобщенных экономических и финансовых показателей для каждого вида организации модели.

Алгоритм формирования финансовых и коммерческих организаций (рисунок 3) включает два направления – генерация финансовых и коммерческих организаций.

1 ШАГ. Ввод исходной информации.

- для коммерческих организаций - сведения о том, какая доля внутреннего валового продукта (ВВП) приходится на регион по отраслям;

- для финансовых организаций - информация о том, какая доля их деятельности приходится на каждый регион.

Для ввода исследователь представляет документ Excel, таблицу данных, в которой описывается доля соответствующей организации в контексте отрасли, связанной с каждым регионом. Статистические данные, на основе которых были выделены доли, были получены на основе официальных источников, таких как Россстат [6] и Центральный банк (ЦБ) [7]. Данные были предварительно обработаны и ранжированы по регионам и видам экономической деятельности.

2 ШАГ. Создание финансовых и коммерческих организаций, относящихся к соответствующей отрасли в отдельном регионе, и формирование бухгалтерских счетов для созданных организаций каждого вида.

3 ШАГ. Заполнение бухгалтерских счетов.

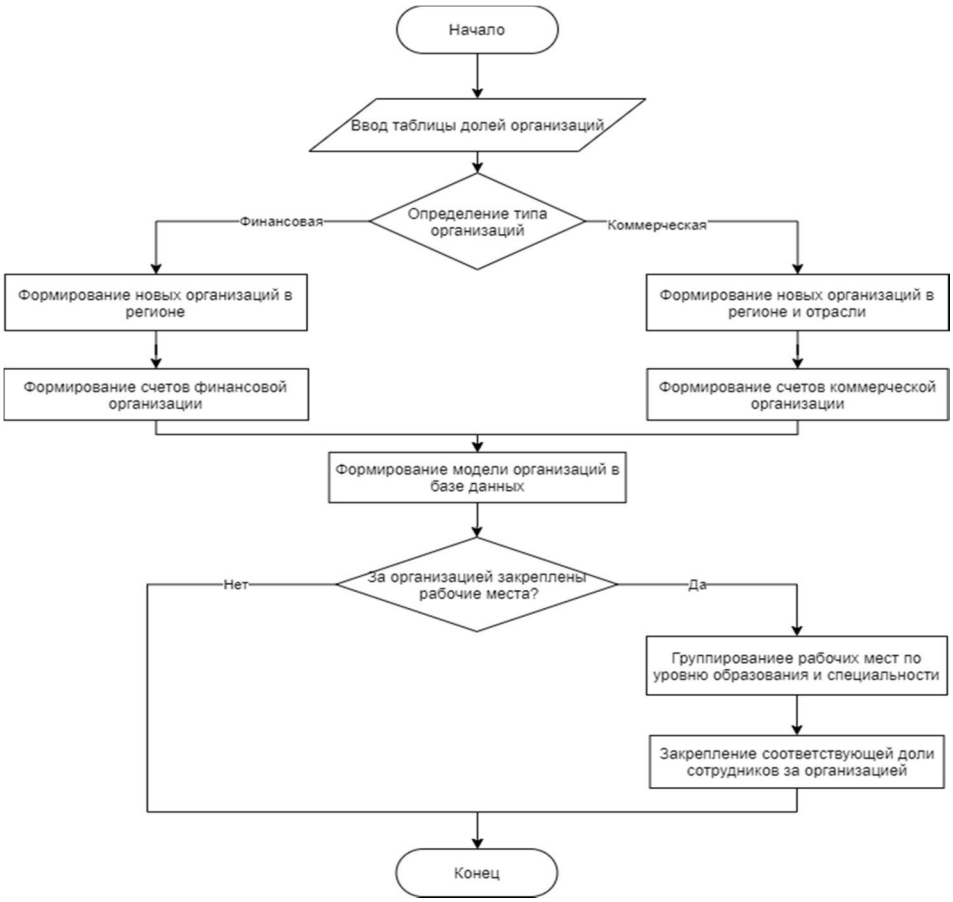


Рисунок 3 – Алгоритм формирования финансовых и коммерческих организаций

4 ШАГ. Генерация рабочих мест - пропорциональное закрепление сотрудников, сгруппированных по уровню образования и специальностям, к сформированным организациям.

5. Результаты работы

На рисунке 4 изображен результат работы модуля, который отображает его основную функциональность и интеграционную совместимость с основной моделью, которая заключается в репрезентативности выходных данных для этой модели, основываясь на требованиях к ней.

В качестве входных данных для модели были использованы официальные статистические данные о различных финансовых предприятиях, таких как ПАО «Сбербанк», ОАО «Газпромбанк» и других. На основе этих данных модуль совершил преобразования, основанные на бизнес-требованиях к модели, заложенных в алгоритме работы программы, что дает возможность использовать полученные агрегированные данные в основной модели. Таким образом, разработанный модуль позволяет минимизировать ручные расчеты, которые нужны для декомпозиции собранных данных, предназначенных для дальнейшей загрузки в основную модель.

Данная разработка является решением проблемы информационного наполнения модели, путем детализации общей базы данных модели с позиций организаций каждого вида по регионам и отраслям экономической деятельности.

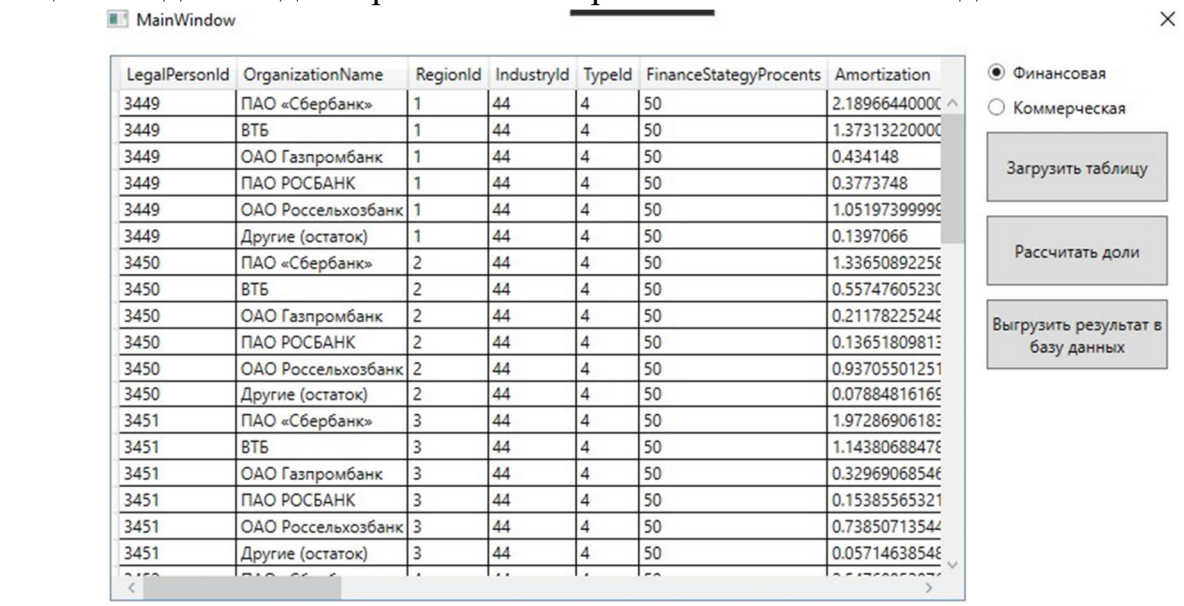


Рисунок 4 – Результаты работы модуля

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-03049.

ЛИТЕРАТУРА

1. Машкова А.Л. Прогнозирование долгосрочного развития макроэкономических систем на базе агент-ориентированных моделей // Государственное управление. Электронный вестник. – 2017. – № 57. – С.50-70.
2. Новикова Е.В., Машкова А.Л. Формирование кредитного портфеля банка в агентной модели экспериментальной экономики // Материалы XII Международной научно-практической конференции «Молодежь и научно-технический прогресс». - 2019. - С. 304-308.
3. Маматов А.В., Банчук Ю.А., Машкова А.Л. Информационное наполнение агентной модели пространственного развития России на осно ве данных региональных и федеральных информационных систем // Информ ационные технологии в науке, образовании и производстве (ИТНОП-2018) - 2018. - С. 290-297.
4. Маматов А.В., Машкова А.Л., Новикова Е.В. Воспроизведение динамики населения регионов России методом агентного моделирования// Информационные системы и технологии. - 2019. - № 2 (112). - С. 50-58.
5. Концепция Стратегии пространственного развития Российской Федерации на период до 2033 года. Москва, 2018.[Электронный ресурс] /Режим доступа: http://book.lib-i.ru/25ekonomika/325519-1-proekt-koncepciya-strategii-prostranstvennogo-razvitiya-rossiyskoy-federacii-period-2030-goda-moskva-2016-v.php Последнее обращение 19.10.2020

6. Федеральная служба государственной статистики (официальный сайт) http://www.gks.ru/. Дата обращения 28.08.2020.
7. Центральный банк Российской Федерации (официальный сайт) http:// http://www.cbr.ru/. Дата обращения 12.09.2020.

УДК 372.851

ЦИФРОВАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ФОРМИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ ШКОЛЬНИКА: СОЦИАЛЬНЫЕ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

А.Ю. Полякова
ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
e-mail: *poliakova.ani@yandex.ru*

В статье проанализирована современная ситуация цифровой трансформации общего образования, рассмотрены особенности формирования стохастической культуры обучающихся в условиях цифровой трансформации, а, именно, – социальные и образовательные аспекты.

Ключевые слова: цифровая трансформация, цифровизация, стохастическая культура, формирование, школьники.

Современный период развития школьного математического образования сопровождается использованием в учебной практике совершенно новых подходов, средств и методик обучения. В настоящее время в учебных заведениях активно проявляются попытки внедрения виртуальной среды, являющейся носителем большого объема информации и обладающей специфическими инструментальными возможностями.

Виртуальная среда – среда, созданная в целях моделирования и воспроизведения ранее освоенных и вновь разработанных человечеством форм и способов потребления информации, функционирующая за счет уникального потенциала цифровых технологий.

В образовании, как и в других сферах человеческой деятельности, встречается понятие «цифровой трансформации», процессы которой действуют в нем уже в течение последних тридцати-сорока лет. Цифровое образование – неотъемлемая часть цифровой экономики, поэтому оно должно быть неминуемо реализовано. Необходимость применения цифровых технологий в образовании, в частности, при обучении вероятностно-статистической линии, отрицать уже невозможно. Среди понятий, определяющих востребованность и актуальность применения цифровой трансформации в образовании: интерактивность, производительность, коммуникативность, интеллектуальность, мультимедия, моделинг, цифровые технологии и другие [1].

Открывающие доступ к новейшим источникам информации, предоставляющие более совершенные возможности для проявления креативности личности школьника, приобретения обучающимся предпрофессиональных навыков и последующего их закрепления, цифровые технологии многократно повышают результативность самостоятельной работы учеников, делают возможным для пе-

дагога использование на уроках математики принципиально новых форм и методов обучения. Цифровые технологии на уроках стохастики способны показать школьникам всю сущность статистической природы понятий и фактов, которыми оперирует теория вероятностей. Данный факт позволяет говорить об их большом не только методологическом, но и методическом значении. В связи с этим, учитель может оказать содействие не только развитию стохастического мышления учащихся, но и формированию у школьников таких умений, как: принятие оптимального решения из возможных вариантов, способность к осуществлению исследовательской деятельности, обработке информации. В широком смысле педагог содействует формированию стохастической культуры учеников.

Стохастическая культура обучающихся – часть математической культуры, изучением отдельных вопросов формирования и развития которой занимались: З. С. Акманова, О. В. Артебякина, Д. У. Биджиев, В.С. Ежова, З. Ф. Зарипова, Т.Г. Захарова, К. К. Исмагилова, М.С. Мирзоев, Г. В. Нахратова, О.А. Окунева, О.Н. Пустобаева, С.А. Розанова, Е.Ю. Романова, С.Н. Сушкова, В. Н. Худяков.

В работах Ю.И. Богатырёвой, И.В. Гапоненко, О.А. Граничиной, П.И. Образцова, А.П. Тонких обозначены некоторые аспекты, затрагивающие проблему формирования статистической культуры педагога.

Формирование элементов стохастической культуры младших школьников рассмотрено в диссертации С. И. Воробьёвой, научных работах Н.Г. Гашарова, Х.М. Махмудова. Труды Д.А. Власова, Г.С. Евдокимовой, И.В. Кондратьевой, С.П. Насельского, А.А. Русакова посвящены изучению возможностей развития стохастической культуры будущих специалистов в вузе.

Общим вопросам, связанным с теорией и методикой обучения элементам стохастики, посвящен более широкий ряд исследований отечественных и зарубежных учёных-методистов. Так, среди авторов, занимавшихся вопросами обучения статистике, комбинаторике и теории вероятностей в общеобразовательной школе: В.В. Афанасьев, Е.А. Бунимович, Г.С. Евдокимова, Д.В. Маневич, А.Д. Нахман, А. Плоцки, Т.А. Полякова, В.Д. Селютин, Ю.Н. Тюрин, В.В. Фирсов, М.В. Шабанова, С.В. Щербатых, K. Bognar, M. Charles, A. Engel, M. Henry, M. Peltier. Реализацию прикладной и практической направленности в обучении стохастике в своих работах представили: С. Н. Дворяткина, Т.А. Полякова, О.Н. Троицкая, И. В. Сластенова, Т.А. Ширшова, С. В. Щербатых. Подготовка элементам вероятностно-статистической линии на основе использования информационных технологий описана В.А. Булычёвым, А.В. Ванюриным, И.В. Китаевой, К.Г. Лыковой, О.Ю. Меляковой, М.С. Пестовой, С.А. Самсоновой, Т.А. Чернецкой и др.

Формирование стохастической культуры учащихся в условиях цифровой трансформации общего образования – одна из важнейших задач, стоящих перед школьным образованием.

Цифровая трансформация системы общего и высшего образования, а также проблемы ее внедрения в учебный процесс представлены в работах следующих авторов: Д.А. Антоновой, А.В. Белоцерковского, Н.В. Бузова, Н.А. Гузь,

Н.В. Ермалинской, Я.И. Кузьминова, Е.Ю. Левиной, Е.В. Оспенниковой, Н.Е. Сердитовой, Е.В. Спирина, А.А. Строкова, Г.Л. Тульчинского, А.Ю. Уварова, Т.Г. Фильчук, И.Д. Фрумина.

Проанализировав этапы развития цифровой трансформации системы отечественного образования в историческом контексте, стоит отметить, что первые два подготовительных этапа были и связаны с компьютеризацией и информатизацией. Третий подготовительный этап условно назван «цифровизацией образования», начало которого положено в 2016 году одновременно с запуском приоритетного проекта «Современная цифровая образовательная среда в Российской Федерации» (2016-2021 гг.). Приведенным выше проектом была показана значимость и важность задач развития новых образовательных технологий. Кроме этого, данный проект включили в портфель Правительства Российской Федерации.

В 2017 году был анонсирован новый проект «Цифровая школа», предусматривающий создание необходимой инфраструктуры в общеобразовательных школах страны (2018-2025). В рамках «Цифровой школы» предполагалось создание специального программного обеспечения, гарантирующего качественное онлайн-обучение, а также отработанный контроль процедуры оценивания и передачу достоверных результатов обучения в информационно-образовательные среды вузов.

Используя данную программную среду в ходе обучения школьников элементам вероятностно-статистической линии, учителю будет целесообразно и необходимо создавать интерактивные игровые ресурсы, симуляторы, тренажеры, реализовывать на практике системы тестирования и виртуальные лаборатории. Обучающиеся, в свою очередь, будут должны посещать виртуальные экскурсии, участвовать в дистанционных олимпиадах и турнирах в режиме реального времени, а также защищать свои проектные работы онлайн. Средства обучения, такие как учебники и другие дополнительные, справочные материалы, должны быть переведены в электронный формат. Обязательные и факультативные формы обучения должны сопровождаться специальными онлайн-курсами. Свободным доступом к изучению нового и закреплению изученного материала, а также для самостоятельной работы ученики должны быть наделены через планшеты, ноутбуки, персональные компьютеры, мобильные устройства.

Следовательно, обучая детей статистике, теории вероятностей и комбинаторике в рамках проекта «Цифровая школа», учитель сможет выстраивать для них индивидуальные образовательные траектории. Следование данным траекториям позволит ученикам повысить уровень стохастической культуры.

Необходимость формирования стохастической культуры обучающихся, заключающая в себе потребности построения индивидуальных образовательных траекторий с применением цифровой образовательной среды определяет актуальность темы нашего исследования.

В своей работе мы постараемся решить следующие обозначившиеся противоречия между: высоким потенциалом цифровых технологий и недостаточным их использованием в обучении стохастике, возможностью формирования

стохастической культуры при обучении школьников математике и недостаточной разработанностью критериев и уровней сформированности, отсутствием диагностик данных уровней.

При этом в качестве объекта исследования мы будем рассматривать обучение стохастике в системе среднего общего образования, которое бы способствовало повышению наличного уровня стохастической культуры учеников. Предметом исследования будут выступать содержательные, методические и организационные аспекты формирования стохастической культуры обучающихся с использованием средств цифровых образовательных технологий.

Подводя итоги вышеобозначенному, скажем о том, что попадание в цифровую среду – уже неизбежность. В этой связи, цифровая трансформация и цифровизация образования, как ее составляющая, – это важнейшая социальная проблема текущего времени.

В целях формирования стохастической культуры школьников в условиях решения данной проблемы нами будут обозначены следующие ведущие векторы этого процесса: выявление места и роли понятия «стохастическая культура» в системе психолого-педагогических категорий; обозначение критериев и уровней сформированности стохастической культуры школьников; определение сущности, функций, структуры, путей и направлений развития цифровой трансформации общего образования; формулирование методических рекомендаций по формированию стохастической культуры обучающихся в условиях цифровой трансформации общего образования и экспериментальная проверка их эффективности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонова Д.А., Оспенникова Е.В., Спирин Е.В. Цифровая трансформация системы образования. Проектирование ресурсов для современной цифровой учебной среды как одно из ее основных направлений//Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. – 2018. – Серия «Информационные компьютерные технологии в образовании». – №14. – С. 5–37.
2. Гнатышина Е.В., Саламатов А.А. Цифровизация и формирование цифровой культуры: социальные и образовательные аспеты//Вестник Челябинского государственного педагогического университета. – 2017. –№8. – С. 19–24.

УДК 004.9 / .62

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ВЕБ-СКРЕПИНГ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА PYTHON3

А.А. Сафронов, И.Е. Кузьмин

В работе рассматривается автоматизированный веб-скрепинг, как инструмент сбора и извлечения динамических данных веб-ресурсов. Особое внимание уделяется внедряемому в проект модулю управления веб-браузером Selenium WebDriver. Представлен пример программы-бота, разработанного на Python3, для сбора динамических элементов ресурса на примере интернет-источника расписания Орловского государственного университета.

Ключевые слова: веб-скрепинг, динамические элементы, данные, Selenium WebDriver.

Современное развитие информационных и компьютерных технологий определяет множество проблем, разрешение которых является первоочередной и перспективной задачей. В число подобных входит веб-скрепинг, решающий задачи мониторинга и загрузки данных с веб-ресурсов.

Актуальность настоящей работы обусловлена необходимостью развития систем, объединяющих API мессенджеров с модулей Selenium WebDriver, в связи с чем актуальным вопросом является получение требуемых динамических данным путём создания DOM и выполнения сценариев JavaScript для последующего извлечения информации с помощью селекторов на примере веб-ресурса расписания Орловского государственного университета. Прежде всего стоит отметить, что согласно исследованию [1], представленному Imperva, следует, что половина трафика составляют боты, а значит, процессы веб-скрепинга в сети «Интернет» являются самодостаточными и популярными. На рисунке 1 представлена диаграмма трафика по типу посетителей веб-ресурсов.

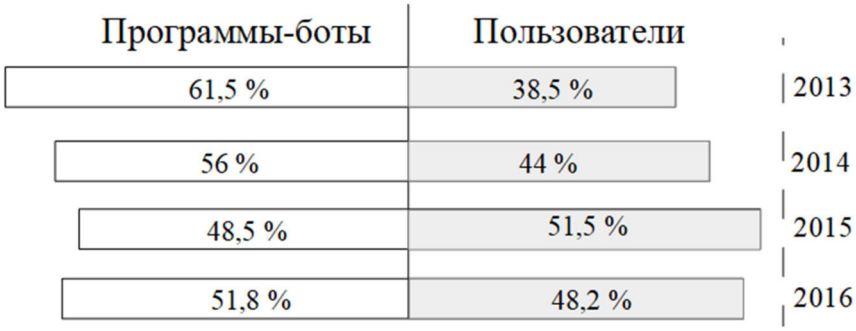


Рисунок 1 – График трафика по типу посетителей веб-ресурсов

Разработка программ-ботов для веб-скрепинга является уникальной задачей под определенный веб-ресурс. К тому же на сегодняшний день веб-сайты содержат не только статические элементы, но и динамические. Согласно данным [2], представленным интернет-ресурсом Web Technology Surveys, JavaScript используют 96,5% всех веб-сайтов в качестве клиентского языка программирования, а значит, доступ к динамически формируемой информации из HTML-кода невозможен (DOM управляется с помощью JavaScript). На рисунке

2 представлена медиана использования JavaScript на веб-сайтах в период с июля 2019 года по август 2020 года.

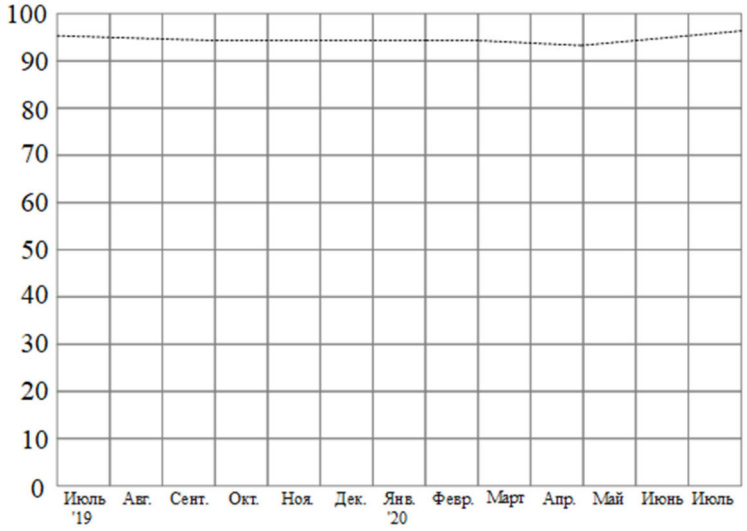


Рисунок 2 – Медиана использования JavaScript на веб-сайтах

Главная цель работы определяется важностью изучения процессов автоматизированного веб-скрепинга для извлечения динамических элементов веб-ресурса с помощью разработанной программы-бота на Python3, внедряемой в современные популярные мессенджеры, с последующей демонстрацией работы.

Теоретическая значимость исследования достигается в результате анализа принципов взаимодействия программы-бота с сервером и новыми решениями в области автоматизированного веб-скрепинга с использованием модуля Selenium WebDriver и API мессенджеров.

Практическая значимость исследования достигается в результате разработки программы-бота на Python3 и демонстрации принципа работы проекта в мессенджере. Разработка характеризуется уменьшением времени обработки запросов для получения.

Основная часть. На сегодняшний день весьма популярными являются мессенджеры, предоставляющие собственные API, например, VK API [3], Telegram API [4], Facebook API [5], WhatsApp [6] и др. Главным приоритетом разработки программы-боты для мессенджеров является уменьшение времени на получение требуемой информации для пользователя.

Для реализации автоматизированного веб-скрепинга динамических элементов выбран язык программирования Python3 и библиотека Selenium WebDriver. Библиотека Selenium WebDriver – семейство драйверов управления браузером, заключённых в программную библиотеку.

Принцип работы программы-бота заключается в следующем:

1. Сервер постоянно ожидает запрос пользователя на обработку данных;
2. В зависимости от полученного запроса начинается выполнение одной из функций в зависимости от полученных данных;

3. Выполняется отправка данных пользователю.

Существенным плюсом является то, что сервер способен обработать одновременно несколько запросов от разных пользователей, что делает программу-боты – автоматизированной системой веб-скрепинга.

На рисунке 3 представлена схема взаимодействия пользователя с программой-ботом.

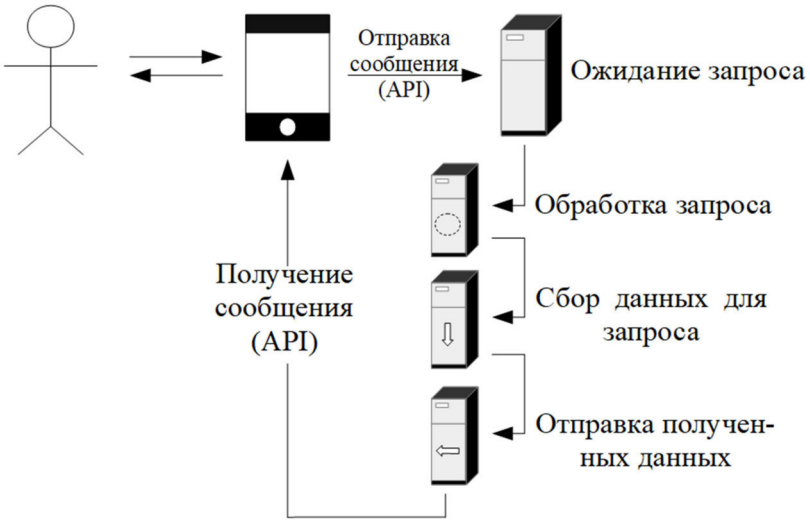


Рисунок 3 – Схема взаимодействия пользователя с программой-ботом

Данные о факультетах, направлениях и учебных группах, динамически получаемые с веб-ресурса расписания Университета, заключаются в области клавиатуры смартфона (в данном случае смартфон рассматривается как наиболее популярный гаджет для мобильного получения данных). На рисунке 4 представлен пример листинга сбора динамических элементов с веб-ресурса расписания с последующим созданием клавиатуры.

```
facults = driver.find_elements_by_class_name("facult-btn")
for i in range(len(facults)):
    keyboard.add_button(facults[i].text, color=VkKeyboardColor.DEFAULT)
    if ((i + 1) % 4) == 0 and i != (len(facults) - 1):
        keyboard.add_line()
```

Рисунок 4 – Пример листинга сбора динамических элементов

Программа формирует словарь данных о пользователе, имеющий следующую структуру:

1. «id» – идентификатор пользователя, присваиваемый мессенджером при регистрации;
2. «facult» - данные о выбранном факультете пользователя (по умолчанию «0»);
3. «course» – данные о выбранном курсе обучения пользователя (по умолчанию «0»);
4. «flow» – данные о выбранной учебной группе пользователя (по умолчанию «0»).

Данный словарь заполняется в результате диалога пользователя и бота.

На рисунке 5 представлен пример листинга словарей данных пользователей.

```
users.listOfStudents.append(
    {
        'id' : event.obj.from_id,
        'facult' : 0,
        'course' : 0,
        'flow' : 0
    })
```

Рисунок 5 – Пример листинга словарей данных пользователей

На рисунке 6 представлен листинг обработки события для продолжения диалога с пользователем.

```
for item in range(len(users.listOfStudents)):
    if users.listOfStudents[item]['id'] == event.obj.from_id:
        next_stage(self, event, users.listOfStudents[item])
        find = True
        break
```

Рисунок 6 – Листинг обработки события для продолжения диалога с пользователем

На рисунке 7 представлен пример листинга функции обработки события.

```
if item['course'] == 0:
    item['course'] = event.obj.text
```

Рисунок 7 – Пример листинга функции обработки события

На рисунке 8 продемонстрирован пример диалога бота и сбор динамических элементов с веб-ресурса на примере программы-бота в мессенджере VK.

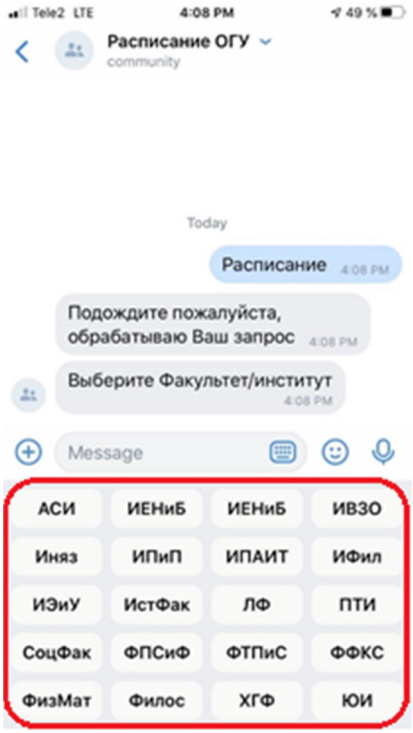


Рисунок 8 – Пример диалога бота и сбора динамических элементов веб-ресурса

Выводы. Автоматизированный веб-скрепинг динамических элементов с помощью программ-ботов позволяет одновременно множеству пользователей получить требуемые данные с меньшей затратой времени. Разработанная программа-бот, встраиваемая в наиболее популярные мессенджеры, такие как, VK,

Telegram, Facebook, WhatsApp, позволяет пользователям получить информацию о текущем расписании Университета, сократив количество шагов получения данных с веб-ресурса.

Представлены примеры взаимодействия пользователя и программы-бота, листинги реализации функций сбора динамических элементов с веб-ресурса и элементы автоматизации обработки данных пользователей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bot Traffic Report 2016 | Imperva [Электронный ресурс] // Imperva. M., 2020, URL: https://www.imperva.com/blog/bot-traffic-report-2016/ ?Email=sara@axios.com&Utm_Campaign=&Utm_Content=&Utm_Medium=&Utm_Source=&formid=&munchkinId (дата обращения 28.08.2020).
2. Usage Statistics of JavaScript as Client-side Programming Language on Websites [Электронный ресурс] // Q-Success. M., 2020, URL: https://w3techs.com/technologies/details/cp-javascript (дата обращения 28.07.2020).
3. Знакомство с API ВКонтакте [Электронный ресурс] // ВКонтакте. M., 2020, URL: https://vk.com/dev/first_guide (дата обращения 28.08.2020).
4. Telegram APIs [Электронный ресурс] // Telegram. M., 2020, URL: https://core.telegram.org/ (дата обращения 28.07.2020).
5. APIs and SDKs – App Development [Электронный ресурс] // Facebook. M., 2020, URL: https://developers.facebook.com/docs/apis-and-sdks?locale=en_EN (дата обращения 28.08.2020).
6. Business API [Электронный ресурс] // WhatsApp Inc. M., 2020, URL: https://www.whatsapp.com/business/api/ (дата обращения 28.08.2020).

О ПРОВЕДЕНИИ РАЗМЕТКИ КОЛЛЕКЦИИ ТЕКСТОВ КЛЮЧЕВЫМИ СЛОВАМИ

Н.С. Храмцов
ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»
e-mail: *nadya255@mail.ru*

В статье представлены методологические и организационные рекомендации по проведению разметки коллекции текстов ключевыми словами. Описан программный интерфейс и функциональная модель программного обеспечения, которые предполагается использовать в ходе планируемого эксперимента. Детализируются последующие этапы исследования.

Ключевые слова: текстовый корпус, разметка ключевыми словами, экспертное оценивание.

Постоянный рост текстовой информации в интернете затрудняет процесс поиска нужных документов. Значительную роль в ускорении отбора текстовых документов выполняют ключевые слова (КС). К сожалению, далеко не все тексты размечены авторскими КС или же они указаны неверно, что осложняет поиск релевантной информации. В открытых источниках представлен ряд программных решений, позволяющих автоматически выделять КС из англоязычных и некоторых других текстов (в их число не входят русскоязычные документы). Основной целью проводимых исследований является создание ПО, выделяющего ключевые слова из документов на русском языке. Для оценки качества работы ПО и выбора среди них наиболее эффективного, алгоритмы следует проверять на едином текстовом корпусе. Результаты сравнительного анализа англоязычных корпусов и их особенности представлены в работе [9]. В свободном доступе текстовых корпусов на русском языке не представлено, поэтому для осуществления дальнейших этапов исследования необходимо сначала добиться единства информационной базы.

На предыдущем этапе исследования была осуществлена систематизация опыта, посвященного особенностям выделения ключевых слов из текстов. Было выяснено, что корпус должен состоять не менее чем из 200 текстов научного стиля (это связано с наибольшей согласованностью экспертов), а также ограниченных в длине объемом в 800-1200 слов [8]. Для повышения точности оценивания работы экспертов по выделению КС необходимо добиться того, чтобы длины текстов и значения их сложности были распределены по нормальному закону. Также корпус должен быть составлен преимущественно из текстов, взятых из одной рубрики.

Одной из задач, решаемых в ходе создания текстового корпуса, является проведение разметки коллекции текстов ключевыми словами. Данную задачу следует условно разделить на три этапа: подготовительный, основной и заключительный. Графически этапы разметки текстового корпуса можно представить с помощью рисунка 1.

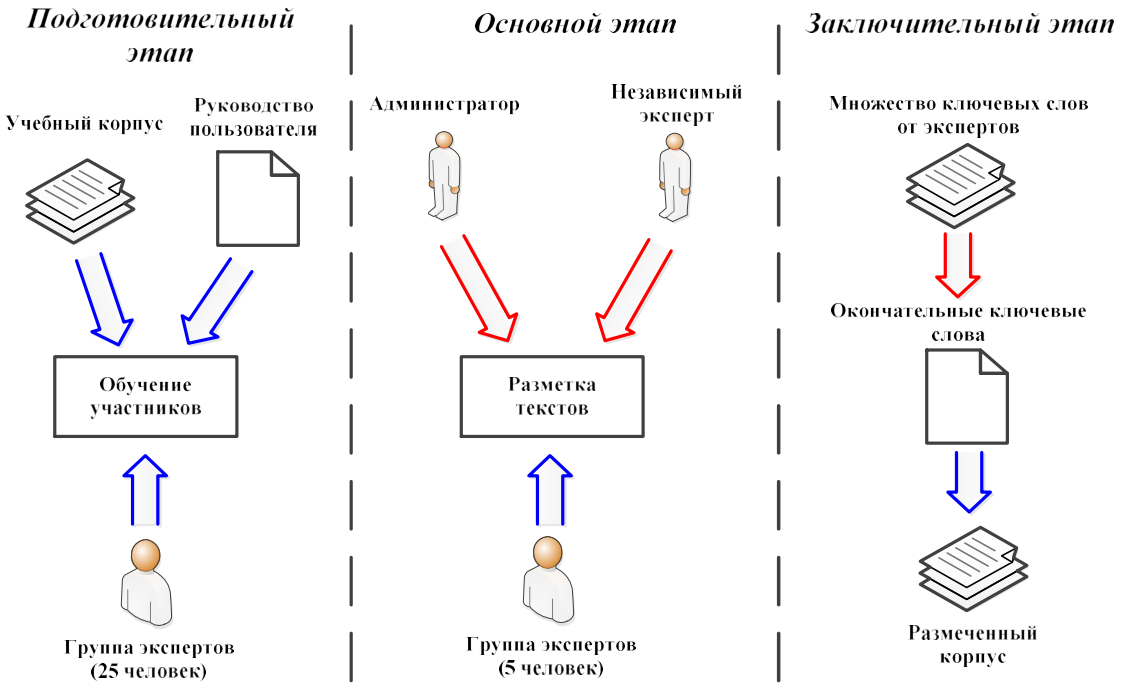


Рисунок 1 – Этапы осуществления разметки текстового корпуса

Во время подготовительного этапа необходимо выбрать и обучить группу людей для осуществления разметки текстов. Необходимость обучения пользователей была объяснена в работе [3, 13]. Однако некоторые исследователи утверждают, что размечать тексты должны только эксперты [12].

Работа экспертов-лингвистов по разметке 200 текстов будет стоить достаточно дорого, поэтому для оптимизации расходов планируется использовать работу асессоров для осуществления промежуточного контроля. В качестве участников будут привлекаться мотивированные студенты старших курсов технического вуза, которые следует предварительно обучить. Проблемы, вызванные привлечением необученных пользователей были описаны в предыдущих исследованиях [1, 2].

Для повышения качества разметки необходимо любой текст размечать двумя или более людьми, действующими независимо, чтобы их решения можно было сравнить. Перед началом работы необходимо установить минимальный уровень согласованности экспертов, в предыдущем исследовании среднее значение согласованности составило 6,7%. Если они не согласуются с заданной точностью, то текст будет являться плохо размеченным или неопределенным [11].

Для учебного корпуса было отобрано 30 статей с сайта Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru) объемом от 800 до 1200 слов, длины текстов для повышения качества расчетов должны подчиняться нормальному закону распределения, со средним значением сложности по индексу Флеша для русского языка равным 45, стиль текстов должен быть научным, преимущественно из одной рубрики. Важной особенностью является необходимость наличия авторских ключевых слов в тексте статьи, в противном случае их автоматическое выделения будет невозможно. Экспериментально получено, что количество автор-

ских КС должно быть распределено по нормальному закону со средним значением 6 ключевых слов на 1000 слов текста.

Руководство пользователя должно содержать в себе краткое описание эксперимента и требования к участникам. Необходимость создания руководства объясняется отсутствием единого понимания значения термина «ключевое слово», а также выводами, полученными по результатам предыдущих исследований [4]. Ожидается, что процесс обучения участников повысит их согласованность в выборе КС и повысит качество разметки. Согласованность в 40% решений считается удовлетворительной для создания текстового корпуса [9]. Результатом подготовительного этапа является выбор на основе ABC-анализа 20% от общего числа пользователей с целью их привлечения для последующей разметки [6].

Основной этап состоит из разметки совокупности текстов, из которых будет состоять корпус. В процессе разметки должен осуществляться постоянный и промежуточный контроль работы пользователем. Для постоянного контроля пользователей в состав программного обеспечения следует включить следующие инструменты: учет времени «активной работы» пользователя (при бездействии участника его рейтинг понижается), подключение словаря стоп-слов (при выделении в качестве ключевых слов из данного списка рейтинг участника снижается), счетчик количества выделенных слов (указание больше трех слов, ввод слов не в начальной форме или включение знаков препинаний является основанием для снижения рейтинга). Если участником исследования будут допускаться систематические ошибки, то это должно быть отражено не только у администратора, но и у пользователя на экране, чтобы он мог изменить стратегию выбора слов. Для осуществления промежуточного контроля необходимо привлекать независимых экспертов (асессоров), так как это не так дорого по сравнению с разметкой исключительно экспертами-лингвистами, и использование асессоров повышает качество оценки работы экспертов, отсеивает неудовлетворительно работающих пользователей, которых не смог отсеять администратор. Привлечение асессоров имеет широкое применение в тестировании поисковых систем, приложений, а также для сортировки релевантности информации. Завершив основной этап, будет размечена совокупность текстов с помощью группы обученных экспертов [7].

На заключительном этапе необходимо провести анализ полученных результатов. По окончании работы пользователя его результаты разметки сохраняются в формате Excel с указанием уникального идентификатора. В документе должны отражаться способ ввода КС (из текста мышью или с помощью клавиатуры); время, потраченное на ввод каждого КС; общее время, затраченное на текст; количество совпавших слов эксперта и автора; рейтинг пользователя, составляющийся на основе указанных ранее характеристик.

После этого пользователям будут предложены те же тексты для повторной разметки, однако КС необходимо будет выбирать строго среди некоторой заданной совокупности слов, полученной из совокупности авторских КС и наиболее часто встречающихся слов, получившихся по итогу первой разметки.

Данный метод является разновидностью метода Делфи, имеющего широкое применение не только в теории экспертных решений, но и в разметке корпусов [14]. По итогам обработки данных, полученных от второй группы экспертов, будет составлен текстовый корпус. Исходя из изложенных выше требований и рекомендаций, программную реализацию следует создавать с учетом пользовательского интерфейса, представленного на рисунке 2.

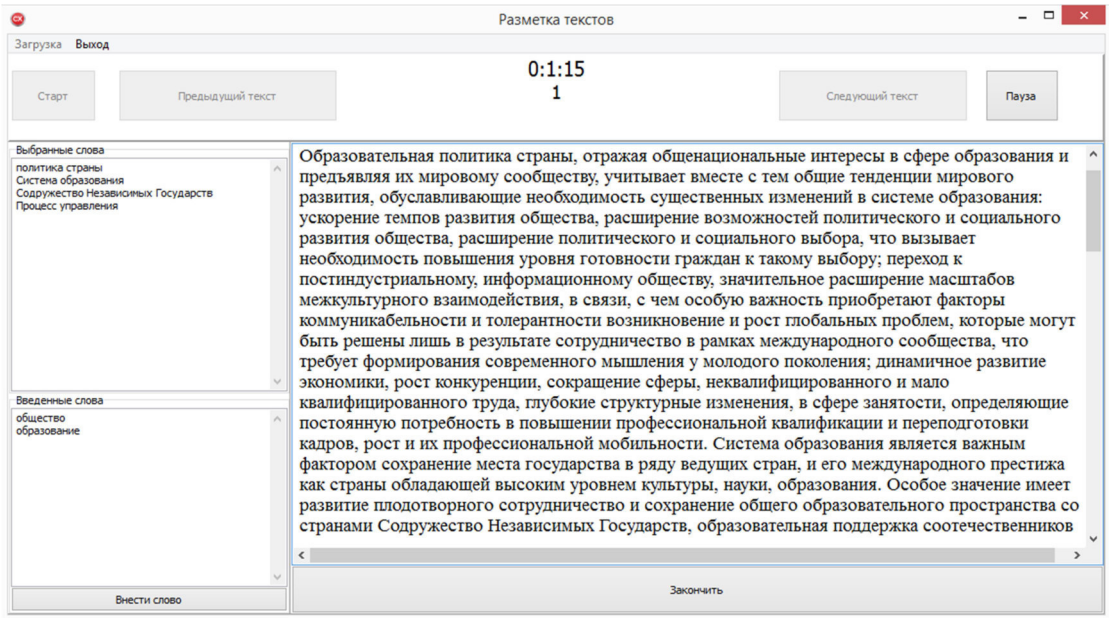


Рисунок 2 – Пользовательский интерфейс программного стенда

Согласно представленному выше варианту пользовательского интерфейса у пользователя имеется возможность загружать необходимый документ для разметки; останавливать при необходимости эксперимент с возможностью дальнейшего продолжения; вводить через клавиатуру или выбирать с помощью мыши из текста слова; возвращаться к уже обработанным текстам с целью коррекции указанных слов. При переходе к следующему тексту результат разметки предыдущего автоматически заносится в базу данных.

Дальнейшим этапом исследования планируется проведение описанного выше эксперимента с последующим созданием текстового корпуса и публикацией результатов. При добросовестной работе экспертов и качественной обработке полученных данных ожидается получить текстовый корпус, который будет использован при оценке эффективности работы алгоритмов автоматического извлечения ключевых слов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ванюшкин, А.С. Методы и алгоритмы извлечения ключевых слов / А.С. Ванюшкин, Л.А. Гращенко // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2016. – №. 19 – С. 85-93.
2. Ванюшкин, А.С. Оценка алгоритмов извлечения ключевых слов: инструментарий и ресурсы / А.С. Ванюшкин, Л.А. Гращенко // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2017. – №. 20 – С. 95-102.

3. Ванюшкин, А.С. О разметке корпусов текстов ключевыми словами / А.С. Ванюшкин, Л.А. Гращенко // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2018. – №. 21 – С. 207-211.
4. Ванюшкин, А.С. Разметка коллекции текстов ключевыми словами: практические аспекты автоматизации / А.С. Ванюшкин, Л.А. Гращенко, Г.В. Романишин // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2019. – №. 22 –С. 210-216.
5. Данелян, Т.Я. Формальные методы экспертных оценок / Т.Я. Данелян // Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО. – 2015. – №. 1 – С. 183-187.
6. Землянская, В.Н. Классический метод АВС-анализа и его современная модификация / В.Н. Землянская // Евразийский Союз Ученых. – 2017. – №9-2(42) – С. 76-81.
7. Китаев Н.Н. Групповые экспертные оценки. – М.: Знание, 1975. – 64 с.
8. Храмцов, Н.С. Проблематика оценивания алгоритмов автоматического извлечения ключевых слов / Н.С. Храмцов // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2019. – № 22 – С. 199-203.
9. Храмцов, Н.С. Особенности текстовых корпусов, используемых в исследованиях по извлечению ключевых слов / Н.С. Храмцов // Избранные труды физико-математического факультета Орловского государственного университета / под общ. ред. Т.Н. Можаровой. – Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2020. – С. 122-127.
10. Artstein R. Survey Article: Inter-Coder Agreement for Computational Linguistics / R. Artstein, M. Poesio // Computational Linguistics. – 2009. – Vol. 34. – Iss 4. – pp. 555-596.
11. Hovy E. Toward a ‘Science’ of Corpus Annotaton: A New Methodological Challenge for Corpus Linguistics / E.H Hovy, J. Lavid // International Journal of Translation, 22(1). – 2010. – pp. 13-36.
12. Kilgamiff, A. 95% replicability for manual word sense tagging. / A. Kilgamiff // In Proceedings of the Ninth Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics. – 1999. – pp. 277-278.
13. Novy, E.H. OntoNotes: the 90% solution. / E.H. Hovy, M. Marcus, M. Palmer, L. Ramshaw and R. Weischedel // In Proceedings of the HLT-NAACL-2006 Conference. – 2006. – pp. 57-60.
14. Sierra Martinez L.M. Building a Nasa Yuwe Language Corpus and Tagging with a Metaheuristic Approach / L.M. Sierra Martinez, C.A. Cobos, C.J. Munoz Coarrales, T. Curieux Rojas, E. Herrera-Viedma and D.H. Peluffo-Ordonez // Computacion y Sistemas, vol. 22 (3). – 2018. – pp. 881-894.

ОСОБЕННОСТИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА АССЕМБЛЕРЕ В 64-РАЗРЯДНОЙ ОПЕРАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ LINUX

В.В. Черкасова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *cher_vl@mail.ru*

В статье рассматриваются особенности разработки программ на ассемблере GAS в 64-разрядной операционной системе Linux. Описаны примеры программ, реализующих обработку данных целого и вещественного типа.

Ключевые слова: архитектрура x86_64, ассемблер GAS, математический сопроцессор, компилятор gcc.

Управления базами данных, системы автоматизированного проетирования и черчение, обеспечение работы высокопроизводительных серверов, разработка новейших компьютерных игр и приложений для формирования дополненной реальности обусловило потребность в большом адресном пространстве и привело к появлению нового семейтсва микропроцессоров с 64-разрядной архитектурой. Основным преимуществом такой архитектуры является увеличение адресного пространства, а также возможность использовать большее количество регистров.

Любое приложение или компьютерная программа, реализованное с помощью современных высокоуровневых языков программирования (например, C++, Python) с точки зрения микропроцессорного программирования представляет собой последовательность низкоуровневых инструкций языка ассемблер и является одной их частей архитектуры набора команд (ISA).

В настоящее время программируют на ассемблере крайне редко. Однако, именно, глубинное понимание процессов машинного уровня, позволяет создавать корректные и эргономичные программные коды и приложения на языках программирования высокого уровня.

Рассмотрим особенности написания программ в 64-битных операционных системах Linux на основе GNU Assembler (GAS) с компилятором GCC, распространяемых на основе свободной лицензии GPLv3.

Необходимо отметить, что на сегодняшний день большинство 64-разрядных систем имеет плоскую организацию пямяти, при которой значительно упрощается разработка операционных систем и систем программирования, а также уменьшается расход объема памяти на поддержку справочной системы и вспомогательных модулей операционной системы.

В соотвествии с технической документацией AMD Technology [1], x86_64 характеризуется расширенными регистрами, 64-битным адресным пространством, специальным режимом Long Mode и обратной совместимостью с x86. В соотвествии с соглашениями о вызовах передача данных компиляторами осуществляется через регистры общего назначения, расширенный набор которых состоит из 16 целочисленных 64-битных регистров: %rax, %rbx, %rcx, %rdx, %rbp, %rsi, %rdi, %rsp, %r8 – %r15. Программная реализация архитектуры x86_64 позволяет использовать их вместо стека для передачи данных.

Данные целого типа (integer) передаются с помощью регистров %rcx, %rdx, %r8, %r9. Для передачи данных типа float используются регистры %xmm0 – %xmm3. Если же функция содержит более четырех параметров, то остальные передаются с помощью стека.

Возможность более эффективного использования регистров для передачи данных по сравнению со стеком обусловливает ограничение, которое не позволяет испотльзовать одновременно и 64-битный и 32-битный коды. В соотвествии с этой разницей в соглашениях о вызове приложение, скомпилированное для 64-битного режима должно использавть библиотеки этой же разрядности. Эффективность от использования такого кода может быть достигнута за счет специальной оптимизации [1].

Особенности разработки программ на ассемблере, как правило, связаны с семейством процессоров, для которых ведется разработка. Ассемблер GAS в этом сысле является универсальным кросплатформенным ассемблером, доступным для всех операционных систем семейства Unix. Он способен автоматически обнаруживать низкоуровневую аппаратную платформу и генерировать необходимые инструкции в зависимости от базовой платформы. Кроме того, GAS позволяет создавать коды, которые отличаются от той среды программирования, в которой ведётся работа. Например, это позволяет программисту, работающему с компьютером на базе процессора Intel, создавать ассемблерные языковые программы для системы, основанной на MIPS. Конечно, недостатком является то, что разработчик не может протестировать полученный программный код на хост-системе [2].

Рассмотрим несколько программ на ассемблере (GAS), разработанных в 64-разрядной операционной системе Linux.

Например, необходимо найти значение суммы $\sum_{i=5}^{10} i + 2$.

На асемблере реализовать эту задачу можно двумя способами: с помощью команд передачи управления или инструкции loop. В первом случае программный код имеет вид:

```
.data
.output:
 string "sum = %d \n"
.global main
main:
 pushq %rbp
 movq %rsp, %rbp
 subq $16, %rsp
 movq $0, -4(%rbp)              # начальное значение суммы ряда =0
 movq $5, -8(%rbp)              # начальное значение для счетчика i=5
 jmp .M1
.M2:
 movq -8(%rbp), %rax
```

```
 addq $2, %rax                  # суммирует i+2
 addq %rax, -4(%rbp)
 addq $1, -8(%rbp)              # инкремент i
.M1:
 cmpl $10, -8(%rbp)             #  сравнение i с 10
 jle .M2
 movq -4(%rbp), %rax
 movq %rax, %rsi
 leaq .output(%rip), %rdi
 call printf
 leave
 ret
```

Необходимо отметить, что main представляет собой некоторую функцию, вызов которой сопровождается выделение некоторой области (frame) в программном стеке(program stack).

Созданный кадр (call frame) вызываемой функции main содержит передаваемые ей аргументы, некоторую область для хранения переменных, а так же адрес вершины стека, вызывающей функции (caller function).

После завершения данной функции происходит «освобождение» выделенного кадра стека (рисунок 1).



Рисунок 1 – Выделение кадра из стека

Передача данных осуществляется между регистрами с помощью инструкции movq, суффикс q, в которой указывает на размер операнда quad – операнд размером в 8 байт. В соотвествии с особенностями синтаксиса AT&T, используемого в ассемблере GAS, общий вид инструкции mov:

mov источник, приемник,

что отличается от синтаксиса Intel.

Метка .output задает формат данных для вывода результата работы программы. Остальные метки используются для реализации безусловного перехода (jmp) и условного перехода (jle).

Вывод результата осуществляется функцией printf в формате определяемом меткой .output.

Освобождение кадра программного стека, выделенного для реализации функции main, реализуется инструкцией leave.

Второй способ решения с помощью инструкции loop. Основная часть man-функции имеет вид:

```
main:
      pushq %rbp
      movq %rsp, %rbp
      subq     $16, %rsp
      movq $0, -4(%rbp)     #начальное значение суммы 0
      movq     $6, %rcx  #цикл будет выполнен 6 раз, потому что i =5..10
      movq -4(%rbp), %rax  # rax=0
.M1:
      addq     $6, %rax        # rax = rax+6
      addq     %rcx, %rax      # rax=rax+rcx
      loopq .M2             # декремент значения %rcx и переход на .M2
```

Необходимо отметить, что организация цикла с помощью loop предполагает, что изначально известно количество раз, которое выполнится цикл. С точки зрения математики это связано с введением новой переменной, то есть

$$\sum_{i=5}^{10} i+2=\left[t=i-4, t=1..6; i=t+4\right]=\sum_{t=1}^{6} t+6 .$$

В данном случае тело цикла будет выполнено шесть раз.

В операционной системе linux сборка исполняемого файла на основе программного кода реализованного на ассемблере в файле с расширением .s осуществляется с помощью компилятора gcc [3]. Команда сборки и запуска исполняемого файла имеет вид:

gcc -o name name.s

./name

Результат работы программы: sum =57.

Рассмотрим пример программы на ассемблере, демонстрирующей вычисление значения трансцендентных функций с данными типа long double.

Вычислить значение функции $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Текст программы будет таким:

```
.data
.input:
      .string "%Lf"
.output:
      .string "rezult=%Lf\n"
      .globl main
main:
      pushq %rbp
      movq %rsp, %rbp
      subq $64, %rsp
      leaq -32(%rbp), %rax
      movq %rax, %rsi
      movq $.input, %rdi
      call scanf
      fldt -32(%rbp)
```

```
fld1
fdivp %st, %st(1)
fsin
fstpl -40(%rbp)
movsd -40(%rbp), %xmm0
movsd %xmm0, -48(%rbp)
fldl -48(%rbp)
fldt -32(%rbp)
fmulp %st, %st(1)
fstpt -16(%rbp)
movq -16(%rbp), %rax
movq -8(%rbp), %rdx
movq %rax, (%rsp)
movq %rdx, 8(%rsp)
movq $.output, %rdi
call printf
movq $0, %rax
leave
ret
```

Для вычисления значение математических (в данном случае тригонометрической функции sin) требуется расширения командного множества CPU за счет математического сопроцессора, обеспечивающего функциональность FPU-модуля для процессоров, не имеющих интегрированного модуля. В свою очередь, FPU-модуль позволяет выполнять широкий спектр математических операций над вещественными числами.

Передача данных типа long double в функции main осуществляется с помощью 128 битного регистра SSE %xmm0. Инструкции fdivp, fsin, fmul являются командами математического сопроцессора. В качестве параметров этих функций выступают регистры %st(0) и st(1). Передача значений осуществляется через стек с помощью инструкций fld и fstp.

Значение аргумета функции sin задается в радианах.

При $x = 3.1415$, rezult = 0.983197.

Таким образом, разработка программ на ассемблере GAS для 64-разрядной операционной системы Linux имеет ряд особенностей связанных с передачей данных через регистры.

ЛИТЕРАТУРА

1. AMD64 Architecture Programmer's Manual, Volumes 1-5 // Publication # 40332 Revision: 4.02 Issue Date: November 2020. – 3242 с.
2. Blum, Richard Professional Assembly Language – Wiley Publishing, Inc. – 2005. – 577 с.
3. GCC online documentation [Электронный ресурс] // GCC, the GNU Compiler Collection. URL: https://gcc.gnu.org/onlinedocs (дата обращения: 14.11.2020).

УДК 537.8 + 681.3

АНАЛИЗ ВКЛАДА МУЛЬТИПОЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА В ОСНОВНУЮ ПОГРЕШНОСТЬ ОРИЕНТИРОВАНИЯ В БЕЗОПОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗЕРВНОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА, СВЯЗАННОЙ С АНИЗОТРОПИЕЙ МИКРОВОЛНОВОГО РЕЛИКТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

В.Я. Варгашкин, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *finstp@bk.ru*

В работе проанализирован вклад дополнительных источников в основную погрешность позиционирования объекта, движущегося в безопорном пространстве, при использовании резервной системы отсчета, в которой телом отсчета связано с дипольной составляющая анизотропии микроволнового реликтового излучения Вселенной.

Ключевые слова: безопорное пространство, позиционирование космических аппаратов, система отсчета, тело отсчета, микроволновое реликтовое изучение, сферические потенциалы, сферические функции Лапласа, мультипольные моменты, погрешность позиционирования, источники погрешности.

1. Введение

При потере ориентации объект, движущийся в безопорном пространстве, может выйти на нерасчетную траекторию движения с нерасчетными координатами и нерасчетной скоростью движения по ней. Для восстановления ориентации в околоземном пространстве используют систему отсчета, связанную с далекими яркими звездами. В случае поломки оптической системы наведения применяют ориентирование в радиодиапазоне с использованием системы отсчета, телами отсчета в которой служит семейство спутников, располагающихся на геостационарных орбитах. В дальнем космосе использование такого метода исключено.

В [1] предложен оригинальный способ ориентирования в безопорном пространстве, согласно которому телом отсчета является анизотропия микроволнового реликтового излучения ранней Вселенной. Анизотропия излучения может быть разложена по сферическим функциям Лапласа. Функции Лапласа второго порядка соответствует дипольная составляющая распределения анизотропии температуры по небесной сферы. Дипольная составляющая большей частью вызвана движением Солнца по отношению к потоку объемной спектральной плотности излучения. Характеристики движения ориентируемого объекта по отношению к Солнцу искажают картину распределения дипольной составляющей разложения по небесной сфере. Эта особенность предложена для создания резервной системы отсчета в безопорном пространстве.

В настоящей работе рассмотрен вклад мультипольных составляющих реликтового излучения высшего порядка в основную погрешность ориентирования при использовании такой резервной системы отсчета.

2. Анализ источников угловых погрешностей резервной системы отсчета

Обратимся к следующей формуле [1], моделирующей процедуру ориентирования в резервной системе отсчета:

$$d\theta = -\frac{dT}{T_0}\frac{(1-\beta\cos\theta)^2}{\beta\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta} \quad , \tag{1}$$

где dT — оцененная погрешность измерения температуры T излучения которая составляющая для современного уровня развития космических измерений составляет 10^{-7} K, $\theta = (0°; 360°)$ — угол между вектором $\mathbf{v}$ скорости движения ориентируемого объекта относительно потока объемной спектральной плотности реликтового излучения и направлением наблюдения (при оценивании погрешности метода эта скорость по модулю принята равной скорости движения Солнца по отношению к потоку плотности реликтового излучению в направлении созвездия Льва, т.е. 370^{-1} $км \cdot с^{-1}$):

$$\beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c} \ll 1 \quad , \tag{2}$$

c — скорость света в вакууме; $T_0 = 2{,}72548$ K – температура изотропного излучения абсолютно черного тела, которым моделируют реликтовое излучение.

При позиционировании движущегося объекта промежуточную задачу, решаемую в [1] с применением формулы (1), можно сформулировать следующим образом:

Оценить погрешность $d\theta$ определения угла θ направления вектора скорости $\mathbf{v}$ движения ориентируемого объекта по отношению к направлению наблюдения на небесной сфере при условии, что в начальном приближении эта скорость отличается по модулю от скорости движения Солнца по отношению к потоку плотности реликтового излучения в направлении созвездия Льва на значение, которое в отношении его порядка сопоставимо с $d\theta$.

Такая задача была решена в [1] в виде диаграмм зависимостей погрешности $d\theta$ от угла θ (рис.1, *a*), а также определяемой посредством $d\theta$ зависимости погрешности dv модуля v скорости $\mathbf{v}$ движения ориентируемого объекта по отношению к направлению θ наблюдения на небесной сфере от этого угла (рис.1, *b*), согласно предлагаемому методу. Сделан вывод о том, что рассматриваемая погрешность модуля скорости может служить порогом чувствительности определения также скорости $\mathbf{v_s}$ движения ориентируемого объекта в системе отсчета, связанной с Солнцем, которое рассматривается в качестве неподвижной материальной точки. Эта погрешность характеризует возможность выделения $\mathbf{v_s}$ на фоне $\mathbf{v}$ согласно предлагаемому методу.

Следует заметить, что формула (1) может быть переписана в виде:

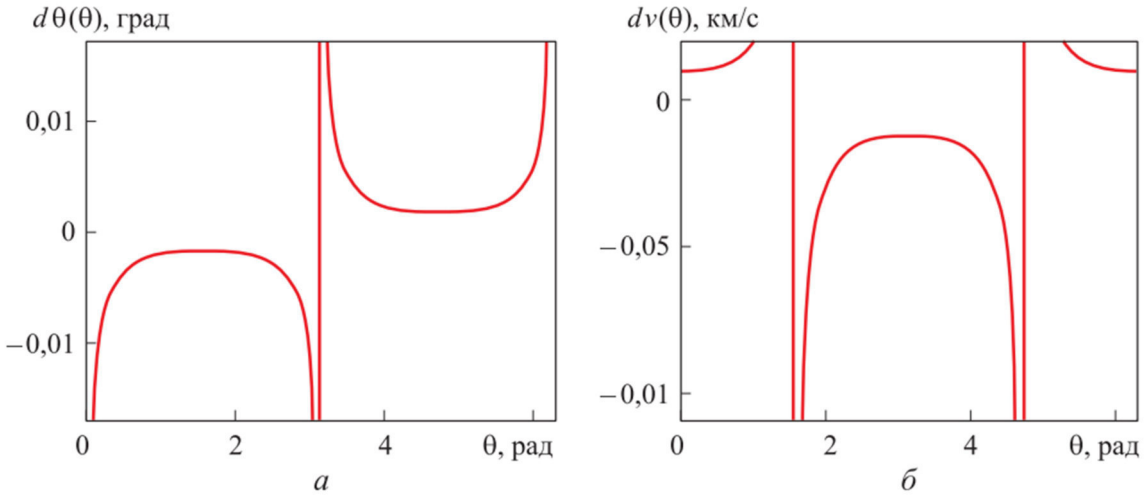


Рисунок 1 — Диаграммы зависимостей погрешности dθ от угла θ (а) на небесной сфере, а также погрешности *dv* определения модуля *v* скорости **v** движения ориентируемого объекта по отношению к направлению θ наблюдения от этого угла (*b*)

$$d\theta = -\frac{dT}{T_0}\frac{\left(1-\beta(\mathbf{n_\theta}\cdot\mathbf{n_s})\right)^2}{\beta\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-(\mathbf{n_\theta}\cdot\mathbf{n_s})^2}} \quad . \tag{3}$$

Вид (3) формулы (1) обусловлен тем, что согласно сформулированной постановки задачи, движущийся объект, который требует восстановления собственной ориентацией, в ходе реализации алгоритма решения такой задачи предполагает использование некоторой опорной системы отсчета (т.е. начальной координатной сетки, к которой в ходе функционирования алгоритма ориентирования «привязываются» получаемые результаты измерений и расчетов). Полагается также, что в это системе отсчета уже определено направление $\mathbf{n_s}$ скорости движения Солнца по отношению к потоку объемной спектральной плотности микроволнового реликтового излучения по небесной сфере.

При этом такому алгоритму реализации требуется лишь установить рекомендуемые в [1] согласно результатам анализа рис.1 значения угла θ при оцененной их погрешности $d\theta$, затем установить в этих направлениях средства измерения температуры T реликтового излучения, погрешность которых составляет, как указано выше, не более 10^{-7} K, затем измерить соответствующие значения T температуры, сравнить эти значения с нанесенными на известную из опубликованных данных спутниковых измерений карту [2] распределения анизотропии распределения температуры по небесной сфере (рис.2), получить в указанных направлениях разности dT измеренного, а также и неискаженного движением $\mathbf{v_s}$ ориентируемого объекта значений температуры, и по ним определить характеристики $\mathbf{v_s}$.

Между тем, объект, который требует ориентации, в общем случае, не располагает сведениями о $\mathbf{n_s}$, т.е. его Данная разработка является решением проблемы информационного наполнения модели, путем детализации общей базы данных модели с позиций организаций каждого вида по регионам и отраслям экономической деятельности. опорная координатная система является «пустой»

и никак не ориентированной по отношению к положению и движению каких – либо тел отсчета.

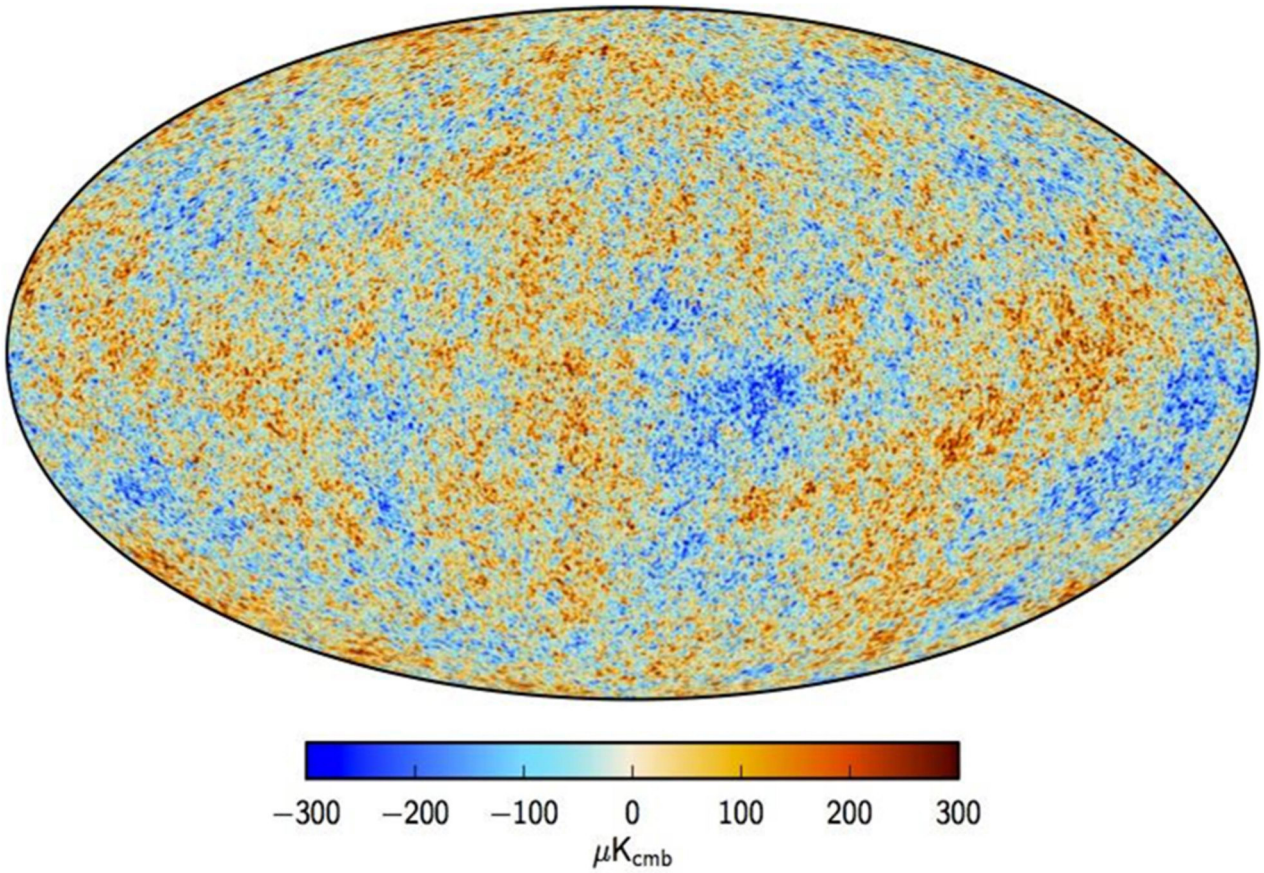


Рисунок 2 – Распределение анизотропии распределения микроволнового реликтового излучения ранней Вселенной по небесной сфере

В целях выявления влияния этого фактора на результаты работы рассматриваемого алгоритма формула (3) снабжена названным единичным вектором n_s скорости движения Солнца по отношению к реликтовому излучению, а также единичным вектором направления $\mathbf{n_\theta}$, в котором осуществляется измерение температуры *T*, т.е.:

$$(\mathbf{n_\theta} \cdot \mathbf{n_s}) = \cos\theta \quad , \tag{4}$$

$$\sqrt{1 - (\mathbf{n_\theta} \cdot \mathbf{n_s})^2} = \sin\theta \quad . \tag{5}$$

Вид (3) – (5) требует уточнения сформулированной выше задачи, решаемой алгоритмом ориентации объекта. В ней следует выделить задачу «привязки» вектора $\mathbf{n_s}$ к первоначально «пустой» опорной системе координат ориентируемого объекта. Поскольку модуль v вектора **v** считается мало отличающимся от модуля вектора скорости движения Солнца по отношению к реликтовому излучению в направлении созвездия Льва, то дополнение к алгоритму можно сформулировать следующим образом.

Сориентировать (в каком-либо явном, или же в неявном виде) дипольную составляющую реликтового излучения (3) по отношению к опорной системе координат.

Иными словами, следует с необходимой точностью «натянуть» дипольную составляющую на первоначально «пустую» опорную координатную систему

ориентируемого объекта для обеспечения возможности ориентации средства измерения температуры в установленных направлениях $\mathbf{n_\theta}$, обеспечивающих формирование углов θ.

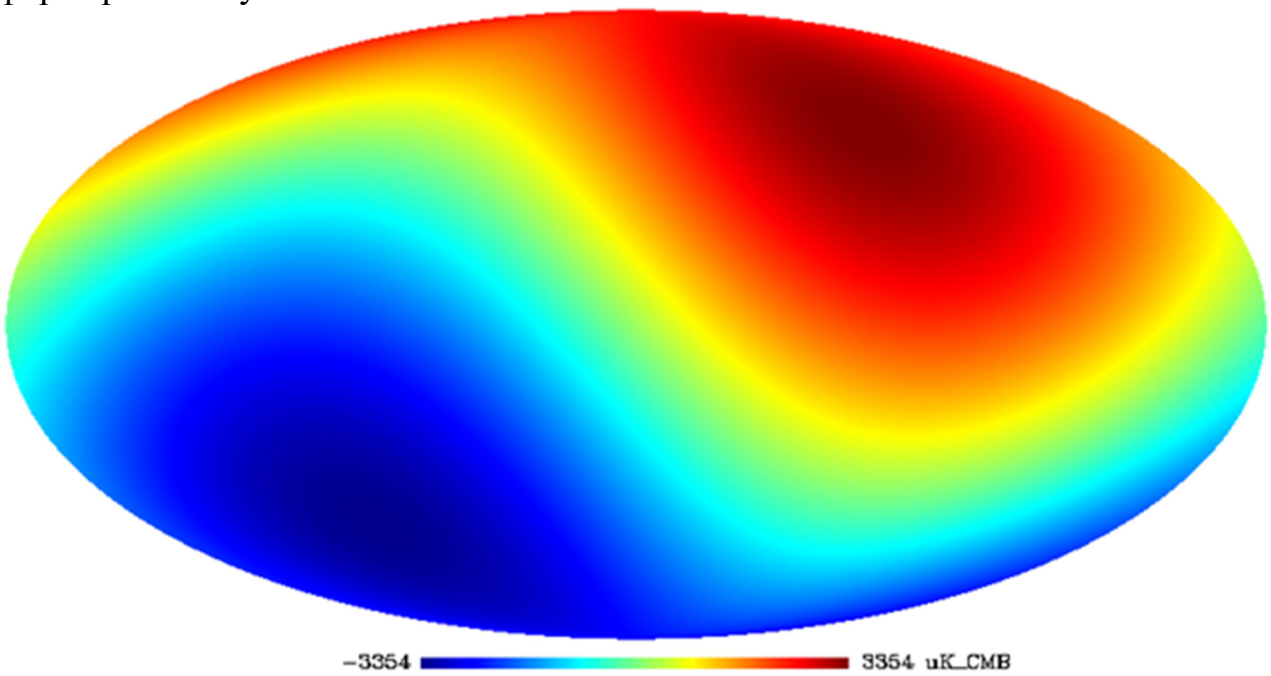


Рисунок 3 – Распределение дипольной составляющей анизотропии распределения микроволнового реликтового излучения ранней Вселенной по небесной сфере

При этом первоначальной постановке задачи соответствует иллюстрация рис.4 к оцениванию погрешности позиционирования ориентируемого объекта. Согласно рис.4 по отношению к известному направлению вектора $\mathbf{v}$ с единичным направлением n_s следует выставить угол θ с единичным направлением n_θ при обеспечении заданной погрешности $d\theta$ с целью измерения температуры T реликтового излучения и вычисления обеспечиваемого скоростью v приращения dT температуры T.

Уточненному алгоритму решения задачи ориентирования объекта соответствует следующая иллюстрация (рис.5).

Пусть в опорной системе отсчета ориентируемого объекта истинная ориентация вектора $\mathbf{v}$ соответствует изображенной на рис.5. Из-за погрешности ориентации дипольной составляющей реликтового излучения в опорной системе отсчета единичный вектор $\mathbf{n_s}$ скорости движения Солнца по отношению к потоку объемной спектральной плотности излучения, вследствие наличия погрешности $d\alpha$ располагается в доверительном интервале направлений от $\mathbf{n_{s1}}$ до $\mathbf{n_{s2}}$ с общей вершиной. Этому доверительному интервалу соответствует доверительный интервал, от $\mathbf{n_{\theta 1}}$ до $\mathbf{n_{\theta 2}}$, единичных векторов $\mathbf{n_\theta}$ направлений измерения. Граничные направления $\mathbf{n_{\theta 1}}$ и $\mathbf{n_{\theta 2}}$ отложены на рис.5 поворотом граничных векторов $\mathbf{n_{s1}}$ до $\mathbf{n_{s2}}$ на угол θ. Как и на рис.4, в случае с вектором $\mathbf{n_s}$, граничные векторы $\mathbf{n_{\theta 1}}$ и $\mathbf{n_{\theta 2}}$, характеризуются погрешностью направления $d\theta$. При этом предел погрешности направления θ измерения T равен $d\Omega$.

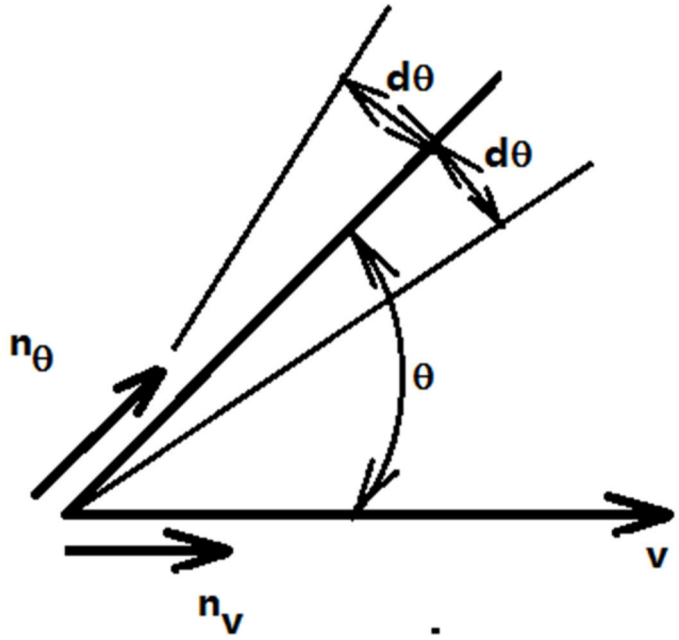


Рисунок 4 — Иллюстрация к оцениванию погрешности позиционирования ориентируемого объекта без учета влияния погрешности ориентирования дипольного момента реликтового излучения

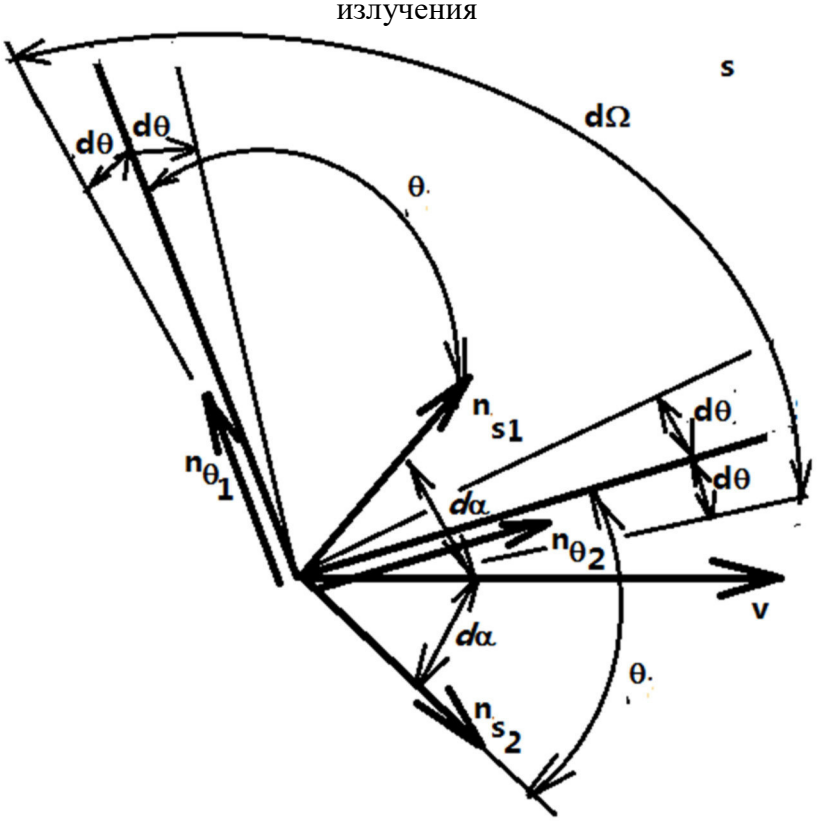


Рисунок 5 — Иллюстрация к оцениванию погрешности позиционирования ориентируемого объекта с учетом влияния погрешности ориентирования дипольного момента реликтового излучения

При этом угол θ направления измерения температуры T реликтового излучения характеризуется не только погрешностью $d\theta$ его отложения от единичного вектора $\mathbf{n_s}$, но также и погрешностью $d\alpha$ определения вектора $\mathbf{v}$ в опорной системе отсчета ориентируемого объекта.

На рис.5 погрешность $d\alpha$ изображена существенно превалирующей над погрешностью $d\theta$, вследствие чего полная погрешность $d\Omega$ назначения направления измерения согласно уточненному алгоритму решения задачи ориентирования объекта оказалась существенно превалирующей над погрешностью $d\theta$, оцененной в [1] согласно первоначальному алгоритму решения задачи.

3. Анализ источников угловых погрешностей резервной системы отсчета

Выявим дополнительные источники первичной погрешности $d\Omega$ угла Ω наведения средства измерения температуры T реликтового излучения, позволяющие предположить возможность существенного роста этой погрешности в сравнении с погрешностью $d\theta$, оцененной в [1].

Установим дополнительный источник погрешности $d\Omega$ за счет погрешности $d\alpha$ позиционирования вектора $\mathbf{n_s}$ скорости движения Солнца по отношению к дипольной составляющей анизотропии потока объемной спектральной плотности реликтового излучения в опорной системе отсчета ориентируемого объекта. В [1] предполагается, что при позиционировании температура T реликтового излучения измеряется с погрешностью $dT=10^{-7}$ K. Это позволяет с необходимой точностью зафиксировать разницу между измеренной температурой и определяемой согласно изображенному на карте рис.2 распределению температуры по небесной сфере, которая (разница) обусловлена движением ориентируемого объекта по отношению к потоку плотности реликтового излучения.

В [1] изображенное на карте распределение температуры моделируется двумя основными составляющими. Это – постоянная составляющая температура $T_0 = 2{,}72548$ K, т.е. температура изотропного излучения абсолютно черного тела, которым моделируют реликтовое излучение. На эту составляющую температуру наложена изображенная на рис.3 дипольная составляющая. Следует заметить, что эти две составляющие отсутствуют на рис.2.

Рассмотрим простейшую модель ориентации вектора $\mathbf{n_s}$ в опорной системе отсчета. При этом может быть использована формула (3), в которой вектор $\mathbf{v}$ скорости движения ориентируемого объекта по отношению к потоку плотности реликтового излучения вместе с движущимся Солнцем совпадает со скоростью движения самого Солнца по отношению к реликтовому излучению. Иными словами, скорость движения ориентируемого объекта в рассматриваемой модели является пренебрежимо малой в сравнении со скоростью движения Солнца по отношению к потоку плотности мощности реликтового излучения.

При этом в результаты измерения температуры оказывают вклад мультипольные составляющие разложения плотности мощности по составляющим в виде поверхностных сферических функций Лапласа [3], рассмотренное в литературных источниках, число которых превышает семь сотен.

Суммарный вклад всех мультипольных составляющих порядка, высшего, чем дипольный (рис.3), в общую картину анизотропии температуры излучения (рис.4) таков, что амплитуда приращения температуры T, вносимого всеми ими, в общую картину распределения реликтового излучения по небесной сфере составляет около $0{,}0001\cdot T_0$, т.е. около $0{,}0002725$ K. Этим обусловлено то обстоя-

тельство, что анализируемая карта вклада мультипольных составляющих в общую картину излучения (рис.2) построена в масштабе температур, ограниченных значениями ±300 *мкК*.

Таким образом, при ориентировании вектора $\mathrm{n_s}$ по отношению к опорной системе координат ориентируемого объекта может наблюдаться ситуация, при которой вклад мультипольных составляющих порядка, высшего, чем дипольный (рис.3), в общую картину измеряемой анизотропии температуры излучения составит, в частности, +0,0002725 *K*. Заметим, что [1] не содержит анализа описываемого вклада мультипольных составляющих в результат измерения температуры излучения. С учетом того, что в рассматриваемой модели скорость движения ориентируемого объекта $\mathbf{v_s}$ в сравнении со скоростью **v** движения Солнца по отношению к потоку плотности мощности излучения, считается пренебрежимо малой в сравнении со скоростью такого движения самого Солнца. Поэтому названное значение анализируемого вклада может быть ошибочно приписано наличию у ориентируемого объекта повышенной скорости $\mathbf{v_s}$ его движения в сравнении со скоростью **v** движения Солнца.

Погрешность *dv* определения модуля *v* вектора **v** в опорной системе отсчета ориентируемого объекта в этом случае может оказаться столь значительной, что даже при малой заявленной погрешности *dT* измерения температуры *T* реликтового излучения, погрешность $d\Omega$ позиционирования средства измерения температуры также может оказаться столь значительной, что при вкладе мультипольных составляющих на указанные +0,0002725 *K* средство измерения температуры окажется прицеленным в точку небесной сферы с вкладом мультипольных составляющих на –0,0002725 *K*. При этом. методическая погрешность измерения температуры окажется равной 0,0005450 *K*. Это значение и следует подставить в (3) в качестве $d\mathrm{T}$, что дает значение погрешности этого угла:

$$d\theta_1 = -\frac{0{,}0005450\ K}{\mathrm{T_0}}\frac{\left(1-\beta(\mathbf{n_\theta}\cdot\mathbf{n_s})\right)^2}{\beta\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-(\mathbf{n_\theta}\cdot\mathbf{n_s})^2}} =$$

$$= -\frac{5450\cdot10^{-7}\ K}{T_0}\frac{\left(1-\beta(\mathbf{n_\theta}\cdot\mathbf{n_s})\right)^2}{\beta\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-(\mathbf{n_\theta}\cdot\mathbf{n_s})^2}}\quad , \tag{6}$$

т.е.

$$d\theta_1 = 5450\cdot d\theta\quad . \tag{7}$$

Выражение (7) получено по методу максимума-минимума. Более достоверной служит статистическая оценка, основанная на том, что среднее квадратическое значение отклонения температуры, обусловленное вкладом мультипольных составляющих, оценивается приблизительно в 18 *мкК*.

Используя в (4) в качестве dT удвоенного значения среднеквадратического отклонения температуры, можно получить:

$$d\theta_1 = -\frac{0{,}0000360\ K}{T_0}\frac{\left(1-\beta(\mathbf{n_\theta}\cdot\mathbf{n_s})\right)^2}{\beta\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-(\mathbf{n_\theta}\cdot\mathbf{n_s})^2}} =$$

$$= -\frac{360\cdot 10^{-7}\,K}{T_0}\,\frac{\left(1-\beta(\mathbf{n_\theta}\cdot\mathbf{n_s})\right)^2}{\beta\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-(\mathbf{n_\theta}\cdot\mathbf{n_s})^2}}\quad , \tag{8}$$

т.е.

$$d\theta_1 = 360\cdot d\theta\quad . \tag{9}$$

Заметим, что полученные оценки (7) и (9) справедливы для способов позиционирования вектора $\mathbf{n_s}$ в опорной системе отсчета ориентируемого объекта, как явного, так и неявного вида.

4. Выводы

А) Среди источников основной погрешности позиционирования объекта, движущегося в безопорном пространстве, при использовании резервной системы отсчета, в которой телом отсчета связано с дипольной составляющая анизотропии микроволнового реликтового излучения Вселенной, присутствует источник, связанный с влиянием на результаты измерений мультипольных составляющих порядка выше, чем второй.

Б) Как показывают расчеты, погрешность, обусловленная названный источником, может в сотни раз превышать суммарную основную погрешность, обусловленную прочими первичными источниками.

В) Для снижения вклада названного источника в суммарную погрешность позиционирования следует изменить его алгоритм, в частности, введя в него расчеты параметров мультиполей высших порядков разложения распределения анизотропии температуры реликтового излучения по небесной сфере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладышев В.О., Портнов Д.И., Базлев Д.А., Скобелев М.М. Метод ориентации летательных аппаратов в космическом пространстве на основе измерения пространственных вариаций спектральной плотности мощности реликтового излучения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. – Сер. Естественные науки. – 2017, № 5. – С. 49-56.
2. BICEP2 II: Experiment and Three-Year Data Set (англ.) / BICEP2 Collaboration, et.al., 2014, ApJ., 792, 62A.
3. Варгашкин В.Я. Анализ особенностей сходимости ряда сферическиъ функций Лапласа применительно к точности описания микроволнового реликтового излучения // Финслеровы обобщения теории относительности (XVI-th International Conference «Finsler Extension of Rrelativity Theory (FERT-2020)»: Материалы XVI Международной конференции.-Г. Фрязино, Московская область, Россия, 14 ноября 2020 г.: Научное издание / Редакторы: д.ф.-м.н., проф.Д.Г.Павлов и В.А.Панчелюга. – М.: 11-й формат, 2020. – С. 63 - 68.

К ТЕОРЕТИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ ШАРИКА МЕЖДУ ДВУМЯ КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ ЖЕСТКИМИ СФЕРАМИ

С.О. Гладков, С.Б. Богданова
Московский Авиационный Институт
(Национальный Исследовательский Университет)

Динамические уравнения, записанные в проекциях на подвижные оси мгновенного базиса, позволили получить нелинейную систему дифференциальных уравнений, описывающих движение точечного шарика массой m, который начинает свое движение в вязкой среде между двумя концентрическими сферами из произвольной точки $M_0 = M(\theta_0, \varphi_0)$ при учете всех действующих на него сил. Найдена зависимость силы реакции от угловых переменных θ и φ, и численно проанализировано решение полученной системы уравнений. Приведены иллюстрации трехмерной траектории движения шарика между сферами.

Ключевые слова: уравнения криволинейного движения, классическая механика, нелинейная динамика.

В работах [1-2], посвященных движению сферического маятника с учетом сил только вязкого трения, приведены соответствующие уравнения, однако при этом не был приведен их вывод. В настоящем сообщении мы дадим подробное решение задачи, состоящей в описании динамики движения шарика в вязкой жидкости между двумя концентрическими жесткими сферами с учетом как вязкого, так и сухого трения, а также силы тяжести. Решение получим с помощью метода, состоящего в проектировании уравнений движения на мгновенный базис $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ (см. рис. 1) [3-8].

Рассмотрим радиус средней сферы $R = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$ и разложим вектор скорости по мгновенному базису $\mathbf{v} = \mathrm{v}_\theta \boldsymbol{\tau}_1 + \mathrm{v}_\varphi \boldsymbol{\tau}_2$, при этом проекции скорости запишутся как:

$$\mathrm{v}_\theta = R\dot{\theta}, \ \mathrm{v}_\varphi = R\sin\theta\dot{\varphi}. \tag{1}$$

Дифференцируя выражение $\mathbf{v} = \mathrm{v}_\theta \boldsymbol{\tau}_1 + \mathrm{v}_\varphi \boldsymbol{\tau}_2$ по времени, получим выражение для полного ускорения шарика:

$$\mathbf{a} = R\ddot{\theta}\boldsymbol{\tau}_1 + R\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{\tau}}_1 + R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{\tau}_2 + R\sin\theta\ddot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_2 + R\dot{\varphi}\sin\theta\dot{\boldsymbol{\tau}}_2. \tag{2}$$

Принимая во внимание соотношения $\dot{\boldsymbol{\tau}}_1 = \dfrac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dl_1}\dfrac{dl_1}{dt} = \mathrm{v}_\theta \dfrac{\mathbf{n}}{R} = \dot{\theta}\mathbf{n}$,

$\dot{\boldsymbol{\tau}}_2 = \dfrac{d\boldsymbol{\tau}_2}{dl_2}\mathrm{v}_\varphi = R\sin\theta\dot{\varphi}\dfrac{\mathbf{n}'}{R\sin\theta} = \dot{\varphi}\mathbf{n}'$, где $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2}{2}$, а единичная нормаль $\mathbf{n}'$ направлена вдоль радиуса окружности $\rho = R\sin\theta$ и лежит в плоскости единичных векторов $\boldsymbol{\tau}_1$, $\mathbf{n}$, выражение (2) перепишем в виде:

$$\mathbf{a} = R\ddot{\theta}\boldsymbol{\tau}_1 + R\dot{\theta}^2\mathbf{n} + R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{\tau}_2 + R\sin\theta\ddot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_2 + R\dot{\varphi}^2\sin\theta\mathbf{n}'. \tag{3}$$

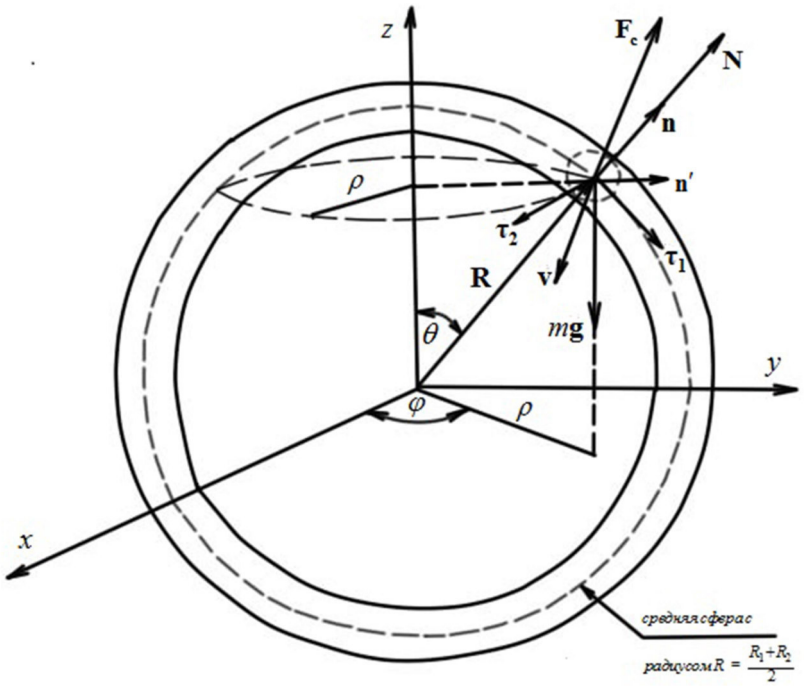


Рисунок 1 – $\mathbf{R}$ - вектор среднего радиуса, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{R}}{R}$ - единичная нормаль к нижней сфере, $\boldsymbol{\tau}_1$ - единичный вектор касательной (см. текст статьи), $\boldsymbol{\tau}_2$ - единичный вектор касательной к мгновенной окружности радиуса ρ, проведенной перпендикулярно оси (oz), $\mathbf{n}'$ – единичный вектор нормали к этой окружности (он лежит в плоскости $\mathbf{n}-\boldsymbol{\tau}_1$), $\mathbf{v}$ - мгновенная скорость, разложенная по единичному мгновенному базису $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$, $m\mathbf{g}$ - сила тяжести, $\mathbf{F_c}$ - сила сопротивления, направленная против $\vec{\mathbf{v}}$ и касательная к поверхности средней сферы. $\mathbf{N}$ - сила реакции, θ - азимутальный угол, φ - полярный угол сферической системы координат, $\alpha = \pi - \theta$.

Подставим теперь (3) в общее уравнение движения $\mathbf{a} = \mathbf{g} + N\dfrac{\mathbf{n}}{m} + \dfrac{\mathbf{F}_c}{m}$, где N – результирующая сила реакции между внешней и внутренней сферами, при этом $N\mathbf{n} = \dfrac{N_1\mathbf{n}_1 - N_2\mathbf{n}_2}{2}$, где N_1 - сила реакции нижней сферы, а N_2 – верхней, вектор $\mathbf{n}_1$ направлен от внутренней сферы наружу, то есть от общего центра сфер, а $\mathbf{n}_2$ наоборот – к общему центру сфер от внутренней поверхности внешней сферы, $\mathbf{F}_c = -\left(k_1 \mathrm{v} + k_2 N\right)\dfrac{\mathbf{v}}{\mathrm{v}}$ - суммарная сила сопротивления, где k_1 и k_2 - коэффициенты вязкого и сухого трений. В итоге с учетом явных выражений (1) для компонент скорости получим:

$$\begin{aligned} &R\ddot{\theta}\boldsymbol{\tau}_1 + R\dot{\theta}^2\frac{\left(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2\right)}{2} + R\dot{\varphi}^2\sin\theta\mathbf{n}' + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{\tau}_2 + R\sin\theta\ddot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_2 = \\ &= \mathbf{g} - \frac{k_2 R}{m\,\mathrm{v}}N\left(\dot{\theta}\boldsymbol{\tau}_1 + \sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_2\right) - \frac{k_1}{m}R\left(\dot{\theta}\boldsymbol{\tau}_1 + \sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_2\right) + \frac{N_1\mathbf{n}_1 - N_2\mathbf{n}_2}{2m}, \end{aligned} \tag{4}$$

Скалярно умножая обе части (4) на единичные вектора $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, получим проекции (4) на подвижный базис $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$, $\mathbf{n}$:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}+\gamma\dot{\theta}+\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+k_2\dfrac{N\dot{\theta}}{m\,\mathrm{v}}=\dfrac{\mathbf{g}\boldsymbol{\tau}_1}{R}, \\ \ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta+\gamma\dot{\varphi}\sin\theta+k_2\dfrac{N\sin\theta\dot{\varphi}}{m\,\mathrm{v}}=\dfrac{\mathbf{g}\boldsymbol{\tau}_2}{R}, \\ N=\dfrac{N_1+N_2}{2}=mR\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta-\dfrac{\mathbf{g}\mathbf{n}_1}{R}\right), \\ N=\dfrac{N_1+N_2}{2}=mR\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dfrac{\mathbf{g}\mathbf{n}_2}{R}\right). \end{cases} \tag{5}$$

где вязкое затухание $\gamma=\dfrac{k_1}{m}$. Система (5) с учетом соотношений $\mathbf{g}\mathbf{n}_1=-\mathbf{g}\mathbf{n}_2=g\cos(\pi-\theta)=-g\cos\theta$, $\mathbf{g}\boldsymbol{\tau}_1=g\sin\theta$ и $\mathbf{g}\boldsymbol{\tau}_2=0$, а также $\mathrm{v}^2=R^2\dot{\theta}^2+R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$ переходит в следующую:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}+\gamma\dot{\alpha}+\dot{\varphi}^2\sin\alpha\cos\alpha+k_2\dfrac{\dot{\alpha}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2+\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2}}\left(\dot{\alpha}^2+\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2-\omega^2\cos\alpha\right)+\omega^2\sin\alpha=0, \\ \ddot{\varphi}+2\dot{\alpha}\dot{\varphi}\operatorname{ctg}\alpha+\gamma\dot{\varphi}\alpha+k_2\dfrac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2+\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2}}\left(\dot{\alpha}^2+\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2-\omega^2\cos\alpha\right)=0, \\ N=mR\left(\dot{\alpha}^2+\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2-\omega^2\cos\alpha\right). \end{cases} \tag{6}$$

Начальные условия для системы (6) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(0)=0, \\ \dot{\theta}(0)=\dfrac{\mathrm{v}_0}{R}. \end{cases} \tag{7}$$

Поскольку параметрические зависимости $x(t),y(t),z(t)$ могут быть записаны в виде:

$$x(t)=R\sin\alpha\cos\varphi,\ \ y(t)=R\sin\alpha\sin\varphi,\ \ z(t)=-R\cos\alpha, \tag{8}$$

где $\theta=\pi-\alpha$, то, с учетом (7) мы приходим к следующей замкнутой системе уравнений, определяющую траектории движения шарика:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}+\gamma\dot{\alpha}+\dot{\varphi}^2\sin\alpha\cos\alpha+k_2\dfrac{\dot{\alpha}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2+\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2}}\left(\dot{\alpha}^2+\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2-\omega^2\cos\alpha\right)+\omega^2\sin\alpha=0, \\ \ddot{\varphi}+2\dot{\alpha}\dot{\varphi}\operatorname{ctg}\alpha+\gamma\dot{\varphi}+k_2\dfrac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2+\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2}}\left(\dot{\alpha}^2+\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2-\omega^2\cos\alpha\right)=0, \\ x(t)=R\sin\alpha\cos\varphi,\ y(t)=R\sin\alpha\sin\varphi,\ z(t)=-R\cos\alpha, \\ \alpha(0)=\alpha_0,\ \varphi(0)=\varphi_0,\ \dot{\varphi}(0)=0,\ \dot{\alpha}(0)=-\dfrac{\mathrm{v}_0}{R}. \end{cases} \tag{9}$$

Особенность в знаменателе $ctg\alpha$ во втором уравнении устраним, записывая котангенс как $ctg\alpha = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \varepsilon^2}$, $\varepsilon \to 0$. Численное моделирование (9) позволяет построить временные зависимости $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ при $k_2 = \gamma = 0.1$ и $\varepsilon = 0.02$ (рис. 2.).

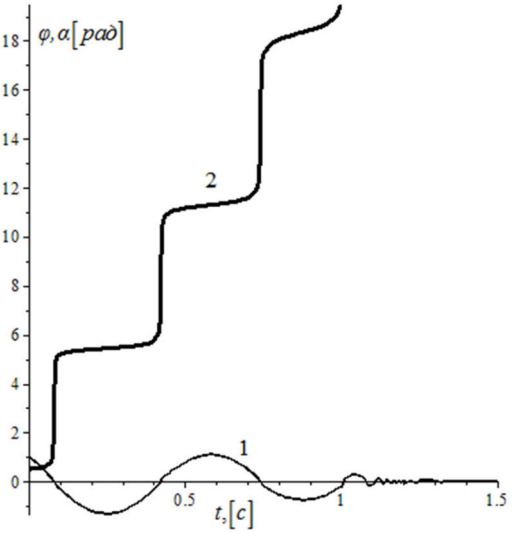


Рисунок 2 – Линия 1 показывает временную зависимость азимутального угла $\alpha(t)$, а линия 2 – временную зависимость полярного угла $\varphi(t)$. Начальные условия выбраны такими

$$\alpha(0) = \frac{\pi}{3}, \varphi(0) = \frac{\pi}{6}, \dot{\alpha}(0) = -10, \dot{\varphi}(0) = 1 \text{ при } k_2 = \gamma = 0.1 \text{ и } \varepsilon = 0.02$$

Трехмерная же траектория движения шарика как результат численного моделирования системы (9) при его радиусе равным единице показана на рис. 3.

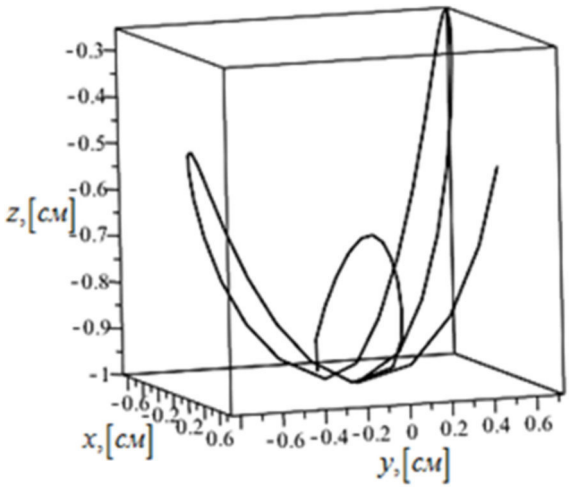


Рисунок 3 – Для начальных условий $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{3}, \varphi(0) = \dfrac{\pi}{6}, \dot{\alpha}(0) = -10, \dot{\varphi}(0) = 1$ и $k_2 = \gamma = 0.1$ приведена траектория движения шарика по сфере в трехмерном измерении

На рисунке 4 приведены проекции траектории движения на плоскость $x - y$.

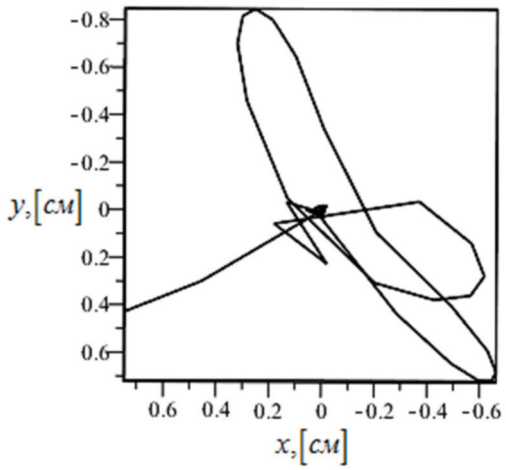


Рисунок 4 – Проекция трехмерной траектории шарика, изображенной на рис.3, на плоскость $x - y$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аппель, П. Теоретическая механика. Т.1 / П. Аппель. - Москва: Физматлит, 1960. – 515 с.
2. Шаин, Ю.Ф. Исследование системы уравнений, описывающих движение сферического маятника в случае наличия сопротивления / Ю.Ф. Шаин // Дифференциальные уравнения. - 1967. - т.3. - №9. - С.1477 – 1483.
3. Гладков, С.О. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне с трением / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. - 2016. - № 1. - 161001-1-5.
4. Гладков, С.О. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. - 2017. - №1. - 171101.
5. Гладков, С.О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом / С.О. Гладков // Ученые записки физического факультета МГУ. - 2016. - № 4. -164002-1-5.
6. Гладков, С.О. О классе плоских геодезических кривых в поле силы тяжести / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Вестник Томского Государственного Университета. Математики и механика. - 2019. - №58. - С.5 -13.
7. Гладков, С.О. К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. - 2017. - №2. - 172101.
8. Gladkov, S.O. On the Moving Trajectory of a Ball in a Viscous Liquid between Two Concentric Rigid Spheres / S.O. Gladkov, S.B. Bogdanova // Mathematical and Computational Applications. – 2018. – 23. - 77.

К ВОПРОСУ О ВОЗМОЖНЫХ ФОРМАХ ЖЕЛОБА ПРИ УСЛОВИИ ПОСТОЯНСТВА СИЛЫ РЕАКЦИИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ОТ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО НЕМУ ТЕЛА

С.О. Гладков, С.Б. Богданова
Московский Авиационный Институт
(Национальный Исследовательский Университет)

Найдена зависимость силы реакции желоба $N(y)$ на движущееся по нему материальное тело в виде функции от формы этого желоба $y = y(x)$. Класс кривых, для которых $N(y) = const$, находится из решения уравнения $N(y, y', y'') = const$. Графически проиллюстрированы возможные зависимости $y(x)$, когда $N = const$.

