МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И. С. ТУРГЕНЕВА»

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Материалы VII
Всероссийской научно-практической конференции
с международным участием (18 – 21 ноября 2021 г., г. Орел)

Научное электронное издание

Под общей редакцией
кандидата физико-математических наук, профессора Т. Н. Можаровой

Орёл
ОГУ имени И. С. Тургенева
2021

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И. С. ТУРГЕНЕВА»

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Материалы VII
Всероссийской научно-практической конференции
с международным участием (18 – 21 ноября 2021 г., г. Орел)

Научное электронное издание

Под общей редакцией
кандидата физико-математических наук, профессора Т. Н. Можаровой

Орёл
ОГУ имени И. С. Тургенева
2021

УДК 51+53+681.3
ББК 22.1+22.3+32.81(072.8)
С56

Редакционная коллегия:

Можарова Т. Н., кандидат физико-математических наук, доцент (председатель);
Дорофеева В. И., кандидат физико-математических наук, доцент;
Зарубин А. Н., доктор физико-математических наук, профессор;
Марков О. И., доктор физико-математических наук, доцент;
Селютин В. Д., доктор педагогических наук, профессор;
Тарасова О. В., доктор педагогических наук, профессор;
Федяев Ю. С., кандидат физико-математических наук, доцент (ответственный редактор).

С56 **Современные проблемы физико-математических наук** / материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (18 – 21 ноября 2021 г., г. Орёл): научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией кандидата физико-математических наук, доцента Т. Н. Можаровой. – Орёл: ОГУ имени И. С. Тургенева, 2021. – 1 электрон. опт. диск (DVD-R). – Системные требования: стационарные и переносные компьютеры с операционной системой Windows версии 7 и выше; процессор x64 3,3 GHz и выше; 47,7 Mb свободной памяти HDD; цветной дисплей с диагональю экрана от 10.1” (1280 × 800 точек) и больше; наличие подключения к сети интернет, дисковод, мышь.

ISBN 978-5-9929-1076-6

Содержатся результаты научных исследований по актуальным проблемам физико-математических наук, представленные на VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, которая проводилась 18 – 21 ноября на базе физико-математического факультета Орловского государственного университета имени И. С. Тургенева.

Предназначен для научных работников, занимающихся исследованиями в области естественных (математика и механика, компьютерные науки и информатика, физические науки), технических (электроника, фотоника, приборостроение и связь), социальных и гуманитарных (экономика, педагогика) наук.

ISBN 978-5-9929-1076-6

© ОГУ имени И. С. Тургенева, 2021

Технические требования к программному обеспечению:

Программа просмотра файлов Microsoft Word 97-2003, программа просмотра pdf-файлов

Компьютерная верстка: С. П. Строев.
Технический редактор: С. П. Строев.

Дата подписания к использованию: 16.12.2021
DVD-R. Объем – 4,7 Гб
Количество носителей – 1
Контактные данные:
ул. Комсомольская, 95, г. Орёл, 302026
oreluniver.ru

Содержание

Математический анализ и дифференциальные уравнения 13
Абдурагимов Г.Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка уравнения 13
Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т. Граничная обратная задача для псевдопараболического уравнения в случае второй начально-краевой задачи 16
Антоновская О.Г., Бесклубная А.В. К вопросу о построении квадратичных функций Ляпунова в случае кратных корней характеристического уравнения 21
Вирченко Ю.П., Московченко Е.Ю. Уравнения Кирквуда-Зальцбурга для решетчатых классических моделей статистической механики 27
Гладков С.О., Богданова С.Б. О влиянии стационарного вращения на форму плоской брахистохроны 34
Данилова О.Ю. О бифуркациях решений одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 42
Дубровина Т.В. Исследование специального дифференциального уравнения поведения электрона 45
Евхута О.Н., Евхута Н.А. NL-производные функций между банаховыми пространствами 51
Жукова Г.С. Асимптотика решений краевых задач 56
Зарубин А.Н., Чаплыгина Е.В. Задача Коши для запаздывающего гиперболического уравнения 63
Копаев А.В. О проблеме коэффициентов для биголоморфных отображений единичного бикруга на зведообразные области 68
Кравцов А.М. Равномерное приближение непрерывных функций с помощью мультипликативного представления обобщений полиномов Бернштейна 76
Малай Н.В., Щукин Е.Р., Шостак Ю.И. Особенности массопереноса в окрестности испаряющейся капли в неизтермической бинарной газовой смеси 82
Можарова Т.Н. Об общем виде линейных непрерывных операторов бесконечного порядка 88
Невский М.В. Об одном неравенстве для нормы интерполяционного проектора 94

Платонов С.С. О преобразовании Фурье функций из функциональных классов Никольского 101
Резниченко И.О. О вычислении прямого значения потенциала двойного слоя в трёхмерном случае 104
Соломатин О.Д. Задача Коши в пространстве вещественно-аналитических функций в полуплоскости с топологией равномерной сходимости на компактах 114
Соломатин О.Д. Задача Коши в пространстве функций, определенных и бесконечно дифференцируемых в односвязной области на плоскости 117
Халилов Э.Г. Квадратурные формулы для потенциалов простого и двойного слоев 120

Алгебра, топология и геометрия 125
Батуров Д.П. О наследственно нормальных пространствах и их вложениях в плотные подпространства произведений 125
Дергачев В.М., Лелявин С.Н. Бесконечная алгебраическая *K* теория 130
Прояева И.В., Колобов А.Н. Об использовании комплексных чисел в геометрии 136
Русаков А.А., Черкасова В.В. Исследование связностей индуцированных движением 141

Математические методы в экономике 148
Алимханова А.Н., Мицель А.А. Использование метода DEA для оценки эффективности предприятия на основе бухгалтерской отчетности 148
Анисимова Т.Г., Голенкова З.Т., Лясковская О.В. Инновационная методика факторного и кластерного анализа социологических данных (на примере стратификации трудовой структуры населения Тывы) 155
Базилевский М.П., Караулова А.В. Качественная характеризация степени нелинейности объясняющих переменных в квазилинейных регрессионных моделях 167
Барбашова Е.В., Лясковская О.В. Применение нелинейной функции Харрингтона для решения задачи классификации регионов ЦФО по показателям системы здравоохранения 173

Барбашова Е.В., Лясковская О.В., Шуметов В.Г. О психофизическом подходе к шкалированию в многопараметрических экономических задачах (на примере классификации регионов ЦФО по показателям системы здравоохранения) 185
Зубкова Л.Н. Прикладные аспекты нечетких моделей с представлением на основе графов 195
Курбыко И.Ф., Зотикова А.И. К вопросу адекватности математических моделей прогнозирования показателей региональной экономики 200
Татару В.Д., Шматков Р.Н. Ценообразование во внешнеэкономической деятельности 206
Чернобровкина И.И., Кокорев А.В. Обучение нейронной сети методом генетических алгоритмов 213

Теория вероятностей и математическая статистика 217
Борисова Л.Р. Исследование динамики заболеваемости коронавирусной инфекцией в Москве 217
Левизов С.В. О выпадении «дубля» при бросании многогранника 221

Методы дискретных особенностей в задачах математической физики 226
Дорофеева В.И., Соромотина А.А. Моделирование процесса оседания грунтовых вод под действием силы тяжести и системы дренажных устройств при наличии полупроницаемых включений 226
Лекомцев Д.Г. Математическое моделирование фильтрационных течений в анизотропной неоднородной среде со степенным законом изменения проводимости при положительных показателях степени 230
Федяев Ю.С., Воронина Г.В. Математическое моделирование движения границы раздела «разноцветных» жидкостей к скважине в кусочно-однородном слое грунта 238

Физика конденсированного состояния 246
Аринцына К.И., Марков О.И. Измерение коэффициента линейного расширения монокристаллов на основе висмута 246

Вирченко Ю.П., Шаполова И.М. Распределение вероятностей критических напряжений разрыва образцов пористого материала 252
Давыдов А.П., Злыднева Т.П. Численное моделирование опыта Юнга с двумя источниками однофотонных сферических волн – координатных волновых функций фотонов 260
Зарифзода А.К., Бозорова Ю.К. О статистической теории теплопроводности двухкомпонентной магнитной жидкости 272
Комилов К., Зарифзода А.К., Убайди А.М. О скорости распространения магнитозвуковых волн в магнитных жидкостях 279
Кривцова В.С., Марков О.И. Расчет характеристик носителей заряда наноструктурированного теллурида висмута, легированного РЗЭ 289
Матюхин С.И., Гришина С.Ю. Стохастические свойства случайных сил, обусловленных взаимодействием каналированных ионов с электронами углеродных нанотрубок 295
Нифтиев Н.Н. Зависимость диэлектрической проницаемости монокристаллов MnIn2Se4 от частоты переменной токи и температуры 303
Серебренников Д.А., Клементьев Е.С. Феноменологический подход к описанию динамики решетки интерметаллидов с каркасно-кластерной структурой 307
Талан В.С., Марков О.И. Исследование морфологии поверхности кристалла висмута методом атомно-силовой микроскопии 312
Турин В.О., Илюшина Ю.В., Киреев Д.Д., Скрипченко А.Н., Черепкова А.Ю., Андреев П.А. Обобщение теории Дебая теплоёмкости кристаллических тел на случай фононов с законом дисперсии как у волн де Бройля 317
Шмелёв Д.С., Матюхин С.И. Современные области применения эффекта каналирования быстрых ионов 329

Информатика и информационные технологии 336
Арабский М.Ю. Сравнительная характеристика стеммеров 336
Ахмедов М.Г.-К. Информационные основы межъязыкового преобразования узбекско-таджикской языковой пары 344
Зеленина Л.И., Хаймина Л.Э., Федькушова С.И., Хаймин Е.С. Спектральные методы анализа пищевых сред 353

Иванов М.В., Никандров М.Д. BigData и современные способы обработки больших данных 360
Музалевская М.А., Сёмин А.Г. Анализ расходов организаций на информационные и коммуникационные технологии по видам расходов 369
Новикова Е.В.Обзор имитационной модели транспортных потоков по перемещению отходов 375
Петраков Н.С. Современные фреймворки для разработки серверной части web-приложений 379
Привалов А.Н., Смирнов В.А. К вопросу обнаружения фейковых сайтов 384
Русских Т.Н., Кухарец Д.В. Информационное сопровождение застрахованных лиц в системе ОМС 392
Строев С.П., Шоколов В.В. Анализ тональности отзывов о деятельности банка методами машинного обучения 399
Тетяненко А.В., Косенко В.О., Серенко В.Н. Информационные основы выделения аббревиатур и их расшифровки в тексте на русском языке 405
Черномордов С.В., Кабанов М.А. Построение алгоритмов параметрической оптимизации и интеллектуальный анализ данных с использованием нейросетевых методов 416
Чижикова Ю.В. О противодействии технологиям социальной инженерии 422

Инженерные приложения физико-математических наук 428
Бондаренко М.А., Кравцов А.М. Оценки характеристик фильтрационного потока к горизонтальному участку скважины 428
Варгашкин В.Я. Выявление частотной независимости скачков анизотропии микроволнового реликтового излучения по данным зонда Уилкинсона с угловым разрешением 6,87 угловых минут 439
Воронина О.А., Лобанова В.А. Проектирование системы мониторинга состояния резервуарного парка промышленного предприятия 450
Голубева О.И. Алгоритмы получения функций тестопригодности для всех полюсов элементов комбинационной схемы с использованием SAT-решателя 455
Голубева О.И., Рудай Д.В. Построение графа переходов последовательностной схемы с применением SAT-решателя 466

Зо Аунг, Гладков С.О. К теории течения жидкостей по каналам произвольного сечения 476
Кокорев А.В., Кузнецов Д.С. Подход к определению позиционности сигналов FSK 482
Кокорев А.В., Слесарчик К.Ф., Шведов С.Н., Еременко А.И. Анализ методов определения видов современной цифровой модуляции 487
Лобанова В.А., Пилипенко А.П., Воронина О.А. Механизмы разрушения компонентов силовых IGBT модулей 495
Марчук Е.А., Калинин Я.В. Сигмоидальные функции активации в задачах механики 500
Музалевская М.А., Зеленин Д.П. Разработка узла термоупаковочной машины 506
Цуканов Б.Д. Новое поколение датчиков для систем безопасности 509

Методика преподавания точных наук в школе и вузе 516
Авдеев И.Ф., Авдеева Т.К. Теория чисел: Иван Матвеевич Виноградов (1891-1983) и Геннадий Иванович Архипов (1945-2013) 516
Богданова С.Б., Абдуллаев Ш.К. Визуализация построения эволюты для заданной непрерывной кривой 525
Богданова С.Б., Ситнова Д.Д. Построение профиля крыла в изучении теории функции комплексного переменного 530
Борисова Л.Р. Некоторые аспекты преподавания математики на первом курсе с использованием компьютерной обучающей системы MOODLE 536
Боровикова В.Д. Наглядность как дидактический принцип обучения 543
Галкина А.В. Методика формирования математической культуры в общеобразовательной школе 547
Глухова И.А., Дорохина А.С., Фомина Т.П. Технология «Перевернутый класс» в обучении школьников математике 557
Закалкина Е.В., Еремеева Н.П., Рогозянская Е.А. Использование платформы Open edX для создания онлайн-курса 563
Закалкина Е.В., Еремеева Н.П., Рогозянская Е.А., Марахова И.Е. Размещение онлайн-курса на образовательной платформе 569

Камозина О.В. Использование кроссвордов при изучении теории вероятностей и математической статистики в техническом вузе 577
Кокорев А.В., Чернобровкина И.И. Проблемы становления прикладной математики как самостоятельной дисциплины 583
Корогодина И.В. Исследовательские задачи по физике как элемент научной деятельности студентов технического вуза 588
Корогодина И.В. К вопросу о преподавании физики на неродном языке 591
Костикова Н.Н. Профессиональная ориентация учащихся на уроках математики посредством использования практико-ориентированных задач 594
Кузнецова В.А. Развитие логического мышления в процессе решения задач на доказательство и построение 603
Логунов И.С. Три теоремы для одного треугольника 608
Марушкина А.А., Овсянникова Т.Л. Курс по выбору: «Математика вокруг тебя» для 9 класса как средство ориентации учащихся в мире современных профессий 613
Мельников Р.А., Саввина О.А., Черноусова Н.В. Об опыте реализации программы по духовно-нравственному воспитанию для будущих магистров в области бизнес-информатики 619
Морозова Н.Н., Проскурякова Л.К. Методические особенности современной лекции по математике в техническом вузе 624
Румянцев В.С., Большакова Н.Н. Демонстрация электрических свойств сегнетоэлектриков 633
Русаков А.А., Поседько С.В. Мотивация с помощью инструментальных средств при смешанном обучении математике детей дошкольного возраста 643
Рыманова Т.Е., Черноусова Н.В. К вопросу о роли математики в повышении уровня образованности современных школьников 649
Саватеева Е.С., Русакова В.Н. Методика изучения возможностей искусственного интеллекта в рамках курса медицинской информатики 655
Семенова А.А. Активизация познавательной деятельности в 6 классе у неуспевающих школьников на факультативных занятиях по математике 660

Симанева Т.А., Топченко Р.К. Методика организации проектной деятельности по математике с использованием цифровых онлайн сервисов 665
Симоновская Г.А. К вопросу о математической подготовке бакалавров технических направлений 675
Соболев С.К., Томашпольский В.Я., Голосов А.О. Задачи с параметром в разделе «Несобственные интегралы» курса математического анализа в техническом вузе 679
Тарасов К.Е., Тарасова О.В. Математическая составляющая курса инженерной графики, предназначенного для обучения учащихся средней общеобразовательной школы технологического профиля подготовки 687
Фарафонова И.В., Чижикова О.В. Работа над учебными проектами по окружающему миру в начальной школе 695
Филимонова Л.В. Методика изучения понятия «Вес тела» в школьном курсе физики 700
Хорцев А.В., Фомина Т.П. Использование геймификации в обучении математике школьников с нарушениями в развитии 710
Цуканов Б.Д. Методологические основы физического образования 720
Черных Г.А., Куперин Ю.А. Педагогический дизайн курсов, читаемых в дистанционном формате в сфере компьютерных наук 728
Щербатых В.Е. Компьютерные обучающие программы с функцией тестирования, как эффективное средство дистанционного обучения 734

Математический анализ и дифференциальные уравнения

УДК 519.927

Абдурагимов Гусен Эльдерханович
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики,
Дагестанский государственный университет,
Россия, Махачкала

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. *В настоящей работе рассматривается краевая задача для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения второго порядка. С помощью метода преобразований Ц. На получены достаточные условия существования и единственности положительного решения рассматриваемой краевой задачи, а также предложен алгоритм численного метода построения такого решения и приведен соответствующий пример.*

Ключевые слова: *Краевая задача, положительное решение, существование, единственность.*

Abduragimov Gusen Elderkhanovich
Candidate of physical and mathematical sciences,
Associate Professor at the Department of Applied Mathematics,
Dagestan State University,
Russia, Makhachkala

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE NONLINEAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

Abstract. *In this paper, we consider a boundary value problem for one nonlinear functional differential equation of the second order. Using the method of transformations of Ts. Na, sufficient conditions for the existence and uniqueness of a positive solution of the considered boundary value problem are obtained, and an algorithm for a numerical method for constructing such a solution is proposed and the corresponding example is given.*

Keywords: *Boundary value problem, positive solution, existence, uniqueness.*

Вопросам исследования разрешимости краевых задач для нелинейных функционально - дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ, например [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Неоценимый вклад в развитие вопросов существования, единственности, асимптотики и т.д. положительных решений краевых задач для дифференциальных уравнений был внесен М.А. Красносельским и его учениками Л.А. Ладыженским, И.А. Бахтиным, В.Я. Стеценко, Ю.В. Покорным и др. В данной работе с помощью линейных преобразований Ц. На [7] доказана единственность положительного решения рассматриваемой граничной задачи, предложен численный алгоритм реализации решения и приведен соответствующий пример. Отметим, что настоящая работа является продолжением исследований автора, посвященных данной тематике.

Обозначим через C – пространство $C[0,1]$, через $\mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ – пространство $\mathbb{L}_p(0,1)$ и через $\mathbb{W}^2$ – пространство вещественных функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + f\left((Tx)(t)\right) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x'(0) = 0, \tag{2}$$

$$x(1) = 0, \tag{3}$$

где $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ – линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(u)$ неотрицательна и $f(0) \equiv 0$.

О п р е д е л е н и е. Под положительным решением задачи (1)-(3) будем понимать функцию $x \in \mathbb{W}^2$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) и краевым условиям (2)-(3).

Т е о р е м а. Пусть $f(\lambda u) = \lambda^\tau f(u),\ \tau \in (0,\infty)\backslash\{1\}$. Тогда краевая задача (1)-(3) имеет единственное положительное решение.

На основе доказательства настоящей теоремы сформулирован численный неитерационный алгоритм построения положительного решения рассматриваемой задачи. Согласно этой схеме с помощью линейных преобразований:

$$\begin{cases} t = A^\alpha \bar{t}, \\ x = A^\beta \bar{x}, \end{cases} \tag{4}$$

где α и β – некоторые параметры, положив $\beta = 1$ и определив соответствующим образом α, задачу (1)-(3) можно свести к задаче Коши с начальными условиями $\upsilon'(0) = 0$ и $\upsilon(0) = 1$, где $\upsilon = \bar{x}(\bar{t})$. С помощью численных методов, например метод Рунге-Кутта, решаем задачу Коши от $\bar{t} = 0$ до выполнения равенства $\bar{x}(\bar{t}) = 0$. Требование $t = 1$ позволяет однозначно определить параметр A из сотношений (4):

$$A = \bar{t}^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

И, наконец, по формулам (4) находим решение исходной краевой задачи.

В качестве примера приведем положительное решение краевой задачи

П р и м е р.

$$x''(t) + x^2(t) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{5}$$

$$x'(0) = 0, \tag{6}$$

$$x(1) = 0, \tag{7}$$

полученное по приведенному алгоритму.

Таблица 1 — Положительное решение задачи (5)-(7)

t	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
x	2,95	2,91	2,78	2,57	2,30	1,99	1,62	1,23	0,82	0,41	0,00

Список литературы

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Симонов П. М. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения // Вестник Удмуртского университета. Серия: Математика. Механика. Компьютерные науки — 2009. — 1. — С. 3–23.
2. Wong F. H., Wang S. P., Chen T. G. Existence of positive solutions for second order functional differential equations // Comput. and Math. Appl. — 2008. — 56. — 10. — С. 2580–2587.
3. Ma R. Positive solutions for boundary value problems of functional differential equations // Appl. Math. Comput. — 2007. — 193. — 1. — С. 66–272.
4. Satoshi T. On the uniqueness of positive solutions for two-point boundary value problems of Emden–Fowler differential equations // Mathematica Bohemica — 2010. — 135. — 2. — С. 189–198.
5. Sun Y., Han M., Debnath L. Existence of positive periodic solutions for a class of functional differential equations // Appl. Math. Comput. — 2007. — 190. — 1. — С. 699–704.
6. Budisan S. Positive solutions of functional differential equations // Carpathian Journal of Mathematics — 2007. — 22. — 1-2. — С. 13–19.
7. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. — М.: Мир. — 1982. — 296 с.

УДК 517.95

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына,
Кыргызская Республика, г. Бишкек

Муканбетова Айзат Темирбековна
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына,
Кыргызская Республика, г. Бишкек

ГРАНИЧНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Аннотация. *В работе рассматривается обратная задача нахождения граничного условия первого рода по дополнительной информации о решении прямой задачи для псевдопараболического уравнения. Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи. Используя явное решение прямой задачи, рассматриваемая задача сводится к линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно искомой функции. В итоге доказана теорема о существовании и единственности решения исследуемой обратной задачи.*

Ключевые слова**:** *псевдопараболическое уравнение, обратные задачи, неизвестные граничные условия, точечное переопределение, разрешимость.*

Ablabekov Baktybay Saparbekovich
Kyrgyz National University named after J. Balasagyn,
Kyrgyz Republic, Bishkek

Mukanbetova Aizat Temirbekovna
Kyrgyz National University named after J. Balasagyn,
Kyrgyz Republic, Bishkek

INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PSEUDOPARABOLIC EQUATION IN THE CASE OF THE SECOND INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM

Annotation. *The paper investigates the question of the solvability of the inverse problem of finding the boundary condition of the first kind from additional information about the solution of the direct problem for a pseudoparabolic equation. The equation is considered in a bounded rectangular area. Using an explicit solution to the direct problem, the problem under consideration is reduced to a linear Volterra integral equation of the second kind with respect to the desired function. As a result, a theorem on the existence and uniqueness of a solution to the inverse problem under study is proved.*

Keywords: *pseudoparabolic equation, inverse problems, unknown boundary conditions, point overdetermination, solvability.*

Введение

Исследование любой обратной задачи начинается с изучения соответствующей прямой задачи. Различные прямые задачи (первые и вторые начально-краевые задачи, а также краевые задачи на полупрямой для псевдопараболических уравнений с малым параметром изучены в работах [1-4]. В монографии [5] изучены различные обратные задачи для псевдопараболических уравнений.

В работе изучаются задачи нахождения решений для псевдопараболических уравнений в случае, когда граничное условие является неизвестным. Граничные обратные задачи возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях [6-9].

В работе предложен метод решения граничной обратной задачи, основанный на применении метода Фурье и аналитического решения второй начально-краевой задачи, полученного в работе [3]. В итоге получено интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно граничной функции заданное в правом конце интервала.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega_T = \{(x,t) \mid x \in (0,\pi), t \in (0,T]\}$, $T > 0$.В области Ω_T рассмотрим вторую начально-краевую задачу для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром

$$u_t(x,t) = \varepsilon u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{2}$$

$$(\varepsilon u_{xt} + u_x)(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T, \ (\varepsilon u_{xt} + u_x)(\pi,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Заметим, что при выполнении условий согласования граничные условия (3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu_1(t), \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \mu_2(t), 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где

$$\mu_1(t) = \varphi(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau, \quad \mu_2(t) = f(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}f(\tau)d\tau.$$

Сформулируем обратную задачу. Пусть в начально-краевой задаче (1)-(3) функции $u_0(x), \varphi(t)$ заданы, а $f(t)$ неизвестна. Требуется определить функцию $f(t)$, такую, что

$$u(0,t) = h(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

где $h(t)$ – заданная функция,

Условие (4) называется интегральным переопределением.

Так как уравнение (1) содержит параметр ε, то решение обратной задачи (1)-(3),(5) зависит от этого параметра. Поэтому в дальнейшем решение обратной задачи обозначим через $u_\varepsilon(x,t)$ и $f_\varepsilon(t)$ соответственно.

Определение**.** Пара функций $u_\varepsilon(x,t)$ и $f_\varepsilon(t)$ называется решением обратной задачи (1)-(3), (5), если $u_\varepsilon(x,t) \in C^{(2,1)}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ $f_\varepsilon(t) \in C_0^1[0,T]$ и удовлетворяет равенствам (1)-(3), (5) в классическом смысле.

2. Однозначная разрешимость

Теорема 1. Пусть $u_0(x) \in C^{(3)}([0,\pi])$, $\varphi(t) \in C^1([0,T])$, $h(t) \in C^1([0,T])$ и выполнены условия согласования $u_0'(0) = \varphi(0) = 0, u_0'(\pi) = f(0) = 0,$ $u_0''(0) = u_0''(\pi) = 0$, $u_0(0) = h(0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует единственное решение обратной задачи (1)-(3), (5).

Доказательство. Пусть функции $u_\varepsilon(x,t)$ и $f_\varepsilon(t)$ являются решением обратной задачи (1)-(3), (5). Далее воспользуемся аналитическим решением прямой задачи (1)-(3), полученное в работе [3]. Сначала преобразуем неоднородные граничные условия к однородным. В результате получим начально-краевую задачу относительно функции $u_\varepsilon(x,t)$:

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = F_\varepsilon(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{6}$$

$$u_\varepsilon(x,0)=0,\quad 0\le x\le\pi, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(0,t)=0,\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(\pi,t)=0,\ 0\le t\le T, \tag{8}$$

где

$$F_\varepsilon(x,t)=u_0''(x)+\frac{1}{\pi}\left[f_\varepsilon(t)-\varphi(t)+\varphi(0)-f_\varepsilon(0)\right]-xf_\varepsilon'(t)-\left(\frac{x^2}{2\pi}+\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\left[f_\varepsilon'(t)-\varphi'(t)\right].$$

Тогда решение задачи (6)-(8) имеет вид [3]:

$$u_\varepsilon(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t F_{\varepsilon 0}(\tau)d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{1+\varepsilon n^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{n^2}{1+\varepsilon n^2}(t-\tau)\right)F_{\varepsilon n}(\tau)d\tau\right\}\cos nx, \tag{9}$$

где коэффициенты Фурье $F_{\varepsilon 0}(t)$, $F_{\varepsilon n}(t), n=1,2,...,...$ вычисляются по формулам

$$F_{\varepsilon 0}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_\varepsilon(x,t)dx=\frac{1}{\varepsilon\pi}\int_0^t\left(f_\varepsilon(\tau)-\varphi(\tau)\right)e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}d\tau-$$

$$-\frac{2}{\varepsilon\pi}\left(\varphi(t)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right)-$$

$$-\left(\frac{\pi}{6\varepsilon}+\frac{1}{\pi}\right)\times\left(\left[f_\varepsilon(t)-\varphi(t)\right]+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\left[f_\varepsilon(\tau)-\varphi(\tau)\right]d\tau\right), \tag{10}$$

$$F_{\varepsilon n}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F_\varepsilon(x,t)\cos(nx)dx=\frac{1}{n^2}u_{0n}+\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}(-1)^n\left[f_\varepsilon(t)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}f_\varepsilon(\tau)d\tau\right]-$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\left[\varphi(t)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right],$$

$$u_{0n}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_0(x)\cos nxdx.$$

Положив в (9) x=0, и учитывая (5) и (10), получим

$$\tilde f_\varepsilon(t)-\frac{1}{L}\int_0^t K_\varepsilon(t,\tau)\tilde f_\varepsilon(\tau)d\tau=\frac{1}{L}F_\varepsilon(t), \tag{11}$$

с непрерывным ядром

$$K_\varepsilon(t,\tau)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n ne^{-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)}}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\right\},$$

и непрерывной правой частью

$$F_\varepsilon(t)=h(t)+\left(\frac{\pi}{6\varepsilon}+\frac{1}{\pi}\right)\left(\varphi(t)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[u_{0n}+\frac{2}{\pi}\left(\varphi(t)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right)\right].$$

Поэтому уравнение (11) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, следовательно уравнение (11) имеет единственное решение $f_\varepsilon(t) \in C([0,T])$. Теорема 1 доказана.

Список литературы

1. Аблабеков Б.С., Курманбаева А.К. Решение некоторых начальных и краевых задач для уравнения жидкости в трещиновато-пористой среде // Известия КГТУ им. И. Раззакова, №22, Бишкек 2011. – С.235-239.
2. Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т.О разрешимости решений первой начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Евразийское научное объединение. – 2019. – Т.1. – №4(50). – С.1-5.
3. Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2019. – №3. – С.41-47.
4. Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т. Краевая задача на полупрямой для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Вестник *КРАУНЦ.* Физ.-мат. науки. – 2020. – Т.32. – №3. – С.29-41. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-29-41.
5. Аблабеков Б.С Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: Илим 2001. – 183 с.
6. Алексеев Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. – М.: Научный мир, 2010.
7. Belov Yu.Ya. Inverse problems for parabolic equations. – Utrecht: VSP. – 2002.
8. Levandowsky M., Childress W.S., Hunter S.H., Spiegel E.A. A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms // J. Protozoology. – 1975. – P.296-309.
9. Capatina A., Stavre R. A control problem in biconvektive flow // J.Math.Kyoto Univ. – 1997. – V.37. – P.585-595.

УДК 517.96

Антоновская Ольга Георгиевна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математики,
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия, Нижний Новгород

Бесклубная Антонина Вячеславовна
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры математики,
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия, Нижний Новгород

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. *В работе ставится вопрос о построении квадратичной функции Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем, удовлетворяющих ограничениям на первую производную (первую разность) в силу линеаризованной системы, в случае кратных корней характеристического уравнения. Методика построения функции Ляпунова рассматривается на примере систем второго порядка.*

Ключевые слова: *динамическая система, квадратичная функция Ляпунова, первая производная (первая разность) функции Ляпунова в силу системы.*

Antonovskaya Olga Georgievna
Candidate of physical and mathematical sciences, docent,
Associate professor of the department of mathematics,
Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering,
Russia, Nizhny Novgorod

Besklubnaya Antonina Vyacheslavovna
Candidate of pedagogical sciences,

Associate professor of the department of mathematics,
Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering,
Russia, Nizhny Novgorod

TO THE QUESTION OF QUADRATIC LYAPUNOV FUNCTIONS CONSTRUCTION OVER MULTIPLE ROOTS OF CHARACTERISTIC EQUATION

Abstract. *In current work the question of quadratic Lyapunov function construction for continuous and discrete dynamic systems with limitations over the first derivative (the first difference) due to linearized system in the case of multiple roots of characteristic equation is pointed out. Method of Lyapunov function construction is examined for the example of second order systems.*

Keywords: *dynamic system, quadratic Lyapunov function, the first derivative (the first difference) of Lyapunov function due to system.*

1. При необходимости получить функцию Ляпунова квадратичного вида

$$V(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}x_ix_j \quad (K_{ij}=K_{ji},i,j=1,2,\ldots,n) \quad (1)$$

со специфическим ограничением – на первую производную в силу соответствующей линейной системы – для непрерывной системы, состояние равновесия которой асимптотически устойчиво, рассматривается уравнение

$$det(A_{km}-\delta K_{km})_{k,m=1}^{n}=0, \quad (2)$$

в котором A_{km} – коэффициенты первой производной (1) в силу линеаризованной системы, а δV_0 есть максимальное ее значение на поверхности $V(x_1,x_2,...,x_n)=V_0$, причем $2\max\limits_{i=1,n}\{Re\,\lambda_i\}\le\delta<0$ [1].

В случае, когда корни характеристического уравнения $\lambda_i<0$ $(i=1,2,...,n)$ действительны и различны, соответствующая система линейных дифференциальных уравнений приводится к каноническому виду (с диагональной матрицей системы). И в [2] описана методика нахождения коэффициентов подобной функции Ляпунова, основанная как раз на приведении системы к каноническому виду. Если же действительные корни характеристического уравнения являются кратными, матрицу

системы не всегда можно привести к диагональному виду [3, С. 172-188], [4, С. 114-123]. И даже в случае системы второго порядка канонический вид линеаризованной системы может быть как

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \lambda x_2, \tag{3}$$

так и

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_1 + x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \lambda x_2 \tag{4}$$

(λ - кратный корень характеристического уравнения).

В первом случае, какую бы положительно определенную квадратичную форму

$$V(x_1, x_2) = K_{11}x_1^2 + 2K_{12}x_1x_2 + K_{22}x_2^2 \tag{5}$$

мы не взяли, первая производная ее в силу (3) будет равна

$$\frac{dV}{dt} = 2K_{11}x_1\frac{dx_1}{dt} + 2K_{12}(x_1\frac{dx_2}{dt} + x_2\frac{dx_1}{dt}) + 2K_{22}x_2\frac{dx_2}{dt}, \tag{6}$$

или

$$\frac{dV}{dt} = 2\lambda(K_{11}x_1^2 + 2K_{12}x_1x_2 + K_{22}x_2^2). \tag{7}$$

То есть в силу (7) $\delta = 2\lambda$ всегда.

Во втором случае первая производная (5) в силу (4) согласно (6) примет вид

$$\frac{dV}{dt} = 2\lambda K_{11}x_1^2 + 2(K_{11} + 2\lambda K_{12})x_1x_2 + 2(K_{12} + \lambda K_{22})x_2^2, \tag{8}$$

и уравнение (2) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} K_{11}(2\lambda - \delta) & K_{11} + K_{12}(2\lambda - \delta) \\ K_{11} + K_{12}(2\lambda - \delta) & 2K_{12} + K_{22}(2\lambda - \delta) \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Следует отметить, что в этом случае значение $\delta = 2\lambda$ недостижимо, т.к. приводит к соотношению $K_{11} = 0$, невозможному для положительно определенной (5). Из (9) получаем, что

$$\delta = 2\lambda \pm \frac{K_{11}}{\sqrt{K_{11}K_{22} - K_{12}^2}}, \tag{10}$$

а значит

$$\delta_{max} = 2\lambda + \frac{K_{11}}{\sqrt{K_{11}K_{22} - K_{12}^2}}. \tag{11}$$

И поскольку значение $K_{12} = 0$ дает минимум (11) при фиксированных значениях остальных коэффициентов (5), квадратичную функцию Ляпунова можно искать в виде

$$V(x_1, x_2) = K_{11}x_1^2 + K_{22}x_2^2 \qquad (K_{11} > 0, K_{22} > 0). \tag{12}$$

В этом случае соотношение (10) примет вид

$$\delta = 2\lambda \pm \sqrt{\frac{K_{11}}{K_{22}}}, \tag{13}$$

а соотношение (11)

$$\delta_{max} = 2\lambda + \sqrt{\frac{K_{11}}{K_{22}}}. \tag{14}$$

А значение $K = K_{11} / K_{22}$, соответствующее любому значению $2\lambda < \delta < 0$ будет равно $K = (\delta - 2\lambda)^2$.

Переходя обратно от канонических переменных к переменным исходным, получим квадратичную функцию Ляпунова с нужными свойствами.

2. При необходимости получить функцию Ляпунова (1) квадратичного вида со специфическим ограничением – на первую разность в силу соответствующей линейной системы – для дискретной системы, состояние равновесия которой асимптотически устойчиво, рассматривается уравнение (2), в котором A_{km} – коэффициенты первой разности (1) в силу линеаризованной системы, а δV_0 есть максимальное ее значение на поверхности $V(x_1, x_2, ..., x_n) = V_0$, причем $\max\limits_{i=\overline{1,n}} |z_i|^2 - 1 \le \delta < 0$ [1].

В случае, когда корни характеристического уравнения $z_i, |z_i| < 1$ $(i = 1,2,...,n)$ действительны и различны, соответствующее линейное точечное отображение приводится к каноническому виду (с диагональной матрицей). И в [2] описана методика построения квадратичной функции Ляпунова с указанными свойствами, основанная как раз на приведении системы к каноническому виду. Если же действительные корни характеристического уравнения являются кратными, матрицу системы не всегда можно привести к диагональному виду [4, С. 114-123], [5]. И даже в случае точечного отображения плоскости в плоскость его канонический вид может быть как

$$\bar{x}_1 = zx_1, \qquad \bar{x}_2 = zx_2, \tag{15}$$

так и

$$\bar{x}_1 = zx_1 + x_2, \qquad \bar{x}_2 = zx_2, \tag{16}$$

(z - кратный корень характеристического уравнения).

В первом случае, какую бы положительно определенную квадратичную форму (5) мы не взяли, разность ее в силу (15) будет равна

$$\Delta V(x_1, x_2) = V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - V(x_1, x_2),$$

или

$$\Delta V(x_1, x_2) = (z^2 - 1)(K_{11}x_1^2 + 2K_{12}x_1x_2 + K_{22}x_2^2). \tag{17}$$

То есть в силу (17) $\delta = z^2 - 1$ всегда.

Во втором случае, рассматривая квадратичную форму (12), получим, что

$$\Delta V(x_1, x_2) = (z^2 - 1)K_{11}x_1^2 + 2zK_{11}x_1x_2 + ((z^2 - 1)K_{22} + K_{11})x_2^2, \tag{18}$$

и уравнение (2) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} K_{11}(z^2 - 1 - \delta) & zK_{11} \\ zK_{11} & K_{11} + K_{22}(z^2 - 1 - \delta) \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Следует отметить, что в этом случае значение $\delta = z^2 - 1$ недостижимо, т.к. приводит к соотношению $K_{11} = 0$, невозможному для положительно определенной (12). Из (19) получаем, что

$$\delta = z^2 - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{K_{11}}{K_{22}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_{11}}{K_{22}}\right)^2 + 4z^2\frac{K_{11}}{K_{22}}}\right), \tag{20}$$

а значит

$$\delta_{max} = z^2 - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{K_{11}}{K_{22}} + \sqrt{\left(\frac{K_{11}}{K_{22}}\right)^2 + 4z^2\frac{K_{11}}{K_{22}}}\right). \tag{21}$$

При этом значение $K = K_{11}/K_{22}$, соответствующее любому $z^2 - 1 < \delta < 0$ будет равно

$$K = \frac{(1 - z^2 - 1)^2}{1 + \delta}.$$

Переходя обратно от канонических переменных к переменным исходным, получим квадратичную функцию Ляпунова с нужными свойствами.

Список литературы

1. Антоновская О.Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т.49. – № 9. – С.1220-1224.
2. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т.52. – № 3. – С.276-281.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 296 с.
4. Ильин В.А.., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1999. – 296 с.
5. Неймарк Ю. И. Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний. I. // Известия вузов: Радиофизика. – 1958. – Т.1. – № 1. – С.41-66.

УДК 519.218.5

Вирченко Юрий Петрович
доктор физико-математических наук, профессор,
Белгородский государственный технологический университет им В.Г. Шухова,
Россия, Белгород

Московченко Екатерина Юрьевна
аспирант,
Белгородский государственный университет,
Россия, Белгород

УРАВНЕНИЯ КИРКВУДА-ЗАЛЬЦБУРГА ДЛЯ РЕШЕТЧАТЫХ КЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Аннотация. *Изучается класс решетчатых моделей статистической механики классических систем с суммируемым парным потенциалом взаимодействия, которые с физической точки зрения описывают т.н. разбавленные системы многих частиц. Получена система уравнений для частных распределений вероятностей, аналогичная системе уравнений Кирквуда-Зальцбурга, которая применяется для исследования непрерывных систем.*

Ключевые слова: *статистическая механика, распределения Гиббса, решетчатые системы, уравнения Кирквуда-Зальцбурга, статистическая сумма, термодинамический предел, гамильтониан, периодические условия.*

Virchenko Yuri Petrovich
Doctor of physical and mathematical sciences, Associate Professor,
Belgorod State Technological Shukhov University,
Russia, Belgorod

Moskovchenko Ekaterina Yurievna
aspirant,
Belgorod State University,
Russia, Belgorod

KIRKWOOD-SALSBURG'S EQUATIONS OF LATTICE CLASSICAL MODELS OF STATISTICAL MECHANICHS

Abstract. *Lattice models of statistical mechanics of classical systems with a summable pair interaction potential, which from the physical point of view describe the so-called diluted systems of many particles are studied. The equations system of partial probabilities is obtained that is similar to the Kirkwood-Salzburg system which is used when continuous models are studied.*

Keywords: *statistical mechanics, Gibbs' distributions, lattice systems, Kirkwood-Salzburg's equations, partition function, thermodynamic limit, hamiltonian, periodic conditions.*

Введение

Математическим объектом изучения в равновесной статистической механике являются гиббсовские вероятностные меры, в частности, гиббсовские меры, связанные с т.н. решетчатыми моделями, которые являются математическими моделями систем многих частиц, рассматриваемых в физике твердого тела. Для решетчатых моделей меры определяются посредством задания семейства согласованных между собой частных распределений вероятностей $\mathsf{P}_\Lambda[\cdot]$ на пространствах элементарных событий $\Omega(\Lambda)$, каждое из которых сопоставляется множеству $\Lambda \subset \mathbb{Z}^3$, $|\Lambda| < \infty$ (конечной части кристаллической решетки), принадлежащему специальному классу конечных подмножеств из $\mathbb{Z}^3$. Тогда гиббсовская мера $\mathsf{P}[\Sigma]$ случайного события Σ, связанного с фиксированным конечным множеством $\Lambda \subset \mathbb{Z}^3$ определяется как совокупность предельных значений последовательности $\langle \mathsf{P}_\Lambda[\Sigma]; \Lambda \subset \mathbb{Z}^3 \rangle$, $\Sigma \subset \Omega(\Lambda)$, которая соответствует расширяющейся последовательности множеств $\Lambda \to \mathbb{Z}^3$. Такие предельные значения вероятностей называются *термодинамически предельными вероятностями* [1], [2].

Одной из задач статистической механики является вычисление предельных значений $P[\Sigma]$. Одним из подходов к решению этой задачи связан с нахождением подходящей системы уравнений, связывающих предельные значения $\mathsf{P}[\Sigma]$ различных случайных событий Σ. В простейшем случае решетчатых моделей, которые соответствуют гиббсовским точечным случайным полям и называются «решеточным газом», такими системами являются интегральные уравнения, которые применялись в [2], [3], а также ее видоизменение [PasturLA], которое аналогично классической системе уравнений Кирквуда-Зальцбурга. В настоящей работе дан вывод системы интегральных уравнений, для решетчатых моделей, которые представляют собой *векторные расслоения* гиббсовских точечных случайных полей.

1. Векторные решетчатые модели статистической механики

Определим для каждого множества Λ вероятностное пространство $\langle \mathfrak{S}(\Lambda), \mathsf{P}_\Lambda \rangle$ решетчатой модели указанного типа, где $\mathfrak{S}(\Lambda)$ — пространство состояний системы и P_Λ — нормированная мера на $\Omega(\Lambda)$.

Опишем класс подмножеств $\Lambda(L) \equiv \Lambda \subset \mathbb{Z}^3$, L — *размер* Λ. Определим для любого $L \in \mathbb{N}_+$ множество $\Lambda = \{0, 1, ..., L\}^3 - a_L\langle 1, ..., 1\rangle$ с $a_L = L/2$, если L — четное, и $(L-1)/2$, если L – нечетное. При этом для любого L имеет место включение $\Lambda(L+1) \supset \Lambda(L)$ и $\bigcup_{L=0}^{\infty} \Lambda(L) = \mathbb{Z}^3$. При этом число точек в множестве Λ с размером L равно $|\Lambda| \equiv (L+1)^d$. Пространства состояний для каждого из указанных множеств представляются в виде прямого произведения

$$\mathfrak{S}(\Lambda) = \bigotimes_{\mathbf{x}\in\Lambda} \mathfrak{S}(\{\mathbf{x}\})\,. \tag{1}$$

На пространстве состояний $\mathfrak{S}_\Lambda$ имеется структура измеримости и опреде-

лен интеграл по σ-аддитивной мере. Измеримые множества определяются как прямые произведения измеримых множеств в каждом из пространств $\mathfrak{S}(\{\mathbf{x}\})$ состояний с $\mathbf{x} \in \Lambda$, а мера на $\mathfrak{S}(\Lambda)$ определяется как произведение мер $\prod_{\mathbf{x}\in\Lambda} \mathrm{d}\mathsf{m}_{\mathbf{x}}$, где меры $\mathrm{d}\mathsf{m}_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \in \Lambda$ эквивалентны. Тогда гиббсовские распределения вероятностей $\mathsf{P}_\Lambda[\Sigma]$ случайных событий $\Sigma \subset \mathfrak{S}(\Lambda)$ определяются, для каждого Λ, на основе задания функционала $\mathsf{H}_\Lambda[\cdot]$ на пространстве $\mathfrak{S}(\Lambda)$ посредством

$$\mathsf{P}_\Lambda[\Sigma] = Q_\Lambda^{-1} \int_\Sigma \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda/T\Big) \prod_{\mathbf{x}\in\Lambda} \mathrm{d}\mathsf{m}_{\mathbf{x}}\,, \tag{2}$$

$$Q_\Lambda = \int_{\mathfrak{S}_\Lambda} \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda/T\Big) \prod_{\mathbf{x}\in\Lambda} \mathrm{d}\mathsf{m}_{\mathbf{x}}\,. \tag{3}$$

Здесь параметр $T > 0$ — температура. Функционал $\mathsf{H}_\Lambda[\cdot]$ называется *гамильтонианом* модели.

Для *векторных решетчатых моделей* пространство состояний $\mathfrak{S}(\{\mathbf{x}\})$ в каждой точке $\mathbf{x} \in \Lambda$ определяется формулой

$$\mathfrak{S}(\{x\}) = \{\langle\rho(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x})\rangle \,:\, \rho(\mathbf{x}) \in \{0,1\}, \mathbf{s}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{s}^2(\mathbf{x}) \le s^2\}, \tag{4}$$

$s \in (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ так, что все пространство $\mathfrak{S}(\Lambda)$ составляют множество пар $\langle\rho(\mathbf{x}), \mathsf{s}(\mathbf{x})\rangle$ функций на Λ, из которых $\rho(\mathbf{x})$ — дихотомическая функция со значениями $\{0,1\}$ и $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ — векторное поле на Λ со значениями в $\mathbb{R}^n$, $n = 1,2,3$. Следовательно, элементами пространства $\mathfrak{S}(\Lambda)$ являются пары $\langle\rho(\mathbf{x}), \mathsf{s}(\mathbf{x})\rangle$ и гамильтониан $\mathsf{H}_\Lambda[\cdot]$ сопоставляет каждой такой паре число из $\mathbb{R}$. Поэтому мы будем обозначать его, далее, посредством $\mathsf{H}_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]$. Измеримые множества в каждом из пространств $\mathfrak{S}(\{\mathbf{x}\})$, $\mathbf{x} \in \Lambda$ определяются измеримыми по Лебегу множествами в $\mathbb{R}^n$ как при значении $\rho(\mathbf{x}) = 0$, так и при значении $\rho(\mathbf{x}) = 1$, а мера $\mathrm{d}\mathsf{m}[\mathbf{s}(\mathbf{x})]$ определяется сферически симметричной плотностью $f(s)$, сосредоточенной на $[0,s]$ так, что для фиксированной точки $\mathbf{x} \in \Lambda$ дифференциал меры $\mathfrak{S}(\{\mathbf{x}\})$ для каждого $\rho = \rho(\mathbf{x}) \in \{0,1\}$, составляющий часть $s^{n-1}dsd\Omega$ сферического слоя около точки $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ с $|\mathbf{s}| = s$, равен $w(s)s^{n-1}dsd\Omega \equiv w(s)d\mathbf{s}$. Таким образом, в соответствии с формулами (2), (3), гиббсовское распределение вероятностей для измеримых множеств Σ в пространстве $\mathfrak{S}(\Lambda)$ векторных моделей имеет вид:

$$\mathsf{P}_\Lambda[\Sigma] = Q_\Lambda^{-1} \sum_{\substack{\rho(\mathbf{x})\in\{0,1\}^\Lambda:\\ \langle\rho,\mathbf{s}\rangle\in\Sigma}} \int_{\Sigma_{\mathbf{s}}} \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda[\rho,\mathbf{s}]/T\Big) \prod_{\mathbf{x}\in\Lambda} w(s(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{x})\,, \tag{4}$$

$$Q_\Lambda = \sum_{\rho(\mathbf{x})\in\{0,1\}^\Lambda} \int_{(\mathbb{R}^n)^{|\Lambda|}} \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda[\rho,\mathbf{s}]/T\Big) \prod_{\mathbf{x}\in\Lambda} w(s(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{x})\,, \tag{5}$$

где $|\mathbf{s}(\mathbf{x})| = s(\mathbf{x})$ и введено обозначение $\Sigma_{\mathbf{s}} = \{\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbf{\Lambda}\rangle \,:\, \langle\langle \rho(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x})\rangle; \mathbf{x} \in \Lambda\rangle \in \Sigma\}$.

Далее, мы рассматриваем векторные модели, гамильтонианы которых содержит только парное взаимодействие между точками $\mathbf{x} \in \Lambda$. Такого рода функционалы определяются формулой

$$\mathsf{H}_\Lambda[\rho(\mathbf{x}), \mathbf{s}] = -\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} \rho(\mathbf{x})(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{h}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Lambda^2} U(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho(\mathbf{x}) I\big(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{y})\big)\rho(\mathbf{y})\,. \quad (6)$$

Здесь $(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{h})$ обозначает скалярное произведение векторов $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{h} = \mathrm{const}$. Функция $U(\cdot) : \mathbb{Z}^3 \mapsto \mathbb{R}$ обладает свойством $U(-\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})$, $U(0) = 0$ и является суммируемой $\sum\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^3} |U(\mathbf{x})| < \infty$. Кроме того, функция $I(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ является симметричной, ограниченной $|I(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)| \le I$, $\mathbf{s}_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$ некоторой постоянной $I > 0$. Функция $I(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ предполагается зависящей только от $\mathbf{s}_1^2$, $\mathbf{s}_2^2$ и скалярного произведения $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$.

Для каждого $n = 1 \div |\Lambda|$ и непустого множества $X \subset \Lambda$, $|X| = m$ и связанного с ним набора $\langle \Sigma_{\mathbf{s}(\mathbf{x})}; \mathbf{x} \in X\rangle$ рассмотрим вероятность («тильда» – случайные величины)

$$\Pr\{\tilde\rho(\mathbf{x}) = 1 \vee \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) \in \Sigma_{\mathbf{s}(\mathbf{x})}; \mathbf{x} \in X\} = Q_\Lambda^{-1} \sum_{\rho\in\{0,1\}^\Lambda} \Big(\prod_{\mathbf{x}\in X} \rho(\mathbf{x})\Big) \times$$

$$\times \int\limits_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{x})\in\Sigma_{\mathbf{s}(\mathbf{x})};\\ \mathbf{x}\in X}} \int\limits_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{x})\in\mathbb{R}^n;\\ \mathbf{x}\in\Lambda\setminus X}} \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]/T\Big) \prod_{\mathbf{y}\in\Lambda} w(s(\mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{y})\,.$$

Введем плотности $f_m(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X)$ распределения этих вероятностей — производные по мере $\prod_{\mathbf{x}\in X} \mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{x})$ множества $\Sigma_{\mathbf{s}}$,

$$f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X) = Q_\Lambda^{-1} \sum_{\rho\in\{0,1\}^\Lambda} \Big(\prod_{\mathbf{x}\in X} \rho(\mathbf{x}) w(s(\mathbf{x}))\Big) \times$$

$$\times \int\limits_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y})\in\mathbb{R}^n:\\ \mathbf{y}\in\Lambda\setminus X}} \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]/T\Big) \prod_{\mathbf{y}\in\Lambda\setminus X} w(s(\mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{y})\,. \quad (7)$$

Тогда каждая вероятность $p(X) = \Pr\{\tilde\rho(\mathbf{x}) = 1; \mathbf{x} \in X\}$, $\varnothing \ne X \subset \Lambda$ определяется формулой

$$p(X) = \sum_{\rho\in\{0,1\}^\Lambda} \int\limits_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y})\in\mathbb{R}^n:\\ \mathbf{y}\in X}} f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X) \prod_{\mathbf{y}\in X} w(s(\mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{y}) =$$

$$= Q_\Lambda^{-1} \sum_{\rho\in\{0,1\}^\Lambda} \Big(\prod_{\mathbf{x}\in X} \rho(\mathbf{x}) w(s(\mathbf{x}))\Big) \int\limits_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y})\in\mathbb{R}^n:\\ \mathbf{y}\in\Lambda\setminus X}} \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]/T\Big) \prod_{\mathbf{y}\in\Lambda\setminus X} w(s(\mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{y}).$$

Формулу (7) можно записать в иной форме. Сопоставим каждой функции $\rho(\mathbf{x})$, множество $Z = \{\mathbf{z} \in \Lambda : \rho(\mathbf{z}) = 1\}$, в терминах которого запишем формулу (6)

$$\mathsf{H}_\Lambda[\rho(\mathbf{x}), \mathbf{s}] \equiv H_\Lambda(Z; \mathbf{s}) = -\sum_{\mathbf{z}\in Z}(\mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{h}) + \frac{1}{2}\sum_{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \in Z} U(\mathbf{x}-\mathbf{y}) I\big(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{y})\big)\,. \quad (8)$$

Тогда плотность $f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X)$ записывается в виде

$$f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X) = Q_\Lambda^{-1}\Big(\prod_{\mathbf{x}\in X} w(s(\mathbf{x}))\Big) \times$$

$$\times \sum_{Y\subset \Lambda\setminus X} \int\limits_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y})\in \mathbf{\Sigma}_\mathbf{x};\\ \mathbf{y}\in Y}} \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda(X\cup Y; \mathbf{s})/T\Big) \prod_{\mathbf{y}\in Y} w(s(\mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{y}), \quad (9)$$

$$Q_\Lambda = \sum_{X\subset\Lambda} \int_{\mathbf{s}(\mathbf{x});\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda(X; \mathbf{s})/T\Big) \prod_{\mathbf{x}\in X} w(s(\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{x})\,. \quad (10)$$

2. Интегральные уравнения для плотностей f_m

Пусть $X = \{\mathbf{x} : \rho(\mathbf{x}) = 1\} \subset \Lambda$. Запишем выражение (7) для плотностей $f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X)$ в следующем виде:

$$f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X) = Q_\Lambda^{-1} \sum_{Y\subset\Lambda\setminus X} \Big(\prod_{\mathbf{x}\in X} w(s(\mathbf{x}))\Big) \times$$

$$\times \int\limits_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y})\in\mathbb{R}^n:\\ \mathbf{y}\in Y}} \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda(X\cup Y; \mathbf{s})/T\Big) \prod_{\mathbf{y}\in Y} w(s(\mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{y})\,. \quad (11)$$

Введем функцию $K(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \exp(-U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)I(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)/T) - 1$, определенную для каждых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{Z}^3$, $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathbb{R}^n$, а также функцию на $\mathbb{Z}^3 \times \mathfrak{P}(\mathbb{Z}^3)$, где $\mathfrak{P}(\mathbb{Z}^3)$ – семейство всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^3$:

$$W_\Lambda(\mathbf{x}; X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X) = \exp\Big([(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{h}) - \sum_{\substack{\mathbf{x}\in X, \mathbf{y}\in\mathbb{Z}^d:\\ \mathbf{x}\neq \mathsf{P}_\Lambda\mathbf{y}\in X}} U(\mathbf{x}-\mathbf{y}) I\big(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathsf{P}_\Lambda\mathbf{y})\big)]/T\Big),$$

$W_\Lambda(\mathbf{x}; \varnothing) = 1$. Тогда для любых $X \subset \Lambda \setminus \{\mathbf{x}\}$, $Y \subset \Lambda \setminus \{\mathbf{x}\}$, $X \cap Y = \varnothing$ имеет место

$$\exp\big(-\mathsf{H}_\Lambda(\{\mathbf{x}\}\cup X\cup Y; \mathbf{s})/T\big) =$$

$$= W_\Lambda(\mathbf{x}; X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X) W_\Lambda(\mathbf{x}; Y; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y) \exp\big(-\mathsf{H}_\Lambda(X\cup Y; \mathbf{s})/T\big) =$$

$$= W_\Lambda(\mathbf{x}; X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X) \prod_{\mathbf{y}\in Y} \Big(1 + K(\mathbf{x}-\mathbf{y}; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{y}))\Big) \exp\big(-\mathsf{H}_\Lambda(X\cup Y; \mathbf{s})/T\big). \quad (12)$$

Это равенство сохраняется и при $|X \cup Y| = 1$. Определим

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(y), \mathbf{y} \in Y) = \Big\{ \prod_{\mathbf{y} \in Y} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}; \mathbf{s}, \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y),\ |Y| > 0\,;\ \ 1,\ |Y| = 0 \Big\}.$$

такую, что

$$\prod_{\mathbf{y} \in Z} \Big(1 + K(\mathbf{x} - \mathbf{y}; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{y})) \Big) = \sum_{Y \subset Z} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(y), \mathbf{y} \in Y). \tag{13}$$

Пусть $\mathfrak{E}_\Lambda$ всех наборов $\mathsf{f}^\lambda = \langle f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in X) : \varnothing \neq X \subset \Lambda \rangle$ — пространство функций с $\mathbf{s}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Lambda$. Подставим (12) и (13) в $f_{m+1}^{(\Lambda)}(X \cup \{\mathbf{x}\}; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X \cup \{x\})$ с $X \subset \Lambda \setminus \{\mathbf{x}\}$, получаемое из (11):

$$f_{m+1}^{(\Lambda)}(X \cup \{\mathbf{x}\}; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X \cup \{\mathbf{x}\}) = w(\mathbf{s}(\mathbf{x})) W_\Lambda(\mathbf{x}; X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X) \times$$

$$\times Q_\Lambda^{-1} \sum_{Y \subset \Lambda \setminus X \cup \{\mathbf{x}\}} \sum_{\substack{Z : Y \subset Z, \\ Z \subset \Lambda \setminus X \cup \{\mathbf{x}\}}} \Big(\prod_{\mathbf{y} \in X} w(s(\mathbf{y})) \Big) \int\limits_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n : \\ \mathbf{y} \in Y}} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(y), \mathbf{y} \in Y) \times$$

$$\times \exp \Big(- \mathsf{H}_\Lambda(X \cup Y; \mathbf{s})/T \Big) \prod_{\mathbf{y} \in Y} w(s(\mathbf{y})) \mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{y}). \tag{14}$$

После преобразований получаем

$$f_{m+1}^{(\Lambda)}(X \cup \{\mathbf{x}\}; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X \cup \{\mathbf{x}\}) =$$

$$= \sum_{Y \subset \Lambda \setminus (X \cup \{\mathbf{x}\})} \int\limits_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n : \\ \mathbf{y} \in Y}} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(y), \mathbf{y} \in Y) \big[f_{m+|Y|}^{(\Lambda)}(X \cup Y; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup Y) -$$

$$- f_{m+1+|Y|}^{(\Lambda)}(\{\mathbf{x}\} \cup X \cup Y; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup Y \cup \{\mathbf{x}\}) \big] \prod_{\mathbf{y} \in Y} \mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{y}) \,.$$

После подстановки (14) и выделения слагаемого с $Y = \varnothing$ получаем систему линейных алгебраических тождеств для набора плотностей распределения $f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in X)$ с $\mathbf{s}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in X$, $\varnothing \neq X \subset \Lambda$:

$$f_{m+1}^{(\Lambda)}(X \cup \{\mathbf{x}\}; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X \cup \{\mathbf{x}\}) = w(\mathbf{s}(\mathbf{x})) W_\Lambda(\mathbf{x}; X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X) \times$$

$$\times \Big[f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X) - f_{m+1}^{(\Lambda)}(\{\mathbf{x}\} \cup X; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup \{\mathbf{x}\}) +$$

$$+ \sum_{Y \subset \Lambda \setminus (X \cup \{\mathbf{x}\})} \int\limits_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n : \\ \mathbf{y} \in Y}} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(y), \mathbf{y} \in Y) \big[f_{m+|Y|}^{(\Lambda)}(X \cup Y; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup Y) -$$

$$- f_{m+1+|Y|}^{(\Lambda)}(\{\mathbf{x}\} \cup X \cup Y; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup Y \cup \{\mathbf{x}\}) \big] \prod_{\mathbf{y} \in Y} \mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{y}) \Big]. \tag{15}$$

Эту систему, можно рассматривать как систему уравнений. Ее вид не зависит от выбора точки $\mathbf{x}$ в каждом из множеств $X \cup \{\mathbf{x}\} \subset \Lambda$. Переходя к термодинамическому пределу $\Lambda \to \mathbb{Z}^3$, находим, что предельные плотности $f_m(X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X)$, $m \in \mathbb{N}$, $\varnothing \neq X \subset \mathbb{Z}^d$, должны удовлетворять предельной системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода в специальном функциональном пространстве $\mathfrak{E}$

$$f_{m+1}(X \cup \{\mathbf{x}\}; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X \cup \{\mathbf{x}\}) = w(\mathbf{s}(\mathbf{x}))W(\mathbf{x}; X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X) \times$$

$$\times \Big[f_m(X; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X) - f_{m+1}(\{\mathbf{x}\} \cup X; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup \{\mathbf{x}\}) +$$

$$+ \sum_{Y \subset \mathbb{Z}^d \setminus (X \cup \{\mathbf{x}\})} \int\limits_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n : \\ \mathbf{y} \in Y}} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(y), \mathbf{y} \in Y) \big[f_{m+|Y|}(X \cup Y; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup Y) -$$

$$- f_{m+1+|Y|}(\{\mathbf{x}\} \cup X \cup Y; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup Y \cup \{\mathbf{x}\}) \big] \prod_{\mathbf{y} \in Y} \mathrm{d}\mathbf{s}(\mathbf{y}) \Big].$$

Она может рассматриваться как видоизменение, по отношению к векторным решетчатым моделям, системы интегральных уравнений Кирквуда-Зальцбурга в статистической механике непрерывных моделей.

Список литературы

1. Минлос Р. А. Введение в математическую статистическую физику. — М.: МЦНМО, 2002. — 112 с.
2. Gallavotti G., Miracle-Sole S. Statistical Mechanics of Lattice Systems // Commun. Math. Phys. — 1967. — 5. — P. 317-323.
3. Добрушин Р. Л. Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — 4.— 1. — С. 31-43.
4. Пастур Л. А. Спектральная теория уравнений Кирквуда-Зальцбурга в конечном объеме // Теорет. и матем. физика. – 1974. — 18.— 2. — С. 233-242.

УДК 531.62 + 531.332.3

Гладков Сергей Октябринович
доктор физико-математических наук, профессор,
Московский авиационный институт,
Россия, Москва

Богданова Софья Борисовна
кандидат физико-математических наук, доцент,
Московский авиационный институт,
Россия, Москва

О ВЛИЯНИИ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ НА ФОРМУ ПЛОСКОЙ БРАХИСТОХРОНЫ

Аннотация. *Исходя из закона сохранения энергии, с помощью метода подвижного базиса получена система динамических уравнений, позволяющая описать форму стационарно вращающейся в своей плоскости брахистохроны. Найдено параметрическое решение приведенных уравнений в отсутствии трения, и с помощью компьютерного моделирования приведена графическая иллюстрация полученной аналитически зависимости.*

Ключевые слова: *частота вращения, брахистохрона, динамические уравнения движения.*

Gladkov Sergey
Doctor of physical and mathematical sciences, Associate Professor,
Moscow Aviation Institute,
Russia, Moscow

Bogdanova Sophie
Candidat of physical and mathematical sciences, Assistant Professor,
Moscow Aviation Institute,
Russia, Moscow

ON THE INFLUENCE OF STEADY ROTATION ON THE SHAPE OF PLANE BRACHISTICHRONE

Abstract. *Proceeding from the law of conservation of energy and using the method of a moving basis, a system of dynamical equations is obtained, which makes it possible to describe the shape of a brachistochrone that is stationary in its own plane. In addition, the parametric solution of the reduced equations in the lack of the friction has been found. What is more, by making use of the computer modelling, the graphic illustration of the obtained analytically dependence is deduced.*

Keywords: *rotation frequency, brachistochrone, dynamical equations of movement.*

В настоящем сообщении мы покажем решение задачи о движении тела по брахистохроне с учетом ее вращения с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, направленной перпендикулярно плоскости $x-y$ (см. рис. 1).

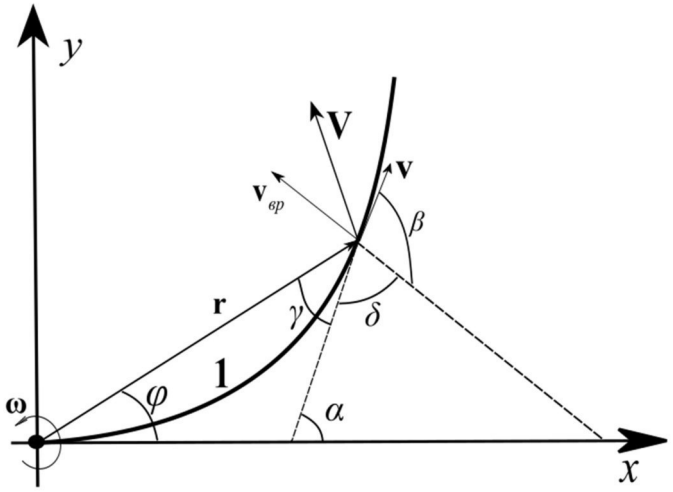


Рисунок 1 – Схематическое изображение задачи. $\mathbf{V} = \mathbf{v}_{пост} + \mathbf{v}_{вр}$, угловая скорость направлена перпендикулярно плоскости рисунка. Линия 1 – траектория тела в отсутствие вращения

Для ее решения воспользуемся хорошо известным законом сохранения энергии ([1] -[3]):

$$E = T + U = const, \tag{1}$$

где кинетическая энергия складывается из двух частей: поступательной и вращательной:

$$T = \frac{m\mathbf{v}_{пост}^2}{2} + \frac{J\boldsymbol{\omega}^2}{2}, \tag{2}$$

где m – масса точечного тела, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{пост.} + \mathbf{v}_{вр.}$ – результирующая скорость движения, где $\mathbf{v}_{пост.}$ – скорость поступательного движения в

отсутствии вращения, а $\mathbf{v}_{вр.}$ – чисто вращательная составляющая, определяемая формулой $\mathbf{v}_{вр.} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ (см. рис. 2):

$$J = m\mathbf{r}^2 \tag{3}$$

момент инерции тела, $\boldsymbol{\omega}$ – частота вращения, которая в нашей задаче постоянна.

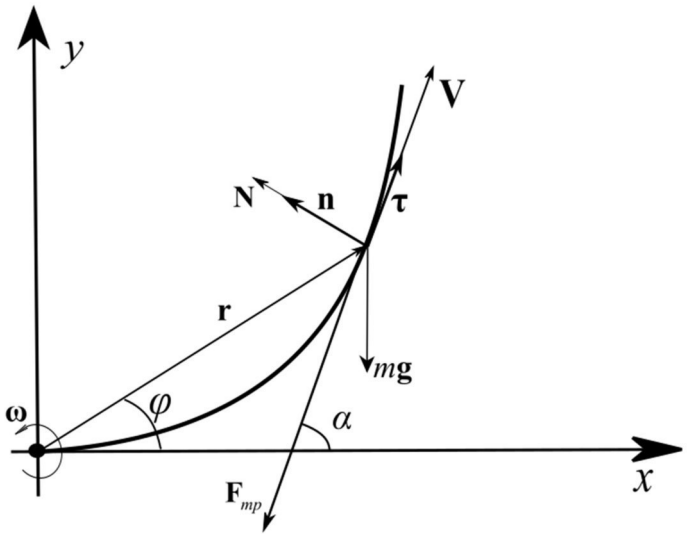


Рисунок 2 – Показан подвижный базис $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}$ к результирующей траектории движения $\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{V}(t)dt$. Также изображены все действующие на тело массы m силы

Потенциальную энергию U запишем в виде:

$$-U = A = m\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{fr} \cdot d\mathbf{r} = m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{fr} \cdot d\mathbf{r}\,, \tag{4}$$

где $\mathbf{r}_0$ – некоторая начальное положение, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, а $\mathbf{F}_{fr} = \hat{\mu}\mathbf{N} - F_c(V)\dfrac{\mathbf{V}}{V}$, где $\hat{\mu}$ – тензорный коэффициент сухого трения, $F_c(\mathrm{v})$ – сила вязкого сопротивления (например, Стокса [4]).

С учетом (2) – (4) закон сохранения (1) примет вид:

$$E = \frac{m\mathbf{v}_{пост}^2}{2} + \frac{m\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega}^2}{2} - m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{fr} \cdot d\mathbf{r} = const\,. \tag{5}$$

Поскольку решать задачу мы будем в подвижном базисе также, как и в работах [5] - [14], то с этой целью предварительно приведем разложение сил тяжести и сопротивления в базисе $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}$ в виде

$$\mathbf{g} = g(\boldsymbol{\tau}\sin\alpha - \mathbf{n}\cos\alpha)\,, \tag{6}$$

$$\mathbf{F}_{fr} = N\hat{\mu}\mathbf{n} - F_c\boldsymbol{\tau} = \left(\mu N - F_c(\mathrm{v})\right)\boldsymbol{\tau}\,, \tag{7}$$

где $\mu-$ общепринятый коэффициент трения, который определяется как $\mu\boldsymbol{\tau}' = \hat{\mu}\mathbf{n}'$, поскольку $\mathbf{N} = N\mathbf{n}'$, а угол α введен на рис. 1 (причем $y' = tg\alpha$).

Уравнение движения мы получим, исходя из условия $\dot{E} = 0$. В результате имеем

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\mathbf{V}^2}{2}+\frac{m\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega}^2}{2}-m(\mathbf{g}\cdot\mathbf{r})-\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\mathbf{F}_{fr}\cdot d\mathbf{r}\right]=m\left(\mathbf{V}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)+m\omega^2\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{V}\right)-m\left(\mathbf{g}\cdot\mathbf{V}\right)-\left(\mathbf{F}_{fr}\cdot\mathbf{V}\right)=0,$$

откуда следует, что

$$\mathbf{V}\left(m\dot{\mathbf{V}}+m\omega^2\mathbf{r}-m\mathbf{g}-\mathbf{F}_{fr}\right)=0$$

или

$$\dot{\mathbf{V}}+\omega^2 r\mathbf{e}_r=\mathbf{g}+\frac{\mathbf{F}_{fr}}{m}. \tag{8}$$

где $\mathbf{e}_r-$ единичный вектор, направленный вдоль радиус – вектора $\mathbf{r}$.

Связь базисных единичных векторов $\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\varphi$ полярной системы координат с подвижным базисом $\boldsymbol{\tau}-\mathbf{n}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r&=\mathbf{n}\sin(\alpha-\varphi)+\boldsymbol{\tau}\cos(\alpha-\varphi),\\ \mathbf{e}_\varphi&=-\mathbf{n}\cos(\alpha-\varphi)+\boldsymbol{\tau}\sin(\alpha-\varphi).\end{aligned} \tag{9}$$

С учетом этого уравнение (8) становится таким

$$\dot{\mathrm{V}}\boldsymbol{\tau}+\frac{\mathrm{V}^2}{R}\mathbf{n}+r\omega^2\left[\mathbf{n}\sin(\alpha-\varphi)+\boldsymbol{\tau}\cos(\alpha-\varphi)\right]=g\left(\boldsymbol{\tau}\sin\alpha-\mathbf{n}\cos\alpha\right)+\frac{\left(\mu N-F_c(\mathrm{v})\right)}{m}\boldsymbol{\tau}, \tag{10}$$

откуда немедленно следует:

$$\begin{cases}\dot{\mathrm{V}}=-r\omega^2\cos(\alpha-\varphi)+g\sin\alpha+\dfrac{\left(\mu N-F_c(\mathrm{v})\right)}{m},\\ \mathrm{V}\dot{\alpha}=-r\omega^2\sin(\alpha-\varphi)-g\cos\alpha.\end{cases} \tag{11}$$

где $\mathrm{V}=R\dot{\alpha}$.

В случае, когда силы сопротивления несущественны, система уравнений (11) сильно упрощается, и мы получаем:

$$\begin{cases}\dot{\mathrm{V}}=-r\omega^2\cos(\alpha-\varphi)+g\sin\alpha,\\ \mathrm{V}\dot{\alpha}=-r\omega^2\sin(\alpha-\varphi)-g\cos\alpha.\end{cases} \tag{12}$$

Анализ (12) показывает, что если считать $\omega=0$, то мы естественным образом получаем уравнение брахистохроны [5] - [6]. Если же при этом положить $\mathrm{V}=-R\dot{\alpha}$ (при $\dot{\alpha}<0$), то уравнения (12) приведут к уравнению параболы. Это означает, что, во-первых, в условиях свободного движения тела в поле силы тяжести его траектория может быть только либо параболой, либо брахистохроной а, во-вторых, уравнение брахистохроны можно получить без обязательного для брахистохроны требования о наименьшем времени скатывания.

Используя формулы разности синуса и косинуса, а также вводя декартовы координаты $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, из (12) получаем:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{V}} = -\omega^2\left(x\cos\alpha + y\sin\alpha\right) + g\sin\alpha, \\ \mathrm{V}\,\dot{\alpha} = -\omega^2\left(x\sin\alpha - y\cos\alpha\right) - g\cos\alpha, \end{cases}$$

откуда находятся x, y:

$$\begin{cases} \omega^2 x = -\dot{\mathrm{V}}\cos\alpha - \mathrm{V}\,\dot{\alpha}\sin\alpha, \\ \omega^2 y = -\dot{\mathrm{V}}\sin\alpha + \mathrm{V}\,\dot{\alpha}\cos\alpha + g. \end{cases} \tag{13}$$

Дифференцирование обеих уравнений по времени с учетом формул

$$\dot{x} = \mathrm{V}_x = \mathrm{V}\cos\alpha,$$
$$\dot{y} = \mathrm{V}_y = -\mathrm{V}\sin\alpha,$$

приводит к следующему результату

$$\begin{cases} \left(\ddot{\mathrm{V}} + \mathrm{V}\,\omega^2 + \mathrm{V}\,\dot{\alpha}^2\right)\cos\alpha + \mathrm{V}\,\ddot{\alpha}\sin\alpha = 0, \\ \left(\ddot{\mathrm{V}} - \mathrm{V}\,\omega^2 + \mathrm{V}\,\dot{\alpha}^2\right)\sin\alpha - \mathrm{V}\,\ddot{\alpha}\cos\alpha = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Умножая верхнее уравнение в системе (14) на $\cos\alpha$, а нижнее – на $\sin\alpha$, а затем их складывая, получим

$$\ddot{\mathrm{V}} + \mathrm{V}\left(\dot{\alpha}^2 + \omega^2\cos 2\alpha\right) = 0\,. \tag{15}$$

Если же теперь верхнее уравнение в (15) умножить на $\sin\alpha$, а нижнее – на $\cos\alpha$ и вычесть их друг из друга, то получим:

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\sin 2\alpha = 0\,. \tag{16}$$

Обезразмерим уравнения (15) и (16) с помощью замены $\tau = \omega t$:

$$\begin{cases} \mathrm{v}'' + \mathrm{v}\left(\alpha'^2 + \cos 2\alpha\right) = 0, \\ \alpha'' + \sin 2\alpha = 0. \end{cases} \tag{17}$$

где «штрих» указывает на дифференцирование по τ. Первый интеграл нижнего уравнения системы (17) дает:

$$\alpha'^2 - \cos 2\alpha = \frac{C_1^2}{\omega^2}, \tag{18}$$

откуда сразу же следует решение в квадратурах

$$\tau + C_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\dfrac{C_1^2}{\omega^2} + \cos 2\alpha}}\,. \tag{19}$$

Считая $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{2}$, найдем $C_2 = 0$, и тогда (19) примет компактный вид:

$$\tau(\alpha) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\dfrac{C_1^2}{\omega^2} + \cos 2\alpha}}\,. \tag{20}$$

Далее. Подставляя в верхнее уравнение системы (17) выражение $\alpha'^2 = \dfrac{C_1^2}{\omega^2} + \cos 2\alpha$, полученное из (18), найдем:

$$\mathrm{V}''+\mathrm{V}\left(2\cos 2\alpha+\frac{C_1^2}{\omega^2}\right)=0. \tag{21}$$

Искомая форма вращающейся брахистохроны $y(x)$ найдется, если использовать еще два уравнения:

$$\begin{cases} x=\int \mathrm{V}\cos\alpha dt, \\ y=-\int \mathrm{V}\sin\alpha dt, \end{cases} \tag{22}$$

Таким образом, полная система уравнений, описывающая форму вращающейся брахистохроны, должна иметь вид:

$$\begin{cases} \alpha'=\sqrt{\gamma+\cos 2\alpha}, \\ \mathrm{V}''+\mathrm{V}\left(2\cos 2\alpha+\gamma\right)=0, \\ x=\dfrac{1}{\omega}\int\limits_0^{\tau}\mathrm{V}\cos\alpha d\tau, \\ y=h-\dfrac{1}{\omega}\int\limits_0^{\tau}\mathrm{V}\sin\alpha d\tau. \end{cases} \tag{23}$$

где $\gamma=\dfrac{C_1^2}{\omega^2}$ и при этом $C_1\neq\omega$, поскольку C_1 это независимая ни от чего константа. Для численного анализа уравнений (23) удобно перейти к безразмерным параметрам. Обозначим $u=\dfrac{\mathrm{V}}{\sqrt{2gh}}$. Тогда окончательно получим

$$\begin{cases} \alpha'=\sqrt{\gamma+\cos 2\alpha}, \\ u''+u\left(2\cos 2\alpha+\gamma\right)=0, \\ \xi=\dfrac{x}{h}=\lambda\int\limits_0^{\tau}u\cos\alpha d\tau, \\ \eta=\dfrac{y}{h}=1-\lambda\int\limits_0^{\tau}u\,\mathrm{v}\sin\alpha d\tau. \end{cases} \tag{24}$$

где параметр $\lambda=\dfrac{1}{\omega}\sqrt{\dfrac{2g}{h}}$. Функция $\eta=\eta(\xi,\lambda,\gamma)$ показывает зависимость траектории от параметров λ и γ. Начальные условия можно задать следующими:

$$u(0)=0,\ u'(0)=A\neq 0. \tag{25}$$

Результаты компьютерного моделирования системы (24) показаны на рисунке 3.

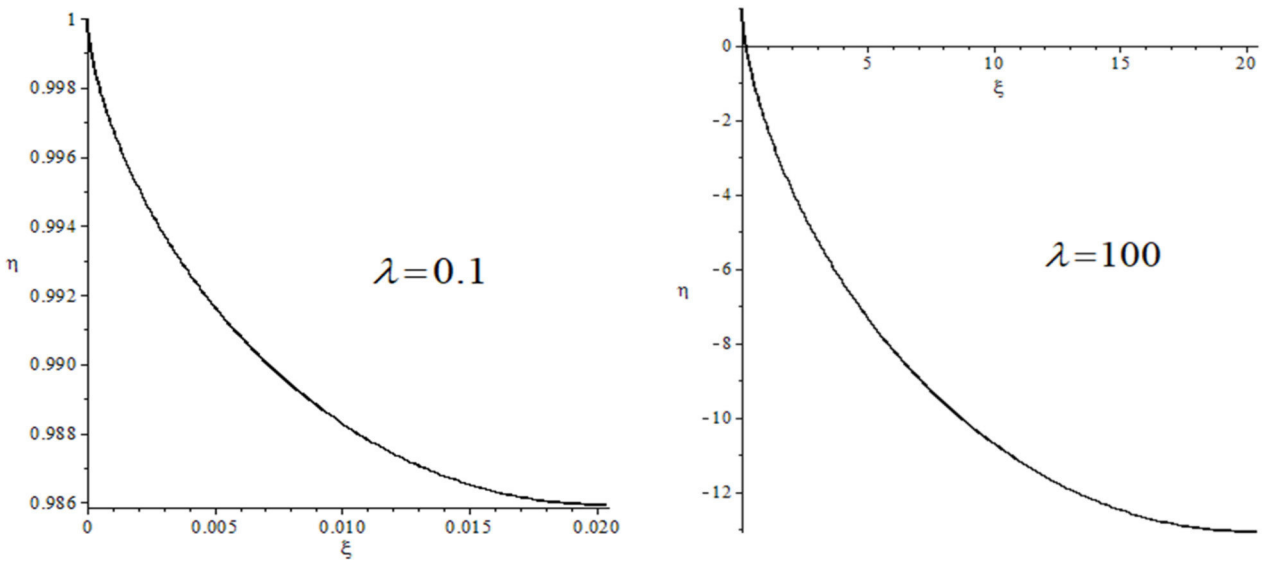


Рисунок 3 – Зависимость $\eta(\xi)$ построена при начальных условиях $\alpha(0)=\frac{\pi}{2}, u(0)=0, u'(0)=1$ и $\gamma=4$, $\lambda=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2g}{h}}$. Сравнение рисунков показывает, что «длина» вращающейся брахистохроны уменьшается с увеличением частоты вращения

Список литературы

1. Ландау Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Наука. 1973. - 207 с.
2. Гладков С.О. Об одном методическом подходе при выводе основных физических уравнений // Физическое образование в вузах. - 2021. - Т. 27, В. 2. - С.5-12.
3. Гладков С.О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // ЖТФ. - 2018. - Т. 88, В. 3. - С.337-341.
4. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Наука. 1988. - 733 с.
5. Гладков С.О. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. - 2016. - №1. - 161101-1-5.
6. Гладков С.О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом / С.О. Гладков, С.Б. Богданова. // Ученые записки физического факультета МГУ. - 2016. - №4. - 164002-1-5.
7. Гладков С.О. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом

сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. - 2017. - №1. - 171101-1-5.
8. Гладков С.О. К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. - 2017. - 172101-1-6.
9. Гладков С.О. О классе двухмерных геодезических кривых в поле силы тяжести / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. - 2019. - №58. - С.5-13.
10. Гладков С.О. К теории движения тел с переменной массой / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. - 2020. - №65. - С.83-91.
11. Гладков С.О. К теории пространственной брахистохроны / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. - 2020. - №68. – С.53-60.
12. Gladkov S.O. Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases / S.O. Gladkov, S.B. Bogdanova // Journal of Mathematical Sciences - 2020. - V. 245. - No. 4. - PP. 528-537.
13. Gladkov S.O**.** On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them / S.O. Gladkov, S.B. Bogdanova // Journal of Mathematical Sciences - 2021. - V. 257 - No. 1. - PP. 27-30.
14. Гладков С.О. К вопросу учета силы сопротивления в шарнирной точке крепления физического маятника и ее влияние на динамику движения / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Изв. вузов. ПНД. - 2019. - Т. 27. - № 1. - С.54-62.

УДК 517.988

Данилова Ольга Юрьевна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математики и моделирования систем,
Воронежский институт МВД России,
Россия, Воронеж

О БИФУРКАЦИЯХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. *В статье рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Решения данного уравнения определяют некоторые состояния упругих систем, а также описывают фазовые состояния в теории кристаллов. Данное уравнение является уравнением Эйлера – Лагранжа экстремалей функционала V. Для описания свойств функционала V с помощью редукции Ляпунова – Шмидта переходят к ключевой функции W. Бифуркационные эффекты, полученные для ключевой функции W, полностью переносятся на функционал V. Для ключевой функции описаны все критические точки.*

Ключевые слова: *нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, уравнение Эйлера – Лагранжа, экстремали, функционал, редукция Ляпунова – Шмидта, ключевая функция, бифуркация, критические точки.*

Danilova Olga Yur'evna
Candidate of physical and mathematical sciences, Assistant Professor,
Assistant professor of the chair of mathematics and modeling systems,
Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia,
Russia, Voronezh

BIFURCATIONS OF SOLUTIONS TO A NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

Abstracts. *The article deals with a nonlinear ordinary differential equation of the fourth order. The solutions of this equation determine some states of elastic systems, and also describe phase states in the theory of crystals. This equation is also the Euler – Lagrange equation of extremals*

of the functional V. To describe the properties of the functional V we can pass to the key function W using the Lyapunov – Schmidt reduction. The bifurcation effects obtained for the key function W are completely transferred to the functional V. For the key function are described all critical points.

Keywords: *nonlinear ordinary differential equation, Euler – Lagrange equation, extremals, functional, Lyapunov – Schmidt reduction, key function, bifurcation, critical points.*

Пусть задано дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4 p}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 p}{dx^2} + \alpha p + p^3 = 0, \qquad (1)$$

в котором p — функция, определенная на отрезке $[0, \pi]$. Наложим на него краевые условия

$$p(0) = \frac{d^2 p}{dx^2}(0) = p(\pi) = \frac{d^2 p}{dx^2}(\pi) = 0. \qquad (2)$$

Нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (1) применяется в теории упругих систем и теории кристаллов для моделирования их некоторых фазовых состояний [1].

Уравнение (1) является уравнением Эйлера – Лагранжа экстремалей функционала

$$V(p, \kappa, \alpha) = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 p}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \alpha p^2 \right) + \frac{p^4}{4} \right) dx \qquad (3)$$

($\alpha > 0$). Функционал V рассматривается на пространстве E функций класса C^4, заданных на отрезке $[0, \pi]$ и для которых выполняются краевые условия (2).

Для описания свойств функционала V с помощью редукции Ляпунова – Шмидта [2] переходят к ключевой функции W, зависящей от двух переменных

$$W(\xi, \delta) = \inf_{p: \langle p, e_1 \rangle = \xi_1, \langle p, e_2 \rangle = \xi_2} V(p, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2),$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \delta = (\delta_1, \delta_2).$$

Здесь $e_1 = \sqrt{2/\pi} \sin(x)$, $e_2 = \sqrt{2/\pi} \sin(2x)$ — моды бифуркации.

Функционал (3) инвариантен относительно двух инволюций J_1, J_2:

$$J_2(p)(x) = p(\pi - x), J_1(p)(x) = -p(\pi - x), \; J_1 = -J_2,$$

$$V(J_1(p)(x)) \equiv V(J_2(p)(x)) \equiv V(p).$$

Тогда получаем, что ключевая функция является симметричной (присутствует симметрия прямоугольника)

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2).$$

По свойствам ключевой функции W можно судить о свойствах функционала V.

Ключевую функцию W можно асимптотически представить в виде:

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(|\delta|),$$

$U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ — аппроксимация Ритца для функционала V по модам бифуркации e_1, e_2.

Главная часть ключевой функции является четной по каждой переменной и после преобразований принимает следующий вид [3]:

$$U(\xi_1, \xi_2) = \frac{\lambda_1}{2}\xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{4}(\xi_1^4 + 4\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4),$$

то есть является возмущенной двумерной сборкой, в которой коэффициент двойного отношения больше двух. Функция U полностью описывает все бифуркационные эффекты, возникающие для ключевой функции W.

Для ключевой функции описаны все критические точки, появляющиеся в данном случае. Могут иметь место только четыре возможных варианта: 1) один минимум; 2) два минимума и одно седло; 3) два минимума, два седла и один максимум; 4) четыре минимума, четыре седла и один максимум.

Список литературы

1. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Топологический подход к классификациям фаз кристаллических сегнетоэлектриков / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов // В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. – Воронеж, ВГУ, 2000. – С.41–57.
2. Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах / Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. – 1996. – Т.51, вып.1. – С.101–132.
3. Царев С.Л. Глобальное сравнение эквивариантных конечномерных редукций для гладкого G – инвариантного функционала / С.Л. Царев // Тр. матем. фак - та (новая серия). – Воронеж, ВГУ, 1998. – Вып. №3. – С.73–76.

УДК 517.926

Дубровина Татьяна Владимировна
кандидат физико-математических наук, доцент,
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
Россия, Владимир

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА

Аннотация. *Исследовано специальное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами с применением теории функций комплексного переменного.*

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, характеристические показатели, особые точки*

Dubrovina Tatiana
docent,
Vladimir State University,
Russia, Vladimir

INVESTIGATION OF A SPECIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF ELECTRON BEHAVIOR

Abstract. *A special second-order linear differential equation with variable coefficients is investigated using the theory of functions of a complex variable.*

Keywords: *differential equation, characteristic indicators, singular points.*

В настоящей работе исследуется линейное дифференциальное уравнение третьего порядка, связанное с поведением электрона:

$$(\sqrt{1-z^2}-\lambda)*\frac{1}{z}*\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}*\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\right]+e^2*\frac{1}{z}*\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}*\frac{dy}{dz}\right]=0 \qquad (1)$$

Здесь e – заряд электрона, а λ – параметр, принимающий значения из единичного интервала $(0;1)$. Работа по существу математическая, никаких "физических" выводов не делается. Относительно переменной z предполагается, что она изменяется на комплексной плоскости. Умножим уравнение (1) на z и обозначим $\psi(z)=y'$. Тогда уравнение (1) сводится к следующему:

$$(\sqrt{1-z^2}-\lambda)\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}*\frac{d\psi}{dz}\right]+e^2*\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}*\psi(z)\right]=0$$

или

$$(\sqrt{1-z^2}-\lambda)*\left[-\frac{1}{z^2}*\psi'(z)+\frac{1}{z}*\psi''(z)\right]+e^2*\left[-\frac{1}{z^2}*\psi(z)+\frac{1}{z}\psi'(z)\right]=0.$$

Умножая последнее уравнение на z^2, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$(\sqrt{1-z^2}-\lambda)z\psi''(z)+(ze^2-\sqrt{1-z^2}+\lambda)\psi'(z)-e^2\psi(z)=0. \qquad (2)$$

В нормальном виде это уравнение выглядит так:

$$\psi''(z)+p(z)\psi'(z)+q(z)\psi(z)=0, \qquad (3)$$

где

$$p(z)=\frac{ze^2-\sqrt{1-z^2}+\lambda}{(\sqrt{1-z^2}-\lambda)z};\quad q(z)=\frac{-e^2}{(\sqrt{1-z^2}-\lambda)z}. \qquad (4)$$

Особые точки функций $p(z)$, $q(z)$ суть $z_1=-\sqrt{1-\lambda^2}$, $z_2=0$, $z_2=\sqrt{1-\lambda^2}$. При этом все эти значения – простые полюсы. По теореме II, главы V, п. 101 [1] уравнение (3) в окрестности каждой точки имеет два линейно независимых решения вида

$$\psi_1(z)=(z-z_\alpha)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_\alpha)^k;\quad \psi_2(z)=(z-z_\alpha)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}c'_k(z-z_\alpha)^k$$

в случае когда характеристические показатели ρ_1, ρ_2 различны и не отличаются друг от друга на целое число. Если же это не так, то первое решение $\psi_1(z)$ имеет вид как и выше, а второе находится из первого с использованием формулы Лиувилля. Во втором случае ($\rho_1-\rho_2$ – целое число) может появиться в качестве слагаемого в записи решения $\psi_2(z)$ логарифмическая (многозначная) функция $\ln(z-z_\alpha)$. Характеристические показатели ρ_1, ρ_2 вычисляются как корни квадратного уравнения

$$\rho(\rho-1)+\rho a_0+b_0=0, \qquad (5)$$

где

$$a_0=\lim_{z\to z_\alpha}(z-z_\alpha)p(z);\quad b_0=\lim_{z\to z_\alpha}(z-z_\alpha)^2q(z).$$

Характеристические показатели

Найдем характеристические показатели особых точек.

Случай особой точки $z_2=0$. Тогда

$$a_0=\lim_{z\to 0}zp(z)=\frac{-1+\lambda}{1-\lambda}=-1;\quad b_0=\lim_{z\to 0}zq(z)=0.$$

Уравнение (5) приобретает вид $\rho(\rho-1)-\rho=0$, корни которого суть $\rho_1=0$, $\rho_2=2$. Это как раз исключительный случай.

Случай $z_{1,3}=\mp\sqrt{1-\lambda^2}$. Тогда

$$a_0=\lim_{z\to z_\alpha}(z-z_\alpha)p(z)=\frac{z_\alpha e^2-\sqrt{1-z_\alpha^2}+\lambda}{[(\sqrt{1-z^2}-\lambda)z]'(z_\alpha)}=$$

$$=\frac{z_\alpha e^2}{\sqrt{1-z_\alpha^2}-\lambda-z_\alpha^2/\sqrt{1-z_\alpha^2}}=\frac{z_\alpha e^2}{-z_\alpha^2/\lambda}=\frac{e^2\lambda}{-z_\alpha}$$

$$b_0 = \lim_{z \to z_\alpha} (z - z_\alpha)^2 q(z) = 0$$

Уравнение (5) приобретает вид $\rho(\rho - 1) - \rho \cdot e^2\lambda/z_\alpha = 0$ корни которого суть $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1 + e^2\lambda/z_\alpha$. Исключительный случай возникает лишь, если $e^2\lambda/z_\alpha = m$ – целое число, которое для z_1 должно быть отрицательным, а для z_3 – положительным. Это равносильно тому, что $\lambda^2 = m^2/(e^4+m^2)$. Здесь $\alpha = 1, 3$.

Разложение решения в ряд Лорана в окрестности нуля

Подготовим стандартное разложение в ряд Маклорена степенной функции:

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k t^k, \text{ где } C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \text{ при } k \geq 1 \text{ и } C_\alpha^0 = 1$$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1/2(1/2-1)}{2!}t^2 + \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)}{3!}t^3 + \cdots =$$

$$1 + \frac{1}{2}t + \frac{(-1)}{2^2 \cdot 2!}t^2 + \frac{(-1)(-3)}{2^3 \cdot 3!}t^3 + \cdots = 1 + \frac{1}{2}t + (-1)^3\frac{1}{2\cdot 4}t^2 + (-1)^4\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}t^3 + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}t^k,$$

где по определению

$$(2k)!! = \begin{cases} 1, & \text{если } k \leq 0 \\ 2 \cdot \ldots \cdot 2k, & \text{если } k > 0 \end{cases};$$

$$(2m+1)!! = \begin{cases} 1, & \text{если } m \leq -1 \\ 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m+1), & \text{если } m \geq 0 \end{cases}$$

В частности,

$$\sqrt{1-z^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}(-z^2)^k = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}z^{2k}. \quad (6)$$

Переходим к разложению в ряд (как оказалось, в ряд Маклорена) для первого частного решения уравнения (3) в окрестности особой точки $z_2 = 0$:

$$\psi_1(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

Воспользуемся рекуррентными формулами (37) в главы V, п. 101 [1]:

$$\begin{cases} c_0 f_0(\rho) = 0 \\ c_1 f_0(\rho+1) + c_0 f_1(\rho) = 0 \\ c_2 f_0(\rho+2) + c_1 f_1(\rho+1) + c_0 f_2(\rho) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n f_0(\rho+n) + c_1 f_1(\rho+n-1) + \cdots + c_0 f_n(\rho) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Здесь

$$f_0(\rho) = \rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0; \quad f_k(\rho) = \rho a_k + b_k\,(k = 1, 2, \ldots)$$

а коэффициенты a_k, b_k получаются при разложении функций $zp(z)$, $z^2q(z)$ в ряд Маклорена. В связи с этим заметим сначала

$$\begin{gathered} zp(z) = \frac{ze^2 - \sqrt{1-z^2} + \lambda}{\sqrt{1-z^2} - \lambda} = z\frac{e^2}{\sqrt{1-z^2} - \lambda} - 1; \\ z^2q(z) = \frac{-e^2 z}{(\sqrt{1-z^2} - \lambda)z} = -zp(z) - 1 \end{gathered} \tag{8}$$

Итак, обозначим

$$zp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k; \quad z^2q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Чем более полно разложим функции $zp(z)$, $z^2q(z)$ в ряд Маклорена, тем более полно найдем решение $\psi_1(z)$. По крайней мере следует разложить до членов второго порядка включительно, поскольку $\rho_2 - \rho_1 = 2$, и тем самым мы узнаем будет ли второе решение $\psi_2(z)$ содержать логарифм (тот случай, когда соотношение $c_2 f_0(\rho+2) + c_1 f_1(\rho+1) + c_0 f_2(\rho) = 0$ станет противоречивым при подстановке $\rho = \rho_1$) или второе решение запишется также в виде ряда Маклорена. Учитывая (6) и разложение в сумму геометрической прогрессии, выводим:

$$zp(z) = z\frac{e^2}{\sqrt{1-z^2} - \lambda} - 1 = ze^2\frac{\sqrt{1-z^2} + \lambda}{1 - z^2 - \lambda^2} - 1 =$$

$$= ze^2\frac{\sqrt{1-z^2} + \lambda}{(1-\lambda^2)(1 - z^2/(1-\lambda^2))} - 1 =$$

$$= \frac{ze^2}{1-\lambda^2}\left(1 + \lambda - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-3)!!}{(2m)!!}z^{2m}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(1-\lambda^2)^k} - 1.$$

Тем самым

$$a_0 = -1;\ a_1 = \frac{e^2}{1-\lambda^2}(1+\lambda) = \frac{e^2}{1-\lambda};$$

$$a_2 = 0;\ a_3 = \frac{e^2}{1-\lambda^2}\left((1+\lambda)\frac{1}{1-\lambda^2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{1-\lambda^2}\left(\frac{1}{1-\lambda} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{e^2}{1-\lambda^2}\cdot\frac{2-1+\lambda}{1-\lambda} = \frac{e^2}{(1-\lambda)^2}$$

В виду $z^2q(z) = -zp(z) - 1$ коэффициенты b_k находятся сразу, а именно $b_k = -a_k$ для всех $k > 0$:

$$b_0 = 0;\ b_1 = \frac{-e^2}{1-\lambda};\ b_2 = 0;\ b_3 = -\frac{e^2}{(1-\lambda)^2}.$$

Подставляя коэффициенты a_j, b_j и $\rho = \rho_1 = 0$ в (7), видим, что c_0 – свободный коэффициент (первое соотношение становится тривиальным), а далее

$$\begin{aligned} c_1 f_0(0+1) + c_0 f_1(0) = 0 \Leftrightarrow \\ c_1(1 \cdot 0 + a_0 + b_0) + c_0(0 \cdot a_1 + b_1) = 0 \Leftrightarrow \\ c_1(0 - 1 + 0) + c_0(0 - e^2/(1-\lambda)) \Leftrightarrow \\ c_1 = -\frac{e^2}{1-\lambda} c_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 f_0(2) + c_1 f_1(1) + c_0 f_2(0) = 0 \Leftrightarrow \\ c_2(2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0) + c_1 \left(1 \cdot \frac{e^2}{1-\lambda} - \frac{e^2}{1-\lambda}\right) + c_0(0 \cdot 0 + 0) = 0. \end{aligned}$$

Убеждаемся, что второе соотношение становится тривиальным ($0 = 0$). Это означает, что c_2 – также свободный коэффициент. Решение ψ_1 получим при условии $c_0 = 1$, $c_2 = 0$, а решение $\psi_2(z)$, линейно независимое с первым, получим при условии $c_0 = 0$, $c_2 = 1$.

Найдем еще одно слагаемое для первого решения, т.е. когда $c_2 = 0, c_0 = 1$:

$$\begin{aligned} c_3 f_0(3) + c_2 f_1(2) + c_1 f_2(1) + c_0 f_3(0) \Leftrightarrow \\ c_3(3 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 0) + 0 \cdot f_1(2) + c_1(a_2 + b_2) + 1 \cdot (0 \cdot a_3 - \frac{e^2}{(1-\lambda)^2}) = 0 \Leftrightarrow \\ 3c_3 - \frac{e^2}{(1-\lambda)^2} = 0, \end{aligned}$$

откуда $c_3 = -\frac{e^2}{3(1-\lambda)^2}$. Следовательно,

$$\psi_1(z) = 1 - \frac{e^2}{1-\lambda} z - \frac{e^2}{3(1-\lambda)^2} z^3 + o(z^3).$$

Второе решение ($c_2 = 1, c_0 = 0$) линейно независимое с первым начинается со второй степени. Для него вычислим коэффициент c_3:

$$\begin{aligned} c_3 f_0(3) + c_2 f_1(2) + c_1 f_2(1) + c_0 f_3(0) \Leftrightarrow \\ c_3(3 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 0) + 1 \cdot (2a_1 + b_1) + c_1(a_2 + b_2) + 0 \cdot f_3(0) = 0 \Leftrightarrow \\ 3c_3 + \frac{2e^2}{(1-\lambda)^2} - \frac{e^2}{(1-\lambda)^2} = 0 \\ c_3 = \frac{-e^2}{3(1-\lambda)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\psi_2(z) = z^2 - \frac{e^2}{3(1-\lambda)^2} z^3 + o(z^3).$$

Общее решение дифференциального уравнения (1) в окрестности нуля имеет вид

$$C_1\left(z-\frac{e^2}{2(1-\lambda)}z^2-\frac{e^2}{12(1-\lambda)^2}z^4\right)+C_2\left(\frac{1}{3}z^2-\frac{e^2}{12(1-\lambda)^2}z^3\right)+C_3+o(z^4).$$

Список литературы

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 3. Часть 2// Изд. Наука. — М. — 1974. — 642 с.

УДК 517.988

Евхута Ольга Николаевна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математика и математическое моделирование,
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)
им. М. И. Платова,
Россия, Новочеркасск

Евхута Николай Александрович
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математика и математическое моделирование,
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)
им. М. И. Платова,
Россия, Новочеркасск

NL-ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ МЕЖДУ БАНАХОВЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

Аннотация. *Рассматриваются* NL*-производные для функций между банаховыми пространствами, связь* NL*-производных с функциями Адамара.*

Ключевые слова: NL*-производные, производные Гато, Картана, Фреше, Адамара, Гато и* Γ*-слабом смысле Гато, интеграл Курцвейля-Хенстока.*

Evkhuta Olga Nikolaevna
PhD in Physic and Mathematics, Associate Professor,
associate professor of the department mathematics and mathematical modeling,
Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI),
Russia, Novocherkassk

Evkhuta Nikolai Alexandrovich
PhD in Physic and Mathematics, Associate Professor,
associate professor of the department mathematics and mathematical modeling,
Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI),
Russia, Novocherkassk

NL-DERIVATIVES OF FUNCTIONS BETWEEN BANACH SPACES

Abstract. *We consider* NL *-derivatives for functions between Banach spaces, the connection of* NL *-derivatives with Hadamard functions.*

Keywords: NL*-derivatives, derivatives of Cartan, Frechet, Hadamard, Gato and* Gamma *-weak sense of Gato, Kurzweil-Henstock integral.*

Как отмечалось в [3, 4] многие функции, заданные в банаховых пространствах, как правило, не дифференцируемы. При этом процедура линеаризации

показывает, что такие функции дифференцируемы формально, но соответствующие полученные при этом линейные операторы не являются производными. В этой связи, естественно, пытаться дать такое определение производной, чтобы эти формальные производные оказывались бы настоящими и чтобы эти производные обладали свойствами, которые бы позволяли их использовать в приложениях.

Рассмотрим X — банахово пространство, Ω — область в этом пространстве, Y — то же самое или другое банахово пространство, $L(X,Y)$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X в Y. И пусть $f:\ \Omega\ (\subseteq X) \to Y$ — непрерывная функция. Функцию $g:\ \Omega\ (\subseteq X) \to Y$ будем называть NL-*производной функции* f *в области* Ω, если для любого содержащегося в Ω отрезка $[a,b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b:\ 0 \le \lambda \le 1\}$ справедливо равенство

$$f(b) - f(a) = \int\limits_{[a,b]} g(x)\,dx = \int\limits_0^1 g((1-\lambda)a + \lambda b)(b-a)\,d\lambda. \tag{1}$$

Здесь первый интеграл понимается как криволинейный вдоль отрезка $[a,b]$, а второй — как обычный интеграл от скалярной или векторной функции, определенный на отрезке $[0,1]$.

Приведенное определение нуждается в уточнении смысла используемого интеграла в равенстве (1). Более точно, под знаком интеграла в (1) находится функция скалярного переменного со значениями в банаховом пространстве Y, а для таких функций интегралы можно определять различными способами.

Наиболее простым для функций со значениями в банаховом пространстве является дословное повторение определения интеграла Римана с заменой символа абсолютной величины $|\cdot|$ на символ нормы $\|\cdot\|$. Нетрудно видеть, что и определение интегралов Курцвейля–Хенстока [5] также может быть без изменений перенесено на функции со значениями в банаховом пространстве. NL-производные для функций между банаховыми пространствами при таком понимании интеграла в (1) будем называть RNL-*производные.*

Существуют иные способы введения понятия интеграла от функций со значениями в банаховом пространстве. Одним из наиболее важных обобщений интегралов Курцвейля–Хенстока является интеграл Петтиса. Элемент I называется интегралом Петтиса от функции $f:\ [a,b] \to Y$, если для любого $l \in Y^*$ функция $l(f(t)):\ [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема (в интересующем нас случае) в смысле Курцвейля–Хенстока и

$$l(I) = \int\limits_a^b l(f(x))\,dx.$$

NL-производные для функций между банаховыми пространствами при таком понимании интеграла в (1) будем называть PNL-*производные.*

Это определение можно модифицировать, используя вместо всего сопряженного к Y пространства Y^* его тотальное подпространство Γ (см. [1, 2]). NL-производные для функций между банаховыми пространствами при таком понимании интеграла в (1) будем называть Γ-PNL-*производные.*

NL-производные для функций между банаховыми пространствами, как и NL-производные для скалярных функций неоднозначно; если функции g_1 и g_2 таковы, что на каждом отрезке $[a, b] \subset \Omega$ они совпадают почти всюду, то

$$\int_0^1 g_1((1-\lambda)a + \lambda b)(b-a)\,d\lambda = \int_0^1 g_2((1-\lambda)a + \lambda b)(b-a)\,d\lambda,$$

и поэтому каждая из них является NL-производной функции f. Если такие функции считать эквивалентными, то производная g определяется с точностью до эквивалентности; для любой из них используется обычное обозначение: $g = f'$. Как и для скалярных функций значения $f'(x)$ NL-производной в точках $x \in \Omega$ не определены. В свою очередь, нетрудно видеть, что в случае связной области Ω NL-примитивная определяется с точностью до постоянной.

Как показывает исходное определение NL-производных, при вычислении этих производных достаточно ограничиться функциями скалярного аргумента (параметра отрезка, соединяющего произвольные точки области определения $\Omega \subset X$ функции $f : \ \Omega\ (\subseteq X) \to Y$). Таким образом, существование обычных производных Гато функции f в точках Ω оказывается достаточным для существования NL-производной. Более того, достаточно даже существования слабых производных Гато; существование последних, как известно, сводится к дифференцированию скалярных функций $\ell(f((1-\lambda)a + \lambda b))$ ($0 \le \lambda \le 1$, $a, b \in \Omega$, $\ell \in Y^*$). В действительности, можно рассматривать скалярные функции $\ell(f((1-\lambda)a + \lambda b))$ ($0 \le \lambda \le 1$, $a, b \in \Omega$, $\ell \in \Gamma$), где Γ — тотальное подпространство Y^*. При этом достаточно, чтобы эти функции обладали лишь NL-производными.

С понятием NL-производных тесно связаны так называемые функции Адамара. Пусть $f : \ \Omega\ (\subset X) \to Y$ — некоторая функция, определенная на множестве $\Omega \subset X$ банахова пространства X и принимающий значения в банаховом пространстве Y. Функция $H : \ \Omega \times \Omega \to L(X, Y)$ называется *функцией Адамара* для функции f, если справедливо равенство

$$f(b) - f(a) = H(a, b)(b - a) \qquad (a, b \in \Omega). \tag{2}$$

Функция Адамара H для функции f определяется неоднозначно.

В случае, если функция f в каждой точке $x \in \Omega$ имеет хотя бы слабую производную Гато и множество Ω выпукло, в качестве функции Адамара можно

взять функцию

$$H(a,b) = \int\limits_0^1 f'((1-\lambda)a + \lambda b)\, d\lambda \qquad (a,b \in \Omega)$$

(интеграл здесь можно понимать в любом из рассмотренных выше смыслах; в зависимости от этого, такая функция Адамара будет RNL-производной, PNL-производной, или Γ-PNL-производной).

Заметим, что H-производную $f'(\cdot)$ функции $f(\cdot)$ было бы естественно называть производной Адамара. Однако этот термин уже используется для одного из понятий производной (промежуточного между производными Гато и Фреше) и поэтому здесь и используется термин h-производная.

Однако функция Адамара аналогичного вида может существовать и в случае, когда функция f не обладает даже слабой производной Гато. Будем говорить, что $h:\ \Omega\ (\subset X) \to Y$ является H-производной функции f (на Ω), если

$$f(x_1) - f(x_2) = \int\limits_0^1 h((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)\, d\lambda (x_1 - x_2) \qquad (x_1, x_2 \in \Omega);$$

функцию h, если она существует также будем обозначать через f'.

Заметим, что H-производную $f'(\cdot)$ функции $f(\cdot)$ было бы естественно называть производной Адамара. Однако этот термин уже используется для одного из понятий производной (промежуточного между производными Гато и Фреше) и поэтому здесь и используется термин h-производная.

Для функций, дифференцируемых во всех точках области $\Omega \subset X$ со значениями в Y понятие NL-производной позволяет дополнить схему:

$$\begin{gathered} \mathcal{C}(\Omega; X, Y) \subseteq \mathcal{F}(\Omega; X, Y) \subseteq \mathcal{H}(\Omega; X, Y) \subseteq \\ \subseteq \mathcal{G}(\Omega; X, Y) \subseteq \Gamma(\Omega; X, Y) \subseteq \mathrm{NL}(\Omega; X, Y) \end{gathered} \tag{3}$$

(здесь $\mathcal{C}(\Omega; X, Y)$, $\mathcal{F}(\Omega; X, Y)$, $\mathcal{H}(\Omega; X, Y)$, $\mathcal{G}(\Omega; X, Y)$, $\Gamma(\Omega; X, Y)$ — классы дифференцируемых в точках области Ω соответственно в смысле Картана, Фреше, Адамара, Гато и Γ-слабом смысле Гато и NL-смысде функций $f\colon X \to Y$.

Список литературы

1. Bartle R. G. A Modern Theory of Integration. (Graduate Studies in Mathematics, 32). — American Mathematical Society: Providence, Rhode Island. — 2001. — 458 p.

2. Gordon R. A. The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock. (Graduate Studies in Mathematics, 4.) — American Mathematical Society: Providence, Rhode Island. — 1994. — 396 p.

3. Евхута Н. А., Евхута О. Н., Забрейко П. П. NL - производные и NL - примитивные в дифференциальном и интегральном исчислении. // Доклады национальной академии наук Беларуси. — 2016. — Выпуск 60. — Номер 5. — С. 34–40.

4. Евхута Н. А., Евхута О. Н. Производные Ньютона–Лейбница в банаховых пространствах. // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (4–5 декабря 2020 г., г. Орёл): научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией кандидата физико-математических наук, профессора Т.Н. Можаровой. — Орёл: ОГУ имени Т.С. Тургенева, 2020. — С. 47–50.

5. Лукомский С. Ф. Интегральной исчисление (функции одной переменной). — Издательство Саратовского университета. — Саратов. — 2005. — 144 с.

УДК 517.9

Жукова Галина Севастьяновна
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор Департамента анализа данных и машинного обучения,
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
Россия, Москва

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Аннотация. *Необходимость приближенного решения дифференциальных уравнений с краевыми условиями возникает при изучении самых разнообразных прикладных процессов, например теплопереноса и массообмена, поперечных и продольных колебаний струны, продольных колебаний упругого стержня, звуковых колебаний в трубах, электрических колебаний в проводах и др. В работе с помощью методов асимптотического анализа изучается задача построения приближенного решения некоторых видов краевых задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Построены в аналитическом виде асимптотики нужной точности для решений рассматриваемых краевых задач при различных типах граничных условий. Выполнено сравнение эффективности вычислительных возможностей практического использования полученных асимптотик в сравнении с результатами численного интегрирования.*

Ключевые слова: *краевая задача, сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения, метод диаграмм, асимптотика решений.*

Zhukova Galina Sevastyanovna
Doctor of physical and mathematical sciences, Professor,
Professor at the Department of data analysis and machine learning,
Financial University under the Government of the Russian Federation, Russia, Moscow

ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS TO BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Abstract. *The need for an approximate solution of differential equations with boundary conditions arises in the study of a wide variety of applied processes, for example, heat transfer and mass transfer, transverse and longitudinal vibrations of a string, longitudinal vibrations of an elastic rod, sound vibrations in pipes, electrical vibrations in wires, etc. In this work, using the methods of asymptotic analysis, we study the problem of constructing an approximate solution of some types of boundary value problems for singularly perturbed differential equations with variable coefficients. Analytically constructed asymptotic of the required accuracy for the solutions of the considered boundary value problems for various types of boundary conditions. Comparison of the efficiency of the computational capabilities of the practical use of the obtained asymptotic in comparison with the results of numerical integration is carried out.*

Keywords: *boundary value problem, singularly perturbed differential equations, method of diagrams, asymptotic of solutions.*

Рассмотрим задачу приближенного нахождении нетривиальных собственных значений λ и соответствующих им собственных функций краевой задачи:

$$b_2(t)x'' + b_1(t)x' + b_0(t)x + \lambda^2 b_3(t)x = 0,$$
$$\begin{cases} A_1x(0) + B_1x'(0) = 0, \\ A_2x(T) + B_2x'(T) = 0, \end{cases}$$

где A_j , B_j $(j = \overline{1,2})$ – постоянные числа, часть которых может быть равна нулю в зависимости от условий задачи, $b_j(t)$ $(j = \overline{0,3})$ – заданные достаточно гладкие при $t \in [0;T]$ функции.

Задачи на собственные значения часто встречаются при изучении различных динамическиих процессов механики, физики, техники [1,2,4–8]. Так как найти точные решения дифференциальных уравнений и систем удается в исключительно редких случаях, то особую значимость приобретают приближенные методы, где исключительно важную роль играют асимптотические метооды.

В работе орешается вопрос построения асимптотики больших собственных значений λ указанной краевой задачи. Введем малый параметр $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$, что придет к изучению краевой задачи

$$\varepsilon^2 b_2(t)x'' + \varepsilon^2 b_1(t)x' + \big(b_3(t) + \varepsilon^2 b_0(t)\big)x = 0 \qquad (1)$$
$$\begin{cases} A_1x(0) + B_1x'(0) = 0, \\ A_2x(T) + B_2x'(T) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

с сингулярно возмущенным дифференциальным уравнением.

Предположим, что выполнены условия:

$$b_2(t) \neq 0, \quad b_3(t) \neq 0, \quad \frac{b_3(t)}{b_2(t)} > 0 \quad (t \in [0,T]). \tag{3}$$

Заметим, что уравнение (1) является частным случаем скалярного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon^{p_\nu} a_\nu(t,\varepsilon) x^{(\nu)} = 0\,, \tag{4}$$

где $a_0(t,\varepsilon) \not\equiv 0$, $a_n(t,\varepsilon) \neq 0$ $(t \in [0,T],\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0])$, функции $a_\nu(t,\varepsilon)$ имеют на [0, T] равномерные асимптотические разложения

$$a_\nu(t,\varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s a_{\nu s}(t), \quad \varepsilon \to +0, \qquad a_{\nu s} \in \mathbb{C}^\infty[0,T];$$

$\boldsymbol{p_0}, \ldots, \boldsymbol{p_n}$ – неотрицательные постоянные числа, $\boldsymbol{p_n > 0}$.

В случае уравнения (1) имеем:

$$n = 2;\ p_0 = 0;\ p_2 = p_1 = 2;$$
$$a_{20}(t) = b_2(t); \quad a_{10}(t) = b_1(t); \quad a_{00}(t) = b_3(t);\ a_{01}(t) = 0;$$
$$a_{02}(t) = b_0(t);\ a_{\nu s} \equiv 0\ (\nu = 1{,}2;\ s \geq 1); a_{0s}(t) \equiv 0\ (s \geq 3).$$

Для построения приближенного решения уравнения (1) применим метод диаграмм [2]. Нетрудно проверить, что для дифференцильного уравнения (4) первая диаграмма – выпуклая ломаная, построенная с помощью геометрического приема Ньютона по набору точек

$$C_0 = (0;\rho_0),\ \ldots,\ C_l = (l;\rho_l),\ \ldots,\ C_n = (n;\rho_n),$$

где $\rho_n = p_n, \quad \rho_l = \min\limits_{\nu=\overline{l,n}} p_\nu \quad \big(l = \overline{1,n-1}\big), \quad \rho_0 = p_0.$

Здесь индекс $\boldsymbol{l}$ принимает те из значений $\boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{n-1}$, при которых $\boldsymbol{F_{l0}[z] \not\equiv 0}$, где $\boldsymbol{F_{ls}[z]}$ вычисляются через коэффицинты уравнения (4) по формулам:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F_{0s}[z] \equiv a_{0s}(t), \qquad F_{ns}[z] \equiv a_{ns}(t) z^n,} \\ \boldsymbol{F_{ls}[z] \equiv a_{l,\ s-p_l+\rho_l}(t) z^l + \sum\limits_{\nu=l+1}^{n} a_{\nu,s-p_\nu+\rho_l}(t) \sum\limits_{i_1=l-1}^{\nu-1} \sum\limits_{i_2=l-2}^{i_1-1} \cdots} \\ \qquad \boldsymbol{\cdots \sum\limits_{i_{l-1}=1}^{i_{l-2}-1} r_{\nu l} \prod\limits_{c=0}^{l-1} \big(z^{(i_c-1-i_{c+1})}\big), \qquad l = \overline{1, n-1}.} \end{cases}$$

В случае уравнения (1) указанные формулы существенно упрощаются: в построении первой диаграммы участвуют только точки (0;0), (1;2) и (2;2). Поэтому первая диаграмма дифференциального уравнения (1) содержит только одно звено с

началом в точке (0;0) и конечной точкой (2;2). Проекция длины диа-диаграммы на ось абсцисс равна 2, то есть порядку уравнения (1).

Коэффициент наклона звена диграммы равен $m = -1$. Определяющее уравнение звена имеет вид:

$$b_2(t)(\mu_0)^2 + b_3(t) = 0.$$

Следовательно, при выполнении условий (3) определяющее уравнение звена имеет два простых комплексно-сопряженных корня:

$$(\mu_0)_{1,2} = \pm \mathrm{i}\sqrt{b_3(t)/b_2(t)}, \qquad \mathrm{i} - \text{мнимая единица.}$$

Значит, основываясь на свойствах метода диаграмм, заключаем: при выполнении условий (3) мы строим по формуле

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \mu_s(\tau)d\tau\right) \tag{5}$$

приближения порядка $\mathrm{O}(\varepsilon^m)$ к фундаментальным решениям дифференциального уравнения (1), где

$$\mu_{2k-2}(t) = \mathrm{i}c_{2k-2}(t), \quad \mu_{2k-1}(t) = c_{2k-1}(t) \quad (k \in \mathbb{N}); \tag{6}$$

$$c_0(t) = \sqrt{b_3(t)/b_2(t)},$$

$$c_s(t) = (-1)^s \cdot$$

$$\cdot \frac{b_3(t)\sum_{j=1}^{s-1} c_j\ (t)c_{s-j}(t) + b_2(t)c'_{s-1}(t) + b_1(t)c_{s-1}(t) + \delta_{s,2}b_0(t)}{2\sqrt{b_2(t)b_3(t)}}$$

$\left(s \geq 1, \delta_{s,2} - \text{символ Кронекер}\right)$.

Отметим, что найденные функции $\mu_s(t)$ являются вещественнозначными при нечетном *s* и чисто мнимыми при четном *s*. Поэтому в качестве *m*–приближения к общему решению дифференциального уравнения (1) выберем в силу формул (5) – (6) следующую вещественнозначную функцию:

$$x(t,\varepsilon) = \exp\left(\int_0^t \sum_{k=1}^{[(m+1)/2]} \varepsilon^{2k-2} c_{2k-1}(\tau)d\tau\right) \cdot \tag{7}$$

$$\cdot \left\{D_1 \cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \sum_{k=0}^{[m/2]} \varepsilon^{2k} c_{2k}(\tau)d\tau\right) + D_2 \sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \sum_{k=0}^{[m/2]} \varepsilon^{2k} c_{2k}(\tau)d\tau\right)\right\},$$

$[h\,]$ – целая часть числа *h*.

В формуле (7) числа D_1 и D_2 подлежат определению из краевых условий (2) и требования того, чтобы соответствующее решение задачи не было тривиальным.

Пусть, для примера, краевые условия (2) имеют вид:

$$x(0) = x(T) = 0. \qquad (8)$$

Подставив выражение (7) в первое из краевых условий (8), получим: $D_1 = 0$. Следовательно, за решение уравнения (1) при условиях (8) с погрешностью $0\,(\varepsilon^m)$ можно принять функцию:

$$\tilde{x}(t,\varepsilon) = D_2 \sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \sum_{k=0}^{[m/2]} \varepsilon^{2k} c_{2k}(\tau)d\tau\right)\cdot$$

$$\cdot \exp\left(\int_0^t \sum_{k=1}^{[(m+1)/2]} \varepsilon^{2k-2} c_{2k-1}(\tau)d\tau\right). \qquad (9)$$

Подстановка выражения (9) во второе из граничных условий (8), а также учет требования нетривиальности решения (9) приводят к необходимости выполнения равенства:

$$\sin\left(\int_0^T \sum_{k=0}^{[m/2]} \varepsilon^{2k-1} c_{2k}(\tau)d\tau\right) = 0.$$

Вернувшись к исходному параметру $\lambda = 1/\varepsilon$ (к собственному значению исходной краевой задачи), получаем равенство:

$$\int_0^T \sum_{k=0}^{[m/2]} \lambda^{1-2k} c_{2k}(\tau)d\tau = \pi n \qquad (n \in \mathbb{N}). \qquad (10)$$

Значение n=0 исключено из формулы (10) так как приводит к тривиальному решению задачи. Отрицательные значения n сводятся к описанному выше случаю в силу нечетности функции $\sin x$.

Таким образом, равенство (10) является уравнением, из которого могут быть найдены приближения порядка $0\,(\varepsilon^m)$ к собственным значениям мзучаемой краевой задачи с граничными условиями (8).

В частности, в первом и втором приближениях собственные значения изучаеемой краевой задачи определяются формулами:

$$\lambda_n^{(1)} = \pi n \,/ \int_0^T c_0(\tau)d\tau, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad (11)$$

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{\pi n + \left((\pi n)^2 - 4\int_0^T c_0(\tau)d\tau \int_0^T c_2(\tau)d\tau\right)^{1/2}}{2\int_0^T c_0(\tau)\,d\tau}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство:

$$|\lambda_n^{(2)} - \lambda_n^{(1)}| = \frac{\left|\pi n - \left((\pi n)^2 - 4\int_0^T c_0(\tau)d\tau \int_0^T c_2(\tau)d\tau\right)^{1/2}\right|}{2\int_0^T c_0(\tau)\,d\tau}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому $\lambda_n^{(2)} \to \lambda_n^{(1)}$ при $n \to +\infty$, причем $\lambda_n^{(2)} < \lambda_n^{(1)}$, если $\int_0^T c_2(\tau)d\tau > 0$, и $\lambda_n^{(2)} > \lambda_n^{(1)}$, если $\int_0^T c_2(\tau)d\tau < 0$.

Поступая по аналогии, можно найти приближения $\lambda_n^{(m)}$ любого порядка m к собственным значениям изучаемой краевой задачи. При этом соответствующие собственные функции $x_n^{(m)}(t,\varepsilon)$ (с точностью до константы) имеют вид:

$$x_n^{(m)}(t,\varepsilon) = \sin\left(\int_0^t \sum_{k=0}^{[m/2]} (\lambda_n^{(m)})^{1-2k} c_{2k}(\tau)d\tau\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(\int_0^t \sum_{k=0}^{[(m+1)/2]} (\lambda_n^{(m)})^{2-2k} c_{2k-1}(\tau)d\tau\right). \quad (12)$$

Для демонстрации полученного результата рассмотрим краевую задачу из [5]:

$$\begin{cases} x'' + \lambda^2(1+t)^2 x = 0, \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Она сводится к (1) – (9), где

$$b_3(t) = (1+t)^2, \quad b_2(t) \equiv 1, \quad b_1(t) \equiv 0, \quad b_0(t) \equiv 0, \quad \mathrm{T} = 1.$$

Тогда для построения первого приближения $\lambda_n^{(1)}$ к собственным значениям краевой задачи (13) в силу формул (6) и (11), получаем:

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{2}{3}\pi n \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (14)$$

При этом соответствующие собственные функции $x_n^{(1)}(t,\varepsilon)$ в силу (12) приближенно вычисляются по формуле:

$$x_n^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \sin\frac{(t^2+2t)\pi n}{3} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (15)$$

Вычисления при различных $n \in \mathbb{N}$ собственных значений краевой задачи (13), пользуясь их асимптотикой (14) и численным интегрированием, показало хорошее совпадение результатов. Вычислительные возможности расходящихся асимптотических решений в сравнении со сходящимися обсуждались [3].

Напомним, что асимптотика собственных значений строилась при условии $n \to +\infty$. Поэтому с ростом порядкового номера n

собственного числа точность асимптотической формулы (14) суще-существенно и быстро возрастает. Более того, вычисления показали, что уже для первого собственного числа погрешность сравниваемых результатов составила 1,6462%, а например, для восьмого собственного числа равна 0,0215%, десятого уже 0,0083%. Сравнение асимптотических решений $x_n^{(1)}(t,\varepsilon)$ из (15) показывает аналогичную близость к точным решениям краевой задачи (13).

Отметим, что преимущество полученных асимптотик не только в том, что они дают хорошее совпадение с точными решениями. Одно из основных достоинств асимптотических методов, на наш взгляд, в том, что они позволяют построить приближенно интересующие нас функции в аналитическом виде (в отличие от численных методов), что удобно для дальнейших исследований и вычислений.

Список литературы

1. Гантмахер, Ф.Р. Матричное исчисление с приложениями в теории динамических систем / Ф.Р. Гантмахер. – М.: URSS, 2016. –544 с.
2. Жукова, Г.С. Асимптотический анализ сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и систем / Г.С. Жукова. – М.: ВИПО, 2020. – 352 с.
3. Жукова, Г.С. Вычислительные возможности расходящихся асимптотических рядов / Г.С. Жукова // Системные технологии. – 2019. – № 4 (33). – С. 110–115.
4. Коддингтон, Э.А., Левинсон, Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон – М.: ЛКИ, 2007. – 472 с.
5. Найфэ, А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
6. Немыцкий, В.В., Степанов, В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. – М.: URSS, 2017. – 552 с.
7. Miller, P.D. Applied Asymptotic Analysis / P.D. Miller. – Rhode Island, Providence: AMS, 2006. – 467 p.
8. Pacio, R J, Wetzel, Th. Assessment of liquid metal technology status and research paths for their use as efficient heat transfer fluids in solar central receiver systems // Solar Energy. 2013. **93.** 11–22.

УДК 517.956.6

Зарубин Александр Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического анализа
и дифференциальных уравнений,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Чаплыгина Елена Викторовна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математического анализа
и дифференциальных уравнений,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. *Исследуется задача Коши для гиперболического уравнения запаздывающего типа. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения.*

Ключевые слова: *задача Коши, уравнение гиперболического типа, задача Дарбу, интеграл Эрдейи-Кобера.*

Zarubin Alexander Nikolaevich
Doctor of physical and mathematical sciences, Professor,
Head of the department of mathematical analysis and differential
and differential equations,
Orel State University,
Russia, Orel

Chaplygina Elena Viktorovna
Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the department of mathematical analysis
and differential and differential equations,
Orel State University,
Russia, Orel

THE CAUCHY PROBLEM FOR A LAGGING HYPERBOLIC EQUATION

Abstract: *The Cauchy problem for the lagging type is investigated. The existence and uniqueness theorems of the classical solution are proved.*

Keywords: *Cauchy problem, hyperbolic equation, Darboux problem, Erdeyi-Kober integral.*

1. Введение. Постановка задачи

В статье рассматривается обобщенное гиперболическое уравнение запаздывающего типа с некарлемановскими сдвигами вида

$$U_{xx}(x,y) - U_{yy}(x,y) = H(x-\tau)[U_x(x-\tau,y) + U(x-\tau,y)], \qquad (1)$$

$0 < \tau \equiv const, H(\xi) -$ функция Хевисайд; в области

$$D = \{(x,y) : x > 0, y < 0\} = \cup_{k=0}^{\infty} D_k,$$

где

$$D_k = \left\{(x,y) : k\tau - y \le x \le (k+1)\tau + y, -\frac{\tau}{2} < y < 0\right\} \ (k = 0,1,2,\dots).$$

Задача К. Найди в области D решение уравнения (1) из класса $C\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям

$$U(x,y)|_{y=0} = \omega(x), x \ge 0, \qquad (2)$$

$$U_y(x,y)\big|_{y=0} = \upsilon(x), x > 0, \qquad (3)$$

где $\omega(x), \upsilon(x) -$ заданные непрерывные достаточно гладкие функции, причем $\omega(0) = \omega(+\infty)$=0.

2. Существование и единственность решения.

Теорема. Если $\omega(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$, $\upsilon(x) \in C^1(0,+\infty)$, $\omega(0) = \omega(+\infty) = \upsilon(0) = \upsilon(+\infty) = 0$, абсолютно интегрируемы на $(0,+\infty)$, то решение задачи К существует и единственно.

Доказательство. Решение задачи К $(1)-(3)$ в области D найдено с помощью непосредственно проверяемого общего решения уравнения (1) вида

$$U(x,y) = \left\{U_k(x,y), (x,y) \in \overline{D_k}(k = 0,1,2,\dots)\right\}, \qquad (4)$$

если

$$U_k(x,y) = \sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m} \gamma_{mj} H(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j} I^m_{0,x-m\tau;0}\ \Phi(x,y), \qquad (5)$$

где

$$\Phi(x,y) = g_1(x-y) + g_2(x+y), \qquad (6)$$

а

$$I^m_{0,x-m\tau;\alpha}\,\Phi(x,y) =$$

$$= \frac{2}{\Gamma(m)} \int_0^{x-m\tau} \eta((x-m\tau+\alpha)^2 - (\eta+\alpha)^2)^{m-1}\Phi(\eta,y)d\eta - \qquad (7)$$

интеграл Эрдейи-Кобера $[1, с. 246-247]$, причем $I^0_{0,x;0}\,\Phi(x,y) = \Phi(x,y)$, $\gamma_{mj} = (j!\,(m-j)!\,2^{2m})^{-1}$, $\Gamma(t)-$ гамма функция $[2]$, $g_1(t), g_2(t)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Для определения функций $g_1(t), g_2(t)$ из (6) воспользуемся начальными условиями $(2), (3)$ задачи К. В результате получим интегро-разностные уравнения

$$\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m} \gamma_{mj} H(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j}\, I^m_{0,x-m\tau;0}\, Z^\theta(x) = \theta(x), \qquad (8)$$

где $\theta(x) = \omega(x), \upsilon(x)$ и

$$Z^\omega(x) = \Phi(x,0) = g_1(x) + g_2(x), \qquad (9)$$

$$Z^\upsilon(x) = \Phi_y(x,0) = -g_1{}'(x) + g_2{}'(x), \qquad (10)$$

причем

$$Z^\theta(x) = \left\{Z^\theta_k(x), k\tau \le x \le (k+1)\tau (k = 0,1,2,\dots)\right\}. \qquad (11)$$

Интегро-разностное уравнение (8) после обращения $[3, с. 17-18]$ приводит к решению вида (11), в котором

$$Z^\theta_k(x) = \sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m} (-1)^m \gamma_{mj} H(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j} I_{0,x-m\tau;m\tau}\theta(x). \qquad (12)$$

Решение системы $(9)-(10)$ можно записать в форме

$$g_1(x) = \frac{1}{2}Z^\omega(x) - \frac{1}{2}\int_0^x Z^\upsilon(\xi)d\xi + \frac{C}{2}, \qquad (13)$$

$$g_2(x) = \frac{1}{2}Z^\omega(x) + \frac{1}{2}\int_0^x Z^\upsilon(\xi)d\xi - \frac{C}{2}, \quad C = const.$$

Подставляя (13) в $(4)-(6)$, получим решение задачи К $(1)-(3)$ в области D

$$U(x,y) = \{U_k(x,y), (x,y)\epsilon\overline{D}_k\ (k = 0,1,2,\dots)\},$$

если

$$U_k(x,y)=\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}\gamma_{mj}H\,(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j}\;I^m_{0,x-m\tau;0}\Phi(x,y),\quad(15)$$

где

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{2}[Z^{\omega}(x-y)+Z^{\omega}(x+y)]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}Z^{\upsilon}(\xi)d\xi,\quad(16)$$

причем $Z^{\theta}(x)(\theta=\omega,\upsilon)$ определяются равенствами $(11)-(12),\ (7)$.

Решение $U(x,y)\in C\left(\overline{D}\right)\cap C^2(D)$, так как при $\omega(x)\in C[0,+\infty)\cap C^2(0,+\infty);\quad \upsilon(x)\in C^1(0,+\infty);\ \omega(0)=\omega(+\infty)=\upsilon(0)=\upsilon(+\infty)=0,$ абсолютной интегрируемости на $(0,+\infty)$ функции $Z^{\omega}(x)\in C[0,+\infty)\cap C^2(0,+\infty),\quad Z^{\upsilon}(x)\in C^1(0,+\infty),\quad Z^{\omega}(0)=Z^{\omega}(+\infty)=Z^{\upsilon}(0)=Z^{\upsilon}(+\infty)=0,$ абсолютно интегрируемы на $(0,+\infty)$ и операторы Эрдейи-Кобера этих функций ограничены $[1,\text{с. }246]$.

Решение $(14)-(16)$ задачи К $(1)-(3)$ единственно в силу построения и является обобщенной формулой Даламбера для дифференциально-разностного гиперболического уравнения (1).

Замечание. С помощью решения задачи К $(14)-(16)$ для уравнения (1) при условиях $(2)-(3)$, можно построить решения первой задачи Дарбу для уравнения (1) и условиях (2),

$$U(x,y)|_{y=k\tau-}\ =\Psi(x),k\tau\le x\le(2k+1)\frac{\tau}{2},\quad(17)$$

$\Psi(x)$ −заданная дважды непрерывно-дифференцируемая функция; или второй задачи Дабру для уравнения (1) и условиях $(3),(17)$.

Функциональное соотношения между $Z^{\omega}(x)$ и $Z^{\upsilon}(x)$ на линии $y=0,\ k\tau\le x\le(k+1)\tau$ может быть получено непосредственно из $(14)-(16)$, если там учесть условие (17), так как

$$U_k(x,y)|_{y=k\tau-}\ =\Psi(x)=\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}\gamma_{mj}H\,(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j}\;I^m_{0,x-m\tau;0}\,Z^{\Psi}(x),$$

где

$$Z^{\Psi}(x)=\frac{1}{2}[Z^{\omega}(2x-k\tau)+Z^{\omega}(k\tau)]+\frac{1}{2}\int_{2x-k\tau}^{k\tau}Z^{\upsilon}(\xi)d\xi,$$

или

$$Z^{\Psi}\left(\frac{1}{2}(x+k\tau)\right)=\frac{1}{2}[Z^{\omega}(x)+Z^{\omega}(k\tau)]+\frac{1}{2}\int_{x}^{k\tau}Z^{\upsilon}(\xi)d\xi,$$

то есть, после дифференцирования,

$$Z^{\upsilon}(x)=\left(Z^{\omega}(x)\right)'-2\left(Z^{\Psi}\left(\frac{1}{2}(x+k\tau)\right)\right)', \qquad k\tau<x<(k+1)\tau.$$

При этом $Z^{\Psi}(x)$ определяется аналогично $(11)-(12)$, в которых следует положить $\theta=\Psi$.

Список литературы

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев – Минск: Наука и техника, 1987.
2. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик – М.: Наука, 1971.
3. Зарубин, А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом / А.Н. Зарубин – Орел: изд-во ОГУ, 1997.

УДК 517.55

Копаев Анатолий Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры «Высшая математика»,
МГТУ им. Н. Э. Баумана,
Россия, Москва

О ПРОБЛЕМЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ БИГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЕДИНИЧНОГО БИКРУГА НА ЗВЕДООБРАЗНЫЕ ОБЛАСТИ

Аннотация. *В настоящей работе приводится несколько оценок для компонент биголоморфных отображений единичного бикруга на звездообразные области.*

Ключевые слова: *биголоморфные отображения, бикруг, звездообразные области, проблема коэффициентов.*

Kopaev Anatoly
Ph. D. (Phys.-Math.), Associcate Professor,
Associate Professor of Higher Mathematics Department,
Bauman Moscow State Technical University,
Russia, Moscow

ON THE PROBLEM OF COEFFICIENTS FOR BIHOLOMORPHIC MAPPINGS OF A UNIT BICIRCLE TO STARLIKE DOMAINS

Annotation. *In this paper several estimates are given for the components of biholomorphic mappings of the unit bicircle to starlike domains.*

Keywords: *biholomorphic mappings, bicircle, starlike domain, the problem of coefficients.*

Введение

Обозначим $K = \{u \in \mathbb{C} : |u| < 1\}$ открытый единичный круг на комплексной плоскости с центром в нуле, и пусть $g(u)$ - аналитическая и однолистная в этом круге функция, разлагающаяся в нем в ряд Тейлора

$$g(u) = u + \sum_{n=2}^{\infty} c_n u^n$$

В 1916 году немецкий математик Людвиг Бибербах выдвинул гипотезу, что $|c_n| \le n$ $(n \ge 2)$. Сам он доказал только, что $|c_2| \le 2$. Справедливость предположения Бибербаха была доказана в 1984 году Луи де Бранжем [1]. Наряду с попытками доказать справедливость гипотезы Бибербаха в общем случае математики получали оценки коэффициентов для аналитических и однолистных в единичном круге функций, отображающих его на выпуклые, звездообразные и другие области (см. [2]).

А можно ли распространить хотя бы часть полученных результатов на биголоморфные отображения многомерных областей? Обозначим $K^2 = \{(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1; |z_2| < 1\}$ - открытый единичный бикруг пространства $\mathbb{C}^2$, и пусть $w = (w_1; w_2) = f(z_1; z_2) = (f_1(z_1; z_2); f_2(z_1; z_2))$ – биголоморфное отображение этого бикруга (в $\mathbb{C}^2$), компоненты которого разлагаются в нем в ряды Тейлора

$$w_1 = z_1 + \sum_{n=2}^{\infty} p_n(z_1; z_2), \quad w_2 = z_2 + \sum_{n=2}^{\infty} q_n(z_1; z_2)$$

где $p_n(z_1; z_2)$ и $q_n(z_1; z_2)$ - однородные многочлены n - ой степени от двух переменных

$$\begin{cases} p_n(z_1; z_2) = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m\,m} (z_1)^{n-m} (z_2)^m \\ q_n(z_1; z_2) = \sum_{m=0}^{n} b_{n-m\,m} (z_1)^{n-m} (z_2)^m \end{cases}$$

Рассмотрим два отображения

$w = (z_1 + a_{0n}(z_2)^n;\ z_2)$ и $w = (z_1;\ z_2 + b_{n0}(z_1)^n)$ $(n \ge 2)$

биголоморфные в бикруге K^2 (впрочем, как и во всем пространстве $\mathbb{C}^2$). Так как коэффициенты a_{0n} и b_{n0} могут выбираться произвольно, то (скажем осторожно) не все коэффициенты разложений компонент биголоморфных отображений единичного бикруга в ряды Тейлора ограничены. (Это замечание относится и к единичному шару по любой $\mathbb{C}$ - однородной норме [3]). Так что заниматься проблемой коэффициентов в случае произвольных биголоморфных отображений единичного бикруга представляется

нам делом малоперспективным. Другое дело, работать с подклассами биголоморфных отображений. Здесь мы приведем несколько оценок для компонент биголоморфных отображений единичного бикруга на звездообразные области.

1. Об аналитических функциях класса Шура

Функцию $h(u)$ относят к классу Шура, если она является аналитической в открытом единичном круге K на комплексной плоскости и удовлетворяет условию $|h(u)| \leq 1$.

Пусть в единичном круге

$$h(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots$$

По теореме Шура ([2, с. 484]) точка $(c_0, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ является внутренней для множества значений таких наборов коэффициентов Тейлора тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & c_0 & c_1 & \ldots & c_{k-1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & c_0 & \ldots & c_{k-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & c_0 \\ \overline{c_0} & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \overline{c_1} & \overline{c_0} & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{c_{k-1}} & \overline{c_{k-2}} & \ldots & \overline{c_0} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} > 0 \qquad (1)$$

$k = 1, \ldots, n$. Пусть $n = 3$. Тогда при $k = 1$ неравенство (1) принимает вид $1 - |c_0|^2 > 0$, что равносильно неравенству

$$|c_0| < 1 \qquad (2)$$

При $k = 2$ неравенство (1) принимает вид $(1 - |c_0|^2)^2 - |c_1|^2 > 0$, что равносильно неравенству

$$|c_1| < 1 - |c_0|^2 \qquad (3)$$

Наконец, при $k = 3$ неравенство (1) принимает вид

$$(1 - |c_0|^2)\left(\left(1 - |c_0|^2 - \frac{|c_1|^2}{1 - |c_0|^2}\right)^2 - \left|c_2 + \frac{\overline{c_0}\,(c_1)^2}{1 - |c_0|^2}\right|^2\right) > 0$$

что равносильно неравенству

$$\left|c_2 + \frac{\overline{c_0}\,(c_1)^2}{1 - |c_0|^2}\right| < 1 - |c_0|^2 - \frac{|c_1|^2}{1 - |c_0|^2}\,. \qquad (4)$$

Теперь рассмотрим функцию $\varphi(u)$, аналитическую в единичном круге K , отображающую его в себя (т. е. функцию класса

Шура) и удовлетворяющую условию $\varphi(0) = 0$. Пусть в единичном круге

$$\varphi(u) = k_1 u + k_2 u^2 + k_3 u^3 + \ldots \quad (5)$$

В силу леммы Шварца в этом круге $|\varphi(u)| \leq |u|$, причем если $|k_1| = 1$, то $\varphi(u) = e^{i\gamma} u$, где γ - некоторое действительное число. Теперь рассмотрим функцию

$$\psi(u) = \frac{\varphi(u)}{u} = k_1 + k_2 u + k_3 u^2 + \ldots \quad (6)$$

Эта функция также принадлежит классу Шура. Для нее неравенства (2), (3), (4) принимают вид

$$|k_1| < 1 \quad (7)$$

$$|k_2| < 1 - |k_1|^2 \quad (8)$$

$$\left|k_3 + \frac{\overline{k_1}\,(k_2)^2}{1-|k_1|^2}\right| < 1 - |k_1|^2 - \frac{|k_2|^2}{1-|k_1|^2}\,. \quad (9)$$

2. Некоторые свойства биголоморфных отображений бикруга на звездообразные области

Пусть $w = (w_1; w_2) = f(z_1; z_2)$ - биголоморфное отображение единичного бикруга на звездообразную область (критерий звездообразности биголоморфных отображений бикруга получен Т. Саффриджем в [4]), а f^{-1} - отображение, обратное отображению f . Рассмотрим отображение

$$s = (s_1; s_2) = f^{-1}\big(t\, f(z_1; z_2)\big)(\, 0 < t < 1)$$

единичного бикруга в себя. Так как $f(0;0) = (0;0)$, то и $s(0;0) = (0;0)$. Пусть в единичном бикруге компоненты отображения $s(z_1; z_2; t)$ разлагаются в ряды Тейлора

$$s_1(z_1; z_2; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(z_1; z_2; t), \quad s_2(z_1; z_2; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(z_1; z_2; t)$$

где

$$\begin{cases} \lambda_n(z_1; z_2; t) = \sum\limits_{m=0}^{n} \alpha_{n-m\,m}(t)(z_1)^{n-m}\,(z_2)^m, \\ \mu_n(z_1; z_2; t) = \sum\limits_{m=0}^{n} \beta_{n-m\,m}(t)(z_1)^{n-m}\,(z_2)^m \end{cases}$$

Так как $f\big(s_1(z_1; z_2; t); s_2(z_1; z_2; t)\big) = t\, f(z_1; z_2))$, то разлагая левые и правые части равенств

$$\begin{cases} f_1\big(s_1(z_1;z_2;t);s_2(z_1;z_2;t)\big) = tf_1(z_1;z_2) \\ f_2(s_1(z_1;z_2;t);s_2(z_1;z_2;t)) = tf_2(z_1;z_2) \end{cases}$$

в ряды Тейлора и приравнивая соответствующие коэффициенты, получим

$$\alpha_{10}(t) = t \quad ; \quad \alpha_{01}(t) = 0$$
$$\beta_{10}(t) = 0 \quad ; \quad \beta_{01}(t) = t$$
$$\alpha_{20}(t) = t(1-t)a_{20}\,;\ \alpha_{11}(t) = t(1-t)a_{11}\,;\ \alpha_{02}(t) = t(1-t)a_{02}$$
$$\beta_{20}(t) = t(1-t)b_{20}\,;\ \beta_{11}(t) = t(1-t)b_{11}\,;\ \beta_{02}(t) = t(1-t)b_{02}$$
$$\alpha_{30}(t) = (1-t)((t+t^2)a_{3o} - 2t^2(a_{20})^2 - t^2a_{11}b_{20})$$
$$\alpha_{21}(t) = (1-t)((t+t^2)a_{21} - 3t^2a_{20}a_{11} - t^2a_{11}b_{11} - 2t^2a_{02}b_{20})$$
$$\alpha_{12}(t) = (1-t)((t+t^2)a_{12} - 2t^2a_{02}(a_{20}+b_{11}) - t^2a_{11}(a_{11}+b_{02}))$$
$$\alpha_{03}(t) = (1-t)((t+t^2)a_{03} - 2t^2a_{02}b_{02} - t^2a_{11}a_{02})$$
$$\beta_{30}(t) = (1-t)((t+t^2)b_{30} - 2t^2b_{20}a_{20} - t^2b_{11}b_{20})$$
$$\beta_{21}(t) = (1-t)((t+t^2)b_{21} - 2t^2b_{20}(b_{02}+a_{11}) - t^2b_{11}(b_{11}+a_{20}))$$
$$\beta_{12}(t) = (1-t)((t+t^2)b_{12} - 3t^2b_{02}b_{11} - t^2b_{11}a_{11} - 2t^2b_{20}a_{02})$$
$$\beta_{03} = (1-t)((t+t^2)b_{03} - 2t^2(b_{02})^2 - t^2b_{11}a_{02}).$$

На этом пока и остановимся.

Применим к функции

$$s_1\big(u;u\,e^{i\gamma};t\big) = tu + t(1-t)\big(a_{20} + a_{11}\,e^{i\gamma} + a_{02}\,e^{2i}\ \big)u^2 +$$
$$+ (1-t)((t+t^2)\big(a_{30} + a_{21}\,e^{i\gamma} + a_{12}\,e^{2i\gamma} + a_{03}\,e^{3i\gamma}\big) -$$
$$- t^2\,(\big(2a_{20} + a_{11}\,e^{i\gamma}\big)\big(a_{20} + a_{11}\,e^{i\gamma} + a_{02}\,e^{2i\gamma}\ \big) -$$
$$\big(a_{11} + 2a_{02}\,e^{i\gamma}\big)(b_{20} + b_{11}\,e^{i\gamma} + b_{02}\,e^{2i}\ ))\,u^3 + \cdots \quad (10)$$

($|u| < 1;\ \gamma \in [0;2\pi\,]$) неравенство (8). Получим

$$t(1-t)\big|a_{20} + a_{11}\,e^{i\gamma} + a_{02}\,e^{2i\gamma}\big| \le 1 - t^2.$$

Разделив обе части последнего неравенства на $(1-t)$ и перейдя к пределу при $t \to 1$, получим

$$\big|\,a_{20} + a_{11}\,e^{i\gamma} + a_{02}\,e^{2i\gamma}\,\big| \le 2. \quad (11)$$

Так как для любого действительного числа δ $\big|e^{i\delta}\big| = 1$, то

$$\big|\,a_{20}e^{2i\delta} + a_{11}e^{i(2\delta+\gamma)} + a_{02}e^{2i(\delta+\gamma)}\,\big| \le 2.$$

Обозначим $\zeta_1 = e^{i\delta}$, $\zeta_2 = e^{i(\delta+\gamma)}$. Тогда на остове единичного бикруга $\Gamma = \{(\zeta_1;\zeta_2) \in \mathbb{C}^2 : |\zeta_1| = 1; |\zeta_2| = 1\}$ выполняется неравенство $|p_2(\zeta_1;\zeta_2)| \le 2$. А так как остов бикруга является границей Шилова бикруга, то и во всем (замкнутом) единичном бикруге

$$|p_2(z_1;z_2)| \le 2. \quad (12)$$

Аналогично доказывается и что

$$|q_2(z_1;z_2)| \le 2. \quad (13)$$

Заметим, что в неравенствах (12) и (13) знаки нестрогих неравенств нельзя заменить на знаки строгих неравенств. Действительно, для отображения

$$w = \left(\frac{z_1}{(1-z_1)^2};\ \frac{z_2}{(1-z_2)^2}\right) \qquad (14)$$

которое является биголоморфным в единичном бикруге и отображает его на звездообразную область, $p_2(z_1; z_2) = 2(z_1)^2$, $q_2(z_1; z_2) = 2(z_2)^2$, $p_2(1;1) = 2$, $q_2(1;1) = 2$.

Еще заметим, что из неравенства (12) следует, что радиус звездообразности единичного бикруга равен 0. Напомним, что любая функция, аналитическая и однолистная в единичном круге K, отображает круг радиуса $th\ \frac{\pi}{4} = 0{,}65$ ... (но не обязательно большего радиуса) на звездообразную область. Это число и называется радиусом звездообразности (для единичного круга). Предположим, что существует положительное число r, такое, что любое отображение, биголоморфное в единичном бикруге, отображает бикруг радиуса r $K_r^2 = \{(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < r; |z_2| < r\}$ на звездообразную область. Тогда для любого отображения $f(z_1; z_2) = (z_1 + \ldots; z_2 + \ldots)$ биголоморфного в единичном бикруге, отображение

$$w(z_1; z_2) = (w_1(z_1; z_2); w_2(z_1; z_2)) = \frac{1}{r}\, f(r\, z_1; r\, z_2)$$

будет биголоморфным в единичном бикруге и будет отображать его на звездообразную область и при этом будут выполняться равенства

$$\frac{\partial w_1}{\partial z_1}(0;0) = 1, \frac{\partial w_1}{\partial z_2}(0;0) = 0, \frac{\partial w_2}{\partial z_1}(0;0) = 0, \frac{\partial w_2}{\partial z_2}(0;0) = 1.$$

А тогда в силу неравенства (3) в единичном бикруге будет выполняться неравенство $r\left|p_2(1; e^{i\gamma})\right| \le 2$. Но тогда для отображения $w = (z_1 + a_{02}\,(z_2)^2\,;\ z_2)$ будет выполняться неравенство $r\,|a_{02}| \le 2$. Но так как a_{02} - произвольное комплексное число, то ни при каком положительном r это невозможно. А значит, радиус звездообразности биголоморфных отображений единичного бикруга равен 0.

3. Дальнейшие свойства биголоморфных отображений бикруга на звездообразные области

Снова рассмотрим функцию $\varphi(u)$ класса Шура, определенную формулой (5). Коэффициенты Тейлора этой функции удовлетворяют неравенству (9). Учитывая, что

$$\left|k_3 + \frac{\overline{k_1}(k_2)^2}{1 - |k_1|^2}\right| \geq |k_3| - \frac{|k_1||k_2|^2}{1 - |k_1|^2}$$

получаем

$$|k_3| < 1 - |k_1|^2 - \frac{|k_2|^2}{1 + |k_1|}.$$

Применим это неравенство к функции $s_1(u;\ u\,e^{i\gamma};t)$, определенной формулой (10). Получим

$$\begin{aligned}(1-t)|(t+t^2)\left(a_{30}+a_{21}\,e^{i\gamma}+a_{12}\,e^{2i\gamma}+a_{03}\,e^{3i\gamma}\right)-\\ -t^2\left(2a_{20}+a_{11}\,e^{i\gamma}\right)\left(a_{20}+a_{11}\,e^{i\gamma}+a_{02}\,e^{2i\gamma}\right)-\\ -t^2\,(a_{11}+2a_{02}\,e^{i\gamma})(b_{20}+b_{11}\,e^{i\gamma}+b_{02}\,e^{2i\gamma})|\leq\\ \leq 1-t^2-\frac{t^2\,(1-t)^2\left|a_{20}+a_{11}e^{i\gamma}+a_{02}e^{2i\gamma}\right|^2}{1+t}.\end{aligned}$$

Разделив обе части полученного неравенства на $2(1-t)$ и перейдя к пределу при $t \to 1$, получим

$$\left|\left(a_{30}+a_{21}\,e^{i\gamma}+a_{12}\,e^{2i\gamma}+a_{03}\,e^{3i}\ \right)-\frac{1}{2}\left(2\,a_{20}+a_{11}\,e^{i\gamma}\right)(a_{20}+\right.$$

$$\left.a_{11}e^{i\gamma}+a_{02}e^{2i\gamma})-\frac{1}{2}\,(a_{11}+2a_{02}e^{i\gamma})(b_{20}+b_{11}\,e^{i\gamma}+b_{02}e^{2i\gamma})\right|\leq 1.$$

Рассуждая далее так же, как и в предыдущем пункте, получим, что во всем замкнутом бикруге K^2 выполняется неравенство

$$\left|2p_3(z_1;z_2)-\frac{\partial p_2}{\partial z_1}\,(z_1;z_2)p_2(z_1;z_2)-\frac{\partial p_2}{\partial z_2}\,(z_1;z_2)q_2(z_1;z_2)\right|\leq 2. \quad (15)$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\left|2q_3(z_1;\ z_2)-\frac{\partial q_2}{\partial z_1}(z_1;z_2)p_2(z_1;z_2)-\frac{\partial q_2}{\partial z_2}(z_1;z_2)q_2(z_1\,;z_2)\right|\leq 2. \quad (16)$$

Заметим, что знак нестрогого неравенства в неравенствах (15) и (16) нельзя заменить знаком строгого неравенства. Это следует из рассмотрения отображения (14). Еще отметим, что неравенства (15) и (16) можно заменить одним неравенством

$$\left\|2\begin{pmatrix}p_3(z_1;z_2)\\ q_3(z_1;z_2)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\partial p_2}{\partial z_1} & \frac{\partial p_2}{\partial z_2}\\ \frac{\partial q_2}{\partial z_1} & \frac{\partial q_2}{\partial z_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_2(z_1;z_2)\\ q_2(z_1;z_2)\end{pmatrix}\right\|_\infty \leq 2$$

где используется обозначение $\|(z_1;z_2)\|_\infty = \max\{|z_1|;|z_2|\}$.

Кстати, учитывая введенное обозначение, неравенства (12) и (13) можно переписать в виде

$$\left\| \begin{pmatrix} p_2\ (z_1; z_2) \\ q_2\ (z_1\ ; z_2) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq 2$$

4. Заключение

В заключении отметим, что из неравенств (12) и (13) следует, что все коэффициенты многочленов $p_2(z_1; z_2)$ и $q_2(z_1; z_2)$ ограничены. А тогда из неравенств (15) и (16) следует, что и все коэффициенты многочленов $p_3(z_1; z_2)$ и $q_3(z_1; z_2)$ также ограничены. Остается найти эти границы. Например, для коэффициентов многочлена $p_2(z_1; z_2)$ можно получить оценку

$$|a_{20}|^2 + |a_{11}|^2 + |a_{02}|^2 \leq 4.$$

Для этого достаточно возвести обе части неравенства (11) в квадрат, проинтегрировать полученное неравенство по γ в пределах от 0 до 2π и разделить обе части полученного неравенства на 2π. Аналогично получается оценка для коэффициентов многочлена $q_2(z_1; z_2)$

$$|b_{20}|^2 + |b_{11}|^2 + |b_{02}|^2 \leq 4.$$

Отметим, что в обоих полученных неравенствах знаки нестрогих неравенств нельзя заменить знаками строгих неравенств. Это следует все из того же примера биголоморфного отображения (14).

Список литературы

1. Branges L. A proof of the Bieberbach conjectura // LOMI preprintes. E.5-84. P. 1-21.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука. 1966. 628 с.
3. Копаев А. В. Критерий звездности биголоморфных отображений двоякокруговых областей // Сообщения Академии наук Грузинской ССР. 1980. Т. 97. № 1. С. 25-28.
4. Suffridge T. J. The principle of subordination applied to functions of several complex variables // Pacific J. Math. 33, № 1, 1970. P. 241-248.

УДК 517

Кравцов Александр Михайлович
кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник лаборатории геологии и разработки месторождений углеводородов,
АО «СевКавНИПИгаз»
Россия, Ставрополь

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБОБЩЕНИЙ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

Аннотация. *В контексте континуальных алгебрологических вычислений обобщения полиномов Бернштейна (ОПБ) играют роль, аналогичную роли дизъюнктивной формы для булевых функций*

$$P_N(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=N} f(\mathbf{y}_\mathbf{k}) \cdot \beta(N,\mathbf{k}) \lambda^\mathbf{k} .$$

В работе предлагается вариант построения мультипликативной формы представления ОПБ

$$M_N(\mathbf{x}) = \prod_{|\mathbf{k}|=N} \left(1 + \ln\left(f(\mathbf{y}_\mathbf{k})\right) \cdot \beta(N,\mathbf{k}) \lambda^\mathbf{k}\right),$$

что соответствует конъюнктивной форме записи булевых функций в континуальных алгебрологических вычислениях. В работе приводится краткая схема доказательства аппроксимационной теоремы и ряд свойств элементарных полиномов ОПБ и мультипликативных ОПБ.

Ключевые слова: *мультипликативная форма записи, обобщение полинома Бернштейна, конъюнктивная форма записи.*

Kravtsov Alexander Mikhailovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Leading Researcher of the Oil and Gas Fields Geology and Exploitation Laboratory,
JSC "SevKavNIPIgaz"
Russia, Stavropol

Abstract. *In the context of continuous algebraic computations, generalizations of Bernstein polynomials (GPB) play a role similar to the role of the disjunctive form for Boolean functions*

$$P_N(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=N} f(\mathbf{y}_\mathbf{k}) \cdot \beta(N, \mathbf{k}) \lambda^\mathbf{k}$$

The paper proposes a variant of constructing a multiplicative form of representation of the GPB

$$M_N(\mathbf{x}) = \prod_{|\mathbf{k}|=N} \left(1 + \ln(f(\mathbf{y}_\mathbf{k})) \cdot \beta(N, \mathbf{k}) \lambda^\mathbf{k}\right),$$

which corresponds to the conjunctive form of writing Boolean functions in continuous algebraic calculations. In this paper, we present a brief outline of the proof of the approximation theorem and a number of properties of elementary polynomials of GPB and multiplicative GPB.

Keywords: *multiplicative notation, generalization of the Bernstein polynomial, conjunctive notation.*

Используем для построения представлений полинома структуру Евклидова пространства E^n. Примем, что Ω - выпуклый многогранник из Евклидова пространства $\Omega \subset E^n$. Вершины многогранника $\{\mathbf{A}_j\}_{j=1}^M$ заданы своими декартовыми координатами $\boldsymbol{\omega}_j = (\omega_{1j}, \omega_{2j}, ..., \omega_{nj})$ в E^n.

Точки области Ω представляются выпуклыми комбинациями векторов вершин многогранника:

$$\mathbf{P} = \lambda_1 \mathbf{A}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}_2 + ... + \lambda_M \mathbf{A}_M . \quad (1)$$

Связь между λ и декартовыми координатами точки области Ω устанавливается из формулы (1) и в скалярной форме запишется так:

$$x_i = \lambda_1 \omega_{i1} + \lambda_2 \omega_{i2} + ... + \lambda_M \omega_{iM}, i = 1,2,...,n, \quad (2)$$

где $(x_1, x_2, ..., x_n)$ декартовы координаты точки P.

Непрерывную в Ω функцию $f(x) \in C_\Omega$, подчиним следующим условиям

$$1) \quad \forall x \in \Omega \quad \frac{1}{e} \le f(x) \le 1,$$

$$2) \quad \forall x \in \partial\Omega \quad f(x) = 1. \quad (3)$$

Здесь $\partial\Omega$ граница области Ω, e – основание натурального логарифма.

Определение. Мультипликативным представлением обобщений полиномом Бернштейна $M_N(\mathbf{x})$ степени N функции $f(x)$ на выпуклой области Ω из Евклидова пространства будем называть произведение:

$$M_N(\mathbf{x}) = \prod_{|\mathbf{k}|=N} \left(1 + \ln\left(f(\mathbf{y}_\mathbf{k})\right) \cdot \beta(N,\mathbf{k})\lambda^\mathbf{k}\right), \tag{4}$$

где $\mathbf{k}$ - мультииндекс $\mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_M)$, $k_1 + k_2 + ... + k_M = N$; $\mathbf{y}_\mathbf{k}$ - узлы для функций $\beta(N,\mathbf{k})\lambda^\mathbf{k}$

$$\mathbf{y}_\mathbf{k} = \frac{k_1}{N} \cdot \mathbf{A}_1 + \frac{k_2}{N} \cdot \mathbf{A}_2 + ... + \frac{k_M}{N} \cdot \mathbf{A}_M; \tag{5}$$

$\beta(N,\mathbf{k})$- мультиномиальный коэффициент:

$$\beta(N,\mathbf{k}) = \frac{N!}{k_1!k_2!...k_M!};$$

$\lambda^\mathbf{k}$ - произведение степеней $\lambda^\mathbf{k} = \lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_M^{k_M}$.

Выражение $\beta(N,\mathbf{k})\lambda^\mathbf{k}$ будем называть элементарной функцией для обобщений полиномов Бернштейна.

Определение аддитивного ОПБ приводится в [1].

Приведем следующие полезные свойства степеней $\beta(N,\mathbf{k})\lambda^\mathbf{k}$.

Лемма 1. Справедливы тождества

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\mathbf{k}|=N} \beta(N,\mathbf{k})\lambda^\mathbf{k} = 1,\\
&\sum_{|\mathbf{k}|=N} \frac{k_i}{N} \cdot \beta(N,\mathbf{k})\lambda^\mathbf{k} = \lambda_i,\\
&\sum_{|\mathbf{k}|=N} \left(\frac{k_i}{N}\right)^2 \cdot \beta(N,\mathbf{k})\lambda^\mathbf{k} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\lambda_i^2 + \frac{1}{N} \cdot \lambda_i,\\
&\sum_{|\mathbf{k}|=N} \left(\sum_{i=1}^{M} \left(\lambda_i - \frac{k_i}{N}\right)^2\right) \cdot \beta(N,\mathbf{k})\lambda^\mathbf{k} = \frac{2}{N} \cdot \sum_{i \neq j} \lambda_i\lambda_j.
\end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство. Первое следует непосредственно из вычисления мультинома и определения выпуклой комбинации элементов линейного пространства $\left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i = 1\right)$:

$$\left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i\right)^N = \sum_{|\mathbf{k}|=N} \beta(N,\mathbf{k})\lambda^\mathbf{k} = 1,$$

Для доказательства второго соотношения умножим λ_j на единицу $1 = \left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i\right)$

$$\lambda_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i \right)^{N-1} = \lambda_j \cdot \sum_{|\mathbf{k}|=N-1} \beta(N-1,\mathbf{k}) \lambda^{\mathbf{k}} =$$

$$= \sum_{|\mathbf{k}|=N-1} \frac{(N-1)! \cdot \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \ldots \cdot \lambda_j^{k_j+1} \ldots \lambda_M^{k_M}}{k_1! k_2! \ldots \cdot k_j! \ldots k_M!} = \quad .$$

$$= \sum_{|\mathbf{k}|=N-1} \frac{k_j+1}{N} \frac{N! \cdot \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \ldots \cdot \lambda_j^{k_j+1} \ldots \lambda_M^{k_M}}{k_1! k_2! \ldots \cdot (k_j+1)! \ldots k_M!}$$

Меняя порядок суммирования, получим необходимый результат

$$\lambda_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i = 1 \right)^{N-1} = \sum_{|\mathbf{k}|=N} \frac{k_j}{N} \frac{N! \cdot \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \ldots \cdot \lambda_j^{k_j} \ldots \lambda_M^{k_M}}{k_1! k_2! \ldots \cdot k_j! \ldots k_M!}$$

Последнее следует из трех первых, как линейная комбинация условий.

Лемма 2. Максимум в области элементарная функция функция ОПБ $\beta(N,\mathbf{k})\lambda^{\mathbf{k}}$ достигает в точке

$$\lambda_i = \frac{k_i}{N}, \quad \sum_i k_i = N$$

Доказательство. Максимум является точкой экстремума функции многих переменных. Решим задачу на условный экстремум, в которой в качестве условия выступает соотношение $\sum_{i=1}^{M} \lambda_i = 1$.

Считая в выражении зависимой переменную $\lambda_M = 1 - \sum_{i=1}^{M-1} \lambda_i$, приравняем к нулю частные производные выражения по переменным $\lambda_i, i = 1,2,3,\ldots,M-1$. Получим систему уравнений

$$\frac{N! \cdot \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \ldots \cdot \lambda \lambda_i^{k_i} \ldots \lambda_M^{k_M}}{k_1! k_2! \ldots \cdot k_i! \ldots k_M!} \left(\frac{k_i}{\lambda_i} - \frac{k_M}{\lambda_M} \right) = 0, i = 1..M .$$

Из системы уравнений найдем

$$\lambda_i = \frac{k_i}{k_M} \lambda_M, i = 1..M .$$

Учитывая условия нормировки $\sum_{i=1}^{M} \lambda_i = 1$, $\sum_i k_i = N$, окончательно получим $\lambda_i = \frac{k_i}{N}, \quad \sum_i k_i = N$.

Покажем, что полином определенный формулой (4) приближает функцию $f(x) \in C_\Omega$ равномерно в Ω.

Теорема. Если функция $f(x) \in C_\Omega$ подчинена условиям

1) $\forall x \in \Omega \quad \frac{1}{e} \le f(x) \le 1,$

2) $\forall x \in \partial\Omega \quad f(x) = 1,$

то равномерно относительно **x**

$$\lim_{N\to\infty} M_N(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{7}$$

Доказательство. Функция $f(x)$ в силу условия 1 в (3) отделена от нуля и (7) можно переписать в эквивалентном виде

$$\lim_{N\to\infty} M_N(\mathbf{x}) e^{-\ln(f(\mathbf{x}))} = 1. \tag{8}$$

Разобьем множество мультииндексов в произведении (8) на два подмножества $\Gamma_N(\mathbf{x})$ и $\Delta_N(\mathbf{x})$, точек расположенных вблизи границы и внутри области Ω, соответственно

$$\mathbf{k} \in \Gamma_N(\mathbf{x}), \quad \text{если} \quad \beta(N,\mathbf{k})\lambda^{\mathbf{k}} > \delta,$$

$$\mathbf{k} \in \Delta_N(\mathbf{x}), \quad \text{если} \quad \beta(N,\mathbf{k})\lambda^{\mathbf{k}} \le \delta.$$

Соответственно этому и произведение (8)

$$\frac{M_N(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} = \prod_{|\mathbf{k}|=N} \left(1 + \ln(f(\mathbf{y}_\mathbf{k})) \cdot \beta(N,\mathbf{k})\lambda^{\mathbf{k}}\right) e^{-\ln(f(\mathbf{x}))}$$

разобьется на два произведения

$$\frac{M'_N(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} = \prod_{\mathbf{k}\in\Gamma_N(\mathbf{x})} \left(1 + \ln(f(\mathbf{y}_\mathbf{k})) \cdot \beta(N,\mathbf{k})\lambda^{\mathbf{k}}\right) \cdot e^{-\ln(f(\mathbf{x}))}$$

и

$$\frac{M''_N(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} = \prod_{\mathbf{k}\in\Delta_N(\mathbf{x})} \left(1 + \ln(f(\mathbf{y}_\mathbf{k})) \cdot \beta(N,\mathbf{k})\lambda^{\mathbf{k}}\right) \cdot e^{-\ln(f(\mathbf{x}))}.$$

В первом случае значение выражения близко к единице в силу близости значений функции вблизи границы к единице.

Второе произведение представим, воспользовавшись свойством 1 в (6) , в виде

$$\frac{M''_N(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} = \prod_{\mathbf{k}\in\Delta_N(\mathbf{x})} \left(\left(1 + \ln(f(\mathbf{y}_\mathbf{k})) \cdot \beta(N,\mathbf{k})\lambda^{\mathbf{k}}\right) \cdot e^{-\ln(f(\mathbf{x}))\cdot\beta(N,\mathbf{k})\lambda^{\mathbf{k}}}\right)$$

Для логарифма функции справедливо

$$-1 \le \ln(f(x)) \le 0$$

и произведение можно оценить так

$$1 \le \prod_{\mathbf{k}\in\Delta_N(\mathbf{x})} \left(\left(1+\ln\left(f\left(\mathbf{y}_{\mathbf{k}}\right)\right)\right)\cdot \beta\left(N,\mathbf{k}\right)\lambda^{\mathbf{k}}\right)\cdot e^{-\ln\left(f\left(\mathbf{x}\right)\right)\beta\left(N,\mathbf{k}\right)\lambda^{\mathbf{k}}}\right) \le$$

$$\le \prod_{\mathbf{k}\in\Delta_N(\mathbf{x})} \left(\left(1+\ln\left(f\left(\mathbf{y}_{\mathbf{k}}\right)\right)\right)\cdot \beta\left(N,\mathbf{k}\right)\lambda^{\mathbf{k}}\right)\cdot \left(1-\ln\left(f\left(\mathbf{x}\right)\right)\right)\cdot \beta\left(N,\mathbf{k}\right)\lambda^{\mathbf{k}}\right) \le$$

$$\le \prod_{\mathbf{k}\in\Delta_N(\mathbf{x})} \left(1+\left(\ln\left(f\left(\mathbf{y}_{\mathbf{k}}\right)\right)-\ln\left(f\left(\mathbf{x}\right)\right)\right)\right)\cdot \beta\left(N,\mathbf{k}\right)\lambda^{\mathbf{k}} - \left(\ln\left(f\left(\mathbf{y}_{\mathbf{k}}\right)\right)\cdot \ln\left(f\left(\mathbf{x}\right)\right)\right)\cdot \left(\beta\left(N,\mathbf{k}\right)\lambda^{\mathbf{k}}\right)^2\right) \le$$

$$\le \prod_{\mathbf{k}\in\Delta_N(\mathbf{x})} \left(1+2\delta+\delta^2\right) \le \prod_{|\mathbf{k}|=N} \left(1+2\delta+\delta^2\right) = \left(1+\delta\right)^{2\cdot M^N}$$

Выбрав подходящее значение для величины δ, можно сделать величину рассматриваемого выражения сколь угодно близкой к единице, что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Кравцов А.М. Построение экономизированных приближений функций многих переменных / А.М. Кравцов, М.Т. Петросянц, В.А. Толпаев // Современные проблемы физико-математических наук: материалы II международной научно-практической конференции, 24-27 ноября 2016 г., Воронеж. – С. 70-74.

УДК 533.72

Малай Николай Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики,
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, г. Белгород

Щукин Евгений Романович
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник Института высоких температур РАН,
Россия, г. Москва

Шостак Юлия Ивановна
аспирантка кафедры теоретической и экспериментальной физики,
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, г. Белгород

ОСОБЕННОСТИ МАССОПЕРЕНОСА В ОКРЕСТНОСТИ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ В НЕИЗТЕРМИЧЕСКОЙ БИНАРНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

Аннотация. *Получено аналитическое решение краевой задачи для уравнения диффузии при степенном виде зависимости коэффициентов диффузии, теплопроводности и плотности вязкой неизотермической газообразной среды от температуры.*

Ключевые слова: *уравнение диффузии, вязкая неизотермическая газообразная среда.*

Malai Nikolay Vladimirovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics,
Belgorod State National Research University,
Russia, Belgorod

Shchukin Evgeny Romanovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,

Leading Researcher at the Institute of High Temperatures of the Russian Academy of Sciences,
Russia, Moscow

Shostak Yulia Ivanovna
Postgraduate student of the Department of Theoretical and Experimental Physics,
Belgorod State National Research University
Russia, Belgorod,

Abstract. *Obtained an analytical solution of the boundary value problem for the diffusion equation is obtained for a power-law dependence of the diffusion coefficients, thermal conductivity and density of a viscous non-isothermal gaseous medium on temperature.*

Keywords: *diffusion equation, viscous non-isothermal gaseous medium.*

Рассматривается обтекание крупной испаряющейся капли сферической формы радиусом R газообразной средой с постоянной скоростью $\mathbf{U}_\infty$ ($\mathbf{U}_\infty \parallel Oz$). Под газообразной средой понимается бинарная смесь, которая характеризуется физическими величинами - плотностью ρ_e, теплопроводностью λ_e, диффузией D_{12} и вязкостью μ_e, а капля, соответственно, плотностью ρ_i, теплопроводностью λ_i, вязкостью μ_i. Индексы "e" и "i" здесь и далее [1-3] относятся к газу и частице, соответственно, а индексом "∞" - обозначены значения физических величин, характеризующие газовую смесь в невозмущенном потоке. Считается, что средняя температура поверхности капли существенно отличается по величине от температуры газовой среды вдали от нее, например, испарение капли жидкого металла. Математическое описание поведения взвешенных частиц в вязких неизотермических газообразных средах представляет как научный, так и практический интерес [1-3].

Компоненты бинарной газовой смеси будем обозначать через C_1 и C_2. Причем C_2 считается основной компонентой. Граничная поверхность, испаряющаяся капля-бинарная смесь, для него непроницаема. Предполагается (что очень важно для практических приложений) компонент C_1 по своему физико-химическому составу совпадает с веществом жидкой испаряющейся капли. Граничная

поверхность для него непрерывна, т.е. вещество, из которого состоит капля, испытывает фазовый переход на границе раздела. Здесь введены стандартные обозначения [1-4]: $C_1 = n_1/n_e$, $C_2 = n_2/n_e$, $n_e = n_1 + n_2$, $\rho_e = \rho_1 + \rho_2$, $\rho_1 = m_1 n_1$, $\rho_2 = m_2 n_2$, $m_1 n_1$ и $m_2 n_2$ – масса и численная концентрация молекул первого и второго компонентов бинарной смеси. Из определения относительных концентраций следует, что $C_1 + C_2 = 1$ и первая компонента удовлетворяет условию $C_1 \ll C_2$, т.е. основное влияние на процессы тепло-и массопереноса в окрестности испаряющейся капли оказывает молекулярная диффузия [4].

Исходя из постановки задачи, решение будем проводить в сферической системе координат r, θ, φ с началом в центре испаряющейся капли. Распределения температур, скоростей, относительных концентраций и давлений обладают аксиальной симметрией относительно оси Oz.

Задача. Бинарная газовая смесь занимает неограниченную область $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \backslash \Omega_i$. Здесь $\Omega_i -$ сферическая область с центром в нуле евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Требуется найти скалярное поле концентрации C_1, которое удовлетворяет уравнению [4]

$$\operatorname{div}\left(\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e} D_{12} \nabla C_1\right) = 0, \qquad (1)$$

с краевым условием

$$\lim_{r\to\infty} C_1 = C_{1\infty}, C_{1\infty} = const \ . \qquad (2)$$

При описании свойств бинарной газовой среды учитывается степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса от температуры [5]: теплопроводности - $\lambda_e = \lambda_\infty t_e^\alpha$, диффузии - $D_{12} = D_\infty t_e^{1+\omega}$, плотности - $\rho_e = \rho_\infty / t_e$. Здесь $\lambda_\infty = \lambda_e(T_\infty)$, $\rho_\infty = \rho_e(T_\infty)$, $D_\infty = D_{12}(T_\infty)$, $t_e = T_e/T_\infty$; $0.5 \le \alpha, \omega \le 1$.

В задаче имеется малый параметр – число Рейнольдса $\varepsilon = Re_\infty = (\rho_\infty U_\infty R)/\mu_\infty \ll 1$ ($U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$). Поэтому при решении уравнения (1) мы ограничимся поправками до первого порядка малости, что достаточно для физических приложений.

Учитывая, что коэффициент диффузии зависит от температуры, необходимо решить дополнительно уравнение теплопроводности [6]

$$\operatorname{div}(\lambda_e \nabla T_e) = 0. \qquad (3)$$

с краевым условием

$$\lim_{r\to\infty} T_e(r, \theta) = T_\infty, \qquad T_\infty = const \ . \qquad (4)$$

Общее решение уравнения теплопроводности (3), с учетом зависимости коэффициента λ_e от температуры, и вида краевого условия (4) имеем:

$$t_e(y,\theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon\, t_{e1}(y,\theta), \qquad (5)$$

где

$$t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}},\ t_{e1}(y,\theta) = \frac{cos\theta}{t_{e0}^{\alpha}}\frac{\Gamma_1}{y^2},\ y = r/R,\ \Gamma_0,\ \Gamma_1 - const.$$

Будем искать решение уравнения молекулярной диффузии (1) в виде

$$C_1(y,\theta) = C_{10}(y) + \varepsilon\, C_{11}(y,\theta). \qquad (6)$$

Подставляя выражения (5), (6) в уравнение (1), получаем два уравнения

$$\mathrm{div}\,(t_{e0}^{\omega}\nabla C_{10}) = 0,\ \ \mathrm{div}(t_{e0}^{\omega}\nabla C_{11} + \omega t_{e0}^{\omega-1} t_{e1}\nabla C_{10}) = 0. \qquad (7)$$

После интегрирования первого уравнения (7), имеем следующее решение, удовлетворяющее краевому условию (2)

$$C_{10}(y) = C_{1\infty} + M(t_{e0}^{1+\alpha-\omega} - 1), \qquad (8)$$

а решение второго уравнения ищем в виде

$$\mathrm{C}_{11}(y,\theta) = \tau_c(y)cos\theta, \qquad (9)$$

с краевым условием

$$\lim_{y\to\infty} \tau_c(y) \to 0. \qquad (10)$$

Подставляя (9), (8) во второе уравнение (7), получаем

$$y^2\frac{d^2\tau_c}{dy^2} + y\left(2 - \frac{\omega\ell}{1+\alpha}\right)\frac{d\tau_c}{dy} - 2\tau_c = -\frac{1+\alpha-\omega}{1+\alpha}\frac{M}{t_{e0}^{\omega}}\frac{\omega\ell(2-\ell)}{y^2}\Gamma_1 \qquad (11)$$

Анализ однородного уравнения (11) показал, что точка $y = 0$ для него является регулярно особой точкой [7]. Поэтому поиск его решения необходимо вести в виде обобщенных степенных рядов [7].

Таким образом, решение однородного уравнения (11) следует искать в виде (12)

$$\tau_{\mathrm{c}}(y) = y^{\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_n\ell^n,\ \ \ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y+\Gamma_0},\ \ \Delta_0 \neq 0 \qquad (12)$$

Определяющее уравнение для однородного уравнения (11) получается при подстановке выражения (12) в однородное уравнение (11), которое имеет вид $\eta^2 + \eta - 2 = 0$. Корни определяющего уравнения $\eta^2 + \eta - 2 = 0$ равны, соответственно, $\eta_1 = -2,\ \eta_2 = 1$.

Первое решение, пропорциональное большему корню по модулю, ищется в виде (13)

$$\Phi_1(y) = \frac{1}{y^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_n^{(1)}\ell^n, \qquad \Delta_0^{(1)} = 1, \tag{13}$$

а второе в виде (14)

$$\Phi_2(y) = y\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_n^{(2)}\ell^n + a_0\ln|y|\,\Phi_1(y), \qquad \Delta_0^{(2)} = 1. \tag{14}$$

Коэффициенты $\Delta_n^{(1)}$ и $\Delta_n^{(2)}$, входящие в выражения (13)-(14), определяются методом неопределенных коэффициентов. Подставляя (13)-(14) в однородное уравнение (11), находим рекуррентные формулы для $\Delta_n^{(1)}(n \geq 1)$ и $\Delta_n^{(2)}(n \geq 4)$

$$\Delta_n^{(1)} = \frac{1}{n(n+3)}\left\{(n+1)\left[2n-2-\frac{\omega}{1+\alpha}\right]\Delta_{n-1}^{(1)} - \right.$$
$$\left. -(n-2)\left[n-1-\frac{\omega}{1+\alpha}\right]\Delta_{n-2}^{(1)}\right\},$$
$$\Delta_n^{(2)} = \frac{1}{n(n-3)}\left\{(n-2)\left[2n-2-\frac{\omega}{1+\alpha}\right]\Delta_{n-1}^{(2)} - \right.$$
$$-(n-2)\left[n-1-\frac{\omega}{1+\alpha}\right]\Delta_{n-2}^{(2)} + \frac{a_0}{2\Gamma_0^3}\sum_{k=0}^{n-3}(n-k-1)(n-k-2)\times$$
$$\left.\times\left[(2k+3)\Delta_k^{(1)} - \left(2k-2-\frac{\omega}{1+\alpha}\right)\Delta_{k-1}^{(1)}\right]\right\}.$$

Здесь $\Delta_1^{(2)} = -\frac{\omega}{2(1+\alpha)}$, $\Delta_2^{(2)} = 0$, $\frac{a_0}{2\Gamma_0^3} = \frac{\Delta_1^{(2)}}{6}\left(2-\frac{\omega}{1+\alpha}\right)$, $\Delta_3^{(2)} = 1$, $\Delta_n^{(1)}$ и $\Delta_n^{(2)}$ при $n < 0$ равны нулю.

Заметим, что полученные функции $\Phi_1(y), \Phi_2(y)$ удовлетворяют нашему однородному уравнению (11) по построению и ряды, определяющие функции $\Phi_1(y), \Phi_2(y)$ сходятся равномерно при $y \in (1, \infty)$ [7,8].

Вид правой части уравнения (11) показывает, что его частное решение имеет вид

$$\Phi_0(y) = (1+\alpha-\omega)\frac{M}{t_{e0}^{\omega}}\frac{\Gamma_1}{y^2}. \tag{15}$$

Таким образом, имеем следующее выражение для функции $C_1(y,\theta)$, удовлетворяющее краевому условию (2)

$$C_1(y,\theta) = C_{10}(y) + \varepsilon\, C_{11}(y,\theta). \tag{16}$$

Здесь

$$C_{10}(y) = C_{1\infty} + M(t_{e0}^{1+\alpha-\omega} - 1),$$
$$C_{11}(y,\theta) = \cos\theta\,(M_1\Phi_1(y) + \Phi_0(y))$$

Постоянные интегрирования Γ_0, Γ_1, M, M_1 определяются однозначно. Они находятся из краевых условий, заданных на поверхности испаряющейся капли. Вид этих краевых условий определяется конкретной физической задачей. Поскольку ищем решение уравнения (1) в общем виде, то ограничиваемся двумя стандартными краевыми условиями, заданные вдали от испаряющейся капли (2) и (4).

В результате проведенного исследования доказана следующая теорема.

Теорема. Функция $C_1(y,\theta) = C_{1\infty} + M(t_{e0}^{1+\alpha-\omega} - 1) + \varepsilon \cos\theta\,(M_1\Phi_1(y) + \Phi_0(y))$, удовлетворяющая краевому условию (2), является общим решением уравнения (1).

Список литературы

1. Malai, N.V. Diffusiophoresis and photophoresis of heated large nonvolatile aerosol spherical particles /N.V. Malai, D.N. Efimtseva, E.R. Shchukin, Z.L. Shulimanova // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. ― 2020. ― Т.61. ― № 3. ― С. 426―435.
2. Malai, N.V. Investigation of a boundary-value problem for slow flow of a sphere by viscous non-isothermal gas / N.V. Malai, A.V. Glushak, A.V. Limanskaya // Russian Mathematics. — 2016. — Т. 60. — № 12. — С. 43—53.
3. Malai, N.V. Solution of a boundary value problem for the Navier-Stokes equations linearized with respect to velocity: nonisothermal flow of a gaseous medium past a uniform heated sphere / N.V. Malai, A.V. Limanskaya, E.R. Shchukin // Differential Equations. — 2015. — Т. 51. — № 10. — С. 1319—1329.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: ТТЛ, 1954. —795 с.
5. Варгафтик, Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей /Н.Б. Варгафтик. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
6. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики /А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1972. —735 с.
7. Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинстон. — М.: Иностр. лит-ры. — 1958. — 474 с.
8. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. — М.: Наука. — 1974. — Т. III. — Ч. 2. — 662 с.

УДК 517.983

Можарова Татьяна Николаевна
кандидат физико-математических наук, доцент,
декан физико-математического факультета,
Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева,
Россия, Орёл

ОБ ОБЩЕМ ВИДЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Аннотация. *Рассматривается обобщение результатов, описывающих общий вид линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах различных вектор–функций.*

Ключевые слова: *линейный непрерывный оператор, вектор-функция.*

Mozharova Tatiana Nikolaevna
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Dean of the Faculty of Physics and Mathematics,
Orel State University,
Russia, Orel

ON THE GENERAL FORM OF LINEAR CONTINUOUS OPERATORS OF INFINITE ORDER

Abstract. *A generalization of the results describing the general form of linear continuous operators acting in spaces of various vector functions is considered.*

Keywords: *linear continuous operator, vector function.*

1. Введение

В работе [1], посвященной операторам бесконечного порядка с переменными коэффициентами, доказаны теоремы, описывающие условия существования и непрерывности рассматриваемых операторов в пространствах аналитических функций. Так, например, в терминах характеристик роста целых вектор-функций описаны условия существования и непрерывности операторов бесконечного

порядка с переменными коэффициентами в пространстве функций, аналитических в области.

Поскольку при доказательстве этих теорем приходится рассматривать произведения элементов некоторого пространства H (H≠ $\mathbb{C}$) и элементов другого пространства (функционального) и рассматривать элементы из H как аналоги констант, вынося их из–под знака оператора, то в условиях теорем целесообразно вести речь о модуле над некоторой нормированной коммутативной алгеброй с единицей. При этом линейный (в классическом смысле) оператор становится линейным отображением, сохраняющим модульные операции (H–оператор).

2. Пусть H – коммутативная алгебра с единицей (**1**)**,** топологию которой задает система норм $\{\|\cdot\|_p\}$; p =1, 2, … . И пусть $\boldsymbol{H}_{\mathbf{R}}$ **(**H) – модуль над алгеброй H, состоящий из векторнозначных функций со значениями в H, сильноаналитических в круге:

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \ , \ \{ f_n \} \subset H, –$$

ряд абсолютно сходится в H $\forall t$: $|t| < R$.

В $\boldsymbol{H}_{\mathbf{R}}$ **(**H) топология задается системой норм: $\forall p$, $\forall r < R$

$$\|\Phi\|_{p,\,r} = \max_{|t|\le r} \{\|\Phi(t)\|_p\}, \ \Phi \in \boldsymbol{H}_{\mathbf{R}}\ (H), \ \Phi(t) \in H.$$

$\boldsymbol{H}_{\mathbf{R}}$ **(**H) – полное локально выпуклое пространство.

L{$\boldsymbol{H}_{\mathbf{R}}$, H} – множество линейных отображений $\boldsymbol{H}_{\mathbf{R}}$ **(**H) в H, сохраняющих модульные операции, т.е. $\forall \Phi_1, \Phi_2 \in \boldsymbol{H}_{\mathbf{R}}$ **(**H), $\forall f, \varphi \in$ H, $\boldsymbol{L} \in$ L{$\boldsymbol{H}_{\mathbf{R}}$, H}

$$\boldsymbol{L}\ (f\cdot\Phi_1+\varphi\cdot\Phi_2) = f\cdot \boldsymbol{L}\ (\Phi_1)+ \varphi\cdot \boldsymbol{L}\ (\Phi_2).$$

Теорема 1. Любой H–оператор из L{$\boldsymbol{H}_{\mathbf{R}}$, H} можно представить в виде

$$\boldsymbol{L}\ (\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n \ , \qquad (1)$$

где $\{c_n\} \subset$ H удовлетворяют условию:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|c_n\|_p} = l_p < R \quad \forall p. \qquad (2)$$

Пример: H= $\mathbb{C}$, $\boldsymbol{H}_{\mathbf{R}}$ **(**H) =H_R, L{$\boldsymbol{H}_{\mathbf{R}}$, H}= H_R^*.

Не рассматривая подробно доказательство этой теоремы (см. [1]), ограничимся доказательством необходимости введения понятий алгебры и модуля в условия этой теоремы. Общий вид оператора (1) указывает на необходимость определения операции умножения элементов из H, что возможно, если H – алгебра. Для доказательства то-

го, что любой оператор $\boldsymbol{L}\in$ L{$\boldsymbol{H}_{\mathbf{R}}$, H} можно записать в виде (1), действуем этим оператором на функцию Ф:

$$\boldsymbol{L}\,(\Phi) = \boldsymbol{L}\,(\sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n\,) = \boldsymbol{L}\,(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot 1 \cdot t^n\,)\,. \qquad (3)$$

Представление (3) справедливо, поскольку H – коммутативная алгебра с **1** ($f_n = f_n \cdot \mathbf{1}$). Так как $\mathbf{1}\cdot t^n \in \boldsymbol{H}_{\mathbf{R}}$ (H) и $\boldsymbol{L}$ сохраняет модульные операции, то

$$\boldsymbol{L}\,(\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \boldsymbol{L}(\boldsymbol{1}\cdot t^n).$$

Обозначив $\boldsymbol{L}(\mathbf{1}\cdot t^n) = c_n \in$ H, получим представление $\boldsymbol{L}$ в виде (1).

3. Пусть $\boldsymbol{H}_{\sigma}^{\rho}$ (H) – модуль над алгеброй H, состоящий из целых вектор–функций со значениями в H, порядок которых не выше ρ, а при порядке ρ тип меньше σ, σ≥0:

$$\Phi \in \boldsymbol{H}_{\sigma}^{\rho}(\mathrm{H}),\quad \Phi(\mathrm{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n\,,\ \{f_n\} \subset \mathrm{H},\ -$$

ряд сходится абсолютно при любом t.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{\|f_n\|_p} = (\sigma_p e \rho)^{\frac{1}{\rho}} \quad \forall \Phi\,,\ \forall p\,. \qquad (4)$$

$$\|\Phi\|_{p,\,\varepsilon} = \sup_{r\ge 0}\{\max_{|t|\le r}\|\Phi(t)\|_p \cdot e^{-(\sigma+\varepsilon)r^{\rho}}\}\ \ \forall p,\ \forall \varepsilon > 0.$$

L {$\boldsymbol{H}_{\sigma}^{\rho}$, H} – множество линейных отображений $\boldsymbol{H}_{\sigma}^{\rho}$(H) → H, сохраняющих модульные операции.

Теорема 2. Любой H–оператор из L {$\boldsymbol{H}_{\sigma}^{\rho}$, H} можно представить в виде

$$\boldsymbol{L}\,(\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n\,,$$

где $\{c_n\} \subset$ H удовлетворяют условию:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{\|c_n\|_p} = \left(\frac{1}{\rho e l_p}\right)^{\frac{1}{\rho}},\quad l_p > \sigma, \forall p.$$

Пример: H= $\mathbb{C}, \|\cdot\| = |\cdot|$, $\boldsymbol{H}_{\sigma}^{\rho}$(H)=[ρ;σ).

4. Пусть $l[H;\rho;\sigma]$– модуль над алгеброй H целых вектор–функций логарифмического роста со значениями в H:

$$\forall f \in l[H;\rho;\sigma],\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C = C(f;\varepsilon)$$

$$\|f(t)\|_p \le C(f;\varepsilon)\exp\{(\sigma+\varepsilon)(\ln|t|)^{\rho}\}\quad \forall p, \forall t \in \mathbb{C}.$$

$$\|f\|_{p,\varepsilon} = \sup_{r\ge 1}\left\{\max_{|t|\le r}\|f(t)\|_p \cdot \exp\left(-(\sigma+\varepsilon)(\ln r)^{\rho}\right)\right\}\quad \forall \varepsilon > 0, \forall p.$$

Это весовое пространство с данной топологией является локально выпуклым.

L{l, H} – множество всех линейных отображений $l\to$ H, сохраняющих модульные операции.

Теорема 3. Любой H–оператор из L{l, H} можно представить в виде

$$\boldsymbol{L}\ (\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n\ ,$$

где $\{f_n\}\subset$ H, $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n$, $f\in l[H;\rho;\sigma]$, $\{c_n\}\subset$ H удовлетворяют условию:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-\frac{\rho}{\rho-1}} \ln\|c_n\|_p = \gamma_p < \frac{\rho-1}{\rho}\left(\frac{1}{\sigma\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} = \gamma.$$

Пример: 1) H= H($\mathbb{C}$), f(t)=t, $f\in l[H;\rho;\sigma]$.

2) $\forall P_n(t)\in l[H;\rho;\sigma]$, $\rho>1$.

5. Рассмотрим операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, построенные по обобщенным производным Гельфонда – Леонтьева:

$$M(F) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D_f^k[F], \qquad (5)$$

где $F(z)\in[\nu,\tau]$ (целая функция порядка не выше ν, а при порядке ν типа не выше τ); $\{c_k\}\subset\mathbb{C}$;

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n -$$

фиксированная целая функция конечного порядка ρ, типа $\sigma\neq 0,\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} = (\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}, \quad a_n\neq 0 \quad \forall n.$$

Эта функция называется порождающей функцией оператора обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева:

$$D_f^k[F] = \sum_{n=0}^{\infty} b_{k+n}\frac{a_n}{a_{k+n}} z^n\ ,\ k=0;1;2;\ \ldots$$

По определению оператор *M(F)* применим к *F(z)*, если ряд (5) сходится при каждом конечном *z*. В работе [2] указаны необходимые и достаточные условия такой применимости оператора *M(F)* к целым функциям из [ν,τ], изучены вопросы роста *M(F)* в зависимости от роста функции *F(z)*.

Остановимся на применимости оператора *M(F)* к любой функции $F(z) \in [\nu,\tau]$.

Теорема 4. Для применимости оператора *M(F)* к целым функциям из пространства $[\nu,\tau]$ необходимо и достаточно, чтобы функция

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\frac{\rho}{\nu}} \cdot c_n z^n$$

являлась целой функцией из пространства $\left[\rho;\sigma\left(\frac{\sigma\rho}{\tau\nu}\right)^{\frac{\rho}{\nu}}\right]$.

Эта теорема позволяет сделать некоторые выводы о характеристической функции оператора *M(F)*:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, t^k \text{ ,–}$$

а именно, можно показать, что при условии $\nu>\rho$ функция $\varphi(t)$ будет целой.

Чтобы найти ее порядок и тип, воспользуемся неравенством:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} k^{\frac{1}{\gamma_1}} \sqrt[k]{|c_k|} < (e\delta_1\gamma_1)^{\frac{1}{\gamma_1}}.$$

При $\frac{1}{\gamma_1} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\nu}$ имеем:

$$\gamma_1 = \frac{\rho\nu}{\nu-\rho}, \tag{6}$$

$$\delta_1 = \frac{\nu-\rho}{\rho\nu} \cdot \left(\frac{(\sigma\rho)^{\nu}}{(\tau\nu)^{\rho}}\right)^{\frac{1}{\nu-\rho}}. \tag{7}$$

Отсюда следует: $\varphi(t) \in [\gamma_1;\delta_1)$, где γ_1, δ_1 вычисляются по формулам (6) и (7).

Далее, нетрудно установить эквивалентность условий $\varphi(t) \in [\gamma_1;\delta_1)$ и $G(z) \in \left[\rho;\sigma\left(\frac{\sigma\rho}{\tau\nu}\right)^{\frac{\rho}{\nu}}\right)$, когда $\varphi(t)$ – целая функция. Так как принадлежность $\varphi(t)$ к $[\gamma_1;\delta_1)$ уже была получена непосредственно из условия:

$$G(z) \in \left[\rho;\sigma\left(\frac{\sigma\rho}{\tau\nu}\right)^{\frac{\rho}{\nu}}\right), \text{ –}$$

остается показать обратную зависимость. Имеем:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} k^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[k]{|a_k|^{\frac{\rho}{\nu}} \cdot |c_k|} < (\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\nu}} \cdot (\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\nu}} \cdot \left(\frac{\sigma\rho}{\tau\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \left(\rho e \cdot \sigma\left(\frac{\sigma\rho}{\tau\nu}\right)^{\frac{\rho}{\nu}}\right)^{\frac{1}{\rho}},$$

то есть $G(z) \in \left[\rho; \sigma\left(\frac{\sigma\rho}{\tau\nu}\right)^{\frac{\rho}{\nu}}\right)$.

Итак, соответствующую теорему можно сформулировать следующим образом:

Теорема 5. Для применимости оператора *M(F)*, характеристическая функция которого *φ(t)* является целой, к любой функции $F \in [\nu;\tau]$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(t) \in \left[\frac{\rho\nu}{\nu-\rho}; \frac{\nu-\rho}{\rho\nu} \cdot \left(\frac{(\sigma\rho)^{\nu}}{(\tau\nu)^{\rho}}\right)^{\frac{1}{\nu-\rho}}\right)$.

В связи с рассмотренными в [2] условиями применимости оператора *M(F)* к функции *F(z)*, возникает вопрос о сходимости ряда (5), например, по топологии пространства $[\nu;\tau]$.

Для любого фиксированного *z*:

$$\left|D_f^k[F]\right| \le \omega^k, \quad \omega = \frac{(\tau e\nu)^{\frac{1}{\nu}}}{(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}} \cdot k^{\frac{\nu-\rho}{\rho\nu}}.$$

Поэтому:

$$\left\|D_f^k[F]\right\|_{\varepsilon} \le \sup_{r\ge 0}\left\{ \omega^k e^{-(\tau+\varepsilon)r^{\nu}} \right\} = \omega^k, \quad \forall F \in [\nu;\tau].$$

Используя оценку для $|c_k|$, получим:

$$\left\|c_k \cdot D_f^k[F]\right\|_{\varepsilon} = |c_k| \cdot \left\|D_f^k\right\|_{\varepsilon} < 1 \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Неравенство (8) показывает, что ряд (5) сходится по топологии пространства $[\nu;\tau]$, т.е. оператор *M(F)* определен на пространстве $[\nu;\tau]$.

Список литературы

1. Можарова, Т.Н. О существовании и непрерывности оператора J(A) на алгебре H / Т.Н. Можарова // Continuum. Математика. Информатика. Образование. – 2019. – №2(14). – С. 22–26.
2. Можарова, Т.Н. Операторы бесконечного порядка с переменными коэффициентами, построенные по обобщенным производным Гельфонда – Леонтьева / Т.Н. Можарова // Избранные труды физико-математического факультета Орловского государственного университета. – 2015. – С. 85–92.

УДК 517.51, 514.17

Невский Михаил Викторович
доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой математического анализа,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Россия, Ярославль

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ НОРМЫ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЕКТОРА

Аннотация. *Обозначим через $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ линейное пространство многочленов от n переменных степени ≤ 1, через B_n — евклидов единичный шар в $\mathbb{R}^n$. Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ — вершины невырожденного симплекса $S \subset B_n$, $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор с узлами $x^{(j)}$. Под $\|P\|_{B_n}$ будем понимать норму P как оператора из $C(B_n)$ в $C(B_n)$. Пусть χ_n — стандартизованный многочлен Лежандра степени n. Доказывается неравенство $\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(B_n)}{\mathrm{vol}(S)}\right)$. Из этой оценки следует эквивалентность $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$, где $\theta_n(B_n)$ есть минимальная величина $\|P\|_{B_n}$ при условии $x^{(j)} \in B_n$. Формулируются некоторые открытые вопросы.*

Ключевые слова: *симплекс, шар, объём, линейная интерполяция, проектор, норма, оценка.*

Mikhail Nevskii
doctor of physical and mathematical sciences, docent,
head of the department of mathematical analysis,
P. G. Demidov Yaroslavl State University,
Russia, Yaroslavl

ON SOME INEQUALITY FOR THE NORM OF AN INTEROPOLATION PROJECTOR

Abstract. *Denote by $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ the linear space of polynomials in n variables of degree ≤ 1. Let B_n be the Euclidean unit ball in $\mathbb{R}^n$. Suppose $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ are the vertices of a nondegenerate simplex $S \subset B_n$, $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ is the interpolation projector with the nodes $x^{(j)}$. By $\|P\|_{B_n}$ we mean the norm of P as an operator from $C(B_n)$ into $C(B_n)$. Let χ_n be the stanardized Legendre polynomial of degree n. We prove the inequality $\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(B_n)}{\mathrm{vol}(S)}\right)$. From this, it follows that $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$, where $\theta_n(B_n)$ is the minimal value of $\|P\|_{B_n}$ under the condition $x^{(j)} \in B_n$. Also we formulate some open problems.*

Keywords: *simplex, ball, linear interpolation, projector, norm, estimate.*

1. Введение

Всюду далее $n \in \mathbb{N}$. Для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Ниже $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ есть единичный шар, $Q_n := [0,1]^n$ — единичный куб в $\mathbb{R}^n$. Через $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство многочленов от n переменных степени не выше первой, иначе говоря, линейных функций, заданных на $\mathbb{R}^n$. Для функций $A(n)$ и $B(n)$ запись $A(n) \asymp B(n)$ означает выполнение неравенств $c_1 A(n) \leq B(n) \leq c_2 A(n)$, где положительные c_1, c_2 не зависят от n.

Рассмотрим невырожденный симплекс $S \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $1 \leq j \leq n+1$. Матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной, причём справедливо соотношение $\mathrm{vol}(S) = \frac{|\det(\mathbf{A}|}{n!}$. Обозначим элементы обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ через l_{ij}. Пусть λ_j — многочлен из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$, коэффициенты которого содержатся в j-м столбце $\mathbf{A}^{-1}$, иначе говоря, $\lambda_j(x) := l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$. По нашей терминологии многочлены λ_j являются *базисными многочленами Лагранжа, соответствующими симплексу* S. Для $x \in \mathbb{R}^n$ числа $\lambda_1(x)$, $\ldots$, $\lambda_{n+1}(x)$ представляют собой барицентрические координаты точки x относительно S. Подробнее о свойствах λ_j см. [1].

Пусть Ω — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, т. е. компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Под $C(\Omega)$ будем понимать пространство непрерывных функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{C(\Omega)} := \max_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Интерполяционный проектор $P : C(\Omega) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, узлы $x^{(j)}$ которого совпадают с вершинами симплекса $S \subset \Omega$, называется соответствующим этому симплексу. По определению, $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$. Имеет место равенство

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f\left(x^{(j)}\right) \lambda_j(x). \tag{1}$$

Пусть $\|P\|_\Omega$ есть норма проектора P как оператора из $C(\Omega)$ в $C(\Omega)$. Из (1) с помощью стандартных рассуждений получается, что

$$\|P\|_\Omega = \max_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Если Ω — выпуклый многограннник в $\mathbb{R}^n$ (например, n-мерный куб), то максимум можно брать лишь по множеству вершин Ω.

Определим $\theta_n(\Omega)$ как минимальную величину нормы $\|P\|_\Omega$ при условии принадлежности всех узлов интерполяции множеству Ω (иначе говоря, при условии $S \subset \Omega$).

Соотношения для величин $\theta_n(\Omega)$ в ситуации $\Omega = Q_n$, полученные автором к 2012 г., приводятся в монографии [1]. В статьях [4] и [2] исследовался случай $\Omega = B_n$. В настоящем докладе описывается подход работы [2], основанный на применении классических многочленов Лежандра. Через эти многочлены, а также через объём симплекса S выписывается оценка снизу для нормы интерполяционного проектора $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$. Из указанного неравенства следует эквивалентность $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$. Получается также, что норма проектора, соответствующий правильному вписанному симплексу, эквивалентна минимальной.

2. Оценка $\|P\|_{B_n}$ через $\mathrm{vol}(S)$

Пусть

$$\chi_n(t) := \frac{1}{2^n n!}\left[(t^2-1)^n\right]^{(n)} \tag{2}$$

— так называемый стандартизованным многочленом Лежандра степени n (см., например, [5]). Если $n \geq 1$, то $\chi_n(t)$ возрастает при $t \geq 1$. Пусть χ_n^{-1} — функция, обратная к χ_n на полупрямой $[1, +\infty)$. Рассмотрим множество

$$E_{n,\gamma} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| + \left| 1 - \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \gamma \right\}.$$

При $\gamma \geq 1$ мера этого множества следующим образом выражается через многочлены Лежандра:

$$\mathrm{mes}_n(E_{n,\gamma}) = \frac{\chi_n(\gamma)}{n!}. \tag{3}$$

Доказательство этого равенства, данное автором в 2003 г., имеется в [1]. Из (3) вытекает такая оценка для минимальной нормы проектора при линейной интерполяции на n-мерном кубе:

$$\theta_n(Q_n) \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right) = \chi_n^{-1}\left(\frac{n!}{h_n}\right). \tag{4}$$

Символом ν_n мы обозначили максимальный объём симплекса, являющегося подмножеством Q_n, а символом h_n — величину максимального определителя порядка n, элементы которого равны 0 или 1. Свойства χ_n позволили получить из (4) более простые оценки снизу, точные по порядку n. На этом пути было доказано, что $\theta_n(Q_n) \asymp \sqrt{n}$ (см. [1]). Оказывается возможным перенести этот подход на интерполяцию и на n-мерном шаре.

Обозначим $\varkappa_n := \mathrm{vol}(B_n)$. Под σ_n будем понимать объём правильного симплекса, вписанного в B_n.

Т е о р е м а. Пусть $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор, соответствующий симплексу $S \subset B_n$. Тогда

$$\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\mathrm{vol}(S)}\right) = \chi_n^{-1}\left(\frac{n!\varkappa_n}{|\det(\mathbf{A})|}\right). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся тем, что объём правильного симплекса, вписанного в шар, является максимальным из всех симплексов, содержащихся в этом шаре (см., например, [7]). Это означает, что $\mathrm{vol}(S) = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{n!} \leq \sigma_n$. Из каждой строки матрицы $\mathbf{A}$ вплоть до n-й вычтем её $(n+1)$-ю строку. Рассмотрим подматрицу порядка n преобразованной матрицы, которая будет располагаться в первых n строках и первых n столбцах преобразованной матрицы. Обозначим эту матрицу порядка n через $\mathbf{B}$. Имеем $|\det(\mathbf{B})| = |\det(\mathbf{A})| = n!\mathrm{vol}(S) \leq n!\sigma_n$. Следовательно,

$$\frac{n!\sigma_n}{|\det(\mathbf{B})|} \geq 1. \tag{6}$$

Как и ранее, обозначим через $x^{(j)}$ вершины, а через λ_j — базисные многочлены Лагранжа симплекса S. Из равенства для нормы проектора и того, что $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{n+1}(x)$ являются барицентрическими координатами x, получаем соотношение

$$\|P\|_{B_n} = \max_{x\in B_n}\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(x)| = \max\left\{\sum_{j=1}^{n+1}|\beta_j| : \sum_{j=1}^{n+1}\beta_j = 1, \sum_{j=1}^{n+1}\beta_j x^{(j)} \in B_n\right\}.$$

Положим $B' := B_n - x^{(n+1)}$. Условие $\sum\limits_{j=1}^{n+1}\beta_j x^{(j)} \in B_n$ равносильно условию $\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j(x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in B'$. Значит,

$$\|P\|_{B_n} = \max\left\{\sum_{j=1}^{n}|\beta_j| + \left|1 - \sum_{j=1}^{n}\beta_j\right| : \sum_{j=1}^{n}\beta_j(x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in B'\right\}. \tag{7}$$

Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, который точке $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ сопоставляет точку $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в соответствии с равенством

$$x = F(\beta) := \sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(x^{(j)} - x^{(n+1)}\right).$$

Так как элементы матрицы $\mathbf{B}$ имеют вид $b_{ij} = x_j^{(i)} - x_j^{(n+1)}$, то в матричном виде справедливо $F(\beta) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)\mathbf{B}$. Введём в рвссмотрение величину

$$\gamma^* := \chi_n^{-1}\left(\frac{n!\varkappa_n}{|\det(\mathbf{B})|}\right).$$

Корректность этого определения следует из (6) и неравенства $\varkappa_n \geq \sigma_n$. Заметим, что

$$\chi_n(\gamma^*) = \frac{n!\varkappa_n}{|\det(\mathbf{B})|}. \tag{8}$$

Пусть теперь $1 \leq \gamma < \gamma^*$,

$$E_{n,\gamma} = \left\{ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} |\beta_j| + \left| 1 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \right| \leq \gamma \right\}.$$

Покажем, что $B' \not\subset F(E_{n,\gamma})$. Для этого установим, что справедливо неравенство $\mathrm{mes}_n(F(E_{n,\gamma})) < \mathrm{mes}_n(B') = \varkappa_n$. Имеем цепочку соотношений:

$$\mathrm{mes}_n(F(E_{n,\gamma})) < \mathrm{mes}_n(F(E_{n,\gamma^*})) = |\det \mathbf{B}| \cdot \mathrm{mes}_n(E_{n,\gamma^*}) = |\det \mathbf{B}| \cdot \frac{\chi_n(\gamma^*)}{n!} = \varkappa_n.$$

В этой цепочке существенно используются равенства (3) и (8). Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся точка $x^{(\varepsilon)}$, для которой

$$x^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^{(\varepsilon)} \left(x^{(j)} - x^{(n+1)} \right) \in B', \quad \sum_{j=1}^{n} \left| \beta_j^{(\varepsilon)} \right| + \left| 1 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j^{(\varepsilon)} \right| \geq \gamma^* - \varepsilon.$$

Равенство (7) означает, что $\|P\|_{B_n} \geq \gamma^* - \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$\|P\|_{B_n} \geq \gamma^* = \chi_n^{-1}\left(\frac{n!\varkappa_n}{|\det(\mathbf{B})|} \right) = \chi_n^{-1}\left(\frac{n!\varkappa_n}{|\det(\mathbf{A})|} \right) = \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\mathrm{vol}(S)} \right).$$

Доказательство закончено. □

3. Следствия

С л е д с т в и е 1. Для всех n

$$\theta_n(B_n) \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\sigma_n} \right). \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого проектора P с узлами, принадлежащими B_n, и соответствующего симплекса S имеем $\mathrm{vol}(S) \leq \sigma_n$. Из (5) получается

$$\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\mathrm{vol}(S)} \right) \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\sigma_n} \right).$$

Отсюда и следует оценка (9). □

С применением известных равенств

$$\varkappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \qquad \sigma_n = \frac{1}{n!}\sqrt{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2},$$

$$\varkappa_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \qquad \varkappa_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!} = \frac{2(k!)(4\pi)^k}{(2k+1)!}$$

(см., например, [6]) и оценок значений $\chi_n^{-1}(s)$, установленных в [1], неравенство (9) удаётся конкретизировать.

С л е д с т в и е 2. Существует константа $c > 0$, такая что

$$\theta_n(B_n) > c\sqrt{n}. \tag{10}$$

Доказательство приводится в [2]. Неравенство (10) верно, например, при

$$c = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{12e} \cdot \sqrt[6]{3}} = 0.2135...$$

С л е д с т в и е 3. Выполняется соотношение $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$.

Достаточно учесть, что $\theta_n(B_n) \le \sqrt{n+1}$ (см. [4]).

Пусть $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — произвольный проектор, для которого соответствующий симплекс S является правильным и вписанным в B_n.

С л е д с т в и е 4. Имеет место эквивалентность $\|P\|_{B_n} \asymp \theta_n(B_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как доказывается в [4], $\|P\|_{B_n} \asymp \sqrt{n}$. Более того, выполняются неравенства $\sqrt{n} \le \|P\|_{B_n} \le \sqrt{n+1}$. Поскольку $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$, то $\|P\|_{B_n} \asymp \theta_n(B_n)$. □

4. Открытые вопросы

По крайней мере при $1 \le n \le 4$ проектор, соответствующего правильному симплексу, вписанному в шар, является минимальным, т. е. для него выполняется равенство $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$. Два различных доказательства даются в [4] и [3]. Автор предполагает, что это равенство справедливо вообще для всех n, однако, начиная с $n = 5$, доказательство ему неизвестно. Подход работы [4], основанный на ряде оценок для числовых характеристик симплекса, при $n \ge 5$ не работает. Метод доказательства соотношения $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$, изложенный в [3], базируется на некоторой геометрической гипотезе, справедливой при $n \le 4$, но пока не доказанной в общем случае.

Другой интересный вопрос в этой тематике связан с отмеченным выше равенством (3) для меры множества $E_{n,\gamma}$. По сути, это равенство, наряду с формулой Родрига (2) и другими известными соотношениями, также даёт характеризацию многочленов Лежандра, но через объёмы некоторых выпуклых многогранников. Именно, при $t \ge 1$

$$\chi_n(t) = n! \operatorname{mes}_n(E_{n,t}), \tag{11}$$

где

$$E_{n,t} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \left| 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j \right| \le t \right\}.$$

Возникает вопрос об аналогах соотношения (11) для других классов ортогональных многочленов, например, для многочленов Чебышёва или, шире, многочленов Якоби. Является ли равенство (11) проявлением какой-то общей закономерности? Автор будет признателен за любую информацию по этому поводу.

Список литературы

1. Невский М. В. Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции. — Ярославль: ЯрГУ. — 2012. — 218 с.
2. Невский М. В. Геометрические оценки при интерполяции на n-мерном шаре // Модел. и анализ информ. систем. — 2019. — Т. 26. — № 3. — С. 441–449.
3. Невский М. В. О свойствах правильного симплекса, вписанного в шар // Модел. и анализ информ. систем. — 2021. — Т. 28. — № 2. — С. 186–197.
4. Невский М. В., Ухалов А. Ю. Линейная интерполяция на евклидовом шаре в $\mathbb{R}^n$ // Модел. и анализ информ. систем. — 2019. — Т. 26. — № 2. — С. 255–273.
5. Сегё Г. Ортогональные многочлены. — М: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры. — 1962. — 500 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3. — М: Физматлит. — 2001. — 662 с.
7. Vandev, D. A minimal volume ellipsoid around a simplex // C. R. Acad. Bulg. Sci. — 1992. — V. 45. — № 6. — P. 37–40.