Ключевые слова: криволинейное движение, сила реакции, подвижный базис, нелинейное дифференциальное уравнение, численное решение.

Предложенный в работах авторов [1–3] подход к решению задач, связанных с криволинейным движением, основан на записи динамических уравнений в подвижном базисе $\mathbf{n}-\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ - орт касательной к произвольной точке M траектории движения тела, а $\mathbf{n}$ - орт нормали в этой точке. С его помощью можно получить общие уравнения плоского (и не только плоского) криволинейного движения с учетом любых диссипативных сил, а также тривиально показать, что при движении тела по параболе сила реакции опоры $N = 0$, а при движении по брахистохроне - $N(y) = 2mg|\cos\alpha|$, где m - масса тела, $g = |\mathbf{g}|$ - величина ускорения свободного падения, а α - угол между касательной к траектории и осью x.

Решение обратной задачи [4] показано в настоящей работе: требуется найти такую форму желоба $y(x)$, когда сила реакции при движении по нему материального тела массой m на некотором отрезке $x_0 \le x \le x_1$ остается постоянной (см. рис.1), с углом наклона касательной, отсчитываемого от оси x. В результате общее выражение для силы реакции будет

$$N(y) = \frac{m\mathbf{v}^2}{R} - mg\cos\alpha, \qquad (1)$$

где $R-$ радиус кривизны траектории в данной точке. Поскольку $y' = tg\alpha,\ \frac{1}{R} = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, то выражение для силы реакции перепишется в виде:

$$N(y) = \frac{m\mathbf{v}^2 y''}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{mg}{\sqrt{1+y'^2}}. \qquad (2)$$

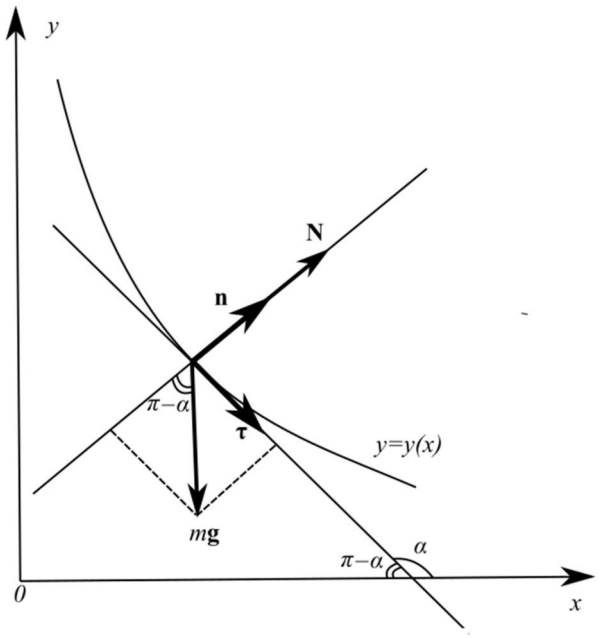


Рисунок 1 – Геометрия задачи

Для решения задачи надо фигурирующую в (2) скорость найти в виде функции от формы желоба $y(x)$. Проектируя силы на подвижный орт $\boldsymbol{\tau}$, имеем

$$\dot{\mathrm{v}} = g\sin\alpha\,. \tag{3}$$

Тогда из соотношений

$$\dot{\alpha} = -\frac{\mathrm{v}}{R},\ R = \frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''},\ \sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},\ d\alpha = \frac{y''dx}{1+y'^2},$$

следует, что

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_0^2 - 2gy\,, \tag{4}$$

где v_0- начальная скорость, а движение начинается из точки O. Подстановка (4) в (2) дает искомую зависимость силы реакции желоба от его формы

$$N(y) = \frac{2mg}{\sqrt{1+y'^2}}\left[\frac{y''(a-y)}{1+y'^2} + \frac{1}{2}\right]. \tag{5}$$

Отсюда также следует, что при движении по параболе (форма желоба представляет собой параболу) с уравнением $y = x - \dfrac{x^2}{2a}$, где длина $a = \dfrac{\mathrm{v}_0^2}{2g}$, из (5) немедленно следует условие отсутствия реакции $N = 0$.

Класс же функций, для которых реакция постоянна $N = const$, мы найдем из уравнения:

$$\frac{N(y)}{mg} = \frac{2}{\sqrt{1+y'^2}}\left[\frac{y''(a-y)}{1+y'^2} + \frac{1}{2}\right] = p = const\,. \tag{6}$$

Решение этого уравнения имеет место, если выполняются следующие два неравенства

$$0 \le p \le 1 \text{ и } y \le a\,.$$

Решение дифференциального уравнения (6) приводит к следующему трансцендентному равенству:

$$\sqrt{\left(p+\frac{1-p}{\sqrt{a}}\sqrt{a-y}\right)^2-1}-p\ln\left(p+\frac{1-p}{\sqrt{a}}\sqrt{a-y}+\sqrt{\left(p+\frac{1-p}{\sqrt{a}}\sqrt{a-y}\right)^2-1}\right)=\frac{1-p}{\sqrt{a}}x\,. \quad (7)$$

Для заданных граничных условий, численное решение уравнения (7) позволяет нам построить различные типы траекторий, проиллюстрированных на рис.2.

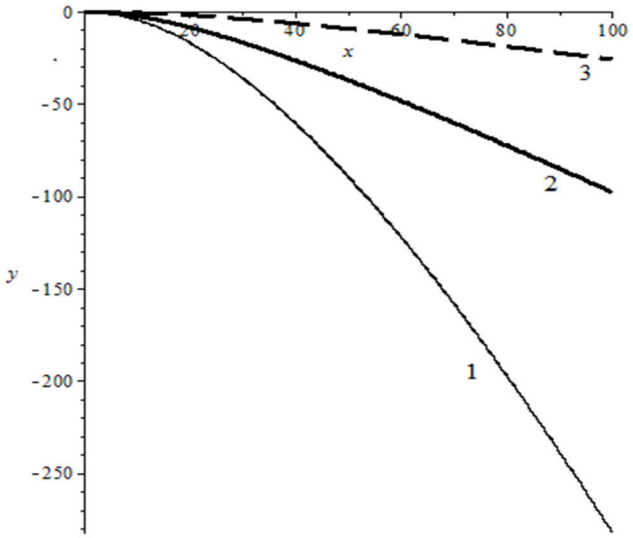


Рисунок 2 – Траектории, для которых выбран постоянный геометрический фактор $b=10$. Видно, что с ростом значения p зависимость $y(x)$ стремится к линейной. Кривая 1 соответствует $p=0.1$, кривая 2 - $p=0.5$ и кривая 3 - $p=0.9$. Параметр $a=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладков, С.О. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Ученые записки физ. ф-та МГУ. - 2016. -№1. - 161101.
2. Гладков, С.О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом / С.О. Гладков // Ученые записки физ. ф-та МГУ. - 2016. - №4. - 164002-1-5.
3. Гладков, С.О. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения, и их численный анализ в некоторых частных случаях / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Ученые записки физ. ф-та МГУ. - 2017. - №1. - 171101-1-5.
4. Гладков, С.О. О классе плоских геометрических кривых с постоянной реакцией на движение по ним материальных тел / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2019. – т. 160. - С. 28 - 31.
5. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. / Г.М. Фихтенгольц. - Москва: Наука, 1965. - 436 с.

УДК 519.718

АЛГОРИТМЫ ПОЛУЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ ТЕСТОПРИГОДНОСТИ ПОЛЮСА ЭЛЕМЕНТА КОМБИНАЦИОННОЙ СХЕМЫ

О.И. Голубева, к.т.н., доц.
Томский государственный университет
e-mail: *golubeva-o@yandex.ru*

Рассматриваются методы построения функций тестопригодности полюса элемента комбинационной схемы: управляемости, наблюдаемости и обнаружения константной неисправности, а также дополнения функции наблюдаемости. Детализируются ранее предложенные методы. Предлагаются эффективные алгоритмы получения рассматриваемых функций. Также предлагается метод получения функций для всех или для подмножества полюсов схемы, позволяющий сократить вычисления.

Ключевые слова: функции тестопригодности, константная неисправность, булева производная, ROBDD, ДНФ, КНФ, SAT-решатель.

В данной работе рассматривается построение функций тестопригодности полюса элемента комбинационной схемы, а именно функций: управляемости, наблюдаемости и обнаружения константной неисправности, а также дополнения (инверсии) функции наблюдаемости. Детализируются ранее предложенные методы [1–3] для ROBDD и ДНФ представлений функций и метод решения задачи с применением SAT-решателей. Предлагаются эффективные алгоритмы получения рассматриваемых функций. Также предлагается метод получения функций для всех или для части полюсов схемы, позволяющий сократить вычисления. Функции тестопригодности находят свое применение в задачах анализа и синтеза логических схем.



а) б)

Рисунок 1 – а) Комбинационная схема S и полюс v,
б) полюсу v сопоставлена входная переменная v

Рассмотрим комбинационную схему S с n входами и m выходами. Пусть $X = \{x_1, ..., x_n\}$ – входные переменные схемы; $\varphi_i(X)$, $i = \overline{1,m}$, – функция, реализуемая i-ым выходом схемы. Рассмотрим полюс v схемы (рисунок 1а).



а) б)

Рисунок 2 – Схема: а) $S^{v,1}$ – S с неисправностью константа 1 на полюсе v,
б) $S^{v,0}$ – S с неисправностью константа 0 на полюсе v

Пусть $\varphi_i^{v,1}(X)$ и $\varphi_i^{v,0}(X)$ – функции, реализуемые *i*-ыми выходами схем $S^{v,1}$ и $S^{v,0}$ с неисправностями константа 1 и 0 на полюсе *v* соответственно (рисунки 2а и 2б). Заметим, что схемы $S^{v,1}$ и $S^{v,0}$ – это подсхемы схемы *S*, которые могут быть упрощены после подстановки в полюс *v* соответствующих констант.

Назовем *функцией обнаружения константной неисправности* 1(0) на полюсе *v* схемы булеву функцию $D^{v,1}(X)$ ($D^{v,0}(X)$), такую что $D^{v,1}(\alpha) = 1$ ($D^{v,0}(\alpha) = 1$) тогда и только тогда, когда α является тестом для неисправности константа 1 (неисправности константа 0) на полюсе *v*.

Функция наблюдаемости полюса *v* $B^v(X)$ – это булева функция, такая что $B^v(\alpha) = 1$ тогда и только тогда, когда α – это входной набор, который обеспечивает смену значения хотя бы на одном из выходов схемы при смене значения на полюсе *v*.

Пусть $B_i^v(X)$ – функция наблюдаемости полюса *v* на *i*-ом выходе схемы. Формулы функций наблюдаемости полюса *v* имеют вид:

$$B_i^v(X) = \varphi_i^{v,1}(X) \oplus \varphi_i^{v,0}(X), \quad i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

$$B^v(X) = B_1^v(X) \vee \ldots \vee B_m^v(X). \tag{2}$$

Обозначим через $f^v(X)$ функцию, реализуемую на полюсе *v*. Формулы *функций* 1-*управляемости* – $C^{v,1}(X)$, и 0-*управляемости* – $C^{v,0}(X)$, имеют вид:

$$C^{v,1}(X) = f^v(X);\ C^{v,0}(X) = \overline{f}^v(X). \tag{3}$$

Функции $D^{v,1}(X)$ и $D^{v,0}(X)$ можно получить на основе функций наблюдаемости и управляемости по формулам:

$$\begin{aligned} D^{v,1}(X) &= B^v(X) \cdot C^{v,0}(X), \\ D^{v,0}(X) &= B^v(X) \cdot C^{v,1}(X). \end{aligned} \tag{4}$$

Введем отношение "$\prec$" между элементами схемы e_i и e_j. $e_i \prec e_j$, если: а) выход e_i соединен с входом e_j или б) существует подмножество элементов схемы $e_{k_1}, \ldots, e_{k_p}$ такое, что выполняются отношения $e_i \prec e_{k_1} \prec \ldots \prec e_{k_p} \prec e_j$. Другими словами, $e_i \prec e_j$, если в схеме есть путь от выхода e_i к входу e_j.

Назовем элемент e_j *прямым последователем* элемента e_i, если выход e_i соединен с входом e_j; при этом e_i назовем *прямым предшественником* e_j. Назовем элемент e_j *последователем* (или *потомком*) элемента e_i, а e_i – *предшественником* (или *предком*) e_j, если $e_i \prec e_j$.

Будем говорить, что элемент e_i *связан* с элементом e_j, e_j *связан* с элементом e_i, если e_j является последователем e_i.

Сопоставим входную переменную *v* полюсу *v* схемы (рисунок 1б). Обозначим через $\varphi_i^v(X, v)$, $i = \overline{1,m}$, функцию, реализуемую на *i*-ом выходе схемы. В этой схеме входные полюсы элементов, соединенные с полюсом *v* в схеме *S*,

соединены с входом v. Заметим, что в схеме на рисунке 1б можно исключить все элементы, не являющиеся предшественниками выходов схемы. Функции $\varphi_i^v(X,v)$ в некотором представлении могут быть получены по структурному описанию схемы с рисунка 1б.

Под исключением элементов из схемы будем подразумевать также и исключение соединений, у которых исключен хотя бы один из двух полюсов, а также входов и выходов схемы, если исключены все элементы, с которыми они соединены.

Заметим, что $B_i^v(X)$ – это булева производная функции $\varphi_i^v(X,v)$ по переменной v: $B_i^v(X) = \dfrac{\partial \varphi_i^v(X,v)}{\partial v}$.

Из функции $\varphi_i^v(X,v)$ можно получить функции $\varphi_i(X)$, $\varphi_i^{v,1}(X)$ и $\varphi_i^{v,0}(X)$: $\varphi_i(X) = \varphi_i^v(X, f^v(X))$, $\varphi_i^{v,1}(X) = \varphi_i^v(X,1)$, $\varphi_i^{v,0}(X) = \varphi_i^v(X,0)$.

Таким образом, функции $\varphi_i^{v,1}(X)$ и $\varphi_i^{v,0}(X)$ в некотором представлении могут быть получены из функции $\varphi_i^v(X,v)$ или из структурного описания схем $S^{v,1}$ и $S^{v,0}$ (рисунок 2).

Обозначим через O^v множество номеров выходов, являющихся последователями полюса v. Заметим, что для получения функции наблюдаемости необходимо рассмотреть только подсхему, реализующую выходы, являющиеся последователями полюса v, т.к. $B_i^v(X) = 0$ для $i \notin O^v$.

Полюсу v элемента схемы соответствует частичная функция, принимающая значения на множестве $\{0, 1, \times\}$. $D^{v,1}(X)$ и $D^{v,0}(X)$ представляют области нулевых и единичных значений частичной функции. $\overline{B}^v(X)$ (дополнение $B^v(X)$) задает область неопределенных значений частичной функции и представляет входные наборы схемы, на которых значение на полюсе v не влияет на значения на выходах схемы.

В данной статье локальную функцию элемента будем называть просто функцией элемента, а глобальную функцию элемента будем называть функцией, реализуемой на выходе элемента.

В работах [2, 3] рассмотрен пример получения по структурному описанию схемы функций, реализуемых схемой, в виде BDD (ROBDD) или ДНФ (ОДНФ). Он заключатся в следующем. Упорядочим элементы схемы в последовательность e_{k_1}, e_{k_2}, …, e_{k_t} такую, что в ней выполняются все отношения предшествования между элементами, т.е. если $e_{k_i} \prec e_{k_j}$, то e_{k_i} в последовательности предшествует e_{k_j}. Тогда двигаясь по элементам от первого к последнему в полученной последовательности и применяя функции элементов, к BDD или ДНФ

функций, реализуемых на входах элементов, получим BDD или ДНФ функций, реализуемых на выходе каждого из элементов и на выходах схемы. При построении ДНФ помимо получения ДНФ функций, реализуемых на выходах элементов схемы, будем также получать ДНФ инверсий этих функций.

Как сказано выше, функции $\varphi_i^{v,1}(X)$ и $\varphi_i^{v,0}(X)$, $i=\overline{1,m}$, в некотором представлении могут быть получены из структурного описания схем $S^{v,1}$ и $S^{v,0}$ или из функций $\varphi_i^{v}(X,v)$. Далее рассмотрим Алгоритм 1.1 и Алгоритм 1.2 получения функций тестопригодности в виде BDD (ROBDD) или ДНФ (ОДНФ) для полюса v схемы для двух рассмотренных способов получения функций $\varphi_i^{v,1}(X)$ и $\varphi_i^{v,0}(X)$. Алгоритмы основываются на вышеприведенном способе получения BDD и ДНФ функций, реализуемых схемой, рассмотренном в [2, 3].

В алгоритмах для сокращения будем полагать, что v – это выходной полюс элемента. Алгоритмы легко дополняются на случаи, когда v – это входной полюс элемента, вход или выход схемы.

Алгоритм 1.1. Получение функций тестопригодности: $C^{v,1}$, $C^{v,0}$, B_i^v, B^v, $D^{v,1}$, $D^{v,0}$, и $\overline{B}^v$ в виде BDD или ДНФ.

1) Исключим из схемы S все элементы, не являющиеся предшественниками выходов множества O^v; получим схему S^v.
2) Упорядочим элементы схемы S^v так, чтобы выполнялись все отношения предшествования между элементами, т.е. если $e_{k_i} \prec e_{k_j}$, то в последовательности e_{k_i} предшествует e_{k_j}; получим последовательность элементов схемы $e_{k_1}, \ldots, e_{k_t}$.
3) Представим входные переменные в виде BDD или ДНФ.
4) Получим функции (в виде BDD или ДНФ), реализуемые на выходах элементов схемы S^v, от первого элемента до элемента (включительно), выход которого является полюсом v, в полученной последовательности. BDD или ДНФ функции, реализуемой на выходе элемента, получаем применяя функцию элемента к BDD или ДНФ функций, реализуемых на входах элементов.

При получении ДНФ некоторой функции на этом шаге и на последующих шагах алгоритма будем получать также ДНФ инверсии этой функции.

5) Для элементов, расположенных в последовательности после полюса v, выполним следующее. Если элемент не является последователем v, получим (в виде BDD или ДНФ) функцию, реализуемую на его выходе. Для элементов – последователей v, получим по две функции: одна при единичном значении на полюсе v, вторая при нулевом значении на полюсе v. При этом перед получением функции на выходе выполним упрощение функции элемента, если это возможно, подстановкой соответствующих констант.

6) На выходах элементов схемы, являющихся выходами схемы, получены по две функции (в виде BDD или ДНФ), которые представляют функции $\varphi_i^{v,1}(X)$ и $\varphi_i^{v,0}(X)$, $i \in O^v$. Выполним сложение по модулю 2 этих функций по формуле (1). Далее выполним дизъюнкцию функций, полученных в результате сложения по модулю 2, по формуле (2), если *i*-ый выход не принадлежит множеству O^v, то в формуле его пропускаем, т.к. $B_i^v(X) = 0$; получим функцию наблюдаемости полюса *v* B^v, в виде BDD или ДНФ.
7) Получим функцию обнаружения неисправностей на полюсе *v* схемы $D^{v,0}$ ($D^{v,1}$) в виде BDD или ДНФ по формулам (4). Для этого выполним конъюнкцию B^v с функцией 1-управляемости $C^{v,1}$ (с функцией 0-управляемости $C^{v,0}$), которая реализуется на полюсе *v* и получена на шаге 4 алгоритма (BDD $C^{v,0}$ получим из BDD $C^{v,1}$ инвертированием значений терминальных вершин).

Заметим, что при получении функций только для одного полюса, на шаге 2 можно упорядочить элементы так, чтобы все элементы, не являющиеся последователями элемента e^v с выходным полюсом *v*, находились в последовательности до e^v. Тогда для всех элементов до e^v, включая сам этот элемент, будем вычислять по одной функции, а после e^v – по две функции.

Заметим также, что элементы в Алгоритме 1.1 не обязательно рассматривать последовательно, важно получать функции, реализуемые на выходах элементов, после получения функций, реализуемых на выходах их предшественников.

При получении только функций наблюдаемости полюса *v*, шаг 1 Алгоритма 1.1 преобразуется к следующему виду.

1) Исключим из схемы *S* все элементы, не являющиеся последователями полюса *v* или предшественниками этих последователей; получим схему $S^{v,B}$.

Далее выполняются шаги 1 – 6 алгоритма для схемы $S^{v,B}$.

Известно [4], что КНФ для получения функций, реализуемых комбинационной схемой, с применением SAT-решателя можно построить следующим образом: выходу каждого элемента *i* сопоставляется своя переменная v_i; для каждого элемента *i* схемы строится КНФ функции $v_i \sim f_i$, где f_i – функция элемента; КНФ, полученные для элементов, объединяются операцией конъюнкции.

Таким образом, КНФ для получения функций тестопригодности построим по алгоритму подобному вышеизложенному Алгоритму 1.1, но вместо получения функций, реализуемых на выходах элементов, суперпозицией функций на входах элементов, получим КНФ для рассматриваемых элементов схемы и выполним их конъюнкцию. Здесь для краткости рассмотрим только алгоритм построения КНФ для получения функции наблюдаемости.

Алгоритм 2. Построение КНФ для получения функции B^v с помощью SAT-решателя.

1) Исключим из схемы S все элементы, не являющиеся последователями полюса v или предшественниками этих последователей; получим схему $S^{v,B}$.
2) Упорядочим элементы схемы $S^{v,B}$ так, чтобы выполнялись все отношения предшествования между элементами, т.е. если $e_{k_i} \prec e_{k_j}$, то в последовательности e_{k_i} предшествует e_{k_j}; получим последовательность элементов e_{k_1}, …, e_{k_p}.
3) Выходу каждого элемента e_i сопоставим свою переменную v_i. Получим в виде КНФ функции $v_i \sim f_i$, где f_i – функция элемента e_i, для всех элементов схемы $S^{v,B}$ от первого в последовательности до элемента (включительно), выход которого является полюсом v. Выполним конъюнкцию всех полученных КНФ.
4) Для элементов, расположенных в последовательности после полюса v, выполним следующее. Если элемент не является последователем v, то получим КНФ функции $v_i \sim f_i$ для элемента. Для элементов – последователей v, получим по две КНФ функции $v_i \sim f_i$: одна при единичном значении на полюсе v, вторая при нулевом значении на полюсе v. При этом у одной КНФ к индексу выходной переменной добавим 1, у второй – 0. Если вход элемента соединен с выходом элемента, являющегося последователем v, то используем для одной КНФ входные переменные с дополнительным индексом 1, для другой – с индексом 0. Перед получением КНФ, подставим константы, если они есть, и выполним упрощение f_i. Выполним конъюнкцию полученных КНФ со строящейся КНФ.
5) Выполним упрощение двух под-КНФ: одна состоит из КНФ для элементов с выходами $v_{i,1}$, а вторая – с выходами $v_{i,0}$. Этот шаг алгоритма не обязателен.
6) Получим КНФ для операций сложения по модулю 2: $B_i^v \sim (v_{i,1} \oplus v_{i,0})$, $i \in O^v$, здесь v_i – переменные, соответствующие выходам элементов соединенным с выходами схемы из множества O^v. Выполним конъюнкцию этих КНФ со строящейся КНФ.
7) Получим КНФ для операции дизъюнкции: $B^v \sim \bigvee\limits_{i \in O^v} B_i^v$. Выполним конъюнкцию этой КНФ со строящейся КНФ и получим КНФ $P^{v,B}$.
8) Получим КНФ $P^{v,B,1}$ для построения функции наблюдаемости, присвоив в КНФ $P^{v,B}$ переменной B^v значение 1.

Далее можно получить функцию наблюдаемости по построенным КНФ $P^{v,B,1}$ с помощью SAT-решателя.

Алгоритм 1.2. Получение функций тестопригодности: $C^{v,1}$, $C^{v,0}$, B_i^v, B^v, $D^{v,1}$, $D^{v,0}$, и $\overline{B}^v$ в виде BDD или ДНФ.

1) – 4) Выполним шаги 1) – 4) Алгоритма 1.1.

5) Получим функции (в виде BDD или ДНФ), реализуемые на выходах элементов, расположенных в последовательности после полюса v. При этом, если один из входов элемента в схеме S соединен с полюсом v, то этому входу сопоставляется BDD или ДНФ переменной v.
6) На выходах элементов схемы, являющихся выходами схемы, получены функции в виде BDD или ДНФ. Исключим из рассмотрения функции, не зависящие от переменной v. Для остальных функций множества O^v получим по две функции (в виде BDD или ДНФ): $\varphi_i^{v,1}(X)$, подставив в переменную v полученной функции константу 1, и $\varphi_i^{v,0}(X)$, подставив в переменную v константу 0; выполним сложение по модулю 2 полученных двух функций.
7) Выполним дизъюнкцию функций, полученных в результате сложения по модулю 2 на шаге 6. В результате получим функцию наблюдаемости B^v полюса v схемы в виде BDD или ДНФ.
8) Выполним шаг 7 Алгоритма 1.1.

При получении функций тестопригодности для всех полюсов схемы выполним следующее. Получим функции (в виде BDD или ДНФ), реализуемые на выходе каждого элемента исправной схемы S, вышеприведенным способом от первого до последнего элемента в последовательности. Далее для каждого полюса v_i: получаем BDD и ДНФ только для последователей полюса v_i, для остальных полюсов используем значения, полученные для исправной схемы; выполняем необходимые операции по формулам (1) – (4). Вычисление BDD и ДНФ только для последователей каждого полюса позволит существенно сократить вычислительные затраты при вычислении функций тестопригодности для всех полюсов схемы.

При получении функций тестопригодности для части полюсов схемы, получим функции (в виде BDD или ДНФ), реализуемые на выходе каждого элемента исправной схемы S, из которой исключены элементы, не являющиеся предшественниками выходов схемы, являющихся последователями хотя бы одного из рассматриваемых полюсов. Для каждого рассматриваемого полюса v_i пересчитываем только BDD и ДНФ последователей этого полюса.

Подобным способом получим также КНФ для получения функций тестопригодности с помощью SAT-решателя для всех или части полюсов схемы.

Другие методы построения функции наблюдаемости, её дополнения и функции обнаружения неисправности рассматриваются, например, в [5, 6].

Алгоритмы 1.1 и 1.2 позволяют построить ортогональную дизъюнктивную нормальную форму (ОДНФ) и ROBDD функций тестопригодности по структурному описанию схемы. Далее рассмотрим метод получения ОДНФ функции по ROBDD функции. Данный метод был предложен автором ранее [1]. Здесь рассмотрим его более подробно с примером.

В ROBDD графе различные пути, идущие из корня к некоторой терминальной вершине, представляют взаимно-ортогональные конъюнкции. Дизъюнкция всех конъюнкций, соответствующих путям, идущим из корня к терминальной вершине 1, образует ОДНФ функции. Рассмотрим метод, позволяющий получить ОДНФ по ROBDD, без явного обхода путей графа.

ОДНФ $O(f_w)$ функции f_w, представленной ROBDD с корнем w, может быть получена следующим образом: 1) $O'(f_w) = value(w)$, если w – терминальная вершина, иначе $O'(f_w) = \bar{x} \cdot O'(f_{low(w)}) \vee x \cdot O'(f_{high(w)})$, где x – переменная, соответствующая вершине w, а $low(w)$ и $high(w)$ – потомки вершины w, по значениям 0 и 1 переменной x. 2) Раскрыв скобки формулы $O'(f_w)$, получим ОДНФ $O(f_w)$.

Отметим, что $O'(f_w)$ для каждой вершины ROBDD получаем один раз.

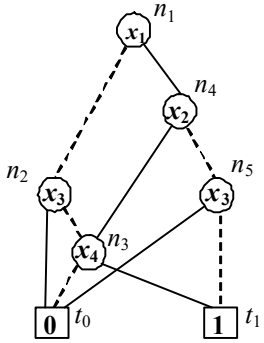


Рисунок 3 – ROBDD функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$

Пример.

Рассмотрим ROBDD функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ с рисунка 3.

$O'(f_{t_0}) = 0.$

$O'(f_{t_1}) = 1.$

$O'(f_{n_3}) = \bar{x}_4 \cdot O'(f_{t_0}) \vee x_4 \cdot O'(f_{t_1}) = \bar{x}_4 \cdot 0 \vee x_4 \cdot 1 = x_4.$

$O'(f_{n_2}) = \bar{x}_3 \cdot O'(f_{n_3}) \vee x_3 \cdot O'(f_{t_0}) = \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee x_3 \cdot 0 = \bar{x}_3 \cdot x_4.$

$O'(f_{n_5}) = \bar{x}_3 \cdot O'(f_{t_1}) \vee x_3 \cdot O'(f_{t_0}) = \bar{x}_3 \cdot 1 \vee x_3 \cdot 0 = \bar{x}_3.$

$O'(f_{n_4}) = \bar{x}_2 \cdot O'(f_{n_5}) \vee x_2 \cdot O'(f_{n_3}) = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \vee x_2 \cdot x_4.$

$O'(f_{n_1}) = \bar{x}_1 \cdot O'(f_{n_2}) \vee x_1 \cdot O'(f_{n_4}) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot (\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \vee x_2 \cdot x_4).$

$O(f) = O(f_{n_1}) = \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_4.$

Легко убедиться, что каждая конъюнкция в полученной ОДНФ $O(f)$ соответствует пути от корня до терминальной вершины 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Golubeva O., Construction of Permissible Functions and their Application for Fault Tolerance // 2019 IEEE International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Tomsk, Russia. 18−20 April 2019. 5 pp.

2. Голубева О.И. Получение достаточных множеств и допустимых функций частичных булевых функций // Современные проблемы физико-математических

наук / материалы V Всероссийской науч.-практ. конф. с международным участием, (26–29 сентября 2019 г., г. Орёл). – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2019. – С. 268 – 273.
3. Golubeva O., Ruday D. Construction of Controllability, Observability and Stuck-at Fault Detection Functions // Современные проблемы физико-математических наук / материлы V Всероссийской науч.-практ. конф. с международным участием, (26–29 сентября 2019 г., г. Орёл). – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2019. – С. 281 – 284.
4. Дьяконов А.Г. ПРОБЛЕМА ВЫПОЛНИМОСТИ (современные алгоритмы решения). Москва, 2006. 52 с.
5. Mishchenko A., Brayton R.K., SAT-Based Complete Don't-Care Computation for Network Optimization // Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition (DATE'05). March 2005. Pp. 412−417.
6. Matrosova A., Provkin V., Masking internal node logical faults and Trojan circuits injection with using SAT solvers// 2020 IEEE Intern. Conf. on Automation, Quality and Testing, Robotics. Cluj-Napoca, Romania. May 2020.

УДК 519.715

ТРОИЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ SAT-РЕШАТЕЛЕЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ВЕРИФИКАЦИИ

О.И. Голубева, к.техн.н., доц.
Томский государственный университет
e-mail: *golubeva-o@yandex.ru*

Рассматриваются методы точного троичного моделирования комбинационных схем, основанные на применении SAT-решателей. Также рассматривается применение методов троичного моделирования для верификации проектируемых устройств.

Ключевые слова: точное троичное моделирование, верификация, SAT-решатель, комбинационная схема.

В работе выполняется дальнейшее развитие ранее предложенных методов точного троичного моделирования комбинационных схем с использованием SAT-решателей [1−3]. Кроме того, рассматривается применение методов троичного моделирования для верификации проектируемых устройств.

Вектор $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0,1,\times\}$, $i = \overline{1,n}$, будем называть *троичным вектором*. Здесь × – неопределенное значение из множества $\{0, 1\}$. Троичный вектор $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ задает интервал в булевом пространстве размерности *n*. Будем говорить, что α представляет множество булевых векторов $N(\alpha)$.

Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – полностью определенная булева функция, и $M_f^1 = \{\gamma \in E_n^2 : f(\gamma) = 1\}$ ($M_f^0 = \{\gamma \in E_n^2 : f(\gamma) = 0\}$) – область единичных (нулевых) значений функции f.

Определим точное троичное моделирование булевой функции f на троичном векторе α следующим образом. Если интервал α полностью лежит в области M_f^1 (M_f^0), то $f(\alpha) = 1$ (0), если интервал α пересекается с обеими областями, то $f(\alpha) = \times$. Другими словами, если $\forall\gamma \in N(\alpha)$: $f(\gamma) = 1$ (0), то $f(\alpha) = 1$ (0), если $\exists\gamma_i \in N(\alpha)$: $f(\gamma_i) = 1$ и $\exists\gamma_j \in N(\alpha)$: $f(\gamma_j) = 0$, то $f(\alpha) = \times$.

Задача точного троичного моделирования комбинационной схемы определяется как задача точного троичного моделирования булевых функций, реализуемых схемой.

При небольшой мощности интервала α троичное моделирование схемы можно выполнить с помощью двоичного моделирования по структурному описанию схемы на всех векторах из $N(\alpha)$. При этом значения на выходах получаются согласно определению точного троичного моделирования. Далее рассмотрим методы, которые целесообразно применять при большой мощности $N(\alpha)$.

Задача точного троичного моделирования схем с применением SAT-решателей была рассмотрена ранее в работах [1–3]. В данной работе предложенные методы для комбинационных схем детализируются, и выполняется их анализ. Также рассматривается применение предложенных методов для верификации проектируемых схем.

Под подстановкой констант далее будем подразумевать также и упрощение схемы (или формулы), если оно целесообразно.

Рассмотрим комбинационную схему S с n входами и m выходами. $X = \{x_1,...,x_n\}$ – входные переменные и $Y = \{y_1,...,y_m\}$ – выходные переменные схемы.

Необходимо выполнить точное троичное моделирование схемы S на входном троичном векторе $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$.

Построим КНФ $P(X, Y, V)$ по структурному описанию комбинационной схемы S некоторым известным способом [4]. $P(X, Y, V)$ зависит от входных и выходных переменных схемы, а также от множества переменных V, соответствующих выходам элементов схемы:

$$P(x_1,...,x_n, y_1,...,y_m, V).$$

Выполним подстановку констант из вектора α в переменные множества X. Получим КНФ:

$$P^{\alpha}(X^{\alpha}, Y, V).$$

Рассмотрим подходы к точному троичному моделированию с применением SAT-решателя.

Задачу точного троичного моделирования можно решить сразу для всех выходов следующим простым способом. Получим все выполняющие наборы для P^{α} с помощью SAT-решателя. Если на выходе j в полученных выполняющих наборах встречается только значение 1 (0), то результат моделирования выхода j – 1 (0), если на выходе j встречаются оба значения, то результат – ×. Данный подход просто реализуется, так как позволяет использовать известные способы получения всех выполняющих наборов для КНФ. Недостатком подхода является большой объем вычислений, необходимых для его реализации.

Рассмотрим другой подход к точному троичному моделированию схемы с применением SAT-решателя, позволяющий сократить объем вычислений. Он заключается в следующем. Для получения значения на выходе j исключим дизъюнкты из КНФ P^{α} для элементов, не связанных с выходом j, получим КНФ P_j^{α}. Подставим в переменную y_j КНФ P_j^{α} константу 1 и решим задачу выполнимости КНФ, а затем подставим константу 0 и также решим задачу выполнимости КНФ. Если решение получено как для константы 1, так и для константы 0, то результат моделирования − ×. Если решение получено только для 1 (0), то результат – 1 (0).

КНФ P_j^{α} можно также построить: а) по подсхеме S_j схемы S, включающей только элементы схемы, связанные с выходом j, подставив на ее входы константы из троичного вектора α; б) получив КНФ P_j по подсхеме S_j, а затем подставив в P_j константы из α.

Заметим, что при определении достижимости некоторого значения (1 или 0) на выходе j можно решать задачу выполнимости также по КНФ P^{α}. В этом случае в КНФ P^{α} перед решением задачи выполнимости в переменную y_j подставляется проверяемое значение (1 или 0). При таком подходе нет необходимости в получении КНФ P_j^{α} для каждого выхода j, однако при этом рассматривается КНФ большего размера.

При данном подходе к точному троичному моделированию можно сократить вычисления с помощью двоичного моделирования. Предварительно выполним двоичное моделирование по структурному описанию схемы на K, $0 < K < |N(\alpha)|$, случайных булевых векторах из $N(\alpha)$. Если при моделировании на выходе j, $j \in \{1, \ldots, m\}$, получены как значение 1, так и значение 0, то результат троичного моделирования – ×, если получено одно значение (1 или 0) на всех булевых векторах, то задача выполнимости КНФ решается только для второго значения (0 или 1).

Заметим, что для сокращения вычислений также можно вычислять значения функций на двоичных векторах не по схеме, а по КНФ.

Предложенный метод сокращения вычислений на основе двоичного моделирования позволяет существенно сократить объем вычислений. Действительно, выполнив двоичное моделирование всего на одном случайном векторе, получим одно из значений на выходе j (1 или 0), далее для получения точного значения троичного моделирования достаточно решить задачу выполнимости КНФ только для второй константы (0 или 1 соответственно). Если выполнить двоичное моделирование на $K > 1$ случайных векторах, то в случае получения на выходе как значения 1, так и значения 0 будет получено точное значение троичного моделирования (×) без решения задачи выполнимости КНФ.

Пример.

Рассмотрим комбинационную схему с множеством входных переменных $X = \{x_1, ..., x_7\}$ и множеством выходных переменных $Y = \{y_1, y_2\}$.

Необходимо выполнить точное троичное моделирование на троичном векторе $\alpha = (1, \times, \times, \times, \times, \times, \times)$.

Троичный вектор α представляет 64 двоичных вектора. Так как количество векторов невелико, задачу можно решить только с помощью двоичного моделирования. Но для демонстрации предложенного метода точного троичного моделирования с применением SAT-решателя (второго из представленных методов), в примере рассматриваются шаги решения задачи этим методом.

Получим КНФ $P(X, Y, V)$ по структурному описанию схемы. Подставим в переменную x_1 константу 1 из троичного вектора α и получим КНФ $P^{\alpha}(X^{\alpha}, Y, V)$, где $X^{\alpha} = (x_2, \ldots, x_7)$.

Выберем K – число булевых векторов для предварительного двоичного моделирования. Пусть $K = 2$. Выполним двоичное моделирование на двух случайных булевых векторах. Пусть в результате моделирования на выходах получены векторы выходных значений: (0, 1) и (0, 0). Из полученных векторов делаем заключение, что значение на втором выходе при заданном входном векторе α равно ×. Значение на первом выходе пока не получено. Оно может быть 0 или ×. Таким образом, для получения результата точного троичного моделирования осталось проверить, выполнима ли КНФ $P^{\alpha}(X^{\alpha}, Y, V)$ при значении 1 переменной y_1. Исключим из полученной КНФ дизъюнкты для элементов не связанных с первым выходом схемы (этот шаг исключения дизъюнктов не обязателен). Подставим в переменную y_1 константу 1. Если полученная КНФ выполнима, то результат точного троичного моделирования: (×, ×), иначе – (0, ×).

Решение задачи точного троичного моделирования схемы с применением SAT-решателя легко модифицируются для решения задачи: является ли конъюнкция k импликантой булевых функций f_j, $j = \overline{1,m}$, реализуемых на выходах схемы. Эта задача эквивалентна следующей задаче: определить, равно ли значение $f_j(\alpha)$ единице, здесь α – троичный вектор, соответствующий конъюнкции k,

$j = \overline{1,m}$. Для ее решения необходимо выяснить, существует ли набор входных значений, на котором выход *j* схемы принимает значение 0 [2, 3].

Решение заключается в следующем. Для выхода *j* получим КНФ P_j^{α} одним из вышеприведенных способов. Подставим в переменную y_j КНФ P_j^{α} константу 0, и решим задачу выполнимости для полученной КНФ. Если КНФ выполнима, то конъюнкция *k* не является импликантой f_j, иначе – является.

При определении достижимости значения 0 на выходе *j* можно решать задачу выполнимости также по КНФ P^{α}, подставив в переменную y_j значение 0.

Сократить вычисления можно следующим образом. Сначала выполним двоичное моделирование по структурному описанию схемы (или по КНФ) на *K*, $0 < K < |N(\alpha)|$, случайных булевых векторах из $N(\alpha)$. Если в результате моделирования на выходе *j* получено хотя бы одно значение 0, то конъюнкция *k* не является импликантой f_j, если получены только значения 1, то решим задачу выполнимости КНФ при значении 0 переменной y_j.

Троичное моделирование применяется, например, при верификации схем [3, 5]. Рассмотрим применение методов точного троичного моделирования при верификации.

Задача заключается в том, чтобы проверить, реализует ли проектируемая схема исходное функциональное описание.

Пусть функциональное описание определено множеством пар троичных векторов (α_i, β_i), где β_i вектор значений функций на векторах входных значений из интервала α_i. Значение × компоненты *j* вектора β_i обозначает неопределенное значение $j^{\text{ой}}$ функции на всех векторах из интервала α_i или то, что $j^{\text{ая}}$ функция принимает различные значения из множества {0,1} на векторах из $N(\alpha_i)$.

В работе [5] для решения рассматриваемой задачи применяется двоичное и стандартное троичное моделирование по структурному описанию схемы. Замена стандартного троичного моделирования точным троичным моделированием позволяет исключить необходимость двоичного моделирования схем на векторах из интервала α_i.

Верификация того, реализует ли комбинационная схема спецификацию, с применением точного троичного моделирования, выполняется следующим образом.

Рассмотрим каждую пару векторов (α_i, β_i). Для каждой $k^{\text{ой}}$ компоненты β_i^k вектора β_i равной 0 или 1 (т.е. не равной ×) выполним точное троичное моделирование соответствующего выхода *k* схемы на входном векторе α_i и получим значение β_i^{k*}. Если $\beta_i^{k*} \neq \beta_i^k$, тогда схема не реализует функциональную специ-

фикацию. Если все вычисленные значения равны соответствующим значениям в спецификации, то верификация прошла успешно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубева О.И. Троичное моделирование схем с применением SAT-решателей // Кулагинские чтения: техника и технологии производственных процессов: XVIII Междунар. Науч.-практ. Конф.: сб. Ст. [в 3 ч.] / Забайкал. гос. ун-т. Чита. 28 – 30 ноября 2018. – Чита: ЗабГУ, 2018. – Ч. 2. – С. 266 – 270.
2. Голубева О.И. Троичное моделирование комбинационных и синхронных последовательностных схем // Современные проблемы физико-математических наук / материалы V Всероссийской науч.-практ. конф. с международным участием, (26 – 29 сентября 2019 г., г. Орёл). – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2019. – С. 274 – 281.
3. Golubeva O., Three-Value Simulation of Combinational and Sequential Circuits and its Applications // 2020 IEEE Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT). Moscow, Russia. 11−13 March 2020. 7 pp.
4. Дьяконов А.Г. ПРОБЛЕМА ВЫПОЛНИМОСТИ (современные алгоритмы решения). Москва, 2006. 52 с.
5. Черемисинова Л. Д. Верификация логических описаний с функциональной неопределенностью на основе моделирования // Образовательные ресурсы и технологии. 2016. №2 (14). С. 409–416.

ВЫПОЛНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОМПАС-3D

Н.М. Калинин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *seo57.00@mail.ru*
К.Е. Тарасов
«Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
e-mail: *tarasov.kirill.orel@gmail.com*

В статье идёт речь возможностях выполнения геометрических построений с использованием систем автоматизированного проектирования Компас-3D. Представлены деление окружности на пять и семь равных частей.

Ключевые слова: система автоматизированного проектирования Компас-3D, геометрические построения, деление окружности на равные части.

Система «Компас-3D» является составной частью глобальной системы автоматизированного проектирования. Она представляет собой универсальную систему, предназначенную для выполнения на высоком уровне многомерных таблиц, чертежей различной сложности, многоструктурных схем, детальных расчетно-пояснительных записок, текстовых документов.

Сегодня указанная система трехмерного проектирования стала признанным стандартом для целого спектра предприятий различной направленности.

Система «Компас-3D» отличается очевидной простотой освоения, направленной на выполнение моделирования на высоком технологическом уровне. В системе успешно используется собственное математическое ядро C3D с опорой на технологии, разработанные специалистами АСКОН [1; 2].

Для использования школьниками и учителями в учебном процессе создана учебная версия системы «Компас-3D». Именно она позволяет раскрыть школьникам полный спектр масштабных профессиональных возможностей «Компас-3D» . Благодаря использованию учебной версии есть всё необходимое для того, чтобы научить школьников выполнять геометрические построения, а учителям тем самым совершенствовать учебный процесс, а также осуществлять профориентационную работу.

Благодаря простому и интуитивно понятному интерфейсу, школьники довольно быстро осваивают весь набор функциональных возможностей программы, что позволяет приступить к эффективной учебной деятельности

Разработчики «Компас-3D» подготовили систему интерактивных уроков, направленную на изучение основного инструментария системы.

Возможности программы Компас-3D могут быть с успехом использованы учителями в урочной и внеурочной деятельности и в профессиональной ориентации школьников. У учителя появляется возможность показать специфику целого круга профессий, возможность заинтересовать школьников.

Реализация этих возможностей программы Компас-3D удачно осуществляется в процессе изучения курса геометрии при выполнении геометрических построений.

Рассмотрим примеры решения школьных геометрических задач с помощью двумерного редактора Компас-3D. Все построения выполняются учащимися под руководством учителя с целью научиться использовать Компас-3D и закрепить навыки выполнения геометрических построений.

Разделить данную окружность на пять частей

Из точек *B* и *C* проводим вспомогательные дуги радиусом данной окружности, определив точку *F*. Соединив точки *F* и *D* прямой, разделим радиус *OB* пополам. Из точки *M* (середина радиуса *OB*) радиусом *MO* или *MB* проводим дуги, пересекающие прямую *FD* в точках *K* и *K'*. Затем из точки *D* через точку *K'* проводим дугу, которая определит точки 2 и 5. Из точки *D* радиусом *DK* проводим вторую дугу, определяющую точки 3 и 4, а первая точка совмещена с точкой *C*. Таким образом, мы разделили окружность на пять равных частей (рисунок 1).

На рисунке 2 дан тот же способ деления окружности на пять частей, но в развернутом изображении.

Есть еще два способа разметки (деления) окружности, они отличаются от первых двух только приемами определения точки *K*, а процесс разметки остается тот же.

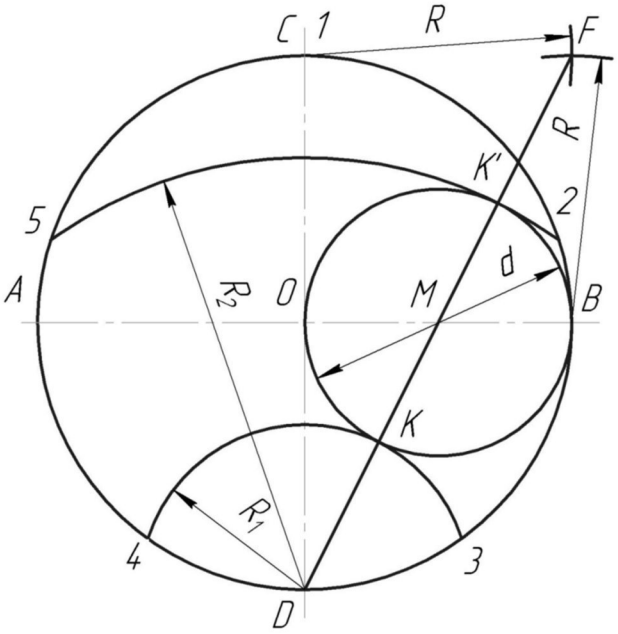


Рисунок 1

Рассмотрим вопрос о делении окружности на пять, десять и двадцать частей. Весьма важно запомнить, что при соединении точек, лежащих на линии окружности, с центром *O*, полученные центральные углы должны быть равны соответственно $\frac{360}{10}=36^\circ$, $\frac{360}{20}=18^\circ$.

Длина стороны правильного многоугольника зависит от точности центрального угла, ибо сторона многоугольника является его хордой. В справочниках по математике даны специальные таблицы, в которых указаны коэффициенты, с помощью которых определяются длины дуг, хорд и т.д. С помощью хорд, определяемых по таблицам, также можно разделить окружность на пять и десять частей.

Горизонтальный диаметр данной окружности *AB* делим на четыре равные части, обозначив новые точки буквами *m* и *n* (рисунок 3).

Через точки *C* и *D* проводим касательные прямые, на которых откладываем отрезки, равные *mC*, обозначив точки e_1 и e_2.

При соединении точек e_1 и e_2 с точками *m* и *n* прямые в пересечении с диаметром *CD* определяют точки S_1 и S_2, через которые проводим прямые параллельно диаметру *AB*, эти прямые и будут хорды центрального угла, равного 144°.

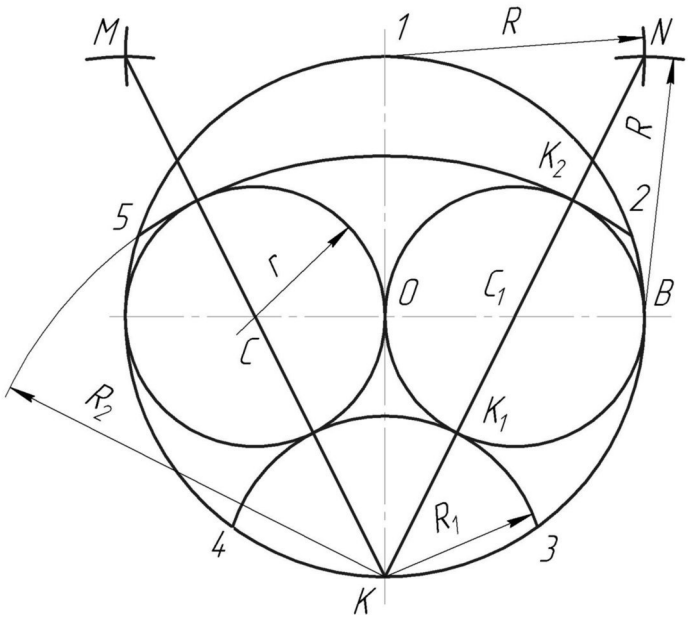


Рисунок 2

Вертикальный диаметр *CD* делит угол, равный 144°, пополам, следовательно, эта половина равна будет 72°.

При проведении биссектрисы этого угла мы получим новые центральные углы, равные 36°.

Таким образом мы разделили окружность на десять равных частей.

Если точки на линии окружности соединить через одну, получим пятиугольник.

Радиус вписанной окружности десятиугольника *r* равен полухорде, проведенной через точку S_1 или S_2.

Рассмотрим еще один способ деления окружности на пять частей. Для этого необходимо через вершину *D* провести прямую параллельную диаметру *AB*. Затем из точек *A* и *B* радиусом, равным диаметру данной окружности, прово-

дим вспомогательные дуги до пересечения с прямой, проведенной через точку *D*. Полученные точки X и X_1 соединяем с центром окружности, они пересекут ее в точках 3 и 4. Точки 2 и 5 определяем прямыми, проведенными из точки *D* параллельно XO и X_1O. Таким образом мы разделили окружность на пять равных частей (рисунок 4).

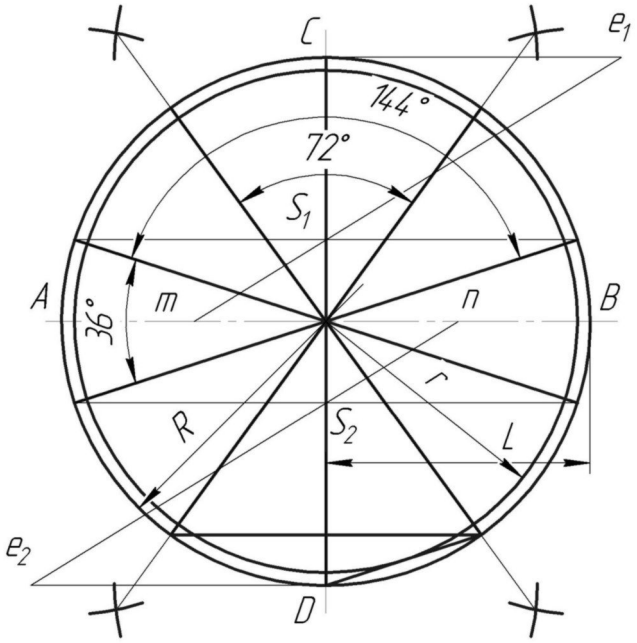


Рисунок 3

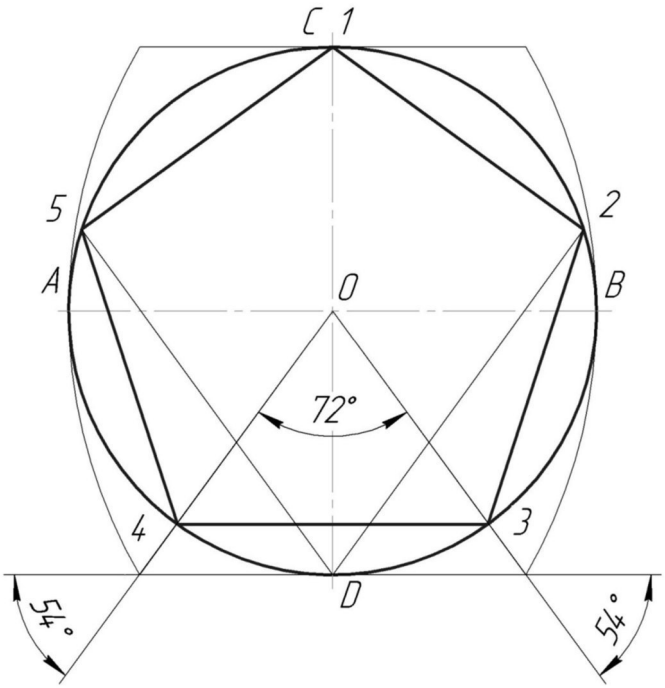


Рисунок 4

Деление окружности на семь равных частей

Способ первый. Из точки *B* проводим дугу радиусом, равным радиусу данной окружности. Дуга пересечет линию окружности в точках *M* и *N*; через точки *M* и *N* проводим прямую, которая будет параллельна диаметру *CD* и пересечет горизонтальный диаметр в точке *E*. Полученный отрезок *EM* и *EN* равен стороне правильного вписанного семиугольника, являющегося хордой окружности, а дуга, ее стягивающая, будет равна $\frac{1}{7}$ длины окружности (рисунок 5).

Способ второй. Через вершины *C* и *D* проводим вспомогательные прямые параллельно диаметру *AB*. От точки *C* откладываем вправо 30 мм, а от точки *D* влево – 40 мм. Соединяем концы полученных отрезков (*M* и *N*) прямой, которая пересекает диаметр *CD* в точке *S* (рисунок 5).

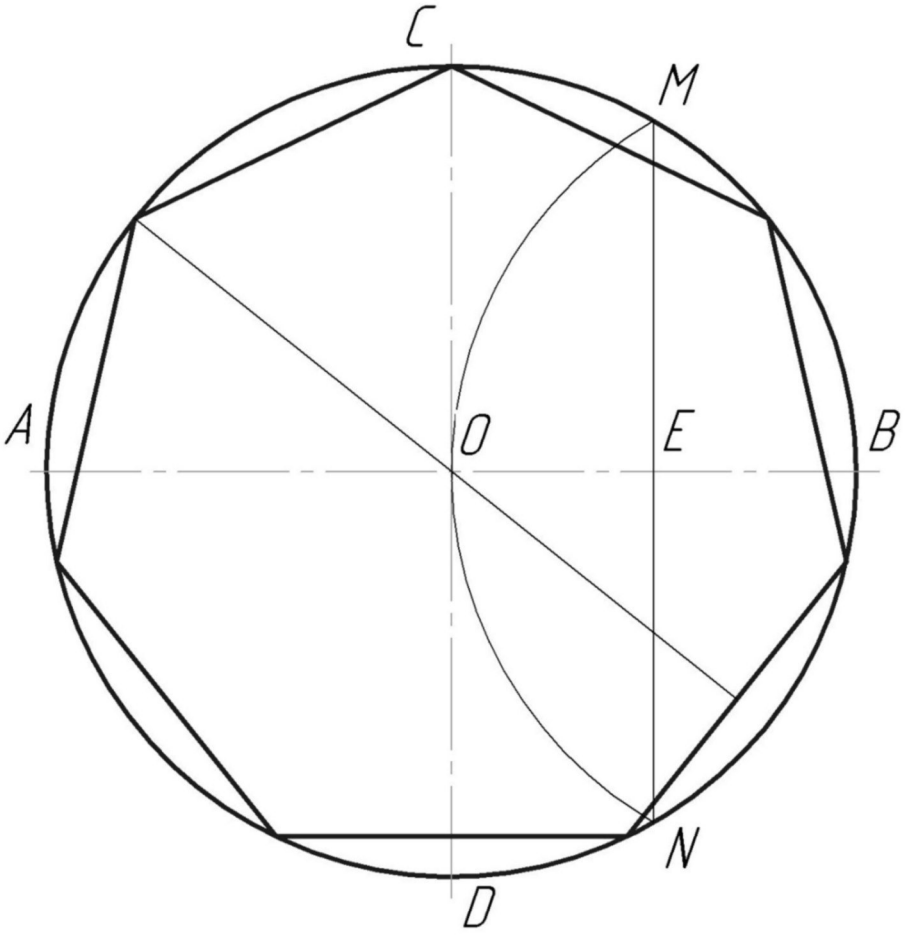


Рисунок 5

Если мы опишем радиусом *CS* из точки *C* дугу, то отсечем $\frac{1}{7}$ часть данной окружности. Определим на линии окружности точки 2 и 1. Остальные точки могут быть определены следующим образом: через точки 2 и 1 проводим прямые параллельно сторонам 1–C и 2–C, полученные хорды определяют 3 и 6

точки, а проводя прямые из точек 3 и 6 параллельно хордам 1–3 и 2–6, мы определяем точки 4 и 5.

Выполнение геометрических построений позволяет сформировать и развить навыки работы на Компас 3D, развивать дизайнерские и конструкторские навыки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Большаков В.П. KOMПАС-3D для студентов и школьников. Черчение, информатика, геометрия. – СПб: БХВ-Петербург, 2010. – 304 с.
2. Большаков В.П. Создание трехмерных моделей и конструкторской документации в системе KOMПАС-3D. Практикум. - СПб.: БХВ-Петербург, 2010. - 496 с.
3. Назаретский В.Е., Федин Н.Г. Задачник-практикум по элементарной геометрии. Для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов. – М.: Учпедгиз Министерства просвещения РСФСР, 1961. – 132 с.
4. Школьник К.А. Графическая грамота. Научно-популярная литература. – М.: Детская литература, 1977. – 143 с.

УЧЕБНАЯ ЛАБОРАТОРНАЯ УСТАНОВКА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ

И.Ю. Киреева
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *sveta-ira3003@mail.ru*
Т.С. Наумкина
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *tnu213@mail.ru*
В.С. Румянцев, к.ф.- м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *rumyancev1946@rambler.ru*

Разработана, реализована и протестирована установка для изучения магнитных свойств ферромагнетиков в учебной лаборатории электричества и магнетизма

Ключевые слова: лабораторная установка, ферромагнетик, магнитные свойства, баллистический метод.

Ферромагнитные материалы используются в современной технике широко и многообразно. Знание их магнитных свойств необходимо как студентам технических направлений подготовки, так и студентам – физикам. Целью настоящей работы является разработка учебной лабораторной установки для экспериментального исследования магнитных свойств ферромагнетиков.

Изучив научную, техническую и учебную литературу, мы выбрали для установки баллистический метод исследования [1,2,3], а при его реализации учитывали её учебное назначение и имеющиеся технические возможности.

В нашей установке на исследуемый ферромагнитный образец в форме кольца уложена виток к витку обмотка из медного изолированного провода. В результате имеем тороидальную катушку с ферромагнитным сердечником. Постоянный электрический ток, пропускаемый через эту обмотку, возбуждает магнитное поле. Как известно [3,4] в таком случае магнитное поле полностью сосредоточено внутри обмотки, т.е. в образце. Поверх первой намотана вторая (измерительная) обмотка. Обе обмотки изолированы друг от друга и от образца тонкой фторопластовой плёнкой. При изменении направления тока в первой обмотке на противоположное образец перемагничивается, т.е. магнитная индукция в нём изменяет направление на противоположенное исходному. Это сопровождается изменением полного магнитного потока через вторую обмотку. В нашей установке изменение этого магнитного потока измеряется милливеберметром (флюксметром) магнитоэлектрической системы, включенным в цепь второй обмотки. В милливеберметре реализован баллистический метод измерения магнитного потока [1-4].

Принципиальная электрическая схема установки представлена на рисунке 1.

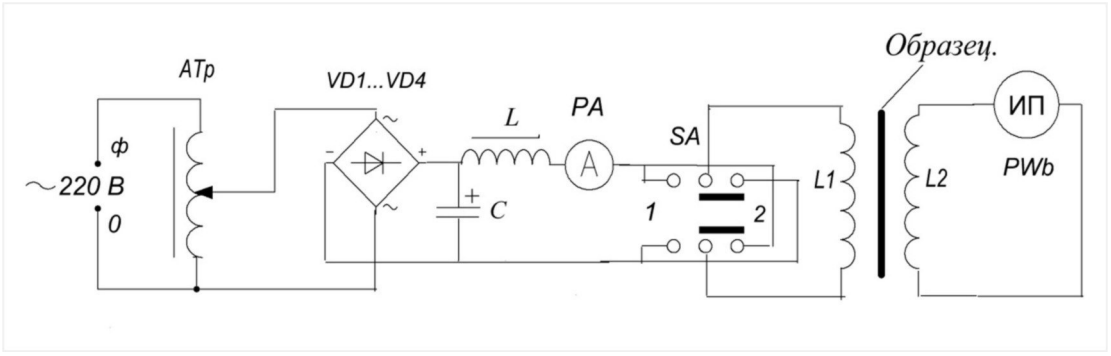


Рисунок 1 – Принципиальная электрическая схема установки

На этой схеме: АТр – автотрансформатор; $VD1..VD4$ – выпрямительный диодный мост; *PA* – амперметр; *L* и *C* - сглаживающий *LC* – фильтр; *SA* – двойной переключатель; *L1* – первая обмотка тороида; *L2* – вторая (измерительная) обмотка тороида; *PWb* - милливеберметр (флюксметр).

Наличие регулировочного автотрансформатора АТр в структуре установки позволяет изменять силу тока в обмотке *L1* и, соответственно, напряжённость магнитного поля в образце. Выпрямительный мост преобразует переменный ток в постоянный по направлению, а *LC* – фильтр сглаживает его пульсации. Сила этого тока измеряется амперметром *PA,* а его направление изменяется переключателем *SA*.

Магнитное поле в поперечном сечение образца неоднородно. Его напряжённость уменьшается по мере удаления от центра кольца. На осевой линии

тороидального образца напряжённость H этого поля согласно [4] рассчитывается по формуле (1) с учётом формулы (2):

$$H = In, \quad (1)$$

где I- сила тока в обмотке L_1, n - число витков этой обмотки на единице длины осевой линии тороидального образца. Если N_1- число витков обмотки $L1$, а R-радиус осевой линии образца, то

$$n = \frac{N_1}{2\pi R}. \quad (2)$$

Магнитную индукцию B в образце на осевой линии можно определить по изменению полного магнитного потока через измерительную обмотку при быстром перемагничивании образца. Если переключателем SA изменить направление тока в обмотке L_1 на противоположное, то изменение полного магнитного потока через измерительную обмотку L_2 будет равно [1–4]:

$$\Delta\psi_m = 2BSN_2,$$

где ψ_m - полный магнитный поток, N_2 – число витков измерительной обмотки, S – площадь витков обмотки L_2. Отсюда

$$B = \Delta\psi_m / 2SN_2 . \quad (3)$$

Пренебрегая незначительным магнитным потоком рассеяния [2], можно считать, что площадь S равна площади поперечного сечения кольца. Величина $\Delta\psi_m$в данной установке измеряется милливеберметром mWb.

Зависимость магнитной индукции B ферромагнетика от напряжённости H магнитного поля – не линейна и неоднозначна, а при циклическом перемагничивании носит гистерезисный характер [1-4]. Вид этой зависимости определяется исходным магнитным состоянием образца. Если в исходном состоянии образец размагничен ($B = 0$ при $H = 0$), то функция B=f(H) носит название начальной кривой намагничивания [1-4].

Описанная выше установка позволяет экспериментально исследовать начальную кривую намагничивания образца. Для этого образец предварительно размагничивают способом, описанным в [4], а затем намагничивают постоянным магнитным полем, напряжённость которого ступенчато возрастает. При каждом значении напряжённости образец перемагничивают указанном выше способом, измеряя $\Delta\psi_m$, и рассчитывают магнитную индукцию B по формуле (3). Важно, чтобы напряжённость поля на протяжении всего процесса измерений не убывала.

Данная установка была протестирована на образцах из марганец-цинкового феррита марки М2000НМ в виде четырёх колец типоразмера К38×24×7,сложенных вместе, и двух сложенных колец из прессованного порошкообразного альсифера марки МТЧ60-А типоразмера К44х28х7,2. У ферритовых образцов радиус осевой линии тора R=15,5 мм, общая площадь поперечного сечения колец S=196 мм^2, обмотка $L1$ имела число витков N_1=110, а об-

мотка *L2* - N_2 = 40. У альсиферовых образцов: *R*=18мм; $S = 99{,}4$ мм^2 ; N_1 =219; N_2 = 70.

Начальная кривая намагничивания *B*=f(*H*), полученная в результате тестирования установки, представлена в виде таблицы 1 и на рисунке 2 для одного из ферритовых образцов.

Таблица 1 – Начальная кривая намагничивания *B=f(H)* образца из феррита

*H,*А/м	0	12,4	15,8	21,4	27,1	28,2	31,5	37,2	42,9
*B,*мТл	0	44,6	57,4	76,5	95,7	108,4	124,4	143,5	159,4
48,5	45,1	54,1	56,4	62,0	67,7	71,1	74,5	80,1	94,7
191,3	172,2	204,1	216,8	229,6	236,0	242,4	242,4	255,1	280,6
102,6	95,9	106,0	109,4	113,9	134,2	146,6			
287,0	274,2	287,0	293,4	299,8	312,5	318,9			

Аналогичные результаты тестирования установки представлены в виде таблицы 2 и на рисунке 3 для одного из альсиферовых образцов.

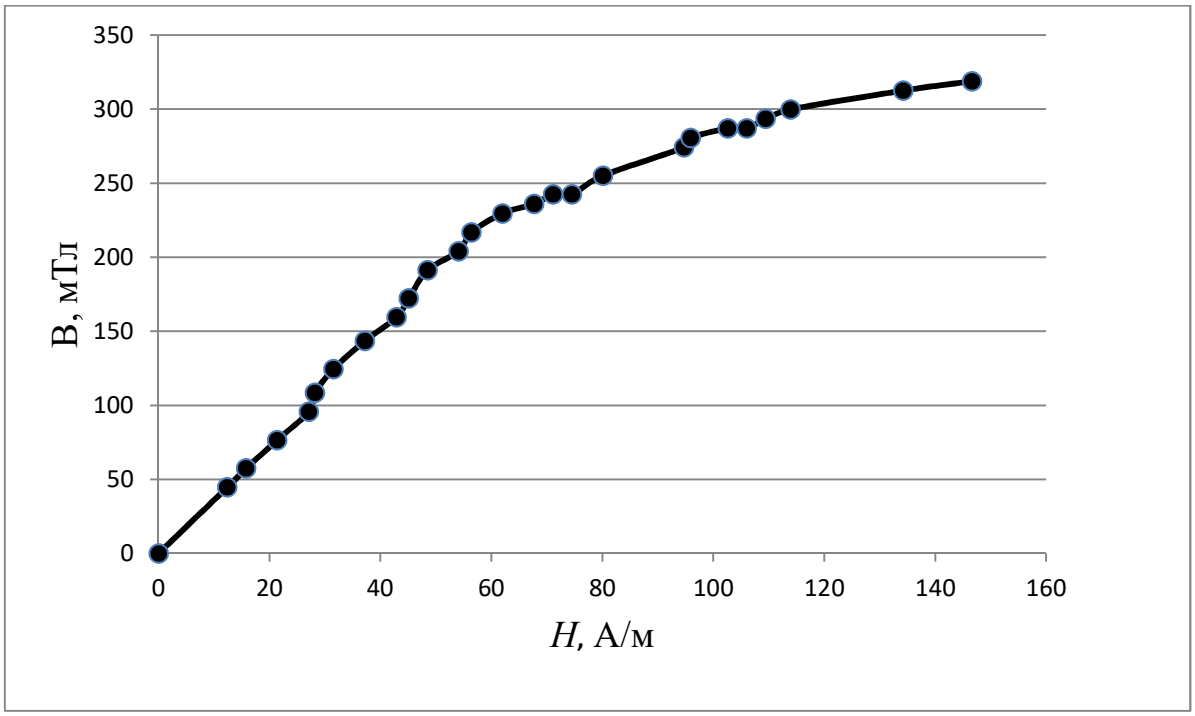


Рисунок 2 – Начальная кривая намагничивания *B=f(H)* образца из феррита

Таблица 2 – Начальная кривая намагничивания *B=f(H)* образца из альсифера

*H,*кА/м	0	0,43	0,58	0,79	0,97	1,14	1,51	1,76	2,03	2,61
*B,*мТл	0	64,6	79,0	114,9	136,4	165,1	208,2	251,3	280,0	351,8
3,00	3,48	3,97	4,84	5,52	5.90	6,39	6,78	7,16		
394,9	441,6	481,1	560,0	603,1	631,8	660,6	674,9	689,3		

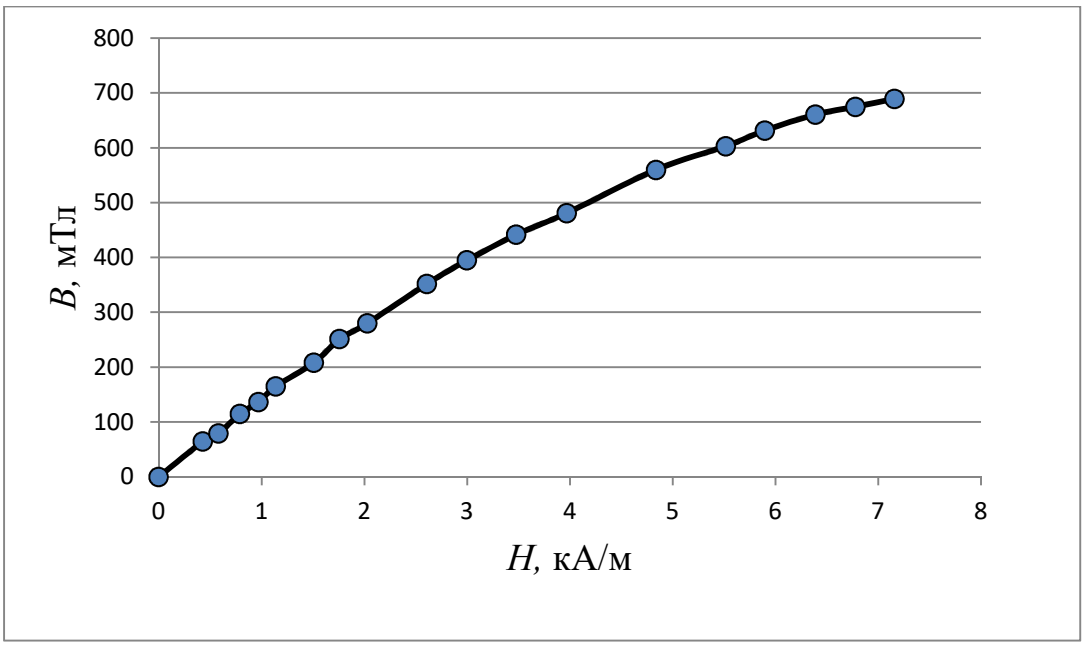


Рисунок 3 – Начальная кривая намагничивания *B=f(H)* образца из альсифера.

Начальные кривые намагничивания B=f(H) , представленные на рисунках 2 и 3, имеют вид, характерный для ферромагнетиков [1-7], что свидетельствует о работоспособности описанной установки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чечерников В.А. Магнитные измерения./ Под ред. Е.И. Кондорского, изд.2-е – М.: изд-во МГУ,1969. – с. 70-84.
2. Руководство к лабораторным работам по физике./ Под ред. Л.Л.Гольдина, изд.2-е. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1973. – 688 с.
3. Физический практикум. /Под редакцией профессора В.И. Ивероновой. - М.: Физматгиз ,1962 – 956 с.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество, т. 3: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 688 с.
5. Савельев И.В. Курс общей физики: Учеб. пособие для студентов втузов. – 4-е изд., перераб. - М.: Наука, Физматлит, 1998. Кн. 2: Электричество и магнетизм . – 336 с.
6. Физический энциклопедический словарь /Гл. ред. А.М. Прохоров. Ред. кол..Д.М. Алексеев, А.М. Бонч-Бруевич, А.С. Боровик-Романов и др. – М.: Советская Энциклопедия, 1983. – 928 с.
7. Политехнический словарь./Гл. ред. акад. А.Ю. Ишлинский. - 2-е изд. – М.: Советская Энциклопедия, 1980. – 656 с.

УДК 532. 5

ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ЭФФЕКТОВ В ПОДШИПНИКАХ ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ

Е.П. Корнаева, к.ф.-м.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *lenoks_box@mail.ru*
А.В. Корнаев, д.т.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *rusakor@inbox.ru*

Статья посвящена разработке математических и численных моделей течения жидкости в зазоре между несоосными цилиндрами в условиях переменной вязкости. Постановка задачи выполнена с учетом многозонного способа подачи жидкости переменной температуры. Рассмотрены различные варианты постановки граничных условий на твердых границах.

Ключевые слова: температурно-вязкостный клин, подшипник жидкостного трения, поле давлений, поле температур, конвективная теплопроводность, уравнение Рейнольдса, численная модель.

Известным приложением гидродинамической теории смазки является задача о возникновении несущей способности в тонком слое вязкой жидкости при относительном движении границ области. Например, такой эффект реализуется в подшипниках жидкостного трения, в которых рабочая среда (вязкая жидкость) движется между двумя несоосными цилиндрическими (или коническими) поверхностями, одна из которых вращается (ротор), а другая неподвижна (статор). В результате относительного движения границ, вязких свойств жидкости и образующемуся геометрическому клину в слое жидкости возникает подъемная сила [1-3]. Оказывается, что условие наличие геометрического клина не является обязательным и влияние геометрического клина можно заменить клином вязкости или плотности [4-6]. Если учитывать, что вязкость среды является переменной величиной как функция от температуры, то становится возможным управлять реакцией смазочного слоя не только геометрическими и кинематическими параметрами, а еще и термодинамическими. На основе проведенных ранее экспериментальных исследований [7, 8] в условиях двухзонной подачи смазочного материала с неоднородной температурой установлено, что такое регулирование полем вязкости позволяет обеспечить увеличение несущей способности смазочного слоя. Однако, в виду ограниченности возможностей физического эксперимента, является актуальным разработка численной модели, позволяющей исследовать данный эффект в широком диапазоне факторов.

Концептуальная модель. В работе исследуется течение вязкой жидкости между эксцентрично расположенными ротором радиуса r и статором радиуса R (рисунок 1а). Ротор вращается с постоянной скоростью ω. Рассматривается

установившееся ламинарное течение. Вдоль осевой координаты осуществляется подача несжимаемой жидкости регулируемой температуры под давлением p_1, а с противоположного торца жидкость вытекает под давлением p_0.

Известно, что движение вязкой жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса и неразрывности [3,9]. Однако, для тонких кольцевых каналов указанные уравнения можно существенно упростить и получить так называемую систему уравнений Рейнольдса [9]. Для определения поля температур используется уравнение конвективной теплопроводности [3].

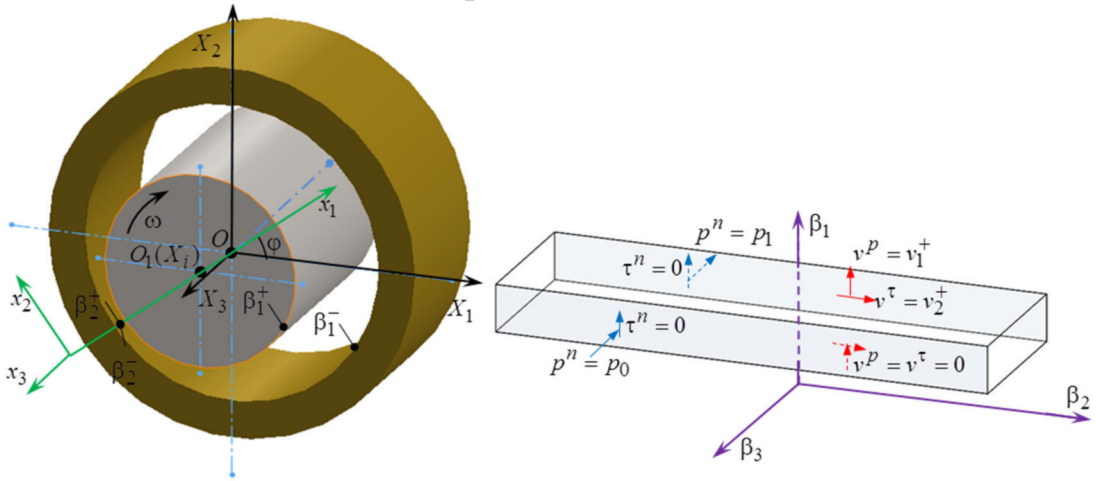


Рисунок 1 – Область течения: а – в декартовых; б – в бицилиндрических координатах

Учитывая, что область течения является переменной по пространственным координатам (рисунок 1а), уравнения, описывающие исследуемый процесс, были представлены в бицилиндрической системе координат. Такое преобразование позволит существенно упростить процесс дискретизации области, задание граничных условий, а также же расчет интегральных характеристик. Область течения в бицилиндрической системе координат β_i изображена на рисунке 1б.

Математическая модель. В данном случае используется так называемое обобщенное уравнение Рейнольдса, учитывающее переменную вязкость среды, подробный вывод которого в бицилиндрической системе координат представлен авторами в [11]:

$$\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left[\rho\frac{\partial p}{\partial\beta_2}\left(F_1-\frac{f_1^+}{f_2^+}F_2\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\beta_3}\left[\rho\frac{\partial p}{\partial\beta_3}\left(F_3-\frac{f_3^+}{f_4^+}F_4\right)\right]=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\rho\frac{v_2^+}{f_2^+H^+}F_2\right)-\rho v_1^+H^+, \qquad (1)$$

где $F_k(\beta_2,\beta_3)=\int_{\beta_1^-}^{\beta_1^+}H^2f_k d\beta_1$, $f_0(\beta_1,\beta_2)=\int_{\beta_1^-}^{\beta_1}H^2d\beta_1$, $f_1(\beta_i)=\int_{\beta_1^-}^{\beta_1}\frac{f_0}{\mu H^2}d\beta_1$, $f_2(\beta_i)=\int_{\beta_1^-}^{\beta_1}\frac{d\beta_1}{\mu H^2}$, $f_3(\beta_i)=\int_{\beta_1^-}^{\beta_1}\frac{f_0}{\mu}d\beta_1$, $f_4(\beta_i)=\int_{\beta_1^-}^{\beta_1}\frac{d\beta_1}{\mu}$, $f_k^+=f_k(\beta_1^+,\beta_2,\beta_3)$; $v_i^+=v_i\ (\beta_1^+,\beta_2)$ – компонента скорости на поверхности ротора; $H=H(\beta_1,\beta_2)=\frac{a}{ch(\beta_1)-cos(\beta_2)}$ - функция коэффициента Ламе [10]; $H^+=H(\beta_1^+,\beta_2)$ – значение на поверхности.

Уравнение конвективной теплопроводности [3], которое в условиях положений концептуальной модели было упрощено [12] и записано также в бицилиндрических координатах:

$$\frac{v_1}{H}\frac{\partial T}{\partial \beta_1}+\frac{v_2}{H}\frac{\partial T}{\partial \beta_2}+v_3\frac{\partial T}{\partial \beta_3}=\frac{a}{H^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \beta_1^2}+\frac{1}{H^2}\frac{\mu(T)}{\rho C_P}\left(\left(\frac{\partial v_2}{\partial \beta_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_3}{\partial \beta_1}\right)^2\right), \qquad (2)$$

где T – функция температуры; $\mu(T)$ - функция вязкости от температуры.

В качестве исследуемой жидкости используется вода и функция вязкости представляется в виде линейной $\mu(T)=b_1T+b_2$, т.к. исследуется относительно небольшой перепад температур.

Компоненты вектора скорости в уравнении (2) определяются по полю давлений из системы уравнений Рейнольдса и уравнения неразрывности [11]. Учитывая положения концептуальной модели и вид уравнений (1), (2), граничные условия для неизвестных функции приведены в таблице 1.

Температурные граничные заданы в трех вариантах. Как было описано в [13-15] предпочтительными являются варианты II-III, т.к. измерение температуры T_0 и T_1 на границах жидкость-внутренняя и жидкость-внешняя стенка является затруднительным.

Таблица 1 - Варианты граничных условий для уравнений (1) и (2)

Тип	Граница	Температура, T, ℃	Давление, p, Па	Скорость, $\mathbf{V}$, м/с
I	$\beta_1=\beta_1^{\pm}$	$T(\beta_1^-,\beta_2,\beta_3)=T_0,$ $T(\beta_1^+,\beta_2,\beta_3)=T_1$	-	$\boldsymbol{V}(\beta_1^-,\beta_2,\beta_3)=[\![0 \quad 0 \quad 0]\!],$ $\boldsymbol{V}(\beta_1^+,\beta_2,\beta_3)=[\![u_1 \quad u_2 \quad 0]\!]$
II		$\frac{\partial T}{\partial \beta_1}(\beta_1^-,\beta_2,\beta_3)=0,$ $\frac{\partial T}{\partial \beta_1}(\beta_1^+,\beta_2,\beta_3)=0$		
III		$-\lambda\frac{\partial T}{\partial \beta_1}(\beta_1^-,\beta_2,\beta_3)=$ $=\alpha(T_s-T_\infty),$ $-\lambda\frac{\partial T}{\partial \beta_1}(\beta_1^+,\beta_2,\beta_3)=$ $=\alpha(T_b-T_\infty)$		
I-III	$\beta_2=\beta_2^{\pm}$	$T(\beta_1,\beta_2^-,\beta_3)=T(\beta_1,\beta_2^+,\beta_3)$	$p(\beta_1,\beta_2^-,\beta_3)=$ $=p(\beta_1,\beta_2^+,\beta_3),$ $\frac{\partial p}{\partial \beta_2}(\beta_1,\beta_2^-,\beta_3)=$ $=\frac{\partial p}{\partial \beta_2}(\beta_1,\beta_2^+,\beta_3)$	-
I-III	$\beta_3=\beta_3^{\pm}$	$T(\beta_1,\beta_2,\beta_3^-)=$ $=\Delta T\cos(\beta_2+\varphi_0)+T_0$	$p(\beta_1,\beta_2,\beta_3^-)=p_0,$ $p(\beta_1,\beta_2,\beta_3^+)=p_1$	-

Граничные условия второго рода в виде нулевого теплового потока с вычислительной точки зрения означают, что у границ на двух соседних слоях жидкости, расстояние между которыми бесконечно мало температура одинако-

вая. Третий вариант граничных условий соответствует условию Ньютона-Рихмана, выражающему тепловой поток между жидкостью и твердой границей через температурный напор [16].

Неоднородную температуру подачи жидкости с одного торца предполагается описывать граничным условием в виде периодической функции $\Delta T cos(\beta_2 + \varphi_0) + T_0$. Таким образом, учитывается двухзонная подача жидкости разной температуры, параметр φ_0 отвечает за смещение зоны с максимальной температурой по тангенциальной координате.

Таким образом, уравнения (1), (2) с соответствующим вариантом граничных условий из таблицы 1 представляют математическую модель, позволяющую исследовать влияние неоднородной температуры при подаче жидкости, на распределенные и интегральные характеристики течения.

Численная модель. Дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных (1), (2) с соответствующими граничными условиями решаются численно методом конечных разностей. Область течения (рисунок 1б) покрывается сеткой размером $n_1 \times n_2 \times n_3$ с соответствующими узловыми точками с индексами i, j, k. Неизвестные функции давления $p(\beta_2, \beta_3)$ и температуры $T(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ заменяются соответствующими дискретными значениями $p^{j,k}$, $T^{i,j,k}$, частные производные заменяются их разностными аналогами. После такой замены и некоторых преобразований дискретный аналог уравнения (1) примет вид:

$$c_0^{j,k} p^{j,k} + c_1^{j,k} p^{j+1,k} + c_2^{j,k} p^{j-1,k} + c_3^{j,k} p^{j,k-1} + c_4^{j,k} p^{j,k+1} = f^{j,k}, \qquad (3)$$

где $c_1^{j,k} = \frac{a_2^{j,k}}{\Delta\beta_2{}^2 \Delta\widetilde{\beta}_2{}^2} + \frac{1}{2\Delta\beta_2{}^2 \Delta\widetilde{\beta}_2} \left(\frac{\partial a_2}{\Delta\widetilde{\beta}_2}\right)^{j,k}$, $c_2^{j,k} = \frac{a_2^{j,k}}{\Delta\beta_2{}^2 \Delta\widetilde{\beta}_2{}^2} - \frac{1}{2\Delta\beta_2{}^2 \Delta\widetilde{\beta}_2} \left(\frac{\partial a_2}{\Delta\widetilde{\beta}_2}\right)^{j,k}$, $c_3^{j,k} = \frac{a_1^{j,k}}{\Delta\beta_3{}^2 \Delta\widetilde{\beta}_3{}^2} - \frac{1}{2\Delta\beta_3{}^2 \Delta\widetilde{\beta}_3} \left(\frac{\partial a_1}{\Delta\widetilde{\beta}_3}\right)^{j,k}$, $c_4^{j,k} = \frac{a_1^{j,k}}{\Delta\beta_3{}^2 \Delta\widetilde{\beta}_3{}^2} + \frac{1}{2\Delta\beta_3{}^2 \Delta\widetilde{\beta}_3} \left(\frac{\partial a_1}{\Delta\widetilde{\beta}_3}\right)^{j,k}$, $c_0^{j,k} = -\sum_{m=1}^{4} c_m^{j,k}$, $f^{j,k} = -\left[\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{v_2^+}{f_2^+ H^+} F_2\right) + v_1^+ H\right]^{j,k}$, $a_1^{j,k} = \left(F_3 - \frac{f_3^+}{f_4^+} F_4\right)^{j,k}$, $a_2^{j,k} = \left(F_1 - \frac{f_1^+}{f_2^+} F_2\right)^{j,k}$.

Граничные условия для функции давления в дискретном виде:

$$p^{1,k} = p^{n_2,k}, \quad p^{j,1} = p_0, \quad p^{j,n_3} = p_1.$$

Уравнение (2) в разностной форме примет вид:

$$d_0^{i,j,k} T^{i,j,k} + d_1^{i,j,k} T^{i+1,j,k} + d_2^{i,j,k} T^{i-1,j,k} + d_3^{i,j,k} T^{i,j+1,k} + d_4^{i,j,k} T^{i,j,k+1} = g^{i,j,k}, \qquad (4)$$

где $d_1^{i,j,k} = \frac{1}{\Delta\beta_1 H^{i,j}} \left(v_1^{i,j,k} - \frac{a}{\Delta\beta_1 H^{i,j}}\right)$, $d_2^{i,j,k} = -\frac{a}{\left(\Delta\beta_1 H^{i,j}\right)^2}$, $d_3^{i,j,k} = \frac{v_2^{i,j,k}}{\Delta\beta_2 H^{i,j}}$, $d_4^{i,j,k} = \frac{v_3^{i,j,k}}{\Delta\beta_3}$, $d_0^{i,j,k} = -\sum_{m=1}^{4} d_m^{i,j,k} - \frac{b_1 H_{i,j,k}{}^2}{\rho C_p}$, $g_{i,j,k} = \frac{b_2 H_{i,j,k}{}^2}{\rho C_p}$.

В самом простом случае (I таблицы 1) соответствующие граничные условия для функции температуры примут вид:

$$\beta_1 = \beta_1^{\pm}: T^{1,j,k} = T_0, T^{n_1,j,k} = T_1,$$
$$\beta_2 = \beta_2^{\pm}: T^{i,n_2,k} = T^{i,1,k}, \quad (5)$$
$$\beta_3 = \beta_3^{\pm}: T^{i,j,1} = T_0\, cos(\beta_2 + \varphi_0) + \Delta T.$$

Во втором случае (II таблицы 1) тепловой поток на границе заменяется разностным аналогом, тогда граничные условия примут вид:

$$\beta_1 = \beta_1^{\pm}: T^{1,j,k} = T^{2,j,k}, T^{n_1,j,k} = T^{n_1-1,j,k},$$
$$\beta_2 = \beta_2^{\pm}: T^{i,n_2,k} = T^{i,1,k}, \quad (6)$$
$$\beta_3 = \beta_3^{\pm}: T^{i,j,1} = T_0\, cos(\beta_2^j + \varphi_0) + \Delta T.$$

Стоит отметить, что компоненты $c_0^{j,k}$ и $d_0^{i,j,k}$ матриц коэффициентов в СЛАУ (3)-(4) удовлетворяют условию Скарборою [17] о диагональном преобладании, что обеспечивает сходимость решения СЛАУ в случае применения итерационных методов.

В третьем случае (III таблицы 1) задается ненулевой тепловой поток на границах $\beta_1 = \beta_1^{\pm}$. Однако значения на границах жидкость-внутренний цилиндр $T_{1,j,k}$, и жидкость-внешний цилиндр $T_{n_1,j,k}$ неизвестны и должны быть включены в расчётную схему, решая дополнительные уравнения теплопроводности в твердых стенках [15]:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\lambda_{\mathrm{b}} \boldsymbol{\nabla} \mathrm{T_b}) = 0,$$
$$\rho_s C_{p_s} \frac{u_2}{H} \frac{\partial T_s}{\partial \beta_2} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\lambda_s \boldsymbol{\nabla} \mathrm{T}_s),$$

где $\boldsymbol{\nabla}$ – векторный дифференциальный оператор Гамильтона; $\lambda_{\mathrm{b}}, \lambda_{\mathrm{s}}, \rho_s, C_{p_s}$ – термодинамические свойства материалов соответствующих границ; $\mathrm{T_b}, \mathrm{T}_s$ – температуры соответствующих границ.

Или в скалярной форме:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1}\left(\lambda_{\mathrm{b}} \frac{\partial T_b}{\partial \beta_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left(\lambda_{\mathrm{b}} \frac{\partial T_b}{\partial \beta_2}\right) + H^2 \frac{\partial}{\partial \beta_3}\left(\lambda_{\mathrm{b}} \frac{\partial T_b}{\partial \beta_3}\right) = 0, \quad (7)$$

$$\rho_s C_{p_s} u_2 H \frac{\partial T_s}{\partial \beta_2} = \frac{\partial}{\partial \beta_1}\left(\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial \beta_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left(\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial \beta_2}\right) + H^2 \frac{\partial}{\partial \beta_3}\left(\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial \beta_3}\right). \quad (8)$$

Твердые стенки как расчетная область так же покрываются сеткой с шагом $\Delta\beta_i^b$ и $\Delta\beta_i^s$ размером $n_1^s \times n_2^s \times n_3^s$ и $n_1^b \times n_2^b \times n_3^b$ соответственно. Разностный аналог уравнений (7), (8) с учетом постоянных теплофизических свойств стенок будет иметь вид:

$$q_1 T_b^{i+1,j,k} + q_1 T_b^{i-1,j,k} + q_2 T_b^{i,j+1,k} + q_2 T_b^{i,j-1,k} + q_3^{i,j} T_b^{i,j,k+1} + q_3^{i,j} T_b^{i,j,k-1} = q_0 T_b^{i,j,k}, \quad (9)$$

где $q_1 = \frac{1}{(\Delta\beta_1^b)^2}$, $q_2 = \frac{1}{(\Delta\beta_2^b)^2}$, $q_3^{i,j} = \frac{H_{ij}}{(\Delta\beta_3^b)^2}$, $q_0 = -2\sum_{i=1}^{3} q_i$.

$$q_1 T_s^{i+1,j,k} + q_1 T_s^{i-1,j,k} + q_2^{i,j} T_s^{i,j+1,k} + q_3 T_s^{i,j-1,k} + q_4^{i,j} T_s^{i,j,k+1} + \quad (10)$$

$$q_4^{i,j}T_s^{i,j,k-1} = q_0T_s^{i,j,k},$$

где $q_1 = \frac{a_s}{(\Delta\beta_1^s)^2}, q_2^{i,j} = \frac{a_s}{(\Delta\beta_2^s)^2} - \frac{U_2H_{i,j}}{\Delta\beta_2^s}, \quad q_3 = \frac{a_s}{(\Delta\beta_2^s)^2}, \quad q_4^{i,j} = \frac{a_sH_{ij}}{(\Delta\beta_3^s)^2}, q_0 = -2(q_1 + q_2) - q_3 - q_4.$

Таким образом, для учета теплообмена со стенками канала решаются уравнения (3), (4), (9), (10) с граничными условиями:

$\beta_1 = \beta_1^{\pm}$:

$$-\lambda\frac{T^{1,j,k} - T^{2,j,k}}{\Delta\beta_1} = \alpha(T_s - T_\infty), -\lambda\frac{T^{n_1,j,k} - T^{n_1-1,j,k}}{\Delta\beta_1} = \alpha(T_b - T_\infty),$$

$$T^{1,j,k} = T_s^{N_1,j,k}, \lambda\frac{T^{1,j,k} - T^{2,j,k}}{\Delta\beta_1} = \lambda_s\frac{T_s^{N_1,j,k} - T_s^{N_1-1,j,k}}{\Delta\beta_1^s},$$

$$T^{1,j,k} = T_b^{N_1,j,k}, \lambda\frac{T^{n_1,j,k} - T^{n_1-1,j,k}}{\Delta\beta_1} = \lambda_b\frac{T_b^{1,j,k} - T_b^{2,j,k}}{\Delta\beta_1^b}, \qquad (11)$$

$\beta_2 = \beta_2^{\pm}$:

$$T^{i,n_2,k} = T^{i,1,k},$$

$\beta_3 = \beta_3^{\pm}$:

$$T^{i,j,1} = \Delta T\, cos(\beta_2^j + \varphi_0) + T_0.$$

На рисунке 2 представлена блок-схема алгоритма решения задачи для первых двух случаев. Процедура решения уравнений (3), (4) является итерационной. Функции давления и температуры представляются в виде сумм:

$$P^{s+1} = P^s + \delta P^{s+1}, T^{s+1} = T^s + \delta T^{s+1}.$$

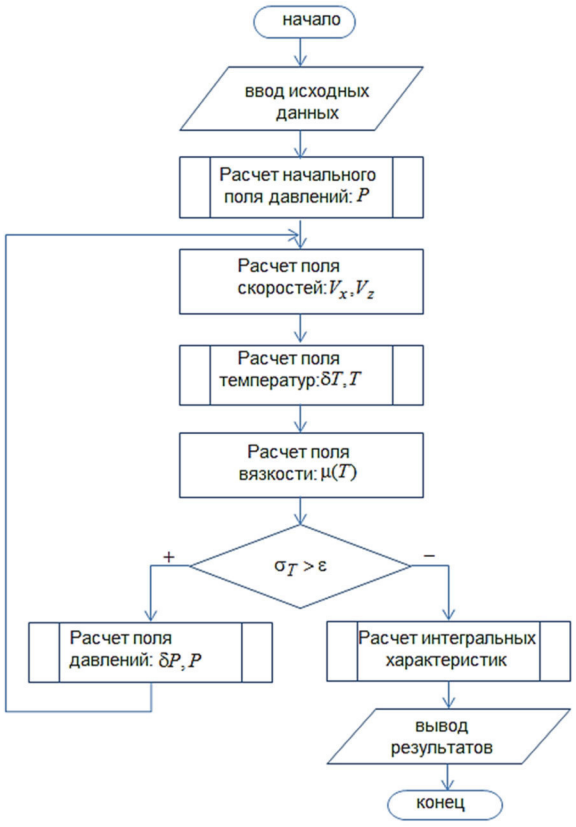


Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма расчета

По уравнению (3) определяется начальное поле давлений P^s при начальном распределении поля температур, далее определяется поле скоростей. По уравнению (4) определяются приращения δT^{s+1}, и пересчитывается поле температур. Если средняя ошибка:

$$\sigma_T = \sqrt{\sum_i \sum_j \sum_k \left(\delta T_{ijk}^{s+1}\right)^2 / N}$$

превышает заранее заданную величину, то по найденному полю температур определяется поле вязкости и по уравнению (3), рассчитывается приращение δP^{s+1} и новое поле давлений. Итерационная процедура продолжается, пока не достигнута заранее заданная точность ε.

Таким образом, в работе рассмотрены основные аспекты при разработке математических и численных моделей течения вязкой несжимаемой жидкости в тонких каналах применительно к подшипникам жидкостного трения. Представленные дифференциальные уравнения записаны в бицилиндрических координатах с учетом допущений, применимых к рассматриваемому процессу. Предложены способы задания граничных условий для учета влияния неоднородной температуры подаваемой в подшипник жидкости. Представлены численные модели для исследования возможности управления температурно-вязкостными характеристиками жидкости для создания дополнительной несущей способности смазочного слоя.

Благодарности

Работа выполнена в рамках проекта по Гранту Президента № МК-3394.2019.8 на тему «Совершенствование динамических качеств подшипников жидкостного трения высокоскоростных роторных машин в условиях управляемых реологических и тепловых эффектов»

ЛИТЕРАТУРА

1. Hori, Y. Hydrodynamic Lubrication / Y. Hori. – Tokyo: Yokendo Ltd, 2006. – 239 p.
2. Milne-Thomson LM Theoretical hydrodynamics. 4th ed. London: Macmilan and Co LTD. – 1960.
3. Wang QL, Chung Y–H at all. Encyclopedia of tribology. New York: Springer Science + Business Media. – 2013. – 4192 p.
4. Fogg A. (1946) Fluid film lubrication of parallel surface thrust bearings. Proc. Inst. Mech. Eng. – Vol. 155. – P. 49–67.
5. Cope W.E. The hydrodynamical theory of film lubrication // W.E. Cope. – 1949. – Vol. 197 (1049). – Pp. 201–217.
6. Young J. Thermal wedge effect in hydrodynamic lubrication // The Engineering Journal. – 1962. – Vol. 45. – Pp. 46–54.

7. Kornaev A.V., Kornaeva E.P., Savin L.A. Influence of Thermal Wedge Effect on Friction and Vibration in Fluid–film Bearings // 18th EDF/Pprime Workshop: “Challenges in Sliding Bearing Technologies for Clean and Low Carbon Energy Applications”. EDF Lab Paris–Saclay. – 2019. – P. 1–6.
8. Патент РФ № 2 733 996. Установка для исследования роторных систем с многозонной подачей смазочного материала // Корнаева Е. П., Родичев А. Ю., Фетисов А. С. Казаков Ю.Н. Заявка № 2019142067 от 06.12.2019, получено 09.10.2020. – Бюл. №28.
9. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 870 с.
10. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
11. Корнаева Е.П., Корнаев А.В., Савин Л.А. Моделирование неизотермического течения вязкой жидкости в конфузорных каналах в условиях многозонной подачи смазочного материала // Известия Юго–Западного государственного университета». – Курск: Изд–во ЮЗГУ. – 2018. – №5. – С. 117–126.
12. Корнаева Е.П., Корнаев А.В. Моделирование напорно–сдвиговых течений вязкой жидкости между несоосными цилиндрами с учетом теплопроводности и конвекции // Информационные системы и технологии. – 2017. – №4 (102). – С. 5 – 14.
13. Браун Э.Д., Буяновский И.А., Воронин Н.А. и др. Современная трибология: Итоги и перспективы. – М.: Издательство ЛКИ. – 2008. – 480с.
14. Прокопьев В.Н., Рождественский Ю.В., Караваев В.Г. и др. Динамика и смазка трибосопряжений поршневых и роторных машин: монография. В 2–х частях. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. – 2010. – 136с.
15. Laukiavich C.A., Braun M.J., Chandy A.J. An investigation into the thermal effects on a hydrodynamic bearing’s clearance // Tribology Transactions. – 2015. – Vol. 58 (6). – P. 1–23.
16. Михеев, М.А. Основы теплопередачи / М.А. Михеев, И.М. Михеева. – 2–ое изд. стереотип. – М.: «Энергия». – 1977. – 341с.
17. Patankar, S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. – New York: Hemisphere Publishing Corporation. – 1980. – 148 p.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Н.И. Маркин, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева»
e-mail: *nim2009@inbox.ru*
М.А. Музалевская, к.э.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева»
e-mail: *inf_muz@mail.ru*
А.А. Катунин, к.т.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева»
e-mail: *katunin57@gmail.com*
Н.К. Шарифов
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева»
e-mail: *sharifovn1991@mail.ru*
О.Н. Марганова, к.э.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева»
e-mail: *marganova@mail.ru*

В данной статье рассматривается процесс проектирования образовательной деятельности в рамках прохождения программы от Московского городского педагогического университета на примере проекта, разработанного на базе Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева

Ключевые слова: проектирование, образовательная деятельность, дополнительное образование, эффективная среда, наставник, высокие технологии, система лагерных образовательных смен, цифровая экономика, междисциплинарный подход, метапредметные результаты

Общая концепция проектирования деятельности предполагает наличие сферы деятельности, ресурсов, результатов деятельности и «разрывов» в ней. Задача любого проекта: устранить «разрывы» в деятельности [1].

В данном случае мы рассматриваем образовательную деятельность, цель которой - создание эффективной среды дополнительного образования детей для массового вовлечения молодежи в активную образовательную, проектную и исследовательскую деятельность в регионе.

В данной статье рассматривается один из способов реализации поставленной цели на примере проекта «Система лагерных образовательных смен «Территория успеха» в рамках проекта «Проведение тематических смен в сезонных лагерях для школьников по передовым направлениям дискретной математики, информатики, цифровых технологий» в рамках федерального проекта «Кадры для цифровой экономики» государственной программы Российской Федерации «Развитие образования» [2].

Каковы же ресурсы этого вида деятельности? Кадровое обеспечение проекта осуществляется профессорско-преподавательским составом университета, участвующим в образовательных проектах Ресурсного модельного центра дополнительного образования детей, Юношеских специализированных научно-исследовательских школ, Школ будущих профессий и участников программ вожатых. Все привлекаемые специалисты имеют необходимое образование, прошли повышение квалификации и специальные курсы.

Опыт работы команды проекта представлен сотрудничеством с Образовательным центром «Сириус» фонда «Талант и успех», МДЦ «Артек» и др., а также партнерскими площадками в рамках деятельности Ресурсного модельного центра дополнительного образования детей ОГУ имени И.С. Тургенева.

Задачи проекта следующие: создать систему школ-смен для совместной образовательной (проектной и исследовательской) деятельности молодежи разного возраста, в том числе для иностранных граждан; отработать методики формирования межвозрастных и международных проектных и исследовательских команд; интегрировать данный проект в проект региональной образовательной среды с использованием инструментария цифровой экономики.

Устранение «разрывов» в образовательной деятельности возможно при поддержке интеллектуальных партнеров и предприятий-партнеров из реального сектора экономики и других сфер для реализации программы тематической смены. В рассматриваемом проекте они представлены Департаментом информационных технологий Орловской области, Образовательным фондом «Талант и успех» - г. Сочи, НИУ «МИЭТ» - г. Зеленоград, ГК ОАО «Геоскан» - г. Санкт-Петербург, АО «ПРОТОН» - г. Орел, ЗАО «Инвентос» - г. Орел, Фондом поддержки предпринимательства Орловской области и рядом других.

В проекте уделяется большое внимание формированию общекультурных компетенций участников: воспитание личности ученого-исследователя, способного творчески решать задачи с использованием междисциплинарного подхода; обучение анализу фактов и способности делать обоснованные и достоверные выводы; способности работать в коллективе со специалистами разного профиля; приобретению навыков публичной защиты результатов; письменного изложения результатов работы; защиты интеллектуальной собственности, в том числе и в цифровом пространстве.

Формирование общих специализированных компетенций является не менее важным: осуществление взаимосвязи исследовательских компонентов деятельности и их прикладного использования при планировании и проведении всех этапов выполнения проекта, осуществление понимания пути от фундаментальных исследований до конечного продукта, понимание и способность оптимизации этапов выполнения проекта и при переходе между ними, приобретение навыков руководства проектами, понимание и способность выявлять запросы со стороны рынка к содержанию проекта и его последующая модернизация, понимание конкуренции, систематики работы в условиях конкуренции и возможности построение дальнейшего образовательного и бизнес маршрута, понимание применения и разработка цифровых инструментов в рамках задач промышленности при формировании цифровой среды.

В результате освоения образовательной программы школьники и студенты получат метапредметные результаты проекта: опыт научно-технического проектирования; научатся работать в команде над научно-техническими задачами; получат опыт практического применения теоретических и практических знаний и навыков, а также рассмотрения актуальных вопросов, для которых не разработаны способы решения; опыт анализа научно-технических проблем и постановки задач; реализа-

ции полного цикла научно-технического проекта в профессиональной области; анализа образцов работы по преодолению выявленной проблемы; получат возможность научиться удерживать цель проекта и научиться способу ее достижения для выбранной профессиональной области в условиях различных ограничений (оборудование, время, материалы и др.); получат возможность научиться реализации проектов и решению поставленных задачи с применением цифрового инструментария.

Образовательный результат проекта заключается в увеличении количества детей, интересующихся тематическими направлениями смен и участвующих в дальнейшем во всероссийских мероприятиях; в привлечении школьников к работе в проектных командах; дальнейшая включенность школьников, прошедших смены, в работу региональной образовательной среды с продолжением их работы по направлениям смен; привлечение школьников к освоению инструментария цифровизации и его применения на всех этапах обучения; в рамках смен с целью проведения оценки результатов работы программ выполняется публичная защита работ и ярмарка результатов исследований и проектов.

Примером объекта междисциплинарного изучения на проекте может быть БПЛА (беспилотный летательный аппарат). При его рассмотрении изучаются школьные предметы, такие как: физика, химия, информатика, экономика, которые пересекаются в различных направлениях с будущими дисциплинами в университете: электротехника, электроника, теория летательных аппаратов, проектирование и конструирование, программирование, дизайн.

Приведем пример кейс-проекта по решению задачи «Лазертаг». Лазертаг не входит в список конкурсных заданий, а является показательным выступлением для хакатона. В качестве развлечения гостям мероприятия предлагается «Воздушный бой» - возможность побывать в роли пилота БПЛА в схватке с не менее активным противником. Задача одной стороны - избежать попадания лазерного луча, задача другой стороны - успешно поразить летающую цель. При попадании включается яркая световая индикация [3].

К итогам рассмотренного проекта можно отнести создание эффективной среды дополнительного образования детей для массового вовлечения молодежи в активную образовательную, проектную и исследовательскую деятельность в регионе, а также реализацию программы из трех основных направлений: дискретная математика, информатика, цифровые технологии в привязке к «Большим вызовам» экономики страны и дорожной карте НТИ.

Надеемся на дальнейшее сотрудничество с Московским городским педагогическим университетом в вопросах технологии подготовки наставников в области высоких технологий и приглашаем всех желающих для дальнейшего развитие проекта на базе Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева на следующей проектной смене.

ЛИТЕРАТУРА

1.https://www.mgpu.ru/ - Московский городской педагогический университет
2.http://oreluniver.ru/ - Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева
3.https://vk.com/step_of_success_ogu - система лагерных образовательных смен «Территория успеха»

FUZZY-УПРАВЛЕНИЕ ГИБРИДНЫМ РЕКОНФИГУРИРУЕМЫМ ТРОСОВЫМ РОБОТОМ

Е.А. Марчук
Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники
Университет Иннополис
e-mail: *marocci@bk.ru*
А.В. Малолетов
Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники
Университет Иннополис
e-mail: *claymor.vlg@gmail.com*

В статье описываются инженерные приложения теории нечетких множеств, используемые в задачах робототехники. Теория нечетких множеств, как область математики, является эффективным инструментом в отношении инженерных задач, связанных с управлением сложными системами и решением задач оптимизации. В качестве примера приводится разработка программно-алгоритмического обеспечения fuzzy-управления движением платформы гибридного реконфигурируемого тросового робота Университета Иннополис, предназначенного для окраски крупногабаритных объектов.

Ключевые слова: робот, тросовый, гибридный, реконфигурируемый, управление, нечеткая логика.

1. Введение

Несомненно, научная и конструкторская деятельность предполагают совершенное владение исследователя и инженера математическими методами, используемыми в качестве основного рабочего инструмента. Одним из таких инструментов математического аппарата инженера является теория множеств, а точнее ее прикладные аспекты. Далее в статье рассматривается практическое применение теории нечетких множеств в инженерной деятельности и связанные с ней методы нечеткой оптимизации и нечеткого управления. Нечеткая логика в управлении техническими объектами и системами, как и нечеткая оптимизация, являются эффективными подходами к решению задач, связанных с реальными процессами, и потому зачастую сопряженных со сложностью и неопределенностью в описании систем. Подходящим для использования fuzzy-управления является случай проектирования системы гибридного тросового робота, предназначенного для выполнения покрасочных работ, описание которого приводится в тексте статьи. Источниками, дающими основные примеры прикладного использования нечетких множеств и нечеткой логики в инженерном деле, могут стать книги авторов Terano, Asai, Sugeno [1] и Ross [2]. Заинтересованный читатель может найти более глубокое и подробное изложение теории нечетких множеств в работах Zadeh [3], Pegat [4] и Wang [5].

2. Нечеткие множества в задачах оптимизации робототехники

Цели оптимизации робототехники могут быть поставлены в соответствии с различными критериями: энергетической эффективности, движения по кратчайшему пути, движения с оптимальной скоростью и др. Как правило, такие за-

дачи решаются известными методами математического программирования с использованием различных алгоритмов [6-8]. Некоторые прикладные задачи могут быть успешно решены перечисленными выше методами при условии их нечеткой формализации. Так, задачи выпуклой оптимизации [9] функции (формула 1):

$$f_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_i(x) + \beta f_i(y) \quad (1)$$

где $x, y \in \mathbf{R}^n$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ а также $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$
в нечеткой формализации приобретают вид (формула 2):

$$\tilde{f}(\tilde{a}; \lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \tilde{f}(\tilde{a}; x) + (1-\lambda)\tilde{f}(y) \quad (2)$$

minimize $\tilde{f}(\tilde{a}, x)$
subject to $g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, p$
$h_i(x) = 0, i = 1, \dots, q$
$x \in \mathbf{R}^n$
при соблюдении условий $x, y \in \mathbf{R}^n$; $x \neq y$; $\tilde{a} \in \mathbf{F}(\mathbf{R}^m)$; $\lambda \in [0, 1]$.

В числе основных трудов, описывающих принципы постановки и решения задач оптимизации с использованием теории нечетких множеств, приведем Bellman, Zadeh и др. [10, 11]. Из работ отечественных исследователей, посвященных нечеткой формализации различных методов оптимизации, назовем работы Мочалова, и др. [12]. Примеры оптимизации робототехники с использованием теории нечетких множеств приводятся в работах, посвященных различным задачам: повышение энергетической эффективности шагающего робота [13]; управление торможением автономного транспортного средства [14]; и др.

3. Нечеткая логика в задачах управления робототехникой

Начиная с 1970-х гг. появляются нечеткие системы управления сложными техническими объектами и процессами. Существует достаточно большое количество нечетких моделей, из которых наиболее распространены системы Мамдани и Такаги – Сугено – Кана. Первые модели нечетких регуляторов проектировались на основе экспертного знания об объекте управления, в дальнейшем были разработаны способы проектирования на основе модели объекта управления. Нечеткие и нейронечеткие регуляторы реализованы для различных типов управляющих систем: ПИД-управления, адаптивного управления, робастного управления и др. [4, 15] Несмотря на то, что к настоящему времени теория нечетких систем хорошо проработана, разработаны методы изучения устойчивости нечетких систем, и обучаемые нейронечеткие сети применяются все шире, все же рекомендуется использовать нечеткое представление в задачах, когда создание строгой математической модели либо невозможно, либо она чрезмерно сложна. Допускается использование нечеткого управления в относительно простых системах, если такое решение обосновывается преимуществами в сравнении с другими принципами управления. Из известных образцов робототехники конца XX – начала XXI вв., использующих принципы нечеткого

управления, могут быть упомянуты подводный робот «Krab II» [4], шагающий робот «Ортоног» [16], тросовый робот Университета Иннополис и др.

4. Fuzzy-управление движением платформы гибридного тросового робота Университета Иннополис

В процессе подготовки к проектированию системы fuzzy-управления движением мобильной платформы гибридного тросового робота в связи с немногочисленностью специализированных литературных источников авторами были изучены работы, посвященные управлению лебедками башенных и мостовых кранов со сходными конструктивными особенностями [17, 18]. Тросовый робот может быть рассмотрен как несколько синхронизированных подъемных кранов [19]. Современные системы управления подъемными кранами включают в себя функцию контроля раскачки поднятого на тросах груза и функцию упреждения ударных нагрузок на тросы в начале подъема груза [20]. Особенно актуальной становится задача уменьшения раскачки подвижной платформы для неполноприводных тросовых роботов. Поскольку в процессе работы интенсивные перемещения нагруженной подвижной платформы робота Университета Иннополис осуществляются в основном в горизонтальной плоскости, регулятор должен учитывать отклонение α и β платформы от вертикали, проходящей через центр масс, в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Также на вход регулятора подаются координаты радиус-вектора r, соединяющего начало координат неподвижной системы отсчета и начало координат подвижной системы, связанной с центром масс платформы и их производные по времени, масса подвижной платформы m с учетом массы перемещаемого груза. Учитывая выраженную нелинейность системы гибридного тросового робота, при разработке MIMO регулятора принято решение использовать обучаемую нечеткую модель Такаги – Сугено – Кана (рисунок 1).

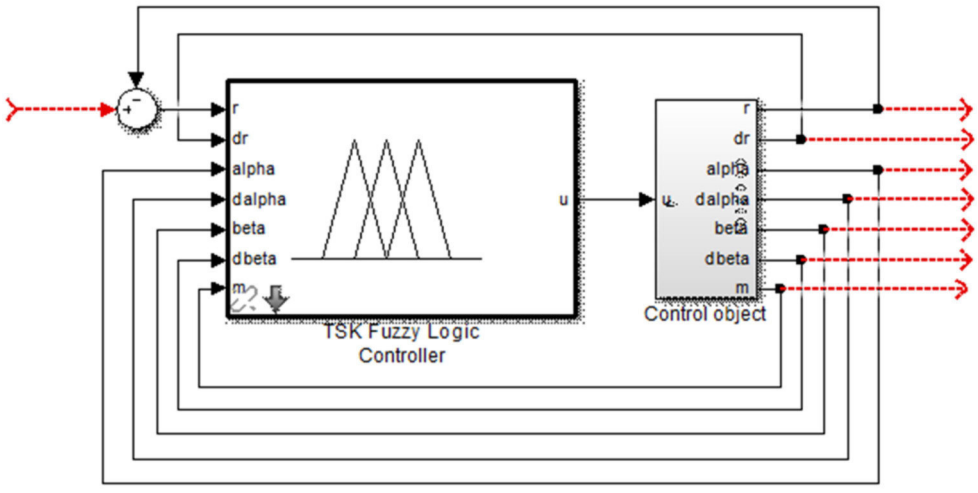


Рисунок 1 – Fuzzy-регулятор управления движением платформы гибридного тросового робота Университета Иннополис

Вектор u – управляющее воздействие, k – коэффициенты регулятора, j – количество правил нечеткой базы знаний (уравнение 3):

$$u = \sum_{i=1}^{j} K_i^T * X = \sum_{i=1}^{j} \begin{bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ k_{i3} \\ k_{i4} \\ k_{i5} \\ k_{i6} \\ k_{i7} \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \\ \beta \\ \dot{\beta} \\ m \end{bmatrix} \quad (3)$$

Процесс обучения и начальной настройки fuzzy-регулятора Такаги – Сугено – Кана осуществлен средствами ANFIS программного пакета Matlab [21].

Выводы

Математический аппарат нечетких множеств является эффективным инструментом решения инженерных задач. Типичным примером обоснованного применения аппарата нечетких множеств являются задачи управления и в сфере робототехники. С использованием принципов нечеткой логики разработана система автоматического управления движением мобильной платформы гибридного реконфигурируемого тросового робота Университета Иннополис. Fuzzy-управление гибридным реконфигурируемым тросовым роботом является решением, обеспечивающим высокое качество выполняемых покрасочных робот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тэрано Т., Асаи К., Сугэно М. Прикладные нечеткие системы. – М.: Мир. – 1993. – 368 с.
2. Ross T.J. Fuzzy Logic with Engineering Applications. – Wiley. – 2016. – 580 p.
3. Zadeh L.A. Fuzzy Sets // Information and Control. – 1965. – 10. – pp. 338 – 353.
4. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. – М.: БИНОМ. – 2013. – 798 с.
5. Wang L.-X. A course in fuzzy system and control. – Prentice Hall. – 1997. – 424 p.
6. Luenberger D.G. Linear and nonlinear programming. – Addison – Wesley. – 2008. – 546 p.
7. Bertsekas D.P. Nonlinear Programming. – Athena Scientific. – 2016. – 880 p.
8. Bellman R.E., Dreyfus S.E. Applied Dynamic Programming. – The RAND Corporation. – 1962.
9. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. – Cambridge University Press. – 2004. – 716 p.
10. Bellman R.E, Zadeh L.A. Decision-making in a fuzzy environment. – National Aeronautics and Space Administration. – Washington D.C. – May, 1970.
11. Fuller R. Fuzzy reasoning and fuzzy optimization. – Abo. – 1998. – 267 p.

12. Деменков Н.П., Мочалов И.А. Динамика нечеткой системы автоматической оптимизации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2016. – 1. – с. 59 – 74.
13. Briskin E.S., Tarasova T.A., Zhoga V.V., Kalinin Ya.V., Fedin A.P., Marchuk E.A. Walking machines movement optimization with fuzzy nonlinear programming methods // IEEE Xplore. –2020. – pp. 62 – 65.
14. Fedin A.P., Kalinin Ya.V., Marchuk E.A. Antilock braking system fuzzy controller optimization with a genetic algorithm in a form of cellular automaton // 2020 4th Scientific School on Dynamics of Complex Networks and their Application in Intellectual Robotics (DCNAIR). – 2020. – pp. 78 – 81.
15. Reznik L. Fuzzy Controllers. – Newnes. – Australia. – 1997. – 285 p.
16. Брискин Е.С., Чернышев В.В., Шаронов Н.Г., Серов В.А., Мироненко К.Б., Устинов С.А. Отработка нечеткого управления шагающим роботом «Ортоног» в полевых условиях // Исследования Наукограда. – 2013. – 2. – с. 43 – 48.
17. Aksjonov A., Vodovozov V., Petlenkov E. Three-Dimensional Crane Modelling and Control Using Euler-Lagrange State-Space Approach and Anti-Sway Fuzzy Logic // Electrical Control and Communication Engineering. – 2015. – 9. – pp. 5 – 13.
18. Lawrence J.W. Crane Oscillation Control. – PhD Thesis. – Georgia Institute of Technology. – August 2006.
19. Pott A. Cable-Driven Parallel Robots: Theory and Application. – Springer. – 2018.
20. Industrial Crane Modernization: The Smart Way to Extend Overhead Crane Service Life. – Conecranes USA. – 2016.
21. Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами Matlab. – М.: Горячая линия. – 2007. – 288 с.

УДК 621.9.047+532.525

ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО КОПИРОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ЭЛЕКТРОДОМ-ИНСТРУМЕНТОМ

Н.М. Миназетдинов, к.ф.-м.н., доц.
Российский новый университет
e-mail: *nminazetdinov@yandex.ru*

На основе гидродинамической аналогии двумерного потенциального электрического поля рассмотрена математическая модель и решение двумерной задачи электрохимического копирования при обработке металлов периодическим электродом-инструментом.

Ключевые слова: электрохимическое копирование, анод, катод-инструмент, идеальный процесс.

Для формирования регулярных рельефов на рабочих поверхностях технологической оснастки (пресс-форм, штампов и т. п.), используемой при изготовлении пластмассовых изделий можно применять электрохимическое копирование, являющееся разновидностью электрохимической обработки металлов [1]. Для формирования регулярных рельефов на поверхности технологической оснастки (аноде) можно использовать электрод-инструмент (катод) периодической структуры.

На рисунке 1 изображена геометрия катода и предполагаемая форма установившейся [1] анодной границы.

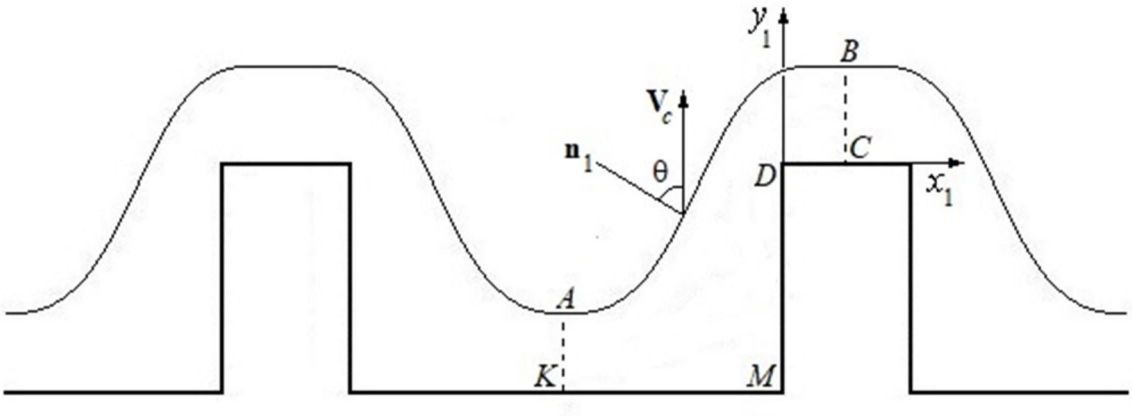


Рисунок 1 — Геометрия межэлектродного промежутка.

В силу периодичности и симметрии катода-инструмента ограничимся рассмотрением межэлектродного промежутка, заключенного между линиями симметрии *AK* и *BC*. В указанной области границе катода соответствует полигон *KMDC*, а искомому участку обработанной поверхности линия *AB*. Начало системы декартовых координат (x_1, y_1) выберем в точке *D*.

Угол между вектором $\boldsymbol{n}_1$ нормали к анодной границе в её произвольной точке и направлением поступательного перемещения катода в направлении к аноду со скоростью $\boldsymbol{V}_c$ равен θ (см. рисунок 1). Длины отрезков *CD*, *DM*, *MK* равны l_1, l_2 и l_3 соответственно.

В математической модели рассматриваемой задачи согласно предпосылкам, принятым в работах [2, 3], вводится комплексный потенциал $W_1(z_1) =$

$v(x_1, y_1) + iu(x_1, y_1)$, $z_1 = x_1 + iy_1$ электрического поля. В процессе решения задачи требуется определить координаты точек линии *AB* таким образом, чтобы на границах области функция $W_1(z_1)$ удовлетворяла следующим граничным условиям:

1) потенциал электрического поля $u(x_1, y_1)$ на границах анода и катода является постоянной величиной [2]. Введем следующие обозначения

$$u_{AB} = u_a,\ u_{KMDC} = u_c; \tag{1}$$

2) оси симметрии *AK*, *BC* ортогональны потенциальным линиям поля и на указанных линиях силовая функция $v(x_1, y_1)$ постоянная [4]. Можно считать, что на линии *AK* функция $v(x_1, y_1)$ равна нулю, а на линии *BC* принимает значение v_1, которое определяется в процессе решения задачи

$$v_{AK} = 0,\ v_{BC} = v_1; \tag{2}$$

3) на границе анода выполняется условие стационарности обработки [3]

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_1}\right)_{AB} = \frac{1}{\kappa a_0}\left(-a_1 + \frac{\rho V_c}{\varepsilon}\cos\theta\right); \tag{3}$$

Постоянные a_0, a_1 характеризуют влияние свойств обрабатываемого металла и электролита, протекающего в зазоре анодом и катодом на производительность процесса [3]; ρ – плотность материала анода; κ – удельная электропроводность среды; ε – электрохимический эквивалент металла.

Если провести замену переменных [4]

$$\varphi = v/(u_c - u_c),\ \psi = (u - u_c)/(u_a - u_c),\ z = z_1/H = x + iy, \tag{4}$$

где $H = a_0\kappa(u_a - u_c)/j_0$ - характерная длина, $j_0 = \rho V_c/\varepsilon$ - характерная плотность тока, то для функции $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ гармонически сопряженные функции [5], выполняются условия

$$\psi_{AB} = 1,\ \psi_{KDMC} = 0. \tag{5}$$

$$\left|\frac{dW}{dz}\right|_{AB} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{AB} = b + \cos\theta,\ b = -\frac{a_1}{j_0} \tag{6}$$

$$\varphi_{AK} = 0,\ \varphi_{BC} = v_1/(u_c - u_c) = \varphi_1. \tag{7}$$

$$\varphi_1 = \int_A^B \frac{\partial\psi}{\partial n}\,ds = \frac{H}{\kappa(u_a - u_c)} I_{AB},$$

I_{AB} - величина электрического тока, протекающего через границу *AB* [6].

В случае гидродинамической интерпретации задачи, в указанной области рассматривается фиктивное течение идеальной несжимаемой жидкости от источников, непрерывно распределенных вдоль линии *AK* к стокам, расположенным на линии *BC*. Течение ограничено твердой границей *KMDC* и свободной поверхностью *AB*. Аналогом напряженности электрического поля является скорость **V** фиктивного течения идеальной несжимаемой жидкости [4, 5] и условие (5) определяет годограф скорости на границе *AB*

$$V = b + \cos\theta,\ V = |\mathbf{V}|, \tag{8}$$

θ – угол наклона вектора **V** в какой-нибудь точке течения с осью абсцисс.

Функции, определяющие решение задачи, выражаются через параметрическое переменное $t = \xi + i\delta$, изменяющееся в полукруге единичного радиуса G_t ($|t| < 1,\ \delta > 0$) (рисунок 2а).

Согласно условиям (5), (7) на границах области G_t для функции $W(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ выполняются условия

$$\psi(t) = 1,\ t = \exp(i\sigma),\ \sigma \in [0,\pi];\ \ \psi(t) = 0,\ t = \xi,\ \xi \in [-k, c];$$
$$\varphi(\xi) = 0,\ \xi \in [-1, -k];\ \ \varphi(\xi) = \varphi_1,\ \xi \in [c, 1].$$

На рисунке 2b изображена область изменения переменной W.

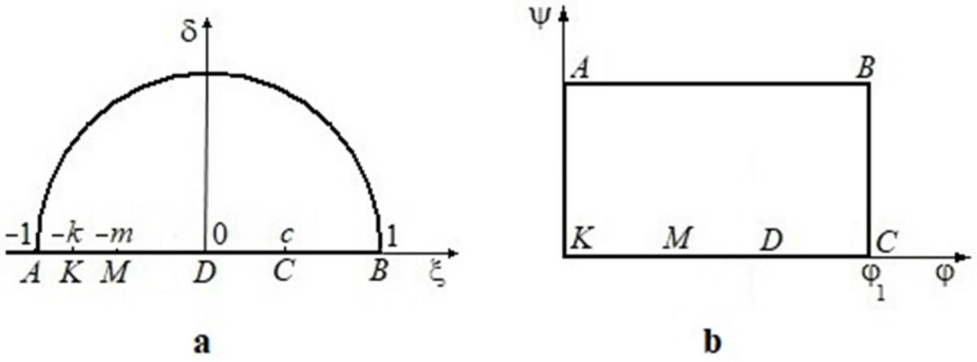


Рисунок 2 — Вспомогательные области: a — плоскость параметрической переменной t ; b — область изменения переменной W

Используя конформные отображения [5], найдём

$$\frac{dW}{dt} = \frac{M}{\sqrt{(t-c)(1-tc)(t+k)(1+tk)}}. \quad (9)$$

Интегрируя выражение (9) на отрезках $[-1, -k]$ и $[-k, c]$ найдем величины M и φ_1

$$M = i/I_0,\ I_0 = \int_k^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+c)(1+xc)(x-k)(1-xk)}}.$$
$$\varphi_1 = I_1/I_0,\ \ I_1 = \int_{-k}^{c} \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(1-xc)(x+k)(1+xk)}}.$$

Введём в рассмотрение функцию Жуковского [7]

$$\chi(t) = ln\frac{V_0 dz}{dW} = r + i\theta,\ r = ln\frac{V_0}{V},\ V_0 = b + 1. \quad (10)$$

и представим её в виде [6]

$$\chi(t) = \chi_0(t) + \omega(t) \quad (11)$$

где $\chi_0(t) = r_0 + i\theta_0$ - функция Жуковского для вспомогательного течения при условии, что на границе AB модуль скорости всюду равен V_0; $\omega(t)$ - функция, регулярная в круге единичного радиуса [5].

Функции $\chi(t)$ и $\chi_0(t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\mathrm{Im}\,\chi(\xi) = \mathrm{Im}\,\chi_0(\xi) = 0 \ \text{ при } \xi \in [-1, -m) \cup (0,1], \quad (12)$$
$$\mathrm{Im}\,\chi(\xi) = \mathrm{Im}\,\chi_0(\xi) = \pi/2 \ \text{ при } \xi \in (-m, 0), \quad (13)$$
$$V_0 e^{-ir(t)} = b + \cos\theta(t),\ r_0(t) = 0 \text{ при } t = e^{i\sigma},\ \sigma \in [0,\pi], \quad (14)$$
$$r(1) = 0. \quad (15)$$

Функцию $\chi_0(t)$ построим по известным логарифмическим особенностям в точках $M(t = -m)$ и $D(t = 0)$ [8]

$$\chi_0(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{t(1+tm)}{t+m}. \quad (16)$$

Функция $\omega(t)$ удовлетворяет условиям

$$\mathrm{Im}\,\omega(\xi) = 0,\ \xi \in [-1,1];\ \ \omega(1) = 0. \quad (17)$$
$$b + \cos\big(\theta_0(\sigma) + \mu(\sigma)\big) - V_0 e^{-i\nu(\sigma)} = 0, \quad (18)$$

$$\mu(\sigma) = \operatorname{Im}\omega\left(e^{i\sigma}\right),\ \nu(\sigma) = \operatorname{Re}\omega\left(e^{i\sigma}\right),$$

и представима в виде

$$\omega(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, t^n,\ c_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \qquad (19)$$

где c_n - вещественные коэффициенты [8]. Выбранная таким образом функция $\omega(t)$ удовлетворяет граничным условиям (17).

Используя формулы (9), (10), (16) и (19) получим параметрическую зависимость вида

$$\frac{dz}{dt} = \frac{e^{\chi(t)}}{V_0}\frac{dW}{dt} = \frac{i}{I_0 V_0}\frac{F_1(t)}{\sqrt{t-c}},\ F_1(t) = \sqrt{\frac{t(1+tm)}{(t+m)(1-tc)(t+k)(1+tk)}}\, e^{\left(c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n\right)}. \qquad (20)$$

Интегрируя выражение (20) на отрезках $[0, c]$, $[-m, 0]$, $[-k, -m]$ найдем безразмерные длины отрезков *CD*, *DM*, *MK*

$$L_1 = \frac{l_1}{H} = \frac{1}{V_0 I_0}\int_0^c \frac{F_1(x)}{\sqrt{c-x}}dx,\ L_2 = \frac{l_2}{H} = \frac{1}{V_0 I_0}\int_0^m \frac{F_2(x)}{\sqrt{m-x}}dx,$$

$$L_3 = \frac{l_3}{H} = \frac{1}{V_0 I_0}\int_m^k \frac{F_2(x)}{\sqrt{x-m}}dx, \qquad (21)$$

$$F_2(x) = \sqrt{\frac{x(1-xm)}{(x+c)(1+xc)(k-x)(1-xk)}}\, e^{\left(c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n x^n\right)}.$$

Коэффициенты разложения (19) и неизвестные k, m, c определяются из граничного условия (18) и соотношений (21) при заданных значениях коэффициента a_1, характерной плотности тока j_0 и геометрических величин L_1, L_2 и L_3.

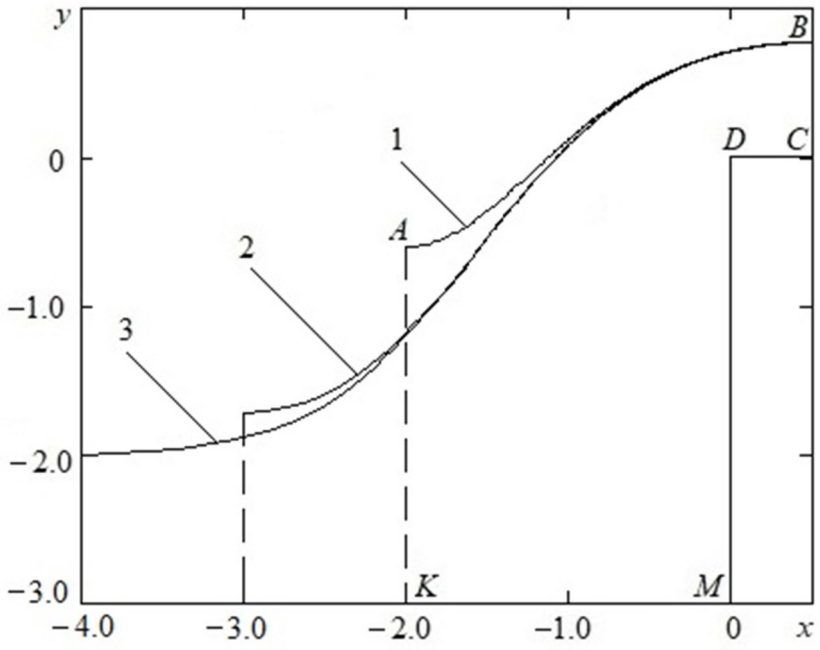


Рисунок 3 — Результаты расчета:
1 — $L_3 = 2{,}0$; 2 — $L_3 = 3{,}0$; 3 — $L_3 = 4{,}0$.

Расчёты выполнены для следующего частного случая, пусть

$$a_1 = -12{,}818,\ j_0 = 200\ \text{А/см}^2,\ L_1 = 0{,}5,\ L_2 = 3.$$

На рисунке 3 представлены графики анодных границ для трех различных значений L_3: 2,0; 3,0; 4,0.

В таблице 1 представлены результаты расчетов: L_4, L_5 - безразмерных величин межэлектродного зазора в сечениях AK и BC соответственно; y_A - ординаты точки A; $L_6 = |y_A| + L_5$ - высоты выступа, полученной стационарной анодной границы AB и величины φ_1 для указанных случаев.

Таблица 1 — Результаты расчета

L_3	L_4	L_5	y_A	L_6	φ_1
2,0	2,3968	0,7729	-0,603	1,3759	2,6887
3,0	1,2859	0,7708	-1,7141	2,4849	3,7901
4,0	1,0031	0,7708	-1,9969	2,7677	4,8461

Результаты решения позволяют оценить влияние геометрических размеров катода на размеры выступов рельефной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов А. Д., Козак Е. Высокоскоростное электрохимическое формообразование. М.: Наука, 1990. 272 с.
2. Крылов А. Л. Задача Коши для уравнения Лапласа в теории электрохимической обработки металлов // Доклады АН СССР. 1968. Т. 178, № 2. С. 321–323.
3. Котляр Л. М., Миназетдинов Н. М. Определение формы анода с учетом свойств электролита в задачах электрохимической обработки металлов // Прикладная механика и техническая физика. 2003. Т. 44, № 3. С. 179–184.
4. Клоков В.В. Электрохимическое формообразование. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. 80 с.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
6. Миназетдинов Н.М. Двумерная задача электрохимической обработки металлов периодическим катодом-инструментом // Прикладная математика и механика. 2012. Т.76, Вып. 4. С. 658-666.
7. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
8. Киселёв О. М., Л. М. Котляр Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 156 с.

УДК 550.343.64

СВЯЗЬ СЕЙШЕВЫХ КОЛЕБАНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СЕЙСМИЧНОСТИ ВБЛИЗИ ОЗЕРА БАЙКАЛ

М. А. Никитина
Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН
e-mail: *margarita@mitp.ru*
И. Г. Шмаков
Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН
e-mail: *shmakov@mitp.ru*

Рассмотрена статистика сейшевых и сейсмических событий, выдвинута гипотеза о накоплении внутренних напряжений в среде за счет энергии стоячих волн. Представлен метод опосредованного определения сейш на основании данных метеорологических станций. Обработаны исторические наблюдения атмосферного давления с 4 станций: Большое Голоустное, Большой Ушкарский остров, Баргузинский заповедник, Нижнеангарск. Показано, что сейсмические события, связанные с сейшами расположены на территории озера, что подтверждает их наведенную природу.

Ключевые слова: Байкал, сейши, распределение сейсмичности, рифтовая зона

Введение

Сейши - это стоячие волны, возникающие в замкнутых или частично замкнутых водоёмах. Данный тип волн является результатом резонансных явлений при интерференции волн, отраженных от границ водоема. Основные причины их возникновения - это воздействия внешних сил: изменение атмосферного давления или сейсмические явления. Данные колебания наблюдаются во всем мире в больших водоемах (Ладожское озеро, озеро Байкал, залив Петра Великого, озеро Чапала и т.д. [1] - [7]).

Сейшевые колебания играют определяющую роль во многих процессах. В том числе в формировании прибрежного и донного рельефа и изменении течений. Свойства сейшевых колебаний определяются формой береговой черты, глубиной водоема и его географическим положением. К настоящему времени существует большое количество исследований сейшевых колебаний как практического так и теоретического характера [4, 5, 6].

Среди озер и крупных водоемов, расположенных на территории России особое место занимает озеро Байкал. Байкал – огромное древнее озеро в горах Сибири к северу от монгольской границы. Оно считается самым глубоким озером в мире. Для предложенного исследования также ключевым является тот факт, что озеро Байкал располагается в одной из самых больших континентальных рифтовых зон между Сибирским кратоном и Саяно-Байкальским подвижным поясом [9] (рис. 1). Оно занимает порядка 30% от всей территории рифта.

Район Среднего Байкала считается высокосейсмичным [8], [9], [10]. Традиционно в пределах акватории озера выделяют две полосы повышенной концентрации эпицентров землетрясений. Одна выделяется в центре, а другая в районе юго-западной части озера. В горном окружении озера сейсмическая активность резко падает.

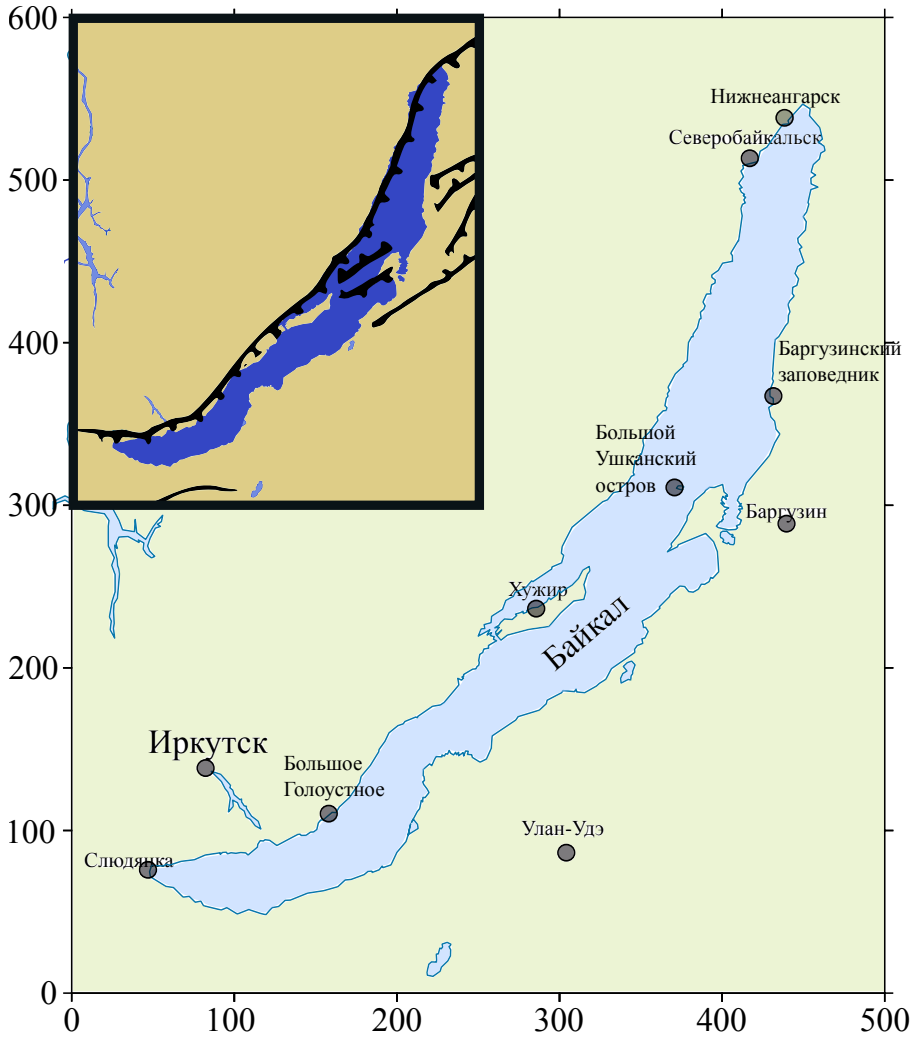


Рисунок 1 – Тектоническая схема Байкальской рифтовой зоны [9]. Черным указана структура разломов.

1. Постановка задачи

Байкал является самым глубоким озером с самым большим запасом воды. Размеры озера: длина 636 км, средняя ширина 49.3 км, средняя глубина 731 м, максимальная глубина 1636 м [11]. Сейшевые колебания на Байкале наблюдаются почти постоянно на протяжении всего года. Некоторые характеристики этих колебаний были полученны ранее в результате измерений в реальном масштабе, в лабораториях и в соответствующих теоретических расчетах [5, 6]. Однако исчерпывающей информации о сейшах на озере Байкал нет ввиду трудностей полномасштабных измерений и грубых оценок донного рельефа.

Как было сказано ранее, основная причина возникновения сейш - это перепады атмосферного давления или далекие сильные землетрясения. В нашей работе мы остановимся на первом типе. Для очистки каталога мы будем определять сейши по изменению давления, а не по амплитуде колебания высоты воды в Байкале.

Известно, что резкий перепад атмосферного давления способен сформи-

ровать сейшу. Так же стоит отметить тот факт, что изменение давления на 1 мм.рт.ст. провоцирует изменение уровня воды в водоеме на 1.33 см. Таким образом сейша, сформированная резким перепадом давления может иметь существенную амплитуду. Подобные колебания будут иметь достаточную энергию для деформации нижележащей среды, и провоцирования неглубоких землетрясений (глубина расположения гипоцентров в пределах до 30 км). Для проверки данной гипотезы необходимо статистическая обработка сейсмических событий относительно случаев сейшевых колебаний. Предполагается, что сейсмическая активность в районе озера может быть частично связана с сейшевыми колебаниями за счет накопления напряжений в среде во время воздействия стоячей волны.

2. Методы решения

Для накопления репрезентативных результатов при используемом аналитическом подходе необходимо обработать данные за значительный временной интервал. Нам были предоставлены данные за период с 1994 по 2019 гг (данные взяты с сайта ВНИИГМИ-МЦД). Для определения сейш были обработаны исторические наблюдения атмосферного давления с 4 станций: Большое Голоустное, Большой Ушкарский остров, Баргузинский заповедник, Нижнеангарск (рис. 1). Нас интересуют только дни с перепадами более 10 мм.рт.ст. После этого проводится корреляционный анализ между сейшами и сейсмическими событиями региона.

Заключение

В ходе исследования нами было проанализировано свыше 2000 землетрясений и более 2500 сейш. По полученным результатам был получен каталог сейш для озера Байкал, а также каталог связанных с ними землетрясений. Исходя из полученных результатов выделяются области повышенной сейсмичности наведенные сейшами. Данные области распределяются в районе Байкала, в основной своей части под глубокими участками.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант 20-17-00180). Особую благодарность авторы хотят выразить А.С.Газетдинову за участие в обсуждении данной задачи, а также за помощь в обработке данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. McGarr A., Vorhis R. C. Seismic seiches from the March 1964 Alaska earthquake. – US Government Printing Office, 1968.
2. Nikitina M. A., Val’kov A. Y. SH-waveform modeling of small local seismic events in Ladoga lake //SN Applied Sciences. – 2020. – V. 2. – №. 8. – P. 1-8.

3. Barberopoulou A. et al. Local amplification of seismic waves from the Denali Earthquake and damaging seiches in Lake Union, Seattle, Washington //Geophysical research letters. – 2004. – V. 31. – №. 3

4. McGarr A. Seismic seiches //Encyclopedia of Solid Earth Geophysics. – 2019. – P. 1-2.

5. Smirnov S. V. et al. Seiche oscillations in Lake Baikal //Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. – 2014. – V. 50. – №. 1. – P. 92-102.

6. Smirnov S. V. On calculation of seiche oscillations of the middle part of the Peter the Great gulf //Numerical Analysis and Applications. – 2014. – V. 7. – №. 2. – P. 168-179.

7. Cueva D. A. et al. natural frequencies of seiches in Lake chapala //Scientific reports. – 2019. – V. 9. – №. 1. – P. 1-11.

8. Зорин Ю. А., Турутанов Е. Х. Плюмы и геодинамика Байкальской рифтовой зоны //Геология и геофизика. – 2005. – Т. 46. – №. 7. – С. 685-699.

9. Винник Л. П. и др. Кора и мантия Байкальской рифтовой зоны по данным приемных функций продольных и поперечных волн //Геодинамика и тектонофизика. – 2017. – Т. 8. – №. 4.

10. Логачев Н. А. Главные структурные черты и геодинамика Байкальской рифтовой зоны //Физическая мезомеханика. – 1999. – Т. 2. – №. 1-2.

11. Shimaraev M. N. et al. Physical Limnology of Lake Baikal. A review. Baikal Int //Center for Ecological Research. – 1994.

УДК 665.637.88

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОМИНИРУЮЩЕГО МЕХАНИЗМА ОТКАЗА IGBT МОДУЛЕЙ ПАЯНОЙ КОНСТРУКЦИИ

А.П. Пилипенко
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *a.pilipenko@proton-electrotex.com*
В.А. Лобанова, к.т.н.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *lvanata@yandex.ru*

Для определения оптимальной конструкции IGBT модуля в процессе разработки необходимо особое внимание уделять выявлению наиболее ненадежного элемента и принимать меры, способствующие повышению его надежности. Данная необходимость продиктована тем, что критическая деградация наиболее ненадежного элемента конструкции приводит к отказу всего модуля, а значит, определяет ресурс модуля в целом.

Как известно [1, 5, 13], IGBT модули наиболее распространенной в данный момент паяной конструкции составляют несколько «слоев» компонентов (рисунок 1), основные из которых: управляющие контакты и силовые шины (медь или алюминий), соединения поверхностного монтажа (медь или алюминий), полупроводниковые чипы (кремний с алюминиевой металлизацией), изолирующие подложки (керамика, покрытая медью с двух сторон), припой для соединения чипов с подложкой и подложки с основанием (серебро, олово, медь) и основание для отвода тепла (медь).

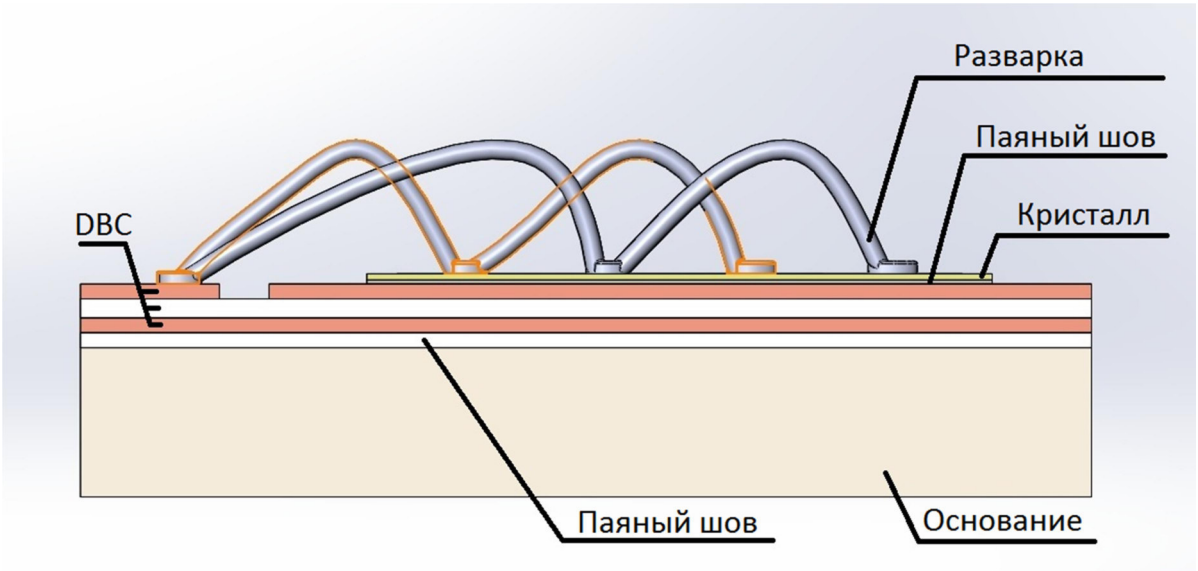


Рисунок 1 — Упрощенная схема структуры IGBT модуля

Видно, что используемые компоненты, надежно соединенные между собой пайкой или ультразвуковой сваркой, имеют различающиеся коэффициенты температурного расширения [1, 2].

Это приводит к тому, что под воздействием термомеханической нагрузки в процессе эксплуатации модуля наиболее нагруженные соединительные интерфейсы и элементы конструкции модуля будут разрушены [3].

Степень нагрузки того или иного элемента конструкции при условии отсутствия технологических дефектов зависит, главным образом, от выбранного режима длительности и амплитуды циклического изменения температуры компонентов модуля [4, 5]: при быстром изменении температуры нижние слои модуля не успевают прогреваться в степени, достаточной для запуска механизмов деградации, и наиболее нагруженными являются верхние слои, находящиеся в непосредственной близости от активных элементов, в то время как при снижении скорости изменения температуры наибольшая нагрузка приходится на нижние слои модуля.

К основным механизмам деградации относят усталость припоя, сварных соединений и процессы реструктуризации металлизации полупроводниковых чипов [2]. Это связано с тем, что данные конструктивные элементы расположены в зоне наибольшего рассогласования коэффициентов теплового расширения (КТР) соединенных компонентов, в связи с чем термомеханическая нагрузка на данные элементы оказывается наиболее разрушительной. Кроме того, запуску и развитию процессов деградации способствуют и другие конструктивные особенности прибора, такие как, например, особенности состава проволоки, припоя и геометрия петель сварных соединений [6, 7].

Усталость припоя проявляется в виде образования микропустот вдоль границ зерен олова, связанных с ростом окружающих зерна олова интерметаллидов Ag3Sn под действием термомеханических нагрузок [8]. Появившиеся отслоения, пустоты, растрескивания в паяном шве приводят к деградации теплового сопротивления и отвода тепла от активных элементов [9]. Происходящие процессы не могут не влиять на близко расположенные компоненты и интерфейсы и в итоге приводят к отказу прибора [1].

Разрушение сварных соединений обусловливается напряжениями сдвига, воздействующими со стороны микроперемещений кремниевого кристалла и алюминиевой проволоки различной амплитуды [10] и приводящими к возникновению трещин вдоль границ зерен алюминиевой проволоки [11, 12]. В результате плотность тока на отдельных участках проводных соединений возрастает, возникают локальные перегревы, контакт проволоки с чипом полностью нарушается, что приводит к еще большей нагрузке на оставшиеся соединения и возможности их выгорания [13]. Данный вид разрушения характеризуется деградацией напряжения насыщения коллектор-эмиттер ($U_{ce(sat)}$), возрастающего вплоть до полного отказа прибора.

Термомеханические нагрузки воздействуют и на такое звено сопряжения алюминия и кремния, как металлизация кристаллов. Возникающие напряжения растяжения и сжатия приводят к деформации и сдвигу зерен алюминия и возможности возникновения электромиграции [14]. Процессы рекристалли-зации уменьшают плотность контактного слоя металлизации, что ведет к

возрастанию контактного сопротивления и, как следствие, локальным перегревам и запуску либо ускорению разрушения сварных соединений [15]. Пример рекристаллизации продемонстрирован на рисунке 2 [2].

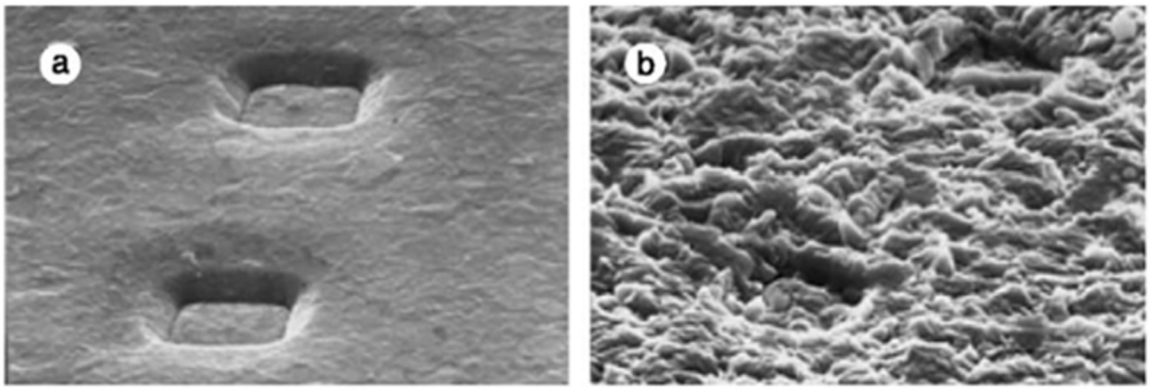


Рисунок 2 — Металлизация кристалла до (a) и после (b) рекристаллизации

Поиск первичного механизма отказа затрудняется взаимовлиянием описанных механизмов деградации, приводящему к возможному смешиванию причины и следствий. Пусковой механизм отказа зачастую приводит к значительным разрушениям компонентов модуля, которые без воздействия пускового механизма изначально не ограничивали его ресурс. Так, например, разрушение паяных соединений приводит к перегреву кристалла и деградации проволочных соединений. В результате в процессе анализа отказавшего прибора можно наблюдать все возможные деградационные явления: разрушение припоя, сварных точек, реструктуризацию эмиттера и даже следы расплавления проволок и металлизации. Для определения пускового механизма отказа в таком случае необходимы дополнительные данные, включающие режим испытания или эксплуатации исследуемого модуля.

В связи с этим необходима разработка способа неразрушающего определения пускового механизма отказа IGBT модулей паяной конструкции. В основе предлагаемого авторами способа лежит анализ значений $U_{ce(sat)}$ в процессе испытания или эксплуатации модуля. Предлагаемый способ основан на влиянии физических процессов деградации, описанных ваше, на данный параметр.

Для апробации предлагаемого способа был подготовлен и проведен эксперимент, в ходе которого одна партия макетных образов многокристальных IGBT модулей была испытана до отказа в режиме «длинных» электротермоциклов (ЭТЦ), в ходе которых успевают прогреваться нижние слои модуля, а вторая партия — в режиме «быстрых» ЭТЦ, наиболее нагруженными при котором являются верхние слои модуля. В процессе испытания проводился мониторинг значений напряжения насыщения коллектор-эмиттер при протекании силового тока для оценки скорости и характера деградации. После отказа исследуемых приборов были построены зависимости $U_{ce(sat)}$ от количества пройденных циклов для каждого режима

испытаний, для удобства сравнения — в процентном масштабе (рисунок 3).

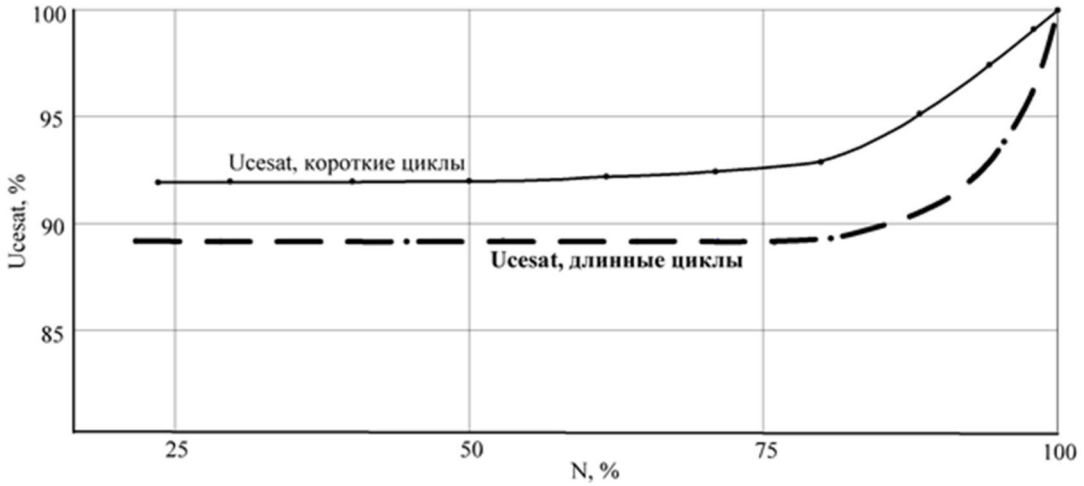


Рисунок 3 — Зависимость $U_{ce(sat)}$ от количества циклов до отказа (в %)

Видно, что при испытании в режиме коротких ЭТЦ $U_{ce(sat)}$ начинает деградировать примерно с 60 % циклов до отказа, а при испытании в режиме длинных ЭТЦ — примерно с 75 % циклов. Это связано с тем, что, как было сказано выше, в режиме коротких ЭТЦ наибольшая нагрузка приходится на сварные соединения, а деградация сварных соединений вызывает рост напряжения насыщения коллектор-эмиттер, что мы и видим на рисунке 3. При испытании в режиме длинных циклов наибольшая нагрузка первоначально воздействует на паяные соединения, деградация которых сопровождается увеличением теплового сопротивления, а уже затем разрушенные паяные соединения вызывают деградацию сварных соединений [11] — более позднюю по сравнению с коротким циклированием.

Полученные выводы подтверждены при анализе образцов после испытаний методом визуальной и акустической инспекции. Так, наибольшей степени разрушения образцов при испытании в режиме длинных ЭТЦ подверглись паяные соединения и подложки DBC (рисунок 4), а при испытании в режиме коротких ЭТЦ — сварные соединения (рисунок 5).

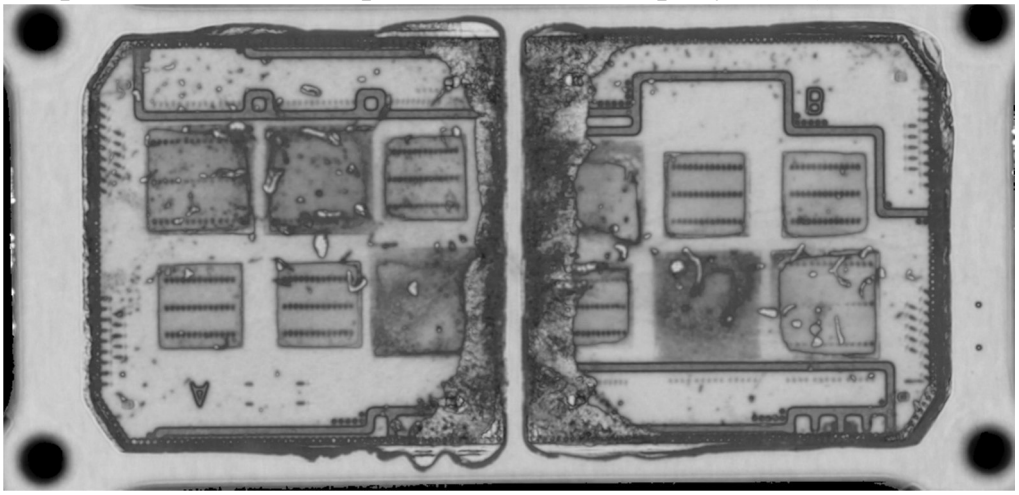


Рисунок 4 — Акустическое изображение образца после длинных ЭТЦ

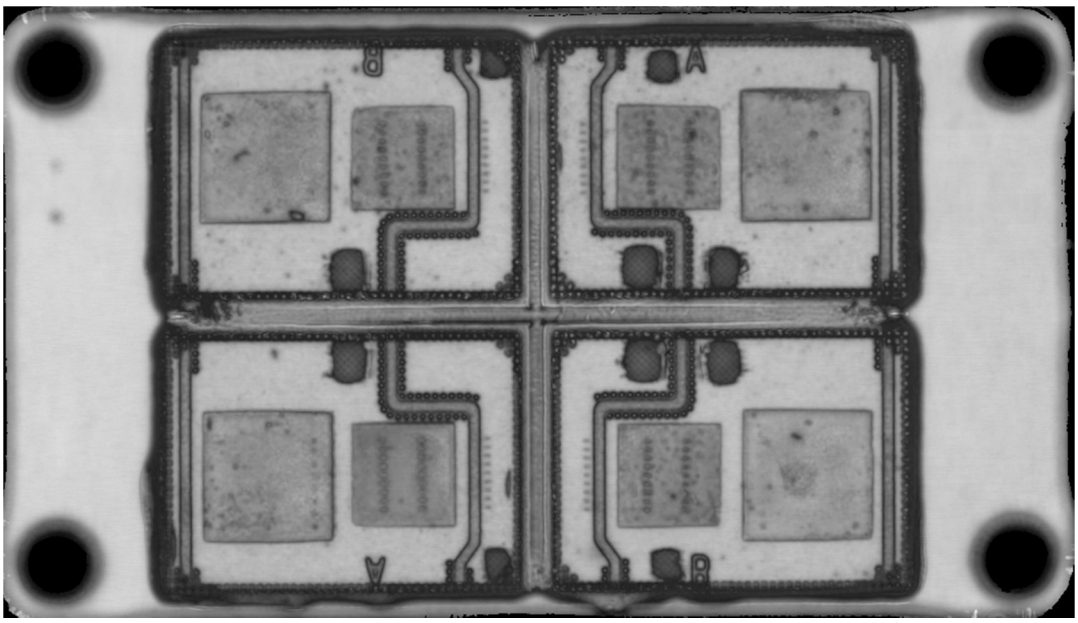


Рисунок 5 — Акустическое изображение образца после коротких ЭТЦ

Таким образом, исходя из результата эксперимента, по характеру зависимости $U_{ce(sat)}$ от количества циклов в процентном масштабе можно определить доминирующий механизм отказа прибора: при деградации паяных соединений она будет соответствовать нижней кривой на рисунке 3, а при деградации сварных соединений — верхней кривой.

По рисунку 3 видно, что зависимость $U_{ce(sat)}$ можно разбить на два участка: 1) область постоянства $U_{ce(sat)} = const$ до начала деградации компонентов модуля под воздействием термомеханических нагрузок и 2) экспоненциальный рост $U_{ce(sat)}$. Также можно заметить разницу в скорости возрастания $U_{ce(sat)}$ для коротких и для длинных циклов. Полученные с помощью метода наименьших квадратов [16] уравнения экспоненциальной регрессии для длинных (1) и коротких (2) циклов (по данным из эксперимента в процентном выражении) имеют вид:

$$y = e^{4{,}3224+\ {,}0028x} \quad (1)$$

$$y = e^{3{,}3869+\ {,}0121x} \quad (2)$$

Таким образом, первичный механизм отказа можно определить также с помощью показателя степени уравнения экспоненциальной регрессии, полученного по экспериментальным данным. Итак, в случае, если слагаемое в показателе степени экспоненты в законе распределения отказов меньше 4, а множитель переменной порядка 2,8E-4, то основным механизмом деградации, приводящим к отказу прибора, является деградация припоя, а если слагаемое в показателе степени экспоненты больше 4, а множитель переменной порядка 1,2E-3, то основным механизмом деградации является разрушение сварных соединений.

Отмеченная тенденция хорошо иллюстрируется графиками на рисунке 6, построенными по уравнениям (1) и (2).

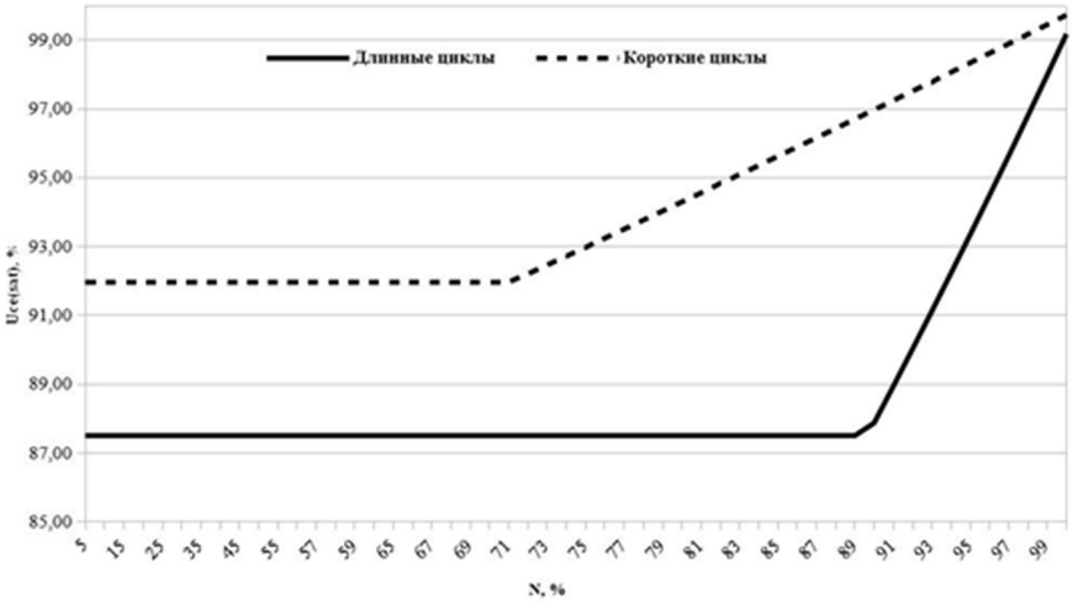


Рисунок 6 — Зависимости $U_{ce(sat)}$ от количества циклов для режимов длинного и короткого ЭТЦ, построенные по полученным уравнениям экспоненциальной регрессии

Выводы. Экспериментально установлено, что при первичном влиянии на отказ деградации припоя (при испытании в режиме «длинных» циклов) возрастание $U_{ce(sat)}$ начинается позже примерно на 15 % по сравнению с первичным развитием деградации сварных соединений (при испытании в режиме «коротких» циклов), но происходит стремительнее. Полученные по результатам проведенного эксперимента экспоненциальные уравнения регрессии деградации $U_{ce(sat)}$ от количества циклов позволяют определять первичный механизм отказа аналитически с помощью показателя степени экспоненты полученного уравнения без необходимости проведения дополнительного анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Morozumi, A. Reliability design technology for power semiconductor modules [Текст]. / A. Morozumi, K. Yamada, T. Miyasaka. // Fuji Electric Review. — 2001. — Т. 47. — №. 2. — с. 54-58.
2. Ciappa, M. Selected failure mechanisms of modern power modules [Текст]. / M. Ciappa // Microelectronics reliability. — 2002. — Т. 42. — № 4-5. — с. 653-667.
3. Wuchen, W. Investigation on the long term reliability of power IGBT modules [Текст]. / W. Wuchen, M. Held, P. Jacob, P. ScaccoP., A. Birolini // Power Semiconductor Devices and ICs. — 1995. — с. 443-448.
4. Sarkany, Z. Effect of power cycling parameters on predicted IGBT lifetime [Текст]. / Z. Sarkany, A. Vass-Varnai, M. Rencz. // IEEE Aerospace Conference. — 2015. — с. 1-9.
5. Веревкин, В.В. Испытания многокристальных IGBT-модулей на стойкость к циклическому воздействию силового тока [Текст]. / В.В. Веревкин,

С.Л. Стригунов, А.П. Пилипенко, К.А. Волобуев, В.А. Лобанова. // Изв.вузов. Приборостроение. — 2020. — Т. 63. — № 5. — с. 451-459.
6. Özkol, E. Improving the power cycling performance of the emitter contact of IGBT modules: Implementation and evaluation of stitch bond layouts [Текст]. / E. Özkol, S. Hartmann, G. Pâques. // Microelectronics Reliability. — 2014. — № 54. — с. 2796–2800.
7. Pedersen, K.B. Interface structure and strength of ultrasonically wedge bonded heavy aluminium wires in Si-based power modules [Текст]. / K.B. Pedersen, D. Benning, P.K. Kristensen, V.N. Popok, K. Pedersen. // J Mater Sci: Mater Electron. — 2014. — T. 25. — с. 2863–2871.
8. Morozumi, A. Reliability of power cycling for IGBT power semiconductor modules [Текст]. / A. Morozumi, K. Yamada, T. Miyasaka, Y. Seki // IEEE Transactions on Industry Applications. — 2003. — Т. 39. — №. 3. — с. 665-671.
9. Schilling, O. Power cycling testing and fe modelling focussed on Al wire bond fatigue in high power IGBT modules [Текст]. / O. Schilling, M. Schfer, K. Mainka, M. Thoben, F. Sauerland. // Microelectronics Reliability. — 2012. — № 52. — с. 2347–2352.
10. Rasmus, Ø.N. Innovative measuring system for wear-out indication of high power IGBT modules [Текст]. / Ø.N. Rasmus, J. Due, S. Munk-Nielsen. // IEEE Energy Conversion Congress and Exposition. — 2011. — с. 1785–1790.
11. Bahman, A.S. Prediction of Short-Circuit-Related Thermal Stress in Aged IGBT Modules [Текст]. / A.S. Bahman, F. Iannuzzo, C. Uhrenfeldt, F. Blaabjerg, S. Munk-Nielse // Proceedings of IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE). — 2016. — с. 1-7.
12. Busca, C. An overview of the reliability prediction related aspects of high power IGBTs in wind power applications [Текст]. / C. Busca, R. Teodorescu, F. Blaabjerg, S. Munk-Nielsen, L. Helle, T. Abeyasekera, P. Rodriguez. // Microelectronics Reliability. — 2011. — № 51. — с. 1903–1907.
13. Ji, B. In situ diagnostics and prognostics of wire bonding faults in IGBT modules for electric vehicle drives [Текст]. / B. Ji, V. Pickert, W. Cao, B. Zahawi // IEEE Transactions on Power Electronics. — 2013. — Т. 28. — №. 12. — с. 5568-5577.
14. Rudzki, J. Power modules with increased power density and reliability using cu wire bonds on sintered metal buffer layers [Текст]. / J. Rudzki, M. Becker, R. Eisele, M. Poech, F. Osterwald. // Integrated Power Systems (CIPS) 8th International Conference. — 2014. — с. 1–6.
15. Suh, I.W. Numerical prediction of solder fatigue life in a high power IGBT module using ribbon bonding [Text]. / I.W. Suh, H.S. Jung, Y.H. Lee, S.H. Choa. // Journal of Power Electronics. — 2016. — Vol. 16. — No. 5. — pp. 1843-1850.
16. Метод наименьших квадратов [Электронный ресурс] — Электронные текстовые данные — Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_наименьших_квадратов, свободный (дата обращения: 16.10.2020).

О НЕКОТОРЫХ ТЕПЛОВЫХ СВОЙСТВАХ БИНАРНЫХ РАСТВОРОВ ЖИДКОСТЕЙ

С.Ю. Побережский, С.О. Гладков
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) МАИ
e-mail: *sglad51@mail.ru*

В работе приведено аналитическое описание коэффициента теплопроводности неоднородных жидкостей в виде функции от концентрации и температуры. Отмечено, что основным фактором, играющим главную роль в процессе теплопроводности является взаимодействие объемных молекул с поверхностными.

В настоящем сообщении мы приведём описание некоторых аналитических и экспериментальных результатов, посвященных выяснению зависимости коэффициента теплопроводности жидких смесевых растворов κ в виде функции от температуры T и относительной концентрации $\xi = \frac{c}{c_{cr}}$, где $c-$ концентрация смешиваемой с однородным составом инородной добавки, $c_{cr}-$ порог перколяции [1].

1. Теория

При добавлении инородной жидкости в основной состав она может произвольным образом растекаться по всему заданному объему, но при этом образовывать некоторые кластерные соединения определенного линейного размера L.

С энергетической точки зрения эти кластеры должны характеризоваться некоторым поверхностным натяжением α, удерживающим их от распада. В этой связи становится вполне понятным, что возможны лишь два сценария образования бинарных (и более сложных) смесей, зависящих от чисто физических свойств смешиваемых жидкостей: 1) с образованием кластеров и 2) с полным перемешиванием растворов [5].

Что касается физических свойств подобных неоднородных смесей, то они вполне понятны и легко объяснимы с точки зрения основных законов теории теплопереноса в гетерогенных структурах, подробно изложенных, например, в монографии [2]. И хотя в этой монографии отражены основные принципы теории теплопереноса не для жидкостей, а для неоднородных кристаллов, описанный в ней общий физический принцип легко может быть перенесен и на жидкие смесевые растворы [6].

Поскольку при описании явлений теплопереноса всегда имеет место постановка граничных условий. Тогда ключевым моментом излагаемой теории, будет учет связи объемных молекул с поверхностными. Эти молекулы при решении уравнения Больцмана, можно считать равновесными, а потому они должны иметь свою собственную температуру T_0, равную температуре термостата, с равновесной функцией распределения, в отличие от объёмных, которые являются квазиравновесными.

Следует отметить, что решение поставленной задачи с учетом феноменологически введенного дополнительного интеграла столкновений, связанного со взаимодействием объемных молекул с поверхностными, в известной нам лите-

ратуре, посвященной классическому кинетическому уравнению Больцмана, мы не обнаружили.

Стоит заметить, что в случае жидкостей их вычисления вполне аналогичны тому, как это продемонстрировано в [3] благодаря использованию классического кинетического уравнения Больцмана, а не квазиклассического подхода, как это подробно описано в [2] и, например, в [4].

2. Эксперимент

•Методом кратковременных измерений в стадии иррегулярного теплового режима исследована теплопроводность бинарных растворов на основе шестнадцати органических жидкостей.

•Жидкости классифицировались:

Группа 1 – Молекулы содержат активный водород и доноры электронов.

Группа 2 – Молекулы имеют доноры электронов, но в них отсутствует активный водород.

Группа 3 – Молекулы содержат активный водород и не содержат доноры электронов.

Группа 4 – Молекулы без водородных связей.

•Погрешность измерения теплопроводности не превышала трёх процентов.

При исследовании бинарных растворов, требуемый раствор составлялся из перечня имеющихся в наличии чистых растворов, теплофизические свойства которых рассмотрены в предыдущем параграфе. Отметим, что смешивание растворов осуществлялось в соответствии с классификацией Эвелла. Для того, что бы отразить всю полноту и научную значимость представленного исследования, в ходе эксперимента смешивались жидкости как из одной группы, так и жидкости из совершенно разных групп. Методика исследования была аналогична исследованию чистых жидкостей. Результаты исследований приведены на рисунке 1.

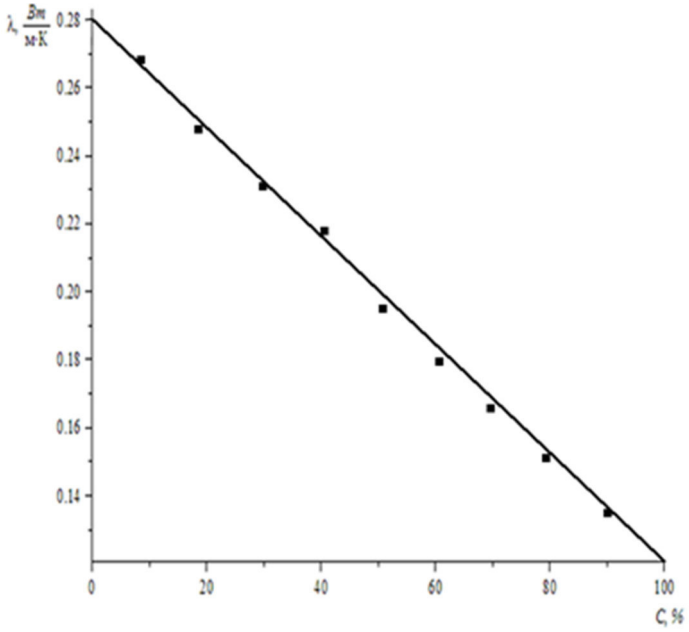


Рисунок 1 – График зависимости теплопроводности от концентрации смеси (Этиленгликоль - н-Гексан)

На рисунке 1 приведён график изменения теплопроводности бинарного раствора органических жидкостей (Этиленгликоль ÷ н-Гексан), в зависимости от различной (объёмной) концентрации смеси [6]. Из графика видно: – полученная экспериментальным путём зависимость имеет линейный вид. График зависимости монотонно изменяется, отклонение от линейности не наблюдается.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Stauffer, A. Aharony. Introduction to Percolation Theory. Taylor and Fransis. London. 1994.
2. С.О. Гладков. Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука. 1999. 330 с.
3. S.O. Gladkov. To the question of analytical Estimate of Evaporation Time of the Drop, Crossing Through the Heat Media. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2020. V. 13(4). PP. 439-450.
4. S.O. Gladkov. The kinetics of nuclear magnetically ordered systems. Physics Reports. 1989. V. 182. N 4,5. PP. 211-364.
5. С.Ю. Побережский. 12-я международная конференция - Авиация и космонавтика – 2013. Исследование теплопроводности бинарных растворов/ С.Ю. Побережский, М.: МАИ, 13-15 ноября 2013.
6. С.Ю. Побережский. Теплопроводность бинарных растворов органических жидкостей по группам классификации Эвелла [Электронный ресурс]/ С.Ю. Побережский // Современные проблемы науки и образования. - 2014. - № 4. — Режим доступа: http://www.science-education.ru/118-13977.

УДК 00.004, 50.152

ТИПОВЫЕ ПРОЦЕССЫ КАК ВОЗМОЖНЫЙ ИНСТРУМЕНТ СЕЙСМОПРОГНОЗА

В.К. Сарьян, д.т.н., проф.
ФГУП «Ордена Трудового Красного Знамени Российский научно-исследовательский институт радио им. М.И. Кривошеева»
e-mail: *sarian@niir.ru*
А.А. Русаков, к.ф.-м.н., д.пед.н., проф.
МИРЭА - Российский технологический университет
e-mail: *vmkafedra@yandex.ru*
А.А. Любушин, д.ф.-м.н, проф.
Институт физики земли РАН
e-mail: *ryakoubovsky@gmail.com*
Д.В. Дубнов, к.ф.-м.н., доц.
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: *ddubnov@yandex.ru*

Типовые процессы (по В.К. Сарьяну) являются фундаментальным инвариантом многих естественных и искусственных систем [1]. Целью типового процесса является поддержание гомеостаза в системе. Применение концепции типового процесса и семантической аномалии в системах машинного обучения и искусственного интеллекта, в первую очередь систем реального времени, например, сейсмомониторинга, позволит избежать больших вычислений и непредсказуемых результатов, характерных для систем с глубоким обучением.

Прогноз землетрясений – одна из важнейших и наиболее трудных задач сейсмологии. Сегодня единственным методом изучения землетрясений является система глобального мониторинга. В эту систему входят тысячи сейсмических станций, расположенных в разных частях стран, и все вместе они входят глобальную сейсмическую сеть (GSN). Они основаны на фиксации сигналов-предвестников. Однако ввиду того, что сигналы предвестники имеют малую амплитуду, то они теряются в шумах и проявляются только при катастрофической фазе. Поэтому их предсказательный потенциал, как правило, очень низкий и не имел до недавнего времени какого-нибудь хозяйственного значения (особый случай – Коста-Рика, где с помощью GPS-мониторинга удалось предсказать землетрясение 2012 года магнитуды 7,6, благодаря тому, что её территория находится над зоной субдукции[1]).

И сегодня существующая глобальная мониторинговая сеть служит в основном для констатации землетрясений и сбора данных, что является тоже очень важным для науки о Земле.

[1] The 5 September 2012 Nicoya, Costa Rica Mw7.6 earthquake ruptureprocess from joint inversion of high-rate GPS, strong-motion, and teleseismic P wave data and its relationship to adjacentplate boundary interface properties// JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH: SOLID EARTH, VOL. 118, 5453–5466. Интернет-версия https://agupubs.onlinelibrary.wiley .com/doi/pdf/10.1002/jgrb.50379

Задача краткосрочного прогноза с использованием сигналов - предвестников (изменения спектрального состава колебаний – геоакустической эмиссии и др.) может быть принципиально решена, если сигналы с сейсмических станций обрабатывать совместно с сигналами, получаемых от датчиков другой физической природы. В этом случае методом синхронизации можно выделить сигналы предвестники из уровня шума и значительно повысить предсказание систем мониторинга, трансформировав их в гибридные системы мониторинга. Однако большую эффективность в уменьшении человеческих и материальных потерь удается получить только, если спасение людей будет массовой и индивидуальной услугой управления, которая в случае угрозы возникновения ЧС через короткий промежуток времени помогает самоэвакуироваться людям, оказавшимся в зоне ЧС в безопасную зону.

Трудности (в том числе вычислительные) и далеко не всегда удовлетворительные результаты среднесрочного и долгосрочного прогнозов в настоящее время. Возможность получения качественных прогнозов позволяло бы целесообразно планировать масштабное строительство или проведение массовых мероприятий и в дальнейшем искать способы предотвращений землетрясений (или смягчение их силы).

Задача среднесрочного прогноза не является локальной. Поэтому сейсмостанции интегрируются в сети, а локальные сети – в глобальные (на территории России – в Федеральную сеть сейсмологических наблюдений[2].

Основная проблема при переходе на глобальный уровень заключается в отсутствии модели, адекватной задаче. Традиционная ударно-волновая модель объясняет картину землетрясения, но мало подходит для прогнозирования, поскольку не может объяснить явления-предвестники [2].

В такой ситуации естественно прибегнуть к таким методам анализа и идентификации состояния объекта, как диаграммы Пуанкаре и феноменологические уравнения. Эти методы уже применялись в сейсмологии [3] (диаграммы Пуанкаре строились для землетрясений в окрестностях Петропавловска-Камчатского). В упомянутой статье приведён пример построения методом рекуррентных алгебраических полиномов феноменологического уравнения по геоакустограмме.

И всё же для задачи прогноза этот математический аппарат недостаточен. По мнению авторов, феноменологические уравнения можно использовать при имитационном моделировании сейсмологических процессов в земной коре. Имитационное моделирование – уже не новый подход в сейсмологии [4].

В будущем, по мнению авторов, возможно создание вычислительной сети, обучающейся семантике тектонической активности по данным наблюдения сети сейсмостанций. В настоящей статье предлагается подход к моделированию семантики движения земной коры в период подготовки землетрясений на основе так называемых типовых процессов (соответствующим циклам на диаграмме

[2] Требования к сейсмическим сетям и станциям, интегрируемым в Федеральную сеть сейсмологических наблюдений. Интернет-публикация.
http://www.ceme.gsras.ru/new/struct/files/Requirements_seismic_stations.pdf

Пуанкаре). Моделью геофизической среды (с внедрёнными средствами воздействия и мониторинга) может являться информационно-управленческая сеть. В качестве средства воздействия авторами предлагается микроволновое стимулирование дислокаций и магнитного контроля очагов землетрясения с целью предотвращения катастроф и преобразования крупномагнитудных землетрясений в маломагнитудные. [5]

Рассматриваются типовые процессы в качестве возможного нового инструмента феноменологической сейсмологии. Типовые процессы воспроизводятся регулярно с целью поддержания гомеостаза системы. Организация типовых процессов в геофизической среде предлагается на основе природного процесса – колебательного движения блоков земной коры путём введения управления на микроуровне (использующего механизм микроволнового стимулирования дислокаций, описанный А.С. Бучаченко). Также предложено объяснение появления логнормальных распределений в распределении частот в импульсах высокочастотной геоакустической эмиссии на основе типовых процессов.

1. Типовые информационные процессы в информационно коммуникационной среде и их возможные аналоги в геофизической среде

В 50-х - 70-х годах 20-го века Михаил Александрович Садовский и работавшие с ним исследователи рассматривали возможность провоцирования «созревших» очагов землетрясений подземными ядерными взрывами. Был предложен, но так и не реализован эксперимент с Кызылкумским очагом, который мог бы предотвратить Газлийские землетрясения 1976 года [6].

Столь мощное воздействие может привести к непредсказуемым последствиям, поэтому позже Садовский, обратив внимание на фундаментальные свойства иерархически построенной геофизической среды и развивая свою блочно-иерархическую модель, заинтересовался другими способами воздействия на неё, например, вибрацией. Использованием механизмов резонансной природы можно добиться существенных изменений в среде путём воздействий сравнительно небольшой мощности, фактически здесь речь идёт уже о семантическом воздействии на земную кору.

Авторы настоящей статьи связывают возможность семантического воздействия на сложную систему с так называемыми типовыми процессами. Практический опыт работы с инфокоммуникационной средой и её теоретического анализа даёт возможность авторам предложить новый инструмент мониторинга геофизической среды с возможностью воздействия и управления. Для этого обратимся на время к человеко-машинным системам, входящим в состав инфокоммуникационной среды. Уже известна эффективность так называемых информационно-управленческих сетей и массовых информационно-управленческих сетей, основанных на так называемых типовых информационных процессах [7,8,9]. Авторы убеждены, что гомеостаз в сложных системах, подобных организму или биологическому сообществу, поддерживается путём регулярного воспроизведения набора взаимосвязанных типовых процессов, так что типовые процессы являются фундаментальным инвариантом и многих естественных сложных систем. Типовой процесс в понимании авторов – это ре-

гулярно воспроизводимый процесс, имеющий определённый смысл и целью которого является гомеостаза системы [7,8,9].

Семантика взаимосвязанных типовых процессов гипотетически определяется трудноформализуемой структурой, которую авторы называют семантической аномалией. Математической моделью семантической аномалии может быть семантическое пространство с взвешенной евклидовой метрикой, и динамической (то есть зависящей от времени) мерой, определённые области которого соответствуют типовым процессам [1, 7,8].

Сейсмические аномалии, возникающие при землетрясениях и в подготовительный период можно рассматривать с точки зрения семантики как проявление семантической аномалии на начальном этапе её существования. Координаты в семантическом пространстве могут задаваться числовыми характеристиками предвестников землетрясений. Также при построении семантических пространств можно использовать диаграммы Пуанкаре.

Современная геология и сейсмология рассматривают земную кору как систему взаимодействующих блоков. Хорошо известны колебательные режимы земной коры, среди которых выделяются особые сейсмогенные колебательные режимы – короткопериодные квазигармонические колебания, циклически преобразующие, но не перемещающие энергию по латерали.

Движения блогов земной коры, особенно в период подготовки землетрясений, напоминают типовой процесс. Здесь нет управляющих центров, но их можно создать путём антропогенного вмешательства. Регулярное корректирующее вмешательство возможно только на микроуровне – для корректировки движения крупных тектонических плит потребовалась бы энергия, сопоставимая с энергией ядерного взрыва. В следующем параграфе мы рассмотрим пример такого рода воздействия, уже имеющий успешные реализации.

2. Микроволновое стимулирование дислокаций как информационное воздействие

В данном параграфе будет рассмотрен возможный механизм управления для типового процесса в геофизической среде, описанный А.С. Бучаченко – управление подвижностью дислокаций через магнитные взаимодействия в электронно-спиновых парах на дислокациях.

Рассматривая геофизическую среду как систему взаимодействующих объектов – блоков земной коры, - упругие напряжения, передающиеся от блока к блоку, можно воспринимать как своего рода обмен информацией. То есть взаимодействие объектов рассматриваемой системы имеет информационную составляющую и может рассматриваться как информационное взаимодействие.

В период подготовки землетрясений геофизическая среда локально или глобально теряет фрактальность (для внешнего наблюдателя это выражается в падении фрактальной размерности) и превращается в организованную структуру. При этом информационное взаимодействие объектов обретает как бы целенаправленный характер. Цель – поддержание гомеостаза системы (этому посвящён следующий параграф). Нередко возникает цикличность (колебательные режимы движения земной коры). Это даёт основания для сравнения динамики

земной коры в период подготовки землетрясения с динамикой человеко-машинных информационно-управленческих сетей, воспроизводящих так называемые типовые информационные процессы [7,8].

Внешняя среда может воздействовать на такого рода систему двумя способами: физически и информационно (для геофизической среды это в основном антропогенное воздействие). Информационное воздействие имеет сложную резонансную природу, и для направленного антропогенного воздействия на геофизическую среду требуется понимание семантики происходящий в ней процессов. По мнению авторов, целенаправленное антропогенное информационное воздействие должно осуществляться путём совместного воспроизведения типовых процессов (сродни взаимодействию ИУС, [7,8]).

Отметим, что период подготовки землетрясения не обязательно оканчивается крупномагнитудным землетрясением (пример – южная область пониженной фрактальной размерности в период великого Японского землетрясения).

Крупномагнитудное землетрясение – это катастрофический сценарий, когда системе «не удаётся» поддерживать себя за счёт типовых процессов передачи напряжений, и требуется структурная перестройка.

Каким же образом возможно антропогенное информационное воздействие на данную систему? Будем следовать статье [4], в которой объясняется спиновый механизм микроволнового стимулирования дислокаций. Упругая энергия запасается на атомно-молекулярном уровне и высвобождается в пластическом течении через движение дислокаций в диамагнитных кристаллах.

Магнитный контроль очагов землетрясений, стимулирующий сброс упругой энергии работает на атомно-молекулярном уровне. Образование и объединение микротрещин, их макроскопическое разрушение не контролируются путём магнитного влияния. Известно, что мощное ненаправленное магнитное воздействие на геофизическую среду (магнитная буря) подавляет крупные землетрясения (одновременно увеличивая количество маломагнитудных землетрясений).

Облучение очагов землетрясения импульсами МГД – генератора можно уже считать примитивным направленным воздействием. Опыты, проводимые в конце 20 века в Гармском районе Таджикистана и Северном Тянь-Шане дали медленную пластическую деформацию очага, стимулированной магнитными импульсами.

3. Типовые процессы и гомеостаз

Как уже было сказано, существующие физические модели геофизической среды не дают возможности полноценного прогноза землетрясений. В связи с этим была сформулирована обратная задача сейсмологии: найти ряд моделей Земли, которые удовлетворяли бы данной системе сейсмических наблюдений (с учетом погрешностей наблюдения). Несмотря на некоторый успех феноменологического подхода, дальнейшее его развитие всё же требует понимания сути происходящих геофизических процессов (то есть актуальной задачей является конвергенция физического и феноменологического подходов к моделированию геофизической среды). Мы уже отметили, взаимодействие блоков земной коры

имеет информационную составляющую, так что геофизическую среду в целом можно изучать методами теории информационных процессов и систем.

Заметим, что силы упругости дают отрицательную обратную связь в системе блоков земной коры, но не всегда этой связи достаточно для поддержания стабильности системы. Тогда начинаются переходные процессы, и подготовка крупного землетрясения является важным случаем такого процесса, а микроволновое стимулирование дислокаций говорит о возможности управления в переходных процессах.

В дальнейшем семантические аномалии проявляются в типовых и переходных процессах взаимодействия блоков, имеющих как локальный, так и нелокальный, планетарный характер (например, известное явление миграции очагов землетрясений).

Переходный процесс может привести как к изменениям в семантической аномалии – изменяются параметры типовых процессов, сами процесс заменяются другими, так и к её полному или частичному разрушению и возникновению новых семантических аномалий. Физически такой катастрофический сценарий означает крупномагнитудное землетрясение. Используя биоценотическую аналогию, можно сказать, что подготовка крупномагнитудного землетрясения означает достижение края гомеостатического плато. В этом случае можно или путём искусственного воздействия удержаться на плато, или точно спрогнозировать пространственно-временные координаты землетрясения для последующей эвакуации.

Как будет показано в следующем параграфе, семантическую аномалию в гомеостатический период можно распознать, например, по логнормальным распределениям частот геоакустической эмиссии. На этом этапе также возможно микроволновое стимулирование или иное воздействие на земную кору с целью «тренировки иммунитета» - то есть стимулирования разнообразия типовых процессов, достигаемого за счёт перестройки геологической среды на атомно-молекулярном уровне.

4. Метрономные цепочки и логнормальное распределение

Термин «метроном», который будет использован авторами в этом параграфе, пришёл из медицины.

Назовём типовой процесс P метрономом для типового процесса Q, если отношение $f_{Q/P}$ числа воспроизведений Q к числу воспроизведений P (в определённом временном окне T_p, зависящем от типового процесса Q) – случайная величина с известным распределением. Физически предполагается, что процесс-метроном P фундаментален для Q и потому независим от Q. Метроном можно назвать идеальным, если $f_{Q/P}$ - неслучайная величина.

Предположим, что имеется цепочка типовых процессов $P_1,\dots,P_n$, такая что P_i является метрономом для $P_{i+1}, i=1,2,\dots,n-1$. Такую цепочку типовых процессов назовём метрономной. В случае идеальных метрономов метрономную цепочку бу-

дем называть идеальной. Если первый в цепочке процесс P_1 воспроизводится по неслучайному расписанию, то будем называть метрономную цепочку регулярной.

Пусть последний в цепочке типовой процесс P_n доступен для наблюдения. Процесс P_1 является метрономом для P_n и $f_{P_n/P_1} = \prod_{i=1}^{n-1} f_{P_{i+1}/P_i}$. В идеальной метрономной цепочке P_n воспроизводится по неслучайному расписанию. Рассмотрим случай достаточно длинной регулярной неидеальной цепочки. Согласно сказанному выше о физической фундаментальности типового процесса-метронома, случайные величины f_{P_{i+1}/P_i} можно считать независимыми. При определённых дополнительных условиях их произведение, согласно центральной предельной теореме, будет иметь распределение, близкое к логарифмически нормальному. В случае метрономной цепочки, не являющейся регулярной, логнормальные распределения могут быть выявлены при правильно проведённом спектральном анализе.

Отметим, что логнормальные распределения в сейсмологии выявили сравнительно недавно. Речь идёт о распределении частот в импульсах высокочастотной геоакустической эмиссии. Это стало возможно благодаря применению современного инструмента спектрального анализа – разреженной аппроксимации с использованием словаря Берлаге $g(t) = At^n e^{-Bt} \sin(2\pi ft)$, напоминающими по форме импульсы высокочастотной ГАЭ.

По мнению авторов, выявление логнормальных распределений в спектре ГАЭ свидетельствует о начале нового этапа в сейсмологическом прогнозировании. Сама по себе разреженная аппроксимация может рассматриваться как примитивный семантический анализ, который в перспективе можно значительно усовершенствовать, имея информацию о типовых тектонических процессах. Это трудная задача, требующая значительной вычислительной мощности.

5. Заключение

Нами были предложены использовать в качестве дополнительных датчиков в системах глобального мониторинга землетрясений датчики, основанные на интернет-вещах, в которые можно трансформировать все косные и живые объекты окружающей существующую станцию среды. В этой гибридной глобальной мониторинговой системе совместная обработка сигналов, получаемых с датчиков разной физической природы с сигналами с существующих сейсмических станций, позволяет методом синхронизации обеспечить более ранее выявление наступающего землетрясения. А выявленное даже малое время за счет индивидуализированной системы управления спасением людей можно их вывести в безопасное время и тем радикально снизить человеческие и материальные потери от землетрясений.

При анализе влияния сигналов-предвестников на датчики интернета-вещей мы принимали во внимание, что сигналы – предвестники выступают как модулирующие помехи типовых процессов в дополнительных датчиках на базе интернета-вещей. Так впервые было обращено внимание на возможную роль типовых процессов, направленных на поддержание гомеостаза в данном объекте:

начало физического воздействия внешней силы (готовящегося землетрясения) на стабильное существование объектов природы.

Возможность использования нашего подхода, улучшить предсказательный потенциал существующих систем мониторинга за землетрясениями, признана мировым сообществом и в настоящее время мы совместно с ГЕОХИ РАН, ИФЗ РАН, ИСУ РАН и др. создали опытный участок на Северном Кавказе и провели первые эксперименты.

Мониторинг в реальном времени с элементами управления типовыми процессами может дать новый очень чувствительный инструмент для сейсмопрогноза. На предварительном этапе важно выявить колебательные движения блоков земной коры, способные стать основой типовых процессов. Для выявления нужно рассматривать индикаторы, такие как падение фрактальной размерности (Любушин) или логнормальные распределения для высокочастотной ГАЭ (Марапулец). Нами было предложено объяснение логнормальности, опирающееся на блочно-иерархическую модель земной коры (так называемые метрономные цепочки). Важной задачей является и создание математической теории типовых процессов: здесь практика пока опережает теорию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сарьян В.К., Дубнов Д.В. О влиянии типовых информационных процессов на эволюцию информационно-управленческих сетей. // Труды НИИР. – 2010.
2. Кузнецов В. Физика землетрясения и сопутствующих ему явлений в литосфере, атмосфере, ионосфере и магнитосфере. // Институт нефтегазовой геологии и геофизики СОРАН, 2006, Новосибирск.
3. Новоселов О. Новые методы идентификации и анализа состояния природных объектов по данным мониторинга. // Московский государственный университет леса, 2008.
4. Lyubushin A.P. Prognostic properties of low frequency seismic noise. // Natural Science, 2012, 4(8A), pp 659-666.
5. Бучаченко А. Микроволновое стимулирование дислокаций и магнитный контроль очага землетрясения. // УФН, 189:1 (2019), 47–54.
6. Уломов В. Взрывы и землетрясения. Вспоминая о встречах с академиком М.А.Садовским // М.: НАУКА. 2004. С. 175 - 184.
7. Сарьян В.К., Русаков А.А., Назаренко А.Р., Дубнов Д.В. Использование понятия «типовой процесс» в системах машинного обучения и искусственного интеллекта. // Международный научный журнал «Современные информационные технологии и ИТ-образование. Когнитивные информационные технологии в системах управления», [S.l.], v. 15, n. 3, p. 693-701, sep. 2019. ISSN 2411-1473.
8. Сарьян В.К., Русаков А.А., Дубнов Д.В. Типовые процессы в физике и математике. // СПФМН. Материалы V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием 26 – 29 сентября 2019 г. Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2019. - С. 236-238.
9. Sarian, V.K. and Mkrtchyan, A.R. and Ermakov, V.V. and Nazarenko, A.P. and Lyubushin, A. and Meshcheryakov, R.V. (2020) *Hybrid monitoring systems for global processes. The results of the experiment at the first point of the hybrid system.* Armenian Journal of Physics, 13 (3). pp. 243-254. ISSN 1829-1171.

УДК 517.922

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ КАК ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Г. А. Свиридюк, д.ф.-м.н., проф.
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: *sviridyukga@susu.ru*
А. В. Келлер, д.ф.-м.н., доц.
Воронежский государственный технический университет
e-mail: *alevtinak@inbox.ru*

В теории динамических измерений выделяют два типа обратных задач. Наиболее сложной из них является восстановление входящего сигнала по наблюдаемому при известных параметрах измерительной системы. В последнее время активно развивается теория оптимальных динамических измерений, основной идеей которой является в качестве математического аппарата использовать не методы теории обратных задач, а методы теории оптимального управления. В докладе представлен обзор математических моделей как измерительного устройства, так и оптимальных динамических измерений.

Ключевые слова: оптимальное управление, динамические измерения, системы леонтьевского типа, оптимальные динамичсекие измерение, математическое моделирование.

Введение

В теории динамических измерений из трех основных задач наиболее сложной признается вторая обратная задача - задача восстановления входящего сигнала по известным параметрам измерительного устройства (ИУ) и наблюдаемомого сигнала [1]. Основным математическим инструментарием для решения обратных задач динамических измерений вляются методы теории обратных задач [2].

На современном этапе развития теории динамических измерений активно ведутся исследования в двух направлениях. Первое связано с оцениванием неопределенности в динамических измерениях, например, [3], второе развивает методологию применения теории автоматического управления для решения задач динамических измерений [4]. В рамках развития второго направления разрабатывались не только различные технические решения, но и развивались математические методы решения задач динамических измерений. Так, для решения задачи по восстановлению динамически искаженного сигнала А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком была сформулирована первая задача оптимальных динамических измерений, в которой восстанавливаемый сигнал определяется как решение задачи оптимального управления [5] для системы леонтьевского типас начальными условиями Шоуолтера–Сидорова. Отметим, что использование начального условия Коши требует проверки согласованности начальных условий, что приводит к трудоемкой и малоэффективной работе при нахождении численных решений задач оптимального динамического измерения [6]. Использование условия Шоуолтера – Сидорова привела к возможености исапользования численных алгоритмов задач оптимального управления для систем леонтьевского

[1]Работа проводилась при поддержке гранта Минобрнауки РФ №FENU-2020-0022 (2020072ГЗ)

типа в решении прикладных задач, в том числе и задач оптимальных динамических измерений [7].

Формирование теории оптимальных динамических измерений включало в себя построение математических моделей и разработку численных методов. Келлер А.В. и Назарова Е.И. численно исследовали задачу оптимального динамического измерения как задачу жесткого управления в предположении, что искажение сигнала обусловлено только инерционностью ИУ [8]. Худяков Ю.В. разработал алгоритм численного решения задачи восстановления динамически искаженного сигнала не только с учетом инерционности, но с учетом и резонансов [9]. Кроме того, им показано, что система леонтьевского типа становится основой математической модели измерительной системы, содержащей несколько измерительных устройств, между которыми есть только алгебраические связи [10]. Активное развитие теории оптимальных динамических измерений стали возможны благодаря развиваемой Свиридюком Г.А. и его учениками теории оптимального управления решениями уравнений соболевского и леонтьевского типов [11, 12].

1. Обратная задача динамических измерений как задача жесткого управления

Представим математическую модель ИУ как совокупность системы леонтьевского типа и начального условия Шоуолтера–Сидорова

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu, \\ \quad y = Cx + D\eta, \end{cases} \tag{1}$$

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L\right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0. \tag{2}$$

Здесь $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно; $u(t)$ и $y(t)$ – вектор-функции входящего и выходящего сигнала соответственно; L, A – квадратные матрицы порядка n, матрица состояний ИУ A является (L,p)-регулярной [7], матрица взаимовлияния скоростей состояния L в зависимости от моделируемого ИУ может быть или единичной или вырожденной ($detL = 0$) [10], матрицы C и D определяют связи между состоянием системы и наблюдением. Начальное условие Шоуолтера–Сидорова [6] задает состояние ИУ в начальный момент времени. При решении задач динамических измерений принято считать, что в начальный момент времени ИУ находится в покое.

Будем ставить задачу оптимального динамического измерения как задачу оптимального управления, поэтому введем в рассмотрение пространства состояний χ, измерений $\mathfrak{U}$ и наблюдений $\mathfrak{Y}$:

$$\chi = \{x \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n)\},$$

$$\mathfrak{U} = \left\{ u \in L_2\left((0,\tau),\mathbb{R}^n\right) : u^{(p+1)} \in L_2\left((0,\tau),\mathbb{R}^n\right) \right\}$$

$$\mathfrak{Y} = C[\chi].$$

Введем в рассмотрение функционал штрафа

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^{\tau} \left\| S y^{(q)}(u,t) - S y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt. \tag{3}$$

Здесь $y_0(t))$ – вектор-функция наблюдений, получаемая интерполяцией массива значений выходящего сигнала, сниимаемых реальным ИУ. е в ходе натурного эксперимента, $y(t)$ – вектор-функция наблюдений, получаемая как результат математического моделирования, $||\cdot||$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Обычно матрица S является единичной, но в общем случае, при моделировании сложных систем, будем допускать случай, когда входящее воздействие восстанавливается не по всем наблюдаемым откликам системы, а по некоторым из них.

В пространстве измерений выделим компактное выпуклое множество допустимых измерений $\mathfrak{U}_\partial$

$$\mathfrak{U}_\partial = \left\{ u \in \mathfrak{U} : \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^{\tau} \left\| u^{(q)}(t) \right\|^2 dt \le d \right\}, \tag{4}$$

где $d = const$ – известная величина, являющаяся аналогом общей энергии входящего воздействия.

Основным требованием при разработке технических решений – постороение модели датчика – является близость значений сигнала на выходах датчика и модели датчика, так как при этом значения на входах датчика и модели датчика будут различаться незначительно. Это же требование положено в основу вида функционала штрафа в моделях оптимального динамического измерения. При этом необходимо найти такую вектор-функцию входящего сигнала $v \in \mathfrak{U}_\partial$, которая обеспечивала бы минимальное значение функционала (3):

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u), \tag{5}$$

при этом $x(v) \in \chi$ удовлетворяет системе (1) почти всюду на $(0,\tau)$ и при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(M)$ – условию Шоуолтера–Сидорова (2)

Таким образом, решение задачи (1) – (5) позволяет решать вторую обратную задачу динамических измерений, сама математическая модель получила название модели оптимальных динамических измерений, а найденная при этом вектор-функция $v(t)$ как решение задачи оптимального управоления (1)–(5) – оптимальным динамичсеикм измерением.

Необходимо отметить, что, в отличии от технических решений, в модели оптимальных динамических измерений учитывается требование близости не

только значений реального и моделируемого наблюдения, но и скоростей их изменения. Это условие позволяет более точно на множестве допустимых измерений получить вектор-функцию входящего воздействия.

Функционал штрафа (3) может быть использован как при моделировании в предположении отсутствия помех (т.е. учитывается только инреционность ИУ), так и при наличии помех на выходе ИУ.

2. Обратная задача динамических измерений как задача оптимального управления

При рассмотрении задачи восстановления динамически искаженного сигнала при наличии детерминированных помех и в цепях ИУ может быть рассмотрен другой вид функционала качества. К детерминированным будем относить помехи, вызванные, прежде всего резонансами как в цепях ИУ, так и на выходе ИУ. Механическая инерционность измерительного устройства (ИУ) всегда вносит динамическую погрешность, в результате чего наблюдается «сглаживание» пиков входных сигналов и их запаздывание. Детерминированный помехи не изменяются от эксперимента к эксперименту.