УДК 517.444

Платонов Сергей Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математического анализа,
Петрозаводский государственный университет,
Россия, Петрозаводск

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО

Аннотация. *Пусть функция f принадлежит функциональному классу Никольского $H_p^\alpha(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$, $\alpha > 0$, и пусть $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции f. Основным результатом работы является ответ на вопрос: при каких значениях параметра r функция $\widehat{f}$ содержится в пространстве Лебега $L^r(\mathbb{R})$? Полученная теорема является обобщением классической теоремы Е. Титчмарша о преобразовании Фурье функций из классов Липшица $Lip(\alpha, p; \mathbb{R})$ при $0 < \alpha \le 1$.*

Ключевые слова: *преобразование Фурье, функциональные классы Никольского, теорема Титчмарша.*

Platonov Sergey
Doctor of physical and mathematical sciences, Professor,
Professor of the department of mathematical analysis ,
Petrozavodsk State University,
Russia, Petrozavodsk

ON THE FOURIER TRANSFORM OF FUNCTIONS FROM THE NIKOL'SKII FUNCTION CLASSES

Abstract. *Let a function f belongs to the Nikol'skii class $H_p^\alpha(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$, $\alpha > 0$, and let $\widehat{f}$ be the Fourier transform of f. The main result of the work is the answer to the question: at what values of the parameter r the function $\widehat{f}$ belongs to the Lebesgue class $L^r(\mathbb{R})$? The resulting theorem is a generalization of the classical theorem of E. Titchmarsh on the Fourier transform of functions from the Lipschitz classes $Lip(\alpha, p; \mathbb{R})$ with $0 < \alpha \le 1$.*

Keywords: *Fourier transform, functional Nikol'skii classes, Titchmarsh theorem.*

В настоящей работе рассмотрен аналог одной теоремы Е. Титчмарша (см. [1, Теорема 84]) для преобразований Фурье функций из функциональных классов Никольского $H_p^\alpha(\mathbb{R})$. Приведем необходимые сведения из теории функциональных пространств. Все функциональные классы состоят из комплекснозначных функций на $\mathbb{R}$. Для любого $p \in (0, +\infty)$ пусть $L^p(\mathbb{R})$— класс всех измеримых функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$ (функции рассматриваются с точностью до значений

на множестве меры 0) для которых

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

При $p \in [1, +\infty)$ класс $L^p(\mathbb{R})$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx \right)^{1/p}.$$

При $p = \infty$ мы обозначаем через $L^\infty(\mathbb{R})$ банахово пространство всех существенно ограниченных функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$. Норма в пространстве $L^\infty(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$\|f\|_\infty := \operatorname{vrai\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Для любой функции $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, преобразование Фурье $\mathcal{F} : f(x) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ определяется соотношением

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) := (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \, e^{-i\lambda x} \, dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Для всякого $p \in [1, +\infty)$ пусть $p' := \frac{p}{p-1}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$, то ее преобразование Фурье $\widehat{f}(\lambda)$ определяется как предел в пространстве $L^{p'}(\mathbb{R})$ последовательности функций

$$\widehat{f}_n(\lambda) := \int\limits_{-n}^{n} f(x) \, e^{-i\lambda x} \, dx$$

при $n \to +\infty$. Преобразование Фурье $\mathcal{F} : f(x) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ является линейным непрерывным оператором из банахова пространства $L^p(\mathbb{R})$ в банахово пространство $L^{p'}(\mathbb{R})$, и для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R})$ справедливо неравенство Хаусдорфа – Юнга

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{p'} \leq (2\pi)^{1/2 - 1/p} \|f\|_p, \; 1 \leq p \leq 2.$$

Для любой функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ и для любого $h \in \mathbb{R}$ пусть

$$(\tau_h f)(x) := f(x - h).$$

Оператор τ_h называется оператором сдвига. Оператор τ_h является изометрическим оператором в банаховом пространстве $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, то есть $\|\tau_h f\|_p = \|f\|_p$ для $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Конечная разность $\Delta_h^k f$ порядка $k \in \mathbb{N}$ с шагом h определяется по формуле:

$$\Delta_h^k f := (I - \tau_h)^k f = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \tau_{jh} f,$$

где I — тождественный оператор, $\binom{k}{j}$ — биномиальные коэффициенты.

Пусть $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Модуль непрерывности $\omega_k(f;\delta)_p$порядка k определяется по формуле

$$\omega_k(f;\delta)_p := \sup\{\|\Delta_h^k f\|_p : |h| \le \delta\}, \quad \delta > 0.$$

О п р е д е л е н и е. Пусть $\alpha > 0$ — вещественное число, k — натуральное число, такое, что $k > \alpha$ (например, можно взять $k = [\alpha]+1$, $[\alpha]$ — целая часть α). Функция $f(x)$ принадлежит пространству Никольского $H_p^\alpha(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty]$, если $f \in L^p(\mathbb{R})$ и для некоторой постоянной $c = c(f) > 0$ справедливо неравенство

$$\omega_k(f;\delta)_p \le c\,\delta^\alpha, \qquad \delta > 0.$$

$H_p^\alpha(\mathbb{R})$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{H_p^\alpha(\mathbb{R})} := \|f\|_p + \sup_{\delta>0} \frac{\omega_k(f;\delta)_p}{\delta^\alpha}.$$

Можно показать, что $H_p^\alpha(\mathbb{R})$ не зависит от k (см., например, [2]). Также в книге [2] содержатся другие описания пространств $H_p^\alpha(\mathbb{R})$. При $\alpha \in (0,1)$ и $k = 1$ класс $H_p^\alpha(\mathbb{R})$ совпадает с классом Липшица $Lip(\alpha,p;\mathbb{R})$.

Основным результатом является следующая теорема, которая является обобщением теоремы Титчмарша (см. [1, Теорема 84]) для преобразований Фурье функций из функциональных классов Липшица $Lip(\alpha,p;\mathbb{R})$, $\alpha \in (0,1)$.

Т е о р е м а 1. Пусть $f \in H_p^\alpha(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$, $\alpha > 0$, и пусть $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции f. Тогда $\widehat{f}$ принадлежит классам Лебега $L^r(\mathbb{R})$ при

$$\frac{p}{p+\alpha p-1} < r \le \frac{p}{p-1}, \tag{1}$$

и границы $\frac{p}{p+\alpha p-1}$ and $\frac{p}{p-1}$ в неравенстве (1) точные, т. е. промежуток значений параметра r не может быть расширен.

Отметим, что аналог теоремы 1 для интегральных преобразований Ханкеля получен в [3, Theorem 1.3].

Список литературы

1. Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье. — М.: ОГИЗ. — 1948. — 480 с.

2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — 2-е изд. испр. — М.: Наука. — 1977. — 456 с.

3. On the Hankel transform of functions from Nikol'skii type classes // Integral Transforms and Special Functions. — 2021. — Vol. 32. — No. 10. — P. 823–838.

УДК 519.644.5+517.956.224

Резниченко Игорь Олегович
МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет,
Россия, Москва

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЯМОГО ЗНАЧЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ В ТРЁХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Аннотация. *В работе выводится квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью, заданной на замкнутой либо разомкнутой поверхности. Рассматриваются потенциалы двойного слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца. Выведенная квадратурная формула может использоваться при численном решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом потенциалов и граничных интегральных уравнений. Предложенная квадратурная формула даёт значительно более высокую точность, чем стандартная квадратурная формула, что подтверждается численными тестами.*

Ключевые слова: *квадратурная формула, потенциал двойного слоя, прямое значение.*

1. Введение

Потенциал двойного слоя используется при численном решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом интегральных уравнений в [1], [2], [3]. С помощью потенциалов краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям. Для численного решения интегральных уравнений нужно иметь квадратурные формулы, которые с достаточной точностью вычисляют прямые значения потенциалов на поверхности, где задана плотность потенциала. В инженерных расчетах используются стандартные квадратурные формулы для потенциалов [4], но их точность оставляет желать лучшего.

В трёхмерном случае улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя предложена в [5], для потенциала двойного слоя в [6], а для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя в [7]. В настоящей работе выводится улучшенная квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя. Улучшенная формула даёт значительно более высокую точность чем стандартная, что подтверждается численными тестами.

2. Постановка задачи

Введем декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Пусть Γ — простая гладкая замкнутая либо ограниченная разомкнутая поверхность класса C^2, содержащая свои предельные точки. Если поверхность Γ замкнутая, то она должна ограничивать объёмно-односвязную внутреннюю область. Предпо-

ложим, что поверхность Γ параметризована так, что на нее отображается прямоугольник ($u \in [0, A],\ \ v \in [0, B]$):

$$y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u, v),\ y_2 = y_2(u, v),\ y_3 = y_3(u, v);$$

$$y_j(u, v) \in C^2([0, A] \times [0, B]), \quad j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Сфера, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом. Введём N точек u_n с шагом h на отрезке $[0, A]$ и M точек v_m на отрезке $[0, B]$ и рассмотрим разбиение прямоугольника $[0, A] \times [0, B]$, который отображается на поверхность Γ :

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \qquad v_m = (m + 1/2)H,$$

где $n = 0, ..., N-1$ и $m = 0, ..., M-1$. Тем самым прямоугольник $[0, A]\times[0, B]$ разбивается на $N\times M$ маленьких прямоугольничков и через (u_n, v_m) обозначены серединки этих прямоугольничков.

Известно [8, Гл. 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного) $\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$ в точке поверхности $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$ выражаются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| > 0, \quad \forall\ (u, v) \in ((0, A) \times (0, B)). \tag{3}$$

Из условия (3) следует, что $|\eta(y(u, v))| \in C^1((0, A) \times (0, B))$. Обозначим через $\mathbf{n}_y$ единичную нормаль в точке $y \in \Gamma$, т.е. $\mathbf{n}_y = \eta(y)/|\eta(y)|$. Производная по нормали $\mathbf{n}_y$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} = |\eta(y)|^{-1}(\eta(y), \nabla_y).$$

Обозначим $|x-y(u, v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u, v))^2 + (x_2 - y_2(u, v))^2 + (x_3 - y_3(u, v))^2}$ и заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}|x - y| = \frac{1}{|\eta(y)|}\sum_{j=1}^{3} \eta_j(y)\frac{y_j - x_j}{|x - y|}.$$

Потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца используется при решении краевых задач методом интегральных уравнений. Пусть $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$. Прямое значение потенциала двойного слоя в точке $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma$ имеет вид

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \mu(y)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x - y|}ds_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \mu(y)\frac{1}{|\eta(y)|}\frac{\exp(ik|x-y|)(ik|x-y|-1)}{|x-y|^2}\sum_{j=1}^{3}\frac{\eta_j(y)(y_j-x_j)}{|x-y|}ds_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^A du\int_0^B dv\,\mu(y(u,v))\exp(ik|x-y(u,v)|)(ik|x-y(u,v)|-1)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{3}\frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\,\mu(y(u,v))\times$$

$$\times\exp(ik|x-y(u,v)|)(ik|x-y(u,v)|-1)\sum_{j=1}^{3}\frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3}, \quad (4)$$

где $k \geq 0$. Известно [9, §27.5], что прямое значение потенциала двойного слоя в наших предположениях является непрерывной на Γ функцией. Пусть $\mu_{nm} = \mu(y(u_n, v_m))$, тогда

$$\mu(y(u,v)) = \mu_{nm} + o(1),$$

для $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$. Так же как и в [5] можно показать, что при $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ выполняются оценки

$$|x - y(u,v)| = |x - y(u_n, v_m)| + O(h+H),$$

$$\exp(ik|x-y(u,v)|) = \exp(ik|x-y(u_n,v_m)|) + O(h+H).$$

Константы в оценках функций, обозначенных как $O(h+H)$, не зависят от n, m и от расположения x в узлах Γ. Следовательно,

$$\mathcal{W}_k[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})\in\Gamma} \approx \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}\exp(ik|x-y(u_n,v_m)|)\times$$

$$\times(ik|x-y(u_n,v_m)|-1)\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\sum_{j=1}^{3}\frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3}. \quad (5)$$

Таким образом, чтобы получить квадратурную формулу для прямого значения потенциала двойного слоя при $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma$, необходимо вычислить двойной интеграл в (5), который будем называть каноническим интегралом.

3. Вычисление канонического интеграла, когда точка x лежит в области интегрирования

В данном случае интегрирование ведется по прямоугольничку с центром в точке $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$, которой отвечает точка $y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) = x$ на поверхности Г. Применяя формулу Тейлора с центром в точке $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$, находим

$$|y(u,v)-x|^2 = |y(u,v)-y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})|^2 \approx \sum_{j=1}^{3}((y_j)'_u(u-u_{\hat{n}})+(y_j)'_v(v-v_{\hat{m}}))^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}(((y_j)'_u)^2(u-u_{\hat{n}})^2+((y_j)'_v)^2(v-v_{\hat{m}})^2+2(y_j)'_u(y_j)'_v(u-u_{\hat{n}})(v-v_{\hat{m}})) =$$

$$= \alpha^2(u-u_{\hat{n}})^2+\beta^2(v-v_{\hat{m}})^2+2\delta(u-u_{\hat{n}})(v-v_{\hat{m}}),$$

$$\alpha^2 = \sum_{j=1}^{3}((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^{3}((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^{3}(y_j)'_u(y_j)'_v,$$

где $(y_j)'_u$ и $(y_j)'_v$ берутся в точке $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$. Заметим, что $\alpha^2\beta^2 - \delta^2 = |\eta(x)|^2$ согласно [8, Гл. 14, § 1], поэтому $\alpha^2 > 0$ и $\beta^2 > 0$ в силу условия (3). Далее, используя формулу Тейлора в точке $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ с остаточным членом в форме Пеано [8, Гл. 10, § 5.3], получаем

$$y_j - x_j = (y_j)'_u(u-u_{\hat{n}})+(y_j)'_v(v-v_{\hat{m}})+\frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u-u_{\hat{n}})^2$$

$$+\frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v-v_{\hat{m}})^2+(y_j)''_{uv}(u-u_{\hat{n}})(v-v_{\hat{m}})+o\left((u-u_{\hat{n}})^2+(v-v_{\hat{m}})^2\right),$$

$$\eta_j(y(u,v)) = \eta_j(y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}}))+(\eta_j)'_u(u-u_{\hat{n}})+(\eta_j)'_v(v-v_{\hat{m}})+$$

$$+o\left(\sqrt{(u-u_{\hat{n}})^2+(v-v_{\hat{m}})^2}\right).$$

Производные по u и v берутся в точке $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$. Для вычисления числителя подынтегрального выражения учтём формулы

$$\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u_n,v_m))(y_j)'_u = \sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u_n,v_m))(y_j)'_v = 0, \tag{6}$$

отражающие ортогональность вектора нормали и касательных векторов к поверхности (см. главу 14 в [8]). Следовательно

$$\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u,v))(y_j-x_j) \approx \xi_1(u-u_{\hat{n}})^2+\xi_2(v-v_{\hat{m}})^2+\xi_3(u-u_{\hat{n}})(v-v_{\hat{m}}),$$

$$\xi_1 = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\eta_j(y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}}))(y_j)''_{uu}+(\eta_j)'_u(y_j)'_u\right),$$

$$\xi_2 = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{1}{2} \eta_j(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}))(y_j)''_{vv} + (\eta_j)'_v (y_j)'_v \right),$$

$$\xi_3 = \sum_{j=1}^{3} \left(\eta_j(y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}))(y_j)''_{uv} + (\eta_j)'_u (y_j)'_v + (\eta_j)'_v (y_j)'_u \right).$$

Производные по u и v берутся в точке $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$. Из приведенных соотношений вытекает, что в рассматриваемом случае канонический интеграл в (5) приближенно равен следующему интегралу, который обозначим через $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{\xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{(\alpha^2 U^2 + \beta^2 V^2 + 2\delta UV)^{3/2}} = \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}},$$

где $U = u - u_{\hat{n}},\ V = v - v_{\hat{m}}$. Вычислим интеграл $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ в явном виде. Перейдя к полярным координатам $\rho = \sqrt{U^2 + V^2},\ U = \rho\cos\phi,\ V = \rho\sin\phi$, мы преобразуем выражение под интегралом в сумму двух рациональных дробей. Применяя в получившися двух интегралах замены $t = \operatorname{tg}\phi$ и $t = \operatorname{ctg}\phi$ соответственно, а затем сделав замену $z = t + \delta/\alpha^2$ мы приходим к табличным интегралам. Подробно процесс вывода интеграла $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ и явное выражение для него описаны в работе [7].

4. Вычисление канонического интеграла, когда точка x лежит в области интегрирования

Пусть точка x не принадлежит кусочку поверхности Γ, на котором изменяется точка $y = y(u, v)$, когда $(u - u_n) \in [-h/2, h/2]$ и $(v - v_m) \in [-H/2, H/2]$. Разложим $y_j(u, v)$ по формуле Тейлора с центром в точке (u_n, v_m), тогда для $j = 1, 2, 3$ получим

$$y_j(u, v) = y_j(u_n, v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$

где

$$D_j = (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m).$$

Здесь и далее все производные по u и v берутся в точке (u_n, v_m). Положим

$$r^2 = |x - y(u_n, v_m)|^2 = \sum_{j=1}^{3} r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n, v_m) - x_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

тогда

$$y_j(u, v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2), \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$|x - y(u, v)|^2 = \sum_{j=1}^{3} (x_j - y_j(u, v))^2 \approx \sum_{j=1}^{3} (r_j^2 + 2r_j D_j + D_j^2) =$$

$$= r^2+2P(u-u_n)+2Q(v-v_m)+\alpha^2(u-u_n)^2+\beta^2(v-v_m)^2+2\delta(u-u_n)(v-v_m) =$$
$$= \beta^2(V+\delta U/\beta^2+Q/\beta^2)^2-(\delta U+Q)^2/\beta^2+\alpha^2U^2+2PU+r^2,$$
$$P=\sum_{j=1}^{3} r_j(y_j)'_u, \quad Q=\sum_{j=1}^{3} r_j(y_j)'_v,$$

где $U=u-u_n,\ V=v-v_m$, а выражения для $\alpha^2,\ \beta^2$ и δ аналогичны пункту 3. Производные по u и v берутся в точке $u=u_n,\ \ v=v_m$. Применяя формулу Тейлора в точке (u_n,v_m) с остаточным членом в форме Пеано, находим

$$\eta_j(y(u,v)) = \eta_j(y(u_n,v_m)) + (\eta_j)'_u(u-u_n) + (\eta_j)'_v(v-v_m)+$$
$$+o\left(\sqrt{(u-u_n)^2+(v-v_m)^2}\right).$$

Производные по u и v берутся в точке (u_n,v_m). Разложение по формуле Тейлора в точке (u_n,v_m) функций $y_j(u,v)-x_j$ возьмём такое же как в пункте 3, тогда с учётом формул (6):

$$\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j) \approx R+\xi_4U+\xi_5V+\xi_1U^2+\xi_2V^2+\xi_3UV,$$

$$\xi_4=\sum_{j=1}^{3}(\eta_j)'_u r_j, \quad \xi_5=\sum_{j=1}^{3}(\eta_j)'_v r_j, \quad R=\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u_n,v_m))r_j.$$

где $U=u-u_n,\ V=v-v_m$ и выражения для $\xi_1,\ \xi_2$ и ξ_3 такие же как в пункте 3. Все производные по $u,\ v$ берутся в точке (u_n,v_m). Из приведенных соотношений вытекает, что в рассматриваемом случае канонический интеграл из (5) приближенно равен следующему интегралу, который обозначим через $K_{nm}(x)$

$$K_{nm}(x)=\int_{-h/2}^{h/2}dU\int_{-H/2}^{H/2}dV\times$$
$$\times\frac{R+\xi_4U+\xi_5V+\xi_1U^2+\xi_2V^2+\xi_3UV}{\beta^3((V+\delta U/\beta^2+Q/\beta^2)^2-(\delta U+Q)^2/\beta^4+(\alpha^2U^2+2PU+r^2)/\beta^2)^{3/2}} \quad (7)$$

Интеграл $K_{nm}(x)$ вычислен в явном виде в работе [6].

5. Основной результат

Сформулируем основной результат этой работы в виде теоремы.

Т е о р е м а. Пусть Γ — простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2, ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая ориентированная поверхность класса C^2, содержащая свои предельные точки. Пусть Γ допускает параметризацию (1) со

свойством (3), и $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$. Тогда для прямого значения потенциала двойного слоя (4) на Γ при $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma$ и $k \geq 0$ имеет место квадратурная формула

$$\mathcal{W}_k[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})\in\Gamma} \approx -\frac{1}{4\pi}\mu_{\hat{n}\hat{m}}\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{n=0,\,m=0\\(n,m)\neq(\hat{n},\hat{m})}}^{n=N-1,\,m=M-1} \mu_{nm}\exp(ik|x-y(u_n,v_m)|)(ik|x-y(u_n,v_m)|-1)K_{nm}(x). \quad (8)$$

где интеграл $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ вычислен в явном виде в пункте 2, а интеграл $K_{nm}(x)$ из (7) вычислен в явном виде в работе [6].

6. Стандартная квадратурная формула

Квадратурная формула (8) является альтернативой стандартной квадратурной формуле для прямого значения потенциала двойного слоя на поверхности Γ, используемой в инженерных расчётах [4, Глава 2]. Стандартная квадратурная формула получается из формулы (5) заменой канонического интеграла при $x \neq y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$ на его приближенное значение

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{n=0,\,m=0\\(n,m)\neq(\hat{n},\hat{m})}}^{n=N-1,\,m=M-1} \mu_{nm}\exp(ik|x-y(u_n,v_m)|)(ik|x-y(u_n,v_m)|-1)\times$$

$$\times\frac{hH}{|x-y(u_n,v_m)|^3}\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u_n,v_m))(y_j(u_n,v_m)-x_j). \quad (9)$$

и обнулением канонического интеграла по кусочку поверхности Γ с центром в точке $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$.

7. Численные тесты

Тестирование улучшенной (8) и стандартной (9) квадратурных формул проведено в случае, когда поверхность Γ является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями:

$$y_1(u,v) = \cos u \sin v, \quad y_2(u,v) = \sin u \sin v, \quad y_3(u,v) = \cos v, \quad (10)$$

причём $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Отметим, что в данном случае $|\eta(y(u,v))| = \sin v$ и $|\eta(y(u,0))| = |\eta(y(u,\pi))| = 0$ для всех $u \in [0, 2\pi]$. Иначе говоря, $|\eta(y)| = 0$ на полюсах сферы при такой параметризации, но условия теоремы выполняются.

Согласно [9, гл. 5, § 27, п. 7], прямое значение потенциала двойного слоя на поверхности Γ можно найти по формуле

$$\mathcal{W}_k[\mu](x)|_{\Gamma} = \frac{1}{2}\cdot\left[\ \mathcal{W}_k[\mu](x)|_{\Gamma^+} + \mathcal{W}_k[\mu](x)|_{\Gamma^-}\ \right].$$

Здесь поверхность Γ рассматривается как двусторонняя, через Γ^- обозначена сторона, которую мы видим, глядя навстречу вектору нормали $\mathbf{n}_y$, а через Γ^+ обозначена противоположная сторона. В формуле берутся предельные значения потенциала двойного слоя на разных сторонах Γ. Отметим, что направление единичной нормали $\mathbf{n}_y$ совпадает с направлением нормали η, т.к. вектор $\mathbf{n}_y$ получается из η в результате нормировки. Пусть теперь Γ — единичная сфера, заданная параметризацией (10), тогда формулы (2) для нормали η определяют внутреннюю нормаль на сфере, а значит, Γ^- — внутренняя сторона единичной сферы, а Γ^+ — её внешняя сторона.

В тестах точное прямое значение потенциала двойного слоя в узловых точках сравнивалось с приближенными значениями, вычисленными по квадратурным формулам — по улучшенной формуле (8) в соответствии с Теоремой и по стандартной формуле (9). В каждой узловой точке вычислялась абсолютная погрешность по обеим формулам. Вычисления проводились для разных значений M и N. Значения шагов определяются формулами $h = 2\pi/N, H = \pi/M$. Если $N/2 = M = 25$, то $h = H \approx 0.13$; если $N/2 = M = 50$, то $h = H \approx 0.063$; если $N/2 = M = 100$, то $h = H \approx 0.031$. В таблице для каждого теста приводится максимум абсолютной погрешности вычислений по всем узловым точкам сферы. В первой строке таблицы указаны значения N, M, в последующих строках — максимальные погрешности для стандартной и улучшенной квадратурных формул в каждом тесте.

Для тестирования квадратурных формул в случае уравнений Лапласа и Гельмгольца были использованы различные плотности в потенциале. Для каждой заданной в тестах плотности известно аналитическое выражение потенциала двойного слоя и его прямого значения на единичной сфере. При этом через φ и ϑ обозначаются азимутальный и зенитный углы в сферических координатах с началом в центре сферы. В случае уравнения Гельмгольца, значение k выбиралось равным единице.

Тест 1. Плотность потенциала $\mu(y(u,v)) = 1$,

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1 \\ 0 & \text{при } |x| > 1 \end{cases}, \qquad \mathcal{W}_0[\mu](x)|_{|x|=1} = \frac{1}{2}\,.$$

Тест 2. Плотность потенциала $\mu(y(u,v)) = \cos u \sin v$,

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \begin{cases} \dfrac{2|x|\cos\varphi\sin\vartheta}{3} & \text{если } |x| < 1, \\ -\dfrac{\cos\varphi\sin\vartheta}{3|x|^2} & \text{если } |x| > 1. \end{cases}, \quad \mathcal{W}_0[\mu](x)|_{|x|=1} = \frac{\cos\varphi\sin\vartheta}{6}.$$

Тест 3. Плотность потенциала $\mu(y(u,v)) = (3\cos^2 v - 1)/2$,

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \begin{cases} \dfrac{3|x|^2(3\cos^2\vartheta - 1)}{10}, & |x| < 1 \\ -\dfrac{3\cos^2\vartheta - 1}{5|x|^3}, & |x| > 1 \end{cases}, \quad \mathcal{W}_0[\mu](x)|_{|x|=1} = \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{20}.$$

Тест 4. Плотность потенциала $\mu(y(u,v)) = k$,

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \begin{cases} (1-ik)\exp(ik)\,\dfrac{\sin(k|x|)}{|x|} & \text{если } |x| < 1, \\ (\sin k - k\cos k)\,\dfrac{\exp(ik|x|)}{|x|} & \text{если } |x| > 1, \end{cases},$$

$$\mathcal{W}_k[\mu](x)|_{|x|=1} = \frac{1}{2}\left((2-ik)\sin k - \cos k\right)\exp(ik).$$

Таблица 1 – Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тестах 1 — 4.

номер теста	квадратурная формула	$M = N/2 = 25$	$M = N/2 = 50$	$M = N/2 = 100$
1	стандартная	0.019	0.0097	0.0062
1	улучшенная	0.012	0.0063	0.0032
2	стандартная	0.019	0.0097	0.0049
2	улучшенная	0.00050	0.00014	3.8E-5
3	стандартная	0.011	0.0089	0.0062
3	улучшенная	0.011	0.0060	0.0031
4	стандартная	0.019	0.0097	0.0062
4	улучшенная	0.012	0.0063	0.0032

Результаты расчетов в приведенных тестовых примерах показывают, что улучшенная квадратурная формула имеет первый порядок сходимости, в то время как стандартная формула сходится медленнее. Погрешность вычислений по улучшенной квадратурной формуле, предложенной в Теореме, меньше, чем погрешность вычислений по стандартной квадратурной формуле. Тем самым, улучшенная квадратурная формула обеспечивает более высокую точность вычислений прямого значения потенциала двойного слоя.

Отметим, что в тестовых примерах погрешность вычислений по улучшенной квадратурной формуле возрастает к полюсам сферам, которые являются особыми точками в силу выбранной параметризации (10). Вычисления по улучшенной квадратурной формуле в тесте 2 показывают более высокую точность, т.к. плотность в потенциале двойного слоя и его прямое значение обращаются в нуль на полюсах сферы.

Улучшенная квадратурная формула может найти применение при численном решении граничных интегральных уравнений, возникающих в процессе решения краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом потенциалов.

Список литературы

1. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995.
3. Сетуха А.В. Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения. М.: Аргамак-медиа, 2016.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
5. Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В. Квадратурная формула для потенциала простого слоя. // Дифференциальные уравнения, 2019, т. 55, N 9, с. 1269 — 1284.
6. Крутицкий П.А., Резниченко И.О. Квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя. // Дифференциальные уравнения, 2021, т. 57, N 7, с. 932 — 950.
7. Крутицкий П.А., Резниченко И.О., Колыбасова В.В. Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя. // Дифференциальные уравнения, 2020, т. 56, N 9, с. 1270 — 1288.
8. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. — М.: Физматлит, 2000.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 1981

УДК 517.547

Соломатин Олег Дмитриевич
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

ЗАДАЧА КОШИ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕЩЕСТВЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ С ТОПОЛОГИЕЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ НА КОМПАКТАХ

Аннотация. *В статье рассматривается задача Коши в пространстве вещественно-аналитических функций в полуплоскости с топологией равномерной сходимости на компактах. Исследуется полученное решение рассматриваемого уравнения.*

Ключевые слова: *задача Коши, пространство вещественно-аналитических функций в полуплоскости, дифференциально-операторное уравнение, оператор сдвига по переменной.*

Solomatin Oleg Dmitrievich
Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations,
Orel State University,
Russia, Orel

THE CAUCHY PROBLEM IN THE SPACE OF REAL-ANALYTIC FUNCTIONS IN A HALF-PLANE WITH A UNIFORM CONVERGENCE TOPOLOGY ON COMPACTS

Abstract. *The article considers the Cauchy problem in the space of real-analytic functions in a half-plane with a topology of uniform convergence on compacts. The obtained solution of the equation under consideration is investigated.*

Keywords: *Cauchy problem, space of real-analytic functions in a half-plane, differential operator equation, variable shift operator.*

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = a \cdot \frac{\partial^2 u(x,y,z+1)}{\partial y \partial z}; \quad u(0,y,z) = \frac{1}{1+y+z}; \quad \left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=0} = 0; \quad k = 1,2,3,4.$$

Решение. Порядок $m = 5; \quad x_0 = \frac{1}{1+y+z}; \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Оператор $Au(x,y,z) = a \cdot \frac{\partial^2 u(x,y,z+1)}{\partial y \partial z}$ представляет произведение двух, коммутирующих друг с другом операторов – оператора сдвига по переменной z на 1 и оператора $a\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$. Оба оператора и их произведение действуют и являются линейными и непрерывными в пространстве H_0 вещественно-аналитических функций в полуплоскости: $y > 0, z > 0$ (топология равномерной сходимости на компактах).

Решение представляется в виде $[2]$:

$$u(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n\left(\frac{1}{1+y+z}\right)}{(5n)!} x^{5n}.$$

Рассмотрим, как действует оператор на функцию $x_0 = \frac{1}{1+y+z}$.

$$A^0\left(\frac{1}{1+y+z}\right) = \frac{1}{1+y+z} = (1+y+z)^{-1},$$

$$A^1\left(\frac{1}{1+y+z}\right) = a\left((2+y+z)^{-1}\right)''_{yz} = a(-1)\left((2+y+z)^{-2}\right)'_z =$$

$$= a(-1)(-2)(2+y+z)^{-3} = 2a(2+y+z)^{-3},$$

$$A^2\left(\frac{1}{1+y+z}\right) = 2a^2\left((3+y+z)^{-3}\right)''_{yz} = 2a^2(-3)\left((3+y+z)^{-4}\right)'_z =$$

$$= 2a^2(-3)(-4)(3+y+z)^{-5} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^2(3+y+z)^{-5},$$

$$A^3\left(\frac{1}{1+y+z}\right) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^3\left((4+y+z)^{-5}\right)''_{yz} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^3(-5)\left((4+y+z)^{-6}\right)'_z = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^3(-5)(-6)(4+y+z)^{-7} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot a^3(4+y+z)^{-7},$$

$$A^4\left(\frac{1}{1+y+z}\right) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot a^4\left((5+y+z)^{-7}\right)''_{yz} =$$

$$= 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot a^4(-7)\left((5+y+z)^{-8}\right)'_z = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot a^4(5+y+z)^{-9}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^n\left(\frac{1}{1+y+z}\right) = (2n)!a^n\left(\frac{1}{y+z+n+1}\right)^{2n+1}.$$

Запишем решение в более краткой форме:

$$u(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n x^{5n}}{(5n)!}\frac{\partial^{2n}}{\partial y^n \partial z^n}\left(\frac{1}{n+1+y+z}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+y+z} + \frac{2ax^5}{(2+y+z)^3} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot a^2 x^{10}}{(3+y+z)^5} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n(2n)!}{(5n)!}\frac{x^{5n}}{(y+z+n+1)^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n x^{5n}}{C_{5n}^{2n}(y+z+n+1)^{2n+1}}.$$

Итак, $u(x) = u(x,y,z)$ – целая векторнозначная функция со значениями в пространстве H_0, то есть $\forall x \in C \to u(x) \in H_0$.

Можно вычислить характеристики роста этой функции [1]:

$\rho(u) = 1$ – порядок роста, $\sigma(u) = \frac{5^5}{4e^3}$ – тип роста.

Список литературы

1. Громов В.П. Целые векторнозначные функции со значениями в локально выпуклом пространстве и их применение. Ученые записки лаборатории теории функций и функционального анализа ОГУ. Выпуск 4. – Орел: ГОУ ВПО «ОГУ», 2003, с. 4-24.

2. Соломатин О.Д., Ломакин Д.Е., Можарова Т.Н. К вопросу о структуре решений дифференциально-операторных уравнений в линейных топологических пространствах // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXI (3-9 мая 2020 г.) / Воронежский государственный университет; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Математический институт имени В.А. Стеклова РАН. – Воронеж: АНО «Наука-Юнипресс», 2020. – с. 188-189.

УДК 517.547

Соломатин Олег Дмитриевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

ЗАДАЧА КОШИ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ И БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ В ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ

Аннотация. *В статье рассматривается задача Коши в пространстве функций, определенных и бесконечно дифференцируемых в односвязной области на плоскости.*

Ключевые слова: *задача Коши, дифференциальное уравнение в частных производных, операторный метод.*

Solomatin Oleg Dmitrievich
Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor,
Oryol State University named after I.S. Turgenev,
Russia, Orel

THE CAUCHY PROBLEM IN THE FUNCTION SPACE, DEFINED AND INFINITELY DIFFERENTIABLE IN A SIMPLY CONNECTED DOMAIN ON A PLANE

Abstract. *The article considers the Cauchy problem in the space of functions defined and infinitely differentiable in a simply connected domain on the plane.*

Keywords: *Cauchy problem, partial differential equation, operator method.*

Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + zxy^2,\ a \in R;\quad u(0,y,z) = \frac{z^2+2}{1+y} = x_0;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{z}{1-y} = x_1.$$

Оператор $A = a\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ определен на начальных функциях.

Решение уравнения представляется в виде:

$$u(x,y,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n(x_0)}{(2n)!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n(x_1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(x-\varsigma)^{2n+1}}{(2n+1)!}A^n f(\varsigma)d\varsigma.$$

Преобразуем слагаемые указанного решения.

Первое слагаемое.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}a^n\left(\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}+\frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}}\right)\left(\frac{z^2+2}{1+y}\right)=\frac{z^2+2}{1+y}+\frac{2\left(z^2+2\right)2ax^2}{(1+y)^3 2!}+\frac{2ax^2}{(1+y)2!}+$$

$$+\frac{a^2x^4}{4!}\frac{\left(z^2+2\right)\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1+y)^5}+\frac{a^3x^6}{6!}\frac{\left(z^2+2\right)\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{(1+y)^7}+\ldots+\frac{a^nx^{2n}\left(z^2+2\right)(2n)!}{(2n)!(1+y)^{2n+1}}+$$

$$+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^nx^{2n}(2n)!\left(z^2+2\right)}{(2n)!(1+y)^{2n+1}}+\frac{2ax^2}{(1+y)2!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^nx^{2n}\left(z^2+2\right)}{(1+y)^{2n+1}}+\frac{ax^2}{1+y}=$$

$$=\frac{ax^2}{1+y}+\frac{z^2+2}{1+y}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{ax^2}{(1+y)^2}\right)^n=\frac{ax^2}{1+y}+\frac{z^2+2}{1+y}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{ax^2}{(1+y)^2}}=$$

$$=\frac{ax^2}{1+y}+\frac{\left(z^2+2\right)(1+y)}{(1+y)^2-ax^2}.$$

Второе слагаемое.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}a^n\left(\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}+\frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}}\right)\left(\frac{z}{1-y}\right)=$$

$$=\frac{zx}{1-y}+\frac{ax^3}{3!}\frac{2!}{(1-y)^3}+\frac{a^2zx^5}{5!}\frac{4!}{(1-y)^5}+\ldots+\frac{za^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{(2n)!}{(1-y)^{2n+1}}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{za^nx^{2n+1}(2n)!}{(2n+1)!(1-y)^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{za^nx^{2n+1}}{(2n+1)(1-y)^{2n+1}}=\frac{z}{1-y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\int_0^x\varsigma^{2n}d\varsigma}{(1-y)^{2n}}=$$

$$=\frac{z}{1-y}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\left(\frac{a\varsigma^2}{(1-y)^2}\right)^n d\varsigma=\frac{z}{1-y}\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a\varsigma^2}{(1-y)^2}\right)^n\right]d\varsigma=$$

$$=\frac{z}{1-y}\int_0^x\frac{(1-y)^2\,d\varsigma}{(1-y)^2-a\varsigma^2}=\begin{cases}\dfrac{z}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a}x+(1-y)}{\sqrt{a}x-(1-y)}\right|, & a>0,\\ z\cdot arctg\dfrac{\sqrt{-a}x}{1-y}, & a<0.\end{cases}$$

Преобразуем третье слагаемое.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(x-\varsigma)^{2n+1}}{(2n+1)!}a^n\left(\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}+\frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}}\right)\left(\varsigma zy^2\right)d\varsigma=$$

$$= \int_0^x (x-\varsigma)\varsigma z y^2 d\varsigma + \frac{2a}{3!}\int_0^x (x-\varsigma)^3 \varsigma d\varsigma =$$

$$= zy^2\left(\frac{x^3}{2} - \frac{\varsigma^3}{3}\right) + \frac{a}{3}\int_0^x \left(x^3\varsigma - 3x^2\varsigma^2 + 3\varsigma^3 x - \varsigma^4\right) d\varsigma =$$

$$= \frac{zy^2x^3}{3!} + \left(\frac{x^5}{2} - x^5 + \frac{3}{4}x^5 - \frac{x^5}{5}\right)\frac{a}{3} = \frac{y^2zx^3}{6} + \frac{ax^5}{60}.$$

Таким образом, решение запишется в виде

$$u(x,y,z) = \frac{ax^2}{1+y} + \frac{\left(z^2+2\right)(1+y)}{(1+y)^2 - ax^2} + z(1-y)\int_0^x \frac{d\varsigma}{(1-y)^2 - a\varsigma^2} +$$

$$+ \frac{y^2zx^3}{6} + \frac{ax^5}{60},$$

где

$$z(1-y)\int_0^x \frac{d\varsigma}{(1-y)^2 - a\varsigma^2} = \begin{cases} \dfrac{z}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a}x + 1 - y}{\sqrt{a}x - 1 + y}\right|, & a > 0, \\ z \cdot arctg\dfrac{\sqrt{-a}x}{1-y}, & a < 0. \end{cases}$$

Список литературы

1. Громов В.П. Целые векторнозначные функции со значениями в локально выпуклом пространстве и их применение. Ученые записки лаборатории теории функций и функционального анализа ОГУ. Выпуск 4. – Орел: ГОУ ВПО «ОГУ», 2003, с. 4-24.

УДК 519.6+517.2

Халилов Эльнур Гасан оглы
доктор математических наук, профессор,
Азербайджанский государственный университет
нефти и промышленности,
Азербайджан, Баку

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ПРОСТОГО И ДВОЙНОГО СЛОЕВ

Аннотация. *Построены квадратурные формулы для потенциалов простого и двойного слоев и даны оценки погрешностей построенных квадратурных формул.*

Ключевые слова: *квадратурные формулы, потенциал простого слоя, потенциал двойного слоя, функция Ханкеля, криволинейный интеграл, кривая Ляпунова.*

Khalilov Elnur Hasan oglu
Doctor of mathematical sciences, Professor,
Azerbaijan State Oil and Industry University,
Azerbaijan, Baku

QUADRATURE FORMULAS FOR SINGLE AND DOUBLE LAYER POTENTIALS

Abstract*. We construct quadrature formulas for the potentials of simple and double layers, and give estimates of the errors of the constructed quadrature formulas.*

Keywords*: quadrature formulas, potential of a simple layer, potential of a double layer, Hankel function, curvilinear integral, Lyapunov curve.*

1. Введение

Как известно, разыскивая решение краевых задач для уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в двумерном пространстве в виде комбинации потенциалов простого и двойного слоев, эти задачи приводятся к криволинейному интегральному уравнению, зависящему от операторов

$$(S\rho)(x) = 2\int_L \Phi(x,y)\rho(y)dL_y, \quad x=(x_1,x_2)\in L, \tag{1}$$

и

$$(K\rho)(x) = 2\int_L \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)}\rho(y)dL_y, \quad x=(x_1,x_2)\in L. \tag{2}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, k – волновое число, причем $\mathrm{Im}k \geq 0$, $L \subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова, $\rho(y)$ – непрерывная функция на кривой L, $\nu(y)$ – внешняя единичная нормаль в точке $y \in L$, $\Phi(x,y)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-y|} & при\ \ k=0, \\ \dfrac{i}{4}H_0^{(1)}\left(k|x-y|\right) & при\ \ k\neq 0, \end{cases}$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, определяемая формулой $H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + i\,N_0(z)$,

$$J_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

– функция Бесселя нулевого порядка,

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)J_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

– функция Неймана нулевого порядка, а $C = 0.57721...$ – постоянная Эйлера.

Отметим, что во многих случаях невозможно найти точное решение полученных интегральных уранений. Поэтому возникает интерес исследовать приближенные решения этих интегральных уранений методом коллокации, а для этого сначала надо построить квадратурные формулы для потенциалов простого и двойного слоев. Следует указать, что в работе [1] построена квадратурная формула для логарифмических потенциалов простого и двойного слоев, а в работе [2] построена квадратурная формула для потенциалов простого и двойного слоев (т.е. при $k=0$). Однако в работе [2] для построения квадратурных формул использована асимптотическая формула для функций Ханкеля первого рода нулевого порядка, которая не дает возможность определить скорость сходимости этих

квадратурных формул. Следовательно, имеет важное значение построение квадратурных формул для потенциалов простого и двойного слоев более практичным способом.

Настоящая работа посвящена к построению квадратурной формулы для интегралов (1) и (2) при $k \neq 0$.

2. Основные результаты

Предположим, что кривая L задана параметрическим уравнением $x(t) = (x_1(t), x_2(t)),\ t \in [a,b]$.

Разобьем промежуток $[a,b]$ на $n > 2M_0(b-a)/d$ равных частей: $t_p = a + \dfrac{(b-a)p}{n},\ p = \overline{0,n}$, где

$$M_0 = \max_{t\in[a,b]} \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} < +\infty$$

и d – стандартный радиус. В качестве опорных точек возмем $x(\tau_p)$, $p = \overline{1,n}$, где

$$\tau_p = a + \frac{(b-a)(2p-1)}{2n}.$$

Через $C(L)$ обозначим пространство всех непрерывных функций на L с нормой $\|\rho\|_\infty = \max\limits_{x\in L} |\rho(x)|$ и для функции $\varphi(x) \in C(L)$ вводим модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi,\delta) = \max_{\substack{|x-y|\le\delta \\ x,\,y\in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|,\quad \delta > 0.$$

Пусть

$$\Phi_n(x,y) = \frac{i}{4} H_{0,n}^{(1)}(k|x-y|),\ x,y \in L,\ x \neq y,$$

где

$$H_{0,n}^{(1)}(z) = J_{0,n}(z) + i\,N_{0,n}(z),\quad J_{0,n}(z) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

и

$$N_{0,n}(z) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2} + C\right) J_{0,n}(z) + \sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$\frac{\partial \Phi_n(x,y)}{\partial \nu(y)} = \frac{i}{4}\left(\frac{\partial J_{0,n}\left(k|x-y|\right)}{\partial \nu(y)} + i\frac{\partial N_{0,n}\left(k|x-y|\right)}{\partial \nu(y)} \right),$$

где

$$\frac{\partial J_{0,n}\left(k|x-y|\right)}{\partial \nu(y)} = (y-x,\nu(y))\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m k^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!m!}$$

и

$$\frac{\partial N_{0,n}\left(k|x-y|\right)}{\partial \nu(y)} = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{k|x-y|}{2} + C \right)\frac{\partial J_{0,n}\left(k|x-y|\right)}{\partial \nu(y)} +$$

$$+ \frac{2(y-x,\nu(y))}{\pi|x-y|^2} J_{0,n}\left(k|x-y|\right) +$$

$$+ (y-x,\nu(y))\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l} \right)\frac{(-1)^{m+1}k^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!m!}.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $L \subset R^2$ *– простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем* $0 < \alpha \le 1$ *и* $\rho \in C(L)$. *Тогда выражение*

$$(S_n\rho)\left(x(\tau_p)\right) = \frac{2(b-a)}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\ne p}}^{n} \Phi_n\left(x(\tau_p), x(\tau_j)\right)\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\ \rho\left(x(\tau_j)\right)$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1,n}$, *является квадратурной формулой для интеграла* (1), *причем справедливы следующие оценки:*

$$\max_{p=\overline{1,n}} \left| (S\rho)\left(x(\tau_p)\right) - (S_n\rho)\left(x(\tau_p)\right) \right| \le M^{1}\left(\omega(\rho, 1/n) + \|\rho\|_\infty \frac{1}{n^\alpha} \right) \text{при } 0 < \alpha < 1,$$

$$\max_{p=\overline{1,n}} \left| (S\rho)\left(x(\tau_p)\right) - (S_n\rho)\left(x(\tau_p)\right) \right| \le M\left(\omega(\rho, 1/n) + \|\rho\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right) \text{при } \alpha = 1.$$

Теорема 2. *Пусть* $L \subset R^2$ *– простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем* $0 < \alpha \le 1$ *и* $\rho \in C(L)$. *Тогда выражение*

$$(K_n\rho)\left(x(\tau_p)\right) = \frac{2(b-a)}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\ne p}}^{n} \frac{\partial \Phi_n\left(x(\tau_p), x(\tau_j)\right)}{\partial \nu\left(x(\tau_j)\right)}\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\ \rho\left(x(\tau_j)\right)$$

[1] Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p=\overline{1,n}$, *является квадратурной формулой для интеграла* (2), *причем справедлива следующая оценка*

$$\max_{p=\overline{1,n}}\left|(K\rho)(x(\tau_p))-(K_n\rho)(x(\tau_p))\right| \le M\left(\omega(\rho,1/n)+\|\rho\|_\infty \frac{\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Список литературы

1. Khalilov, E. H., Bakhshaliyeva, M.N. Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials / E.H. Khalilov, M.N. Bakhshaliyeva // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. — 2019. — V.45. — № 1. — P. 155-162.
2. Kress, R. Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering / R. Kress // Mathematical and Computer Modeling. — 1991. — V.15. — № 3–5. — P. 229–243.

Алгебра, топология и геометрия

УДК 515.12

Батуров Дмитрий Петрович
доцент кафедры технической физики и математики,
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, Орел

О НАСЛЕДСТВЕННО НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ВЛОЖЕНИЯХ В ПЛОТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Аннотация. *Мы рассматриваем следующий вопрос. Пусть Y — наследственно нормальное пространство. Можно ли вложить Y в наследственно нормальное плотное подпространство произведения вещественных прямых?*

Ключевые слова: *наследственно нормальное пространство, вложение, плотное подпространство, топологическое произведение.*

Baturov Dmitrii
Associate Professor of the Department of Technical Physics and Mathematics,
Orel State University,
Russia, Orel

ON HEREDITARILY NORMAL SPACES AND THEIR EMBEDDINGS IN DENSE SUBSPACES OF PRODUCTS

Abstract. *We consider the following question. Let Y be a hereditarily normal space. Can Y be embedded in a hereditarily normal dense subspace of a product of real lines?*

Keywords: *hereditarily normal space, embedding, dense subspace, topological product.*

В работе [2] доказывается, что в предположении $2^{\aleph_0} = 2^\tau$ для любого нормального пространства Y веса $\leq \tau$ существует нормальное плотное подпространство $Z \subset \mathbf{R}^{2^{\aleph_0}}$ такое, что Y гомеоморфно замкнутому подпространству пространства Z [2, Теорема 1]. В настоящей статье будет доказано, что аналогичное утверждение для случая, когда Y наследственно нормально, неверно: существует наследственно нормальное пространство веса $\aleph_1$, которое нельзя вложить в наследственно нормальное плотное подпространство произведения вещественных прямых. Мы также докажем, что в предположении $2^{\aleph_0} = 2^\tau$ любое наследственно нормальное пространство веса $\leq \tau$, в котором канонически

замкнутые подмножества имеют тип G_δ, вкладывается в наследственно нормальное плотное подпространство произведения $\mathbf{R}^{2^{\aleph_0}}$.

Напомним, что подмножество F топологического пространства Y называется канонически замкнутым, если F является замыканием открытого подмножества пространства Y.

Л е м м а 1. Если Z — плотное подпространство произведения $\mathbf{R}^X$, то любое канонически замкнутое подмножество Z имеет тип G_δ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F — канонически замкнутое подмножество Z. Поскольку Z плотно в $\mathbf{R}^X$, существует открытое в $\mathbf{R}^X$ множество U такое, что $F = \overline{U} \cap Z$. Рассмотрим максимальное дизъюнктное семейство $\mathcal{E}$ открытых подмножеств множества U, каждое из которых имеет вид $\pi_K^{-1}(V)$, где $K \subset X$, K конечно, π_K — проекция $\mathbf{R}^X$ на $\mathbf{R}^K$. Из максимальности $\mathcal{E}$ следует, что $\overline{U} = \overline{\bigcup \mathcal{E}}$.

Так как $\mathbf{R}^X$ имеет свойство Суслина, $\mathcal{E}$ не более чем счетно:

$$\mathcal{E} = \{\pi_{K_n}^{-1}(V_n) : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Обозначим $S = K_1 \cup K_2 \cup \ldots$, тогда $\overline{\bigcup \mathcal{E}} = \pi_S^{-1}(\pi_S(\overline{\bigcup \mathcal{E}}))$, $\pi_S(\overline{\bigcup \mathcal{E}})$ — замкнутое подмножество произведения $\mathbf{R}^S$, имеющего счетный вес, поэтому $\pi_S(\overline{\bigcup \mathcal{E}})$ имеет тип G_δ в $\mathbf{R}^S$, тогда $\pi_S^{-1}(\pi_S(\overline{\bigcup \mathcal{E}}))$ имеет тип G_δ в $\mathbf{R}^X$. Лемма доказана.

В работе [3] доказано, что если Z — наследственно нормальное пространство и канонически замкнутые подмножества Z имеют тип G_δ, то в любом подпространстве $Y \subset Z$ канонически замкнутые подмножества также имеют тип G_δ.

Пусть теперь B — подмножество Бернштейна в $\mathbf{R}$, т.е. B несчетно, B плотно в $\mathbf{R}$ и $F \setminus B \neq \emptyset$ для любого несчетного замкнутого $F \subset \mathbf{R}$ [4, Задача 5.5.4]. Возьмем какое-нибудь плотное в $\mathbf{R}$ счетное подмножество $B_0 \subset B$ и $B_1 \subset B \setminus B_0$, $|B_1| = \aleph_1$. Пусть $\mathbf{R}^*$ — пространство, которое получается из $\mathbf{R}$, если все точки множества $B_0 \cup B_1$ положить изолированными (т.е. открытые в $\mathbf{R}^*$ подмножества имеют вид $U \cup A$, где U — открытое подмножество в $\mathbf{R}$, $A \subset B_0 \cup B_1$). Тогда $\mathbf{R} \setminus B_1$ — канонически замкнутое подмножество $\mathbf{R}^*$, т.к. оно является замыканием открытого в $\mathbf{R}^*$ множества B_0.

Л е м м а 2. Множество $\mathbf{R} \setminus B_1$ не имеет тип G_δ в $\mathbf{R}^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $B_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ и каждое F_n замкнуто в $\mathbf{R}^*$, тогда для любого n замыкание множества F_n в топологии $\mathbf{R}$ содержится в $B_0 \cup B_1$, т.е. не пересекается с $\mathbf{R} \setminus B$. Но поскольку $|B_1| = \aleph_1$, существует n_0, для которого $|F_{n_0}| = \aleph_1$, тогда замыкание F_{n_0} в топологии $\mathbf{R}$ должно пересекаться с $\mathbf{R} \setminus B$ — противоречие. Лемма доказана.

Таким образом, $\mathbf{R}^*$ — наследственно нормальное (и даже наследственно паракомпактное [4, Пример 5.1.22]) пространство, которое нельзя гомеоморфно вложить в наследственно нормальное плотное подпространство произведения вещественных прямых.

Следующая лемма доказывается так же, как Лемма 3.3 из [5] (определения простого множества и большого множества даны в [5]).

Л е м м а 3. Пусть X — несчетное сепарабельное полное метрическое пространство. Существуют подмножества $P_n \subset X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такие, что

1) $P_i \cap P_j = \emptyset$ для любых различных i и j,

2) множество $X^* = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ имеет мощность $2^{\aleph_0}$,

3) $P_{s_1} \times \ldots \times P_{s_m} \cap \overline{E} \neq \emptyset$ для любого простого большого подмножества $E \subset X^m$ и любого набора $(s_1, \ldots, s_m) \in \mathbf{N}^m$.

Докажем теперь теорему, аналогичную Теореме 1 из [2].

Т е о р е м а 4. Пусть τ — бесконечный кардинал. Следующие условия равносильны.

1) $2^{\aleph_0} = 2^{\tau}$.

2) Для любого наследственно нормального пространства Y веса $\leq \tau$, в котором канонически замкнутые подмножества имеют тип G_δ, существует наследственно нормальное плотное подпространство $Z \subset \mathbf{R}^{2^{\aleph_0}}$ такое, что Y гомеоморфно подпространству пространства Z.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так же, как в доказательстве Теоремы 1 из [2], импликация $(2) \to (1)$ следует из результата Толла [6, Следствие 2.3]: если $2^{\aleph_0} < 2^{\tau}$, то никакое наследственно нормальное плотное подпространство $Z \subset \mathbf{R}^{2^{\aleph_0}}$ не может содержать дискретное подпространство D мощности τ (иначе мы получили бы нормальное пространство $Z_1 = (Z \setminus \overline{D}) \cup D$ со свойством Суслина, для которого $\chi(Z_1) \leq 2^{\aleph_0}$ и $e(Z_1) \geq \tau$).

Докажем $(1) \to (2)$. Пусть Y — наследственно нормальное пространство веса $\leq \tau$, все канонически замкнутые подмножества Y имеют тип G_δ, $X = [0, 1]$ — единичный отрезок, тогда $C_p(X)$ — плотное подпространство $\mathbf{R}^X$. Построим гомеоморфное вложение $\phi : Y \to \mathbf{R}^X$, для которого $Z = \phi(Y) \cup C_p(X)$ наследственно нормально.

Пусть $X^*, P_1, P_2, \ldots$ — подмножества X, для которых выполняются условия (1)–(3) Леммы 3. Поскольку $w(Y) \leq \tau$, множество $C(Y)$ всех непрерывных вещественных функций на Y имеет мощность $\leq 2^{\tau}$ и, по предположению, $2^{\tau} = 2^{\aleph_0}$, поэтому можно рассмотреть отображение λ множества X^* на $C(Y)$.

Пусть $\mathbf{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ — множество рациональных чисел. Зададим ϕ следующим образом: каждой точке $y \in Y$ поставим в соответствие вещественную функцию f_y, определенную на X, для которой

$$f_y(x) = \begin{cases} q_i \text{ если } x \in P_i, \\ \lambda(x)(y) \text{ если } x \in X^*. \end{cases}$$

Тогда

а) ϕ — гомеоморфное вложение Y в $\mathbf{R}^X$,

б) $\overline{\phi(Y)} \cap C_p(X) = \emptyset$,

в) $\phi(Y) \cup C_p(X)$ наследственно нормально.

Условия (а) и (б) доказываются так же, как аналогичные условия в доказательстве Теоремы 1 из [2]. Докажем (в).

Пусть A и B — отделенные подмножества в $\phi(Y) \cup C_p(X)$, $A_1 = A \cap \phi(Y)$, $A_2 = A \cap C_p(X)$, $B_1 = B \cap \phi(Y)$, $B_2 = B \cap C_p(X)$. Существует семейство $\mathcal{U}$ открытых подмножеств $\mathbf{R}^X$, для которого $A_1 \subset \bigcup \mathcal{U}$, $B_2 \cap \bigcup \mathcal{U} = \emptyset$ и каждое множество из $\mathcal{U}$ имеет вид

$$W(x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n) = \left\{ f \in \mathbf{R}^X : f(x_i) \in O_i, i = 1, \ldots, n \right\},$$

где O_i — интервалы с рациональными концами, точки $x_1, \ldots, x_n$ попарно различны (будем называть такие подмножества в $\mathbf{R}^X$ базисными).

Далее будем писать $W(x; O)$ вместо $W(x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка из X^n, $O = O_1 \times \ldots \times O_n$ — открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Мжно представить $\mathcal{U}$ в виде $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \ldots$, где для всех множеств $W(x; O) \in \mathcal{U}_r$ натуральное число $n = n_r$ и открытое множество $O = O(r) = O_1(r) \times \cdots \times O_{n_r}(r)$ одни и те же. Положим

$$E_r = \{ x \in X^{n_r} : W(x; O(r)) \in \mathcal{U}_r \}.$$

Можно представить $E_r \subset X^{n_r}$ в виде $E_r = \bigcup_{d=1}^{\infty} E_{rd}$, где каждое E_{rd} удовлетворяет условию (ii) Леммы 2.3 [5] для $n = n_r$. Положим

$$\mathcal{U}_{rd} = \{ W(x; O(r)) : x \in E_{rd} \},$$

тогда $\mathcal{U} = \bigcup_{r,d} \mathcal{U}_{rd}$.

Зафиксируем некоторую пару (r, d). Существует $H \subset \{1, \ldots, n_r\}$, для которого $\pi_H(E_{rd})$ — большое подмножество X^H (если $H \neq \emptyset$) и $\pi_i(E_{rd}) = \{\widetilde{x}_i\}$ для любого $i \in L = \{1, \ldots, n_r\} \setminus H$ (см. условие (ii) Леммы 2.3 [5]). Выберем в каждом интервале $O_i(r)$ рациональное число $q_{m_i(r)}$. Поскольку $\pi_H(E_{rd})$ — большое простое подмножество X^H, существует точка $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{n_r}) \in \overline{E_{rd}}$ такая, что $\widetilde{x}_i \in P_{m_i(r)}$ для любого $i \in H$ (см. условие (3) Леммы 3), тогда $f(\widetilde{x}_i) = q_{m_i(r)} \in O_i(r)$ для любого $i \in H$ и любой $f \in \phi(Y)$, $f(\widetilde{x}_i) \in O_i(r)$ для любого $i \in L$ и любой $f \in \bigcup \mathcal{U}_{rd}$.

Итак, для каждой пары (r, d) существует точка $\widetilde{x}(r, d)$, для которой $A_1 \cap \bigcup \mathcal{U}_{rd} \subset W(\widetilde{x}(r, d); O(r))$.

Множество $W(\widetilde{x}(r, d); O(r))$ не пересекается с B_2, так как любая функция $g \in B_2$ непрерывна на X и $\widetilde{x}(r, d) = (\widetilde{x}_1(r, d), \ldots, \widetilde{x}_{n_r}(r, d)) \in \overline{E_{rd}}$, поэтому, если $g(\widetilde{x}_i(r, d)) \in O_i(r)$ для любого $i \in \{1, \ldots, n_r\}$, то существует $x' = (x'_1, \ldots, x'_{n_r}) \in E_{rd}$ такая, что $g(x'_i) \in O_i(r)$ для любого $i \in \{1, \ldots, n_r\}$, т.е. $g \in W(x'; O(r))$, что невозможно, так как $W(x'; O(r)) \in \mathcal{U}$ и $B_2 \cap \bigcup \mathcal{U} = \emptyset$. Получаем: $A_1 \subset \bigcup_{r,d} W(\widetilde{x}(r, d); O(r))$, $B_2 \cap \bigcup_{r,d} W(\widetilde{x}(r, d); O(r)) = \emptyset$.

Множества $\phi^{-1}(A_1)$ и $\phi^{-1}(B_1)$ — отделенные подмножества в Y, поэтому [3] существует функция $h \in C(Y)$ такая, что $h(\phi^{-1}(A_1)) \subset (0; +\infty)$, $h(\phi^{-1}(B_1)) \subset (-\infty; 0)$. Пусть x^* — точка из X^*, для которой $\lambda(x^*) = h$, тогда

$f(x^*) \in (0;+\infty)$ для любой $f \in A_1$ и $f(x^*) \in (-\infty;0)$ для любой $f \in B_1$. Получаем: $A_1 \subset \bigcup \mathcal{U}'$, $B \cap \bigcup \mathcal{U}' = \emptyset$, где $\mathcal{U}'$ — семейство множеств вида $W(\widetilde{x}(r,d);O(r)) \cap W(x^*;(0;+\infty))$.

Поскольку $C_p(X)$ наследственно линделефово, $A_2 \subset C_p(X)$ и $A_2 \cap \overline{B} = \emptyset$, существует счетное семейство $\mathcal{U}''$ базисных подмножеств $\mathbf{R}^X$, для которого $A_2 \subset \bigcup \mathcal{U}''$, $B \cap \bigcup \mathcal{U}'' = \emptyset$.

Итак, для любых отделенных подмножеств A, $B \subset \phi(Y) \cup C_p(X)$ существует счетное семейство $\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}' \cup \mathcal{U}''$ базисных подмножеств $\mathbf{R}^X$, для которого $A \subset \bigcup \widetilde{\mathcal{U}}$ и $B \cap \bigcup \widetilde{\mathcal{U}} = \emptyset$, поэтому $Z = \phi(Y) \cup C_p(X)$ — наследственно нормальное пространство [1, Лемма 8.1]. Теорема доказана.

Список литературы

1. Архангельский А. В., Ткачук В. В. Пространства функций и топологические инварианты. — М.: Изд-во МГУ. — 1985. — 87 с.
2. Батуров Д. П. О вложениях в плотные подпространства произведений // Современные проблемы физико-математических наук / материалы VI Всероссийской научно-практической конференции: научное электронное издание [Электронный ресурс] // под ред. Т. Н. Можаровой.— Орел: ОГУ им. И. С. Тургенева, 2020. — С. 114–116.
3. Щепин Е. В. О топологических произведениях, группах и новом классе пространств более общих, чем метрические // Докл. АН СССР. — 1976. — т. 226. — С. 527–529.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир. — 1986. — 752 с.
5. Baturov D. P. On perfectly normal dense subspaces of products // Topol. Appl. — 2007. — V. 154. — P. 374–383.
6. Tall F. D. Normality versus collectionwise normality // K. Kunen, J. E. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984. –P. 685–732.

УДК 515.142.5

Дергачев Виктор Михайлович
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики,
Московский политехнический университет,
Россия, Москва

Лелявин Сергей Никитович
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики,
Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана,
Россия, Москва

БЕСКОНЕЧНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ *K* ТЕОРИЯ

Аннотация. *На языке симплициальных множеств проводится построение симплициальных аналогов многообразий Грассмана и Штифеля для ассоциативного кольца. Алгебраический Грассманиан дает возможность более обозримо представить К-теорию как классы алгебраических К функторов.*

Ключевые слова: *категория, симплициальные комплексы, подалгебры, эндоморфизм, морфизмы, многообразия Грассмана и Штифеля, ретракция, флаг, к – функтор.*

Dergachev Victor Mikhailovich
candidate of physical and mathematical sciences,
associate professor,associate professor of higher mathematics,
Moscow Polytechnic University,
Russia, Moscow

Lelyavin Sergey Nikitovich
candidate of physical and mathematical sciences,
associate professor of higher mathematics,
Moscow State Technical University
named after N. E. Bauman,
Russia, Moscow

INFINITE ALGEBRAIC *K* TO THEORY

Abstract. *In the language of simplicial sets, the construction of simplicial analogues of Grassman and Stifel manifolds for the associative ring is carried out A The algebraic Grassmanian makes it possible to more visually imagine theory as classes of algebraic K functionators .*

Keywords: *category, simplicial complexes, subalgebras, endomorphism, morphisms, Grassman and Stifel manifolds, retraction, flag, K- functiontor.*

Для решения различных задач алгебраической и дифференциальной топологии полезно иметь конструкцию универсального объекта в алгебраической *K*-теории, аналогичного традиционному многообразию Грассмана, т.е. классифицирующего пространства.

Оказывается, что для любого ассоциативного кольца A можно определить классические аналоги многообразий Грассмана и Штифеля на языке симплициальных множеств, построенных на свободных и проективных модулях над этим кольцом, которые названы соответственно Грассманианом и Штифелем. Получающееся при этом алгебраическое симплициальное множество Штифеля слабо гомотопически тривиально, а естественная проекция Штифеля на Грассманиан является универсальным расслоением, слоем которого является симплициальный комплекс полной матричной группы над тем же кольцом A.

Конструкция алгебраического Грассманиана дает возможность более обозримо представить алгебраическую K- теорию как классы алгебраических *K* функторов Атьи–Милнора $K^0(A)$, $K^1(A)$, $K^2(A)$ ..., что позволяет построить всю их бесконечную цепочку.

Воспользуемся понятиями и определениями работы [5,11-14].
В работе [3,20-22] доказано утверждение, которое будет необходимо при доказательстве теоремы 2.

Утверждение. Пусть $p: E \to B$ отображение симплициальных множеств такое, что для всякого симплекса σ^n и отображения: $g_0: St(\sigma_1^n) \to E$ -«утолщения» стакана $St(\sigma_1^n)$ в симплициальное множество E , ($p \circ g_0 = f_{|_{St(\sigma_1^n)}}$, $St(\sigma_1^n)$-ограничение отображения f на подмножество $St(\sigma_1^n)$) существует отображение: $g: \sigma_1^n \to E$, что $p \circ g_0 = f$ тогда для отображения p имеется точная последовательность пары:... $\longrightarrow \pi_i(F) \longrightarrow \pi_i(E) \longrightarrow \pi_i(E,F) \longrightarrow \pi_{i-1}(F) \longrightarrow$

$\pi_{i-1}(F) \longrightarrow \cdots$, где F- симплициальное подмножество в E являющейся прообразом из E [3,20-22].

Теорема 1. Существует симплициальное вложение: W: $K_n(\sigma_G^l) \otimes \gamma^3 \longrightarrow K_{2n}(\sigma_G^l)$ такое, что

$$W\cdot g_0(B_G^1) = \begin{pmatrix} B_j & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}, W \cdot g_3(B_j^1) = \begin{pmatrix} B_j & 0 \\ 0 & B_j^1 \cdot B_j^{-1} \end{pmatrix}, j = 1, \dots, l,$$

$W\cdot (1_n \otimes \gamma^3)$ задается путем из одномерных симплексов следующего вида: $1_{2n} \cdot \begin{pmatrix} 1_n & 1_n \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ -1_n & 1_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_n & 1_n \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$,

$$W\cdot g_0(\hat{A}_0) = \begin{pmatrix} \hat{A}_0 & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}, W\cdot g_0(\hat{A}_j) = \begin{pmatrix} \hat{A}_j & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix},$$

$$W\cdot g_3(\hat{A}_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{A}_0 \\ 1_n & 1_n \end{pmatrix}, W\cdot g_3(\hat{A}_j) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}_j \cdot B_j^{-1} \\ -B_j & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{A}_0$, $\hat{A}_j$- матрицы вершин a_0^V , $a_j^V \in \sigma_V^N$ [4, 3 - 5].

Замечание. Определим симплициальное вложение комплекса $\hat{G}L(K,A) \otimes \sigma^l$ в комплекс $K_{2n}(\sigma_G^l)$.

Пусть $\sigma^l = (a_0, a_1, \dots, a_l)$ есть l- мерный геометрический симплекс, $\sigma_{GL}^m = (c_0, c_1, \dots, c_m)$ является m- мерным симплексом комплекса $\hat{G}L(K,A)$.

Рассмотрим симплекс $\sigma^l \otimes \sigma_{GL}^m$в комплексе $\hat{G}L(K,A) \otimes \sigma^l$, определяемый следующим образом: вершинами его являются пары вершин (a_i, c_j), где $a_i \in \sigma^l, c_j \in \sigma_{GL}^m$,*i=1,...l,j=1,0,1 ...,m.*

Матрицы преобразования B_i^jот вершины(a_0, c_0) к вершине (a_i, c_j) определяются по формуле: $B_i^j = \begin{pmatrix} 1+G_i & \varphi_i \\ \psi_i & 1_{n-k} \end{pmatrix}$. Вершине $(a_0, c_0) \in \sigma^l \otimes \sigma_{GL}^m$ сопоставим следующую матрицу в комплексе $K_{2n}(\sigma_G^l)$: $W\cdot g_3(a_0, c_0) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{c}_0 \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$, где $\hat{c}_0$=$\begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & 1_{n-k} \end{pmatrix}$, а вершине $(a_j, c_j) \in \sigma^l \otimes \sigma_{GL}^m$ сопоставим матрицу:

$$W\cdot g_3(a_i, c_j) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{c}_{ij} \cdot B_i^{-1} \\ -B_i & 0 \end{pmatrix},$$

где матрицы $\hat{c}_{ij}$ и B_i следующие:

$$\hat{c}_{ij} = \begin{pmatrix} c_0 \cdot (1+G_i) & c_0 \cdot \varphi_i \\ \psi_i & 1_{n-k} \end{pmatrix} = \hat{c}_0 \cdot B_i^j,$$

где 1+B_j- матрица преобразования матрицы c_0 в матрицу c_j симплекса

$$\sigma_{GL}^{m}, B_j = \begin{pmatrix} 1_k & \varphi_i \\ \psi_i & 1_{n-k} \end{pmatrix}, B_i^j = \begin{pmatrix} 1+G_i & \varphi_i \\ \psi_i & 1_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Матрице преобразования B_i^j вершины(a_0, c_0) к вершине (a_j, c_j) в симплексе $\sigma^l \otimes \sigma_{GL}^m$ сопоставим следующую матрицу перехода от вершины $W\cdot g_3(a_0, c_0)$ к вершине $W\cdot g_3(a_i, c_j)$:

$$W\cdot g_3(B_i^j) = \begin{pmatrix} B_i & 0 \\ 0 & B_i^j \cdot B_i^{-1} \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 1. : вложение вершин $W\cdot g_3(a_0, c_0)$, $W\cdot g_3(a_i, c_j)$,*i=1,…l,j=1,0,1…,m* вместе с матрицей преобразования вершин $W\cdot g_3(B_i^j)$ образуют симплекс в комплексе $K_{2n}(\sigma_G^l)$ т.е. определено симплициальное вложение комплекса $\hat{G}L(K,A) \otimes \sigma^l$ в комплекс $K_{2n}(\sigma_G^l)$: $W\cdot g_3: \hat{G}L(K,A) \otimes \sigma^l \longrightarrow K_{2n}(\sigma_G^l)$.

Итак, из теоремы 1. и замечания следует, что всякий симплекс в Штифеле $\sigma_V^N \in p^{-1}(\sigma_G^l) = K_n(\sigma_G^l)$, являющийся прообразом произвольного симплекса в Грассмане σ_G^l, с помощью гомотопии W можно преобразовать в прямое произведение симплекса в Грассмане σ_G^l и некоторого симплекса σ_{GL}^mв комплексе, $\hat{G}L(K,A)$,т.е. гомотопия W преобразует прообраз $p^{-1}(\sigma_G^l)$ в прямое произведение комплексов: $\hat{G}L(K,A) \otimes \sigma_G^l$.

Матрица $B_j^1 = \begin{pmatrix} 1+G_j & \varphi_j \\ \psi_j & 1 \end{pmatrix}$ преобразования вершины a_0^V к вершине a_j^V в Штифеле в результате применения гомотопии W переходит в матрицу $W\cdot g_3(B_i^1) = \begin{pmatrix} B_j & 0 \\ 0 & B_j^1 \cdot B_j^{-1} \end{pmatrix}$, тогда в силу замечания доказана теорема 2.

Теорема 2. Пусть отображение $\hat{p}: \hat{V}(A) \longrightarrow \hat{G}(A)$ удовлетворяет условиям утверждения, тогда: $\hat{p}$- расслоение со слоем $\hat{G}L(A)$ имеет точную последовательность пары:... $\longrightarrow \pi_i\left(\hat{G}L(A)\right) \longrightarrow \pi_i\left(\hat{V}(A)\right) \longrightarrow$ $\longrightarrow \pi_i\left(\hat{V}(A), \hat{G}L(A)\right) \longrightarrow \pi_{i-1}\left(\hat{G}L(A)\right) \longrightarrow \pi_{i-1}\left(\hat{V}(A)\right) \longrightarrow \cdots,$

Теорема 3. Симплициальный комплекс $\hat{V}(A)$ является слабо гомотопически тривиальным: $\pi_i\left(\hat{V}(A)\right) = 0, i = 0,1,2,\ldots$ [3,20-22] , следовательно в силу этой теоремы имеем, короткую точную последовательность: $0 \longrightarrow \pi_i\left(\hat{V}(A), \hat{G}L(A)\right) \longrightarrow \pi_{i-1}\left(\hat{G}L(A)\right) \longrightarrow 0.$

Теорема 4. $\pi_i\left(\hat{V}(A), \hat{G}L(A)\right) \simeq \pi_i\left(\hat{G}(A)\right)$.

Доказательство. Гомоморфизм $\pi_i\left(\hat{V}(A), \hat{G}L(A)\right) \longrightarrow \pi_i\left(\hat{G}(A)\right)$ является естественным отображением, так как оно индуцируется отображением расслоения $\hat{p}: \hat{V}(A) \longrightarrow \hat{G}(A)$, тогда в прямую сторону доказательство очевидно: если p_0 отмеченная точка симплициальной сферы $S_{\hat{G}L(A)} \subset \hat{G}(A)$ и симплициального сфероида $S_{\hat{V}(A)} \subset \hat{V}(A)$, где $S_{\hat{G}L(A)} \subset S_{\hat{V}(A)}$, то при отображении $\hat{p}$ симплициальная сфера $S_{\hat{G}L(A)}$ переходит вместе с отмеченной точкой p_0 в точку p_1 где p_1 отмеченная точка симплициальной сферы Грассманиана, т.е. $p_1 \in S_{\hat{G}(A)}$.

Рассмотрим гомоморфизм $\pi_i\left(\hat{G}(A)\right) \longrightarrow \pi_i\left(\hat{V}(A), \hat{G}L(A)\right)$.

Пусть существует диск D^k с симплициальным разбиением, если подсимплекс σ^m является гранью только одного симплекса σ^{m+1}, то элементарной операцией является удаление из комплекса D^k пары симплексов (σ^{m+1}, σ^m). Обратную к этой, операцию присоединения пары симплексов назовем элементарным раздутием.

Следствие 1. Всякий диск D^k получается раздутием из точки с помощью элементарных операций, обратных к операции схлопывания. Это следствие вытекает из теоремы Уайтхеда [6, 439-441].

Отобразим симплициальный диск D^k в сферу S^k с симплициальным разбиением, так что отмеченная точка $d_0 \in D^k$ переходит в отмеченную точку d_0 , а граница диска D^k в сферу S^k. Сфера S^k тождественно отображается в сферу $S^k{}_{\hat{G}(A)}$ в Грассманиане, так что отмеченная точка переходит в отмеченную. Очевидным образом строится отображение диска D^k в симплициальный сфероид в Штифеле $S^k{}_{\hat{V}(A)}$ и в силу теоремы о накрывающей гомотопии [7,71-73]: получаем доказательство теоремы. Итак, получаем следующий изоморфизм: $0 \longrightarrow \pi_i\left(\hat{G}(A)\right) \longrightarrow \pi_{i-1}\left(\hat{G}L(A)\right) \longrightarrow 0$

т.е. $\pi_i\left(\hat{G}(A)\right) = \pi_{i-1}\left(\hat{G}L(A)\right), i = 1,2, \ldots$

Согласно определению алгебраических K - групп Володина [2,844-873], имеем: $\pi_{i-1}\left(\hat{G}L(A)\right) = K^i(A), i = 1,2, \ldots$

Согласно следствию 1. и теоремы 3. имеем:

Теорема 5. $\pi_i\left(\hat{G}(A)\right) = K^i(A), i = 0,1,2, \ldots$

В силу теоремы 5 и теорем: 15.1, 27.2 и следствия 15.1 в работе Вассерштейна [1,87-149] имеем:

Теорема 6. Пространства $\hat{G}(A)$ и $BGL(A)^+$ слабо гомотопически эквивалентны, т.е. $\pi_i\left(\hat{G}(A)\right) = \pi_i(BGL(A)^+)$, где $BGL(A)^+$-классифицирующие пространство для группы $\widehat{GL}(A)$ и в силу [8,85-147]: $\pi_{i-1}\left(\hat{G}L(A)\right) = \pi_i(BGL(A)^+) = K^i(A)$.

Список литературы

1. Вассерштейн Л.Н. Основы алгебраической *K* теории. УМН, № 4, т. 31, 1976, с. 87-149
2. Володин И.А. Алгебраическая *K*-теория как экстраординарная теория гомологий на категории ассоциативных колец с единицей. Из. АН СССР. Сер., мат., 35, № 4, 1971, с. 844-873
3. Dergachev V., Lelyavin S. Construction of infinite algebraic K- theory of p I. Austrian Journal of Technical and Natural Sciences № 7-8, 2020 (July– August), p. 20-22.
4. Dergachev V., Lelyavin S. Construction of infinite algebraic K- theory of p III. Austrian Journal of Technical and Natural Sciences № 7-8, 2021 (July– August), p. 3 – 5.
5. Dergachev V. Lelyavin S. Creation of stable simplicial complexes of the p. I Austrian Journal of Technical and Natural Sciences, –No. 7–8. 2018. (July- August), p. 11–14.
6. Hatcher A., Algebraic topology, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, p. 544.
7. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. – Наука, Москва, 1989, с. 528
8. Quillen D. Higher algebraic K-theory I, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 341: 85–147 (1973).

УДК 514(075.8):81(075.8)

Прояева Ирина Владимировна
кандидат физико-математических наук, доцент,
Оренбургский государственный педагогический университет имени В.П. Чкалова,
Россия, г. Оренбург

Колобов Алексей Николаевич
кандидат технических наук, доцент,
доцент Оренбургский государственный педагогический университет имени В.П. Чкалова,
Оренбургский государственный университет
Россия, г. Оренбург

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ГЕОМЕТРИИ

Аннотация. *Данная статья носит прикладной характер и посвящена одному из самых сложных вопросов современной математики, а также для усвоения обучающимися – это приложение комплексного аппарата к решению прикладных задач. Основное внимание в работе авторы акцентируют на применении метода комплексных чисел при решении задач элементарной геометрии. Данный метод позволяет решать планиметрические задачи по готовым формулам прямым вычислением, элементарными выкладками. Выбор этих формул с очевидностью диктуется условиями задачи и ее требованиями. В этом состоит необычная простота этого метода по сравнению с координатным, векторным и другими методами, применяемых в геометрии и требующими от решающего порой немалой сообразительности, длительных поисков, хотя готовое решение может быть очень коротким. Рассмотренный материал была реализован в конкретном учебном процессе на занятиях-практикумах в ВУЗе и позволил повысить эффективность усвоения изучаемого материала обучающимися.*

Ключевые слова: *метод комплексных чисел, планиметрические задачи, современная математика, новые технологии, элементарная геометрия.*

Proyaeva Irina
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Orenburg State Pedagogical University named after V.P. Chkalov,
Russia, Orenburg

Kolobov Alexey
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Orenburg State Pedagogical University named after V.P. Chkalov,
Associate Professor Orenburg State University
Russia, Orenburg

ON THE USE OF COMPLEX NUMBERS IN GEOMETRY

Abstract. *This article is of an applied nature and is devoted to one of the most difficult issues of modern mathematics, as well as for learners to master - this is an application of a complex apparatus to solving applied problems. The authors focus on the use of the method of complex numbers in solving problems of elementary geometry. This method allows you to solve planimetric problems using ready-made formulas by direct calculation, elementary calculations. The choice of these formulas is obviously dictated by the conditions of the problem and its requirements. This is the unusual simplicity of this method in comparison with coordinate, vector, and other methods used in geometry and which sometimes require considerable ingenuity and lengthy searches from the decisive, although the ready-made solution can be very short. The material considered was implemented in a specific educational process at workshops at the university and made it possible to increase the efficiency of mastering the studied material by students.*

Keywords: *method of complex numbers, planimetric problems, modern mathematics, new technologies, elementary geometry.*

В эпоху информационных и цифровых технологий, а тем более в год науки и технологий, математика со своими приложениями выходит на первый план. На протяжении многих столетий ученые – математики разрабатывали различные новые технологии, которые сначала не принимались в силу своей непонятности и порой кажущимися безумными. Но попозже, когда аппарат был осознан, математические методы позволяли решать сложные и порой, на первый взгляд, неразрешимые задачи разных научных направлений с

легкостью. Такое же недоверие и предубеждение к себе, некоторое время назад, получила комплексная теория чисел. Ученые считали эти числа «мнимыми», «несуществующими», «вымышленными». Однако, по истечению некоторого промежутка времени, считающиеся совершенно ненужными комплексные числа приходят на помощь математикам и помогают решить многие трудные задачи. И постепенно теория комплексных чисел стала выходить на передний план в математике и ее приложения [1].

Комплексные числа самые молодые по сравнению с другими классами существующих чисел. В конце двух столетий назад комплексные числа приобрели геометрическую интерпретацию в виде точек на координатной плоскости. Это позволило формулировать многие задачи естественно научного цикла, а в частности гидродинамики, аэродинамики, электротехники, теории упругости и прочности, а также геодезии и картографии на языке комплексных чисел, что позволило им занять должное место среди других классов чисел на ряду с действительными. На современном этапе теория комплексных чисел проникла и в геометрии. С каждым днем, все более проникая в разные разделы, она пришла на помощь при решении задач элементарной геометрии. Рассмотрим задачи, подтверждающие этот факт [2].

Задача 1. На рисунке 1 дан треугольник ABC. Точка Д, симметричная центру описанной окружности с радиусом R относительно прямой AB Докажите, что $СД^2 = R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2$.

Решение. Пусть точки A, B, C… плоскости будут изображать соответственно комплексные числа. *a, b,c,…*

При решении задач данной работы будем опираться на следующие свойства комплексной плоскости.

1) Если центр окружности радиуса r совпадает с началом отсчета комплексной плоскости, то уравнение окружности можно записать $z\bar{z} = r^2$, где z- комплексная координата любой точки, находящейся на этой окружности.

2) Если точка C(c) делит отрезок A(a)B(b) в отношении $\lambda \neq -1$, то $c = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$, где $\lambda = \bar{\lambda}$. При $\lambda = 1$ точка C является серединой отрезка AB, верно и обратное утверждение. Поэтому $c = \frac{a+b}{2}$- комплексная координата середины отрезка AB.

3) Квадрат расстояния между точками A(a) и B(b) вычисляется по формуле $AB^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b})$.

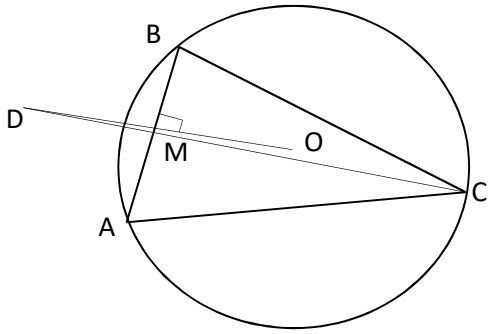


Рисунок 1 – Треугольник ABC

Возьмем точку O-центр описанной окружности за начало координат комплексной плоскости, и пусть *a, b, c*- комплексные координаты точек A, B, C соответственно. Так как окружность описана около треугольника ABC, то комплексные координаты точек A, B, C удовлетворяют уравнению окружности: $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = R^2$(1). Пусть точка M-середина отрезка AB, тогда ее комплексная координата $m = \frac{a+b}{2}$. По условию точка O- центр описанной окружности, и соответственно в ней пересекаются серединные перпендикуляры треугольника ABC . Точка Д симметрична точке O относительно прямой AB, поэтому $\overrightarrow{OД} = 2\overrightarrow{OM}$. Следовательно комплексная координата d точки Д $d = 2\frac{1}{2}(a+b) = a+b$ (2). Вычислим $СД^2$: $СД^2 = (c-d)\left(\bar{c}-\bar{d}\right) = c\bar{c} - c\bar{d} - d\bar{c} + d\bar{d}$ и ,учитывая (1) и (2), $СД^2 = a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{b} - a\bar{c} - b\bar{c} - c\bar{a} - c\bar{b} + c\bar{c} + a\bar{a}$. Следующие вычисления произведем также применяя (1) и (2).
$R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2 = a\bar{a} + (a-c)(\bar{a}-\bar{c}) + (b-c)\left(\bar{b}-\bar{c}\right) -$
$(a-b)\left(\bar{a}-\bar{b}\right) = a\bar{a} - c\bar{a} - a\bar{c} + 2c\bar{c} - c\bar{b} - b\bar{c} + b\bar{a} + a\bar{b}$. Так как $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$, то равенство доказано [4].

Список литературы

1. Понарин Я.П. Метод комплексных чисел в планиметрии. // Математика в школе 1991. №2. С.46-54
2. Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии. № 168. Изд. 4, стереотип. URSS. 2020. 200 с.

3. Прояева И.В. Об организации компетентностно-ориентированного подхода самостоятельной работы бакалавров по математическим дисциплинам на технических специальностях ВО // Реализация компетентностного подхода в сфере инженерной подготовки (авторская монография), ООО АЭТЕРНА, 2017, Г. Уфа. С. 101-10
4. Прояева И.В., Сафарова А.Д. Организация самостоятельной работы студентов по подготовке к ГИА курсу «Геометрия», Издательство ОГПУ, Оренбург 2016.

УДК 514.752+517.95

Русаков Александр Александрович
доктор педагогических наук, профессор,
профессор кафедры высшей математики,
МИРЭА – Российский технологический университет»
Россия, Москва

Черкасова Владлена Владиславовна
старший преподаватель кафедры информатики,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗНОСТЕЙ ИНДУЦИРОВАННЫХ ДВИЖЕНИЕМ

Аннотация. *В данной статье рассматриваются связности, индуцированные движением твердых тел, и исследуется их зависимость от инвариантных характеристик кривых и поверхностей в терминах криволинейного мультипликативного интеграла.*

Ключевые слова: *параллельный перенос, связность, мультипликативный интеграл, кривизна криволинейного мультипликативного интеграла, круговые функции.*

Rusakov Alexander Alexandrovich
Doctor of Pedagogical Sciences, Professor,
Professor of Higher Mathematics, sciences, Associate Professor
MIREA – Russian Technological University
Russia, Moscow

Cherkasova Vladlena Vladislavovna
senior lecturer of the Department of Computer Science,
Oryol State University named after I.S. Turgenev,
Russia, Orel

INVESTIGATION OF MOTION-INDUCED CONNECTIVITY

Abstract. *Connectedness induced by the motion of solids is considered and their dependence on invariant characteristics of curves and surfaces is investigated in terms of a curved multiplicative integral..*

Keywords**:** *parallel transfer, connectivity, multiplicative integral, curvature of a curved multiplicative integral, circular functions.*

При рассмотрении n-мерного пространства M с невырожденной метрикой g_{ij}, $(\det(g_{ij}) \neq 0)$, данной метрике можно сопоставить согласованную с этой метрикой симметричную связность, определяемую формулами:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{i}} \right).$$

Задание параллельного переноса вектора $\boldsymbol{\xi}$ в таком пространстве в бесконечно малом представляет собой уравнение $d\xi^{k} = -\Gamma_{ij}^{k} \xi^{j} dx^{i}$.

Такое представление о параллельном переносе сопоставимо со структурой криволинейного мультипликативного интеграла вида:

$$\int^{\cap} E + \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{i}(x^{1}, \dots, x^{n}) dx^{i},$$

где $\Gamma_{i}(x^{1}, \dots, x^{n})$ – квадратные матрицы размерности $n \times n$, элементами которых являются коэффициенты связности Γ_{ij}^{k} , E – единичная матрица.

Структура матриц Γ_{i} может иметь различную природу. Это обусловлено, в первую очередь, возможностью применения теории мультипликативного интеграла в различных сферах научного знания.

В данном случае особый интерес представляют собой связности индуцированные движением твердых тел.

В частности, при рассмотрении движения твердого тела вокруг некоторой закрепленной точки. В статье [1] установлено, что закон движения в данном случае представляет собой криволинейный мультипликативный интеграл вида:

$$\int^{\cap} E + \Omega dt + M dy, \qquad (1)$$

где M, Ω – кососимметрические матрицы размерности 3×3, содержащие компоненты вектора кинетического момента тела и вектора угловой скорости соответственно.

Вычисление криволинейного мультипликативного интеграла связано с понятием кривизны криволинейного мультипликативного интеграла.

Кривизна криволинейного мультипликативного интеграла (1) представляет собой матрицу, значение которой определяется формулой:

$$K = M_t - \Omega_y + M\Omega - \Omega M.$$

Ещё одним примером применения мультипликативного интеграла является рассмотрение качения сферы радиуса R в трехмерном евклидовом пространстве.

Пусть в евклидовом пространстве R^3 поверхность задана параметрическими уравнениями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ и на поверхности сфера радиуса R с центром в точке $\boldsymbol{r}(u, v) + R\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности. В этом случае, интеграл качения имеет вид:

$$\int^{\cap} E + \Gamma_1 du + \Gamma_2 dv, \qquad (2)$$

где $\Delta = \sqrt{EG - F^2}$, $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$,

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\Delta R}\Phi\big([\boldsymbol{r}_u \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]]\big), \qquad \Gamma_2 = \frac{1}{\Delta R}\Phi\big([\boldsymbol{r}_v \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]]\big),$$

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & z(u,v) & -y(u,v) \\ -z(u,v) & 0 & x(u,v) \\ y(u,v) & -x(u,v) & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрицы Γ_i – это кососимметрические матрицы размерности 3×3, элементами которых являются коэффициенты связности Γ_{ij}^k.

Кривизна криволинейного мультипликативного интеграла (2) будет находиться по формуле:

$$K = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v} - \Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_1. \qquad (3)$$

Трехмерное евклидово пространство вместе с операцией векторного произведения является алгеброй Ли, которая изоморфна алгебре всех вещественных кососимметрических матриц с операцией коммутирования матриц, тогда Ф – изоморфизм, который в случае параметрического задания поверхности уравнениями $\boldsymbol{r}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$, где $(u, v) \in D$, $D \subset R^2$, задается формулами:

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & z(u,v) & -y(u,v) \\ -z(u,v) & 0 & x(u,v) \\ y(u,v) & -x(u,v) & 0 \end{pmatrix}.$$

Необходимо учитывать, что Ф обладает свойствами:

1. $\forall \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 \; и \; \alpha, \beta = const$: $\Phi(\alpha \boldsymbol{r}_1 + \beta \boldsymbol{r}_2) = \alpha \Phi(\boldsymbol{r}_1) + \beta \Phi(\boldsymbol{r}_2)$.
2. $\forall \boldsymbol{r}(t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(\boldsymbol{r}(t)) = \Phi\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}(t)}{\partial (t)}\right).$$

Дифференцирование векторного произведения векторной функции скалярного аргумента осуществляется по правилу:

$$\frac{d}{dt}([\boldsymbol{r_1}(t) \times \boldsymbol{r_2}(t)]) = \frac{d\boldsymbol{r_1}}{dt} \times \boldsymbol{r_2} + \boldsymbol{r_1} \times \frac{d\boldsymbol{r_2}}{dt}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Delta R}\Phi\left(\left[\boldsymbol{r}_v \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]\right]\right)\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\Phi([\boldsymbol{r}_v \times \boldsymbol{n}]\right) =$$

$$= \frac{1}{R}(\Phi([\boldsymbol{r}_{vu} \times \boldsymbol{n}]) + \Phi(\boldsymbol{r}_v \times \boldsymbol{n}_u)).$$

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Delta R}\Phi\left(\left[\boldsymbol{r}_u \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]\right]\right)\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\Phi([\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{n}]\right) =$$

$$= \frac{1}{R}(\Phi([\boldsymbol{r}_{uv} \times \boldsymbol{n}]) + \Phi(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{n}_v)).$$

Для сопровождающего базиса $(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{n})$ двумерной поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, справедливы формулы Вейнгартена:

$$\boldsymbol{n}_u = \frac{FM - GL}{EG - F^2}\boldsymbol{r}_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2}\boldsymbol{r}_v,$$

$$\boldsymbol{n}_v = \frac{FN - GM}{EG - F^2}\boldsymbol{r}_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2}\boldsymbol{r}_v,$$

где L, M, N – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$.

Тогда, учитывая деривационные формулы Вейнгартена, получим соотношения:

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial u} = \frac{1}{R}(\Phi([\boldsymbol{r}_{vu} \times \boldsymbol{n}] - \frac{FM-G}{EG-F^2}\Phi[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial v} = \frac{1}{R}(\Phi([\boldsymbol{r}_{uv} \times \boldsymbol{n}]) + \frac{FM-EN}{EG-F^2}\Phi[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]). \quad (4.2)$$

Для нахождения коммутатора $[\Gamma_1, \Gamma_2] = \Gamma_1\Gamma_2 - \Gamma_2\Gamma_1$, будем учитывать свойства двойного векторного произведения [2]:

$$\left[\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}]\right] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

В нашем случае, для векторных произведений $\left[\boldsymbol{r}_u \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]\right]$ и $\left[\boldsymbol{r}_v \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]\right]$ справедливы формулы:

$$\left[\boldsymbol{r}_u \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]\right] = \boldsymbol{r}_u(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) - \boldsymbol{r}_v(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_u) = F\boldsymbol{r}_u - E\boldsymbol{r}_v, \quad (5.1)$$

$$\left[\boldsymbol{r}_v \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]\right] = \boldsymbol{r}_u(\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_v) - \boldsymbol{r}_v(\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_u) = G\boldsymbol{r}_u - F\boldsymbol{r}_v. \qquad (5.2)$$

Учитывая формулы (5.1)-(5.2), при нахождении значения коммутатора $[\Gamma_1, \Gamma_2]$, получим:

$$\Gamma_1\Gamma_2 = \frac{1}{\Delta R}\Phi\left(\left[\boldsymbol{r}_u \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]\right]\right) \cdot \frac{1}{\Delta R}\Phi\left(\left[\boldsymbol{r}_v \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]\right]\right)$$
$$= \frac{1}{R^2\Delta^2}\Phi(F\boldsymbol{r}_u - E\boldsymbol{r}_v) \cdot \Phi(G\boldsymbol{r}_u - F\boldsymbol{r}_v),$$
$$\Gamma_2\Gamma_1 = \frac{1}{\Delta R}\Phi\left(\left[\boldsymbol{r}_v \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]\right]\right) \cdot \frac{1}{\Delta R}\Phi\left(\left[\boldsymbol{r}_u \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]\right]\right)$$
$$= \frac{1}{R^2\Delta^2}\Phi(G\boldsymbol{r}_u - F\boldsymbol{r}_v) \cdot \Phi(F\boldsymbol{r}_u - E\boldsymbol{r}_v),$$
$$[\Gamma_1, \Gamma_2] = -\frac{1}{R}\Phi(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v). \qquad (6)$$

Учитывая значения всех элементов формулы (3), полученные в формулах (4.1)-(4.2) и (6), и тот факт, что для регулярной поверхности $\boldsymbol{r}_{uv} = \boldsymbol{r}_{vu}$, найдем значение кривизны криволинейного мультипликативного интеграла (2):

$$K = \frac{1}{R}\left(-\frac{FM - GL}{EG - F^2}\Phi[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v] - \frac{FM - EN}{EG - F^2}\Phi[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v] + \Phi(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\right)$$
$$== \frac{1}{R}\left(\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} + 1\right)\Phi[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v].$$

Как видно из последней формулы $H = \frac{1}{2}\frac{EN-2FM+G}{EG-F^2}$ – средняя кривизна поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, тогда

$$K = \frac{1}{R}(2H - 1)\Phi[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v].$$

В частности, если в качестве поверхности качения рассматривать минимальные поверхности (мыльные пленки), для которых $H = 0$, тогда $K = -\frac{1}{R}\Phi[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]$.

Для поверхности постоянной средней кривизны (мыльные пузыри), $H = \lambda$, кривизна криволинейного мультипликативного интеграла находится по формуле:

$$K = \frac{2\lambda-1}{R}\Phi[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v].$$

Ранее в статье [3] рассматривалась задача о нахождении матрицы перехода от начального положения ортонормированного базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, связанного с центром единичного шара, который катится по некоторой двумерной поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ вдоль некоторой кривой γ этой поверхности, к конечному положению.

Матрица перехода в этом случае также представляет собой криволинейный мультипликативный интеграл, значение которого может быть найдено для случая движения вдоль γ, представляющей бесконечно малый геодезический параллелограмм, с точностью до $o(\Delta\sigma)$:

$$\int_{\gamma}^{\cap} E + P_1 du + P_2 dv = E + K\Delta\sigma + o(\Delta\sigma) \qquad (7)$$

Формула (7) раскрывает геометрический смысл криволинейного мультипликативного интеграла [4].

Кривизна криволинейного мультипликативного интеграла для нахождения матрицы перехода от начального положения базиса к конечному положению также зависит от средней кривизны поверхности качения.

Криволинейный мультипликативный интеграл (7) также представляет собой связность индуцированную движением единичного шара и ортонормированного базиса, связанного с центром шара. Матрицы $P_i(u,v)$, элементами которых являются коэффициенты некоторой связности, в этом случае имеют следующую структуру:

$$P_1(u,v) = \frac{1}{\Delta}\,\Phi\big([\boldsymbol{r}_u \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]]\big) + \Lambda_u,$$

$$P_2(u,v) = \frac{1}{\Delta}\,\Phi\big([\boldsymbol{r}_v \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]]\big) + \Lambda_v,$$

где Ф – кососимметрическая матрица размерности 4×4, в которой для вектора $\boldsymbol{r}$ с компонентами (x,y,z) все элементы $\varphi_{ij} = 0$, кроме $\varphi_{12} = z\ \varphi_{21} = -z,\ \varphi_{13} = -y,\ \varphi_{31} = y,\ \varphi_{23} = x,\ \varphi_{32} = -x$; матрица $\Lambda\,(u,v)$ – кососимметрическая матрица, элементами которой являются $\lambda_{ij} = 0$, кроме $\lambda_{41} = x(u,v),\ \lambda_{42} = y(u,v),\ \lambda_{43} = z(u,v)$, Е, F, G – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, $\Delta = \sqrt{EG - F^2}$.

Значение мультипликативного интеграла (7) будет зависеть от кривизны и вычисляться по формуле:

$$\text{К} = (2\text{Н} - 1)\Phi[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]. \qquad (8)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Поверхность качения является поверхностью вращения и задана уравнением: $\boldsymbol{r}(u,v) = \varphi(u)\boldsymbol{e}(v) + \psi(u)\boldsymbol{k}$,
где $\boldsymbol{e}(v) = \boldsymbol{i}cosv + \boldsymbol{j}sinv,\ \boldsymbol{g}(u) = -\boldsymbol{i}sinv + \boldsymbol{j}cosv$ – круговые векторные функции, для которых справедливы следующие соотношения:

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{dv} = \boldsymbol{g}(v), \qquad \frac{d\boldsymbol{g}}{dt} = -\boldsymbol{e},$$

$$\boldsymbol{e}^2 = \boldsymbol{g}^2 = 1,\ \ (\boldsymbol{e},\boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{e},\boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{g},\boldsymbol{k}) = 0,$$

$$[\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{g}]=\boldsymbol{k},\ \ [\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{k}]=\boldsymbol{e},\qquad [\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}]=\boldsymbol{g}.$$

На основании формулы (8) получим:

$$K=\frac{\varphi W-V^2(\psi'-\varphi V)}{\varphi V^3}\Phi\big(\varphi(-\psi'\boldsymbol{e}(v)+\varphi'\boldsymbol{k})\big),$$

где $W=\varphi'\psi''-\varphi''\psi',\ V=\varphi'^2+\psi'^2$.

2. Поверхность качения является винтовой поверхностью, заданной уравнением:

$$\boldsymbol{r}=\varphi(u)\boldsymbol{e}(v)+(\psi(u)+av)\boldsymbol{k},$$

где $\boldsymbol{e}(v)=\boldsymbol{i}\cos v+\boldsymbol{j}\sin v\,, g(v)=-\boldsymbol{i}\sin v+\boldsymbol{j}\cos v$ – круговые векторные функции, $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ – координатные орты, $a\geq 0, a=const$, тогда кривизна криволинейного мультипликативного интеграла вычисляется по формуле:

$$K=\frac{\varphi^2\psi'W-2a^2\psi'\varphi'^2+\varphi TV-\varphi'^4T^2-\varphi^4\psi'^4-2\varphi'^2T\varphi^2\psi'^2}{(\varphi'^2T+\varphi^2\psi'^2)^2}$$
$$\cdot\,\Phi(-\psi'\varphi\boldsymbol{e}(v)-a\varphi'\boldsymbol{g}(v)+\varphi\varphi'\boldsymbol{k}),$$

где $W=\varphi'^2+\psi'^2,\ V=\varphi'\psi''-\varphi''\psi',\ T=\varphi^2+a^2$.

Матрица кривизны (8) является кососимметрической матрицей размерности 4×4, элементы которой $k_{ij}=0$, кроме $k_{12}=-k_{21}$, $k_{13}=-k_{31}, k_{23}=-k_{32}$ и представляют собой коэффициенты связности. Поскольку элементы матрицы K являются однозначно определенными, то введенный таким способом объект связности позволяет восстановить всю геометрию исследуемой области, а именно внутреннюю геометрию поверхности качения.

Список литературы

1. Мантуров О.В. Мультипликативный интеграл / О.В. Мантуров // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии». – 1990. – Том 22 – С. 167 – 215.
2. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т.Корн // М.: Наука, 1984. – 832 с.
3. Черкасова В.В. О вычислении кривизны криволинейного мультипликативного интеграла с помощью инвариантов поверхностей / В.В. Черкасова // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы второй международной научно-практической конференции. – 2016.– С. 79-83.
4. Паланджянц Л.Ж. Геометрия мультипликативного интеграла / Л.Ж. Паланджянц. – Майкоп: МП «Качество», 1997. – 96 с.

Математические методы в экономике

УДК 330.43

Алимханова Алия Нуржановна
аспирант
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,
Россия, Томск

Мицель Артур Александрович
доктор технических наук, профессор
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, Томск

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА DEA ДЛЯ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ НА ОСНОВЕ БУХГАЛТЕРСКОЙ ОТЧЕТНОСТИ

Аннотация. *В данной работе рассматривается применение выходо-ориентированной модели DEA как способа оценки эффективности деятельности предприятий моногородов.*

Ключевые слова: *эффективность, выручка, метод DEA, неэффективность, производственная функция, отрасли экономики, корреляция, финансовые показатели.*

Alimkhanova Aliya Nurzhanovna
PhD student
Tomsk state university of control systems and radioelectronics,
Russia, Tomsk

Mitsel Arthur Aleksandrovich
Doctor of technical sciences, professor
Tomsk state university of control systems and radioelectronics,
National research Tomsk polytechnic university,
Russia, Tomsk

USING THE DEA METHOD TO ASSESS THE EFFECTIVENESS OF AN ENTERPRISE BASED ON ACCOUNTING REPORTING

Abstract. *This paper addresses the use of an out-oriented model of the Data Envelopment Analysis (DEA) as a method for evaluating the effectiveness of enterprises.*

Keywords: *efficiency, revenue, DEA method, inefficiency, production function, sectors of the economy, correlation, financial indicators.*

1. Введение

Проблема анализа эффективности функционирования предприятий в последние годы стала острой во многих сферах производства и реализации продукции. В целом эффективность означает реализацию процесса с минимальными потерями.

Проблема развития моногородов может быть решена путем разработки новых направлений, создания подходящих условий, например, районов с приоритетным развитием, и повышения эффективности работы существующего малого бизнеса.

В связи с этим является актуальным вопрос о разработке математической модели для управления отраслями экономики в моногородах с целью повышения их эффективности.

В области решения проблем моногородов большое значение имеют труды [1-4] в них достаточно подробно описано о повышении эффективности функционирования экономических процессов в моногородах.

В своих научных трудах многие зарубежные авторы [5, 6] в большей мере акцентируют внимание на определение эффективности предприятия. Так как управлению отраслями моногородов уделяется существенно меньше внимания.

Для построения модели авторами [7] был определен список экономических отраслей моногорода. Было отобрано двенадцать отраслей моногорода,перечисленные в таблице 1. Отрасль «Государственное управление и обеспечение военной безопасности,

обязательное социальное страхование» исключена из списка, так как не имеет представителей малого бизнеса [8].

Таблица 1 — Отрасли экономики

№	Наименование отрасли
1.	Сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство
2.	Обрабатывающие производства
3.	Производство и распределение электроэнергии и воды
4.	Строительство
5.	Оптовая и розничная торговля, ремонт автотранспортных средств и мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного использования
6.	Деятельность гостиниц и ресторанов
7.	Транспорт и связь
8.	Финансовая деятельность
9.	Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг
10.	Образование
11.	Здравоохранение и предоставление социальных услуг
12.	Предоставление прочих коммунальных, социальных и персональных услуг

В работе в качестве входных и выходных данных используются финансовые показатели. Они были взяты из отчетов «Бухгалтерский баланс» и «Отчет о финансовых результатах». В таблице 2 приведены обозначения и расчет используемых показателей.

Таблица 2 — Описание показателей малого бизнеса

Обозначение показателя	Расчет показателя
Выручка (Rev)	Среднее значение выручки за год (из «Отчета о финансовых результатах)
FAB	стр.1100/стр.1600 (из «Бухгалтерского баланса»)
CAB	стр.1200/стр.1600 (из «Бухгалтерского баланса»)
CRB	стр.1300/стр.1700 (из «Бухгалтерского баланса»)

LLB	стр.1400/стр.1700 (из «Бухгалтерского баланса»)
SLB	стр.1500/стр.1700 (из «Бухгалтерского баланса»)

В ходе работы была применена нормировка для выручки, так как рассматриваемые показатели представлены в разных шкалах измерения.

2. Реализация метода DEA

Метод DEA заключается в том, что на основе исходных данных строится граница производственных возможностей (граница эффективности) в пространстве входных и выходных переменных, которые описывают объекты, соответственно эффективность, которых должна быть определена.

В DEA-методе есть два вида моделей: модели ориентированные на вход (использование ресурсов) и модели ориентированные на выход (выпуск продукции или услуг).

В данной работе используется модель, ориентированная на выход.

На основе исходных данных рассчитываем корреляцию с помощью функции «КОРРЕЛ()» в Excel. Результаты представлены в таблице 3. На выходе получили положительные и отрицательные значения. Далее в параметрах, которые имеют отрицательные значения, применили аффинное преобразование. Значение выручки оставляем без изменения.

Таблица 3 — Расчет корреляции

Входные параметры	Выходные параметры (Rev)			
	2013	2014	2015	2016
FAB	**-0,06815**	**-0,47258**	**-0,38856**	**-0,16064**
CAB	0,068152	0,472578	0,38856	0,160644
CRB	0,037076	**-0,05626**	**-0,04407**	**-0,38732**
LLB	**-0,16636**	**-0,33586**	**-0,52144**	**-0,53225**
SLB	**-0,02444**	0,151719	0,117037	0,758085

Далее осуществляем расчеты по формуле (1) и получаем оценки эффективности по годам. Результаты вычислений приведены в таблице 4.

$$f(v, L)v + L \cdot O \rightarrow max,$$
$$-v \cdot y^{\langle j \rangle} + Y \cdot L \geq 0, j = 1, \dots, k;$$

$$X^{\langle i \rangle} - X \cdot L \geq 0, i = 1, \ldots, m;$$
$$v \geq 0, L_i \geq 0. \quad (1)$$

Здесь X – матрица входных показателей размерности m ∗ n, где m – количество показателей, n – количество отраслей экономики (n = =12); v – показатель эффективности, L – вектор весов размерности n; Y – матрица выходных (агрегированных) показателей размерности k ∗ n, где k – количество агрегированных показателей [8].

Если в выходо-ориентированной модели значение показателя v будет больше единицы, рекомендации заключаются в увеличении значений выходных параметров при сохранении значений входных показателей.

Таблица 4 — Результаты вычислений

2013	2014	2015	2016
1	1	1,019	1
1,021	1,021	1	1
1	1	11,159	1,16
1	1,557	1,535	1,208
1	1	1	1,027
1	1	1	1,271
2,019	1,664	1,034	1
1	3,692	1,342	1
1	1	1,062	1,147
5,186	1	1	1
1	2,271	2,331	1
1	2,026	1,658	1

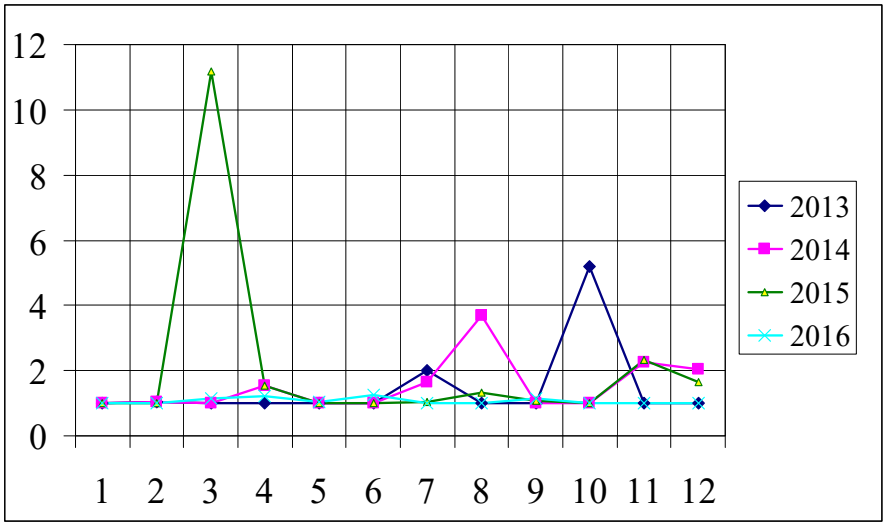


Рисунок 1 — График оценок эффективности

По рисунку 1 видно, что наименее эффективной отраслью в 2013 году является «Образование», в 2014 году «Финансовая деятельность», в 2015 году «Производство и распределение электроэнергии и воды», а в 2016 году «Деятельность гостиниц и ресторанов».

3. Вывод

В результате проведенного исследования было выявлено, что метод DEA можно использовать для оценки эффективности экономических объектов, описываемых показателями из бухгалтерской отчетности, а не объемами затрачиваемых ресурсов и выпусков. Полученные в ходе данного исследования результаты позволяют говорить о возможности применения данного метода для управления отраслями экономики в моногородах с целью повышения их эффективности.

Список литературы

1. Лыткин, А.И. Направления инновационного развития моногорода / А.И. Лыткин // Статистика и экономика. — 2012. — № 1. — С. 44-46.
2. Ярушкина, Н.А. Конкурентоспособность урбанистической системы и деятельность градообразующего предприятия - управляющее взаимовлияние / Н.А. Ярушкина, Э.Г. Матюгина, С.А. Зотов. — Томск: Закрытое акционерное общество «Издательство "Красное знамя"», 2015. — 141 с.
3. Иваньковский С.Л. Моногорода в народном хозяйстве страны: развитие, проблемы, перспективы / С.Л. Иваньковкий, А.А. Былинская, Н.А. Иваньковская // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2011. —№ 5-2. — С. 91-97.
4. Матюгина Э.Г. К вопросу взаимообусловленности привлекательности монопрофильной территории и градообразующего предприятия / Э.Г. Матюгина, О.В. Пожарницкая, Е.С. Радионова // Экономика и управление: проблемы, решения. —2017. —Т.2. —№11. — С. 24-31.
5. Charnes A. Measuring the efficiency of decision making units. / A. Charnes, W.W. Cooper, E. Rhodes // European Journal of Operational Research. — 1978. — P. 429–444.

6. Audretsch, D. Handbook of Research on Entrepreneurship Policy / D. Audretsch, I. Grillo, A.R. Thurik // Cheltenham, Edward Elgar. —2007. — 256 p.
7. Важдаев А.Н. DEA-анализ эффективности отраслей экономики моногорода / А.Н. Важдаев, А.А. Мицель // Региональная экономика: теория и практика. — 2017. — Т. 15. — №12 (447). — С. 2378-2390.
8. Важдаев А.Н. Модели и программное обеспечение поддержки принятия решений для повышения эффективности малого бизнеса моногорода (на примере муниципального образования города Юрги) : специальность 05.13.10 «Управление в социальных и экономических системах» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Андрей Николаевич Важдаев ; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – Томск, 2019. — 162 с. — Библиогр. с. 144-155.

УДК 33:519.2

Анисимова Татьяна Германовна
доктор социологических наук,
ведущий научный сотрудник, Институт социологии ФНИСЦ РАН
Россия, г. Москва

Голенкова Зинаида Тихоновна
доктор философских наук, профессор
руководитель Центра исследования социальной структуры и социального расслоения, Институт социологии ФНИСЦ РАН
Россия, г. Москва

Лясковская Ольга Вадимовна
кандидат социологических наук, доцент
руководитель отдела анализа и документирования технологий, ООО «Технолоджи Лайн»
Россия, г. Москва

ИННОВАЦИОННАЯ МЕТОДИКА ФАКТОРНОГО И КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА СОЦИОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ (НА ПРИМЕРЕ СТРАТИФИКАЦИИ ТРУДОВОЙ СТРУКТУРЫ НАСЕЛЕНИЯ ТЫВЫ

Аннотация. *Комплексное применение таких методов анализа данных, как корреляционный, факторный и кластерный анализы, затруднено для номинальных и порядковых переменных, характерных для результатов социологических опросов. Для использования этих многомерных методов, в «классическом» варианте гипотезы нормального распределения переменных, предлагается осуществить переход от базы данных по респондентам к данным по социальным группам населения, измеренным в абсолютной шкале вероятности. При соблюдении нормальности распределения переменных, варьирующих по выделенным социальным группам, переход к вероятностям полностью снимает ограничения, накладываемые на исходные номинальные и порядковые переменные по числу значений в факторном анализе и по нормальности распределения латентных*

переменных в категориальном методе главных компонент (CatPCA).

Особенности предлагаемой методики факторного и кластерного анализа данных социологических исследований продемонстрированы на примере стратификации трудовой структуры населения Тувы.

Ключевые слова: *социологические опросы, население Тывы, социальные группы, стратификация, факторы трудовой мобильности, факторный анализ, латентные факторы, категориальный метод главных компонент, подход Ж.-П. Пажеса, карта «Неба», карта «Земли», кластерный анализ.*

Anisimova Tatiana Germanovna
Doctor of Sociological Sciences, Associate Professor,
Leading Researcher, Institute of Sociology of the Russian Academy of Sciences,
Russia, Moscow

Golenkova Zinaida Tikhonovna
Doctor of Philosophy, Professor,
Head of the Center for the Study of Social Structure and Social Stratification, Institute of Sociology of the Russian Academy of Sciences
Russia, Moscow

Lyaskovskaya Olga Vadimovna
Candidate of Sociological Sciences, Associate Professor,
Head of Technology Analysis and Documentation Department, OOO «Technology Line»
Russia, Moscow

INNOVATIVE METHOD OF FACTOR AND CLUSTER ANALYSIS OF SOCIOLOGICAL DATA (ON THE EXAMPLE OF STRATIFICATION OF THE LABOR STRUCTURE OF THE POPULATION OF TYVA

Annotation. *The complex application of such data analysis methods as correlation, factor and cluster analyses is difficult for nominal and ordinal variables characteristic of the results of sociological surveys. To use these multidimensional methods, in the "classical" version of the*

hypothesis of the normal distribution of variables, it is proposed to make a transition from the database of respondents to data on social groups of the population measured in the absolute probability scale. While observing the normality of the distribution of variables varying by selected social groups, the transition to the probability scale completely removes the restrictions imposed on the initial nominal and ordinal variables by the number of values in factor analysis and by the normality of the distribution of latent variables in the categorical principal component method (CatPCA). The features of the proposed methodology of factor and cluster analysis of sociological research data are demonstrated by the example of the stratification of the labor structure of the population of Tuva.

***Keywords**: sociological surveys, population of Tuva, social groups, stratification, factors of labor mobility, factor analysis, latent factors, categorical method of main components, approach Zh.-P. Pages, "Sky" map, "Earth" map, cluster analysis.*

Актуальность данной публикации определяется недостаточной научной обоснованностью существующих методик количественного анализа результатов массового анкетирования. Авторы применили развиваемый ими вероятностный подход к разработке факторных и типологических моделей, адекватно отражающих суждения опрашиваемых респондентов по различным вопросам развития современного общества. Цель статьи – проиллюстрировать авторский подход к анализу результатов анкетирования методами многомерной статистики на примере разработки количественных моделей структуры трудовой мобильности населения Тывы.

Поводом для обращения к проблеме многомерного статистического анализа итогов массовых опросов респондентов послужили публикации последних лет, посвященные вопросам применения факторного анализа для обработки результатов анкетирования [2-5]. Факторный анализ и его основная разновидность – метод главных компонент (МГК), наряду с корреляционно-регрессионным и кластерным, наиболее популярен из всех многомерных статистических методов. Существовало мнение, что с помощью факторного анализа возможно решение социологической задачи любой сложности и направленности. Впоследствии исследователи из одной крайности перешли в другую – почти полного отрицания его полезности для социологии [6].

Причиной такой ситуации во многом является специфика социологической информации: многомерные методы статистического анализа предполагают высокий уровень измерения исходных переменных, тогда как результатам анкетирования отвечают преимущественно номинальные и порядковые переменные. В связи с этим ряд исследователей справедливо ставят вопрос: правомерно ли использовать многомерные методы статистического анализа для аналитического исследования, когда данные представлены в порядковой или номинальной шкалах?

Этот вопрос стал перед нами при разработке структуры трудовой мобильности населения Республики Тыва по эмпирической базе социологического опроса в 2019 г. Индикаторами, раскрывающими типологию населения по факторам трудовой мобильности, являлись ответы респондентов на следующие вопросы:

- Рассматриваете ли Вы для себя возможность переезда в другой город/село Республики или другой регион для поиска более подходящей работы или Вы такой вариант не рассматриваете?

- Рассматриваете ли Вы для себя возможность поехать на сезонные работы в другой регион или Вы такой вариант не рассматриваете?

- Если у Вас появится необходимость поиска работы, могли бы Вы работать удаленно, общаясь с работодателем по Интернету?

Респондентам предлагались следующие варианты ответов: 1) да, 2) скорее, да, 3) скорее, нет, 4) нет. Таким образом, все три переменные, характеризующие трудовую мобильность, являются порядковыми с четырьмя уровнями.

Для разработки типологии населения по данным социологических опросов чаще всего применяют методы кластерного анализа. В отличие от факторного анализа, эти методы не накладывают каких-либо ограничений на тип исходных данных, а иерархический кластерный анализ позволяет наглядно визуализировать результаты классификации в виде дендрограммы. Но методы иерархического кластерного анализа наглядны лишь при малых объемах выборки и, главное, единицами кластеризации должны быть не респонденты, а социальные группы, дифференцированные по полу, возрасту, образованию и т.п. Применение же кластерного анализа по методу *k*-средних ограничено наличием классифицирующих переменных более высокого типа измерения – интервальных, относительных, абсолютных.

Здесь возможны следующие варианты [7]: 1) принять (волевым образом) допущение о том, порядковые переменные можно считать

интервальными; 2) дихотомизировать порядковые индикаторы, считая дихотомические переменные частным случаем интервальных; 3) вместо матрицы коэффициентов корреляции Пирсона использовать матрицу коэффициентов ранговой или полихорической корреляции; 4) применить категориальный метод главных компонент (*CatPCA*), в рамках которого МГК применяется к специально преобразованным индикаторам.

Попытка применить методы кластерного анализа для решения задач классификации по исходным («сырым») данным массовых опросов была предпринята авторами работы [8] для выявления особенностей бедности в Орловской области как социального явления. Эмпирической базой являлись результаты массового опроса 1154 респондентов, кластеризация проводилась методом Уорда с евклидовой метрикой. Оптимальное число групп бедности – пять кластеров – устанавливалось по таблице шагов агломерации, критерием служил «наиболее резкий скачок коэффициента расстояния между объектами» [8, с. 157]. Различия кластеров оценивалось по объективным признакам бедности, измеренным по количественным, порядковым и дихотомическим шкалам, а также по субъективному критерию, выраженному как самооценка положения в обществе (вопрос «К какому классу Вы себя относите?»). По результатам кластерного анализа выявлены кластеры «абсолютные бедные», «работающие бедные», «бедные пенсионеры», «массовый слой», «благополучные», различающиеся по уровню бедности, приведены их отличительные характеристики, позволяющие составить социальный портрет бедности в исследуемом регионе.

В работе [8] методы факторного анализа не применялись, тогда как кластеризация на факторах позволила бы значительно сократить число отличительных характеристик кластеров. И здесь на первый план выступает вопрос о правомерности применения порядковых шкал в процедуре факторного анализа. По мнению автора работы [9], ответ на этот вопрос «лежит как в области математики, так и в области социологии» [9, с. 22].

«Математическую» сторону вопроса мы рассмотрим чуть позднее, а что касается «области социологии», то «вопрос верификации результатов факторного анализа решается с позиции соответствия полученной модели существующей социальной реальности» (там же с. 22). Гомогенные группы объектов исследования (в рассматриваемом случае, респондентов), по П. Бурдье, должны быть «качественно отличными друг от друга... характеризующимися типообразующими признаками, природа

которых различна, и интерпретируемыми как носители различных типов изучаемого социального феномена» [10, с. 204-205].

С «математической» точки зрения, переход от исходной базы данных к редуцированной оправдан при условии сохранения информативности. Так, Г.Л. Воронин в своей работе отмечает, что переход от матрицы «сырых» данных 12×9664 к редуцированной матрице 2×9664 вызвал снижение доля объясненной дисперсии со 100% до 41,8% [9, с. 27], что, конечно, недопустимо.

В противоположность иерархическому кластерному анализу, в методе *k*-средних исследователь сам определяет количество кластеров [11]. Особенность этого метода в том, что вначале определяются центры кластеров, а затем идет формирование групп (кластеров) в пределах заданного от центра порогового значения. Соответственно, это предполагает проведение нескольких процедур для поиска оптимальной модели; видимо, по этим двум причинам метод *k*-средних относят к итеративным методам. Верификация результатов исследования и определение оптимальности полученной модели осуществляются на уровне смысловых характеристик выделенных групп, а именно, с точки зрения того, будут ли полезны выделенные кластеры в проводимом социологическом исследовании [9, с. 29].

Заметим, что не вполне продуктивным, на наш взгляд, является верификация кластерного решения, найденного методом *k*-средних, путем визуализации данных на диаграммах рассеяния в пространстве главных факторов. В то же время, алгоритм верификации кластеров, выделенных методом *k*-средних, с помощью таблиц сопряженности суждений респондентов с интерпретацией кластеров, представляется более обоснованным.

Но основная проблема типологизации по «сырым» данным – в трудности соединения пространства латентных факторов, полученных в процессе факторизации первичных переменных, с социально-демографическими характеристиками респондентов. Аналитик не может ограничиться небольшим числом латентных факторов, носящих социально-психологический характер, необходим переход к социально-демографическим группам. Говоря словами автора цитируемой работы, «дальнейший путь социологического анализа данных предполагает соединение пространства социально-психологической адаптации, полученного в процессе факторизации первичных переменных, с социально-демографическими характеристиками респондентов [9, с. 32]. Таких групп может быть много, причем их количество определяется не столь

исследовательскими задачами, сколько объемом выборки. Так, в слу-случае дробления выборки по пяти признакам: пол (2 группы), возраст (4 группы), образование (4 группы), место жительства (4 группы), занятость (5 групп), мы получаем 2×4×4×4×5=640 групп! Такое дробление выборки, конечно, неосуществимо.

Сказанное выше актуализирует задачу поиска методики типологизации, «снимающей» указанные проблемы. Перспективным в этом отношении представляется новаторский подход французского математика-статистика и социолога подход Ж.-П. Пажеса [12, 13], который предлагает рассматривать модель данных как выборку из двух генеральных совокупностей – проблем и людей. Так, в рассматриваемом нами случае факторной структуры трудовой мобильности населения Республики Тыва генеральную совокупность людей представляют респонденты, объединенные в реально существующие объективные социально-демографические группы, а совокупность проблем – признаки территориальной и сезонной составляющих трудовой мобильности, несущие субъективный характер. При этом число групп должно быть достаточным для надежного описания факторной структуры изучаемого явления.

С учетом сказанного, в генеральной совокупности выделены группы респондентов, различающиеся по половозрастным и некоторым факторным признакам:

1) национальность – две группы;
2) пол – две группы;
3) возраст – шесть групп;
4) тип населенного пункта – три группы;
5) основное занятие – шесть групп;
6) образование – две группы;
7) самооценка материального положения – четыре группы.

Итого – 26 групп, пересекающихся по ряду перечисленных признаков.

Конфликтные признаки, определяющие составляющие трудовой мобильности респондентов, устанавливались исходя из кардинальной противоположности вариантов ответов на указанные выше вопросы анкетирования. С учетом двух альтернативных ответов «да» и «нет» (средние суждения «скорее да» и «скорее нет» объединяли с крайними «да» и «нет») имеем 6 количественных переменных – частостей суждений респондентов по факторам их трудовой мобильности.

В техническом отношении переход от матрицы «сырых» данных размером 150×1516 (количество признаков и респондентов) к

матрице вторичных данных размером 6×26 (количество факторов и групп) осуществляли путем построения таблиц сопряженности соответствующих признаков.

В результате факторного анализа по методу главных компонент с оптимизацией факторной структуры по критерию «варимакс» начальное шестимерное пространство индексов трудовой мобильности представлено двумя главными компонентами – латентными факторами F_1 и F_2 (таблица).

Судя по распределению нагрузок на эти факторы, первый из них отражает пространственную иммобильность респондентов, второй – дистанционную мобильность (наиболее значимые нагрузки в таблице выделены полужирным шрифтом).

Таблица 1 – Матрица нагрузок на главные компоненты

Индексы трудовой мобильности	**Главные компоненты**	
	F_1	F_2
Индекс территориальной мобильности x_1	**-0,828**	0,542
Индекс территориальной иммобильности x_2	**0,839**	-0,523
Индекс сезонной мобильности x_3	**-0,936**	0,323
Индекс сезонной иммобильности x_4	**0,950**	-0,290
Индекс дистанционной мобильности x_5	-0,372	0,920
Индекс дистанционной иммобильности x_6	0,350	-0,927

В наглядном виде распределение нагрузок индексов трудовой мобильности на главные компоненты до и после вращения представлено на рисунке 1 и 2 в виде диаграммы рассеяния – карты «Неба» по Ж.-П. Пажесу.

а *б*

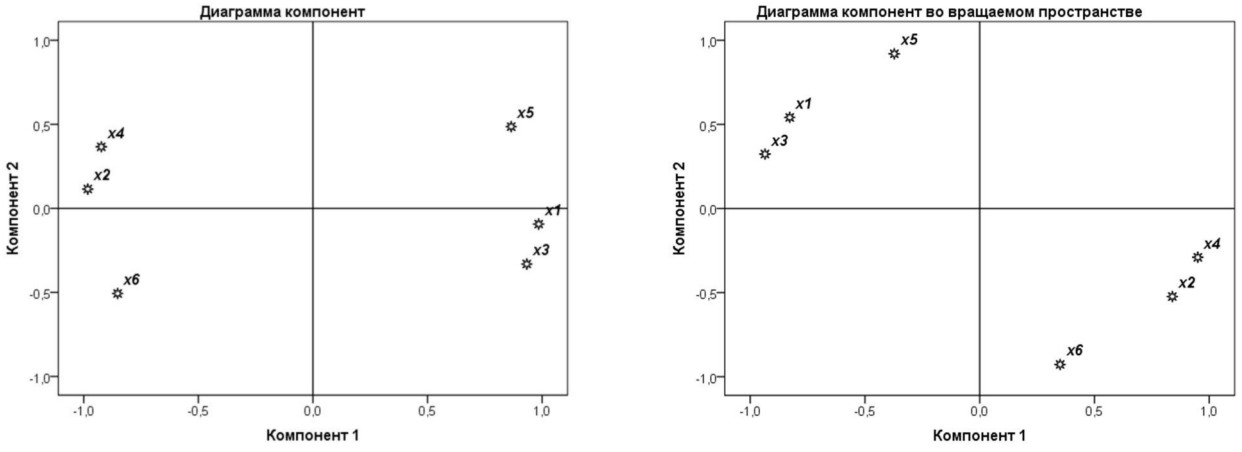


Рисунок 1 – Карта «Неба»: *а* – до оптимизации факторной структуры; *б* – после вращения факторного пространства по критерию «варимакс»

«Звездами» на карте «Неба» (рисунок 1) являются различные аспекты трудовой мобильности населения Тывы. Местоположение каждой «звезды» однозначно определяется значениями факторных

нагрузок. Интерпретация главных компонент определяется исходны-исходными признаками, корреляция которых с ними превышает величины 0,7. Первая главная компонента, объясняющая большую часть разброса суждений респондентов (57,1%) – ось, дифференцирующая элементы выборочной совокупности по отношению к территориальной и сезонной составляющим трудовой мобильности. Вторая главная компонента, объясняющая 41,0% общей дисперсии – ось, вдоль которой элементы выборки размещаются в соответствии с позицией по отношению к дистанционной мобильности. Две первые главные компоненты суммарно объясняют почти 100% общей дисперсии и адекватно отражают трудовую мобильность населения Тывы.

Описанный метод позволяет показать размещения на плоскости латентных факторов не только индексов, которые определяют содержательную интерпретацию осей, но и групп респондентов. На рисунке 2 приведены размещения социальных групп, различающихся по половозрастным признакам, месту жительства, материальному положению, роду деятельности и уровню образования в пространстве трудовой мобильности.

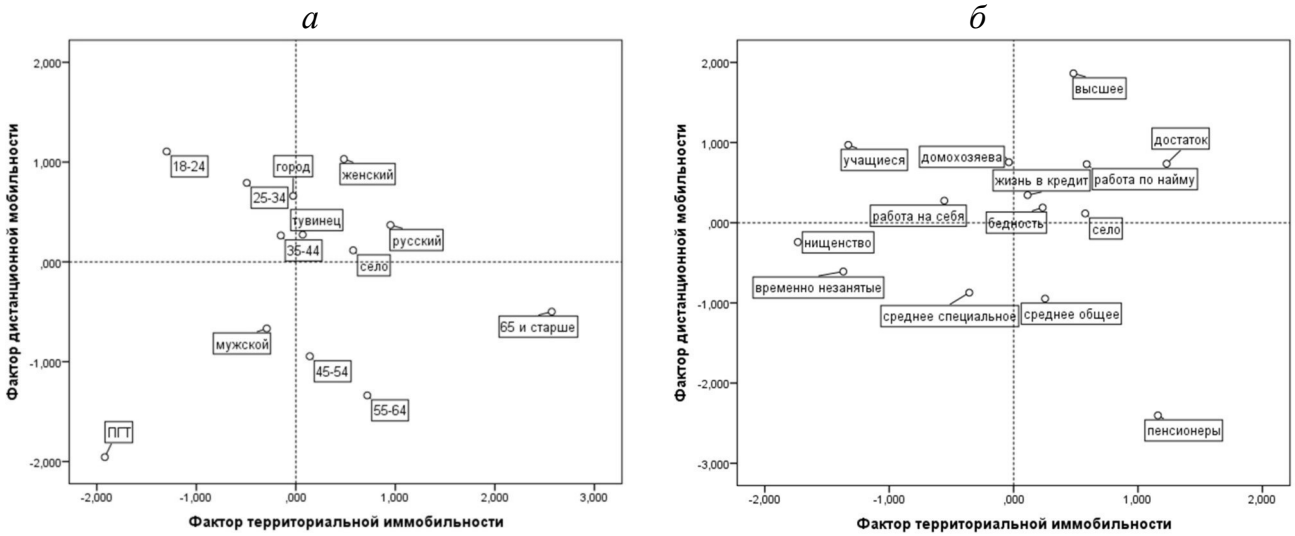


Рисунок 2 – Карта «Земли» социальных групп населения Тывы: *а* – различающихся по половозрастным признакам и месту жительства; *б* – различающихся по материальному положению, роду деятельности и уровню образования

На карте «Земли» размещаются социальные группы в зависимости от величины средних по группе факторных весов. При интерпретации результатов многомерного анализа необходимо рассматривать обе карты, поскольку между ними существует взаимнооднозначное соответствие. Тем самым, можно

проанализировать дифференциацию групп населения Тывы по всей совокупности типов трудовой мобильности/иммобильности.

Как видно из приведенных выше рисунков, наибольшую мобильность (как территориальную, так и дистанционную) демонстрируют городские жители в возрасте от 18 до 44 лет, причем для мужчин более характерна территориальная мобильность, нежели дистанционная, в отличие от женщин, которые в большей степени склонны к удаленной работе. По роду деятельности наиболее мобильны учащиеся, домохозяева, а также работающие на себя.

Наименьшая степень трудовой мобильности характерна для людей среднего и старшего возраста (45-64 года), пенсионеров. Жители ПГТ, временно незанятые группы населения положительно относятся к переезду в другой город или село республики, однако работать удаленно не выражают готовности.

Таким образом, данный метод позволяет продемонстрировать размещение на плоскости латентных факторов не только переменных, определяющих содержательную интерпретацию осей (карта «Неба»), но и групп респондентов в соответствии с осредненными по группе факторными весами – координатами местоположения группы по каждой оси (карта «Земли»), что является заменой кластерного анализа.

Предлагаемая методика факторно-кластерного анализа результатов массовых опросов апробирована в ряде работ и показала свою эффективность [14-16].

Авторы выражают благодарность профессору, доктору экономических наук В.Г. Шуметову за плодотворное участие в обсуждении результатов.

Список литературы

1. Рынок труда и проблемы занятости в регионе (на примере Республики Тыва) / Отв. ред. З.Т. Голенкова, Ю.В. Голиусова // Информационно-аналитический бюллетень. М.: Институт социологии ФНИСЦ РАН. 2019. № 1.
2. Фомина Е.Е. Применение факторного анализа для обработки результатов анкетирования // Социосфера. 2016. № 3. С. 122-127.
3. Фомина Е.Е. Факторный анализ и категориальный метод главных компонент: сравнительный анализ и практическое применение для

обработки результатов анкетирования // Гуманитарный вестник. 2017. Вып. 10. С. 1-16.
4. Фомина Е.Е., Жиганов Н.К. Методика обработки результатов анкетирования с использованием методов многомерной и параметрической статистики // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Социально-экономи-ческие науки. 2017. № 1. С. 106-115.
5. Фомина Е.Е. Использование методов многомерной статистики для анализа социальной и экономической информации // Экономика. Социология. Право. 2018. № 2 (10). С. 61-67.
6. Толстова Ю.Н., Воронина Н.Д. О необходимости расширения понятия социологического измерения // Социологические исследования. 2012. № 7. С. 67–77.
7. Зангиева И.К., Ротмистров А.Н. Сравнительный анализ способов проведения факторного анализа на порядковых переменных // Мониторинг общественного мнения: Экономические и социальные перемены. 2018. № 3. С. 29-46.
8. Алексеёнок А.А., Каира Ю.В. Возможности метода кластерного анализа для классификации населения региона по социальным показателям бедности // Среднерусский вестник общественных наук. 2020. Т. 15. № 3. С. 151-165.
9. Воронин Г.Л. Еще раз о «кластерах на факторах» // Социологический журнал. 2010. « 3. С. 21-24.
10. Бурдье П. Социология политики / Пер. с фр. / Сост., общ. ред. р предисл. Н.А. Шматко. М.: Socio-Logos, 1993. 336 с.
11. Факторный, кластерный и дискриминантный анализ: Пер. с англ. / Дж.-О. Ким, Ч.У, Мьюллер, У.Р. Клекка и др.; Под ред. И.С. Енюкова. М.: Финансы и статистика, 1989. 215 с.
12. Пажес Ж.-П. Конфликты и общественное мнение. Новая попытка объединить социологов и математиков // Социол. исслед. 1991. № 7. С. 107-115.
13. Pages J.P., Brenot J., Barny M.H. Factor Analysis and Risk Perception // Applied Multivariale Analysis in SAR and Environmental Studies. Brussels and Luxemburg, 1991, pp. 207-245.
14. Анисимова Т.Г., Шуметов В.Г. Исследование структуры факторов адаптации современного студенчества к обучению в вузе методами многомерной статистики // Управление в условиях динамично развивающегося общества: материалы IV Орловских

социологических чтений 7 декабря 2012 г. - Орел: Изд-во ОФ РАНХиГС, 2013. - С. 171-175
15. Шуметов В.Г., Лясковская О.В. О применении количественных методов анализа в прикладных социологических исследованиях: проблемы и пути их решения // Среднерусский вестник общественных наук. 2014. № 2. С. 74–84.
16. Опыт количественного анализа результатов анкетирования студентов по вопросам качества обучения: методика, модели, перспективы / Т.И. Гуляева, А.С. Коломейченко, Н.В. Польшакова, В.Г. Шуметов, А.С. Яковлев // Интеграция образования. 2019. Т. 23. № 2. С. 284–302.
17. Социально-стратификационные процессы в Республике Тыва: [монография] / [З.Т. Голенкова и др.]; отв. ред. З.Т. Голенкова, Ю.В. Голиусова, П.Е. Сушко; ФНИСЦ РАН. — М.-Кызыл: ФНИСЦ РАН, 2020. — 128 с.

УДК 519.862.6

Базилевский Михаил Павлович
кандидат технических наук,
доцент, Иркутский государственный университет путей сообщения
Россия, г. Иркутск

Караулова Анна Витальевна
аспирант,
Иркутский государственный университет путей сообщения
Россия, г. Иркутск

КАЧЕСТВЕННАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СТЕПЕНИ НЕЛИНЕЙНОСТИ ОБЪЯСНЯЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЯХ

Аннотация. *Для количественной оценки степени нелинейности объясняющих переменных в квазилинейных моделях регрессии существуют критерии нелинейности «по длине дуги». Статья посвящена исследованию связи между значениями этих критериев и качественной характеристикой степени нелинейности. Дана новая геометрическая интерпретация критерия нелинейности «по длине дуги». Введены угловые критерии нелинейности «по длине дуги», которые более просты для понимания, чем разработанные ранее. Сформулирована шкала соответствия между значениями угловых и традиционных критериев нелинейности «по длине дуги» и качественными характеристиками степени нелинейности.*

Ключевые слова: *регрессионный анализ, квазилинейная регрессия, критерий нелинейности, качественная характеризация.*

Bazilevskiy Mikhail Pavlovich
candidate of technical sciences
docent, Irkutsk state transport university
Russia, Irkutsk

Karaulova Anna Vitalievna
graduate student, Irkutsk state transport university
Russia, Irkutsk

QUALITATIVE CHARACTERIZATION OF THE NON-LINEARITY DEGREE FOR EXPLANATORY VARIABLES IN QUASI-LINEAR REGRESSION MODELS

Abstract. *To quantify the degree of nonlinearity of explanatory variables in quasi-linear regression models there are criteria of nonlinearity «along the arc length». The article is devoted to the study of the connection between the values of these criteria and the qualitative characteristic of the degree of nonlinearity. A new geometrical interpretation of the non-linearity criterion «along the arc length» is given. Angular criteria of nonlinearity «along the arc length» are introduced, which are easier to understand than those developed earlier. The scale of correspondence between the values of the angular and traditional criteria of nonlinearity «along the arc length» and the qualitative characteristics of the degree of nonlinearity is formulated.*

Keywords: *regression analysis, quasilinear regression, nonlinearity criteria, qualitative characterization*

При построении квазилинейных регрессионных моделей [1, 2] возникает проблема выбора их структурной спецификации. Полученное в результате оценивания регрессионное уравнение может обладать высокими предсказательными способностями, но при этом быть в значительной степени нелинейным, что приводит к невозможности его интерпретации. Таким образом, как и предусматривает методология математического моделирования, при построении регрессии нужно стараться соблюдать баланс между её точностью и сложностью.

Для количественной оценки степени нелинейности квазилинейных регрессий в работах [3–5] были разработаны критерии нелинейности «по площади» и «по длине дуги». Они носят относительный характер, поскольку отражают меру отличия конкретной модели от линейной зависимости. При этом открытым остается вопрос о связи значений критериев нелинейности с качественной характеристикой степени нелинейности. Цель работы заключается в поиске ответа на этот вопрос для критерия нелинейности «по длине дуги».

Рассмотрим модель квазилинейной регрессии

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_{s_j}(x_{ij}) + \varepsilon_i, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

где y_i, $i=\overline{1,n}$ – значения объясняемой переменной; $x_{ij}>0$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ – значения m объясняющих переменных; ε_i, $i=\overline{1,n}$ – ошибки аппроксимации; $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_m$ – неизвестные параметры модели; n – количество наблюдений; f_{s_j} – преобразование с номером $1\le s_j\le l$ для j-й объясняющей переменной, выбранное из набора $F(x)=\{f_1(x),...,f_l(x)\}$, состоящего из непрерывных на отрезках $x_j\in\left[x^j_{\min},x^j_{\max}\right]$ функций, где $x^j_{\min}=\min\{x_{1j},x_{2j},...,x_{nj}\}$, $x^j_{\max}=\max\{x_{1j},x_{2j},...,x_{nj}\}$, $j=\overline{1,m}$.

Поскольку квазилинейные регрессии линейны по неизвестным параметрам, то для их оценивания можно воспользоваться методом наименьших квадратов (МНК). Пусть оцененная с помощью МНК модель (1) имеет вид:

$$y^*=\alpha^*_0+\sum_{j=1}^{m}\alpha^*_j f_{s_j}(x_j), \qquad (2)$$

где y^* – переменная, которой обозначаются расчетные по модели значения; $\alpha^*_0,\alpha^*_1,...,\alpha^*_m$ – оцененные параметры модели.

Критерий нелинейности «по длине дуги» для *j*-й объясняющей переменной x_j уравнения (2) определяется по формуле

$$NC_L(j)=l_\varphi(j)/l_g(j), \qquad (3)$$

где $l_\varphi(j)$ – длина прямой $\varphi_j(x_j)$, соединяющей точки $M_j(x^j_{\min},\alpha^*_j f_{s_j}(x^j_{\min}))$ и $N_j(x^j_{\max},\alpha^*_j f_{s_j}(x^j_{\max}))$; $l_g(j)$ – длина кривой $g_j(x_j)=\alpha^*_j f_{s_j}(x_j)$ на отрезке $[x^j_{\min},x^j_{\max}]$.

Критерий нелинейности «по длине дуги» (3) принимает значения от 0 до 1. Если $NC_L(j)=1$, то *j*-я объясняющая переменная преобразована линейно. Чем ближе значение критерия к 0, тем сильнее степень нелинейности преобразованной переменной.

Рассмотрим для *j*-й объясняющей переменной кривую $g_j(x_j)$ длиной $l_g(j)$ и прямую $\varphi_j(x_j)$ длиной $l_\varphi(j)$ (рисунок 1).

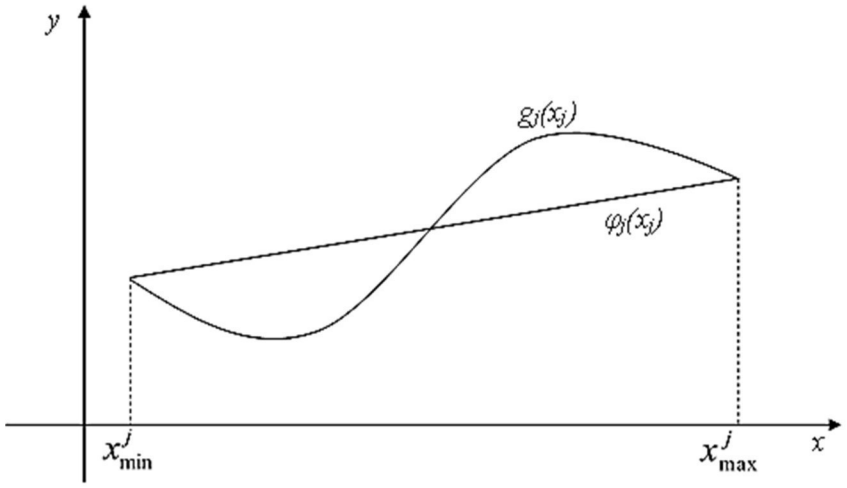


Рисунок 1 – Кривая $g_j(x_j)$ и прямая $\varphi_j(x_j)$

Через точку с координатами $\left(\frac{x^j_{\min}+x^j_{\max}}{2}, \varphi_j\left(\frac{x^j_{\min}+x^j_{\max}}{2}\right)\right)$ проведем вектор $\vec{v}_j$, перпендикулярный прямой $\varphi_j(x_j)$. «Натянем» кривую $g_j(x_j)$ вдоль направления полученного вектора. Получим равнобедренный треугольник (рисунок 2).

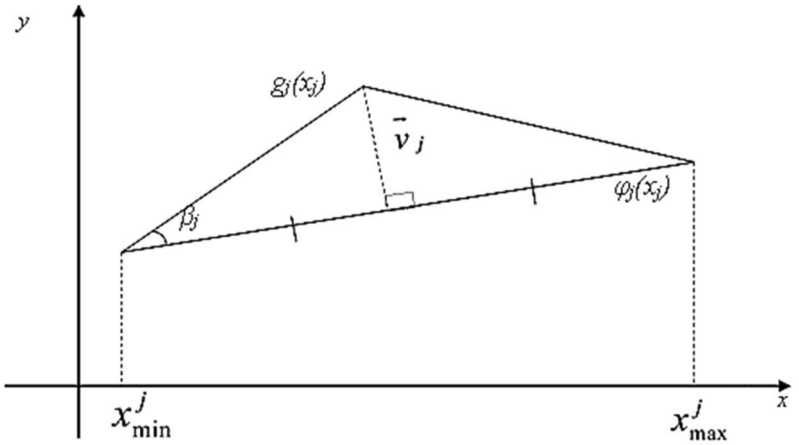


Рисунок 2 – Равнобедренный треугольник

Обозначим его боковые стороны a_j, а углы при основании β_j. Понятно, что сумма боковых сторон равна длине кривой $g_j(x_j)$, т.е. $2a_j = l_g(j)$. Найдем косинус угла при основании:

$$\cos\beta_j = \frac{0{,}5l_\varphi(j)}{a_j} = \frac{0{,}5l_\varphi(j)}{0{,}5l_g(j)} = NC_L(j). \qquad (4)$$

Отсюда следует новая интерпретация $NC_L(j)$: критерий нелинейности «по длине дуги» для *j*-й объясняющей переменной равен косинусу угла β_j равнобедренного треугольника, полученного путем натяжения кривой $g_j(x_j)$ вдоль направления вектора $\vec{v}_j$.

В соответствии с (4) можно ввести характеристики

$$\beta_j = \arccos\left(NC_L(j)\right), \qquad j = \overline{1,m}, \tag{5}$$

которые будем называть угловыми критериями нелинейности объясняющих переменных «по длине дуги». Эти критерии принимают значения из промежутка $[0, \pi/2)$. Если $\beta_j = 0$, то преобразование *j*-й объясняющей переменной является линейным, а при $\beta_j \to \frac{\pi}{2}$ такое преобразование в значительной степени нелинейно. Угловые критерии более просты для понимания, чем (3), поскольку показывают величину угла равнобедренного треугольника, выраженную в градусах или радианах.

Зависимость угловых критериев нелинейности β_j от традиционных $NC_L(j)$ представлена на рисунке 3.

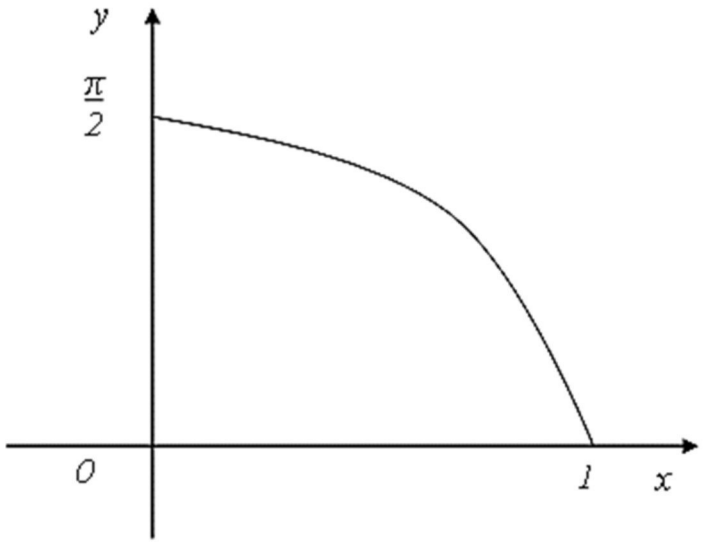


Рисунок 3 – Зависимость β_j от $NC_L(j)$

На основе (4) сформулирована шкала (таблица 1) соответствия между значениями угловых β_j и традиционных $NC_L(j)$ критериев нелинейности «по длине дуги» и качественными характеристиками степени нелинейности.

Таблица 1 - Шкала соответствия

Степень нелинейности	Угловой критерий β_j (в градусах)	$NC_L(j)$
Очень слабая	0 – 10	0, 9848 – 1
Слабая	10 – 20	0,9397 – 0,9848
Средняя	20 – 30	0,866 – 0,9397
Сильная	30 – 40	0,766 – 0,866
Очень сильная	40 – 90	0 – 0,766

С помощью разработанной шкалы можно давать качественную характеризацию степени нелинейности объясняющих переменных в квазилинейных регрессионных моделях.

Список литературы

1. Носков, С.И. Построение регрессионных моделей с использованием аппарата линейно – булевого программирования / С.И. Носков, М.П. Базилевский - Иркутск: ИрГУПС, 2018. - 176 с.
2. Носков, С.И. Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных / С.И. Носков – Иркутск: Облинформпечать, 1996. – 321 с.
3. Базилевский, М.П. Критерии нелинейности квазилинейных регрессионных моделей / М.П. Базилевский // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. - 2018. – Т 6 - № 4 (23). - С. 185-195.
4. Базилевский, М.П. Критерии нелинейности многофакторных квазилинейных регрессий / М.П. Базилевский // Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: материалы II Всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – 2019. – С. 210-213.
5. Базилевский, М.П. Предварительное оценивание степени нелинейности структурных спецификаций квазилинейных регрессий / М.П. Базилевский, А.В. Караулова // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. – 2020. – Т. 5. – С. 49-52.

УДК 338:519.25

Барбашова Екатерина Вадимовна
кандидат экономических наук,
доцент кафедры социологии и информационных технологий,
Среднерусский институт управления – филиал РАНХиГС
Россия, г. Орел

Лясковская Ольга Вадимовна
кандидат социологических наук, доцент,
руководитель отдела анализа и документирования технологий,
ООО «Технолоджи Лайн»
Россия, г. Москва

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ХАРРИНГТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ РЕГИОНОВ ЦФО ПО ПОКАЗАТЕЛЯМ СИСТЕМЫ ЗДРАВООХРАНЕНИЯ

Аннотация. *В статье изложена методика шкалирования в многопараметрических задачах экономики, основанная на нелинейной функции желательности Харрингтона. Приведен пример, иллюстрирующий преимущества психофизического подхода к преобразованию показателей социально-экономической природы перед линейным нормированием.*

Ключевые слова: *психофизическое шкалирование, многопараметрические задачи, показатели системы здравоохранения, индексный подход, регионы Центрального Федерального округа, факторный анализ, функция Харрингтона, зоны желательности, региональный рейтинг.*

Barbashova Ekaterina Vadimovna
Candidate of Economic Sciences
Associate Professor of the Department of Sociology of Management and Information Technologies, Central Russian Institute of Management - Oryol Branch of RANEPA
Russia, Orel

Lyaskovskaya Olga Vadimovna
Candidate of Sociological Sciences, Associate Professor

Head of Technology Analysis and Documentation Department, OOO "Technology Line"
Russia, Moscow

APPLICATION OF THE NONLINEAR HARRINGTON FUNCTION TO SOLVE THE PROBLEM OF CLASSIFYING THE REGIONS OF THE CENTRAL FEDERAL DISTRICT BY HEALTH SYSTEM INDICATORS

Annotation. *The article describes a scaling technique in multiparametric problems of economics based on the nonlinear Harrington desirability function. An example is given illustrating the advantages of the psychophysical approach to the transformation of indicators of socio-economic nature over linear rationing.*

Keywords: *psychophysical scaling, multiparametric tasks, health system indicators, index approach, regions of the Central Federal District, factor analysis, Harrington function, desirability zones, regional rating.*

Данное сообщение дополняет пленарный доклад, достаточно полное изложение которого приведено в материалах конференции, что избавляет авторов от обоснования актуальности перехода от линейного к нелинейному шкалированию показателей социально-экономической природы в задачах экономики. Поэтому ограничимся лишь указанием направлений совершенствования композитных индексов в многопараметрических экономических задачах: 1) переход от линейного шкалирования к нелинейному, учитывающему характер связи свойства частных индикаторов с их значениями, 2) обоснованное назначение границ вербальных уровней индикаторов и 3) обоснование вида объединения частных индексов в композитный и назначения их весов.

Как отмечалось в пленарном докладе, решение первой задачи мы видим в переходе к нелинейным преобразованиям, учитывающим их природу.

Наиболее распространенным нелинейным преобразованием показателей с односторонним ограничением является пятиинтервальная шкала желательности Харрингтона [1]. Преимущества использования этой шкалы в случае показателей экономической природы в том, что она относится к психофизическим шкалам, и ее назначение – установление соответствия между

натуральными значениями частных показателей и психологическими параметрами.

Преобразование показателей осуществляется с помощью функции желательности Харрингтона $d(y)$, которая задается уравнением $d=\exp[-\exp(-y)]$, где y – кодированная переменная, линейно связанная с натуральными значениями частных показателей. Графически эта функция отображается логистической *S*-образной кривой, отражающей объективно действующие законы развития систем.

Исключительно полезным является то свойство преобразования Харрингтона, что тогда как шкала желательности – пятиуровневая, для расчета параметров преобразования достаточно располагать всего двумя «реперными» точками, отвечающими верхней и нижней границе оценки «удовлетворительно». Выбор границ этого центрального уровня производится исследователем, но можно воспользоваться и формальным («статистическим») приемом, предложенным в работах [2-4].

Продемонстрируем характерные свойства функции желательности Харрингтона на примере построения регионального индекса деятельности системы здравоохранения по эмпирической базе, представленной в публикации [5] и посвященной оценке системы здравоохранения в России. Авторы данной публикации для измерения деятельности системы здравоохранения предлагают композитный индекс – интегральный показатель, который объединяет отдельные аспекты деятельности системы здравоохранения: доступность, качество и результативность. Эти аспекты количественно определяются как «среднее арифметическое значение индексов всех входящих в блок базовых показателей, которые были перед этим преобразованы по методу Min-Max», а композитный индекс «рассчитывается как невзвешенное среднее арифметическое под-индексов по всем аспектам» [5, с. 39]. Наконец, индикаторы, составляющие «под-индексы», рассчитывались по формулам линейного соответствия их значений интервалу изменения региональных показателей от наименьшего до наибольшего, так что и «под-индексы», и композитный индекс деятельности системы здравоохранения варьировали в закрытом диапазоне [0…1].

Таким образом, авторами реализован традиционный подход к формированию обобщенных аддитивных показателей – использовано линейное нормирование индикаторов на реальный диапазон их

изменений с последующим объединением частных индикаторов в ад-аддитивные индексы.

Используемая нами методика построения регионального индекса деятельности системы здравоохранения на основе функции желательности Харрингтона содержала следующие этапы. Вначале из исходной выборки объемом 84 субъекта РФ выделяли однородную подвыборку объемом 78 регионов, для которой распределение всех трех составляющих композитного индекса не противоречило нормальному закону[2]. На следующем этапе методики определяли частные функции желательности трех составляющих композитного индекса деятельности по формулам (1) и (2):

$$d = \exp(-\exp(-z)); \quad (1)$$

$$z = (x - x_0)/(x_1 - x_0), \quad (2)$$

где z – кодированные значения информативного показателя, представляющие собой безразмерные величины; x – значение показателя; x_0 и x_1 – нижняя и верхняя границы зоны «удовлетворительно» (реперные точки).

Нижнюю и верхнюю границы зоны «удовлетворительно» определяли по формуле

$$x_0 = x_{ср};\ x_1 = x_{ср} + \text{СКО}\ (x), \quad (3)$$

где $x_{ср}$ – среднее арифметическое значение, а СКО (x) – стандартное отклонение показателя (обе статистики рассчитывали по однородной выборке[3]).

Две реперные точки, определяемые условиями (3), однозначно задают трехзональную функцию желательности «плохо – удовлетворительно – хорошо», но в дальнейшем переходили к пятизональной шкале желательности с оценками от «очень плохо» до «очень хорошо», задавая на ней зоны «очень плохо» (0,00–0,20),

---

[2] Проверку распределений на соблюдение нормального закона проводили по критерию Коломогорова-Смирнова, а также путем построения *Q-Q*-графиков в пакете статистических программ анализа данных социальных наук *SPSS*, версия 22.

[3] Из полной выборки субъектов РФ исключены шесть регионов: Чукотский АО, Магаданская область, Ненецкий АО, ХМАО, Республика Саха (Якутия) и Ямало-Ненецкий АО, для которых индексы доступности и/или качества превышали значение 0,6. В то же время, в однородной выборке сохранили данные по Псковской области (индекс доступности 0,148), Республике Тыва (индекс результативности 0,164) и Республике Ингушетии (индекс результативности 0,944).

«плохо» (0,20–0,37), удовлетворительно (0,37–0,63), «хорошо» (0,63–0,80) и «очень хорошо» (0,80–1,00).

Полученные частные и обобщенная функции желательности в графическом виде представлены на рисунке 1[4].

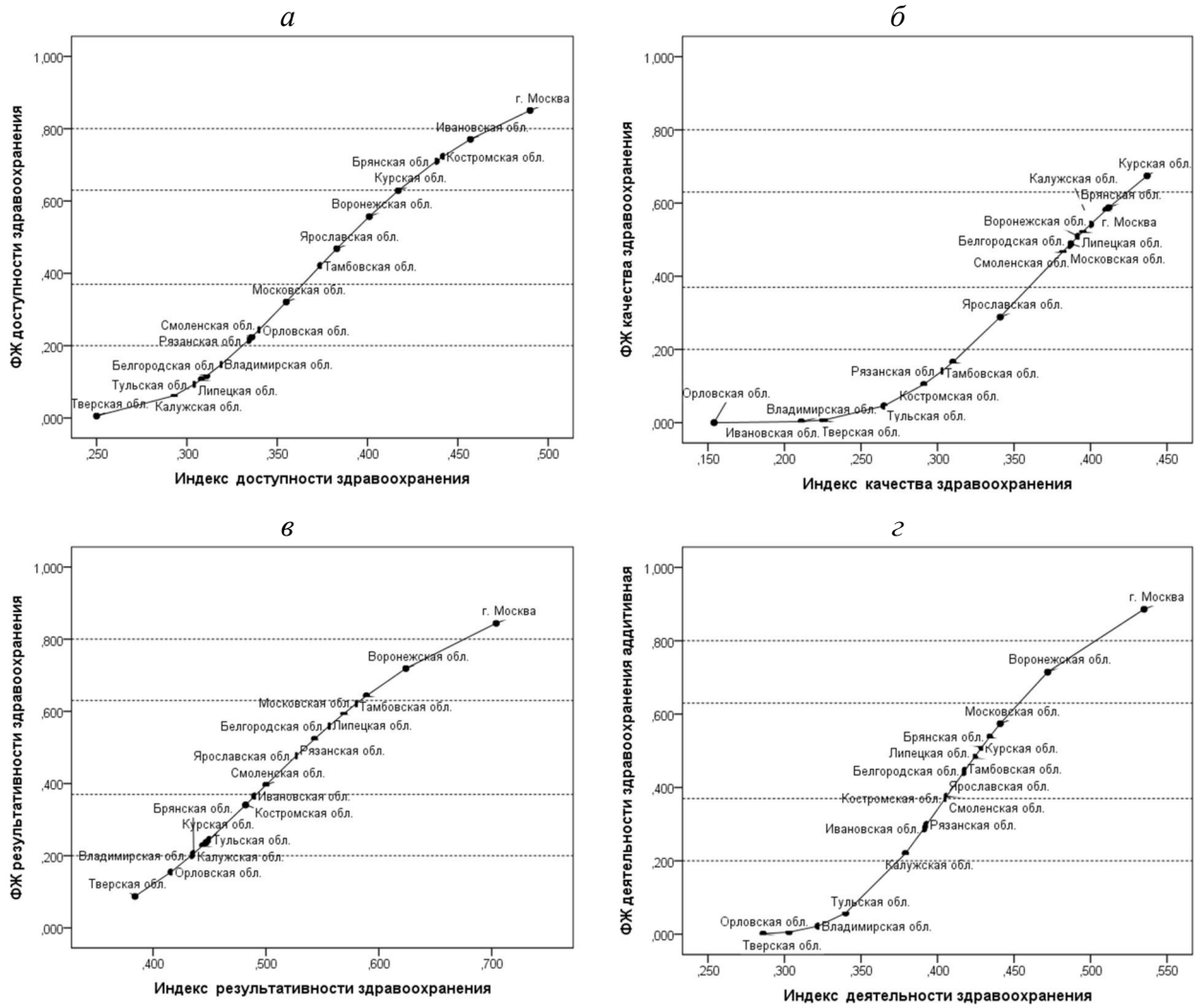


Рисунок 1 – Функция желательности Харрингтона индексов деятельности системы здравоохранения: *а* – индекс доступности; *б* – индекс качества; *а* – индекс результативности; *а* – композитный индекс деятельности, рассчитанный как среднее арифметическое частных индексов (аддитивная форма свертки)

Поясним рисунок. Функции желательности построены по данным для всех регионов, вошедших в однородную выборку, однако на диаграммах показаны все регионы Центрального Федерального округа, включая Москву. Все функции желательности отображаются

[4] Обобщенную функцию желательности строили по однородной выборке измерений композитного индекса деятельности системы здравоохранения в предположении аддитивности индексов доступности, качества и результативности, по формуле среднего арифметического, принимая равные веса региональных индексов.

логистическими *S*-образными кривыми, но в центральной зоне «удо- «удовлетворительно» они практически линейны. Точечные горизонтальные линии разграничивают зоны «очень хорошо», «хорошо», «удовлетворительно», «плохо» и «очень плохо».

Примечательно, что связь всех четырех региональных рейтингов с соответствующими индексами также отражается *S*-образными кривыми (рисунок 2), что является дополнительным доводом в пользу принятия гипотезы нелинейности функции желательности[5].

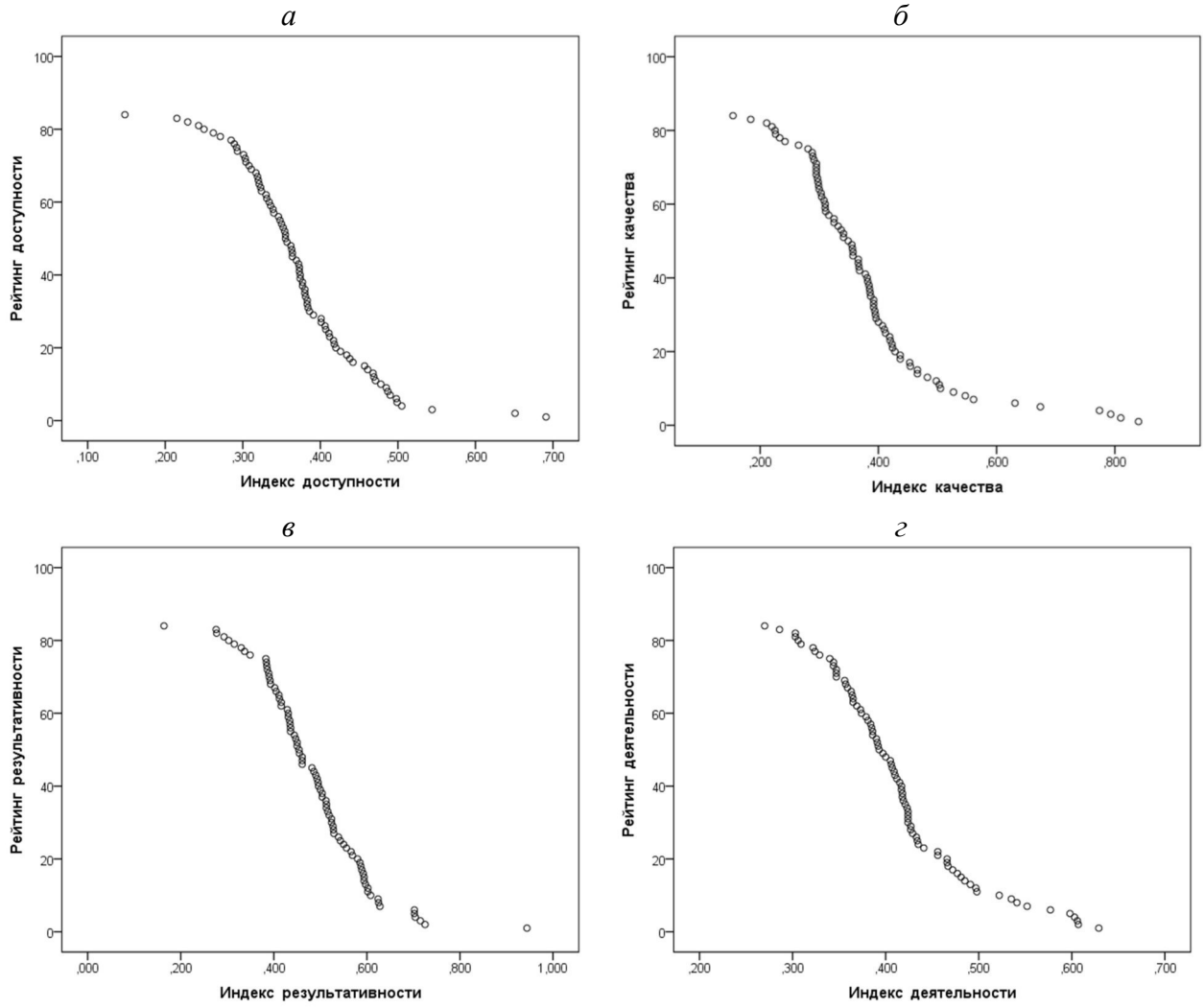


Рисунок 2 – Связь региональных рейтингов с индексами деятельности системы здравоохранения: *а* – индекс доступности; *б* – индекс качества; *а* – индекс результативности; *а* – композитный индекс деятельности, рассчитанный как среднее арифметическое частных индексов (аддитивная форма свертки)

Рисунок 1 иллюстрирует еще одно положительное свойство функции желательности Харрингтона: она применима и за пределами значений «обучающей» выборки, тогда как линейная функция

[5] На диаграммах рисунка 2 рейтинг 1 отвечает наибольшему значению индекса, рейтинг 84 – наименьшему.

желательности таким свойством не обладает. Примером является г. Москва: данный субъект РФ не вошел в обучающую выборку, но его оценки выполнены и фигурируют на всех четырех диаграммах рисунка.

В заключение остановимся на последней из задач, сформулированных в начале статьи, – задаче обоснования вида объединения частных индексов в композитный и назначения их весов. «Статистический» подход к решению этой задачи детально рассмотрен в публикации [6]; здесь мы проиллюстрируем этот подход на примере построения композитного индекса деятельности системы здравоохранения.

Традиционно композитный индекс формируется как аддитивная свертка частных индексов, именно по этой схеме вычислен индекс деятельности системы здравоохранения на уровне регионов в работе [5]. Так, если для Орловской области региональный индекс доступности системы здравоохранения составил 0,340, индекс качества 0,154 и индекс результативности 0,416, то индекс деятельности системы здравоохранения 0,303 определен как среднее арифметическое этих трех индексов: (0,340+0,154+0,416)/3=0,303. Тем самым существенные недостатки в качестве региональной системы здравоохранения частично «компенсируются» более высокой оценкой ее результативности. Однако индексы слабо коррелируют: хотя, например, коэффициент корреляции Пирсона 0,272 между индексом доступности и индексом качества и характеризуется уровнем двусторонней значимости 0,016, логичнее принять гипотезу их статистической независимости. Это отвечает и сути индексов – доступность системы здравоохранения отнюдь не предполагает ее качество и результативность.

При расчете же по формуле среднего геометрического для композитного индекса Орловской области получаем существенно более низкую оценку деятельности региональной системы здравоохранения – всего лишь 0,279 взамен 0,303, т.е. разница составляет 7,9%. Отличие в оценках весьма заметное. Аналогично, более низкими оценками характеризуется Ивановская область, для которой расчеты по формулам среднего арифметического и среднего геометрического составляют 0,391 и 0,370 соответственно. Подобная

закономерность прослеживается практически для всех регионов Цен-Центрального федерального округа[6].

С формальной точки зрения, выбор между аддитивной и мультипликативной формой свертки частных индексов в композитный осуществляется с помощью факторного анализа, чаще всего проводимого по методу главных компонент (МГК). Поскольку однофакторное решение оказалось мало информативным (один главный фактор объясняет всего 46,1% общей дисперсии), нами принята двухфакторная модель, объясняющая 77,5% дисперсии. После оптимизации факторной структуры в результате вращения главных компонент по критерию «варимакс» выделены два главных фактора: фактор качества региональной системы здравоохранения F_1, объясняющий 41,0% общей дисперсии, и фактор результативности региональной системы здравоохранения F_2, объясняющий 36,5% дисперсии. Первый из них коррелирует с индексом качества, второй – с индексом результативности. Третий индекс – индекс доступности, коррелирует в обоими главными факторами, в большей степени с фактором F_1, в меньшей степени с фактором F_2. Понятно, что при переходе к трехфакторной модели проявит себя и фактор доступности, наиболее сильно коррелирующий с индексом доступности, но это – тривиальное решение, не имеющее классификационного значения.

В традиционном варианте линейного преобразования переменных, по результатам факторного анализа в качестве классифицирующих признаков следует использовать два главных фактора F_1 и F_2, с одной стороны, и два тесно связанных с ними индекса – индекс качества и индекс результативности, с другой, тогда об устойчивости полученной классификации можно было бы судить по совпадению классификации регионов ЦФО по этим парам индикаторов. В предположении нелинейности классифицирующими признаками выступают функции желательности $ФЖ_{качест}$ и $ФЖ_{результ}$. Сведение факторной структуры к двум главным факторам позволяет рассчитывать на адекватное отражение субъективного восприятия представления регионов ЦФО на плоскости этих двух частных функций желательности, при этом проверку устойчивости классификации можно проводить как визаульно, по диаграмме рассеяния, так и формальным путем, по совпадению результатов

[6] Если различие в оценке рейтинга региональной системы здравоохранения заметно на «индивидуальном» уровне, то «в среднем» оно не столь существенно: коэффициент корреляции рейтингов регионов ЦФО, рассчитанных по «аддитивной» и «мультипликативной» формулам, составляет 0,985, а для индексов еще выше – 0,990.

кластерного анализа двумя методами – иерархическим по методу Уо-Уорда и итеративным по методу *k*-средних[7].

Что касается построения композитного индикатора желательности деятельности региональной системы здравоохранения, то в его состав следует включить с равными весами все три составляющие – $ФЖ_{доступ}$, $ФЖ_{качест}$ и $ФЖ_{результ}$, т.е. по формуле невзвешенного геометрического среднего.

Результаты отнесения регионов ЦФО к зонам желательности по частным и композитному индикатору желательности функционирования региональной системы здравоохранения приведены в таблице.

Таблица – 1 Отнесение регионов к зонам желательности по частным и композитному индикатору желательности функционирования системы здравоохранения

Зона желательности	Регионы, ранжированные в порядке повышения			
	доступности	Качества	результативности	деятельности
Очень плохо	Тверская обл. Калужская обл. Тульская обл. Липецкая обл. Белгородская обл. Владимирская обл.	Орловская обл. Владимирская обл. Тверская обл. Ивановская обл. Тульская обл. Костромская обл. Рязанская обл. Тамбовская обл.	Тверская обл. Орловская обл.	Тверская обл. Орловская обл. Владимирская обл. Тульская обл.
Плохо	Рязанская обл. Смоленская обл. Орловская обл. Московская обл.	Ярославская обл.	Владимирская обл. Брянская обл. Калужская обл. Курская обл. Тульская обл. Костромская обл. Ивановская обл.	Калужская обл. Ивановская обл. Рязанская обл.
Удовлетворительно	Тамбовская обл. Ярославская обл. Воронежская обл. Курская обл.	Смоленская обл. Белгородская обл. Московская обл. Воронежская обл. Липецкая обл. Калужская обл. г. Москва	Смоленская обл. Ярославская обл. Рязанская обл. Белгородская обл. Липецкая обл. Московская обл.	Костромская обл. Смоленская обл. Ярославская обл. Белгородская обл. Липецкая обл. Тамбовская обл. Брянская обл.

[7] Такой прием проверки устойчивости кластерного решения был предложен в работе [Методология и практика анализа данных в управлении: методы одномерного и двумерного анализа: монография / Шуметов В.Г., Крюкова О.А.; Федеральное гос. бюджетное образовательное учреждение высш. проф. образования Российская акад. нар. хоз-ва и гос. службы при Президенте Российской Федерации (РАНХиГС), Орловский фил. Орел: Изд-во ОФ РАНХиГС, 2013. 177 с.] и в дальнейшем показал свою эффективность.

		Брянская обл.		Курская обл. Московская обл.
Хорошо	Брянская обл. Костромская обл. Ивановская обл.		Тамбовская обл. Воронежская обл.	Воронежская обл.
Очень хорошо	г. Москва		г. Москва	г. Москва

Из таблицы видно, что наиболее проблемным является достижение должного качества региональных систем здравоохранения: восемь регионов ЦФО получили оценку «очень плохо», один (Ярославская область) – оценку «плохо», восемь – «удовлетворительно» и ни одна не получила оценки «хорошо» и «очень хорошо». Желает лучшего и результативность региональных систем здравоохранения - девять регионов ЦФО характеризуются оценками «очень плохо» и «плохо». Интегральная оценка деятельности региональных систем здравоохранения несколько выше: значительная часть регионов отнесена к зоне «удовлетворительно», Воронежская область и г. Москва даже «попали» в зоны «хорошо» и «очень хорошо».

Наглядное представление о рейтинге регионов ЦФО по двум важнейшим составляющим функционирования системы здравоохранения – ФЖ качества и результативность, дает рисунок 3, построенный по результатам иерархического кластерного анализа.

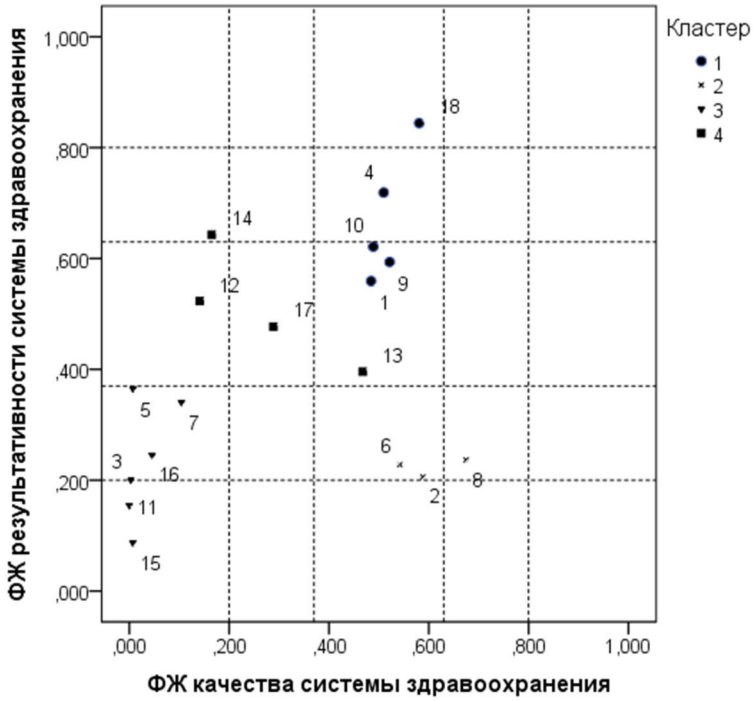


Рисунок 3 – Расположение регионов ЦФО на плоскости желательности качества и результативности системы здравоохранения. Цифры у меток регионов отвечают алфавитному порядку регионов: 1 – Белгородская обл., 2 – Брянская обл. и т.д., 18 – г. Москва

Судя по расположению регионов на плоскости желательности качества и результативности системы здравоохранения, кластер 1, включающий г. Москву (метка 18), Воронежскую (метка 4), Московскую (метка 10), Липецкую (метка 9) и Белгородскую (метка 1) области – кластер регионов ЦФО с относительно благополучно функционирующей системой здравоохранения. К этому кластеру «примыкают» еще два: кластер 2, состоящий из трех регионов (Курская, Калужская и Брянская области с метками 8, 6 и 2 соответственно) и кластер 4, объединяющий четыре региона (Смоленская, Ярославская, Тамбовская и Рязанская области с метками 13, 17, 14 и 12 соответственно). Кластер 2 может быть идентифицирован как кластер регионов с проблемной результативностью, а кластер 4 – как кластер регионов с проблемным качеством системы здравоохранения. Шесть регионов кластера 3 (Тверская, Орловская, Владимирская, Тульская, Костромская и Ивановская области с метками 15, 11, 3, 16, 7 и 5 соответственно) характеризуются проблемами и по качеству, и по результативности системы здравоохранения.

Представленный в данной работе материал демонстрирует преимущества психофизического подхода к преобразованию показателей социально-экономической природы перед линейным нормированием.

Список литературы

1. Любушин Н.П., Брикач Г.Е. Использование обобщенной функции желательности Харрингтона в многопараметрических экономических задачах // Экономический анализ: теория и практика. 2014. № 18 (370). С. 2-10.
2. Барбашова Е.В., Лясковская О.В., Польшакова Н.В Методический подход к формированию критерия комплексной оценки развития регионов на базе функции Харрнигтона // Россия: Тенденции и перспективы развития. Ежегодник: М.: ИНИОН РАН, 2020. С. 949-954.
3. Барбашова Е.В., Лясковская О.В. Интегральная статистическая оценка социально-экономического развития региона // Россия: Тенденции и перспективы развития. Ежегодник: М.: ИНИОН РАН, 2021. С. 911-917.

4. Барбашова Е.В., Чекулина Т.А., Шуметов В.Г. Статистический подход к формированию функции желательности в задачах экономико-математического моделирования // Вестник ОрелГИЭТ. 2015. 2 (32). С. 94-99.
5. Кислицына О.А., Чубарова Т.В. Оценка системы здравоохранения в России: опыт построения регионального рейтинга // Вестник Института экономики Российской академии наук. 2021. No 3. С. 35–71.
6. Шуметов В.Г. Методология анализа качества жизни на региональном уровне // Среднерусский вестник общественных наук. 2012. № 2. С. 218–226.

УДК 338:519.25

Барбашова Екатерина Вадимовна
кандидат экономических наук
доцент кафедры социологии управления и информационных технологий,
Среднерусский институт управления – Орловский филиал РАНХиГС,
Россия, г. Орел

Лясковская Ольга Вадимовна
кандидат социологических наук, доцент
руководитель отдела анализа и документирования технологий,
ООО «Технолоджи Лайн»,
Россия, г. Москва

Шуметов Вадим Георгиевич
доктор экономических наук, профессор
специалист Института развития сельских территорий,
Орловский государственный аграрный университет им. Н.В. Парахина,
Россия, г. Орел,

О ПСИХОФИЗИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ШКАЛИРОВАНИЮ В МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ (НА ПРИМЕРЕ КЛАССИФИКАЦИИ РЕГИОНОВ ЦФО ПО ПОКАЗАТЕЛЯМ СИСТЕМЫ ЗДРАВООХРАНЕНИЯ)

Аннотация. *В статье изложена методика шкалирования в многопараметрических задачах экономики, основанная на нелинейной функции желательности Харрингтона. Приведен пример, иллюстрирующий преимущества психофизического подхода к преобразованию показателей социально-экономической природы перед линейным нормированием.*

Ключевые слова: *психофизическое шкалирование, многопараметрические задачи, показатели системы здравоохранения, индексный подход, регионы Центрального Федерального округа, факторный анализ, функция Харрингтона, зоны желательности, региональный рейтинг.*

Barbashova Ekaterina Vadimovna
Candidate of Economic Sciences,
Associate Professor of the Department of Sociology of Management and Information Technologies, Central Russian Institute of Management - Oryol Branch of RANEPA,
Russia, Orel

Lyaskovskaya Olga Vadimovna
Candidate of Sociological Sciences, Associate Professor
Head of Technology Analysis and Documentation Department,
OOO "Technology Line"
Russia, Moscow

Shumetov Vadim Georgievich
Doctor of Economics, Professor
Specialist of the Institute of Rural Development, Oryol State Agrarian University named after N.V. Parakhin
Russia, Orel

ON THE PSYCHOPHYSICAL APPROACH TO SCALING IN MULTIPARAMETRIC ECONOMIC PROBLEMS (ON THE EXAMPLE OF THE CLASSIFICATION OF THE CENTRAL FEDERAL DISTRICT REGIONS BY HEALTH SYSTEM INDICATORS)

Annotation. *The article describes a scaling technique in multiparametric problems of economics based on the nonlinear Harrington desirability function. An example is given illustrating the advantages of the psychophysical approach to the transformation of indicators of socio-economic nature over linear rationing.*

Keywords*: psychophysical scaling, multiparametric tasks, health system indicators, index approach, regions of the Central Federal District, factor analysis, Harrington function, desirability zones, regional rating.*

Развитие методов анализа статистических и экспертных данных в задачах экономики и управления привело к новой парадигме в этой области, где основополагающей является методология. Резко повысилась роль моделирования – от отдельных систем аксиом

произошел переход к системам моделей, стали учитываться свойства данных (в том числе интервальных и нечетких), изменилось отношение к вопросам устойчивости (робастности) выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей. Изменилась и оцениваемые величины – от параметров распределения произошел переход к характеристикам, функциям и плотности распределений, зависимостям, правилам диагностики и др. [1].

Практически параллельно становлению новой парадигмы статистического анализа данных в экономике, происходит переход от парадигмы анализа результатов отдельных исследований к мета-анализу накопленных знаний, под которым понимается «статистический анализ большой совокупности результатов анализа данных из отдельных исследований в целях объединения этих данных» [2]. В такой формулировке этот термин введен в научной оборот в 1976 г. Джином Глассом; в настоящее время под мета-анализом в большинстве случаев понимается метод ассимиляции результатов, полученных во множестве работ путем трансформации данных индивидуальных исследований в некое мета-аналитическое множество, в котором информация подвергается интеграции и обобщению [3, с. 47].

На сегодня мета-анализ «стал привычным способом эффективно и систематически синтезировать количественные данные индивидуальных экспериментальных исследований» [4, с. 8], но отдельные приемы этого метода полезны также в анализе первичных данных оригинальных исследований [5]. Это, прежде всего, кодирование полученных данных, выбор размера наблюдаемого эффекта (в случае, если в исследовании приведено несколько результатов), приведение размеров эффектов к единой метрике [5, с. 7].

К данным приемам относится и применение модели полного агрегирования, в частности, простой линейной аддитивной модели (англ. *simple linear additive model*, *SLAM*) поддержки принятия решений. Эта модель относится к методам многокритериального анализа и успешно применяется во многих сферах деятельности (землеустройство, информационные технологии и другие), а с недавнего времени получила распространение в здравоохранении [6]. Однако, хотя она представляет методологически наименее сложный инструмент поддержки принятия решений, который уже используется в некоторых странах, ее распространение среди исследователей в сфере экономики все еще не велико.

В то же время, существующие в экономических исследованиях методики многокритериального анализа обладают рядом недостатков. В частности, следует указать на недостаточную научную обоснованность применения линейного шкалирования для приведения информативных индикаторов социально-экономических процессов к нормализованному (безразмерному) виду, приоритизации и ранжирования факторов и альтернатив, их категоризация на заранее определенные категории.

Последнее направление – категоризацию альтернатив принятия решения на заранее определенные категории, рассмотрим детальнее, на примере оценки различных аспектов регионального благополучия.

Широко распространенным приемом нормализованной оценки различных аспектов регионального благополучия является назначение рейтингов, основанных на интегральных оценках различных аспектов функционирования социально-экономических систем по совокупности неоднородных критериев [7]. Актуальность «рейтингования», как инструмента интегральных оценках, несомненна: представленная в рейтингах информация, выраженная в количественных оценках ключевых сфер жизнедеятельности регионов, является существенным фактором для региональных органов власти в принятии управленческих решений.

Чтобы рейтинг являлся основанием для принятия управленческого решения, необходимо выполнить категоризацию рациональным образом и научно обоснованно. Особенно это актуально в случае использования для рейтинга так называемых композитных индексов, преимущества которых детально обсуждается О.А. Кислицыной в публикации [8]. Желательно также обеспечить наглядность категоризации, что достигается вербальной классификацией оценок. Так, в работе [7], посвященной анализу рейтингов различных аспектов регионального благополучия в Российской Федерации, использована вербальная классификация оценок развития человеческого капитала на семь уровней: весьма низкий (ВН), низкий (Н), удовлетворительный (У), средний (С), хороший (Х), высокий (В) и весьма высокий (ВВ).

На первый план в решении задачи категоризации выдвигается не число уровней, а назначение их границ. Чаще всего назначение границ уровней осуществляется субъективным образом по линейной шкале соответствия между исходными и нормализованными значениями индикаторов, а интервалы значений композитного индекса в уровнях назначаются равномерными. Именно линейное преобразование индикаторов предлагается в методике расчета и

классификации состояний национального богатства территорий реги-регионального уровня [9, с. 214-223], причем авторы рекомендуют для зон весьма низких, низких, удовлетворительных уровней составляющих национального капитала давать равные между собой нормализованные полуинтервалы, и так же для зон средних, хороших и высоких уровней.

На основном недостатке методики, предлагаемой в цитируемой монографии (субъективности применения линейного преобразования индикаторов и равномерного назначения интервалов их значений), остановимся ниже, но заметим, что принятый авторами [9] алгоритм нормализации индикаторов противоречит «принципу наглядности»: желаемой тенденции динамики позитивных индикаторов отвечает не рост, что было бы логичным, а снижение их нормализованных значений. Авторы «исправили» этот недостаток, снабдив графики динамики индикаторов стрелками с указанием направления «нормализованной оценки кризисности» [9, с. 202, 105, 107, 109], но ощущение нелогичности принятый авторами алгоритма осталось.

Другой распространенный недостаток относится к рекомендациям, противоречащим теории измерений. Так, в цитируемой монографии для приведения индикаторов уровня состояния национального богатства к однородным шкалам, помимо указанных выше вербальных оценок, рекомендуется использование системы накопительных баллов, когда балльные оценки состояния национального капитала, полученные для индикативных показателей, суммируются по всем индикаторам. Справедливости ради отметим, что авторы монографии из недостатков такого подхода отмечают «зависимость результата от количества индикаторов в индикативном блоке и количества индикативных блоков в видах национального капитала» [9, с. 222-223].

Выполненный выше анализ позволяет выделить следующие направления совершенствования композитных индексов в многопараметрических экономических задачах: 1) переход от линейного шкалирования к нелинейному, учитывающему характер связи свойства частных индикаторов с их значениями, 2) обоснованное назначение числа границ вербальных уровней индикаторов и 3) обоснование вида объединения частных индексов в композитный и назначение их весов.

Решение первой задачи мы видим в отказе от линейного преобразования именованных социально-экономических показателей в безразмерные и переходе к нелинейным преобразованиям, учитывающим их природу.

Наиболее распространенным нелинейным преобразованием показателей с односторонним ограничением является пяти интервальная шкала желательности Харрингтона. Преимущества использования этой шкалы в случае показателей экономической природы отмечаются в работе [10], содержащей анализ подходов к рейтинговым оценкам в многопараметрических задачах. Авторы данной работы особо подчеркивают, что шкала желательности Харрингтона относится к психофизическим шкалам, и ее назначение – установление соответствия между натуральными значениями частных показателей и психологическими параметрами. Там же отмечается, что «среди частных показателей могут быть эстетические и даже статистические параметры, а под психологическими параметрами понимаются чисто субъективные оценки экспериментатора желательности (предпочтительности) того или иного значения показателя» [10, с. 3].

Преобразование показателей осуществляется с помощью функции желательности Харрингтона $d(y)$, которая задается уравнением $d=\exp[-\exp(-y)]$, где y – кодированная переменная, линейно связанная с натуральными значениями частных показателей. Графически эта функция отображается логистической *S*-образной кривой, отражающей объективно действующие законы развития систем.

Помимо таких полезных свойств функции желательности Харрингтона, как непрерывность, монотонность и гладкость, она удобна тем, что изменяется в интервале от нуля до единицы, при этом значение $d=0$ соответствует абсолютно неприемлемому уровню данного свойства, а значение $d=1$ – самому лучшему значению свойства.

Исключительно полезным является то свойство преобразования Харрингтона, что шкала желательности – пятиуровневая, для расчета параметров преобразования достаточно располагать всего двумя «реперными» точками, отвечающими верхней и нижней границе оценки «удовлетворительно». Выбор границ этого центрального уровня производится исследователем, но можно воспользоваться и формальным («статистическим») приемом, предложенным в работах [11-13].

Продемонстрируем эти свойства функции желательности Харрингтона на примере регионального индекса деятельности системы здравоохранения по эмпирической базе, представленной в публикации [14], посвященной оценке системы здравоохранения в России. Авторы данной публикации для измерения деятельности

системы здравоохранения предлагают композитный индекс – инте-интегральный показатель, который объединяет отдельные аспекты деятельности системы здравоохранения: доступность, качество и результативность. Эти аспекты количественно определяются как «среднее арифметическое значение индексов всех входящих в блок базовых показателей, которые были перед этим преобразованы по методу Min-Max». В свою очередь, композитный индекс «рассчитывается как невзвешенное среднее арифметическое под-индексов по всем аспектам» [14, с. 39]. Наконец, индикаторы, составляющие «под-индексы», рассчитывалась по формулам линейного соответствия их значений интервалу изменения региональных показателей от наименьшего до наибольшего, так что и «под-индексы», и композитный индекс деятельности системы здравоохранения варьировали в закрытом диапазоне [0…1].

Таким образом, авторами реализован традиционный подход к формированию обобщенных аддитивных показателей – использовано линейное нормирование индикаторов на реальный диапазон их изменений с последующим объединением частных индикаторов в аддитивные индексы.

Используемая нами методика построения регионального индекса деятельности системы здравоохранения на основе функции желательности Харрингтона содержит следующие этапы. Вначале из исходной выборки объемом 84 субъекта РФ выделяли однородную подвыборку объемом 78 регионов, для которой распределение всех трех составляющих композитного индекса не противоречило нормальному закону. На следующем определяли частные функции желательности трех составляющих композитного индекса деятельности по формулам (1) и (2):

$$d = \exp(-\exp(-z)); \quad (1)$$

$$z = (x - x_0)/(x_1 - x_0), \quad (2)$$

где z – кодированные значения информативного показателя, представляющие собой безразмерные величины; x – значение показателя; x_0 и x_1 – нижняя и верхняя границы зоны «удовлетворительно» (реперные точки).

Нижнюю и верхнюю границы зоны «удовлетворительно» определяли по формуле

$$x_0 = x_{ср};\ x_1 = x_{ср} + \text{СКО}\ (x), \quad (3)$$

где $x_{ср}$ – среднее арифметическое значение, а СКО (x) – стандартное отклонение показателя (обе статистики рассчитывали по однородной выборке).

Две реперные точки, определяемые условиями (3), однозначно задают трехзональную функцию желательности «плохо – удовлетворительно – хорошо», но в дальнейшем переходили к пятизональной шкале желательности с оценками от «очень плохо» до «очень хорошо», задавая на ней зоны «очень плохо» (0,00–0,20), «плохо» (0,20–0,37), удовлетворительно (0,37–0,63), «хорошо» (0,63–0,80) и «очень хорошо» (0,80–1,00).

Полученные функции желательности в графическом виде представлены на рисунке.

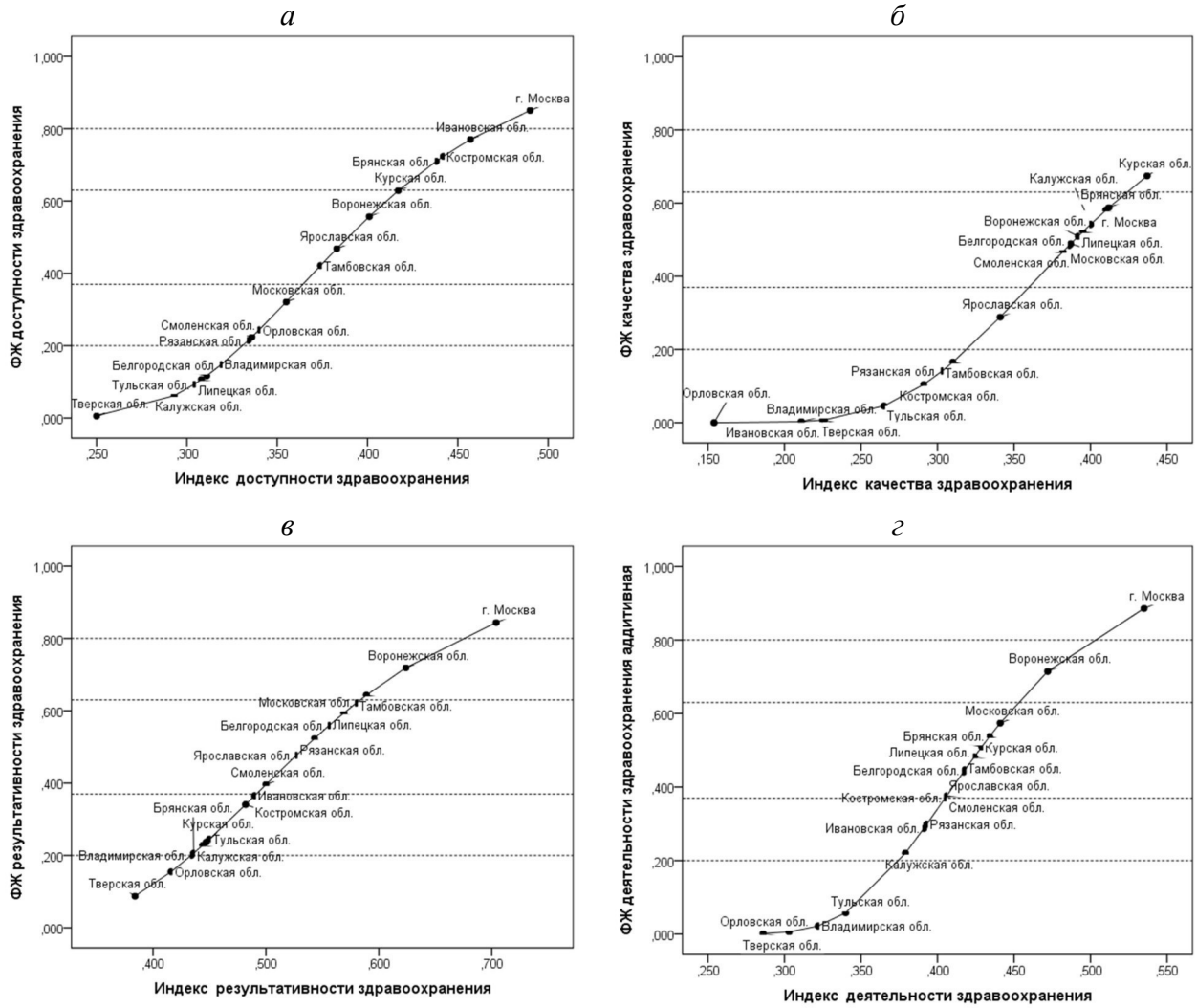


Рисунок – Функция желательности Харрингтона индексов деятельности системы здравоохранения: *а* – индекс доступности; *б* – индекс качества; *а* – индекс результативности; *а* – композитный индекс деятельности, рассчитанный как среднее арифметическое частных индексов (аддитивная форма свертки)

Поясним рисунок. Функции желательности построены по данным для всех регионов, вошедших в однородную выборку, однако на диаграммах показаны все регионы Центрального Федерального округа, включая Москву, хотя этот субъект ЦФО и не входит в однородную выборку. Все функции желательности отображается

логистическими *S*-образными кривыми, но в центральной зоне «удо-«удовлетворительно» они практически линейны. Точечные горизонтальные линии разграничивают зоны «очень хорошо», «хорошо», «удовлетворительно», «плохо» и «очень плохо».

По рисунку отметим еще одно положительное свойство функции желательности Харрингтона: она применима и за пределами значений «обучающей» выборки, тогда как линейная функция желательности таким свойством не обладает.

В заключение отметим, что уже беглый анализ представленных на рисунке диаграмм показывает, что наиболее слабое звено в системе здравоохранения регионов ЦФО – недостаточное качество: даже столица округа – г. Москва – не попала в зону «очень хорошо», а в зоне «хорошо» фигурирует лишь одна Курская область.

Ограничение на объем публикации не позволяет изложить методику объединения частных функций желательности в композитную; заинтересованные читатели могут обратиться к нашим публикациям, размещенным в базе Интернет.

Список литературы

1. Орлов А.И. Новая парадигма анализа статистических и экспертных данных в задачах экономики и управления // Научный журнал КубГАУ. 2014. № 98 (04). С. 1-21.
2. Glass G.V. Primary, secondary, and meta-analysis of research // Educational Researcher 1976. № 5. Pp. 3-8.
3. Мета-аналитические исследования в клинической психологии / Д.В. Лифинцев, А.Б. Серых, А.А. Лифинцева, Ю.Ю. Новикова // Национальный психологический журнал. 2019. № 4 (36). С. 5–17.
4. Бороховский Е.Ф., Бернард Р.М. Количественные синтезы в социальных науках: методология и практика мета-анализа. Часть1 // Психология. Экономика. Право. 2013. № 2. С. 6-15.
5. Корнилов С.А., Корнилова Т.В. Мета-аналитические исследования в психологии // Психологический журнал. 2010. Т. 31. № 6. С. 5–17.
6. Многокритериальный анализ принятия решений (МКАПР) с использованием моделей полного агрегирования: методология и применение в здравоохранении / В.А. Лемешко, А.А. Антонов, Г.Р. Хачатрян, Н.З. Мусина, В.В. Омельяновский // Современные проблемы здравоохранения и медицинской статистики. 2020. № 3. С. 251-274.

7. Гурбан И.А. Рейтингование территорий как инструмент измерения регионального благополучия // Экономический анализ: теория и практика. 2015. № 42. С. 36-51.
8. Кислицына О.А. Подходы к измерению прогресса и качества жизни (благополучия) // Экономический анализ: теория и практика. 2016. № 10 (457). С. 28-38.
9. Национальное богатство регионов России: анализ, проблемы и пути решения / А.А. Куклин, А.Л. Мызин, И.А. Гурбан, О.А. Денисова, П.А. Пыхов. Екатеринбург: Институт экономики УрО РАН, 2013. 286 с.
10. Любушин Н.П., Брикач Г.Е. Использование обобщенной функции желательности Харрингтона в многопараметрических экономических задачах // Экономический анализ: теория и практика. 2014. № 18 (370). С. 2-10.
11. Барбашова Е.В., Лясковская О.В., Польшакова Н.В Методический подход к формированияю критерия комплексной оценки развития регионов на базе функции Харрнигтона // Россия: Тенденции и перспективы развития. Ежегодник: М.: ИНИОН РАН, 2020. С. 949-954.
12. Барбашова Е.В., Лясковская О.В. Интегральная статистическая оценка социально-экономического развития региона // Россия: Тенденции и перспективы развития. Ежегодник: М.: ИНИОН РАН, 2021. С. 911-917.
13. Барбашова Е.В., Чекулина Т.А., Шуметов В.Г. Статистический подход к формированию функции желательности в задачах экономико-математического моделирования // Вестник ОрелГИЭТ. 2015. 2 (32). С. 94-99.
14. Кислицына О.А., Чубарова Т.В. Оценка системы здравоохранения в России: опыт построения регионального рейтинга // Вестник Института экономики Российской академии наук. 2021. No 3. С. 35–71.

УДК 004.82 + 519.179

Зубкова Лариса Николаевна
кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры алгебры и математических методов в экономике,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ НА ОСНОВЕ ГРАФОВ

Аннотация. *В статье рассматриваются отдельные прикладные аспекты использования нечетких графов для моделирования систем на основе мягких вычислений.*

Ключевые слова: *гуманистическая система, нечеткий граф, ситуационная сеть, когнитивная карта, лингвистическая переменная, нечёткое отношение.*

Zubkova Larisa
Candidate of Pedagogical Sciences, associate Professor,
Associate professor of the department of algebra and mathematical methods in economics,
Orel State University I.S. Turgenev,
Russia, Orel

APPLICATION ASPECTS OF FUZZY GRAF-BASED REPRESENTATION MODELS

Abstract. *The article discusses the selected application aspects of using fuzzy graf-based representation to modele systems based on soft computing.*

Keywords: *humanistic system, fuzzy graf, situation network, cognitive map, linguistic variable, fuzzy ratio.*

В настоящее время в различных сферах деятельности активно внедряются и используются интеллектуальные вычислительные системы, в частности, диагностические, экспертные системы, системы распознавания образов, использующие технологии искусственного интеллекта и математические модели разных классов.

Для анализа систем и процессов, представляемых с помощью некоторой структуры, широкое распространение нашли модели с представлением на основе графов [1].

Активное обращение к нечетким дискретным математическим моделям возникло после работ Л. Заде и А. Кофмана по теории нечетких множеств и нечетких алгоритмов управления, а также в связи с развитием дискретных вычислительных устройств и их использованием в технологических процессах. Также активно развиваются технологии, которые рассчитаны на их широкое применение и использование неподготовленными в области искусственного интеллекта пользователями. К ним можно отнести, например, нечеткую логику и вербальные вычисления.

Сегодня нечеткие логические алгоритмы обработки информации широко используются в экспертных, советующих системах, ориентированных на их комфортное использование разными пользователями, в том числе, неподготовленными пользователями. Речь идет о том, чтобы пользователь системы взаимодействовал с ней, используя привычные для него естественный язык, качественные категории и оценки типа «высокий уровень», «много», «довольно хорошо» и т.п.

Пользователь экспертной системы, как правило, является специалистом в своей предметной области и может быть не знаком с технологиями представления знаний на основе методов искусственного интеллекта. Для него важнее удобное общение с системой, когда он имеет возможность рассуждать о приемлемых решениях и правилах поведения в своей предметной области, или передавать данные и свои знания в систему для формирования базы знаний. Кроме того, информация, переданная пользователем в систему, в случае интеллектуальных систем, должна пополнять базу знаний системы и улучшать работу самой системы, например, её прогностические или диагностические свойства.

Наряду с возможностью для пользователя общаться с интеллектуальной системой на языке, приближенном к естественному, важным моментом выступает визуализация содержания предметной области, когда есть возможность «увидеть» явление и его содержание, процесс и его динамику с помощью структурной модели. Именно для решения задач визуализации, моделирования и анализа логико-временных последовательностей, причинно-следственных отношений, пространственной

распределённости используют модели с представлением на основе графов. Если в описание компонентов таких моделей введена нечёткость, то имеем дело с нечеткими моделями на основе графов. К ним относят, например, нечеткие сети, нечеткие когнитивные карты, нечеткие автоматы, нечеткие алгоритмы и др [1; 4].

Среди названных выше примеров нечетких моделей на основе графов часть относится к моделям так называемых гуманистических систем, в которых участие принимает человек, а часть – к моделям технических систем.

Для описания гуманистических систем используют различные технологии формализации качественной информации. Например, технологии мягких вычислений используют такие уровни формализации как нечеткие отношения, лингвистические переменные, нечеткие графы и гиперграфы. Эти инструменты формализации отражают присущую мышлению человека неоднозначность описания явлений реального мира и их прагматическую направленность.

Значительная часть информации, необходимой для описания объекта, явления или процесса принятия решения, существует в форме представлений специалистов – экспертов, имеющих опыт работы с данным объектом (явлением), способных сформулировать на естественном языке правила действий при принятии решений в различных ситуациях. Совокупность нечетких ситуаций, характеризуемых набором признаков, описывающих состояние системы, и связи между ситуациями формализуется представлением на основе нечетких графов и гиперграфов [3].

Ориентированным нечетким графом называют пару $\tilde{G} = (X, \tilde{F})$, в которой $X = \{x_i\}, i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество вершин графа, $\tilde{F} = \left\{\left(\mu_F(x_i, x_j)|(x_i, x_j)\right)\right\}, (x_i, x_j) \in X^2$ – нечеткое множество ориентированных рёбер (дуг) графа, где x_i – начало, x_j – конец дуги (x_i, x_j), $\mu_F(x_i, x_j)$ - значение функции принадлежности для дуги (x_i, x_j).

Нечетким гиперграфом называют тройку $\tilde{H} = (X, U, \tilde{P})$, где $X = \{x_i\}, i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество вершин графа, $U = \{u_j\}, j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$ – множество рёбер графа, $\tilde{P}$ – нечеткий двуместный предикат, называемый инцидентором, который определяется для всех пар *(x, u)*, $x \in X, u \in U$ и принимает значения из интервала [0, 1].

При изучении систем, представляющих совокупности нечетких ситуаций, возникают задачи построения нечетких отношений между ситуациями, выявления групп схожих ситуаций, нечеткой классифи-

кации ситуаций. В формализованном представлении таких систем решается, как правило, задача анализа структуры гиперграфа ситуаций с целью планирования стратегии поиска и достижения целевой ситуации. Так, например, в нечеткой ситуационной сети решается задача определения маршрута между текущей и целевой ситуациями – задача поиска стратегии управления. Формализованное математическое решение таких задач сводится к выполнению теоретико-множественных и алгебраических операций над гиперграфами, к исследованию их структурных свойств, выявлению экстремальных характеристик.

Для моделирования статических свойств и динамики развития систем широкое применение находят модели на основе графов, называемые когнитивными картами. Такие модели позволяют решать задачи выявления и оценки влияния факторов – концептов, определяющих систему, друг на друга и на систему в целом, а также влияние системы на отдельные концепты. В качестве одного из инструментов для описания концептов используют лингвистические переменные.

Лингвистическая переменная в качестве значений принимает слова естественного языка. Формально лингвистическая переменная определяется как набор (α, T, X, G, M). Здесь α – название лингвистической переменной, T – терм-множество вербальных значений лингвистической переменной, каждое из которых описывается нечеткой переменной с областью определения X, G – синтаксическое правило, порождающее новые вербальные значения лингвистической переменной, M – семантическое правило, которое ставит в соответствие каждому новому вербальному значению нечеткое множество, определяющее его смысл [2].

Для описания связей между концептами используют нечеткие веса влияний, формализуемые нечеткими переменными. В случае если связи между концептами выражают причинно-следственные отношения, их описывают нечетким отношением влияния, а передача влияния между двумя концептами когнитивной карты представляется композицией отношений. Для сложных систем точные законы их поведения часто неизвестны, поэтому прибегают к экспертному построению матрицы нечеткого отношения влияния.

Структурные преобразования когнитивной карты, отражающиеся удалением или добавлением новых узлов и дуг в графе когнитивной карты, позволяют анализировать карту по сценарию «что…, если…?». При этом важно учитывать, что логика моделирования когнитивных карт накладывает алгебраические ограничения на операцию агрегирования влияний концептов: результат операции не должен за-

висеть от порядка вхождения отдельных нечетких операндов, а значит, операция агрегирования на множестве влияний концептов должна быть коммутативной и ассоциативной.

При математическом моделировании сложных систем исследователь сталкивается с необходимостью поиска компромисса между точностью результата моделирования и возможностью получения подробной информации, необходимой для моделирования предметной области, которая может описываться очень большим числом переменных, взаимодействующих друг с другом и чувствительных к изменениям других переменных. В этом плане могут быть полезны для анализа проблем на основе минимальной информации относительно простые модели на основе графов с привлечением инструментов мягких вычислений.

Итак, различные нечеткие системы с участием людей, операционно-технологические системы, иерархические системы управления с участием человека, управляемые когнитивные процессы, в основном ориентированые на качественный анализ систем и предметных областей, удобно представляются дискретными нечеткими моделями на основе графов с применением технологий мягких вычислений, использующих язык, приближенный к естественному.

Список литературы

1. Борисов, В.В. Нечеткие модели и сети/ В.В. Борисов, В.В.Круглов, А.С. Федулов. – М.: Горячая линия – Телеком , 2007. – 284 с.
2. Заде, Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде. – М.: Мир, 1976. – 164 с.
3. Мелихов, А.Н. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой / А.Н. Мелихов, Л.С. Берштейн, С.Я. Коровин. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
4. Силов, В.Б. Принятие стратегических решений в нечеткой обстановке / В.Б. Силов. – М.: ИНПРО – РЕС, 1995. – 228 с.

УДК 519.22

Курбыко Инна Фёдоровна
кандидат физико-математических наук, доцент,
Владимирский государственный университет
имени А. Г. и Н. Г. Столетовых,
Россия, Владимир

Зотикова Алёна Игоревна
магистрант,
Владимирский государственный университет
имени А. Г. и Н. Г. Столетовых,
Россия, Владимир

К ВОПРОСУ АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ

Аннотация. *Целью данной работы является выбор математической формы моделей прогнозирования, наиболее адекватно представляющих динамику некоторых показателей региональной экономики. Проверка адекватности модели тренда выполнена с помощью анализа остаточной компоненты временного ряда на основе критериев прикладной математической статистики.*

Ключевые слова*: ряд остатков, модель тренда, адекватность, автокорреляция, критерий поворотных точек, прогноз.*

Inna Fedorovna Kurbyko,
Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor,
Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletov,
Russia, Vladimir

Alena Igorevna Zotikova,
Master Degree Student,
Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletov,
Russia, Vladimir

TO THE PROBLEM OF ADEQUACY OF MATHEMATICAL FORECASTING MODELS OF REGIONAL ECONOMY INDICATORS

Abstract. *The purpose of the given work is the choice of the mathematical form of forecasting models, most adequately representing the dynamics of regional economy indicators. The adequacy check of trend model is executed with the help of a residual component of temporal series analysis, based on the criterions of applied mathematical statistics.*

Keywords: *series of residuals, trend model, adequacy, autocorrelation, criterion of rotary points, forecast.*

Построение математических моделей динамики социально-экономических процессов на основе аппроксимации исходных данных – один из основных подходов в прогнозировании в сфере экономики (см., в частности, [1-2]). При всем многообразии известных методов и алгоритмов математического моделирования получить модель с хорошими статистическими характеристиками, удовлетворяющими требованиям адекватности, нередко затруднительно или не представляется возможным. К некорректной постановке задачи может привести нарушение предпосылок корреляционно-регрессионного анализа, ограниченный объем статистических данных, недостаток информации о структуре и сложности изучаемых процессов, нестабильное развитие внешней среды.

В данной статье представлен алгоритм анализа свойств ряда остатков трендовых моделей прогнозирования показателей региональной экономики. Массив исходных данных сформирован на основе источников государственной статистики Владимирской области за период 2000-2020 гг. [3]. Для исследования выбраны следующие показатели социально-экономического развития региона: Y_1 – численность населения на начало года, тыс. чел.; Y_2 – денежные доходы в среднем на душу населения в месяц, рублей; Y_3 – оборот розничной торговли, млн. рублей/1000 чел. нас. ; Y_4 – объем платных услуг населению, млн. рублей/1000 чел. нас. ; Y_5 – инвестиции в основной капитал, млн. рублей/1000 чел. нас. ; Y_6 – ввод в действие жилых домов, кв. м общей площади/1000 чел. нас. Данные показатели представлены в виде временных рядов в таблице 1.

На первом этапе исследования с помощью критерия «восходящих и нисходящих серий» проверена гипотеза о наличии трендовой составляющей в динамике всех временных рядов $(Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_6(t))$, что позволило представить структуру временных рядов в виде суммы двух компонент: $[Y_i(t) = \widetilde{Y}_i(t) + E_i(t), i = 1,2,...,6]$, где $\widetilde{Y}_i(t)$ – трендовая компонента ряда с номером i; $E_i(t)$ – соответствующий ряд остатков; t – показатель условного времени.

На следующем этапе для каждого временного ряда было построено несколько моделей тренда в виде полинома от переменной t степени $1-4$, из которых, в целях прогнозирования, выбрана наилучшая по величине коэффициента детерминации: $D = \frac{\sum_{t=1}^{21}(\widetilde{Y}(t)-\overline{Y})^2}{\sum_{t=1}^{21}(Y(t)-\overline{Y})^2}$ и по возможности с меньшей средней относительной ошибкой аппроксимации исходных значений показателя: $E_{отн.} = \frac{1}{21}\sum_{t=1}^{21}|E(t)|/Y(t)$. Здесь $Y(t)$ – исходный ряд; $\overline{Y}$ – средний уровень ряда; $\widetilde{Y}(t)$ – ряд моделируемых значений тренда; $E(t) = Y(t) - \widetilde{Y}(t)$ – ряд остатков.