Конструкция ИУ моделируется системой (1), но при названных в начале параграфа условиях вектор-функция измерений (или входящего воздействия)

$$u = col\,(u_1 + \zeta_1, \ldots, u_n + \zeta_n)$$

включает как входящий сигнал $col(u_1, \ldots, u_n)$, так и детерминированные помехи в цепях ИУ $col\,(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Кроме того, детерминированные помехи присутствуют и на выходе ИУ $col\,(\eta_1, \ldots, \eta_k)$. Начальное состояние ИУ моделируется начальным условием Шоуолтера – Сидорова (2) [6]. Наличие детерминированных помех в цепях ИУ обусловило следующий вид функционал штрафа

$$J(u) = \alpha \sum_{q=0}^{1} \int_0^{\tau} \left\| Sy^{(q)}(u,t) + S\overline{y}_0^{(q)}(t) - Sy_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt +$$

$$+\beta \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \langle F_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \rangle dt, \qquad (6)$$

где $y_0(t)$, $y(t)$ и S имеют тот же смысл, что и в функционале штрафа (3), $\overline{y}_0(t)$ – наблюдения, снимаемые с реального ИУ при отсутствии полезного сигнала, F_q – симметричные неотрицательно определенные матрицы порядка n, $||\cdot||$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Функционал штрафа содержит два слагаемых, при поиске его минимума будем находить оптимальное динамическое измерение, которое обеспечивает:

1) минимальное отклонение значений вектор-функций выходных сигналов – «реального» и моделируемого, их производных, при этом в качестве «реального»

сигнала понимается разность наблюдаемых сигналов, полученных в результате двух экспериментов – с восстанавливаемым сигналом и при его отсутствии;

2) нивелирование воздействия резонансных помех.

Таким образом, второе слагаемое играет роль резонансных фильтров. Отметим, что α и β – весовые коэффициенты двух целей функционала качества, вариация которых позволит оценить взаимосвязь точности восстанавливаемых измерений и нивелирования резонанса: $\alpha > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Заметим также, что $\theta = 0, 1, \ldots, p+1$ и определяется смыслом функицонала качеств, причем в большинсте приложений $\theta = 2$.

Восстановленный сигнал здесь – это точка минимума функционала, т.е. выполняется (5).

Для исследования модели оптимального динамического измерения с помехами рассмотрим сначала первое уравнение системы (1)

$$L\dot{x} = Ax + Bu, \tag{7}$$

где матрица A (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ с начальным условием(2).

Т е о р е м а 1. Пусть матрица A (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $detA \neq 0$. Тогда для любых $\tau \in \mathbb{R}_+$, $u \in \mathfrak{U}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное сильное решение задачи (2), (7), которое к тому же имеет вид

$$x(t) = -\sum_{k=0}^{p} (A^{-1}(I-Q_k)L)^q A^{-1}(I-Q_k)Bu^{(k)}(t) + X^t x_0 + \int_0^t R^{t-s}Q_k Bu(s)ds.$$

где

$$Q_k = \left(kL_k^L(M)\right)^{p+1},\ X_k^t = \left((L - \frac{t}{k}M)^{-1}L\right)^k,$$

$$R_k^t = \left((L - \frac{t}{k}M)^{-1}L\right)^{k-1}\left(L - \frac{t}{k}M\right)^{-1}.$$

Точка минимума $v \in \mathfrak{U}_\partial$ (4) функционала J (6) будет *оптимальным динамическим измерением модели с детерминированными помехами*.

Т е о р е м а 2. Пусть матрица A (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $detA \neq 0$. При любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, $k = 0, 1, \ldots, p+1$ существует единственное оптимальное динамическое измерение.

Существование единственного оптимального измерения – следствие теоремы Мазура о минимуме непрерывного выпуклого функционала на замкнутом выпуклом множестве U_∂

Заключение

Отметим, что в настоящее время исследуются модели оптимальных динамических измерений со случайными помехами [13] и разрабатываются алгоритмы численного исследования задачи восстановления динамически искаженных

сигналов [14]. Вычислительные эксперименты, проводимые на данных как модельных примеров, так и стендовых испытаний аналоговых датчиков показали высокую эффективность методов теории оптимальных динамических измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грановский В. А. Динамические измерения: теория и метрологическое обеспечение вчера и сегодня // Датчики и системы. — 2016.— 3 (201).— С. 57–72.
2. Ruhm K. H. Measurement Plus Observation – a Modern Structure of Metrology // XXI IMEKO World Congress "Measurement in Research and Industry", August 30 - September 4,— 2015, Prague.
3. Elster C., Eichstädt S., Link A. Uncertainty evalution of dynamic measurements in line with the GUM // Proc. XIX IMEKO World Congr., Lisbon, Sept. — 2009.
4. Шестаков А. Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях.— Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. — 2013. — 257 с.
5. Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2010. — 16(192).— С. 116–120.
6. Свиридюк Г. А., Загребина С. А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2010. — 3 (1). — С. 104–125.
7. Keller A. V. On the computational efficiency of the algorithm of the numerical solution of optimal control problems for models of LeontiefF type // Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 2015. — 2 (2).— С. 39–59.
8. Келлер А. В., Назарова Е. И. Свойство регуляризуемости и численное решение задачи динамического измерения // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование.—2010. — 16 (192).// Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 2015. — 2 (2).— С. 32–38.
9. Shestakov A. L.,Sviridyuk G. A, Khudyakov Yu. V. and other. The numerical algorithms for the measurement of the deterministic and stochastic signals // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.—2015.—113. pp. 183-195.
10. Khudyakov Yu. V. On mathematical modeling of the measurement transducers // Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 3 (3). — 2016.— С. 68–73.

11. Замышляева А. А., Манакова Н. А., Цыпленкова О. Н. Оптимальное управление в линейных математических моделях соболевского типа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование.—2020.—13 (1)— С. 5–27.

12. Келлер А. В., Сагадеева М. А. Задача оптимального измерения для модели измерительного устройства с детерминированным мультипликативным воздействием и инерционностью // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование.—2014.—7 (1)— С. 134–138.

13. Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А., Замышляева А. А. и др. Теория оптимальных динамических измерений как новая парадигма метрологии // Journal of Computational and Engineering Mathematics.–2020.—7 (1)— С. 3–23.

14. Shestakov A. L, Sviridyuk G. A, Keller A. V. and other. Numerical investigation of optimal dynamic measurements // Acta IMEKO.—2018.—7 (2).— P. 65–72.

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ КОНТРОЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ИЗДЕЛИЙ ПУТЕМ СТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА С ПРИМЕНЕНИЕМ КОНТРОЛЬНЫХ КАРТ ШУХАРТА. КАРТЫ СРЕДНЕГО И РАЗМАХОВ

А.Г. Семин
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева»
e-mail: *semin438@gmail.com*
Ю.А. Кошелева, доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева»
e-mail: *virginia97@mail.ru*
М.А. Музалевская, к.э.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева»
e-mail: *inf_muz@mail.ru*

В настоящее время в связи с бурным развитием машинного зрения, становится особенно актуальной задача контроля изделия и выявление возможных отклонений от нормы. Основной целью работы являлось написание программы контроля геометрических параметров изделия с помощью статического анализа и с применением контрольных карт Шухарта, карт среднего и размахов. Созданная программа направлена на нахождение «брака» в производстве или возможной погрешности при производстве или пространственном сканировании изделия.

Ключевые слова: программа, контроль геометрических параметров изделия, статический анализ, контрольные карты Шухарта, карты среднего и размахов

В настоящее время в связи с бурным развитием машинного зрения, становится особенно актуальной задача контроля изделия и выявление возможных отклонений от нормы. Машинное зрение позволяет работать с особенностями предметов без участия человека, то есть устройство само может определить параметры изделия и впоследствии использовать их для выполнения ряда определённых задач и функций.

Основной целью работы являлось написание программы контроля геометрических параметров изделия с помощью статического анализа и с применением контрольных карт Шухарта, карт среднего и размахов [1]. Данная программа сравнивает геометрические параметры изделий и, опираясь на карты Шухарта, делает соответствующий вывод о схожести. Одной из сфер применения данной программы может стать нахождение несоответствий созданного при производстве изделия с эталонным изделием.

Данная программа подразумевает контроль изделия и выявление возможных отклонений от норм. Контрольные карты Шухарта - это инструмент или же график, отображающий изменения процесса по прошествии определённого интервала времени. Эти карты предназначены для отслеживания процесса. С их помощью можно определить нестабильность и получить процесс, которым можно управлять, и без которого невозможны дальнейшие улучшения.

Программа, зная параметры изделия и зная те же параметры, полученные путём сплошного контроля изделия, находит отклонения при помощи карты среднего и размахов, отображает их и оповещает о состояние процесса. Именно

из-за этих задач следуют использовать контрольные карты Шухарта, преимущества которых отлично подходят для реализации программы. Созданная программа направлена на нахождении «брака» в производстве или возможной погрешности при производстве или пространственном сканировании изделия. Также стоит отметить, что при помощи этой программы можно отслеживать количество испорченных изделий за определённый период времени и анализировать проблемы, которые могли бы повлиять на это.

Это задачу можно назвать принципиально новой, так как существуют программы, которые направлены на решение данной проблемы, но на данный момент они находятся в стадии доработки или улучшения. Такие программы могут найти применение не только в производстве, но и в медицине для изучения физиологии человека.

Реализация поставленной цели производилось с использованием возможности объектно-ориентированного программирования на языке C++ [2]. Средой разработки стала платформа для написания приложений Qt. Данная платформа находится в свободном доступе и может быть установлена бесплатно.

Работа программы построена на сравнении точек предметов и нахождении расстояния отклонений между ними. Для наглядности использовались спичечные коробки и были созданы файлы с их контрольными точками, а именно восемью крайними точками. После работы программы в основном окне программы выводятся графики среднего и размахов, а также соответствие изделий образцу.

Основной целью программы является оповещение о приемлемости процесса, а именно схожести изделий, и отображение этого процесса по принципу карт Шухарта, карт среднего и размахов (вывод графика). Работа данной программы осуществляется нахождением отклонений точек измеряемого изделия, загруженных из файлов (в файлах находятся координаты контрольных точек изделия), от точек эталонного изделия по принципу нахождения расстояния вектора между двумя соответственными точками и отображении полученного значения на графиках.

Так как карты среднего и размахов подразумевают, что у нас есть определённый размах в подгруппах, то следует использовать больше двух изделий, чтобы просматривались различия длин векторов в подгруппе. Для наглядности используются пять изделий одного типа, но имеющие разные размеры, как следствие разное расположение точек в пространстве. Графики карт среднего и размахов выводится в одно пространство, для их различия они изображаются разными цветами. Состояние процесса прописывается в тестовом блоке в зависимости от разницы между изделиями.

Для работы программы были созданы необходимые документы. В файлах на каждой строке записаны координаты точек взятого предмета, которыми они определяются в пространстве. Данные файлы заполнялись координатами точек спичечного коробка. Были измерены четыре спичечных коробка разных фирм и размеры этих же коробков в соответствие с ГОСТом [3]. В соответствии с ГОСТом размеры данных спичечных коробках должны быть равны 50,5 мм в

длину, 37,5 мм в ширину и 14,5 мм в высоту. Измерения проводились штангенциркулем и, впоследствии, рассчитывались координаты крайних точек в зависимости от размера предмета.

На рисунке 1 представлено расположение крайних точек спичечного коробка и порядок их записи в файл. Для удобства последующей работы в программе, все точки в файлах заполнялись соответственного. В файлах точки распределены по три в строке, разделение между целой и дробной частью числа осуществляется «.», а разделение точек производилось «,».



Рисунок 1 - Спичечный коробок с пронумерованными крайними точками

В данном случае программа на рисунке 2 выводит оповещение о том, что размеры спичечных коробков имеют большие отличия от размеров, прописанных в ГОСТе. Так как в данной программе используется методы Шухарта, они допускают отклонения от норм, эти отклонения в каждом случае могут быть разными и зависят от многих факторов (количество элементов в подгруппах, первоначальные размеры предметов).

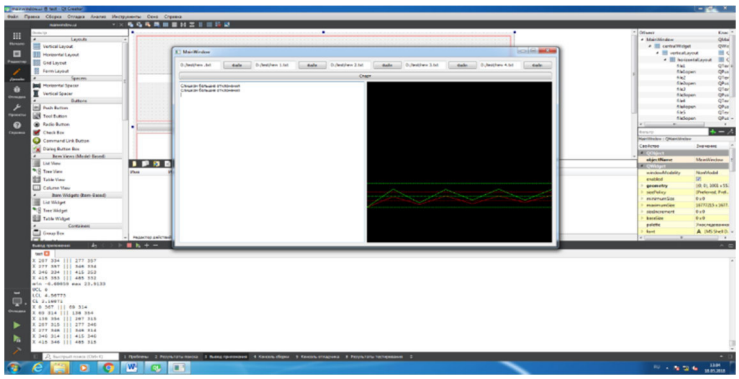


Рисунок 2 - Работа программы

В результате применения полученной программы, был сделан вывод о том, что метод контрольных карт Шухарта, в частности карт среднего и размахов, является одним из возможных методов контроля геометрических параметров изделий.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ Р 50779.42-99. Статистические методы. Контрольные карты Шухарта [Электронный ресурс]: - Режим доступа: http://docs.cntd.ru/document/gost-r-50779-42-99
2. Васильев А.Н. Объектно-ориентированное программирование на C++ [Электронный ресурс] / А.Н. Васильев. - Электрон. текстовые данные. - СПб. : Наука и Техника, 2016. - 544 c. - 978-5-94387-984-5. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/60648.html
3. Гост 1820-85. Спички. Технические нормы.[Электронный ресурс]: - Режим доступа: http://meganorm.ru/Data/451/45102.pdf

УДК 622.276.5+51-7

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАВИСИМОСТИ ПЛАСТОВОГО ДАВЛЕНИЯ ОТ НАКОПЛЕННОГО ОБЪЕМА ДОБЫТОГО ГАЗА

В.А. Толпаев, К.С. Ахмедов
АО «Северо-Кавказский научно-исследовательский
проектный институт природных газов»
АО «СевКавНИПИгаз»

В разрабатываемых авторами физико-математических моделях расчета прогнозных дебитов газовых скважин важную роль играют аппроксимационные зависимости пластового давления от накопленного объема добытого газа. Целью данной статьи является построение и исследование аппроксимационных математических моделей зависимости пластового давления p от накопленного объема V_Σ добытого газа.

Следуя Лапуку Б. Б., будем рассматривать однородную изотропную модель пласта в виде кругового цилиндра с радиусом R и высотой b с непроницаемыми боковыми стенками, подошвой и кровлей. Процесс фильтрации газа в пласте рассматривается как изотермический, фильтрация подчиняется закону Барри-Конвея, частными случаями которого служат линейный закон Дарси и двучленный закон Форхгеймера. Силой веса газа по сравнению с силами давления можно пренебречь. Приток газа к скважине в её зоне дренирования моделируется как плоскорадиальный.

Изотермический характер фильтрации газа приводит к следующему классическому уравнению состояния реального газа в пласте

$$\rho = \zeta_г \cdot \rho_{ат} \cdot \frac{p}{p_{ат}} \tag{1}$$

Пусть такой пласт вскрыт по оси симметрии центральной круговой скважиной с радиусом r_c, и в начальный момент времени $t = 0$ давление газа в пласте равнялось p_0. При работе скважины на отбор газа давление в пласте будет падать пропорционально объему выбранного из пласта газа. Для перечисленных условий Лапуком Б. Б. в [1] было выведено следующее дифференциальное уравнение истощения газовой залежи, описывающее динамику падения пластового давления

$$dp = p(t+dt) - p(t) = -\frac{p_{ат}}{\zeta_г} \cdot \frac{Q(t) \cdot dt}{V_п(p)}. \tag{2}$$

В уравнениях (1) и (2)

$$\zeta_г = \frac{T_{ат} \cdot z_{ат}}{T_{пл} \cdot z_{пл}} = const, \tag{3}$$

ρ – плотность газа, кг/м^3; p – абсолютное давление, МПа; $\rho_{ат}$ и $z_{ат}$ значение плотности природного газа и фактора сжимаемости при нормальных атмосферных условиях $p_{ат} = 0{,}101325\ МПа$, $T_{ат} = 20°C = 293{,}15\ K$, $T_{пл}$ и $z_{пл}$ температура и фактор сжимаемости газа при пластовых условиях. Далее, $Q(t)$ - дебит скважины при нор-

мальных атмосферных условиях, $V_n(p)=\pi\cdot R^2\cdot b\cdot m(p)$ - объем порового пространства в дренируемой скважиной зоне пласта, который, строго говоря, может зависеть от давления газа в пласте, поскольку пористость $m(p)$ – функция давления.

После разделения переменных и интегрирования обеих частей (2) получаем уравнение

$$\int\limits_{p_{нач}}^{p}\frac{\zeta_г\cdot V_n(p)}{p_{ат}}dp=-V_\Sigma(t), \tag{4}$$

в котором $V_\Sigma(t)=\int\limits_{t_{нач}}^{t}Q(t)\cdot dt$ - накопленный объем отобранного скважиной газа, а $p_{нач}$ начальное пластовое давление в момент времени $t=t_{нач}$. Подчеркнем, что в соответствии с определением $V_\Sigma(t)$ в начальный момент времени $V_\Sigma(t_{нач})=0$.

Отметим важные следствия, вытекающие из основного дифференциального уравнения (2) динамики пластового давления и его интегральной формы (4)

Первое. В частном случае, когда продуктивные пласты залегают на глубинах не более 2 *км* и горное давление мало, можно пренебречь зависимостью объема порового пространства от пластового давления и принять $V_n(p)=V_{n0}=const$. Тогда из (4) получаем, что

$$p(t)=\varphi_1(V_\Sigma)=p_{нач}-\alpha\cdot V_\Sigma(t),\quad \text{где}\quad \alpha=\frac{p_{ат}}{\zeta_г\cdot V_{n0}}. \tag{5}$$

Таким образом, из общего дифференциального уравнения (2) для неглубоко залегающих продуктивных пластов вытекает классический результат – линейная зависимость пластового давления от накопленного объёма газа отобранного из пласта.

Второе. В тех случаях, когда продуктивные пласты залегают на глубинах более 2 *км*, но горное давление не меняется со временем $P_{грн}=const$, обычно считают пористость пласта, а значит и объем $V_n(p)$ порового пространства, зависящим только от пластового давления. Принимая, что это линейная зависимость [2]

$$V_n(p)=V_{n0}\cdot\left[1+\beta_V\cdot\left(p-p_{нач}\right)\right], \tag{6}$$

где $\beta_V>0$ - коэффициент сжимаемости пористого скелета пласта, видим, что с уменьшением пластового давления объем порового пространства также уменьшается. После подстановки (6) в (4) приходим к следующей зависимости пластового давления от накопленного объема извлеченного газа:

$$\frac{\zeta_г\cdot V_{n0}}{p_{ат}}\cdot\left[\left(p-p_{нач}\right)+\frac{\beta_V}{2}\cdot\left(p-p_{нач}\right)^2\right]=-V_\Sigma(t). \tag{7}$$

Для упрощения дальнейших расчетов квадрат разности $\left(p-p_{нач}\right)^2$ в (7) заменим, согласно формуле (5), на величину $\left[p_{ат}\cdot\frac{V_\Sigma(t)}{\zeta_г\cdot V_{n0}}\right]^2$. Такая замена в силу мало-

сти коэффициента $\frac{\beta_V}{2}$ перед вторым слагаемым в (7) существенно не повлияет на погрешность дальнейших расчетов, но позволит оптимизировать расчетный алгоритм. В результате замены после преобразований получаем уравнение

$$p(t) \cong \varphi_2(V_\Sigma) = p_{нач} - \alpha \cdot V_\Sigma(t) - \gamma \cdot V^2{}_\Sigma(t), \tag{8}$$

которое уточняет уравнение (5). Коэффициенты α и $\gamma = \frac{\alpha^2 \cdot \beta_V}{2}$ в уравнении (8) следует вычислять на основании накопленных исходных геолого-промысловых данных, например, методом наименьших квадратов (МНК).

Третье. Для глубоко залегающих пластов зависимость объема $V_n(p)$ порового пространства от пластового давления авторы предлагают моделировать гиперболической функцией вида

$$V_n(p) = \frac{V_{n0}}{1 + \gamma_V \cdot \left(1 - \frac{p}{p_{нач}}\right)}, \quad \text{где } \gamma_V = \frac{\frac{V_{n0}}{V_{n\,min}} - 1}{1 - \frac{p_{min}}{p_{нач}}} > 0. \tag{9}$$

Рациональность применения данной функции в том, что коэффициент сжимаемости пористого скелета пласта γ_V здесь явным образом выражен через начальное максимальное V_{n0} и конечное минимальное $V_{n\,min}$ значение объема связного порового пространства, под которым понимается та часть пор, которые сообщаются друг с другом, что и делает возможным движение флюида в пласте. Значения V_{n0} и $V_{n\,min}$ объема связного порового пространства имеют место в начале разработки месторождения при начальном пластовом давлении $p_{нач}$ и в конце разработки месторождения, когда пластовое давление снижается до минимального значения p_{min}. После подстановки (9) в (4) и тождественных алгебраических преобразований приходим к следующей зависимости пластового давления от накопленного объема извлеченного газа:

$$\frac{p}{p_{нач}} = 1 - \frac{exp\left[\delta \cdot V_\Sigma(t)\right] - 1}{\gamma_V}, \quad \text{где} \quad \delta = \frac{p_{am} \cdot \gamma_V}{\zeta_г \cdot V_{n0} \cdot p_{нач}}. \tag{10}$$

Начальное пластовое давление $p_{нач}$ в формуле (10) можно взять на основании оценок этого же параметра, которые дают 1-ая и 2-ая математические модели (5) и (8) соответственно. Таким образом, основная трудность практического применения формулы (10) в определении по исходным данным входящих в неё параметров δ и γ_V. На помощь при расчете параметра δ приходит тот факт, что можно использовать коэффициент $\alpha = \frac{p_{am}}{\zeta_г \cdot V_{n0}}$ из линейной математической модели (5). Тогда для расчета параметра δ можно предложить формулу

$$\delta = \frac{\alpha \cdot \gamma_V}{p_{нач}}. \qquad (11)$$

Итак, по существу, в формуле (10) остается лишь один неизвестный параметр γ_V, который можно подобрать путем проведения вычислительных экспериментов по заданным исходным промысловым данным. В качестве окончательного значения параметра γ_V берем то, которое обеспечивает минимум суммы квадратов отклонений пластового давления по формуле (10) от заданных промысловых данных.

Четвертое. Для проведения дальнейших расчетов вместо физических размерных величин $Q(t)$ и $V_\Sigma(t)$ будем применять безразмерные переменные $q = \frac{Q}{Q_0}$ и $v = \frac{V_\Sigma}{V_{\Sigma 0}}$, где Q_0 и $V_{\Sigma 0}$ - выбранные базисные единицы измерения дебита и накопленного отобранного объема газа соответственно. Размерность $dim\left(\frac{V_{\Sigma 0}}{Q_0}\right)$ совпадает с размерностью времени. Поэтому перейдём также к безразмерному времени $\tau = \frac{t}{T}$, где $T = \frac{V_{\Sigma 0}}{Q_0}$ - масштабная единица времени. Для введения в расчетах безразмерных давлений выберем базисную единицу давления p_0. Формулы (5), (8) и (10) с учетом связей $p(t) = \tilde{p} \cdot p_0$, $p_з(t) = \tilde{p}_з \cdot p_0$, $p_{am} = \tilde{p}_{am} \cdot p_0$, $V_\Sigma = v \cdot V_{\Sigma 0}$, $V_{n0} = \tilde{V}_{n0} \cdot V_{\Sigma 0}$, $Q = q \cdot Q_0$ и $\tau = \frac{t}{T} = \frac{Q_0}{V_{\Sigma 0}} \cdot t$ в безразмерной форме примут следующий вид:

$$\tilde{p}(t) = \varphi_1(v) = \tilde{p}_{нач} - \tilde{\alpha} \cdot v, \quad \text{где} \quad \tilde{\alpha} = \frac{\tilde{p}_{am}}{\zeta_г \cdot \tilde{V}_{n0}}, \qquad (5^*)$$

$$\tilde{p}(t) \cong \varphi_2(v) = \tilde{p}_{нач} - \tilde{\alpha} \cdot v - \tilde{\gamma} \cdot v^2, \quad \text{где} \quad \tilde{\gamma} = \frac{\tilde{\alpha}^2 \cdot \tilde{\beta}_V}{2}, \quad \tilde{\beta}_V = \beta_V \cdot p_0. \qquad (8^*)$$

и

$$\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_{нач}} = 1 - \frac{exp\left[\tilde{\delta} \cdot v(t)\right] - 1}{\gamma_V}, \quad \text{где} \quad \gamma_V = \frac{\frac{\tilde{V}_{n0}}{\tilde{V}_{n\,min}} - 1}{1 - \frac{\tilde{p}_{min}}{\tilde{p}_{нач}}} > 0, \quad \tilde{\delta} = \frac{\tilde{p}_{am} \cdot \gamma_V}{\zeta_г \cdot \tilde{V}_{n0} \cdot \tilde{p}_{нач}}. \qquad (10^*)$$

(Во всех приведенных формулах знаком «тильда» отмечены безразмерные коэффициенты).

Пятое. Приведем тестовый пример построения аппроксимационных математических моделей зависимости пластового давления p от накопленного объема V_Σ добытого газа. Исходными промысловыми данными в примере выступают отчетные данные о добыче газа (в безразмерных величинах) с 01.01.2006 по 01.12.2008 по скважине №10401 Ямбургского НГКМ (неоком). Для перехода к безразмерным переменным выбирались следующие базисные единицы:

$$Q_0 = 148{,}47\ \frac{тыс.м^3}{сут} = 4454\ \frac{тыс.м^3}{мес},\qquad V_{\Sigma 0} = 4454\ тыс.м^3,\qquad T = \frac{V_{\Sigma 0}}{Q_0} = 1\,мес,$$

$p_0 = 180{,}14\ атм$.

Таблица 1 - Безразмерные исходные данные для скважины №10401

Номер месяца, τ	Дебит q	Накопленный объем v	Пластовое давление $\tilde{p}$	Номер месяца, τ	Дебит q	Накопленный объем v	Пластовое давление $\tilde{p}$
1	1,066707	1,066731	1	19	1,041887	20,75779	0,947287
2	1,071442	2,138197	0,997183	20	0,694046	21,45185	0,94389
3	1,19212	3,330344	0,994367	21	0,920193	22,37207	0,926186
4	1,110022	4,440391	0,99155	22	0,813215	23,1853	0,908481
5	1,064067	5,504481	0,988734	23	0,983283	24,1686	0,890777
6	1,028646	6,53315	0,985822	24	1,047484	25,21611	0,887334
7	1,102532	7,635707	0,98291	25	0,970526	26,18666	0,883891
8	1,036001	8,671731	0,979999	26	0,966074	27,15275	0,880448
9	1,142325	9,814082	0,977087	27	0,925776	28,07855	0,877079
10	1,082704	10,89681	0,974176	28	0,888826	28,9674	0,873711
11	1,05133	11,94816	0,971264	29	0,902762	29,87018	0,870343
12	1,110292	13,05848	0,968353	30	0,906028	30,77623	0,866883
13	1,050724	14,10923	0,965441	31	1,060524	31,83678	0,863424
14	1,110305	15,21956	0,962529	32	0,847006	32,6838	0,859965
15	1,099562	16,31914	0,959713	33	0,836438	33,52026	0,85652
16	1,016192	17,33536	0,956896	34	0,797919	34,31819	0,853075
17	1,220974	18,55636	0,95408	35	0,832889	35,1511	0,849631
18	1,159494	19,71588	0,950683	36	0,851903	36,00302	0,846186

Результаты расчетов прогнозных зависимостей пластового давления от накапливаемых объемов извлекаемого газа представлены в виде графиков на рисунке 1.

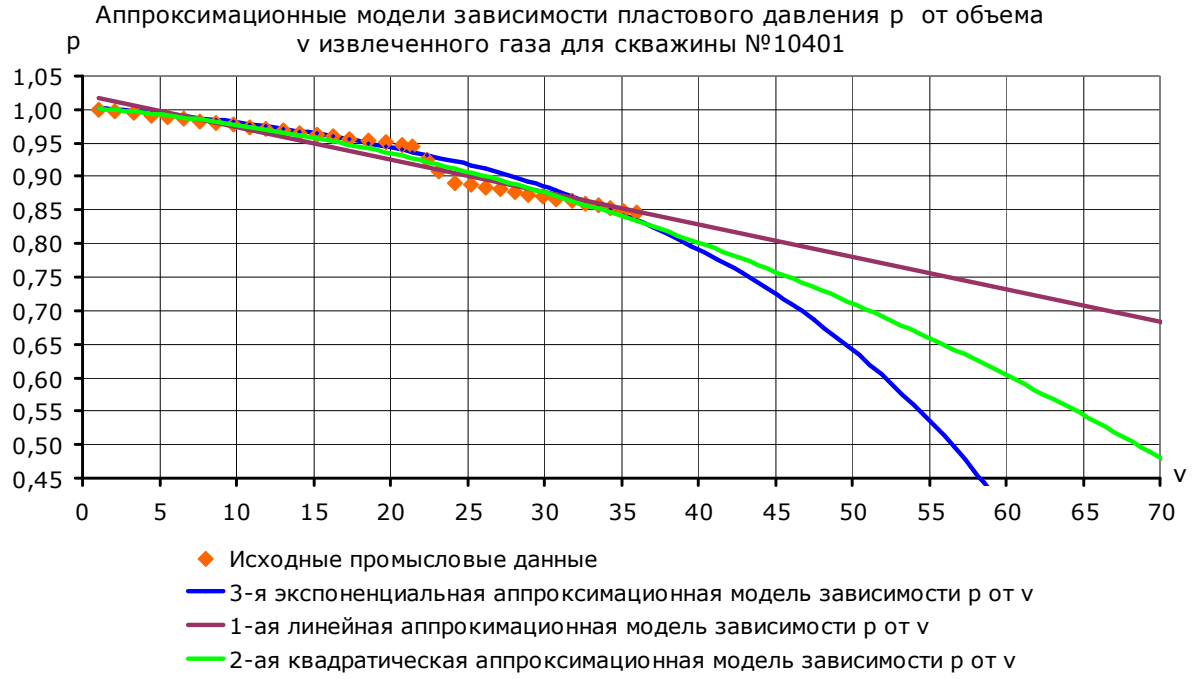


Рисунок 1 – Промысловые данные и графики аппроксимационных зависимостей пластового давления от накопленного объема извлеченного газа для скважины № 10401

Вычисленные по исходным данным с применением МНК параметры аппроксимационных математических моделей перечислены в таблице 2.

Таблица 2 - Параметры аппроксимационных математических моделей для расчета прогнозного пластового давления в зоне дренирования скважины №10401

Модель	Параметры моделей				
	$\widetilde{p}_{нач}$	$\widetilde{\alpha}$	$\widetilde{\gamma}$	γ_V	$\widetilde{\delta}$
1-я, линейная модель (уравнение (5^*))	1,0233	0,0049	-	-	-
2-я, квадратическая модель (уравнение (8^*))	1,0036	0,0018	$8\cdot10^{-5}$	-	-
3-я, экспоненциальная модель (уравнение (10^*))	1,0016	0,0018	-	26,45	0,047534

Как видно из графиков на рисунке 1, на этапе истории все модели дают практически совпадающие значения расчетов пластового давления, которые в пределах приемлемой точности совпадают с исходными данными. На этапе прогноза расчеты по аппроксимационным моделям пластового давления начинают «разбегаться». Поэтому и расчеты последующих прогнозных дебитов скважины, с применением представленных аппроксимационных моделей пластового давления, естественно тоже приведут к интервальным оценкам, что и должно быть с практической точки зрения.

Шестое. Аппроксимационные модели зависимости пластового давления от накопленного объема $V_{\Sigma}(t)$ отобранного газа можно применить к расчету объема дренирования конкретной скважины, радиусу объема дренирования и прогнозной оценки удельных извлекаемых объемов газа. Покажем, как, например, с помощью 1-ой линейной математической модели (5) можно получить перечисленные оценки.

Поскольку в 1-ой математической модели параметр $\alpha = \dfrac{p_{am}}{\zeta_г \cdot V_0}$, то объем дренируемого порового пространства с одной стороны будет равен $V_0 = \dfrac{p_{am}}{\zeta_г \cdot \alpha}$. С другой стороны, этот же объем равен $V_0 = \pi \cdot R^2 \cdot b \cdot m(p)$. Отсюда радиус дренируемой призабойной зоны пласта (ПЗП) будет равен $R = \sqrt{\dfrac{V_0}{\pi \cdot b \cdot m}} = \sqrt{\dfrac{p_{am}}{\pi \cdot b \cdot m \cdot \zeta_г \cdot \alpha}}$.

Приведем пример оценки радиуса объема дренирования скважины №10401 Ямбургского по исходным данным в таблице 1. Для пласта толщиной $b = 50\,м$ и пористостью $m = 25\%$, с составом газа, имеющим параметр $\zeta_г = 0{,}89958$, радиус дренируемой ПЗП $R = 512{,}88\ м$.

Другим полезным следствием, вытекающим из линейной зависимости (5), является возможность прогнозной оценки удельных извлекаемых объемов газа. Пусть к моменту времени t накопленный объем добытого газа равен $V_{\Sigma}(t)$ и пластовое давление равно $p(t)$. Допустим, что по техническим условиям сква-

жина может добывать газ, пока пластовое давление выше значения p_{min}. Значению давления p_{min}, по уравнению (5), соответствует объем отобранного газа $V_{\Sigma\ max}$, равный $V_{\Sigma\ max} = \frac{p_{нач} - p_{min}}{\alpha}$. Поэтому прогнозный удельный извлекаемый объем оставшегося в пласте газа $V_{\Sigma\ прогн}$ будет равен $V_{\Sigma\ прогн} = V_{\Sigma\ max} - V_{\Sigma}(t) = \frac{p(t) - p_{min}}{\alpha}$. Для скважины №10401 по приведенным данным получим, что после 36-го месяца, когда давление в пласте $p(t) = 152\ атм$, до тех пор, пока давление не снизится до $p_{min} = 30\ атм$, прогнозный извлекаемый объем газа равен $V_{\Sigma\ прогн} \cong 1410{,}6\ млн.\ м^3$.

Заключение

В статье предложены аппроксимационные математические модели зависимости пластового давления p от накопленного объема V_{Σ} добытого газа. Эти модели нужны для проведения расчетов прогнозных дебитов скважин, для расчетов объемов дренирования пласта конкретными скважинами, радиусов контуров питания и прогнозных оценок удельных извлекаемых объемов газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапук Б. Б. Теоретические основы разработки месторождений природных газов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 296 с.
2. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 736 с.

УДК 622.276.5+51-7

ПРИМЕНЕНИЕ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ В РАСЧЕТАХ ПРОГНОЗНЫХ ДЕБИТОВ ГАЗОВЫХ СКВАЖИН

В.А. Толпаев, К.С. Ахмедов
АО «Северо-Кавказский научно-исследовательский
проектный институт природных газов»
АО «СевКавНИПИгаз»

Введение

Для средне- и долгосрочного, соответственно до 3 лет и до 5-10 лет вперед, планирования работы газодобывающих предприятий (ГДП) необходимо уметь прогнозировать ожидаемые дебиты скважин. А также прогнозировать удельные извлекаемые объемы газа, время разработки месторождений, оптимальное число эксплуатационных скважин и н.др. Разработка оптимальных по технико-экономическим показателям программ геолого-технических мероприятий (ГТМ) на скважинах газовых месторождений и обоснование газодобывающими предприятиями необходимости проведения разрабатываемых программ ГТМ

также требует проведения расчетов прогнозных дебитов скважин. Поэтому разработка и совершенствование методик расчета прогнозных дебитов скважин и сопутствующего программного обеспечения является актуальной и важной для практики проблемой.

В настоящей статье авторы предлагают методику расчета прогнозных промысловых параметров скважин, эксплуатирующих газовое месторождение, по стандартным исходным данным «номер месяца – среднесуточный дебит – число отработанных скважиной в месяце часов», содержащимся в накопленных за прошлые годы отчетных рапортах по добыче газа. Главная рабочая идея предлагаемой в статье методики расчета прогнозных дебитов скважин заключается в использовании зависимости дебита скважины от накопленного объема извлеченного газа. Практическая реализация этой идеи начинается с построения кривых «дебит – накопленный отбор», в статье называемых эволюционными кривыми, которые и отражают физическую природу зависимости производительности скважин от суммарного объема уже извлеченного газа. Эволюционные кривые затем применяются для расчета прогнозных дебитов во времени. Достоинство методики расчета прогнозных дебитов с помощью эволюционных кривых в увеличении времени упреждения прогнозов до 5 и более лет, что достигается введением в расчеты параметра, обозначаемого как x_∞, представляющего собой количественную прогнозную оценку извлекаемых из пласта объемов газа.

1. Применение безразмерных промысловых исходных данных

Каждая газодобывающая скважина характеризуется следующими основными промысловыми параметрами. Во-первых, дебитом $Q(t)$, как правило, измеряемым $\frac{тыс.\ м^3}{сут}$ в текущий момент времени t. Время в промысловых рапортах от газодобывающих предприятий чаще всего указывается в *месяцах*. Во-вторых, отобранным к текущему моменту времени t из продуктивного пласта объемом газа $V(t)$, измеряемым, как правило, $млн.\ м^3$ в расчете на нормальные атмосферные условия. В-третьих, геологической оценкой имеющихся в зоне дренирования скважины запасов газа V_Σ, также измеряемой в расчете на нормальные атмосферные условия $млн.\ м^3$.

Для проведения дальнейших расчетов вместо физических размерных величин $Q(t)$ и $V(t)$ целесообразно применять безразмерные переменные $q = \frac{Q}{Q_0}$ и $x = \frac{V}{V_0}$, где Q_0 и V_0 - выбранные базисные единицы измерения дебита и накопленного отобранного объема газа соответственно с размерностями Q и V. Далее, как легко проверить, размерность $dim\left(\frac{V_0}{Q_0}\right)$ совпадает с размерностью вре-

мени. Поэтому в дальнейших расчетах перейдём к безразмерному времени $\tau = \frac{t}{T}$, где $T = \frac{V_0}{Q_0}$ - масштабная единица времени.

Переход в уравнениях от физических размерных величин к их безразмерным величинам может быть осуществлён с помощью хорошо известного уравнения связи накопленного объема $V(t)$, извлеченного с начального момента t_0 до текущего момента времени t, газа и дебита $Q(t)$ скважины

$$V(t) = \int_{t_0}^{t} Q(t)dt\,. \tag{1}$$

Тогда с учетом связей $V = x \cdot V_0$, $Q = q \cdot Q_0$ и $\tau = \frac{t}{T} = \frac{Q_0}{V_0} \cdot t$ из (1) следует, что

$$x(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} q(\tau)d\tau\, 0. \tag{2}$$

Из формулы (2) вытекает, что

$$\frac{dx}{d\tau} = q(\tau), \tag{3}$$

и, следовательно,

$$\tau = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{q(x)}. \tag{4}$$

2. Моделирование эволюционных кривых производительности газовых скважин кубическими сплайнами

Для повышения адекватности математических моделей прогнозирования дебитов реальным исходным на этапе истории $x_0 \le x \le x_1$ промысловым данным необходимо располагать, естественно в разумных пределах, некоторым количеством управляющих параметров в математических моделях. С другой стороны, с увеличением числа управляющих параметров эти математические модели должны оставаться достаточно наглядными и простыми. Такой компромисс между количеством управляющих параметров и наглядностью модели можно достигнуть, если эволюционную кривую «дебит – накопленный отбор» моделировать кубическими сплайнами. В данной статье эволюционная кривая моделируется в виде двух непрерывно и гладко состыкованных в точке $x = x_1$ кубических парабол. Первая кубическая парабола $q^-(x)$ строится на отрезке, характеризующем этап истории $x_0 \le x \le x_1$, а вторая $q^+(x)$ – на отрезке этапа прогноза $x_1 < x \le x_\infty$. Таким образом, эволюционная кривая будет задаваться уравнением вида

$$q(x) = \begin{cases} q^-(x), & \text{если} \quad x_0 \le x \le x_1 \\ q^+(x), & \text{если} \quad x_1 < x \le x_\infty \end{cases}. \tag{5}$$

Для автоматизации расчетов удобно применять нормированные переменные $U^-(x) = \frac{x - x_0}{h^-}$ и $U^+(x) = \frac{x - x_1}{h^+}$, где $h^- = x_1 - x_0$, а $h^+ = x_\infty - x_1$. Тогда кубические

параболы $q^-(x)$ и $q^+(x)$ можно задать следующими стандартными формулами Эрмита:

$$q^-(x)=\psi_1\left(U^-\right)\cdot q_0+\psi_2\left(U^-\right)\cdot q_1+\frac{\left(h^-\right)^2}{6}\cdot\left[\psi_3\left(U^-\right)\cdot m_0+\psi_4\left(U^-\right)\cdot m_1\right] \tag{6}$$

и

$$q^+(x)=\psi_1\left(U^+\right)\cdot q_1+\psi_2\left(U^+\right)\cdot q_\infty+\frac{\left(h^+\right)^2}{6}\cdot\left[\psi_3\left(U^+\right)\cdot m_1+\psi_4\left(U^+\right)\cdot m_\infty\right]. \tag{7}$$

В формулах (6) и (7) применяются четыре базисные функции

$$\begin{cases}\psi_1(U)=1-U\\ \psi_2(U)=U\\ \psi_3(U)=-U(1-U)(2-U)=-U^3+3U^2-2U\\ \psi_4(U)=-U\left(1-U^2\right)=U^3-U\end{cases}. \tag{8}$$

Смысл шести параметров в формулах (6) и (7) таков. Параметр $q_0=q\left(x_0\right)$ задает дебит скважины в начальной точке x_0, затем $q_1=q\left(x_1\right)$ задает дебит скважины в конечной точке этапа истории x_1. Сразу подчеркнем, что присутствие параметра $q_1=q\left(x_1\right)$ в обеих формулах $q^-(x)$ и $q^+(x)$, обеспечивает, как легко проверить, непрерывность в точке x_1 функции $q(x)$, заданной формулой (5). Следующий параметр $q_\infty=q\left(x_\infty\right)=0$ - равный нулю дебит скважины, когда она извлекла из своей зоны дренирования все добываемые запасы газа. Параметры m_0, m_1 и m_∞ - подлежащие расчету значения второй производной $\frac{d^2q}{dx^2}$ в точках x_0, x_1 и x_∞ соответственно. Чтобы вычислить эти параметры потребуем во внутренней точке $x=x_1$ интервала интерполирования $x_0\le x\le x_\infty$ выполнение условия гладкости:

$$\frac{dq^-\left(x_1-0\right)}{dx}=\frac{dq^+\left(x_1+0\right)}{dx}. \tag{9}$$

В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{q_1-q_0}{h^-}+\frac{h^-}{6}\cdot\left(m_0+2m_1\right)=\frac{q_\infty-q_1}{h^+}-\frac{h^+}{6}\cdot\left(2m_1+m_\infty\right), \tag{10}$$

которое после его преобразования принимает вид

$$h^-\cdot m_0+2\cdot\left(h^-+h^+\right)\cdot m_1+h^+\cdot m_\infty=6\cdot A,\quad \text{где}\quad A=\frac{q_\infty-q_1}{h^+}-\frac{q_1-q_0}{h^-}. \tag{11}$$

Полученное уравнение (11) содержит три неизвестных коэффициента m_0, m_1, m_∞. Поэтому для решения задачи нужно иметь еще два уравнения. Недостающие уравнения можно задать с помощью дополнительных граничных условий.

Модель 1 – *моделирование динамики дебита скважины естественным кубическим сплайном*

Если левый и правый концы кубического сплайна $q(x)$ вырождаются в прямолинейные отрезки $q=ax+b$, то вторая производная на концах должна

быть равна нулю. И, поэтому, в точках $x = x_0$ и $x = x_\infty$ примем, что $m_0 = m_\infty = 0$. Тогда из уравнения (10) найдем, что

$$m_1 = \frac{3 \cdot A}{h^- + h^+}. \tag{11}$$

Теперь, когда все три параметра $m_0 = m_\infty = 0$ и m_1 стали известны, по формулам (6), (7) можно рассчитать эволюционную кривую $q = q(x)$. Затем, по формуле (4) методами численного интегрирования найдем связь времени и накопленного объема добытого газа:

$$\tau = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{q(x)} = \begin{cases} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{q^-(x)}, & \text{если} \quad x_0 \le x \le x_1 \\ \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{q^-(x)} + \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{q^+(x)}, & \text{если} \quad x_1 < x \le x_\infty \end{cases}. \tag{12}$$

Обращая найденную зависимость $\tau = \tau(x)$, получаем уравнение темпов отбора газа скважиной $x = x(\tau)$.

Модель 2 – *моделирование динамики дебита скважины кубическим сплайном с заданными наклонами концов*

В этом случае кроме условия (9) непрерывного гладкого сопряжения кубических сплайнов в точке $x = x_1$ дополнительно задаются первые производные $\frac{dq^-(x_0)}{dx} = g_0$ и $\frac{dq^+(x_\infty)}{dx} = g_\infty$ в точках $x = x_0$ и $x = x_\infty$. В результате после тождественных алгебраических преобразований получаем следующую замкнутую систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными коэффициентами m_0, m_1, m_∞:

$$\begin{cases} h^- \cdot (2m_0 + m_1) = 6 \cdot B_0 \\ h^- \cdot m_0 + 2 \cdot (h^- + h^+) \cdot m_1 + h^+ \cdot m_\infty = 6 \cdot A, \\ h^+ \cdot (m_1 + 2m_\infty) = 6 \cdot B_\infty \end{cases} \tag{13}$$

где $B_0 = \frac{q_1 - q_0}{h^-} - g_0$ и $B_\infty = g_\infty - \frac{q_\infty - q_1}{h^+}$. Из первого уравнения системы (13) находим, что

$$m_0 = \alpha_0 + \beta_0 \cdot m_1, \tag{14}$$

где $\alpha_0 = \frac{3 \cdot B_0}{h^-}$ и $\beta_0 = -\frac{1}{2}$; $A = \frac{q_\infty - q_1}{h^+} - \frac{q_1 - q_0}{h^-}$. Подставляя m_0 в уравнение $h^- \cdot m_0 + 2 \cdot (h^- + h^+) \cdot m_1 + h^+ \cdot m_\infty = 6 \cdot A$ и затем, решая его, получим:

$$m_1 = \alpha_1 + \beta_1 \cdot m_\infty, \tag{15}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{6 \cdot A - h^- \cdot \alpha_0}{(2 + \beta_0) \cdot h^- + 2 \cdot h^+} \quad \text{и} \quad \beta_1 = -\frac{h^+}{(2 + \beta_0) \cdot h^- + 2 \cdot h^+}. \tag{16}$$

Наконец, подставляя m_1 из (15) в последнее уравнение $h^+ \cdot \left(m_1 + 2m_\infty\right) = 6 \cdot B_\infty$ и решая его, получим:

$$m_\infty = \frac{6 \cdot B_\infty - h^+ \cdot \alpha_1}{\left(2 + \beta_1\right) \cdot h^+}. \qquad (17)$$

Формулы (16) позволяют нам вычислить коэффициенты α_1 и β_1 по известным коэффициентам α_0 и β_0. Затем по формуле (17) находим коэффициент m_∞, далее по формуле (15) будет вычислен коэффициент m_1, и, наконец, по формуле (14) найдем коэффициент m_0.

Теперь, когда все три параметра m_0, m_1 и m_∞ стали известны, по формулам (6), (7) можно рассчитать эволюционную кривую $q = q(x)$. Затем, по формуле (12) методами численного интегрирования найдем связь времени и накопленного объема добытого газа $\tau = \tau(x)$. Обращая последнюю, получаем уравнение темпов отбора газа скважиной $x = x(\tau)$.

На рисунке 1 приведен тестовый пример характерных графиков динамики дебита скважины и накопленного отбора газа при помощи естественного кубического сплайна и при помощи кубического сплайна с заданными наклонами концов.

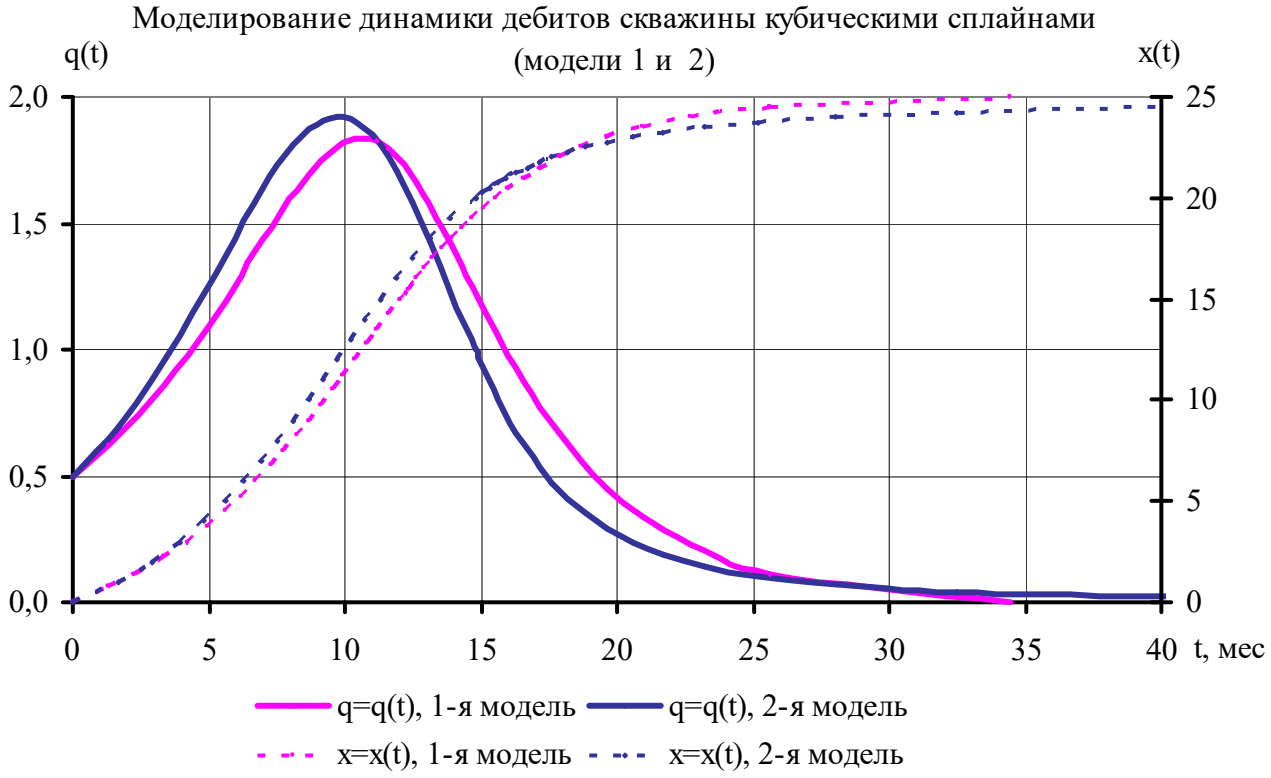


Рисунок 1 – Моделирование динамика дебита скважины и накопленного отбора газа на этапах возрастающей, стабильной и падающей добычи естественным кубическим сплайном (модель-1) и кубическим сплайном с заданными наклонами концов (модель-2)

Математические модели аппроксимации и прогнозирования дебитов газодобывающих скважин в целях повышения точности расчетов можно усложнять.

Например, моделирование эволюционных линий $q = q(x)$ осуществлять кубическим сплайном не из двух, а из трех или четырех кубических парабол. Но общая картина динамики дебита скважины и накопленного отбора газа от этого не изменится, а лишь усложнится технология расчетов. Поэтому предложенных математических моделей расчета прогнозных дебитов скважин, по-видимому, достаточно для практических целей выработки ГДП реальных перспективных планов по объемам добычи газа и по планированию ГТМ.

Заключение

В статье предложены теоретические основы перспективного планирования газодобывающими предприятиями объемов добычи природного газа методом аппроксимации накопленных промысловых данных «дебит – время». Главная рабочая идея предлагаемого метода заключается в том, что для расчета прогнозных дебитов предварительно строятся так называемые эволюционные кривые «дебит – накопленный отбор», которые затем применяются для расчета прогнозных дебитов во времени. Новизна метода обусловлена использованием физической зависимости дебита скважины от накопленного объема извлеченного газа и явным учетом в расчетах прогнозной количественной оценки извлекаемых запасов газа. Предложены две математические модели прогнозной динамики дебита скважины естественным кубическим сплайном, содержащим пять управляющих параметров и кубическим сплайном с заданными наклонами концов. Последняя модель содержит семь управляющих параметров. Обе модели могут применяться на всех основных этапах разработки месторождения. С увеличением числа управляющих параметров в математических моделях увеличивается не только математическая сложность обработки предоставляемых исходных данных на этапе истории, но и повышается адекватность математических моделей самим предоставляемым исходным данным. Кроме того, сопоставление расчетов прогнозных дебитов, выполненных по разным математическим моделям, позволяет повысить достоверность предсказаний и глубину времени упреждения прогнозов, что особенно важно при разработке перспективных планов работы ГДП. В частности, для разработки планируемых ГДП программ проведения ГТМ, для обоснования рациональности по технико-экономической эффективности предлагаемых программ ГТМ и т.п.

Дальнейшее развитие предложенных в статье теоретических основ планирования доразработки газовых месторождений связывается с автоматизацией проведения прогнозных расчетов и выполнения услуг для конкретных ГДП по планированию геолого-технических мероприятий.

УДК 538.915+519.65

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ ЗАВИСИМОСТИ ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ФЕРМИ-ГАЗА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

В.О. Турин, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *voturin@mail.ru*
В.Н. Павлова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *vlada.pavlova.9898@mail.ru*
Д.И. Ставцев
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *dima2000st@yandex.ru*

Численно решается уравнение для связи химического потенциала (уровня Ферми) для Ферми-газа свободных электронов с заданной концентрацией в зависимости от температуры. В это уравнение входит интеграл Ферми-Дирака порядка ½. Уравнение обезразмеривается и зависит только от нормированного химического потенциала и нормированной температуры. Характерной энергией является энергия Ферми, а характерной температурой является температура Ферми. Обсуждаются численное интегрирование интеграл Ферми-Дирака порядка ½ и аналитическая аппроксимация. Результат представлен в виде универсальной графической зависимости нормированного химического потенциала к нормированной температуре. В этих координатах вид зависимости не зависит от концентрации электронов.

Ключевые слова: Ферми-газ свободных электронов, химический потенциал (уровень Ферми), энергия Ферми, температура Ферми, интеграл Ферми-Дирака порядка 1/2, разложение Зоммерфельда

1. Введение

Модель свободных электронов это простая квантовая модель поведения валентных электронов в металле. Электроны рассматриваются в этой модели как Ферми-газ, а металл является своеобразной потенциальной ямой. Плотность состояний для свободных электронов в расчёте на единицу объёма даётся уравнением [1]:

$$g(E) = \frac{\sqrt{2}\, m_e^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E}. \quad (1)$$

Вероятность того, что одноэлектронное состояние с энергией E будет занятым, определяется статистикой Ферми-Дирака:

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right)+1}. \quad (2)$$

Связь заданной концентрации электронов n с химическим потенциалом (или уровнем Ферми) μ при температуре T определяется следующим уравнением:

$$n = \int_0^\infty g(E)\, f(E) dE = \frac{\sqrt{2}\, m_e^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E} dE}{\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right)+1}. \quad (3)$$

Это уравнение может быть переписано в следующем виде [1, 2]:

$$n = N_C(T)\, F_{1/2}(\eta)\ . \quad (4)$$

Здесь η – безразмерный параметр, равный отношению химического потенциала μ к тепловой энергии kT:

$$\eta = \mu / kT\ ; \quad (5)$$

$N_C(T)$ – эффективная плотность состояний в зоне проводимости:

$$N_C(T) = 2\left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}; \quad (6)$$

$F_{1/2}(\eta)$ - интеграл Ферми-Дирака порядка ½:

$$F_{1/2}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{\exp(x-\eta)+1}\ . \quad (7)$$

Здесь $2/\sqrt{\pi} \approx 1{,}1284$. Отметим, что интеграл Ферми-Дирака порядка ½ иногда определяют и так:

$$\mathbf{F}_{1/2}(\eta) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{\exp(x-\eta)+1}\ . \quad (8)$$

В пределе $\eta \ll -1$:

$$F_{1/2}(\eta) \to e^{\eta}. \quad (9)$$

При этом газ электронов является невырожденным и описывается статистикой Больцмана, а уравнение (4) упрощается:

$$n = N_C(T)\, e^{-|\eta|}. \quad (10)$$

В пределе $\eta \gg 1$:

$$F_{1/2}(\eta) \to \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \eta^{3/2}. \quad (11)$$

При этом газ электронов является вырожденным и описывается статистикой Ферми-Дирака, а уравнение (4) превращается в:

$$n = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} N_C(T)\, \eta^{3/2}. \quad (12)$$

При $T = 0$ уравнение (4) переходит в уравнение

$$n = \frac{\sqrt{2} m_e^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{E_F} \sqrt{E} dE\ . \quad (13)$$

Здесь E_F – энергия Ферми, которая равна значению химического потенциала при $T = 0$. Интеграл в (13) легко берётся:

$$n = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2} m_e^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} E_F^{3/2}\ . \quad (14)$$

Из этого уравнения легко получить связь между энергией Ферми и концентрацией электронов:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n)^{2/3}\ . \quad (15)$$

Учитывая (6) и (14) уравнение (4) можно переписать так:

$$E_F{}^{3/2} = \frac{3}{2} (kT)^{3/2}\, \mathbf{F}_{1/2}(\eta) \quad (16)$$

По аналогии с формулой (2), определяющей безразмерный параметр η как химический потенциал, отнесённый к kT, определим безразмерный параметр φ как энергию Ферми, отнесённую к kT:

$$\varphi = E_F/kT\ . \tag{17}$$

Соответственно, уравнение (16) можно переписать в безразмерном виде:

$$\varphi^{3/2} = \frac{3}{2}\,\mathbf{F}_{1/2}(\eta). \tag{18}$$

Энергия Ферми E_F является характерной энергией для рассматриваемой задачи и может использоваться для обезразмеривания уравнения (1). Характерной температурой для рассматриваемой задачи является температура Ферми:

$$T_F = E_F/k\ . \tag{19}$$

Определим безразмерную температуру так:

$$\tilde{T} = T/T_F\ . \tag{20}$$

Отметим, что, из уравнения () следует, что

$$\tilde{T} = \varphi^{-1}\ . \tag{21}$$

Отметим, что, подобно температуре Ферми, можно ввести температуру, соответствующую химическому потенциалу:

$$T_\mu = \mu/k. \tag{22}$$

Определим безразмерную температуру, соответствующую химическому потенциалу:

$$\tilde{T}_\mu = T_\mu/T_F\ . \tag{23}$$

Определим безразмерный химический потенциал:

$$\tilde{\mu} = \mu/E_F. \tag{24}$$

При этом легко можно получить важное соотношение:

$$\tilde{\mu} = \eta\tilde{T}. \tag{25}$$

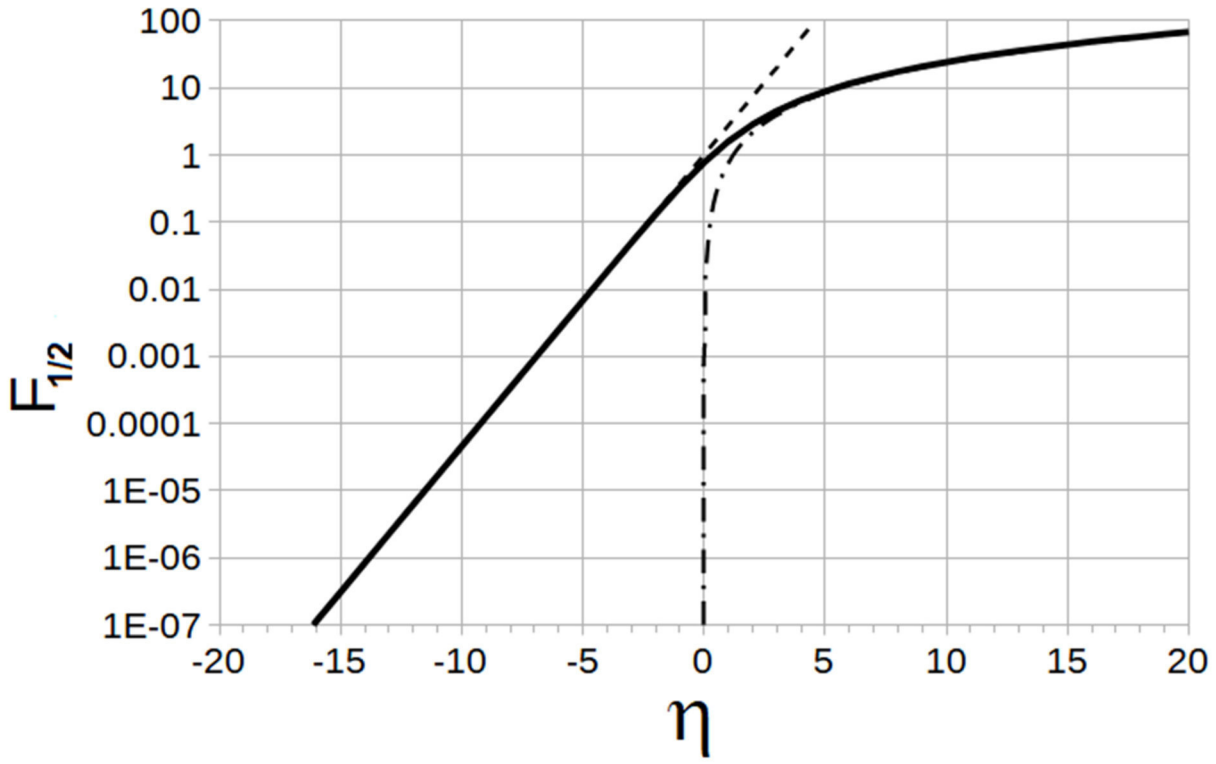


Рисунок 1 – Значение интеграла Ферми-Дирака порядка ½ в зависимости от параметра η (сплошная линия). Асимптотика (10) в пределе $\eta \ll -1$ показана штриховой линией. Асимптотика (12) в пределе $\eta \gg 1$ показана штрих-пунктиром

Кроме этого, отметим, что

$$\tilde{\mu} = \tilde{T}_{\mu} = \eta / \varphi \,. \tag{26}$$

Определим безразмерную эффективную плотность состояний в зоне проводимости, нормируя N_C на n:

$$\widetilde{N}_C = \frac{N_C}{n} \,. \tag{27}$$

Используя (20) и (27), перепишем уравнение (6) в безразмерном виде:

$$\widetilde{N}_C\left(\tilde{T}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\, \tilde{T}^{3/2} \ . \tag{28}$$

Используя (27) и (28), из уравнения (4) можно получить безразмерное уравнение:

$$\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \tilde{T}^{-3/2} = \ F_{1/2}(\eta). \tag{29}$$

Это уравнение, при заданном значении $\tilde{T}$, может быть решено численно с определением соответствующего $\tilde{T}$ значения безразмерного параметра η. А уравнение (25) $\tilde{\mu} = \eta\tilde{T}$ позволяет определить значение безразмерного химического потенциала $\tilde{\mu}$. Таким образом может быть получена зависимость $\tilde{\mu}(\tilde{T})$.

Отметим, что концентрация электронов n явно не входит в уравнение (29). Соответственно, зависимость $\tilde{\mu}(\tilde{T})$ является универсальной и может быть использована для определения зависимости химического потенциала μ от температуры T для заданной концентрации электронов. При этом концентрация электронов n используется только для вычисления энергии Ферми E_F (15) и температуры Ферми (19), которые являются нормировочными константами в нашей задаче.

Для численного решения уравнения (29) мы использовали метод бисекции, описанный, например, в [3]. При этом нам было необходимо вычислять значение интеграла Ферми-Дирака порядка ½ ($F_{1/2}(\eta)$ уравнение (4)) при заданном значении η.

Численно значение интеграла Ферми-Дирака порядка ½ можно найти используя функцию gsl_sf_fermi_dirac_half из раздела Special Functions библиотеки GNU Scientific Library (или GSL). Эта библиотека, написанная на языке программирования C для численных вычислений в прикладной математике и науке, является частью проекта GNU и распространяется на условиях лицензии GPL. Кроме этого, численный метод нахождения интеграла Ферми-Дирака порядка ½ подробно описан в популярном справочнике по численным методам [3]. Отметим, что онлайн калькулятор для вычисления интеграла Ферми-Дирака и обратной к нему функции есть на интернет портале nanoHUB.org (https://nanohub.org/tools/fdical). График функции $F_{1/2}(\eta)$, рассчитанный нами с помощью функции gsl_sf_fermi_dirac_half представлен на рисунке 1. Асимпто-

тика (10) в пределе $\eta \ll -1$ показана штриховой линией. Асимптотика (12) в пределе $\eta \gg 1$ показана штрих-пунктиром

Кроме численного интегрирования, для вычисления интеграла Ферми-Дирака порядка ½, можно использовать многочисленные аналитические аппроксимации [4]. Для наших расчётов мы использовали аппроксимацию, предложенную в [5]:

$$F_{1/2}(\eta) = (e^{-\eta} + \xi)^{-1} \quad . \tag{30}$$

Здесь

$$\xi = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}a^{-3/8}\,, \tag{31}$$

$$a = \eta^4 + 50 + 33{,}6\,\eta\,(1 - 0{,}68\,e^{-0{,}17(\eta+1)^2})\,. \tag{32}$$

Эта аппроксимация обеспечивает относительную погрешность не превышающую 0,4% для значения η, включенного в диапазон от $-\infty$ до $+\infty$.

Отметим, что к интегралам вида (8), в случае $\eta \gg 1$, применимо разложение Зоммерфельда [1]. Используя это разложение, легко получается известная асимптотическая оценка для зависимости $\tilde{\mu}(\tilde{T})$ при $T \ll T_F$ [1]:

$$\tilde{\mu}(\tilde{T}) \approx 1 - \frac{\pi^2}{12}\tilde{T}^2. \tag{33}$$

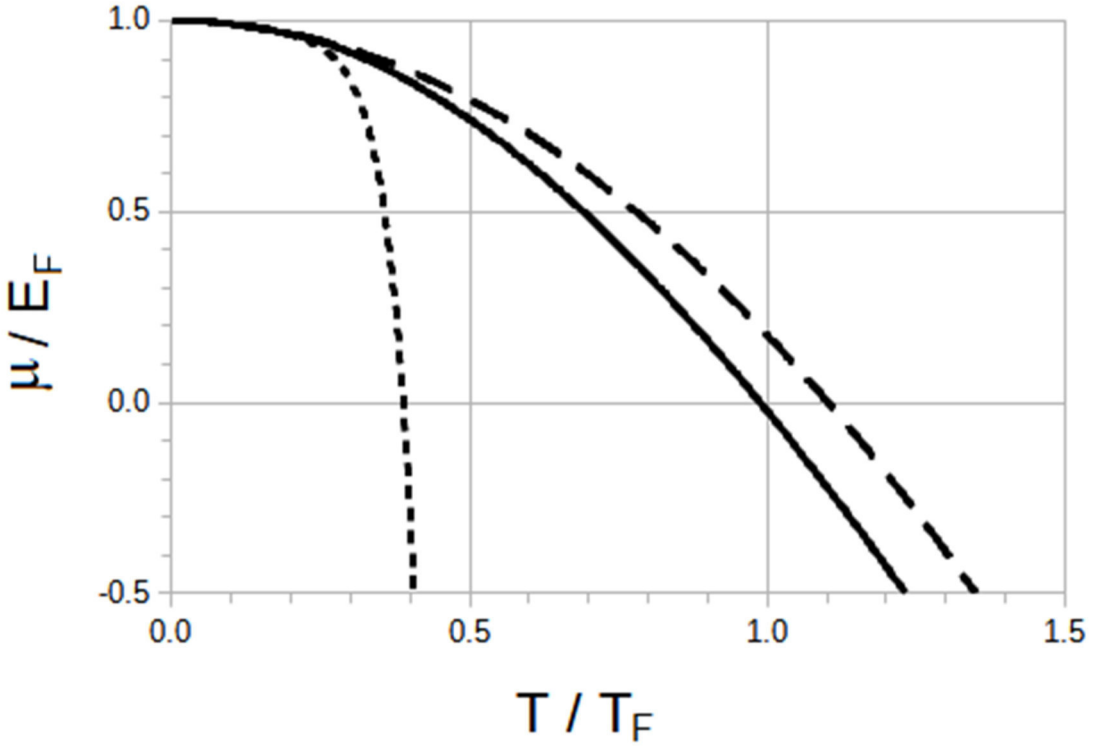


Рисунок 2 – Зависимость безразмерного химического потенциала $\tilde{\mu}$ (химический потенциал, отнесённый к энергии Ферми E_F) от безразмерной температуры $\tilde{T}$ (температура, отнесённая к температуре Ферми T_F) при изменении температуры от 0 до 1,5 T_F . Численное моделирование – сплошная линия. Длинный штрих – уравнение (33), короткий штрих – уравнение (34)

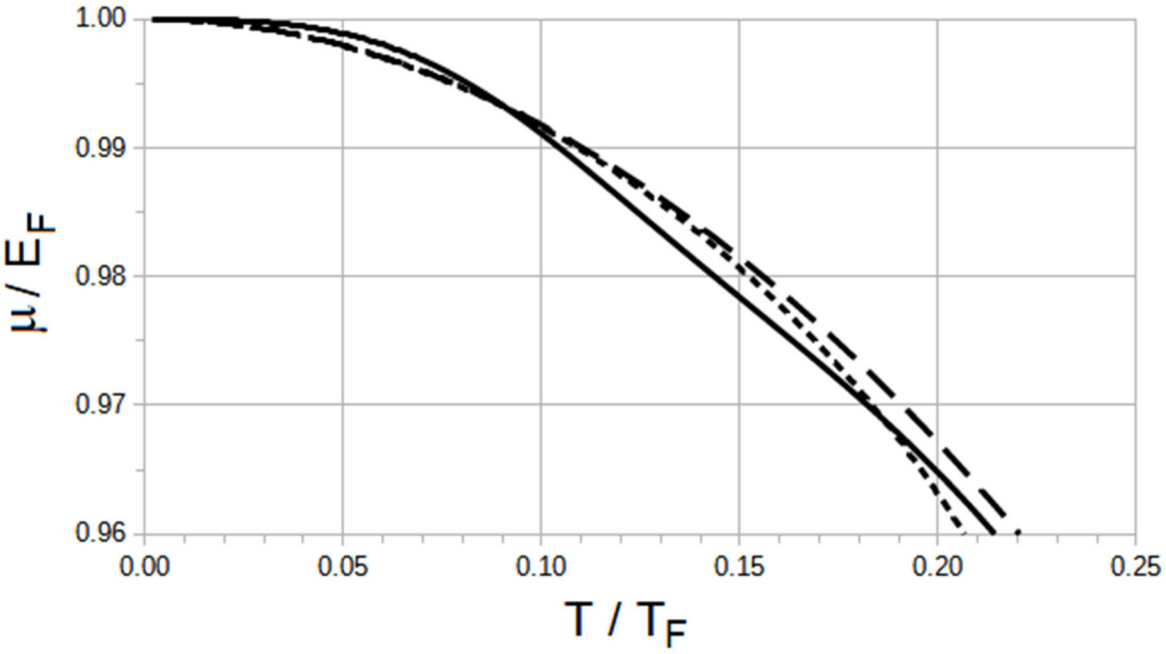


Рисунок 3 – Зависимость безразмерного химического потенциала $\tilde{\mu}$ от безразмерной температуры $\tilde{T}$ при изменении температуры от 0 до 0,25 T_F. Численное моделирование – сплошная линия. Длинный штрих – уравнение (33), короткий штрих – уравнение (34)

В работе [6], получена оценка с учётом членов более высокого порядка:

$$\tilde{\mu}(\tilde{T}) \approx 1 - \frac{\pi^2}{12}\tilde{T}^2 - \frac{\pi^4}{80}\tilde{T}^4 - \frac{247\,\pi^6}{25920}\,\tilde{T}^6 - \frac{16291\,\pi^8}{777600}\,\tilde{T}^8 - \frac{1487\,\pi^{10}}{15360}\tilde{T}^{10}. \qquad (34)$$

На рисунке 2 сплошной линией представлены результаты решения уравнения (29) численным методом в диапазоне температур от 0 до 1,5 T_F. На рисунке 3 представлена область в диапазоне температур от 0 до 0,25 T_F. Штриховая линия с длинным штрихом соответствует уравнению (33), т.е. учитывает только член в разложении 2-го порядка. Штриховая линия с коротким штрихом соответствует уравнению (34), которое учитывает члены со степенью до 10-го порядка.

Из результатов, представленных на рисунках 2 и 3 видно, что учёт членов более высокого порядка, чем квадратичный, в оценке зависимости $\tilde{\mu}(\tilde{T})$ в уравнении (34), как правило, не оправдан, т.к. при $\tilde{T} \ll 1$ разница между численным моделированием и асимптотической оценкой, полученной с помощью разложения Зоммерфельда, не зависит от количества учтённых в разложении членов. При этом, из рисунков 2 и 3 видно, что расчёт по уравнению (34) начинает очень быстро расходиться с результатами численного моделирования при $\tilde{T} > 0{,}25$.

Следует отметить, что из рисунка 3 видно, что квадратичная оценка $\tilde{\mu}(\tilde{T})$, удивительным образом, опять приближается к точному значению в окрестности $\tilde{T} = 0{,}09$. Таким образом, квадратичная аппроксимация (33) оказывается достаточно хорошей в очень широком диапазоне температур, вплоть до сопоставимых с температурой Ферми (при $\tilde{T} = 0{,}5$ погрешность этой аппроксимации

7%). В диапазоне от 0 до $\tilde{T} = 0{,}1$ погрешность этой аппроксимации не превышает 0,1 %. Уравнение (34) незначительно лучше квадратичной оценки (33) только в диапазоне $0{,}15 < \tilde{T} < 0{,}20$.

Отметим, что график, представленный нами на рисунке 2, но без кривой, изображённой мелким пунктиром, приводится в электронном ресурсе [7] без описания метода расчёта. Область в диапазоне низких температур, так подробно, как на рисунке 3, в [7] не приводится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ashcroft N.W., Mermin N.D. Solid State Physics. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976. 826 p.
2. Schubert E.F. Physical foundations of solid-state devices. Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, 2015. 275 p.
3. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. New York: Cambridge University Press, 2007. 1235 p.
4. Blackemore J.S. Approximations for Fermi-Dirac integrals, especially the function $F_{½}(\eta)$ used to describe electron density in a semiconductor // Solid-State Electronics. – 1982. – Volume 25. – Issue 11. Pages 1067-1076.
5. Bednarczyk D., Bednarczyk J. The approximation of the Fermi-Dirac integral $F_{½}(\eta)$ // Physics Letters A. – 1978. – Volume 64. – Issue 4. Pages 409-410.
6. Selmke M. The Sommerfeld Expansion [Электронный ресурс] // Markus Selmke homepage. URL: https://photonicsdesign.jimdofree.com/pdfs/ (дата обращения: 21.11.2020).
7. Fitzpatrick R. Thermodynamics and Statistical Mechanics [Электронный ресурс] // Richard Fitzpatrick homepage. URL: http://farside.ph.utexas.edu/teaching/sm1/Thermal.pdf (дата обращения: 21.11.2020).

УДК 661.935

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕСТАБИЛЬНОСТИ КОМПРИМИРОВАНИЯ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА ПРИ АДСОРБЦИОННОЙ ОЧИСТКЕ

О.Н. Филимонова, д.т.н., доц.
ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
e-mail:*olga270757@rambler.ru*
А.С. Викулин
ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
e-mail: *mmiler5472@yandex.ru*

Представлена математическая модель кинетики адсорбционного процесса в адсорбере для оценки гидродинамической нестабильности на входе в зернистый слой адсорбента, которая возникает из-за неустойчивого режима работы нагнетающего компрессора. В предположении одномерности течения газовой среды (атмосферного воздуха), а также в отсутствии радиальных и аксиальных неоднородностей синтезирована математическая модель отработки рабочего объема адсорбера в виде краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка относительно концентрации монопримеси в адсорбенте. Сравнительный анализ режима колебания и стабильного режима работы подтвердил влияние входной скорости на кинетику процесса адсорбции, которое заключается в более быстром насыщении слоя адсорбента примесью, что может повлечь за собой функционирование адсорбера в режиме «проскоковой» концентрации.

Ключевые слова: кинетика адсорбции, математическая модель, колебание скорости входного потока, численное и аналитическое решение.

Реальный режим функционирования адсорбера может существенно отличаться от проектного, который соответствует наиболее вероятному исходному набору термодинамических и физико-химических параметров. Однако в ходе эксплуатации адсорбера могут возникнуть отклонения от расчетного режима, которые способны внести нежелательные технологические изменения, связанные с появлением «проскоковой» концентрации примеси [1].

В рамках линеаризованной математической модели динамики физической адсорбции с изотермой Генри [2] при допущениях:

– в газе присутствует только одна примесь (монопримеси);
– течение газа осуществляется в гидродинамическом режиме идеального вытеснения;
– теплотой адсорбции, как и неоднородностью пористости неподвижного гранулированного слоя адсорбента пренебрегается;
– изменение скорости газового потока подчиняется гармоническому закону

$$u(\tau) = u_0\left[1 + k\sin(\omega\tau)\right],$$

где u_0 – расчетная скорость газового потока, м/с; k – амплитуда возмущений; ω – частота возмущений потока, $с^{-1}$; τ – время, с.

В предположении, что кинетику адсорбции лимитирует внутренняя диффузия [3], получена упрощенная математическая модель в виде дифференциального уравнения в частных производных первого порядка:

$$-u_0\left[1+k\sin(\omega\tau)\right]\frac{\partial c(z,\tau)}{\partial z}=\left(\frac{a_0}{c_0}+\varepsilon\right)\frac{\partial c(z,\tau)}{\partial z}; \tag{1}$$

$$c(z,0)=0,\qquad c(0,\tau)=c_0, \tag{2}$$

где z – аксиальная координата вдоль адсорбера, м; h – характерный размер проходного сечения адсорбера, м; a_0 – емкость адсорбента по примеси, кг/м^3; $c(z,\tau)$ – локальная концентрация монопримеси в потоке атмосферного воздуха, кг/м^3; c_0 – концентрация примеси в газовом потоке на входе в адсорбер, кг/м^3; ε – пористость зернистого слоя.

Система (1), (2) представлена в безразмерном виде

$$-\left[1+k\sin(W\theta)\right]\frac{\partial C(Z,\theta)}{\partial Z}=\left(H+\varepsilon\right)\frac{\partial C(Z,\theta)}{\partial\theta}; \tag{3}$$

$$C(Z,0)=0,\quad C(0,\theta)=1, \tag{4}$$

где $\theta=\tau u_0/h$; $Z=z/h$; $C(Z,\theta)=c(z,\tau)/c_0$; $W=\omega h/u_0$; $H=a_0/c_0$ – константа Генри.

В общем случае амплитуда возмущений k является случайной величиной с неизвестной функцией плотности распределения [4], поэтому оценка среднеквадратического отклонения может быть получена из анализа функционирования компрессора при подаче компримированного атмосферного воздуха. Сделано предположение о том, что эта функция близка к распределению Гаусса, причем среднеквадратичное отклонение по модулю не превышало 1.

Для случая $k=0$ система (3), (4) трансформируется

$$-\frac{\partial C(Z,\theta)}{\partial Z}=\left(H+\varepsilon\right)\frac{\partial C(Z,\theta)}{\partial\theta}; \tag{5}$$

$$C(Z,0)=0,\quad C(0,\theta)=1, \tag{6}$$

которая допускает аналитическое решение. Изображение (5) и (6), получено интегральным преобразованием Лапласа по переменной θ:

$$-\frac{\partial C_L(Z,s)}{\partial Z}=\left(H+\varepsilon\right)sC_L(Z,s); \tag{7}$$

$$C_L(0,s)=\frac{1}{s}, \tag{8}$$

где s – комплексный параметр; $C_L(Z,s)$ – изображение $C(Z,\theta)$.

Решение задачи Коши (7), (8):

$$C_L(Z,s)=\frac{1}{s}\exp\left[-\left(H+\varepsilon\right)sZ\right],$$

оригинал которого есть

$$C(Z,\theta)=\mathbf{1}\left[\theta-\left(H+\varepsilon\right)Z\right], \tag{9}$$

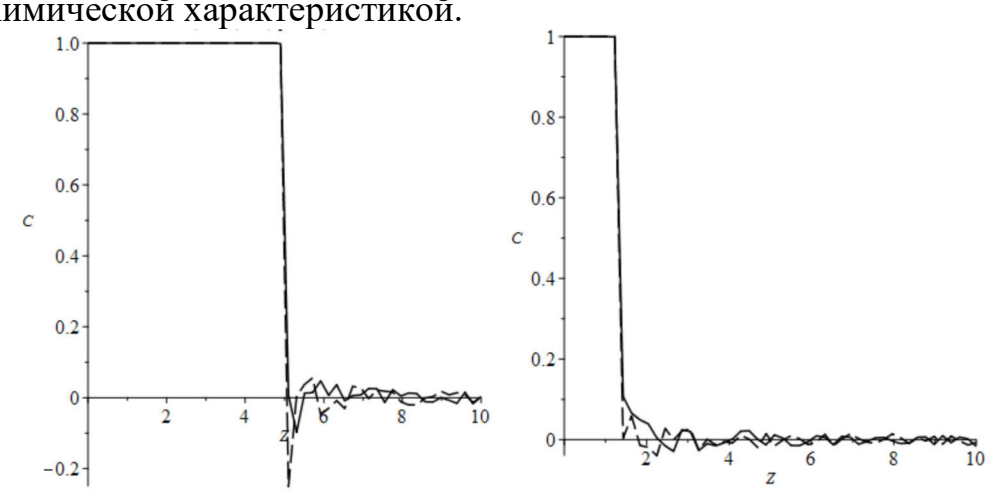
где $\mathbf{1}(\ldots)$ – односторонняя функция Хевисайда.

Интегрирование системы (3), (4) в общем случае ($k \neq 0$) осуществлялось конечно-разностным методом по полунеявной схеме.

Исходные данные для серии вычислительных экспериментов были выбраны следующие [5]: $K \in [0,1;1]$; $W \in [0,1;10]$; $H \in [1;5]$. Отсечка по времени была выбрана $\theta = 7$.

Вычислительные эксперименты показали, что амплитуда колебаний в принятом физическом интервале не оказывает существенного влияния на кинетику адсорбции. Наиболее значимым параметром оказалась частота колебаний потока на входе в адсорбер, как и в [6].

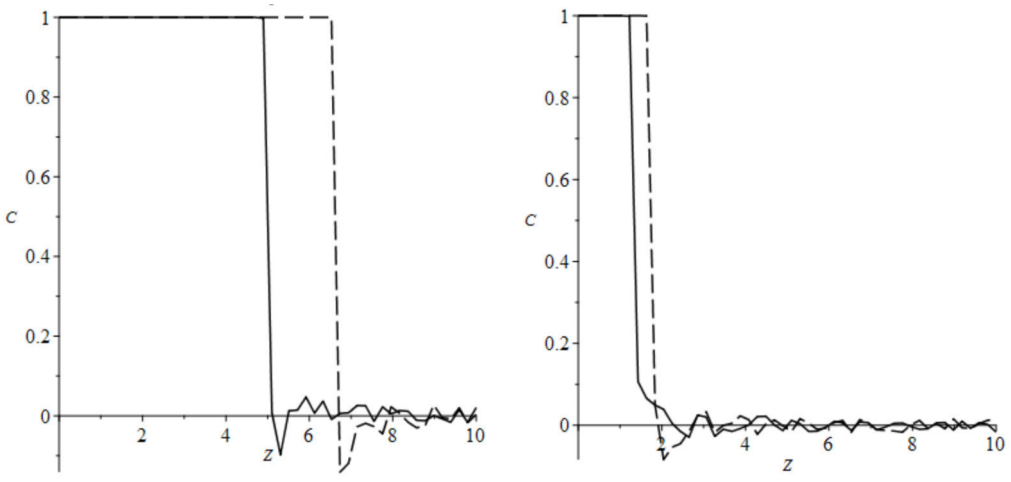
При большей величине частоты (рисунок 1) различий в величине отработки слоя адсорбента практически не наблюдается, что согласуется с [7]. Кинетика в данном случае определяется емкостью адсорбента, то есть его физико-химической характеристикой.



a *b*

Рисунок 1 – Кинетика адсорбции при малой частоте колебаний скорости потока на входе в адсорбер для $K = 1$, $W = 10$, $\varepsilon = 0,4$ и $\theta = 7$: *a* – $H = 1$; *b* – $H = 5$

При малой величине частоты (рисунок 2) ее влияние уже существенно на процесс адсорбционного поглощения.



a *b*

Рисунок 2 – Кинетика адсорбции при большой частоте колебаний скорости потока на входе в адсорбер для $K = 1$, $W = 0,1$, $\varepsilon = 0,4$ и $\theta = 7$: *a* – $H = 1$; *b* – $H = 5$

В этом случае отработка слоя адсорбента увеличивается, что приведет к возможному возникновению работы адсорбера в режиме «проскоковой» концентрации [8]. Такое различие может быть объяснено релаксационным эффектом заполнения емкости адсорбента, однако это подлежит дальнейшей экспериментальной проверке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Naidu H., Mathews A.P. Linear driving force analysis of adsorption dynamics in stratified fixed bed adsorbers // Separation and Purification Technology.— 2020. —Article 117955.
2. Дубинин М.М., Серпинский В.В., Мурдмаа К.О. Адсорбция и адсорбенты.—М.: Наука.— 1987.— 226 с.
3. Филимонова О.Н., Викулин А.С., Енютина М.В., Иванов А.В. Влияние входной температуры на изотермическую очистку газа от монопримеси неподвижным слоем адсорбента // *Изв. вузов. Химия и хим. технология*.— 2020.— Т. 63. — Вып. 9.— С. 88–92.
4. Tien C. Adsorption calculations and modeling.—NY: Elsievier Science.— 2013.— 200 p.
5. Yang R.T. Gas Separation by Adsorption Processes.—NY: Waltham. —2013.— 632 p.
6. Schmitsz J.V., Kriesten M., Hartmann M., Kaspereit M. Model development for the separation of a strongly adsorbing gas mixture on a semipilof scale adsorber // Separation and Purification Technology.— 2019.— V. 217.— P. 48–61.
7. Crittenden B., Thomas W.J. Adsorption Technology and Desing.—NY: Waltham. —1998.— 288 p.
8. Couper J.R., Penney W.R., Fair J.R., Walas S.M. Chemical Process Equipment – Selection and Design.—NY: Waltham. —2010.— 864 p.

УДК 37

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ВАЛЕОМИНУТКИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В 5, 6 КЛАССАХ «ДИЗ» (ДЕЛАЙ И ЗАПОМИНАЙ)

В.Н. Андреева
МОБУ ООШ №18 ГО г. Якутск
e-mail: *anvani11@mail.ru*

В интернете полно валеоминуток для младших школьников. Это, как правило, стишки и речёвки, презентации с героями мультиков, за которыми надо повторять, игры с какими-либо предметами, релаксации, после которых учителю приходится опять настраивать детей на урок, и т.п. А что делать с учениками, у которых начинается подростковый период? По моему опыту, при применении общепринятых динамических пауз на уроках, дети смеялись, стеснялись друг друга и предлагали мне пойти поработать учителем физкультуры. У некоторых даже появлялась мысль заснять на телефон и выложить в YouTube. Исходя из этой проблемы, напросились мысли об изменении содержания валеоминуток для учащихся среднего звена – использовать их для привлечения интереса к обучаемому предмету, закрепления полученных знаний и творческому подходу к решаемой проблеме.

В последнее время наблюдается резкое ухудшение здоровья учащихся. Малоподвижный образ жизни, компьютерные игры, экологические проблемы, эпидемии - все это отрицательно влияет на здоровье будущих граждан. Исследования показывают, что около 25- 30% детей, приходящих в 1-е классы, имеют те или иные отклонения в состоянии здоровья. За период обучения в школе число здоровых детей уменьшается в 4 раза, число близоруких детей увеличивается с 1 класса к выпускным классам - с 3,9% до 12,3%, с нервно-психологическими расстройствами - с 5,6% до 16,4%, с нарушениями осанки - с 1,9% до 16,8%.

Школа является важным фактором, влияющим на становление личности. Ее основная цель – вооружение детей знаниями и опытом, приобретенными человечеством, их социальная адаптация и воспитание. Но, кроме того, ребенок проходит и биологическое развитие. Очень важным гигиеническим принципом построения режима дня школьника является рациональная организация учебно-воспитательного процесса, при которой получение разносторонних знаний сочетается с укреплением здоровья школьников валеоминутками (далее ВМ) и способствует формированию целостной, востребованной обществом личности.

ВМ представляют собой небольшой комплекс физических упражнений. Предлагаемые упражнения в этой работе становятся частью самого урока и зачастую несут дополнительную информацию по теме. Упражнения составляются так, чтобы при их выполнении были охвачены различные группы мышц. Они необходимы для того, чтобы поднять детям настроение, помочь активизировать дыхание, усилить крово- и лимфообращение застойных участков в организме ребенка, вызванные продолжительным сидением за

партой, снять статическое напряжение, повысить умственную работоспособность учащихся.

В состав валеоминуток нужно включать комплексы, состоящие из 4-6 упражнений: 2-3 из которых должны целенаправленно формировать осанку, 2-3 для плеч, пояса, рук, туловища и упражнения для глаз. Необходимо, чтобы были различные упражнения, так как большое количество повторений снижает интерес к выполнению упражнений.

Валеоминутки проводятся на начальном этапе утомления (8-14 минута занятия, в зависимости от возраста учащихся, вида деятельности и сложности учебного материала). Комплексы упражнений должны быть разными по содержанию и форме. Продолжительность выполнения 1,5-3 минуты. Во время проведения валеоминуток учащиеся могут сидеть за партой или стоять около ее, находиться у классной доски или в проходах между партами, стоять в кругу, врассыпную, в парах, тройках, в группах.

Комплекс упражнений состоит из 4-6-х разных упражнений, в первой части которых внимание акцентируется на математические понятия и термины, а во второй части на специфику выполнения физических упражнений, такие как улучшение зрения, улучшение осанки и т.д.

Тематические ВМ можно разделить на три вида: геометрические понятия; алгебраические понятия; арифметика.

По геометрическим понятиям детям предлагается показывать различные геометрические фигуры и понятия, используя руки и ноги по следующим темам: «Точка. Отрезок. Прямая. Луч. Плоскость», «Взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве», «Углы на плоскости», «Градусные меры углов», «Углы в пространстве», «Окружность. Круг. Сфера. Шар». В 1теме кулак – это точка, прямая кисть показывает бесконечность прямой или луча. Во 2 теме руки от локтя и до кончиков прямые. В 3, 4, 5 и 6 теме началом луча или радиуса является грудь, а руки – лучами.

Вот некоторые примеры:

1. Задание по теме «Точка. Отрезок. Прямая. Луч. Плоскость»

Покажите:

Точку одной рукой	
Две точки двумя руками	
Отрезок	
Руки наверх, приседание три раза	
Прямую	

Луч, идущий направо	
Тянемся направо	
Луч, идущий налево	
Тянемся налево	
Плоскость	

2. Задание по теме «Взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве»

Сначала детям объясняется, что прямые – это концы рук, начиная с локтя.

Покажите:

Параллельные прямые	
Прогибаемся вдоль прямых	
Пересекающиеся прямые	
Глазами рисуем пересекающиеся прямые. Сначала смотрим левый нижний угол и медленно переходим в правый верхний угол. Затем смотрим в правый нижний угол и медленно переходим в левый верхний угол	
Параллельные прямые не лежащие на одной плоскости. Как они называются? Скрещивающиеся прямые	
Выпады вперед по три раза	
Совпадающие прямые	
Коленки не сгибаем, выпад вперед, достаем пол этими совпадающими прямыми	

Перпендикулярные прямые	
Приседаем три раза	

3. Задание по теме «Углы на плоскости»

Сначала детям объясняется, что лучи (стороны угла) – это руки, начиная с плеч.

Покажите:

Острый угол	
Вращение головой сначала в одну сторону, потом в другую	
Развернутый угол	
Вращательные движения плеч вперед и назад по два раза	
Прямой угол	
Встаем на носочки и опускаемся по два раза	
Тупой угол	
Слушаем тишину	
Любой угол	
Прыжки на месте	

4. Задание по теме «Градусные меры углов»

Сначала детям объясняется, что лучи (стороны угла) – это руки, начиная с плеч.

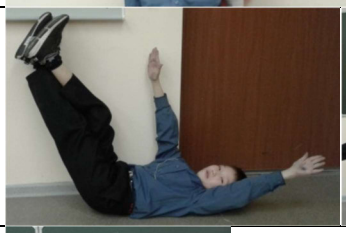
Покажите с помощью рук угол в 90 ˚, 180 ˚, 45 ˚, 135 ˚, 0 ˚. Далее эти же углы покажите с помощью ног.

5. Задание по теме «Углы в пространстве»

Творческая работа на коллективизацию.

Покажите:

Любой угол (показывают по одному)	

Двугранный угол (показывают по трое)	
Двугранный угол (показывают по одному)	
Трехгранный угол (показывают по двое)	
Трехгранный угол (показывают по трое)	
Трехгранный угол (показывают по одному)	 
Четырехгранный угол (показывают по двое)	
Четырехгранный угол (показывают по трое)	
Четырехгранный угол (показывают вчетвером)	

Четырехгранный угол (показывают по одному)	

5. Задание по теме «Окружность. Круг. Сфера. Шар»

Сначала объясняем, что руки – это радиусы, т.е. при выполнении упражнения руки не сгибаются. Данные фигуры – это множество точек равноудаленных от центра. Точки – это кулаки.

Покажите:

Окружность (одной рукой)
Две окружности с радиусом в локоть (двумя руками)
Две окружности с радиусом в руку (круговые движения двумя руками вперед одновременно)
Две окружности (круговые движения двумя руками вперед поочередно)
Две окружности (круговые движения двумя руками назад одновременно)
Две окружности (круговые движения двумя руками назад поочередно)
Две окружности (круговые движения одной рукой вперед, другой назад одновременно)

Покажите (коллективное задание):

Круг
Сферу
Шар

По алгебраическим понятиям, к примеру, во время знакомства с дробями дети могут поиграть в игру-упражнение «Дробь».

Игра «Дробь»

Правило: Учитель в первый раз сам становится ведущим, а потом выбирает детей для роли ведущего. Ведущий говорит «Числитель» - все должны стоять, а если скажет «Знаменатель» - все должны присесть на корточки.

В это правило можно добавить понятие «Смешанная дробь» по прохождению соответствующей темы. Здесь к числителю и знаменателю прибавляется слово «Целая часть». Это слово произносится после слова «Числитель», т.к. подразумевает выпады в бок. Это упражнение ассоциируется с местоположением «Целой части» (находится посередине числителя и знаменателя).

При представлении натуральных чисел на координатном луче предлагаю поиграть в игру-упражнение «Кузнечики».

Игра «Кузнечики»

Правило: Ребята стоят в начале координатного луча (в точке с координатой 0). Учитель называет координаты точек, в которые дети должны прискакать. Задача детей прыгнуть столько раз, сколько делений понадобится допрыгать до этой точки.

Например, учитель диктует: А(1) (точка А с координатой 1), В(3), С(2), Д(6), Е(4), О(0), дети соответственно делают 1, 2, 1, 4, 2, 4 прыжка на месте (рис.1).

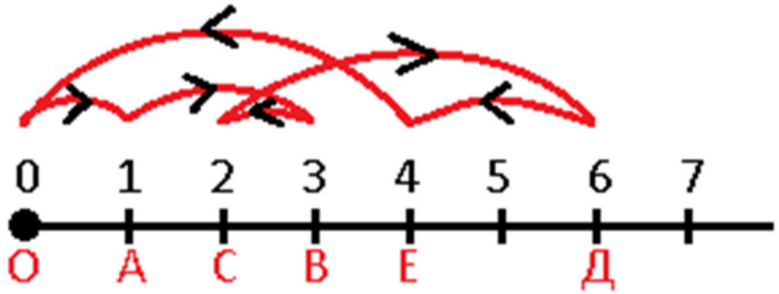


Рисунок 1

Эту же игру можно проводить при изучении отрицательных чисел.

Игра «Правда-ложь»

По арифметике, одним из ярких примеров, является то, что дети выполняют различные физические упражнения в виде игры «Правда - ложь» при устном счете, при прохождении тем единицы длины, массы, времени, площади, простые и составные числа и др.

К примеру: если ложь – делают повороты головой налево-направо как будто молча отрицают сказанное, если правда – делают наклоны вперед-назад как будто соглашаются со сказанным, если не знают – делают круговые вращения головой или плечами. Для улучшения зрения можно все эти упражнения делать глазами.

При апробации тематических ВМ в 5 и 6 классах наблюдались улучшения эмоционального подъёма учащихся, восприятия изучаемого материала, формирование познавательного интереса к учёбе, путем выполнения творческих заданий и снижение уровня тревожности.

Таким образом, можно подойти к выводам:

1. В применениях ВМ на уроках особенно эффективны динамические паузы, которые сочетаются с темой урока (не нужно после ВМ подключать детей обратно к теме);
2. ВМ позволяют закрепить, повторить, обобщить и систематизировать пройденный материал;
3. ВМ развивают творческое воображение и логическое мышление учеников;
4. Потраченное время на уроке окупается усилением работоспособности, а главное, укреплением здоровья учащихся.

УДК 378

ВОЗМОЖНОСТИ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОГО СРЕДСТВА WOLFRAMALPA В РЕАЛИЗАЦИИ ПРИКЛАДНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ УЧЕБНОЙ ТЕМЫ «СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ»

Д.А. Власов, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»
e-mail: *DAV495@gmail.com*

В рамках данной статьи выделены и охарактеризованы основные возможности инструментального средства Wolframalpa в реализации прикладной направленности преподавания учебной темы «собственные значения и векторы матрицы», имеющей существенное значение для развития инновационных компонентов профессиональной компетентности будущего бакалавра экономики. Представлена новая прикладная задача анализа портфеля рисков, включение которой в практику математической подготовки будущего бакалавра экономики позволяет расширить представления студентов о возможностях математического аппарата в анализе рисковых ситуаций, описаны её содержательно-методические особенности. Выделенные шесть этапов по работе с задачей на анализ рисковой ситуации могут быть использованы для управления учебно-познавательной деятельностью студентов экономического бакалавриата.

Ключевые слова: прикладная направленность, информационная технология, инструментальное средство, моделирование, рисковая ситуация, линейная алгебра, бакалавр экономики.

Экономико-математические методы, активно развивающиеся в современных условиях цифровизации экономики и экономических исследований, являются важным компонентом профессиональной компетентности будущего экономиста, востребованного на рынке труда. Развитие компетенции в области теоретической и прикладной научной деятельности будущего бакалавра экономики, направленной на формализованный (математический) анализ социально-экономических систем, происходит в рамках различных математических дисциплин, изучаемых в экономическом университете.

К таким дисциплинам относится и дисциплина «Линейная алгебра», методы которой представляют собой инструментальную основу количественного анализа экономических объектов, процессов и явлений. Не вызывает сомнений, что актуализация рисков различной природы, характерная для современного состояния экономики, усложнение социально-экономических отношений и их противоречивая природа делает исследование экономических проблем и ситуаций невозможным без использования инструментальных средств и математического моделирования.

На необходимость адаптации программ высшего образования в контексте современных требований рынков образовательных услуг и профессионального сообщества в условиях цифровизации указывается в исследовании [2]. Мы согласны с авторами, что развитие методических систем обучения математическим дисциплинам невозможно без целенаправленного совершенствования содержания обучения и технологий обучения. Отметим, что в публикациях [3, 6, 7] уделяется особое внимание совершенствованию технологий формирования и раскрытия в учебном процессе содержания математических дисциплин в высшей школе, элементами кото-

рого выступают различные социальные, управленческие, экономические проблемы и ситуации. Различные по сложности и трудности для студентов экономического бакалавриата, они требуют применения математических методов, в том числе методов линейной алгебры.

Рассмотрим далее прикладные и исследовательские возможности нового инструментального средства WolframAlpha для преподавания учебной темы «Собственные значения и векторы матрицы». Ранее в работе автора был раскрыт потенциал WolframAlpha для построения и исследования теоретико-игровых моделей [1], позволяющих расширить модельные представления будущего экономиста об экономических ситуациях с акцентом на характер взаимодействия экономических агентов (степень выраженности антагонизма и возможности организации коалиций). Вопросы использования WolframAlpha для решения различных математических и методических задач представлены в исследованиях [8, 9, 11]. Авторы отмечают, что дидактические возможности WolframAlpha для модернизации математического образования требуют пристального внимания и изучения. В рамках реализации математической подготовки будущего экономиста в Российском экономическом университете им. Г.В. Плеханова нами накоплен опыт использования инструментального средства WolframAlpha для освоения студентами различных математических приёмов и методов, в том числе методов линейной алгебры, среди которых центральное место занимают методы решения систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, имеющие разнообразные социально-экономические приложения.

В инструментальном средстве WolframAlpha задаче определения собственных значений квадратной матрицы соответствует специальный запрос eigenvalues, аргументом которого выступает заданная квадратная матрица. Следует обратить внимание студентов на то, что квадратная матрица должна быть введена в виде массива, при этом элементы каждой строки заключаются в фигурные скобки, а сами строки вводятся через запятую.

На рисунке 1 представим реализацию запроса eigenvalues [{1,-1,2},{7,3,5},{3,1,0}] на нахождение собственных значений соответствующей квадратной матрицы A.

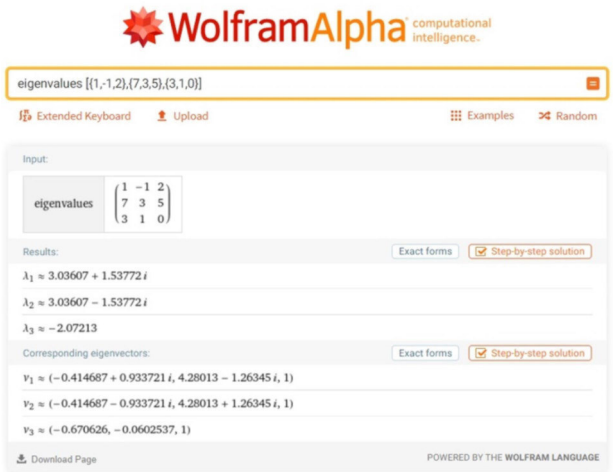


Рисунок 1 – Результат реализации запроса на нахождение собственных значений квадратной матрицы

Для того, чтобы избежать механического использования инструментального средства *WolframAlpha*, в процессе работы с ним важно обращать внимание студентов на получаемые результаты и соотносить их с теоретическим материалом по курсу линейной алгебры. Так, матрица третьего порядка всегда имеет ровно три собственных значения. При этом возможны следующие варианты: все собственные значения – действительные числа; одно собственное значение – действительное число, два других – комплексно-сопряженные числа.