Таблица 1 – Матрица исходных значений показателей

Год	t	$Y_1(t)$	$Y_2(t)$	$Y_3(t)$	$Y_4(t)$	$Y_5(t)$	$Y_6(t)$
2000	1	1575,507	1251,8	7,39597	1,99371	3,07964	178,101
2001	2	1558,052	1626,0	9,34571	2,70588	3,99486	157,825
2002	3	1539,179	2101,3	10,9157	3,72660	5,74975	164,568
2003	4	1520,057	2836,5	13,3113	4,97863	6,79363	183,809
2004	5	1509,571	3363,5	16,5182	6,61565	8,27460	214,829
2005	6	1497,598	4107,5	21,0613	9,32961	11,5698	218,283
2006	7	1486,453	5626,9	26,5813	11,5439	14,9707	229,607
2007	8	1475,861	7014,9	42,3656	14,1362	22,2410	254,767
2008	9	1466,743	9479,9	55,9089	17,6736	31,9218	285,872
2009	10	1457,937	10827,5	56,7542	19,8592	32,8467	309,341
2010	11	1449,773	12956,2	70,0748	23,6961	32,5111	331,707
2011	12	1441,129	14312,2	84,9934	28,4673	40,2372	302,332
2012	13	1431,932	16228,8	101,935	32,8949	41,9888	354,626
2013	14	1421,742	18057,8	115,858	42,0441	45,9237	364,975
2014	15	1413,321	19529,5	127,866	45,9188	53,5384	428,707
2015	16	1405,613	22712,3	136,711	47,7575	57,2550	459,799
2016	17	1397,168	22365,3	141,216	47,8244	56,1539	469,163
2017	18	1389,599	23438,1	150,596	49,4659	57,2506	500,432
2018	19	1378,337	23631,9	163,771	50,6525	53,9134	472,744
2019	20	1365,805	21896,0	174,777	53,5675	65,9571	545,759
2020	21	1358,416	23231,3	176,613	49,0824	68,7627	534,667

Уравнения отобранных моделей тренда, аппроксимирующих динамику показателей $(Y_1, Y_2, ..., Y_6)$, представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты моделирования

Уравнение тренда	D	$E_{отн.}$
$\widetilde{Y}_1(t) = 0{,}1747t^2 - 13{,}942t + 1580{,}1$	0,9949	0,0026
$\widetilde{Y}_2(t) = -8{,}5826t^3 + 277{,}24t^2 - 1079{,}5t + 2666{,}6$	0,9954	0,0697
$\widetilde{Y}_3(t) = -0{,}0384t^3 + 1{,}461t^2 - 5{,}9994t + 14{,}493$	0,9845	0,0769
$\widetilde{Y}_4(t) = -0{,}0173t^3 + 0{,}5905t^2 - 2{,}5181t + 5{,}5814$	0,9908	0,1305
$\widetilde{Y}_5(t) = 0{,}0017t^4 - 0{,}0858t^3 + 1{,}4304t^2 - 5{,}0609t + 8{,}2622$	0,9856	0,1076
$\widetilde{Y}_6(t) = 20{,}428t + 106{,}81$	0,9688	0,0579

Оценка значимости уравнений тренда выполнена на основе сравнения расчётного F-критерия $F_{расч.} = \dfrac{D/(k-1)}{(1-D)/(21-k)}$ с табличным значением $F_{табл.}(0{,}05; 21-k)$, где k – количество параметров модели. Расчёты показали, что для всех моделей $(\widetilde{Y}_1(t), \widetilde{Y}_2(t), ..., \widetilde{Y}_6(t))$, верно неравенство $F_{расч.} > F_{табл.}$. Поэтому согласно критерию Фишера принята гипотеза об адекватности уравнений моделей исходным данным.

Свойства параметров моделей тренда, которые рассчитаны методом наименьших квадратов, существенно зависят от свойств ряда остатков $E(t)$. В этой связи следующий этап работы посвящён проверке свойств случайной составляющей и принятию решения об адекватности модели на основе определённого критерия. Результаты проверки проиллюстрированы в таблице 3, где в графе 1 по вертикали указан коэффициент автокорреляции первого порядка $r(1) = \dfrac{\sum_{t=1}^{n-1} (E(t) - \overline{E}) \cdot (E(t+1) - \overline{E})}{n \cdot S_{E(t)} \cdot S_{E(t+1)}}$, вычисленный по ряду остатков каждой модели. Здесь $\overline{E}$ – средний уровень ряда остатков; $S_{E(t)}$ и $S_{E(t+1)}$ – среднеквадратическое отклонение, соответственно, в ряду $E(t)$ и в ряду остатков $E(t+1)$, сдвинутых на одну единицу времени. Согласно табличному значению при уровне значимости 0,05 и $n = 21$ известно: $r_{крит.} = 0{,}300$. В случае выполнения неравенства $|r(1)| < r_{крит.}(1)$ принималась гипотеза об отсутствии автокорреляции во временном ряду $E(t)$, то есть о выполнении условия независимости последовательных остатков, и модель по данному критерию признавалась адекватной. В противном случае, если $|r(1)| \geq r_{крит.}(1)$, в ряде остатков содержится система-

тическая составляющая, и поэтому модель неадекватна, что требует поиска новой модели. В графе 2 таблицы 3 показаны результаты проверки случайности уровней ряда $E(t)$ на основе критерия поворотных точек. Остаток с номером t был принят за поворотную точку, если он одновременно больше или меньше двух соседних с ним остатков. Для каждого ряда остатков вычислено количество поворотных точек «p» и проверено неравенство $p > [2(n-2)/3 - 1{,}96\sqrt{(16n-29)/90}]$, у нас $n = 21$. Если число $p > 9$, сделан вывод о наличии свойства случайности отклонений от тренда и модель по данному критерию признавалась адекватной на уровне значимости 0,05, в противном случае – неадекватной. Графа 3 посвящена проверке ряда остатков на нормальный закон распределения на основе $\chi^2_{расч.}$-критерия, вычисленного с помощью процедур программы STADIA. Если выполнено неравенство $\chi^2_{расч.} < \chi^2_{крит.}(0{,}05;2) = 5{,}99$, принималась гипотеза о соответствии ряда остатков нормальному закону и, соответственно, модель по данному критерию была признана адекватной.

Таблица 3 – Проверка свойств ряда остатков

Модель тренда	Свойство, характеристика, результат проверки			
	1	2	3	4
	Независимость	Случайность	Нормальность	$M[E] = 0$
	$r(1)$	p	$\chi^2_{расч.}$	$t_{расч.}$
$\widetilde{Y}_1(t)$	0,793	6	11,231	0,007
	Нет	Нет	Нет	да
$\widetilde{Y}_2(t)$	-0,101	14	6,524	0,002
	Да	Да	Нет	да
$\widetilde{Y}_3(t)$	0,294	7	6,867	0,141
	Да	Нет	Нет	да
$\widetilde{Y}_4(t)$	0,484	7	6,398	0,666
	Нет	Нет	Нет	да
$\widetilde{Y}_5(t)$	0,134	9	2,471	0,509
	Да	Нет	Да	да
$\widetilde{Y}_6(t)$	0,012	12	0,830	0,000
	Да	Да	Да	да

В графе 4 показаны результаты проверки на основе t-критерия Стьюдента H_0-гипотезы о равенстве нулю математического ожидания остатков. Здесь $t_{расч.} = |\overline{E}| \cdot \sqrt{21}/S$, где $S = \sqrt{\sum_{t=1}^{21}(E(t) - \overline{E})^2/20}$. При выполнении

неравенства: $t_{расч.} < t_{крит.}(0{,}05;20) = 2{,}086$ принималась H_0-гипотеза и устанавливалась адекватность модели.

Таким образом, проверка дала положительный результат о наличии одновременно всех 4-х свойств ряда остатков трендовой модели $\widetilde{Y}_6(t) = 20{,}428t + 106{,}81$, которую следует признать адекватной реальной динамике показателя ввода в действие жилых домов в регионе. Результаты моделирования с учётом прогноза на ближайшие три года проиллюстрированы на рисунке 1. Другая методика анализа и прогнозирования социально-экономических показателей на основе адаптивных моделей показана в работе [2].

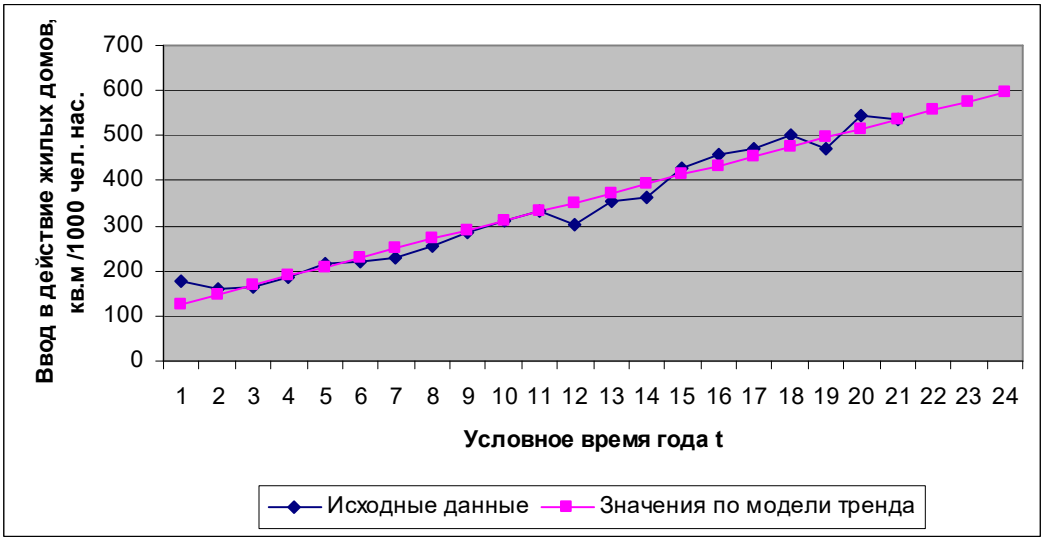


Рисунок 1 – Динамика показателя Y_6

Список литературы

1. Лебедева И.М., Федорова А.Ю., Макроэкономическое планирование и прогнозирование / И.М. Лебедева, А.Ю. Федорова; под ред. А.Ю. Федоровой. – СПб: Университет ИТМО, 2016. – 54 с.
2. Курбыко И.Ф. Прогнозирование динамики показателей социально-экономического развития Владимирской области // Современные проблемы физико-математических наук: материалы VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (4-5 декабря 2020 г., г. Орёл): научное электронное издание [Электронный ресурс]. – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2020. – С. 398-402.
3. Краткосрочные экономические показатели Владимирской области / Федеральная служба государственной статистики. – URL: https://rosstat.gov.ru/region/ind1117/Main.htm (дата обращения: 26.10.2021). – Текст: электронный.

УДК 339.9

Татару Виорика Дмитриевна
студент,
Сибирский государственный университет путей сообщения,
Россия, Новосибирск

Шматков Руслан Николаевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
Сибирский государственный университет путей сообщения,
Россия, Новосибирск

ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ВО ВНЕШНЕЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Аннотация. *В статье характеризуется необходимость поиска результативных и точных моделей ценообразования в международной торговле между странми, основанных на учете новых и важных факторов, реальзующих данные подходы к ценообразованию при помощи санкций и программ импортозамещения. Выявлены эксортеры и имортеры внешнеэкономической деятельности. Сделан вывод о необходимости преобразования формулы скользящей цены. Исходя из раскрытия данной темы, делаются соответсвующие рекомендации.*

Ключевые слова: *ценообразование во внешней торговле, глобальный рынок, экономические санкции, математическая модель, международная торговля, импорт, экспорт, импортозамещение, внешнеэкономическая деятельность, мировые цены.*

Tataru Viorika Dmitrievna
Student, Siberian State University of Railway Transport,
Russia, Novosibirsk

Shmatkov Ruslan Nikolaevich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Siberian State University of Railway Transport,
Russia, Novosibirsk

PRICING IN FOREIGN ECONOMIC ACTIVITY

Annotation. *The article characterizes the need to search for effective and accurate pricing models in international trade between countries based on taking into account new and important factors that implement these approaches to pricing through sanctions and import substitution programs. The exporters and importers of foreign economic activity have been identified. The conclusion is made about the need to transform the formula of the moving price. Based on the disclosure of this topic, appropriate recommendations are given.*

Keywords: *pricing in foreign trade, world market, economic sanctions, mathematical model, international trade, import, export, import substitution, foreign economic activity, world prices.*

В современных условиях интеграционных процессов международных экономик в мировом пространстве большее значение начинает приобретать внешняя торговля, которая является главным экономическим развитием и ростом конкуренции в странах. В этой связи особую актуальность приобретает выявление ценообразования во внешней торговле.

Целью данного исследования является выявлениеи систематизация ценообразования и математичиских моделей в ценообразовании, пришедших к нам при условиях осуществления внешней торговли. Методологической основой данного исследования является: общенаучные методы (анализ, синтез, логическое обобщение), а также эмпирический метод (наблюдение, измерение, сравнение) - для того, чтобы рассмотреть развите в международной торговле и выявить взаимодействие между странами [2].

Ценообразование в международной торговле - это процесс определения стоимости товара, а также рассмотрение внешних и внутренних факторов в данном процессе, фиксации стоимости в соответствии с конечными условиями внешнеторговой деятельности, сформированной с условиями Инкотермс-2012.

Под данными мировыми ценами предлагается рассмотреть такие, которые наиболеше важны в экспортных и импортных сделках. Они представлены на международных рынках и на коммерческих условиях в главных фирмах мировой торговли экспортерами и импортерами данной продукции. Мировые цены имеют разноименный характер. Их способность заключается в постоянном варьировании цен на мировом рынке.

Ценообразование на мировом рынке преследует определенные цели. Для их достижения определяются задачи. Они представлены в процессе построения данного варианта или осуществления навождения цены.

Список данных задач представлен общим для любых международных отношений. Но он также может изменится в пользу другого государства. Это взаимосвязано со стадиями экономического развития, данных процессов, которые в нем развиваются, и т.д. В общем, они выглядят так:

- Покрытие затрат на мировом рынке в процессе производства, а также его продажи.
- Решение социальных проблем на мировом рынке.
- Внедрение экологических методов в процессе построения соответствующей политики организации на международном рынке.

Рыночная экономика в осуществлении ценообразования в международной торговле с разными экономическими субъектами определенных стран определяется с условими конкурентоспособности, динамики баланса спроса и предложения.

В междунапрдной торговле рынка данное ценообразование являеся соотношением спроса и предложения. Однако, процесс ценообразования на внутреннем и внешнем рынках является одинаковым. Но также данная деятельность на внутреннем рынке труда являетя достаточно сложным процессом, это выявляется в наличии продавцов и покупателей, или большой заинтересованностю к странам-конкурентам. Ценообразование на услових рынка в разных странах в больцинстве зависит от выбора рыночных отношений между данными отношениями. В современном мире, на рынке представлено достаточно большое количество цен.

Рассмотрим представленную марксистскую теорию, предлагающая приблизительную формулу ценообразования (W), выстроенную на издержках производства и труда (1):

$$W = c + v + m \quad (1)$$

где: c – является стоимостью рабочей силы; v - колличество рабочей силы; m - прибавочная стоимость.

Формула, которую предложил К.Маркс, служит отправной точкой для данных моделей ценообразования, а также во внешней и внутренней торговле стран [1]. В современном мире в условиях внешней и внутренней торговли при ценообразовании стоит учитывать многие факторы, оказывающие влияние на товары,

которые представлены на международном рынке. В то же время как параметр "c", так и параметр "v" подвержены "факторной деформации", так как стоимость рабочей силы и технологии производства в мире имеют разные издержки.

Математические модели также играют важную роль в ценообразовании. Вот пример использования этого типа в ценообразовании по мировым ценам. Рассмотрим данные математические модели предложения и спроса на рынке услуг сотовой связи в развивающихся странах. Для данных моделей мы собрали статистические данные об объеме рынка услуг сотовой связи с момента формирования до нашего времени. Для того, чтобы построить данные математические модели был использован подход вероятностей, а также методика прогнозирования с использованием теории временных рядов.

Проведем анализ данных за квартал о количестве услуг мобильной связи (St), который показал, что существует периодическая составляющая с почти полной амплитудой колебаний. Это представляется наличием тренда (Tt) и сезонным показателем (st), а также временной ряд на начало квартала представляется аддитивной моделью (2):

$$S_t = T_t + s_t \qquad (2)$$

Данные коэффициенты тренда оцениваюся методом меньших квадратов. Классическая форма модели тренда будет иметь следующий вид (3):

$$T_t = 0{,}7963 * t^2 + 2{,}0482 * t - 3{,}6052 + \hat{\varepsilon}t \qquad (3)$$

Коэффициенты данной детерминации близки к единице $R^2 = 0{,}97$, это объясняется глобальной способностью переменных модели. Также можно сказать, что при исследовании модели с помощью F-теста. $F = 1405 > F_{\text{крит.}} = 5{,}2$. Данные сезонные компоненты будут иметь следующие значения: $s_{1\text{кв.}} = 9{,}25$, $s_{2\text{кв.}} = -17{,}67$, $s_{3\text{кв.}} = -6{,}25$, $s_{4\text{кв.}} = 19{,}02$.

Данные сезона составляющих в первом и четвертом кварталах представлены нам в положительном отклонении предложения от значения каждого тренда, но в данный момент во втором и третьем кварталах представлен нам в отрицательных показателях. Это взаимосвязано с изменением спроса на другие дополнительные услуги, которые зависят от разных факторов. Например, наличие праздников в декабре - январе будет вызвано большим количеством абонентов, пользующихся услугами мобильной связи, чтобы

поздравить друзей, родственников и т.д. И наоборот, абоненты, нахо-находящиеся в рабочем отпуске (например, летнем) будут меньше обращаются за услугами сотовой связи [3].

Проведем прогноз фактического спроса, для него построим эконометрическую модель, которая показывает зависимость фактического спроса от количества абонентов в сетях сотовой связи. Классическая форма расчетной модели будет иметь следующий вид (4):

$$D = 2{,}45 * n - 513{,}08 + \hat{\varepsilon} \quad (4)$$

Коэффициент детерминации:

R^2=0,86, F-тест F=49,65 > $F_{крит.}$=5,69.

Построим, по выше рассмотренным значениям, прогноз данных реализованного предложения и совокупного спроса на будующие кварталы (таблица 1). Так, для первого квартала 2019 г. результаты прогноза представлены в таблице 1.

Рассмотрим и сравним прогнозные значения с эмпирическими данными, а также рассчитаем ошибки данных моделей. Для модели предложения ошибка прогноза равна 0,43 %, для модели спроса – 15,83 %.

Таблица 1 — Прогноз значений реализованного предложения и действительного спроса на 1 квартал 2019 г

Квартал	Прогноз D	Прогноз S	Эмпирическое значение D=S	Ошибка прогноза D	Ошибка прогноза S
1 кв.	840,13	816,86	830,02	15,83%	0,43%

На данном уровне модели необходимо идентифицировать неидентифицируемые уравнения, а также предложить спецификацию следующим образом, для того, чтобы модель была представлена в идентифицируемом виде. Данное исключение неидентифицируемых уравнений модели из одновременных уравнений представлено в целенаправленном включении данных значений в модель, но также в модели представлено неидентифицируемое уравнение. Таким образом, заранее выявленные значения включаются не в это, а в смежное уравнение.

Актуальный поиск факторов, который влияет на изменение и улучшение этапа предложения стоимости во внешней и внутренней торговле между странами, как на современном уровне формирования

национальных рынков, так и на данном уровне трансформации "ба- "баланса сил" на глобальном мировом рынке.

Профилактикой таких торговых факторов являются устранение негативных импортеров в конкурентной среде. Таможенные факторы носят двойственный зарубежный характер. Они приняты не позитивными факторами и относятся к новым положительным факторам производства, инструменты которых реализуют внедрение и предотвращение новых санкционных технологий, генераций и инноваций. Негативные факторы - это конкурентные инструменты, которые направленны на препятствие развития экономической конкуренции в международных отношениях между покупателем и продавцом на глобальном рынке, поэтому оно и оказывают прямое воздействие на Россию и другие европейские страны.

Рассмотрение действующих факторов является очень важным в данной ситуции. Это выражается в торговом регулировании рисками между странами, а также предотвращение рисков является важным значением данного развития в международной торговле, как для государства, так и для отдельного импортера или экспортера. Данные факторы показывают нам зависимость одного государства от другого или одной компании от другой [4].

В целях России, в ценнобразовании на мировом рынке стоит очень важная задача. Это предотвращение рисков, содействие и формировании оборота эффективной стоимости инноваций внешнеторгового конкурента. Эта задача имеет двойственный характер. Также стоит учитывать затруднение на данном этапе внутренних и внешних технологических и инновационных факторов, учет и устранение которых должно обеспечивать эффективную конкуренцию для рыночных отношений на глобальном рынке.

Объем и предотвращение данных факторов учтены Россией на данном этапе и предлагается их деление на федеральные рынки, реализация которых имеет двойственный характер конкретного, протекционистского и зарубежного рынка. Они оказывают реализацию и содействие в развитии международноги сотрудничества стран, а также их торговли [5].

Подводя итог, хочется отметить, что исследуя ценообразование на международном рынке, можно сказать, что дынный процесс осуществления цен рыночных отношений между странами-конкурентами в полном объеме будет зависить от классификации рынка, в рамках которого происходят международные отношения.

Для современных рыночных отношений будет характерно многооб- многообразие цен. Пример использования математической модели сотовой связи и вывода расчета формулы, показали нам всю важность данного математического анализа в ценообразовании.

В скором будущем, исходя из этого, данный подход будет представлен нам следующим образом:

- появится достаточно действущая модель ценообразования для практического применения модели на мировом рынке;
- начнут возникать теоретические и практические значения анализа, а также будет улучшена модель антикризисного управления в международной торговле страны.

Список литературы

1. Арский А.А. Особенность формирования стоимости логистической услуги // Экономика. Налоги. Право. 2016. № 1.
2. Арский А.А. Компетентный подход к исследованию проблем таможенного дела в выпускных квалификационных работах студентов // Маркетинг и логистика. 2016. № 4 (6).
3. Худжатов М.Б. Основные направления развития таможенной службы Российской Федерации в 2018–2021 гг. // Маркетинг и логистика. 2017. № 6 (14)
4. Матвиенко Е. Н., Стучинская Е. А. Специалисты для современной экономики и бизнеса: формирование профессиональных компетенций во внешнеэкономической деятельности // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2019. № 5-3. С. 36-38.
5. Комкова А. С., Кобелева Е. П., Стучинская Е. А., Крутько Е. А. Формирование метакомпетентностей студентов вуза в процессе научно-исследовательской работы на иностранном языке // Профессиональное образование в современном мире. – 2020. – Том 10. № 2. С. 3718-3726.

УДК 51-7

Чернобровкина Ирина Ивановна
кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры алгебры и математических методов в экономике,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орел

Кокорев Антон Владимирович
кандидат физико-математических наук,
сотрудник ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»
Россия, Орел

ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ МЕТОДОМ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

Аннотация. *В статье рассматривается построение нейронно-сетевой модели, обученной методом генетических алгоритмов в программном продукте GeneHunter.*

Ключевые слова: *нейронные сети, моделирование, генетические алгоритмы.*

Chernobrovkina Irina Ivanovna
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Algebra
and Mathematical Methods in Economics,
Head of the department of physics,
Orel State University,
Russia, Orel

Kokorev Anton Vladimirovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
employee of the " FEDERAL Guard Service Academy of the Russian Federation"
Russia, Orel

NEURAL NETWORK TRAINING USING GENETIC ALGORITHMS

Abstract. *The article discusses the construction of a neural network model trained by the method of genetic algorithms in the GeneHunter software product.*

Keywords: *neural networks, modeling, genetic algorithms.*

При решении задач методом нейронно-сетевого моделирования важными вопросами являются: 1) выбор оптимальной структуры нейронной сети; 2) выбор эффективного алгоритма обучения нейронной сети [1].

Рассмотрим применение генетического алгоритма для обучения нейронных сетей.

Схема работы классического генетического алгоритма (ГА) представлена на рисунке 1.

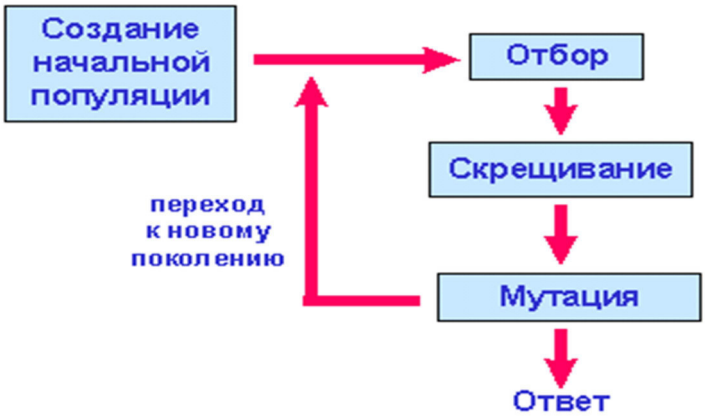


Рисунок 1 – Схема работы ГА

В качестве хромосом выступают весовые коэффициенты, а функция приспособленности – функция оптимизации – задается суммой квадратов ошибок. Каждая хромосома представляет собой вектор из весовых коэффициентов, которые, в конечном итоге, необходимо подобрать. Начальная популяция выбирается случайным образом, значения весовых коэффициентов лежат в промежутке [-1, 1]. Для обучения сети к начальной популяции применяются следующие классические генетические операции: селекция, скрещивание, мутация, и в результате работы алгоритма создаются новые популяции. Обучение нейронной сети происходит в несколько этапов:

1 этап: создание начальной популяции. Особь популяции представляется соответствующими весами из N особей $[W_1(0),...,W_i(0),...,W_N(0)]$. Далее вычисляется функция приспособленности (Fitness Index) и оценивается качество прогнозирования: $FI(W_i) = C – E(W_i) \rightarrow \max$, где C – константа.

2 этап: при отборе особей используется аппарат теории вероятностей. Обозначим P_i - вероятность выбора i-ой особи: $P_i = \frac{FI(W_i(0))}{\sum_{i=1}^{N} FI(W_i(0))}$.

Отбираются индивиды с большей вероятностью P_i.

3 этап: осуществляется скрещивание выбранных пар. При этом можно применять различные механизмы скрещивания. Берется N/2 родительских пар и генерируются N потомков.

4 этап: действие мутаций можно описать формулой

$w'_{ij}(n) = w_{ij}(n) + \xi(n)$, где $\xi(n) = a \cdot e^{-\alpha n}$, a = const $\in$[-1; +1].

Так, в качестве практической задачи использовалось построение модели стоимости квартиры в зависимости от различных параметров. Модель имеет вид

$$Y = F(X_1, X_2, \ldots, X_5),$$

где Y – стоимость квартиры (в млн. руб); X_1 - район; X_2 – количество комнат; X_3 – общая площадь; X_4 – площадь кухни; X_5 – этаж.

Для построения модели был использован программный модуль GeneHunter, принцип работы которого основан на генетическом алгоритме. При настройке GeneHunter использовались следующие значения параметров:

- вероятность скрещивания: 0,9;
- вероятность мутации: 0,005;
- размер популяции: 50;
- критерий остановки алгоритма: значение целевой функции (среднее квадратичное отклонение) не меняется на протяжении 50 поколений.

Параметры настройки работы генетического алгоритма представлены на рисунке 2.

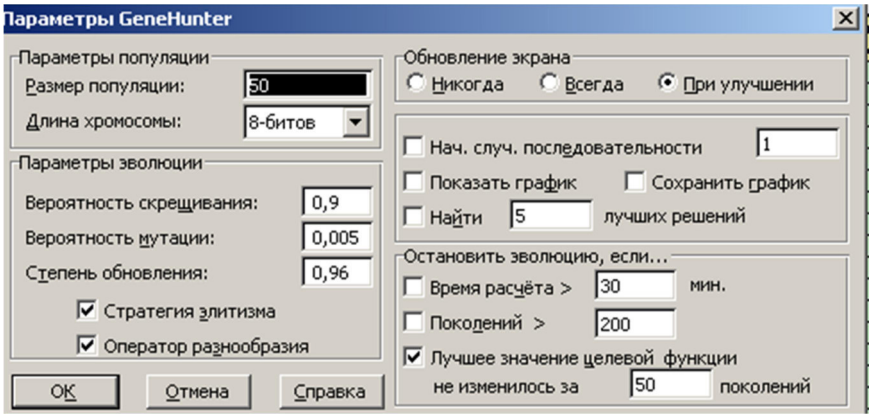


Рисунок 2 – Параметры генетического алгоритма

В процессе построения наилучшей модели было построено несколько моделей.

Первой моделью является однослойная нейронная сеть с четырьмя скрытыми нейронами. В качестве активационной функции здесь используется гиперболический тангенс. Целевой функцией служит среднее квадратичное отклонение, величина которого минимизируется в процессе оптимизации.

В результате оптимизации данной модели среднее отклонение составило 10,56 %, а среднее квадратичное отклонение – 0,18.

Если в данной нейронно-сетевой модели, при сохранении тех же параметров, активационную функцию «гиперболический тангенс» заменить на сигмоидальную функцию, то значение среднего квадратичного отклонения (целевой функции) составит 0,13 (среднее отклонение – 9,67 %). То есть предсказание сети становится более точным.

Изменение параметров генетического алгоритма существенно не изменяет результат моделирования. Результат изменяется при изменении структуры сети и выбора функции активации. В таблице 1 приведены различные результаты значений среднего квадратичного отклонения ошибки в результате моделирования.

Таблица 1 – Значения среднего квадратичного отклонения

Активационная функция	4 скрытых нейрона	3 скрытых нейрона	5 скрытых нейронов
Гиперб. тангенс	0,18	0,20	0,31
Сигмоидальная	0,13	0,23	0,29

Для решения данной задачи наиболее точной является модель с четырьмя скрытыми нейронами и сигмоидальной активационной функцией.

Как показывает практика, генетические алгоритмы вполне справляются с задачей обучения нейронной сети, модели по качеству получаются не хуже тех, которые обучаются, например, методом алгоритмом обратного распространения ошибки.

Список литературы

1. Рутковская, Д., Пилиньский, М., Рутковский, Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: Пер. с польск. И.Д. Рудинского .– М.: Горячая линия – Телеком. – 2006. – 452 с.

Теория вероятностей и математическая статистика

УДК 51-77:330.4

Борисова Людмила Робертовна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент департамента математики,
Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации,
Россия, г. Москва

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ КОРОНАВИРУСНОЙ ИНФЕКЦИЕЙ В МОСКВЕ

Аннотация. *В статье представлена актуальная проблема использования современных методов математической статистики и эконометрики при исследовании динамического ряда больных Covid-19 в Москве за все время наблюдений. Проводится сравнительный анализ заболеваемости коронавирусной инфекцией в Москве с данными по заболеваемости острыми респираторными заболеваниями.*

Ключевые слова: *автокорреляционная функция, регрессия, коэффициент корреляции, Covid -19.*

Borisova Lyudmila Robertovna
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,
Associate Professor at the Department of Mathematics,
Financial University under the Government of the Russian Federation,
Russia, Moscow

STUDY OF THE DYNAMICS OF THE INCIDENCE OF CORONAVIRUS INFECTION IN MOSCOW

Abstract. *The article presents the actual problem of using modern methods of mathematical statistics and econometrics in the study of the dynamic range of Covid-19 patients in Moscow for the entire observation period. A comparative analysis of the incidence of coronavirus infection in Moscow with data on the incidence of acute respiratory diseases is carried out.*

Keywords: *autocorrelation function, regression, correlation coefficient, Covid -19.*

В декабре 2021 года исполнится два года с начала распространения в мире новой коронавирусной инфекции, получившей название Covid-19. Во всех странах, столкнувшихся с данной инфекции, предпринимались беспрецедентные меры по минимизированию передачи инфекции от носителей ее к здоровым людям. Однако, несмотря на все меры, принимаемые как для снижения заболеваемости, так и для качественного лечения, данные по России не показывают снижения фиксируемых случаев инфицирования. Ранее [1] была исследована зависимость смертности от Covid-19 и социально-экономических и демографических характеристик Российской Федерации по всем регионам по данным Росстата [2]. Для анализа данных были использованы методы математической статистики и машинного обучения. Показано, что существует статистически значимая корреляционная связь между смертностью от коронавирусной инфекции и злокачественными образованиями, впервые выявленными, то есть в первую очередь гибнут люди с ослабленным борьбой с онкологическими заболеваниями иммунитетом [1]. Не выявлено статистически достоверной связи между вакцинированием от Covid-19 и уменьшением смертности от этой инфекции. Исходя из проведенного исследования логично проанализировать методами математической статистики и эконометрики динамические ряды по заболеваемости Covid-19 в Москве, так как в работе [3] представлен подробный анализ огромного массива данных по заболеваемости респираторными заболеваниями в Москве в период с 1959 по 1989 годы. Коронавирусная инфекция относится к респираторным заболеваниям. На рис. 1 представлены данные по числу больных Covid-19 в Москве [4].

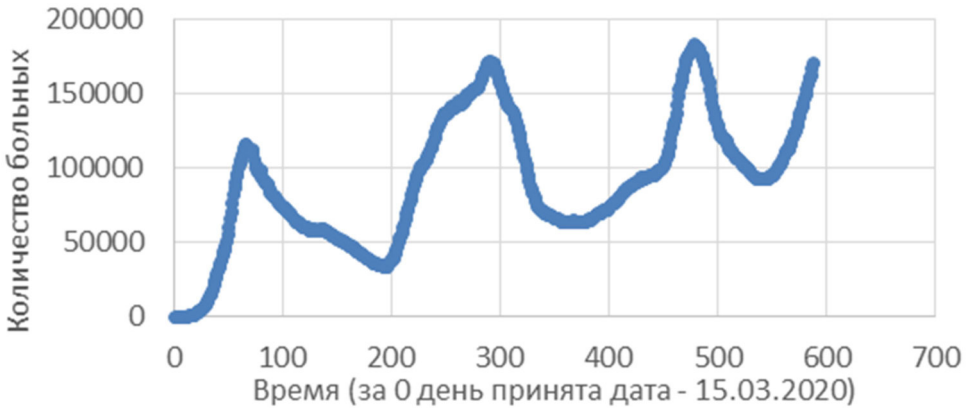


Рисунок 1 – Динамика количества людей, которые считались больными в каждый конкретный день по данным [4]

Автокорреляционная функция (АКФ) временного ряда, представленного на рисунке 1, приведена на рисунке 2.

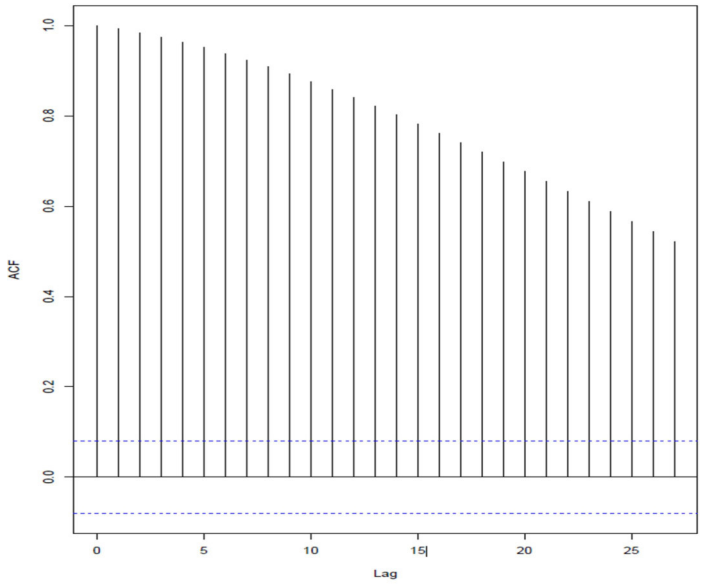


Рисунок 2 – Автокорреляционная функция числа больных Covid-19 в Москве за весь период наблюдения (с 15.03.2020 по 23.10.2021)

Из коррелограммы, представленной на рисунке 2, следует, АКФ монотонно убывает, что существует положительная корреляционная связь между членами временного ряда. Можно также предположить, что случайная составляющая незначительна ввиду гладкости автокорреляционной функции. После анализа АКФ были построены различные авторегрессионные модели, при автоматическом подборе наилучшей модели была выбрана модель авторегрессионная ARIMA (3,1,5) (рис.3).

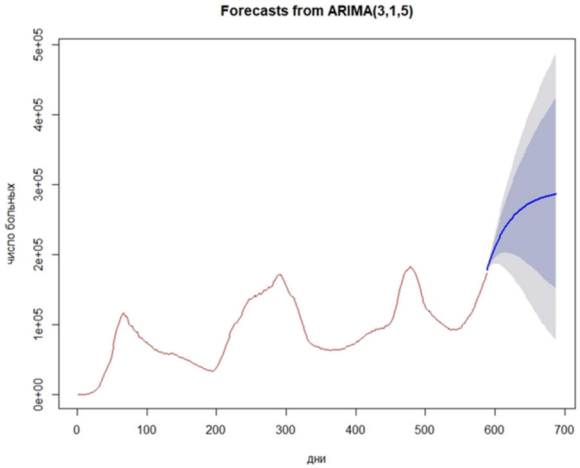


Рисунок 3 – Прогноз снижения числа больных ковидом к началу января 2022 года

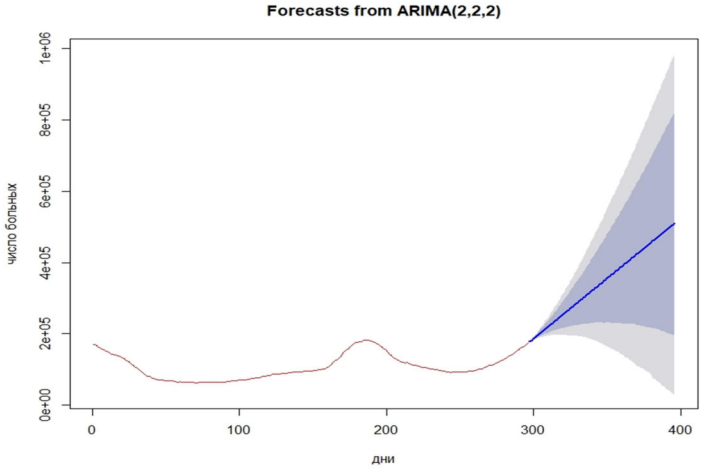


Рисунок 4 – Прогноз числа больных Covid-19 в Москве по модели Arima(2,2,2)

Следует отметить, что данная модель не может использоваться для прогноза числа больных Covid-19, так как основной показатель, используемый для оценки точности прогноза, средняя абсолютная ошибка MAPE, больше 50%.

Интересно посмотреть, как изменится прогноз, если учитывать данные по числу больных в Москве начиная с 01.01.2021. С начала года была доступна вакцина Спутник-–V для вакцинации.

В этом случае прогноз числа больных представлен на рис.4.

Как следует рис.4, по крайней мере, прогнозируется рост на сто дней (до конца января 2021 года). Стоит заметить, что прогноз можно считать удовлетворительным, так как MAPE=42%.

Все вычисления выполнены в R-Studio.

В заключение отметим, что вопросы, поставленные в работе [3] после детального анализа данных по заболеваемости ОРЗ в Москве с 1959 по 1989 годы, остаются ожидать ответа и после детального исследования темпов роста Covid-19. «Изменения температуры, новые штаммы вирусов, формирование иммунитета действуют регулярно или случайно?» Пока ответа на эти вопросы нет.

Список литературы

1. Борисова Л.Р., Фридман М.Н. Некоторые аспекты влияния пандемии коронавируса на экономику // Самоуправление. – 2021 г. – № 5 (127). – С. 147-152.
2. Регионы России. Социально-экономические показатели 2020. – Москва: Росстат, 2020. – 1242 с.
3. Романюха А.А., Санникова Т.Е., Дрынов И.Д. Возникновение эпидемий острых респираторных заболеваний // Вестник Российской Академии наук. – 2011. – Т.81. – № 2. – С.122-126.
4. Коронавирус в Москве сегодня – сколько заболело, вакцинировано, последние новости (https://horosho-tam.ru)

УДК 519.813

Левизов Сергей Всеволодович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Владимирский государственный университет
имени А. Г. и Н. Г. Столетовых,
Россия, Владимир

О ВЫПАДЕНИИ «ДУБЛЯ» ПРИ БРОСАНИИ МНОГОГРАННИКА

Аннотация. *Получена оценка длительности «игры» с бросанием игральной кости в виде правильного многогранника – до «приземления» на одну и ту же грань дважды подряд.*

Ключевые слова*: правильный многогранник, рекуррентные последовательности, дифференцирование функционального ряда, математическое ожидание, дисперсия.*

Sergey Vsevolodovich Levizov
Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor,
Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletov,
Russia, Vladimir

TO THE PROBLEM OF SHEDDING «DOUBLE» WHILE TOSSING A POLYHEDRON

Abstract. *The estimate of a «game» duration with tossing a die in a form of regular polyhedron, up to twice «landing» on the same edge, is obtained.*

Keywords: *regular polyhedron, recurrent sequences, differentiation of functional series, mathematical expectation, variance.*

Рассмотрим ситуацию: правильный многогранник (полиэдр) с пронумерованными гранями) бросается до тех пор, пока дважды подряд не упадёт на одну и ту же (конкретно оговорённую) грань (будем называть это явление «дублем»). Как долго («в среднем») может продолжаться такая «игра»?

Иными словами, нам нужно рассчитать математическое ожидание дискретной случайной величины X = {количество бросаний, необходимых для окончания вышеописанной «игры»}. Для этого попытаемся оценить соответствующие вероятности событий. Пусть многогранник имеет k одинаковых граней, на которых написаны цифры (числа) от 1 до k. Исследуем случай, когда «дублируется» цифра 1.

X_n = {«дубль» впервые возникает после n-го бросания}, n = 1, 2, …

Пусть $P(X_n) = p_n$, тогда легко вычислить, что $p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{1}{(k)^2}$, $p_3 = p_4 = \frac{k-1}{(k)^3}$, …

Для дальнейшей оценки вероятностей p_n будем интерпретировать исходы, возникающие после n подбрасываний, в виде последовательностей цифр 1, 2,…, k. Оценим величину T(n)– количество последовательностей длины n, составленных из этих цифр – таких, которые заканчиваются сочетанием «1, 1» (до этого не встречавшимся). Заметим, что, во-первых, такую последовательность длины n можно получить из аналогичной последовательности длины (n–1), дописывая к ней слева любую из цифр от 2 до k – количество таковых равно T(n–1).С другой стороны, подходящую последовательность длины n можно получить, добавляя слева цифру «1» – к тем последовательностям длины (n–1), которые начинались с цифр 2, 3,…, k – а их количество равно как раз T(n–2) – это шаг «индукционного перехода» при построении последовательности длины (n–1). Тем самым все возможности для построения подходящих последовательностей длины n будут исчерпаны. В итоге мы получаем рекуррентное соотношение:

$$T(n) = (k - 1) \cdot [\, T(n-1) + T(n-2)] \text{ для всех } n \geq 3.$$

Это и есть формула для подсчёта количества походящих последовательностей длины n; при этом ясно, что T(0) = T(1) = 0; T(2) = 1; T(3) = k – 1; T(4) = k · (k–1), и т.д.

Можно сказать, что возникает возвратная (рекуррентная) последовательность чисел.

Теперь понятно, что вероятность p_n будет равна величине $T(n)/(k)^n$ (количество всех «подходящих» последовательностей длины n делится на количество всех возможных последовательностей длины n, составленных из цифр от 1 до k).

Далее вычисляем математическое ожидание:

$$M(X) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{n}{(k)^n} T(n) = \sum_{n=1`}^{\infty} \frac{n+1}{(k)^{n+1}} T(n+1), \text{ поскольку } T(1) = 0.$$

Нам нужно уточнить величину n-го элемента последовательности, полученной выше. Воспользуемся для этого методом, применявшимся в [1] (см. с.21-25).

А именно – будем искать T(n) в виде линейной комбинации геометрических прогрессий со знаменателями α и β, которые являются корнями «характеристического» уравнения, соответствующего полученной последовательности:

$(q)^n = (k-1)((q)^{n-1} + (q)^{n-2}) \Rightarrow (q)^2 = (k-1)q + (k-1) \Rightarrow q = \frac{(k-1 \pm \sqrt{D}}{2}$, где

$D = (k-1) \cdot (k+3)$; т.е. $\alpha = \frac{k-1+\sqrt{D}}{2}$, $\beta = \frac{k-1-\sqrt{D}}{2}$.

Тогда $T(n) = C_1 (\alpha)^{n-1} + C_2 (\beta)^{n-1}$, где коэффициенты C_1 и C_2 найдутся из системы

$$\begin{cases} T(1) = C_1 + C_2 = 0 \\ T(2) = C_1\alpha + C_2\beta = 1 \end{cases} \text{ ; отсюда } C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Значит, $M(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(k)^{n+1}} T(n+1) = \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(k)^{n+1}} \cdot \left[\left(\frac{k-1+\sqrt{D}}{2} \right)^n - \left(\frac{k-1-\sqrt{D}}{2} \right)^n \right] =$

$$= \frac{1}{k\sqrt{D}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left[\left(\frac{k-1+\sqrt{D}}{2k} \right)^n - \left(\frac{k-1-\sqrt{D}}{2k} \right)^n \right].$$

Полученный ряд представляет собой разность двух равномерно сходящихся (для $|x| < 1$) рядов вида

$\frac{1}{k\sqrt{D}} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(x)^n$, где $x = \left(\frac{k-1 \pm \sqrt{D}}{2k} \right)$ – легко проверяется, что $|x| < 1$.

Находим сумму каждого из них, применяя операцию дифференцирования ряда к сумме геометрической прогрессии :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(x)^n = (2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots)' = (x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)' = (\sum_{n=1}^{\infty} (x)^{n+1})' =$$

$$= (\frac{x^2}{1-x})' = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} = -1 + \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Для нашего случая (обозначая, как и ранее, $D = (k-1) \cdot (k+3)$), получаем:

$$M(X) = \frac{1}{k\sqrt{D}} \left[-1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{k-1+\sqrt{D}}{2k} \right)^2} + 1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{k-1-\sqrt{D}}{2k} \right)^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{k\sqrt{D}}\left[\frac{4k^2}{\left(k+1-\sqrt{D}\right)^2}-\frac{4k^2}{\left(k+1+\sqrt{D}\right)^2}\right]=\frac{4k}{\sqrt{D}}\left[\frac{\left(k+1+\sqrt{D}\right)^2-\left(k+1-\sqrt{D}\right)^2}{\left(k+1-\sqrt{D}\right)^2\left(k+1+\sqrt{D}\right)^2}\right]=$$

$$= \frac{4k}{\sqrt{D}}\left[\frac{2\sqrt{D}\cdot(2(k+1)}{\left((k+1)^2-D\right)^2}\right]=\frac{16(k+1)\cdot\sqrt{D}}{\sqrt{D}(k^2+2k+1-(k^2+2k-3))^2}=\frac{16k(k+1)}{(4)^2}=\text{k}\cdot(\text{k}+1).$$

Таким образом, «средняя длительность» нашей «игры» составит $k\cdot(k+1)$ (бросков).

Рассчитаем также и дисперсию случайной величины X. Получим следующее:

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2=M(X^2)-(k(k+1))^2.$$

$$M(X^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(n)^2\,p_n=\sum_{n=1}^{\infty}(n)^2\,\frac{T(n)}{(k)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2\,\frac{T(n+1)}{(k)^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{k\sqrt{D}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{(k)^{n+1}}\left[\left(\frac{k-1+\sqrt{D}}{2}\right)^n-\left(\frac{k-1-\sqrt{D}}{2}\right)^n\right]=$$

$$=\frac{1}{k\sqrt{D}}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2\left[\left(\frac{k-1+\sqrt{D}}{2k}\right)^n-\left(\frac{k-1-\sqrt{D}}{2k}\right)^n\right].$$

Вновь имеем разность двух равномерно сходящихся рядов вида

$$\frac{1}{k\sqrt{D}}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2(x)^n,\ \text{где}\ x=\left(\frac{k-1\pm\sqrt{D}}{12}\right).$$

Вычисляем их суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2(x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)(x)^n-(n+1)(x)^n\right]=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x)^{n+2}\right)''-\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x)^{n+1}\right)'=$$

$$=\left(\frac{1}{1-x}-1-x-x^2\right)''-\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)'=\left(\frac{2}{(1-x)^3}-2\right)-\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1\right)=$$

$$=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}-1.$$

Обозначая (для упрощения вычислений) $\alpha=\frac{k-1-\sqrt{D}}{2k}$, $\beta=\frac{k-1+\sqrt{D}}{2k}$, получим:

$$1-\alpha=1-\frac{k-1-\sqrt{D}}{2k}=\frac{k+1+\sqrt{D}}{2k},\ 1-\beta=1-\frac{k-1+\sqrt{D}}{2k}=\frac{k+1-\sqrt{D}}{2k},\ \text{и тогда}$$

$$M(X^2)=\frac{1}{k\sqrt{D}}\left[\frac{2}{(1-\alpha)^3}-\frac{2}{(1-\beta)^3}-\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1-\beta)^2}\right]=$$

$$=\frac{2}{k\sqrt{D}}\left[\frac{(2k)^3}{(k+1-\sqrt{D})^3}-\frac{(2k)^3}{(k+1+\sqrt{D})^3}\right]-\frac{1}{k\sqrt{D}}\left[\frac{(2k)^2}{(k+1-\sqrt{D})^2}-\frac{(2k)^2}{(k+1+\sqrt{D})^2}\right]=$$

$$= \frac{2\cdot(2k)^3}{k\sqrt{D}}\left[\frac{(k+1+\sqrt{D})^3-(k+1-\sqrt{D})^3}{(k+1-\sqrt{D})^3(k+1+\sqrt{D})^3}\right] - \frac{(2k)^2}{k\sqrt{D}}\left[\frac{(k+1+\sqrt{D})^2-(k+1-\sqrt{D})^2}{(k+1-\sqrt{D})^2(k+1+\sqrt{D})^2}\right] =$$

$$= \frac{2\cdot(2k)^3}{k\sqrt{D}}\left[\frac{(k+1+\sqrt{D})^3-(k+1-\sqrt{D})^3}{((k+1)^2-D)^3}\right] - \frac{(2k)^2}{k\sqrt{D}}\left[\frac{(k+1+\sqrt{D})^2-(k+1-\sqrt{D})^2}{((k+1)^2-D)^2}\right] =$$

$$= \frac{2\cdot(2k)^3}{k\sqrt{D}}\left(\frac{2\sqrt{D}}{4^3}\cdot(4k^2+8k)\right) - \frac{(2k)^2}{k\sqrt{D}}\left(\frac{4(k+1)\sqrt{D}}{4^2}\cdot\right) = 2k^3(k+2)-k(k+1).$$

Окончательно тогда: $D(X) = 2k^3(k+2)-k(k+1)-(k(k+1))^2 = (k-1)k(k^2+3k+1)$. Отсюда ясно, что среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$ составляет величину порядка $(k)^2$.

Полученный результат согласуется со случаем k = 6, изученным в [2].

Список литературы

1. Воробьёв Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука. - 1984. - 144 с.
2. Левизов С.В. О выпадении сочетания (6,6) при бросании кубика // Современные проблемы физико-матем. наук: материалы VI Всероссийской научно-практ.конференции, г. Орёл : ОГУ им. И.С. Тургенева, 2020.– 603 с.; ISBN 978-5-9929-0923- 4. С. 169 – 172.

Методы дискретных особенностей в задачах математической физики

УДК 532.546

Дорофеева Виктория Ивановна
кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой информатики,
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, Орел

Соромотина Анастасия Алексеевна
студент,
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, Орел

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОСЕДАНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И СИСТЕМЫ ДРЕНАЖНЫХ УСТРОЙСТВ ПРИ НАЛИЧИИ ПОЛУПРОНИЦАЕМЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Аннотация. *В работе моделируется поведение линии эволюции бугра грунтовых вод под действием силы тяжести, двух дренажных устройств в случае наличия полупроницаемого включения. Приводятся примеры оседания бугра для различных значений мощности и координат расположения стоков. Численный эксперимент проведен с использованием метода дискретных особенностей.*

Ключевые слова: *математическое моделирование, метод дискретных особенностей, линия эволюции, полупроницаемое включение.*

Dorofeyeva Viktoriya
Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor,
Head of the department of informatics,
Orel State University,
Russia, Orel

Soromotina Anastasiya
student,
Orel State University,
Russia, Orel

SIMULATION OF THE PROCESS OF GROUND WATER SEDIMENTATION UNDER THE ACTION OF GRAVITY AND THE SYSTEM OF DRAINAGE DEVICES IN THE PRESENCE OF SEMIPERMEABLE INCLUSIONS

Abstract. *The work simulates the behavior of the line of evolution of the mound of groundwater under the action of gravity, two drainage devices in the case of the presence of a semi-permeable inclusion. Examples of mound subsidence are given for various values of the thickness and coordinates of the location of the effluents. A numerical experiment was carried out using the method of discrete singularities.*

Keywords: *mathematical modeling, discrete singularity method, evolution line, semipermeable inclusion.*

Рассмотрим двумерную задачу об одновременной фильтрации двух жидкостей в пористой среде в постановке Лейбензона-Маскета при наличии двух дренажных устройств и одного полупроницаемого включения [1, 2]. При пренебрежении вязкостью и плотностью внешней жидкости получаем систему интегрального и дифференциального уравнений, которая описывает опускание грунтовых вод под действием силы тяжести при наличии двух дренажных устройств для откачки воды и одного полупроницаемого включения в пласте грунта:

$$g_t(\bar{x},t) - 2\sum_{k=S_1,t} G[g_k,L_k](\bar{x},t) = -2\Pi(\bar{x})K_1 + 2\phi_{0_1} + 2\phi_{0_2},$$

$$g_{S_1}(\bar{x},t) - 2\lambda_{S_1}\sum_{k=S_1,t} G[g_k,L_k](\bar{x},t) = 0,$$

где $G[g_k,L_k](\bar{x},t)=\int\limits_{L_k} g_k(\bar{y})\Omega(\bar{x},\bar{y})dl_y$, $\Omega(\bar{x},\bar{y}) = \dfrac{\partial\Phi_1(\bar{x},\bar{y})}{\partial\mathbf{n}_y}$, $\lambda_{S_1} = \dfrac{(K(\bar{x}) - K_1(\bar{x}))}{(K(\bar{x}) + K_1(\bar{x}))}$, $\Phi_1(\bar{x},\bar{y})$-ф-я Грина – потенциал стока с полным расходом, равным -1, $\Pi(\bar{x}) = -x_2$ – потенциал силы тяжести, $K(\bar{x})$ – проницаемость вне замкнутого контура L_{S_1}, $K_1(\bar{x})$ – проницаемость внутри замкнутого контура L_{S_1}, границы L_{S_1} и L_t входят в область протекания процесса.

Дифференциальное уравнение движения границы L_t:

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial t} = V_{0_1} + V_{0_2} + \sum_{k=S_1,t}\mathbf{V}[g_k,L_k](\bar{x}) \quad \text{на} \quad L_t,$$

здесь $V_{0_1} = Kgrad\phi_{0_1}$,$V_{0_2} = Kgrad\phi_{0_2}$ -скорости квазипотенциалов невозмущенного течения ϕ_{0_1}, ϕ_{0_2}. Область совместной фильтрации жидкостей ограниченна непроницаемой прямой L_I, разделяющей грунт и непроницаемые породы. В работе [3] представлены поля скоростей в начальный момент времени для различных параметров исходных данных.

Проанализируем поведение линии эволюции при различных параметрах.

Задача исследовалась при наличии одного включения при $\lambda_{S_1} = 0.8$. Первоначальная высота бугра $H_0 = 1.5$. На рисунке 1 построены последовательные положения подвижной границы L_t при мощности стоков $q_1 = q_2 = 1.0$ в моменты времени $t = 0; 1/3T; 2/3T; T$, где $T = 0.5$ - время достижения стока, координаты стоков $z_1 = (0.5; 0.3)$, $z_2 = (1.3; 0.3)$.

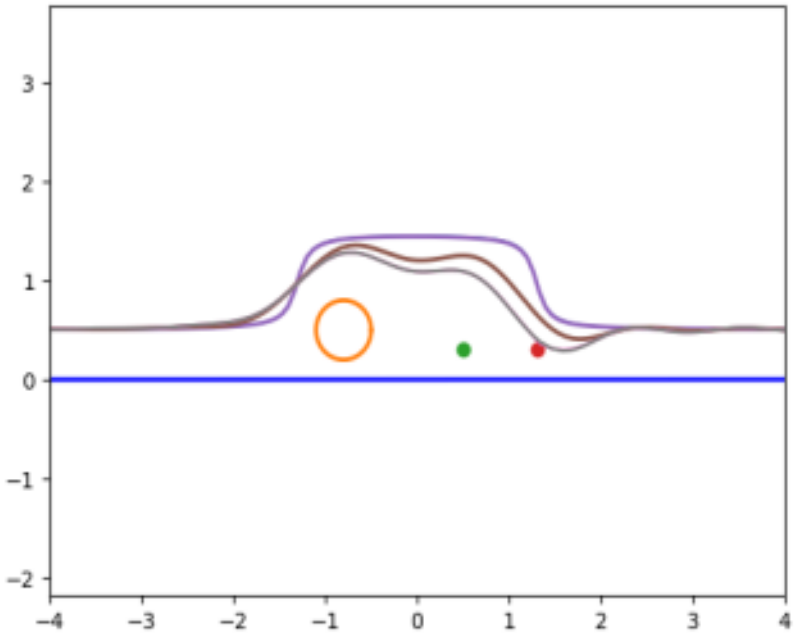


Рисунок 1 – Процесс оседания грунтовых вод в однородном слое при $n = 300$, $dt = 0.01$, $\lambda_{S_1} = 0.8$, $q_1 = q_2 = 1.0$, $z_1 = (0.5; 0.3)$, $z_2 = (1.3; 0.3)$

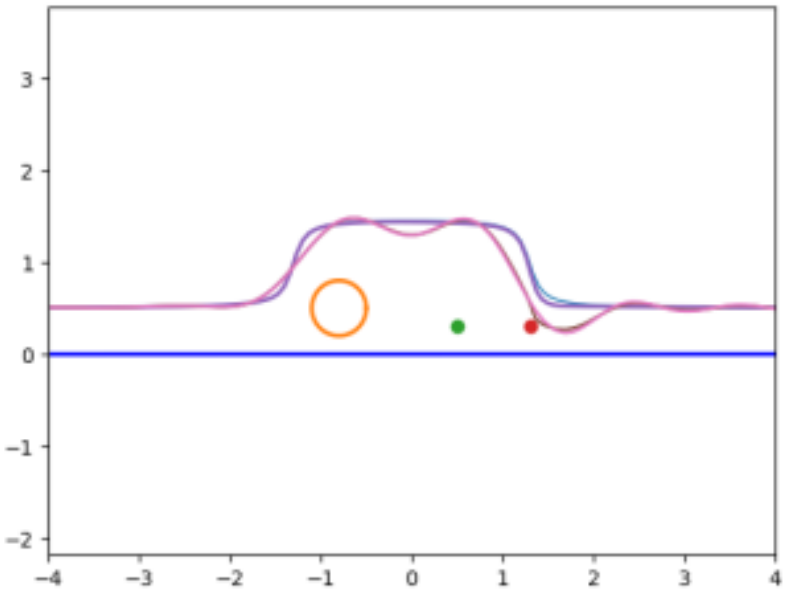


Рисунок 2 – Процесс оседания грунтовых вод в однородном слое при $n = 300$, $dt = 0.01$, $\lambda_{S_1} = 0.8$, $q_1 = 1.5$, $q_1 = 6.5$, $z_1 = (0.5; 0.3)$, $z_2 = (1.3; 0.3)$

Численные расчеты выполнены с использованием метода дискретных особенностей при количестве $n = 300$ точек разбиения границы L_t. Для простоты граница полупроницаемого включения выбрана в форме окружности. На рисунке 2 построены последовательные положения подвижной границы L_t при мощности стоков $q_1 = 1.5$, $q_1 = 6.5$ в моменты времени $t = 0; 1/3T; 2/3T; T$.

Представленные рисунки показывают, что построенная математическая модель достаточно хорошо описывает процесс опускания бугра грунтовых вод при наличии полупроницаемого включения и системы дренажный устройств.

Дальнейшие исследования направлены на увеличение количества элементов системы дренажных устройств и выявление влияния этой системы на время достижения стоков.

Список литературы

1. Дорофеева В. И., Никольский Д. Н., Математическое моделирование двумерного процесса изменения уровня грунтовых вод под действием силы тяжести методом дискретных особенностей // Вычислительные методы и программирование. — 2011.— Том.12, — Номер. 1 — С. 82–86.

2. Дорофеева В. И., Афанаскина И. В., Чистякова К. Г. Исследование задачи оседания грунтовых вод при наличии полупроницаемых включений и дренажной системы // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование. –2016. –С. 143–144.

3. Дорофеева В. И., Соромотина А. А., Исследование процесса оседания бугра грунтовых вод под дйствием силы тяжести, двух дренажных устройств и полупроницаемого включения // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы VI Всерос.науч.-практ. конф-ции с межд.участием (4-5 декабря 2020 г., г.Орёл).Науч.электр.издание.- Орёл: Изд-во ОГУ имени И.С. Тургенева, 2020 г., С.177-179.

УДК 532.546

Лекомцев Денис Геннадьевич
старший преподаватель,
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, Орел

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОВОДИМОСТИ ПРИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ СТЕПЕНИ

Аннотация. *В работе строятся двумерные плоскопараллельные течения в анизотропной и неоднородной пористой среде. Проницаемость среды описывается тензором второго ранга, компоненты которого моделируются степенными функциями координат, при этом в данной работе полагается, что показатель степени $s > 0$. В статье делаются выводы о влиянии компонентов тензора проницаемости и покателя степени s на характер течения.*

Ключевые слова: *теория фильтрации, скважина, пористая среда, ортотропный неоднородный пласт, тензор проницаемости.*

Lekomtsev Denis Gennadevich
Senior Lecturer,
Orel State University,
Russia, Orel

MATHEMATICAL MODELING OF FILTRATION FLOWS IN AN ANISOTROPIC INHOMOGENEOUS MEDIUM WITH A POWER LAW OF CONDUCTIVITY CHANGE AT POSITIVE EXPONENTS

Abstract. *Two-dimensional plane-parallel flows are constructed in an anisotropic and inhomogeneous porous medium. The permeability of the medium is described by a tensor of the second rank, whose components are modeled by power functions of coordinates, while in this paper it is assumed that the exponent $s > 0$. The article draws conclusions about the influence of the components of the permeability tensor and degree indicator s on the nature of the flow.*

Keywords: *filtration theory, well, porous medium, orthotropic inhomogeneous reservoir, permeability tensor.*

Введение

На момент написания данной статьи добыча нефти является одной из важнейших отраслей экономики [1]. При этом легко доступные месторождения сейчас истощаются, а вместо них начинают активно эксплуатироваться месторождения со сложной структурой пород коллекторов. В широко известной классиче-

ской литературе (см., например [2]) среду обычно полагают однородной и изотропной. Однако, как демонстрирует целый ряд отечественных [3, 4, 5] и зарубежных [6] работ, породы коллекторы имеют сложную геологическую структуру, в частности, характеризуются анизотропией и неоднородностью своих свойств. Математические модели фильтрационных течений в анизотропных и неоднородных пластах рассмотрены и обобщены в современной работе [7].

1. Постановка задачи

В статье моделируется двумерное стационарное движение флюида к скважине в анизотропном неоднородном грунте проводимости $P = (P_{ij}) = H(K_{ij})$ (H – толщина пласта, (K_{ij}) $i, j = 1, 2$ – тензор его проницаемости). Рассматривается скважина, которая имеет фильтр полностью вскрывающий нефтеносный (водоносный) пласт на всю его толщину. Такое течение описываем обобщённым потенциалом φ и функцией тока ψ. φ и ψ – функции декартовых координат (x, y), удовлетворяющие во всей области D, за исключением изолированных особых точек этих функций, системе уравнений эллиптического типы [7]. Исключая ψ [7], получаем уравнение для φ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(P_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(P_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0, \tag{1}$$

где

$$P_{11} > 0 \quad (P_{22} > 0), \quad D(P_s) = P_{11}P_{22} - (P_{12} + P_{21})^2/4 > 0, \tag{2}$$

здесь $D(P_s)$ – определитель симметричной части $P_s = (P + P^T)/2$ тензора P, $P^T = (P_{ji})$ – транспонированный тензор. Уравнения записаны в безразмерных величинах [7].

Решение уравнения (1) сложно, для упрощения можно преобразовать (1) к наиболее простому (каноническому) виду. Перейдем с физической комплексной плоскости $z = x + iy$ на вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, эти плоскости связаны гомеоморфным (взаимно однозначным и непрерывным) преобразованием [8]

$$\zeta = \zeta(z) \quad \big(\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)\big), \tag{3}$$

Преобразование (3) удовлетворяет уравнению типа Бельтрами [7]. Далее будем рассматривать ортотропный $(k_{12} = k_{21})$ слой с раздельной анизотропией и неоднородностью: $P = H(K_{ij}) = k\chi(z)$ $(P_{ij} = k_{ij}\chi(z))$. Далее предположим, что $H = 1$ и $\chi(z) = y^s$ [9]. В случае такой постановки задачи $\mu(z)$ - комплексная постоянная и решение уравнения типа Бельтрами имеет вид $\zeta = z + \mu\overline{z}$. Отсюда имеем преобразование [8]

$$x = \frac{(1-a)\xi - b\eta}{1 - |\mu|^2}, \quad x = \frac{(1+a)\eta - b\xi}{1 - |\mu|^2}, \tag{4}$$

где $a = \frac{\alpha-1}{\alpha+1+2\sqrt{\alpha-\beta^2}}$, $b = -\frac{2\beta}{\alpha+1+2\sqrt{\alpha-\beta^2}}$, $|\mu|^2 = a^2 + b^2$, $\alpha = \frac{k_{22}}{k_{11}} > 0$, $\beta = \frac{k_{12}}{k_{11}}$.

Применив преобразование координат (4), на плоскости ζ найдем проводимость (проницаемость) [9]

$$P'(\zeta) = k_0 \left[\frac{(1+a)\eta - b\xi}{1-a^2-b^2} \right]^s \quad (k_0 = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} > 0).$$

Перейдем на плоскость $\zeta' = \xi' + i\eta'$, которая связана с плоскостью ζ поворотом на угол ϑ_0 ($tg\vartheta_0 = b/(1+a)$). Плоскость ζ' интересна тем, что на ней проводимость является функцией одного переменного η' [9]:

$$P'(\zeta') = k_0' \eta'^s, \quad \left(k_0' = k_0 \left[\frac{(1+a)\cos\vartheta_0 + b\sin\vartheta_0}{1-a^2-b^2} \right]^s \right). \tag{5}$$

Характерной особенностью слоя проводимости (5) является наличие линии $\sigma_0' : \quad \eta' = 0$, на которой $P' = 0$, если $s > 0$. Таким образом, в данном случае моделируемое течение будет ограничено положительной полуплоскостью.

Уравнение (1) на плоскости ζ принимает вид

$$\Delta\varphi + \frac{\partial\chi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{\partial\chi}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, \tag{6}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ - оператор Лапласа.

2. Моделирование картины конкретных фильтрационных течений

Так как рассматриваемый слой ортотропный, то известны [9] первые фундаментальные решения уравнения (6), которое моделирует работу скважины в слое, проницаемость которого определяется формулой (5). Согласно [9] имеем первое фундаментальное решение в том случае, когда $s > 0$ и является четным натуральным числом

$$\Phi_1(\zeta', \zeta_0') = \frac{Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega)}{2\pi k_0'(\eta'\eta_0')^{s/2}} \quad (s > 0), \tag{7}$$

где $Q_\nu(\omega)$ – функция Лежандра второго рода степени $\nu = \frac{s}{2} - 1$ и $\nu = \frac{|s|}{2}$ аргумента $\omega = 1 + R'^2/2\eta'\eta_0'$, $R' = |\zeta' - \zeta_0'| = \sqrt{(\xi' - \xi_0')^2 + (\eta' - \eta_0')^2}$, которая имеет в точке $\zeta' = \zeta_0' \quad (R' = 0, \quad \omega = 1)$ особенность логарифмического типа, а именно, $Q_\nu(\omega) \to -ln|\zeta' - \zeta_0'|$ при $\zeta' \to \zeta_0'$ [10].

Используя фундаментальное решение (7) можно построить фильтрационные картины течения в данном частном случае анизотропной неоднородной среды, аналогично случаю анизотропной однородной среды [11].

Картина фильтрационного течения в случае показателя степени $s = 2$ представлена на рисунках 1-4, а на рисунках 5-6 для случая $s = 4$. На всех рисунках скважина располагается в точке с координатами $(0, 1)$.

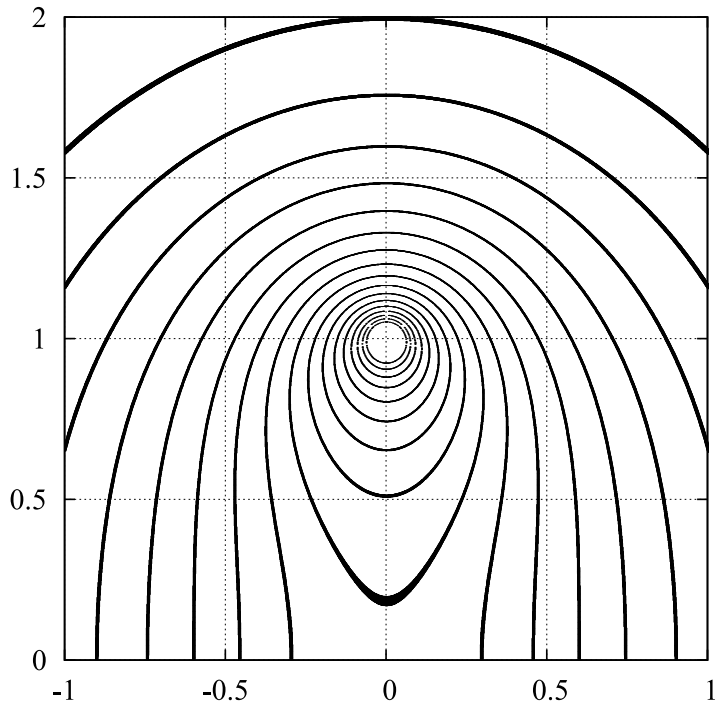


Рисунок 1 – Линии обобщенного потенциала течения, образованного источником (стоком) в анизотропной неоднородной среде со степенным законом изменения проводимости при $s = 2$, $\alpha = 5$, $\beta = 0$, $\Delta C = 0,005$

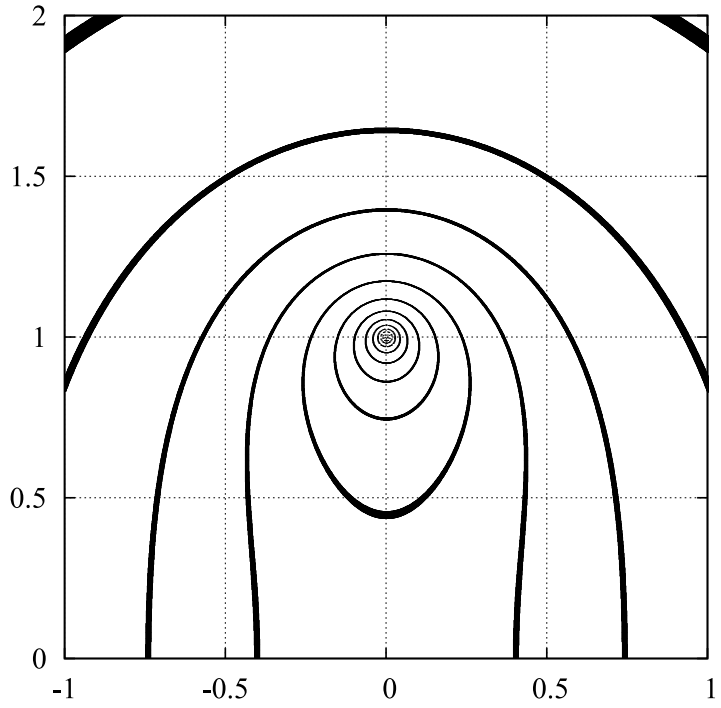


Рисунок 2 – Линии обобщенного потенциала течения, образованного источником (стоком) в анизотропной неоднородной среде со степенным законом изменения проводимости при $s = 2$, $\alpha = 10$, $\beta = 0$, $\Delta C = 0,005$

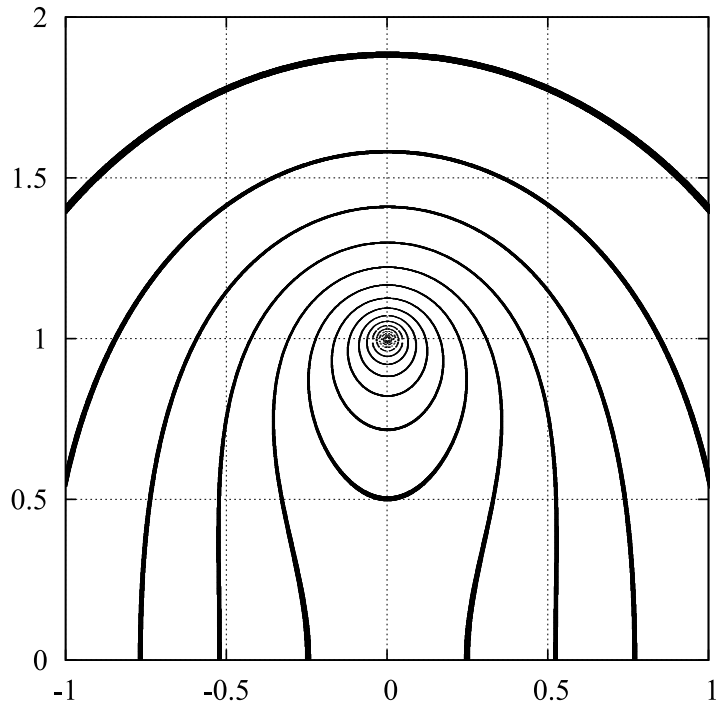


Рисунок 3 – Линии обобщенного потенциала течения, образованного источником (стоком) в анизотропной неоднородной среде со степенным законом изменения проводимости при $s = 2$, $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\Delta C = 0,005$

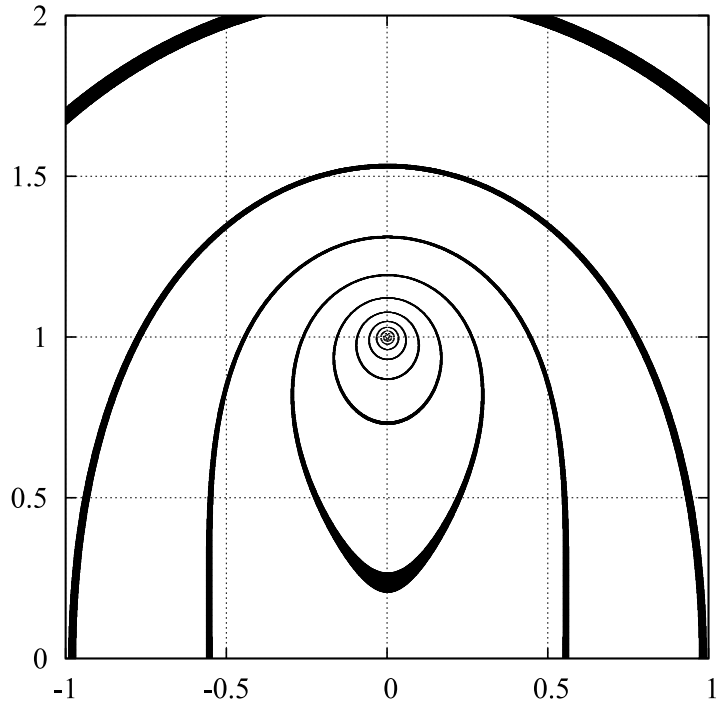


Рисунок 4 – Линии обобщенного потенциала течения, образованного источником (стоком) в анизотропной неоднородной среде со степенным законом изменения проводимости при $s = 2$, $\alpha = 10$, $\beta = 2$, $\Delta C = 0,005$

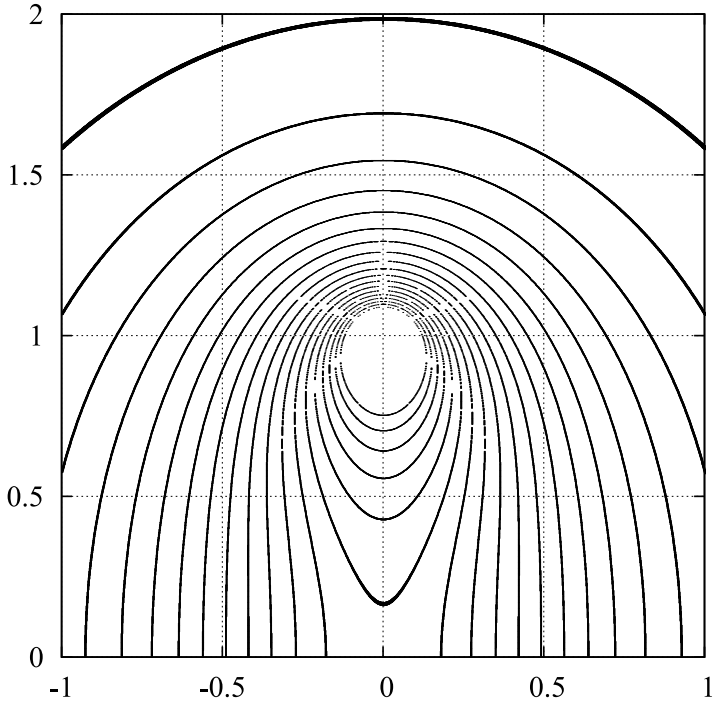


Рисунок 5 – Линии обобщенного потенциала течения, образованного источником (стоком) в анизотропной неоднородной среде со степенным законом изменения проводимости при $s = 4$, $\alpha = 5$, $\beta = 0$, $\Delta C = 0,001$

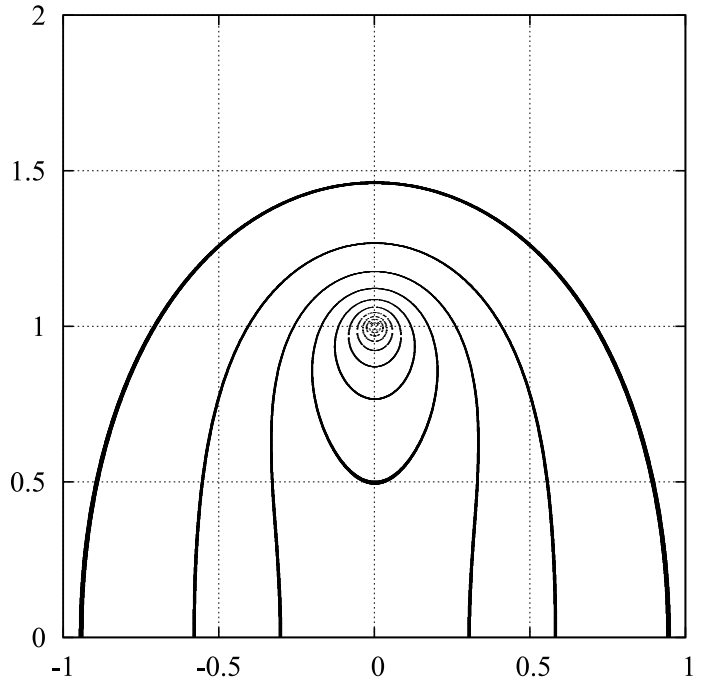


Рисунок 6 – Линии обобщенного потенциала течения, образованного источником (стоком) в анизотропной неоднородной среде со степенным законом изменения проводимости при $s = 4$, $\alpha = 10$, $\beta = 0$, $\Delta C = 0,001$

Как видно на рисунках 1-6, картина фильтрационного течения в случае неоднородной анизотропной среды со степенным законом изменения проводимости сильно отличается от случая однородной анизотропной среды [11]. При этом на всех изображениях хорошо видно положение линии $\sigma_0' : \eta' = 0$, располагающейся на нижней границе рисунков. На этой линии проводимость степенного слоя P' уменьшается до нуля. Также конкретные картины течений демонстрируют, что сильно возрастает расстояние между соседними линиями обобщенного потенциала при переходе от степенного слоя с показателем $s = 2$ к слою с $s = 4$, что вынуждает для большей наглядности перейти на более частое изображение линий обобщенного потенциала от $\Delta C = 0,005$ при $s = 2$ к $\Delta C = 0,001$ при $s = 4$.

Заключение

Исследован случай двумерной задачи о моделировании течения в анизотропном неоднородном пласте грунта со степенным законом изменения проницаемости при показателе степени $s > 0$. Из результатов работы видно, что анизотропия и неоднородность могут оказывать существенное влияние на картину течения. Изменение показателя степени s приводят к наиболее существенному изменению картины. Изменение диагональных и недиагональных компонентов тензора проницаемости изменяет картину течения незначительно. Исследование простых задач, для которых известны аналитические решения, может выступать как модель при рассмотрении задач, решаемых численными методами [12, 13, 14].

Список литературы

1. Хайн Н. Геология, разведка, бурение и добыча нефти. — М.: ЗАО «Олимп - Бизнес». — 2004. — 752 с.

2. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. — М.: Гостоптехиздат. — 1963. — 396 с.

3. Графутко С. Б. Изменения анизотропных свойств пласта под действием фильтрационного потока: Автореф. дис. канд. тех. наук. — М., Государственная академия нефти и газа им. И. М. Губкина. — 1993. — 28 с.

4. Семенов А. А. Экспериментальные исследования фильтрационных течений в анизотропных пористых средах: Автореф. дис. канд. тех. наук. — М., РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина. — 2007. — 26 с.

5. Дмитриев Н. М. Модели фильтрации в анизотропных средах: Автореф. дис. док. тех. наук. — М., Государственная академия нефти и газа им. И. М. Губкина. — 1997. — 34 с.

6. Nordquist T. Permeability Anisotropy of Resedimented Mudrocks. — Cambridge: Massachusetts Institute of Technology. — 2015. — 277 p.

7. Пивень В. Ф. Математические модели фильтрации жидкости. — Орел: Издательство ФГБОУ ВПО Орловский государственный университет, ПФ Картуш. — 2015. — 408 с.

8. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. — 2012. — Т.47. — № 3. — С. 69–74.

9. Пивень В. Ф. Исследование двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном пористом слое // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. — 2017. — № 1. — С. 14–24.

10. Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. — М.: Наука. — 1965. — 296 с.

11. Лекомцев Д. Г. Математическое моделирование фильтрационных течений в анизотропно-однородном слое пористой среды // НАУКА – ОБЩЕСТВУ. Труды V Региональной междисциплинарной конференции молодых ученых (9 октября 2015 года) — Владикавказ. — 2016. — С. 9–18.

12. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Исследование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. — 2014. — Т.59. — № 3. — С. 83–88.

13. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Вычислительная механика сплошных сред. — 2016. — Т.9. — № 4. — С. 389–399.

14. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г., Математическое моделирование работы скважины в случае двумерной фильтрации в анизотропном неоднородном пласте // Вычислительные методы и программирование. — 2020. — Т.21. — № 1. — С. 87–95.

УДК 532.546

Федяев Юрий Сергеевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры информатики,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Воронина Галина Валерьевна
преподаватель,
Орловский государственный аграрный
университет имени Н.В. Парахина
Многопрофильный колледж,
Россия, Орёл

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА «РАЗНОЦВЕТНЫХ» ЖИДКОСТЕЙ К СКВАЖИНЕ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ СЛОЕ ГРУНТА

Аннотация. *Исследуется плоскопараллельная задача эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей к эксплуатационной скважине. В области фильтрации проницаемость грунта меняется скачком на заданной границе. Первоначальное положение границы раздела жидкостей совпадает с границей раздела сред разной проницаемости. Вычислено время прорыва жидкости к скважине.*

Ключевые слова: *движение границы, модель «разноцветных» жидкостей, кусочно-однородный слой грунта, время прорыва воды.*

Fedyaev Yuriy Sergeevich,
Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor,
Department of informatics,
Orel State University,
Russia, Orel

Voronina Galina Valer'yevna,
Oryol State Agrarian
University named after N.V. Parakhina
Multidisciplinary College
Russia, Orel

MATHEMATICAL MODELING MOVING OF THE INTERFACE BETWEEN "VERSICOLOR" LIQUIDS TO A WELL IN A PIECE-HOMOGENEOUS SOIL LAYER

Abstract. *A plane-parallel problem moving of the interface between "versicolor" liquids to a production well is investigated. In the filtration area, the permeability of the soil changes abruptly at a given boundary. The initial position of the interface between liquids coincides with the interface between media of different permeability. The time of fluid breakthrough to the well is calculated.*

Keywords: *evolution of the interface, "versicolor" liquids model, piece-homogeneous soil layer, waterbreak time.*

1. Постановка задачи

Исследуем движение границы раздела «разноцветных» жидкостей для случая плоскопараллельной фильтрации в кусочно-однородном слое грунта постоянной толщины [1]. В плоскости основания слоя выберем декартову систему координат Oxy. Границу сопряжения слоёв грунта σ будем моделировать окружностью радиуса a. Внутри окружности находится грунт проницаемости k_2 (область D_2), а вне окружности — грунт проницаемости k_1 (область D_1). Начало декартовой системы координат свяжем с центром границы σ (рисунок 1).

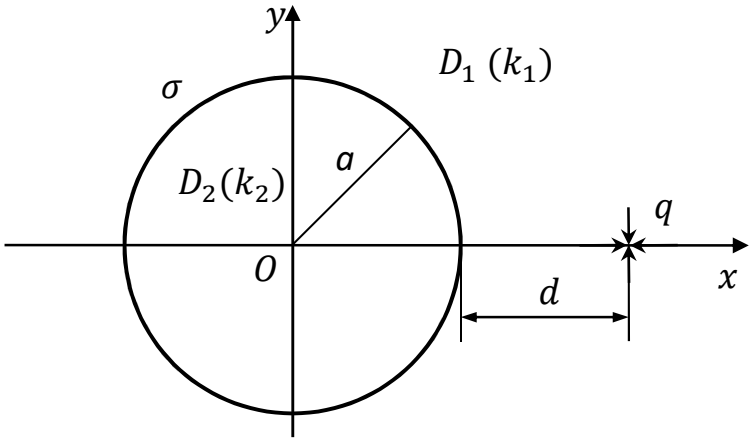


Рисунок 1 — Область фильтрации

Границу сопряжения задают параметрические уравнения:

$$x_M = R\cos\theta_M,\quad y_M = -R\sin\theta_M,\quad \theta_M \in [0;\ 2\pi),\quad M \in \sigma. \qquad (1)$$

Здесь в качестве параметра выбран полярный угол θ. При возрастании параметра θ граница σ обходится по часовой стрелке.

Пусть течение жидкости создаёт эксплуатационная скважина дебита q. Работу скважины будем моделировать стоком мощности q, расположенным в точке с координатами (x_0, y_0). Тогда для потенциала невозмущённого течения жидкости получим

$$\varphi_0 = -\frac{q}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}. \qquad (2)$$

Для проекций невозмущённого поля скоростей имеем:

$$v_{0x} = -\frac{q}{2\pi}\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \quad v_{0y} = -\frac{q}{2\pi}\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}. \qquad (3)$$

2. Аналитическое решение

В рассматриваемом случае границу раздела сред можно учесть аналитически. Для этого воспользуемся фильтрационной теоремой об окружности [2]. Полагаем, что скважина находится на расстоянии d от границы σ в области D_1. Ось Ox проведём через точку расположения скважины. Для координат стока получим: $x_0 = a + d$, $y_0 = 0$. Потенциал поля скоростей имеет вид:

$$k_1\varphi_1 = -\frac{q}{2\pi}\left[\ln\sqrt{(x-x_0)^2+y^2} + \lambda\ln\sqrt{(x-x_0^*)^2+y^2} + \right.$$
$$\left. +\lambda\left(\ln\sqrt{x_0^2} - \ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\right], \quad (x,y)\in D_1, \qquad (4)$$
$$k_1\varphi_2 = -\frac{(1-\lambda)q}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}, \quad (x,y)\in D_2.$$

Здесь $x_0^* = a^2/x_0$ — абсцисса инверсной относительно окружности точки, параметр $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$.

Для невозмущённого поля скоростей в области фильтрации получим:

$$v_{1x} = -\frac{q}{2\pi}\left[\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+y^2} + \lambda\frac{x-x_0^*}{(x-x_0^*)^2+y^2} - \lambda\frac{x}{x^2+y^2}\right],$$
$$v_{1y} = -\frac{q}{2\pi}\left[\frac{y}{(x-x_0)^2+y^2} + \lambda\frac{y}{(x-x_0^*)^2+y^2} - \lambda\frac{y}{x^2+y^2}\right], \ (x,y)\in D_1. \qquad (5)$$
$$v_{2x} = -\frac{(1-\lambda)q}{2\pi}\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+y^2}, \ v_{2y} = -\frac{(1-\lambda)q}{2\pi}\frac{y}{(x-x_0)^2+y^2}, \ (x,y)\in D_2.$$

Картина течения симметрична относительно оси Ox. Как видно из формул (5) при $y = 0$ проекции скорости $v_{1y} = 0$ и $v_{2y} = 0$, т. е. ось Ox является линией тока.

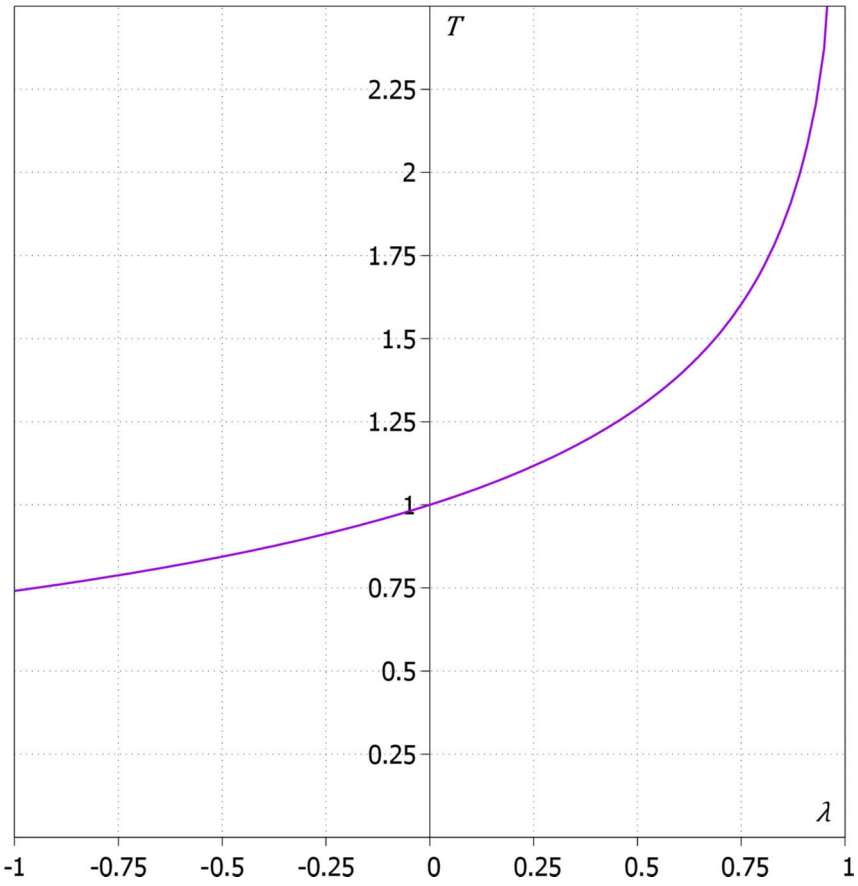


Рисунок 2 — Зависимость времени прорыва жидкости к скважине от параметра λ

Полагаем, что начальное положение границы раздела «разноцветных» жидкостей Γ_0 совпадает с кривой σ (см. рисунок 1). Очевидно, что первой скважины достигнет ближайшая к ней точка границы Γ_0. Эта точка находится на оси Ox и имеет координаты $(a; 0)$. Учитывая, что эта ось является линией тока, то для времени достижения границей Γ_t эксплуатационной скважины (времени прорыва жидкости) получим

$$T = \int_a^{a+d} \frac{dx}{v_{1x}(x,0)}. \qquad (6)$$

Интеграл (6) при $\lambda = 0$ (однородный грунт) легко вычисляется и для времени имеем

$$T_0 = \frac{\pi d^2}{q}. \qquad (7)$$

Формула (7) имеет место для произвольной границы Γ_t, если d — кратчайшее расстояние от границы до скважины. Для произвольного значения параметра λ интеграл (6) вычисляется численно. Зависимость времени T от параметра λ представлена на рисунке 2. Здесь в качестве характерного времени выбиралось время T_0 (при численных расчётах полагали $q = \pi d^2$). Видим, что с увеличением

параметра λ время T увеличивается. Минимальное время загрязнения получается при $\lambda = -1$ (в области D_2 — свободная жидкость) и оно равно 0,741. При $\lambda \to 1$ (область D_2 непроницаема) время $T \to \infty$. Когда проницаемость в области D_2 в три раза больше проницаемости в D_1 ($\lambda = -0{,}5$), то время загрязнения равно 0,844, то есть уменьшается на 15,6% по сравнению со временем загрязнения в однородном грунте. В случае, когда проницаемость в области D_2 в три раза меньше проницаемости в D_1 ($\lambda = 0{,}5$), то время загрязнения равно 1,29, то есть увеличивается на 29% по сравнению со временем загрязнения в однородном грунте.

3. Численное решение

Численная схема решения поставленной задачи предложена в работе [3]. Сопоставим поле скоростей, найденное численно, и аналитическое решение (5). Введём параметр η, характеризующий относительную погрешность вычисления модуля скорости фильтрации

$$\eta = \left|\frac{v_n}{v_a} - 1\right| \cdot 100\%. \qquad (8)$$

Здесь v_n — модуль скорости фильтрации, найденной численно, v_a — модуль скорости фильтрации, найденной по формулам (5).

В таблице 1 приведены значения скорости фильтрации v_n для точки с координатами $(a + d/2; 0)$. Здесь n — число точек разбиения границы σ. Параметры задачи полагались следующими: $a = 3$, $d = 3$, $q = \pi d^2, \lambda = -1$. Видим, что при $n > 100$ с увеличением n в 2 раза относительная погрешность η уменьшается практически в 2 раза.

Таблица 1 — Сопоставление скорости фильтрации с аналитическим решением в точке (4,5;0)

N	25	50	100	200	400	800	1600
η, %	0,97	0,39	0,17	0,08	0,04	0,02	0,01

Таблица 2 — Сопоставление скорости фильтрации с аналитическим решением в точке (3,5;0)

N	25	50	100	200	400	800	1600
η, %	3,36	1,09	0,44	0,20	0,09	0,05	0,02

В таблице 2 приведены значения скорости фильтрации v_n вблизи границы σ для точки с координатами $(a + d/6\,; 0)$. Здесь также с увеличением числа точек разбиения относительная погрешность нахождения модуля скорости фильтрации уменьшается. При $n < 100$ погрешность $\eta > 1\%$. Это связано с тем, что скорость фильтрации

вычисляется на расстоянии порядка шага разбиения границы σ, который равен $2\pi a/n$.

4. Движение границы раздела «разноцветных» жидкостей

Полагаем, что начальное положение границы раздела «разноцветных» жидкостей Γ_0 совпадает с кривой σ. Тогда параметрическое задание границы Γ_0 имеет вид

$$x_M = R\cos\theta_M, \quad y_M = -R\sin\theta_M, \quad \theta_M \in [0;\ 2\pi), \quad M \in \Gamma_0. \qquad (9)$$

При численном решении задачи границу раздела «разноцветных» жидкостей необходимо задать множеством точек. Для этого разобьём Γ_0 по длине на p равных частей. В результате получим множество точек $E_\Gamma^0 = \{x_i^0, y_i^0, i = 0,1,\dots,p\}$. Точки множества E_Γ^0 удобно выбирать посередине между точками, задающими границу σ. Для вычисления скорости фильтрации вблизи границы σ введём «вычислительный радиус» [4] $r = \kappa\Delta s$ $(0 < \kappa \leq 1)$. Здесь Δs — шаг разбиения границы σ. Если точка, в которой ищется поле скоростей, находится на расстоянии большем r от вихря на границе σ, то скорость вычисляется обычным образом. Если же расстояние до вихря на границе меньше или равно r, то скорость, создаваемая этим вихрем принимается равной нулю.

Эволюция границы раздела «разноцветных» жидкостей показана на рисунках 3 и 4. При расчётах полагали $n = p = 800$, шаг по времени $\Delta t = 0{,}001$. Так на рисунке 3 проницаемость грунта в области D_2 в три раза больше проницаемости в области D_1 $(\lambda = -0{,}5)$. На рисунке 4 проницаемость грунта в области D_2 в три раза меньше проницаемости в D_1 $(\lambda = 0{,}5)$. Видим, что когда область D_2 более проницаема, то загрязняется большая часть области D_1. Как и следовало ожидать, прорыв жидкости к эксплуатационной скважине происходит вдоль оси Ox.

Предложенный метод решения задачи позволяет исследовать движение границы раздела «разноцветных» жидкостей для произвольной кусочно-гладкой замкнутой границы σ. Течение жидкости может создавать система нагнетательных и эксплуатационных скважин. Постановку задачи также можно обобщить на кусочно-неоднородные слои грунта, для которых известны фундаментальные решения.

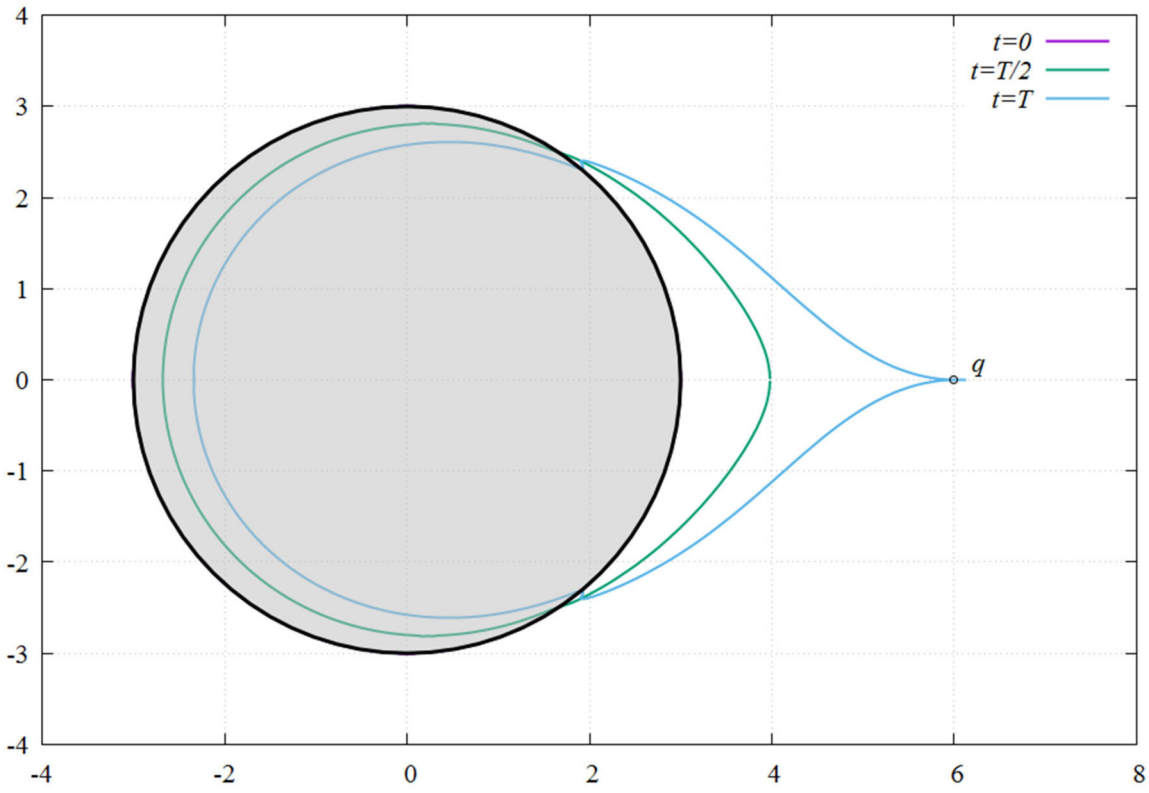


Рисунок 3 — Эволюция границы раздела жидкостей при $\lambda = -0{,}5$

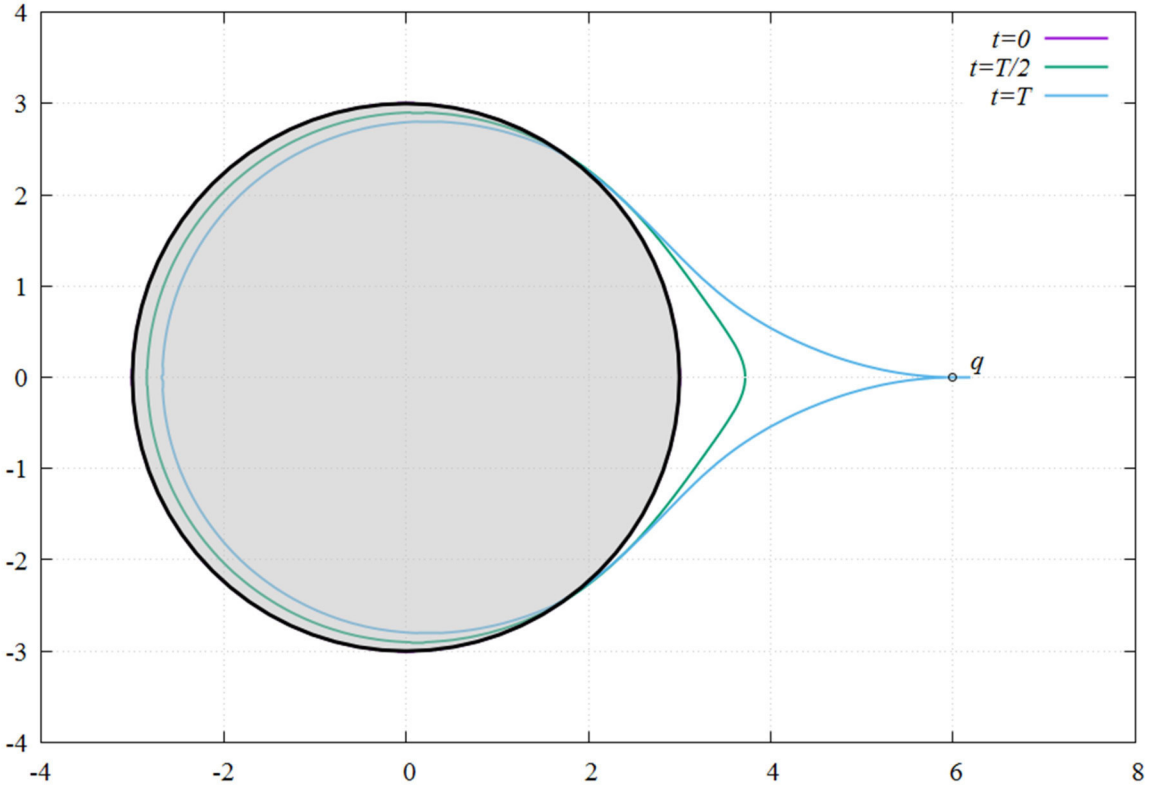


Рисунок 4 — Эволюция границы раздела жидкостей при $\lambda = 0{,}5$

Список литературы

1. Воронина Г.В., Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в кусочно-однородном грунте // Современные проблемы физико-математических наук / материалы VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (4 – 5 декабря 2020 г., г. Орёл). — Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2020. — С. 173-176.
2. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. — Орёл: Издательство ГОУ ВПО «ОГУ», Полиграфическая фирма «Картуш», 2006. — 508 с.
3. Воронина Г.В., Федяев Ю.С. Численная схема решения задачи о движении границы раздела «разноцветных» жидкостей в кусочно-однородном слое пористой среды // Естественные и гуманитарные науки в современном мире / материалы Международной научно-практической конференции (13– 15 мая 2021 г., г. Орёл). — Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2021. — С. 202-206.
4. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: ТОО «Янус», 1995. — 520 с.

Физика конденсированного состояния

Аринцына Ксения Игоревна
аспирант,
Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева

Марков Олег Иванович
доктор физико-математических наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева

ИЗМЕРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ МОНОКРИСТАЛЛОВ НА ОСНОВЕ ВИСМУТА

Аннотация. *В работе приводятся результаты экспериментального исследования методом рентгенографии монокристаллов на основе висмута. Построены зависимости межплоскостного расстояния от температуры и зависимость коэффициента линейного расширения от температуры. Проведено сравнение полученных данных и сделан предварительный анализ результатов.*

Ключевые слова*: коэффициент линейного расширения, монокристаллы Bi, Bi-Sb-Sn.*

Arintsyna Ksenia Igorevna
graduate student,
Oryol State University named after I.S. Turgenev

Markov Oleg Ivanovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Oryol State University named after I.S. Turgenev

MEASUREMENT OF THE LINEAR EXPANSION COEFFICIENT OF BISMUTH-BASED SINGLE CRYSTALS

Abstract. *The paper presents the results of an experimental study by the method of X-ray diffraction of single crystals based on bismuth. The dependences of the interplanar distance on temperature and the depend-*

ence of the coefficient of linear expansion on temperature are plotted. A comparison of the data obtained is carried out and a preliminary analysis of the results is made.

Keywords: *coefficient of linear expansion, single crystals Bi, Bi-Sb-Sn.*

Рентгенография – наиболее известный и широко используемый на практике представитель дифракционных исследований. Этот метод является одним из наиболее эффективных методов изучения кристаллических веществ [1].

В качестве объектов исследования были выбраны два образца: Bi и Bi-Sb-Sn. Главное условие выбора образцов для исследований был их размер и наличие ровной поверхности скола.

Исследование проводилось с помощью рентгеновского дифрактометра Дрон 7 общего назначения с гелиевым криостатом (при температуре азота). Были измерены положения при максимально возможных углах, так как дальние пики более чувствительны к угловому перемещению. В ходе исследования было произведено снятие рентгеновского профиля при заданной температуре (чувствительность – 0.01^0 С).

Регулировка температуры осуществлялась с помощью ВРТ-2. Термопара – Cu-Cu-Te (0.1%), один спай которой находился в дистиллированной воде со льдом.

Шаг измерений 5 – 7^0 С. В результате получаем кривые углов (рис.1). Из формулы Вульфа-Брэгга считаем межплоскостные расстояния d и, зная параметры образца, по формуле теплового расширения находим коэффициент теплового расширения [2].

Параметры измерений: β-селективный фильтр, угол съемки 153 – 156^0, I=15 мА, P=25 кВт, Δα-угол сканирования = 0.02^0, экспозиция = 3 с, (выбрана с учетом высокой кристалличности образца и выбранной мощности), время измерения=1 мин, метод съемки θ, U=5000 мВ. ΔU=200 мВ, поддерживаемый вакуум = $5{,}2 \times 10^{-3}$ мм рт ст.

В середине измерений при увеличении теплоемкости стабилизация температуры происходит хуже, поэтому приходилось дополнительно увеличивать мощность.

Получившиеся графики обрабатываем с помощью метода аппроксимации. Красные точки – это получившиеся экспериментальные данные, черная линия – усредненные значения. При обработке данных задается степень полинома и уровень в процентах, относи-

тельно которого ищем среднее значение. Для получения конкретных значений углов считаем центр диапазона.

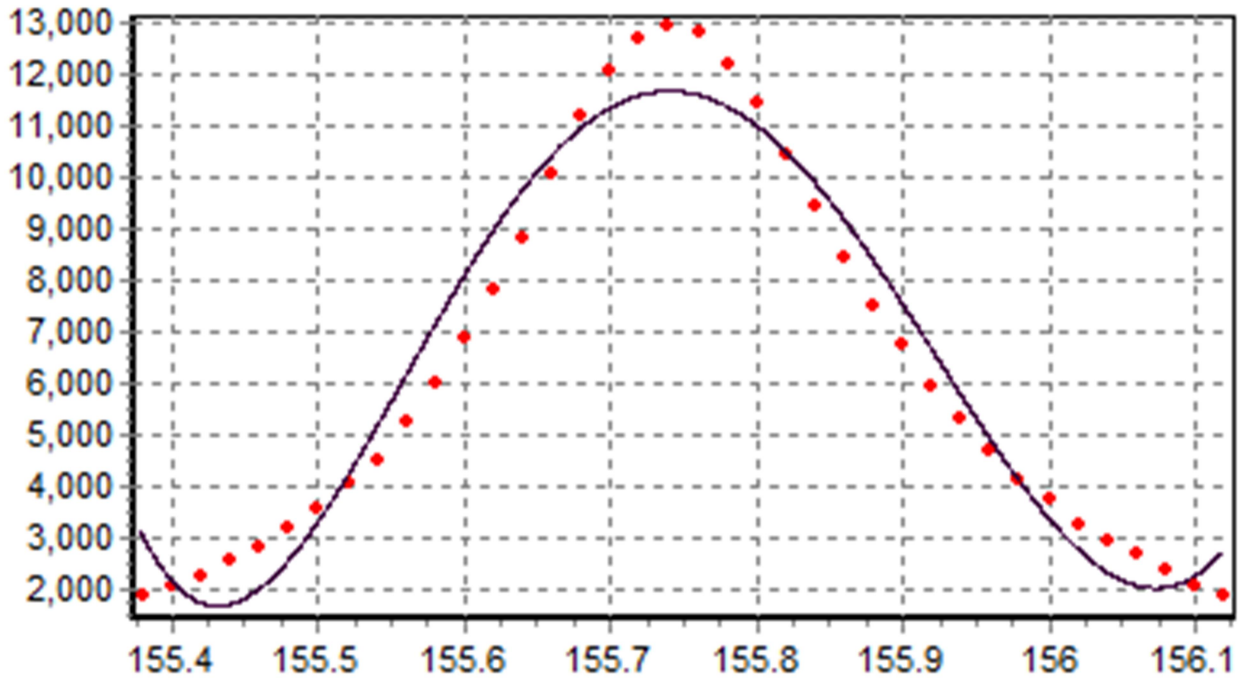


Рисунок 1 – Кривая углов (образец Bi)

Из справочных данных переводим показания напряжения термопары в температуру. Из базы данных взяли значения h=0, k=0, l=15 для данных образцов. Длина излучения λ = 0,154 нм (CuK_α). Значение температуры берем как среднее арифметическое значений двух соседних температур.

Линейный коэффициент расширения рассчитываем по формуле:

$$\alpha_c = \frac{1}{c}\frac{dc}{dT}$$

Выберем для простоты расчетов формулу математической зависимости между индексами (hkl), величиной d_{hkl} и периодами решетки a, b, c для кубической ячейки [1]:

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2 + k^2 + l^2}{a^2}$$

При обработке данных определяем не абсолютные значения, а значения, обработанные с одинаковым параметром, то есть динамику.

Получили данные зависимости межплоскостного расстояния от температуры для образцов Bi и Bi-Sb-Sn (рис.2-5).

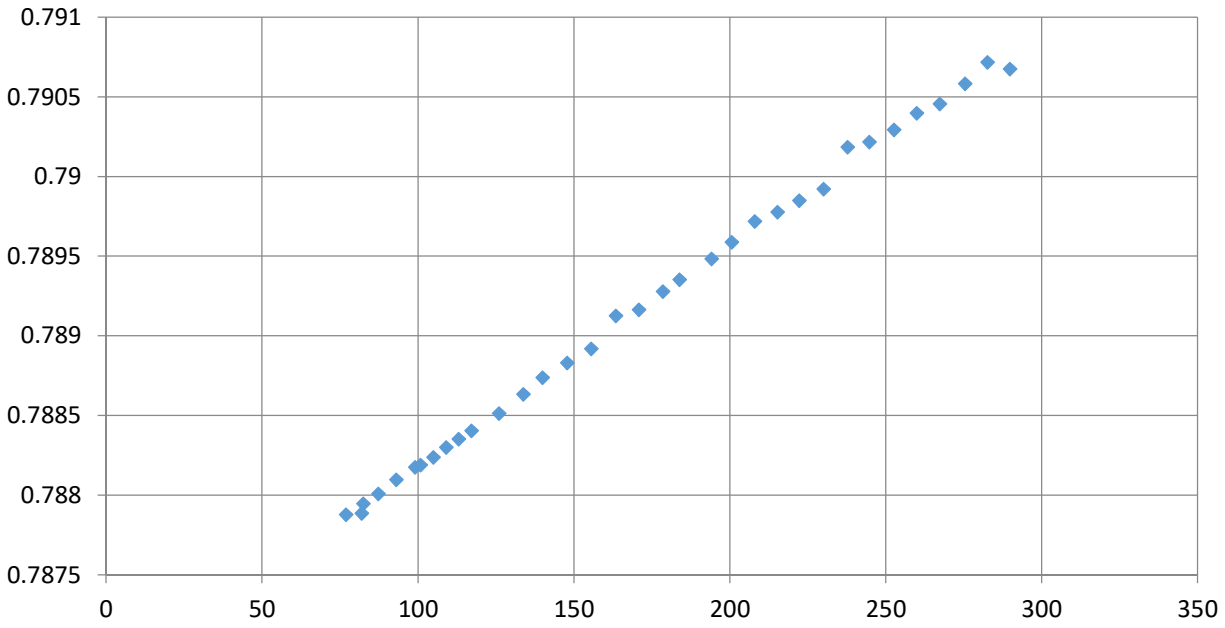


Рисунок 2 – Зависимость межплоскостного расстояния
от температуры (Bi)

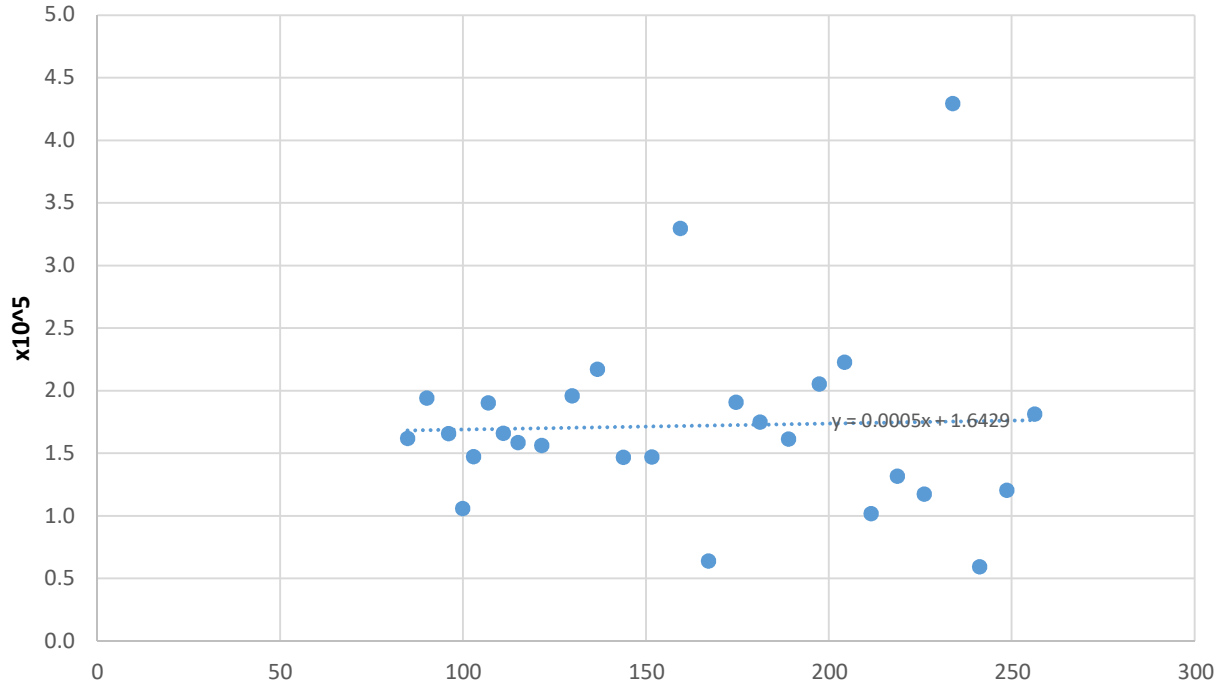


Рисунок 3 – Зависимость коэффициента линейного расширения
от температуры (Bi)

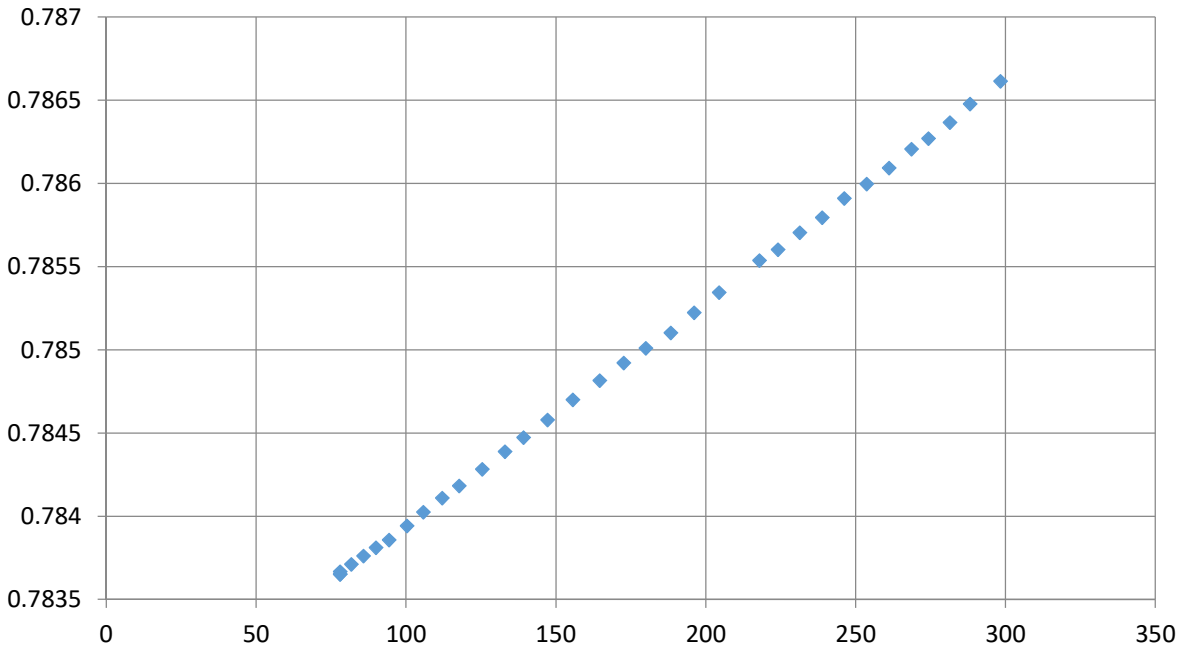


Рисунок 4 – Зависимость межплоскостного расстояния от температуры (Bi-Sb-Sn)

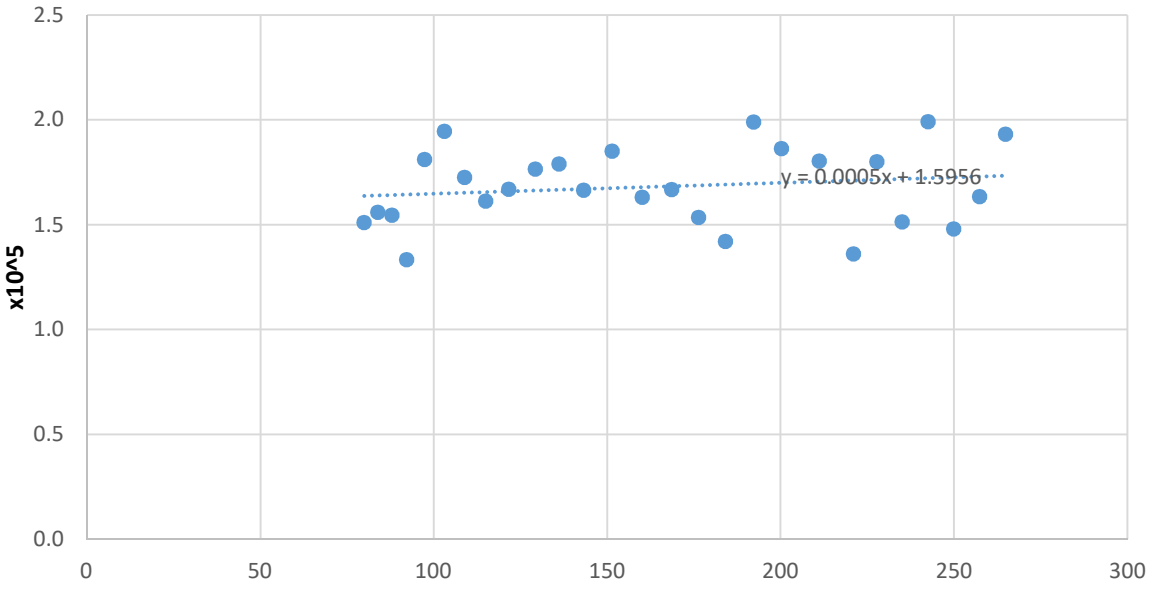


Рисунок 5 – Зависимость коэффициента линейного расширения от температуры (Bi-Sb-Sn)

При T ≈ 275K получили для образца Bi: c = 11.85875, для образца Bi-Sb-Sn; c = 11.79404.

Учитывая (из справочных данных), что для чистой сурьмы c = 11.2743, для чистого висмута c = 11.8622, из закона Вегарда можно сделать вывод, что содержание сурьмы в образце Bi-Sb-Sn = 12%. (наличие в образце олова минимально и не учитывалось в данном исследовании).

Список литературы

1. Пахомов Л.Г., Кирьянов К.В., Князев А.В. Физические методы в химических исследованиях: Учебное пособие. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007. — 286 с.
2. Богдан Т.В. Основы рентгеновской дифрактометрии: Учебное пособие. – Москва: Изд-во Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, Химический факультет, 2012. – 64 с.

УДК 519.218.5

Вирченко Юрий Петрович
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор,
Белгородский государственный технологический университет им В.Г. Шухова,
Россия, Белгород

Шаполова Ирина Михайловна
аспирант,
Белгородский государственный университет,
Россия, Белгород

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КРИТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ РАЗРЫВА ОБРАЗЦОВ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

Аннотация. *Строится статистическая модель для описания зарождения микротрещин в образце пористого материала. Модель позволяет вычислить распределение вероятностей случайных напряжений, которые приводят к разрыву образца, вследствие разростания трещины под воздействием приложенной к нему внешней нагрузки.*

Ключевые слова: *концентрация, микротрещина, предел прочности, распределение пор, хрупкое разрушение.*

Virchenko Yuri Petrovich
Doctor of physical and mathematical sciences, Associate Professor,
Professor,
Belgorod State Technological Shukhov University,
Russia, Orel

Shapolova Irina Mikhailovna
aspirant,
Belgorod State University,
Russia, Belgorod

PROBABILITY DISTRIBUTION OF CRITICAL TENSIONS OF SAMPLE BREAK OF POROUS MATERIAL

Abstract. *The statistical model for mathematical description of the microcracks origin in porous material sample is proposed. Such a model permits to calculate the probability distribution of random ultimate strength which lead to fragile destruction of the sample due to the cracks growth when the external ultimate strength is applied.*

Keywords: *concentration, microcrack, ultimate strength, porous distribution, fragile destruction.*

Введение

В работе, в рамках феноменологических представлений, с использованием теории Гриффитса [1] роста трещин в твердом теле, строится статистическая модель для описания равновесного состояния образца хрупкого твердотельного материала, находящегося под внешней растягивающей нагрузкой. Исходя из предположения о том, что основным физическим фактором, вследствие которого в образце развивается катастрофическое явление разрыва образца, является наличие в его структуре такого рода дефектов (микротрещин), которые являются зародышами разрыва. Так как распределение любого рода дефектов в твердом теле, носит статистический характер, то модель предназначена для установления связи между статистическими характеристиками этого распределения в материале и той величиной нагрузки, которая может привести к разрушению.

Конструкция модели основана на предположении о том, что к разрыву образца, приводит лавинное разростание под воздействием нагрузки какой-либо из микротрещин, длина которой превосходит некоторую критическую величину. В свою очередь, возникновение такой достаточно большой трещины мы связываем с наличием в образце хрупкого материала точечных дефектов в виде пор очень малого размера со средней концентрацией c, которая зависит как от физической природы материала, так и от технологии приготовления образца. В нашей модели величина c является свободным феноменологическим параметром. Так как поры распределены в образце случайным образом, и, с точки зрения технологии приготовления, можно управлять только лишь их концентрацией, усредненной по пространственным областям Δ с макроскопическими линейными размерами, то, неизбежно, в каждой такой области имеются флуктуации концентрации. При наличии достаточно большой концентрации пор в какой-либо из пространственных областей Δ, может произойти слияние всех находящихся в ней пор, под действием растягивающих напряжений, присутствующих в области Δ вследствие растягивающей нагрузки, которая прикладывается к границе образца. При таком слиянии пор образуется микротрещина. При достаточно большой величине линейного размера области Δ, длина самой микротрещины может превзойти ту критическую величину. В результате, под воздействием внешней нагрузки, возникает процесс быстрого роста этой трещины и образуется макротрещина. Эта макротрещина, когда ее линейный размер достигает величины, сравнимой с поперечным линейным размером самого образца, происходит его разрыв. При описанной теоретической интерпретации возникновения лавинообразного процесса разрыва образца, критическому размеру микротрещины соответствует критическая величина флуктуации концентрации. Однако ясно, что критический размер микротрещины и, как следствие, критическая величина флуктуации концентрации пор зависят от величины внешней одноосной нагрузки. Если такая зависимость известна, то возможно установление предела прочности материала, то есть той критической величины внешней нагрузки, которая приводит к его

разрушению. Таким образом, в принимаемом нами походе, предел прочности материала связывается с критической величиной флуктуации пор в материале.

1. Статистическая модель хрупкого разрушения

Пусть поры распределены случайным образом по области Ω, занимаемой образцом материала. Размеры пор будем предполагать настолько малыми, что ими можно пренебречь по сравнению со средним расстоянием между ними. Таким образом, мы будем моделировать случайное расположение пор в Ω посредством наборов случайно расположенных в этой области геометрических точек. При этом случайное число $\tilde{n}$ точек в этих наборах будет случайным и, точно также, расположение в Ω каждой точки из всего их набора также является случайным, статистически независимым от расположений всех других точек этого набора. Кроме того, естественно считать, что попадание каждой точки в любую малую область $\Delta \subset \Omega$ не имеет никакого предпочтения перед любой другой областью $\Delta' \subset \Omega$ с точно такой же формой и размерами. Иными словами, мы предполагаем, что распределение каждой фиксированной случайной точки из набора, описывающего расположение пор по образцу, является *равновозможным*, то есть она имеет плотность распределения $|\Omega|^{-1}$.

Из сделанных предположений следует, что условная плотность распределения набора из $\tilde{n}$ точек при условии, что $\tilde{n} = n$, равна $|\Omega|^{-n}$ или, с учетом физической неразличимости точек набора $(n!)^{-1}|\Omega|^{-n}$. Будем теперь считать, что суммарный объем пор по образцу намного меньше объема $|\Omega|$ самого образца, и так как объем каждой поры очень мал, мало отношение полного числа N пор к объему Ω, то есть мала объемная концентрация $c = N/|\Omega|$ пор. Тогда можно считать, что типичное случайное число $\tilde{n}$ пор в каждой из областей Δ имеет порядок $c|\Delta|$ и оно намного меньше чем N. В этом случае мы можем использовать в качестве распределения вероятностей для этого случайного числа $\tilde{n}$ пор, попавших в Δ распределение Пуассона

$$\Pr\{\tilde{n} = n\} = \frac{(c|\Delta|)^n}{n!} \exp(-c|\Delta|)\,. \tag{1}$$

Зафиксируем малую кубическую область Δ с критическим размером, начиная с которого возможно разростание трещины. Для установления связи между критическим напряжением p_* и концентрацией пор c, приводящей к росту трещины, воспользуемся следующим законом Гриффитса. Пусть d – критическая (флуктуационная) длина трещины, начиная с которой начинается ее развитие. Из теории Гиффитса роста трещины следует, что

$$d = d_0 \left(\frac{k}{p}\right)^{\alpha/2}, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ и k – т.н. постоянная Гриффитса. Такая форма зависимости d от p согласуется с представлением о том, что при $p \to \infty$ возможно развитие трещины со сколь угодно малых размеров d, а при $p = 0$ трещиной формально можно

считать разломы в образце, имеющие макроскопические размеры. Что касается практического использования формулы (2), то в теории хрупкого разрушения часто используется модель с $\alpha = 4$.

Для установления связи между p и c введем понятие критической концентрации c_*. Пусть h равно характерному расстоянию между ионами металла, при превышении которого возникает явление текучести. Оно по порядку величины равно среднему расстоянию между молекулами в жидком состоянии.

Пусть, теперь, область Δ является кубической ячейкой с величиной ребер d, имеющей объем $v_* = d^3$. Будем считать, что трещина под напряжением p, приложенным в направлении одного из ребер, зарождается в какой-то из ячеек, если в ней количество пор превышает определенную величину m_*. Эта величина рассчитывается из требования, чтобы в кубической области Δ все ионы находились на расстоянии, не меньшем чем h. Таким образом,

$$m_* = v_*/h^3 = (d/h)^3 . \tag{3}$$

Следовательно, рост трещины начинается в том случае, если в образце хрупкого материала существует кубик Δ с длиной ребра d, где имеется случайное число пор $\tilde{m}$, которое превосходит критическое значение m_*.

Таким образом, возникает задача об определении вероятности W случайного события, которое формулируется следующим образом:

В образце Ω существует некоторая кубическая область Δ с линейным размером d такая, что случайное число точек $\tilde{m}$, попавших в эту область, превзойдет m_*.

Заметим, что вероятность W должна обладать свойством, что $W \to 1$ при $N \to \infty$ и $c =$const. Это свойство связано с тем, что вероятность разрушения образца должна возрастать приближаясь к единичной вероятности при неограниченном возрастании его размеров, то есть очень большой образец должен, наверняка, быть разрушенным. Ввиду этого свойства вероятности W, имеет место также $W \to 1$ при $V = |\Omega| \to \infty$, ввиду того, что $c = N/|\Omega|$.

Учитывая последний факт и то обстоятельство, что объем V очень большой вместе с числом пор N, интерес представляет не точное значение вероятности W, а только лишь главный член асимптотики величины $1 - W$ при $V \to \infty$. Данная ситуация аналогична той, которая возникает при изучении термодинамических флуктуаций в статистической физике, когда переход к термодинамическому пределу приводит к полному исчезновению флуктуаций и, соответственно, их распределения вероятностей. Поэтому в теории термодинамических флуктуаций интерес представляет изучение именно асимптотических отклонений величин от термодинамически предельных значений.

2. Анализ статистической модели

Так как интересующая нас вероятность всегда не равна нулю, то необходимо установить критерий возникновения зародыша роста трещины, который бы

формулировался в терминах какой-либо неслучайной величины, связанной с $\tilde{m}$. В качестве такого критерия мы выберем среднее значение $\langle \max\{\tilde{m}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega\}\rangle$, где $\tilde{m}(\mathbf{x})$ зависит от пространственной точки $\mathbf{x}$ области Ω, связанной с кубом Δ. Например, будем считать, что такой характеристической пространственной точкой является центр куба Δ. Таким образом, критерий образования зародыша трещины примем в виде

$$\langle \max\{\tilde{m}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega\}\rangle = m_* \,. \tag{4}$$

Заметим, что здесь нельзя поменять местами операцию усреднения и вычисления максимума по точкам $\mathbf{x}$ области Ω. В самом деле, для каждой точки $\mathbf{x} \in \Omega$ определено среднее значение $\langle \tilde{m}(\mathbf{x})\rangle$ случайного числа пор (случайных точек пуассановского случайного поля), попавших в куб Δ с центром в точке $\mathbf{x}$. Это среднее значение равно $c|\Delta| = cd^3$, то есть оно не зависит от $\mathbf{x}$. Следовательно, подставляя в эту формулу вместо d его выражение через напряжение p, получим $cd_0^3(k/p)^{3\alpha/2} = m_*$. Отсюда следует, что $p = k(cd_0^3/m_*)^{2/3\alpha}$. Таким образом, получаем, что напряжение, вызывающее разрушение образца материала не зависит от его размеров, что противоречит т.н. *объемному эффекту*, который известен в материаловедении и который состоит в том, что вероятность разрушения образца возрастает с ростом его размеров. Следовательно, наша задача заключается в математически последовательном вычислении математического ожидания (4).

3. Объемный эффект

Вычисление математического ожидания (4) для пуассоновского точечного поля может быть основано на известных предельных законах распределения статистики экстремальных значений [2]. Однако, мы произведем этот расчет на основе дискретизации модели. Определенная выше вероятность W равна $W = 1 - \bar{W}$, где $\bar{W}$ – вероятность того, что во всех ячейках образца случайное число $\tilde{m}$ пор не превосходит m_*. Так как, по предположению, при распределении пор по ячейкам случайное число $\tilde{m}$ попавших в конкретную ячейку пор не зависит от всех остальных ячеек, то обозначив $\bar{w}$ вероятность попадания в конкретную ячейку числа пор, меньшего m_*, получим $\bar{W} = \bar{w}^N$. Тогда $W = 1 - \bar{w}^N$. Используя (1), находим

$$\bar{w} = \exp\Big(-c|\Delta|\Big) \sum_{m=0}^{m_*-1} \frac{(c|\Delta|)^m}{m!} = 1 - \exp\Big(-c|\Delta|\Big) \sum_{m=m_*}^{\infty} \frac{(c|\Delta|)^m}{m!} \,. \tag{5}$$

Заметим, что число $m_* = (d/h)^3 \gg 1$ очень велико. Для размеров ячейки Δ порядка 10^{-6} см, в ней может находиться порядка $10^2 \div 10^3$ пор. Тогда $m_* \approx 10^2$. В этом случае для числа $m_*!$ можно воспользоваться приближением на основе асимптотической формулы Стирлинга, которое дает очень хорошее

приближение для этого числа. Таким образом,

$$m_*! \approx (2\pi m_*) \left(\frac{m_*}{e}\right)^{m_*}.$$

Оценим остаток суммы

$$\sum_{m=m_*}^{\infty} \frac{(c|\Delta|)^m}{m!} \approx \frac{(c|\Delta|)^{m_*}}{m_*!} \approx (2\pi m_*)^{-1/2} \left(\frac{ce|\Delta|}{m_*}\right)^{m_*}. \qquad (6)$$

Эта оценка, вместе с формулой (5), дают нам следующее приближенное выражение для вероятности $\bar{W}$,

$$\bar{W} = \left(1 - \frac{\exp\left[-c|\Delta|\right]}{\sqrt{2\pi m_*}} \left(\frac{ce|\Delta|}{m_*}\right)^{m_*}\right)^N.$$

Подставим в эту формулу выражение для общего числа ячеек $N = V/d^3$ в образце и, кроме того, заменим величину d, согласно (2), а число m_* его приближенным значением $m_* = cd_0^3(k/p)^{3\alpha/2}$. В результате, искомая вероятность выразится через физически контролируемые физические характеристики материала,

$$\bar{W} = \left(1 - \frac{\exp\left[-c|\Delta|\right]}{\sqrt{2\pi cd_0^3(k/p)^{3\alpha/2}}} \left[e(|\Delta|/d_0^3)(p/k)^{\alpha/2}\right]^{cd_0^3(k/p)^{\alpha/2}}\right)^{(p/k)^{3\alpha/2}(V/d_0^3)}.$$

Наконец, подставив в эту формулу приближенное выражение для $|\Delta| \approx d^3$, найдем окончательно ответ на поставленный во введении вопрос, а именно, формулу для вероятности разрушения

$$W = 1 - \left(1 - \frac{\exp\left[-cd_0^3(k/p)^{3\alpha/2}\right]}{\sqrt{2\pi cd_0^3(k/p)^{3\alpha/2}}} \left[\frac{ek}{p}\right]^{cd_0^3(k/p)^{\alpha/2}}\right)^{(p/k)^{3\alpha/2}(V/d_0^3)}. \qquad (7)$$

Так как $V/d_0^3 \gg 1$, то $(1-\eta)^{\gamma V/d_0^3} \approx \exp(-\gamma\eta(V/d_0^3))$, то последняя формула записывается в более компактном виде

$$W = 1 - \exp\left(-\frac{V}{d_0^3} \frac{\exp\left[-cd_0^3(k/p)^{3\alpha/2}\right]}{\sqrt{2\pi cd_0^3(p/k)^{3\alpha/2}}} \left[\frac{ek}{p}\right]^{cd_0^3(k/p)^{\alpha/2}}\right). \qquad (7)$$

Заключение

В результате предложенного теоретического исследования нами построена статистическая модель, описывающая явление хрупкого разрушения материала по воздействием на него внешней нагрузки. В этой модели величина флуктуации концентрации пор внутри образца материала связана с величиной самой концентрацией. Образование микротрещины критического размера связано как с величиной упругих напряжений, так и с достаточно большой концентрацией пор во всем образце. В результате, выявлена функция, описывающая связь между концентрацией пор и критическим механическим напряжением (пределом

разрывной прочности) материала p_*. На основе найденной зависимости между концентрацией пори пределом прочности материала, в частности, устанавливается зависимость между пределом прочности и размером образца, называемая в материаловедении *объемным эффектом*. Наличие этого эффекта, таким образом, объясняется тем, что увеличение размеров образца приводит к увеличению вероятности появления в какой-то из малых областей внутри него достаточно большой флуктуации, величина которой превзойдет критическую величину, начиная с которой происходит рост трещины при воздействии на образец материала нагрузки. Последнее, в конце концов, приводит к появлению макроскопической трещины с последующим разрывом образца.

Список литературы

1. Griffith A. A. The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids // Phil. Trans. Roy. Soc. of London. — 1921. — A221. — P. 163-198.
2. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. — М.: Мир, 1965. — 452 с.

УДК 530.145

Давыдов Алекандр Петрович
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры физики,
Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова,
Россия, Магнитогорск

Злыднева Татьяна Павловна
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры прикладной математики и информатики,
Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова,
Россия, Магнитогорск

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЫТА ЮНГА С ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ ОДНОФОТОННЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН – КООРДИНАТНЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ФОТОНОВ

Аннотация. *В рамках квантовой механики фотона, построенной авторами в предыдущих работах, проведено численное моделирование интерференции в схеме опыта Юнга, возникающей от двух однофотонных источников, одновременно испускающих фотоны, распространение которых описывается сферическими расходящимися волновыми функциями в координатном представлении – волновыми пакетами, нормированными на полную единичную вероятность, представляющими собой суперпозицию шестикомпонентных обобщенных собственных функций операторов энергии, импульса и спиральности, с гауссовским распределением по импульсам фотона.*

Ключевые слова: *двухфотонная интерференция, волновая функция, плотность вероятности, волновой пакет, квантовая механика.*

Davydov Alexander Petrovich
Candidate of physical and mathematical sciences,
Associate Professor of the department of physics,

Nosov Magnitogorsk State Technical University,
Russia, Magnitogorsk

Zlydneva Tatiana Pavlovna
Candidate of pedagogical sciences,
Associate Professor of the department of applied mathematics and informatics,
Nosov Magnitogorsk State Technical University,
Russia, Magnitogorsk

NUMERICAL SIMULATION OF YOUNG'S EXPERIMENT WITH TWO SOURCES OF SINGLE-PHOTON SPHERICAL WAVES – COORDINATE WAVE FUNCTIONS OF PHOTONS

Abstract. *Within the framework of the photon quantum mechanics, constructed by the authors in previous works, numerical simulation of interference in the scheme of Young's experiment, arising from two single-photon sources simultaneously emitting photons, the propagation of which is described by spherical divergent wave functions in coordinate representation – wave packets normalized to a full unit probability, representing a superposition of six-component generalized eigenfunctions of energy, momentum and velocity operators, with Gaussian distribution over photon pulses.*

Keywords: *two-photon interference, wave function, probability density, wave packet, quantum mechanics.*

1. Введение

В настоящее время бурно развиваются направления, связанные с одиночными фотонами и их системами в запутанном состоянии, например, квантовая телепортация, квантовые компьютеры, квантовая криптография. В соответствующих явлениях передача отдельного фотона ассоциируется с передачей его некоего локализованного состояния из одной точки пространства в другую. Очевидно, эта локализация должна описываться волновой функций фотона в координатном представлении со всеми квантово-механическими атрибутами, такими как плотность вероятности обнаружения фотона, уравнение (для нее) непрерывности, квантовомеханическое уравнение, которому должна удовлетворять координатная волновая функция фотона.

Однако, несмотря на многие попытки построить волновую функцию фотона в координатном представлении (см. например, [1–6]), существует мнение [7–12], начиная с [13], что построить ее нельзя, хотя в импульсном представлении – она вполне допускается и широко используется, например, при обосновании квантовой электродинамики (см., например, [11], с. 84). Данная ситуация, однако, несколько «необычна», поскольку для частиц, обладающих массой, координатную волновую функцию всегда можно получить из волновой функции в импульсном представлении путем Фурье-преобразования.

В работах авторов [14–20] волновая функция свободного фотона, тем не менее, была построена в рамках квантовой механики в виде шестикомпонентной волновой функции, являющейся суперпозицией (интегралом, «волновым пакетом») обобщенных собственных функций операторов энергии, импульса и спиральности в «бивекторном» представлении. В терминологии классической электродинамики, эти функции являются «циркулярно поляризованными плоскими монохроматическими волнами» [см. ниже формулы (2)–(3)]. Также была построена и шестикомпонентная волновая функция фотона в импульсном представлении [см. формулу (8)]. Переход в [14–20] от волновой функции фотона в одном представлении к другому не составлет проблемы: он осуществляется путем прямого и обратного преобразования Фурье, реализованного обобщенными собственными функциями оператора импульса $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$. В теории показано [18, 20], что для нормированной на один фотон в объеме V волновой функции в виде циркулярно или линейно поляризованной плоской монохроматической волны выполняется релятивистская инвариантность уравнения непрерывности.

В ряде работ (например, [21–28]) рассматривалась однофотонная интерференция, демонстрируемая путем моделирования волновой функции фотона в координатном представлении. В силу возникающих трудностей аналитичекого вычисления соответствующих интегралов, окончательные вычисления производились приближенно. Однако, например, для схемы опыта Юнга получались формулы, выражающие интерференцию, аналогичные тем, которые возникают в классической электродинамике. *В данной статье мы приводим результаты численного моделирования, без аналитических приближений, которые демонстрируют явную двухфотонную интерференцию в мысленном эксперименте от двух однофотонных источников, ис-*

пускающих фотоны одновременно из тех точек, которые соответствуют положению щелей в опыте Юнга.

2. Назначение и условность волновой функции фотона

Заметим, что, по нашему мнению, испущенный фотон атомом, лазером или любым другим источником, не может представлять собой некий «сгусток», «цуг» или еще что-то другое, похожее, означающее некий почти ограниченный в пространстве «набор», «кусок» электромагнитных волн, поскольку тогда энергия фотона была бы «размазана» по соответствующему достоточно большому объему. Такие представления, хотя и возможны, исключительно в рамках классической электодинамики, но не верны, с точки зрения того, что фотон и вся его энергия и импульс всегда регистрируется в отдельной точке, или почти в «точке» – в очень малом пространственном объеме по сравнению с тем объемом, в котором фотон может быть обнаружен вероятностно-статистическим путем в рамках данного явления. Особенно наглядно это видно, когда фотон попадает на плоскопараллельную посеребренную пластинку – светоделитель, через который он либо проходит, либо от которого отражается. При объяснении интерференции и получения когерентных лучей, в классической оптике часто допускают неверное представление, будто бы такой «цуг» делится не две части («половинки»), которые потом проходят разные оптические пути и, соединясь затем снова, интерфирируют. Поскольку на самом деле в опытах с отдельными фотонами их энергия никогда не делится на части, такое объяснение интерференции света в корне не верно. Однако это «объяснение» можно исправить тем, что делится не сам фотон на части, а соответствующая волновая функция, описывающая его вероятностное распространение. После ее разделения, ее отдельные части «интерферируют» и дают распределение вероятностей, согласно которому фотон более или менее часто попадает в каждую рассматриваемую точку пространства.

Хотя, таким образом, введение волновой функции в координатном представлении существенно исправляет недостатки «метафизического» представления о механизме однофотонной или двухфотонной интерференции, необходимо также сделать утверждение, что тем самым проблема до конца не снимается, а наоборот, стимулирует дальнейшее исследование и постановку новых экспериментов.

Действительно, волновая функция фотона в координатном представлении, как и частиц, обладающих массой, не является физиче-

ским объектом, хотя бы даже по той причине, что у нее нет «привычных» свойств физических объектов – «внутренних характеристик», таких как масса, электрический заряд и т. п. Хотя можно экспериментально замерить распределение вероятностей попадания частицы или фотона в определенную точку, но это будет лишь математическое понятие – формула, а не физический объект. Что касается волновой функции фотона, то измерить хотя бы для одного момента времени и для одной пространственной точки шесть комплексных чисел, выражающих одно значение этой функции, – нереально.

В связи с тем, что волновая функция частиц и фотонов не является физическим объектом, совершенно некорректно в прямом смысле говорить о ее распространении, «просачивании» через щели, отражении и прохождении через светоделитель, об ее интерференции и т. п. и, тем более, об ее «коллапсе» (коллапсе того, чего нет!).

Поэтому, по нашему мнению, в физике следует, все же, искать ту «физическую сущность», которая отвечает за природу и механизм наблюдаемой интерференции и вообще квантовых явлений, ибо квантовая механика, ничего не объясняя, лишь дает «вероятностный» способ описания явлений, имея в арсенале целый набор постулатов. По-видимому, квантовая телепортация наиболее наглядно обусловливает актуальность постановки новых экспериментов и развития новой физики, касающейся, скорее всего, свойств физического вакуума, «отвечающего» за то, что наблюдается на опыте.

Однако это – совсем другая тема, а пока для многих практических целей весьма полезной может оказаться именно волновая функция, в частности фотона, в координатном представлении, с помощью которой, условно допуская терминологию ее «распространения», «просачивания», «интерференции» и т. п., можно объяснить многие явления, не прибегая к использованию квантовых амплитуд перехода, оставаясь, таким образом, «в рамках первичного квантования» электромагнитного поля, которое в литературе, по сути, пока отсутствует. Тем самым можно в значительной мере заполнить «метафизический» аспект понимания механизма однофотонной и двухфотонной интерференции света, в том числе, самой загадочной – «от двух щелей».

3. Волновая функция фотона в координатном представлении

В общем виде волновую функцию фотона в координатном представлении можно записать [14–20] как

$$\Psi(\mathbf{r},t) \equiv \int b(\mathbf{k},+1)\,\Psi_{\mathbf{k},+1}(\mathbf{r},t)d^3\mathbf{k} + \int b(\mathbf{k},-1)\,\Psi_{\mathbf{k},-1}(\mathbf{r},t)d^3\mathbf{k}\,, \quad (1)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ – «волновой вектор» фотона; безразмерные «циркулярно поляризованные плоские монохроматические волны»

$$\Psi_{\mathbf{k},+1}(\mathbf{r},t) = (2\pi)^{-3/2}\,\mathrm{e}_{+1}(\mathbf{k})\,e^{i(\mathbf{kr}-kct)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\Psi_{\mathbf{k},-1}(\mathbf{r},t) = (2\pi)^{-3/2}\,\mathrm{e}_{-1}(\mathbf{k})\,e^{i(\mathbf{kr}-kct)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad (3)$$

подчиняются условию ортономирования

$$\int d^3\mathbf{r}\,\Psi^{+}_{\mathbf{k}',\lambda'}(\mathbf{r},t)\,\Psi_{\mathbf{k},\lambda}(\mathbf{r},t) = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}), \quad (4)$$

образуя соответвующий формуле (1) базис, поскольку являются обобщенными собственными функциями полного набора взаимно коммутирующих операторов энергии, импульса и спиральности; собственные значения последнего для фотона, как известно, $\lambda = \pm 1$. В (2) и (3) комплексные векторы поляризации $\mathrm{e}_{\lambda}(\mathbf{k})$ удовлетворяют ряду соотношений ортонормирования [14-20] и имеют общий вид

$$\mathrm{e}_{\lambda}(\mathbf{k}) = [\mathrm{e}_{I}(\mathbf{k}) + i\lambda\mathrm{e}_{II}(\mathbf{k})]/\sqrt{2}\,, \quad (5)$$

где вещественные единичные взаимно перпендикулярные векторы $\mathrm{e}_{I}(\mathbf{k})$ и $\mathrm{e}_{II}(\mathbf{k})$ образуют правую тройку векторов с вектором $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$; для реализации соотношения (4) вектор $\mathrm{e}_{I}(\mathbf{k})$ не должен менять свое направление при изменении направления $\mathbf{n}$ на противоложное.

Волновая функция (1) позволяет [14-20] вычислить нормированную на единицу плотность вероятности обнаружения фотона:

$$\rho_P(\mathbf{r},t) = \Psi^{+}(\mathbf{r},t)\Psi(\mathbf{r},t). \quad (6)$$

В формуле (1) коэффициенты $b(\mathbf{k},\lambda)$, вообще говоря, могут задаваться произвольно (или вычисляться), но, в свою очередь, также должны удовлетворять условию ортонормирования, которое можно объединить в цепочку общих соотношений, с учетом (6):

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \int \rho_P(\mathbf{r},t)\,d^3\mathbf{r} = \int \rho_P(\mathbf{k},t)\,d^3\mathbf{k} = \int \textstyle\sum_{\lambda}|b(\mathbf{k},\lambda)|^2\,d^3\mathbf{k} = 1. \quad (7)$$

В силу последнего равенства в (7), аналогичное которому широко используется в существующей литературе, затрагивающей квантовую механику фотона, совокупность коэффициентов $b(\mathbf{k},\lambda)$ часто называют волновой функцией фотона в импульсном представлении.

Однако для фотона это совершенно не так: как аргументировано в [14-20], таковой является шестикомпонентная функция

$$\Psi(\mathbf{k},t) = \sum_\lambda \Psi_\lambda(\mathbf{k},t) =$$

$$= b(\mathbf{k},+1)\,\mathrm{e}_{+1}(\mathbf{k})\,e^{-ik}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b(\mathbf{k},-1)\,\mathrm{e}_{-1}(\mathbf{k})\,e^{-ikct}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \quad (8)$$

Как видно из (1) и (8), волновые функции фотона в координатном и импульсном представлениях связаны между собой обычным для квантовой механики Фурье-преобразованием.

4. Двухфотонная интерференция «сферических волн», от двух точечных источников в схеме опыта Юнга

Пусть два точечных «изотропных» источника одновременно испускают одиночные фотоны (каждый) по всем направлениям с равной вероятностью. Будем считать, что источники расположены по отношению к экрану, фиксирующему их попадание, так же, как «точечные» отверстия в опыте Юнга. Выберем начало координат посередине расстояния d между источниками, ось x направим от «нижнего» источника к «верхнему», а ось z – к экрану (рисунок 1).

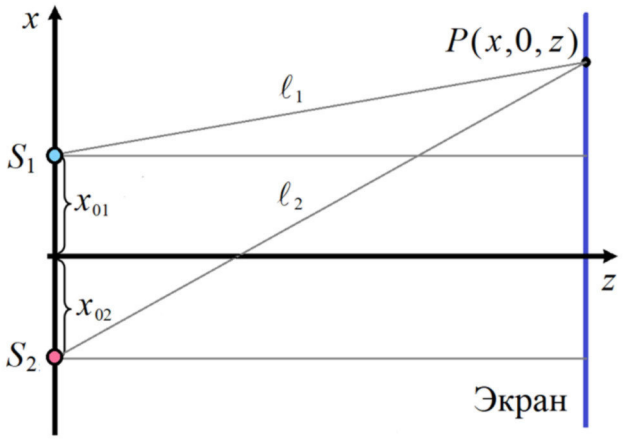


Рисунок 1 — Схема мысленного эксперимент типа опыта Юнга с точечными однофотонными источниками

Расходящуюся сферическую волну с гауссовским распределением по импульсам описывает следующая параметризация $b(\mathbf{k},\lambda)$:

$$b(\mathbf{k},+1) = b(\mathbf{k},-1) = A\,\exp[-\alpha^2\,(k-k_0)^2/2 - i\mathbf{k}\mathbf{r}_0]\,, \quad (9)$$

где для константы A условие нормировки (7) дает выражение

$$A = \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2\pi\left[(1+2\alpha^2k_0^2)(1+\mathrm{erf}(\alpha k_0))\sqrt{\pi}+2\alpha k_0\exp(-\alpha^2k_0^2)\right]}}. \quad (10)$$

Используя общие формулы [14-20] для средних значений физических величин, наиболее важные из них можно вычислить, применив импульсное представление и формулу (9). В частности, среднее значения импульса получается точным нулем, что и соответствует сферической волне; среднее значение энергии равно $\bar{E} = \hbar k_0 c$, где c – скорость света в вакууме, а среднее значение квадрата энергии

$$\overline{E^2} = 4\pi(A\hbar k_0 c)^2\alpha^{-3}\{\sqrt{\pi}(\alpha^2k_0^2+3+3(\alpha^2k_0^2)^{-1})(1+\mathrm{erf}(\alpha k_0))+$$
$$+\exp(-\alpha^2k_0^2)(\alpha k_0+5(2\alpha k_0)^{-1})\}.$$

Приведенные формулы позволяют вычислить среднее квадратичное отклонение энергии фотона в состоянии (1), (9):

$$\Delta E = \sqrt{D_E} = \overline{E^2} - \bar{E}^2 . \quad (11)$$

Эту «теоретическую» формулу можно использовать при моделировании (что и сделано в данной работе) для отыскания значения параметра α, если в качестве исходных величин взять среднюю длину волны излучения λ_0, для которой параметр $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, и время излучения фотона τ, связанное с «экспериментальным» значением неопределенности энергии $\Delta E_{\text{эксп}}$ соотношением неопределенностей [18]:

$$\Delta E_{\text{эксп}}\tau = \hbar . \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12), получаем уравнение, численное решение которого дает α. В данной работе, параметр λ_0 был задан из доступной для вычисления (на обычном «домашнем» компьютере) микроволновой области, а именно, $\lambda_0 = 1.5$ см. Величина τ выбрана равной $\tau = 0.200158$ нс. При этих значениях параметр $\alpha = 4.236338$ см.

Среднее значение спиральности в состоянии (1), (9), очевидно, равно нулю, что следует также из непосредственного вычисления; среднее значение радиуса-вектора точки обнаружения фотона равно $\mathbf{r}_0$, фигурирующему в (9). Поэтому когда каждый источник излучает отдельно от другого, для фотона от «верхнего» источника $\bar{\mathbf{r}}_{01} = (x_{01}, 0,0) = (-d/2, 0,0)$; от «нижнего» – $\bar{\mathbf{r}}_{02} = (x_{02}, 0,0) = (d/2, 0,0)$.

В данной работе использовались следующие векторы []:

1) при $0 \le \theta \le \pi/2$

$$\mathrm{e}_I(\mathbf{k}) \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{e}_{Ix} \\ \mathrm{e}_{Iy} \\ \mathrm{e}_{Iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(1-\cos\theta)\cos^2\varphi \\ -(1-\cos\theta)\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad (13а)$$

$$\mathrm{e}_{II}(\mathbf{k}) \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{e}_{IIx} \\ \mathrm{e}_{IIy} \\ \mathrm{e}_{IIz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-\cos\theta)\sin\varphi\cos\varphi \\ \cos\theta+(1-\cos\theta)\cos^2\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix}; \quad (13б)$$

2) при $\pi/2 \le \theta \le \pi$

$$\mathrm{e}_I(\mathbf{k}) \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{e}_{Ix} \\ \mathrm{e}_{Iy} \\ \mathrm{e}_{Iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(1+\cos\theta)\cos^2\varphi \\ -(1+\cos\theta)\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad (14а)$$

$$\mathrm{e}_{II}(\mathbf{k}) \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{e}_{IIx} \\ \mathrm{e}_{IIy} \\ \mathrm{e}_{IIz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\cos\theta)\sin\varphi\cos\varphi \\ \cos\theta-(1+\cos\theta)\cos^2\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (14б)$$

где θ и φ определяют вектор $\mathbf{k}$ в сферической системе координат.

Для описания двухфотонной интерференции в изложенной «постановке» мысленного эксперимента будем полагать, на уровне постулата, что *волновая функция системы одновременно испущенных фотонов равна сумме волновых функций вида (1) каждого фотона*:

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \Psi_1(\mathbf{r},t) + \Psi_2(\mathbf{r},t), \quad (15)$$

где слагаемые отличаются только векторами $\mathbf{r}_{01}$ и $\mathbf{r}_{02}$ положений источников, определяющих для них разницу коэффициентов $b(\mathbf{k},\lambda)$, согласно (9). Следовательно, плотность вероятности обнаружения любого из этих фотонов определяется формулой (6), тогда как если источник излучает отдельно, то вероятность попадания фотона в ту же точку определяется лишь одним соответствующим слагаемым в (15):

$$\rho_{P1}(\mathbf{r},t) = \Psi_1^+(\mathbf{r},t)\Psi_1(\mathbf{r},t), \quad \rho_{P2}(\mathbf{r},t) = \Psi_2^+(\mathbf{r},t)\Psi_2(\mathbf{r},t). \quad (16)$$

В результате интегрирования по азимутальному углу φ вектора $\mathbf{k}$, каждое слагаемое $\Psi_i(\mathbf{r},t)$ в (15), где $i = 1, 2$, можно записать как

$$\Psi_i(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} u_i(\mathbf{r},t) \\ v_i(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_i(\mathbf{r},t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_i(\mathbf{r},t), \quad (17)$$

где

$$u_i(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} u_{ix}(\mathbf{r},t) \\ u_{iy}(\mathbf{r},t) \\ u_{iz}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{ix}(\mathbf{r},t) \\ -v_{iy}(\mathbf{r},t) \\ v_{iz}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix}, \; v_i(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} v_{ix}(\mathbf{r},t) \\ v_{iy}(\mathbf{r},t) \\ v_{iz}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix}; \quad (18)$$

$$u_i(\mathbf{r},t) = A/\left(2\sqrt{\pi}\right)\int_0^\infty dk k^2 \exp[-\alpha^2(k-k_0)^2/2 - ikct]\, F_i(k)\,, \quad (19)$$

$$F_i(k) = \int_0^1 d\xi \begin{pmatrix} [J_0(\chi_i)(1+\xi) + J_2(\chi_i)(1-\xi)]\cos(kz\xi) \\ \mp [J_0(\chi_i)(1+\xi) - J_2(\chi_i)(1-\xi)]\sin(kz\xi) \\ 2J_1(\chi_i)\sqrt{(1-\xi^2)}\sin(kz\xi) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где J_0, J_1, J_2 – функции Бесселя от аргумента $\chi_i = k(x - x_{0i})\sqrt{1-\xi^2}$.

На рисунке 2 приведен график плотности вероятности обнаружения фотона (любого из двух) при одновременном излучении обоих источников – в виде кривой ρ_P как функции координаты x точки наблюдения P на экране (см. рисунок 1) для излучения с длиной волны $\lambda_0 = 1.5$ см и длительностью $\tau = 0.200158$ нс при $x_{01} = -x_{02} = 1.5$ см, $z = \ell = ct = 6.00$ см в момент времени $t = 0.200$ нс.

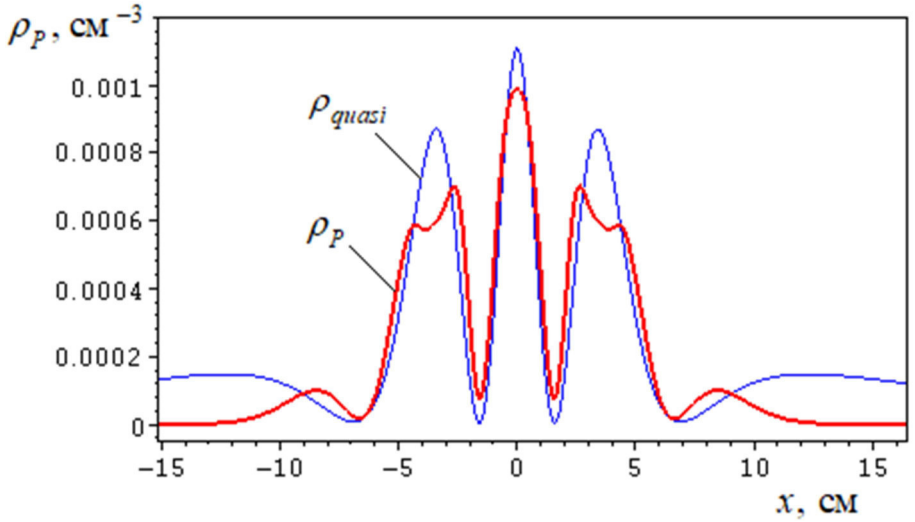


Рисунок 2 — Двухфотонная интерференция от двух источников изотропного излучения в модели (1), (9), (13), (14) в сравнении с квазиклассическим описанием, определяемым формулой (22)

Из рис. 2 видно, что кривая ρ_P демонстрирует интерференцию с тремя острыми пиками и двумя сглаженными менее интенсивными крайними пиками. В центре – ожидаемый наибольший интерференционный пик. Форма средних пиков слегка нарушена вследствие специфической параметризации (9) и выбора параметров λ_0 и τ. Однако общая тенденция поведения кривой ρ_P хорошо согласуется с кривой ρ_{quasi}, полученной с помощью «квазиклассического» описания данного мысленного эксперимента, в предположении, что каждый источник испускает электромагнитное излучение с напряженностью электрического поля, заданной формулой

$$\mathbf{E}_{quasi}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}/\mathrm{r})\exp[-(t - r/c)^2/\tau^2 - ik_0(ct - r)]/r, \quad (21)$$

где вектор $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}/r)$ – зависит только от направления вектора $\mathbf{r}$ и по модулю может быть определен из приравнивания $\hbar\omega_0$ ко всей электромагнитной энергии от одного акта излучения источника, проходящей через сферу радиуса r за время от $-\infty$ до $+\infty$. По модулю он оказывается равным $E_0 = \sqrt{2\hbar k_0/\tau\sqrt{2\pi}}$. «Квазиклассическую» плотность энергии тогда можно получить как плотность электромагнитной энергии, деленной на $\hbar\omega_0$, а «амплитуду вероятности» A_{quasi} – «извлекая квадратный корень» из плотности вероятности. Тогда для верхнего и нижнего источников получаем:

$$A_{i,quasi} = \exp[-(t - r_i/c)^2/\tau^2 - ik_0(ct - r_i)]/\left(r_i\sqrt{2\pi c\tau\sqrt{2\pi}}\right). \quad (22)$$

Это выражение играет роль однокомпанентной «квазиклассической волновой функции» фотона в координатном представлении. Применяя ее для описания двухфотонной интерференции в рассматриваемом мысленном эксперименте, аналогично вышеприведенному методу для шестикомпонентной функции, получаем кривую ρ_{quasi}, показанную на рисунке 2.

Заключение

Проведенное в настоящей работе численное моделирование в целом демонстрирует возможность применения волновой функции фотона в координатном представлении к описанию интерференционных явлений в однофотонных и двухфотонных экспериментах. Возникающие нюансы требуют уточнения применяемых моделей и использования компьютеров с большей оперативной памятью и более высоким быстродействием. С учетом этого поле перспективных теоретических и прикладных исследований с использованием волновой функции фотона представляется весьма широким и разнообразным.

Список литературы

1. Bialynicki-Birula, I. On the Wave Function of the Photon / I. Bialynicki-Birula // Acta Phys. Pol. A. – 1994. – V. 86. – P. 97–116.
2. Sipe, J. E. Photon wave functions / J. E. Sipe // Physical Review A. 1995. – V. 52. – P. 1875–1883.
3. Scully, M.O. Quantum Optics. / M.O. Scully, M.S. Zubairy. – Cambridge Univ. Press, 1997.

4. Bialynicki-Birula, I. Photon Wave Function / I. Bialynicki-Birula // Progress in Optics / edited by E. Wolf (North-Holland, Elsevier, Amsterdam, 1996). – V. XXXVI. – P. 248–294.
5. Hawton, M. Photon wave functions in a localized coordinate space basis / M. Hawton // Phys. Rev. A. – 1999. – V. 59. – P. 3223–3227.
6. Cugnon, J. The Photon Wave Function / J. Cugnon // Open Journal of Microphysics. – 2011. – V. 1. – № 3. – P. – 41–52.
7. Kramers, H.A. Quantum Mechanic. / Kramers H.A. – Amsterdam: North-Holland, 1958 (original edn 1937).
8. Newton, T.D. Localized states for elementary particles / T.D. Newton, E.P. Wigner // Reviews of Modern Physics. – 1949. – V. 21. – P. 400–406.
9. Bohm, D. Quantum Theory. / D. Bohm. – Constable, London, 1954.
10. Berestetskii V.B. Quantum electrodynamics / V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii. – NY: Pergamon Press, 2nd ed. Ltd., 1982.
11. Ахиезер, А.И. Квантовая электродинамика / А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий – М.: Наука, 1981.
12. Левич, В.Г. Курс теоретической физики. Том II. / В.Г. Левич, Ю.А. Вдовин, В.А. Мямлин. – М.: Наука, 1971.
13. Landau, L. Quantenelectrodynamik im Konfigurationsraum / L. Landau, R. Peierls // Zeit. F. Phys. – 1930. – V. 62. – P. 188–198.
14. Давыдов, А.П. Волновая функция фотона в координатном представлении / А.П. Давыдов // Вестник МаГУ. Вып. 5. – Магнитогорск: МаГУ, 2004. – С. 235.
16. Давыдов, А.П. Квантовая механика фотона: волновая функция в координатном представлении / А.П. Давыдов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2015. – Т. 20 – № 5. – С. 43–61.
17. Давыдов, А.П. Однофотонный подход к моделированию короткоимпульсного лазерного излучения // Вестник науки и образования Северо-Запада России. [Электронный ресурс] / А.П. Давыдов, Т.П. Злыднева. – 2015. – Т.1. – № 4. – URL: http://vestnik-nauki.ru/wp-content/uploads/2015/11/2015-№4-Давыдова.pdf (дата обращения: 19.03.2019).
18. Давыдов, А.П. Волновая функция фотона в координатном представлении: монография / А.П. Давыдов. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2015. –180 с.
19. Давыдов, А.П. О волновой функции фотона в координатном и импульсном представлениях / А.П. Давыдов, Т.П. Злыднева // Междунар. научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 11 (53). – Часть 4. – С. 152–155.

20. Давыдов, А.П. О релятивистской инвариантности уравнения непрерывности в квантовой механике фотона / А.П. Давыдов, Т.П. Злыднева // Междунар. научно-исслед. журнал. – 2016. – № 4 (46). – Часть 6. – С. – 134–137.
21. Davydov, A.P. The Young's interference experiment in the light of the single-photon modeling of the laser radiation / A.P. Davydov, T.P. Zlydneva // ITSMSSM-2016. – P. 208–215.
22. Davydov, A.P. The Modeling of the Young's interference experiment in terms of single-photon wave function in the coordinate representation / A.P. Davydov, T.P. Zlydneva // Proc. IV ITSMSSM-2017. – 2017. – P. 257–265.
23. Давыдов, А.П. Об интерференции света с точки зрения волновой функции фотона в координатном представлении / А.П. Давыдов, Т.П. Злыднева // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования: материалы 75-й междунар. науч.-техн. конф. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2017. – Т. 2. – С. 109–112.
24. Давыдов, А.П. Моделирование и анализ волновой функции фотона при квантово-механическом объяснении опыта Юнга / А.П. Давыдов, Т.П. Злыднева // Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения: сб. науч. тр. I всерос. науч. конф. Ч.1. – Тольятти: Издатель Качалин А.В., 2017. – С. 66–74.
25. Давыдов, А.П. Интерференция электромагнитных волн с точки зрения волновой функции фотона в координатном представлении / А.П. Давыдов, Т.П. Злыднева // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2018. – Т. 23. – № 8. – С. 27–40.
26. Давыдов, А.П. Моделирование классической и квантовой плотностей вероятности обнаружения фотона фемтосекундного лазерного излучения / А.П. Давыдов, Т.П. Злыднева // Физика конденсированного состояния и ее приложения: сб. тр. всерос. науч.-практ. конф. Т. II. / отв. ред. О.В. Ахметова. – Уфа: Изд-во РИЦ БашГУ, 2018. – С. 214–220.
27. Давыдов, А.П. Однофотонная интерференция света в терминах волновой функции фотона в координатном представлении / А.П. Давыдов, Т.П. Злыднева // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования. – 2019. – Т. 10. – №1. – 156–162.
28. Davydov, A.P. On the wave-particle duality within the framework of modeling single-photon interference / A.P. Davydov, T.P. Zlydneva // J. Phys.: Conf. Ser. – Vol. 1399. – Pap. 02219.

УДК 532.7+536.22

Зарифзода Афзалшох Кахрамон
кандидат физико-математических наук, доцент,
докторант кафедры теоретической физики Таджикского национального университета
Таджикский национальный университет,
Таджикистан, г. Душанбе

Бозорова Юлдуз Комилджонова
докторант кафедры общей физики Таджикского государственного педагогического университета им. С. Айни
Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни,
Таджикистан, г. Душанбе

О СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Аннотация. *На основе метода статистической теории для модели двухкомпонентной магнитной жидкости, состоящей из ферритной и молекулярной частей, получено аналитическое выражение для динамического коэффициента теплопроводности магнитной жидкости. Полученное выражение для коэффициента теплопроводности, учитывающее вклады процессов трансляционной и структурной релаксации, позволяет провести численные расчеты в зависимости от частоты внешнего воздействия, концентрации твердых магнитных частиц, величины внешнего магнитного поля и температуры. На основе полученного выражения проведены численные расчеты частотной зависимости коэффициента теплопроводности при различных значениях напряженности внешнего магнитного поля и концентрации магнитных частиц. Показано, что полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с литературными данными.*

Ключевые слова: *магнитная жидкость, теплопроводность, дисперсия, релаксация.*

Zarifzoda Afzalshoh Qahramon
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,

doctoral student of the Department of Theoretical Physics, Tajik National University
Tajik National University,
Tajikistan, Dushanbe

Bozorova Yulduz Komiljonova
doctoral student of the Department of General Physics of the Tajik State Pedagogical University named after S. Aini
Tajik State Pedagogical University named after S. Aini,
Tajikistan, Dushanbe

ON THE STATISTICAL THEORY OF THERMAL CONDUCTIVITY OF A TWO-COMPONENT MAGNETIC FLUID

Annotation. *On the basis of the method of statistical theory for the model of a two-component magnetic fluid, consisting of both ferrite and molecular parts, an analytical expression for the dynamic coefficient of thermal conductivity of the magnetic fluid is obtained. The obtained expression for the thermal conductivity coefficient, taking into account the contributions of the processes of translational and structural relaxation, makes it possible to carry out numerical calculations depending on the frequency of the external action, the concentration of solid magnetic particles, the magnitude of the external magnetic field and temperature. On the basis of the obtained expression, numerical calculations of the frequency dependence of the thermal conductivity coefficient were carried out at various values of the external magnetic field strength and concentration of magnetic particles. It is shown that the results obtained are in satisfactory agreement with the literature data.*

Keywords: *magnetic fluid, thermal conductivity, dispersion, relaxation.*

В последнее время магнитные жидкости все больше используются в различных частях технических устройств в качестве рабочего тела [1–3]. Для широкого их применения необходимо знать поведение эффективной вязкости и теплопроводности магнитных жидкостей в широком интервале температуры и значения приложенного внешнего магнитного поля.

В последние годы проведены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования процессов теплопроводности в магнитных жидкостях [4–6]. Однако в этих исследованиях определяется только статическое значение коэффициента теплопроводности и при измерениях не учитываются релаксационные процессы, являющимися важными при исследовании свойств магнитных жидкостей.

Поэтому целью настоящего сообщения является получение молекулярного выражения для динамического коэффициента теплопроводности двухкомпонентной магнитной жидкости на основе метода статистической теории, с учетом вкладов трансляционной и структурной релаксаций при наличии внешнего магнитного поля.

В [7] для модели двухкомпонентной магнитной жидкости, состоящей из ферритной и молекулярной частей с частицами сорта $i = \mathrm{f}, \mathrm{s}$, получены кинетические уравнения для одночастичной $f_{1i}(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t)$ и двухчастичной $f_{2i}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t)$ функций распределения. На основе полученных кинетических уравнений выведена система уравнений обобщенной гидродинамики. Входящие в нее компоненты вектора потока тепла $S_i^{\alpha}(\mathbf{q}_1, t)$ микроскопически определяются выражением

$$S_i^{\alpha}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t) = S_{ki}^{\alpha}(\mathbf{q}_1, t) + \frac{\sigma_i^3}{4} \int \left(\Phi_i(r) \delta^{\alpha\beta} - \frac{d\Phi_i(r)}{dr} \frac{r^{\alpha} r^{\beta}}{r} \right) J_{2i}^{\beta}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (1)$$

где $S_{ki}^{\alpha}(\mathbf{q}_1, t) = \frac{1}{2} \int \frac{\tilde{p}_{1i}^2 p_{1i}^{\alpha}}{m_i^2} f_{1i}(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t) dp_1$ – кинетическая часть вектора потока тепла *i*-й подсистемы, $J_{2i}^{\beta}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t) = \int \frac{\tilde{p}_{1i}^{\alpha}}{m_i} f_{2i}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2$ – неравновесный бинарный поток частиц, p_{1i}^{α}, $\tilde{p}_{1i}^{\alpha} = p_{1i}^{\alpha} - m_i v_i^{\alpha}$ – компоненты импульса и относительного импульса частиц подсистем магнитной жидкости.

Как видно из (1) компоненты вектора потока тепла состоят из кинетической и потенциальной частей. Кинетическая часть $S_i^{\alpha}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t)$ обусловлена переносом кинетической энергии, а потенциальная часть, взаимодействием структурных единиц подсистем магнитной жидкости.

Для определения (1) необходимо иметь уравнения для $S_{ki}^{\alpha}(\mathbf{q}_1, t)$ и $J_{2i}^{\beta}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t)$, которые получаются при умножении уравнения для

$f_{1i}(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,t)$ на $\widetilde{p}_{1i}^{\alpha}\widetilde{p}_{1i}^{\beta}\widetilde{p}_{1i}^{\gamma}/(2m_i^2)$ и уравнения для $f_{2i}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,t)$ на p_{1i}^{α}/m_i, с последующим интегрированием первого уравнения по $d\mathbf{p}_1$ и второго уравнения по $d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S_{ki}^{\alpha}}{\partial t}+\frac{5}{2}\frac{k}{m_i}P_{ki}(0)\frac{\partial T}{\partial q_1^{\alpha}}+\frac{5}{2}\frac{kT_0}{m_i}\frac{\partial P_{ki}}{\partial q_1^{\alpha}}+\frac{5}{2}\frac{kT_0}{m_i}\frac{\partial K_i^{\alpha\beta}}{\partial q_1^{\beta}}=-\frac{3\beta_i}{m_i}S_{ki}^{\alpha}+\frac{5\beta_i}{m_i^2}j_{1i}^{\alpha},\\
&\frac{\partial J_{2i}^{\beta}(\mathbf{q}_1,\mathbf{r},t)}{\partial t}+\omega_{1i}J_{2i}^{\beta}(\mathbf{q}_1,\mathbf{r},t)+\omega_{0i}\hat{L}_iJ_{2i}^{\beta}(\mathbf{q}_1,\mathbf{r},t)=Q_i^{\alpha}(\mathbf{q}_1,\mathbf{r},t),
\end{aligned}\qquad(2)$$

где $\hat{L}_i=-\dfrac{\partial}{\partial r^{\alpha}}\left[\dfrac{\partial}{\partial r^{\alpha}}-\dfrac{\partial}{\partial r^{\alpha}}\ln g_i(r)\right]$, $\omega_{1i}=\dfrac{1}{\tau_{1i}}=\dfrac{3\beta_i}{m_i}$, $\omega_{0i}=\dfrac{2kT}{\beta_i\sigma_i^2}$,

$$Q_i^{\alpha}(\mathbf{q}_1,\mathbf{r},t)=\frac{\omega_{1i}n_i^2kT_0g_i(r)}{\beta_i}\frac{r^{\alpha}r^{\beta}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\ln g_i(r)}{\partial T}\right)_P\frac{\partial T}{\partial q_1^{\beta}}-$$

$$-\frac{\omega_{1i}n_i^2kT_0g_i(r)}{\beta_i}\left(\frac{\partial\ln g_i(r)}{\partial T}\right)_P\frac{\partial T}{\partial q_1^{\alpha}}-\frac{\omega_{1i}n_i^2}{\beta_i}\mu_0m^{\beta}\frac{\partial H^{\alpha}}{\partial q_1^{\beta}}\frac{\partial g_i(r)}{\partial r},$$

n_i, m_i, β_i, g_i, σ_i – числовая плотность, масса, коэффициент трения, радиальная функция распределения и диаметр частиц соответствующей подсистемы, соответственно, T_0, $T(\mathbf{q}_1,t)$ – равновесная и неравновесная температуры, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, m^{β} – соответствующая компонента магнитного момента магнитных частиц. В выражении $Q_{\mathrm{s}}^{\alpha}(\mathbf{q}_1,\mathbf{r},t)$ слагаемое, учитывающее влияние внешнего магнитного поля, равно нулю.

Теперь, решая уравнения (2) аналогично решению, приведенному в [7], подставляя их в (1) и совершая в нем фурье-преобразование по времени, для динамического коэффициента теплопроводности магнитной жидкости получим:

$$\begin{aligned}
\lambda(\omega)=\sum_{i=\mathrm{f},\mathrm{s}}\Bigg[&\frac{5}{2}\frac{\rho_ik^2}{m_i^2}\frac{T_0\tau_{1i}}{1+(\omega\tau_{1i})^2}+\frac{n_i^2\sigma_i^3}{12\pi}\Bigg(\int_0^{\infty}\Phi_{1i}(r)d\mathbf{r}\int_0^{\infty}\Theta_{1i}(r,r_1,\omega)A_{1i}(r_1)d\mathbf{r}_1+\\
&+\int_0^{\infty}\Phi_{2i}(r)d\mathbf{r}\int_0^{\infty}\Theta_{1i}(r,r_1,\omega)A_{2i}(r_1)r_1d\mathbf{r}_1\Bigg)\Bigg]+\frac{n_{\mathrm{f}}^2\sigma_{\mathrm{f}}^3\mu_0mH}{36\pi\beta_{\mathrm{f}}l}\times\\
&\times\int_0^{\infty}\Phi_{1\mathrm{f}}(r)d\mathbf{r}\int_0^{\infty}\Theta_{1\mathrm{f}}(r,r_1,\omega)\left(\frac{\partial g_{\mathrm{f}}(r_1)}{\partial T}\right)_p d\mathbf{r}_1,
\end{aligned}\qquad(3)$$

где $\Phi_{1i}(r) = 3\left(\Phi_i(r) - \frac{1}{3} r \frac{d\Phi_i(r)}{dr}\right)$, $\Phi_{2i}(r) = \Phi_i(r) - r\frac{d\Phi_i(r)}{dr}$,

$A_{1i}(r_1) = \frac{kT_0}{\beta_i}\left(\frac{\partial g_i(r_1)}{\partial T}\right)_p$, $A_{2i}(r_1) = -\frac{2kT_0}{\beta_i} g_i(r_1) \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{\partial \ln g_i(r_1)}{\partial T}\right)_p$,

$$\Theta_{1i}(r, r_1, \omega) = \frac{(\omega\tau_{0i})^{-1/2}}{4\pi r r_1}\left[e^{-\varphi_1}(\sin\varphi_1 - \cos\varphi_1) - e^{-\varphi_2}(\sin\varphi_2 - \cos\varphi_2)\right],$$

$$\varphi_{(12)i} = (\omega\tau_{0i})^{1/2}(r \mp r_1).$$

Согласно (3) динамический коэффициент теплопроводности состоит из кинетической и потенциальной частей. Кинетическая часть $\lambda(\omega)$ описывается величинами τ_{1i}, являющимися временами трансляционной релаксации векторов потока тепла Потенциальная часть $\lambda(\omega)$ определяется функциями $\Theta_{(12)i}(r, r_1, \omega)$, описывающими процессы перестройки структуры магнитной жидкости с характерными временами структурной релаксации τ_{0i}.

Для проведения численных расчетов в (3) энергию взаимодействия молекулярной подсистемы выбираем в виде модели Штокмайера, т.е в виде суммы потенциала Леннард-Джонса и потенциальной энергии диполь-дипольного взаимодействия:

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = \Phi_s^{L-J}(r) + \Phi^{pp}(\mathbf{r}), \qquad (4)$$

где $\Phi_s^{L-J}(r) = 4\varepsilon_s\left(r^{-12} - r^{-6}\right)$, $\Phi^{pp}(\mathbf{r}) = \frac{p^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\sigma_s^3}\left[\frac{(\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b)}{r_{ab}^3} - \frac{3(\mathbf{e}_a\mathbf{r}_{ab})(\mathbf{e}_b\mathbf{r}_{ab})}{r_{ab}^5}\right]$.

В магнитной подсистеме, считая феррочастицы сферическими однодоменными частицами, покрытыми слоем поверхностно-активного вещества, и находящимися под действием внешнего магнитного поля, представим их взаимодействие в виде

$$\Phi_f(\mathbf{r}, \mathbf{H}) = \Phi_f^{L-J}(r) + \Phi^{mm}(\mathbf{r}) + \Phi^{H}(\mathbf{H}), \qquad (5)$$

где $\Phi_f^{L-J}(r) = 4\varepsilon_f\left(r^{-12} - r^{-6}\right)$, $\Phi^{mm}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m^2}{4\pi\sigma_f^3}\left[\frac{(\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b)}{r_{ab}^3} - \frac{3(\mathbf{e}_a\mathbf{r}_{ab})(\mathbf{e}_b\mathbf{r}_{ab})}{r_{ab}^5}\right]$,

$$\Phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{H}) = -\mu_0 \mathbf{m}\mathbf{H}.$$

Радиальные функции распределения в соответствии с [8] выбираем в виде

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{s}}(r, n_{\mathrm{s}}, T) &= y_{\mathrm{s}}(\rho^*)\exp\left[-\Phi_{\mathrm{s}}(\mathbf{r})/kT\right], \\ g_{\mathrm{f}}(r, T, H) &= \exp\left[-\Phi_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}, \mathbf{H})/kT\right], \end{aligned} \qquad (6)$$

где $y_{\mathrm{s}}(\rho^*) = (2-\rho_{\mathrm{s}}^*)/2(1-\rho_{\mathrm{s}}^*)^3$ – контактная функция Карнахана–Старлинга для молекулярной подсистемы, соответствующей системе с плотноупакованными твердыми частицами, $\rho_{\mathrm{s}}^* = \pi\sigma_{\mathrm{s}}^3 n_{\mathrm{s}}/6$.

Далее на основе (3) с учетом (4)–(6) проведены численные расчеты частотной зависимости динамического коэффициента теплопроводности $\lambda(\omega)$ магнитной жидкости на основе керосина. Результаты численных расчетов $\lambda(\omega)$ от частоты при трех значениях внешнего магнитного поля отображены на рисунке 1.

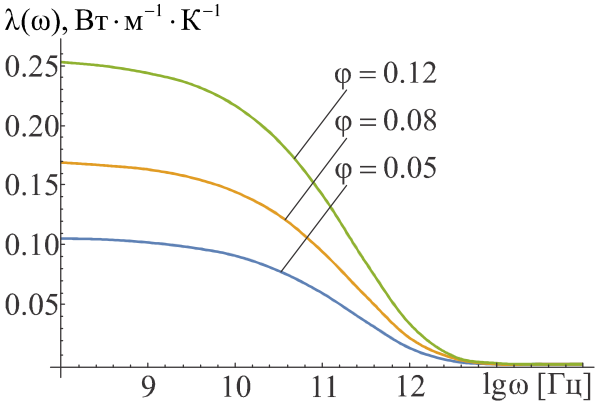


Рисунок 1 – Зависимости коэффициента теплопроводности $\lambda(\omega)$ от частоты для магнитной жидкости на основе керосина при: $\varphi = 0.08$, $T = 293\,\mathrm{K}$

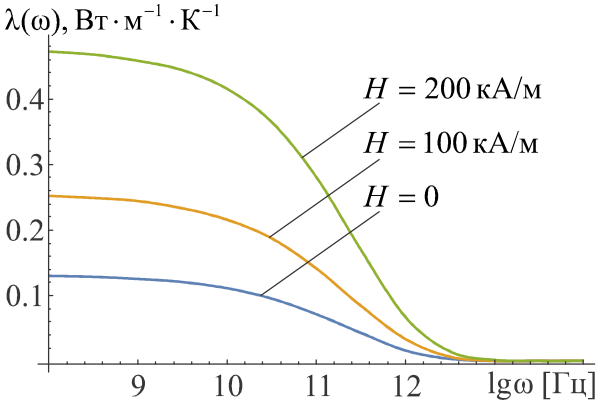


Рисунок 2 – Зависимости коэффициента теплопроводности $\lambda(\omega)$ от частоты для магнитной жидкости на основе керосина при: $H = 0$, $T = 293\,\mathrm{K}$

На рисунке 2 представлены результаты численного расчета динамического коэффициента теплопроводности от частоты при различных значениях концентрации магнитных частиц.

Как видно из рисунков, с увеличением частоты внешнего воздействия значения коэффициента теплопроводности нелинейно уменьшается, его дисперсия является широкой. Полученные результаты в области низких частот при различных значениях внешнего магнитного поля качественно согласуются с результатами работы [9].

Список литературы

1. Odenbach S. Ferrofluids: Magnetically Controllable Fluids and Their Aplications / S. Odenbach – Springer, Berlin, Heidelberg, 2002. – 256 p.
2. Odenbach, S. Colloidal Magnetic Fluids: Basics, Development and Application of Ferrofluids / S. Odenbach – Springer, Berlin Heidelberg, 2009. – 430 p.
3. Kuzubov A.O., Ivanova O.I. Magnetic liquids for heat exchange / A.O. Kuzubov, O.I. Ivanova // Journal of Physics III France. – 1994. V. 4. – № 1. P. 1–6.
4. Abareshi M., Goharshadi E.K., Zebarjad S.M., Fadafan H.K., Youssefi A. Fabrication, characterization and measurement of thermal conductivity of Fe3O4 nanofluids / M. Abareshi, E.K. Goharshadi, S.M. Zebarjad, H.K. Fadafan, A. Youssefi // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2010. V. 322. № 24. P. 3895–3901.
5. Philip J., Shima P.D., Baldev R. Enhancement of thermal conductivity in magnetite based nanofluid due to chainlike structures. / J. Philip, P.D. Shima, R. Baldev // Applied Physics Letters. – 2007. V. 91. № 20. P. 203108–203108-3.
6. Fu H.L., Gao L. Theory for anisotropic thermal conductivity of magnetic nanofluids / H.L. Fu, L. Gao // Physics Letters A. – 2011. V. 375. № 41. P. 3588–3592.
7. Комилов К., Зарипов А.К., Убайди А. Частотная дисперсия коэффициента сдвиговой вязкости и магнитовязкий эффект в магнитных жидкостях / К. Комилов, А.К. Зарипов, А. Убайди // Журн. физ. химии. – 2020. – Т. 94. – С. 1279–1284.
8. Юхновский И.Р., Головко М.Ф. Статистическая теория классических равновесных систем / И.Р. Юхновский, М.Ф. Головко – Киев: Наукова думка, 1980. – 372 с.
9. Marin C.N., Malaescu L. Experimental and theoretical investigations on thermal conductivity of a ferrofluid under the influence of magnetic field / C.N. Marin, L. Malaescu // Eur. Phys. J. E. 2020. V. 43. № 9. P. 61-1–61-9.

УДК 532.7+537.84

Комилов Косим
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры теоретической физики,
Таджикский национальный университет,
Таджикистан, г. Душанбе

Зарифзода Афзалшох Кахрамон
кандидат физико-математических наук, доцент,
докторант кафедры теоретической физики,
Таджикский национальный университет,
Таджикистан, г. Душанбе

Убайди Абдул Маджид
соискатель кафедры теоретической физики,
Таджикский национальный университет,
Таджикистан, г. Душанбе

О СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН В МАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЯХ

Аннотация. *На основе микроскопического уравнения движения, полученного методом статистической теории, получены дисперсионные уравнения, описывающие магнитозвуковые волны в двухкомпонентной магнитной жидкости с вмороженной намагниченностью. Показано, что решая дисперсионные уравнения, можно исследовать распространение сдвиговых мод быстрых и медленных магнитозвуковых волн, а также волн альвфеновского типа в магнитной жидкости. На основе полученного аналитического выражения для скорости быстрой звуковой волны проведены численные расчеты зависимости скорости звука от частоты и величины внешнего магнитного поля при различных значениях концентрации, а также рассмотрена анизотропия звука в магнитной жидкости. Показано, что результаты проведенных численных расчетов находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными и теоретическими данными других авторов.*

Ключевые слова: *магнитная жидкость, магнитогидродинамические волны, дисперсия скорости звука, анизотропия скорости звука.*

Komilov Kosim
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor of the Department of Theoretical Physics,
Tajik National University,
Tajikistan, Dushanbe

Zarifzoda Afzalshoh Qahramon
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,
doctoral student of the Department of Theoretical Physics,
Tajik National University,
Tajikistan, Dushanbe

Obaidi Abdul Majid
Applicant for the Department of Theoretical Physics,
Tajik National University,
Tajikistan, Dushanbe

ON THE SPEED OF PROPAGATION OF MAGNETOSOUND WAVES IN MAGNETIC LIQUIDS

Annotation. *On the basis of the microscopic equation of motion obtained by the method of statistical theory, dispersion equations are obtained that describe magnetosonic waves in a two-component magnetic fluid with frozen-in magnetization. It is shown that the solved dispersion equations can be used to study the propagation of shear modes, fast and slow magnetosonic waves, and waves of the Alfven type in a magnetic fluid. On the basis of the obtained analytical expression for the speed of a fast sound wave, numerical calculations of the dependence of the speed of sound on the frequency and value of the external magnetic field are carried out at various values of the concentration, and also the anisotropy of sound in a magnetic fluid is considered. It is shown that the performed numerical calculations are in satisfactory agreement with the experimental and theoretical results.*

Keywords: *magnetic fluid, magnetohydrodynamic waves, dispersion of the speed of sound, anisotropy of the speed of sound.*

Магнитные жидкости со своими уникальными свойствами находят все большее применение в приборостроении и новых технологиях. Они используются в качестве смазывающих материалов, амортизаторов и демпфирующих устройств, датчиков перемещения, поглотителей, регуляторов и акустических систем, принцип работы которых основан на их упругих колебаниях [1–2]. Широкое применение магнитных жидкостей основано на имеющихся информациях об их структуре и динамических свойствах. Исследование процессов распространения и поглощения волн в магнитных жидкостях позволяет исследовать их строение, получить данные о неравновесных процессах, протекающих в них в широком интервале изменения термодинамических параметров и частоты внешнего воздействия, и открывает новые пути их практического применения.

Основные трудности, возникающие при исследовании акустических параметров магнитной жидкости, связаны с ее многокомпонентностью. Известно, что при вычислении скорости звука в смесях жидкостей и суспензий необходимо учитывать взаимодействие компонентов системы. Следовательно, это задача должна решаться на основе точных методов статистической теории. Однако существуют методы, носящие феноменологический характер, в которых скорость звука в смесях и суспензиях связывается с скоростями звука отдельных компонентов.

В [2] для получения выражения скорости распространения звуковых волн в магнитной жидкости используется аддитивная модель изотермической сжимаемости, и, поскольку при быстрых процессах изотермическая сжимаемость переходит в адиабатическую, для адиабатической скорости звука получается выражение

$$c_{SS} = c_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho[1-\varphi-(1-\gamma')\alpha\varphi]}},$$

где $c_1 = (\rho_1 \beta_{S1})^{-1/2}$ – скорость звука в чистой дисперсионной среде, φ – объемная концентрация дисперсной фазы.

В серии работ [3–5] исследовано влияние внешнего магнитного поля на скорость распространения и коэффициент поглощения звуковых волн в магнитных жидкостях. На основе решения системы уравнений магнитной гидродинамики получены выражения для скорости и коэффициента поглощения трех видов магнитогидродинамических мод: быстрых, медленных и альфвеновских волн. На основе получен-

ных выражений и анализа экспериментальных данных исследована анизотропия распространения волн в магнитных жидкостях.

Целью настоящей работы является теоретическое исследование распространения звуковых волн в магнитных жидкостях с учетом влияния внешнего магнитного поля.

Ранее нами в [6, 7] для модели двухкомпонентной магнитной жидкости, состоящей из ферритной и молекулярной частей с частицами сорта $i = \mathrm{f},\mathrm{s}$, были исследованы вязкоупругие свойства магнитных жидкостей в зависимости от параметров системы. Показано, что полученные результаты находятся в хорошем согласии с экспериментальными и теоретическими результатами других авторов, и при теоретических расчетах выявлен сильный магнитовязкий эффект, наблюдаемый в последних экспериментах для концентрированных магнитных жидкостей.

Аналитические выражения для динамических коэффициентов объемной $\eta_{\mathrm{v}}(\omega)$ и сдвиговой $\eta_{\mathrm{s}}(\omega)$ вязкости, а также соответствующие им динамические объемный $K(\omega)$ и сдвиговый $\mu(\omega)$ модули упругости имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mathrm{v}}(\omega) &= \sum_{i=\mathrm{f},\mathrm{s}} \frac{n_i^2\sigma_i^3}{24\pi} \int_0^\infty \frac{\partial\Phi_i(r)}{\partial r} \int_0^\infty G_{1i}(r,r_1,\omega)\,\varphi_i^*(r_1) r_1^{-1}\, d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r} \; + \\
&+ \frac{n_{\mathrm{f}}^2\sigma_{\mathrm{f}}^3}{216\pi} \int_0^\infty \frac{\partial\Phi_{\mathrm{f}}(r)}{\partial r} \int_0^\infty G_{1\mathrm{f}}(r,r_1,\omega) \frac{\mu_0}{\beta_{\mathrm{f}}} (\mathbf{m}\nabla) \frac{\partial H}{\partial \upsilon} \frac{\partial g_{\mathrm{f}}(r_1)}{\partial r_1} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}, \\
\eta_{\mathrm{s}}(\omega) &= \sum_{i=\mathrm{f},\mathrm{s}} \frac{n_i kT\tau_{1i}}{1+(\omega\tau_{1i})^2} + \sum_{i=\mathrm{f},\mathrm{s}} \frac{n_i^2\sigma_i^3}{120\pi} \int_0^\infty \frac{\partial\Phi_i(r)}{\partial r} \int_0^\infty G_{1i}(r,r_1,\omega) \frac{\partial g_i(r_1)}{\partial r_1} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r} + \\
&+ \frac{n_{\mathrm{f}}^2\sigma_{\mathrm{f}}^3}{360\pi} \int_0^\infty \frac{\partial\Phi_{\mathrm{f}}(r)}{\partial r} \int_0^\infty G_{1\mathrm{f}}(r,r_1,\omega) \frac{\mu_0}{\beta_{\mathrm{f}}} (\mathbf{m}\nabla) \frac{\partial H}{\partial \upsilon} \frac{\partial g_{\mathrm{f}}(r_1)}{\partial r_1} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
K(\omega) &= K_0 + \sum_{i=\mathrm{f},\mathrm{s}} \frac{n_i^2\sigma_i^3\omega}{24\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial\Phi_i(r)}{\partial r} \int_{-\infty}^\infty G_{2i}(r,r_1,\omega)\varphi_i^*(r_1) r_1^{-1} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r} + \\
&+ \frac{n_{\mathrm{f}}^2\sigma_{\mathrm{f}}^3\omega}{216\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial\Phi_{\mathrm{f}}(r)}{\partial r} \int_{-\infty}^\infty G_{2\mathrm{f}}(r,r_1,\omega) \frac{\mu_0}{\beta_{\mathrm{f}}} (\mathbf{m}\nabla) \frac{\partial H}{\partial \upsilon} \frac{\partial g_{\mathrm{f}}(r_1)}{\partial r_1} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}, \\
\mu(\omega) &= \sum_{i=\mathrm{f},\mathrm{s}} \frac{n_i kT(\omega\tau_{1i})^2}{1+(\omega\tau_{1i})^2} + \sum_{i=\mathrm{f},\mathrm{s}} \frac{n_i^2\sigma_i^3\omega}{120\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial\Phi_i(r)}{\partial r} \int_{-\infty}^\infty G_{2i}(r,r_1,\omega) \frac{\partial g_i(r_1)}{\partial r_1} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r} + \\
&+ \frac{n_{\mathrm{f}}^2\sigma_{\mathrm{f}}^3\omega}{360\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial\Phi_{\mathrm{f}}(r)}{\partial r} \int_{-\infty}^\infty G_{2\mathrm{f}}(r,r_1,\omega) \frac{\mu_0}{\beta_{\mathrm{f}}} (\mathbf{m}\nabla) \frac{\partial H}{\partial \upsilon} \frac{\partial g_{\mathrm{f}}(r_1)}{\partial r_1} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где

$$G_{(1,2)i}(r,r_1,\omega)=\pm\frac{\tau_{0i}}{2}\left(\frac{2}{\omega\tau_{0i}}\right)^{1/2}\left[\left(\sin\varphi_{1i}\mp\cos\varphi_{1i}\right)e^{-\varphi_{1i}}-\left(\sin\varphi_{2i}\mp\cos\varphi_{2i}\right)e^{-\varphi_{2i}}\right],$$

$$\varphi_{(1,2)i}(r,r_1,\omega)=\left(\frac{\omega\tau_{0i}}{2}\right)^{1/2}\left(r\mp r_1\right),\quad \varphi_i^*(r_1)=\frac{r_1}{3}\frac{\partial g_i}{\partial r_1}-n_i\left(\frac{\partial g_i}{\partial n_i}\right)_T-\gamma_i T\left(\frac{\partial g_i}{\partial T}\right)_{n_i},$$

K_0 – адиабатический объемный модуль упругости соответствующей системы, $\tau_{1i}=\dfrac{m_i}{2\beta_i}$ – время трансляционной релаксации вязкого тензора напряжения, $\tau_{0i}=\dfrac{\beta_i\sigma_i^2}{2kT}$ – феноменологическое время структурной релаксации, n_i, σ_i, β_i, Φ_i, g_i – соответствующие i-ой подсистеме значения числовой плотности, диаметра частицы, коэффициента трения, парного потенциала взаимодействия частиц и радиальной функции распределения, ω – частота внешнего возмущения, μ_0 – магнитная постоянная, $\mathbf{m}$ – вектор магнитного момента магнитных частиц, H – внешнее магнитное поле, k – постоянная Больцмана, T – температура системы.

Аналитические выражения (1) и (2) позволяют наиболее детально исследовать акустические свойства магнитных жидкостей.

Теперь рассмотрим вязкоупругую магнитную жидкость с вмороженной намагниченностью [5]. Для исследования акустических параметров магнитной жидкости воспользуемся уравнением движения, полученным раннее на основе кинетических уравнений для одночастичной и двухчастичной функций распределения [6, 7]

$$\sum_{i=\mathrm{f,s}}\rho_i\frac{d\upsilon_i^{\alpha}(\mathbf{q},t)}{dt}-\sum_{i=\mathrm{f,s}}\frac{\partial\sigma_i^{\alpha\beta}(\mathbf{q},t)}{\partial q^{\beta}}=n_{\mathrm{f}}\mu_0 m^{\beta}\frac{\partial H^{\alpha}}{\partial q^{\beta}},\qquad(3)$$

а также уравнением эволюции намагниченности для магнитной подсистемы:

$$\frac{dM^{\alpha}}{dt}=M^{\beta}\frac{\partial\upsilon^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}.\qquad(4)$$

В многокомпонентной системе каждая компонента движется со своей макроскопической скоростью $\boldsymbol{\upsilon}_i$, обладает своим парциальным давлением P_i и температурой T_i. Если в системе процессы переноса протекают быстро, то многокомпонентную систему можно рассмат-

ривать как однокомпонентную, т.е. можно предполагать, что все его компоненты движутся как одно целое. Следовательно, используя средние величины, быстрые процессы в многокомпонентной системе можно описать с помощью уравнений, аналогичных уравнениям гидродинамики однокомпонентной системы.

Таким образом, используя средние величины гидродинамических переменных $\rho(\mathbf{q},t)=\sum_{i=\mathrm{f,s}}\rho_i(\mathbf{q},t)$, $\rho(\mathbf{q},t)\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{q},t)=\sum_{i=\mathrm{f,s}}\rho_i(\mathbf{q},t)\boldsymbol{\upsilon}_i(\mathbf{q},t)$ уравнение (3) приведем к виду, аналогичному уравнению однокомпонентной жидкости:

$$\rho\frac{d\upsilon^{\alpha}(\mathbf{q},t)}{dt}-\frac{\partial\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{q},t)}{\partial q^{\beta}}=n_{\mathrm{f}}\mu_0 m^{\beta}\frac{\partial H^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}, \tag{5}$$

где

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{q},t)=-P\delta^{\alpha\beta}+K(\mathbf{q},t)\mathrm{div}\mathbf{u}\,\delta^{\alpha\beta}+\eta_{\mathrm{v}}(\mathbf{q},t)\mathrm{div}\dot{\mathbf{u}}\delta^{\alpha\beta}+$$
$$+2\mu(\mathbf{q},t)\left\{\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\right\}+2\eta_{\mathrm{s}}(\mathbf{q},t)\left\{\frac{\partial \dot{u}^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\right\}$$

– тензор напряжения, определяемый посредством парциальных коэффициентов переноса и модулей упругости магнитной жидкости.

Теперь рассмотрим волны малой амплитуды, приводящие к возмущению параметров магнитной жидкости и декартовую систему координат выбираем так, чтобы внешнее магнитное поле $\mathbf{H}_0$ было направлено вдоль оси Oz, а волновой вектор $\mathbf{k}$ лежал на плоскости Oyz, образуя угол ϑ с осью Oz. Таким образом, решая после линеаризации систему уравнений (4) и (5), получим дисперсионное уравнение:

$$\left(\rho_0\omega^2-(\tilde{\mu}(\omega)+\mu_0 MH\cos^2\vartheta)k^2\right)\left(\omega^4-\frac{1}{\rho_0}\left(\tilde{K}(\omega)+\frac{7}{3}\tilde{\mu}(\omega)+\right.\right.$$
$$+2\mu_0 MH\cos^2\vartheta\Big)k^2\omega^2+\left(\left(\tilde{K}(\omega)+\frac{4}{3}\tilde{\mu}(\omega)\right)\frac{\tilde{\mu}(\omega)}{\rho_0^2}+\right. \tag{6}$$
$$\left.\left.+\left(\tilde{K}(\omega)+\frac{7}{3}\tilde{\mu}(\omega)\right)\frac{\mu_0}{\rho_0^2}MH\cos^2\vartheta+\frac{\mu_0^2}{\rho_0^2}M^2H^2\cos^4\vartheta\right)k^4\right)=0,$$

где $\tilde{K}(\omega)=K(\omega)-i\omega\eta_{\mathrm{v}}(\omega)$, $\tilde{\mu}(\omega)=\mu(\omega)-i\omega\eta_{\mathrm{s}}(\omega)$ – комплексные динамические объемный и сдвиговый модули упругости магнитной жидкости.

Из первого уравнения получаем выражение для скорости распространения $c_{\mathrm{s}}(\omega)$ сдвиговых (поперечных) упругих волн в магнитной жидкости:

$$c_{\mathrm{s}}^2(\omega) = \frac{1}{\rho_0}(\mu(\omega) + \mu_0 MH\cos^2\vartheta). \tag{7}$$

В предельном случае так как при $\omega \to 0$, сдвиговый модуль упругости $\mu(\omega) = 0$ из выражения (7) получаем скорость волны алфвеновского типа: $c_{\mathrm{A}} = (\mu_0 MH\cos^2\vartheta/\rho_0)^{1/2}$. При высоких частотах, когда $\omega \to \infty$, поскольку $\mu(\omega)/\rho_0 >> c_{\mathrm{A}}$, получаем обычную сдвиговую волну в вязкоупругой магнитной жидкости маскирующую волны алфвеновского типа [8].

Решая второе уравнение (6) для скоростей быстрой и медленной магнитозвуковых волн, имеем:

$$c_1^2(\omega) = \frac{1}{\rho_0}\left(K_0 + K(\omega) + \frac{4}{3}\mu(\omega) + \mu_0 MH\cos^2\vartheta\right), \tag{8}$$

$$c_2^2(\omega) = \frac{1}{\rho_0}\left(\mu(\omega) + \mu_0 MH\cos^2\vartheta\right). \tag{9}$$

Как видно из (9), для медленной волны получилось такое же выражение, как и для сдвиговой волны, но в этом случае осцилляции переменных происходят в другой плоскости.

Теперь рассмотрим быструю магнитозвуковую волну. Подставляя (2) в (8), приведем выражение для скорости быстрой волны к следующему виду

$$\begin{aligned} c^2(\omega) = {} & \frac{K_{0\mathrm{s}}K_{0\mathrm{f}}}{K_{0\mathrm{f}}(1-\varphi) + K_{0\mathrm{s}}\varphi} + \sum_{i=\mathrm{f},\mathrm{s}}\frac{N_A}{n_i\mu_i}\mu_0 MH\cos^2\vartheta + \\ & + \sum_{i=\mathrm{f},\mathrm{s}}\frac{N_A}{n_i\mu_i}\left[\sum_{i=\mathrm{f},\mathrm{s}}\left(\frac{4}{3}\frac{n_i kT(\omega\tau_{1i})^2}{1+(\omega\tau_{1i})^2} + \right.\right. \\ & + \frac{n_i^2\sigma_i^3\omega}{24\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\Phi_i(r)}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty}G_{2i}(r,r_1,\omega)\left(\frac{\varphi_i^*(r_1)}{r_1} + \frac{4}{15}\frac{\partial g_i(r_1)}{\partial r_1}\right)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}\Bigg) + \\ & \left. + \frac{n_{\mathrm{f}}^2\sigma_{\mathrm{f}}^3\omega}{120\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{f}}(r)}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty}G_{2\mathrm{f}}(r,r_1,\omega)\frac{\mu_0}{\beta_{\mathrm{f}}}(\mathbf{m}\nabla)\frac{\partial H}{\partial\upsilon}\frac{\partial g_{\mathrm{f}}(r_1)}{\partial r_1}d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Далее, на основе (10) с учетом потенциальных энергий Φ_i и радиальных функций распределения g_i, приведенных в [6, 7], проведен

численный расчет скорости распространения быстрых звуковых волн в магнитной жидкости на основе воды с частицами Fe_3O_4 в зависимости от частоты и величины внешнего магнитного поля.

На рисунке 1 представлены результаты расчетов частотной зависимости скорости звука в магнитной жидкости на основе керосина при $\sigma_s = 0.43$нм, $\sigma_f = 5$ нм, $m = 10^{-20}$ Дж/Тл и $T = 293$ К.

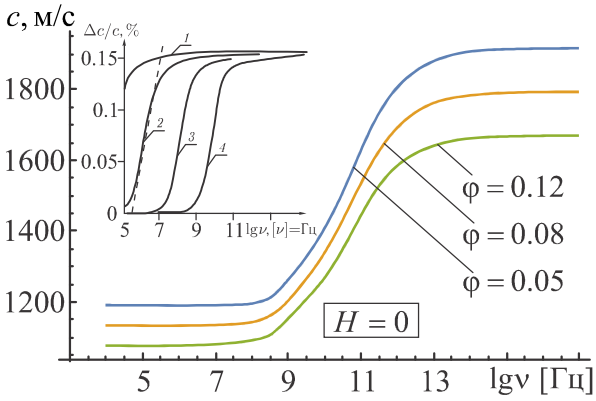


Рисунок 1 – Зависимости скорости звука от частоты внешнего воздействия в магнитной жидкости на основе керосина. На фоне рисунка приведены результаты работы [2]

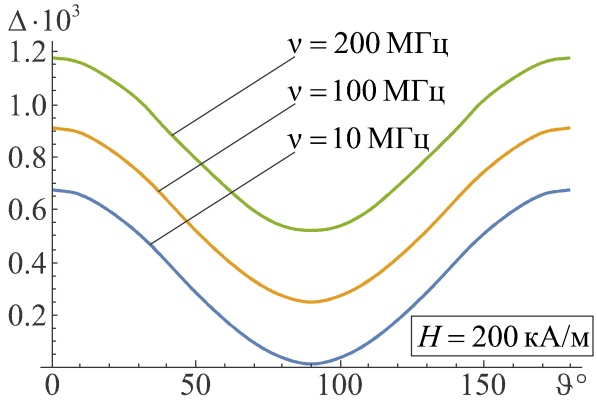


Рисунок 2 – Анизотропия скорости звука в магнитной жидкости на основе керосина при $\varphi = 0.05$, $T = 293$ К

На рисунке 2 продемонстрированы результаты вычисления относительного изменения скорости звука $\Delta = (c(\vartheta) - c_0)/c_0$ в зависимости от угла ϑ между волновым вектором и напряженностью внешнего магнитного поля, c_0 – скорость звука в магнитной жидкости в отсутствии магнитного поля. Согласно [5], в магнитной жидкости на основе воды при $\vartheta = 0°$, $\varphi = 0.039$ и $H = 160$кА/м в случае равновесной намагниченности относительное изменение скорости звука составляет $\Delta = 0.75 \cdot 10^{-7}$, что на четыре порядка меньше, чем в случае вмороженной намагниченности $\Delta = 1.3 \cdot 10^{-3}$. При этих же значениях концентрации, величины внешнего магнитного поля и частоты $\nu = 10$ МГц относительное изменение скорости звука, вычисленного по формуле (10), составило $\Delta = 0.26 \cdot 10^{-3}$.

Результаты численного расчета зависимости $(c(H) - c_0)/c_0$ от

величины внешнего магнитного поля в магнитной жидкости на основе керосина приведены на рисунке 3.

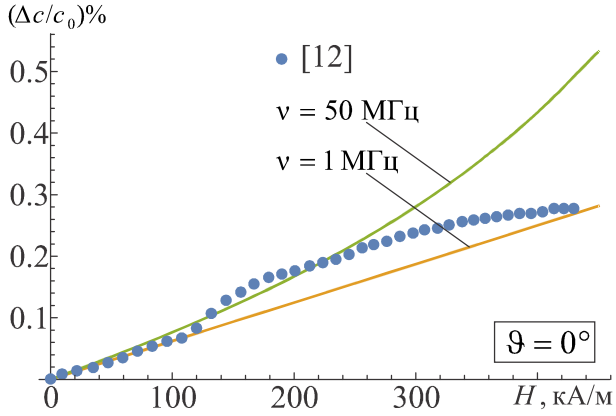


Рисунок 3 – Зависимости относительного изменения скорости звука в магнитной жидкости на основе керосина от величины внешнего магнитного поля

Сплошные кривые вычислены по формуле (10) при $\vartheta = 0°$, $\varphi = 0.1$ и $T = 293$ К. Кружками обозначены результаты работы [9], где в экспериментах использована магнитная жидкость на основе керосина (НС-50), произведенного компанией “Taiho Industries Co., Ltd.” (Япония), с массовой концентрацией 50%. На рисунках при воспроизведении экспериментальных результатов предел ошибок не превышал размер используемых значков.

Таким образом, на основе вышеприведенного теоретического анализа и численных расчетов можно заключить, что полученные на основе неравновесной статистической теории динамические выражения для модулей упругости позволяют детально исследовать акустические свойства как разбавленных, так и концентрированных магнитных жидкостей в широком интервале изменения частоты внешнего воздействия, концентрации твердых магнитных частиц, температуры и величины внешнего магнитного поля. На основе проведенных численных расчетов установлено, что при использовании модели двухкомпонентной магнитной жидкости с вмороженной намагниченностью полученное аналитическое выражение для скорости распространения быстрых магнитозвуковых волн находится в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными и описывает полевую зависимость и анизотропию скорости звука в магнитных жидкостях.

Список литературы

1. Odenbach, S. Colloidal Magnetic Fluids: Basics, Development and Application of Ferrofluids / S. Odenbach – Springer, Berlin Heidelberg, 2009. – 430 p.
2. Полунин В.М. Акустические свойства нанодисперсных магнитных жидкостей / В.М. Полунин – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 384 с.
3. Овчинников И.Э., Соколов В.В. Влияние внешнего магнитного поля на скорости распространения магнитозвуковых волн в магнитной жидкости / И.Э. Овчинников, В.В. Соколов // Акуст. журн. – 2009. – Т. 55. – № 3. – С. 356–361.
4. Овчинников И.Э. Анизотропия распространения звука в магнитной жидкости с внутренним вращением / И.Э. Овчинников // Наука и образование. – 2012. – № 8. – С. 443–458.
5. Овчинников И.Э. Соколов В.В. Волны в магнитных жидкостях с равновесной и вмороженной намагниченностью / И.Э. Овчинников, В.В. Соколов // Акуст. журн. – 2013. – Т. 59. – № 1. – С. 58–62.
6. Комилов К., Зарипов А.К., Убайди А. Частотная дисперсия коэффициента сдвиговой вязкости и магнитовязкий эффект в магнитных жидкостях / К. Комилов, А.К. Зарипов, А. Убайди // Журн. физ. химии. – 2020. – Т. 94. – С. 1279–1284.
7. Зарипов А.К. О динамических коэффициентах вязкости и релаксационных процессах в магнитных жидкостях / А.К. Зарипов // Коллоидный журнал. – 2021, – Т. 83. – № 4. – С. 412–422.
8. Соколов В.В., Толмачев В.В. Распространение сдвиговых волн в магнитной жидкости с вмороженной намагниченности / В.В. Соколов, В.В. Толмачев // Письма в ЖТФ. – 1996. – Т. 22. – Вып. 24. – С. 88–91.
9. Motozawa M., Matsumoto Y., Sawada T. Effect of External Magnetic Field on Ultrasonic Propagation Velocity in Magnetic Fluids / M. Motozawa, Y. Matsumoto, T. Sawada // JSME Int. J. – 2005. – V. 48. – № 3. – P. 471–477.

УДК 537. 32

Кривцова Вероника Сергеевна
студент,
Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева

Марков Олег Иванович
доктор физико-математических наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА НАНОСТРУКТУРИРОВАННОГО ТЕЛЛУРИДА ВИСМУТА, ЛЕГИРОВАННОГО РЗЭ

Аннотация. *На основе экспериментальных данных, полученных китайскими учеными, проведен качественный анализ и численное моделирование характеристик носителей тока теллуридов висмута, легированных РЗЭ. На базе известной зонной структуры теллуридов висмута рассчитаны концентрации носителей заряда и подвижности электронов.*

Ключевые слова: *теллурид висмута, редкоземельные элементы, удельное сопротивление, дифференциальная термоэдс.*

Krivtsova Veronika Sergeevna
student,
Oryol State University named after I.S. Turgenev

Markov Oleg Ivanovich
doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Oryol State University named after I.S. Turgenev

CALCULATION OF CHARACTERISTICS OF CHARGE CARRIERS OF NANOSTRUCTURED BISMUTH TELLURIDE DOPED WITH R3E

Abstract. *Based on the experimental data obtained by Chinese scientists, a qualitative analysis and numerical simulation of the characteristics of the carriers of bismuth tellurides doped with R3E has been carried out. On the basis of the known band structure of bismuth tellurides, the concentration of charge carriers and the mobility of electrons are calculated.*

Keywords: *bismuth telluride, rare earth elements, resistivity, differential thermoelectric power.*

1. Введение

В свете разразившегося в мире энергетического кризиса проблема альтернативной энергетики становится особенно актуальной. Кроме солнечной и ветровой энергетик, подверженных суточным и погодным изменениям, необходимы виды энергетики, лишенные этих недостатков и не представляющие угрозу человеку и окружающей среде. В последние годы человечество стало осознавать необходимость утилизации энергии любых источников тепла: природных и сбросовых промышленных. Здесь особенно важны прямые методы преобразования тепловой энергии в электрическую и в первую очередь это термоэлектрический. Термоэлектрические материалы, которые могут генерировать электроэнергию из отработанного тепла, возможно, сыграют важную роль в глобальном решении проблемы устойчивой энергетики. Во многих странах ведутся фундаментальные исследования в области поиска термоэлектрических материалов с высокой эффективностью. Такие термоэлектрики должны обладать высокими значениями дифференциальной термоэдс и удельной электропроводности при возможно более низкой удельной теплопроводностью. Первые два эффекта обязаны характеристикам носителей заряда, последний обусловлен длиной пробега фононов.