Задаче определения собственных векторов заданной квадратной матрицы в инструментальном средстве *WolframAlpaha* соответствует специальный запрос *eigenvectors*, аргументом которого является заданная квадратная матрица. Результат реализации запроса eigenvectors [{1,-1,2},{7,3,5},{3,1,0}] представлен на рис. 2.

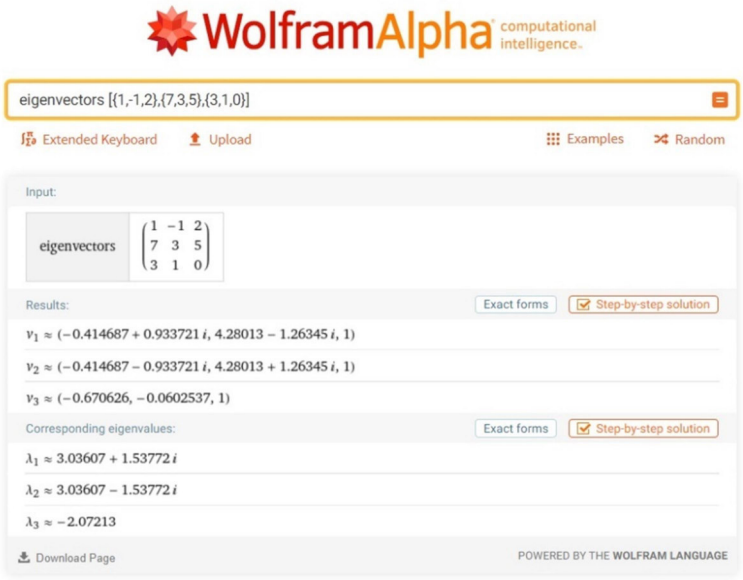


Рисунок 2 – Результат реализации запроса на нахождение собственных векторов квадратной матрицы

Рассмотрим далее использование инструментального средства *WolframAlpha* для решения более сложных задач, требующих нахождения собственных значений и векторов квадратной матрицы. К таким задачам в полной мере относятся задачи принятия решений, современные социально-экономические интерпретации которых представлены в публикациях [5, 14]. Потребность в использовании метода собственных значений и векторов возникает в процессе анализа альтернатив, выбора оптимального решения, построении иерархии рисков, обоснования инвестиционного проекта – т. е. при анализе разнообразных ситуаций хозяйственно-экономической деятельности. Следует отметить, что инструментальное средство *WolframAlpha* может выступать инструментом активизации познавательной деятельности при обучении математике, на что указывается в статье [10].

В рамках статьи приведем новую типовую задачу на анализ портфеля рисков, содержание и методы решения которой доступны для понимания студентами первых курсов экономического университета. Данная математическая за-

дача имеет экономическое содержание и её решение в условиях цифровизации экономики и экономических исследований требует применения цифрового инструментального средства. Обратим внимание, что инструментальное средство *WolframAlpaha* облегчает работу преподавателя математических дисциплин по конструированию достаточного количества задач и упражнений на развитие конкретных навыков анализ экономический ситуаций. Эта возможность инструментального средства *WolframAlpaha* позволяет по-новому реализовать классический принцип индивидуализации обучения, варьируя размерность и вычислительную сложность задач, выступающих элементами учебно-познавательной деятельности студентов экономического бакалавриата. Отметим, что более сложные приёмы и методы анализа рисковых ситуаций представлены в публикациях [4, 13]. Авторы также отмечают востребованность информационных технологий и инструментальных средств для повышения качества принимаемых решений в условиях риска.

В качестве цели задачи выступает анализ проекта с позиции его рисковых составляющих. Будем считать, что риски проекта возникают по трем независимым причинам. Первая причина – «Ошибки в начальной информации», вторая причина – «Неопределенность поставок сырья», третья причина – «Волатильность курса рубля». Опрошенные эксперты считают, что вторая причина в пять раз значимее, чем первая; третья причина в два раза значимее, чем вторая; первая причина в четыре раза значимее, чем третья.

С целью управления учебно-познавательной деятельностью студентов экономического бакалавриата мы рекомендуем при работе с данной экономико-математической задачей придерживаться следующих этапов работы.

Этап 1. «Анализ текстовой задачи экономического содержания. Выделение множества альтернатив».

Этап 2. «Составление матрицы парных сравнений».

Этап 3. «Вычисление собственных чисел матрицы парных сравнений».

Этап 4. «Определение собственного вектора, соответствующего максимальному собственному числу».

Этап 5. «Нормировка параметров собственного вектора и использование их для окончательного анализа экономической ситуации».

Этап 6. «Получение результата и выяснение его содержательного смысла в терминах решаемой задачи».

В соответствии с условием рассматриваемой задачи матрицей парных сравнений является матрица третьего порядка. Воспользуемся одним из представленных выше запросов, например *eigenvalues [{1,0.2,4},{5,1,0.5},{0.25,2,1}]*. Рисунок 3 содержит собственные значения матрицы парных сравнений, соответствующей рассматриваемой экономической ситуации, наибольший из которых *4.71235*.

Четыре вида рисков «Социально-политические риски», «Производственные риски», «Экологические риски» и «Риски в области управления» были проанализированы экспертами на предмет их связи с рассматриваемыми тремя направлениями возникновения рисков.

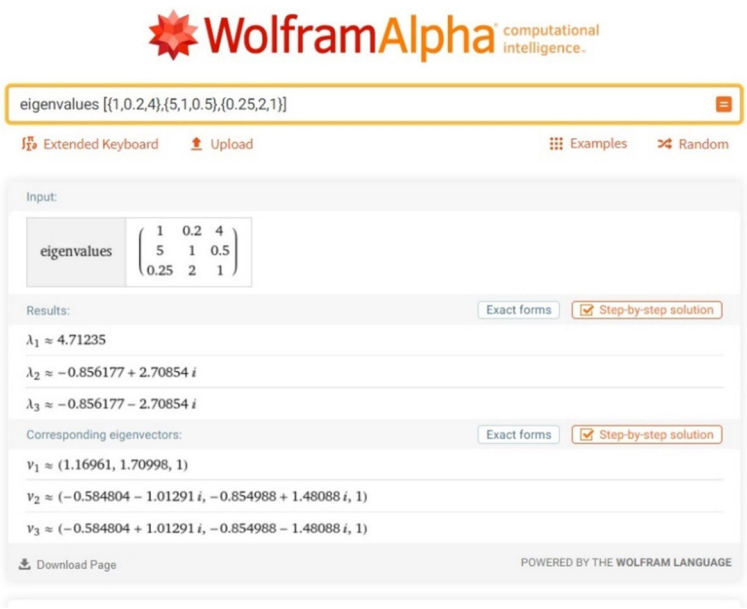


Рисунок 3 – Применение WolframAlpha для решения типовой задачи на анализ рисковой ситуации

Таблица 1 – Параметры собственного вектора, используемого для анализа рисковой ситуации

Параметры собственного вектора	*Нормированные параметры собственного вектора*
1,1696	*0,3015*
1,7100	*0,4408*
1	*0,2578*
Сумма: 3,8796	

Информация, представленная в таблице 2, позволяет установить связь между видами рисков и направлениями их возникновения.

Таблица 2 – Экспертная оценка связи риска каждого вида с направлениями возникновения рисков

Виды рисков проекта	*Направление 1*	*Направление 2*	*Направление 3*
«Социально-политические риски»	*4*	*3*	*7*
«Производственные риски»	*7*	*10*	*5*
«Экологические риски»	*6*	*5*	*2*
«Риски в области управления»	*10*	*2*	*1*

Таблица 3 – Количественная оценка значимости каждого вида риска

Виды рисков проекта	*Количественная оценка значимости*
«Социально-политические риски»	*4,3325*
«Производственные риски»	*7,8068*
«Экологические риски»	*4,5282*
«Риски в области управления»	*4,1541*

Таким образом, на первом месте по значимости для рассматриваемого проекта – производственные риски (*7,8068*), далее с достаточно большим отрывом следуют экологические (*4,5282*), социально-политические (*4,3325*) и риски в области управления (*4,1541*). Полученный результат количественной оценки

значимости рисков проектов позволяет более глубоко понять структуру рисков проекта, выстроить иерархию рисков для организации оптимальных мероприятий, направленных на минимизацию риска.

Представленная задача хотя и носит типовой характер, позволяет познакомить студентов экономического бакалавриата с приёмами анализа рисковой ситуации на основе метода собственных значений и векторов матрицы парных сравнений – метода, нашедшего широкое применения в практике принятия решений в различных областях хозяйственно-экономической деятельности.

Среди перспектив исследования следует указать совершенствование интеграции цифровых и педагогических технологий в практике преподавания математических дисциплин, а также проектирование информационно-аналитических технологий обучения студентов-экономистов, основные направления разработки которых представлены в статье [12]. Таким образом, проблема прикладного усиления преподавания математических дисциплин как на уровне отдельных учебных тем, так и образовательной области «Математика и математическое моделирование» в целом, требует повышенного внимания со стороны педагогов, методистов, психологов, разработчиков контента цифровых образовательных ресурсов, специалистов в области математических методов в экономике. Её решение связано с повышением качества профессиональной подготовки будущих экономистов, развития у них профессиональных компетенций в области принятия решений и анализа экономических ситуаций, формированием навыков осознанного выбора и использования инструментальных средств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов Д.А. Wolfram-технологии в обучении теории игр теоретико-игровом моделировании социально-экономических ситуаций // Системные технологии. – 2018. – № 3 (28). – С. 13-18.
2. Карасев П.А., Чайковская Л.А. Совершенствование программ высшего образования в контексте современных требований рынков образовательных услуг и профессионального сообщества // Экономика и управление: проблемы, решения. – 2017. – Т. 3. – № 2. – С. 3-9.
3. Линейная алгебра. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. / Под общей редакцией О.В. Татарникова. М.: Издательство Юрайт, 2014. – 334 с.
4. Лихачев Г.Г., Сухорукова И.В. Компьютерное моделирование и математическое обеспечение экономико-социальных задач // Экономический анализ: теория и практика. – 2003. – № 5. – С. 60-62.
5. Мастяева И.Н., Горемыкина О.Н. Методы оптимальных решений. ИНФРА-М, – 2016. – 384 с.
6. Математика для экономистов. Практикум: учебное пособие для академического бакалавриата / Под общей редакцией О.В. Татарникова. М.: Издательство Юрайт, – 2014. – 285 с.

7. Математика для экономистов. Теория и практика: учебник для академического бакалавриата / Под общей редакцией О.В. Татарникова. М.: Издательство Юрайт, 2014. – 598 с.
8. Муханов С.А., Бритвина В.В. Использование технологии Wolfram CDF при изучении нелинейных колебаний // Системные технологии. – 2018. – № 1 (26). – С. 23-26.
9. Муханов С.А., Муханова А.А. Использование информационных технологий для индивидуализации обучения математике на примере темы «Дифференциальные уравнения» // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования. – 2018. – № 1 (43). – С. 72-77.
10. Полежаев В.Д., Полежаева Л.Н. Способы и приемы активизации познавательной деятельности при обучении математике Актуальные проблемы преподавания математики в техническом ВУЗе. – 2018. – № 6. – С. 218-224.
11. Синчуков А.В. Преподавание математических дисциплин в условиях цифровизации // Электронные библиотеки. – 2020. – Т. 23. – № 1-2. С. 177-186.
12. Смирнов Е.И., Трофимец Е.Н. Проектирование информационно-аналитических технологий обучения студентов-экономистов // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – Т. 2. – № 2. – С. 137.
13. Тихомиров Н.П. Научная школа "Повышение качества разработки и использования математического инструментария в решении проблем анализа прогнозирования и управления социально-экономическими процессами" // Вестник Российской экономической академии им. Г.В. Плеханова. – 2007. – № 1. – С. 47-53.
14. Фомин Г.П., Карасев П.А. Математика в экономике: 813 задач с комментариями и ответами. Учебное пособие. М.: Общество с ограниченной ответственностью "Издательство "КноРус", 2019. – 368 с.

УДК 37

ИЗ ОПЫТА ФОРМИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ НАВЫКОВ У УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

А.В. Галкина, учитель математики
СОШ №29 им. Д.Н. Мельникова г. Орла
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *anastasia.galkina2017@yandex.ru*

В школьном курсе обучения вычислительные навыки играют важную роль. Почти ни одно упражнение, ни одну задачу по математике, да и другим школьным дисциплинам нельзя решить, не обладая навыками элементарных способов вычисления. Прочные вычислительные навыки способствуют повышению ско-

рости мышления, развитию внимания и памяти, полноценному усвоению предметов физико-математического цикла.

Развитие прочных вычислительных навыков решает одну из основных задач обучения математике - формирование вычислительной культуры школьника.

Прочные вычислительные навыки школьника – одно из условий его готовности к применению математики в практической деятельности, успешности при изучении других наук и осуществлению будущей профессиональной деятельности.

Не будет преувеличением сказать, что проблема формирования вычислительных навыков при обучении математике обсуждается постоянно, начиная с зарождения методики преподавания и по сей день.

Выделены принципы формирования вычислительных навыков учащихся при обучении математике, перечислим основные из них:

- систематичность использования различных упражнений по формированию вычислительных навыков;
- постепенное усложнение и повышения уровня сложности заданий;
- индивидуальный подход, принятие во внимание основных возрастных и психологических особенностей учащихся;
- интересные и творческие задания для активного их решения учащимися.

Для того, чтобы сформировать прочные вычислительные навыки у каждого учащегося, необходимо многократное повторение пройденного материала, согласитесь, это не всегда интересно и активность школьников может падать, предотвратить это поможет использование нестандартных методов формирования вычислительных навыков.

Опишем эффективные нестандартные методы формирования вычислительных навыков, использованные нами при обучении математике.

Почти каждый урок математики в основной школе начинается с ***устного счета***, это необходимо для систематического повторения, формирования прочных навыков, в том числе и вычислительных. Кроме того, устный счет имеет широкое применение в быту; он развивает сообразительность учащихся, ставя их перед выбором применения тех или иных приемов вычисления в конкретных ситуациях, кроме того, устный счет облегчает письменные вычисления. Беглость в устных вычислениях достигается достаточным количеством упражнений. Существует множество форм устного счета, которые можно применять на уроках, рассмотрим такой метод, как магические квадраты.

Магические квадраты – квадраты, в которых сумма чисел, стоящих в клетках по горизонтали, вертикали и диагонали равны.

Предлагая заполнить магический квадрат, учащиеся, вместо стандартного задания «Вычислить», выполняют устно десятки операций, чтобы отгадать (вычислить) нужное число.

Задания могут быть нескольких видов.

1. Проверить будет ли квадрат магическим?

	7		3	11
	3	7	1	11
	1	3		11
11	11	11	11	11

Рисунок 1

Следует проверить, равны ли суммы чисел в клетках по вертикальному, горизонтальному направлению, по диагоналям (смотри рисунок 1).

Каждый учащийся устно проверяет, равны ли данные суммы. Для «слабых» учеников важно акцентировать внимание на рационализации вычислений (например, для того чтобы быстро сложить числа 67, 13, 31, надо сначала сложить 67 и 13 и к полученной сумме прибавить 31). Исходя из математических способностей класса, можно придумать различные интерпретации данного задания, постепенно усложняя его уровень.

2. Квадрат с частично заполненными клетками.

Заполните магический квадрат.

2	7	
9		1
4		

Рисунок 2

Исходя из способностей класса подбираем числа, постепенно усложняя уровень задания, например, подбор двухзначных/трехзначных чисел или многозначных.

3. Для более «сильных» учащихся можно предложить такое задание.

Составьте магический квадрат, сумма чисел по горизонтали, вертикали и диагонали которого равна 15.

Решение: здесь число 15 - наименьшая магическая константа *M*, ее можно найти следующим образом:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5=45,\ 45:3=5,$$

где 5 – число, расположенное посередине квадрата, а числа 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 будут располагаться в других клеточках квадрата.

Вот один из вариантов ответа.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Рисунок 3

Магические квадраты – это отличное подспорье и в развитии интереса к математике, и в формировании вычислительных навыков у учащихся. Мы показали примеры заданий на формирование вычислительных навыков на множестве натуральных чисел, а в статье учителя Н.В. Львовой показана работа с магическими квадратами, содержащими десятичные дроби [2].

Таким образом, учитель, исходя из математических возможностей класса и каждого учащегося, может менять и корректировать условие данного задания для лучшего формирования вычислительных навыков.

Рассмотрим еще один пример устного счета – упражнение «Расшифруй слово».

Найди значение выражений, из полученных значений с помощью рисунка 4 расшифруй слово.

М	Р	Б	Х	А	У	П	Г	Т
4	-1	-15	-2	8	0	-4	-9	1

Рисунок 4 – Таблица шифров

1. $-10 + (-5) =$
2. $8 + (-9) =$
3. $-7 + 15 =$
4. $-5 + 3 =$
5. $5 + (-1) =$
6. $14 + (-6) =$
7. $-7 + (-2) =$
8. $-0{,}5 + 0{,}5 =$
9. $-21 + 17 =$
10. $21 + (-20) =$
11. $16 + (-8) =$

Ответ: Брахмагупта.

Учитель может дать комментарий: Брахмагупта – индийский математик, жил в 7 веке. Он представлял положительные числа как «имущество», а отрицательные числа как «долг».

Вот как выглядели правила сложения в трактатах Брахмагупты:

- сумма двух «имущество» есть «имущество»;
- сумма двух «долгов» есть «долг»;
- сумма «имущества» и «долга» равна их разности.

Полезно предложить учащимся сформулировать эти правила в трактовке современной математики.

При решении упражнения «Расшифруй слово» закрепляются правила сложения отрицательных чисел, сложения чисел с разными знаками, развивается интерес учащихся к истории математики, и, конечно, формируются вычислительные навыки.

Для большего разнообразия работы на уроке, целесообразно применить такой методический прием, как ***дидактические игры***, которые обладают образовательной, развивающей и воспитательной функциями. Играя, учащиеся учатся применять свои знания и навыки на практике, пользоваться ими в разных ситуациях. Во время игры у школьников развиваются такие качества, как внимательность, сосредоточенность, а также коммуникативные навыки. Порой, главная задача таких игр – в легкой и быстрой форме сформировать вычислительные навыки каждого учащегося [1].

Вот пример такой игры.

Кодированные упражнения.

Тема: «Сложение и вычитание десятичных дробей».

Вычислить значения:

1-ая команда:

1) $27{,}3 - (-2{,}6) = \text{а}$;
2) $-3{,}3 - \text{а} + (-3{,}4) = b$;
3) $-13 - b - (-11{,}2) = \text{с}$;
4) $(\text{а} + b) - \text{с} = g$.

2-ая команда:

1) $-5{,}6 - 3{,}7 = \text{а}$;
2) $31{,}2 - \text{а} + (-2{,}5) = b$;
3) $-12 - (-6{,}1) - b = \text{с}$;
4) $(b + a) - \text{а} = g$.

Кодированные ответы: 1) -41,5; 2) -36,6; 3) -43,9; 4) 3,4; 5) -9,3; 6) 29,9; 7) 38; 8) 34,8 [1].

Выполнив первое упражнение, учащийся ищет полученное число среди ответов. Если его там нет — допущена ошибка. Выполнив все упражнения своего варианта, ученик подает учителю работу с кодированным ответом.

Например, 6281. Это означает, что a = 29,9; b = -36,6; c = 34,8; g= -41,5.

Для того чтобы, в процесс формирования вычислительных навыков, был задействован весь класс, используем - математический диктант. ***Математический диктант*** - одна из испытанных временем форм активной работы школьников. Именно он позволяет включить в работу всех учащихся одновременно и выработать определенный темп работы. Такой вид деятельности формирует скорость, гибкость, глубину и точность мысли при решении математических задач.

Приведем конкретный пример.

Математический диктант в 6 классе по теме
«Сложение отрицательных чисел»

1. Найдите сумму чисел минус сто и минус девяносто.
2. Сложите минус восемьдесят три и ноль.
3. Какое число больше на две единицы числа минуса трех тысяч девяноста одного.
4. Какое число меньше на три единицы числа минуса пяти тысяч девятьсот восьмидесяти.

Верно ли высказывание (ответьте «да» или «нет»):

5. (*) Точка В с координатой минус четырнадцать на девять единичных отрезков левее точки М с координатой минус двадцать три.
6. (*) Точка С с координатой минус тридцать пять на семь единичных отрезков левее точки N с координатой минус двадцать восемь.
7. Результат сложения двух отрицательных чисел может быть, как отрицательным, так и положительным числом.
8. Сумма любого отрицательного числа и нуля есть число отрицательное.
9. –3*78 < –3*78. (Замените звездочки цифрами так, чтобы неравенство оказалось верным).

Существует множество различных нестандартных и эффективных методов для формирования прочных вычислительных навыков на уроках математики, но всех их объединят одно – они должны активизировать деятельность учащихся, формировать познавательный интерес.

Каждый учитель, исходя из математических способностей своего класса, различных интересов учащихся, как правило, выбирает свои методы, которые помогают ему в формировании вычислительной культуры школьников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко В.Г. Дидактические игры на уроках математики. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.
2. Львова Н. В. Об устном счете замолвлю я слово //Математика в школе, 2013, №7. - С. 8-12

УДК 37.018.4

ЭЛЕКТРОННЫЙ ТЕКСТ КАК СРЕДСТВО ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

И.С. Гомбоева, к.пед.н., преп.
ГПОУ «Приаргунский государственный колледж»
e-mail: *gomboevai@mail.ru*

В статье рассматриваются методические приемы составления и оформления обучающих и контролирующих электронных текстов. Показано, что образовательная ценность электронного текста зависит от его информативности, лаконичности, структурированности, наличия заданий, активизирующих самостоятельную деятельность обучающихся в условиях дистанционного обучения.

Ключевые слова: дистанционное обучение, инфографика, хрия, электронный текст, электронная форма.

Еще лет двадцать назад дистанционное обучение представлялось нам как одна из инновационных технологий, как далекая перспектива будущего. Сегодня же мы стали свидетелями и участниками процессов трансформации образования на всех его уровнях, связанных с повсеместным внедрением обучения на расстоянии.

Ключевой характеристикой дистанционного обучения является «взаимодействие обучающегося и преподавателя через электронные каналы передачи и получения информации (Интернет, электронная почта), то есть без непосредственного контакта между ними» [5].

При этом, по мнению А.В. Роговой, в новых условиях обучения принципиально меняются позиции преподавателя и студентов. Обучающийся становится субъектом получения знаний в процессе формального, неформального и информационного образования, а педагог выступает в роли консультанта, модератора, наставника, посредника обучения. Таким образом, функция непосредственной трансляции знаний преподавателем уходит в прошлое [3].

Имеющийся опыт работы в режиме дистанционного обучения показал, что одним из основных моментов (на первый взгляд простых, но, как показала практика, и достаточно сложных) организации самостоятельной учебной деятельности обучающихся на расстоянии является оформление педагогом текстовых материалов для студентов.

В текстовой форме может быть представлена различная информация: конспекты лекций, методические рекомендации, инструкционные карты, контрольные задания, тесты и др. Общей особенностью всех перечисленных материалов в условиях дистанционного обучения является их электронное представление. Другими словами, студенты работают с электронным текстом, подготовленным преподавателем.

Под электронным текстом понимается «текст, продуцированный с помощью какого-либо электронного носителя информации (компьютера, телефона, планшета) и совмещающий в себе в той или иной степени черты устной и письменной речи» [2].

В современной лингвистической науке все электронные тексты принято делить на две группы. Первая – электронные тексты, имеющие аналоги среди традиционных типов текста. Сюда входят все виды писем, отчеты, деловая и личная корреспонденция, документация, статьи, публицистические и художественные произведения. То есть, такие тексты распространяются как в бумажном, так и в электронном варианте.

Вторая группа электронных текстов представлена текстами, существующими только на электронных носителях и не имеющих бумажных аналогов. К ним относятся смс-сообщения, сообщения в чатах, форумах, статусы в социальных сетях, комментарии и др. [2].

Очевидно, что в контексте данной статьи рассматривается принадлежность электронного текста к первой группе.

В соответствии с законами дидактики для того, чтобы электронный текст стал средством дистанционного обучения необходимо, чтобы он выполнял обучающую, развивающую и воспитывающую функции, а также являлся мотивационным, управленческим и контролирующим инструментом учебно-познавательной деятельности обучающихся.

Исходя из этого, сформулируем основные требования к содержанию и оформлению электронных обучающих текстов.

Текстовые материалы к урокам должны быть не слишком объемными и в то же время информативными, содержать самое основное. Опыт показывает, что оптимальный объем таких материалов для студентов колледжа – от трех до пяти страниц.

Текст должен быть написан грамотным, понятным языком. Желательно избегать сложной терминологии (за исключением терминов, обязательных к изучению).

В тексте целесообразно использовать прямые формы обращения к обучающимся: «Обратите внимание…», «Посмотрите на рисунок…», «Прочитайте и запомните…», «Не забудьте повторить…», «Вспомните…» и т.п., что, на наш взгляд, создает ощущение присутствия педагога рядом со студентом и играет важную роль в освоении им учебного материала в условиях недоступности личного контакта.

Особое внимание необходимо уделять техническому оформлению текстовых материалов. В этом случае многое зависит от степени владения педагогом приемами форматирования текста. Идеальный вариант, когда каждый преподаватель будет оформлять конспекты своих лекций, практических занятий в индивидуальном стиле (задание гарнитуры, размера шрифта, стиля абзаца, оформление заголовков, колонтитулов и др.). Отдельные фрагменты документа (определения терминов, формулы) с целью акцентирования внимания обучающихся могут быть выделены цветным шрифтом, заливкой, рамкой.

С точки зрения восприятия текстовой информации лучше запоминается та, которая представлена с использованием различных приемов ее структурирования. Поэтому целесообразно в текст включать таблицы, схемы, графики, диаграммы. В этом плане в качестве одного из действенных методов визуализации

учебной информации выступает инфографика, отличающаяся от других видов визуализации своей метафоричностью. Для визуализации сложных технических явлений или объектов можно использовать интеллект-карты.

В качестве отдельного требования к электронным обучающим текстам выделим внедрение в них иллюстраций. Рисунки, фотоматериалы, соответствующие содержанию текста, способствуют лучшему его усвоению. Необходимо отметить, что все иллюстрации должны быть качественными. Например, при проведении в колледже практических занятий по информатике дистанционно в качестве дополнительных материалов к инструкционным картам занятий с описанием последовательности выполнения заданий на компьютере целесообразно использовать скриншоты, демонстрирующие содержание соответствующих действий.

Образовательная ценность электронного текста состоит не только в его информативности, но и в присутствии в нем контролирующих заданий, позволяющих выявить уровень усвоения учебного материала. Текст становится инструментом обучения только в том случае, когда он побуждает обучающегося к самостоятельной мыслительной деятельности.

Традиционным средством, инициирующим работу студента над материалом лекции, являются контрольные вопросы, на которые необходимо ответить после изучения содержания темы. Формулировки вопросов должны быть разнообразными, не ориентированными на односложные ответы. Например: «Что относится к информационным ресурсам общества?», «Поясните суть модуляции и демодуляции», «Что представляет собой реляционная база данных?» и т.п. Желательно использовать вопросы, носящие проблемный, исследовательский характер: «Какую роль играла и играет информация в развитии общества?», «Как связаны развитие технологий и информационное развитие общества?», «Почему информационные технологии позволяют индивидуализировать процесс обучения и как они помогают реализовать потребности в самообразовании людей?» и др. [4].

С целью эффективного усвоения материала лекции, его осмысления и понимания можно предложить студентам задания на преобразование текстовой информации в табличную или графическую формы. Например: «Заполните таблицу “Преимущества и недостатки топологий локальных сетей”», «Постройте логико-графическую схему, демонстрирующую структуру программного обеспечения компьютера» и т.п.

Еще одним средством работы с текстом является составление глоссария слов или выражений по какой-либо теме. Как правило, обучающиеся просто переписывают из текста незнакомые им термины и приводят их определение. Наиболее же предпочтительным вариантом выполнения данного задания является отбор терминов, их систематизация по какому-либо признаку, поиск определений с указанием источников (словарей, энциклопедий), авторов определения.

Выявление уровня осознания содержания лекции обучающимся осуществляется и в процессе самоанализа его деятельности и результатов. В этом случае студентам можно предложить один из приемов рефлексии содержания учебного материала, в котором они размышляют, выражают свое отношение к проблеме, самостоятельно ставят цели. Сделать это можно с помощью формулирования высказывания типа: «Я не знал …» – «Теперь я знаю…».

Наиболее «сильным» студентам можно давать задания на составление хрии, представляющей собой, с точки зрения риторики, монолог-рассуждение. Другими словами, хрия содержит логически последовательные выводы на тему заданного тезиса. Существуют две разновидности хрии: классическая или строгая и свободная. Структура классической хрии: «тезис – доказательство», структура свободной хрии: «доказательство – тезис» [1].

Примером классической хрии является доказательство теоремы по математике. Хрией считается сочинение на заданную тему, доклад, статья.

При изучении информатики обучающимся можно предложить составить хрию (написать сочинение) на темы: «Цифровизация сферы общественного питания», «Роль информационных технологий в профессии агроном» и т.п. Хрия учит правилам построения речи, текста, доказательствам и выводам.

Для разработки контролирующих материалов, представленных в электронном виде, можно использовать дополнительные средства текстового процессора MS Word – создание электронных форм, представляющих собой структурированный документ, содержащий заполненные графы и некоторые области (поля формы), в которые пользователь вводит переменную информацию. Форма создается на основе шаблона. Для этого в среде текстового процессора необходимо выполнить дополнительные настройки.

Электронные формы можно использовать в документе в качестве пропущенных элементов текста (слов, словосочетаний) для самостоятельного заполнения обучающимися. Причем, студентам предлагается набор вариантов ответов, из которых нужно выбрать верный. Кроме этого, формы могут использоваться в тестовых заданиях. Пример задания по информатике с электронной формой «поле со списком» представлен на рисунках 1, 2, 3.

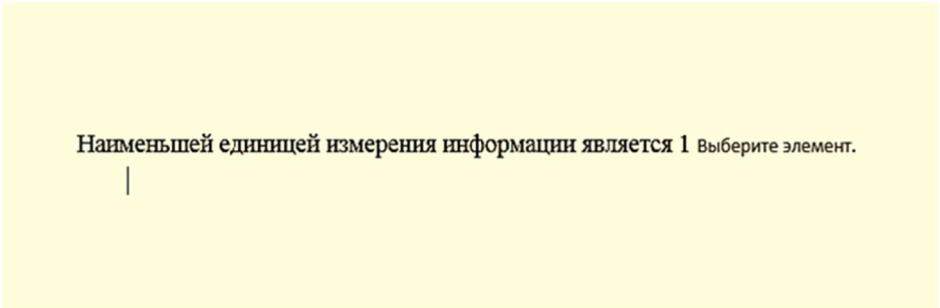


Рисунок 1 – Внешний вид текста с формой

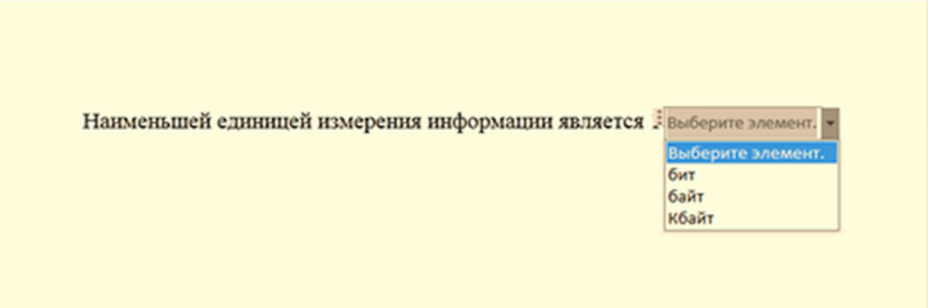


Рисунок 2 – Текст с формой «поле со списком»

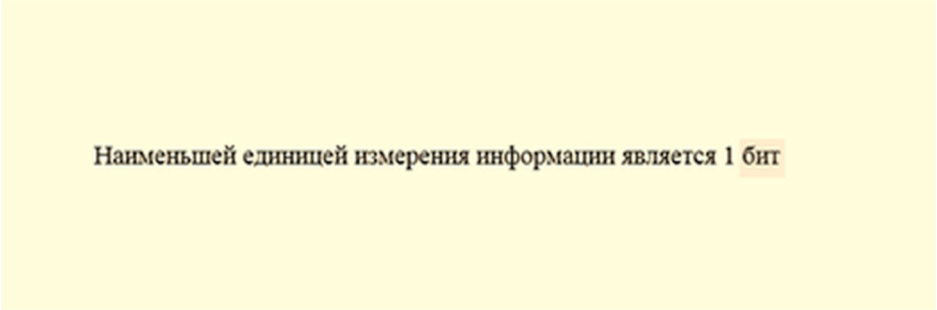


Рисунок 3 – Результат выбора предложенного варианта в форме

Готовые текстовые материалы сохраняются в форматах .doc, .pdf, .djv.

Еще одним способом представления текстов в электронном виде является гипертекст, обладающий нелинейной структурой и предоставляющий читателю возможность самостоятельного выбора последовательности изучения содержащейся в нем информации.

Таким образом, электронные тексты могут выступать в качестве одного из средств обучения в дистанционном формате только тогда, когда их содержание, оформление будет способствовать вовлечению обучающихся в активную, сознательную, мотивированную, самостоятельную учебную деятельность по овладению знаний и развитию умений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрашина Е.Н. Хрия в современной Российской риторической практике // Вестник Сургутского государственного педагогического университета. 2012. С. 45-47
2. Балакина Ю.В. Электронный текст: принципиально новый тип текста? // Вестник Волгоградского государственного университета. – 2016. – Т. 15. – № 3. – С. 17-27
3. Рогова А.В. Социокультурные вызовы современному образованию // Педагогическое обозрение. – 2019. – № 1 (37). – С. 79-85
4. Цветкова М.С., Хлобыстова И.Ю. Информатика: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 352 с.
5. Шатуновский В.Л., Шатуновская Е.А. Еще раз о дистанционном обучении (организация и обеспечение дистанционного обучения) // Вестник науки и образования. – 2020. – № 9-1 (87). – С. 53-56

УДК 372.853

МИКРОЭЛЕКТРОНИКА И НАНОЭЛЕКТРОНИКА В ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Д.И. Гусейнов, доц.
Азербайджанский государственный педагогический университет
Х.А. Адгезалова, доц.
Азербайджанский государственный педагогический университет
О.М. Гасанов, доц.
Азербайджанский государственный педагогический университет
Л.Б. Гадымалиева
Азербайджанский государственный педагогический университет
e-mail: *cahangir.adpu@mail.ru*

На современном этапе развития общества наиболее актуально стоит проблема технологии межпредметной связи физики, математики, биологии, информатики и другие. Данная технология имеет большое значение в области формирования у учащихся более глубоких знаний в профильных классов средней школы.

Технология межпредметной связи направленна на персональное обучение и воспитание, в усовершенствовании программы, структуры, содержания и организации урока с учетом интересов, наклонностей и способностей учащихся.

Нами была предложена и использована теоретическо-экспериментальная программа по микроэлектронике и наноэлектронике для профильных классов средней школы. Данная программа сочетается с технологией межпредмедных связей в средней школе, составлено примерное тематическое планирование, рассчитанное на 68 учебных часов, а так же учитывает дополнительное образование школьников.

Данная технология представлена следующими видами, моделями и структурой уроков, применяемых в учебном процессе:

I. Запланированы следующие виды уроков:

- лекции,
- беседы,
- практические занятия по решению задач,
- семинары,
- зачеты,
- контрольные работы,
- фронтальные лабораторные работы,
- исследовательские и экспериментальные работы,
- защита творческих проектов,
- экскурсии.

II. Планируются применение следующих типов уроков:

- интегрированные уроки физики и математики, физики и информатика, физики и биология,
- с применением материала истории науки и краеведения,
- с применением информационно-коммуникационных технологий.

III. Структура урока:

- постановка цели и задач урока,
- повторение материала по домашнему заданию,
- изучение нового материала,
- закрепление нового материала,
- анализ и контроль знаний учащихся,
- домашнее задание,
- рефлексия и подведение итогов урока.

Нами приведённый педагогический эксперимент по технологии межпредметной связи в обучении и воспитании учащихся профильных классов средней школы показал высокое качество достижений школьников по физике, математике, биологии и т.д. При этом значительно повысилась мотивационная учащихся к усвоению новых и современных научных знаний.

Следует отметить важность формирование ключевых компетенций у учащихся в процессе обучения через дополнительное внеклассное образование и проектную форму изучения физике.

В современной школе дополнительное внеклассное образование является определяющим в формировании современных знаний учащихся по физике. Основной задачей в специализации средней школы служит всестороннее воспитание и развитие личности каждого учащегося. Развитие и воспитание современного мировоззрения ученика средствами учебного предмета «Физика» и его работа в кружках по интересам, ориентированное на изучение физико-технических основ микроэлектроники и наноэлектроники, способствует выбору в будущем профессии учащегося.

Перевод учебно-воспитательного процесса в старших классах средней школы привел к поиску новых форм организации учебной деятельности учащихся не только на уроке физики, но и внеклассной работе. На сегодняшний день основной идеей образования является внедрение идеи самообразования учащихся. Поэтому в проектной системе обучения нет места привычным категориям оценивания. Динамика развития учащегося, которая достигается решением актуальных задач по формированию знаний на каждом уроке физики, в занятиях в кружках по интересам, становится источником заинтересованности учеников и наблюдается их интеллектуальный рост. Согласно проектной форме обучения учитель - это только проводник учащихся к новым знаниям. Учитель отличается от школьников только одним: учитель - профессионал, а учащиеся еще нет.

Проблемой в выполнении проектов является время и усилия, затрачиваемые учителем на индивидуальную работу с каждым учащимся, связанные с всесторонним изучением его знаний и возможностей, а так же выбор реальных заданий для каждого ученика. Тема проектов должна соответствовать способностям и уровню знаний учащегося. Так же нужно помнить, что проект не является проверочной работой. Проект является индивидуальной творческой работой ученика, во время выполнения которой он продолжают пополнять и расширять свои знания и формировать навыки и умения, необходимые для дальнейшего процесса обучения на основе имеющихся знаний.

Подготовка проектов учащимися к научно-практическим конференциям и семинарам служит активизации творческой деятельности учеников.

Совместная работа учителя и учащегося над творческими проектами дает возможность раскрыть творческий потенциал ученика. Для претворения в жизнь творческого проекта учитель должен подробно показать основные и дополнительные цели, а так же этапы всей работы, позволяющие развить навыки и привычки творческой работы и осуществить детальную реализацию проекта, поддерживать инициативу ученика, соблюдать тактичность, доброжелательность и терпение при высказывании критических замечаний по работе.

Учитель должен все время работать над своим уровнем знаний по тематике проектов. Учитель должен обеспечить материально-техническую базу для выполнения творческого проекта, такие как демонстрационные, справочные и наглядные средства обучения, оборудование, приборы, специальные инструменты, и материалы.

Изучение и анализ теоретических и практических основ микроэлектроники и наноэлектроники в углублённом курсе физики для средней профильной школы, на занятиях творческих кружков требует самостоятельного поиска учащимися творческих конструкторских решений. В результате этого у учащихся вырабатываются личностные качества: практичность, дисциплинированность, бережливость, а так же важные волевые качества, такие как целеустремленность, требовательность, сосредоточенность и критическое отношение к результату своего труда. Учащиеся ищут способ решения задания, поставленного руководителем проекта, по изготовлению данного устройства. При этом учащиеся совместно с учителем самостоятельно изучают справочную и техническую литературу, выполняют радиомонтажные работы. Воспитание творческой самореализации и самостоятельности личности учащегося на конкретном примере становится очевидным, когда созданная им конструкция или устройство используется на уроке физики и во внеурочной деятельности по данному предмету. Руководителю кружка необходимо оценить индивидуальную деятельность учащегося при проектировании и изготовлении конструкции или устройства, но не результат этой деятельности. Так как каждый ученик, как правило, с вдохновением изготавливает свою конструкцию, и для него она является лучшей. Учителю желательно указать учащемуся положительные и отрицательные действия при изготовлении устройства, которые повлияли на творческий результат его труда, при этом обратив особое внимание на положительные качества личности. Данное действие будет способствовать саморазвитию, самосовершенствованию и самовоспитанию учащегося. В результате этого учащийся откажется от простого подражанию учителю. Ученик начнет сравнивать, анализировать, планировать, ставить собственные цели и стремиться к ним, то есть повысится его ответственность перед собой.

Современное грамотное воспитание и развитие личности учащегося в средней школе через дополнительное внеклассное образование и проектную форму обучения будет способствовать развитию у учащихся повышенному интересу к предмету физика. При этом необходимо оценивать не только его знания и умения, но и его личностные качества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасанов О.М., Гадымалиева Л.Б., Адгезалова Х.А., Гусейнов Д.И. Программа обучения нано- и микротехнологии в средней школе на внеклассных занятиях // VI

МІЖНАРОДНА КОНФЕРЕНЦІЯ «АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ РОЗВИТКУ СВІТОВОЇ НАУКИ» (м. Київ | 29 лютого 2020р.), 36-39.
2. Гасанов О.М., Гадымалиева Л.Б., Адгезалова Х.А., Гусейнов Д.И. Анализ направлений педагогического исследования курса микро- и наноэлектроники у учащихся профильных классов средней школы// GLOBAL SCIENCE AND INNOVATIONS 2020 PROCEEDINGS March 6, 2020 GSI 2020 Tashkent, Uzbekistan Tashkent, Uzbekistan 2020, 335-336.
3. Гасанов О.М., Гадымалиева Л.Б., Адгезалова Х.А., Гусейнов Д.И. Методика преподавания нано - и микроэлектроники в курсе физики профильных классов// «GLOBAL SCIENCE AND INNOVATIONS 2020: CENTRAL ASIA» № 3(1). Февраль-март 2020 СЕРИЯ «ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ НАУКИ», НУР-СУЛТАН, 87-88.
4. Гасанов О.М., Гадымалиева Л.Б., Адгезалова Х.А., Гусейнов Д.И. Необходимое школьное учебное оборудование при изучении микро- и наноэлектроники в средней школе// Материалы VI Международной научно-практической конференции «Наука и образование в современном мире», Апрель 2020, Нур-Султан, Казахстан, 83-84.

УДК 372.851

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Ю.А. Донцова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *dontsowa.yulia@yandex.ru*

В статье рассматриваются цифровые технологий, применяемые на уроках математики в 5 классе. Приводятся примеры различных тренажеров и разъясняются особенности работы с ними.

Ключевые слова: цифровые технологии, математика, обучение.

Наряду с успешной социализацией в современном обществе, задачей цифровой и информационной компетенций является также качественное усвоение учебного предмета. Использование различных информационных тренажеров способствует решению этой важнейшей задачи. Тренажерами, как правило, называют программное обеспечение, направленное на обучение, а также контроль и оценку знаний учащихся. Указанные тренажеры предлагают ученику набор заданий на заданную тему, сопровождающийся контролем их выполнения. Программы-тренажеры предназначены для формирования умений и навыков учеников, развития логического, творческого и алгоритмического мышления, а также для закрепления уже имеющихся знаний [1]. Существует множество видов интерактивных тренажеров: тренажеры устного счета, вычислительные, графические, универсальные и т. д.

Решение большого числа математических задач можно описать в виде алгоритма, где последовательность определенных вычислительных и других действий приводит к правильному ответу. Функционал интерактивных тренажеров сводится к решению учеником некоторых заданий и проверки их на правильность. В результате этой проверки тренажер выводит некоторую информацию и рекомендации, позволяющие скорректировать ответ [2]. Таким образом, интерактивный тренажер выполняет функцию виртуального репетитора.

В демонстрационном режиме тренажер демонстрирует пошаговое решение задачи, предоставляя ученику возможность рассмотреть решение задачи с разных ракурсов.

Рассмотрим некоторые из тренажеров, применяемых на уроках математики в 5 классе более подробно.

Примером цифрового интерактивного тренажера можно назвать программу для создания презентаций **Power Point**. В презентации можно добавлять графическую и текстовую информацию, а также аудио и видеоматериалы. Наличие разнопланового материала способствует удержанию внимания учеников и облегчает процессы, связанные с восприятием и запоминанием информации. На рисунке 1 можно увидеть пример тренажера, созданного с помощью Power Point, для решения задач на нахождение процента от числа.



Рисунок 1 – Пример тренажера на решение задач

Тренажеры устного счета представляют собой зачастую программу, похожую на обычный калькулятор, с возможностью выполнения также вычислений примеров, содержащих скобки и различные арифметические действия с положительными и отрицательными числами. Пример такого тренажера можно найти в свободном доступе на сайте **matematika.club** (рисунок 2).

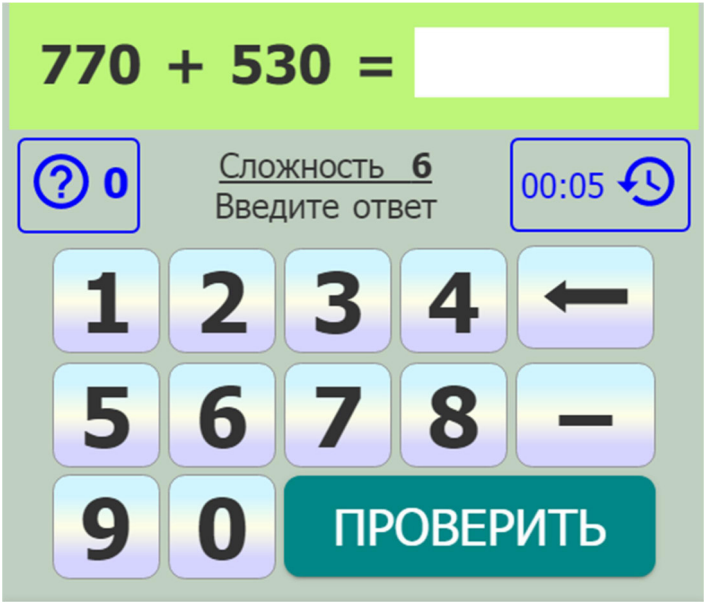


Рисунок 2 – Тренажер устного счета

В рабочем поле ученика есть само задание, поле для введения ответа, интерактивная клавиатура, счетчик времени выполнения задания и кнопка с подсказками. После ввода ответа, его можно проверить и перейти к следующему.

Существуют математические интерактивные тренажеры, созданные в виде **игры**. Они могут быть по мотивам известных фильмов/мультфильмов или иметь собственный сюжет. Музыкальное сопровождение, наличие разноуровневых заданий, возможность получать призы за правильно выполненные задания делают процесс обучения более динамичным и захватывающим. Одним из ярких представителей последнего типа является сервис **learningapps.org** (рисунок 3).

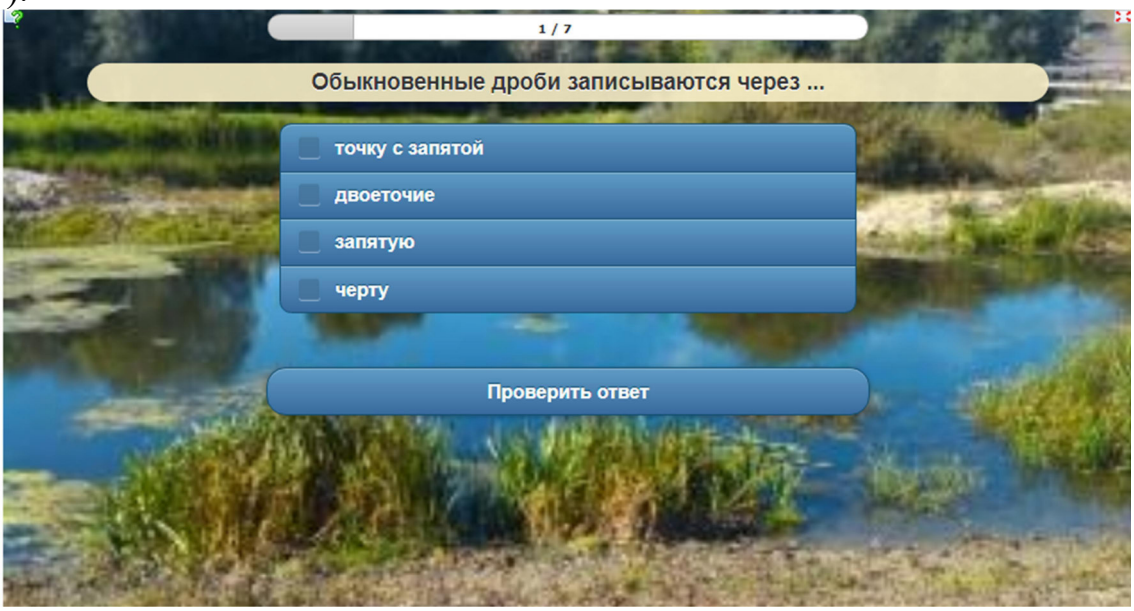


Рисунок 3 – Тренажер на правила

Данный тренажер предназначен для проверки теоретических знаний по теме «Дроби». Ученику предлагается выбрать вариант продолжения правила и проверить ответ.

На рисунке 4 представлен тренажер для отработки темы «Обыкновенные дроби».

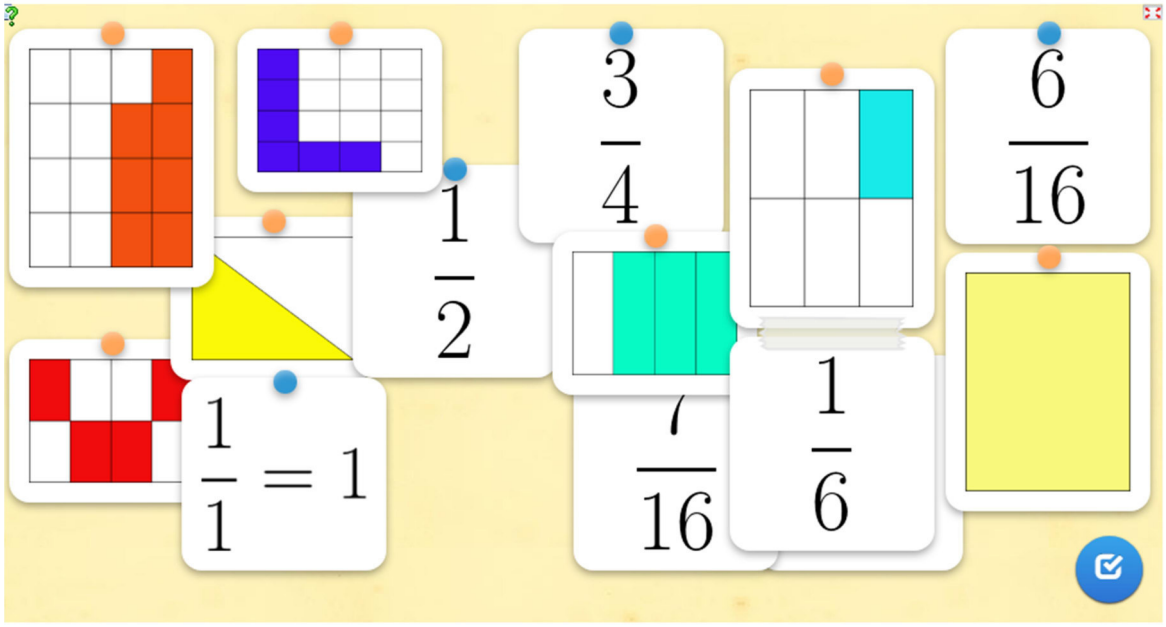


Рисунок 4 – Тренажер на дроби

Задание на нахождение соответствий между записью обыкновенных дробей и закрашенными фигурами. Ученику требуется найти пары и правильно их соединить путем перетаскивания.

Вычислительные задания также можно разнообразить с помощью тренажера (рисунок 5).

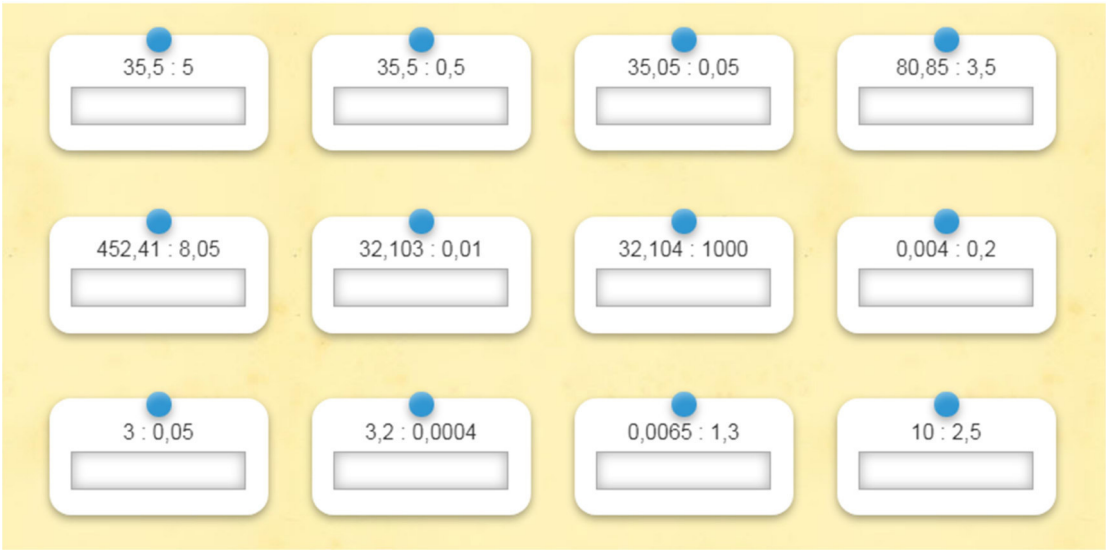


Рисунок 5 – Тренажер на деление

Ученику предлагается задание со свободным вводом ответа в ячейки. Ячейки окрашиваются в зеленый или красный цвет в зависимости от правильности ответа.

Вышеперечисленные тренажеры использовались на уроках математики в 5 классе. Тренажер подбирался учителем в зависимости от тех целей, которые он намерен достичь на уроке. Можно отметить, что грамотное применение интер-

активных тренажеров на уроках математики позволило значительно сократить количество ошибок, допускаемых учениками, увеличить скорость принятия решений, сократить время обучения, более адекватно оценить уровень полученных знаний и приобретенных навыков, а также индивидуализировать процесс обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Босова Л.Л., Босова А.Ю. Зубченок Н.Е. Создание и использование электронных образовательных ресурсов для общего образования: монография. М.: МГПУ, 2014. - 192 с.
2. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования / Е. С. Полат, М. Ю. Бухаркина, М. В. Моисеева и др. / Под ред. Е. С. Полат. М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 272 с.
3. Тананыхина Ю.А., Использование информационных технологий учебно-воспитательном процессе начальной школы// Фестиваль педагогических идей «Открытый урок».-2008.-с. 26-29.

УДК 37

РЕЗУЛЬТАТЫ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА РАЗЛИЧНЫХ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ДИСТАНЦИОННЫХ И ТРАДИЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПО ФИЗИКЕ СТУДЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

В.М. Дронов, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
e-mail: *vladi-dronov@mail.ru*
Т.С. Рогожина, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
e-mail: *tatiana1703t@mail.ru*

В работе отмечаются, как положительные, так и отрицательные стороны дистанционных форм обучения по различным видам занятий. Приводятся выводы, сделанные на основе анонимного опроса студентов первого курса 2019-2020 учебного года строительных специальностей СПбГАСУ.

Средства коммуникации, дистанционные технологии, обучающие компьютерные программы, виртуальные лабораторные работы.

Развитие средств коммуникаций, доступность средств интернета привело к резкому увеличению доли занятий с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий от электронных учебников до онлайн вебинаров.

Перспективы перехода на дистанционный формат обучения обсуждаются давно, однако, целесообразность такого перехода должна быть подтверждена

высоким качеством подготовки специалистов.

Наиболее актуальные вопросы вызывает переход на дистанционные формы обучения студентов инженерных специальностей, поскольку им требуются навыки работы с профессиональным оборудованием, проведение измерений, экспериментов. Впервые студенты сталкиваются с лабораторным оборудованием по физике на первом курсе. Поэтому предметом нашего исследования стала оценка достоинств и недостатков традиционных и дистанционных форм проведения в первую очередь лабораторных занятий, а также лекционных и практических.

Резкий переход на дистанционные формы образовательных технологий, в условиях чрезвычайно ситуации, в целях нераспространения новой коронавирусной инфекции позволил провести анализ и выявить некоторые особенности дистанционного образовательного процесса, для сохранения качества подготовки специалистов.

При анализе использовалось анкетирование студентов первого курса строительных специальностей, 108 человек, которые могли сравнить качество знаний, получаемых традиционным способом при посещении университета и занятий проходящих с помощью дистанционных образовательных технологий. Университет поддерживает платформу Moodle, которая содержит материалы по различным предметам и Microsoft Teams для ведения различных видов занятий онлайн. В процессе перехода на дистанционное обучение студенты могли также познакомится с методикой ведения занятий и в других программах (Zoom, Skype, Discord, WhatsApp и др.)

Результаты и обсуждение

В начале исследований необходимо было выяснить готовность студентов к дистанционным формам обучения. Сюда включается техническая возможность студента обучаться, наличие быстрой сети, его навыки работы с платформами электронного образования.

Большинство студентов на занятиях онлайн используют компьютер, планшет, и порядка 10,5% телефон. Выяснилось, что часто компьютер могут использовать и другие члены семьи, и в этом случае, доступ на занятия может быть ограничен.

Обеспеченность студентов высокоскоростной сетью достаточно хорошая, но только 21% из всех вообще не испытывали проблем связи.

При анализе опроса студентов, оказалось, что только 13% имеют трудности с использованием дистанционных платформ.

В целом опрос показал, что большинство студентов первого курса, - 80%, ответили на вопрос о готовности к переходу на дистанционную форму обучения утвердительно, т.е. можно утверждать, что оказались готовы.

Лекции

Лекциями в дистанционном формате обучения, оказалось, удовлетворены 78% опрошенных студентов. Положительными факторами проведения таких занятий является то, что обучающиеся не напрягаясь перед собой видят кар-

тинку и слышат голос преподавателя, при этом в любой момент могут включится и задать вопрос по теме. С другой стороны, преподавателю трудно чувствовать обратную связь, оценить: как воспринимает студент материал, какие эмоции испытывает, стесняется, затрудняется спросить или формально присутствует на занятии, просто включив компьютер. В случае с проведением лекции в традиционном формате все эти вопросы решаются автоматически, преподаватель находится перед студентами лицом к лицу.

Практические занятия

Проведение практических занятий по физике в дистанционном формате, как и в случае лекционных занятий, имеет преимущества, связанные с удобством восприятия материала (непосредственная трансляция изображения и звука). Участники занятия разделены, каждый выполняет задание, решает задачу. Так развиваются индивидуальные качества, самостоятельность. Однако эти моменты являются и недостатками: оказывается, труднее организовать взаимодействие студентов, вовлечённость. Результатом такой индивидуализации является то, что слабые и неподготовленные студенты ещё больше отстают. При традиционном обучении совместная работа в группе помогает легче усвоить материал. Из опрошенных студентов 28% категорически отвергают практические занятия в дистанционном формате. Наиболее продуктивными оказались дистанционные занятия в группах, где уровень подготовки был примерно одинаковый.

Лабораторные занятия

Организация лабораторных занятий по физике в дистанционной форме в чрезвычайных ситуациях является наиболее актуальной. Качественная подготовка специалиста требует освоения приборной базы, приобретения навыков измерений, обработки результатов, работы с приборами. Предложено несколько методов при проведении лабораторных работ онлайн:

1. Демонстрируется экспериментальная установка, преподаватель объясняет основные принципы её работы, методы проведения измерений. Студент в свою очередь обрабатывает полученные экспериментальные результаты, в соответствии с методическими указаниями. К таким работам можно отнести, например, типовые работы: «Определение показателя адиабаты», «Изучение маятника Максвелла», «Изучение законов динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека» и другие. Как вариант, преподаватель может снимать показания в режиме онлайн. Положительным фактором может быть демонстрация дорогостоящего оборудования без его приобретения институтом.

2. Другой способ – это возможность студенту самому собрать дома простейшую экспериментальную установку и провести измерения самостоятельно. К таким работам можно отнести работы: «Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника», «Изучение физического маятника».

3. Виртуальные лабораторные работы, в которых управляя различными параметрами можно проводить измерения и их обрабатывать. Это могут быть

работы по изучению электрических цепей, интерференции, дифракции. В этом случае преподаватель, практически, полностью теряет контроль за выполнением работ. Проводить такие работы можно в случае необходимости, если нет возможности работать с реальным оборудованием. Однако помимо недостатков такие работы имеют достоинства, заключающиеся в том, что они позволяют лучше запомнить формулы и другой теоретический материал. Поэтому их полезность для учебного процесса нельзя отрицать. Их можно рекомендовать, если есть возможность доступа к компьютерным серверам ВУЗа на которых установлены виртуальные лабораторные работы.

Во всех случаях проведение лабораторных занятий в дистанционной форме позволяет понять физические процессы, и явления, принцип работы экспериментальной установки, обработать результаты измерений и сделать вывод. Однако, такой формат в отличие от традиционной формы, имеет один важный недостаток: студент не получает навыков работы с реальными измерительными приборами и оборудованием, не происходит формирование ответственности за свои действия и за их последствия.

Самостоятельная работа

Самостоятельная работа студентов при переходе на дистанционные формы образовательных технологий подразумевает больше ответственности, самоорганизации в вопросах изучения дисциплины. Несмотря на то, что не нужно лично посещать университет больше половины (61%) студентов ответили, что стали затрачивать больше времени на подготовку к занятиям, а у 70% оказалось меньше свободного времени.

Экзамен

Важной частью качественного обучения является возможность взаимодействия и консультаций с преподавателем. При переходе на удалённое обучение преподаватели оказались, практически, круглые сутки на связи со студентами, при этом 93%опрошенных указали, что преподаватели доступны, но сохранили дистанцию «преподаватель-студент».

Положительным фактором при проведении экзамена в дистанционной форме является возможность сделать это из любой точки Земли. Из опрошенных студентов 87,5% оценивают такое проведение экзамена положительно. Однако, по сравнению с традиционной формой, негативным является лёгкая доступность интернета и других источников информации, которые искажают результаты аттестации. Использование программ тестирования, блокирующих одновременный выход в справочные системы интернет (Google, Яндекс и др.) обходится, например, наличием второго подключенного к сети устройства и т.д.

Исследование опроса студентов показало, что дистанционные методы имеют свои достоинства и недостатки, но только 4,7% опрошенных согласны полностью перевести обучение в дистанционный формат, а 45,3%только частично. Также 40% отказались бы от дистанционных лабораторных работ и 40% согласились, что дистанционный формат ухудшает качество образования.

В завершении исследования можно сделать следующие выводы:

1. В чрезвычайных ситуациях дистанционные формы обучения являются оптимальными для сохранения процесса образования как такового.

2. Дистанционные формы обучения физике стимулируют развитие индивидуальных качеств и, соответственно, ослабляют групповое взаимодействие.

3. Наиболее приспособленными формами для дистанционного образования по физике являются занятия лекционного типа и менее практические и лабораторные.

4. Проведение лабораторных работ возможно с помощью дистанционных форм обучения в чрезвычайных ситуациях, однако. Теряется качество образования студента, обучающегося по инженерной специальности. Не формируются в полной мере навыки работы с измерительной техникой, приборами.

5. Дистанционные технологии увеличивают разрыв между «сильными» и «слабыми» студентами.

6. Дистанционные формы обучения требуют от студента и преподавателя специальной самоорганизации и занимают больше времени на подготовку к занятиям.

УДК 372.851

НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ

Е.Г. Евсеева, д.пед.н., доц.
Донецкий национальный университет
e-mail: *e.evseeva@donnu.ru*

В работе рассмотрены современные подходы к обучению теории вероятностей и математической статистике бакалавров инженерных направлений подготовке. Особое внимание уделено задачам профессиональной деятельности инженеров, решаемым с применением вероятностно-статистических методов. Предложена методика обучения студентов инженерных направлений подготовки теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов на основе интегративного и деятельностного подходов к обучению.

Ключевые слова: бакалавры инженерных направлений подготовки, обучение теории вероятностей и математической статистике, интегративный подход к обучению, деятельностный подход.

Теория вероятностей (ТВ) и математическая статистика (МС) приобрели широкое практическое применение в инженерном деле, что нашло отражение в Федеральных государственных образовательных стандартах высшего образования (ФГОС ВО) подготовки будущих инженеров. Знание закономерностей протекания реальных инженерных процессов с учетом их стохастического характера, владение методами построения вероятностно-статистических моделей задач профессиональной деятельности инженера является необходимым условием подготовки конкурентоспособных на современном рынке труда инженеров.

Приведем некоторые из задач профессиональной деятельности инженеров, для решения которых требуется применение вероятностно-статистических методов:

- прогнозирование возможных чрезвычайных ситуаций на объектах жизнедеятельности общества, а также чрезвычайных ситуаций природного характера;

- расчет фронта распространения пожара, определение индивидуального пожарного риска пожарных, вероятности возникновения пожара, оценка возможных рисков при проведении спасательных работ и т.д.;

- оценка вероятности возникновения аварий на химических и других предприятиях;

- моделирование производственных процессов с учетом стохастической составляющей.

Примером вероятностной модели процесса профессиональной деятельности инженеров является модель функционирования реального процесса взрывания горных пород, опиваемого с помощью стохастической модели Марковской цепи [10, с. 112-119].

Для построения модели необходимо:

1) задать n-мерный вероятностный вектор-строка начальных состояний процесса:

$$p^0 = \{p_n^0\} \tag{1}$$

2) построить стохастическую квадратную матрицы n-го порядка,

$$\|P\| = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{1n} \\ p_{31} & p_{32} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

где P_{ij}- условные вероятности перехода процесса из состояния E_i в состояние E_j, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1. \tag{3}$$

Построение и применение на практике описанной модели требует от инженера владение методами теории случайных процессов, а также такого раздела высшей математики как линейная алгебра, что требует не только межпредметной, но и внутрипредметной интеграции.

Однако существуют объективные трудности у студентов в усвоении содержания дисциплин, связанных с вероятностно-статистическим моделированием. В первую очередь следует отметить тот факт, что вследствие фрагментарности в формировании вероятностно-статистических представлений в школе, при изучении указанных дисциплин в бакалавриате, студенты испытывают большие когнитивные затруднения в восприятии и понимании смысла стохастических понятий и методов. Кроме того, оторванность преподавания ТВ и

МС от будущей профессиональной деятельности приводит к отсутствию у студентов профессиональной мотивации при изучении этих дисциплин.

Обзор современных диссертационных работ показывает разнообразие подходов, применяемых к обучению ТВ и МС в системе высшего образования. В этой связи следует отметить работы таких исследователей:

- Е. В. Александрова (теории познания, философская концепция системного подхода к реализации профессиональной направленности обучения ТВ и МС в сельскохозяйственном вузе) [1];

- Е.В. Бунтова (деятельностный и системный подходы к обучению теории вероятностей студентами сельскохозяйственных вузов) [2];

- Д.Д. Бычкова (компетентностный подход к обучению с целью формирования предметных компетенций в области стохастики с использованием междисциплинарных связей) [3];

- О. В. Коваленко (сочетание принципов профессионально- направленного обучения с системным подходом к проектированию и методики формирования стохастических представлений в процессе профессиональной подготовки будущих учителей физики) [7];

- И.В. Корогодина (концепция прикладной направленности обучения математике, теория синергетического подхода к реализация идеи фузионизма математики с физикой в технических вузах на основе стохастики) [8];

- Л. Н. Мамадалиева (компетентностный и деятельностный подходы обучению теории случайных процессов на основе использования эмпирических прототипов ее базовых понятий в процессе моделирования рядами динамики) [9].

- М.А. Суворова (проблемно-деятельностный подход к обучению теории вероятностей с использованием компьютерных технологий с целью формирования познавательного интереса студентов) [12].

Таким образом, анализ диссертационных исследований показал, что в перспективным при разработке методики обучения стохастике будущих инженеров являются следующие направления:

- применение компетентностного, деятельностного, системного подходов к обучению;
- использование технологий компьютерно-ориентированного, и электронного обучения;
- реализация прикладной направленности обучения;
- профессиональная направленность обучения, использование в обучении профессионально-ориентированных заданий;
- использование межпредметных связей в обучении;
- использование идеи фузионизма.

В работах [5, 11] предложена методика обучения высшей математике будущих инженеров на основе интегративного и деятельностного подходов. Применение интегративного подхода в обучении математическим дисциплинам в техническом университете, в отличие от идеи фузионизма, предложенной в работе [8], предполагает при проектировании и организации обучения обеспечение

интеграции на трех уровнях: внутрипредметном (теории и практики), межпредметном (математики и естественнонаучных дисциплин, математики и информатики, математики и дисциплин профессионального цикла), метапредметном (формирование метапредметных понятий и умений, использование математических методов при обучении другим дисциплинам). Кроме того, интеграция в обучении осуществляется также и в плане разработки общих для различных дисциплин методов и технологий обучения, применения схожих методологических подходов в обучении.

Особую важность в настоящее время приобретает метапредметная интеграция, позволяющая сформировать у студентов понятия и способы действий изучаемой дисциплины, которые применимы и в других учебных и научных областях. В теории вероятностей такими понятиями являются, например, понятия «вероятность», «гипотеза», «среднее значение», «достоверность», «событие» и другие. Этими понятиями оперируют не только в научном обиходе, но и в жизни, например, говоря о вероятности осадков или других событий.

К метапредметным способам действий по ТВ и МС можно отнести такие: ранжирование результатов измерений; построение вариационных рядов; построение гистограммы и полигона распределения; оценку частоты наступления события и другие. Так, практически ни одна презентация доклада в различных научных областях не обходится без построения гистограммы, характеризующей распределение возможных значений рассматриваемых признаков.

Применение предложенной методики заключается в следующем [5, 11]:

1) построение иерархии целей обучения, в которой внешние цели заключаются в формировании компетенций согласно ФГОС ВО, для каждой из которых обосновано, на каком уровне интеграции (внутрипредметной, междисциплинарной, метапредметной) они могут быть сформированы; внутренние цели обучения заключаются в освоении учебных действий, а также усвоении предметных знаний;

2) представление содержания обучения в виде интегративной предметной модели студента по математике, состоящей из пяти взаимосвязанных компонентов: тематического, семантического, функционального, процедурного и операционного [6];

3) использование в обучении методов обучения, разработанных на основе деятельностного подхода к обучению (спектральный метод построения системы задач, метода ориентирования, метод последовательного формирования умений, метод поэтапного формирования умственных действий, метод моделирования профессионально-ориентированной деятельности);

4) организация обучения в таких формах как интегративные практические занятия и творческие самостоятельные работы по выполнению интегративных учебных проектов;

5) использование в обучении авторского комплекса средств обучения (систем математических учебных и интегративных задач, учебных пособий, разрабо-

танных на принципах интегративного и деятельностного подходов, интегративной предметной модели студента по высшей математике);

6) использование технологий электронного обучения (например, электронного учебного пособия [4]).

7) осуществление внутрипредметной, межпредметной и метапредметной интеграции при проектировании и организации обучения [5, 11].

Описанная методика подтвердила свою эффективность в обучении математике для студентов Донецкого национального технического университета, Донбасского технического университета, Донецкой национальной академии строительства и архитектуры и других образовательных организаций профессионального образования Донецкой Народной Республики [11]. Положительная динамика в обучении достигается за счет усиления учебной мотивации, повышения уровня освоения интегративных математических действий и способов действий, а также уровня усвоения интегративных знаний по математике.

Предложенный подход может быть применен и к обучению студентов инженерных направлений подготовки дисциплине ТВ и МС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрова Е. В. Профессиональная направленность обучения теории вероятностей и математической статистике студентов сельскохозяйственного вуза : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. – Орел, 2005. – 20 с.
2. Бунтова Е. В. Самостоятельная работа студентов сельскохозяйственных вузов при изучении теории вероятностей : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. – Орел, 2006. – 20 с.
3. Бычкова Д. Д. Формирование предметных компетенций в области стохастики на междисциплинарной основе в вузе : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.08. – Москва, 2011. – 26 с.
4. Евсеева Е.Г., Лактионова Д. Ю., Прокопенко Н. А. Математика в профессиональной деятельности инженера : электронное учебное пособие. – Донецк, ДОННУ, 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD–ROM); 12 см. – Систем. требов. MSWinXP, MSOffice 2003. – Режим доступа: https://e-lt-math-engineer.000 webhostapp.com
5. Евсеева Е.Г., Прокопенко Н.А. Обучение математике будущих инженеров на основе интегративного подхода : монография. – Донецк : ДОННУ, 2020. – 308 с.
6. Евсеева Е.Г., Скафа Е.И. Моделирование обучаемого в математическом образовании. – Beau Bassin: LAP LAMBERT Aca-demic Publishing RU, 2019. –196 с.
7. Коваленко О. В. Теория и методика формирования стохастических представлений в процессе профессиональной подготовки будущих учителей физики в педвузе : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. – Самара, 2000. – 17 с.

8. Корогодина И. В. Реализация идеи фузионизма математики с физикой в технических вузах на основе стохастики : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. – Орел, 2006. – 21 с.
9. Мамадалиева Л. Н. Обучение студентов технологических вузов математическому моделированию случайных процессов : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. – Орел, 2010. – 23 с.
10. Математическая культура инженера // Материалы СНТК (14 мая, 2015 г., г Донецк). – Донецк : ДонНТУ, 2015. – С. 112-119.
11. Прокопенко Н. А. Методика обучения математике будущих инженеров на основе интегративного подхода : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02. – Донецк, 2019. – 31 с.
12. Суворова М. А. Формирование познавательного интереса студентов в процессе обучения теории вероятностей с использованием компьютерных технологий : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. – Ярославль, 2006. – 26 с.

УДК 372.8

К ВОПРОСУ ВОСПИТАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА ШКОЛЬНИКОВ К МАТЕМАТИКЕ

Г.Г. Ельчанинова, к.пед.н., доц.
Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина
e-mail: *eltchaninova_gg@mail.ru*
Т.Е. Рыманова, к.пед.н., доц.
Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина
e-mail: *barkarelez@mail.ru*

В настоящее время в российском образовательном пространстве происходят кардинальные преобразования, которые стали следствием изменений в геополитическом масштабе, планов модернизации технологического и экономического характера, намеченных государством, цифровизации всех общественных институтов. Одним из результатов такой перестройки явились федеральные государственные образовательные стандарты. Одной из главных особенностей данных нормативных документов стало изменение вектора целеполагания: на первый план были поставлены цели личностного развития ребенка. В связи с этим перед педагогом встает проблема определения более четких и конкретных ориентиров развития школьников. В качестве такого критерия, по мнению отечественных ученых, можно рассматривать наличие у личности познавательного интереса. Исследование данной проблемы являются сегодня составной частью общей теории развития. Отечественной наукой накоплен богатый материал. Авторами предпринята попытка уточнения категории «познавательный интерес», обоснование понятий «формирование познавательного интереса», «развитие познавательного интереса», «воспитание познавательного интереса». Также в статье приводится анализ исследований о познавательном интересе, которые легли в основу разработки дидактической концепции, которая реализуется в учебном процессе средней школы через программу «Интерес». Представлен методический инструментарий, позволяющий смоделировать динамику познавательного интереса школьников к математике. Результаты проводимой экспериментальной деятельности свидетельствуют об эффективности предлагаемого подхода.

Ключевые слова: познавательный интерес, воспитание познавательного интереса, диалектика познавательного интереса.

Смена парадигм образовательной политики заставляет искать новые подходы в обучении, анализировать и адаптировать к новым реалиям уже хорошо известные. Отметим, что в современном школьном образовании вектор образованности сместился в основную школу. Таким образом, возникает еще одна серьезная проблема обучения – это обновление и переструктурирование содержательного и организационного наполнения образовательного процесса.

Анализ психолого-педагогической литературы, наблюдения и беседы с участниками образовательного процесса позволили выяснить противоречие между потребностью российского общества в интеллектуально развитом молодом поколении и недостаточной разработанностью дидактического обеспечения учебно-воспитательного процесса в современных условиях. Одним из сложных аспектов разрешения этого антагонизма является определение конкретных и четких ориентиров развития личности. По мнению известного отечественного ученого Н.А. Менчинской критерием онтогенеза индивидуума сле-

дует рассматривать наличие у него познавательного интереса [3]. Как показывают исследования, такой подход становится сегодня особенно актуальным.

Размышления о познавательном интересе мы находим в трудах видных ученых и мыслителей прошлого: Г.В. Белинского, И.И. Бецкого, А.И. Герцена, Н.А. Добролюбова, Н.И. Новикова, К.Д. Ушинского, Н.Г. Чернышевского, Ф.И. Янковича. Анализ их работ позволяет сделать вывод, что педагогическая мысль второй половины XIX века была единодушна: чтобы вызвать интерес к учению, особенно важно его развивать уже на первоначальном этапе.

В конце XIX – начале XX века проблематика данного вопроса обогащается исследованиями известных ученых А.И. Анастасиева, К.В. Ельницкого, П.Ф. Каптерева. В работах этих педагогов впервые были указаны приемы, методы, средства, способствующие диалектике познавательного интереса. К.В. Ельницкий рассматривает последнее как необходимое условие эффективности учебного процесса, указывает на связь интереса и внимания [7]. Работа А.И. Анастасиева «Дидактический катехизис» стала одной из первых, в которой познавательный интерес изучается как самостоятельное образование личности. Автор указывает, что в данном контексте недопустимо обучение сводить только к игре [1]. П.Ф. Каптерев один из первых попытался сформулировать определение познавательного интереса. Он предложил рассматривать его как стремление ребенка к учебной деятельности в рамках конкретной научной области [2]. Ориентиры исследования познавательного интереса, сформулированные учеными прошлого, стали отправной точкой для дальнейшего его изучения. В настоящее время эти вопросы являются составной частью общей теории развития личности. Данной проблематике посвящены работы отечественных ученых Б.Г. Ананьева, Л.С. Выготского, В.В. Давыдова, А.Н. Леонтьева, А.К. Марковой, Н.Г. Морозовой, С.Л. Рубинштейна, Н.Ф. Талызиной, Г.И. Щукиной.

Новый этап изучения этого вопроса начинается во второй половине XX века. Причиной послужило выяснение возможностей активизации интереса школьников и формирование субъектной позиции в процессе обучения, что подразумевает наличие умения управлять ею. По мнению отечественных ученых, решение этой задачи лежит в поддержании познавательного интереса и его укреплении, что в свою очередь ведет к становлению личности обучающегося.

Заметим, что с психологической точки зрения данная категория рассматривается как мотив, т.е. внутренний побудитель деятельности, поэтому интерес к познанию является одним из составных компонентов мотивационной сферы личности. Важная особенность его заключается в том, что он фигурирует в деятельности дважды: как мотив действия и мотив в деятельности. Необходимо также отметить, что первой обратила внимание на познавательный интерес как на средство обучения Г.И. Щукина [8]. В ходе исследований были выделены пути формирования интереса к познанию: содержание учебного материала и организация образовательного процесса, а также научно обоснованы методы, приемы, средства. Представляются интересными выводы, сформулированные П.И. Пидкасистым, что познавательная активность является одним из мощных двигателей интеллектуального развития личности [4]. Подчеркнем, что ее мож-

но расценивать проявлением интереса как качества личности. Последнее способствует успешной самореализации школьников в образовательном процессе. Таким образом, интерес к познанию может выступать в различных модификациях: как мотив, как средство обучения, как качество личности. Заметим, что только в единстве этих аспектов, интегральности познавательного интереса заключается успех его развития. В конце XX века -начале XXI века появились работы, в которых предпринята попытка рассмотрения прикладного аспекта проблемы через призму технологического подхода [5].

Изучение научной литературы позволяет констатировать, что подходы, которые используют отечественные и зарубежные ученые в решении поставленной проблемы кардинально разнятся. Многие вопросы в гносеологическом аспекте в исследованиях иностранных ученых представляются даже не разрешимыми.

Сегодня в публикациях разного уровня можно встретить такие понятия, как «формирование познавательного интереса», «развитие познавательного интереса», «воспитание познавательного интереса». По нашему мнению, это не одно и то же. Анализ различных точек зрения дает основание определить исследуемую категорию «как интегративное образование личности, определяющее ее избирательную направленность и обращенную к познанию одной или нескольких научных областей, к их предметной стороне (содержанию), а также к процессу деятельности» [5, с. 25].

По нашему мнению, диалектику познавательного интереса можно рассматривать как динамический процесс овладения личностью навыками познания, неразрывно связанными с формированием устойчивого качества, позволяющего индивидууму самореализоваться. Заметим, что интерес к познанию математики не является врожденным свойством индивидуума, поэтому, мы считаем, его сначала нужно сформировать, а дальше развивать. Таким образом вырисовываются диалектические стадии [6].

Под воспитанием интереса мы понимаем управление развитием личности в условиях педагогически организованной системы, направленное на выработку навыков познания, проявляющихся в научной и общественной жизни. Этот процесс опирается на определенные педагогические принципы: принцип природосообразности (реализует диалектику интереса), принцип гуманизации (позволяет осуществить перевод учащегося с позиции объекта образования на позицию субъекта), принцип целенаправленности (воспитание познавательного интереса связано с организацией деятельности с определенной целью на специально отобранном содержании), принцип единства и целостности воспитательного процесса (отражает интерактивное свойство познавательного интереса), принцип демократизации (требует организации учебной деятельности на основе личностно ориентированного подхода), принцип учета индивидуальных особенностей детей (указывает, что необходимо в процессе воспитания познавательного интереса опираться на личностные потребности учащегося, создавать условия для раскрытия уникальных особенностей личности), принцип педагогического оптимизма (педагогически целесообразно всегда опираться на положительные качества ребенка, давать пережить радость пусть маленького, но успеха) [6].

Все изложенное выше легло в основу методической концепции воспитания познавательного интереса школьников к математике. С дидактической точки зрения целесообразно разработать программу «Интерес». Для удобства проектирования стратегической линии исследуемого процесса, по нашему мнению, можно условно выделить некоторые узловые моменты, которые назовем фазами: фаза появления интереса; фаза активного интереса; фаза закрепления интереса [5]. Для каждой разрабатывается методический инструментарий. Предлагаемая программа решает комплекс задач: формирование (развитие) познавательного интереса у обучающихся к математике; развитие осознанных мотивов учения; осмысление школьниками процесса познания окружающей действительности; развитие креативных умений. Она состоит из четырех блоков.

Диагностический блок № 1. Позволяет предоставить учителю исходные данные об уровне познавательного интереса каждого ребенка.

Мотивационный блок. Помогает спланировать работу по актуализации, коррекции мотивов, стимуляции новых мотивов.

Познавательный блок. Предоставляет систему методов, приемов, средств, способствующих диалектике познавательного интереса.

Диагностический блок № 2. Дает учителю возможность проверить эффективность своей работы.

В качестве иллюстрации выстраивания траектории формирования познавательного интереса приведем этапы урока математики на повторение в 5 классе.

Фаза появления интереса - это первый принципиально важный этап диалектики познавательного интереса на отдельно взятом занятии, который реализуется при повторении ранее изученного материала. Задача учителя постараться пробудить у обучающихся любопытство к предлагаемым вопросам, поэтому урок построен в виде путешествия по родному городу Елец. Предлагаемые задания являются интегрированными: математические задачи с краеведческим подтекстом. Начало занятие проходит в необычном формате – в стихотворной форме. Особое внимание уделяется содержанию материала и сопроводительным сообщениям.

Задание 1. Чтобы ответить на вопрос «В каком году возник город Елец?» нужно найти значение выражения $10,1x+1,32x+0,04x$, если $x=100$.

В ходе решения пятиклассники выясняют, что первое упоминание о городе относится к 1146 году (Никоновская летопись).

Задание 2. Елец с древнейших времен выполнял оборонительную функцию: был крепостью, защищавшей южные границы Руси от татарских набегов. Елецкая крепость занимала площадь 2,1га. Выразите площадь крепости в $м^2$.

Задание 3. Решите уравнение, и узнаете, в каком году появился герб Ельца

$x : 17,3 - 34,9 = 65,1$. (В 1730 году Ельцу был дарован герб).

Задание 4. Елец на протяжении столетий по праву считался купеческим городом и славился своими ярмарками. Купец на ярмарке продаёт яблоки. В двух корзинах у него 18,6 кг яблок. В первой корзине на 2,6 кг меньше, чем во второй. Сколько килограммов яблок в каждой корзине у купца?

Заметим, необычная подача математических задач вызывает заинтересованность школьников. Все это в итоги способствует появлению познавательного интереса у детей.

Фаза активного интереса – следующий этап проектирования траектории познавательного интереса на уроке. Каждый учитель знает, как сложно бывает заинтересовать ребенка выполнять упражнения, направленные на выработку практических навыков, активизировать его деятельность. В нашем случае на этапе обобщения изученного повторение предлагаются задачи в довольно необычной форме.

Задание 1. Город Елец упоминается в произведениях И. А. Бунина, Н.С. Лескова, М. М. Пришвина, А.П. Чехова. Расположите числа в порядке возрастания, и тогда вы узнаете, за какое литературное произведение И.А. Бунин в 1933 году получил Нобелевскую премию: ***45-ь; 10-ж; 24-з; 33-н;21-и; 55-а; 611-р; 1112-е; 723-с; 1331-а; 1001-ь;1212-в; 991-н; 823-е.***

В 2020 году отмечался юбилей - 150 лет со дня рождения Ивана Алексеевича Бунина. С его романом «Жизнь Арсеньева» ребята познакомятся в старших классах, но благодаря математической задаче, они уже в 5 классе услышли о Нобелевском лауреате и его вкладе в мировую литературу. Таким образом, кроме развивающих целей, осуществляется пропедевтическая работа, причем в разных научных областях: математики, литературы, краеведении.

Задание 2. Елец-родина известных писателей и музыкантов. Решите примеры, и узнаете фамилию известного композитора, который родился в Ельце.

1)2,03-1,57; 2)1456-845; 3)56×0,1; 4)34:68; 5)2,47×100; 6)96:10; 7)13×13; 8)10,45-9,85; 9)7×8.

Н	К	Р	О	Н	И	Е	В	Х
247	169	611	0,6	0,5	9,6	5,6	56	0,46

В результате выполнения задания получилось слово «Хренников». Тихон Николаевич Хренников – знаменитый российский композитор, автор большого количества самых разных по жанрам музыкальных произведений, родился и похоронен в Ельце.

При подборе задач, по нашему мнению, важно найти баланс между прошлым и настоящим, чтобы школьники через математику могли оценить не только славную историю, но увидеть сегодняшний день родного города.

Задание 3. В настоящее время Елец остается культурно-промышленным центром Липецкой области. В городе действуют крупные промышленные предприятия: ОАО «Энергия», ОАО «Елецкий агрегатный завод», ОАО «Гидропривод», ОАО «Елецкий электромеханический завод (ЕЭМЗ)», ООО «Елецкий сахарный завод (ЕСЗ)», ОАО Завод стройматериалов «Елецкий», ОАО «Елецкий крупяной завод». Для сборки прибора первого вида механического оборудования ОАО «ЕЭМЗ» требуется 1,3 ч. А для сборки прибора второго вида - на 0,4ч меньше. Сколько времени потребуется для сборки 3-х приборов первого вида и 6-ти приборов второго вида?

Необходимо отметить, что, предлагаемые задания, позволяют реализовать не только цели обучающего и развивающего характера, но и воспитательные задачи.

Фаза закрепления интереса – наиболее сложный момент в динамике познавательного интереса на занятии и приходится на этап контроля и самоконтроля. Предполагается, что возникший интерес необходимо зафиксировать на определенном уровне. Для этого нужно продумать содержательный и методический компонент. В нашем случае это достигается путем интеграции математики и краеведения, опирающейся на эстетический компонент.

Задание 1. (Восстанови картину). Каждый учащийся получает карточку, разделенную на 9 частей, где написаны примеры и разрезанную на 9 частей открытку, на обратной стороне которой написаны ответы к этим примерам. Выполнив задание верно и наложив свой ответ на пример, ребята получают картину с изображением Вознесенского собора.

Это упражнение выполняется коллективно, в результате решения примеров ребята создают мозаику с изображением главного символа Ельца – Вознесенским собором. Небольшой город, типичный представитель российской провинции до сих остается историко-культурным центром, который и сейчас привлекает своей красотой и своеобразием.

Динамику познавательного интереса на этом уроке, учитывая условные фазы, наглядно можно представить следующим образом:

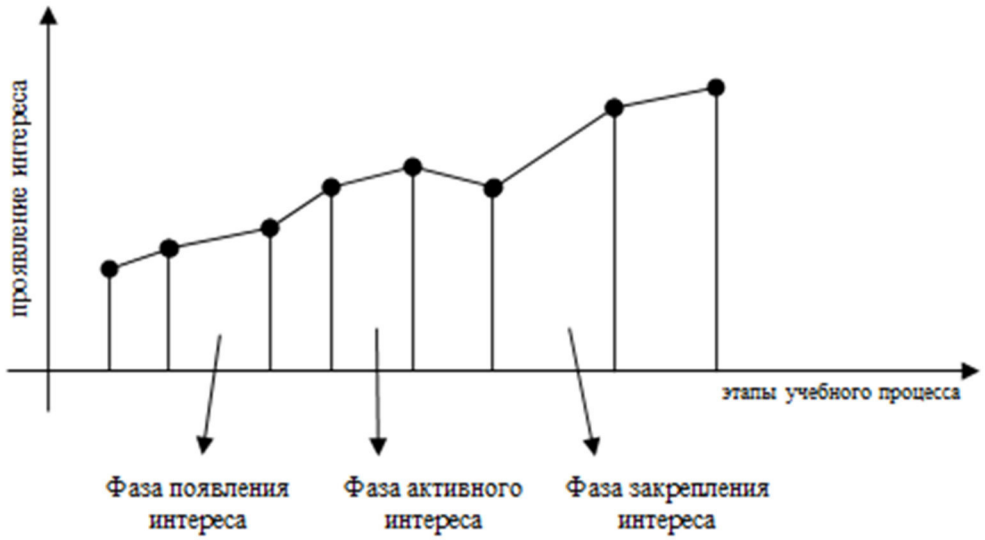


Рисунок 1 – Траектория познавательного интереса

Получившаяся траектория позволяет с одной стороны смоделировать процесс формирования познавательного интереса, с другой – помогает увидеть возможные проблемы. Отметим, что такой подход имеет принципиальное значение в воспитании интереса школьников к математике. Кроме того, он помогает спрогнозировать динамику познавательного интереса на отдельно взятом отрезке учебного времени, а также спроектировать деятельность педагога.

ЛИТЕРАТУРА
1. Анастасиев А.И. Дидактический катехизис. – Харьков. - 1976. – 20 с.
2. Баранникова Н.Б. П.Ф. Каптерев о воспитании общечеловеческого и национального у детей дошкольного возраста // Историко-педагогический журнал. - 2014. - №3. – С. 42-50.
3. Менчинская Н.А. Проблема учения и умственного развития школьника: Избранные психологические труды. – М.: Педагогика. - 1989. – 224 с.
4. Пидкасистый П.И., Горячев Б.В. Процесс обучения в условиях демократизации и гуманизации школы: Учеб. пособие. – М.: МОПИ. - 1991. - 75с.
5. Рыманова Т.Е. Технологический подход к проектированию учебного процесса по математике, обеспечивающего формирование познавательного интереса у школьников. Дисс. … канд. пед. наук. – М. - 1999. – 214 с.
6. Рыманова Т.Е. Воспитание познавательного интереса школьников в процессе обучения математике: учебно-методическое пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина. - 2015. – 32 с.
7. Федотова И.Б. Педагогическая деятельность и педагогические взгляды К.В. Ельницкого (1846-1917): автореф. дис. … канд. пед. наук. – Пятигорск. - 2000. – 20с.
8. Щукина Г.И. Проблема познавательного интереса в педагогике. - М.: Педагогика. - 2006. - 216 с.

УДК 37

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ №15 ПРОФИЛЬНОГО ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

А.В. Кокорев, к.ф.-м.н.
ФГКВОУ ВО «Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации»
e-mail: *pears911@mail.ru*
С.С. Орехова
МБОУ «Жилинская СОШ» Орловского района Орловской области
e-mail: *orekhovass1995@gmail.ru*
Е.Е. Сучкова, к.э.н.
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I» в г. Орле.

В статье представлены неравенства, которые содержатся в материалах второй части профильного ЕГЭ по математике за последние 6 лет. Проведен анализ характерных ошибок, допущенных школьниками, а также изложены методические рекомендации для подготовки школьников к решению неравенств.

Ключевые слова: профильный ЕГЭ по математике, неравенства, типичные ошибки, задание № 15, анализ результатов.

Школьники, приступившие к решению задания №15, в основном показывают основные навыки преобразования сложных показательных, логарифмических или

рациональных выражений. Перечислим наиболее типичные и характерные для этого задания ошибки, которые наблюдаются каждый год: неверный учет ОДЗ, различные описки, вычислительные ошибки, ошибки в преобразованиях логарифмических и показательных выражений.

При решении задания №15 показательной ситуацией является успешное выполнение наиболее сложной, вычислительной части решения, в тоже время часто допускаются ошибки смыслового характера, т.е. рассматриваемые неравенства некоторые школьники решают методом интервалов «по образцу».

Отметим, что верные решения неравенств задания №15 получают только хорошо подготовленные ученики, которые не только справляются со сложными вычислениями, но и не допускают ошибок смыслового характера, т.е. понимают метод интервалов на содержательном уровне.

В приведенной ниже таблице 1, указано соотношение между средним баллом и процентом выполнения (хотя бы на 1 балл) задания №15[1]-[3].

Таблица 1 – Результаты ЕГЭ

Год	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Средний балл	42,3	43,6	43,7	49,5	56,7	53,9
Процент выполнения	18,9%	26,21%	14%	21%	29,2%	15%

Отчетливо видно, что процент выполнения задания №15 имеет определенную связь и коррелирует со средним баллом выпускников в Орловской области.

В таблице 2 представлены неравенства, предложенные школьникам для решения в качестве 15 задания за последние 6 лет.

Таблица 2 –Задание №15

Год	Задание	Процент выполнения
2015	$\frac{13-5\cdot 3^x}{9^x-12\cdot 3^x+27}\geq 0{,}5$	18,9%
2016	$8^x-3\cdot 4^x+\frac{9\cdot 4^x-288}{2^x-9}\leq 32$	26,21%
2017	$\frac{log_5(25x)}{log_5 x-2}+\frac{log_5 x-2}{log_5(25x)}\geq\frac{6-log_5 x^4}{log_5^2 x-4}$	14%
2018	$log_3(x^2+1)-log_3(x^2-x+12)\geq log_3\left(1-\frac{1}{x}\right)$	21%
2019	$log_6(21-7x)\geq log_6(x^2-8x+15)+log_6(x+3)$	29,2%
2020	$x^2 log_{343}(3-x)\leq log_7(x^2-6x+9)$	15%

Но в тоже время прослеживается связь между процентом верного решения неравенств и самим видом этого неравенства (каждому году характерны свои «особенные» ошибки, которые выявились в процессе решение предложенных школьникам неравенств).

В «Методических рекомендациях по оцениванию выполнения заданий ЕГЭ с развернутым ответом» указаны следующие критерии для оценивания решения задания №15 [3].

Таблица 3 –Критерии оценивания задания №15

Содержание критерия №15 (ЕГЭ – 2015-2020)	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Хотелось бы подчеркнуть, что 1 балл ставится за «почти» правильное решение, в котором допущена одна единственная вычислительная ошибка или получен неверный ответ, отличающийся от правильного использованием знака «<» вместо «≤», или наоборот. Важно, что если в ответ включено значение переменной, которая не входит в ОДЗ, то следует выставлять «0 баллов».

Проанализируем ниже более подробно наиболее часто встречающие типичные ошибки, характерных каждому году в отдельности, за исключением вычислительных и описок.

2016 год [2].

1) Умения раскладывать на множители кубические многочлены (делители свободного члена, схема Горнера или группировка).
2) Формальная расстановка знаков без понимания теоретических основ, при решении неравенств методом интервалов (например, знаки всегда чередуются).
3) Не учёт изолированных точек (когда такие есть).

ПРИМЕР:

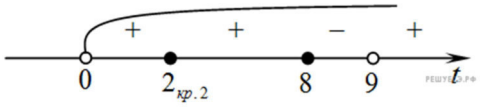
$$8^x - 3 \cdot 4^x + \frac{9 \cdot 4^x - 288}{2^x - 9} \leq 32.$$

Замена переменной: $8^x = t$.

Получаем неравенство: $\frac{t^4 - 12t^3 + 36t^2 - 32t}{t-9} \leq 0$.

Разложение на множители многочлена $t^4 - 12t^3 + 36t^2 - 32t$ у многих выпускников вызвало большие трудности.

$$\frac{t(t-2)^2(t-8)}{t-9} \leq 0.$$



Часто школьники, имея лишь поверхностные навыки решения неравенств, неверно указывали знаки на числовой прямой или при верном расставлении знаков, записывали ошибочное решение, не принимая во внимание изолированную точку.

Рекомендации, что делать для устранения.

Уделить особое внимание разложению многочлена 3 степени на множители различными методами.

Более внимательно относиться к определению знаков на числовой прямой.

Рассмотреть причины появление изолированных точек, а также их учет при решении неравенств.

2017 год [4].

1) Формальное применение свойств логарифма.

ПРИМЕР:

$$\frac{log_5(25x)}{log_5 x}+\frac{log_5 x-2}{log_5(25x)}\geq\frac{6-log_5 x^4}{log_5^2 x-4}.$$

Если в 2017 году непонимание того, что $log_5 x^4=4log_5|x|$ не привело к ошибкам, что в 2020 некоторые школьники получили неверное решение, т.к. ошибочно использовали в своих решениях следующие рассуждения:

$$log_7(x^2-6x+9)=log_7(x-3)^2=2log_7(x-3).$$

Рекомендации, что делать для устранения.

При изучении свойств логарифмической функции акцентировать внимание на ОДЗ.

2018 год [4]-[5].

1) Ошибки при решении «простых» неравенств (квадратных, рациональных) методом интервалов (путают решение неравенства с уравнением). При этом метод и логика решения исходного неравенства верна.
2) Неграмотное, без понимания теоретических основ, применение метода рационализации («по образцу»).

   ПРИМЕР:

$$log_3(x^2+1)-log_3(x^2-x+12)\geq log_3\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

При нахождении ОДЗ, необходимо решить следующие квадратное и рациональное неравенства:

$$1-\frac{1}{x}>0, x^2-x+12>0.$$

При решении первого рационального неравенства очень распространённой ошибкой стало умножение на x. Это приводило к неверному ответу. При этом многие школьники не сразу понимали, где допустили ошибку. Многие ошибочно использовали условие $x>0$, другие применяли методы решения уравнений, при решении данного неравенства.

Во втором неравенстве многие школьники испытывали трудности, при решении квадратного неравенства, при условии, что на числовой прямой не было ни одного ноля функции.

В приведенном выше примере некоторые школьники применяли метод рационализации к левой части неравенства, при этом справа стоит логарифм. Что приводило к неверному решению.

Рекомендации, что делать для устранения.

Школьники должны понимать, почему нельзя решать квадратные и дробно-рациональные неравенства формально по аналогии с уравнениями.

Обратить внимание на сохранение или изменение знака неравенства, а также смысловое знание нулей функции.

Объяснить теоретические основы применение метода рационализации.

2019 год [4].

1) Нередко, при решении неравенств, встречаются логические ошибки (при учёте нескольких условий или рассмотрении нескольких случаев). Например, школьники объединяют промежутки, когда их нужно пересекать или наоборот.

   ПРИМЕР:

$$log_6(21-7x) \geq log_6(x^2-8x+15) + log_6(x+3).$$

При нахождении ОДЗ исходного неравенства,

$$\begin{cases} 21-7x>0, \\ x^2-8x+15>0, \\ x+3>0, \end{cases}$$

школьники допускали описанные выше ошибки. Часто рассматриваемые ошибки имеют место, при пересечении ОДЗ и решением неравенства $21-7x \geq (x^2-8x+15)(x+3)$.

2020 год [1].

1) Формальное знание и применение свойств логарифма без их понимания при решении неравенств.
2) Решение квадратного неравенства типа $(x-a)^2>0$.

ПРИМЕР:

$$x^2 log_{343}(3-x) \leq log_7(x^2-6x+9).$$

При преобразовании исходного неравенства, распространённой ошибкой школьников было использование следующего неверно равенства:

$$log_7(x-3)^2 = 2log_7(x-3).$$

При вычислении ОДЗ, часто выпускники испытывали трудности при решении квадратных неравенств следующего вида: $(x-3)^2>0$. Школьники часто ошибочно делают вывод о том, что квадрат любого действительного числа всегда больше ноля.

Рекомендации, что делать для устранения.

При изучении или повторении темы «квадратные неравенства», обязательно рассмотреть всевозможные виды квадратных неравенств. Уделить особое внимание частным случаям. Показать примеры, когда формальная расстановка знаков приводит к ошибкам.

После проведенного выше анализа, авторами статьи предлагаются следующие общие рекомендации для улучшения качества математической подготов-

ки школьников. Необходимо уделить повышенное внимание следующим темам:

– указать на «подводные камни» работы с ОДЗ, а также наложения условий при решении, неравенств и их систем,
– совершенствовать умения применения метода замены переменной при решении неравенств,
– теоретические основы метода интервалов для решения неравенств,
– алгоритм метода рационализации при решении неравенств (уделить особое внимание условиям применения данного метода и равносильности полученные неравенств).

Также, в процессе планирования ПРЗМ, элективных курсов по возможности дифференцировать обучение, разработку и проведение занятий. Особое внимание стоит уделить осознанности применения методов решения неравенств. При разработке конспектов важно сделать акцент не только на знание-теоретического материала, но и на развитие умения самостоятельного поиска наиболее рационального решения задачи. Повышенного внимания требует развитие у школьников понимание метода интервалов на содержательном уровне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панюшкин С.В. Методический анализ результатов государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования Орловской области в 2020 году по профильной математике. –2020.
2. Панюшкин С.В. Об итогах ЕГЭ по математике 2016 г. в Орловской области // Инновационные технологии довузовского образования материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – 2017. – С. 23-29.
3. Ященко И.В., Семенов А.В., Высоцкий И.Р. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2020 года по математике. – Москва. –2020. – 17 с.
4. https://fipi.ru/
5. https://www.orcoko.ru/ege/ege-uchitelyam/

УДК 53

ГИРОСКОП ДЛЯ ЛЕКЦИОННЫХ ДЕМОНСТРАЦИЙ

И.В. Корогодина, к.пед.н.
Академия ФСО России
e-mail: *ekorogodin@yandex.ru*

В статье проводится оценка роли рационализаторской работы в техническом вузе. Освещается вопрос использования гироскопа для лекционных демонстраций в ходе изучения вынужденной прецессии в рамках курса общей физики. Автор проводит наглядный анализ видов гироскопического эффекта.