Одними из лучших термоэлектрических материалов при комнатной температуре являются соединения теллурида висмута Bi_2Te_3, открытые и всесторонне исследованные еще в СССР [1]. С развитием нанотехнологий возникли надежды на значительное увеличение эффективности этих материалов. Авторы работы [2] сообщили о синтезе нанопорошков на основе теллурида висмута, легированных редкоземельными элементами Ce, Y и Sm с использованием гидротермального метода и исследовании термоэлектрических свойств объемных образцов, изготовленных из этих нанопорошков. Авторами предполагалось, что атомы редкоземельных элементов ведут себя как доноры в структуре Bi_2Te_3 , в результате произойдет рост электропроводности, что поспособствует увеличению термоэлектрической эффективности.

Рисунок 1, взятый из работы [2], показывает зависимость электрического сопротивления указанных на рисунке образцов, измеренного авторами [2] от комнатной температуры до 523 К.

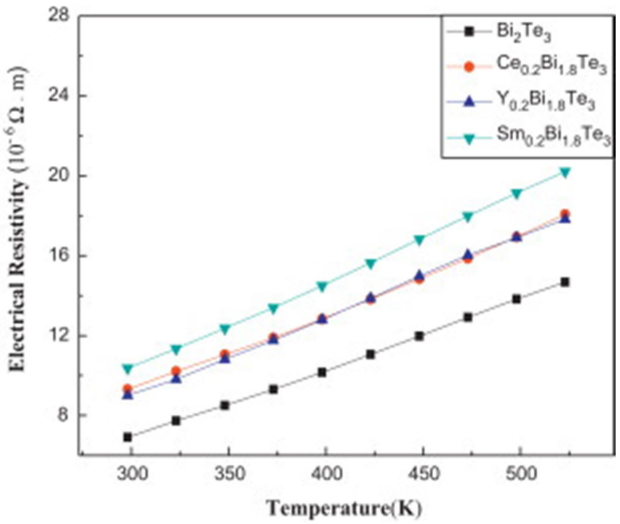


Рисунок 1 – Удельное сопротивление образцов (взято из [2])

Для всех образцов с повышением температуры электрическое сопротивление увеличивается, что указывает на вырожденное поведение полупроводника. Электрическое сопротивление Bi_2Te_3 наименьшее. Авторы [2] ожидали, что легирование редкоземельными элементами может увеличить концентрацию электронов и, следовательно, снизить удельное электрическое сопротивление. Однако оказалось, что электрическое сопротивление легированных выше, чем у нелегированного Bi_2Te_3. Как справедливо отмечают авторы, причиной этого может быть снижение подвижности носителя заряда.

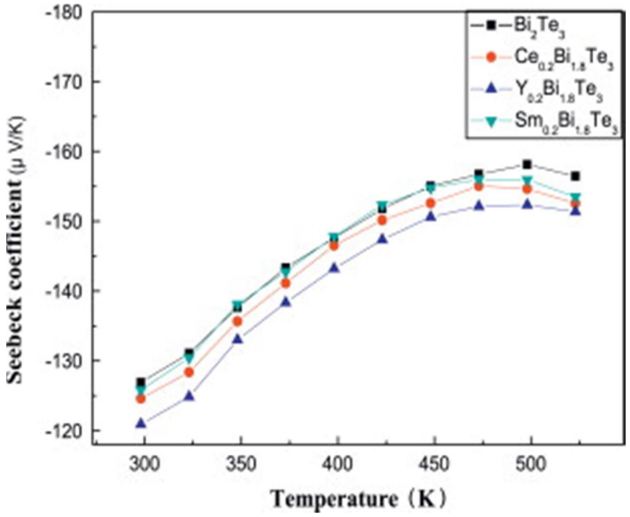


Рисунок 2 – Дифференциальная термоэдс образцов (взято из [2])

Рисунок 2 показывает температурные зависимости дифференциальной термоэдс. Все образцы n-типа, поскольку они имеют отрицательные коэффициенты Зеебека и вырождены. Авторы предполагают, что замена части атомов Bi на Ce, Y и Sm в Bi_2Te_3 должна быть донорной легирующей добавкой и возбуждение носителей заряда всех легированных образцов происходит при температуре около 480 К,

что означает, что они имеют одинаковые запрещенные зоны, а их температуры возбуждения носителей ниже, чем у бинарного Bi_2Te_3 (около 500 К). Коэффициенты Зеебека всех образцов уменьшаются с увеличением температуры, когда температура превышает 480 К и все немного ниже, чем в образце Bi_2Te_3.

С предположением авторов о сильном вырождении носителей заряда трудно согласиться, поскольку модуль дифференциальной термоэдс всех соединений достаточно велик (более 100 мкВ/К). Тем не менее, прямолинейный температурный рост модуля дифференциальной термоэдс указывает на наличие промежуточного вырождения, весьма характерного для низкотемпературных термоэлектриков. Наличие максимума на кривой температурной зависимости дифференциальной термоэдс говорит о появлении вклада собственных носителей заряда. Поэтому для анализа результатов эксперимента нужно учитывать оба типа носителей заряда, т.е. анализировать кривые на рис.2 с использованием формулы [3]

$$\alpha = \frac{\alpha^{-}\sigma^{-} + \alpha^{+}\sigma^{+}}{\sigma^{-} + \sigma^{+}} \tag{1}$$

Для расчета парциальных составляющих необходимо использовать формулы для квантовой статистики [3]: где α^{-}, α^{+}- парциальные термоэдс электронов,

$$\alpha^{-} = -\frac{k}{e}\left(\frac{F_2(\eta)}{F_1(\eta)} - \eta\right) \tag{2}$$

и дырок

$$\alpha^{+} = \frac{k}{e}\left(\frac{F_2(\eta_p)}{F_1(\eta_p)} - \eta_p\right), \tag{3}$$

а σ^{-}, σ^{+}-удельные электропроводности электронов

$$o^{-} = e\,n u^{-} \tag{4}$$

и дырок.

$$o^{+} = e\,p u^{+} \tag{5}$$

Концентрация носителей зарядов с промежуточным вырождением должна определяться по формулам [3]: для электронов

$$n = \frac{\left(2m_n^{*}kT\right)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} F_{3/2}(\eta) \tag{6}$$

и для дырок

$$p = \frac{\left(2m_p^* kT\right)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} F_{3/2}(\eta_p) \qquad (7)$$

Здесь используются общепринятые обозначения для интегралов Ферми $F_r(\eta)$ [3].

Такие вычисления нами были проведены. Для расчета привлекались надежные данные по зонной структуре теллуридов висмута [1]: ширина запрещенной зоны 0.13 эВ, эффективные массы плотности состояний $m_n^* = 0.45 \cdot m_0$, дырок $m_p^* = 0.69 \cdot m_0$ и температурные зависимости подвижностей электронов $u_n \sim T^{-1.7}$ и дырок $u_p \sim T^{-2}$. Результаты расчета концентраций электронов и дырок представлены на рисунках 3 и 4.

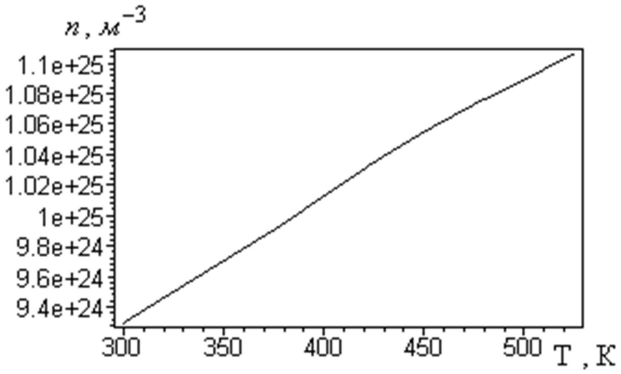


Рисунок 3 – Температурная зависимость концентрации электронов в теллуриде висмута

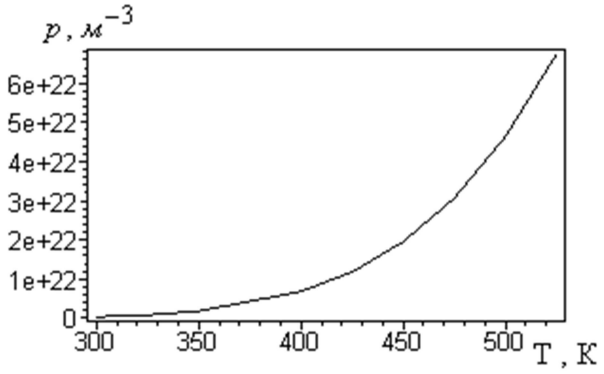


Рисунок 4 – Температурная зависимость концентрации электронов в теллуриде висмута

Как видно из рисунка 4, действительно имеет место рост концентраций дырок, не учитывать которые нельзя.

Подобие кривых термоэдс разных соединений на рисунке 2 с учетом того, что в основе соединений находится теллурид висмута, говорит о многом. Во-первых, можно утверждать, что ширина запрещенных зон во всех соединениях одинакова. Во-вторых, температурная зависимость концентрации носителей заряда и их подвижности также одинакова. Предполагая, что концентрации электронов и дырок такие же, как в теллуриде висмута можно использовать надежные данные по подвижностям носителей заряда [1]. Коэффициенты пропорциональности в зависимостях $u_n \sim T^{-1.7}$ и $u_p \sim T^{-2}$ легко подбираются в соответствии с данными на рисунках 1 и 2. Результаты расчета подвижностей электронов в рассмотренных соединениях представлены на рисунке 5. Наибольшей подвижностью носителей заряда обладают чистые теллуриды висмута. Добавки церия снижают подвижность до 20%, иттрий до 22%, а самарий до 35%. Небольшой сдвиг максимума модуля термоэдс по температуре для разных соединений

указывает лишь на разное отношение подвижностей электронов и дырок для разных соединений в соответствии с формулой (1), а не на что-то иное.

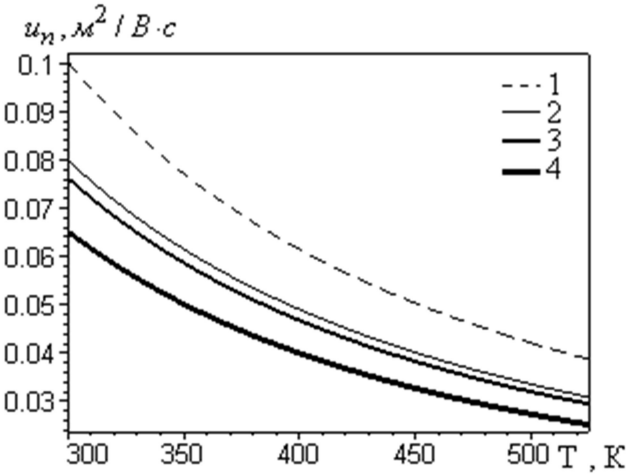


Рисунок 5 – Температурная зависимость подвижности электронов в соединениях 1- Bi_2Te_3, 2-$Ce_{0.2}Bi_{1.8}Te_3$, 3- $Y_{0.2}Bi_{1.8}Te_3$, 4- $Sm_{0.2}Bi_{1.8}Te_3$

К сожалению, расчет подвижности дырок из-за их малой величины вызывает определенные трудности, поскольку точность таких расчетов находится за пределами погрешности эксперимента и приводит к большому разбросу значений и выходит за пределы достоверности.

В заключение, на основе полученных данных по подвижности носителей заряда в легированных соединениях теллурида висмута можно сказать, что снижение подвижности основных носителей заряда, причем столь значительное, как в рассматриваемых материалах, почти всегда говорит об уменьшении термоэлектрической эффективности материала [1].

Список литературы

1. Гольцман Б.М., Кудинов В.А., Смирнов. И.А. Полупроводниковые термоэлектрические материалы на основе Bi_2Te_3.- М.: Наука. - 1972. - 320 с.
2. Wu F., Song H., Jia J., Hu X. Effect of Ce, Y and Sm on the thermoelectric properties of Bi_2Te_3alloy . Prog. Nat. Sci. Mater. Int. – 2013. – Vol.23. – N.4. – P. 408-412.
3. Аскеров Б.М. Кинетические эффекты в полупроводниках. – Л.: Наука. - 1970. - 303 с.

УДК 539.1.06

Матюхин Сергей Иванович
доктор ф.-м.н., доц.
зав. кафедрой технической физики ОГУ им. И.С. Тургенева
Россия, Орел

Гришина Светлана Юрьевна
к.ф.-м.н., доц.
доц. кафедры ИТиМ Орловский ГАУ им. Н.В. Парахина
Россия, Орел

СТОХАСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ СИЛ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ КАНАЛИРОВАННЫХ ИОНОВ С ЭЛЕКТРОНАМИ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

Аннотаци. *Представлены результаты исследований стохастических свойств случайных сил, обусловленных взаимодействием каналированных ионов с атомными электронами углеродных нанотрубок. Эти результаты могут быть использованы для уточнения и развития стохастической теории каналирования в углеродных нанотрубках, а также при разработке новых методов исследования и модификации свойств кристаллических и некристаллических твердых тел, включая углеродные наноструктуры.*

Ключевые слова: *углеродные нанотрубки, ускоренные ионы, интеркаляция, каналирование, атомные электроны, случайные силы.*

STOCHASTIC PROPERTIES OF RANDOM FORCES DUE TO INTERACTION OF CHANNELLING IONS WITH ELECTRONS OF CARBON NANOTUBES

Matyukhin Sergey
Department of Technical Physics
Orel State University n. af. I.S. Turgenev
Orel, Russia

Grishina Svetlana
Department of Engineering Graphics and Mechanics
Orel State agricultural university n.af. N.V. Parakhin
Orel, Russia

Abstract: *The results of studies of the stochastic properties of random forces caused by the interaction of channeled ions with atomic electrons of carbon nanotubes are presents. These results can be used to refine and develop the stochastic theory of channeling in carbon nanotubes, as well as to develop new methods for studying and modifying the properties of crystalline and non-crystalline solids, including carbon nanostructures.*

Keywords: *carbon nanotubes, accelerated ions, intercalation, channeling, atomic electrons, random forces*

На сегодняшний день к области современных нанотехнологий относят перспективное направление, тесно связанное с эффектом каналирования в углеродных нанотрубках. Под каналированием понимают явление локализации в полости нанотрубки ионов, внедряемых под малыми углами к ее оси [1]. Каналирование в углеродных нанотрубках может стать основой для создания новых методов исследования свойств и структуры материалов [2, 3], может использоваться для получения и управления пучками нанометровых сечений [2-9] и при разработке новых источников монохроматического излучения [10]. Ионные пучки в сочетании с эффектом каналирования могут служить для анализа и модификации структуры и свойств как традиционных (кристаллические твердые тела), так и нетрадиционных материалов (фуллериты, жгуты нанотрубок и т.д.) в весьма ограниченной области пространства (порядка нескольких десятков нанометров), а также для целенаправленного введения лекарственных средств и лучевой терапии на клеточном уровне в медицине; для манипулирования ионными потоками в плазменных технологиях; для перемещения молекул в биологических исследованиях и т.д. Для описания эффекта каналирования в углеродных нанотрубках сегодня применяется стохастический подход к этому явлению [11].

В рамках этого подхода проблема деканалирования рассматривается как частный случай проблемы о среднем времени жизни произвольной динамической системы, подверженной случайным воздействиям [12], а кинетические уравнения, описывающие каналирование и деканалирование, строятся из первых принципов, исходя из анализа статистических свойств случайных сил, действующих на каналированные ионы. На положительные частицы, каналированные внутри углеродных нанотрубок, действуют случайные силы, обусловленные тепловыми колебаниями углеродных атомов, дискретностью стенок нанотрубок, а также рассеянием ионов на атомных электронах. Дей-

ствие этих сил приводит к перераспределению потока частиц внутри нанотрубок и в конечном итоге – к их деканалированию.

Особенности случайных сил обусловленных тепловыми колебаниями углеродных атомов и дискретностью стенок нанотрубок были рассмотрены в предыдущих работах [13-15]. В настоящей статье представлены результаты исследования стохастических свойств сил, обусловленных взаимодействием каналированных ионов с атомными электронами.

Известно [16], что существует два механизма взаимодействия быстрых частиц с электронами конденсированных тел: коллективное взаимодействие и парные некоррелированные столкновения с отдельными электронами. В результате действия обоих механизмов возникают детерминированная сила электронного торможения каналированной частицы и случайные силы, свойства которых и изучаются в настоящей работе.

Коллективное воздействие электронов нанотрубки на движущейся каналированный ион определяется электрическим полем поляризации $\vec{E}_p(\vec{r},t)$ и случайным электрическим полем $\vec{E}_f(\vec{r},t)$, связанным с флуктуациями электронной плотности n_e. В соответствие с флуктуационно-диссипационной теоремой поле поляризации и пространственно-временная спектральная плотность случайного поля полностью задается тензором диэлектрической проницаемости электронного газа [16]:

$$E_i^p(\vec{r}_0(t),t) = \frac{Z_1 e}{2\pi^2}\int d\vec{k}\,\frac{k_i}{k^2}\,\mathrm{Im}\,\varepsilon_L^{-1}, \qquad (1)$$

$$< \vec{E}_i^f \vec{E}_i^{*f} >_{\vec{k},\omega} = \frac{32\pi^2 e^2 n_e}{k^2}\int d\vec{\upsilon}\,\frac{k_i k_j}{k^2}\,\frac{\delta(\omega-\vec{k}\vec{\upsilon})}{\left|\varepsilon_L\right|^2}\cdot\Phi_e(\vec{\upsilon}). \qquad (2)$$

где $< \vec{E}_i^f \vec{E}_i^{*f} >_{\vec{k},\omega}$ - пространственно-временная спектральная плотность случайного поля, $\varepsilon_L(\vec{k},\omega) = \varepsilon_L(\vec{k},\vec{k}\vec{\upsilon}(t)) \equiv \varepsilon_L$ – Фурье-образ продольной диэлектрической проницаемости, $\Phi_e(\vec{\upsilon})$ - функция распределения электронов по скоростям, $\vec{r}_0(t)$ – невозмущенная траектория частицы, $(i,j) \equiv (x,y,z)$.

При этом предполагается, что время макроскопических изменений траектории частицы много больше периода флуктуаций поля, а скорость частицы много меньше скорости света.

Спектральная плотность $G_{i,j}(\omega)$ и корреляционная функция $S_{i,j}(\Delta t)$ случайной силы $\vec{f}^{\,c} = Z_1 e\vec{E}_f$ определяются выражениями [18]:

$$G_{i,j}(\omega)= Z_1^2 e^2 (2\pi)^{-3} \int d\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\upsilon < \vec{E}_{fi} \vec{E}^*_{fj} >_{\vec{k},\omega} \delta(\omega + \vec{k}\vec{\upsilon} - \upsilon)\,, \qquad (3)$$

$$S_{i,j}(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{ij}(\omega) \exp(i\omega\Delta t\} d\omega\,. \qquad (4)$$

Так как G_{ij} зависит от частоты ω, то существует конечное ненулевое время корреляций, а значит, движение частиц под действием рассматриваемой случайной силы в общем случае не является марковским процессом. Однако для быстрых частиц $\vec{k}\vec{\upsilon} >> \omega$ процесс можно считать марковским, при этом

$$S_{ij}(\Delta t) = \kappa^c_{ij}(\vec{\upsilon})\delta(\Delta t)\,,$$

$$\kappa^c_{ij}(\vec{\upsilon}) = \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta t) S_{ij}(\Delta t) \equiv G_{ij}(\omega = 0) = Z_1^2 e^2 (2\pi)^{-3} \int d\vec{k} < \vec{E}_i^f \vec{E}_i^{*f} >_{\vec{k},\vec{k}\vec{\upsilon}} \qquad (5)$$

Формулы (2) - (5) полностью описывают статистические свойства случайных сил, обусловленных коллективным взаимодействием каналированных ионов с электронами нанотрубки.

Вследствии металлической проводимости нанотрубок, их валентные электроны можно рассматривать как вырожденный Ферми-газ с высокой плотностью n_e и нулевой температурой:

$$\Phi_e(\upsilon) = \frac{3n_e}{4\pi\upsilon_F^3}\theta(\upsilon - \upsilon_F), \qquad (6)$$

$$\varepsilon_L = 1 + \frac{3\omega_p}{k^2\upsilon_F^2}\left(1 + \frac{\omega}{2k\upsilon_F}\ln\left|\frac{1-\frac{\omega}{k\upsilon_F}}{1+\frac{\omega}{k\upsilon_F}}\right|\right) + i\frac{3\pi}{2}\frac{\omega_p}{k^2\upsilon_F^2}\frac{\omega}{k\upsilon_F}\theta\left(1 - \left|\frac{\omega}{k\upsilon_F}\right|\right). \qquad (7)$$

А спектральная плотность случайного электрического поля имеет вид:

$$< \vec{E}_i^f \vec{E}_i^{*f} >_{\vec{k},\omega} = \frac{24\pi^3 e^2 n_e}{k^3 |\varepsilon_L|^2 \upsilon_F}\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2\upsilon_F^2}\right)\theta\left(1 - \left|\frac{\omega}{k\upsilon_F}\right|\right)\frac{k_i k_j}{k^2}\,. \qquad (8)$$

Это выражение показывает, что флуктуационный спектр не содержит волн с фазовой скоростью $|\omega/k| > \upsilon_F$. В этой связи корреляционные соотношения для случайной силы $\vec{f}^c(t)$, обусловленной коллективным взаимодействием быстрой ($\upsilon > \upsilon_F$) частицы с электронами нанотрубки описываются выражением (5), а коррелятор поперечной по отношению к скорости частицы составляющей $f^c_\perp(t)$ этой силы имеет следующий вид:

$$< f_{\perp}^{c}(t) f_{\perp}^{c}(t') >=< f_{x}^{c}(t) f_{x}^{c}(t') > + < f_{y}^{c}(t) f_{y}^{c}(t') >= \kappa^{c} \delta(t - t'),$$

$$\kappa^{c} = 2\kappa_{x}^{c} = 2\kappa_{y}^{c} = \frac{8\pi Z_1^2 e^4 n_e}{\upsilon} L_e^c, \tag{9}$$

где

$$L_e^c = \ln \frac{2m\upsilon\upsilon_F}{\hbar\omega_p}. \tag{10}$$

При этом ясно, что среднее значение этой силы равно нулю:

$$< \vec{f}^{\,c}(t) >= 0. \tag{11}$$

Из соотношений (7), (8) следует, что процесс движения частицы под действием этой силы является марковским.

Парные некоррелированные столкновения частиц с отдельными электронами нанотрубки представляют собой пуассоновский случайный процесс с высокой частотой, и коррелятор поперечной по отношению к направлению скорости иона составляющей $f_{\perp}^{u}$ силы, обусловленной этими столкновениями можно представить в виде:

$$< f_{\perp}^{u}(t) f_{\perp}^{u}(t') >= \kappa^{u} \delta(t - t'), \tag{12}$$

$$\kappa^{u} = M_1^2 \upsilon^3 \frac{< \Delta\theta^2 >}{\Delta z}, \tag{13}$$

где $\frac{< \Delta\theta^2 >}{\Delta z}$ - средний (по прицельным параметрам) угол рассеяния частицы на единице длины ее пробега:

$$< \Delta\theta^2 >= \int dn_e(b) \cdot \Delta\theta^2(b), \tag{14}$$

$\Delta\theta^2(b)$ - квадрат угла рассеяния частицы при парных столкновениях с фиксированным прицельным параметром b, $dn_e(b)$ – число электронов с прицельными параметрами от b до $b+db$ в слое вещества толщиной dz:

$$dn_e = n_e \cdot 2\pi b \cdot db \cdot dz. \tag{15}$$

В случае кулоновского взаимодействия иона с электронами

$$\Delta\theta^2(b) = \frac{4Z_1 e^4}{M_1^2 \upsilon^4 b^2}. \tag{16}$$

В результате получаем:

$$\kappa^{u} = 2\kappa_{x}^{u} = 2\kappa_{y}^{u} = \frac{8\pi Z_1^2 e^4 n_e}{\upsilon} L_e^u, \tag{17}$$

$$L_e^u = \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}, \tag{18}$$

где мы можем взять величину $b_{max}=k_F^{-1}$ в качестве максимального значения прицельных параметров, а минимальное их значение

определяется условием ограниченности максимальной энергии, передаваемой при столкновениях: $b_{min}^{кл}=Z_1e^2/m\upsilon^2\gamma$, где γ - релятивистский фактор частицы,

$$\gamma^{-1}=\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}\,, \tag{19}$$

или принципом неопределенности: $b_{min}^{кв}=h/m\upsilon\gamma$.

Воспользовавшись первым из этих выражений, получаем:

$$L_e^u \approx \ln\frac{m\upsilon^2\upsilon_F\gamma}{Z_1e^2\omega_p}\,. \tag{20}$$

Отметим, что при $\upsilon >> \upsilon_F$ логарифмы L_e^c и L_e^u приблизительно равны, при этом $\kappa^u \approx \kappa^c$, что находится в соответствии с теоремой о равном влиянии близких и далеких столкновений с электронами на движение быстрой заряженной частицы в электронном газе твердого тела.

Так как среднее значение силы $\vec{f}^{\,u}$ равно нулю:

$$<\vec{f}^{\,u}(\mathrm{t})> = 0, \tag{22}$$

и в силу корреляционного соотношения (12), движение каналированной частицы, испытывающей парные столкновения с электронами нанотрубки, представляет собой марковский случайный процесс.

Корреляционные соотношения для поперечной компоненты $f_\perp^e$ суммарной случайной силы $\vec{f}^{\,e}=\vec{f}^{\,c}+\vec{f}^{\,u}$, обусловленной обоими механизмами взаимодействия каналированной частицы с электронами нанотрубки, при скоростях частицы $\upsilon > \upsilon_F$ могут быть описаны выражением:

$$<f_\perp^e(t)\ f_\perp^e(t')> = \kappa^e\cdot\delta(t\text{-}t') = (\kappa^c+\kappa^u)\ \delta(t\text{-}t'),$$

$$\kappa^e = 2\kappa_x^e = 2\kappa_y^e = \frac{8\pi Z_1^2e^4n_e}{\upsilon}\left(L_e^c+L_e^u\right)\approx\frac{16\pi Z_1^2e^4n_e}{\upsilon}L_e, \tag{23}$$

где в качестве L_e можно брать любой из логарифмов (10), (20).

Интересно отметить, что квадрат мощности коррелятора (23) может быть выражен через величину $(dE/dz)_e$ электронных потерь энергии E ионов в нанотрубке, даваемую формулой Бете - Блоха или Линдхарда:

$$\kappa^e = 4m\upsilon(dE/dz)_e\,. \tag{24}$$

Формула (24) является выражением закона сохранения энергии. Средняя работа, совершаемая случайной силой $\vec{f}^{\,e}(t)$ на пути dz, ока-

зывается пропорциональной общим потерям энергии иона на этом пути. В диффузионном приближении, при рассмотрении промежутков времени больших времени корреляционной силы $\bar{f}^e(t)$, формула (24) является обобщением (23) в случае каналирования медленных частиц.

Следует отметить, что в нанотрубках электронное рассеяние является основным деканалирующим фактором для ионов. При этом полученные результаты справедливы для описания электронного деканалирования в углеродных нанотрубках с металлической проводимостью. Дальнейшее развитие построенной теории может быть связано с рассмотрением механизмов деканалирования на электронах в углеродных нанотрубках с полупроводниковой проводимостью.

Список литературы

1. Matyukhin S.I., Grishina S.Yu. Dynamics of the Oriented Interaction of Accelerated Particles with Nonchiral Carbon Nanotubes. // Technical Physics Letters, 2004.- Vol.30.- No 10.- pp.877-879
2. Матюхин С.И., Гришина С.Ю. Кинетика ориентированного взаимодействия ускоренных частиц с углеродными armchair- и zigzag-нанотрубками// Письма в ЖТФ , 2006. -Т.32. -Вып.1.- С.27-34.
3. Matyukhin S.I., Grishina S.Yu. Cinetics of the Oriented Interaction of Accelerated Particles with Nonchiral Carbon Nanotubes.// Technical Physics Letters, 2005.- Vol.31, No 4, 2005, pp.319-321
4. Biryukov V.M., Bellucci S. // Phys. Lett. B., 2002.- V. 542.- P. 111.
5. Bellucci S., Biryukov V.M. // CERN Courier,2004. -V. 5.- P. 19.
6. Матюхин С.И., Гришина С.Ю. Использование нанотрубок для получения и управления пучками нанометровых сечений //Международный форум по нанотехнологиям «Rusnanotech 08»: сб. тез. док. научно- технологических секций. -Москва, 2008. -Т.1. - С.721-723
7. Гришина С.Ю. Кинетика положительных ионов в углеродных нанотрубках//Биосовместимые наноструктурные материалы и покрытия медицинского назначения: Сборник научных трудов Российской школы-конференции молодых ученых и преподавателей.- Белгород, 2006. -С. 356-361.
8. Матюхин С.И., Гришина С.Ю. Исследования ионной имплантации в углеродных нанотрубках для применения в животноводстве// Вестник Орел ГАУ. Орел: Изд-во ОрелГАУ, 2011.-№1.-Стр. 70-73

9. Матюхин С.И. Деканалирование ионов низких энергий в углеродных нанотрубках Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: естественные, технические и медицинские науки. Орел: Изд-во ОГУ, 2012.-№3(41).- Стр.63-71
10. Жеваго Н.Л., Глебов В.И. //ЖТЭФ.,2000.-Т.118.-Вып.3.-С.579
11. Матюхин С.И. Кинетика каналирования ионов в углеродных нанотрубках, - Орел: ОрелГТУ, 2008.- 200 с.
12. Kitagava M., Jhtsuki Y.H.//Phys.Rev.,1973.-B.8.-P.3117
13. Матюхин С.И., Гришина С.Ю. Особенности тепловых колебаний атомов ARMCHAIR- и ZIGZAG- нанотрубок//Физика и современные технологии в АПК: Мат-лы XI Всероссийской молод. научно-практической конференции ФГБОУ ВО «Орловский ГАУ им. Н.В. Парахина».- Орѐл, 2020. -С. 24-27.
14. Гришина С.Ю. Особенности случайных сил дискретности углеродных хиральных нанотрубок //Профессия инженер: сборник материалов Молодежной научно-практической конференции. – Орел: Изд-во ФГБОУ ВО Орловский ГАУ, [электронный ресурс], 2019. – Стр.244-245
15. Матюхин С.И., Гришина С.Ю. Стохастические свойства сил, связанных с тепловыми колебаниями атомов углеродных хиральных нанотрубок //Научный альманах-Тамбов, 2019 .-· N 5-2(55) –Стр. 118-121
16. Бор Н. Прохождение атомных частиц через вещество. - М.: Изд. ин. лит., 1950.-150 с.
17. Ichimaru S.,Theory of fluctuations in plasma//Ann.Phys., 1962.- V.20.- P.78-118
18. Матюхин С.И. Стохастическая теория каналирования быстрых частиц в монокристаллах//дис. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н, 1996

УДК 537.855

Нифтиев Намиг Надирович
доктор физико-математических наук, доцент,
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет,
Азербайджан, Баку

ЗАВИСИМОСТЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МОНОКРИСТАЛЛОВ $MnIn_2Se_4$ ОТ ЧАСТОТЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОКИ И ТЕМПЕРАТУРЫ

Аннотация. *Приводятся результаты исследования действительной и мнимой части диэлектрическая проницаемость монокристаллов $MnIn_2Se_4$ при различных частотах и температурах. Установлено, что действительной и мнимой части диэлектрической проницаемости претерпевала значительную дисперсию, носящую релаксационный характер. Для этой монокристаллов рассчитано энергии активации и найдено значение $\Delta E=0,18\div0,23$эВ. В монокристаллах $MnIn_2Se_4$ проводимость характеризуется зонно-прыжковым механизмом.*

Ключевые слова: *$MnIn_2Se_4$, частота, диэлектрическая проницаемость, релаксационная дисперсия, зонно-прыжковый механизм, энергия активации.*

Niftiyev Namiq
Doctor of physical and mathematical sciences, associate professor,
Azerbaijan State Pedagogical University,
Azerbaijan, Baku

DEPENDENCE OF THE DIELECTRIC PERMISSIBILITY OF $MnIn_2Se_4$ SINGLE CRYSTALS ON FREQUENCY AC CURRENT AND TEMPERATURE

Abstract. *The results of a study of the real and imaginary parts of the dielectric constant of $MnIn_2Se_4$ single crystals at various frequencies and temperatures are presented. It was found that the real and imaginary parts of the permittivity underwent significant dispersion, which was of a relaxation nature. For this single crystal, the activation energies were*

calculated and the value ΔE = 0,18÷0,23eV was found. In $MnIn_2Se_4$ single crystals, the conductivity is characterized by a band-hopping mechanism.

Keywords: *$MnIn_2Se_4$, frequency, dielectric constant, relaxation dispersion, zone-hopping mechanism, activation energy.*

1. Введение

Интенсивное развитие полупроводниковой электроники стимулирует подробное изучение новых свойства уже известных веществ, а также поиск и исследование новых полупроводниковых материалов, отвечающих современным требованиям. В связи с этим особый интерес представляют соединения AB_2X_4 (где A-Mn, Fe, Co, Ni; B-Ga, In; X-S, Se, Te). В настоящей работе приводятся результаты исследований частотных и температурных зависимостей действительной и мнимой части диэлектрической проницаемости в монокристаллах $MnIn_2Se_4$, относящихся к этому классу соединений, на переменном токе.

2. Методика эксперимента и обсуждение результатов

Монокристаллы $MnIn_2Se_4$ синтезированы методом Бриджмена. Рентгенографические исследования показали, что $MnIn_2Se_4$ кристаллизуется в гексагональной решетке с параметрами: a=4,18 Å, c=19,47 Å, c/a=4,65 [1]. Для измерения емкости конденсаторы изготовлены из монокристаллических пластин толщиной ~ 0,3 мм с использованием серебряной пасты. Емкость измерялась с помощью цифровых измерителей иммитанса Е7-20 (частоты $25 \div 10^6$ Гц).

На рис. 1 приведены зависимости действительной части диэлектрических проницаемостей (ε') от частоты для монокристаллов $MnIn_2Se_4$ при различных температурах. Установлено, что в температурном интервале 297÷ 383К на частотах $5 \cdot 10^3 \div 10^6$ Гц значение ε' изменяется в пределах 74÷1630. Видно, что частотная зависимость ε' претерпевала значительную дисперсию. При исследуемых температурах действительной части диэлектрическая проницаемость в области частот $5 \cdot 10^3 \div 10^4$ Гц сначала медленно уменьшается, далее в интервале частот $2 \cdot 10^4 \div 5 \cdot 10^5$ Гц она быстро уменьшается. Потом в области частот $5 \cdot 10^5 \div 10^6$ Гц при высоких температурах (353÷ 383К) ε' медленно уменьшается, при низких температурах (297÷ 333К) почти остаётся постоянной. Из рис. 1 видно, что с ростом температуры наблюдается возрастание ε'. Возрастание ε' связано с увеличением концентрации дефектов с ростом температуры.

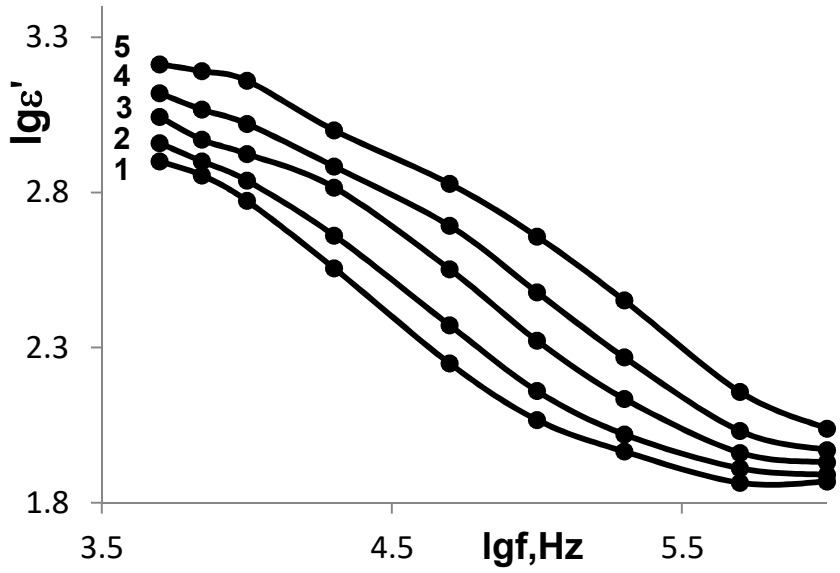


Рисунок 1 — Частотная зависимость действительной части диэлектрической проницаемости монокристаллов $MnIn_2Se_4$ при различных температурах Т, К: 1- 297, 2-313, 3-333, 4-353, 5-383

На рис. 2 приведены зависимости мнимой части диэлектрической проницаемости (ε") от частоты для монокристаллов $MnIn_2Se_4$ при различных температурах. Видно, что в частотном

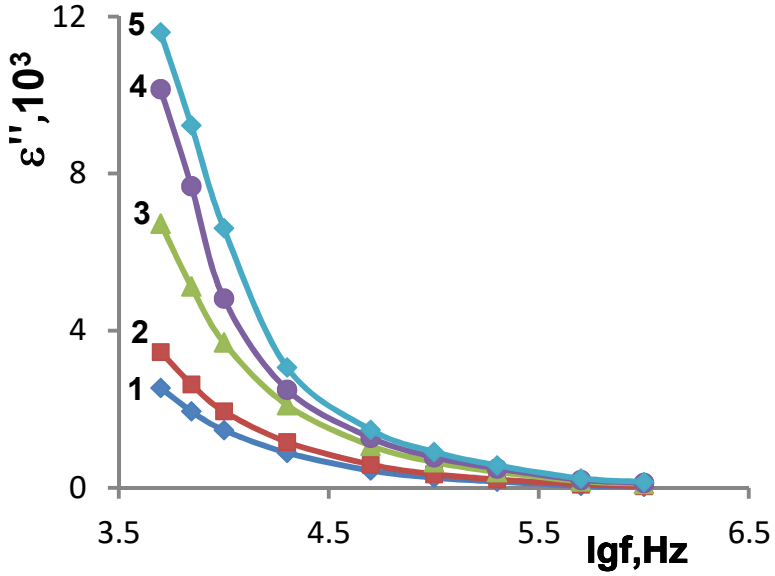


Рисунок 2 — Частотная зависимость мнимой части диэлектрической проницаемости монокристаллов $MnIn_2Se_4$ при различных температурах Т,К: 1- 297, 2-313, 3-333, 4-353, 5-383

интервале $5\cdot10^3 \div 10^6$ Гц с ростом частоты зависимости имеют монотонно спадающий характер и ε" при увеличении частоты претерпевала существенную дисперсию. С ростом частоты мнимой части диэлектрической проницаемости монотонно уменьшается. Это свидетельствует о релаксационной дисперсии в монокристалле $MnIn_2Se_4$ [2].

На рис. 3 приведены температурные зависимости мнимой части диэлектрической проницаемости монокристаллов $MnIn_2Se_4$ при различных частотах. Из рисунков видно, что при частотах $2 \cdot 10^4 \div 10^6$ Гц на зависимости lgε'' от $10^3/T$ выявляется один линейный участок с различными наклонами. По наклонам этих зависимостей определены энергии активации, значения которых изменяются в интервале 0,18÷0,23 эВ. Отсюда следует, что величина энергии активации является функцией частоты. Частотную зависимость энергии активации можно объяснить с помощью прыжкового механизма [3]. Известно, что в монокристаллах $MnIn_2Se_4$ температурная зависимость электропроводности имеет активационным характером [1]. Значить в $MnIn_2Se_4$ проводимость характеризуется зонно-прыжковыми механизмами.

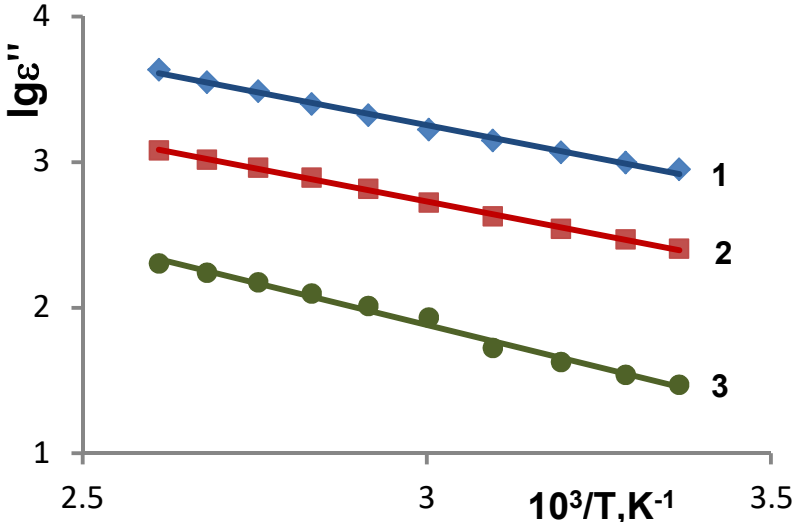


Рисунок 3 — Температурные зависимости мнимой части диэлектрической проницаемости монокристаллов $MnIn_2Se_4$ на разных частотах f, Гц: 1 - $2 \cdot 10^4$, 2 - 10^5, 3 - 10^6

Список литературы

1. Нифтиев, Н.Н. Электрические свойства $MnIn_2Se_4$ / Н.Н. Нифтиев, М.А. Алиджанов, О.Б. Тагиев, М.Б. Мурадов, Ф.М. Мамедов // Физика и техника полупроводников. — 2004. — т. 38 — № 5. — С. 550-551.
2. Мустафаева, С.Н. Модифицирование диэлектрических свойств монокристалла $CdIn_2S_4$ при легировании медью / С.Н. Мустафаева, М.М. Асадов, Д.Т. Гусейнов // Физика твердого тела. — 2014. — т. 56 — № 2. — С. 279-281.
3. Мотт, Н. Электронные процессы в некристаллических веществах – том 1 / Н. Мотт, Э. Дэвис — М.: Мир, 1982. — 368 с.

УДК 538.913

Серебренников Дмитрий Александрович
кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник,
Балтийский Федеральный Университет им. И. Канта,
Россия, Калининград

Клементьев Евгений Станиславович
кандидат физико-математических наук,
заведующий лабораторией,
Балтийский Федеральный Университет им. И. Канта,
Россия, Калининград

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ДИНАМИКИ РЕШЕТКИ ИНТЕРМЕТАЛЛИДОВ С КАРКАСНО-КЛАСТЕРНОЙ СТРУКТУРОЙ[1]

Аннотация. *Феноменологический подход, позволивший ранее дать хорошее описание низкоэнергетической динамики решетки высших боридов, в каркасно-кластерной структуре которых можно выделить суператомы из 6 и 12 атомов бора, был применен к описанию динамики решетки соединения с кластерами-суператомами из 13 атомов бериллия. Была рассчитана плотность фононных состояний и определены значения атомных силовых констант для модели суператома с центрированными икосаэдрами* Be_{13}.

Ключевые слова: *динамика решетки, плотность фононных состояний, кластеры-суператомы.*

Serebrennikov Dmitry
PhD in physics and mathematics,
research scientist,
I. Kant Baltic Federal University,
Russia, Kaliningrad

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 19-02-00953 А).

Clementyev Evgeny
PhD in physics and mathematics,
laboratory head,
I. Kant Baltic Federal University,
Russia, Kaliningrad

PHENOMENOLOGICAL APPROACH TO THE DESCRIPTION OF LATTICE DYNAMICS IN INTERMETALLICS WITH FRAMEWORK-CLUSTER STRUCTURE[2]

Abstract. *The phenomenological approach, which previously was used to provide a god description of the low-energy lattice dynamics of the higher borides, based on the framework structure with 6 and 12 boron atoms, was applied to the description of the dynamics of compounds with clusters-superatoms with 13 beryllium atoms. The density of the phonon states was calculated and the values of the atomic force constants were determined within the super atom model based on body centered icosahedra* Be_{13}.

Keywords: *lattice dynamics, phonon density of states, clusters-superatoms.*

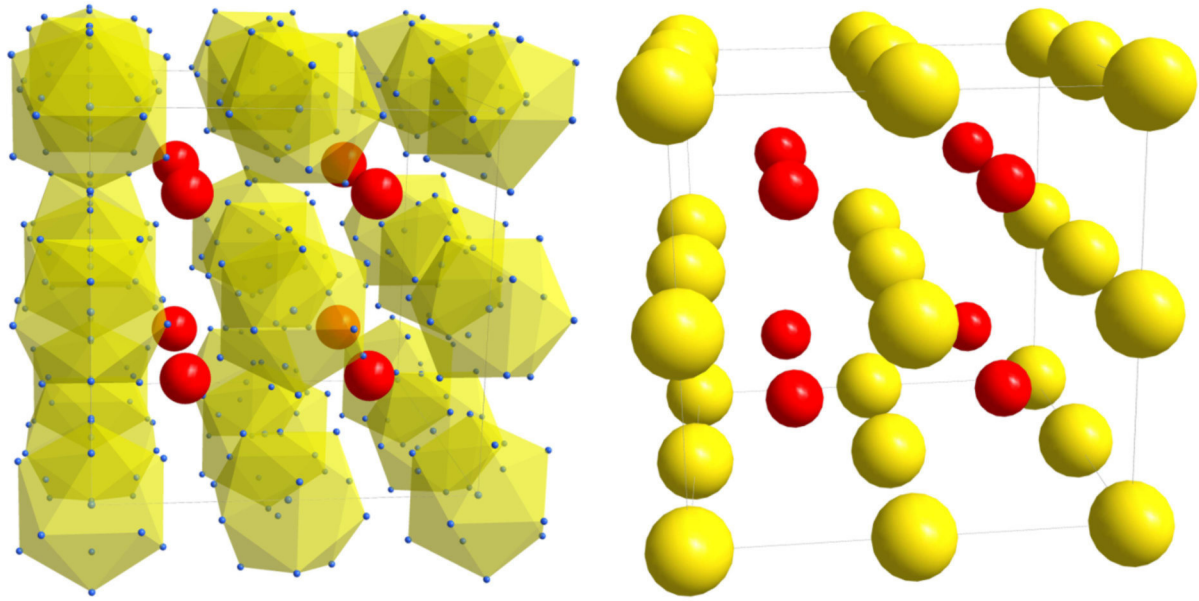
В некоторых интерметаллидах, особенно в системах с сильной иерархией масс и межатомных взаимодействий, можно выделять кластеры сильно связанных атомов, так называемых суператомов, которые можно рассматривать как структурные единицы при анализе динамики решетки. В частности, в высших боридах легкие атомы бора благодаря преимущественно ковалентной связи образуют каркас из октаэдров B_6 (случай гексаборидов) и кубо-октаэдров B_{12} (случай додекаборидов) с доминирующим вкладом в высокочастотную динамику решетки, в то время как атомы относительно тяжелого металла дают главный вклад в низкоэнергетические фононные моды [1,2]. Замена кластера легких атомов на один суператом позволяет снизить число структурных единиц в примитивной ячейке и существенно упрощает феноменологическое описание динамики решетки, поскольку число атомных силовых констант сильно уменьшается. Для гексаборидов структурный тип CaB_6 упрощается до CsCl, для додека-

[2] This work has been supported by the grants of the Russian Foundation for Basic Research, RFBR 19-02-00953 A.

боридов структурный тип сводится к NaCl, то есть число параметров модели становится намного меньшим при сравнении с полной феноменологической моделью для истинного структурного типа.

В высших боридах модель суператома позволила хорошо описать низкоэнергетические фононные моды и решеточные термодинамические свойства, в частности, фононный вклад в теплоемкость [1-2]. В настоящей работе была поставлена цель применить эту модель к системе с сильной иерархией масс атомов и разделением фононного спектра на низкочастотную и высокочастотную части – UBe_{13}, содержащей суператомы – центрированные икосаэдры Be_{13}.

Интерметаллическое соединение UBe_{13} имеет кубическую структуру с пространственной группой № 226 (Fm3c) и постоянной решетки a=10.268 Å. Атом U имеет только одно положение (0,25, 0,25, 0,25), в то время как атомы Be имеют два неэквивалентных положения: Be1 (0, 0, 0) и Be2 (0, 0.1151, 0.1765) [3]. В результате атомы Be образуют каркас икосаэдров, каждый из которых содержит 1 дополнительный атом бериллия в центре икосаэдра. При применении модельного подхода суператома кристаллическая структура сводится к боле простому структурному типу $MnCu_2Al$. Истинная и упрощенная структуры показаны на рисунке 1.



a) *b)*

Рисунок 1 – Кристаллические структуры для соединений UBe_{13} (a) и $MnCu_2Al$ (b), атомы U показаны на (a) красным цветом

Замена центрированных икосаэдров Be_{13} на суператомы изменяет структуру с UBe_{13}-типа на простейший CsCl-тип. В этом случае постоянная решетки уменьшается в два раза, а пространственная

группа сводится к № 221 (Pm3m). Однако следует отметить, что некоторые икосаэдры наклонены по отношению к другим. С точки зрения симметрии это означает, что их следует рассматривать как неэквивалентные суператомы. Тем самым структура характеризуется типом $MnCu_2Al$ с пространственной группой № 225 (Fm3m).

Феноменологическая модель суператома была создана на основе экспериментальных данных по плотности фононных состояний, опубликованной в работе [4]. Результаты расчетов показаны на рисунке 2.

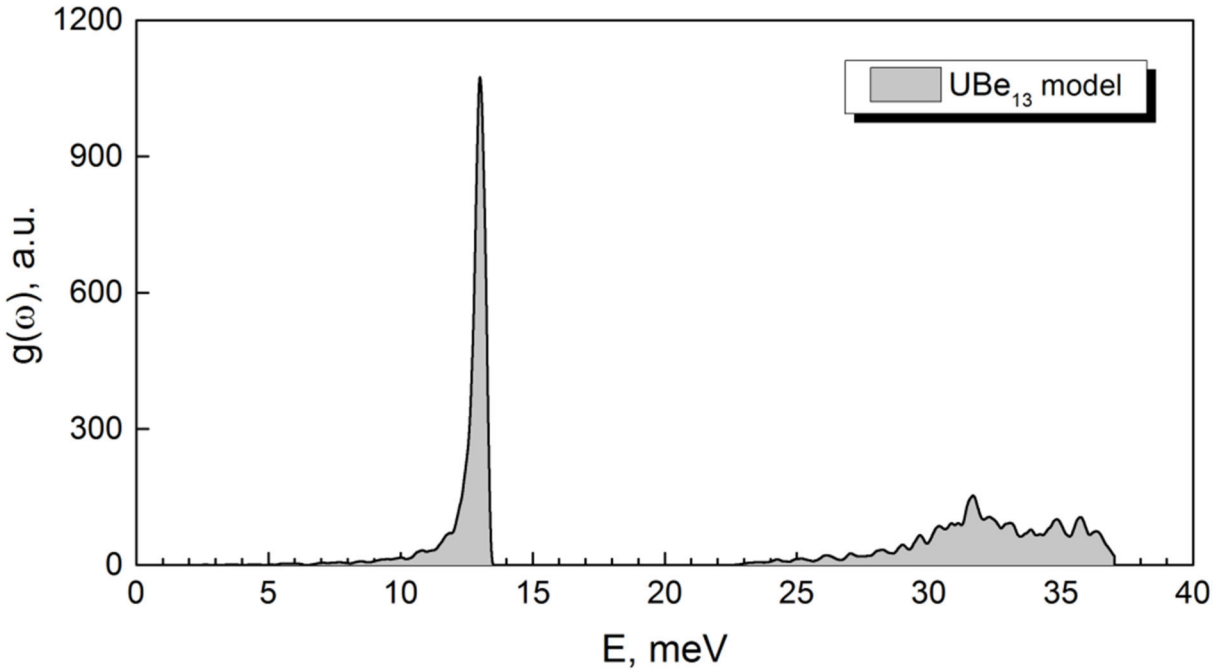


Рисунок 2 – Плотность фононных состояний для UBe_{13}, рассчитанная на основе модели суператома

Ниже 14 мэВ доминирует вклад тяжелых атомов, в то время как выше 22 мэВ вносят вклад суператомы Be_{13}. Что касается иерархии атомных силовых констант, то выяснилось, что для пар U-U, с одной стороны и пар U-суператом и суператом-суператом продольные и поперечные силовые константы отличаются на 2 порядка. Модель суператома не может описать самые высокочастотные колебания, соответствующие внутренним степеням свободы кластеров-суператомов, поскольку изначально пренебрегает ими.

Следует отметить, что полученное описание динамики решетки для системы UBe_{13} при помощи модели суператома во-многом похоже на результаты применения данной модели к высшим боридам редкоземельных элементов. Как и в случае высших боридов, удалось сильно снизить число варьируемых параметров, добиться хорошего описания низкоэнергетической части фононного спектра, продемон-

стрировать очень сильную иерархию атомных силовых констант. По-видимому, модель суператома должна хорошо работать при возможности выделения кластеров из легких атомов, при этом важно наличие разделения фононного спектра на низкоэнергетическую и высокоэнергетическую части. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 19-02-00953 А.

Список литературы

1. Серебренников Д.А., Анализ нестабильности кристаллической решетки каркасно-кластерных систем с помошью модели суператома/ Клементьев Е.С., Алексеев П.А. // ЖЭТФ — 2016 — Том 150 — Номер 3 — С. 526-535.
2. Serebrennikov D.A., Simple superatom model for lattice dynamics of dodecaborides RB_{12} (R = Zr, Yb, Lu)/ Clementyev E.S. Alekseev P.A. //J. of Alloys and Compounds – 2017 - V. 726 - PP. 323-329.
3. McElfresh M.W., Structure of the heavy-fermion superconductor UBe_{13} / Hall J.H., Hall R.R., Ryan R.R., Smith J.L., Fisk. Z // Acta Cryst. – 1990 – C46 PP. 1579-1580.
4. Gompf F., Inelastic neutron scattering from the superconducting heavy-fermion compound UBe_{13} and the reference system $ThBe_{13}$/Renker B., Rietschel H., Nücker N., Beuers J. // Physica B+C – 1985 – Vol. 135 – Issue 1-3 – PP. 41-45.

УДК 538.9

Талан Виктория Сергеевна
студент,
Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева

Марков Олег Иванович
доктор физико-математических наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева

ИССЛЕДОВАНИЕ МОРФОЛОГИИ ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛА ВИСМУТА МЕТОДОМ АТОМНО-СИЛОВОЙ МИКРОСКОПИИ

Аннотация. *В работе проведено АСМ исследование рельефа поверхности с нанометровым разрешением. Использованы методы фильтрации для обработки изображения. Определены параметры шероховатости по сечению. Проведён гранулометрический анализ.*

Ключевые слова*: атомно-силовая контактная микроскопия, морфология поверхности, шероховатость поверхности, гранулометрический анализ.*

Talan Victoria Sergeevna
student,
Oryol State University named after I.S. Turgenev

Markov Oleg Ivanovich
doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Oryol State University named after I.S. Turgenev

RESEARCH OF MORPHOLOGY BISMUTH CRYSTAL SURFACES BY ATOMIC POWER MICROSCOPY

Abstract. *In this work, an AFM study of the surface relief with nanometer resolution was carried out. Filtering methods are used for image processing. The parameters of the cross-section roughness are determined. Granulometric analysis has been carried out.*

Keywords: *atomic force contact microscopy, surface morphology, surface roughness, particle size analysis.*

Постановка задачи

Висмут – типичный полуметалл, который является основой для создания термоэлектрических материалов. Наноструктуры висмута перспективны с точки зрения создания высокоэффективных термоэлектрических преобразователей, поэтому они имеют важный практический интерес.

Поверхность скола кристалла висмута представляет собой совокупность неоднородностей (террасы, двойники, вакансии и др.), меняющую свою конфигурацию от одной микрообласти к другой [1]. Поэтому исследование поверхности кристаллов висмута необходимо с целью контроля качества объема кристалла, которое будет отвечать высоким параметрам термоэлектрической эффективности. Это достаточно трудная задача, требующая применения новых, современных технологий. Исходным этапом при этом является сканирующая зондовая микроскопия, которая позволяет получать кадры реальной поверхности твёрдого тела с нанометровым разрешением [2-5].

Экспериментальная часть

В данной работе проводилось исследование поверхности висмута на сканирующем зондовом микроскопе СММ-2000. Исследование проводилось в атомно-силовом контактном режиме (AFM). Эти исследования позволяют получить важную информацию о дефектах, поскольку именно наличие дефектов оказывает влияние на процессы рассеяния в термоэлектриках, определяя их термоэлектрические свойства. В качестве исследуемого образца использовался монокристалл висмута (рисунок 1).



Рисунок 1 – Монокристалл висмута

Для анализа искажений поверхности использовали гистограммы рельефа поверхности, из которых были рассчитаны средняя шероховатость, средний размер макрозерна, среднеквадратичную шероховатость, наибольшую высоту неровности профиля.

Результаты исследования

Изображение поверхность кристалла представлено на следующих кадрах (рисунок 2, рисунок 3). Размер изображения 1.09 mkm x 1.09 mkm.

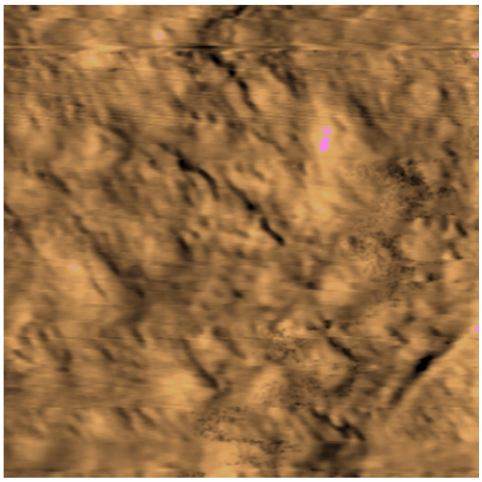


Рисунок 2 – Изображение кристалла висмута в 2D

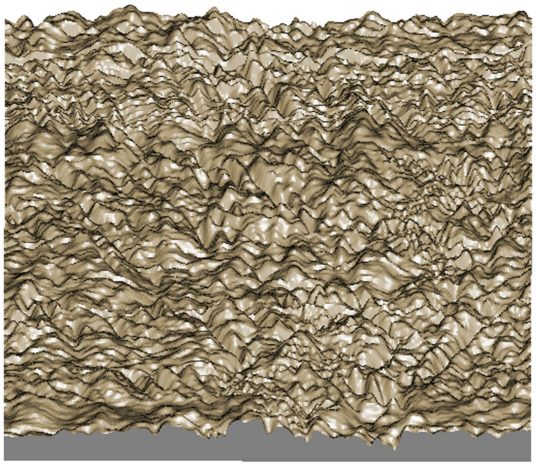


Рисунок 3 – Изображение кристалла висмута в 3D

Профили поверхности на рисунке 5 были получены из изображений морфологии (рис. 2, 3). На полученном изображении кристалла висмута было проведено сечение вдоль произвольно выбранного направления в программе анализа SM2000 «Scan master»(рисунок 4). Искажения в распределении высот, вызванные влиянием дефектов, видны на профиле в виде выступов и провалов.

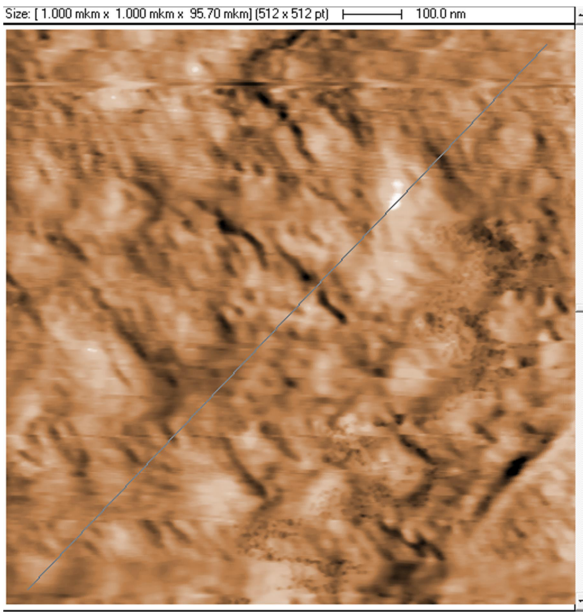


Рисунок 4 – Заданное пользователем сечение

В результате был получен график шероховатости (рисунок 5), характеризующая совокупность неровностей, образующих микрорельеф поверхности с относительно малыми шагами.

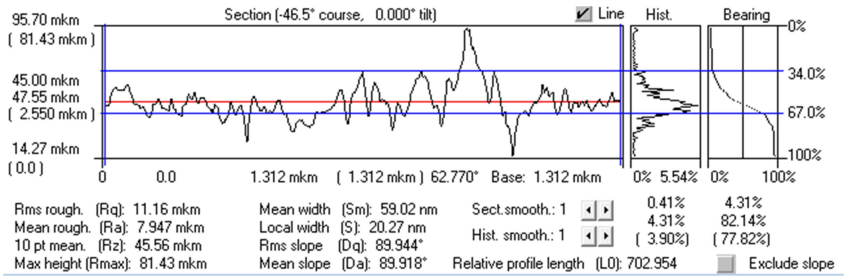


Рисунок 5 – Шероховатость заданного пользователем сечения

По графику определяются средн шероховатость Ra, средний размер макрозерна Sm, среднеквадратичная шероховатость Rq, наибольшая высота неровности профиля R_{max} , общая развитость поверхности l_0 .

Также в программе анализа был проведён гранулометрический анализ, в результате которого была получена карта распределения частиц (рисунок 6).

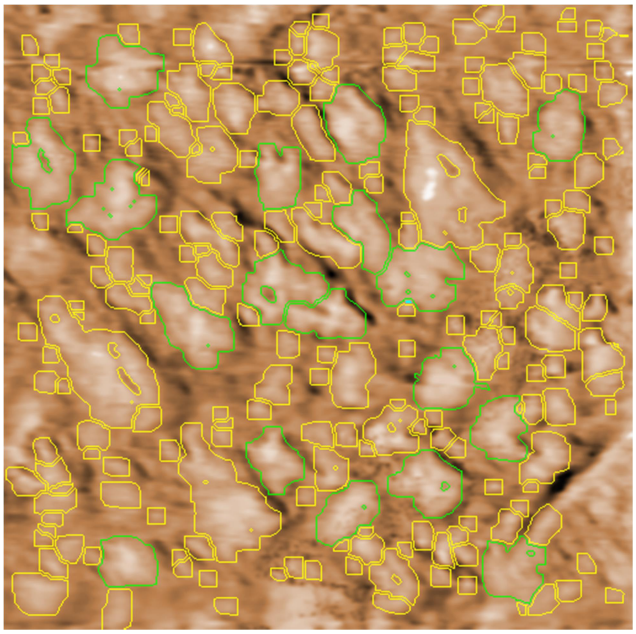


Рисунок 6 – Карта распределения частиц

По количеству зёрен был получен гистограмма распределения частиц по диаметру (рисунок 7).

Из графика мы видим, что 90% микрообразований на сколе поверхности монокристалла висмута имеют диаметр 0.0905 mkm, а 10% частиц имеют диаметр 0.02299 mkm.

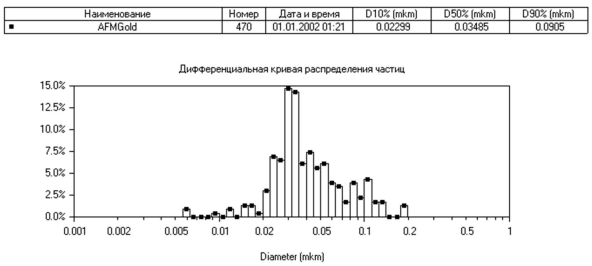


Рисунок 7 – Дифференциальная кривая распределения частиц

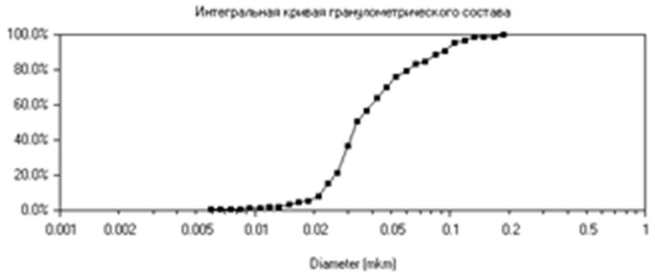


Рисунок 8 – Интегральная кривая распределения частиц

По дифференциальной кривой распределения частиц была получена интегральная кривая (рисунок 8), по которой виден гранулометрический состав дефектов поверхности монокристалла висмута.

По форме интегральной кривой можно судить о морфологическом составе поверхности.

Вывод

Проведены исследования структуры поверхности кристалла висмута. Выявлены некоторые качественные и количественные особенности морфологии монокристалла висмута. Дальнейшее развитие данной работы будет способствовать улучшению контроля качества монокристалла и оптимизации связанного с этим процесса получения материалов на основе висмута.

Авторы выражает благодарность Хрипунову Юрию Вадимовичу за помощь и поддержку в проведении данного исследования.

Список литературы

1. Киселев В.Ф., Козлов С.Н., Зотеев А.В. Основы физики поверхности твердого тела. - М.: Изд-во МГУ, физ. фак-т: 1999. - 284 с.
2. Миронов В.Л. Основы сканирующей зондовой микроскопии. – Нижний Новгород: 2014. – 114 с.
3. Логинов Б.А. Сканирующая туннельная и атомно-силовая микроскопия: лабораторные работы на микроскопе СММ-2000 – оформление исследований. – М.: ГОУ МИФИ (ГУ), 2006. – 142 с.
4. Марков О.И., Хрипунов Ю.В., Грибанов Е.Н. Специальный физический практикум: атомно-силовая и сканирующая туннельная микроскопия. – ФГБОУ ВО «ОГУ им. И.С. Тургенева», г. Орёл: Издательство «Союз», 2014 г. – 60 с.
5. Атомно-силовая микроскопия в физике, учебное пособие, сост.: Марков О.И., Хрипунов Ю.В./ Орёл.: ООО ПФ «Картуш», 2010 – 44 с.

УДК 536.631

Турин Валентин Олегович
кандидат физико-математических наук,
доцент,
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, Орел

Илюшина Юлия Владимировна
аспирант,
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, Орел

Киреев Данил Дмитриевич
студент,
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, Орел

Скрипченко Артём Николаевич
студент,
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, Орел

Черепкова Анастасия Юрьевна
студент,
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, Орел

Андреев Павел Андреевич
студент,
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, Орел

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ДЕБАЯ ТЕПЛОЁМКОСТИ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ НА СЛУЧАЙ ФОНОНОВ С ЗАКОНОМ ДИСПЕРСИИ КАК У ВОЛН ДЕ БРОЙЛЯ

Аннотация. *Ранее была рассмотрена одномерная цепочка атомов, расположенных в минимумах периодического гармонического потенциала. При этом, полагалось, что соседние атомы взаимодействуют между собой по гармоническому закону. Был выведен закон дисперсии для плоских, продольных, монохроматических волн, возникающих в такой цепочке. Особенностью полученного закона дисперсии является наличие запрещённой зоны в области низких частот. В пределе длинно-волновых колебаний было получено уравнение Клейна-Фока-Гордона с законом дисперсии как у волн де Бройля. Отметим,*

что при отсутствии периодического гармонического потенциала все полученные результаты совпадают с результатами известной задачи про одномерную цепочку из одинаковых атомов, взаимодействующих с соседними в гармоническом приближении. Такая цепочка обладает линейным законом дисперсии без запрещённой зоны в пределе длинно-волновых (низкочастотных) колебаний, что используется в теории Дебая теплоёмкости кристаллических тел. В этой работе мы обобщаем теорию Дебая теплоёмкости кристаллических тел на случай фононов с законом дисперсии, как у волн де Бройля, что значит наличие запрещённой зоны в области низких частот. Наши расчёты показывают, что при достаточно низких температурах теплоёмкость кристаллических тел с законом дисперсии фононов как у волн де Бройля, существенно ниже Дебаевской теполёмкости.

Ключевые слова: *акустические фононы, закон дисперсии, волны де Бройля, запрещённая зона, теплоёмкость кристаллических тел, теория Дебая.*

Turin Valentin
Candidate of physical and mathematical sciences,
Associate Professor,
Orel State University,
Russia, Orel

Ilyushina Yulia
postgraduate student,
Orel State University,
Russia, Orel

Kireev Daniil
student,
Orel State University,
Russia, Orel

Skripchenko Artem
student,
Orel State University,
Russia, Orel

Cherepkova Anastasia
student,
Orel State University,
Russia, Orel

Andreev Pavel
student,
Orel State University,
Russia, Orel

GENERALIZATION OF DEBYE'S THEORY OF THE HEAT CAPACITY OF CRYSTALLINE BODIES TO THE CASE OF PHONONS WITH THE LAW OF DISPERSION AS IN DE BROGLIE WAVES

Abstract. *Earlier we considered a one-dimensional chain of atoms located at the minima of the periodic harmonic potential. At the same time, it was assumed that neighboring atoms interact with each other according to a harmonic law. The law of dispersion was derived for plane, longitudinal, monochromatic waves arising in such a chain. A feature of the obtained law of dispersion is the presence of a band gap in the low frequency region. In the limit of long-wave oscillations, the Klein-Fock-Gordon equation with the law of dispersion as in the de Broglie waves was obtained. Note that in the absence of a periodic harmonic potential, all the results obtained coincide with the results of the well-known problem about a one-dimensional chain of identical atoms interacting with neighboring ones in a harmonic approximation. Such a chain has a linear dispersion law without a band gap in the limit of long-wave (low-frequency) oscillations, which is used in the Debye theory of the heat capacity of crystalline solid. In this paper we generalize Debye's theory of the specific heat (heat capacity) of crystalline solid to the case of phonons with the law of dispersion, like de Broglie waves have, which means that there is a band gap in the low frequency region. Our calculations show that at sufficiently low temperatures, the heat capacity of crystalline bodies with the law of phonon dispersion, as in de Broglie waves, is significantly lower than the Debye heat capacity.*

Keywords: *acoustic phonons, law of dispersion, de Broglie waves, heat capacity of crystalline bodies, Debye theory.*

Введение

В [1] рассматривалась одномерная цепочка атомов, расположенных в минимумах периодического гармонического потенциала. Минимумы периодической и неподвижной в пространстве цепочки гармонических потенциалов считались совпадающими с положениями равновесия отдельных атомов, связанных в цепочку и взаимодействующих с соседними по гармоническому закону (см. рисунок 1 (а)). Был получен закон дисперсии для плоских, продольных, монохроматических волн, возникающих в такой цепочке. В пределе длинноволновых колебаний было получено уравнение Клейна-Фока-Гордона с законом дисперсии как у волн де Бройля [2]:

$$\omega^2 = s^2\ k^2 + \omega_0^2\ . \tag{1}$$

В этой работе мы обобщаем теорию Дебая теплоёмкости кристаллических тел на случай дисперсии как у волн де Бройля.

Предварительно, напомним результаты хорошо известной задачи [3] [4] про акустические колебания одномерной цепочки одинаковых атомов массой M, расположенных с периодом a и взаимодействующих только с соседними

атомами по гармоническому закону с жёсткостью γ. В этом случае получается «акустический» закон дисперсии:

$$\omega(k) = 2\omega_1 \left|\sin\frac{ka}{2}\right| = \omega_{max} \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{k_{max}}\right)\right| \ . \tag{2}$$

Здесь $\omega_1 = \sqrt{\gamma/M}$ собственная частота колебаний грузика массой M на пружинке с жёсткостью γ. При этом достаточно рассматривать волновые векторы, лежащие в первой зоне Бриллюэна $-k_{max} < k < k_{max}$. Граничное значение волнового вектора $k_{max} = \pi/a$ соответствует колебанию с минимальной длиной волны $\lambda_{min} = 2\pi/k_{max} = 2a$. При такой длине волны соседние атомы движутся в противофазе, а частота достигает максимального значения:

$$\omega_{max} = 2\omega_1 \ . \tag{3}$$

Для фазовой и групповой скоростей волн в такой цепочке атомов имеем:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = s\frac{\left|\sin\frac{ka}{2}\right|}{\frac{ka}{2}} \ \text{ и } \ v_g = \frac{d\omega}{dk} = s\cos\frac{ka}{2} \ . \tag{4}$$

Здесь скорость звука

$$s = \frac{a}{2}\,\omega_{max} = a\,\omega_1 = a\sqrt{\frac{\gamma}{M}} \ . \tag{5}$$

В случае длинноволновых колебаний $\lim_{k\to 0} v_p(k) = \lim_{k\to 0} v_g(k) = s$. На краю зоны Бриллюэна получаем $\lim_{k\to k_{max}} v_p(k) = 2s/\pi$ и $\lim_{k\to k_{max}} v_g(k) = 0$. Связь между фазовой и групповой скоростью:

$$v_p v_g = s^2\frac{\sin ka}{ka} \ . \tag{6}$$

Если рассматривать длинноволновые колебания цепочки атомов, то есть колебания с длиной волны, много большей периода цепочки a, т. е. когда $k \to 0$, то из уравнений динамики дискретной цепочки, в пределе сплошности, получается волновое уравнение $\partial^2 u/\partial t^2 = s^2\ \partial^2 u/\partial x^2$, решением которого являются продольные волны $u = Ae^{i(kx-\omega t)}$ с линейным законом дисперсии (звуковые волны):

$$\omega = s\ k \ . \tag{7}$$

Фазовая и групповая скорость продольных звуковых волн равны между собой: $v_p = v_g = s$. И их произведение:

$$v_p v_g = s^2 \ . \tag{8}$$

Здесь уместно вспомнить хорошо известную формулу для скорости звука в тонком стержне с объёмной плотностью ρ и модулем Юнга E: $s = \sqrt{E/\rho}$.

Вернёмся к случаю с $\chi \neq 0$. При выводе закона дисперсии будем следовать выводу, приведённому в [4] для случая с $\chi = 0$. Для рассматриваемой цепочки

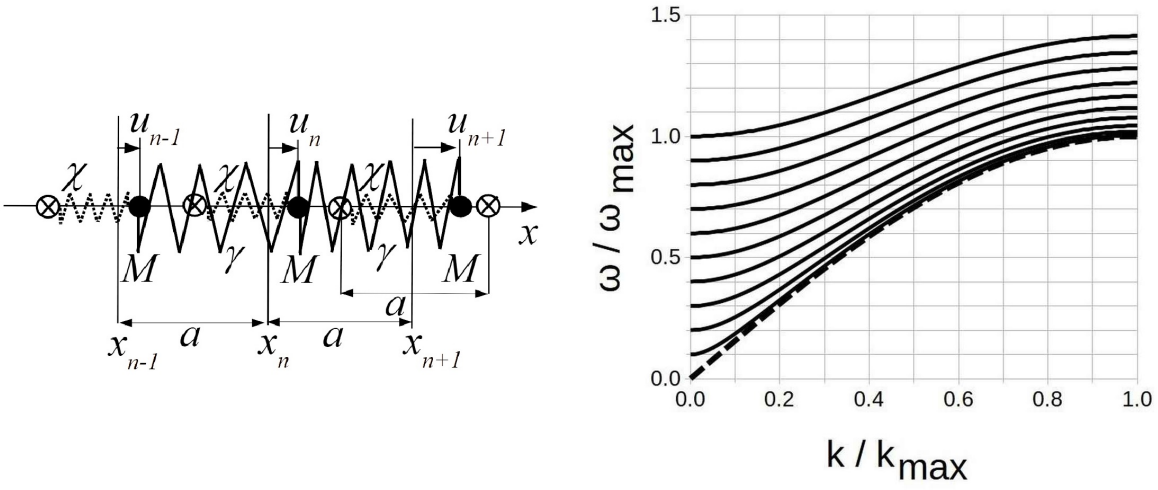


Рисунок 1 – (а) - Одномерная линейная цепочка одинаковых атомов, расположенных в периодическом гармоническом потенциале. Взаимодействие соседних атомов описывается квазиупругой силой. (б) - Соответствующий закон дисперсии. Нижняя пунктирная линия для случая $\omega_0 = 0$, далее выше сплошная кривая для случая $\omega_0/\omega_{max} = 0,1$, затем $\omega_0/\omega_{max} = 0,2$ и т.д., до $\omega_0/\omega_{max} = 1$, что соответствует верхней сплошной кривой.

атомов, в состоянии равновесия координату n-го атома цепочки x_n положим равной na. Запишем второй закон Ньютона для n-го атома:

$$M\frac{d^2u_n}{dt^2} = F_{n,n-1} + F_{n,n+1} + F_n \quad \text{или} \quad M\frac{d^2u_n}{dt^2} = \gamma(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) - \chi u_n \,. \quad (9)$$

Ищем решение в виде $u_n = C_n e^{-i\omega t}$. Для амплитуды C_n получаем уравнение: $-M\omega^2 C_n = \gamma\left[C_{n+1} + C_{n-1} - 2C_n\right] - \chi C_n$. Ищем решение в виде $C_n = Ae^{ikx_n}$. После стандартных преобразований, получаем закон дисперсии:

$$\frac{\omega}{\omega_{max}} = \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{k_{max}}\right) + \left(\frac{\omega_0}{\omega_{max}}\right)^2} \,. \quad (10)$$

Здесь введено обозначение ω_0, соответствующее минимальной частоте в пределе длинноволновых колебаний, когда все атомы колеблются синфазно на пружинках жёсткости χ, без деформации пружинок жёсткости γ:

$$\omega_0 = \lim_{k\to 0}\omega(k) = \sqrt{\frac{\chi}{M}} \,. \quad (11)$$

На рисунке 1 (б) представлен расчёт по уравнению (10). Нижняя пунктирная линия для случая $\omega_0 = 0$, далее выше сплошная кривая для случая $\omega_0/\omega_{max} = 0,1$, затем $\omega_0/\omega_{max} = 0,2$ и т.д., до $\omega_0/\omega_{max} = 1$, что соответствует верхней сплошной кривой. На краю зоны Бриллюэна получаем

$\omega_{max\,1} = \lim_{k\to k_{max}} \omega(k) = \sqrt{\omega_{max}^2 + \omega_0^2}$. Здесь введено обозначение $\omega_{max\,1}$, соответствующее максимальной частоте на краю зоны Бриллюэна, когда все атомы колеблются в противофазе с соседними на пружинках жёсткости $\chi + 2\gamma$. Для фазовой и групповой скоростей имеем:

$$v_p = s\frac{\sqrt{\sin^2\frac{ka}{2} + \left(\frac{\omega_0}{\omega_{max}}\right)^2}}{\frac{ka}{2}} \quad \text{и} \quad v_g = s\cos\frac{ka}{2}\cdot\frac{\sin\frac{ka}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{ka}{2} + \left(\frac{\omega_0}{\omega_{max}}\right)^2}} \ .$$

Для фазовой скорости в длинноволновом пределе получаем $\lim_{k\to 0} v_p(k) = \infty$. На краю зоны Бриллюэна получаем: $\lim_{k\to k_{max}} v_p(k) = 2s/\pi \cdot \sqrt{1 + (\omega_0/\omega_{max})^2}$. Для групповой скорости: $\lim_{k\to 0} v_g(k) = \lim_{k\to k_{max}} v_g(k) = 0$. Связь между фазовой и групповой скоростью оказывается такой же (см. уравнение (6)) как и в случае рассмотренной ранее одномерной цепочки одинаковых атомов массой M, расположенных с периодом a и соединённых пружинками с жёсткостью γ (случай $\chi = 0$).

Отметим, что рассматриваемая цепочка атомов в неподвижном периодическом потенциале может рассматриваться как предельный случай колебаний цепочки из двух типов атомов, когда масса второго типа атомов много больше массы атомов первого типа. Это делает атомы второго типа практически неподвижными. Взаимодействие атомов первого типа с массивными неподвижными атомами второго типа как раз и будет определять периодический и неподвижный в пространстве потенциал, описываемый пружинкам с жёсткостью χ. При этом взаимодействие соседних атомов первого типа будет определяться пружинками с жёсткостью γ. Акустическая ветвь колебаний в такой цепочке при малых волновых числах должна иметь закон дисперсии вида (1) с минимальной частотой колебаний ω_0 отличной от нуля. Соответственно, в [1] было высказано предположение, что такой кристалл, при температурах много меньше $T_0 = \hbar\omega_0/k_B$, будет обладать очень низкой теплоёмкостью и теплопроводностью.

Если рассматривать только длинноволновые колебания, то есть колебания с длиной волны, много большей периода цепочки a, то из уравнения (9), получается уравнение Клейна-Фока-Гордона:

$$\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu^2 u \ . \tag{12}$$

Здесь $\mu = \sqrt{\chi/(a^2\gamma)} = \omega_0/(a\omega_1) = \omega_0/s$. Для лучшего понимания смысла параметра μ заметим, что ω_0 определяется так $\omega_0 = s\mu$. Эта частота соответствует частоте колебаний, описываемых уравнением гармонических колебаний: $d^2u/dt^2 + \omega_0^2 u = 0$. При этом u не зависит от x и определяется так: $u = Ae^{-i\omega_0 t}$.

Решением уравнения Клейна-Фока-Гордона (12) являются плоские монохроматические волны $u = Ae^{i(kx-\omega t)}$. Подставляя это уравнение для плоской

волны в уравнение (12), можно найти, что такая волна обладает таким же законом дисперсии (1) как и волна де Бройля [5]-[9]. Для фазовой и групповой скоростей волны-решения уравнения Клейна-Фока-Гордона имеем:

$$v_p = s\sqrt{1+\left(\frac{\mu}{k}\right)^2} \quad \text{и} \quad v_g = \frac{s}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu}{k}\right)^2}} \ .$$

Связь между фазовой и групповой скоростью оказывается такой же (см. уравнение (8)) как и в ранее рассмотренном случае для длинноволновых колебаний цепочки атомов с $\chi = 0$.

Отметим, что легко получить уравнения:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v_g}{s}\right)^2}} \ \text{и} \ k = \frac{\mu\frac{v_g}{s}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_g}{s}\right)^2}} \ .$$

Эти уравнения по виду совпадают с релятивистскими уравнениями для частоты и волнового числа волны де Бройля, только вместо скорости света c используется скорость распространения волны в тонком стержне s, а комптоновскому волновому числу $K_C = 2\pi\lambda_C = mc\hbar = \omega_0/c$ (здесь $\lambda_C = h/mc$ - длина волны Комптона для электрона) соответствует параметр μ, что уточняет смысл этого параметра.

1. Вывод обобщённой формулы Дебая

Для расчёта плотности состояний в общем случае работает формула [4]:

$$\rho(\omega) = \frac{k^2}{2\pi^2\frac{d\omega}{dk}} \ . \tag{13}$$

Следуя методу, предложенному Дебаем, вместо закона дисперсии (10) для дискретной цепочки из атомов, представленной на рисунке 1 (а), будем использовать низкочастотный закон дисперсии (1), совпадающий с законом дисперсии волн де Бройля, полученный из (10) переходом к сплошности. Но для этого, надо найти верхнюю границу частот фононов, для определения которого, следуя Дебаю, мы будем использовать условие, требующее, чтобы общее количество состояний было равно количеству степеней свободы.

Выразим из закона дисперсии (1) для волн де Бройля k^2 через ω : $k^2 = \frac{\omega^2}{s^2}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$. Найдём $d\omega/dk = s\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$. Подставляем в уравнение (13) выражения для k^2 и $d\omega/dk$, и учитывая, что плотность состояний длинноволновых колебаний всех акустических ветвей определяется как сумма по трём акустическим ветвям, получаем:

$$\rho(\omega) = \frac{3}{2\pi^2 s^3}\omega\sqrt{\omega^2-\omega_0^2} \ . \tag{14}$$

Общее количество состояний должно быть равно количеству степеней свободы $3n$, где n - концентрация атомов. Это поможет определить $\omega_{max\,2}$:

$$3n = \int_{\omega_0}^{\omega_{max\,2}} \rho(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi^2 s^3}\left(\omega_{max\,2}^2 - \omega_0^2\right)^{3/2} .$$

Имеем:

$$\omega_{max\,2} = \sqrt{\omega_D^2 + \omega_0^2} . \tag{15}$$

Здесь частота Дебая:

$$\omega_D = \left(6\pi^2 n\right)^{1/3} s . \tag{16}$$

Для кванта энергии колебаний с частотой ω_0 (11), $\omega_{max\,2}(15)$ и ω_D (16) имеем:

$$E_D = \hbar\omega_D, \quad E_0 = \hbar\omega_0 \quad E_{max} = \hbar\omega_{max\,2} . \tag{17}$$

Домножая (15) на $\hbar$, получаем:

$$E_{max} = \sqrt{E_D^2 + E_0^2} .$$

Для температуры Дебая, соответствующей колебаниям с частотой ω_D, и для температур, соответствующих колебаниям с частотой ω_0 и $\omega_{max\,2}$, имеем:

$$\Theta_D = \frac{E_D}{k}, \quad \Theta_0 = \frac{E_0}{k} \text{ и } \Theta_{max} = \frac{E_{max}}{k} .$$

Вычислим энергию решётки. При расчёте следует учесть то, что фононы подчиняются статистке Бозе-Эйнштейна с функцией распределения $f_B(\omega) = 1/\left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right)$. Имеем:

$$E = \int_{\omega_0}^{\omega_{max\,2}} \hbar\omega f_B(\omega)\rho(\omega)d\omega = \frac{3\hbar}{2\pi^2 s^3}\int_{\omega_0}^{\omega_{max\,2}} \frac{\omega^2\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}}{e^{\hbar\omega/kT}-1}d\omega =$$

$$= \frac{3\hbar}{2\pi^2 s^3}\int_0^{\sqrt{\omega_D^2+\omega_0^2}-\omega_0} \frac{(\omega'+\omega_0)^2\sqrt{\omega'(\omega'+2\omega_0)}}{e^{\hbar(\omega'+\omega_0)/kT}-1}d\omega' =$$

$$= \frac{3k^4T^4}{2\pi^2 s^3\hbar^3}\int_0^{\sqrt{x_D^2+x_0^2}-x_0} \frac{(x+x_0)^2\sqrt{x(x+2x_0)}}{e^{x+x_0}-1}dx . \tag{18}$$

Здесь мы сначала сделали замену переменных $\omega' = \omega - \omega_0$, а потом ввели обозначения:

$$x_D = \frac{\hbar\omega_D}{kT}, \quad x_0 = \frac{\hbar\omega_0}{kT} \text{ и } x = \frac{\hbar(\omega'-\omega_0)}{kT} .$$

При $\omega_0 = 0$, что соответствует $x_0 = 0$, полученное уравнение для энергии решётки переходит в уравнение, известное из теории Дебая:

$$E = \frac{3k^4T^4}{2\pi^2 s^3\hbar^3}\int_0^{x_D} \frac{x^3}{e^x-1}dx .$$

Находим теплоёмкость:

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{3\hbar}{2\pi^2 s^3} \int_0^{\sqrt{\omega_D^2+\omega_0^2}-\omega_0} (\omega'+\omega_0)^2 \sqrt{\omega'(\omega'+2\omega_0)} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{e^{\frac{\hbar(\omega'+\omega_0)}{kT}} - 1} \right) d\omega' =$$

$$= \frac{3\hbar^2}{2\pi^2 s^3 kT^2} \int_0^{\sqrt{\omega_D^2+\omega_0^2}-\omega_0} (\omega'+\omega_0)^3 \sqrt{\omega'(\omega'+2\omega_0)} \frac{e^{\frac{\hbar(\omega'+\omega_0)}{kT}}}{\left(e^{\frac{\hbar(\omega'+\omega_0)}{kT}} - 1\right)^2} d\omega' =$$

$$= \frac{3k^4 T^3}{2\pi^2 s^3 \hbar^3} \int_0^{\sqrt{x_D^2+x_0^2}-x_0} (x+x_0)^3 \sqrt{x(x+2x_0)} \frac{e^{x+x_0}}{(e^{x+x_0}-1)^2} dx \ . \quad (19)$$

При $\omega_0 = 0$, что соответствует $x_0 = 0$, полученное уравнение для теплоёмкости решётки переходит в уравнение, известное из теории Дебая:

$$C = \frac{3k^4 T^3}{2\pi^2 s^3 \hbar^3} \int_0^{x_D} \frac{x^4 e^x}{(e^x-1)^2} dx \ . \quad (20)$$

Перепишем, выведенное нами уравнение для теплоёмкости единицы объёма (19), в виде молярной теплоёмкости, отнесённой к $3R$ (согласно закону Дюлонга — Пти молярная теплоёмкость простых твёрдых тел при комнатной температуре близка к $3R$, где $R = 8,31$ Дж/(К $\cdot$ моль) - универсальная газовая постоянная):

$$\frac{C_\nu}{3R} = \frac{3}{x_D^3} \int_0^{\left(\sqrt{x_D^2+x_0^2}-x_0\right)} (x+x_0)^3 \cdot \sqrt{x(x+2x_0)} \cdot \frac{e^{x+x_0}}{(e^{x+x_0}-1)^2} dx \ . \quad (21)$$

2. Результаты расчётов

Расчёты по формуле 21 проводились численным методом интегрирования с использованием формулы Симпсона. На рисунке 2 (а) представлено семейство зависимостей молярной теплоёмкости, отнесённой к $3R$, от абсолютной температуры, отнесённой к температуре Дебая. Верхняя линия, изображённая пунктиром, представляет зависимость $C_\nu/3R$ для случая $\omega_0 = 0$, что соответствует теории Дебая (20). Ниже идут результаты расчёта по выведенной нами формуле (21), обобщающей теорию Дебая. Верхняя сплошная кривая для случая $x_0/x_D = \omega_0/\omega_D = 0,1$, затем $\omega_0/\omega_D = 0,2$ и т.д., до $\omega_0/\omega_D = 1$, что соответствует нижней сплошной кривой.

На рисунке 2 (б) представлены те же результаты, но в логарифмическом масштабе. Из этого графика лучше видно, как отличаются результаты обобщённой теории от формулы Дебая. Например, для $T = 0,01 \cdot T_D$ теплоёмкость для случая $\omega_0 = 0,1 \cdot \omega_D$ приблизительно в 87,5 раз меньше чем теплоёмкость, рассчитанная по формуле Дебая (случай $\omega_0 = 0$).

На рисунке 3 (а), в полулогарифмическом масштабе, представлена разница между случаем $\omega_0 = 0$ (теория Дебая) и случаем $\omega_0/\omega_D = 0,1$ (нижняя сплошная линия), выше $\omega_0/\omega_D = 0,2$ и т.д., до $\omega_0/\omega_D = 1$ в зависимости от абсолютной температуры, отнесённой к температуре Дебая. На рисунке 3 (б) нижняя сплошная линия представляет отношение теплоёмкости для

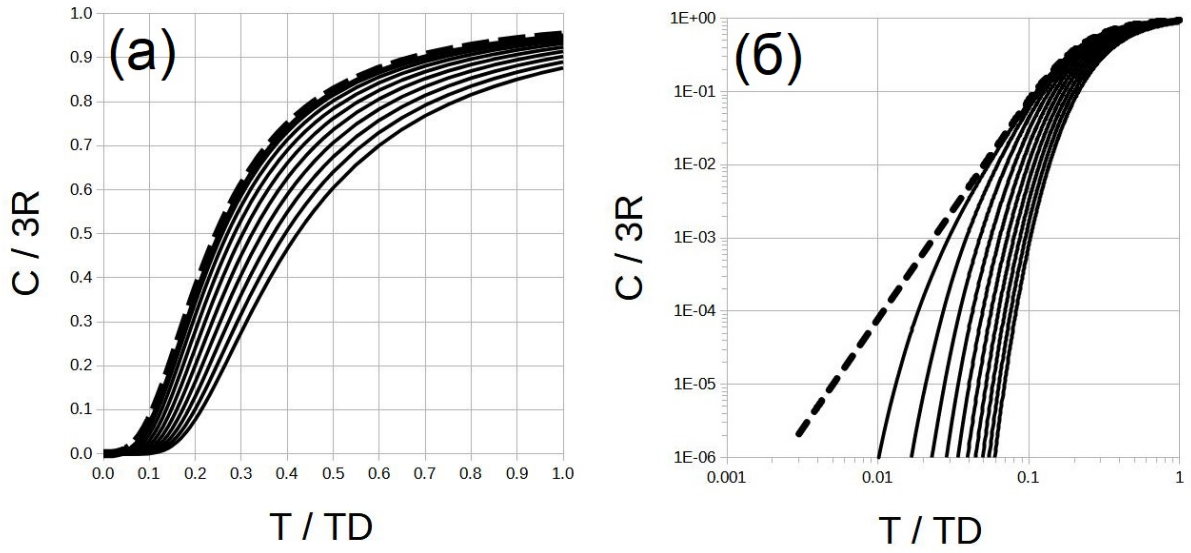


Рисунок 2 – Верхняя пунктирная линия для случая $\omega_0 = 0$, что соответствует теории Дебая. Верхняя сплошная кривая для случая $\omega_0/\omega_D = 0,1$, затем $\omega_0/\omega_D = 0,2$ и т.д., до $\omega_0/\omega_D = 1$.

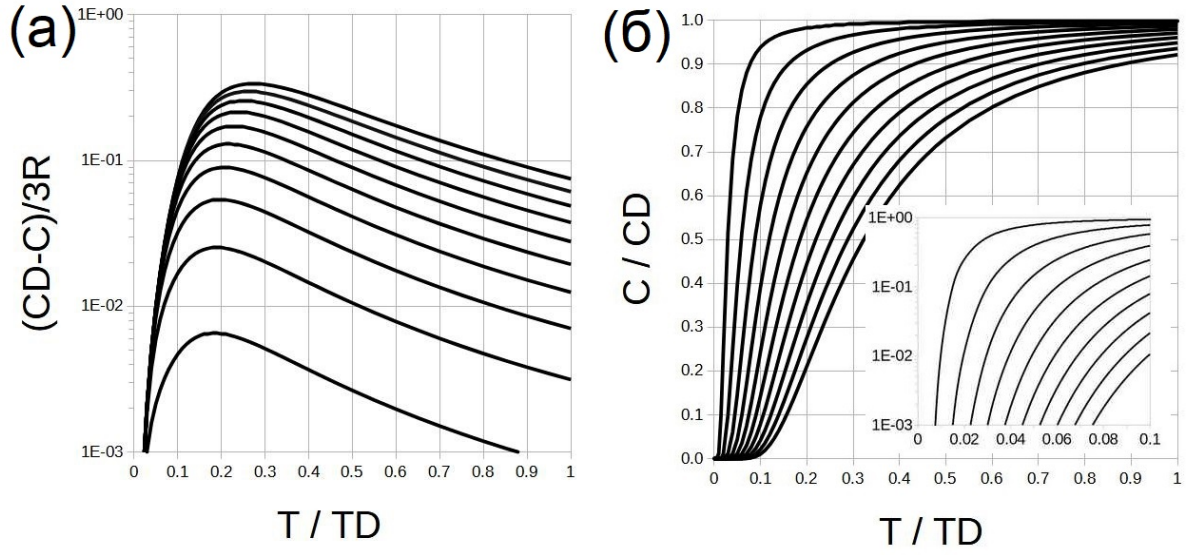


Рисунок 3 – Нижняя сплошная кривая для случая $\omega_0/\omega_D = 0,1$, затем $\omega_0/\omega_D = 0,2$ и т.д., до $\omega_0/\omega_D = 1$. (б)- На вставке те же результаты в полулогарифмическом масштабе в области малых температур.

случая $\omega_0/\omega_D = 0,1$ к теплоёмкости, рассчитанной по формуле Дебая (случай $\omega_0 = 0$), в зависимости от абсолютной температуры, отнесённой к температуре Дебая, выше $\omega_0/\omega_D = 0,2$ и т.д., до $\omega_0/\omega_D = 1$

На вставке представлены те же результаты в полулогарифмическом масштабе с диапазоном по оси абсцисс от 0 до 0,1 (низкие температуры). Например, для $T = 0,02 \cdot T_D$ теплоёмкость для случая $\omega_0 = 0,2 \cdot \omega_D$ опять приблизительно в 87,5 раз меньше чем теплоёмкость, рассчитанная по формуле Дебая (случай $\omega_0 = 0$).

Заключение

Ранее была рассмотрена одномерная цепочка атомов, расположенных в минимумах периодического гармонического потенциала. При этом, полагалось, что соседние атомы взаимодействуют между собой по гармоническому закону. Был выведен закон дисперсии для плоских, продольных, монохроматических волн, возникающих в такой цепочке. Особенностью полученного закона дисперсии является наличие запрещённой зоны в области низких частот. В пределе длинно-волновых колебаний было получено уравнение Клейна-Фока-Гордона с законом дисперсии как у волн де Бройля. Отметим, что при отсутствии периодического гармонического потенциала все полученные результаты совпадают с результатами известной задачи про одномерную цепочку из одинаковых атомов, взаимодействующих с соседними в гармоническом приближении. Такая цепочка обладает линейным законом дисперсии без запрещённой зоны в пределе длинно-волновых (низкочастотных) колебаний. На основе линейного закона дисперсии и строится классическая теория Дебая теплоёмкости кристаллических тел. В этой работе мы обобщаем теорию Дебая теплоёмкости кристаллических тел на случай фононов с законом дисперсии, как у волн де Бройля, что значит наличие запрещённой зоны в области низких частот. Наши расчёты показывают, что при достаточно низких температурах теплоёмкость кристаллических тел с таким законом дисперсии, существенно ниже Дебаевской теполёмкости. В дальнейшем, мы планируем рассмотреть одномерную цепочку из двух типов атомов с сильно отличающейся массой, взаимодействующих с соседними по гармоническому закону. В отличие от хорошо известной задачи, приводящей к появлению, помимо акустической ветви колебаний, ещё и оптической ветви колебаний, мы планируем добавить гармоническое взаимодействие между соседними атомами меньшей массы. Отметим, что модификация теории Дебая остаётся актуальной задачей [10]-[12]. Авторы благодарны заведующему кафедрой экспериментальной и теоретической физики ОГУ им. И.С. Тургенева Олегу Ивановичу Маркову за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Турин В. О., Пиляева Е. Н., Головин И. В., Марков О. И. Колебания одномерной цепочки атомов, расположенных в периодическом гармоническом потенциале// Физика и современные технологии в АПК: Материалы XI Всероссийской молодежной конференции молодых ученых, студентов и школьников с международным участием. — 2020. — Орёл.— С. 71–79.
2. Turin V. O., Markov O. I., Poyarkov V. N. Aberration of light and matter wave // Современные проблемы физико-математических наук: Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. 22–25 ноября 2018 г., г. Орёл: ОГУ им. И.С. Тургенева. — 2018. — С. 199–207.
3. Brillouin L. Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices. — New York: McGraw-Hill.—1946.— 247 с.
4. Зегря Г. Г., Перель В. И. Основы физики полупроводников. — М.: Физматлит.— 2009. — 333 с.
5. Morse P. M., Feshbach H. Methods of Theoretical Physics.—Volume 1.— New York: McGraw-Hill.— 1953. — 400 с.
6. Crawford F. S. Waves. Berkeley Physics Course.—Volume 3.— New York: McGraw-Hill.— 1968. — 400 с.
7. Gravel P., Gauthier C. Classical applications of the Klein-Gordon equation // American Journal of Physics. — 2011. — Volume 79. — Issue 5. — P. 447–453.
8. Mouchet A. Interaction with a field: a simple integrable model with backreaction // European Journal of Physics. — 2008. — Volume 29. — Issue 5. — P. 1033–1050.
9. Faletič S. A mechanical wave system to show waveforms similar to quantum mechanical wavefunctions in a potential // European Journal of Physics. — 2015. — Volume 36. — Issue 3. — P. 035023.
10. Рехвиашвили С. Ш. Теплоемкость твердых тел фрактальной структуры с учетом ангармонизма колебаний атомов // Журнал технической физики. —2008.— 78. — 12. — С. 54–58.
11. Кузнецов В. М., Хромов В. И. Влияние размерности фононного спектра на устойчивость состояния конденсированных сред // Журнал технической физики. — 2011. — 81. — 12. — С. 77–82.
12. Юрченко С. О. Дробная динамическая модель теплоемкости кристаллических тел / Юрченко С. О. // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки.— 2011. — 2. —С. 41–50.

УДК 539.1.06

Шмелёв Дмитрий Сергеевич
аспирант,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева
Россия, Орёл

Матюхин Сергей Иванович
доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой технической физики и математики,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева
Россия, Орёл

СОВРЕМЕННЫЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ЭФФЕКТА КАНАЛИРОВАНИЯ БЫСТРЫХ ИОНОВ

Аннотация. *Каналирование быстрых ионов, или резкое изменение характера прохождения заряженных частиц (ионов) через кристаллы вследствие определённой ориентации пучка частиц, представляет собой крайне важный эффект, который незаменим при исследовании свойств кристаллов и решении различных экспериментальных и практических задач, связанных с заряженными частицами. В работе рассмотрены наиболее значимые области применения этого эффекта и дан краткий обзор каждой из этих областей.*

Ключевые слова: *каналирование, заряженные частицы, пучок ионов, кристаллическая решётка, ионная имплантация, ускоритель частиц, тёмная материя.*

Shmelyov Dmitry Sergeevich
graduate student, Orel State University
Russia, Orel

Matyukhin Sergey Ivanovich
Doctor of Physics and Mathematics,
Head of Department of Technical Physics and Mathematics, Orel State University
Russia, Orel

MODERN APPLICATIONS OF FAST ION CHANNELING

Abstract. *Fast ion channeling, or the sharp change in ion flux through crystals due to a particular ion beam orientation, is the highly important effect which is indispensable for the research of crystal properties and for solving various experimental and practical problems related to charged particles. We discuss some of the most significant applications of this effect and provide a brief overview of all of them.*

Keywords: channeling, charged particles, ion beam, crystal lattice, ion implantation, particle accelerator, dark matter.

1 Введение

В настоящее время процессы взаимодействия пучков заряженных частиц с кристаллами находят всё более широкое применение как в науке, так и в технике. Из всего многообразия эффектов, наблюдаемых при таком взаимодействии, особый интерес вызывает каналирование – резкое изменение характера прохождения заряженных частиц через кристаллы при ориентации пучка под малыми углами к атомным цепочкам или плоскостям (рисунок 1). При такой ориентации частицы испытывают большое число коррелированных скользящих соударений с атомами кристалла, в результате чего они попеременно отражаются от противоположных стенок каналов, образованных цепочками или плоскостями, двигаясь по осциллирующим траекториям внутри этих каналов [1, 2].

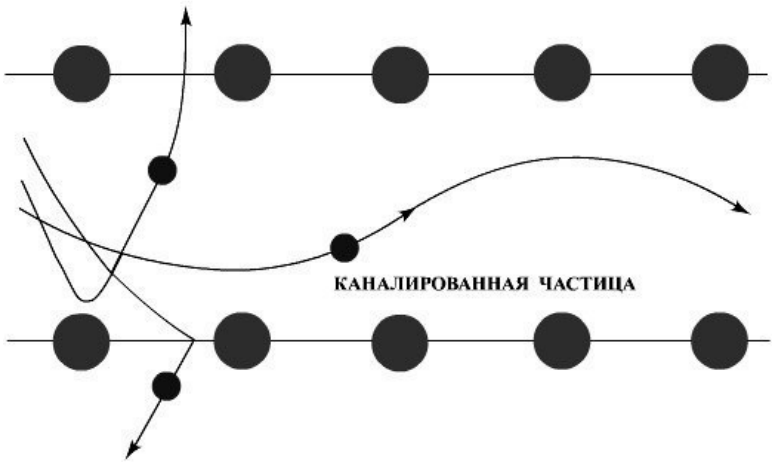


Рисунок 1 – Локализация частиц внутри каналов, образованных атомными цепочками или плоскостями кристалла

В настоящей работе сделан обзор основных областей науки и техники, где используется эффект каналирования или необходим его учёт в связи с использованием пучковых технологий.

2 Каналирование как метод изучения структуры кристаллов

Современная кристаллография традиционно полагается на рентгеноскопию и нейтроноскопию как основные способы анализа кристаллов. Эти способы довольно эффективны при определении особенностей структуры поверхностных слоев кристалла [3], но не позволяют достаточно качественно анализировать кристалл на большой глубине и требуют высокой степени однородности образца. В отличие от данных методов, рассматривающих кристалл как дифракционную решётку, при каналировании кристалл представляется как набор атомных цепочек и плоскостей, выравнивающих и направляющих пучок частиц высокой энергии (порядка нескольких МэВ). В результате каналированные частицы могут проникать в кристаллы на значительные глубины.

Проведение анализа методом каналирования требует наличия трёх компонентов: источника частиц (ионов), детектора рассеянных частиц и высокоточного манипулятора кристаллом – гониометра, который сонаправляет оси симметрии кристалла с падающим пучком. Каналирование имеет место, когда оси кристалла отклоняются на довольно малый угол (порядка 1°) относительно пучка.

Энергетический спектр обратно рассеянных ориентированным кристаллом частиц принципиально отличается от случая, когда кристалл не ориентирован; наблюдаются пики энергии, соответствующие рассеянию на поверхностных атомах, а также на атомах примесей, что позволяет исследовать посредством каналирования наличие примесей и иных дефектов в кристалле [4].

Таким образом, данный метод способствует точному определению поверхностной и глубинной структуры кристалла и позволяет решать широкий спектр задач, связанных с взаимодействием частиц и кристаллов.

3 Каналирование при ионной имплантации

Каналирование, безусловно, представляет собой крайне эффективный инструмент анализа кристаллической решётки. Однако при решении определённых практических задач данный эффект

может играть и негативную роль. Наиболее ярким примером негативного влияния каналирования является ионная имплантация.

Ионная имплантация – это низкотемпературный процесс внедрения ионов в поверхность кристалла с целью изменения его свойств. Важнейшим назначением ионной имплантации является производство полупроводниковых изделий с заранее заданными характеристиками [5]. Ионная имплантация обычно осуществляется посредством пучков заряженных частиц, что может приводить к появлению эффекта каналирования.

Так как технологический процесс ионной имплантации чрезвычайно чувствителен к любым возможным отклонениям, каналирование и связанное с ним увеличение длины пробега ионов в кристаллах может иметь крайне нежелательные последствия, нарушая глубину залегания примесей после имплантации и искажая свойства получаемых кристаллов. Во избежание этих искажений необходимо учитывать влияние каналирования на ионную имплантацию и вносить соответствующие коррективы в технологические процессы.

Как показано в [6], наиболее эффективной мерой борьбы с каналированием является наклон в 5–6° между направлением пучка ионов и нормалью к поверхности кристалла с одновременным поворотом на 7°±0,5° от (100)-плоскости кристалла; при этом диапазон подходящих углов определяется энергией имплантации.