Ключевые слова: рационализаторская деятельность, гироскоп, гироскопический эффект, прецессионное движение.

Разработка новых решений, направленных на модернизацию и совершенствование существующих устройств и технологий, лежит в основе рационализаторства. Активное внедрение технических новинок в работу конкретных узлов и деталей способно обеспечивать оптимальную адаптацию действующего оборудования к конкретным условиям эксплуатации. Рационализаторские предложения вносят изменения в сторону повышения производительности, улучшения качества продукции и обеспечения безопасности труда. Совсем недавно на долю рацпредложений приходилось до 70 % общей экономии в народном хозяйстве.

Технические вузы создают уникальную атмосферу для развития будущего инженера по актуальным научно-исследовательским и техническим направлениям. В настоящее время здесь активно возрождается рационализаторское движение, в которое вовлекается все больше обучающихся, способных творчески мыслить. Принимая участие в рационализаторской работе под руководством преподавателя, студенты развивают самостоятельность и способность к самообучению, более глубоко и всесторонне осваивают технические дисциплины, в том числе физику. С другой стороны – рацпредложения обучающихся могут представлять интерес для демонстрации законов и явлений природы и находят применение в изложении учебного материала самого курса физики, повышая тем самым наглядность обучения. Уникальные модели, изготовленные руками студентов, занимают достойное место в кабинете лекционных демонстраций кафедр физики технических вузов.

В соответствии с программой по дисциплине "Общая физика" в рамках изложения темы "Классическая механика материальной точки и твердого тела" предусмотрено изучение вынужденной прецессии. Гироскопический эффект можно наблюдать при помощи гироскопа – массивного твердого тела, основной частью которого является быстро вращающийся ротор, имеющий несколько осей свободного вращения (степеней свободы).

Для демонстрации вынужденной прецессии и гироскопического эффекта можно воспользоваться изготовленным студентами младших курсов в ходе рационализаторской работы прибором, внешний вид которого представлен на рисунке 1.

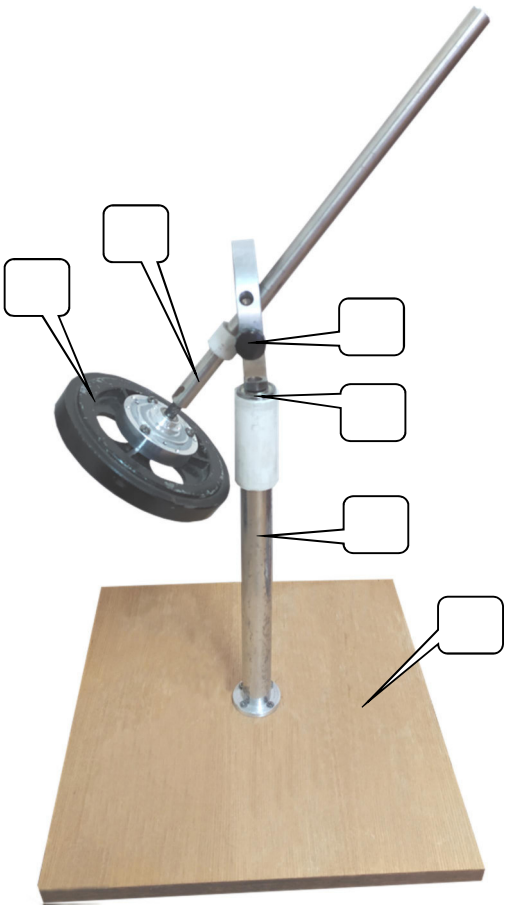


Рисунок 1 – Гироскоп для лекционных демонстраций

Гироскоп для лекционных демонстраций содержит маховик 1, установленный на оси 2, закрепленной на оси кольца 3. Кольцо 3 через опорный подшипник 4 установлено на стойке 5. Стойка 5 крепится к основанию 6.

Динамические свойства данного устройства определяют такие параметры, как момент инерции I_0, который зависит от величины массы и положения оси вращения, и угловая скорость вращения ω_0.

Момент импульса гироскопа

$$\vec{L} = I_0 \vec{\omega}_0 . \qquad (1)$$

При этом выполняется закон динамики вращательного движения

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \qquad (2)$$

где $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$ – сумма моментов внешних сил F, которые действуют на расстоянии r относительно центра вращения (для свободного гироскопа – центра масс) [1].

Для демонстрации модели свободного гироскопа требуется с помощью бечевки, намотанной на маховик 1, придать устройству необходимую скорость вращения. В результате сообщенного таким образом движения поднятым оказывается конец оси 2 с закрепленным маховиком 1. В зависимости от дополнительного внешнего воздействия, оказываемого на ось гироскопа, есть возможность в ходе лекционных демонстраций наблюдать три варианта его поведения.

1. Демонстрация сохранения направления оси вращения свободного гироскопа в пространстве.

Если гироскоп для лекционных демонстраций раскручен вокруг оси симметрии (главной оси), то в однородном поле силы тяжести результирующий момент сил $\vec{M}$ равен нулю. Из уравнения (2) следует, что момент импульса гироскопа сохраняется, т.е.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 , \ \vec{L} = const . \qquad (3)$$

Прибор не будет реагировать на кратковременные ударные влияния, т.е. "останется жестким" по отношению к импульсному воздействию. Направление оси симметрии сохраняется в пространстве при всяких попытках развернуть кольцо опорного подшипника 4, в котором закреплен гироскоп [2].

2. Демонстрация вынужденной прецессии гироскопа.

Если к оси подвижного гироскопа приложить дополнительную силу $F_{вн}$ в направлении, перпендикулярном к оси вращения, то возникает движение прибора вокруг оси, перпендикулярной данной (прецессионное движение).

Направление прецессии можно определить согласно уравнению

$$\vec{M} = [\vec{\omega}_{пр}, \vec{L}],$$

где $\vec{\omega}_{пр}$ – вектор угловой скорости прецессии гироскопа.

В результате действия внешней силы $F_{вн}$ в течение времени dt начальный момент импульса L_0 получит приращение

$$dL = Mdt,$$

где M – момент силы $F_{вн}$ относительно точки О.

Происходит поворот вектора результирующего момента импульса

$$\vec{L} = \vec{L}_0 + d\vec{L}$$

на угол $d\alpha$ в горизонтальной плоскости (поворот вектора момента импульса $\vec{L}$ вокруг оси Z) (рисунок 2).

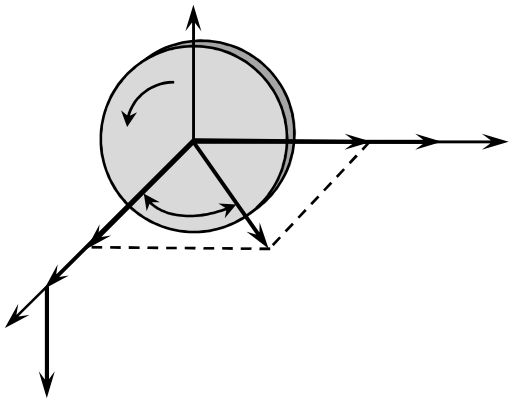


Рисунок 2 – Схема вынужденной прецессии гироскопа

При условии $\omega_0 >> \omega_{пр}$ имеем

$$\omega_{пр} = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (4)$$

Приращение момента импульса

$$dL = Ld\alpha, \quad (5)$$

где L – проекция вектора $\vec{L}$ на горизонтальную плоскость (рисунок 2).

Исходя из формул (2), (4) и (5), угловая скорость прецессии гироскопа будет равна

$$\omega_{пр} = \frac{dL}{Ldt} = \frac{M}{L} = \frac{rF}{I_0\omega_0}, \quad (6)$$

где r – плечо силы F.

Из выражения (6) следует, что $\omega_{пр}$ не зависит от угла наклона оси гироскопа по отношению к вертикали. Кроме того, при $\omega_0 >> \omega_{пр}$ поворот оси ги-

роскопа будет происходить настолько медленно, что на малом интервале времени данным движением можно пренебречь, а сам прибор использовать как безынерционный указатель неизменного направления в пространстве.

3. Демонстрация нутационного движения.

При условии $\omega_0 \approx \omega_{np}$ внешняя сила будет вызывать колебание прецессионной оси (нутацию). Причиной нутации (от лат. *nutatio* – колебание) является трение в опоре кольца подшипника 4 (рисунок 1). В ходе демонстрации можно убедиться в том, что, чем сильнее раскручен гироскоп, тем меньше период и амплитуда колебаний ("мельче" дрожания конца оси гироскопа). Продемонстрировать данный эффект удается в случае, когда ось сильно раскрученного гироскопа после наклона быстро отпустить или осуществить кратковременный удар по оси прибора во время вынужденной прецессии.

В заключении отметим, что изготовленный в ходе рационализаторской работы демонстрационный прибор компактен и удобен в эксплуатации. Его использование на лекционных занятиях по физике обеспечивает учебный эффект, который состоит в усилении наглядности при демонстрации влияния величины и направления момента приложенных сил на величину и направление скорости центра масс гироскопа.

Таким образом, оценивая роль и место рационализаторской работы в техническом вузе, можно отметить ее положительное влияние на развитие творческого потенциала обучающихся и серьезный вклад в материальную базу учебных заведений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И. В. Курс общей физики: учебное пособие для втузов. В 4 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. – Санкт-Петербург, 2011.
2. Павлов В.А. Гироскопический эффект, его проявления и использование – Ленинград, 1985.

УДК 372.853

ЗНАКОМСТВО ШКОЛЬНИКОВ С ОСНОВАМИ НАНОТЕХНОЛОГИЙ В ШКОЛЕ НА УРОКАХ ФИЗИКИ И ВО ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

А.Н. Кузьмичева
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *alla.kuzmicheva@mail.ru*
Л.А. Ставцева
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *stavceva1966@mail.ru*
О.И.Марков, д.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *O.I.Markov@mail.ru*

Статья посвящена методике преподавания основ нанотехнологий в школе на уроках физики и во внеурочной деятельности. Предложены вопросы, предназначеные для изучения на уроках физики и программа.

Ключевые слова: методика преподавания физики в школе, нанотехнологии, внеурочная деятельность.

... трудность заключается в переходе от предмета к знанию,
который совершается посредством размышления.
Гегель.
... во всех случаях важно, как можно лучше понимать то,
что ты делаешь.
Ж. Дьедоне.
"Если бы меня спросили,
какая область науки может обеспечить нам прорыв в будущее,
я бы назвал нанотехнологии"
Р. Фейнман, физик, лауреат Нобелевской премии

Важнейшая задача современной школы – это всесторонее раскрытие способностей каждого ученика, воспитание личности, готовой к деятельности в высокотехнологичном, высококонкурентном мире. Нынешнему обществу нужен школьник, активно мыслящий, умеющий выделять и по новому творчески решать появляющиеся проблемы. Отсюда следует, что важнейшая задача современного учителя состоит не только в управлении процессом обучения, воспитания, но и в развитии творческих накронностей учащихся. Эта задача приобретает особую актуальность в современном динамичном развивающемся информационном пространстве.

Физика - это наука, включающая в себя сумму знаний, накопленных на протяжении развития человечества и имеющая огромное значение в жизни современного человека. В задачи школьного курса физики входит также воспитание в школьниках уверенности в познаваемости физического мира, в необходимости разумного использования достижений физической науки и технологии для успешного развития человеческого общества. Плэтому преподавание физики в школе представляет собой подходящую область для использования раз-

личных методов, способов и учебно-методических средств формирования способностей школьников. Существенная проблема, которая возникает при этом —соотношение объема необходимой информации и количества часов, отводимых на ее изучение согласно базовой программе, с учетом низкой мотивации учащихся к учебе. Преподавание физики и других отдельных естественнонаучных предметов приводит к тому, что у выпускников не формируется целостная картина мироздания. Даже если они знают физические законы, но не всегда могут связать их с процессами и явлениями, реально происходящими в окружающей жизни.

Определённые стандартом [1] новейшие требования к результатам усвоения учающимися ООП возбуждают потребность в существенном изменении всего содержания обучения на основе действия принципов метапредметности. Применение метапредметных технологий в процессе преподавания физики позволяет показывать обучащимся актуальные вопросы, задачи и проблемы, а также пути становления современных научных и практических знаний.

В последнее время мы очень часто встречаемся с термином «нанотехнологии». Но не только встречаемся, нанотехнологии работают уже сейчас, а в ближайшее время кардинальным образом изменят все области жизни и деятельности человека, позволят полностью перестроить целые отрасли энергетики, промышленности, военно-промышленного комплекса, медицины, исследовании космоса. Развитие технологий создания новых наноматериалов является одним из самых перспективных направлений в науке и технике в XXI веке. Развитие у учащихся первоначальных представлений о нанотехнологиях при изучении физики, ознакомление с наномиром, участие в исследовательских работах по изучению наноразмерных объектов [2,3] являются мощными факторами углубления знаний по разделам основы атомно-молекулярного строения вещества и квантовой физики [4,5] в процессе ознакомления с современными научными успехами физики в микро-и наноэлектронике, квантовой электронике. Это возможно реализовать [6,7] путем введения в содержание обучения, самостоятельного сквозного курса по основам нанотехнологии или введения в содержание курса физики модулей по основам нанотехнологий в курсе 7-9 классов и средней школы 10 и 11 класс, в рамках принятых программ базового или профильного обучения. Это направление базируется на принципах свободного выбора учащимися образовательного маршрута, получения знаний через элективные курсы, кружки и факультативы, участия в конкурсах исследовательских и проектных работ, во Всероссийской олимпиаде по нанотехнологиям [2,3].

Собирая материал для создания рабочей программы курса по основам нанотехнологий, мы выявили ряд трудностей, проблем, которые необходимо преодолевать. Материалы по нанотехнологиям не систематизированы, не всегда доступны, и понятны для школьников, у учителя нет методических и дидактических материалов для преподавания, программного обеспечения и недостаточно информационных справочных систем.

Осуществление задачи формирования любознательного, познающего мир выпускника, обучение решению задач поискового, творческого характера будет более успешным, если учебные занятия дополнятся внеурочной работой. Дополнительное образование обращено на развитие творческих способностей школьников, что в дальнейшем обеспечивает их адаптацию к активной жизни в обществе, сознательную профессиональную ориентацию, выявление и поддержку талантливых ребят. Внеклассная, кружковая работа побуждает интерес к предмету изучения, улучшает эмоциональное воздействие на детей, повышает ценность образовательной деятельности [2,3].

Перед педагогами при организации внеурочной работы стоит задача построения своей работу таким образом, чтобы школьникам было комфортно с интересом участвовать в этой работе, в процессе которой они учились бы думать, самостоятельно работая с учебным материалом, осваивая при этом новые знания.

Начинать знакомство с основами нанотехнологий, некоторыми основными понятиями можно еще до изучения курса физики. Эти занятия позволяют в простой и доступной форме рассказать, что такое нанотехнологии, для чего они так нужны в современном мире. Конечно, для детей младшего школьного возраста трудно найти объяснение сложных явлений и процессов, поэтому использование познавательных видео клипов и анимационных фильмов с соотвествующими пояснениями может усилить интерес школьников к избранным темам и сделать процесс первоначального ознакомления увлекательным. Можно предложить примерный план занятий.

1) Вводная беседа с детьми. Дать основные сведения о нанотехнологиях в форме ответов на часто задаваемые вопросы, исторический экскурс в историю вопроса, просмотр видеороликов, мультфильмов;
2) Ответы на вопросы, просмотр презентации «Что такое нанотехнология?» и развивающих мультфильмов;
3) Что могут нанотехнологии. Нанотехнологии в России и мире. Перспективы развития. Дать детям задание пофантазировать, как в будущем изменится наша жизнь с внедрением нанотехнологий (рассказы с иллюстрациями) 4) Просмотр видеороликов, серии обучающих мультфильмов о нанотехнологиях «Волшебная лаборатория».
5) Опыты, самостоятельные исследования. Лабораторная работа с элементами «НАНО» «Капиллярные явления»
6) Использование тетрадей кейсовых практик для самостоятельных работ с сайта Портала Школьной Лиги «Роснано», проведение опытов. 7) Самостоятельный поиск информации в литературных источниках и сети Интернет, по результатам которго школьники делают доклады, рисунки и фотографии к занятиям).
8) Внеклассное мероприятие «Ну НАНО же! ...»

Затем возможно включение элементов основ нанотехнологий в некоторые темы школьного курса физики.

При изучении в 7 классе темы «Первоначальные сведения о строении вещества» целесообразно предложить учащимся дома или на кружке выполнить творческую работу, например, «Получение мыла» или «Выращивание кристаллов», разъяснив что мыло-продукт нанотехнологий и что оно содержит мицеллы-небольшие наночастицы, которые используют также для производства других косметологических средств.

В 8-м классе при изучении темы «Агрегатные состояния вещества» учащихся можно познакомить с веществом аэрогель. Это вид веществ, представляющих собой гель, где жидкая фаза полностью заменена газообразной. При изучении темы «Источники тока» учащихся можно заинтересовать такой новинкой, как наноаккумуляторы
и о их преимуществах перед обычными аккумуляторами.

В 9-м классе при завершении изучения раздела «Ядерная физика», может быть предложена тема «Нанотехнологии и экстремальные ситуации» , где можно рассказать о создании костюмов солдата, пожарного, спасателя, космонавта, которые могут обеспечить механическую, радиационную, химическую, биологическую и иные защиты, и при этом быть достаточно легким и удобным. Можно, например, рассказать о бронежилетах, созданных на основе полиуретановых волокон диаметром около 100 нм, между волокнами которого будут встроены различные «умные» наноматериалы, умеющие реагировать на механические воздействия, изолировать от химических и биологических реагентов, поддерживать комфортную температуру тела и т.д..

При изучении в 10-м классе таких тем как «Строение твердого кристаллического тела. Кристаллическая решетка» знакомятся с фуллеренами, графенами, нанокристаллами и их практическим применением.

Можно использовать разработанные программы [7] для средней школы, опирающиеся на естественнонаучное образование состоящее из трех предметов физики, химии и биологии:

1) Богданова К. Ю. «Нанотехнологии в школе и на внеклассных занятиях» (программу занятий кружка и элективного курса по нанотехнологиям для учеников 11 классов).
2) Разумовская И.В. Программа «Нанотехнология». (Элективный курс предназначен для учащихся 11 классов).
3) «Перспективные технологии XXI века». (Включает лекции, практические занятия, подготовку рефератов, их обсуждение и итоговую аттестацию).

Одним из способов организации самостоятельной деятельности учащихся является метод проектов. Долгосрочные проекты позволяют детям и педагогам планировать и осуществлять экспериментальную деятельность по изучению наноразмерных объектов. Учебный проект позволит проявить себя индивидуально или в подгруппе, показать свои результаты, значимость работы, ее практическое применение. Актуальными темами для таких работ являются: «Нанотехнологии в экологии» или «Нанотехнологии в медицине».

В заключение следует отметить, что сфера нанотехнологий является перспективным направлением в работе учителя и имеет огромное поле образова-

тельной деятельности, но для этого учитель должен быть сам конструктором новых заданий, создателем педагогических условий и ситуаций, способствующих творчеству, созданию учащимися собственных идей и продуктов, воспитывать способность к дальнейшему развитию и самосовершенствованию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федеральный закон от 29.12.2012 N 273-ФЗ (ред. от 03.08.2018) “Об образовании в Российской Федерации”, Глава 10. Дополнительное Образование, Статья 75. Дополнительное образование детей и взрослых
2. Марков О.И., Хрипунов Ю.В., Хрипунов И.В. Научно-исследовательская деятельность школьников в области нанотехнологий как эффективная система профориентационной работы. В сб. Инновационные технологии довузовского образования: коллективная монография. / Под научной ред. Е.Н. Пузанковой. – Орёл: ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет», 2014. – 204 с.
3. Хрипунов И.В., Марков О.И., Хрипунов Ю.В. О проблеме интеграции школьного и высшего образования на примере взаимодействия системы дополнительного образования и вуза. Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2015.- № 6 (69). -С. 287-290.
4. Богданов К.Ю. Что могут нанотехнологии? - М.: "Просвещение", 2009. - 96 с.
5. Нанотехнологии. Азбука для Всех. Под редакцией Ю. А. Третьякова. М.: Физматлит, 2008 г. -368 с.
6. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя / под ред. А. Г. Асмолова. –2-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 159 с.
7. Примерные программы по учебным предметам. Физика. 7-11 классы – Москва: Просвещение, 2010. (стандарты второго поколения).
8. Богданов К. Ю. Нанотехнологии в школе и на внеклассных занятиях, http://www.schoolnano.ru/node/109

УДК 512.1(075.3)

НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ РАВНОСИЛЬНОСТИ

И. С. Логунов, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»
e-mail: *logun57orel@mail.ru*

Приводятся и доказываются некоторые известные равносильности, употребляемые при решении уравнений, неравенств и их систем.

Ключевые слова: уравнение, неравенство, система, корень уравнения, равносильность.

Для успешного и эффективного решения уравнений, неравенств и их систем в элементарной математике неоценимую пользу может оказать знание и правильное использование следующих равносильных переходов.

$$|f(x)| = c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = c, \\ f(x) = -c, \end{array}\right. \quad c > 0. \tag{1}$$

$$F(|f(x)|) = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{2}$$

$$|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \Leftrightarrow f(x)g(x) \geq 0. \tag{3}$$

$$|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

$$F(|f(x)|) = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} F(f(x)) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} F(-f(x)) = -g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{5}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^{2n}(x), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \quad a > 0, a \neq 1. \tag{7}$$

$$\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \tag{8}$$

$$\log_{g(x)} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g^b(x). \end{cases} \tag{9}$$

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} t(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = t(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(x) > 0, \\ f(X) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = t(x). \end{cases} \tag{10}$$

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ p(x) > 0, \\ p(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x). \end{cases} \tag{11}$$

$$|f(x)| < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a \end{cases} \quad \text{при } a > 0. \tag{12}$$

$$|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{array} \right. \tag{13}$$

$$f(|x|) < g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) < g(x), \\ x < 0. \end{cases} \end{array} \right. \tag{14}$$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases} \tag{15}$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right. \tag{16}$$

$$|f(|x|)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) < g(x), \\ f(|x|) > -g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |f(x)| < g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} |f(-x)| < g(x), \\ x < 0. \end{cases} \end{array} \right. \tag{17}$$

$$|f(|x|)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(|x|) > g(x), \\ f(|x|) < -g(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |f(x)| > g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} |f(-x)| > g(x), \\ x < 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{18}$$

$$\sqrt[2n]{f(X)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > f(x). \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq x, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g^{2n+1}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2n+1}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)}, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ a > 1. \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)}, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ a > 1. \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x), \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \\ a > 1. \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x), \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ 0 < a < 1. \end{cases} \tag{28}$$

Докажем, например, равносильность (21).

Пусть левое неравенство выполнено, тогда $f(x) \geq 0$, поскольку корень из $f(x)$ должен быть определен. Далее, $g(x) > 0$, т.к. по условию $g(x) > \sqrt{f(x)}$. Кроме того, при возведении обеих частей верного неравенства для положительных чисел в квадрат его знак сохраняется. Отсюда следует, что $f(x) < (g(x))^2$, то есть любое решение левого неравенства удовлетворяет системе справа.

Обратно, если $x = x_0$ удовлетворяет системе справа, то $f(x_0) \geq 0, g(x_0) \geq 0$ и из обеих частей верного неравенства для положительных чисел можно извлечь квадратный корень: $\sqrt{f(x_0)} < \sqrt{(g(x_0))^2} = |g(x_0)| =$
$= g(x_0)$, то есть $x = x_0$ есть одно из решений неравенства слева.

Равносильность доказана.

Все остальные соотношения могут быть доказаны аналогично.

УДК 51(076.1)

ОБ ОДНОЙ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

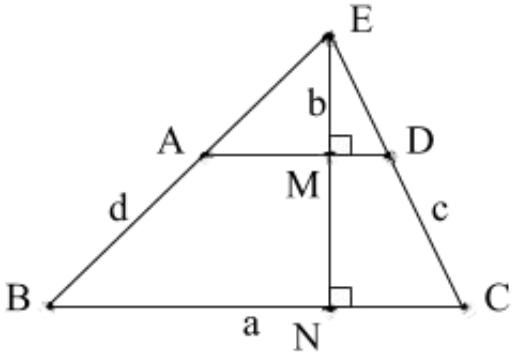
И. С. Логунов, к.ф.-м.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»
e-mail: *logun57orel@mail.ru*

Выводится редкая формула для вычисления площади трапеции по четырем её сторонам.

Ключевые слова: площадь, трапеция, формула Герона.

Интересной представляется задача вычисления площади трапеции по четырем ее сторонам $AB = d, AD = b, CD = c, BC = a$.

Пусть $AB \bigcap CD = E, EN \perp BC, EM \perp AD$, тогда задача сводится к вычислению высоты MN через данные стороны a, b, c, d.



1. Так как $\Delta ADE \sim \Delta BCE$, то $\frac{AE+d}{AE} = \frac{a}{b}$ и $\frac{DE+c}{DE} = \frac{a}{b}$, ткуда следует $AE = \frac{b \cdot d}{a-b}, DE = \frac{b \cdot c}{a-b}$, где $a > b$.
2. По формуле Герона для ΔADE имеем

$$S_{\Delta ADE} = \frac{1}{4}\sqrt{(b + \frac{b \cdot d}{a-b} + \frac{b \cdot c}{a-b}) \cdot (b + \frac{b \cdot d}{a-b} - \frac{b \cdot c}{a-b}) \cdot (b + \frac{b \cdot c}{a-b} - \frac{b \cdot d}{a-b}) \cdot (\frac{b \cdot d}{a-b} + \frac{b \cdot c}{a-b} - b)} =$$
$$= \frac{b^2}{4(a-b)^2}\sqrt{(a-b+d+c) \cdot (a-b+d-c) \cdot (a-b+c-d) \cdot (b-a+d+c)}.$$

3. Обозначив $a+b+d+c=2p$, упростим выражение для $S_{\Delta ADE}$: $S_{\Delta ADE} = \frac{b^2}{(a-b)^2} \cdot \sqrt{(p-b)\cdot(p-b-c)\cdot(p-b-d)\cdot(p-a)}$. По известной формуле, с другой стороны: $S_{\Delta ADE} = \frac{b}{2} \cdot OM$, тогда из уравнения $\frac{b}{2} \cdot OM = \frac{b^2}{(a-b)^2} \cdot \sqrt{(p-b)\cdot(p-b-c)\cdot(p-b-d)\cdot(p-a)}$ находим $OM = \frac{2\cdot b\cdot\sqrt{(p-b)\cdot(p-b-c)\cdot(p-b-d)\cdot(p-a)}}{(a-b)^2}$.

4. Возвращаясь к подобным ΔADE и ΔBCE, выражаем высоту MN трапеции $ABCD$:

$$\left(MN + \frac{2\cdot b\cdot\sqrt{(p-b)\cdot(p-b-c)\cdot(p-b-d)\cdot(p-a)}}{(a-b)^2}\right) : \frac{2\cdot b\cdot\sqrt{(p-b)\cdot(p-b-c)\cdot(p-b-d)\cdot(p-a)}}{(a-b)^2} =$$
$$= \frac{a}{b}\cdot MN = \frac{2}{a-b}\cdot\sqrt{(p-b)\cdot(p-b-c)\cdot(p-b-d)\cdot(p-a)}.$$

5. Подставив значение MN в формулу площади трапеции $ABCD$, получим красивую, но громоздкую формулу

$$S_{\Delta ABCD} = \frac{a+b}{a-b}\cdot\sqrt{(p-b)\cdot(p-b-c)\cdot(p-b-d)\cdot(p-a)}.$$

Замечание. При $b=0$ трапеция вырождается в треугольник BCE и видим известную формулу Герона: $S_{\Delta} = \sqrt{(p)\cdot(p-c)\cdot(p-d)\cdot(p-a)}$.

УДК 37

К ПРОБЛЕМЕ ВЫБОРА СОДЕРЖАНИЯ КУРСА «ВВЕДЕНИЕ В ПРОФЕССИЮ» ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКИХ БАКАЛАВРОВ НАПРАВЛЕНИЯ 44.03.05 «ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ» (ПРОФИЛИ ПОДГОТОВКИ: «МАТЕМАТИКА», «ИНФОРМАТИКА»)

О.А. Малыхина, к.пед.н., доц.
Тихоокеанский государственный университет
e-mail: *malolga15@mail.ru*

В статье обоснованно излагается авторский подход к определению содержания курса «Введение в профессию» для студентов направления 44.03.05 «Педагогическое образование» с двумя профилями подготовки: «Математика», «Информатика».

Ключевые слова: дисциплина «Введение в профессию», профили обучения: «Математика», «Информатика», студент, федеральный государственный образовательный стандарт.

Дисциплина «Введение в профессию» для студентов 1 курса, обучающихся по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки: «Математика», «Информатика») появилась в учебных планах Тихоокеанского государственного университета в 2019 г.

Неоднозначное понимание содержательных аспектов указанной дисциплины преподавателями вуза, приводит к некоторому «разночтению» в понимании целей, задач, результатов обучения и назначению указанной дисциплины в процессе подготовки студентов.

Обращение к вопросу определения содержания дисциплины «Введение в профессию», преподаваемой первокурсникам, в некоторой степени, обусловлено серьезными трудностями усвоения математических курсов, изучаемых студентами в последующих семестрах (третьем и четвертом), что, на наш взгляд, является, следствием отсутствия теоретической и практической «базы» у студентов для их изучения. И обучающихся винить в этом ни в коей мере нельзя.

Дисциплины профессиональной направленности у студентов указанных профилей на 1 курсе практически отсутствуют. Ранее преподаваемые на первом и втором курсах дисциплины: «алгебра», «геометрия», «математический анализ» перенесены на второй курс и изучаются второкурсниками в значительно меньшем объеме. Например, на изучение высшей алгебры количество часов сократилось в два раза.

В сложившейся ситуации уменьшения часов, отводимых на изучение ряда математических дисциплин второкурсниками есть два пути: первый путь – исключение каких-то глав дисциплин, которые являлись традиционными и необходимыми для изучения последующих математических курсов, второй – использование так называемого преподавания «по верхам».

И первый, и второй путь приведут не только к нарушению междисциплинарных связей, но и к фрагментарному и неполноценному математическому образованию студентов.

Есть третий, на наш взгляд, логически обоснованный путь. Поскольку курс «Введение в профессию» закреплен за кафедрой математики и информацион-

ных технологий, то в рабочую программу курса возможно и следует включить те модули (главы, темы), которые являются базовыми для преподавания высшей алгебры, геометрии и математического анализа на втором курсе.

Таким образом, с одной стороны, будет ликвидировано неоднозначное понимание содержательных аспектов дисциплины «Введение в профессию» преподавателями вуза, с другой стороны, – будет создан «фундамент» для более успешного освоения последующих математических курсов.

Обязательной по указанной дисциплине для первокурсников должна быть «Вводная лекция», объясняющая предмет математики, характерные черты и ее специфику (наличие в математике абстрактных понятий, важнейших особенностей математического абстрагирования, особых методов познания, свойств универсальной применимости и т.д.).

В связи с отсутствием для данных профилей дисциплины «История математики» имеет смысл в сжатой и доступной для понимания студентами форме рассмотреть (или хотя бы обозначить) периодизацию А. Н. Колмогорова [1, с. 465–466]. в основу которой положена оценка содержания математики, ее важнейших методов, идей и результатов.

Значимым моментом «Вводной лекции» для первокурсников является объяснение им современных тенденций компьютеризации, математизации (внедрения методов математики и ее приложений), информатизации различных сфер, процессов современного общества; связи математики и информатики с другими науками.

Теперь перечислим необходимые, на наш взгляд, главы дисциплины «Введение в профессию»:

✓ «Комплексные числа»,
✓ «Введение в линейную алгебру»,
✓ «Введение в абстрактную алгебру».

Заметим, что перечисленными главами может не исчерпываться вся дисциплина, но они должны быть обязательными.

Не раскрывая полного содержания глав дисциплины «Введение в профессию», обоснуем их выбор.

Глава «Комплексные числа» является базовой для изучения глав: «Векторные пространств над полем», «Линейные операторы», «Многочлены», курса «Теория функций комплексного переменного» и др. А изучение таких тем, как «Основная теорема алгебры», «Решение уравнений третьей и четвертой степеней» просто невозможны.

Глава «Введение в линейную алгебру» может включать только темы, описывающие понятийный аппарат, основные утверждения и алгоритмы решения задач теории матриц, определителей, (возможно систем линейных уравнений), которые так необходимы в курсах аналитической геометрии, математического анализа и, собственно, алгебры.

В главе «Введение в абстрактную алгебру» предполагается рассмотрение алгебраических операций и алгебраических бинарных отношений (отношений порядка, эквивалентности; функций). Данная глава является одновременно

«связующим звеном» между школьной и вузовской математикой и базой для освоения последующих разделов абстрактной алгебры: «Группы», «Кольца» и курса математического анализа.

На дисциплину «Введение в профессию» отводится 72 аудиторных часа, из которых; 36 часов – лекции, 36 часов – практические занятия. Данный объём часов является достаточным для реализации предложенных глав.

В 2019–2020 учебном году на факультете естественных наук, математики и информационных технологий (ФЕНМИТ) Тихоокеанского государственного университета студентам группы ПОМИ(аб)-91 во втором семестре в режиме дистанционного обучения преподавались главы: «Комплексные числа» и «Элементы абстрактной алгебры», которые они успешно освоили.

В 2020–2021 учебном году эти же студенты, изучая в третьем семестре курса алгебры главу «Векторные пространства над полем» (в частности над полем комплексных чисел) в большинстве своем затруднений в ее освоении практически не испытывали.

Определяя значимые разделы дисциплины «Введение в профессию» необходимо учитывать **федеральные государственные образовательные стандарты** высшего образования **(ФГОС ВО)**, а в нашем случае – на ФГОС ВО (поколение 3++) [3], вступившие в силу 22 февраля 2018 года.

Следует заметить, что процесс отбора содержания для дисциплины «Введение в профессию» указанных профилей подготовки становится проблематичным в связи с существующим противоречием между требованиями ФГОС ВО (поколение 3++), ориентированными на профессиональную направленностью обучения в условиях компетентностного подхода, и недостаточным уровнем математической подготовки абитуриентов для формирования универсальных компетенции.

Хочется надеяться на реализацию *Концепции развития математического образования в Российской Федерации* [2]. В данной концепции обращается внимание не только на необходимость обеспечения отсутствия пробелов в базовых знаниях для каждого обучающегося, но и на модернизацию содержания учебных программ математического образования на всех уровнях.

В заключение отметим, что дисциплина «Введение в профессию» в системе подготовки академических бакалавров занимает важное место, способствует успешному усвоению студентами других следующих после нее дисциплин.

ЛИТЕРАТУРА

1. БСЭ. Т. 26. 2-е изд. М.: Гос. науч. изд-во: БСЭ, 1954. – 651 с.
2. Распоряжение Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. N 2506-р г. Москва. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс]. URL: https://rg.ru/2013/12/27/matematika-site-dok.html (дата обращения 14.11.2020).
3. Федеральные государственные образовательные стандарты высшего образования по направлениям бакалавриата (3++) [Электронный ресурс]. URL: http://fgosvo.ru/fgosvo/151/150/24/94 (дата обращения 14.11.2020).

УДК 372.851

НЕПРЕРЫВНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ КРУГА

Р.А. Мельников, к.пед.н., доц.
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина
e-mail: *roman_elets_08@mail.ru*
О.А. Саввина, д.пед.н., проф.
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина
e-mail: *oas5@mail.ru*
Н.В. Черноусова, к.пед.н., доц.
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина
e-mail: *chernousovi@mail.ru*

В статье раскрываются возможности использования вводимого в школе понятия площади круга для мотивировки изучения интегрального исчисления в вузе. Показываются этапы уточнения и расширения понятия и вычисления этой величины.

Ключевые слова: методика изучения площади криволинейной фигуры, развитие интереса к изучению математического анализа.

Введение. В настоящее время математическое образование в нашей стране переживает период кризиса [1], [2]. К сожалению, развитие вычислительной техники и информатики привело к падению престижа профессии математика. Налицо потеря интереса к изучению математики у школьников и студентов. Более того, количество бюджетных мест на математические специальности сокращается, что неудивительно, поскольку сокращается и количество абитуриентов, желающих связать свою жизнь с математикой. В таких условиях особенно важно поддерживать у студентов интерес к изучению высшей математики на младших курсах, искать дополнительные методики мотивировки введения новых или уточнения уже известных из школы математических понятий.

Основная часть. Понятие площади является одним из центральных понятий геометрии. Эта величина традиционно вводится курсе в геометрии 9-го класса аксиоматически. Однако вычислять площади конкретных плоских фигур (квадрата, прямоугольника) учащиеся начинают уже в начальной школе. Формулы для вычисления площадей многоугольников в школьном курсе доказываются, поскольку эти доказательства не вызывают особых методологических трудностей. Другое дело – площадь фигуры, ограниченной кривой. Для ее вывода средств элементарной геометрии недостаточно, поэтому площади фигур, ограниченных кривыми (точнее их частный случай – криволинейные трапеции), рассматриваются в курсе алгебры и начал математического анализа. За исключением одной фигуры – круга. Формула для вычисления площади круга дается уже в средних классах, но без строгого доказательства. Для вывода этой формулы на интуитивном уровне используются понятия квадрируемости и предельного перехода (сами эти понятия, конечно, не даются): рассматриваются площади многоугольников вписанных и описанных около круга, а потом делается

заключение, что при достаточно большом количестве сторон многоугольников за их периметр можно взять длину окружности. Понятно, что такие рассуждения являются описательными, но довольно доступными для школьников. Аппарат математического анализа предоставляет уникальные возможности осуществить вывод формулы площади круга на более высоком уровне научной строгости.

Этот факт мы используем для мотивировки изучения приложений интегрального исчисления в курсе математического анализа в вузе. Студентам поясняется, что только сейчас они имеют необходимый запас математических знаний для того, чтобы вывести формулу для вычисления площади круга.

Сначала, им предлагается решить такую задачу: Найти площадь круга радиуса r в декартовых координатах.

Рассмотрим круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = r^2$, центр которой совмещен с точкой O (0,0) – началом декартовой системы координат, и имеющей радиус r (рис. 1).

Известно, что уравнение окружности можно переписать в виде $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, при этом каждая из двух образовавшихся функций представляет собой уравнение полуокружности.

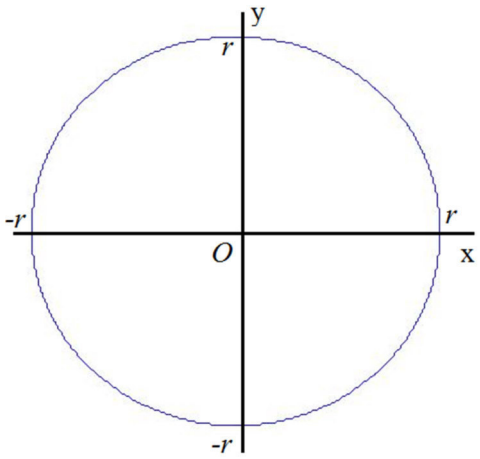


Рисунок 1 – Круг

Учитывая симметрию круга относительно оси абсцисс будем находить площадь с помощью формулы

$$S = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Произведем замену, упрощающую вычисление этого определенного интеграла

$$x = r\cdot\cos t,\ dx = -r\cdot\sin t\,dt,$$
$$x_1 = -r \Rightarrow -r = r\cdot cost, \quad \cos t = -1 \Rightarrow t_1 = \pi;$$
$$x_2 = r \Rightarrow r = r\cdot cost, \quad \cos t = 1 \Rightarrow t_2 = 0.$$

Тогда

$$S = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2\int_{\pi}^{0} \sqrt{r^2 - r^2\cos^2 t}\cdot\left(-r\cdot\sin t\right)dt =$$

$$2\int_0^{\pi} r^2\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\sin t\,dt = 2r^2\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = 2r^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= r^2\int_0^{\pi}\left(1-\cos 2t\right)dt = r^2\cdot\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi} = r^2\cdot\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi - 0 + \frac{1}{2}\sin 0\right) = \pi r^2.$$

Далее решим эту же задачу, но уравнение окружности будет представлено в параметрической форме, т.е.

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t. \end{cases}$$

Ясно, что параметр t в этих уравнениях выполняет роль угла. Очевидно, что $t \in [0, 2\pi]$.

Воспользуемся известной формулой

$$S = \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cdot \psi'(t)\, dt\,.$$

Значит, имеем

$$S = \int_0^{2\pi} r\cos t \cdot r\cos t\, dt = r^2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = r^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$\frac{r^2}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)\, dt = \frac{r^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{r^2}{2}\left(2\pi + \frac{1}{2}\sin 4\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0 \right) =$$

$$= \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi = \pi r^2.$$

Теперь решим задачу о площади круга, считая, что окружность, ограничивающая нашу фигуру, задана в полярных координатах, т.е. $\rho = 2r \cdot \cos\varphi$.

Заметим, что рассматриваемая фигура симметрична относительно полярной оси, поэтому воспользуемся формулой $S = 2S_1$, где S_1 – площадь полукруга, отмеченного на рис. 2 заливкой.

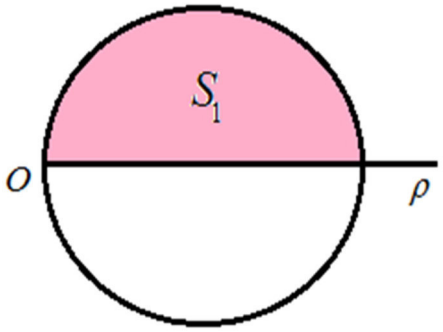


Рисунок 2 – Площадь круга

В таком случае имеем

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\varphi)\, d\varphi\,.$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r\cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4r^2\cos^2\varphi\, d\varphi = 2r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = r^2 \cdot \left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0 \right) = \frac{\pi r^2}{2}.$$

Тогда

$$S = 2S_1 = 2 \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \pi r^2.$$

И, наконец, после знакомства с кратными интегралами, покажем еще один способ вычисления площади круга.

Здесь мы воспользуемся формулой

$$S = \iint\limits_{(P)} dxdy .$$

Пронижем область (P) вертикальной спицей (рис. 3). Тогда линией входа в область (P) будет функция $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, а линией выхода – $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Ясно, что $x \in [-r, r]$.

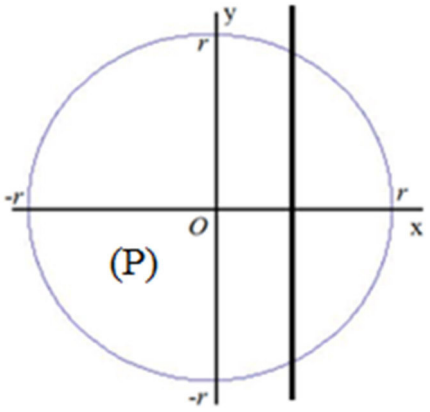


Рисунок 3 – Площадь круга

Переходя к повторным интегралам, будем иметь

$$S = \iint\limits_{(P)} dxdy = \int\limits_{-r}^{r} dx \int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy = \int\limits_{-r}^{r} y\Big|_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dx = \int\limits_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2}\right)\right) dx =$$

$$= 2\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \pi r^2 .$$

Последний интеграл мы уже встречали ранее, когда решали поставленную задачу первым способом. Поэтому нет необходимости выписывать всю цепочку вычислений, приведшую к итоговому результату.

Выводы. Таким образом, на примере площади круга можно показать, что без знания математического анализа невозможно целостно представить школьную математику, дать обоснование многим изучаемых в ней фактам. Подобные «мостики» между школьными и вузовскими математическими знаниями способствуют развитию любознательности, закрепляют и расширяют научный кругозор, позволяют реализовать идею непрерывности математического образования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Костенко И.П. Кризис отечественного математического образования // Педагогика. – 2012. – №7. – С. 41–49.
2. Малышев И.Г. Оптимизация под названием развал // Математика в школе. – 2020. – №6. – С.3–5.

УДК 501

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА MAPLE В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

С.В. Мешков
Белгородский государственный национальный
исследовательский университет НИУ (БелГУ)
e-mail: *259149@bsu.edu.ru*
С.А. Самойлов
Белгородский государственный национальный
исследовательский университет (БелГУ)
e-mail: *1466713@bsu.edu.ru*
Ю.Н. Тимофеева
Белгородский государственный национальный
исследовательский университет (БелГУ)
e-mail: *1466720@bsu.edu.ru*
Е.М. Цуканов
Белгородский государственный национальный
исследовательский университет (БелГУ)
e-mail: *1466690@bsu.edu.ru*

В данной работе обсуждается вопрос применения возможностей программного пакета maple при учении такой дисциплины, как комплексный анализ. Используя данный программный пакет построены «рельефы» основных функций комплексного переменного.

Ключевые слова: программный пакет maple, комплексный анализ, «рельеф», функции комплексного переменного.

Дисциплина «Комплексный анализ» изучается студентами направления подготовки 01.03.01 Математика в четвертом и пятом семестрах и является наиболее сложной из всех математических дисциплин, которые реализуются поэтому направлению подготовки. Приступаю к изучению теории функций студент должен обладать достаточно высоким уровнем смысловой абстрактности понятийного аппарата. Отметим, что эта дисциплина является базовой, а важность ее изучения связана с тем, что комплексный анализ, как научный раздел, имеет множество связей с физикой, техникой и другими научными областями.

«Подобные взаимопроникновения ТФКП с различными науками, с одной стороны, говорят о ее широкой прикладной направленности, которая использовалась и используется в настоящее время другими науками, с другой — изучение большинства их этих наук не входит в учебные планы педагогических вузов, вследствие чего ограниченность прикладного применения данного курса следует считать объективной «необходимостью», и это целесообразно учитывать в процессе реализации методики изучения данного учебного предмета» [1].

Применение компьютерных технологий для изучения дисциплин математического цикла, особенно в современны условиях преподавания, когда многие дисциплины реализуются дистанционно, очень целесообразно [5].

«Изменив стиль преподавания, сделав изложение математического материала наглядным … можно изменить отношение к математике и повысить интерес к ее изучению» [3].

В этой работе мы хотим продемонстрировать, как с помощью программного пакета Maple можно осуществить ту наглядность, которая помогает изучить этот сложный предмет более целостно и глубоко.

Проанализировав все темы из курса «Комплексный анализ» мы решили остановиться на теме «Функции комплексного переменного». Цель этой темы распространить на комплексную плоскость хорошо нам известные функции вещественного переменного. При этом мы можем наблюдать интересные вещи: монотонные функции становятся периодическими, а, например, функция $f(z) = \sin z$ перестает быть ограниченной. Такое поведение функций комплексного переменного можно описать при помощи формулы, т. е. аналитически, но «лучше один раз увидеть…»

К большому сожалению для комплексных функций мы не можем рисовать графики! Т. к. для аргумента следует выделить плоскость и для значений функции плоскость. Т. е. мы имеем дело с 4-мерным пространством, которое мы себе плохо представляем и еще хуже можем себе представить, как будем выглядеть график функции в нем. Но нарисовать график модуля той или иной функции вполне возможно. Поэтому для наглядности рисуют «рельефы» функций, т. е. изображают функцию как поверхность над комплексной плоскостью.

Такой метод изображения функций комплексного впервые был предложен Ф. Эмде.

«Спустя годы мы видим, насколько бы прав Ф. Эмде» [4]. Действительно, построив «рельеф» какой-либо функции комплексного переменного мы можем убедится в том, что их свойства меняются, благодаря «рельефам» становится понятным поведение функций в окрестностях особых точек. «Но главной целью, к которой следует стремиться при изучении «методом пристального всматривания» таких поверхностей, является, по нашему мнению, воспитание навыков образного мышления» [4].

Теперь рассмотрим на примерах, как применяя программный пакет Maple мы сможем построить «рельефы» функций комплексного переменного.

Построение «рельефа» будем выполнять при помощи многофункциональной команды plot3d({ex1,ex2,…},var1=a..b, var2=c..d,<options>). В команде для управления видом рисунка используются определенные параметры. Перечислим коротко основные из них:

1) grid=[m,n] – число узлов по осям x и y для вычисления поверхности (по умолчанию grid=[25,25]);

2) style=opt – стиль вывода (PATCHNOGRID-заполнитель и линии уровня)

3) light=[an1,an2,r,g,b] – задание подсветки, создаваемой источником света из точки со сферическими координатами an1,an2. Цвет подсветки определяется долями красного (r), зеленого (g) и синего (b) цветов, которые находятся в интеравале от 0 до 1;

4) axes=opt – тип осей координат;

5) color=opt – цвет поверхности (red, blue, …). В качестве opt может фигурировать конструкция, аналогичная заданию цвета в графических структурах, а также функция.

Пример 1. Синус комплексного аргумента.

Выделяя действительную и мнимую части для функции $f(z) = \sin z$ и используя определение модуля, мы получим

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y}. \quad (1)$$

Заметим, что полученная функция является функцией двух вещественных переменных x, y. На рисунке 1 приведен «рельеф» функции (1). Построить его при помощи программного пакета Maple можно следующим образом:

```
> plot3d({sqrt((sin(x))^2*(cosh(y)^2+(cos(x))^2*(sinh(y))^2))},
x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi,
grid=[25,25],
style=PATCHNOGRID,
light=[1,1,1,1,1],
axes=FRAMED,
color=x^2+y,
titlefont=[TIMES, BOLD, 14]);
```

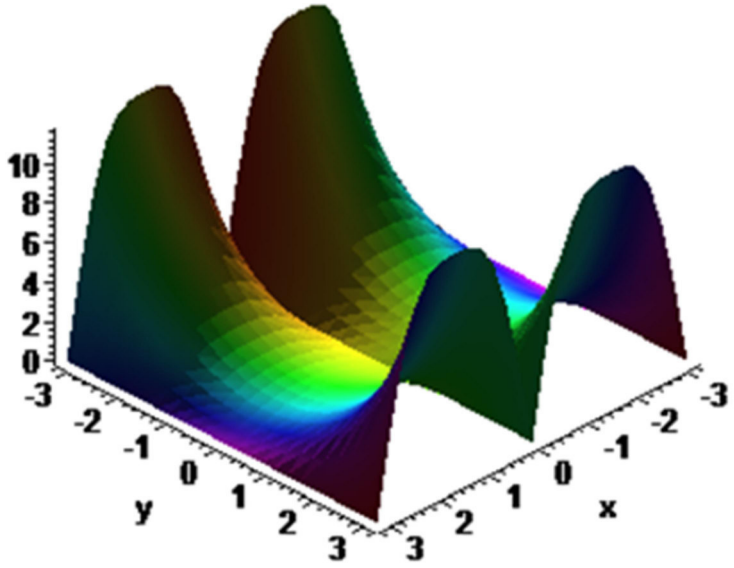


Рисунок 1 — Рельеф синус комплексного аргумента

Пример 2. Косинус комплексного аргумента.

Выделяя действительную и мнимую части для функции $f(z) = \cos z$ и используя определение модуля, мы получим

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y}. \quad (2)$$

На рисунке 2 приведен «рельеф» функции (2). Набор параметров, позволяющих получить этот рисунок в данном случае имеет вид

```
> plot3d({sqrt((cos(x))^2*( cosh(y)^2+(sin(x))^2*(sinh(y))^2))},
x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi,
grid=[40,40],
style=PATCHNOGRID,
light=[1,1,1,1,1],
```

axes=FRAMED,
color=x^2+y,
titlefont=[TIMES, BOLD, 14]);

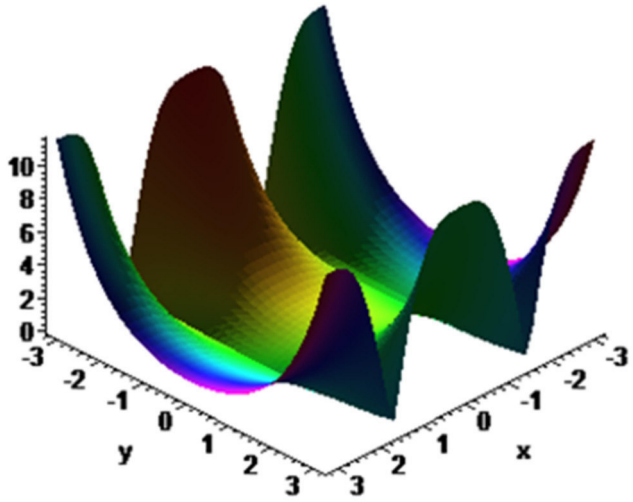


Рисунок 2 — Рельеф косинуса комплексного аргумента

Пример 3. Простой полюс $F(z) = \frac{1}{z}$. Эта функция имеет полюс первого порядка при z= 0. Выделяя действительную и мнимую части в данном случае получим

$$|F(z)| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (3)$$

Реализация в Maple
> plot3d({1/(x^2+y^2)},
x=-1..1,y=-1..1,
grid=[25,25],
style=PATCHNOGRID,
light=[1,1,1,1,1],
axes=FRAMED,
color=x^2+y,
titlefont=[TIMES, BOLD, 14]);

«Рельеф» этой функции представлен на рисунке 3. Как видно из рисунка, в нуле функция уходит в бесконечность. Аналогичную особенность имеют многие функции комплексного переменного, например $ctg\ z$.

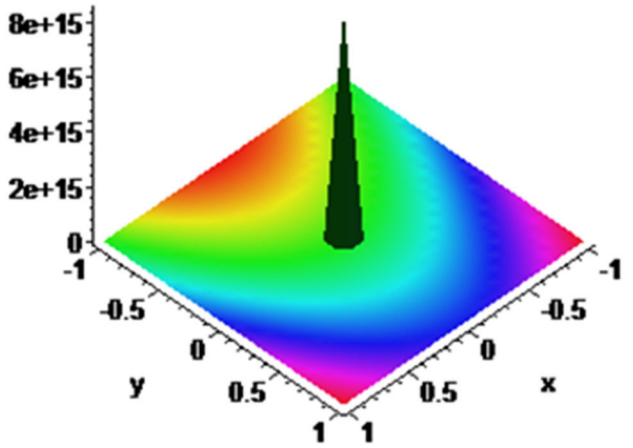


Рисунок 3 — Рельеф функции, которая имеет простой полюс

Пример 4. Функция $F(z) = \frac{1}{z^4}$ имеет при z= 0 полюс четвертого порядка. Выделяя действительную и мнимую части в данном случае получим

$$|\mathrm{F}(\mathrm{z})| = \frac{1}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)^2} \quad (3)$$

На рисунке 4 представлен «рельеф» этой функции

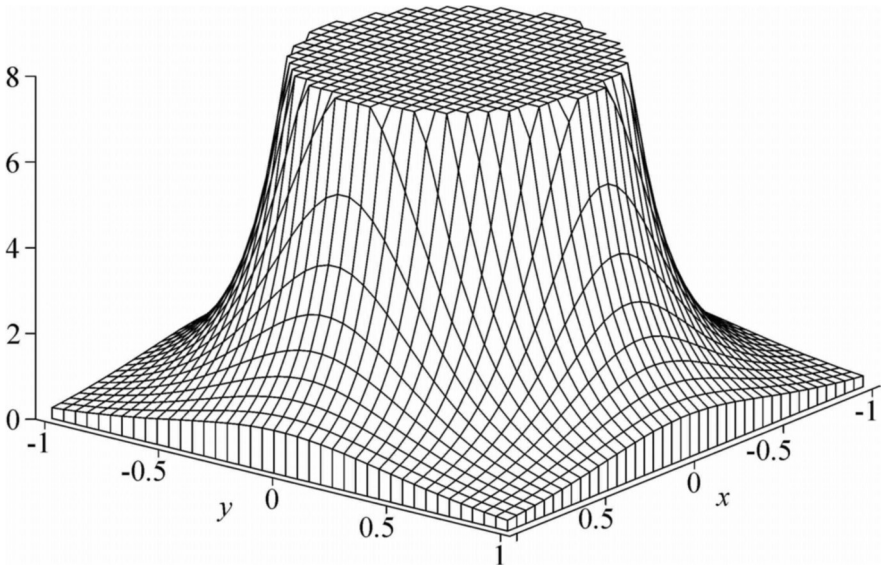


Рисунок 4 — Рельеф функции, которая имеет полюс четвертого порядка

В заключение отметим, что, делая решение сложных задач проще, программный пакет Maple снимает психологический барьер в изучении комплексного анализа. Применяя информационные технологии, мы можем сделать процесс изучения математических дисциплин интересным и более простым. Поэтому повышению уровня фундаментального математического образования будет способствовать грамотное применение различных программных пакетов в процессе изучения дисциплин математического цикла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анохина Е.Ю., Макарченко М.Г. Принципы построения методики изучения курса «Теория функций комплексного переменного» в педагогических вузах // Вестник Поморского университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. — 2009. — 4. — С. 136–143.
2. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10/11 в математике, физике и образовании. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ДМК-Пресс; СПб.: СОЛОН-ПРЕСС. — 2011. — 753 с.
3. Ковалева Л.А., Чернова О.В. Необходимость математического образования для инженеров // В сборнике: Современные проблемы физико-математических наук. Материалы V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. ФГБОУ ВО "Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева". — 2019. С. 472–475.
4. Поверхности функций комплексного переменного: Метод. указ. Изд. 2-е, исправ. и доп. / Краснояр. гос. ун-т; Сост.: Ю.В. Захаров, К.Г. Охоткин, Л. С. Титов. Красноярск. — 2004. — 39 с.

5. Хабибуллина Г.З., Хайруллина Л.Э., Фадеева Е.Ю. Применение системы mathematica в процессе изучения основных разделов математических дисциплин // Казанский педагогический журнал. — 2015. — 2 (109). — С. 73-78.

УДК 514.113.5

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ПОСТРОЕНИЮ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ ПЛОСКОСТЬЮ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧ ОДНОГО ТИПА

Е.В. Новикова
Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского
e-mail: *11-pi.novicova.cate140203@bk.ru*

В статье представлена методика обучению школьников решения задачи построения сечения многогранников плоскостью. Актуальность данной статьи подчеркивается тем, что школьная программа не уделяет должного внимания данному разделу геометрию и встречается чаще в виде углубленного раздела геометрии в 10-11 классах. Методика базируется на алгоритме построения сечения многогранников плоскостью на основе условий первой, второй и третьей аксиом стереометрии.

Ключевые слова: многогранники, сечения, алгоритм построения.

1. Введение

Геометрия в нашей жизни встречается повсеместно. Дома, на работе, во время учебы люди пользуются знанием данной науки, даже не придавая значению этому. Каждый день все сталкиваются с сечением: режем продукты, вырезаем различные формы во время ремонта и многое другое. На практике наглядно можно рассмотреть рассекаемые объекты. Другое дело – сечение многогранников, представленных на плоскости. Для построения сечений необходимо уметь применять аксиомы стереометрии:

Аксиома 1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом единственная [3].

Аксиома 2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки этой прямой лежат в данной плоскости [3].

Аксиома 3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, содержащую данную точку [3].

Построить сечение – это значит построить пересечение многогранника и плоскости. Таким образом, сечение многогранника плоскостью – это многоугольник, состоящий из множества всех точек пространства, принадлежащих одновременно данным многограннику и плоскости.

Задачи на построение сечений многогранников занимают в школьном курсе геометрии особое место и входят в задания базового и профильного уровня ЕГЭ.

Анализ результатов выполнения заданий, связанных с построением сечений, показывает низкий уровень умения строить сечения многогранников плос-

костью. Следовательно, это подчеркивает актуальность преподавания в школьном курсе.

Объектом работы является процесс обучения геометрии учащихся 10 - 11 классов, а предметом работы - процесс обучения старшеклассников решению задач одного типа на построение сечений многогранников плоскостью.

Цель работы состоит в разработке методики обучения построению сечения многогранников плоскостью на примере задач одного типа.

2. Алгоритм построения сечения многогранников плоскостью

Данная статья затрагивает методику обучения построения сечения многогранников плоскостью на примере задач одного типа. Данный тип задач является часто встречаемым среди заданий школьной программы, что делает его опорным. В роли исходных данных выступает фигура, являющаяся одним из видов многогранников, и отмеченные на ее гранях три точки.

Примечание. Две точки из трех фигуры принадлежат одной грани.

На рисунке 1 представлена общая схема построения сечения многогранников плоскостью. Важным фактором является выполнение первой аксиомы стереометрии, так как на данном этапе становится ясна осуществимость построения сечения.

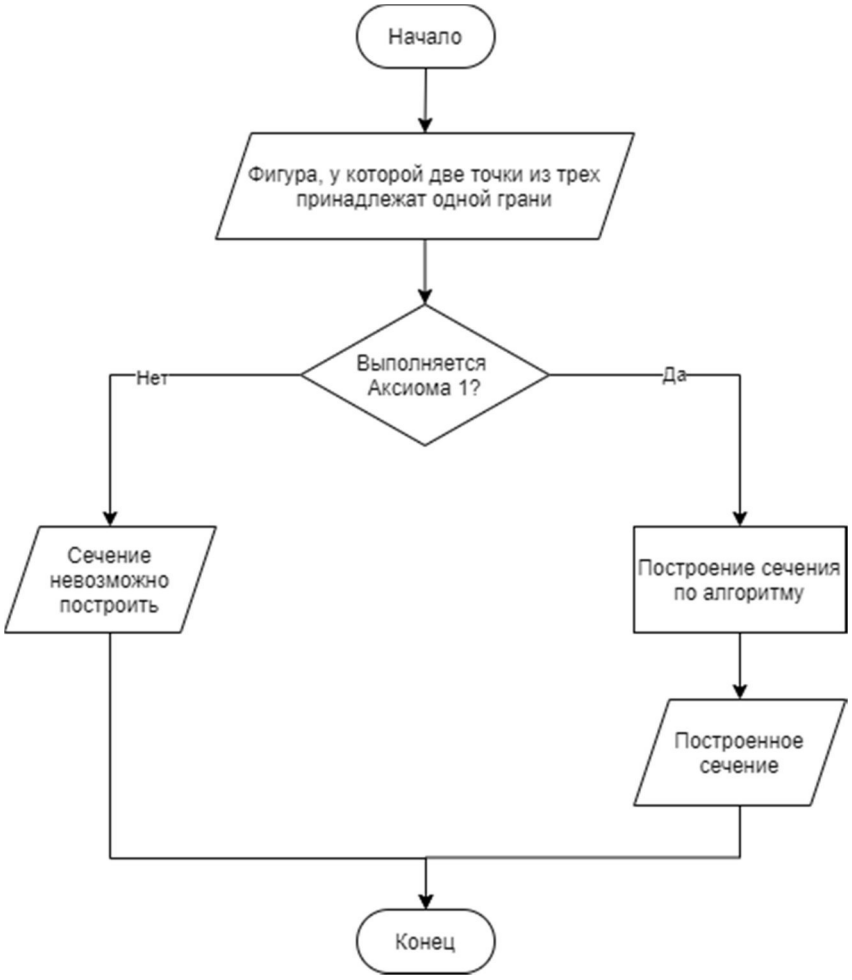


Рисунок 1 – Общая схема построения сечения многогранников плоскостью

Проведем детализацию алгоритма построения (рисунок 2), который заключается в пошаговом выполнении действий на базе условий, исходящих из второй и третей аксиом [2].

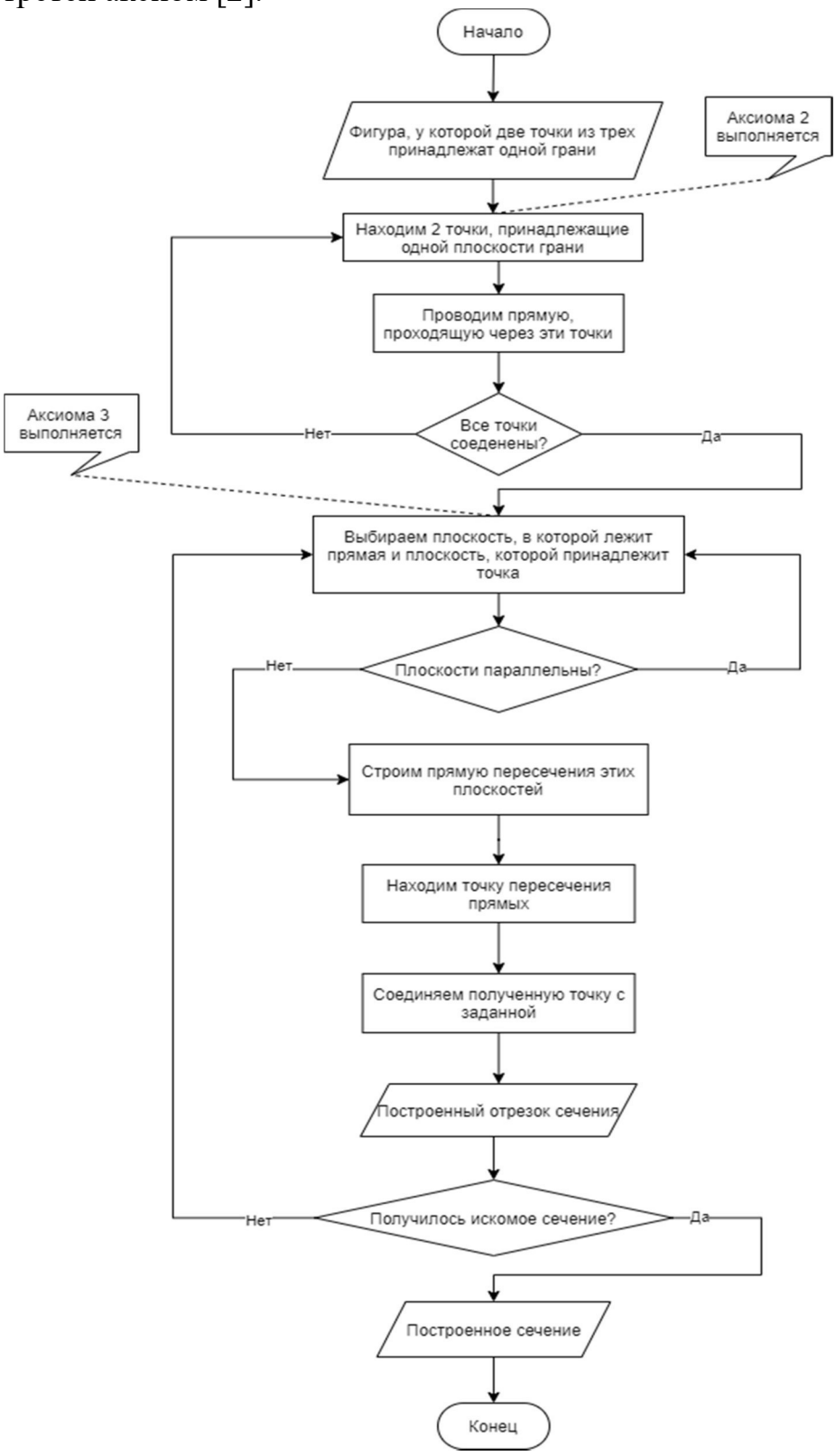


Рисунок 2 – Алгоритм построения сечения многогранников плоскостью

Результатом алгоритма является замкнутая линия, которая является искомым сечением.

3. Практическое применение алгоритма

В данном разделе статьи представлена реализация алгоритма на примерах задач (рисунок 3).

Задание. Постройте сечения, проходящие через точки K, L, M [1].

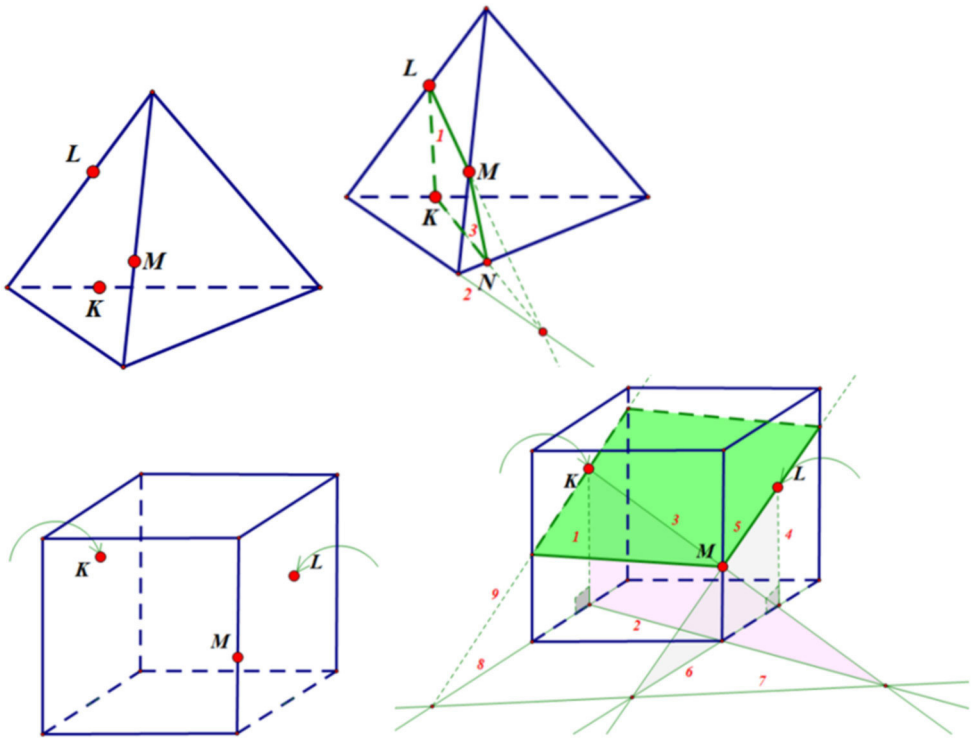


Рисунок 3 – Примеры решений задания

Рядом с каждой дополнительной прямой указан ее порядковый номер при построении сечения. Прямые пронумерованы в порядке их построения. На рисунке 3 можно увидеть, что многогранники представлены разными видами, и это не препятствует выполнению алгоритма.

Вывод. Был проведен разбор алгоритма построения, приведены примеры его использования. Данная методика предельно ясна и понятна, что не составит труда ее понять студенту и быстро освоить педагогу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 класс. Задачник. Углубленный уровень. – 2014. –С.127-154.
2. Малова И.Е., Горохова С.К. и др. Теория и методика обучения математике в средней школе. - 2009. - С. 304-440.
3. Атанасян Л.С. Геометрия 10-11 класс. - 2010. - С. 185-202.

УДК 372.851

РОЛЬ ФИНАНСОВОЙ ГРАМОТНОСТИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

С.О. Оборотова
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина
e-mail: *oborotova.swetlana94@mail.ru*

В статье рассмотрено понятие финансовой грамотности школьников. Охарактеризованы этапы введения финансовой грамотности у обучающихся 5-11 классов на уроках математики. Описаны результаты исследования студентов и преподавателей по вопросам финансовой грамотности.

Ключевые слова: математика, финансовая грамотность, математические практико-ориентированные задачи.

«Финансовая грамотность – это комплекс знаний, навыков и установок в области финансовых активностей человека, которые ведут к улучшению благосостояния и повышению качества жизни. Перед каждым человеком рано или поздно встает вопрос о том, как грамотно распоряжаться своими финансами, а также преумножить свое материальное состояние. В этом случае помогают не только экономические знания, но и математические» [1].

«Математика играет особую роль в экономическом образовании, так как решение практико-ориентированных финансовых задач позволяет адаптировать теоретические основы школьного курса математики, связанные с финансовой грамотностью» [2].

Решение финансовых задач способствует экономическому образованию обучающихся, поэтому такие задачи рекомендовано вводить в предмет математики. «Включение задач по финансовой грамотности в предмет «математика» обусловлено следующими факторами:

- задачи по финансовой грамотности способствуют достижению одной из основных целей математического образования: овладение школьниками системой знаний, умений и навыков, необходимыми для применения в практической деятельности;
- задачи по финансовой грамотности обладают большим потенциалом для повышения мотивации изучения математики, так как наглядно демонстрируют применение на практике математических знаний;
- вопросы финансовой грамотности органично вписываются в содержание школьного курса математики, потому что рациональное отношение к личным финансам, навыки грамотного финансового поведения опираются на математические методы изучения, анализа конкретной финансовой ситуации» [2].

Задачи по финансовой грамотности носят жизненно-обучающий характер. В условиях задач даются определенные повседневные примеры, связанные с финансами, с которыми учащимся еще предстоит встретиться. Происходит освоение учащимися основных вопросов финансовой грамотности в процессе

обсуждения условий такого рода задач и их решения. Практико-ориентированные задачи по математике, по нашему мнению, могут выступать одним из важных средств для повышения финансовой грамотности школьников. В процессе решения задач различными математическими методами, учащиеся находят наиболее эффективные методы решения в результате осмысления и анализа ситуации, что повышает уровень финансовой грамотности.

Разрабатывая общий методический подход в процессу формирования финансовой грамотности на уроках математики на основе анализа опыта других учителей и собственной педагогической деятельности, можно сделать вывод о том, что обучение финансовой грамотности у учащихся необходимо начинать с пятого класса. Данный подход имеет большое количество объяснений. Этому много объяснений. Одним из примеров, может послужить тот факт, что у детей уже в дошкольном возрасте формируются первые представления о финансах. Формирование осознанного экономического представления у детей проявляется в возрасте 10-12 лет. Например, они могут выбрать тариф на мобильную связь, интернет и т. д. [5]. Материал, изучаемый на уроках математики в 5 классах, будет способствовать более рациональному и математически подтвержденному осознанию понятий финансовой грамотности: проценты, долги, кредиты, тарифы и пр. Также стоит помнить, что формировать финансовую грамотность учащихся необходимо не только на уроках, но и на кружках и предметных курсах.

Анализ источников позволяет определить следующие этапы и возможности содержания математического материала при формировании финансовой грамотности.

1) «5 - 6 классы.
   Тема «Понятие процента»: нахождение процента от числа; нахождение числа по данному проценту; нахождение процентного отношения чисел; увеличение (уменьшение) числа на заданный процент.
2) 5 - 7 классы.
   Тема «Решение текстовых задач».
   При решении практико-ориентированных задач школьники учатся планировать бюджет, рассчитывать налоги, сравнивать прибыль от различных видов вложения денег и т.д.
3) 7 - 9 классы.
   Темы «Задачи на повышение и понижение цены», «Простые и сложные проценты»: знания о процентных ставках, кредитах и вкладах.
   Тема «Решение задач на смеси и сплавы» включат задачи на отношение масс и объемов, процентное содержание веществ также способствует созданию «математического фундамента» по понятию процента и их соответствия.
4) 10 - 11 классы.
   Темы курса математического анализа, связанные с заданиями на оптимизацию.

Помимо обычных (стандартных) заданий на определение стоимости или процентов, важно использовать сюжетные задачи, которые должны формировать и развивать познавательные интересы учащихся и иметь обучающий характер. Рекомендовано можно ввести курс по выбору «Решение задач повышенной сложности», включающий задачи с экономическим содержанием в рамках подготовке к ЕГЭ профильного уровня.»[4]. А именно, задачи на бюджет семьи, кредиты, вклады, проценты и т. д. От данного курса по выбору развиваются: личностные качества учащихся (правильно вести диалог с другими людьми; определять критичность своего мышления и т. д.); предметные качества (контроль своих доходов и расходов; чтение графиков, таблиц и диаграмм и т. д.); метапредметные качества (проявление способности использовать различные финансовые инструменты для финансового улучшения семьи и т. д.).

Естественно, что большие блоки финансовых задач представлены в сборниках заданий для подготовки ОГЭ и ЕГЭ по математике.

На наш взгляд, одной из ключевых аудиторий повышения уровня финансовой грамотности в настоящее время являются и студенты. Это может объяснено целым рядом психологических и социальных факторов.

Выполняя исследование, связанное с вопросами формирования финансовой грамотности при обучении математике, в ходе прохождения производственной практики в центре среднего профессионального образования ЕГУ им. И.А. Бунина мы попытались смоделировать организационно-педагогическую модель, которая позволяла бы сформировать необходимые знания, навыки и умения на уроках математики.

Предварительно было проведено анкетирование среди студентов и преподавателей центра СПО по общим вопросам, касающимся знаний о финансовой грамотности.

Полученные результаты приведены в таблице 1 и на рисунке 1.

Таблица 1 – Результаты проведенного анкетирования

Вопрос	**Количество ответивших**	
1. Подчеркните нужный вариант: студент СПО, бакалавр, магистр, преподаватель ВУЗА, учитель школы, другое	студент СПО	25
	бакалавр	0
	магистр	10
	преподаватель ВУЗа	15
	учитель школы	0
	другое	0
2. Вы знаете, что финансовая грамотность?	Да	46
	Нет	4
3. Выберите верное утверждение:	Нет правильного ответа	2
	Все варианты ответов верны	36
	Верно а и в	5
	Верно б и а	7

4. В каких областях применяются знания финансовой грамотности?	Экономика	9
	Математика	8
	В повседневной жизни	30
	Прочее	3
5. Вам приходилось использовать финансовую грамотность в своей жизни?	Да	45
	Нет	5
6. Опишите ситуацию в которой Вам было полезно использование знаний финансовой грамотности.	Покупки в магазинах	20
	Распределение семейного бюджета	28
	Не использовали	2
7. Как вы считаете нужно ли изучать финансовую грамотность на уроках математики в школе?	Да	36
	Нет	14

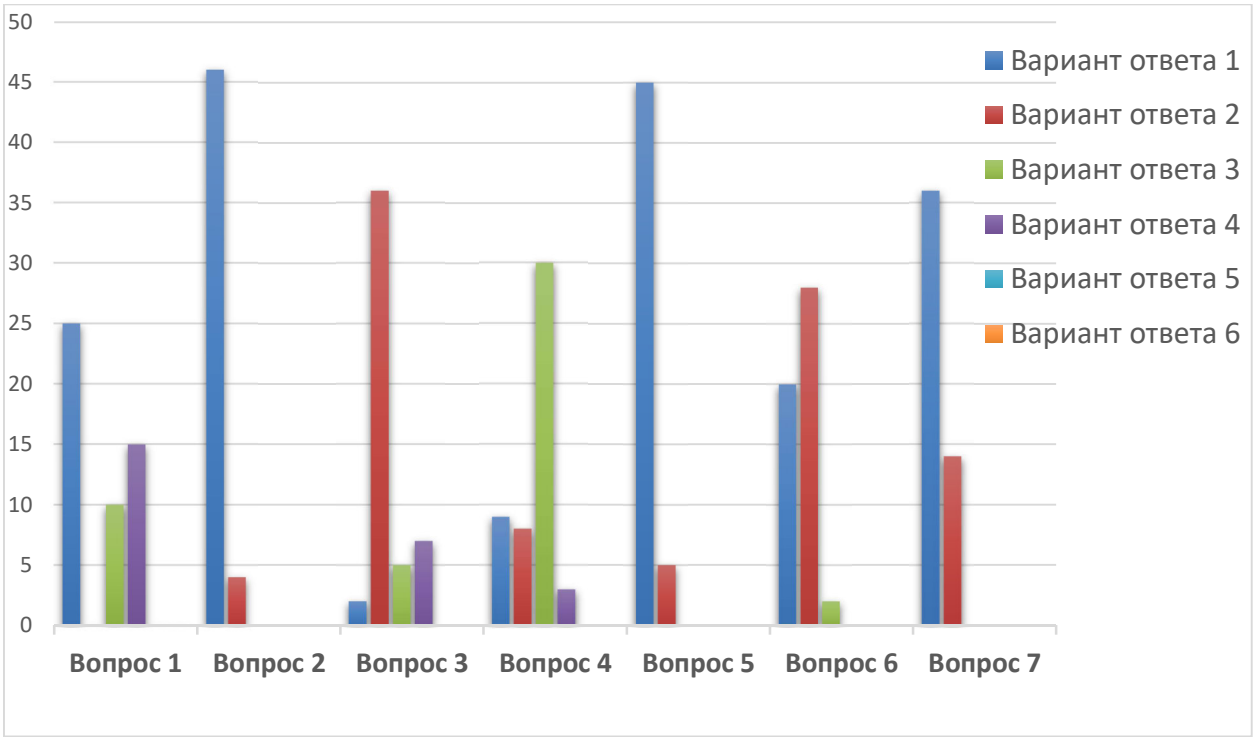


Рисунок 1 – Диаграмма полученных результатов анкетирования

Полученные результаты позволили сделать вывод, о том, что не все студенты и даже преподаватели понимают актуальность знания основ финансовой грамотности и правильного применения. Выбор темы исследования действительно актуален. Так как, процесс решения практико-ориентированных задач по финансовой грамотности дает учащимся возможность применить свои теоретические знания финансовой грамотности на практике, а также развивает творческие способности школьников.

ЛИТЕРАТУРА
1. Бурмистрова Е. Ю. Финансовая грамотность на уроках математики // Образовательная социальная сеть URL: https://ru.wikipedia.org/wiki - (дата обращения: 10.11.2020).
2. Воронов А.А. Финансовая грамотность у студентов // Известия Саратовского университета – 2019. – №2. – С. 19-21.
3. Кондаурова И. К. Педагогические условия формирования финансовой грамотности у учащихся 5 – 11 классов // Карельский научный журнал. – 2018. – №2. – С. 23-25.
4. Сажин А.В. Роль математики в процессе формирования финансовой грамотности // Ежеквартальный рецензируемый реферируемый научный журнал «Вестник АГУ» – 2018. – №2. – С. 76-78.
5. Формирование финансовой грамотности обучающихся // ИНФОУРОК URL: https://infourok.ru/metodicheskaya-razrabotka-formirovanie-finansovoy-gramotnosti-obuchayuschihsya-3724122.html - (дата обращения: 15.11.2020).

УДК 372.851

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДЫ GEOGEBRA ПРИ ОБУЧЕНИИ ГРАФИЧЕСКОМУ СПОСОБУ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

Т.Л. Овсянникова, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *otl19@yandex.ru*

В статье рассматривается возможности использования интерактивной среды GeoGebra при обучении учащихся решению задач с параметрами. Описаны особенности использования пакета GeoGebra при обучении решению задач с параметрами для обеспечения наглядности и эффективности обучения.

Ключевые слова: задачи с параметрами, графический способ решения, GeoGebra.

Уравнение с параметром отличается от других уравнений тем, что вместе с неизвестными величинами в них содержатся параметры, численные значения которых не указаны конкретно, но считаются известными и заданными на некотором числовом множестве [1]. Уравнения с параметрами в школьном курсе математики относят к задачам повышенной трудности, поскольку не существует единого алгоритма их решения. Навыки решения задач с параметрами являются показателями осмысленного владения совокупностью методов, изучаемых в курсе средней школы, и уровня логического мышления. Высокая прогностическая ценность задач с параметром объясняет их использование в выпускных экзаменационных работах по математике. Включённое в варианты заданий ЕГЭ уравнение с параметром (задание 18) оценивается максимально в 4 балла. По данным ФИПИ только около 10% выпускников приступают к решению таких задач [2], и процент их верного решения невысок (в Орловской области в 2019

году задачу 18 решили только 1,4% выпускников, сдававших профильный экзамен [3] – меньше, чем какую-либо другую задачу).

Существует ряд основных подходов к решению уравнений с параметрами. Одним из основных является графический способ. Его суть в том, что в зависимости от условий уравнения (переменной x и параметра a) рассматриваются графики в координатной плоскости Oxy или Oxa. Трудность построения таких графиков обусловлена и тем, что графики зачастую имеют сложный вид, и тем, что, как правило, рассматривается не пара прямых или кривых, а их семейства. В этом случае построенные «от руки» графики не всегда являются точными.

Большинство задач с параметрами требует обстоятельной аналитической работы, высокой точности построений и вычислений. Залогом успешного решения таких задач будет богатый опыт их решения, систематическая тренировка. Для повышения наглядности построения, формирования собственных графических навыков учащихся возможно использование программных средств.

При обучении математике всё чаще используют системы динамической геометрии (СДГ), которые позволяют делать геометрические построения таким образом, что при движении объектов сохраняется их целостность. На рубеже XX и XXI веков было создано не менее двух десятков СДГ, ряд из которых были успешны и популярны (C.a.R., Cinderella, Kig, KSEG, The Geometer's Sketchpad и др.), но к середине 2010-х годов в этой нише программного обеспечения была прекращена поддержка и дальнейшая разработка всех проектов, кроме системы GeoGebra – свободной, кроссплатформенной и многоязычной. Программа GeoGebra может быть успешно использована при дистанционном обучении [4]: включив в ходе видеоконференции демонстрацию экрана, учитель может показывать чёткие точные графики и чертежи изучаемых фигур.

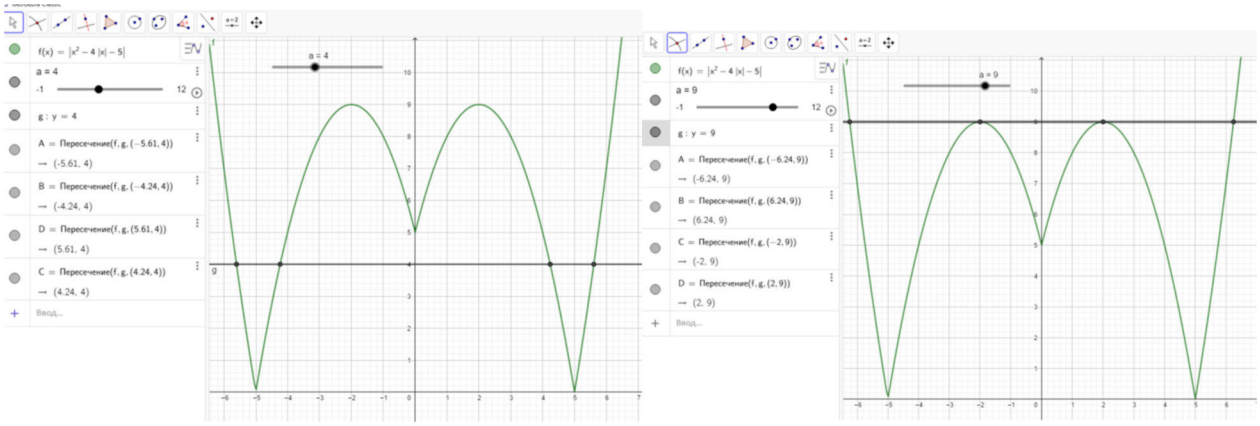
Рассмотрим особенности методики применения системы GeoGebra при обучении решению задач с параметрами. На наш взгляд, обучение школьников графическому решению уравнений с параметрами при помощи СДГ GeoGebra можно условно разделить на два этапа.

Первый этап – начальное усвоение приёмов решения уравнений с параметром. На первом этапе применение СДГ направлено на повышение наглядности. В программе GeoGebra все чертежи «оживают» – перемещаются на координатной плоскости и меняют свой вид в соответствии со значениями, которые принимают параметры. Исследование готовых графиков функций, построенных в программе GeoGebra, позволяет легко проследить области определения и значений функций, точки пересечения их графиков. Ученик не отвлекается на построение графиков, а может сосредоточиться на сути решения, понять принцип решения задач с параметром. При этом решение уравнения с параметром происходит не мысленно, а наглядно, с опорой на точный чертёж.

Задача 1.1. (этап усвоения) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x^2 - 4|x| - 5| = a$ имеет ровно четыре различных решения.

Для решения этой задачи, используя строку ввода, строим график функции $y = |x^2 - 4|x| - 5|$. Затем задаём ползунок $a \in [-1; 12]$ и строим прямую

$y = a$. Анимируя ползунок, можем проследить количество решений уравнения (точек пересечения графиков) в зависимости от значений параметра a. Получаем, что уравнение имеет четыре решения при $a \in (0; 5) \cup \{9\}$ (рисунок 1).



а б

Рисунок 1 – Пример графического исследования функции $y = |x^2 - 4|x| - 5|$
а) четыре решения при $a \in (0; 5)$;
б) четыре решения при $a = 9$.

Решая эту задачу в программе GeoGebra, учащиеся могут проследить за изменением положения прямой относительно графика функции $y = |x^2 - 4|x| - 5|$ и достаточно быстро определить точки их пересечения, а главное, понять суть решения задачи. Однако стоит отметить, что программа не должна заменить решение таких уравнений, а только помочь разобраться с материалом на первых порах. Постепенно у учащихся должен происходить переход к самостоятельному построению таких графиков.

Второй этап – закрепление приёмов решения уравнений с параметром. На втором этапе применение программы GeoGebra направлено на самопроверку, которая очень важна при переходе к самостоятельному решению.

Задача 1.2. (этап закрепления)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy, \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 5a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения [5].

Решение этой задачи можно организовать так. Сначала эту задачу ученик решает аналитически, а затем проверяет графически при помощи программы GeoGebra.

Аналитическое решение. Первое уравнение системы можно разложить на множители, решив его, например, как квадратное относительно переменной y. Получим: $(y - 2x)\left(y - \frac{1}{2}x\right) = 0$. Таким образом, это уравнение равносильно совокупности двух линейных уравнений: $\begin{cases} y = 2x, \\ y = \frac{1}{2}x. \end{cases}$

Второе уравнение при $a = 0$ имеет вид: $x^2 + y^2 = 0$. Это равенство возможно только при $y = x = 0$. При этом исходная система имеет единственное решение и не удовлетворяет условию задачи.

При $a \neq 0$ исходная система будет иметь два решения, если каждая из систем $\begin{cases} y = 2x, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 5a^4 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 5a^4 \end{cases}$ будет иметь единственное решение. Эти системы сводятся к решению следующих квадратных уравнений $5x^2 - 6ax + 2a^2 - 5a^4 = 0$ и $5x^2 - 12ax + 8a^2 - 20a^4 = 0$. Каждое из них будет иметь единственное решение при $a = \pm 0{,}2$, когда дискриминант обращается в ноль.

Проверку решения можно осуществить графически. При этом следует ожидать от ученика примерно следующих рассуждений.

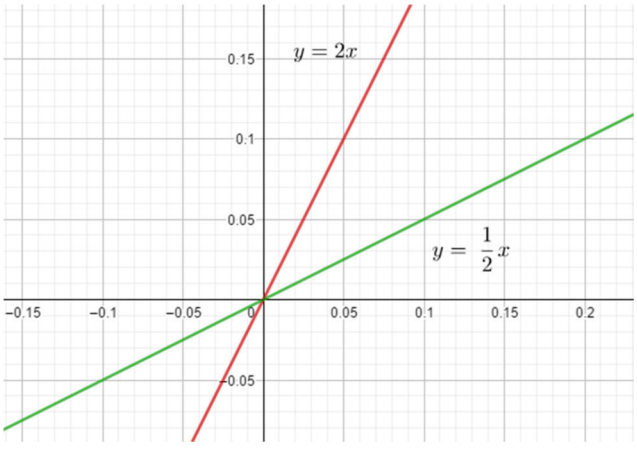
а) Первое уравнение можно представить как совокупность двух уравнений вида $y = kx + b$. Значит, на плоскости они задают две прямые. Их угловые коэффициенты не равны, поэтому прямые пересекаются. В каждом из уравнений свободный член $b = 0$, тогда прямые проходят через начало координат. Построим эти прямые в программе GeoGebra (рисунок 2а).

б) Уравнение $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 5a^4$ задаёт семейство окружностей с центром A(a; a) и радиусом $\sqrt{5}a^2$. Зададим ползунок ***a*** и окружность с соответствующими центром и радиусом (рисунок 2б).

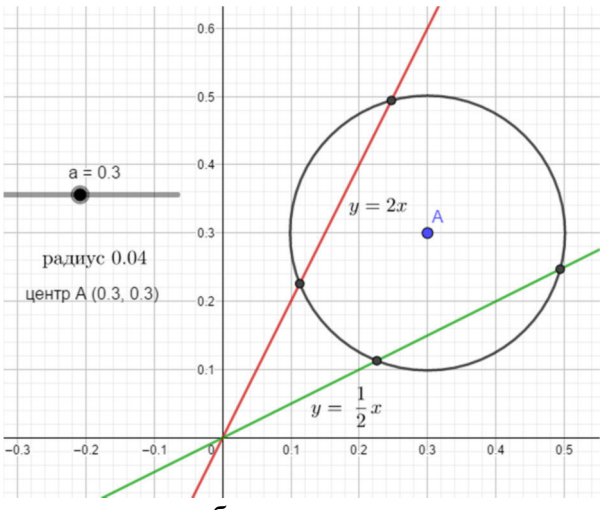
в) Условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда окружность касается каждой из прямых. Это возможно при $a = 0{,}2$ (окружность расположена в первой четверти) и, поскольку чертёж симметричен относительно начала координат, при $a = -0{,}2$ (окружность расположена в третьей четверти) (рисунок 2в).

г) Можем проследить, что при $a = 0$ окружность вырождается в точку, решение системы единственное (рисунок 2г).

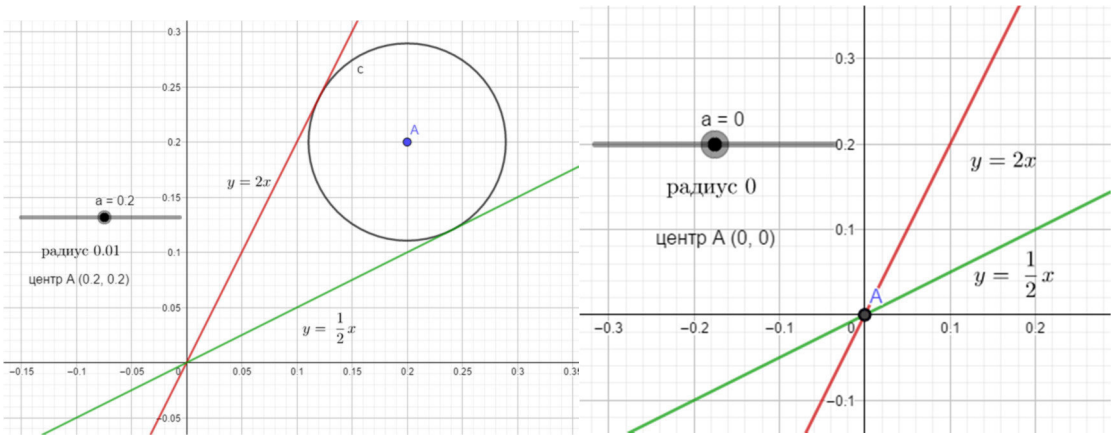
д) Таким образом, мы убедились, что система имеет два решения при $a = \pm 0{,}2$.



а



б



в г

Рисунок 2 – Графическое исследование пересечения
пары пересекающихся прямых и окружности
а) пара пересекающихся прямых;
б) пара пересекающихся прямых пересекает окружность;
в) пара пересекающихся прямых, касающихся окружности
г) единственное решение

Такой подход к формированию навыков решения уравнений с параметрами имеет неоспоримое преимущество в быстроте и осознанности. Он позволяет осуществлять быструю проверку выдвигаемых гипотез, а затем с помощью вычислений и обоснованных рассуждений получить доказательство. Применение программы GeoGebra при решении уравнений с параметрами позволяет формировать у обучающихся навыки исследовательской деятельности, делая реальным самостоятельный поиск решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожухов С.К. Уравнения и неравенства с параметром. – Орёл, 2013 – URL: https://nsportal.ru/sites/default/files/2019/02/07/zadachi_s_parametrom.pdf
2. Ященко И.В., Высоцкий И.Р., Семёнов А.В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года по математике. – М.: ФИПИ, 2019. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-rekomendatsii-dlya-uchiteley-podgotovlennye-na-osnove-analiza-tipichnyh-oshibok-uchastnikov-ege-2019-goda-po-matematike
3. Методический анализ результатов государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования Орловской области в 2019 году по профильной математике – URL: http://www.orcoko.ru/wp-content/uploads/2020/05/Методический-анализ-ГИА-11-по-математике-2019.pdf
4 Овсянникова Т.Л. Использование программы GeoGebra при обучении геометрии будущих учителей математики // Мир педагогики и психологии, 2018 №11 (28) – URL: https://scipress.ru/pedagogy/articles/ispolzovanie-programmy-geogebra-pri-obuchenii-geometrii-budushhikh-uchitelej-matematiki.html
5. Задание 18 № 509584 // СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ: Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня. – URL: https://ege.sdamgia.ru/test?filter=all&category_id=266

УДК 512.5

ИЗОМОРФИЗМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР: ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

И. Н. Попов, к.ф.-м.н., доц.
Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: *PopovIvanNik@yandex.ru*

Целью работы является демонстрация использования изоморфизма алгебраических структур в решении задач. В работе приводятся возможные решение задач с использованием изоморфизма алгебраических и без его использования. Показывается приемущество решения с использованием изоморфизма.

Ключевые слова: алгебраическая структура, изоморфизм, Python.

Решение задач в алгебраической структуре может быть затруднено не только из-за скудости свойств операций, заданных в структуре, (например, в полугруппе не предполагается коммутативность операции), но и сложностью их вычислений. Один из способов — переход к структуре, изоморфной данной, в которой задачи имеют более простые решения. Однако, не во всех случаях следует ожидать простоты решения задач в структуре, изоморфной данной, но, возможно, что вычисление операций в ней могут быть более алгоритмичны или решение задачи в ней в дальнейшем сведется к известной задаче [7] (например, к решению систем линейных уравнений, решение которых может быть реализовано с помощью компьютерных программ, в частности, с использованием библиотек для подключения к Python [4]).

Изоморфизм алгебраических структур — это биективное отображение структур, которое сохраняет операции и отношения, заданных в структурах. Изоморфные структуры могут состоять из элементов разной природы (числовой, матричной, функциональной и так далее), но свойства аналогичных операций и отношений в этих структурах одни и те же.

Доказать изоморфизм алгебраических структур (полугрупп, групп, колец и так далее [1, 2, 3]) можно предъявлением конкретного биективного отображения, задающего связь алгебраических структур, или исходя из «единственности» алгебраической структуры, определенной аксиоматически [5, 6, 8].

Целью статьи является демонстрация на примерах использования изоморфизма алгебраических структур для решения задач (вычислений, решения уравнений).

Пример 1. Пусть n — натуральное число и $I = \{1; 2; \ldots; n\}$. Множество всех отображений из множества I в само себя обозначим D_n. Определим композицию отображений $a, b \in D_n$ правилом: $(a \circ b)(x) = b(a(x))$ для $x \in I$.

Множество всех матриц размерности $n \times n$ с элементами 0 и 1, в каждой строке которой есть ровна одна 1, обозначим MD_n.

Изоморфизм φ групп $(D_n; \circ)$ и $(MD_n; \cdot)$ строится следующим образом.

Элемент a из множества D_n записывается в виде матрицы:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, a(i) = a_i \in I, i \in \{1; 2; \dots; n\}.$$

Тогда $\varphi(a) = A$ — матрица из группы MD_n, в которой в i-й строке 1 находится в a_i-м столбце для всех $i \in \{1; 2; \dots; n\}$.

Рассмотрим пример. Решим уравнение $a \circ x \circ b = x \circ a$ в группе D_4, где

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи в самой алгебраической структуре

В группе D_n решение данного уравнения может быть следующим. Так как $a \circ x \circ b = x \circ a$, то

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_3 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{1; 2; 3; 4\}$. Общий объем решения задачи методом полного перебора равен $4^4 = 256$.

Анализируя правую часть равенства, получаем, что x_1, x_2, x_3, x_4 не могут равняться 1 и 4. Анализируя левую часть равенства, получаем, что x_1 и x_3 не могут равняться 3. Остаются варианты для набора $x_1x_2x_3x_4$: 2222, 2223, 2322 и 2323. Проверкой получаем, что все эти варианты подходят, тем самым получили 4 решения уравнения $a \circ x \circ b = x \circ a$.

Решение задачи с использованием изоморфизма

Переход от действий с отображениями из группы D_n к действиям с матрицами позволяет свести решения задач в группе D_n к решению задач с матрицами с обычным их умножением.

Используя изоморфизм φ, уравнение $a \circ x \circ b = x \circ a$ переводится в матричное уравнение в группе MD_4:

$$A \cdot X \cdot B = X \cdot A, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $X = (x_{ij})$ — матрица из группы MD_4. Умножая матрицы и приравнивая соответствующие элементы, получаем систему линейных уравнений от 16 перемен-

ных $x_{11}, \ldots, x_{44}$, решая которую получаем вид матрицы X:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{42}+x_{43} & 0 & 0 \\ 0 & x_{32}-x_{23} & x_{23} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что в матрице X в каждой строке должна быть ровна одна 1 и элементами этой матрицы являются только 0 и 1, то $x_{32} = 1$ и

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{42}+x_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 1-x_{23} & x_{23} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

В итоге получаем 4 решения:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда решениями уравнения $a \circ x = x \circ b$ в группе D_4 являются отображения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что решение системы линейных уравнений можно провести с использованием соответствующего программного обеспечения.

Пример 2. Система натуральных чисел N с отношением $'$ и выделенным в ней элементом 1 определяется через аксиомы Пиано:

1) $(\forall x \in N)(x' \neq 1)$;

2) $(\forall x, y \in N)(x' = y' \to x = y)$;

3) $(\forall x \in N)(\exists y \in N)(y = x') \wedge (\forall x, y, z \in N)((y = x' \wedge z = x') \to y = z)$;

4) $(\forall A \subseteq N)((1 \in A \wedge (\forall x \in A)(x' \in A)) \to A = N)$.

Сложение и умножение натуральных чисел определяются аксиомами:

$$(\forall x, y \in N)(x + 1 = x' \wedge x + y' = (x + y)');$$

$$(\forall x, y \in N)(x \cdot 1 = x \wedge x \cdot y' = x \cdot y + x).$$

Алгебраическая структура $(N; 1; '; +; \cdot)$ является полукольцом натуральных чисел, которое определено «единственным» образом, то есть любая алгебраическая структура, удовлетворяющая указанным аксиомам, изоморфна полукольцу натуральных чисел.

Рассмотрим пример. На множестве целых чисел Z определим отношение $^\vee$ следующим образом: для любого $a \in Z$

$$a^\vee = \begin{cases} 1-a, & a \leq 0; \\ -a, & a > 0. \end{cases}$$

Алгебраическая структура $(Z;0;^{\vee})$ обладает свойствами, которые заложены в аксиомах системы натуральных чисел $(N;1;';+;\cdot)$, и система $(Z;0;^{\vee};\oplus;\odot)$ изоморфна системе натуральных чисел. При этом, если $\varphi : N \to Z$ — изоморфизм полуколец, то

$$\varphi(1) = 0, \qquad (\forall x \in N)(\varphi(x') = (\varphi(x))^{\vee}),$$

$$(\forall x, y \in N)(\varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y) \wedge \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)).$$

Рассмотрим пример. Вычислим $3 \oplus (-3)$ в полукольце $(Z;0;^{\vee};\oplus;\odot)$.

Решение задачи в самой алгебраической структуре

Решение в полукольце $(Z;0;^{\vee};\oplus;\odot)$ можно предложить следующее. Так как аксиомы сложения в данном случае имеют вид:

$$(\forall a, b \in Z)(a \oplus 0 = a^{\vee} \wedge a \oplus b^{\vee} = (a \oplus b)^{\vee}),$$

то

$$3 \oplus (-3) = 3 \oplus 3^{\vee} = (3 \oplus 3)^{\vee} = (3 \oplus (-2)^{\vee})^{\vee} = (3 \oplus (-2))^{\vee\vee} =$$
$$= (3 \oplus 2^{\vee})^{\vee\vee} = (3 \oplus 2)^{\vee\vee\vee} = (3 \oplus (-1)^{\vee})^{\vee\vee\vee} = (3 \oplus (-1))^{\vee\vee\vee\vee} = (3 \oplus 1^{\vee})^{\vee\vee\vee\vee} =$$
$$= (3 \oplus 1)^{\vee\vee\vee\vee\vee} = (3 \oplus 0^{\vee})^{\vee\vee\vee\vee\vee} = (3 \oplus 0)^{\vee\vee\vee\vee\vee\vee} = (3^{\vee})^{\vee\vee\vee\vee\vee\vee} = ((-3)^{\vee})^{\vee\vee\vee\vee\vee} =$$
$$= (4^{\vee})^{\vee\vee\vee\vee} = ((-4)^{\vee})^{\vee\vee\vee} = (5^{\vee})^{\vee\vee} = ((-5)^{\vee})^{\vee} = 6^{\vee} = -6.$$

Итак, $3 \oplus (-3) = -6$ в полукольце $(Z;0;^{\vee};\oplus;\odot)$.

Решение задачи с использованием изоморфизма

Рассмотрим вычисление с использованием изоморфизма полуколец $(N;1;';+;\cdot)$ и $(Z;0;^{\vee};\oplus;\odot)$. Изоморфизм φ между N и Z можно представить графически:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	5	−5	6	−6	7	−7	...

Тогда

$$3 \oplus (-3) = \varphi(6) \oplus \varphi(7) = \varphi(6+7) = \varphi(13) = -6,$$

то есть $3 \oplus (-3) = -6$ в алгебраической структуре $(Z;0;^{\vee};\oplus;\odot)$. Сравнивая решения без использования изоморфизма и с использованием изоморфизма, получаем, что использование изоморфизма упрощает решение задачи.

Рассмотрим пример. Решением уравнение $(-2) \odot x = 5$ в полукольце $(Z;0;^{\vee};\oplus;\odot)$. Аксиома умножения в полукольце Z имеет вид:

$$(\forall a, b \in Z)(a \odot 0 = a \wedge a \odot b^{\vee} = a \odot b \oplus a).$$

Решение задачи в самой алгебраической структуре

Решение может быть следующим.

1) Пусть $x = 0$. Тогда $(-2) \odot 0 = -2 \neq 5$, и $x = 0$ — не решение.

2) Пусть $x \neq 0$. Тогда найдется $y \in Z$, что $y^{\vee} = x$. Отсюда

$$(-2) \odot y^{\vee} = 5, (-2) \odot y \oplus (-2) = (-4)^{\vee}, (-2) \odot y \oplus 2^{\vee} = (-4)^{\vee},$$
$$((-2) \odot y \oplus 2)^{\vee} = (-4)^{\vee}, (-2) \odot y \oplus 2 = -4, (-2) \odot y \oplus (-1)^{\vee} = 4^{\vee},$$
$$((-2) \odot y \oplus (-1))^{\vee} = 4^{\vee}, (-2) \odot y \oplus (-1) = 4, (-2) \odot y \oplus 1^{\vee} = (-3)^{\vee},$$
$$((-2) \odot y \oplus 1)^{\vee} = (-3)^{\vee}, (-2) \odot y \oplus 1 = (-3), (-2) \odot y \oplus 0^{\vee} = 3^{\vee},$$
$$((-2) \odot y \oplus 0)^{\vee} = 3^{\vee}, (-2) \odot y \oplus 0 = 3, ((-2) \odot y)^{\vee} = (-2)^{\vee},$$
$$(-2) \odot y = -2, (-2) \odot y = (-2) \odot 0, y = 0.$$

В последнем переходе используется закон сокращения для умножения.

Так как $x = y^{\vee}$, то $x = 0^{\vee} = 1$.

Решение задачи с использованием изоморфизма

Решение уравнения $(-2) \odot x = 5$ можно свести к следующему уравнению с использованием изоморфизма. Так как $\varphi(5) = -2$ и $\varphi(10) = 5$, то решаем уравнение $5 \cdot t = 10$ в полукольце N. Получаем: $5 \cdot t = 5 \cdot 2$ и $t = 2$. Так как $\varphi(2) = 1$, то $x = 1$.

Пример 3. Множество целых чисел Z со сложением и умножением является коммутативным кольцом с единицей. Как и полукольцо натуральных чисел $(N; +; \cdot)$, кольцо целых чисел $(Z; +; \cdot)$ определяется аксиоматически. И любая алгебраическая система с двумя алгебраическими операциями, обладающая свойствами аксиом кольца целых чисел, является кольцом, изоморфным кольцу целых чисел.

Рассмотрим алгебраическую структуру $(N^2/\sim; \oplus; \odot)$, определенную следующим образом. На множестве N^2 определяется отношение эквивалентности $\sim$ тем способом, что $(a; b) \sim (c; d)$ тогда и только тогда, когда $a + d = b + c$ для всех $(a; b), (c; d) \in N^2$, и $N^2/\sim$ — фактор множество множества N^2 по отношению эквивалентности $\sim$. Операции сложение и умножение на множестве $N^2/\sim$ определяются равенствами:

$$\overline{(a; b)} \oplus \overline{(c; d)} = \overline{(a + c; b + d)}, \qquad \overline{(a; b)} \odot \overline{(c; d)} = \overline{(ac + bd; ad + bc)}$$

для всех классов эквивалентности $\overline{(a; b)}, \overline{(c; d)} \in N^2/\sim$.

Алгебра $(N^2/\sim; \oplus; \odot)$ удовлетворяет всем аксиомам кольца целых чисел и поэтому эта алгебра изоморфна кольцу целых чисел $(Z; +; \cdot)$. Изоморфизм $\varphi : N^2/\sim \to Z$ задается следующим образом: $\varphi(\overline{(a; b)}) = a - b$.

Рассмотрим пример. В кольце $(N^2/\sim; \oplus; \odot)$ решим уравнение

$$\overline{(4; 3)} \odot \overline{(x; y)}^2 \oplus \overline{(3; 4)} \odot \overline{(x; y)} \oplus \overline{(2; 8)} = \overline{(5; 5)}.$$

Решение задачи в самой алгебраической структуре

В кольце $(N^2/\sim; \oplus; \odot)$ решение уравнения может быть следующим:

$$\overline{(4; 3)} \odot \overline{(x^2 + y^2; 2xy)} \oplus \overline{(3x + 4y; 3y + 4x)} \oplus \overline{(2; 8)} = \overline{(5; 5)},$$

$$\overline{(4x^2+4y^2+6xy;8xy+3x^2+3y^2)} \oplus \overline{(3x+4y+2;3y+4x+8)} = \overline{(5;5)},$$
$$\overline{(4x^2+4y^2+6xy+3x+4y+2;8xy+3x^2+3y^2+3y+4x+8)} = \overline{(5;5)},$$
$$4x^2+4y^2+6xy+3x+4y+2+5 = 8xy+3x^2+3y^2+3y+4x+8+5,$$
$$x^2+y^2+y = 2xy+x+6.$$

Уравнение $x^2+y^2+y = 2xy+x+6$ — это уравнение в полукольце натуральных чисел. По теореме о трихотомии получаем, что

$$y = x \quad \vee \quad y = x+u, u \in N \quad \vee \quad x = y+v, v \in N.$$

1) $y = x$.

$$x^2+x^2+x = 2x^2+x+6, \quad 2x^2+x = (2x^2+x)+6.$$

Последнее равенство не выполняется, так как в полукольце натуральных чисел сумма не равняется своему согласию.

2) $y = x+u$.

$$x^2+x^2+2xu+u^2+x+u = 2x^2+2xu+x+6, \quad u^2+u = 6.$$

Решением последнего уравнения является $u = 2$, значит, $x = y+2$. Решение уравнения $u^2+u = 6$, используя теорему о трихотомии, сводится к разбору случаем: $u = 2, u = 2+s, 2 = u+t$, где $s, t \in N$.

3) $x = y+v$.

$$y^2+2yv+v^2+y^2+y = 2y^2+2yv+y+v+6, \quad v^2 = v+6.$$

Решением последнего уравнения является $v = 3$, значит, $x = y+3$. Решение уравнения $v^2 = v+6$, используя теорему о трихотомии, сводится к разбору случаем: $v = 3, v = 3+s, 3 = v+t$, где $s, t \in N$.

Итак, $y = x+2$ или $x = y+3$, отсюда

$$\overline{(x;y)} = \overline{(x;x+2)} = \overline{(x+1;x+3)} = \overline{(1;3)},$$
$$\overline{(x;y)} = \overline{(y+3;y)} = \overline{(y+4;y+1)} = \overline{(4;1)},$$

то есть решениями уравнения являются классы $\overline{(1;3)}$ и $\overline{(4;1)}$.

Решение задачи с использованием изоморфизма

Рассмотрим решение уравнения с использованием изоморфизма. Подействовав на правую и левую части уравнения изоморфизмом φ, получаем уравнение в кольце целых чисел Z:

$$(4-3)\cdot t^2+(3-4)\cdot t+(2-8) = 5-5, \qquad t^2-t-6 = 0.$$

Решениями являются $t_1 = -2$ и $t_2 = 3$. Так как числа -2 и 3 представляются в виде разности натуральных чисел, в частности, как $-2 = 1-3$, $3 = 4-1$

и $\varphi(\overline{(1;3)}) = -2$, $\varphi(\overline{(4;1)}) = 3$, то решениями исходного уравнения в кольце $(N^2/\sim; \oplus; \odot)$ являются классы $\overline{(1;3)}$ и $\overline{(4;1)}$.

В заключение отметим, что в статье показано то, что использование изоморфизма алгебраических структур может приводить к кардинальному упрощению решений ряда задач (вычислений, решений уравнений), которые формулируются на языке тех или иных алгебраических структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Введение в теорию групп. М.: Наука. — 1980. — 144 с.
2. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.. Основы теории групп. М.: Наука. — 1972. — 240 с.
3. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литер. — 1962. — 396 с.
4. Лутц М. Изучаем Python. СПб.: Символ-Плюс. — 2011. — 1280 с.
5. Нечаев В. И. Числовые системы. М.: Просвещение. — 1975. — 199 с.
6. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. М.: Изд-во МАИ. — 1992. — 240 с.
7. Попов И. Н. Матричные уравнения первой степени // Постулат. — 2019. — №1. — С. 1-14. URL: http://e-postulat.ru/ index.php/Postulat/article/view/2385/2426
8. Феферман Ф. Числовые системы. Основания алгебры и анализа. М.: Наука. — 1971. — 440 с.

УДК 378.147:004.9

ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВИДЕОПРОИЗВОДСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ НА ВОВЛЕЧЕННОСТЬ СТУДЕНТОВ В ОНЛАЙН-ОБУЧЕНИЕ

Е.А. Рогозянская, к.э.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *e_a_roggy@mail.ru*
Н.П. Еремеева, к.э.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *1sept@mail.ru*
Е.В. Закалкина, к.э.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *zakalkin@mail.ru*

В настоящее время процесс образования претерпевает существенные изменения в виду очевидной необходимости более широкого использования информационно-коммуникационных технологий на всех этапах обучения. Переход от форм принятых в традиционном обучении к более гибким и мобильным осуществляется за счет внедрения в учебный процесс онлайн-курсов, которые университеты создают и размещают на образовательных платформах.

Ключевые слова: онлайн-курс, дистанционное обучение, образовательные платформы, медиаконтект.

На современном этапе одним из ключевых факторов, влияющих на развитие общества в целом, является процесс всеобъемлющей цифровизации.

Существенное влияние этот фактор оказывает и на образование посредством внедрения в учебный процесс информационных продуктов, средств и технологий, совершенствующих педагогические процессы. Благодаря цифровым технологиям возникают и развиваются новые формы и виды обучения, а, следовательно, и новые формы взаимодействия участников образовательного процесса.

Следует отметить, что одним из влиятельных факторов модернизации современной системы образования является быстрое вхождение мультимедиа-контента в образовательную структуру МООК (Массовых открытых онлайн-курсов).

Именно информационно-коммуникационные технологии наиболее стремительно развиваются и являют собой особенно перспективные направления в информационном обществе.

На сегодняшний день медиаконтент является ключевым фактором стратегий повышения привлекательности вуза. Университеты используют его для демонстрации экспертности в современном образовательном пространстве.

90% информации, которую получает наш мозг, доходит до сознания именно по зрительному каналу. Изображение воспринимается человеком в 60 тыс. раз быстрее, чем любой текст.

Как показывают исследования, вопрос о том, какой формат медиаконтента приводит или приведет в будущем к получению обучающимися наилучших результатов, является одной из самых насущных их проблем.

Как показывает практика, более короткие видео гораздо более привлекательны для студентов. Поэтому следует обратить внимание на подготовку, производство и планирование занятия, сегментировав видео на части порядка 6-8 минут. Если рассказ получится длинным, более 10-12 минут, то, возможно, стоит сразу сказать в первом видео, что будет две части, и дальше постараться разбить видеоролик не столько напополам, сколько по логике изложения.

Видео, которые перемежают живую речь преподавателя со слайдами, иногда лучше использовать, чем только слайды. Этот вопрос решается в постпродакшн-редактировании, чтобы в нужный момент отобразить лицо преподавателя в видео-лекции.

Очень важно отслеживать введение и использование понятий на курсе. Это значит, что все новые термины должны объясняться, для них должны быть даны определения в явном виде. И очень желательно, эти определения выносить на слайд. Далее в курсе стоит эти новые понятия не просто использовать, но и напоминать обучающимся, что же они значат.

Аналогично, если преподаватель ссылается на какие-то теоремы, концепции, то следует напоминать обучающимся еще раз об их сути.

Не всегда целесообразно вкладывать деньги в крупнобюджетные студийные постановки. Иногда съемки с использованием минималистических художественно-оформительских средств компенсируют это личностными характеристиками автора в кадре.

В связи с важностью видеоконтента в МООК, видео-производственный персонал, методисты и авторы курсов прилагают значительные усилия для производства видеороликов, которые часто бывают сняты в самых разных стилях.

Использование экрана компьютера или планшета в реальном времени для определенных тем может быть боле целесообразным, чем слайды или показы кода. Введение движения и непрерывного визуального потока в учебные пособия, а также импровизированной речи, позволяет удерживать внимание обучающегося. Даже высококачественные заранее записанные аудиторные лекции выглядят не так привлекательно, чем когда их же нарезают для МООК. В этом случае необходимо создавать структуру каждого видеоролика заново, чтобы он выглядел завершенным. Для этого надо включать в один ролик только одну тему, идею или концепцию. Если же авторы настаивают на записи аудиторных лекций, они все равно должны планировать их с учетом формата МООК. А это значит, что преподавателю следует говорить довольно быстро и , что не менее важно, с большим энтузиазмом.

Так же при разработке медиаконтента важно понимать, что разные студенты по-разному воспринимают лекционные, теоретические, и обучающие видеоролики. Для лекций важен эффект первого просмотра, а для материалов типа «мастер-класс» необходимо добавить поддержку перематывания и скимминга.

Важно принять решение по визуальному оформлению видеоролика. Необходимо помнить, что главная идея – создать именно образовательные видео.

Это значит, что всякое визуальное решение должно помогать усвоению учебного материала, а не отвлекать внимание слушателей. Стоит помнить про цели и задачи создания курса, а также про потенциальную целевую аудиторию курса.

Четкая структурированность представляемого материала особенно важна.

Если излагаемый материал представляет собой, сложный учебный контент большую роль играет конкретное видеопроизводственное решение лекции. Здесь необходимо обратить внимание на поддержание интереса обучающихся к рассматриваемому материалу.

Практика показывает, что обучающимся удобнее работать с видеолекциями, которые начинаются с содержания. Это позволяет легко ориентировать в материале для повторения отдельных его разделов.

Проектируя структуру медиаконтента, следует вынести на слайд помимо заголовка также и главные тезисы, как для концентрации внимания обучающихся на текущем материале, так и для удобства ориентации в видеолекции при ее последующем повторном изучении.

Всегда следует соотносить содержимое слайда с тем, что параллельно ему рассказывает преподаватель. В этой связи важно, чтобы внимание обучающихся пропорционально распределялось между видео и аудиорядом. Если каждый слайд транслирует только одну ключевую идею, то он будет гармонично иллюстрировать выступление лектора. Так же следует поступить и с многоступенчатыми иллюстрациями или схематическими изображениями. Лучше отдельными блоками выносить их на отдельные слайды.

Вопросы проработки концептуальной схемы медиаконтента носят, безусловно, личный характер, и в каждом отдельном случае разработчик онлайн-курса сам принимает решение о том, как будет простроено содержимое видеолекции.

Существует множество эффективно работающих концепций на различных успешно развивающихся обучающих платформах. Выбор конкретной концепции абсолютно зависит от излагаемого материала. Однако, опыт разработчиков показывает, что следует избегать размытых и пространных формулировок, стремиться к четким определениям и иллюстрировать материал подробными примерами.

Для того, чтобы удерживать внимание обучающихся, как отмечалось ранее, необходимо придерживаться небольшой длительности видеолекции, в ходе просмотра которой целесообразно предусмотреть элементы поддержания интереса к излагаемому материалу, а также переключения внимания обучающихся, для достижения наилучшего результата.

Каждая видеолекция должна иметь логическое завершение, которое позволить обучающимся еще раз резюмировать все увиденное и услышанное. В заключении необходимо сконцентрироваться на том, что именно обучающиеся должны вынести из предлагаемых материалов, какие ключевые моменты и основные мысли стоит выделить для окончательного закрепления.

Все видеолекции онлайн-курса следует строить как части единого целого. Обучающийся должен понимать к чему приведут сделанные выводы и заключения, что, в свою очередь, позволит логично перейти к следующему занятию. Как тематический план всего курса, так и представление основной идеи следующей видеолекции, позволит концентрировать внимание аудитории на конечной цели онлайн-курса.

Безусловно важно размещать и субтитры к видеолекиям, для того чтобы учесть интересы всей аудитории, а именно той ее части, которой необходимо закреплять материал повторным прочтением.

Следует отметить что, обучающийся не получит определенные компетенции в выбранной области при немотивированном и обыденном просмотре медиаконтента.

Главная идея, в целом, состоит в том что, современные МООК — это не просто набор видеолекций. Онлайн-курс представляет собой медиаконтентную совокупность элементов, приводящих к успешному завершению курса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Требования и рекомендации по разработке онлайн-курсов, публикуемых на национальной платформе открытого образования. URL: https://cdn.openedu.ru/f1367c/Требования_и_рекомендации_по_разработке_онлайн_курсов.pdf
2. Закалкина Е.В., Рогозянская Е.А., Еремеева Н.П. Создание онлайн-курса по вычислительной математике. Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2020. № 1 (86). С. 178-181
3. Фомина, А. С. Онлайн-обучение в высшем учебном заведении: методики, контент, технологии / А. С. Фомина // Общество: социология, психология, педагогика. — 2016. — № 1. — С. 101–106.

УДК 37

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ» СТУДЕНТАМ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Е.С. Саватеева, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *katrin_s@inboxl.ru*
В.Н. Русакова, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *v.n.rusakova@yandex.ru*

В статье рассматривается возможность использования задач практического содержания для лучшего усвоения учащимися понятия корреляционный анализ. В качестве материала для исследований предлагается взять некоторые антропометрические данные студентов группы. Для подтверждения выполненных в тетради учебных расчетов рекомендуется использовать электронные таблицы (MS Excel, Google Таблицы).

Ключевые слова: корреляция, коэффициент корреляции Пирсона, частная корреляция, формирование общепрофессиональных и профессиональных компетенций, эксперимент, пакет анализа, электронная таблица.

Математическая статистика – признанный универсальный инструмент обработки данных в точных, гуманитарных науках и естествознании. Дисциплина «Основы математической обработки информации и информационные технологии» включена в большинство образовательных программ Института естественных наук и биологии ОГУ им. И.С. Тургенева, в частности, изучается на направлении Биология, профили: биомедицина, зоология, химия и др.; участвует в формировании ряда общепрофессиональных и профессиональных компетенций. Очевидно, развитие компетенций будет проходить эффективнее, если обучать студентов на примерах, связанных с биологией, зоологией, естествознанием в целом.

Математическая статистика дает множество возможностей для обработки экспериментальных данных: от самых элементарных (составление вариационного ряда, вычисление его числовых характеристик, построение гистограммы, кумуляты, полигона частот или относительных частот) до методов, требующих устойчивых знаний высшей математики (факторный анализ, дисперсионный анализ). Один из важных инструментов, применяемых в различных исследованиях, – это корреляция. Рассмотрим более подробно его применение в биологии. Тем более, что термин "корреляция" первый раз использовал палеонтолог француз Ж. Кювье, для формулирования закона о связи фрагментов органов животных, согласно которому можно восстановит облик животного по его частям. Заслуга другого ученого – англичанина статистика и биолога Ф. Гальтона – в том, что он в 1886 году начал использовать понятие «корреляция» в математической статистике.[2] Его ученик, математик и биолог К. Пирсон, вывел формулу для расчета коэффициента корреляции, используемую по настоящее время и носящую его имя.

Корреляционным называют исследование, проводимое для подтверждения или опровержения гипотезы о наличии связи между несколькими (двумя и более) переменными.

В учебных заданиях коэффициент корреляции Пирсона рассматривается часто и на весьма разнообразных наборах данных. Однако, в реальных исследованиях данные, собранные в ходе эксперимента, могут, как дополнять, так и искажать исследование. Речь идет о ложных корреляциях, представляющих отдельную проблему корреляционного анализа. Такие связи объясняются третьей переменной, влияющей на две другие, например, скорее всего, будет выявлена тесная связь между длиной сосулек и числом травм граждан. Однако, причиной такой связи будет третье событие – соответствующие погодные условия. Коэффициент корреляции не является доказательством наличия или отсутствия связи, тем более, что его значимость принято подтверждать, проверяя соответствующую гипотезу. Убедиться в правильности полученного коэффициента, а, соответственно, сделанных на его основе выводов можно:

- проверив гипотезу о значимости коэффициента;
- проверив наличие взаимосвязей с третьей переменной;
- проверив объективность сбора данных.

Для выяснения того, насколько хорошо освоен теоретический материал по математической статистике, было проведено тестирование. На первом практическом занятии осуществлен срез знаний по определениям, понятиям, формулам, рассмотренным на лекциях, и аналогичное тестирование повторили на последнем занятии. В качестве контрольной группы выступили студенты этого же направления обучения, профиль зоология. Задачи, решаемые на занятиях в этой группе (в частности, по теме корреляционный анализ), не были наполнены практическим содержанием, а представлялись в виде отвлеченных наборов чисел. Формулировались они следующим образом: «даны две выборки...», «имеется набор данных...», «даны значения независимой и зависимой переменных...».

Сформулируем гипотезу: для более основательного формирования компетенций изучение инструментов математической статистики лучше всего проводить на практических примерах, взятых из соответствующей профессиональной области. В качестве эксперимента студентам было предложено провести ряд опытов: написать свой вес и рост и выявить связь, вычислив коэффициент корреляции Пирсону. Измерить пульс и найти корреляционную связь между ростом и частотой сердечных сокращений*, затем попрыгать или подвигаться и посчитать пульс после физической активности, и попытаться найти связь между весом и пульсом. Используя полученные данные, можно на этом же занятии проверить гипотезу о равенстве средних для зависимых выборок. Такие задания были предложены студентам направления биология, профиль биомедицина.

На условиях анонимности студенты заполнили таблицу данными своего роста и веса, затем провели вычисление коэффициента корреляции Пирсона,

* В норме пульс и частота сердечных сокращений равны.

считая распределения нормальными (в учебных целях), «вручную», чтобы лучше усвоить изученную формулу. Для проверки правильности вычислений были использованы ноутбук с программой MS Excel, смартфон с установленным приложением Excel (рисунок 1), а также сервис Google Таблицы [1]. Значимость коэффициента корреляции проверим, используя функцию СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х для вычисления критического значения и формулу $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ для вычисления статистики t. Поскольку $t > t_{кр}$, коэффициент корреляции между ростом и весом значимо отличается от нуля.

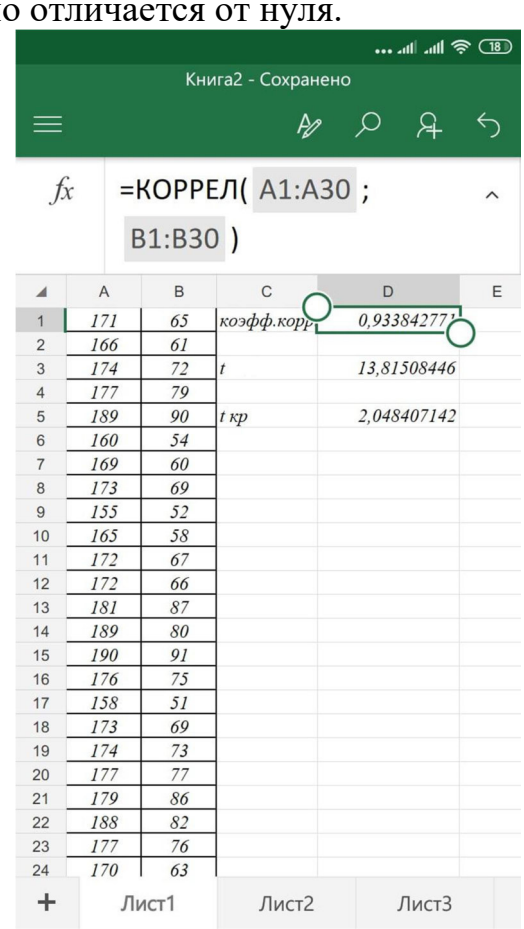


Рисунок 1 – Использование приложения Excel для вычисления коэффициента корреляции Пирсона и его значимости

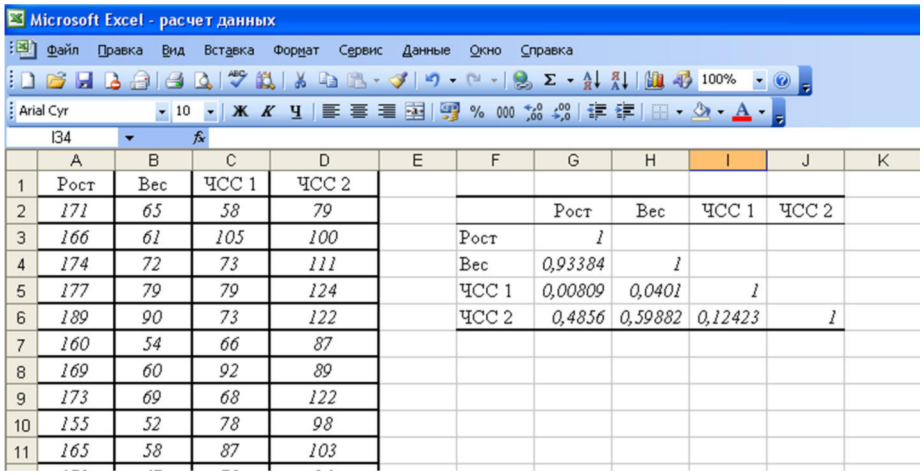
Продолжили заполнение таблицы в тетради, измерив пульс (столбец ЧСС1). Сделать это было не сложно, так как у многих студентов имеются фитнес-браслеты, а уж секундомер на смартфоне есть у всех. Затем, в течение минуты они приседали (т.к., в аудитории другую физическую нагрузку трудно осуществить). Снова измерили частоту сердечных сокращений (ЧСС2). Таким образом, получили таблицу 1.

Таблица 1 – Антропометрические данные студентов группы

Рост	Вес	ЧСС1	ЧСС2	Рост	Вес	ЧСС1	ЧСС2
171	*65*	*58*	*79*	*176*	*75*	*73*	*87*
166	*61*	*105*	*100*	*158*	*51*	*79*	*85*
174	*72*	*73*	*111*	*173*	*69*	*73*	*83*

177	*79*	*79*	*124*	*174*	*73*	*66*	*74*
189	*90*	*73*	*122*	*177*	*77*	*92*	*88*
160	*54*	*66*	*87*	*179*	*86*	*68*	*132*
169	*60*	*92*	*89*	*188*	*82*	*78*	*112*
173	*69*	*68*	*122*	*177*	*76*	*87*	*106*
155	*52*	*78*	*98*	*170*	*63*	*78*	*99*
165	*58*	*87*	*103*	*169*	*60*	*78*	*87*
172	*67*	*78*	*96*	*170*	*63*	*80*	*88*
172	*66*	*78*	*94*	*168*	*59*	*69*	*67*
181	*87*	*80*	*105*	*171*	*64*	*92*	*70*
189	*80*	*55*	*99*	*173*	*69*	*68*	*95*
190	*91*	*112*	*120*	*178*	*70*	*78*	*101*

Используя инструмент Корреляция из пакета Microsoft Office Excel (рисунок 2), нашли коэффициенты связи между Ростом и ЧСС1, Весом и ЧСС2, ЧСС1 и ЧСС2 и др. Проанализировали полученные данные: оказалось, что между весом и частотой сердечных сокращений есть прямая уверенная связь, рост влияет меньше на усиление пульса в процессе физической нагрузки, а вот между весом и пульсом в состоянии покоя, связи практически нет.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Рост	Вес	ЧСС 1	ЧСС 2							
2	171	65	58	79			Рост	Вес	ЧСС 1	ЧСС 2	
3	166	61	105	100		Рост	1				
4	174	72	73	111		Вес	0,93384	1			
5	177	79	79	124		ЧСС 1	0,00809	0,0401	1		
6	189	90	73	122		ЧСС 2	0,4856	0,59882	0,12423	1	
7	160	54	66	87							
8	169	60	92	89							
9	173	69	68	122							
10	155	52	78	98							
11	165	58	87	103							

Рисунок 2 - Вычисление корреляции

Отметим, что разрешить в какой-то степени сомнения о верности выводов можно, лишь проведя дополнительное исследование и вычислив частные корреляции, фиксируя одну из величин. Такое исследование студентам, можно предложить провести самостоятельно.

Цель нашего эксперимента – наилучшее усвоение методов математической статистики при использовании заданий, наполненных практическим содержанием, – достигнута, экспериментальная группа показала лучший результат по сравнению с контрольной. Следует отметить, что результат контрольной группы не был провальным, однако в ходе устного собеседования студенты первой группы показали более уверенное владение понятийным аппаратом статистики. Таким образом, мы показали, что включение в курс математической обработки информации и информационных технологий задач, имеющих практическое со-

держание, близкое к области знаний, изучаемой студентами, позволяет мотивировать студентов к более тщательному изучению дисциплины, повышая уровень усвоения материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов А. Ю., Мхитарян В. С., Шишов В. Ф. Статистический анализ в MS Excel. // М.: Инфра-М, –2013. – 320 с.
2. Шишлянникова Л.М. Применение корреляционного анализа в психологии // Психологическая наука и образование. – 2009. – Выпуск №1. – С. 98-105.

УДК 378

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ БАКАЛАВРОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

Г.А. Симоновская, к.пед.н., доц.
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина
e-mail: *Simonovskaj_g@mail.ru*

При разработке основной образовательной профессиональной программы по подготовке специалистов экономических направлений каждое учебное заведение руководствуется Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (квалификация (степень) "бакалавр") [2], учитывая профессиональные стандарты, соответствующие профессиональной деятельности выпускников.

Образовательный стандарт выдвигает основные требования, которые необходимо выполнить при реализации образовательной программы. В данном документе представлены типы задач профессиональной деятельности, к решению которых готовят выпускников-бакалавров: аналитический, научно-исследовательский, организационно-управленческий, педагогический, финансовый, расчетно-экономический. [2]

В разделе «Требования к результатам освоения программы бакалавриата» федеральный стандарт требует: «3.1. В результате освоения программы бакалавриата у выпускника должны быть сформированы компетенции, установленные программой бакалавриата.» [2]

Среди универсальных, общепрофессиональных нет компетенций, которые описывали бы уровень математической подготовки выпускника. Но стандарт указывает, что выпускник должен уметь решать профессиональные задачи используя современные технологии, методы и т.д.

И для успешного решения профессиональных задач специалисту необходимо иметь не только прочную математическую базу, но и понимать сущность математических понятий, знать и умело использовать математический аппарат в профессиональной сфере. При решении профессиональных задач в экономической сфере широко используются математические понятия: линейной алгебры, аналитической геометрии, матричного анализа, дифференциального и инте-

грального исчисления функций одной и нескольких переменных и т.д. Именно эти разделы являются основными модулями при изучении элементов высшей математики студентами экономических направлений.

Необходимость такого широкого круга знаний у бакалавра направления подготовки 38.03.01 Экономика можно подтвердить наличием умения решать достаточно сложные задачи профессиональной направленности. Например, при тестировании студентов данного направления по дисциплине «Математика», помимо традиционных заданий, определяющих наличие стандартного (минимального) уровня математических знаний, используются профессионально-ориентированные кейс-задания, где предлагается реальная экономическая ситуация, при решении которой необходимо использовать материал из разных разделов высшей математики, интерпретировать полученные результаты, предложить грамотное решение поставленной проблемы.

Например, при проведении независимой экспертизы, проверки знаний студентов выпускников экономических направлений, по математике при онлайн тестировании были предложены для решения контрольные задания, разбитые на три блока. Третий блок представлял собой кейс-задание и охватывал достаточно обширный круг сведений:

Задание 1.

Зависимость объема выпуска Y от количества используемых трудовых ресурсов L определяется функцией Y=F(L) как

$$\text{У} = F(L) = \begin{cases} 0, & L = 0, \\ a, & L = 1, \\ a + \dfrac{3}{4}F(L-1), & L > 1. \end{cases}$$

Объем выпуска при $L = n$ можно вычислить по формуле

1) $Y(n) = 4a\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$,

2) $Y(n) = a\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$,

3) $Y(n) = \frac{a}{4}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$,

4) $Y(n) = \frac{4a}{3}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

При $a = 12$ объем выпуска не превзойдет величин

1) 48,

2) 49,

3) 47,

4) 46.

Задание 2.

В начальный момент времени стоимость основных фондов равна 20 у.е. и убывает с течением времени вследствие износа оборудования со скоростью

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{24}{(t+2)^2},$$

где $t \geq 0$ - это время, измеряется в годах.

Изменение стоимости основных фондов можно представить в виде

1) $K(t) = \frac{24}{t+2} + 8$,

2) $K(t) = \frac{24}{t+2} + 32$,

3) $K(t) = -\frac{24}{t+2} + 8$,

4) $K(t) = -\frac{48}{t+2} + 26$.

Установите соответствие между моментом времени t и стоимостью основных фондов.

1. $t = 1$	1) 16
2. $t = 2$	2) 14
3. $t = 4$	3) 12
	4) 2
	5) 4

Стоимость основных фондов уменьшиться в два раза за _____ полных лет.

При решении таких задач, как правило, предполагается использование дифференциального и интегрального исчисления функций нескольких переменных, знание методов приближенных вычислений, владение математическими методами в целом. При решении отдельных заданий, например, студенту необходимо уметь решать задачи на нахождение условного экстремума функции трех независимых переменных, самостоятельно из условия задания составить уравнение связи. Для успешного выполнения такого задания студент должен свободно владеть дифференциальным и интегральным исчислением функции одной переменной, двух переменных и уметь интерпретировать знания на функции трех и более переменных, а это возможно добиться только при серьезной теоретической (в начале) и практической математической подготовке студента.

Каждое учебное заведение использует все возможности по организации учебного процесса, позволяющего подготовить высоко конкурентного специалиста в области экономики. Это использование современных образовательных технологий, внедрение разнообразных форм обучения с использованием электронного обучения, дистанционных образовательных технологий, разработка индивидуальных учебных планов, но при таких широких возможностях особое внимание уделяется содержательному наполнению основной профессиональной образовательной программы, в том числе и учебному плану.

Следует отметить, что образовательный стандарт универсален и в тексте не найти списка дисциплин обязательных для изучения. При пристальном изучении образовательного стандарта по экономическим направлениям, можно констатировать, что студент должен меть решать профессиональные задачи, используя все необходимые средства и знания (в том числе и математические). Но какова широта и глубина математических знаний, каков уровень умения их использовать, интерпретировать к реальным профессиональным ситуациям – стандарт не указывает.

Проведенный анализ основных профессиональных образовательных программ по экономическим направлениям, реализуемым в различных учебных заведениях высшего образования, показывает, что математическая составляющая приблизительно одинаковая: место в учебном процессе, тематика крупных разделов, количество часов отводимых на теоретическое и практическое изучение математических дисциплин. Но широта и глубина рассматриваемых вопросов различна. И в первую очередь это обусловлено количеством зачетных единиц отводимых на изучение дисциплин математической подготовки бакалавра.

Решают проблему освоения математики в полном объеме при минимальном объеме часов отводимых на изучение по-разному. Не оспоримым является поиск путей повышения качества подготовки специалистов с использованием, прежде всего информационных и коммуникационных технологий. [1, с.16] Но, при моделировании экономических процессов, разработки различных экономических прогнозов, использование компьютерных программных продуктов, математических пакетов и т.п., должно быть осознанным и необходимым. А это возможно лишь при наличии прочных теоретических и практических знаниях в основных областях высшей математики. А, следовательно, снова встает вопрос о содержании дисциплины математика и изучение, прежде всего именно предмета фундаментальных основ высшей математики, а лишь потом применение полученных знаний в профессиональной деятельности. Здесь встает вопрос и о балансе между теоретической и практической составляющих математической подготовки студента. Данные вопросы широко обсуждаются долгое время, но единый подход к решению данной проблемы еще не определен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кручинина Г.А., Купряшина Л.А. Особенности подготовки бакалавров экономических специальностей в рамках компетентностного подхода.// Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: инновации в образовании, 2013, № 2 (1), с. 16–23. -http://www.unn.ru/pages/issues/vestnik/99999999_West_2013_2(1)/2.pdf (дата обращения: 10.11.2020).
2. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика. - https://www.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc&base=LAW&n=361147&dst=1000000001 %2C0#07752061037202271 (дата обращения: 10.11.2020).
3. Федеральный закон "Об образовании в Российской Федерации" N 273-ФЗ от 29 декабря 2012 года с изменениями 2018 года. http://zakon-ob-obrazovanii.ru/ (дата обращения: 10.11.2020).

УДК 378

ПОТЕНЦИАЛ ТЕОРЕМЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛЫ БАЙЕСА ДЛЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩЕГО БАКАЛАВРА МЕНЕДЖМЕНТА

А.В. Синчуков, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова»
e-mail: *AVSinchukov@gmail.com*

В рамках статьи раскрыта роль теоремы Байеса в профессиональной подготовке бакалавра менеджмента в экономическом университете. Обоснована необходимость реализации прикладного усиления вероятностной подготовки бакалавра менеджмента. Особое внимание уделяется организации учебно-познавательной деятельности будущих менеджеров с новыми профессионально ориентированными задачами на принятие управленческих решений в условиях риска и неопределенности, связанными с теоремой полной вероятности и формулой Байеса.

Ключевые слова: формула Байеса, условная вероятность, теория вероятностей, прикладное усиление, бакалавр менеджмента, принятие решений.

Сложные и противоречивые изменения, происходящие в социально-экономической сфере, требуют изменения качества профессиональной подготовки будущего бакалавра менеджмента. Не вызывает сомнения, что будущий бакалавр менеджмента должен владеть различными методами принятия решений, относящихся ко всем уровням управления. В содержание профессиональной подготовки бакалавра менеджмента в Российском экономическом университете включены разноуровневые методы принятия решений, базирующиеся на методах теории вероятностей, методах проверки гипотез, методах статистического контроля качества и прогнозирования, методах теории игр и теории риска. Особую роль в повышении качества профессиональной подготовки бакалавра менеджмента играет учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика», направленная на развитие вероятностных представлений будущих управленцев. Большое значение в повышении качества принимаемых решений на различных уровнях управления играет *идея комплексного применения различных методов*, изложенная в публикациях [2, 3, 13]. Среди методических исследований по развитию профессиональной компетентности будущего бакалавра менеджмента средствами математических дисциплин укажем публикации [1, 8, 9]. Авторами предложены направления для обновления содержания математической подготовки экономиста и менеджера, выделены типовые задачи, связанные с будущей профессиональной деятельностью и методы их решения, некоторые типовые задачи адаптированы для использования в рамках летних образовательных программ абитуриентов.

Теорема Байеса является центральной теоремой элементарной теории вероятностей, включенной в практику математической подготовки бакалавра менеджмента в экономическом университете. Благодаря теореме Байеса появляется возможность расширить число прикладных, сюжетных задач теории

вероятностей и познакомить студентов с прикладными возможностями теории вероятностей в анализе ситуаций, не предполагающих детерминированную трактовку. В рамках учебной темы «Формула полной вероятности. Теорема Байеса» будущие менеджеры знакомятся *с механизмом нахождения вероятности (возможности) наступления определенного события при условии, что имеет место другое событие*. Содержательной интерпретацией типовой задачи данной учебной темы, имеющей профессиональное значение для будущего менеджера, может служить определение вероятности успешной реализации случайно выбранного проекта из имеющегося множества проекта при условии его частичного инвестирования. При этом важно акцентировать внимание студентов на то, что теорема Байеса позволяет оценить вероятность случайного события, принимая во внимание как имеющуюся информацию, так и результаты новых наблюдений (результаты дополнительного исследования состояния рынка проектов, возможных вариантов недофинансирования проектов и т.д.).

Практика преподавания учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов бакалавриата менеджмента свидетельствует о том, в условиях сокращения часов на аудиторную нагрузку не представляется возможным вывод формулы. Мы считаем, что вывод формулы Байеса, названной в честь её автора Томаса Байеса, на основе аксиом теории вероятностей возможен в рамках самостоятельной внеаудиторной работы студентов. Для успешного восприятия студентами формулы полной вероятности и формулы Байеса у них должны присутствовать сформированные представления об условной вероятности. Отметим, что под условной вероятностью события принято понимать вероятность наступления одного события при условии, что другое событие уже произошло.

Например, основным событием A может выступать продажа всего товара фермером. Предшествовать этому событие могут следующие события:

H_1 – «Существенный рост спроса на производимую продукцию при отсутствии предложений со стороны конкурентов»;

H_2 – «Существенное падение спроса на производимую продукцию активизация деятельности конкурентов, предлагающих аналогичную продукцию на рынок сбыта».

В таком случае вероятности $P(A|H_1), P(A|H_2)$ приобретают конкретный содержательный смысл – с какой вероятностью весь товар будет реализован при условии H_1, при условии H_2.

Для повышения мотивации студентов [11] следует отметить, что, аппарат условных вероятностей может быть применен *для анализа проектов* (в частности, оценки ожидаемой доходности проекта при условии его недостаточного финансирования, при условии его адекватного финансирования и при условии его избыточного финансирования). Кроме того, аппарат условных вероятностей играет важную роль в решении различных задач теории

принятия решений, в рамках которых *присутствуют статистически взаимозависимые события*.

В качестве содержательно-методической особенности теоремы Байеса отметим необходимость выполнения трудоемких вычислений, требующих определенной вычислительной культуры студентов. Учитывая, что распространение байесовских оценок в практике принятия управленческих решений связано с внедрением информационных технологий, рациональной стратегией при решении задач на теорему Байеса является перенос вычислительного процесса в выбранное преподавателем инструментальное средство или использование калькуляторов.

Рассмотрим еще одну содержательную ситуацию, приводящую к формуле полной вероятности и формуле Байеса. Пусть A – событие «Проект принес ожидаемую прибыль», тогда $\overline{A}$ – «Проект не принес ожидаемую прибыль».

Возможным множеством гипотез является:

H_1 – «Недостаточное финансирование проекта»;

H_2 – «Адекватное финансирование проекта»;

H_3 – «Избыточное финансирование проекта».

Исходя из прошлого опыта финансирования проектов известно, что 50 % проектов получают недостаточное финансирование, 40 % проектов получают адекватное финансирование, 10 % проектов получают избыточное финансирование. Другим вариантом представления информации может быть следующий. Из ста анализируемых проектов, получивших недостаточное финансирование и реализованных в 2019 году было 79 проектов, не принесших инвестору ожидаемую прибыль. Из пятидесяти анализируемых проектов, получивших адекватное финансирование и реализованных в 2019 году было 12 проектов, не принесших инвестору ожидаемую прибыль. Из десяти анализируемых проектов, получивших избыточное финансирование и реализованных в 2019 году был 1 проект, не принесших инвестору ожидаемую прибыль.

После описания ситуации обратимся к возможным вопросам. Случайно выбранный проект, реализованный в 2020 году, принес инвестору ожидаемую прибыль. С какой вероятностью он имел адекватное финансирование? С какой вероятностью он имел недостаточное финансирование? С какой вероятностью он имел избыточное финансирование? Сколько процентов проектов, реализуемых в 2020 году не принесут инвестору ожидаемую прибыль? Сколько процентов проектов, реализуемых в 2020 году не принесут инвестору ожидаемую прибыль по причине недостаточного финансирования?

Вероятность основного события $P(A)$ определяется в соответствии с соотношением $P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)+P(A|H_3)P(H_3)$.

Остановимся на вопросе, сформулированном ранее: «Сколько процентов проектов, реализуемых в 2020 году не принесут инвестору ожидаемую прибыль по причине недостаточного финансирования?» В соответствии с введенными

обозначениями требуется определить условную вероятность $P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)}$.

Рекомендации по применению формулы Байеса для решения различных задач теории принятия решений содержатся в публикации [4, 5, 14]. Авторам удалось рассмотреть формулу Байеса и другие законы теории вероятностей с позиций полезности в практике принятия решений при анализе социально-экономических ситуаций.

Вероятностные методы и модели играют важную роль в профессиональной подготовке будущего менеджера. Включение элементов теории вероятностей способствует более глубокому пониманию специфики мышления и поведения людей, влияющему на количественную оценку и прогнозирование социально-экономических событий. На востребованность методов теории вероятностей в задачах принятия решений в условиях неопределенности и риска указывается в статьях [10, 12, 15]. Однако важно понимать, что применение вероятностных методов и моделей не гарантирует отсутствие ошибок в управленческой деятельности, в том числе и значительных. В частности, ошибки при принятии управленческих решений зачастую обусловлены определенными психологическим закономерностями лица принимающего решение (ЛПР), склонностью его к риску. Решение достаточного количества задач на формулу полной вероятности и теорему Байеса в процессе изучения математических дисциплин будущими бакалаврами менеджмента позволяет формировать у них представления об оптимальном поведении ЛПР в условиях неопределённости.

Остановимся на трех аспектах, имеющих существенное значение для прикладного усиления преподавания учебной темы «Формула полной вероятности. Теорема Байеса». Первый аспект связан *с механизмами оценки вероятности случайного события* или значения случайной величины при принятии управленческого решения. Естественно, в большинстве случаев не используются сложные процедуры оценки вероятностей значений случайных величин. В практике принятия решений они сводятся к более простым операциям на основе профессионального опыта, интуиции и эвристики, в ряде случаев приводящим к нежелательным ошибкам и последствиям. Таким образом, ошибки при принятии управленческих решений возникают из-за субъективности оценок вероятности случайного события или значения случайной величины руководителем или группой лиц, принимающих решения. Отметим, что применение формулы полной вероятности и теоремы Байеса подразумевает использование правильных оценок вероятности основного случайного события и вероятностей гипотез.

Вторым аспектом является *проблема репрезентативности*, возникающая в процессе уточнения условий, при которых одно событие наступает при условии наступления другого события. Так, в процессе принятия решений часто используются некоторые устоявшиеся конструкции, шаблоны и стереотипы. Заметим, что если не представляется возможность оценки связи между событиями и выстраивания логической последовательности случайных событий, то отсутству-

ют основания для применения формулы Байеса. Например, если устройство состоит из пяти независимо работающих элементов и отказывает в случае отказа по крайней мере одного элемента, то возможно применение формулы Байеса. Однако если не установлена связь между работой устройства и отказом конкретного элемента, т. е. не в полной мере ясно, как поведет себя устройство при отказе родного из элементов, формулу Байеса для анализа данной ситуации применять нельзя. Отметим, что данный пример технического содержания может быть адаптирован для профессиональной подготовки будущего бакалавра менеджмента следующим образом: основное событие – завершение проекта в срок, гипотезы – досрочный выход инвестора из проекта.

Третьим аспектом является *нечувствительность ЛПР к доопытной вероятности* результата реализации события. ЛПР не всегда принимает во внимание частоты (вероятности), в результате чего вероятности гипотез оцениваются неверно. В частности, в условиях полной неопределенности исследователь вынужден предполагать равновозможность (равновероятность) гипотез, что не всегда соответствует социально-экономической действительности. Так, в случае если в магазин поставляется продукция трех фермерских хозяйств, число гипотез равно трем. Однако доопытные вероятности событий «куплен продукт первого фермерского хозяйства», «куплен продукт второго фермерского хозяйства», «куплен продукт третьего фермерского хозяйства» могут быть определены по-разному: $P(H_1)=\frac{1}{3}; P(H_2)=\frac{1}{3}; P(H_3)=\frac{1}{3},$ в случае равновозможности, $P(H_1)=\frac{2}{10}; P(H_2)=\frac{3}{10}; P(H_3)=\frac{5}{10}.$

в случае если продукция ранее поставлялась в соотношениях 2 к 3 к 5. Важно обратить внимание студентов, что никто в действительности не может гарантировать, что эти соотношения 2 к 3 к 5 сохранятся и в будущем. Таковые основные аспекты, касающиеся практического применения формулы Байеса. Представленные аспекты показывают, что правильный результат, получаемый на основе формулы Байеса может кардинально отличаться от результата, интуитивно ожидаемого ЛПР.

Таким образом, применение формулы Байеса требует наличия следующей информации: во-первых, должны быть известна доопытные вероятности гипотез, во-вторых должны быть известны или подлежат вычислению условные вероятности (опытные вероятности, исходя из опыта принятия решений, на основе имеющейся информации о закономерностях развития анализируемой экономической ситуации при условии, что сохранится реализуемый в данное время тренд), в-третьих, должны быть известны вероятности наступления основного события при условии реализации каждой изолированной гипотезы, в-четвертых, должна быть известна полная вероятность наступления основного события.

Выводы. Перспективным направлением совершенствования методики обучения теме «Формула Байеса» является поиск путей сочетания традиционных и новых технологий, в том числе информационных технологий,

среди которых особое место занимает база знаний и набор вычислительных алгоритмов *WoframAlpha*. Однако мы считаем, что простого переноса вычислительного процесса в инструментальное средство *WoframAlpha* недостаточно для развития профессиональной компетентности будущего менеджера. Должен быть раскрыт потенциал формулы Байеса для решения задач теории принятия решений, приближенных к будущей профессиональной деятельности менеджера. Особое внимание следует уделять расширению системы задач и упражнений посредством включения практико-ориентированных задач на использование формулы Байеса для выбора оптимальной инвестиционной стратегии, минимизации рисков проектов, оценки качества производимой продукции и т.д. Также можно рекомендовать не ограничиваться дискретным случаем теоремы Байеса, а рассмотреть её непрерывный вариант.

Представленные методические особенности учебной темы «Формула Байеса» учитывают многоаспектные связи управления и экономики с математическими науками, в том числе теорией вероятностей. Реализация прикладного усиления обучения будущих менеджеров элементам теории вероятностей позволяет оценить возможности и результаты управленческих воздействий на социально-экономические системы.

С целью совершенствования профессиональной подготовки менеджера в соответствии с рекомендациями, изложенными в [6], можно рекомендовать формализацию экономических, финансовых, социальных и технологических событий в виде последовательности с выделением нескольких возможных уровней и сценариев развития ситуации. На этом начальном этапе проектируется вероятностная модель управления для принятия оптимального решения. Однако спроектированная вероятностная модель управления требует привлечения статистических данных и уточнения критериев оптимальности для выбора одного или нескольких управленческих воздействий. Последующий этап применения теории вероятностей при принятии управленческих решений подразумевает реализацию вычислительного процесса и формулирование соответствующих выводов. На итоговом этапе использования теории вероятностей при принятии управленческих решений происходит окончательный выбор и обоснование оптимального управленческого решения, оценка последствий и выбор необходимых ресурсов для реализации управленческого решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быканова О. А., Филиппова Н. В. Летняя образовательная программа для мотивированных абитуриентов: шаг в будущее // Азимут научных исследований: педагогика и психология. – 2017. – Т. 6. – № 3 (20). – С. 48-50.
2. Власов Д. А. Методика количественного анализа при принятии решений в различных информационных условиях // Системные технологии. – 2018. – № 4 (29). – С. 18-29.

3. Власов Д. А. Особенности комплексного использования количественных методов в финансовой сфере // Системные технологии. – 2020. – № 1 (34). – С. 133-139.
4. Власов Д. А. Теоретико-игровое моделирование в практике принятия решений // Научные исследования и разработки. Экономика. – 2018. – Т. 6. – № 6. – С. 59-63.
5. Канеман Д., Словик П., Тверски А. Принятие решений в неопределенности: Правила и предубеждения. – М.: Генезис – 2005. – 632 с.
6. Карасев П. А., Чайковская Л. А. Совершенствование программ высшего образования в контексте современных требований рынков образовательных услуг и профессионального сообщества // Экономика и управление: проблемы, решения. –2017. – Т. 3. – № 2. – С. 3-9.
7. Мастяева И. Н., Горемыкина Г. И. Методы оптимальных решений. – М.: Общество с ограниченной ответственностью Издательство "КУРС", 2016. – 384 с.
8. Математика для экономистов. Практикум: учебное пособие для академического бакалавриата /Под общей редакцией О. В. Татарникова. – М.: Издательство Юрайт, 2014. – 285 с.
9. Математика для экономистов. Теория и практика: учебник для академического бакалавриата /Под общей редакцией О. В. Татарникова. – М.: Издательство Юрайт, 2014. – 598 с. 2.
10. Муханов С. А., Муханова А. А. Использование сервиса Wolfram|Alpha при моделировании вероятностных экспериментов // Современное педагогическое образование. – 2019. – № 2. – С. 67-69.
11. Полежаев В. Д., Полежаева Л. Н. Способы и приемы активизации познавательной деятельности при обучении математике // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом ВУЗе. – 2018. – № 6. – С. 218-224.
12. Синчуков А. В. Развитие вероятностных представлений будущих бакалавров экономики // Гуманитарные исследования Центральной России. – 2017. – № 3 (4). – С. 86-93.
13. Фомин Г. П., Карасев П. А. Математика в экономике: 813 задач с комментариями и ответами. Учебное пособие – М.: Общество с ограниченной ответственностью "Издательство "КноРус", 2019. – 368 с.
14. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений / Пер. с англ. под ред. член-корр. РАН И. И. Елисеевой. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 590 с.
15. Tikhomirov N. P., Tikhomirova T. M., Sukiasyan A. G. Risks theory advanced. – М.: Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, 2019. – 112 с.

ЛЕММА ОБ АДДИТИВНОМ СВОЙСТВЕ ОТРЕЗКОВ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

С.К. Соболев, к.ф.-м.н., доц.
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
e-mail: *sergesobolev@mail.ru*
В.Я. Томашпольский, к.ф.-м.н., доц.
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
e-mail: *vtom33@mail.ru*

Рассматриваются аддитивные свойства отрезков числовой прямой, а именно, такие, что если они верны для двух соседних отрезков, то верны и на их объединении. Для таких свойств формулируется и доказывается некая лемма, благодаря которой становятся её простыми следствиями основополагающие теоремы анализа: Бореля, Вейерштрасса и Больцано – Коши, надо только подобрать соответствующее аддитивное свойство отрезков. Материал статьи может быть полезен студентам и преподавателям математических специальностей (направлений).

Ключевые слова: отрезок, аддитивное свойство, непрерывная функция, окрестность.

В математике часто новое понятие появляется, когда в разных явлениях подмечают аналогию, и в конце концов возникает обобщение. Так в математике возникли понятия предела по базе, линейного пространства, линейного оператора и многие другие. Нетрудно заметить, что ряд теорем математического анализа доказываются с помощью процесса дихотомии (деления отрезка пополам) и принципа вложенных отрезков [1, 2]. Прием, применяемый в этих доказательствах, легко обобщается.

Свойство P отрезков числовой прямой назовём аддитивным тогда и только тогда, когда для любых отрезков $[a;b]$ и $[b;c]$ если свойство P верно для этих отрезков, то оно верно и для отрезка $[a;c]$. Примеры аддитивных свойств:

(1) Данная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке,

(2) функция $f(x)$ принимает на концах отрезка значения одного знака.

Примеры неаддитивных свойств:

(3) Данная функция $f(x)$ монотонна на отрезке;

(4) длина отрезка меньше 1.

Основная лемма (об аддитивном свойстве отрезков). Пусть некоторое аддитивное свойство P не верно для какого-то отрезка $[a;b]$. Тогда, найдётся точка $x_0 \in [a;b]$, в каждой окрестности $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ которой найдется отрезок $[c;d] \subset [a;b] \cap U_\varepsilon(x_0)$, для которого свойство P тоже не выполняется.

Доказательство. Обозначим $a_0 = a, b_0 = b$. Пусть c_0 – середина отрезка $[a_0;b_0]$. В силу аддитивности свойства P, хотя бы на одной из половинок $[a_0;c_0]$ или $[c_0;b_0]$ это свойство тоже не верно. Если это на отрезке $[a_0;c_0]$, то положим $a_1 = a_0, b_1 = c_0$. Иначе положим $a_1 = c_0, b_1 = b_0$. В любом случае получаем отрезок $[a_1;b_1] \subset [a_0;b_0]$ вдвое меньшей длины, для которого свойство P тоже не верно. Продолжая и так далее, мы получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков

$$[a_0;b_0] \supset [a_1;b_{11}] \supset [a_2;b_2] \ldots \supset [a_n;b_n] \supset \ldots,$$

длина каждого следующего отрезка вдвое меньше длины предыдущего, и для каждого из них свойство P не верно.

Применяя принцип вложенных отрезков, заключаем, что существует (единственная) точка x_0, принадлежащая всем этим отрезам. Возьмём произвольную ε-окрестность точки x_0. Поскольку длина вложенных отрезков стремится к нулю, найдётся n такое, что длина $[a_n; b_n]$ меньше ε, и тогда $x_0 \in [a_n; b_n] = [c; d] \subset U_\varepsilon(x_0)$. Лемма доказана.

Теперь с помощью этой леммы докажем ряд известных основополагающих теорем математического анализа, каждый раз подбирая нужное аддитивное свойство.

Теорема 1. Каждое бесконечное ограниченное множество A на числовой прямой содержит хотя бы одну предельную точку.

Доказательство. Пусть все числа из A лежат на отрезке $[a; b]$. Возьмём такое свойство P_1: на отрезке лежит конечное число точек из A. Это свойство, очевидно, аддитивное. По условию, для отрезка $[a; b]$ свойство P_1 не верно. По лемме, существует точка $x_0 \in [a; b]$, в каждой окрестности которой найдётся другой отрезок $[c; d]$, для которого свойство P_1 не верно, т. е. отрезок $[c; d]$, а с ним и вся окрестность содержит бесконечное число точек множества A. Это и значит что x_0 – предельная точка множества A. Теорема доказана.

Определение. Открытым покрытием множества A числовой прямой называется семейство $\{V_i \mid i \in I\}$ открытых множеств этой прямой, объединение которых включает множество A: $A \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$. Последнее означает, что для каждого $x \in A$ найдется $i \in I$ такое, что $x \in A_i$. Здесь I – это множество индексов. Если оно конечно, то и само покрытие называется конечным.

Теорема 2. Из всякого покрытия конечного отрезка $[a; b]$ открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Доказательство. Пусть даны отрезок $[a; b]$ и некоторое его открытое покрытие $S = \{V_i \mid i \in I\}$. Предположим противное, т.е. что для отрезка $[a; b]$ не существует конечное подпокрытие покрытия S. Рассмотрим следующее аддитивное свойство P_2: для отрезка в S можно выбрать конечное подпокрытие отрезка. По предположению P_2 не верно для отрезка $[a; b]$. Применив лемму, получим, что существует точка $x_0 \in [a; b]$ в каждой окрестности которой найдется отрезок $[c; d]$, для которого из S нельзя выбрать конечное подпокрытие. Но поскольку найдётся j такое, что $x_0 \in V_j$ и V_j открыто, то существует окрестность $U_\varepsilon(x_0)$, такая что $U_\varepsilon \subseteq V_j$, и по лемме, найдется отрезок $[c; d] \subset U_\varepsilon$, для которого нет конечного подпокрытия, хотя такое покрытие образует одно множество V_j. Противоречие. Теорема доказана.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на нём.

Доказательство. Допустим противное, что непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ не ограничена на нём. Рассмотрим следующее аддитивное свойство P_3: функция $f(x)$ ограничена на отрезке. По допущению, свойство P_3 не выполняется на отрезке $[a;b]$. Применив лемму, получим точку $x_0 \in [a;b]$, в каждой окрестности которой найдется отрезок $[c;d]$, на котором функция $f(x)$ не ограничена. Но это противоречит тому, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и поэтому ограничена на некоторой окрестности этой точки. Теорема доказана.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах значения строго разных знаков ($f(a)\cdot f(b)<0$), то найдется точка $c \in (a;b)$ такая, что $f(c)=0$.

Доказательство. Допустим противное, т.е. что функция $f(x)$ ни в какой точке отрезка $[a;b]$ в ноль не обращается. Рассмотрим следующее свойство P_4, состоящее в том, что данная функция $f(x)$ на концах отрезка принимает ненулевые значения одного знака. Это свойство аддитивно и на отрезке $[a;b]$ не выполняется. Применив Лемму, получим, что существует точка $x_0 \in [a;b]$, в каждой окрестности которой найдется отрезок $[c;d]$, для которого свойство P_4 не верно, т.е. на концах которого $f(x)$ принимает значения противоположных знаков. Но с другой стороны, функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна и отлична от нуля, поэтому в некоторой окрестности этой точки принимает значения только одного знака. Противоречие.

Для понимания доказательств последних двух теорем надо знать локальные свойства функции, непрерывной в точке:
(1) локальная ограниченность функции; (2) локальное знакопостоянство функции, если она не равна нулю в этой точке.

Замечание. Теорема 2 говорит о том, что конечный отрезок компактен. С помощью неё также можно было бы, следуя [1], доказать теоремы 1, 3 и 4 и не прибегая больше к дихотомии.

Вышеизложенные материалы докладывались на методическом семинаре кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М, Курс дифференциального и интегрального исчисления. 8-е изд., – М.: Физматлит, 2007, – 679 с.
2. Зорич В. А. Математический анализ: учебник для вузов – 7-е изд., – М.: Изд-во МЦНМО, 2015, Ч. 1. – 2015. – 564 с.
3. Соболев С.К., Томашпольский В.Я., Методический семинар на кафедре «Высшая математика», Гуманитарный вестник (МГТУ им. Н.Э.Баумана): электронный журнал, 2018. – № 7, http://hmbul.ru/catalog/edu/pedagog/537.html DOI: 10.18698/2306-8477-2018-7-537

К ВОПРОСУ ОБ ИЗУЧЕНИИ ОСНОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЯХ В СООТВЕТСТВИИ С ТРЕБОВАНИЯМИ ФГОС

К.Е. Тарасов
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
e-mail: *tarasov.kirill.orel@gmail.com*

В статье идёт речь об изучении основ теории вероятностей в общеобразовательных учреждениях в соответствии с требованиями ФГОС. Перечислены требования к предметным результатам изучения предметной области «Математика и информатика» во ФГОС основного общего образования (5-9 классы) и ФГОС общего образования (10-11 классы). Сделан вывод о необходимости дополнения содержания школьных учебников математики в вопросах решения задач по теории вероятности. Представлены учебные пособия, позволяющие в полном объёме реализовать рассматриваемые ФГОС.

Ключевые слова: теория вероятностей, школьный курс математики, федеральный государственный образовательный стандарт.

Стандарт среднего общего образования утвержден приказом № 413 Министерства образования и науки РФ от 6 октября 2009 года. В соответствии с требованиями ФГОС общего образования (10-11 классы) изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить «сформированность основ логического, алгоритмического и математического мышления и сформированность умений применять полученные знания при решении различных задач» [3; С.15]. Требования к предметным результатам изучения учебного предмета «Математика: алгебра и начала математического анализа» на базовом уровне включают: «сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин» [3; С.16]. Требования к предметным результатам изучения учебного предмета «Математика: алгебра и начала математического анализа» на углубленном уровне включают: «владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению» [3; С.17].

В соответствии с требованиями ФГОС основного общего образования (5-9 классы), утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 17 декабря 2010 г. № 1897 изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить «осознание значения математики и информатики в повседневной жизни человека; <…> формирование представлений о математике как общечеловеческой культуре, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления» [2; С.12]. Требования к предметным результатам изучения предметной области «Математика и информатика» в соответствии с требованиями ФГОС основного общего образования

включают «овладение простейшими способами представления и анализа статистических данных; формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о простейших вероятностных моделях; развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений» [2; С.13].

В план экзаменационной работы ЕГЭ по математике на профильном уровне входит задание 4, на базовом уровне - задание 10, для их выполнения необходимо уметь строить и исследовать простейшие математические модели.

Изучение ряда учебников математики, входящих в федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, сформированный приказом Министерства просвещения РФ, позволило сделать вывод о том, что в них не в полном объёме даны теоретические сведения и не представлены все виды задач, которые включаются в государственную итоговую аттестацию по математике по основным образовательным программам среднего и основного общего образования в РФ. Нам не удалось найти в учебниках математики работы, направленной на овладение умением решать целый ряд задач, входящих в итоговый экзамен. Среди них, например, следующие задачи: «Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства - яйца высшей категории, а из второго хозяйства - 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства», «В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах».

В 2004 году изданы экспериментальные учебные пособия для учащихся 7-9 и 10-11 классов общеобразовательных учреждений авторов Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко [4; 5]. В книге авторы предлагают свой взгляд на то, каким должен быть школьный курс теории вероятности и математической статистики.

Учебное пособие [4] по основам теории вероятностей и статистики рассчитано на учащихся 7-9 классов общеобразовательных учреждений. Авторы отмечают, что в книге в равной мере уделяется внимание статистике и теории вероятностей и их роли в изучении явлений окружающего мира. В книге осуществляется первичное знакомство учащихся с формами представления и описания данных в статистике, в ней рассказывается о случайных событиях, вероятностях и их свойствах. Изложение теории вероятностей выполнено до понятий о случайных величинах и законе больших чисел. В предисловии к книге сказано, что «теория вероятностей и статистика представлены как естественные

науки, в которых наибольшую ценность представляет сложившаяся система взглядов, выработанные основные понятия и их связи с реальностью» [4; С.4].

Статистическая часть курса отнесена к изучению в седьмом классе. Восьмой и девятый класс отведены для изучения теории вероятностей. В восьмом классе вводятся понятия случайного эксперимента, элементарных событий, событий и их вероятностей, объединения и пересечения событий, формулы сложения и умножения вероятностей, понятие о независимости экспериментов и событий. В эту часть курса включена и небольшая глава о комбинаторике. В девятом классе изучаются случайные величины, их распределения и числовые характеристики – математическое ожидание и дисперсия. В этом же классе изучаются испытания Бернулли – одна из базовых схем теории вероятностей.

В пособии для учащихся 10-11 классов авторы отмечают, что «основная цель – дать читателю средства для разумного и сознательного отношения к случайности» [5; С.3]. Первые две главы посвящены повторению фактов и задач, подробно рассмотренных в учебном пособии для учащихся 7-9 классов. Полностью новая информация представлена в главах «Условная вероятность», «Случайные величины и распределения», «несколько случайных величин», «Независимые случайные величины», «Геометрическое распределение». Особое внимание уделено изучению комбинаторики, испытаниям Бернулли и биномиальному распределению, закону больших чисел, непрерывным случайным величинам, нормальному и показательному распределениям.

В учебном пособии представлен большой перечень по основам теории вероятности, изучение которых позволит учащимся в полном объёме подготовиться к сдаче государственных экзаменов.

Например, в пособии запланировано решение следующих достаточно разнообразных и разноплановых задач: «На столе шесть монет – четыре из них по рублю, а еще две – по пять рублей. Саша, не глядя, забрал со стола какие-то три монеты, а оставшиеся три монеты забрал Володя. Найдите вероятность того, что:

а) обе пятирублевые монеты вместе оказались у одного из мальчиков;

б) обе пятирублевые монеты вместе оказались у Саши;

в) одна пятирублевая монета оказалась у Саши, а вторая – у Володи» [5; С.21].

«В двух книжных магазинах был проведён опрос двух случайных выборок покупателей. В первой выборке было 1520 человек, во второй выборке было 580 человек. В первой выборке 623 покупателя утвердительно ответили на вопрос «Читали ли вы хотя одно произведение писателя П?». Во второй выборке на этот же вопрос утвердительно ответили 217 человек.

Оцените вероятность того, что случайно выбранный покупатель в книжном магазине утвердительно ответит на этот же вопрос, пользуясь:

а) результатами опроса только первой выборки;

б) результатами опроса только второй выборки;

в) результатами, полученными с использованием объединённой выборки.

По вашему мнению, на какое из полученных чисел лучше полагаться при оценке вероятности указанного события?» [5; С.27].

«В люстре пять новых лампочек. Событие А состоит в том, что в течение года:

а) перегорит хотя бы одна из них;

б) перегорят ровно две лампочки;

в) перегорят более трёх лампочек;

г) перегорят меньше четырёх лампочек.

Для каждого из этих событий опишите словами событие $\overline{A}$» [5; С.43].

При изучении основ теории вероятностей очень важно предоставить учащимся возможность проводить обсуждение решаемых задач, высказывать разные мнения и собственные суждения, стараться проводить их обоснование. С этой целью для учащихся целесообразно организовать проведение математического кружка по теории вероятностей. На наш взгляд, заслуживает особого внимания работа одного из авторов указанных выше учебных пособий И.Р. Высоцкого [1]. Это книга о кружках по теории вероятностей, предназначенных для школьников 8-11 классов и студентов, для которых представляет интерес изучение вопросов вероятности. Решение представленных задач стало для нас интересным и увлекательным событием, поскольку в книге представлена удачная группировка материала, система изложения, и что самое важное – содержание задач, которые позволяют рассуждать, мыслить, применять разные способы решения, отвечать на множественные вопросы по заданному условию. Все это позволяет глубоко и вдумчиво подойти к процессу решения задач.

Например, «Докажите, что при последовательных бросаниях монеты рано или поздно с вероятностью 1 выпадет орёл» [5; С.21.].

Решение. Пусть *A* – событие «Рано или поздно выпадет орёл», *B*- событие «В первый раз выпал орёл», тогда событие $\overline{\boldsymbol{B}}$ «В первый раз выпала решка».

Первый способ. Если в первый раз выпал орёл, то событие *A* тем самым наступило: $\boldsymbol{P(B)=\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{P(A|B)=1}$. Если же в первый раз выпала решка (событие $\overline{\boldsymbol{B}}$), то эксперимент начинается повторно, однако вероятность получить орла прежняя: $\boldsymbol{P\left(A|\overline{B}\right)=P(A)=p}$. Используем формулу полной вероятности: $\boldsymbol{P(A)=P(A|B)\cdot P(B)+P\left(A|\overline{B}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)}$, т.е. $\boldsymbol{p=1\cdot\frac{1}{2}+p\cdot\frac{1}{2}}$, следовательно $\boldsymbol{p=1}$.

Второй способ. Вероятность *p* события *A* равна бесконечной сумме вероятностей, образующих геометрическую прогрессию. Согласно формуле нахождения суммы бесконечно убывающей прогрессии: $\boldsymbol{p=0,5+0,5\cdot0,5+0,5\cdot0,5\cdot0,5+\cdots=\frac{0,5}{1-0,5}=1}$. Что и требовалось доказать.

Изученные нами учебные пособия по теории вероятности, приводят нас к выводу о том, что их использование учителем в учебном процессе (в урочной и внеурочной деятельности) позволит в более полном объёме и на значительно более высоком уровне реализовать ФГОС основного общего образования (5-9

классы) и ФГОС общего образования (10-11 классы), и в итоге качественно подготовить учащихся к сдаче единого государственного экзамена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Высоцкий И.Р. Кружок по теории вероятностей. – М.: МЦНМО, 2017. – 128с.
2. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 г. № 1897 Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования. // https://fgos.ru/
3. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 6 октября 2009 г. № 413 Об утверждении и введении в действие федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования. // https://fgos.ru/
4. Тюрин Ю.Н. и др. Теория вероятностей и статистика / Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО: АО «Московские учебники», 2004. – 256с.
5. Тюрин Ю.Н. и др. Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10 и 11 классов общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО: АО «Московские учебники», 2014. – 248с.

УДК 378.017.92

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА НА ЗАНЯТИЯХ ПО ФИЗИКЕ В ВУЗЕ

Н.В. Тверской, доц.
Академия ФСО России
e-mail: *nikolai-twerskoi@yandex.ru*

В статье рассматриваются причины, с которыми связан недостаточно высокий уровень довузовской физико-математической подготовки студентов технических вузов и предлагается один из вариантов индивидуализации работы на практических занятиях по решению задач, который, по мнению автора, позволяет повысить познавательную активность обучающихся.

Ключевые слова: довузовская подготовка, физика, индивидуальная работа, причинно-следственные связи, учебная группа.

В технических вузах курс общей физики среди общеобразовательных предметов занимает важное место, т.к. квалификация будущих инженеров определяется не только объемом полученных знаний, но и уровнем понимания общих законов развития науки и техники, навыками научного мышления и уровнем научного мировоззрения. Следует признать, что в ряду всех учебных курсов высшей школы физика является одним из самых сложных предметов [5], так как наряду с введением новых понятий, обобщающих идей и законов, процесс её изучения требует применения серьезного математического аппарата. К сожалению, во многих странах, в том числе и в нашей стране, наблюдается уменьшение интереса к точным наукам и инженерным дисциплинам.

В последние годы в преподавании физики в технических вузах возникли серьезные трудности, которые связанны с тем, что основная масса современных студентов первого курса, не владеет достаточными знаниями по физике. Связано это с тем, что современные преобразования в преподавании естественных наук в школе не привели к повышению уровня знаний по физике и математике у будущих студентов.

Но вузы должны выпускать специалистов способных успешно работать в условиях стремительного технического прогресса. Для этого необходимо поднять уровень подготовки первокурсников так, чтобы будущие инженеры могли успешно осваивать общеинженерные и специальные дисциплины вузовской программы. Поэтому, кроме адаптационного курса, необходимо совершенствовать методику проведения занятий по физике и другим общеобразовательным предметам.

Одним из методов повышения качества обучения является индивидуальная учебная работа со студентами при решении задач.

Под индивидуальной учебной работой подразумевается совокупность целенаправленных действий преподавателя, направленных на активизацию познавательной деятельности каждого обучающегося. Эти действия учебного и воспитательного характера проводятся с учётом индивидуальных особенностей, как всей учебной группы, так и отдельных студентов. Здесь имеется в виду уровень довузовской подготовки первокурсников, их психологическое состояние, целеустремлённость в желании овладеть определённым объёмом знаний и умений, а в процессе преподавания физики ещё и уровень математической подготовки.

Индивидуальную работу следует рассматривать как составную часть общей организации проведения всех видов занятий, т. к. любое взаимодействие между преподавателем и студентом, сопровождающееся диалогом, уже следует рассматривать как элемент индивидуальной работы.

Усиление внимания индивидуальной работе со студентами первых курсов технических вузов в настоящее время, обусловлено тем, что часто уровень школьной подготовки студентов-первокурсников в одной и той же учебной группе сильно отличается, даже при примерно равных баллах ЕГЭ.

На мой взгляд, главная трудность при работе на первом году обучения в вузе состоит в том, что в результате изменения методик преподавания предметов, изучение которых завершается сдачей ЕГЭ, выпадает решение главной задачи: развитие умения учиться. Как это ни печально, но достаточно большой процент студентов первого курса не умеют запоминать учебный материал, не могут составить план ответа, отделить главное от второстепенного, не умеют анализировать протекание процесса, вскрывать причинно-следственные связи и т.д.

Кроме того, в вузы приходят выпускники технических колледжей, где изучение физики и математики заканчивается на первом-втором годах обучения. В результате к моменту поступления в техническое высшее учебное заведение они теряют значительную часть физико-математических знаний и умений.

Как было отмечено выше, одной из задач преподавателей физики в техническом вузе является создание такого уровня знаний физических законов, который позволит студентам успешно освоить учебный материал общеинженерных и специальных дисциплин.

По моему глубокому убеждению, решение учебной задачи, обозначенной в предыдущем абзаце невозможно без реализации принципа индивидуального подхода к процессу обучения физике в высших учебных заведениях.

Наибольшими возможностями, по моему мнению, для реализации принципа индивидуального подхода обладают практические занятия по решению задач и работы лабораторного практикума. В рамках данной статьи предполагается рассмотрение варианта применения принципа индивидуального подхода на практических занятиях по решению задач.

Для успешной работы, прежде всего, следует выяснить возможности каждого обучающегося, например, предложив на одном из первых занятий самостоятельно решить 2-3 задачи по школьному курсу физики и проанализировав баллы, полученные будущими студентами на ЕГЭ не только по физике, но и по математике.

В процессе планирования занятия следует определить набор обязательных задач, которые необходимо решить по изучаемой теме.

Если в группе мало студентов с высоким уровнем довузовской подготовки, то на первоначальном этапе развития коллектива занятие целесообразно организовывать следующим образом. Основная работа ведётся у доски со студентами, которые имеют достаточно хорошую математическую подготовку. После анализа условия задачи одного из обучаемых следует вызывать к доске по его желанию. Он должен не просто решить задачу, а сделать это с подробными комментариями. По мере развития коллектива учебной группы число студентов, которым доверяется работа у доски, увеличивается. Если в группе набирается человек 8-10, достаточно хорошо справляющихся с работой у доски, то наиболее подготовленную часть из них целесообразно перевести на индивидуальный план работы на занятии. Этим студентам, кроме обязательных задач, следует предлагать задачи повышенной трудности. Такая кропотливая работа преподавателя часто даёт положительный результат не только в плане успешного развития навыков решения задач у обучающихся, но и в плане формирования психологического климата в учебной группе, который постепенно начинает развиваться под влиянием студентов, стремящихся к овладению знаниями.

После проведения 3-5 занятий по решению задач группу можно разделить на 3 подгруппы в соответствии с уровнем довузовской подготовки по физике и математике. Обычно в первую подгруппу входят студенты, получившие на ЕГЭ отличные оценки, во вторую – хорошие, в третью - все остальные. В дальнейшем состав этих подгрупп корректируется по результатам текущих оценок и семестровых экзаменов. Это деление позволяет более дифференцированно реализовать принцип посильности заданий и снизить вероятность списывания, так как задания для самостоятельного решения задач во внеаудиторное время да-

ются каждой подгруппе разные, с учётом возможностей студентов, входящих в неё.

Как показывает опыт, студентов, работающих по индивидуальному плану, во время проведения занятий, лучше посадить рядом. Это целесообразно сделать потому, что при решении сложных задач оказывается полезным коллективный труд этой небольшой подгруппы. В процессе работы у обучающихся появляется необходимость сравнить своё мнение с мнением не преподавателя, а своего коллеги-студента. Если, работающие по индивидуальному плану студенты, сидят в разных местах аудитории, то попытку обменяться мнениями они всё равно предпринимают, что создаёт дополнительный шум на занятии, мешающий работе.

Разумеется, прежде всего, студенты этой подгруппы должны решить некоторое число обязательных задач, а потом уже решать задачи повышенной трудности. Выделение вот такой подгруппы оказывает положительное психологическое воздействие на остальных членов учебной группы, так как появляются своеобразные „активисты", на которых следует ровняться. Кроме того, возможное выбывание из такой подгруппы может больно ударить по самолюбию хорошо подготовленных студентов и, несомненно, активизирует их работу. Во второй же подгруппе появляются желающие работать в режиме первой, что тоже стимулирует работу студентов второй подгруппы. Аналогично обстоит дело с обучающимися, отнесёнными к третьей подгруппе.

Один из вариантов организации коллективно-индивидуальной работы на практических занятиях по решению задач может быть реализован следующим образом. После прочтения условия задачи, студентам выделяется примерно 2 минуты для осмысления физического процесса самостоятельно и осуществления краткой записи данных. Затем обучающимся предлагается провести анализ ситуации, описанной в условии задачи и составить план действий по отысканию неизвестной величины. Если никто из студентов не видит причинно-следственных связей, то преподаватель, используя систему наводящих вопросов, старается направить ход рассуждений в нужное русло. В процессе анализа и составления плана решения задачи вскрываются причинно – следственные связи, обсуждаются формулы, описывающие эти связи, составляется план проведения математических операций для получения расчётной формулы. При этом преподаватель должен предпринимать шаги для привлечения к обсуждению ситуации, описанной в условии задачи, максимального числа обучающихся. После составления плана решения целесообразно выделить 5-10 минут для осуществления попытки самостоятельного завершения решения задачи каждым студентом. В это время преподаватель подходит к рабочим местам обучающихся, даёт указания, обсуждает особенности решения с отдельными студентами, которые в этом нуждаются на данном этапе работы и т.д. Если одна и та же ошибка встречается у достаточно большого числа студентов, имеет смысл обратить внимание всей группы на доску и рассмотреть ту тонкость в решении, которая была непонятной.

В качестве завершающего этапа работы над задачей мне видится полезным, а в слабых группах обязательным, воспроизведение правильного решения на доске. Наибольший эффект наблюдается, когда вызванный к доске студент со знанием дела воспроизводит решение и даёт нужные пояснения. Здесь наблюдаются два положительных момента: 1) работающий у доски учится логично излагать свои мысли; 2) присутствующие на занятии студенты активно воспринимают информацию, так как уже проделали определённую работу самостоятельно. В этом случае обучающиеся даже со слабой подготовкой активизируются, так как к ним приходит понимание причинно – следственных связей, рассматриваемых в задаче.

Выше велась речь о задачах, методика решения которых не является новой на данном этапе обучения. Если же рассматриваются задачи, при решении которых используются пока ещё неизвестные студентам способы, то целесообразно поступить следующим образом. После изучения условия задачи, следует обратить внимание обучающихся на тот факт, что известными им приёмами данную задачу решить невозможно или можно решить только приближённо. Затем преподаватель осуществляет подробное решение задачи на доске, проводя ход рассуждений в невысоком темпе. В это время студенты только слушают преподавателя и не делают никаких записей. После объяснений, проделанных преподавателем, на доске остаётся рисунок, схематический план решения, отражающий ход рассуждений, все остальные записи удаляются. Затем выделяется время, в течение которого каждый из студентов, делая записи в своей тетради, должен самостоятельно повторить рассуждения и действия, которые проделал преподаватель в процессе объяснения решения задач данного типа. После того, как большая часть обучающихся справилась с заданием, целесообразно к доске вызвать студента, который хорошо понял ход решения задачи. Он должен в достаточно высоком темпе озвучить ход рассуждений и провести математическую обработку решения.

На следующем занятии полезно предложить студентам задачу, решение которой базируется на методике, рассмотренной на предыдущем. Например, на занятии, целью которого является изучение и закрепление учебного материала, связанного с расчётом напряжённости электрических полей, созданных зарядами, сосредоточенными на телах разной формы и размера, в качестве примера целесообразно рассмотреть такую задачу: рассчитать напряжённость поля в центре заряженного полукольца. В процессе анализа условия задачи студенты убеждаются в том, что на основе применения теоремы Гаусса эту задачу решить нельзя. Возникает проблемная ситуация, разрешение которой предлагается провести на основе применения принципа суперпозиции полей. Далее преподаватель объясняет, какие рассуждения надо провести, чтобы составить подынтегральное выражение для расчёта напряжённости электрического поля в указанной точке. На одном из последующих занятий, следует повторить методику решения задач, получение расчётной формулы в которых сводится к составлению подынтегрального выражения и операции интегрирования. Например, предложить задачу по расчёту потенциала поля заряженного кольца в точ-

ке, лежащей на оси кольца. Вот здесь уже следует предложить студентам провести решение задачи самостоятельно, а в процессе её решения индивидуально проверить качество усвоения метода решения, изученного ранее, сделать нужные указания обучающимся, которые, по мнению преподавателя, не совсем уверенно овладели данным приёмом. Если и после этого остаются трудности, то студента целесообразно пригласить на индивидуальную консультацию.

Такой подход к организации занятий по решению задач, несомненно, способствует повышению уровня умений решать задачи, но, к сожалению, не всегда удаётся достигнуть максимума эффективности, особенно, если в учебной группе большой процент студентов, имеющих слабую математическую подготовку.

Рассматриваемый подход к организации занятия хорошо работает и оказывает развивающее действие на обучающихся только в том случае, если подсказки, получаемые от преподавателя, находятся на уровне идеи, а проведение математической обработки решения физической задачи осуществляется каждым студентом самостоятельно.

В заключение хотелось бы отметить, что умение решать задачи, находить причинно-следственные связи является необходимым условием развития творческих способностей будущих инженеров. Для достижения положительных результатов своей работы преподаватель должен уметь и иметь возможность анализировать не только результаты образовательного процесса по окончании изучения курса физики по экзаменационным оценкам, но и, прежде всего, промежуточные результаты, с тем, чтобы при необходимости откорректировать текущую работу каждого студента, учитывая его индивидуальные особенности и возможности. Необходимость учета способностей, интересов и темпа работы обучающихся встает не только на этапе представления учебного материала, но и, прежде всего, на этапе обучения практической деятельности, анализу и использованию информации. Таким образом, на мой взгляд, индивидуализация образовательного процесса не может быть реализована только предоставлением некоторым учащимся возможности выбора удобного для них темпа, выбора форм представления материала и методов изучения, но и грамотно организованного контроля на всех этапах обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефремова Н.А., Рудковская В.Ф., Витюк Е.С. О некоторых проблемах обучения физике в вузе // Современные наукоемкие технологии. – 2016. – № 8-1. – С. 116-120;
2. Бабаев, В.С. Корректирующий курс физики / В.С. Бабаев, Ф.Ф. Легуша, М.: Лань, 2011. 160 с.
3. Потапова, М.В. Особенности построения образовательной программы пропедевтического курса общей физики в условиях преемственности школьного и вузовского курсов физики/ М.В. Потапова// Наука и школа. 2003. № 5. С. 40-44.

4. Современные образовательные технологии : учеб. пособие/ под ред. Н. В. Бордовской. М. : КНОРУС, 2010. 432 с.
5. Кулик С. С. и др. Образовательные технологии в обучении физике, математике и инженерной графике иностранных студентов // Мир науки. –2016 – Т. 4 – № 2 – С. 21-26.

УДК 372.853

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ В ШКОЛЕ НА ОСНОВЕ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Е.Ю. Федосова
ФГБОУ ВО «Липецкий государственный педагогический университет им. П.П.Семенова-Тян-Шанского»
e-mail: *fedosowa-katya2016@yandex.ru*
В.В. Филиппов
ФГБОУ ВО «Липецкий государственный педагогический университет им. П.П.Семенова-Тян-Шанского»
e-mail: *wwfilippow@mail.ru*

В работе рассматривается результативность виртуальных лабораторных практикумов при изучении предмета физики. Теоретическое исследование проводится совместно с педагогическим экспериментом. Выявлена корреляция уровня знаний по физике и использованием современных цифровых лабораторных работ.

Ключевые слова: методика преподавания физики, физический эксперимент, виртуальный физический практикум.

Изучение физики нельзя представить без лабораторных и фронтальных работ, опытов и экспериментов.

Сегодня эксперименту при изучении физики отводится огромное значение. Задания практического характера традиционно выносятся на ОГЭ по физике. Но изучение физики на базовом уровне не позволяет учащимся получать высокие оценки. Поэтому учителю необходимо так организовать работу с учащимися, чтобы эти показатели становились выше.

Учащиеся при выполнении практической части ОГЭ допускают много ошибок. Для того чтобы ликвидировать проблемы, необходимо, отводить физическому эксперименту как можно больше времени. Причем рационально наряду с демонстрационным и лабораторным экспериментами, дополнительно использовать на уроках всевозможные виртуальные эксперименты. Кроме того, каждому учителю, рационально, в соответствии с программой УМК, дополнять и включать в свою работу цифровые технологии [1].

Цель исследования: разработать методику организации и осуществления разноуровневой экспериментальной деятельности школьников в целях повышение качества физического образования.

Гипотеза исследования: широкое применение физического эксперимента будет способствовать повышению интереса к изучению предмета, повышению уровня знаний и умений учащихся.

Практической базой исследования явилась МАОУ СШ № 51 г. Липецка при участии учеников 9 классов.

Проверка эффективности гипотезы осуществлялась в ходе естественного педагогического эксперимента, состоящего из нескольких этапов:

1. Констатирующий эксперимент (2018 год).
2. Формирующий эксперимент (2019 год).
3. Контрольный эксперимент (2019-2020 год).

На этапе констатирующего эксперимента осуществлялось наблюдение, проводился анализ научно-методической и учебной литературы, анкетирование учащихся по выявлению сфер их возрастных интересов.

Данные этого этапа позволили выявить недостатки при организации образовательного процесса в различных классах, несовершенство пропедевтического физического образования.

Формирующий эксперимент предполагает осуществление влияния на различные стороны учебного процесса с целью его улучшения и оценку эффективности этого влияния.

На данном этапе ставились задачи разработать и реализовать такую методику образовательного процесса, которая способствовала бы повышению качества физического образования и эффективности обучения на различных его этапах.

В 2019-2020 гг. проводился ***контрольный*** этап педагогического эксперимента, задачами которого являлись проверка выдвинутой гипотезы и оценка эффективности предлагаемой методики. Были выделены один контрольный и один экспериментальный классы, таким образом, чтобы уровень успеваемости в первом и втором были приблизительно одинаковыми и осуществлялись одним педагогом, но с использованием различных технологий.

На данном этапе применялись методы наблюдения, проводились контрольные работы для сравнения уровня знаний и практических умений учащихся, анкетирование школьников и их родителей, осуществлялся их качественный и количественный анализ и сопоставление с гипотезой исследования [2].

Педагогический эксперимент заключался в следующем: контрольная группа в течение года выполняла традиционные лабораторные работы, а экспериментальная группа помимо аналогичных лабораторных работ, выполняла и виртуальные лабораторные работы с использованием цифровых технологий, тем самым экспериментальная группа больше внимания уделяла непосредственно эксперименту.

На начало эксперимента, была проведена диагностика мотивации школьников к изучению физики, на основе разработок Желеевой А.В.[3].

Среди учащихся четырех 9-х классов было проведено анкетирование. Картина мотивации школьников, принявшие участие в опросе, представлена на рисунке 1. По результатам анкетирования была отобрана одна контрольная группа

(9 «Б» класс) и одна экспериментальная группа (9 «А» класс), показавшие приблизительно одинаковый уровень мотивации.

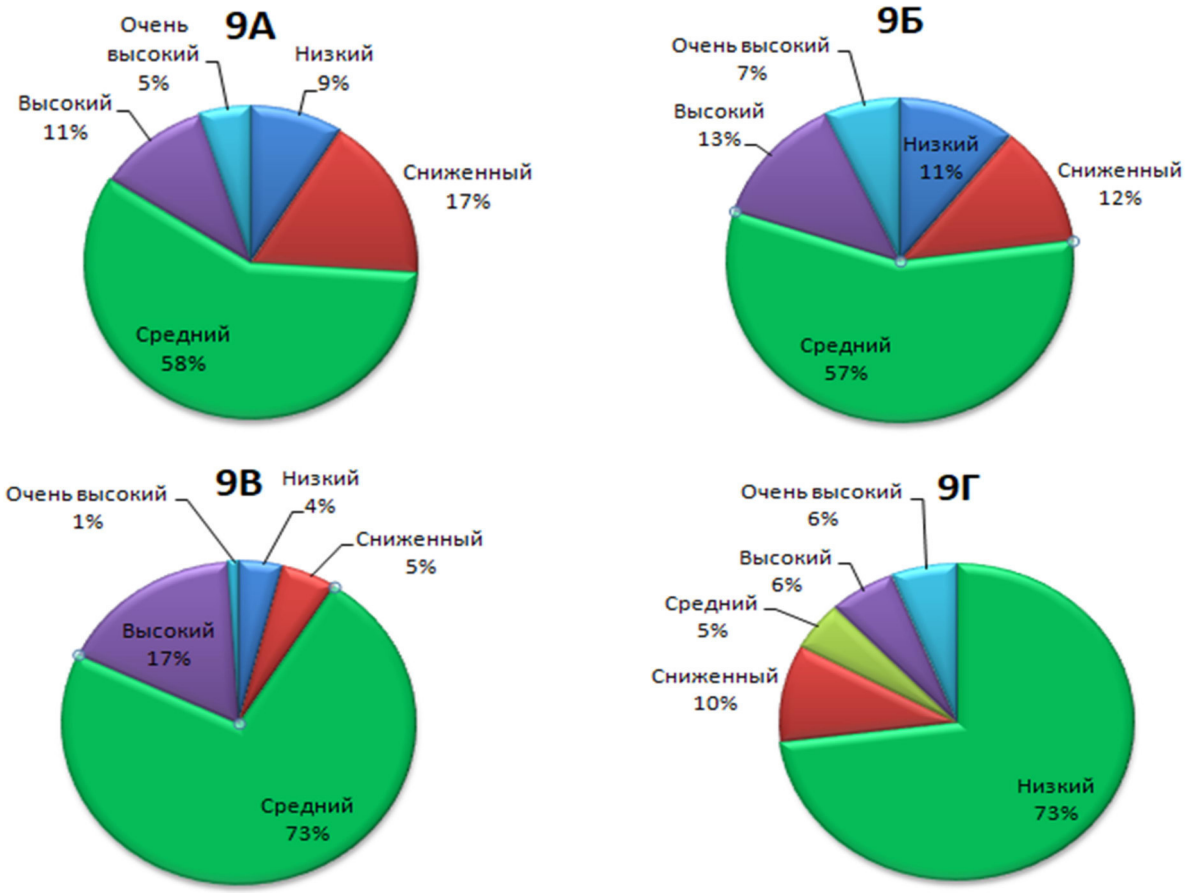


Рисунок 1-Уровень мотивации учащихся

Определение успеваемости учащихся по предмету физика на начало эксперимента было определено с помощью тестовой контрольной, составленной по теме: «Кинематика».

Все учащиеся ответили на предложенные тестовые вопросы. Полученные результаты можно представить графически (рисунок 2).

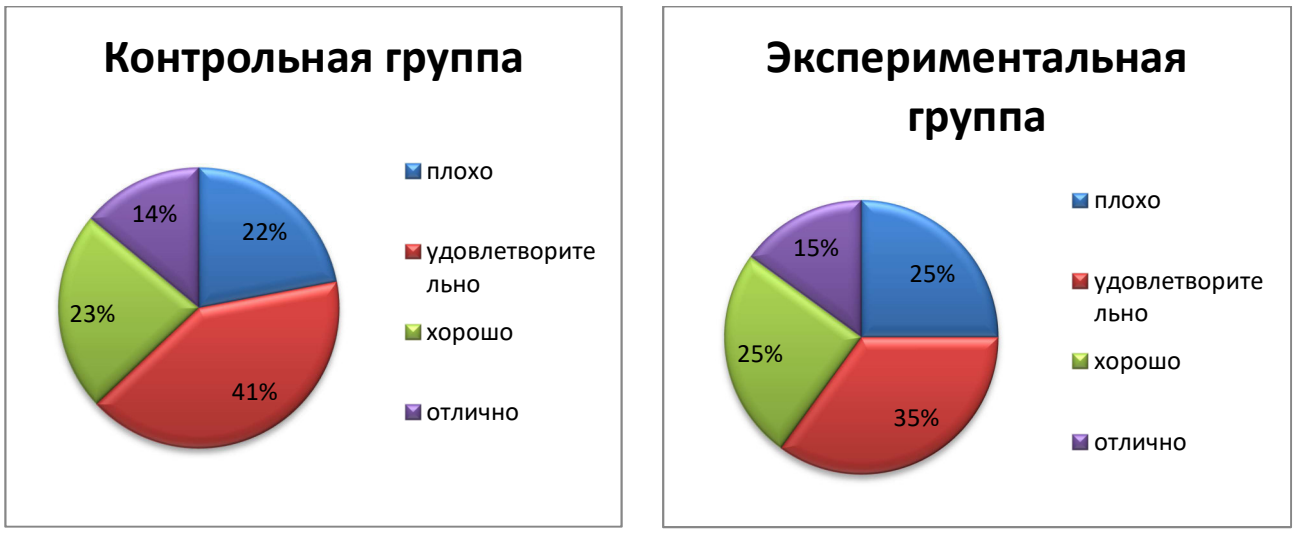


Рисунок 2 – Результаты тестирования учащихся по теме: «Кинематика».

Исследование показало, что в контрольной группе 14% учеников получили оценку «отлично», 23% получили отметку «хорошо», 41% получили оценку «удовлетворительно», 22% учащихся имеют оценку «плохо» («неудовлетворительно»). Экспериментальная группа: 15% учащихся получили отметку «отлично», 25% учащихся получили оценку «хорошо», 35% получили оценку «удовлетворительно», 25 % учащихся имеют оценку «плохо».

Из исследования видно, что у учащихся как 9 «А», так и 9 «Б» классовпреобладает средний уровень знаний, так какоценку «удовлетворительно» получило большинство учеников.



Рисунок 3 – Результаты успеваемости учащихся на конец эксперимента

В течение года проводился ежемесячный мониторинг успеваемости учащихся, по результатам которого отмечено повышение успеваемости у экспериментальной группы.

Для определения успеваемости учащихся по предмету физика на конец эксперимента была составлена годовая контрольная работа. По сумме баллов определяется успеваемость учащихся по предмету физика.

Все учащиеся ответили на предложенные вопросы, результаты представлены на рисунке 3.

У учащихся 9 «Б» класса уровень знаний по физике остался на среднем уровне. У учащихся 9 «А» класса успеваемость знаний перешел на высокий уровень.

Исследование показало, что повышение роли физического эксперимента, в том числе виртуального,на уроках позволяет развивать мотивацию к изучению физики, повышает интерес и успеваемость по предмету.

ЛИТЕРАТУРА

1.Аржаник А.Р., Зелинченко В.М., Янкелевич Ю.Б. Методика преподавания демонстрационного физического эксперимента в курсе физики // Вестник Томского гос. пед. ун-та (TSPU Bulletin). - 1997. - № 2. - С. 8-9.

2.Балабанова Т.Е.Совершенствование методики преподавания физики в школе на основе физического эксперимента: дис…. канд. пед. наук: 13.00.02 / Ряз. гос. пед. ун-т им. С. А. Есенина. - Рязань, 2000.-249 с.
3.Желеева А.В. Диагностика мотивации школьников к изучению // Наука и школа. - 2015. - № 4. - С. 155-161.

УДК 37

РАЗЛИЧЕНИЕ РЕЖИМОВ РАБОТЫ С ОБУЧАЮЩИМСЯ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗУЕМОГО ЯЗЫКА КОММУНИКАЦИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФИЗИКИ

Л.В. Филимонова, к.пед.н., доц.
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина
e-mail: *svetifil@rambler.ru*

Говори о том только, что тебе ясно, иначе молчи.
Л.Н. Толстой
Чтобы обучить другого, требуется больше ума, чем чтобы научиться самому.
М. Монтель

В статье проводится различение режимов обучения, тренировки и проверки на основе особенностей используемого языка коммуникации с целью обеспечения доступности усвоения информации всеми студентами.

Ключевые слова: доступность учебной литературы, режим обучения, режим тренировки, режим проверки, язык коммуникации учителя и ученика.

За многие годы преподавательской деятельности неизбежно претерпеваешь эволюционные переходы, сменяющие этапы с различной тактикой и стратегией преподавания. Этому способствуют и современные новшества: быстрый доступ к нужной информации, возможность изучения опыта коллег по всему миру, широкая палитра образовательных сайтов. Опыт показывает, что наиболее плодотворной является индивидуальная работа с обучаемым при наличии обратной связи и его стремления к овладению системой знаний. На практике аудиторной групповой работы не всегда удается отследить уровень успеваемости и вовлеченности в учение каждого студента. С появлением новых технологий дистанционного образования эта задача решается полнее, но требует бóльших затрат времени.

Распространена позиция, что многообразие источников информации способствует облегчению овладения знаниями и умениями самим обучающимся и уменьшению роли преподавателя как источника знаний. Однако личный опыт показывает, что несмотря на наличие множества современных учебников по физике, учиться самостоятельно без наставничества практически невозможно. Порой складывается впечатление, что авторы учебных изданий умалчивают важные звенья логической цепочки построения рассуждений, нарушают важ-

ные принципы передачи информации с какой-то целью или по незнанию. Использовать такую литературу в учебном процессе неэффективно. Возникает актуальная потребность создания особой информационной образовательной среды или особого способа организации обучения, которые обеспечат реализацию базового дидактического принципа – доступности учебного материала для усвоения любым студентом

Обучение - это двусторонний процесс обмена информацией. Задача учителя – передать, а ученика – принять и усвоить смыслы и образы, из которых он складывает мозаику своей научной картины мира, своего мировоззрения. Для этого используется тот или иной язык, слова, знаки и иные символы, значение которых должно существовать и совпадать у обеих сторон (язык коммуникации). Если это условие не выполнено (ученику и/или учителю не ясен смысл слова, значение знака либо их смыслы различаются), то обучения не происходит. Выход - в опоре на две сигнальные системы человека (не можешь объяснить, передать на словах – покажи, попроси сделать и др.).

В этой связи есть основания **различать** следующие **режимы работы** с учеником на основании используемого языка коммуникации:

1) ***режим обучения*** («ведем ученика за руку за собой»): говорим на предельно ясном, однозначном для понимания языке (язык новичка), не пропускаем ни единого звена в логических цепочках рассуждений, аргументируем каждую передаваемую мысль, постоянно получаем обратную связь и строим индивидуальную тактику коррекции и дополнения знаний по теме урока. *Цель*: наладить (создать и настроить) канал передачи учебного материала по физике (учитывая особенности предмета изучения физической науки, опираясь на знание методологии физики, педагогики и психологии).
2) ***режим тренировки*** (самостоятельная работа ученика в определении Усовой А.В.): для экономии ресурсов используем *известные ученику* сокращения в речи, привычные опытным физикам устоявшиеся фразы и обороты (язык посвященных), очень эффективно работают условные договоренности в сокращениях; даем задания в соответствии с текущими дидактическими целями и контролируем верность действий и ориентиров ученика (а не сам результат!). *Цель*: развитие ученика (его мышления, навыков и др.) через усвоение им научной терминологии, конкретных знаний и методов решения разных типов задач, через получение личного опыта умственной и практической работы.
3) ***режим проверки*** (творческая работа в непредсказуемой ситуации с нагрузкой): обычный язык, требующий идентификации смысла, косвенные указания на раздел и тему, минимум пояснений и указаний по решению задачи, выход в реальные ситуации, требующие применения теории на практике (переключение с «идеала» на «реал»). Примером может служить ситуация работы учащегося во время ЕГЭ.

Многозначность физических терминов [1] и слов обыденного языка требует от преподавателя физики методологически корректной речи [2], что является необходимым условием передачи учебной информации. Ниже приведем не-

сколько простых примеров для иллюстрации значимости точной и ясной передачи физического смысла выбранным языком коммуникации.

Пример 1. Раздел «Кинематика» учит нас отвечать на вопрос: «Как движется тело?». Берем самый большой в городе автобус, который едет по прямому участку маршрута, стрелка спидометра держится на отметке 40 км/ч и просим ответить на обозначенный выше вопрос. С чего должен начинаться правильный ответ в контексте физики? … с выбора модели! Если автобус можно принять за материальную точку, то он движется прямолинейно и равномерно, а если мы его принимаем за АТТ, то – поступательно. Таким образом, сама терминология определяется выбранной моделью.

Пример 2. В чем различие использования терминов «центростремительное» и «нормальное» ускорения? Они относятся к различным видам движения материальной точки.

Пример 3. Закон сохранения и изменения импульса тела. Проблема в точности формулировки законов. Нет общепринятого понимания и различения терминов «изолированная» и «замкнутая» система. К тому же очень часто модуль изменения импульса и изменение модуля импульса обозначаются одинаково, не различаются в пределах одной задачи или в теории вопроса. Полезно найти обе эти величины на примере равномерного движения по окружности при переходе и точки 1, в точки 2 (поворот радиус-вектора на 90 градусов) и 3 (на 180 градусов) и сравнить.

Пример 4. Отсутствие правильного *определения* общего понятия «***работы***» в физике. Невозможность найти в учебниках *формулировку* закона сохранения и превращения энергии. Необходимость и сложность разъяснения смысла термина энергия без каких-либо прилагательных.

Пример 5. В разделе МКТ и термодинамика важной дидактической задачей является различение и соотнесение понятий «состояние» и «процесс». Решение задач на состояние и задач на процесс начинаем как всегда с рисунка. Рисунок в этом разделе называется диаграммой. Т.е. рисуем диаграмму состояния или диаграмму процесса соответственно типу задачи. Учим рациональности в выборе обозначений: если величина выражается через ранее введенные обозначения других величин, то нового обозначения не вводим! В уравнении состояния важно пояснить смысл входящих в него величин. Например, V – это какой объем? Объем чего? Поясняем в сравнении с формулой Ван-дер-Ваальса.

Пример 6. Задачи по физике не решаются по формулам. Они решаются по законам физики. С этой целью формулировки законов, за редким исключением, необходимо уметь строить по схеме «если А, то В». Тогда сама логика решения задачи сводится к построению цепочки связей, каждое звено которой по принципу домино соединяется с соседними звеньями, начинаясь на данных и заканчиваясь искомыми величинами. Формула – это лишь форма кодирования информации, символьный язык. Формула может представлять определение физической величины (например, скорости, напряженности, электроемкости), закон, принцип (например, суперпозиции) или условие (например, равновесия или плавания тел…), связь величин (например, частоты и периода).

Пример 7. Проводник во внешнем ЭСП. Вопрос: Существует ли поле внутри проводника? Как корректно строить речь при ответе? Что мы понимаем под электрическим и магнитным полями? Как методологически правильно соотносить экспериментальные факты и теоретические объяснения к ним? Вопросов очень много. Весь раздел электромагнетизма, на наш взгляд, требует тщательной совместной работы философов, физиков и методистов. Так магнитное поле можно рассматривать как самостоятельную материальную субстанцию (физический объект), так и как своеобразный прием, облегчающий расчет взаимодействий между движущимися зарядами. В последнем случае предполагается, что «магнитного поля, как самостоятельной сущности, не существует. Оно проявляется как результат взаимного движения электрического поля и наблюдателя», т.е. является электродинамическим эффектом [4, с.52].

Подводя итоги, отметим следующее: физика как фундаментальная наука о внешнем мире имеет свою уникальную специфику (предмет, метод, логику построения теорий) и преподавание физики как учебной дисциплины должно воспитывать физиков по духу, складу ума, подходу к решению задач. Уход от физики в сторону математики (приоритет записи формул, вычислений перед разбором правильности выбора модели, поиска условий применимости того или иного физического закона, обсуждения вариантов экспериментальной проверки полученных выводов и результатов) не дает нужного педагогического результата, приводит к потере времени и интереса у учащихся к изучению физики, так как нарушает логику познания человеком природы, не учитывает строения мозга обучаемого и принципов его работы во время решения задач [3].

В настоящее время образование переживает переходный этап развития. Инерционность системы образования, с одной стороны, и динамичные коренные изменения технологий и всего социального уклада жизни, с другой, приводят к противоречию между возросшими потребностями страны в хорошо образованных компетентных выпускниках школ и вузов и реальными возможностями применяемых образовательных технологий и педагогических парадигм. И только обмен передовым опытом, сочетающим перспективные новации и проверенные временем традиции, поможет пережить этот переход с наименьшими потерями качества образования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Суровикина С.А. Многозначные физические термины: Учеб. пособие / С.А. Суровикина; М-во общ. и проф. образования РФ. Ом. гос. пед. ун-т. - Омск : Изд-во ОмГПУ, 1998. - 33 с.
2. Шаронова Н.В. О методологической корректности речи учителя физики // сборник докладов Международной конференции «Языки науки – языки искусства», Суздаль, июнь, 2002 год. [электронный ресурс] http://www.nonlin.awse.ru/presentations/p7761/
3. Вершинин Б.И. Мозг и обучение. Методика реализации функциональных возможностей мозга. Томск, 2007. – 80 с. [электронный ресурс]

https://kobmedia.ru/wpcontent/uploads/2017/05/Vershinin_Mozg_i_obuchenie_80.pdf
4. Мисюченко И. Последняя тайна Бога (электрический эфир). Монография. С.-Пб, 2009. – 267 с. [электронный ресурс] http://electricaleather.com/d/358095/d/poslednyaya-tayna-boga.pdf

УДК 372.853

О ВЗАИМОСВЯЗИ ЗНАНИЙ ПО ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЕГЭ

В.В. Филиппов
ФГБОУ ВО «Липецкий государственный педагогический университет им. П.П. Семенова-Тян-Шанского»
e-mail: *wwfilippow@mail.ru*
А.О. Золотухина
ФГБОУ ВО «Липецкий государственный педагогический университет им. П.П. Семенова-Тян-Шанского»
e-mail: *anastasiazolotuhina0@gmail.com*

В работе рассматриваются межпредметные связи на примере математики и физики. Показано, что для достижения высокого уровня знаний по математике необходимо большее внимание уделять физике, в частности практике решения физических задач.

Ключевые слова: методика преподавания физики, межпредметные связи, единый государственный экзамен.

Проблема подготовки инженерных кадров в Российской Федерации приобретает все большую актуальность. Необходимость в качественных специалистах инженерах и технологах требует глубокой подготовки абитуриентов по базовым дисциплинам: математика, физика, химия. Однако, при подведении итогов кампаний ЕГЭ-2019, ЕГЭ-2020 выявлены достаточно близкие невысокие абсолютные показатели знаний учащихся по физике и математике [1]. В частности средний балл ЕГЭ по профильной математике в РФ в течение последних лет колеблется возле значения 55 баллов (по 100-балльной шкале), а в 2018, 2017 г.г. находился ниже 50 баллов, что соответствует «слабой тройке» по пятибалльной шкале оценивания знаний. Средний балл ЕГЭ по физике в РФ, как правило, не превышал 50-55 баллов. В обоих предметах доля пустых бланков заданий высокого уровня сложности составляет около трети от всех работ. Несомненно, математика и физика обычно считаются наиболее трудными предметами школьного курса, однако существующей уровень знаний абитуриентов физико-технических и технологических направлений затрудняет процесс освоения ими в должной мере необходимых базовых дисциплин в при обучении в вузе.

В настоящее время, пожалуй, нет необходимости доказывать важность межпредметных связей в процессе преподавания. Они способствую лучшему формированию отдельных понятий внутри отдельных предметов, групп и си-

стем, так называемых межпредметных понятий, то есть таких, полное представление о которых невозможно дать учащимся на уроках какой-либо одной дисциплины. О взаимосвязи математики и физики неоднократно отмечалось в различных учебных и научных работах. Во все периоды человеческого сознания эти направления научной мысли развивались взаимосвязано, стимулируя обоюдный прогресс. Отделение математики и её самостоятельное развитие не мыслилось ни в одной эпохе. Новые математические идеи черпались из её связи с естественными науками и наиболее явно данная закономерность проявляется в неотделимой связи с физикой, как наиболее математизированной наукой. О взаимосвязи физики и математики отмечается и в утвержденной федеральной программе «Концепция развития российского математического образования» [2].

Как отмечалось выше, существует корреляция достаточно низких показателей ЕГЭ по физике и математике последних лет. Это связано с тем, что многие дидактические единицы математики, знания которых проверяются в ходе ЕГЭ, закрепляются именно в физике. Физика придает материальный смысл таким понятиям как система координат, вектор, функция, производная, интеграл.

На данный момент школьная программа носит существенно гуманитарный характер, с ущемлением дисциплин естественнонаучного профиля. Отход от базовой фундаментальной составляющей приводит к существенному снижению математической подготовки школьников, что проявилось в необходимости понижения минимального порогового балла ЕГЭ, вывода из экзамена наиболее сложных задач.

Проблема современной школьной математики также связана с недостаточной практикой решения задач по физике. Более детальное изучение нижеуказанных тем математики возможно на уроках школьных физики. В частности:

- решение уравнений и их систем, сложение дробей, операции со степенями закрепляются при решении задач по физике и проведении обработки экспериментальных данных;

- различные системы координат на плоскости и в пространстве пронизывают весь курс школьной физики;

- понятие вектора в физике также используется на протяжении всего курса, т.к. школьники учатся складывать вектора (понятия перемещения, скорость, ускорение, сила, импульс, силовые характеристики электрического и магнитного полей), находить их произведение (работа силы), проекции векторов;

- тригонометрические функции и соотношения в треугольнике используются при решении задач по кинематике, динамике, геометрической оптике;

- методы вычислений площадей и объемов применятся в гидродинамике, молекулярной физике, электродинамике;

- понятие производной закрепляется при решении задач по кинематике (скорость, ускорение), электродинамике (сила тока, переменный ток на индуктивности и ёмкости), квантовая физика (закон радиоактивного распада);

- показательные функции и понятие логарифма закрепляются при изучении закона радиоактивного распада;

- определенный и неопределенный интеграл используются при расчете работы в механике и термодинамике.

Таким образом, невнимание к физике причиняет урон и самой математике, затрудняется ее понимание, притупляется интерес к ней, принижается роль математики как фундаментальной науки. Физика учит оценивать результат с точки зрения здравого смысла, учит выделять заведомо неправильные решения, развивает устный счет и логическое мышление. Не используемый в физике математический аппарат плохо держится в памяти. Современное преподавание требует органического сочетания экспериментального и теоретического методов изучения физики, выявления сути физических законов на основе доступных школьникам понятий элементарной математики. В главе «Непостижимая эффективность математики» М. Клайн писал: «Математику можно представить, как своего рода хранилище математических структур. Некоторые аспекты физической или эмпирической реальности удивительно точно соответствуют этим структурам, словно последние «подогнаны» под них» [3].

Таким образом, правильное и более результативное становление программы «развития математического образования» [2] неотъемлемо от развития «физического образования» и здесь необходимо говорить о физико-математическом образовании в целом.

Согласно данным ЕГЭ по физике 2019, 2020 г.г. [1], по базовой части, учащиеся имели хорошие знания и практические навыки для решения задач по темам: кинематика материальной точки, связь температуры со средней кинетической энергией, принцип суперпозиции (электрических) полей, закон отражения света, нуклонная модель ядра, умение определять показание приборов, выделять объекты для определения физических зависимостей. Наибольшие затруднения вызвали задачи базовой части по темам: сила Архимеда, электромагнитные колебания в контуре, постулаты Бора и линейчатые спектры, элементы астрономии. Особое внимание необходимо обратить на тему «электромагнитные колебания в контуре», т.к. на основании отчетов последних лет данная тематика заданий решается не достаточно хорошо. Среди заданий части 2 необходимо отметить наиболее низкие результаты по механике (динамика и законы сохранения) и электродинамика (соединение проводников). При решении последних задач требовались знания широкой области соответствующего раздела и соответствующая математическая подготовка.

Для группы участников, не преодолевших минимальный барьер в 2020 г. наибольшие сложности были по задачам соответствующим темам: механические волны, звук, закон радиоактивного распада. Достаточно успешно в данной группе выполнили задания по темам не требующим хорошей математической подготовленности: связь температуры со средней энергией идеального газа, интерпретацию результатов опытов (электродинамика), несколько хуже решены задачи по темам: кинематика равноускоренного движения, изменение агрегатных состояний, нуклонная модель ядра, элементы астрофизики. Задания второй части ЕГЭ данной группой практически не решены, поскольку они требую достаточно глубоких знаний по физике и математике.

Для решения проблем связанных с достаточно низким уровнем знания математики и физики выпускников средних образовательных учреждений необходимо проводить всероссийские и региональные конференции учителей-предметников, корректировать учебные планы, распределение учебной нагрузки учащихся, разрабатывать новые учебники и учебные пособия с учетом современного уровня развития межпредметных связей дисциплин. При проведении курсов повышения квалификации обращать больше внимания на решение задач повышенной и высокой сложности, а также типичные ошибки учащихся с приглашением ведущих экспертов ЕГЭ в регионе, учитывать опыт других регионов. Необходимо более активно внедрять в учебный процесс виртуальные лаборатория по физике с наглядной демонстрацией экспериментов в широком наборе случаев. При проведении методических совещаний, курсов повышения квалификации учителей, более активно использовать методические материалы и видеолекции разработчиков КИМ ЕГЭ по физике, размещаемые на сайтах ФИПИ и Рособрнадзора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2020 года URL: https://fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy#!/
2. Распоряжение Правительства России от 24 декабря 2013 г. №2506-Р о концепции развития математического образования в Российской Федерации. URL: http://www.math.ru/conc/vers/conc-3003.pdf
3. Клайн М. Математика. Поиск истины. М.: Мир. 1988.

МАГНИТНОЕ ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ПРОЗРАЧНЫХ СРЕДАХ

Б.Д. Цуканов, к.пед.н., доц.
Академия ФСО России
e-mail: *tsbd@yandex.ru*

Мировая наука не может обойти вниманием 175-летие магнитооптики – раздела физики, изучающего влияние магнитного поля на оптические свойства вещества **и имеющего важное прикладное значение.**

Первый магнитооптический эффект был открыт М. Фарадеем (1846 г.) и состоит в повороте плоскости поляризации линейно поляризованного света, проходящего через прозрачную среду, находящуюся в продольном магнитном поле. Открытие Фарадея имело большое значение, поскольку оно показало связь между оптическими и электромагнитными явлениями. По этой причине его называют *магнитооптическим эффектом Фарадея* или кратко *эффектом Фарадея*. Следует, однако, понимать, что эффект этот не является результатом воздействия магнитного поля на поле световой волны, но магнитное поле изме-

няет оптические свойства вещества и оптически неактивное вещество приобретает способность вращать плоскость поляризации волны.

Основные закономерности этого явления были выявлены самим Фарадеем и наиболее детально исследованы в разных веществах М. Верде. Было установлено:

1. Направление вращения плоскости поляризации для каждого вещества связано только с направлением магнитного поля и не зависит от направления распространения световой волны. При изменении направления поля на противоположное меняется направление поворота плоскости поляризации.
2. Существуют вещества с правым и левым магнитным вращением плоскости поляризации по отношению к направлению магнитного поля. В правовращающих, или положительных, веществах направление вращения подчиняется правилу правого винта.
3. Угол поворота плоскости поляризации φ пропорционален длине пути l света в веществе и напряженности H внешнего магнитного поля: $\varphi \sim l\,H$.
4. Магнитное вращение *почти не зависит* от температуры и плотности вещества, но очень сильно зависит от длины световой волны [1].

В дальнейшем были открыты и другие магнитооптические эффекты: *эффект Керра* (1876 г.) – поворот плоскости поляризации или изменение интенсивности света, отраженного от намагниченного ферромагнетика, *эффект Зеемана* (1896 г.) – расщепление спектральных линий в магнитном поле, *эффект Коттона-Мутона* (1901 г.) – магнитное двойное лучепреломление в поперечном магнитном поле. В теоретической и экспериментально физике возникло новое научное направление – *магнитооптика,* изучающая влияние магнитного поля на оптические свойства вещества [2].

Наблюдение и исследование магнитного вращения плоскости поляризации выполняется на лабораторных установках, описание которых приводится в учебных пособиях [3, 4 и др.], а схема представлена на рисунке 1.

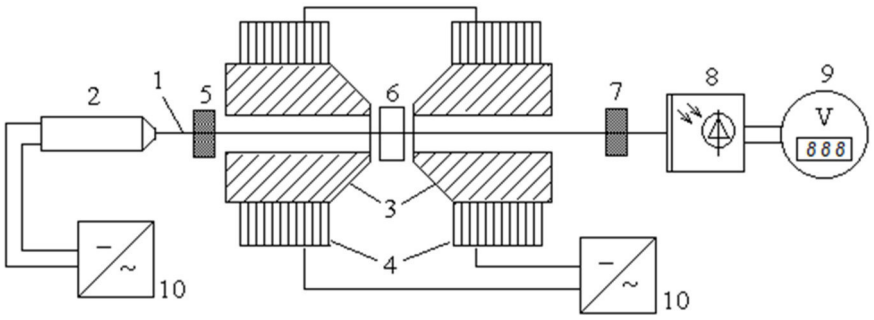


Рисунок 1 – Конструкция установки для исследования

Световой пучок 1 от источника линейно поляризованного света 2 проходит по каналу в сердечнике электромагнита 3 и попадает в фотоприемник 8. На пути светового пучка установлены неподвижный 5 и вращающийся 7 поляроиды. Первый из них служит поляризатором, второй – анализатором. Исследуе-

мое вещество 6 устанавливается между полюсами электромагнита. Напряженность магнитного поля изменяется путем изменения силы тока в обмотке 4. Электромагнит и источник света и подключаются к блокам питания 10. Интенсивность света, проходящего через анализатор, может оцениваться визуально или с помощью милливольтметра 9, подключенного к фотоприемнику 8. Если поляризатор и анализатор были ориентированы на темноту (угол между плоскостями пропускания равен 90^{o}), то при включении магнитного поля вектор $\vec{E}$ падающей на анализатор волны уже не будет перпендикулярен плоскости пропускания и условие минимума интенсивности проходящего света нарушается. Чтобы восстановить это условие, анализатор необходимо повернуть на угол, равный углу поворота плоскости поляризации.

Внешний вид лабораторной установка, изготовленной на специализированном предприятии по рассмотренной схеме, представлен на рисунке 2. Обращает на себя внимание размер обмотки магнитной системы.

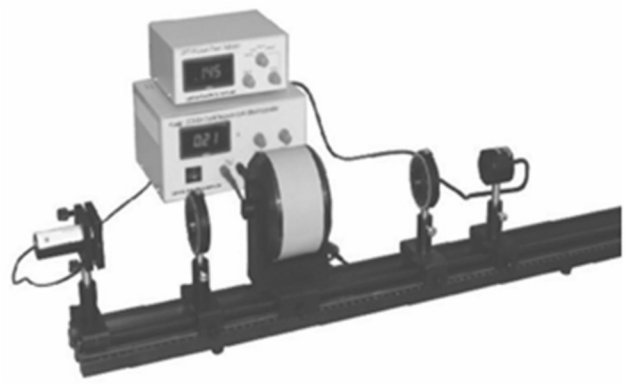


Рисунок 2 – Установка производства Lambda Scientific Systems



Рисунок 3 – Сахариметр СУ-4 с кюветой КПЛ-400

Возрастание интереса к эффекту Фарадея обусловлено его применением в научных исследованиях и технике. Примерами использования эффекта являются:

- амплитудная модуляция лазерного излучения для оптических линий связи;
- невзаимные элементы для волн оптического и радиочастотного диапазонов;
- визуализация доменов в ферромагнитных пленках;
- магнитооптическая запись и воспроизведение информации.

Практическая значимость эффекта делает целесообразным включение в программу подготовки специалистов инженерного профиля экспериментальное исследование магнитного вращения плоскости поляризации световых волн, однако решение этой задачи связано с серьезными трудностями. Установки заводского изготовления имеют высокую стоимость [5]. В оригинальных установках применяются мощные магнитные системы достаточно большого размера, используются большие токи, поляризатор и анализатор разделены магнитной системой и монтируются отдельно [3, 4 и др.].

Мы предлагаем решение проблемы путем использования универсального сахариметра – полутеневого поляриметра, предназначенного для определения концентрации сахара в растворах (СУ-3, СУ-4, СУ-5), и специально разрабо-

танной для него ячейки Фарадея. Особенность конструкции состоит в том, что магнитная система с исследуемым веществом (ячейка Фарадея) помещается внутри готового измерительного прибора.

Сахариметры применяются для определения концентрации сахара в растворах по углу поворота плоскости поляризации световой волны и уже содержат в своей конструкции источник света с блоком питания, поляризатор, анализатор, поляриметрические трубки для исследуемых жидкостей и, самое важное, – устройство для измерения угла поворота плоскости поляризации с точностью до 0,05 – 0,1 градуса сахарной шкалы (100 ^{o}S соответствуют 34,62 угловым градусам). На рисунке 3 показан универсальный сахариметр СУ-4 с открытым кюветным отделением и извлеченной кюветой. Ячейку легко изготовить из латунной поляриметрической кюветы (трубки) КПЛ-400 или КПЛ-200 длиной соответственно 400 мм и 200 мм. Стеклянные кюветы КПС-200, КПС-300 из-за их хрупкости лучше не использовать. На трубку укладывается тонкий слой изоляционного материала и наматывается соленоид из медного провода в лаковой изоляции. На торцы трубки накладываются резиновые уплотнительные шайбы и стеклянные диски, прижимаемые пластмассовыми или металлическими штуцерами. Исследуемая жидкость заливается в трубку без пузырьков воздуха. Количество провода должно быть таким, чтобы ячейка умещалась в кюветном отсеке сахариметра. В нашей установке использовалась ячейка с внешним диаметром 38 мм, внутренним – 10 мм, длиной 400 мм, содержащая 5000 витков провода диаметром 0,6 мм при длине соленоида 364 мм.

Зависимость угла поворота φ плоскости поляризации от напряженности магнитного поля H описывается формулой

$$\varphi = V\, l\, H\,,$$

где φ – угол поворота плоскости поляризации, V – постоянная Верде, l – геометрический путь световой волны в веществе (для жидкости – длина кюветы), H – напряженность магнитного поля.

Поскольку вещество находится внутри длинного соленоида, то

$$H = \frac{N\, I}{l_{сол}},$$

и потому

$$\varphi = V\, N \frac{l}{l_{\text{сол}}} I\,,$$

где I – сила тока, N – число витков в обмотке, $l_{\text{сол}}$ – длина соленоида.

На графике зависимости $\varphi = f\,(I)$ угловым коэффициентом является выражение $V\, N \dfrac{l}{l_{\text{сол}}}$:

$$tg\ \beta = \frac{\Delta \varphi}{\Delta I} = V\, N \frac{l}{l_{\text{сол}}}.$$

Определив угловой коэффициент, можно найти значение постоянной Верде

$$V = \frac{tg\beta\, l_{\text{сол}}}{N l}.$$

Для исследования эффекта Фарадея в твердых веществах необходимо использовать цилиндрические образцы с гладкими торцами, которые помещаются внутри ячейки. Это могут быть капиллярные трубки с малым диаметром канала или палочки нужного диаметра из стекла [6]. В лаборатории желательно иметь несколько образцов разной длины. Чтобы не использовать большие токи, желательно применять образцы большой длины. Мы, однако, рекомендуем приобрести готовые образцы стандартных размеров (например, диаметр – 8 мм, длина – 73 мм) из магнитооптического стекла с большим значением константы Верде [7].

Из жидкостей в учебном эксперименте следует применять безопасные и доступные вещества. В наибольшей степени этим требованиям удовлетворяют этиловый спирт и дистиллированная вода. Значения постоянной Верде для некоторых веществ приведены в таблице 1. Следует обратить внимание на длину световой волны, для которой измерялась магнитооптическая постоянная. Обычно это 589,3 нм (желтая линия излучения паров натрия) и 632,8 нм (красное излучение гелий-неонового лазера). Если в лабораторных установках в качестве источников света применяются полупроводниковые лазеры зеленого (λ_0 = 532 нм ±10 нм) или красного (λ_0= 650 нм ±10 нм) свечения, то измеренные значения постоянной Верде будут отличаться от приведенных в нашей таблице.

При пользовании справочными таблицами из других источников важно обращать внимание на используемые единицы. Таковыми могут быть *град/(Тл·см)*, *угл. мин/(Тл·м*, *угл. мин/(Гс·мм)*, *угл. мин/(Э·см)*, где *1 Гс = 10^{-4} Тл*, *1 Э = 79,6 А/м*.

Таблица 1– Постоянная Верде некоторых веществ

Вещество	λ_0, нм	*V*, угл. мин/А
Вода	589,3	0,016
Спирт метиловый	589,3	0,012
Спирт этиловый	589,3	0,014
Бензин	589,3	0,037
Сероуглерод	589,3	0,053
Бензол	589,3	2,59
Кварцевое стекло (КУ)	632,8	0,039
Стекло (кронглас)	632,8	0,043
Стекло (флинтглас)	632,8	0,084
Пирекс (боросиликатное стекло)	632,8	0,038
Магнитооптическое стекло МОС101	632,8	– 0,128

В эксперименте исследуется зависимость угла поворота плоскости поляризации линейно поляризованного монохроматического света от силы тока в соленоиде. При силе тока до 1 А провод нагревается незначительно (до 40 – 45 °С). Использование больших токов может привести к нагреванию соленоида до температур, при которых происходит разрушение лаковой изоляции провода. С точки зрения методологии целесообразно выполнение двух серий опытов при различных направлениях тока. Во-первых, это позволяет установить взаимосвязь направления вращения плоскости поляризации с направлением напряженности магнитного поля и, во-вторых, обеспечивает большее количество измерений с тем же источником тока. Изменение силы тока от –1 А до +1 А через 0,2 А позволяет получить одиннадцать точек для построения графика, по которому делается вывод о линейном характере исследуемой зависимости.

Угол поворота плоскости поляризации по шкале универсального сахариметра СУ-3 определяется с точностью до одной десятой градуса сахарной шкалы (1°S = 20,8 угл. мин). Для каждого значения силы тока следует выполнить не менее пяти измерений. Опыты с дистиллированной водой отражены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты измерений углов поворота плоскости поляризации в дистиллированной воде (λ_0= 650 нм)

I, A	Отсчет по шкале прибора N,°S						φ , угл. мин
	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	<N>	
-1,0	-5,3	-5,9	-6,0	-5,6	-5,2	-5,6	-116,5
-0,8	-5,0	-5,1	-4,8	-4,9	-4,7	-4,9	-101,9
-0,6	-3,3	-3,7	-4,0	-4,1	-3,9	-3,8	-79,0
-0,4	-3,2	-2,8	-2,9	-3,2	-3,9	-3,8	-64,5
-0,2	-1,5	-1,7	-1,9	-1,4	-1,5	-1,6	-33,3
0	-1,5	-1,4	-1,1	-1,2	-1,3	-1,3	-27,0
0,2	-0,9	-0,7	-0,5	-0,8	-0,6	-0,7	-14,6
0,4	0	-0,3	-0,1	0	-0,1	-0,1	-2,1
0,6	0,7	0,9	0,6	0,6	0,7	0,7	14,6
0,8	1,7	1,4	1,5	1,3	1,6	1,5	31,2
1,0	3,2	3,0	2,8	2,9	3,1	3,0	62,4

Значение углового коэффициента может определяться методом парных точек, методом наименьших квадратов или по графику зависимости $\varphi = f(I)$. На основе приведенных данных для дистиллированной воды найдены угловой коэффициент tg β = 82,25 угл. мин/А и магнитооптическая постоянная (постоянная Верде) V = 0,015 угл. мин/А.

Найденные экспериментально значения постоянной Верде для воды и других веществ незначительно отличаются от справочных данных, что позволяет сделать вывод о возможности использования установки для изучения эффекта Фарадея и определения магнитооптических постоянных прозрачных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландсберг Г. С. Оптика. М., Наука – 1976. – 928 с.

2. Верхозин А. Н. Магнитооптика вчера и сегодня (К 170-летию открытия эффекта Фарадея) // Вестник Псковского государственного университета. Серия: Естественные и физико-математические науки 2015 – № 6. С. 114 – 24 //URL: https://elibrary.ru/contents.asp?id=34224493 (дата обращения: 05.10.2020).
3. Вдовичев С.Н. Магнитооптические эффекты : Электронное методическое пособие. Нижний Новгород, 2010. Текст. Изображение : электронные // URL: http://www. pnn.unn.ru/ UserFiles/manuals/Magnetooptics.pdf (дата обращения: 05.10.2020).
4. Физический практикум. Электричество и оптика. Под ред. В. И. Ивероновой. М., Наука. – 816 с.
5. Лабораторное оборудование для обучения физике Lambda Scientific Systems: [раздел сайта] : – Текст. Изображение : электронные. - URL: https://lambdasys. com/uploads/202008/20200805-110419312377.jpg (дата обращения: 05.10.2020).
6. Лабораторное стекло SIMAX// Текст. Изображение : электронные. – URL: https://simax.ru/catalog (дата обращения: 15.10.2020).
7. Магнитооптическое стекло МОС101, плоскопараллельные пластины (окна). Спецификация материала МОС101. – URL: http://elektrosteklo.ru/FRG_rus.htm.

ФОРМИРОВАНИЕ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ В РАМКАХ УЧЕБНЫХ ПРЕДМЕТОВ ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

Ю.В. Чернобровкина
МБОУ – лицей №4 г. Орла
e-mail: *nikeli2009@yandex.ru*
И.И. Чернобровкина, к.пед.н., доц.
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *iichernobrovkina@yandex.ru*

В рамках современного образования, когда учащийся рассматривается, как активный субъект учебной деятельности, вопрос повышения мотивации школьников является одним из центральных. Современный учитель должен не только грамотно изложить материал, но и заинтересовать в нем обучающегося. Одним из эффективных методов повышения мотивации школьников служит формирование у них межпредметных связей. В ситуации, когда на уроках перед учащимися ставятся практические задачи на стыке наук, процесс обучения становится для них более запоминающимся и интересным. Соответственно, программа усваивается активнее и результативнее, выстраивается представление о взаимосвязи наук, что способствует формированию целостной картины мира [2].

Рассмотрим пример формирования межпредметных связей в 9 классе. В курсе информатики 9 класса предусмотрено изучение большого раздела «Обра-

ботка числовой информации в электронных таблицах» [1]. В том числе, учащиеся знакомятся с построение графиков средствами программного продукта Excel. Заметим, что в курсе алгебры в это время рассматриваются графики прямой, параболы и гиперболы, а также свойства данных функций. Кроме того, задания, связанные с графиками указанных функций входят в перечень заданий основного государственного экзамена (ОГЭ). В связи с чем построение средствами электронных таблиц графиков указанных функций позволит не только повысить интерес к изучению темы, но и обобщить и закрепить знания, полученные на уроках математики.

Рассмотрим алгоритм построения данных функций. Для каждой функции рекомендуется создать отдельный «Лист» и ввести исходные значения.

Для каждой функции задаются исходные значения координаты X (для примера, от -4 до 4 для первых двух функций, от -8 до 8 – для третьей), и задаются соответствующие формулы. При этом формулы предварительно озвучивают учащиеся (предварительный опрос), поскольку с этим материалом они уже знакомы. Все формулы выписываются на доску. Программная реализация формул указана на рисунке 1.

Функционал Excel позволяет не записывать формулу отдельно для каждого значения X, а «протянуть» первую. В результате чего значения будет посчитано для каждой абсциссы. Обратим внимание на то, что значения коэффициентов меняться не должны, поэтому ссылки на их ячейки фиксируются с помощью символа «$».

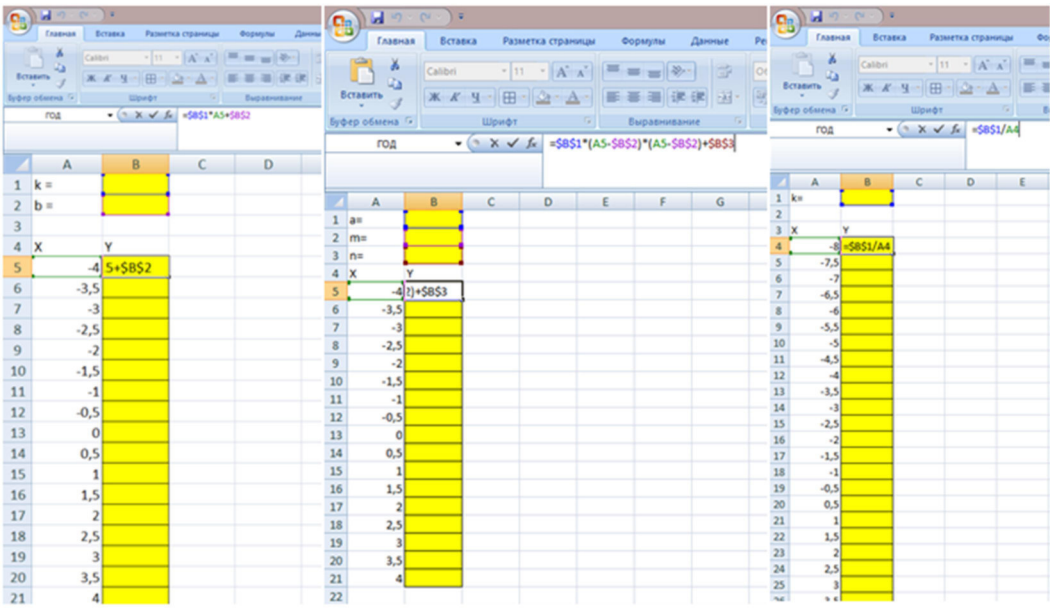


Рисунок 1 – Исходные данные

По вычисленным данным строятся графики. Для этого во вкладке «Вставка» выбирается график «Точечная», а затем «Точечная с гладкими кривыми и маркерами» (рисунок 2).

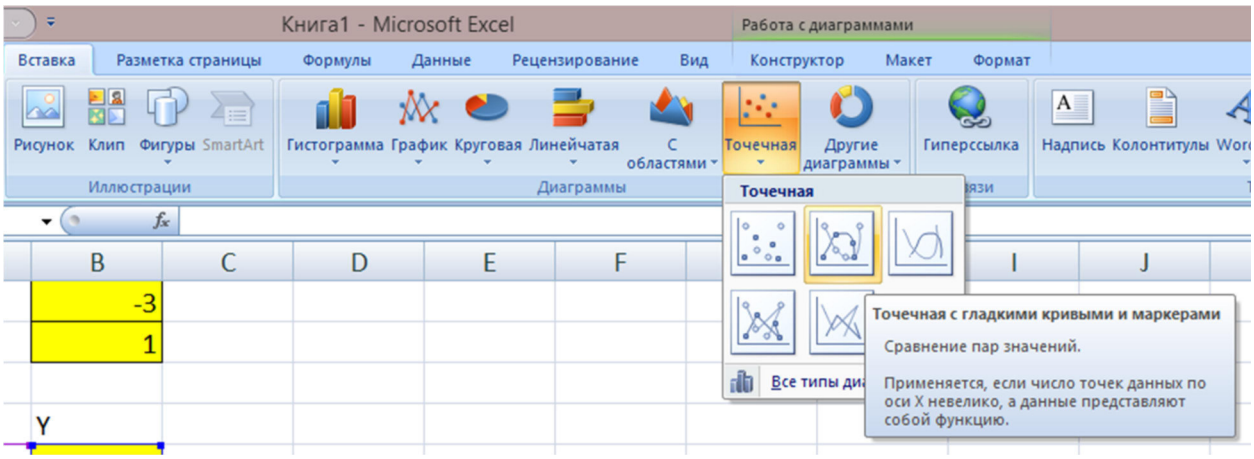


Рисунок 2 – Построение графика

В качестве данных выбираются значения ординаты, а подпись заменяются на значения абсцисс (рисунок 3). В результате для каждой функции будет построен график.

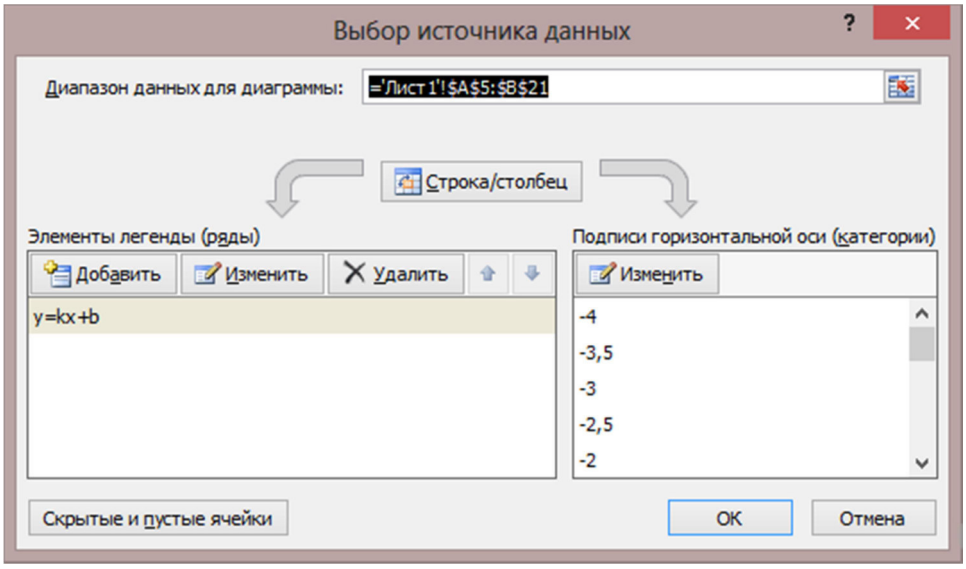


Рисунок 3 – Выбор источника данных

Изменяя коэффициенты, учащиеся могут наглядно проследить, как меняется график функции (рисунки 4-6) и сделать соответствующие выводы.

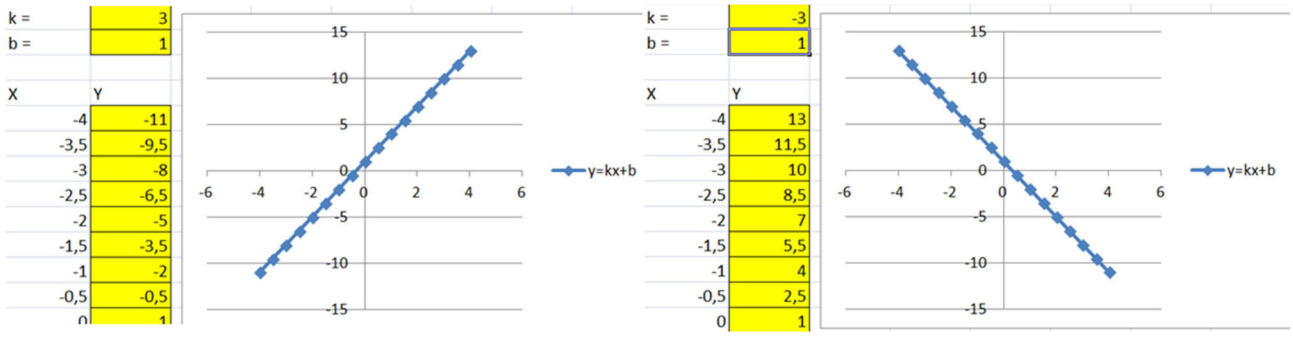


Рисунок 4 – Графики прямых

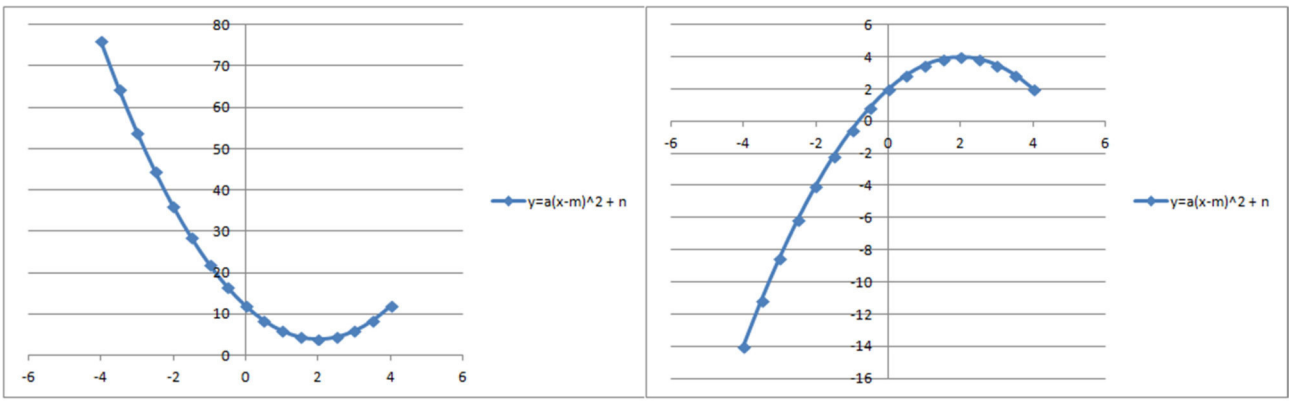


Рисунок 5 – Графики парабол

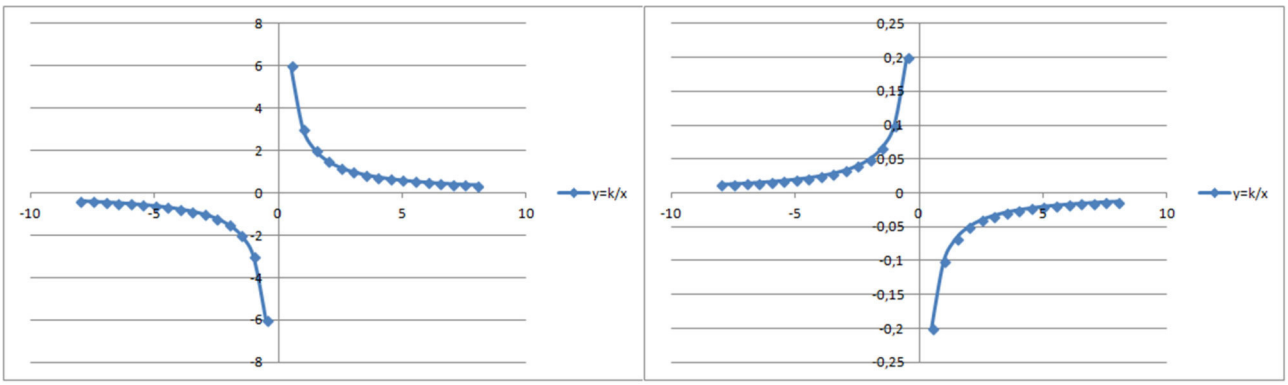


Рисунок 6 – Графики гипербол

Предметы математики и информатики обладают большим потенциалом для формирования межпредметных связей. Такое построение учебных и внеурочных занятий позволяет значительно повысить уровень усвоения материала школьниками за счет систематизации и повышения мотивации. В последовательном принципе межпредметных связей содержатся важные резервы дальнейшего совершенствования учебно-воспитательного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Босова Л.Л. Информатика : учебник для 9 класса. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний. – 2017. – 184 с. : ил.
2. Левченко И.В., Карташова Л.И. Использование межпредметных связей информатики для развития познавательной мотивации старшеклассников// Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. – 2010. – №1. – С. 35-40.

УДК 004.4

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ПРОВЕДЕНИЯ ОНЛАЙН ЗАНЯТИЙ

Г. А. Черных, к.ф.-м.н.
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: *german.ch@chgerman.com*

Предлагается решение, расширяющее возможности и повышающее комфорт онлайн преподавателя. Технология базируется на использовании комплекса специального программного обеспечения, которое позволяет, с одной стороны, значительно расширить функционал популярных сервисов онлайн видеоконференций, а с другой — автоматизировать процесс управления вышеупомянутым комплеком и, таким образом, избавить преподавателя от необходимости сложного технического сопровождения онлайн занятий. Основу комплекса составляют программа для записи видео и потокового вещания OBS Studio и управляющая программа, написанная на Autoit — языке автоматизации выполнения задач в Microsoft Windows.

Ключевые слова: Онлайн видеоконференция, OBS Studio, Autoit, потоковое вещание, Virtual Audio Cable.

Введение

В настоящее время востребованность различных онлайн сервисов, предоставляющих услуги по проведению видеоконференций, трудно переоценить. Очевидно, в первую очередь это связано с продолжающейся пандемией коронавируса и необходимостью проведения учебными заведениями своих занятий в онлайн формате. Для многих преподавателей это стало серьезным вызовом: появились проблемы как технического плана, связанные с изучением и использованием нового программного обеспечения, так и чисто психологические, например, вызванные отсутствием привычного контакта с аудиторией. В таких условиях существенную роль начинает играть технико-технологическая составляющая онлайн занятий: качество видео и звука, отсутствие различных ошибок и сбоев, вызванных человеческим фактором и т.п. Преподаватель, который проводит онлайн встречу на высоком профессиональном уровне не только в смысле содержательной части урока, лекции или семинара, но и с точки зрения качества контента, будет гораздо более уверен в своих силах и получит значительно больше удовлетворения от своего труда, что несомненно повлияет на качество его онлайн занятий. К сожалению, далеко не все преподаватели осознают важность наличия высокого качества аудио-видео материала, который в результате получают обучающиеся. В частности, это проявляется в низкой мотивации к настройке и тестированию оборудования, а также программного обеспечения для видеоконференций, в чем можно убедиться, присутствуя на различных учебных и научных онлайн мероприятиях даже высокого уровня. Необходимо особо подчеркнуть, что контент, который передается слушателям — это фактически, основное звено, связующее преподавателя с его учениками или студентами. Многие имеющиеся в настоящий момент платформы, предназначенные для проведения видеоконференций или даже специально позиционирующиеся в качестве сред онлайн обучения, имеют те или иные недостатки, к которым в частности, можно отнести высокую плату за использование, необходимость развертывания на собственном сервере, сложность управления, небогатый набор функциональных

возможностей и др. В настоящей работе предлагается решение, которое свободно от большинства вышеперечисленных проблем и может претендовать на статус универсального. Пожалуй, единственная сложность заключается в вероятной необходимости первичной настройки системы под требования пользователя, которую, однако, может провести любой человек, обладающий базовыми навыками программирования, к примеру, системный администратор учебного заведения или сам преподаватель. В настоящий момент имеется реализация только под операционную систему Windows поскольку задействован язык автоматизации задач Autoit [1]. Однако при использовании подходящего аналога систему можно будет легко развернуть и под другими ОС. Следует подчеркнуть, что описываемый в настоящей работе комплекс в большей степени должен быть полезен при преподавании естественных, технических или компьютерных наук, где может потребоваться частое переключение между камерой (если преподаватель использует белую доску или флипчарт, а не графический планшет) и рабочим столом компьютера, где т демонстрируется презентация, видео и т.п.

Описание комплекса

Имеется три ключевых компонента комплекса со следующими условными названиями: микшер, коннектор и автоматизатор. Микшер получает видео и аудио из различных источников, обрабатывает, сводит, записывает и передает созданный аудио-видео контент коннектору. Задача коннектора — передать полученные аудио и видео потоки слушателям онлайн занятия, получить от них аналогичную информацию и перенаправить микшеру. Автоматизатор оптимизирует задачу управления связкой источник — коннектор. Коннектором в данной системе может служить любое программное обеспечение, выполняющее роль клиента видеоконференций. В настоящее время одним из наиболее популярных клиентов является Zoom [2], поскольку имеет интуитивный интерфейс и прост в освоении даже людьми, имеющими минимальный уровень навыков работы на компьютере. Несмотря на некоторые имеющиеся проблемы, Zoom имеет ряд серьезных преимуществ, которые делают его максимально востребованным: надежность связи, нетребовательность к ресурсам и возможность на одном экране получить изображения всех собеседников. Последнее, является для преподавателя одним из ключевых факторов, обеспечивающих комфортный контакт с аудиторией при онлайн занятии. Именно клиент видеоконференций Zoom выбран в качестве коннектора в нашей системе. Известно, что клиент Zoom позволяет вести запись, переключаться между камерой и рабочим столом компьютера, а также предоставляет некоторые другие полезные функции, в частности, замену фона на другой, что наиболее качественно работает при наличии хромакея. Казалось бы, вполне достаточно только клиента Zoom, чтобы покрыть все потребности: запись, получение и передача видео с камеры и рабочего стола компьютера. Однако, средствами Zoom невозможно сформировать видео картинку

по своему усмотрению, к примеру, наложить видео с камеры на видео с рабочего стола и т.п.; запись, которую делает Zoom, сравнительно низкого качества в случае, если видео поступает с камеры; качество аудио низкого качества; довольно проблематично сделать так, чтобы в запись попадало только видео, идущее от преподавателя, что актуально для сохранения приватности слушателей; и т.д. Таким образом, клиент Zoom нельзя рассматривать как универсальное решение для проведения качественных онлайн занятий. Поэтому и возникает необходимость в дополнительном программного обеспечении, которые могло бы взять на себя задачи по записи и гибкому формированию аудио и видео ряда. Подобным программным обеспечением является хорошо известная и популярная в среде блогеров и так называемых стримеров, среда OBS Studio [3]. По-сути, OBS Studio — это универсальный аудио и видео микшер, который помимо богатых возможностей обработки звука и видео в реальном времени с помощью фильтров, позволяет вести еще и потоковую передачу сформированного контента на различные онлайн сервисы, что предоставляет преподавателю возможность трансляции своего занятия, к примеру, в youtube. Кроме того, в OBS Studio имеется система плагинов — стороннего программного обеспечения, значительно расширяющего базовую функциональность. Очевидно, что задача управления связкой OBS Studio – клиент Zoom может быть затруднительной не только в процессе занятий, но на стадии подготовки и запуска, так как потребует специфических знаний и навыков. Здесь на помощь могут придти специальные устройства, которые обычно и используют полупрофессиональные блогеры и стримеры — контроллеры (панели) для стриминга, представляющие собой панель с кнопками, которые можно запрограммировать на выполнение определенной последовательности действий на компьютере. Однако, подобные устройства довольно дороги, и их массовое использование в бюджетных учебных заведениях вряд ли возможно. Автоматизатор в нашем комплексе является программной альтернативой панели для стриминга, написан на языке Autoit, имеет графический интерфейс и полностью берет на себя весь процесс контроля и управления. То есть, преподаватель до, в процессе и после занятия имеет дело только с одной программой, работа с которой максимально проста. Помимо OBS Studio, Zoom и Autoit-программы в системе используются виртуальные аудио кабели [4], которые необходимы для передачи аудио между различными компонентами.

На рисунке 1 представлена схема комплекса. Следует учитывать, что работа с видео отличается от работы с аудио. Видео с камеры, рабочего стола и других источников медиа контента (аудио и видео файлы, изображения) поступает в OBS Studio, где используется для формирования различных видео сцен (в терминологии OBS Studio), между которыми можно переключаться. К примеру, можно сделать несколько статических или динамических заставок для различных занятий, наложить на видео с рабочего стола компьютера видео с камеры, чтобы слушатели видели преподавателя, когда он что-то показывает на рабо-

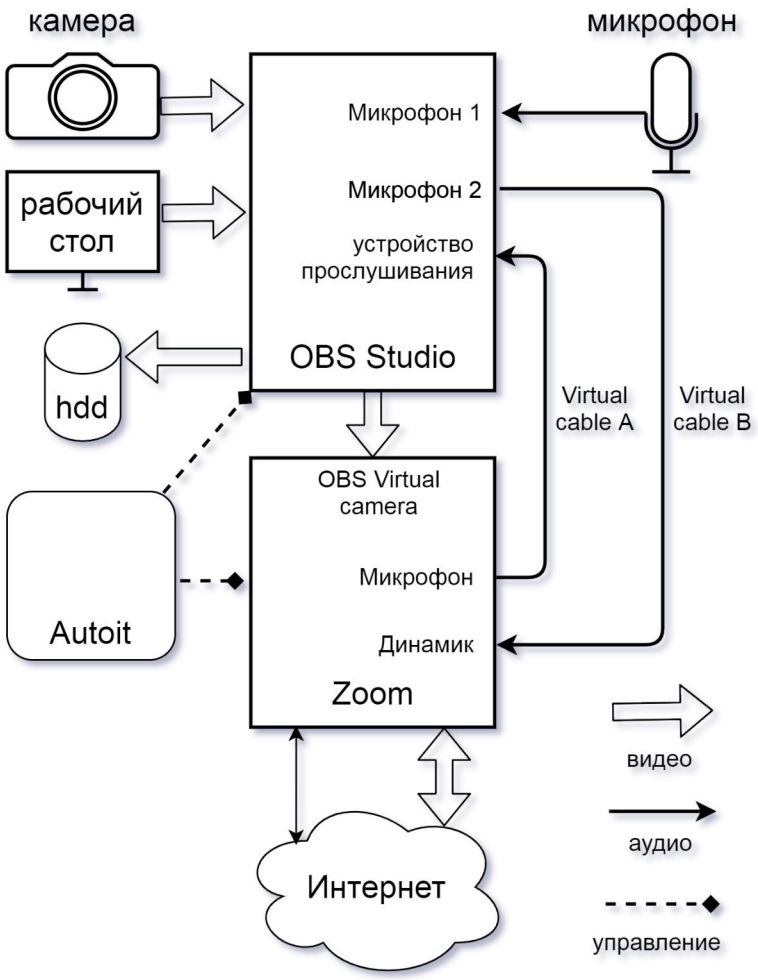


Рисунок 1 – Структурная схема комплекса.

чем столе компьютера и т.п. Видео с выбранной сценой поступает в Zoom и далее транслируется слушателям. Zoom, как и другие подобные программы в качестве источника видео может работать только с установленными в системе камерами. При установке OBS Studio в систему инсталлируется новое виртуальное устройство OBS Virtual camera, которое и нужно выбирать в настройках Zoom в качестве камеры. Для настройки аудио необходимо установить еще два виртуальных устройства Virtual audio cables [4]. Один виртуальный аудио кабель нужно использовать для передачи аудио потока из Zoom в OBS Studio с целью записи голосов слушателей вместе с видео. Второй виртуальный кабель передает аудио поток из OBS Studio в Zoom. В настройках Zoom в качестве динамика и микрофона нужно указывать виртуальные аудио кабели. Важно также в настройках звуковых устройств, которые операционная система считает источниками звука, указать прослушивание для виртуального кабеля А (см. рис. 1). Последнее необходимо для того, чтобы преподаватель слышал участников. Описанная конфигурация передачи аудио исключает появление эхо.

На рисунке 2 показано состояние интерфейса программы управления, написанной на Autoit автором статьи для чтения собственных лекций. При нажа-



Рисунок 2 – Интерфейс программы управления непосредственно после своего запуска.

тии на кнопку START запускается Zoom (при этом автоматически вводятся имя и пароль пользователя Zoom), далее запускается OBS Studio и проводятся необходимые настройки: включается виртуальная камера и нужная сцена. Кнопка START переводится в состояние STOP, и повторная активация кнопки приведет к останову сервисов и закрытию всех программ. Нажатие на кнопку AIR OFF включает конференцию Zoom, начинает запись встречи и совершает переключение со сцены заставки курса на сцену демонстрации видео с камеры. Начинается занятие. В процессе занятия преподаватель может быстро переключаться с камеры на рабочий стол и обратно. Все кнопки имеют два состояния и меняют цвет при нажатии, что помогает преподавателю быстро определить состояние системы. Интерфейс программы управления, как и ее функционал, могут быть изменены под любые задачи. Язык Autoit прост и интуитивно понятен, поэтому для написания программ на нем не требуется глубокого погружения. Автору настоящей статьи потребовался день для изучения необходимого функционала языка и создания программы управления. В качестве примера приведем код, который запускает Zoom, затем вводит имя и пароль пользователя.

```
Run("путь к исполняемому файлу Zoom")
Sleep(3000)
WinActivate("заголовок окна Zoom")
Send("{TAB 2}{ENTER}")
Send("логин Zoom")
Send("{TAB}")
Send("пароль зум")
Send("{ENTER}"),
```

Здесь команда Run запускает приложение, Sleep — пауза в миллисекундах, команда Send эмулирует нажатие клавиш на клавиатуре, WinActivate делает окно активным (текущим). Последовательность действий следующая: запуск Zoom, ожидание, активация окна, нажатие клавиши табуляции два раза и один раз Enter (нужно, чтобы курсор оказался в поле ввода логина), ввод логина, нажатие клавиши табуляции, ввод пароля, нажатие Enter.

Язык Autoit предоставляет различные возможности для взаимодействия с приложениями. В частности, имеется инструмент, который позволяет получить идентификаторы объектов графического интерфейса с целью воздействия на последние в процессе выполнения кода. Одним из наиболее простых способов управления другим приложением из кода Autoit является посылка сочетаний горячих клавиш, которые заранее определены в управляемом приложении. OBS Studio предоставляет богатые возможности для назначения сочетаний горячих клавиш, а также сохранения и загрузки профилей настроек. Таким образом, возможно написание универсальных сценариев управления с целью последующего быстрого развертывания на разных компьютерах пользователей.

Заключение

Описанный в настоящей работе комплекс автор использует в течение полугода для чтения лекций по программированию, физике и математике на факультете свободных искусств и наук Санкт-Петербургского государственного университета. По отзывам студентов переход на онлайн обучение для курсов автора произошел максимально безболезненно. Студентам предоставляются записи всех лекций и семинаров в хорошем качестве. За время использования комплекса был прецедент установки на другой компьютер, что заняло около 15 минут. Следует подчеркнуть, что сам процесс установки может быть автоматизирован. Таким образом, можно заключить, что подобная система или ее аналог, будучи практически бесплатной, также, обладая простотой и достаточной гибкостью, может без труда быть использована в различных учебных заведениях при проведении онлайн занятий. При использовании дополнительных сервисов, которые могут быть без особого труда развернуты в учебном заведении, к примеру, Moodle [5] и Nextcloud [6], у преподавателей появятся практически безграничные возможности создания и хранения контента для своих занятий.

ЛИТЕРАТУРА

1. AutoIt. URL: https://www.autoitscript.com/site (дата обращения: 12.11.2020).
2. Zoom. URL: https://zoom.us (дата обращения: 12.11.2020).
3. Open Broadcaster Software. URL: https://obsproject.com (дата обращения: 12.11.2020).
4. VB-Audio Software. URL: https://vb-audio.com/Cable/ (дата обращения: 12.11.2020).
5. Moodle. URL: https://moodle.org (дата обращения: 12.11.2020).
6. Nextcloud. URL: https://nextcloud.com (дата обращения: 12.11.2020).

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ СТАНДАРТНОЙ БИБЛИОТЕКИ КОНТЕЙНЕРОВ STL ЯЗЫКА С++

Ю.В. Чижикова
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *detkovayv@mail.ru*

В статье рассматриваются методические аспекты изучения стандартной библиотеки шаблонов STL.

Ключевые слова: стандартная библиотека шаблонов, библиотека STL, методические приемы.

При изучении языка программирования С++ нельзя оставить без внимания такой важный его компонент как стандартная библиотека шаблонов.

Стандартная библиотека шаблонов (STL - Standard Template Library) это набор согласованных решений программирования, реализованный за счет классов контейнеров, средств доступа к ним, а также алгоритмов и различных вспомогательных функций в языке С++. STL содержит различные классы контейнеров, имеющих определенную структуру и применяемых для решения эффективных для данной структуры задач. Также в библиотеке реализован ряд алгоритмов, реализующих стандартные задачи. Алгоритмы поддерживают работу со всеми контейнерными классами. STL поддерживает парадигму обобщенного программирования, так как все её компоненты оформлены в виде шаблонов. Центральное место в библиотеке занимают три группы классов: контейнеры, итераторы и алгоритмы. Взаимодействие указанных групп позволяет использовать стандартные решения для многочисленных задач программирования. Главной целью включения STL в стандарт языка С++ является облегчение работы программиста, за счет реализации в алгоритмах библиотеки, стандартных действий с различными коллекциями базовых структур.

Следовательно, стандартная библиотека шаблонов является важной составляющей частью языка С++, а её изучение необходимо для его полноценного освоения.

Однако, на рассмотрение STL не всегда отводится достаточное количество времени. В случае необходимости изучения библиотеки в рамках ограниченного количества часов возникает проблема: как рассмотреть все компоненты и их свойства так, чтобы у слушателя сложилось целостное представление о структуре библиотеки и сформировалось умение её качественного использования.

В качестве перспективного варианта решения указанной проблемы можно рассмотреть многочисленные свойства контейнеров, многие из которых дублируются в разных их категориях. Таким образом, возможно, единожды рассмотрев метод контейнерного класса, указать все коллекции, которые его содержат.

В качестве примера реализации вышеобозначенного подхода имеет смысл использовать табличное представление свойств контейнеров (Таблица 1). Представленная таблица позволяет сразу рассмотреть такие свойства стандартной библиотеки STL как контейнерные классы, основные методы контейнерных

классов, общее описание методов, а также позволяет указать все контейнеры, в которых доступны данные методы.

Приведенная ниже таблица содержит следующую информацию: методы и операторы контейнерных классов, собранные в тематические группы, их общее описание, пять наиболее часто используемых категорий контейнеров (вектор, дек, список, множество и отображение). Знак «+» в соответствующей ячейке означает, что данный метод определен в указанном контейнере, его отсутствие, напротив, говорит о том, что данный метод в указанном контейнерном классе не определен.

Таблица 1 — Методы и операторы контейнерных классов

Метод	Описание	Контейнеры				
		vector	deque	list	set /multiset	map/ multimap
Создание, копирование и уничтожение						
ContType c	Создание пустого контейнера	+	+	+	+	+
ContType c1(c2)	Создание копии контейнера	+	+	+	+	+
ContType c(beg,end)	Создание контейнера и инициализация его копиями элементов полуоткрытого интервала [beg,end)	+	+	+	+	+
ContType c(n)	Создание контейнера из n элементов, созданных конструктором по умолчанию	+	+	+		
ContType c(n,elem)	Создание контейнера, инициализируемого n копиями элемента elem	+	+	+		
ContType c(op)	Создание пустого контейнера, использующего критерий сортировки **op**				+	+
ContType c(beg,end,op)	Создание контейнера с критерием сортировки **op** и инициализирующего его копиями всех элементов в полуоткрытом интервале [beg,end)				+	+
c.~ContType()	Удаление всех элементов контейнера и освобождение память	+	+	+	+	+
Операции с размером						
c.size()	Возвращает количество элементов контейнера	+	+	+	+	+
c.empty()	Определяет, пуст ли контейнер	+	+	+	+	+
c.max_size()	Определяет, максимально возможное количество элементов	+	+	+	+	+
c.resize(n)	Изменяет размер контейнера	+	+	+		
c.reserve(n)	Выделяет память для контейнера под n элементов	+				
c.capacity()	Определяет ёмкость вектора	+				
Сравнения						
==, !=, <, <=, >, >=	Операции сравнения	+	+	+	+	+
Присвоение и заполнение						
c1 = c2	Присваивает контейнеру **c1** всех элементов контейнера **c2**	+	+	+	+	+
c1.swap(c2)	Меняет местами содержимое контейнеров **c1** и **c2**	+	+	+	+	+
swap(c1,c2)	Меняет местами содержимое контейнеров **c1** и **c2**, но в формате глобальной функции	+	+	+	+	+

c.assign(n, x)	Присваивает контейнеру **n** копий элементов **x**	+	+	+		
c.assign(beg, end)	Присваивает контейнеру элементы из полуоткрытого диапазона **[beg, end)**	+	+	+		
Методы доступа к элементам						
c.front()	Возвращает первый элемент контейнера	+	+	+		
c.back()	Возвращает последний элемент контейнера	+	+	+		
operator [](i)	Возвращает элемент контейнера с индексом **i**	+	+			
c.at(i)	Возвращает элемент контейнера с индексом **i** с проверкой существования	+	+			
Вставка элементов						
c.insert(p, x)	Добавление элемента **x** перед элементом, на который указывает итератор **p**	+	+	+	+	+
c.insert(p, beg, end)	Добавление элементов из диапазона **[beg, end)** перед итератором **p**	+	+	+	+	+
c.insert(p, n, x)	Добавление **n** копий элемента **x** перед итератором **p**	+	+	+		
c.insert(x)	Добавление элемента **x** в контейнер				+	+
c.push_back(x)	Добавление элемента **x** в конец контейнера	+	+	+		
c.push_front(x)	Добавление элемента **x** в начало контейнера		+	+		
Удаление элементов						
c.pop_back()	Удаление последнего элемента	+	+	+		
c.pop_front()	Удаление первого элемента		+	+		
c.erase(p)	Удаление элемента в позиции итератора **p**	+	+	+	+	+
c.erase(beg, end)	Удаление элементов из диапазона **[beg, end)**	+	+	+	+	+
c.erase(x)	Удаление всех элементов со значением **x**				+	+
c.remove(val)	Удаляет все элементы со значением **val**			+		
c.remove_if(op)	Удаляет все элементы, для которых операция **op(elem)** возвращает **true**			+		
c.clear()	Удаление всех элементов	+	+	+	+	+
Получение итераторов						
c.begin()	Возвращает итератор для первого элемента	+	+	+	+	+
c.end()	Возвращает итератор для позиции за последним элементом	+	+	+	+	+
c.rbegin()	Возвращает обратный итератор для первого элемента при переборе в обратном направлении	+	+	+	+	+
c.rend()	Возвращает обратный итератор для позиции за последним элементом при переборе в обратном направлении	+	+	+	+	+
Другие операции STL						
c.count(k)	Возвращает количество элемент со значением **k**				+	+
c.find(k)	Возвращает позицию первого элемента со значением **k**				+	+
c.lower_bound(k)	Возвращает первую позицию, в которую может быть вставлен элемент **k**, т.е. первый элемент больший либо равный **k**				+	+
c.upper_bound(k)	Возвращает последнюю позицию, в которую может быть вставлен элемент **k**, т.е. пер-				+	+

	вый элемент больший **k**					
c.equal_range (k)	Находит **lower_bound** (нижнюю границу) и **upper_bound** (верхнюю границу) элементов с ключом **k**				+	+

Помимо значительного сокращения времени на рассмотрение всех многочисленных свойств контейнеров, приведенное табличное представление свойств коллекций может быть использовано также для визуального иллюстрирования совпадений и различий в работе контейнерных классов, а также является хорошей «шпаргалкой» при практическом программировании на языке C++ с использованием библиотеки STL.

Представленный табличный подход имеет широкие возможности для дальнейших модификаций, заключающихся, например, в добавлении рассматриваемых свойств и/или контейнерных классов.

Данный «табличный» подход к рассмотрению свойств контейнеров был удачно апробирован на практике. Использование данного подхода позволило достаточно быстро рассмотреть тему свойств контейнерных классов. Структура таблицы была для слушателей интуитивно понятна, они быстро ориентировались в её содержании. При решении практических задач слушатели также быстро и точно находили нужные для решения задачи свойства контейнеров. В итоге за короткое время было сформировано целостное представление о структуре библиотеки STL и выработаны умения практического использования инструментов библиотеки.

Таким образом, использование в освоении темы STL рассмотренного подхода позволяет сократить время на изучение стандартной библиотеки шаблонов в рамках изучения языка C++.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николай М. Джосаттис «Стандартная библиотека C++. Справочное руководство». — Вильямс. — 2014. 1136 с.
2. Яцек Галовиц C++17 STL. Стандартная библиотека шаблонов. — Питер. — 2017. 432 с.

УДК 378.14

УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ПРОЕКТЫ ПО ПРОФИЛЬНЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

Е.О. Шумакова, к.ф.-м.н.
Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет
e-mail: *shumakovaeo@cspu.ru*
А.М. Шарафутдинова, к.ф.-м.н.
Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет
e-mail: *kuznetsovaam@cspu.ru*
Ю.А. Ахкамова, к.ф.-м.н.
Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет
e-mail: *akhkamovayua@cspu.ru*
Ю.В. Алябьева
Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет
e-mail: *ayv_07@mail.ru*

В работе описаны преимущества использования в учебном процессе учебно-исследовательских проектов по математическим дисциплинам. Отмечены примеры реализованных проектов и условия их реализации.

Ключевые слова: учебно-исследовательский проект, алгебра, геометрия, теория групп.

Эффективным инструментом, позволяющим обеспечивать высокий уровень сформированности метапредметных результатов обучения бакалавров педагогического образования, являются учебно-исследовательские проекты, выполняемые в процессе изучения профильных математических дисциплин [1, 2, 3].

Решение межпредметных задач в рамках учебно-исследовательских проектов позволяет эффективно организовать проектную деятельность бакалавров. Такая работа обеспечивает перенос знаний из одной предметной области в другую [4]. Профильные математические дисциплины дают большие возможности для выбора тем и содержания учебно-исследовательских проектов [1, 5].

По результатам ЕГЭ выпускников школ самыми сложными заданиями являются задания по геометрии. Данная проблема проявилась с исчезновением из общего образования черчения, усугубилась заменой раздельного изучения алгебры и геометрии изучением единого предмета «Математика». Это во многих случаях привело к смещению акцентов преподавания математики в сторону изучения алгебры. Сложности в геометрических представлениях отражаются и на качестве восприятия студентами инженерной графики, начертательной и элементарной геометрии, а так же многих абстрактных понятий математики, аксиоматического подхода в построении математических дисциплин. Для студентов 1-2 курсов такие понятия курса алгебры, как: группа, аксиомы группы, таблица Кэли, циклическая группа, порядок элемента группы, кольцо, делители нуля, область целостности являются сложными. Усвоение этих понятий уча-

щимися происходит поверхностно, а значит навыки и умения, необходимые для дальнейшего изучения курса алгебры, формируются недостаточно. Эту проблему помогают решить межпредметные учебно-исследовательские проекты: свойства функций в группах и кольцах, приложения теории многочленов в информатике, построение таблиц характеров конечных групп, алгоритмы для исследования обратимых элементов в групповых кольцах, группа симметрий правильного многоугольника, группа преобразований подобия и ее основные подгруппы, группа аффинных преобразований плоскости и ее основные подгруппы и т.п.

Увеличение объема самостоятельной работы в учебных планах, все большее использование элементов дистанционного обучения обуславливают необходимость использования компьютерного моделирования в организации учебной деятельности. Программные продукты дают возможность визуализации различных геометрических объектов и помогают провести компьютерный эксперимент.

В современной теории конечных групп наряду с абстрактными теоретико-групповыми методами исследования широко и плодотворно используются методы теории представлений. Теория представлений нашла своё применение в кристаллографии и квантовой механике, имеет много приложений в теории конечных групп, устанавливает связи с теорией представлений алгебр и раскрывает фундаментальное значение теоретико-числовых вопросов в теории групп и теории представлений. Теория представлений находит своей применение при описании строения групп обратимых элементов центров целочисленных групповых колец [6, 7]. Приведем примеры результатов, полученных при реализации некоторых проектов.

При реализации учебного проекта была построена таблица характеров группы Фробениуса порядка 39 $F_{39} = \langle b \rangle_{13} \leftthreetimes \langle a \rangle_3$ (таблица 1).

Таблица 1 – Таблица характеров группы Фробениуса порядка 39

$\lvert x^G \rvert$	1 1	3 b	3 b^2	3 b^{-1}	3 b^{-2}	13 a	13 a^2
χ_0	1	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	1	1	α	α^{-1}
χ_2	1	1	1	1	1	α^{-1}	α
χ_3	3	φ_1	φ_2	$\overline{\varphi_1}$	$\overline{\varphi_2}$	0	0
χ_4	3	φ_2	$\overline{\varphi_1}$	$\overline{\varphi_2}$	φ_1	0	0
χ_5	3	$\overline{\varphi_1}$	$\overline{\varphi_2}$	φ_1	φ_2	0	0
χ_6	3	$\overline{\varphi_2}$	φ_1	φ_2	$\overline{\varphi_1}$	0	0

здесь $\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $\zeta = \cos\frac{2\pi}{13} + i\sin\frac{2\pi}{13}$, $\varphi_1 = \zeta^9 + \zeta^3 + \zeta$, $\varphi_2 = \zeta^2 + \zeta^6 + \zeta^5$.

При построении такой таблицы потребовались базовые знания об отображениях, матрицах, комплексных числах, тригонометрических функциях и их свойствах, а так же углубленное изучение строения группы Фробениуса. Обяза-

тельным условием для его реализации является завершение изучения таких дисциплин, как элементарная математика, вводный курс математики, алгебра (разделы: линейная алгебра и основы теории групп).

Учебно-исследовательский проект о группе симметрий правильного многоугольника заключался в подробном изучении группы диэдра, а так же построении ее подгрупп и классов сопряженных элементов. Так для группы $D_{12} = \langle a, b | a^2 = b^6,\ aba = b^{-1} \rangle = \langle b \rangle_6 \leftthreetimes \langle a \rangle_2$ построено 6 классов сопряженных элементов $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ и 16 подгрупп $H_0, \dots, H_{15}$:

$C_0 = \{1\}, \quad C_1 = \{b, b^5\}, \quad C_2 = \{b^2, b^4\}, \quad C_3 = \{b^3\},$

$C_4 = \{a, ab^2, ab^4\}, \quad C_5 = \{ab, ab^3, ab^5\}.$

$H_0 = \langle b \rangle_6, H_1 = \langle b \rangle_6 \leftthreetimes \langle a \rangle_2 = D_{12}, H_2 = \langle b \rangle_6, H_3 = \langle b^2 \rangle_3,\ H_4 = \langle b^3 \rangle_2, H_5 = \langle a \rangle_2$

$H_6 = \langle ab \rangle_2,\ H_7 = \langle ab^2 \rangle_2,\ H_8 = \langle ab^3 \rangle_2, \quad H_9 = \langle ab^4 \rangle_2,\ H_{10} = \langle ab^5 \rangle_2,$

$H_{11} = \langle b^2 \rangle_3 \leftthreetimes \langle a \rangle_2, \quad H_{12} = \langle b^2 \rangle_3 \leftthreetimes \langle ab \rangle_2,\ H_{13} = \langle b^3 \rangle_2 \leftthreetimes \langle a \rangle_2,$

$H_{14} = \langle b^3 \rangle_2 \leftthreetimes \langle ab \rangle_2,\ H_{15} = \langle b^3 \rangle_2 \leftthreetimes \langle ab^2 \rangle_2.$

Обязательным условием для реализации этого проекта является завершение изучения таких дисциплин, как элементарная математика, вводный курс математики, алгебра (разделы: линейная алгебра и основы теории групп), геометрия (в частности, разделы: преобразования плоскости, движения плоскости). Отметим, что в программу изучения основ теории групп входит подробное изучение циклических групп, теоремы о количестве и структуре их подгрупп, в то время как группа диэдра приводится в качестве примера некоммутативной группы и не изучается подробно. От учащихся требуется самостоятельное изучения литературы по теории групп. С другой стороны, в рамках курса геометрии понятие группы симметрий правильного многоугольника возникает при изучении раздела «Движения плоскости». Таким образом, ценность описанного проекта состоит в установлении связи между соответствующими разделами алгебры и геометрии, что позволяет формировать у студентов идею единства двух важных математических дисциплин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.М., Вагина М.Ю., Шамаева Т.Н. Организация учебных проектов по профильным математическим дисциплинам для бакалавров педагогического образования // Информация и образование: границы коммуникаций. – 2018. – № 10 (18). – С. 231–233.
2. Шумакова Е.О., Севостьянова С.А. Формирование проектных умений в учебных проектах бакалавров по профильным математическим дисциплинам // Современные проблемы науки и образования. – 2018. – № 5. – С. 195.
3. Севостьянова С.А., Мартынова Е.В., Нигматулин Р.М., Шумакова Е.О. Формирование проектных умений будущих учителей математики при выполнении методических проектов // Современные наукоемкие технологии. – 2019. – № 10-2. – С. 360-365.
4. Бирюкова, Н.В. Межпредметные задачи как средство повышения эффективности процесса обучения математике студентов аграрного вуза // Мир науки, культуры, образования. – 2018. – № 6 (73). –С. 250-253.

5. Винтиш Т.Ю., Мартынова Е.В., Прокопенко Г.И. Формирование творческих способностей студентов в процессе решения математических // Подготовка профессиональных управленческих кадров: опыт, проблемы, инновационные образовательные технологии. – Челябинск: Челябинский фил. РАНХиГС. – 2015. – С. 45–49.
6. Шумакова Е.О. Центральные единицы целочисленных групповых колец диэдральных и близких к ним групп // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2008. – Том 14. – №4. – С. 172-184.
7. Шумакова Е.О. Центральные единицы целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса // Сибирские электронные математические известия. – 2008. – Том 5. – С. 691-698.

УДК 37

ЛЕКЦИОННАЯ ДЕМОНСТРАЦИЯ МОДЕЛИ ПРИНЦИПА АВТОФАЗИРОВКИ НА ПРИМЕРЕ МАЯТНИКА ДУБОШИНСКОГО

В.Н. Юшин, к.пед.н., доц.
Академия ФСО России
e-mail: *viktor-yushin@yandex.ru*

В курсе общей физики при изучении циклических ускорителей необходимо рассмотреть принцип автофазировки, сформулированный советским физиком В. И. Векслером и независимо от него американским физиком Э. Макмилланом.

В циклотроне частицы движутся в стационарном магнитном поле при постоянной частоте ускоряющего напряжения. В этом случае частота ускоряющего поля находится в резонансе с частотой вращения частиц.

Однако при достижении достаточно большой энергии и, следовательно, скорости начинает сказываться эффект замедления времени. При этом условие резонанса между ускоряющим полем и периодом обращения частиц нарушается. Это приводит к тому, что в циклотроне существует предельная энергия, до которой можно ускорять частицы. Для протонов она приблизительно равна 20 Мэв.

Для сохранения резонанса или снижают частоту ускоряющего поля (в фазотронах) или в соответствии с уменьшением частоты обращения изменяют напряженность магнитного поля (в синхротронах), или изменяют и частоту ускоряющего поля, и напряженность магнитного поля (в синхрофазотронах).

В этих типах ускорителей одновременно ускоряются огромное число частиц, которые несколько различаются по частоте вращения.

Принцип автофазировки утверждает, что в этом случае само поле будет автоматически синхронизировать частоты обращения большинства частиц. Другими словами в этом случае резонанс наблюдается в среднем, а фазы частиц колеблются около равновесной (синхротронной) фазы.

В учебном пособии [1, с. 14] было рекомендовано в качестве наглядной модели процесса автофазировки использовать маятник Дубошинского, который был предложен авторами работы [2].

Подобный маятник целесообразно использовать в качестве лекционной демонстрации. Внешний вид установки показан на рисунке 1.

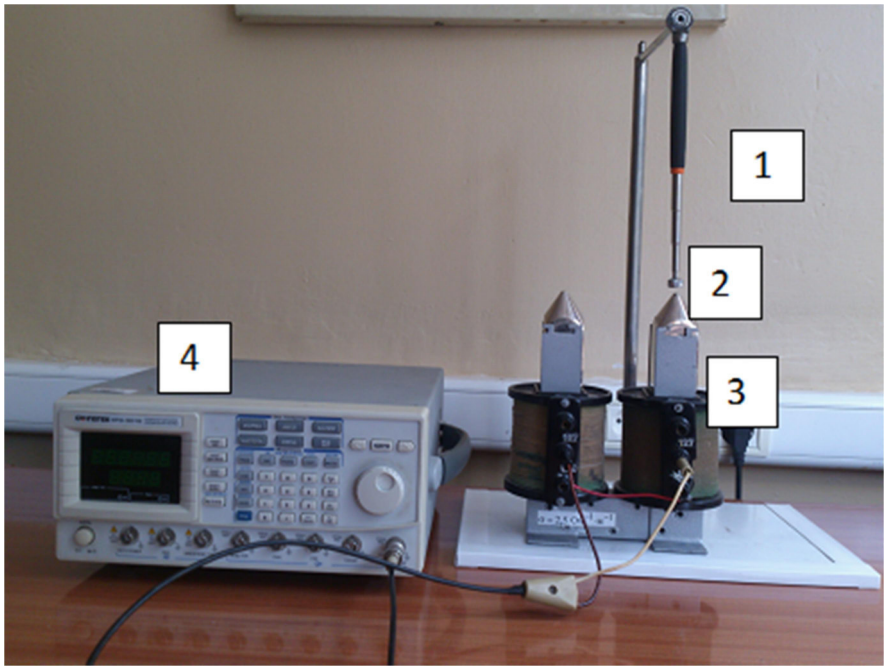


Рисунок 1 – Внешний вид установки

Она состоит из маятника (1), на конце которого закреплен постоянный магнит (2), а ось закреплена в небольшом подшипнике. Маятник изготовлен из немагнитной телескопической трубки, которая позволяет легко изменять его длину (такой магнит можно приобрести в магазине). В нашем случае длина маятника 22,5 см. При колебаниях маятника магнит взаимодействует с переменным полем катушки (3) в некотором небольшом интервале вблизи положения равновесия. Катушка с железным сердечником питается от генератора (4) с переменной частотой 9,29 Гц и амплитудой 10 В. При малых начальных отклонениях от положения равновесия маятник совершает очень малые вынужденные колебания на частоте генератора. При увеличении начального отклонения возможно возникновение стационарных колебаний на частоте ~ 1,3 Гц, близкой к собственной частоте колебаний маятника.

Процесс автофазировки в этом случае можно пояснить следующим образом. Если магнит влетает в ограниченное пространство взаимодействия с катушкой в противофазе с переменным магнитным поле катушки, то происходит замедление движения магнита маятника в начале пути. Тогда большую часть оставшегося времени взаимодействия маятник будет находиться в ускоряющем поле. Наоборот, при движении маятника в фазе, совпадающей с нарастанием ускоряющего поля, скорость его увеличивается. Если изменение направления

поля на противоположное происходит в конце взаимодействия магнита с полем катушки, то оно не успевает затормозить движений маятника. При этом компенсации ускорения не происходит.

Аналогичный процесс подстройки в движении зарядов в ограниченном пространстве взаимодействия с переменным электрическим полем циклического ускорителя приводит к выполнению условия резонанса.

Заметим, что данная установка может использоваться при изучении автоколебаний и позволяет расширить представления обучаемых об этом явлении.

К автоколебаниям традиционно относят системы, которые преобразующие энергию постоянного источника в энергию колебаний. При этом, характерными признаками автоколебательных систем являются независимостью амплитуды установившихся колебаний от начального состояния и частотой колебаний, определяемой самой системой. Однако для возбуждения автоколебаний наличие постоянного источника энергии не является обязательным. Автоколебания могут возникать под действием внешнего источника, частота которого выше частоты возбуждаемых автоколебаний [3]. В этом случае колебательная система регулирует поступление энергии таким образом, что за время взаимодействия с источником она получает толчки нужной величины и в нужной фазе. При этом наблюдаются колебания, возникающие на собственной частоте в системе на которую действует внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону с более высокой частотой, которая является нерезонансной и не кратной частоте собственных колебаний системы. При несоизмеримости частот колебательной системы и переменной внешней силы в случае, когда время взаимодействия системы с внешней гармонической силой ограничено, и система достаточно сильно изменяет время пролета через пространство взаимодействия, может наблюдаться положительный вклад энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рау В. Г. Основы теоретической физики. Физика атомного ядра и элементарных частиц. Учеб. Пособие/ В.Г. Рау. – М.: Высш. Шк. 2005. – 141 с.
2. Пеннер Д. И., Дубошинский Я. Б., М. И. Козаков Д. Б. // ДАН СССР 1972, Т 204. С. 1065.
3. Ланда П. С., Дубошинский Я. Б. Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии. // УФН. Т.158, вып. 4. 1989. С. 729-742.

УДК 378.016

ДОСТИЖЕНИЯ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ КАК ВАЖНЫЙ АСПЕКТ ПРЕПОДАВАНИЯ

Д.С. Яковлева, к.ф.-м.н., доц.
Петрозаводский государственный университет
e-mail: *darinaj@mail.ru*

В ходе преподавания курса общей физики в вузе на инженерных направлениях подготовки много времени уделяется физики минувших лет, однако достижения и направления работы современной физики зачастую остаются без внимания. Это приводит к неправильному формированию у студентов образа физики как науки прошлого. В статье предлагается уделить на учебных занятиях особое внимание физике сегодняшнего дня и будущим перспективам. Рассмотрены примеры актуальных направлений работы современной физики. Сделан вывод о необходимости такого занятия, позволяющего студентам получить представление о физике как "живой" науки современности и движущей силе научно-технического прогресса.

Ключевые слова: физика, современные открытия и достижения, методика преподавания.

На сегодняшний день курс общей физики преподается на всех инженерных направлениях подготовки. В отличие от физических факультетов и институтов, где студенты изучают физику на протяжении всего периода обучения, на инженерных специальностях предусмотрен лишь краткий курс общей физики, занимающий один-два семестра. При этом, как правило, количество часов, выделяемое на такой курс, невелико. Преподаватель успевает рассказать лишь самые азы общей физики из основных ее разделов.

В такой ситуации у студентов складывается впечатление, что физика – наука прошлого, ведь самые основные ее законы были открыты в 17 – 19 и начале 20-го веков, если преподаватель успеет дойти до теории относительности Эйнштейна и квантовой механики. Получается, что в процессе преподавания мы много говорим о физике прошлых лет и совсем ничего не говорим о физике сегодняшнего дня.

Современные студенты живут в быстроменяющемся мире. Ежедневно они просматривают, обрабатывают и усваивают огромные массивы информации. Сделать так, чтобы именно ваша информация обратила на себя внимание и отложилась в памяти, непросто. А учитывая тот факт, что очень часто инженеры воспринимают физику как необязательный предмет, поскольку не видят связи физики и своей специальности, требует больших усилий.

Еще одной особенностью современных студентов является ориентирование на практическую пользу получаемых знаний. Быстрый темп жизни и необходимость обрабатывать большой объем сведений не оставляют времени и желания для изучения бесполезных для дальнейшей жизни, по мнению студентов, дисциплин.

Поэтому крайне важно донести до студентов связь фундаментальной и прикладной науки, которую можно раскрыть только с помощью конкретных примеров. При этом приводимые примеры могут быть связаны как с непосредственной будущей деятельностью студента, так и иметь общечеловеческие аспекты.

Физика – это наука, которая дала тот уровень технического прогресса, результатами которого пользуется современное общество. Но если излагать только фундаментальные законы и положения физики, этой связи студенты не увидят. Поэтому необходимо постоянно делать акцент на прикладной аспект того или иного закона. Важно раскрыть студентам связь между физикой как фундаментальной наукой и повседневной жизнью человека. Это существенно повысит интерес к предмету, посещаемость, и мотивацию к его изучению. Потому как бы мало часов не было отведено на курс общей физики у инженеров, будет уместно сопровождать изложение материала наглядными примерами из жизни, и хотя бы один академический час, а лучше всю пару, посвятить достижениям современной физики, ее актуальным проблемам и перспективам развития.

Автор этой статьи уже более пятнадцати лет преподает общую физику в Петрозаводском государственном университете на инженерных направлениях подготовки. Преимущественно это были студенты агротехнических направлений, лесного хозяйства, студенты-математики и программисты. Однако не так давно стало понятно, что в преподавании курса общей физики отсутствует важная деталь – связь с физикой сегодняшнего дня. Поэтому год назад на основе анализа научных публикаций был разработан учебный материал, позволяющий познакомить студентов с самыми последними разработками и достижениями в области физики. Материал включает в себя презентацию, в которой собраны десять самых интересных разработок, а также устный доклад, сопровождающий показ презентации.

Следует отметить, что интересных инновационных разработок в современной физике гораздо больше, чем десять, но в силу ряда обстоятельств уместно остановиться именно на таком количестве освещаемых проблем. Во-первых, это ограничение по времени – стандартное время пары в девяносто минут не позволят полноценно рассказать обо всех открытиях, поскольку важно не только озвучить название, но и раскрыть суть научной проблемы. Во-вторых, от слишком быстрой смены картинок и большого объема сопровождающего текста слушатели быстро утомятся и можно потерять внимание аудитории. Так, например, была предпринята попытка увеличить число презентуемых достижений до двенадцати – и практика показала, что это уже перебор как для студентов, так и для самого докладчика. И, в-третьих, лучше сделать выбор в пользу качества подачи материала, а не его количества.

Перед началом доклада и показом презентации уместно будет объяснить слушателям характерные черты современной науки – это сложнейшее научное оборудование, большие денежные затраты, длительное время, и огромные коллаборации ученых со всего мира, объединяющиеся для решения конкретной научной задачи.

Первые два открытия презентации посвящены достижениям в области квантовой физики – это квантовый компьютер и квантовая телепортация. Трудность здесь заключается в том, что в курсе общей физики для инженеров не удается дойти непосредственно до физики квантовой. В лучшем случае преподаватель успеет рассказать, а студенты усвоить азы классической физики. Однако демонстрация на слайдах прототипов квантовых компьютеров может быть отличным поводом поговорить об основах квантовой физики, подчеркивая разницу между классическим и квантовым компьютером. Эта тема может быть особенно интересна будущим инженерам-программистам, учитывая, что уже сейчас в мире насчитывается не менее десятка языков программирования для квантовых компьютеров.

Следующая интересная и актуальная проблема рассматривает нанотехнологии и их практические аспекты применения. И здесь можно наблюдать странную ситуацию – все слышали этот термин, но лишь единицы могут объяснить, что это такое. Подавляющее большинство обучающихся не представляют, чем занимаются ученые в этой области. Это может быть связано с тем, что разработки из сферы нанотехнологий еще не вошли в нашу жизнь повсеместно, тем не менее, рассказ о современных направлениях исследований в области наноробототехники заслуживает внимания. Так, например, нанороботов рассматривают как перспективное средство в борьбе с ранее неизлечимыми заболеваниями, в том числе онкологическими, и на сегодняшний день сразу несколько крупных научных центров ведут исследования в этом направлении и уже представили прототипы.

Еще одной интересной проблемой современности является создание реактора термоядерного синтеза. Можно объяснить студентам, в чем разница между таким реактором и привычным там атомным, описать преимущества и недостатки, рассказать принцип действия и проблемы реализации такого реактора в земных условиях. На сегодняшний день в мире существует несколько таких проектов. Самым известным из них является международный проект ITER, реализуемый на территории Франции. Энергия термоядерного синтеза давно привлекала человечество, однако есть определенные трудности его воплощения и неоднозначная перспектива. Тем не менее, это также одна из обсуждаемых тем в современной физике.

К обсуждаемым проблемам современной физики можно отнести и получение стабильного металлического водорода. Это тоже давно известная проблема,

однако только сейчас ученые приблизились к ее решению. Создание такого материала поможет получить сверхпроводник при комнатной температуре, что дает большие перспективы практических применений – и это тоже может стать интересной темой для обсуждения в аудитории.

Кроме достижений, призванных сделать нашу повседневную жизнь лучше и удобнее, можно также рассказать и о достижениях в области прикладных разработок, которые пока не имеют практических приложений, но обогащают наши знания об устройстве мира. К таковым разработкам можно отнести открытие бозона Хиггса и пентакварка в Большом адронном коллайдере, а также открытие гравитационных волн в проекте LIGO. Следует подчеркнуть, что такого рода направления исследований пусть и не имеют пока практических приложений, но при их реализации в ходе постановки эксперимента разрабатываются новые технологии, новые методики исследований, конструируется новое оборудование, появляются новые специалисты с уникальными знаниями.

В презентации о достижениях современной физики уместно сделать акцент на вкладе российских ученых, и рассказать о международных научных проектах, в которых принимают участие наши специалисты. К таковым проектам относятся уже упомянутый LIGO, а также проекты по поиску темной материи, проекты по освоению Марса и другие. Кроме того, интересно отметить, что открытие одного из самых перспективных материалов современности – графена было сделано именно русскими учеными, а также рассказать об открытии новых элементов химической таблицы Менделеева нашими учеными в ОИЯИ (г. Дубна).

В завершение рассказа важно отметить, что направления исследований современной физики не ограничиваются приведенными в презентации, но рассмотреть все не представляется возможным по озвученным выше причинам.

Доклад и презентация о современных достижениях физики были сделаны автором статьи зимой 2020 года, и уже несколько раз были прочитаны и показаны как в аудитории, так и в дистанционном режиме для студентов очного и заочного отделений. Ответная реакция со стороны обучающихся была всегда положительная и вызывала большой интерес. Студенты могли наглядно убедиться, что физика – современная и актуальная наука, решающая множество проблем человечества.

В заключение следует отметить, что данный материал несомненно будет нуждаться в обновлении каждые полгода или год. Кроме того, можно применить и обратную методику – на лекции дать только краткое описание тех или иных достижений, после чего предложить студентам разобрать достижения как темы для докладов на семинаре, объединившись по два-три человека. Таким образом, студенты выберут себе то, что им действительно интересно, глубже проработают материал и лучше запомнят полученные сведения.

УДК: 378.016

ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ НА ИНЖЕНЕРНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ ПОДГОТОВКИ

Д.С. Яковлева, к.ф.-м.н., доц.
Петрозаводский государственный университет
e-mail: *darinaj@mail.ru*

Студенты инженерных направлений подготовки зачастую имеют очень слабые знания в области физики. Материал школьной программы усвоен фрагментарно, нет знаний как отдельных терминов и законов, так и понимания физических явлений окружающего мира. В статье рассматриваются основные пробелы из курса школьной физики, с которыми сталкивается преподаватель вуза. Сделан вывод о необходимости корректировки университетского курса в сторону повышения качества усвоения основ общей физики.

Ключевые слова: физика, проблемы преподавания физики в вузе, инженерные направления подготовки

Курс общей физики является обязательной частью вузовской программы подготовки специалистов на инженерных направлениях. Такие направления есть, например, в сфере строительства, сельского и лесного хозяйства, медицины. У студентов этих факультетов физика не является профилирующим предметом, однако невозможно себе представить будущего инженера без знаний основ физики.

Преподавание физики на инженерных направлениях подготовки имеет свои трудности. Одной из них является непонимание связи между физикой и будущей профессией обучающегося, и, как следствие, отсутствие мотивации к изучению этого предмета. Проблема решается с помощью смещения акцентов общего курса физики в сторону конкретного направления подготовки. Для этого преподаватель может рассматривать задачи и примеры из будущей профессиональной деятельности студента, а также делать упор на те законы и явления физики, которые наиболее часто используются и наблюдаются в данной области.

Более серьезная проблема заключается в низком уровне знаний физики, которые обучающийся выносит со школы. Причины могут быть разные: нехватка учителей физики или частая их смена, отсутствие интереса к предмету, обычная лень и убеждение, что физика в дальнейшей жизни никак не потребуется. Даже выбирая для себя инженерную специальность вуза, абитуриент зачастую слабо представляет себе роль физики в высшем инженерном образовании и не уделяет время должной подготовке.

Все это приводит к тому, что преподаватель вместо изложения вузовской программы по физике вынужден закрывать пробелы в школьном образовании студента. На это может уйти довольно много времени, что приведет к неполному изложению вузовской физики. Однако если проблему проигнорировать, то информационная ценность таких занятий для студентов будет невелика или вовсе равна нулю, поскольку без знания основ изучение предмета невозможно. Поэтому преподавателю приходится совмещать оба направления: излагать программу физики высшего образования, попутно выявляя и объясняя студентам законы и термины из школьной программы.

Автор статьи преподает физику на инженерных направлениях подготовки в Петрозаводском государственном университете (ПетрГУ) уже более пятнадцати лет. За это время был накоплен большой фактический материал о самых слабых и проблемных местах по физике у вчерашних выпускников школ. Целью статьи является систематизация и описание наиболее часто распространенных трудностей, с которыми автор сталкивается в каждой новой группе студентов, а также способов их решения.

Следует отметить, что уровень подготовки по физике у студентов инженерных и естественнонаучных направлений может существенно отличаться в зависимости от конкретной специализации. Так, например, довольно неплохой уровень знаний по физике демонстрируют студенты строительных, медицинских и математических специальностей. Очень средний уровень у студентов направлений связанных с лесным хозяйством, и совсем слабый уровень у студентов агротехнических направлений. Поэтому, например, один и тот же материал преподаватель может рассказать за сорок минут или с трудом уложиться в полтора часа пары, в зависимости от направления группы.

Тем не менее, можно выделить некие общие проблемы, с которыми сталкивается преподаватель физики независимо от специализации студентов. Инженерные направления подготовки в ПетрГУ изучают курс общей физики, состоящий из четырех основных разделов:

1. Механика.
2. Молекулярная физика и термодинамика.
3. Электричество и магнетизм.
4. Оптика, квантовая и ядерная физика.

В большинстве своем на освоение общей физики отводится один семестр на первом курсе, когда школьные знания еще не успели забыться. И это действительно облегчает работу преподавателя, однако в ряде случаев эти знания настолько слабы, что забываются сразу же после получения аттестата.

Механика является базовым разделом не только в общей физике, но и в принципе для всей физики и связанных с нею наук, поэтому усвоение основ механики – непременная часть инженерного образования, без которой невозможно понять и освоить другие разделы. Проблемы здесь начинаются на самом первом занятии, когда требуется вспомнить простейшие термины и их определения: материальная точка, траектория, путь и перемещение, равномерное, равноускоренное и равнозамедленное движение. Объяснять эти термины лучше на конкретных примерах, поскольку словесные определения, не подтвержденные примерами из жизни, не усваиваются слушателями.

Отдельной проблемой является чтение и понимание графиков. Здесь зачастую приходится объяснять самые основы: названия осей, выбор масштаба, линейные и квадратичные функции и их графики. У студентов отсутствует понятие масштаба, они не умеют оценивать рамки заданной величины, не умеют выбирать единичный отрезок и разбивать оси таким образом, чтобы график наглядно отражал происходящий процесс. Так, например, студенты часто рисуют длинные оси, а сам график из-за неумело выбранного масштаба может занимать лишь малую часть координатной плоскости и не нести никакой полезной информации.

Но самой главной проблемой является чтение графиков. Студенты не могут объяснить, о чем говорят получившиеся зависимости, не могут сделать вывод о характере происходящего процесса. Эта проблема всплывает сразу же при разборе графиков равномерного и равнопеременного движения, а также на первых лабораторных работах. Поэтому лучше всего потратить время и научить студентов разбираться хотя бы в самых простых графиках, иначе дальнейшее изучение физических процессов будет постоянно затормаживаться об эту проблему.

Также самыми распространенными слабыми местами в области механики являются понятие импульса, которое мало кто помнит со школы, кинетическая и потенциальные энергии, законы сохранения, инерция и инертность. Эти понятия тоже нельзя игнорировать и отдавать на самостоятельное изучение. Лучше разобрать их в аудитории, иллюстрируя конкретными примерами.

Проблемной областью механики является также динамика. Как правило, студенты хорошо помнят третий закон Ньютона, некоторые могут назвать второй, но еще никто не смог воспроизвести первый закон Ньютона и объяснить его смысл. Это системная проблема, которую автор наблюдает много лет. Первый закон Ньютона является для студентов самым трудным для понимания, хотя и входит в базовую школьную программу по физике. Часто приходится переходить от официальных формулировок к простым словам, чтобы донести до слушателей смысл этого закона физики. Отметим, что способ объяснения физических явлений "простыми словами" часто оказывается наиболее эффективным и хорошо усваивается студентами.

При разборе темы "Колебательное движение" сразу же выясняется, что никто не может объяснить такие простые вещи как амплитуда, период и частота колебаний. Что характерно, данные термины встречаются повсеместно, не только в физике, и студенты с этим соглашаются, однако раскрыть их смысл все равно не могут.

Раздел "Молекулярная физика и термодинамика" также подразумевает знания его основ еще со школы. Некоторые вещи студенты действительно могут вспомнить, например, названия изопроцессов, число Авогадро, молярную массу, но этим все и ограничивается. От изопроцессов в памяти остались только названия, но не определения, графики изопроцессов также приходится изучать заново.

Очень печально, что практически никто не может вспомнить молекулярно-кинетическую теорию (МКТ), учитывая, что ее положения предельно просты. При разборе доказательств МКТ студенты заметно оживляются, когда слышат термин "диффузия". Они хорошо помнят его со школы, но вместе с тем объяснить суть этого явления и привести его примеры из жизни не могут.

Что касается таких терминов, как количество теплоты, теплоемкость, внутренняя энергия, первый закон термодинамики и применение его в изопроцессах – то все это по умолчанию также приходится объяснять заново.

Раздел "Электричество и магнетизм" среднестатистически вызывает наибольший интерес у студентов. Однако и здесь требуется начинать с самых простых вещей – вспомнить понятие элементарного заряда, электростатического поля, напряженности, потенциала. Объяснить разницу между напряженностью и напряжением, потому что студенты часто думают, что это одно и то же.

Проблемным местом также является закон Ома для участка цепи и для замкнутой цепи. При этом во многих случаях знания в этой области настолько слабы, что требуется объяснить единицы измерения силы тока, напряжения и сопротивления.

Кроме того, студенты не понимают и не могут объяснить само возникновение тока в проводнике, не могут объяснить разницу между проводниками, полупроводниками и диэлектриками, а если и могут, то затрудняются с классификацией конкретных веществ. Так, например, если задать простой вопрос: "Чем является обычная вода – проводником или диэлектриком? А воздух?" – эти вопросы практически всегда остаются без ответа, хотя эти сведения являются довольно полезными для жизни.

В сложившейся ситуации часто преподаватель просто не успевает рассмотреть тему "Магнетизм", в силу малого количества часов, выделенных на курс общей физики, а также того, что много времени было потрачено на восстановление школьных знаний. В лучшем случае можно успеть рассмотреть само понятие магнитного поля, картину магнитных полей и магнитную индукцию. Иногда получается рассмотреть классификацию мангнетиков и явление электромагнитной индукции, но это удается сделать только в группах с сильными студентами. Этим изучение данной темы и ограничивается.

Раздел "Оптика" вчерашние выпускники школ знают, как правило, хуже всего. Поэтому здесь, опять же в силу нехватки времени, получается рассмотреть только школьные понятия и законы. Так, например, практически никто не понимает природы света и корпускулярно-волнового дуализма. Отсутствует понимание абсолютного и относительного показателя преломления. Мало кто помнит значение скорости света и тот факт, что она является наибольшей в природе.

В области волновой оптики рассматриваются такие интересные явления как дисперсия, дифракция и интерференция. При этом речь идет не о видах интерференции и дифракции, а просто об определениях этих терминов, которые также прочно забыты или никогда не изучались. Рассматривая явления волновой оптики лучше всего наглядно иллюстрировать их примерами природных явлений, а также сделать упор на практической пользе для человека. В этом случае, студенты хотя бы усвоят определение термина и будут понимать, где это используется.

В разделе, посвященном атомной физике самая первая проблема, с которой сталкивается преподаватель это незнание строения атома. Студенты не могут объяснить конфигурацию атома и состав атомного ядра, забывают названия элементарных частиц, хотя эти сведения относятся к простейшим, и, казалось бы, должны прочно осесть в голове со школьных времен.

Таким образом, получается, что курс общей физики высшего образования практически невозможно изложить в полной мере. В редких случаях удается затронуть темы, выходящие за рамки школьной программы. Однако в описанных случаях это и не требуется, поскольку лучше сделать упор не на количество материала, а на качество его усвоения. Будущим инженерам следует хорошо усвоить азы общей физики и понимать физическую природу явлений окружающего мира. Владея основами, они смогут разобраться и в более сложных ситуациях.