4 Каналирование в ускорительной технике

В настоящее время исследование свойств элементарных частиц является крайне важным направлением современной физики, и ускорители частиц – устройства, предназначенные для получения пучков заряженных частиц с высокой энергией, являются основным инструментом при проведении самых разных экспериментов.

Каналирование в ускорительной технике используется для ориентации и управления пучками заряженных частиц посредством их взаимодействия с изогнутыми кристаллами. Частицы каналируются по направлению изгиба кристалла, в результате чего достигается высокая фокусировка и поворот пучка в заданном направлении [7]. При этом примечательно, что каналирование может иметь место и для ионов чрезвычайно высоких энергий – порядка 1 ТэВ, что было продемонстрировано в ходе экспериментов на Большом адронном коллайдере [8].

5 Каналирование в углеродных нанотрубках

В последние десятилетия интерес к явлению каналирования возрос в связи с возможностью каналирования быстрых ионов в углеродных нанотрубках [9, 10]. Одной из главных причин особого внимания к исследованиям в этой области является тот факт, что их результаты могут быть использованы при разработке новых эффективных методов анализа и модификации структуры и свойств нанотрубок, новых источников монохроматичного рентгеновского излучения, а также для получения и управления пучками нанометровых сечений. Причем, в отличие от изогнутых кристаллов, управление такими пучками при помощи нанотрубок может осуществляться в режиме реального времени. В свою очередь, эти пучки можно использовать для анализа и модификации структуры и свойств как традиционных (кристаллические твердые тела), так и нетрадиционных материалов (фуллериты, жгуты нанотрубок и т.д.) в весьма ограниченной области пространства – порядка нескольких десятков нанометров, а также в таких областях, как целенаправленное введение лекарственных средств и лучевая терапия на клеточном уровне в медицине; манипулирование ионными пучками низких энергий в плазменных технологиях; управление перемещением молекул в биологических исследованиях и т.д.

6 Каналирование в детекторах тёмной материи

Одним из наиболее интересных направлений исследования современной астрофизики является поиск так называемой тёмной материи – гипотетической формы материи, составляющей примерно 23% вещества во Вселенной. Её существование опирается на ряд астрофизических наблюдений. Тёмная материя, предположительно, не взаимодействует с электромагнитным излучением, и её крайне трудно зафиксировать [11].

С целью обнаружения частиц тёмной материи и определения их свойств используется ряд детекторов, наиболее многообещающим из которых представляется детектор слабо взаимодействующих массивных частиц тёмной материи на основе NaI. В основе работы этого детектора лежит эффект каналирования.

Каналирование происходит, когда ион после столкновения с частицей тёмной материи рассеивается на кристаллической решётке NaI. Каналированные ионы теряют энергию при взаимодействии с

электронами, неканалированные – при взаимодействии с атомами решётки. NaI (Tl) как сцинтиллятор весьма чувствителен к потерям энергии, и каналирование увеличивает долю энергии ионов, которая наблюдается в виде света. Помимо этого особенности распределения тёмной энергии в пространстве влияют на периодические изменения в каналировании в виде годовых циклов. Таким образом, при помощи каналирования ионов в кристаллических детекторах можно изучать ключевые характеристики частиц тёмной материи [12].

Заключение

Как показывает сделанный обзор, явление каналирования играет существенную роль при решении важнейших теоретических и практических проблем современной науки и техники. При этом, несмотря на то, что это явление достаточно подробно описано в имеющейся научной литературе, в большинстве работ, посвященных каналированию, кристаллы считаются идеальными, не содержащими заметного количества дефектов.

Таким образом, развитие существующей теории каналирования может быть связано с исследованием влияния на это явление дефектов кристаллической решётки и с изучением каналирования заряженных частиц в реальных кристаллах сложных соединений. Разработка теории каналирования в реальных кристаллах внесёт существенный вклад в понимание процессов, возникающих при взаимодействии заряженных частиц с кристаллами, позволит повысить точность используемой для легирования полупроводников ионной имплантации, а также значительно увеличит точность экспериментов и научных исследований, основанных на пучковых технологиях.

Список литературы

1. Lindhard, J. Influence of crystal lattice on motion of energetic charged particles / J. Lindhard - Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. - 1965. - Bd.34. №14. - P.49; Линдхард, Й. Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц / Й. Линдхард. - УФН. - 1969. - Т.99. - Вып.2. - С. 249-296.

2. Gemmell, D.S. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystals / D.S. Gemmell. - Rev. Mod. Phys. - 1974. - V.46. - №1. - P. 129-217.
3. Hauk, V. Structural and Residual Stress Analysis by Nondestructive Methods. / V. Hauk. - Amsterdam: Elsevier Science, 1997. - 640 p.
4. Feldman, L.C., Mayer, J.W., Picraux, S.T. Materials Analysis by Ion Channeling. Submicron Crystallography. / L.C. Feldman, J.W. Mayer, S.T. Picraux. - New York: Academic Press, 1982. - 300 p.
5. Rimini, E. Ion Implantation: Basics to Device Fabrication. / E. Rimini. - New York: Springer US, 1995. - 393 p.
6. Cho, K. et al. Channeling effect for low energy ion implantation in Si. / K. Cho et al. - Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. - 1985. - Vol. 7-8, Part 1. - P. 265-272.
7. Biryukov, V.M. Crystal channelling in accelerators. / V.M. Biryukov. - Particle accelerator. Proceedings, 10th European Conference, EPAC 2006, Edinburgh, UK. - 2006. - 5 p.
8. Redaelli, S. et al. First observation of ion beam channeling in bent crystals at multi-TeV energies. / S. Redaelli et al. - The European Physical Journal C. - 2021. - Issue 81. – P. 142.
9. Miskovic, Z.L. Ion Channeling through Carbon Nanotubes / Z.L. Miskovic // Radiat. Eff. Def. Solids. - 2007. - V.162. - №3-4. - P.185-205.
10. Матюхин, С.И. Кинетика каналирования ионов в углеродных нанотрубках / С.И. Матюхин. - Орёл: ОрёлГТУ, 2008. - 200 с.
11. Рябов, В.А., Царев, В.А., Цховребов, А.М. Поиски частиц темной материи. / В.А. Рябов, В.А. Царев, А.М. Цховребов. - Успехи физических наук. - 2008. - Том 178, №13. - С.36.
12. Bozorgnia, N., Gelmini, G.B., Gondolo, P. Channeling in Direct Dark Matter Detection I: Channeling Fraction in NaI (Tl) Crystals. / N. Bozorgnia, G.B. Gelmini, P. Gondolo. - Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. - 2010. - Issue 11. - P. 42.

Информатика
и информационные технологии

УДК 004.051

Арабский Максим Юрьевич
сотрудник,
Академия ФСО России,
Россия, Орёл

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СТЕММЕРОВ

Аннотация. *В данной статье представлены методы для оценки алгоритмов стемминга, на основе которых были рассчитаны качественные характеристики известных стеммеров, рассчитаны предварительные результаты оценки качества доступных стеммеров для русского языка. Делается вывод о преимуществах метода Snowball как более эффективного стеммера с показателем 75%, и самого производительного алгоритма, а также выделяются преимущества каждого стеммера.*

Ключевые слова: *стемминг, качественные характеристики, оценка.*

Arabsky Maxim Yurievich
employee,
Academy FSO of Russia,
Russia, Orel

COMPARATIVE CHARACTERISTICS OF STEMMERS

Annotation. *This article presents methods for assessing stemming algorithms, on the basis of which the qualitative characteristics of known stemmers were calculated, preliminary results of assessing the quality of available stemmers for the Russian language were obtained. A conclusion is made about the advantages of the Snowball method as a more efficient*

stemmer with an indicator of 75%, and the most productive algorithm, and also the advantages of each stemmer are highlighted.

Keywords: *stemming, quality characteristics, assessment.*

Введение

В настоящее время существует множество приложений и алгоритмов для работы с текстами. При работе с поисковыми системами, для составления словарей и т.п. могут использоваться различные методы обработки слов такие как морфоанализаторы и лематизаторы, которые считаются наиболее распространёнными и сложным в реализации, но также существует такой метод обработки текста как стемминг. Стемминг – это поиск по основе слова, предусматривающий его морфологическое изменение. Данный метод выполняет морфологический разбор конкретного слова, определяет общее во всех его грамматических основах без учета суффиксов и окончаний. Морфологический анализ очень трудоемкий и долгий процесс и не всегда имеет место быть, поэтому существуют более упрощенные и быстрые алгоритмы обработки текстов, как раз к ним и относятся лемматизаторы и стеммеры. Цель, которую пытаются достигнуть данными методами – привести слова разных форм к одному виду. Основное отличие данных методов заключается в том, что лемматизация ищет первоначальную форму слова, а стемминг – отсекает окончания и(или) суффиксы.

Для достижения поставленных целей при стеммировании нужно привести различные слова к одной форме. Варианты решения задачи выделения основы представлены на рисунке 1 [Sharma, 2012].

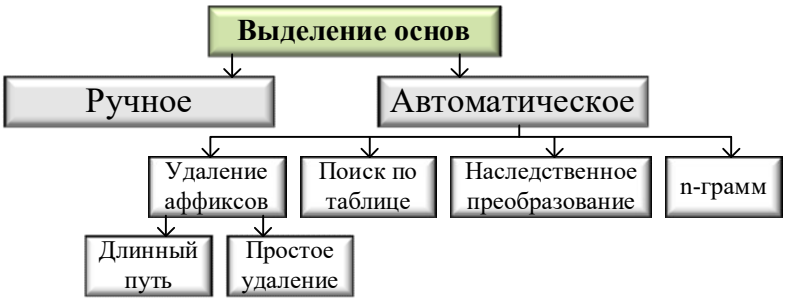


Рисунок 1 – Классификация методов выделения основ

Одна из актуальных задач – расширение номенклатуры доступных средства морфологического анализа, в отношении которых имеются точные оценки их характеристик [Муравлев, 2011], что является актуальной проблемой в данном направлении. При изучении данной предметной области, в существующей литературе нет оценки харак-

теристик русскоязычных стеммеров, что вызывает трудность при выборе метода для решения задачи.

При работе со стеммингом используется такое понятие как стемма, которая и представляет из себя основу слова, за исключением одного – стемма не всегда включает в себя корень слова или совпадает с ним [Муравлев, 2011]. Пример различия двух понятий представлен на рисунке 2.

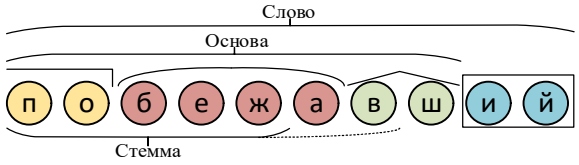


Рисунок 2 – Модель слова русского языка с разметкой

При работе стеммеров выделяют две самые распространённые ошибки [Gurusamy, 2017]:

1) Избыточное стеммирование (Over stemming)
2) Недостаточное стеммирование (Under stemming)

Over-stemming или ошибка 1-го рода – это объединение двух слова с разными основами в один корень (False Positive).

Under-stemming или ошибка 2-го рода – это образование разных слов от двух основ с одним корнем (False Negative).

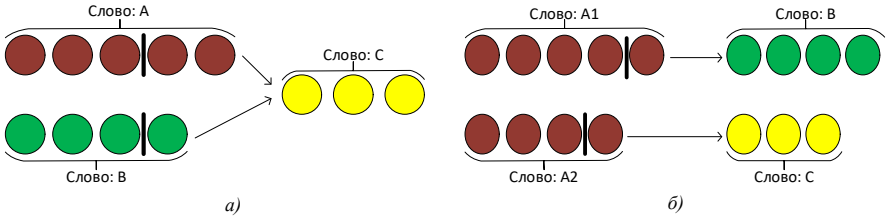


Рисунок 3 – Модель ошибок при стеммировании
а) Over-stemming б) Under-stemming

Ошибки 1-го рода возникают в случаях, когда от слова отсекаются лишние буквы и словам со схожими основами, но не являющиеся одним словом в разных склонениях, соответствует одна стемма (рисунок 3а).

Ошибки 2-го рода возникают, когда от слова отсекается меньше букв и словам со схожими основами, являющимися разными склонениями одного слова соответствуют разные стеммы (рисунок 4б).

Оценка

В данной работе на основе теоретического обзора предметной области предлагается вариант оценки характеристик самых распространённых методов стеммирования для русского языка.

В настоящее время существует множество стеммеров для русского языка. Рассмотрим основные из них, оценку которых и будем проводить в дальнейшем: MyStem, Stemka и Snowball. Также алгоритм Snowforce, являющийся аналогом Snowball, исключающим многие недостатки последнего [Муравлев, 2011]. При предварительном изучении литературы по данному направлению, было выявлено, что англоязычная версия алгоритма Snowball, считается малоэффективной и непроизводительной [Gurusamy, 2017].

Для оценки качества работы вышеуказанных методов стоит использовать два подхода:

1. Оценка на словарной выборке
2. Оценка на выборке текстов

Это должно учитываться, так как оценка исключительно с применением словарей не даст полной характеристики стеммеров. Рассмотрение характеристик стоит производить и с точки зрения применения на практике, то есть на выборке текстов различной направленности и стиля написания. Стоит отметить, что о стеммерах судят по правильности, эффективности и силе сжатия.

Для сравнения методов были выбраны следующие показатели:

- На словарной выборке: Точность (Precision), полнота (Recall) и F-мера(F-factor).
- На текстовой выборке [Gurusamy, 2015]: Среднее количество слов на класс слияния, коэффициент сжатия индекса и количество слов без изменений.

Точность и полнота являются метриками, которые используются при оценке большей части алгоритмов извлечения информации. Иногда они используются сами по себе, иногда в качестве базиса для производных метрик, таких как F-мера [Powers, 2007].

Точность системы – это доля документов, действительно принадлежащих данному классу относительно всех документов, которые система отнесла к этому классу.

Полнота системы – это доля найденных классификатором документов, принадлежащих классу относительно всех документов этого класса в тестовой выборке.

$$\text{Точность} = \frac{TP}{TP + FP} \quad (1)$$

$$\text{Полнота} = \frac{TP}{TP + FN} \quad (2)$$

$$F - \text{мера} = 2 * \frac{\text{Точность} * \text{Полнота}}{\text{Точность} + \text{Полнота}} \quad (3)$$

Для оценки слов, с применением словаря был проделан следующий порядок действий:

1. Составлен словарь длинной 2 миллиона слов;
2. Для удобства подсчетов ошибок из словаря составлены две выборки. Первая - длиной 288 тысяч слов (Выборка №1), где все слова представлены в единственной своей словоформе. Вторая - длинной 580 тысяч слов (Выборка №2), где представлены слова в различных словоформах;
3. Каждый из алгоритмов запущен на работу с обеими выборками по очереди;
4. Для выборки №1 выделены слова, встречающиеся после стемминга единожды (Ошибка False Negative), для выборки №2 – слова, частота повторений которых больше одного раза (Ошибка False Positive).

Результаты работы алгоритмов представлены в таблице 1 и таблице 2.

Таблица 1 – Результаты работы алгоритмов с выборкой №1

Всего слов	288 637		
Алгоритм	Осталось	Ошибка	Верно
Stemka	192 131	30 806	161 325
Mystem	198 002	34 375	168 232
Snowball(Snowforce)	194 886	34 375	160 511

Таблица 2 – Результаты работы алгоритмов с выборкой №2

Всего слов	580 612		
Алгоритм	Осталось	Ошибка	Верно
Stemka	118 612	39 737	78 876
Mystem	133 288	57 327	75 980
Snowball(Snowforce)	124 981	37 390	87 623

5. После того, как каждый алгоритм отработал, произведены подсчеты с использованием формул (1), (2) и (3), для соответствующих параметров. Характеристики алгоритмов вынесены в таблице 3.
6. Для подсчета скорости работы алгоритмов составлен словарь длинной 1 миллион слов. После отработки каждого алгоритма по 2-3 раза, выделено среднее время работы каждого и подсчитано количество слов в секунду.

Таблица 3 – Результаты оценки эффективности работы алгоритмов

Алгоритм	Скорость, тыс. слов/сек.	Полнота	Точность	F-мера
Stemka	180-190	0,665	0,84	0,742
Mystem	60-65	0,57	0,85	0,682
Snowball	380-390	0,701	0,824	0,757
Snowforce	410-420	0,701	0,824	0,757

Среднее количество слов на класс слияния – это среднее количество слов, соответствующих одной и той же стемме для корпуса. Например, если слова «инженер», «инженерный», «инженером» будут связанны со словом «инженер», тогда размер этого класса будет равен трем.

Данное значение рассчитывается следующим образом:

$$MWC = \frac{N}{S}, \tag{4}$$

где MWC – среднее количество слов на класс слияния;

N – количество уникальных слов до стемминга;

S – количество уникальных стемм.

Коэффициент сжатия индекса – это частичное уменьшение размера индекса, достигаемое за счет стеммирования. Например, если из 50 000 слов мы получим 40 000 основ, то мы получим коэффициент равный 20%.

Для его расчета используется следующая формула:

$$ICF = \frac{N - S}{N}, \tag{5}$$

где ICF – коэффициент сжатия;

N – количество уникальных слов до стемминга;

S – количество уникальных стемм.

Чем сильнее будет стеммер, тем меньше будет данный показатель.

Количество слов без изменений – это количество неизменённых стеммером слов из-за того, что оно уже является основой. Чем стеммер будет сильнее, тем меньше слов без изменений будет оставаться.

Для расчета вышеуказанных параметров было сделано следующее:

1. Взяты 10 текстов различного направления и стиля написания;

2. Подсчитано количество уникальных слов (встречающихся в тексте один раз);

3. Каждый алгоритм запущен на обработку каждого текста по очереди;

4. Для каждого результата работы алгоритма подсчитано количество уникальных слов;

5. С использованием формул (4) и (5) посчитаны значения MWC и ICF;

6. Для каждого алгоритма посчитано количество не измененных слов.

Результаты расчетов занесены в таблицу 4.

Таблица 4 – Результат оценки производительности алгоритмов

Всего слов	521 118	Уникальных слов		38 270
Алгоритм	Уникальных слов	MWC	ICF	СБИ
MyStem	8 937	4,3	0,76	13 363
Snowball	13 510	2,8	0,64	6 921
Stemka(Snowforce)	9 705	3,9	0,74	8 100

Заключение

По результатам вычислений и в ходе проведения работы были сделаны следующие выводы:

1. При оценке русскоязычных алгоритмов стемминга, было выявлено, что алгоритм Snowball обеспечивает 75% эффективности, алгоритм Mystem – 68% эффективности, а Stemka – 74% эффективности при оценке с использованием словаря, в котором содержится порядка 800 тысяч слов.
2. Алгоритм Snowforce показывает результаты схожие с методом Snowball, но является более быстрым его аналогом и показывает самую высокую скорость среди остальных.
3. Mystem от Яндекс имеет самый высокий показатель точности со значением 85%, что не значительно больше, чем у Stemka (84%) и Snowball (82,4%).
4. При рассмотрении силы или производительности, Stemka приводит большее количество слов к их основе, чем два других алгоритма с меньшими показателями коэффициента сжатия и количеством слов без изменений, но имеет наименьший показатель количества слов на класс слияния.

5. Основываясь на измерениях, проведенных с применением текстовой выборки, мы можем утверждать, что Snowball является самым сильным и эффективным стеммером, а Stemka несколько слабее, и менее эффективен. Mystem показал худший результат по сравнению с остальными.
6. Было выявлено, что применение алгоритм стемминга Snowball в русском языке гораздо эффективнее, чем в английском.
7. Следует изучить существующую литературу в данной предметной области для поиска возможных вариантов улучшения алгоритмов стемминга для русского языка, для дальнейшей разработки метода с более высоким характеристиками, на базе существующих.
8. Полученные результаты являются предварительными и требуют дальнейшего уточнения.

Список литературы

1. Муравлев, В.А. Snowforce: быстрый стеммер для русского языка / В.А. Муравлев, Л.А. Гращенко // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2011. – №21. – С.194-200.
2. Астапова, О.П. Исследование и разработка методов нормализации слов русского языка: курсовая работа / О.П. Астапова, под рук. Д.Ю. Турдакова. – М.: Факультет Вычислительной математики и кибернетики МГУ, 2012. – 16 с.
3. Gurusamy, V. Performance Analysis: Stemming Algorithm for the English Language / V. Gurusamy, S. Kannan, // International Journal for Scientific Research & Development – 2017. – Vol. 5, Issue 5 – C. 1933-1938.
4. Sharma, D. Stemming Algorithms: A Comparative Study and their Analysis / D. Sharma // International Journal of Applied Information Systems – 2012. – Vol. 4, №3. – C. 7-12
5. Powers D. M. Evaluation: From precision, recall and f-factor to roc, informedness, markedness and correlation. // Technical report, School of Informatics and Engineering, Flinders University Adelaide, South Australia. – 2007.

УДК 81:32

Ахмедов Магомедсалих Гаджи-Курбанович
сотрудник,
Академия ФСО России,
Россия, г. Орёл

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ОСНОВЫ МЕЖЪЯЗЫКОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УЗБЕКСКО-ТАДЖИКСКОЙ ЯЗЫКОВОЙ ПАРЫ

Аннотация. *В статье приводится систематизированная информация в области узбекско-таджикского межъязыкового преобразования текстов, выполнена сравнительная характеристика и выделены особенности словообразования основных частей речи в данной языковой паре.*

Ключевые слова: *межъязыковое преобразование, узбекский язык, таджикский язык, машинный перевод на основе правил.*

Akhmedov Magomedsalikh
employee,
Academy FSO of Russia,
Russia, Orel

INFORMATION BASIS INTERLINGUAL CONVERSION UZBEK-TAJIK LANGUAGE COUPLE

Abstract*. The article provides systematized information in the field of Uzbek-Tajik interlingual transformation of texts, a comparative characteristic is made and the features of word formation of the main parts of speech in a given language pair are highlighted.*

Keywords*: cross-language conversion, Uzbek, Tajik, rule-based machine translation.*

Введение

Таджикский и узбекский языки, не являясь близкими, развивались в одном регионе в условиях конвергентной эволюции. В процессе постоянного взаимодействия два языка приобрели сходство в различных частях лексики, а также приобрели бесчисленное количество

диалектов. Лексический фонд обоих языков начал пересекаться ещё с завоевания арабами среднеазиатского и центрально-азиатского регионов. Заметное пополнение заимствованиями в лексике двух языков замечается в XX веке, во время вхождения Узбекской ССР и Таджикской ССР в состав Советского Союза [14].

В большинстве стран Центрально-Азиатского региона завершены этапы разработки локализированных версий систем электронного документооборота, шрифтов, электронных словарей, а также введения национальных языков в повседневную деятельность органов государственной власти, общественных и коммерческих организаций. Однако, в некоторых странах уже начинается переход к следующему этапу, и, основываясь на анализе языковой обстановки в регионе [1], выдвигается теория о возможности создания многоязыковой системы машинного перевода (МП). Предполагается, что узбекско-таджикская языковая пара будет связующим звеном в разработке системе перевода между тюркскими и персидскими языками. Актуальность создания автоматизированной системы машинного перевода между узбекским и таджикским языками обосновывается и востребованностью перевода с узбекского языка и языков фарси и дари на русский [7], а также количеством запросов на перевод в рассматриваемой языковой паре.

Работа по исследованию возможности автоматизации процесса перевода в узбекско-таджикской языковой паре уже была проведена [12], однако в данной статье мы рассмотрим общие характеристики и обобщённые правила преобразования основных частей речи двух исследуемых языков и выведем наиболее подходящие соответствия морфемам узбекского языка в таджикском языке. Собранный материал позволит укрепить базу для разработки потенциального программного средства автоматизированной морфологической конверсии слов узбекского языка в слова таджикского языка. Ввиду близости лексической составляющей языков рассматривается возможность создания системы именно типа «морфемный преобразователь», в котором действия преобразования не выходят за рамки одного слова или графематического элемента.

В ходе выполнения проекта будет использована научная база лингвистических исследований Академии наук Республики Таджикистана [3-5], а также профессорско-преподавательского состава образовательных учреждений высшего образования Республики Узбекистан [9-10].

Относительно высокий коэффициент лексических соответствий для двух разнородных языков доказывает возможность создания системы машинного перевода без наличия крупной базы переводов лексических значений. Основной задачей в разработке вышеупомянутой системы является структуризация базы правил межъязыкового преобразования, её преобразование в алгоритмы, а также сбор базы переводов всех известных местоимений, союзов, послелогов, предлогов, частиц, аффиксов и окончаний. Добавив в систему обработчик стопслов мы получим относительно точный узбекско-таджикский офлайн-переводчик.

Сравнительная характеристика языков

Узбекский, как и прочие тюркские, – синтетический агглютинативный язык. В отличие от большинства других тюркских языков, для узбекской морфологии характерна одновариантность аффиксов. Не имеет грамматической категории рода: отсутствует согласование в роде, падеже и в числе определения и определяемого. Обязательным является согласование подлежащего и сказуемого в лице, но не обязательно в числе. Основные параметры языковой пары представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Основные параметры языковой пары

Параметр	Узбекский язык	Таджикский язык
Морфологический тип	синтетический агглютинативный	аналитический
Языковая группа	тюркская	персидская
Порядок слов в предложении	строгий (подлежащее – … – сказуемое)	
Письменность	латиница, расширенная кириллица	расширенная кириллица
Основные заимствования	арабский, русский	
	киргизский, турецкий, таджикский	дари, фарси, узбекский

Таджикский же язык по своему грамматическому типу принадлежит к числу языков аналитического типа и, в отличие от древнеперсидского языка, не имеет системы флективных форм. Отношения между словами выражаются не при помощи падежей, а через синтаксис: предлоги, послелоги, изафет, порядок слов в предложении и др.

Агглютинативный тип словообразования предполагает однозначное определение свойств слова при морфологическом

анализе, что значительно упрощает машинный перевод из узбекского языка.

Основные объекты перевода

Имя существительное. Одной из характеристик узбекского языка является система падежей для имён существительных, отчасти схожей с оной в русском языке. В таблице 2 представлены наиболее подходящие соответствия таджикских морфем узбекским падежам.

Таблица 2 – Соответствия склонений в узбекском и таджикском языках

Падеж	Вопросы	Узб. аффиксы	Тадж. соотв.
Именительный	кто? что?	-	-
Притяжательный	кого? чего?	***-нинг***	Изафет
Дательный	кому? чему?	***-га***	предлог ***ба***
Винительный	кого? что?	***-ни***	***-ро***
Местный	у кого? где?	***-да***	предлог ***дар***
Исходный	от кого? от чего?	***-дан***	предлог ***аз***

В качестве примера рассмотрено преобразование существительного в предложении ***«Биз Москвага борамиз» (Мы поедем в Москву)*** (рисунок 2).



Рисунок 1 – Пример преобразования существительного в дательном падеже

Так, преобразование типа «существительное – существительное» в данной языковой паре является относительно простым мероприятием. Из представленного списка соответствий перевод с узбекского языка существительного, стоящего в родительном падеже, будет являться сложно воспроизводимым, так как алгоритм данного преобразования будет схож с алгоритмом преобразования прилагательных между языками. Отдельно можно отметить и то, что кроме аффиксов в узбекском языке широко используются и послелоги, роль которых в таджикском языке выполняют сложные предлоги.

Глагол. Основным «конструктором» глаголов в таджикском языке является *основа прошедшего времени*, участвующая в образовании многих глагольных форм в тексте. Она находится отбрасыванием окончания ***-ан*** от инфинитива, например, ***гуфтан (говорить) – гуфт***. С её помощью можно получить также и *основу настоящего времени*, отличия в использовании которой нужно рассматривать более детально. В узбекском языке эту роль выполняет *основа глагола*, которую получают отбрасыванием аффикса ***-моқ*** от инфинитива. Например, ***келмоқ (приходить) – кел.***

Общей чертой образования глаголов в обоих языках является привязанность к лицу и отсутствие привязанности к роду. Так, две русские фразы ***ты пришёл*** и ***ты пришла*** и по-узбекски будут писаться одинаково ***сан келдинг,*** и по-таджикски ***ту омадӣ,*** а глагол ***пришли*** в разных контекстах ***мы пришли, вы пришли, они пришли*** в обоих языках будет писаться по-разному в каждом из случаев.

В общем и целом, можно представить глаголы в следующую структуру.

В качестве примера в узбекском языке взят составной глагол ***ҳазил қилмоқ (шутить)*** (рисунок 2).

Элемент составного глагола	Основа глагола	Аффикс отрицания	Аффикс продолженности	Аффикс лица	Аффикс вопроса
Ты не шутишь?					
ҳазил	қил	ма	й	сан	ми

Рисунок 2 – Структура типичного узбекского глагола

В качестве примера в таджикском языке взят составной глагол ***зиндагонӣ кунондан (жить)*** (рисунок 2).

Элемент составного глагола	Префикс отрицания	Префикс продолжённости	Основа прошедшего (настоящего) времени	Аффикс лица
Не живут				
зиндагонӣ	на	ме	кун	анд

Рисунок 3 – Структура типичного таджикского глагола

Структура предложений в обоих языках, в которых сказуемое (которое, обычно, является глаголами) располагается в конце, упрощает их поиск в тексте до уровня «очень просто». Порядок аффиксов в глаголе в узбекском языке фиксирован, что позволяет однозначно определить его свойства и преобразовать в морфемы таджикского языка, переведя только основу этого глагола.

Имя прилагательное. Относительные прилагательные обозначают признак предметов через отношение одних предметов к другим. Так, в узбекском языке прилагательные образуются добавлением аффиксов **-ги, -даги, -ли** и др., а также притяжательных аффиксов к существительному. Например, **кечаги (вчерашний).**

В таджикском же, языке для обозначения отношения применяют специальное окончание – изафет. Определяемое (существительное) стоит перед определением (прилагательным) и принимает окончание ***-ӣ.*** Например, ***шаҳрӣ калон (город большой).***

Сложностью перевода прилагательных в таджикский язык является правило изафета. Согласно ему, преобразованию подвергается не только определение, но и определяемое, что значительно усложняет алгоритм перевода и требует внедрения дополнительно модуля синтаксического анализа и синтеза.

Отдельно от всех остальных частей так же можно отметить и местоимения, которые имеют немалую долю встречаемости в текстах на обоих языках, однако их рассмотрение, ввиду их количества и разнообразия, не вместится в рамки одной статьи.

Созданная первичная информационная база морфологических соответствий составляет основу для создания системы машинного перевода.

Способ реализации

Представленные характеристики схожести узбекского и таджикского языков доказывают возможность создания автоматизированной системы машинного перевода на основе правил (RBMT) для рассматриваемой языковой пары на трансферной схеме, представленной на рисунке 4.



Рисунок 4 – Схема автоматизации межъязыкового преобразования

Для данной языковой пары такая схема является довольно актуальной, ввиду схожести их в лексической части и пересечениях в схемах построения морфем.

Основным достоинством такой системы является высокая полнота охвата текстов при приемлемом уровне качества перевода, а также низкий уровень затрат на первичную разработку и модернизацию.

Современные средства межъязыковых преобразований, такие как Google Переводчик и Yandex. Переводчик, осуществляют статистический либо нейронный машинный перевод текста, используя большую базу переводов. Реализация таких методов предполагает наличие высокопроизводительного и ёмкого аппаратного обеспечения. Использование же вышеперечисленных сервисов требует и выхода в сеть Интернет.

Метод RBMT позволяет осуществлять МП без использования большой базы данных, однако увеличивают требуемые вычислительные мощности для выполнения морфологического анализа в сравнении со статистическим методом машинного перевода [15]. Этот метод и позволит построить относительно эффективную офлайн-систему перевода.

Потенциальная система машинного перевода должна переводить текст, как из латиницы, так и из кириллицы, так как в Республике Узбекистан повсеместно используются обе графические системы письма. На начальном этапе разработки допускается межъязыковое преобразование только в рамках одного слова, то есть, главной задачей стоит построение морфологического преобразователя [1] для системы узбекско-таджикского перевода.

Заключение

Рассмотрение исторического взаимодействия двух древних наций Средней Азии показало, как фактор «соседства» народов подвержен взаимовлиянию языков, как на литературную, так и на бытовую и научную составляющую лексики с обеих сторон. Исследование лексического сходства и сравнительная характеристика языков позволила сделать вывод о возможности создание простой системы автоматизированного межъязыкового преобразования на основе правил без наличия крупной базы лексических переводов. Дальнейшей задачей в данном направлении является разработка программного средства по предложенным в статье моделям преобразований слов.

Список литературы

1. Гращенко, Л.А. Анализ состояния и перспектив развития систем машинного перевода для стран Центральной Азии и Кавказа / Л.А. Гращенко // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2011. – №14. – С. 92-106.
2. Гращенко Л.А. Комплекс средств автоматизации межъязыковых преобразований текстов для Центрально-азиатского региона – Душанбе: Институт математики Академии наук Республики Таджикистан, 2012.
3. Усманов З.Д., Давудов Г.М. Частотный морфемный словарь таджикского литературного языка // Доклады АН РТ – 2011. – т. 53. – №4. – С. 257-262.
4. Усманов З.Д., Давудов Г.М. Концептуальная модель автоматического морфологического анализа таджикских словоформ // Доклады АН РТ – 2014. – т. 57. – №3. – С. 205-209.
5. Гращенко, Л.А. Математические основы автоматизированной таджикско-персидской конверсии графических систем письма: дис. … канд. физ.-мат. н. – Душанбе: Институт математики АН РТ, 2010. – 115 с.
6. Сайидырахимова Д.С. Общелингвистические особенности наречия в таджикском языке и их соответствия в узбекском: дис. … канд. фил. н. – Худжанд, 2007.
7. Модин, А.А. О чем молчат биржи переводов? / А.А. Модин, Н.С. Кузьмин // Актуальные вопросы переводоведения и практики перевода – Нижний Новгород: «Альба», 2020. – С. 48-54.
8. Залесковская, Р.М. Опыт совершенствования алфавитов и орфографий языков народов СССР – М.: «Наука», 1982
9. Жураева Н.В., Жураева У.В. Формальные модели членов предложения грамматики узбекского языка в рамках официально-делового стиля // Теория и методика профессионального образования – 2020. – №12(78). – С. 9-12.
10. Алимова, М.Х. Некоторые типологические особенности слова в структуре узбекского языка // European science – 2018 г. – №10(42) – С. 38-42.
11. Солиходжаева, Ш.А. Отнаречные конъюкционализованные служебные слова в таджикском и узбекском языках // Вестник таджикского государственного университета права, бизнеса и политики – 2019 г. – №4(81) – С.136-143.

12. Мадибрагимов, Н.Ш. Сравнение автоматической обработки текстов таджикского и узбекского языков. // Новые информационные технологии в автоматизированных системах – М.: МГИЭМ, 2018. – С. 41-43.
13. Исматуаллев, Х.Х. Русско-узбекско-таджикский разговорник. – Ташкент: Фала УзССР, 1990. – 98 с.
14. Собиров, Э.К. ГУЛЧИН. Избранные статьи по таджикской лексикологии: сборник научных статей. – Москва: Институт языкознания РАН, 2021. – 354 с.
15. Большакова, Е.И. Автоматическая обработка текстов на естественном языке и анализ данных: учебное пособие / Большакова Е.И., Воронцов К.В., Ефремова Н.Э., Клышинский Э.С., Лукашевич Н.В., Сапин А.С. — М.: Издательствово НИУ ВШЭ, 2017. – 269 с.

УДК 004.9

Зеленина Лариса Ивановна
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной математики и
высокопроизводительных вычислений,
Северный (Арктический) федеральный университет
им. М.В. Ломоносова,
Россия, Архангельск

Хаймина Людмила Эдуардовна
кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной информатики и информационной безопасности,
Северный (Арктический) федеральный университет
им. М.В.Ломоносова,
Россия, Архангельск

Федькушова Светлана Ивановна
преподаватель,
Архангельский торгово-экономический колледж,
Россия, Архангельск

Хаймин Евгений Сергеевич
старший преподаватель кафедры прикладной информатики и информационной безопасности,
Северный (Арктический) федеральный университет
им. М.В.Ломоносова,
Россия, Архангельск

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПИЩЕВЫХ СРЕД

Аннотация. *Широко используемые в пищевой промышленности спектральные методы оценки физико-химических свойств пищевых смесей позволяют получать информацию об их различных (структурных, микро- и макроскопических и проч.) свойствах на основе внешних воздействий, например, электромагнитных волн. В статье рассматривается вопрос реализации высокоразрешающих*

методов численной обработки для различия спектральных распреде- распределений на основе информационных технологий.

Ключевые слова: *спектральные методы, анализ пищевых смесей, свойства пищевой среды, информационные технологии.*

Zelenina Larisa Ivanovna
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and High-Performance Computing, Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov,
Russia, Arkhangelsk

Khaimina Lyudmila Eduardovna
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Applied Informatics and Information Security, Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov,
Russia, Arkhangelsk

Fedkushova Svetlana Ivanovna
teacher, Arkhangelsk College of Commerce and Economics,
Russia, Arkhangelsk

Khaimin Evgeny Sergeevich
Senior Lecturer of the Department of Applied Informatics and Information Security, Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov,
Russia, Arkhangelsk

SPECTRAL METHODS OF FOOD MEDIA ANALYSIS

Annotation. *Spectral methods widely used in the food industry for evaluating the physico-chemical properties of food mixtures allow obtaining information about their various (structural, micro- and macroscopic, etc.) properties based on external influences, for example, electromagnetic waves. The article deals with the implementation of high-resolution numerical processing methods for distinguishing spectral distributions based on information technology.*

Keywords: *spectral methods, analysis of food mixtures, properties of*

the food medium, information technology.

Интеллектуальная компьютерная квалиметрия позволяет осуществлять оперативный контроль различных характеристик пищевых сред. Используемые автоматизированные экспертные системы сравнивают получаемые инструментальные характеристики с соответствующими потребительскими характеристиками исследуемой среды. И, как результат, получение самостоятельной оперативной оценки потребительских свойств исследуемых сред. Системы компьютерной квалиметрии позволяют

- сравнивать спектральные распределения
- формировать базы данных входных спектров $\{S_m = [S_{1m}, S_{2m}, ..., S_{Nm}]\}$ ($m = 1, 2, \ldots, M$) и «эталонных» (используемых для сравнения) векторов $\{Y_m = [Y_{1m}, Y_{2m}, ..., Y_{Nm}]\}$ описания свойств пищевых продуктов
- на основе моделей регрессионных зависимостей формулировать экспертные правила, позволяющие строить вектор результата Y по входному вектору X [1; 2;3].

Широкое применение имеют спектральные методы, используемые для оценки качества жидких сред при воздействии электромагнитных волн различных диапазонов. Формируемый при этом вектор отклика исследуемых сред на внешнее воздействие, позволяет получать информацию об их различных (структурных, микро- и макроскопических и проч.) свойствах [1;2;3;4].

Спектральные методы оценки физико-химических свойств пищевых сред позволяют инструментально получить количественно измеримые данные как величину откликов равновесных состояний данных сред при возмущении их широкополосными воздействиями различных полей.

Рассмотрим процесс определения степени различия известных спектральных распределений. Значения спектральных распределений определены инструментально для пищевой среды при различных сроках хранения и указаны на рисунке 1.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	Транспонированный вектор S_1^T спектрального распределения S_1						
4	Коэффициенты ядра преобразонаия Гильберта G	-1	0	1	-1	0	1
5							
6	***Циклическая свертка исходного спектрального распределения S_1 с ядром преобразования Гильберта***	COH_1					
7	Спектральное распределение S_1	12,05					
8		10,5					
9		27,38					
10							
11							
12	Транспонированный вектор S_2^T спектрального распределения S_2						
13	***Циклическая свертка исходного спектрального распределения S_2 с ядром преобразования Гильберта***	COH_2					
14	Спектральное распределение S_2	11,89					
15		10,89					
16		29,01					
17							
18							

Рисунок 1 – Шаблон решения задачи

1. Для вычисления матрицы связности требуется знать циклическую свертку спектрального распределения с указанным ядром преобразования (рисунок 4).

На рисунке 2 продемонстрирован процесс вычисления циклической свертки как произведение матриц транспонированного вектора спектрального распределения на вектор коэффициентов ядра преобразования Гильберта G.

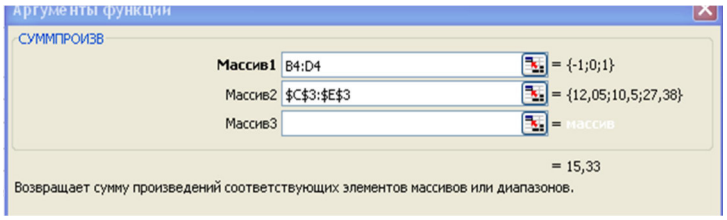


Рисунок 2 – Вычисление циклической свертки

Матрица связности (рисунок 3) определяется по формуле

$$COH(S) = S \bullet I$$

где S -спектрального распределения

I - циклическая свертка спектрального распределения.

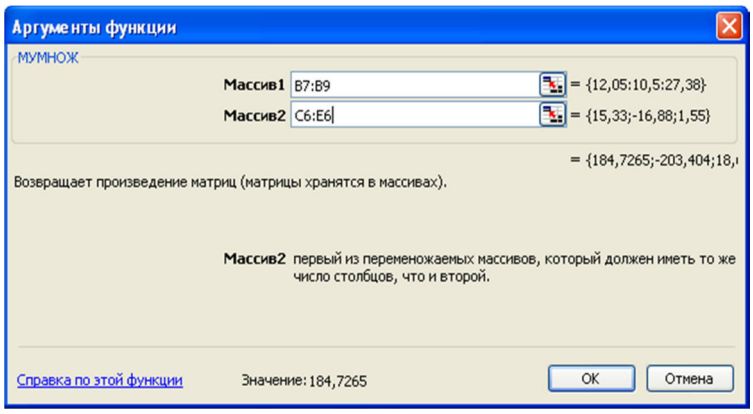


Рисунок 3 – Вычисление матрицы связности

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	Транспонированный вектор S_1^T спектрального распределения S_1		12,05	10,5	27,38			
4	Коэффициенты ядра преобразовнаия Гильберта G	-1	0	1	-1	0	1	
5								
6	***Циклическая свертка исходного спектрального распределения S_1 с ядром преобразования Гильберта***	**COH_1**	***15,33***	***-16,88***	***1,55***			
7	Спектральное распределение S_1	12,05	184,7265	-203,404	18,6775			
8		10,5	160,965	-177,24	16,275			
9		27,38	419,7354	-462,174	42,439			
10								
11								
12	Транспонированный вектор S_2^T спектрального распределения S_2		11,89	10,89	29,01			
13	***Циклическая свертка исходного спектрального распределения S_2 с ядром преобразования Гильберта***	**COH_2**	***17,12***	***-18,12***	***1***			
14	Спектральное распределение S_2	11,89	203,56	-215,45	11,89			
15		10,89	186,44	-197,33	10,89			
16		31	465	-525,66	29,01			
17								

=МУМНОЖ(B14:B16;

Рисунок 4 – Результат нахождения матриц связности $COH_1(S_1)$ и $COH_2(S_2)$

2. Определим неоптимальные меры сходства между векторами S_1 и S_2 и их матрицами связности (рисунок 5)

$$\mu(S_1, S_2) = 2\langle S_1 S_2 \rangle / (\langle S_1 S_1 \rangle + \langle S_2 S_2 \rangle$$

$$\mu(COH_1, COH_2) = 2\langle COH_1 COH_2 \rangle / (\langle COH_1 COH_1 \rangle + \langle COH_2 COH_2 \rangle$$

где $<S_1S_2>$ - скалярное произведение векторов S_1 и S_2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	Транспонированный вектор S_1^T спектрального распределения S_1		12,05	10,5	27,38				
4	Коэффициенты ядра преобразовнаия Гильберта G	-1	0	1	-1	0	1		
5									
6	***Циклическая свертка исходного спектрального распределения S_1 с ядром преобразования Гильберта***	**COH1**	***15,33***	***-16,88***	***1,55***			$<S_1S_2>$ =	=СУММПРОИЗВ(B7:B9;B14:B16)
7	Спектральное распределение S_1	12,05	184,7265	-203,404	18,6775			$<S_1S_1>$ =	=СУММПРОИЗВ(B7:B9;B7:B9)
8		10,5	160,965	-177,24	16,275			$<S_2S_2>$ =	=СУММПРОИЗВ(B14:B16;B14:B16)
9		27,38	419,7354	-462,1744	42,439			$\mu(S_1S_2)$=	=2*I6/(I7+I8)
10									
11									
12	Транспонированный вектор S_2^T спектрального распределения S_2		11,89	10,89	29,01				
13	***Циклическая свертка исходного спектрального распределения S_2 с ядром преобразования Гильберта***	**COH2**	***17,12***	***-18,12***	***1***			$<COH_1COH_2>$ =	=СУММПРОИЗВ(C7:E9;C14:E16)
14	Спектральное распределение S_2	11,89	203,5568	-215,4468	11,89			$<COH_1COH_1>$ =	=СУММПРОИЗВ(C7:E9;C7:E9)
15		10,89	186,4368	-197,3268	10,89			$<COH_2COH_2>$ =	=СУММПРОИЗВ(C14:E16;C14:E16)
16		29,01	496,6512	-525,6612	29,01			$\mu(COH_1COH_2)$ =	=2*I13/(I14+I15)
17									

Рисунок 5 – Результат вычислений неоптимальных мер сходства

3. Определим степень различия по формуле

$$SR = \mu(S_1, S_2) - \mu(COH_1, COH_2)$$

$\mu(S_1, S_2) = 0.999$
$\mu(COH_1, COH_2) = 0{,}990$

$$SR = \mu(S_1, S_2) - \mu(COH_1, COH_2) = 0{,}009$$

Таким образом, значение SR увеличилось на 0,9%.

Задача преобразования численной информации, получаемой при исследовании пищевых сред, в их качественные потребительские свойства является актуальной задачей пищевой промышленности.

Список литературы

1. Зеленина Л.И. Разработка и применение численных методов для комплексных программ актуальных задач пищевой промышленности: автореферат дисс… кандидата технических наук: 05.13.08. - Москва, Московский государственный университет технологий и управления, 2006.
2. Красников С.А. Методология построения систем контроля качества жидких сред по спектральным характеристикам: автореферат дисс. … д-ра техн. наук: 05.13.01. – Владимир: Владимирский государственный университет, 2012.

3. Николаева С.В. Системный анализ многокомпонентных пищевых объектов и технологий в условиях информационной неопределённости: автореферат дисс. … д-ра техн. наук: 05.13.01. – Воронеж: Воронежский государственный университет инженерных технологий, 2013.
4. Николаева С.В., Зеленина Л.И., Сартаков М.В. Анализ и оптимизация технологии составления рецептурных смесей // Техника и технология. №4. 2007. С. 24-28.

Иванов Максим Владимирович
кандидат технических наук, доцент
сотрудник,
Россия, Орел

Никандров Матвей Денисович
сотрудник,
Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации,
Россия, Орел

BigData И СОВРЕМЕННЫЕ СПОСОБЫ ОБРАБОТКИ БОЛЬШИХ ДАННЫХ

Аннотация. *В статье обсуждаются вопросы актуальности BigData в мировом и российском рынке для задач коммерческих компаний и применения технологий в отраслях бизнеса. Приводится обзор существующих программных продуктов обработки больших данных, а именно MapReduce, Spark и Apache Kafka.*

Ключевые слова: *BigData, аналитика, обработка больших данных, MapReduce, Spark, Apache Kafka.*

Ivanov Maxim Vladimirovich
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
employee,
Russia, Orel

Nikandrov Matvey Denisovich
employee,
Academy of the Federal Security Service of the Russian Federation,
Russia, Orel

BigData AND MODERN WAYS OF PROCESSING BIG DATA

Abstract. *The article discusses the relevance of BigData in the global and Russian market for the tasks of commercial companies and the use of technologies in business sectors. An overview of existing big data processing software products, namely MapReduce, Spark and Apache Kafka, is provided.*

Keywords: *BigData, analytics, big data processing, MapReduce, Spark, Apache Kafka.*

1. Введение

BigData – это объемные, масштабные массивы структурированных и неструктурированных данных. На сегодняшний день потоки информации и ее быстрая обработка – это самая ценная вещь в мире. Это направление, относительно новое для российского бизнеса, получило широкое распространение в западных странах. Связано это с тем, что в эпоху информационных технологий, особенно после бума социальных сетей, по каждому пользователю интернета стало накапливаться значительное количество информации, что в конечном счете дало развитие направлению *BigData*. Большие данные характеризуются тремя основными признаками: *Volume, Velocity, Variety.*

Неструктурированная информация включает в себя видео, аудио файлы, свободный текст, информацию, поступающую из социальных сетей. На сегодняшний день 80 % информации входит в группу неструктурированной. Данная информация нуждается в комплексном анализе, чтобы сделать ее полезной для дальнейшей обработки.

Авторы статьи провели анализ научных-технических источников по *BigData*, в ходе которого определили основные задачи:

1. Исследование научно-технической информации по *BigData*.
2. Выявление достоинств и недостатков способов по обработке больших данных.
3. Анализ и сравнение программных продуктов, используемых в *BigData*.

2. Рынок *BigData*

Анализ рынка свидетельствует о том, что данное направление актуально и постепенно набирает обороты, что более подробно отражено в статье пресс-центра "*DelProf*" [1]. В 2018 году объем глобального рынка *BigData* и бизнес-аналитики достиг 168,8 млрд долл. По итогам 2019 года объем глобального рынка больших данных увеличился на 12 %, по сравнению с показателями предыдущего года, и достиг 189,1 млрд долл. Кроме того, в период 2018–2022 гг. предполагается рост рынка со среднегодовым темпом на уровне 13,2 %, представлен на рисунке 1. Таким образом, объем рынка может увеличиться до 274,3 млрд долл. к 2022 году. *ResearchAndMarkets*

прогнозирует возможные темпы роста глобального рынка *BigData* на уровне 19,7 % ежегодно на период 2019–2025 гг.

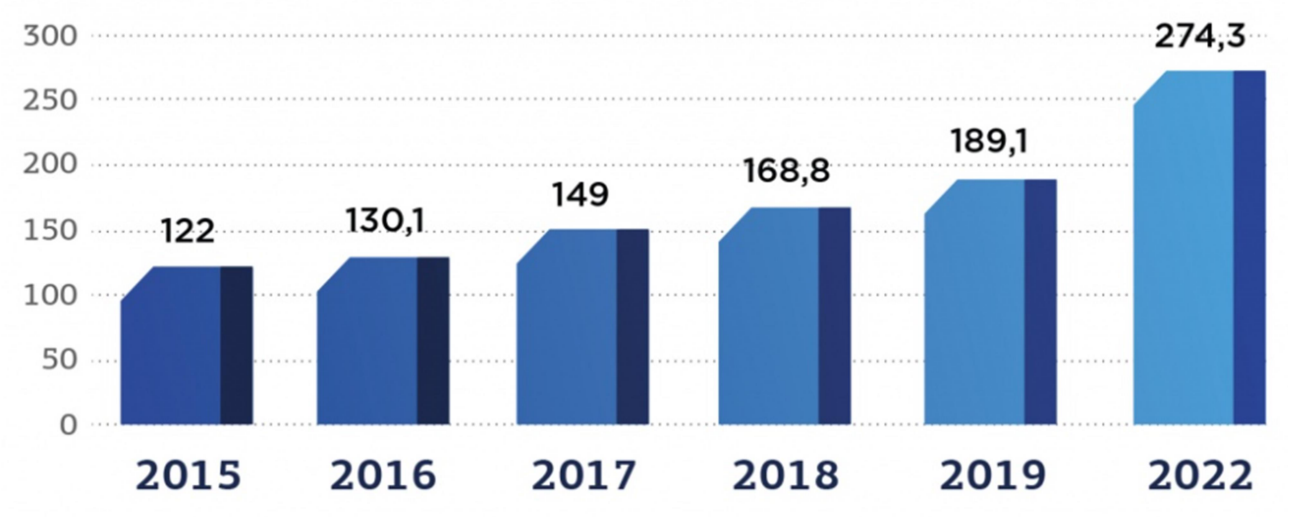


Рисунок 1— Динамика роста рынка больших данных, млрд долл.
(разработано авторами на основе источника [2])

Динамика российского рынка занимает незначительную долю в мировом предложении и потреблении информационных технологий. Однако в 2018–2019 гг. было принято немало решений и реализовано достаточное количество законодательных инициатив, способствующих развитию отечественного рынка *BigData*.

По результатам опроса, проведенного *International Data Corporation (IDC) и Hitachi Vantara* в ходе исследования «Аналитика больших данных как инструмент бизнес-инноваций», более 55 % российских организаций выделяют бюджет на внедрение технологий больших данных (участие приняли более 100 компаний со штатом от 500 чел.).

По состоянию на конец 2019 год *Boston Consulting Group* оценивает объем российского рынка больших данных в 45 млрд руб. с темпом прироста 12 % в течение последних пяти лет, сообщает "*DelProf*" [2].

Сегодня лидерами по внедрению технологий в российских компаниях являются такие инструменты цифровизации, как роботизированная автоматизация бизнес-процессов, использование чат-ботов, инструментов анализа больших данных и предиктивной аналитики.

Технология анализа больших данных является наиболее часто внедряемой технологией среди российских компаний: 68% организаций на конец 2019 года уже опробовали внедрение инструментов анализа больших данных, что подтверждает актуальность данного направления.

3. Способы обработки больших данных

В настоящее время актуальным вопросом остается каким программным продуктом обрабатывать большие данные, в статье *ETL* (*Extract, Transform, Load*)-разработчика Эмилии Межековой представлена экосистема больших данных и примеры инструментов, которые можно использовать для каждой группы. Но рассматривать все программные продукты мы не станем для более понятного представления, а остановимся на наиболее популярных и простых фреймворков: *Hadoop MapReduce* и *Apache Spark.*

В *MapReduce* мы берем входные данные и делим их на множество частей. Каждая часть затем отправляется на другой компьютер для обработки и наконец, агрегирования в соответствии с заданной функцией, как представлено на рисунке 2.

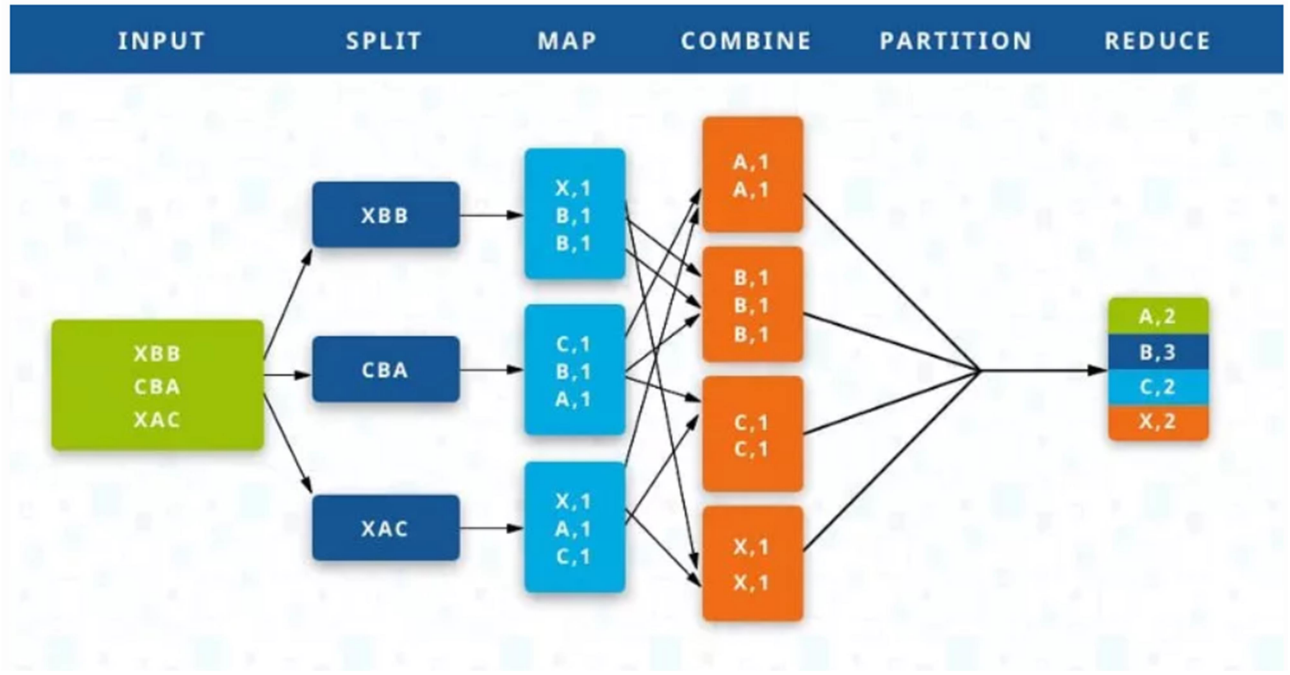


Рисунок 2 — Алгоритм обработки больших данных с помощью MapReduce (разработано авторами на основе источника [3])

Рассмотрим алгоритм более подробно. В "*Input*" поступают входные данные, затем происходит разбивка данных на порции (*Splitting*). В "*Mapping*" происходит обработка этих порционных данных воркерами (вычислительными процессами) в формате ключ-значение. Для этого алгоритма ключ – слово, значение – количество вхождений данного слова, после осуществляется сортировка ключей (*Shuffling*), чтобы упростить обобщение данных и сделать всю работу в одном воркере, не раскидывая их по разным местам, после того, как

мы посчитали количество одинаковых слов на каждом отдельном воркере, объединяем их вместе (*Reducing*).

Между этапами происходит запись промежуточных данных на диск, воркеры и данные обособлены друг от друга. Данный алгоритм отлично подходит для кластеров. Подсчёт происходит в разы быстрее, чем на одной машине.

Но есть и недостатки, обусловленные архитектурными особенностями этой вычислительной модели:

1. недостаточно высокая производительность: Функции *Reduce* не запустятся до завершения всех процессов *Map*. Все операции проходят по циклу чтение-запись с жёсткого диска, что влечёт задержки в обработке информации;
2. программисту необходимо прописывать код для этапов *Map* и *Reduce* самостоятельно;
3. ограниченность применения: высокие задержки распределённых вычислений, приемлемые в пакетном режиме обработки, не позволяют использовать классический *MapReduce* для потоковой обработки в режиме реального времени. Для решения этой проблемы, свойственной *Apache Hadoop*, были созданы другие *BigData* – фреймворки, в частности *Apache Spark*.

Apache Spark – это платформа, которая используется в *BigData* для кластерных вычислений и крупномасштабной обработки данных. Spark обрабатывает данные в оперативной памяти и редко обращается к диску, поэтому работает очень быстро.

Apache Spark полностью совместим с экосистемой *Hadoop* и легко встраивается в существующие решения. У него нет собственного хранилища данных, и он может работать с различными источниками: *HDFS, Hive, S3*, *HBase, Cassandra* и другими. Поддерживает несколько языков программирования: *Scala, Python, Java, SQL.*

Spark используется для обработки данных, например, фильтрации, сортировки, очистки и так далее. Его место в процессе работы с большими данными показано на рисунке 3.

Рассмотрим более подробно как Spark решает проблемы *MapReduce*.

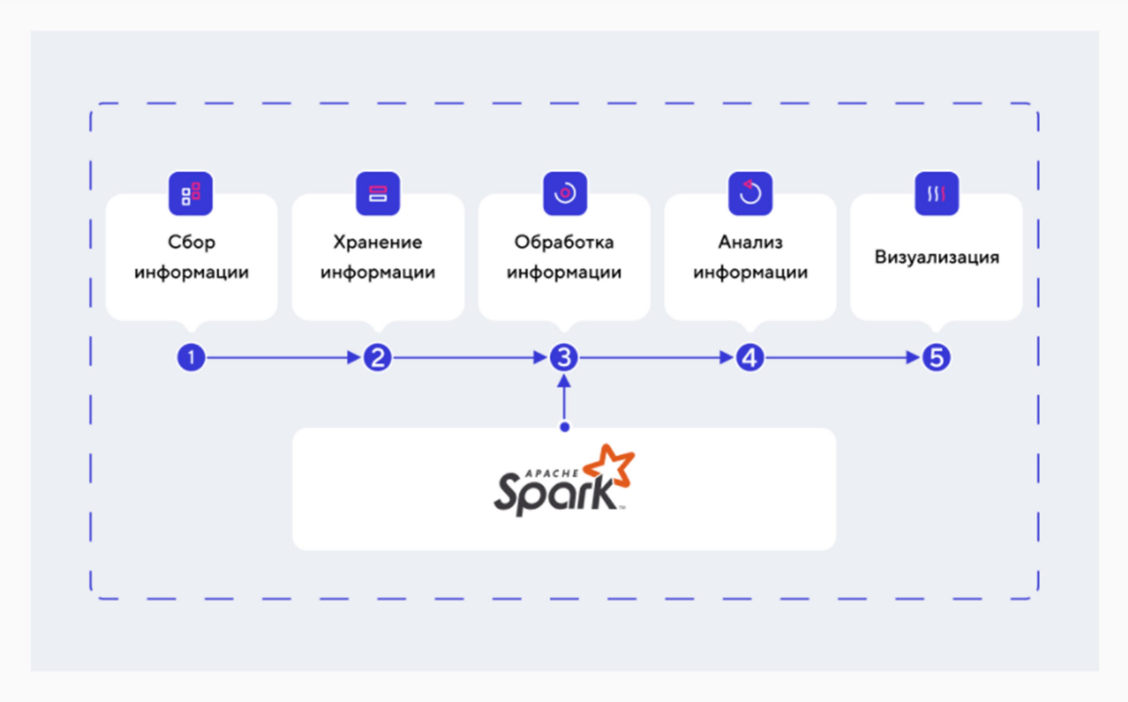


Рисунок 3 — Место внедрения Spark в процесс обработки больших данных (разработано авторами на основе источника [4])

Spark обрабатывает данные в памяти и практически не обращается к диску. Если же объем обрабатываемых данных больше, чем объем *RAM, Spark* сбрасывает часть данных на диск. При этом в него встроено множество оптимизаторов, которые позволяют сократить число обращений к диску. Поэтому *Spark* быстрее *MapReduce* в десятки, иногда в сотни раз.

В *Spark* меньше шансов сделать серьезную ошибку, а если она все-таки будет, то ее легче исправить.

Подводя краткий итог сравнения, можно сказать, что *Hadoop MapReduce* – устаревающая технология, а *Apache Spark* практически стал стандартом в области больших данных. Для более эффективной работы *Spar*k проводят интеграцию с программными продуктами, например, *Apache Kafka [5]*.

Apache Kafka не предназначен для интеллектуальной обработки данных, поэтому необходимы другие средства *BigData*. В таком случае целесообразно использовать *Spark Streaming*, который будет обрабатывать потоки сообщений *Apache Kafka* и записывать результат обработки в облачное хранилище, базу данных (*Neo4j*) или распределенную файловую систему типа *HDFS*. Интеграция *Apache Kafka* и *Spark Streaming* обеспечивает непрерывный конвейер (*pipeline*) сбора и интеллектуальной обработки потоков *BigData* в режиме реального времени [6].

Spark используется для обработки данных, например, фильтрации, сортировки, очистки и так далее. Его место в процессе работы с большими данными показано на рисунке 4.

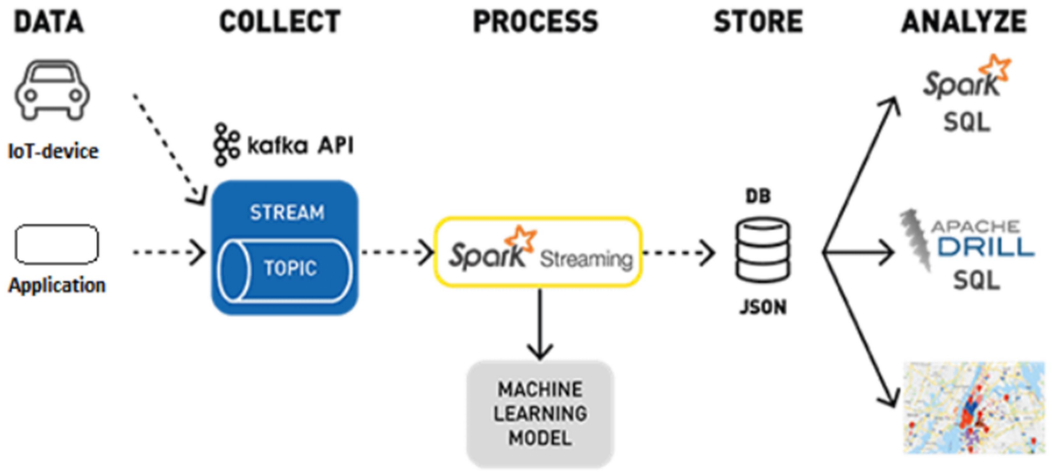


Рисунок 4 — Пример интеграции Apache Kafka и Spark
(разработано авторами на основе источника [7])

Существует два способа интеграции *Apache Kafka* и *Spark*, рассмотрим каждый способ подробно. Первый способ заключается в интеграции Кафка создает поток входящих сообщений, отправляя данные получателю (*Receiver*) на обработку в *Spark,* представлен на рисунке 5. В *Spark Streaming* запускаются задания (*jobs*) на исполнение (*Executor*), в рамках которых обрабатываются данные. Для исключения потери данных необходимо дополнительно подключить журнал опережающей записи (*WAL, Write-Ahead Log*), который синхронно сохраняется всю информацию от *Kafka* в распределенной файловой системе, например, *HDFS*. Благодаря этому даже при сбое все данные можно восстановить [8].

Таким образом, *Kafka* создает множество входных потоков *BigData*, отправляя их получателю в *Spark Streaming* и по *API (Application programming interface)* сохраняя в *Zookeeper* потребленные считываемые фрагменты. При этом информация реплицируется дважды: сначала в *Kafka*, а затем – в журнале опережающей записи. Такая цепочка надежно исключает риски потери данных, но повышает вероятность, что отдельные записи могут быть потреблены дважды из-за несогласованности между механизмом передачи данных *Kafka – Spark Streaming* и считыванием фрагментов в *Zookeeper [10]*.

Второй способ заключается в прямой интеграции *Kafka* и *Spark*, считается более эффективным и дает надежные сквозные гарантии.

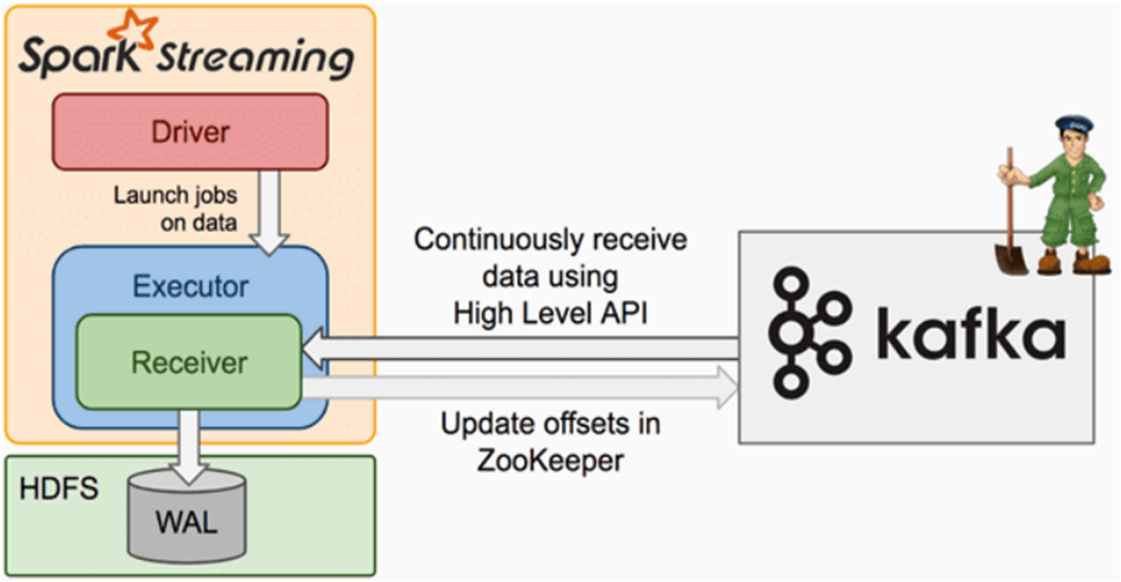


Рисунок 5 — Интеграция Apache Kafka и Spark через получателей сообщений и Zookeeper (разработано авторами на основе источника [9])

В этом случае выполняется периодический опрос *Kafka* о смещениях вычитанных данных (*offsets*) по каждому разделу или топику, а не доставка данных через получателей. Для правильной обработки каждого пакета определяется размер считываемого фрагмента. А считывание диапазонов смещения из *Kafka* реализуется через вышеописанный *API* потребления. Таким образом, весь процесс напоминает считывание файлов из файловой системы [11].

4. Заключение

В статье представлен анализ рынка *BigData* и сравнение алгоритмов обработки больших данных, а также были выявлены их недостатки и достоинства. По результатам анализа можно сделать вывод о том, что рынок *BigData* все еще находится на ранних стадиях развития, и в ближайшем будущем мы будем наблюдать его рост и расширение возможностей данных технологий. Также результат сравнения алгоритмов обработки показал, что интеграция *Kafka* и *Spark* обладает следующими преимуществами: упрощенный параллелизм, эффективность, исключение дублирования сообщений за счет стратегии «строго однократная доставка».

Список литературы

1. Big Data: перспективы развития, тренды и объемы рынка больших данных — аналитические материалы Группы «ДЕЛОВОЙ ПРО-

ФИЛЬ» (delprof.ru) [Электронный ресурс]: Wiki.sagemath.org. URL:https://delprof.ru/press-center/open-analytics/big-data-perspektivy-razvitiya-trendy-i-obemy-rynka-bolshikh-dannykh/.
2. Интеграция Spark Streaming и Kafka / Хабр (habr.com) [Электронныйресурс]:URL: http://habr.com/ru/company/piter/blog/417123/;
3. Apache Kafka — Integration With Spark (tutorialspoint.com) URL: https://www.tutorialspoint.com/apache_kafka/apache_kafka_integration_spark.htm;
4. Интеграция Apache Kafka и Spark Streaming: единство Big Data потоков (bigdataschool.ru) [Электронный ресурс]: URL: https://www.bigdataschool.ru/blog/kafka-spark-streaming-integration-big-data.html;
5. Apache Spark — Википедия (wikipedia.org) [Электронный ресурс]: URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Apache_Spark;
6. Аналитика в режиме реального времени с помощью Spark SQL DataReview.info [Электронный ресурс]: URL:http://datareview.info/ article/analitika-v-rezhime-realnogo-vremeni-s-pomoshhyu-spark-sql/;
7. Apache Kafka и потоковая обработка данных с помощью Spark Streaming / Хабр (habr.com) [Электронный ресурс]: URL: https://habr.com/ru/post/451160/;
8. Apache Spark для работы с Big Data (mail.ru) [Электронный ресурс]: URL: https://mcs.mail.ru/blog/what-is-apache-spark;
9. Анализ больших данных: Spark и Hadoop — Блог (coincase.ru) [Электронный ресурс]: URL: https://coincase.ru/blog/47715/;
10. Обработка больших данных: первые шаги в понимании Hadoop MapReduce и Spark / Блог компании Luxoft / Хабр (habr.com) [Электронный ресурс]: URL:https://habr.com/ru/company/luxoft/blog/569330/;
11. Apache Kafka vs Apache Spark: В чем отличия? (knowledgehut.com) [Электронный ресурс]:URL: https://www.knowledgehut.com/blog/big-data/kafka-vs-spark.

УДК 004.04

Музалевская Марина Анатольевна
кандидат экономических наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Сёмин Андрей Геннадьевич
магистр первого курса, ИПАИТ,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

АНАЛИЗ РАСХОДОВ ОРГАНИЗАЦИЙ НА ИНФОРМАЦИОННЫЕ И КОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ПО ВИДАМ РАСХОДОВ

Аннотация. *В статье проводится анализ расходов организаций на информационные и коммуникационные технологии по видам расходов в Российской Федерации*

Ключевые слова: *анализ, информационные и коммуникационные технологии, расходы организаций, Российская Федерация*

Muzalevskaya Marina Anatolyevna
Candidate of Economic Sciences, docent,
Orel State University,
Russia, Orel

Semin Andrey Gennadievich
First-year Master's degree, IPAIT,
Orel State University,
Russia, Orel

ANALYSIS OF EXPENSES OF ORGANIZATIONS ON INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES BY TYPE OF EXPENSES

Abstract. *The article analyzes the expenses of organizations on information and communication technologies by types of expenses in the Russian Federation*

Keywords: *analysis, information and communication technologies, expenses of organizations, Russian Federation*

Согласно определению, данному Федеральной службой государственной статистики, информационные и коммуникационные технологии (ИКТ) [1], включают в себя достаточное количество быстро развивающихся разделов науки, в том числе физику и математику. Одной из общих проблем для развития всех наук, является финансирование и, как следствие, масштабы развития отрасли, в которой они применяются.

Статистика по данному разделу ведется с 2003 года, несмотря на то, что информационные и коммуникационные технологии начали входить в нашу жизнь намного раньше. Проследим динамику затрат в течение 15 лет - с 2003 по 2018 год. Информация предоставляется не в абсолютных цифрах затрат, а уже частично обработанной - в процентах к итогу.

Расходы на информационные и коммуникационные технологии, в частности, на аппаратное обеспечение, являются наибольшими в 2003 году - 52,3% и наименьшими в 2018 году - 20% от итога (рисунок 1); на приобретение телекоммуникационного оборудования (статистика ведется только с 2014 года) затраты постепенно снижаются с 13,1 до 10,4 процента; на программное обеспечение постоянно увеличиваются - с 7,7% до 18,1% (рисунок 2); на приобретение цифрового контента (статистика пока не ведется) - расходы предположительно должны увеличиваться, так как количество цифрового контента постоянно растет; на оплату услуг электросвязи затраты несколько снижаются - с 20,9% до 17,8% (с наибольшим расходом в 2010 году - 32,6%); из них на оплату сети Интернет (статистика ведется с 2006 года) постепенно снижается - с 5,7% до 4,4%; на обучение сотрудников - расходы снижаются с 0,7% до 0,3% на протяжении всего периода ведения наблюдения (рисунок 3); на оплату услуг сторонних организаций и специалистов по ИКТ, кроме услуг электросвязи и обучения, расходы увеличиваются примерно с 11 до 26 процентов; расходы на прочие нужды остаются примерно на одинаковом уровне - от 7,1 до 6,8 процента, с небольшим всплеском в 2005 году - до 9,5% от итога.



Рисунок 1 – Расходы на аппаратное обеспечение

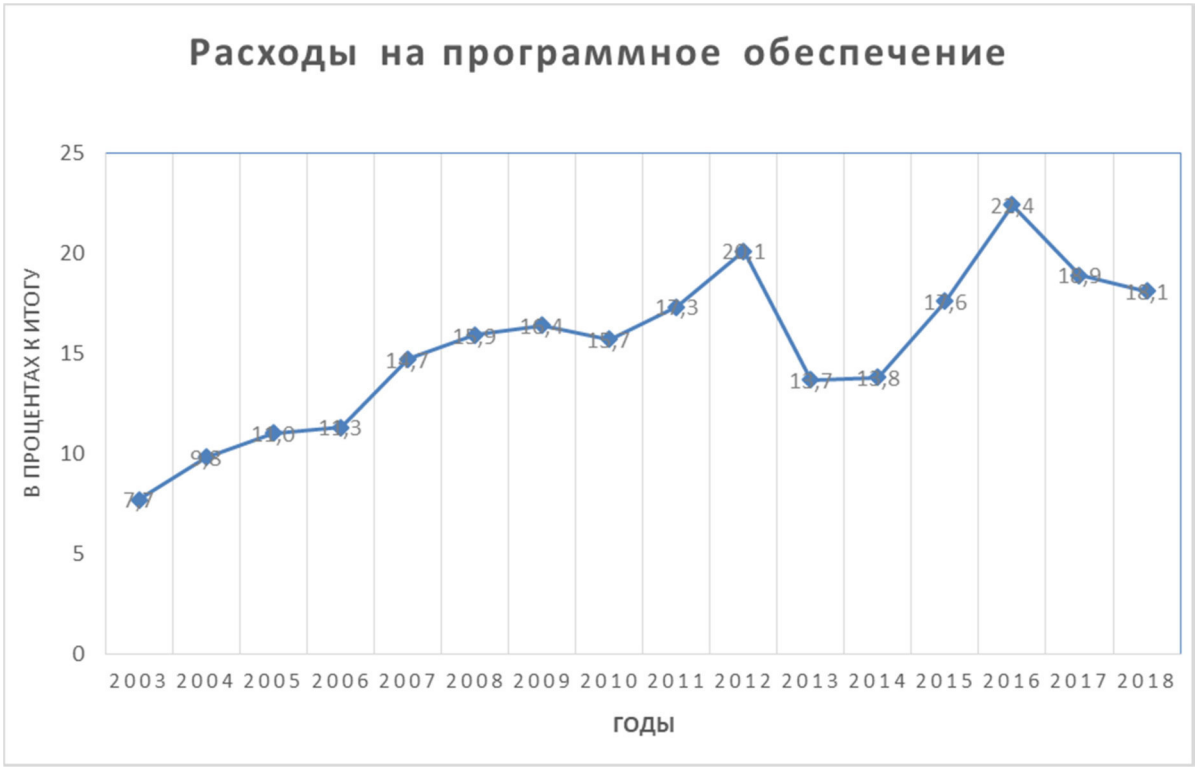


Рисунок 2 – Расходы на программное обеспечение



Рисунок 3 – Расходы на обучение сотрудников

Таким образом, в 2003 году на аппаратное обеспечение затрачивалось наибольшее количество средств - 52,3 процента, а к 2018 году первенство постепенно перешло к расходам на оплату услуг сторонних организаций и специалистов по ИКТ, кроме услуг электросвязи и обучения - 26,6%; наименьшее количество средств на протяжении пятнадцати лет расходовалось на обучение сотрудников, постепенно снижаясь от 0,7% до 0,3% от общей суммы затрат.

Расходы на аппаратное обеспечение являются наибольшими в структуре затрат на ИКТ, поэтому попробуем составить математическую модель расходов по этому виду для дальнейшего прогнозирования их изменения. Используя возможности табличного процессора Excell для обработки данных, построим несколько моделей и выберем наилучшую, применяя в качестве основного критерия величину достоверности аппроксимации - R^2. Для получившейся линейной модели $y = -1{,}7442*x + 42{,}623$, $R^2 = 0{,}7127$ (рисунок 4), а для полиномиальной модели пятой степени $y = 0{,}0007*x^5 + 0{,}0308*x^4 + 0{,}4378*x^3 – 2{,}2287*x^2 – 2{,}4163*x + 55{,}949$, $R^2 = 0{,}974$ (рисунок 5), что означает гораздо более высокую точность результата при использовании модели для прогнозов. Промежуточными этапами при выборе модели являлись: логарифмическая модель с $R^2 = 0{,}7127$; экспоненциальная с $R^2 = 0{,}9248$; степенная с $R^2 = 0{,}9124$; полиномиальная первой степени с $R^2 = 0{,}7127$; второй с $R^2 = 0{,}9172$; третьей с $R^2 = 0{,}9664$; четвертой с $R^2 = 0{,}9665$. Модель с наиболее близким к единице значением R^2 можно

считать наилучшей для прогнозирования затрат в следующие периоды наблюдения.



Рисунок 4 – Линейная модель



Рисунок 5 – Полиномиальная модель

Следовательно, объем расходов на информационные и коммуникационные технологии перераспределился с годами следующим образом: от наибольших расходов на приобретения средств ИКТ до наибольших на обслуживание техники; это произошло с одновременным увеличением расходов на программное обеспечение для имеющихся технических средств ИКТ, а расходы на обучение сотрудников остались на низком уровне, так же, как и услуги связи, в процентах к общему итогу.

Несмотря на постоянное перераспределение расходов по статьям, новые технологии прочно входят в нашу жизнь, очень динамично развиваясь и увлекая за собой население нашей страны.

Согласно сведениям, предоставленным Федеральной службой государственной статистики, в Российской Федерации [1], за последние 10 лет (в период с 2010 по 2020 год) доля использования информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) для развития, неуклонно растет во всех сферах применения - для электронного правительства, бизнеса, образования, здравоохранения и использования ИКТ домохозяйствами и населением.

Таким образом, при дальнейшем развитии ИКТ, проблема финансирования будет оставаться актуальной для развития информационного общества в Российской Федерации.

Список литературы

1. Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]: - Режим доступа: https://rosstat.gov.ru/

УДК 004.94

Новикова Екатерина Владимировна
Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева

ОБЗОР ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ОТХОДОВ

Аннотация. *В статье представлен обзор имитационной модели транспортных потоков по перемещению отходов. Помимо этого, была приведена классификация ТБО и способы утилизации ТБО.*

Ключевые слова: *имитационная модель, ТБО, утилизация, переработка.*

Novikova Ekaterina Vladimirovna
Oryol State University named after I.S.Turgenev

SIMULATION MODEL OVERVIEW TRANSPORT FLOWS WASTE HANDLING

Abstract. *The article provides an overview of a simulation model of traffic flows for the movement of waste. In addition, the classification of solid waste and methods of disposal of solid waste were presented.*

Keywords: *simulation model, solid waste, utilization, processing.*

Обзор имитационной модели транспортных потоков

Имитационная модель – это алгоритм (программа), описывающий поведение или структуру моделируемого объекта.

В модели рассматривается региональное пространство, в котором размещены пункты сбора отходов и объекты инфраструктуры по переработке и захоронению отходов. Пространство является физическим, положение объектов в пространстве задается географическими координатами.

Объекты (транзакты) и их взаимодействие. Имитационная модель воспроизводит движение транспортных средств различного типа по перемещению произвольного количества видов отходов, в том числе собираемых в контейнеры для раздельного сбора («сухих» отходов), полезные компоненты ТКО, стекло, пластик, пищевые отходы, пищевые отходы в упаковке, упаковка (картон), смешанные отходы и т.д. Перемещение отходов осуществляется с использованием

специализированных транспортных средств с набором характеристик, отличающимся от характеристик модельных транспортных средств, осуществляющих вывоз других видов отходов. Маршруты транспортных средств прокладываются от объектов сбора отходов (контейнерных площадок) до объектов инфраструктуры, а также между объектами инфраструктуры.

В модели будет реализована функция добавления нового вида отхода.

Классификация твердых бытовых отходов

Твёрдые бытовые отходы (ТБО) – предметы, которые потеряли свои свойства или стали не нужны человеку (т.е. мусор). ТБО – смесь отбросов, которые имеют разный состав, свойства, уровень опасности [1].

На рисунке 1 представлена общая схема классификации ТБО.



Рисунок 1 – Общая схема классификации ТБО

Проведем детализацию общей схемы (рисунок 2-5), которая заключается в рассмотрении каждой ветки классификации по отдельности и с примерами.

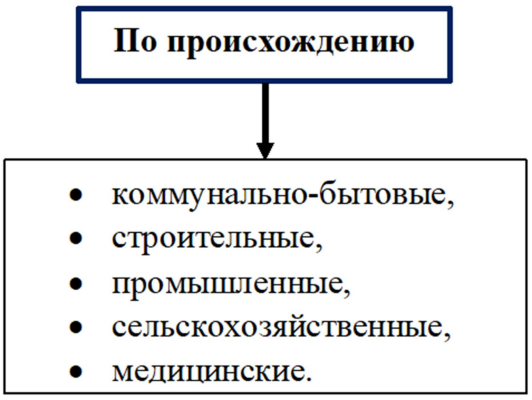


Рисунок 2 – Классификации ТБО по происхождению



Рисунок 3 – Классификации ТБО по агрегатному состоянию

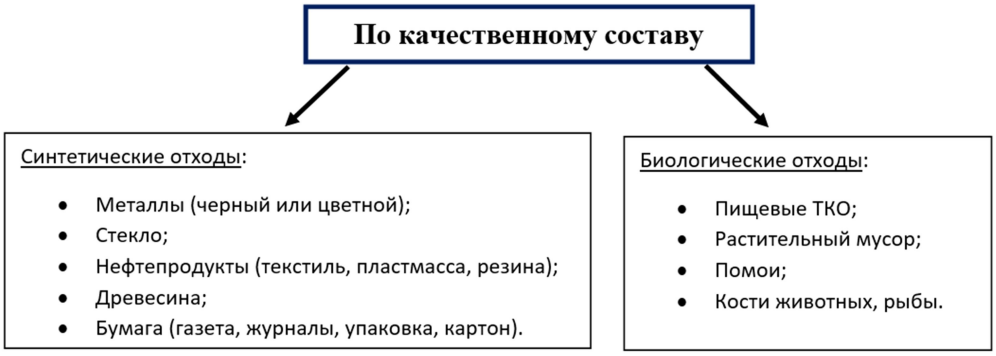


Рисунок 4 – Классификации ТБО по качественному составу



Рисунок 5 – Классификации ТБО по классу опасности для окружающей природной среды

Способы утилизации ТБО

Под утилизацией понимается переработка ТБО с их последующим использованием. На рисунке 6 представлены 3 способа утилизации ТБО.



Рисунок 6 – Способы утилизации ТБО

Рассмотрим каждый из способов подробнее.

Захоронение на полигонах. Этот метод – самый распространенный. Подходит для захоронения несгораемых веществ либо веществ, в ходе горения которых в воздух выделяются вредные компоненты. Захоронение происходит на специализированных полигонах, которые представляют собой сложные инженерные конструкции, оснащенные механизмами борьбы с загрязнениями подземных вод и воздуха. На некоторых полигонах проводится переработка газа, образующегося в ходе гниения отходов.

Сжигание на мусоросжигательных заводах. Мусоросжигательный завод — предприятие, использующее технологию утилизации промышленных и твёрдых бытовых/коммунальных отходов посредством термического разложения (сжигания) в котлах или печах.

Переработка отходов и производство новых вещей. Переработка отходов – это повторное применение ненужных вещей с целью последующего использования в качестве сырья, энергии, материалов и продуктов потребления. В большинстве случаев переработке подлежит стекло, пластик, бумага, текстиль и металлические изделия. Для возвращения их в оборот осуществляется преобразование физического и/или химического свойства. Следующим этапом может быть только полная утилизация [2].

Вывод

Был представлен обзор имитационной модели транспортных потоков по перемещению отходов. Помимо этого, была выделена подробная классификация ТБО и способы утилизации ТБО.

Список литературы

1. Мамин, Р.Г. Инновационные механизмы управления отходами / Р.Г. Мамин. - М.: МГСУ, 2018. - 530 с.
2. Нормы отходов бумаги на технологические нужды производства при печатании газет на рулонных офсетных машинах. - М.: Экономика, 2019. - 861 с.

УДК 004.738.5+004.43

Петраков Никита Сергеевич
аспирант,
Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина,
Россия, Елец

СОВРЕМЕННЫЕ ФРЕЙМВОРКИ ДЛЯ РАЗРАБОТКИ СЕРВЕРНОЙ ЧАСТИ WEB-ПРИЛОЖЕНИЙ

Аннотация. *В настоящее время активно развиваются технологии веб-программирования. В статье дана характеристика архитектуре фреймворков и их серверной части. Выполнен обзор популярных платформ, (Django, Express.js, Zend). Рассмотрены достоинства и недостатки каждого из них.*

Ключевые слова: *фреймворк, Django, Zend, Express.js.*

Petrakov Nikita Sergeevich
Postgraduate student,
Bunin Yelets State University,
Russia, Yelets

MODERN FRAMEWORKS FOR THE DEVELOPMENT OF THE SERVER SIDE OF WEB APPLICATIONS

Abstract. *Currently, web programming technologies are actively developing. The article describes the characteristics of the architecture of frameworks and their server side. Review of popular platforms (Django, Express.js, Zend). The advantages and disadvantages of each of them are indicated.*

Keywords: *framework, Django, Zend, Express.js.*

С увеличением внимания пользователей к интерактивности, вырос и рынок для разработки веб-приложений. Соответственно возросла потребность в фреймворках, с помощью которых эти приложения разрабатывают. Еще одной проблемой стало то, что при разработке проектов программисты часто сталкиваются с большим объемом трудоёмкой работы, которая впоследствии вынуждает переписывать раз-

личные части кода бесчисленное количество раз. Фреймворки стали решающим звеном в вопросе эффективной веб-разработки.

Фреймворк — это платформа для создания сайтов, упрощающая их создание за счет базовых программных модулей. Такая программа особенно эффективна в создании сложных сайтов и веб-сервисов, так как имеет ряд преимуществ:

- Высокая скорость разработки;
- Повышенная безопасность;
- Сокращение затрат на создание приложения;
- Простота в использовании и многофункциональность.

Вот почему использование фреймворков считается хорошей практикой для создания удобных и интерактивных веб-приложений.

Архитектура почти всех фреймворков использует особую концепцию программирования MVC (рисунок 1). Она разделяет приложение на три логических компонента: модель, представление и контроллер [1]. Каждый компонент этой архитектуры создан для обработки определенных аспектов веб-приложений. При этом разработка и модификация этих компонентов ведется независимо. Именно такая гибкость делает платформу настолько популярной. Фреймворки делятся на два типа: серверная часть и клиентская часть. Клиентская часть описывает интерфейс веб-приложения, а серверная часть отвечает за весь внутренний функционал.

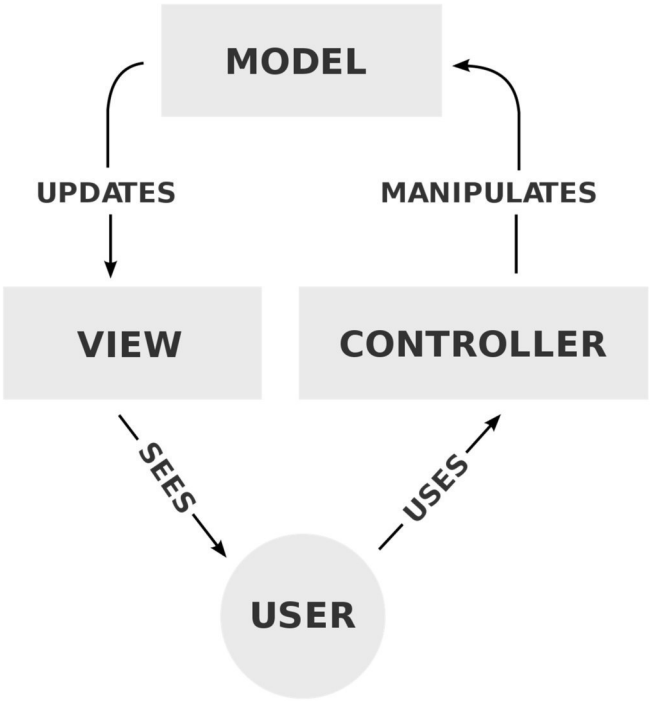


Рисунок 1 – Технология MVC

С помощью серверных фреймворков нельзя создать красивый интерфейс, однако они хорошо подходят для разработки функционала веб-сайта. Фреймворки такого типа имеют инструменты и библиотеки, которые упрощают общие задачи программиста, включая взаимодействие с базами данных, поддержку сеансов, форматирование вывода и повышение безопасности проекта. Лучшими примерами таких фреймворков считаются: Django, Express.js, Zend.

DJANGO — высокоуровневый фреймворк написанный на языке Python. Программисты отмечают высокую гибкость и качественный функционал пакета. Благодаря Django можно не переписывать код по многу раз, так как он уже имеет множество готовых решений [3]. Платформа бесплатна и расширяема, в большинстве случаев ее применяют для создания:

- систем управления отношениями с клиентами;
- систем управления содержимым;
- коммуникационных платформ;
- платформ управления документооборотом.

Плюсы:

- масса библиотек и компонентов готовых к использованию;
- обширная документация;
- Django подойдет для проектов любой сложности.

Минусы:

- не имеет гибкости в разработке, так как компоненты Django развертываются и работают совместно;
- поддержка обратной совместимости замедляет развитие проекта.

Express.js — свободный и компактный фреймворк работающий поверх Node.js. Пакет имеет как базовые функции веб-приложений, так и основные функции Node.js. Имея развернутый функционал в виде полезных служебных методов HTTP и развернутого программного обеспечения, он быстро завоевал доверие пользователей [2]. Интересно то, что Express часто используют как основу для создания других фреймворков.

Расширение позволяет:

- добавлять стороннее программное обеспечение, что добавляет гибкости проекту;
- писать простой и понятный код;
- обрабатывать запросы пользователей прямиком на сервере.

Преимущества:

- давно существующий проект с большим сообществом;
- имеет качественную документацию;
- дополнительные функции Node.js обеспечивают быструю разработку;
- фреймворк поддерживает большинство баз данных: MySQL, SQLlite и Oracle DB;
- простой в изучении.

Недостатки:

- не обладает основными инструментами и компонентами;
- платформа не позволяет разработать проект с объемными вычислительными процессами.

ZEND Framework — профессиональный фреймворк PHP с огромным количеством наборов компонентов. Его используют для разработки больших приложений и сервисов, так как он предоставляет подробный объектно-ориентированный код с поддержкой широкого спектра языковых функций. Готовые компоненты в нем не связаны между собой, что позволяет использовать их как раздельно, так и совместно. В настоящее время платформа развивается благодаря компании Zend. Достоинства:

- хорошо подходит для разработки больших коммерческих веб-приложений;
- для множества задач уже имеются готовые решения;
- возможность интеграции практически всех компонентов и функций.

Недостатки:

- из-за большого количества функций работает медленнее чем остальные фреймворки;
- требует большого количества времени на изучение;
- не имеет документации на русском языке.

Django, Express.js и Zend лишь некоторые из самых популярных доступных фреймворков. Они предлагают разные подходы, методы и функции в разработке. Фреймворки имеют много разных преимуществ и недостатков, но нельзя выбрать лучший среди имеющихся. Большинство преимуществ, перечисленных в этой статье помогут лучше понять какой фреймворк стоит использовать для своего проекта. Следует понимать, что выбор платформы напрямую зависит от специфики поставленной задачи.

Список литературы

1. Дронов В.А. Практика создания веб-сайтов на Python / В.А. Дронов — Санкт-Петербург: BHV, 2019 – 672 с.
2. Тузовский А.Ф. Проектирование и разработка web-приложений / А.Ф. Тузовский — Санкт-Петербург: Лань. 2019 – 120 с.
3. Меле А.Д. Django 2 в примерах / А.Д. Меле — Москва: «ДМК Пресс». 2018 – 410 с.

УДК 004.056

Привалов Александр Николаевич
доктор технических наук, профессор
профессор кафедры информатики и информационных технологий,
Тульский государственный педагогический университет
им. Л.Н. Толстого
Россия, Тула

Смирнов Вадим Анатольевич
аспирант кафедры математики, информатики
и методики обучения,
Ивановский государственный университет (Шуйский филиал)
Россия, Шуя

К ВОПРОСУ ОБНАРУЖЕНИЯ ФЕЙКОВЫХ САЙТОВ

Аннотация. *В статье приведены данные, подтверждающие актуальность разработок методов и средств обеспечения защиты от угрозы фейковых сайтов организации. Проведен анализ существующих средств и используемых методов. Предложен метод обнаружения фейковых сайтов с использованием кластеризации списка зарегистрированных доменных имен, основанной на модификации алгоритма FOREL. В качестве метрики расстояния между объектами в описанном методе применяется редакционное расстояние Левенштейна.*

Ключевые слова: *фейковый сайт, доменное имя, кластеризация, редакционное расстояние, информационная безопасность.*

Privalov Aleksandr Nikolaevich
Doctor of Technical Sciences, Professor
Professor of the department of Informatics and Information Technology,
Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy,
Russia, Tula

Smirnov Vadim Anatolyevich
postgraduate student of the department of Mathematics, Informatics and Methods of Teaching, Ivanovo State University (Shuya Branch)
Russia, Shuya

TO THE QUESTION OF DETECTING FAKE SITES

Abstract. *The article provides data confirming the relevance of the development of methods and means to ensure protection against the threat of fake websites of the organization. The analysis of existing tools and methods used is carried out. A method for detecting fake sites using clustering of a list of registered domain names based on a modification of the FOREL algorithm is proposed. As a metric of the distance between objects in the described method, the editorial Levenshtein distance is used.*

Keywords: *fake site, domain name, clustering, editorial distance, information security.*

Согласно опубликованным данным [3], в 2018 году ущерб, нанесенный туристам фейковыми сайтами отелей и гостиниц, составил 120 млн. руб. В последние три года стали актуальными также угрозы, связанные с фейковыми сайтами кинотеатров, ресторанов и т.д. При этом за последний год ущерб оценивается более чем в 18 млн. руб. [2]. По материалам The Australian Financial Review [8] мошенники заработали более 1 млн. долларов на поддельных сайтах по продаже транспортных контейнеров. По данным IBM [10], нарушения, вызванные фишингом, обходятся компаниям в среднем в 4,65 млн. долларов. По материалам The Guardian [9] общая сумма ущерба для граждан, совершивших покупки на фейковых сайтах, составила около 69 млн. фунтов стерлингов.

Такие инциденты могут быть рассмотрены не только как материальный ущерб для потребителей, но и как неполученная прибыль и репутационные потери для самих организаций. Организации из категорий «Financial institutions» (24,9% от общего количества) «Payment» (8.5%), «E-commerce/retail» (7.6%), «Logistics/shipping» (5.8%) входят в список самых популярных целей, атакованных в первом квартале 2021 года [12]. В соответствии с этим возникает необходимость разработки программных средств, позволяющих обеспечить защиту таких организаций от фейковой активности.

Различными авторами рассматривались такие методы обеспечения защиты от угрозы фейковых сайтов, как: эвристический анализ URL-адресов интернет-сайтов [11], анализ структуры веб-сайта [15] (выявление сайтов, сделанных при помощи фишинг-кит – набора инструментов для создания и запуска фишинговых веб-страниц на основе сайта организации), блокировка на основе черного списка, срав-

нения адреса с адресами белого списка, ключевых слов, визуального сходства друг с другом и с сайтом-жертвой [5]. Широко применяются методы машинного обучения и их комбинации: классификация при помощи случайного леса (Random Forest), ограниченной машины Больцмана, наивного байесовского классификатора, многослойного перцептрона Румельхарта [7], метод опорных векторов.

Практическим приложением разработок в области защиты от фишинговых сайтов стало появление встроенных антифишинговых средств в антивирусы: Bitdefender Internet Security, Trend Micro Internet Security, ESET NOD32 Internet Security, Kaspersky Internet Security, приложение DomainTools PhishEye от Rainbow Security, расширения для браузера Google.Chrome – PhishDetector, Cloudmark Anti-Fraud Toolbar, EarthLink Toolbar и др. [13].

Еще одним вариантом программного средства является Phishguard [6], который основан на идее о том, что фейковый сайт не проверяет корректность ввода сочетания логин/пароль. Данная программа эмулирует действия по вводу пользователем данных в форму, но при этом указывает корректный логин и неверный пароль. Положительный ответ системы позволяет судить о том, что сайт является поддельным.

Вышеперечисленные средства являются способом защиты от фишинговых ресурсов, которые обеспечивают решение проблемы для конкретного пользователя. Вместе с тем не представляется возможным гарантировать присутствие данных средств на каждом компьютере. Поэтому проблема должна решаться и со стороны организаций, которые лишаются клиентов и репутации в виду наличия подобных сайтов.

В одном из исследований [5] представлена идея поиска фишинговых ресурсов не на основе сравнения с сайтом-жертвой, а на основе сравнения их друг с другом. Действительно, достаточно высока вероятность, что для сайта организации будет создано множество фейковых сайтов, поскольку использование только одного из них может за достаточно короткое время обнаружено почтовыми сервисами при анализе содержимого писем, приходящих на электронную почту пользователя.

Доменные имена фейковых сайтов организации нередко сходны с доменным именем оригинального сайта, чтобы ввести в заблуждение пользователя. Более формально, для строк, содержащих доменное имя сайта организации и доменное имя фейкового сайта, редакцион-

ное расстояние Левенштейна будет низким. Тогда аналогичное утверждение будет верно и для строк, содержащих доменные имена двух фейковых сайтов одной организации.

В связи с этим можно предложить следующий алгоритм поиска фейковых сайтов организации:

1) Получить список анализируемых доменных имем.

2) В данном списке случайным образом выбрать доменное имя **domain**.

3) Найти все доменные имена из исходного списка, редакционное расстояние до которых от **domain** будет ниже определенного порога **R**. Обозначим их как **domains_list**.

4) Среди выделенных доменных имен найти такое, что сумма редакционных расстояний от него до всех остальных доменных имен будет минимальна.

5) Обозначить данное доменное имя в качестве **domain**.

6) Продолжать выполнение пунктов 3-5 до тех пор, пока процесс не стабилизируется (будет одинаковым список **domains_list**, получаемый в результате выполнения).

7) Вычеркнуть все домены списка **domains_list** из исходного списка доменных имён и вернуться к пункту 2. Вычеркнутые домены считать объединёнными в кластер.

Данный алгоритм сходен с широко известным алгоритмом кластеризации FOREL (объединения в один кластер объектов в областях их наибольшего сгущения). Однако в оригинальном алгоритме предполагается, что объекты представлены в виде точек пространства, расстояние между которыми вычисляется с помощью Эвклидовой, MAX-метрики или метрики Манхэттена. На шаге 5 в ряде случае выбирается не объект из списка, а создаётся некий формальный элемент, который помещается в центр кластера.

В описанном случае такой формальный элемент можно было бы получить, поставив задачу генерации строки, сумма редакционных расстояний Левенштейна от которой до всех остальных строк была бы минимальной.

Запуск вышеописанного алгоритма на основе списка доменных имен в зоне RU, зарегистрированных в период 17-19 октября 2021 года позволил выявить большое количество кластеров доменных имён, среди которых присутствовал:

1) Кластер из 20 доменных имён, визуально похожих на домен gosuslugi.ru;

2) Кластер из 7 доменных имён, визуально похожих на домен steamcommunity.com;

3) Кластер из 5 доменных имён, визуально похожих на домен сайта онлайн-казино.

4) Кластер из 6 доменных имён, визуально похожих на домен сайта capitalpower.com.

Выбор именно этого домена верхнего уровня обусловлен тем, что имеющиеся программные средства анализа списка доменных имен ориентированы на поиск фейковых сайтов в международных зонах COM, NET и др. В то же время, согласно отчёту АО Kaspersky Lab, в 2020 году зона RU находилась на втором месте по количеству атак, произведенных на сайты в рассматриваемой зоне [14].

Обнаруженные доменные имена из кластеров выдавали информацию о владельце «Private Person» по данным сервиса whois, то есть принадлежали частному лицу, а не организации. Касательно первого факта, в ряде источников опубликованы новости [1] со ссылкой на экспертов компании Infosecurity a Softline Company. Предполагается, что некоторые из данных доменных имен будут использованы для создания поддельных сертификатов о вакцинации. Такое предположение верно как минимум в отношении одного из проверенных в текущем исследовании сайтов (рисунок 1).

Выводы о наличии фейковых сайтов steamcommunity также совпадают с выводами компании Zscaler [4]. В любой момент времени суток при помощи данного сервиса взаимодействуют от 10 до 20 млн. пользователей.

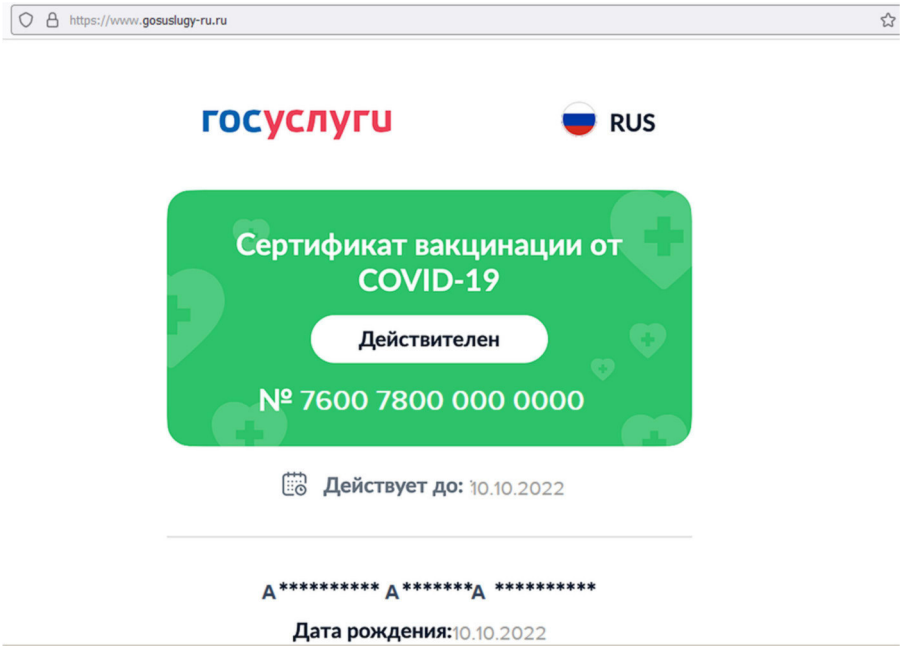


Рисунок 1 — Фейковый сайт сервиса «Госуслуги»

Предложенным алгоритмом было создано также большое количество кластеров, в которых объединены отличающиеся друг от друга доменные имена, очевидно не являющиеся фейковыми. Например, возникают ситуации создания ряда легальных региональных сайтов некоторых компаний, когда доменные имена отличаются только символами в конце. Улучшением данного алгоритма может стать разработка новой метрики, для последующего использования при кластеризации, которая обеспечивала разный вес замены символа в зависимости от его похожести на заменяемый символ (например, замена "i" на "j" должна обладать меньшим весом в расстоянии, чем "i" на "w"). Кроме того, порог редакционного расстояния, по итогам которого доменное имя будет считаться сходным с источником, должен быть функцией от длины домена.

Большинство обнаруженных доменов в данный момент не делегированы (т.е. не прикреплены ни к какому хостингу сайтов). Минцифры сообщает [1] о том, что такие доменные имена, сходные по написанию с порталом «Госуслуги» находятся на контроле. В случае выявления нарушений, сайты будут заблокированы.

Важно учитывать, что целью создания такого большого количества доменных имен, сходных по написанию с конкретными сервисами, может быть перегрузка такой системы мониторинга. Подобная нагрузка должна быть распределена между разными системами. В частности, на базе каждой организации необходимо внедрение программного средства, отслеживающего создание фейковых сайтов именно этой организации.

Таким образом, метод кластеризации с использованием модифицированного алгоритма FOREL и расстояния Левенштейна в качестве метрики позволил выявить набор потенциально фейковых доменных имен. Мониторинг содержимого сайтов, расположенных на таких доменных именах, делает возможным выявить факт мошенничества ещё до нанесения значительного ущерба организациям.

Список литературы

1. В Сети появилось 48 имитаций «Госуслуг» на фоне указа о нерабочих днях [Электронный ресурс]. – Режим доступа: свободный. – URL: https://www.rbc.ru/technology_and_media/22/10/2021/617249dd9a79470f06e0cd58 (дата обращения: 22.10.2021).

2. Преступники заработали минимум 18 млн. руб. на фейковых свиданиях в интернете [Электронный ресурс]. – Режим доступа: свободный. – URL: https://www.rbc.ru/technology_and_media/14/10/2021/6166c7579a794791e3f8b4f4 (дата обращения: 22.10.2021).
3. Ущерб туристов от фейковых сайтов составил 120 млн руб. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: свободный. – URL: http://www.finmarket.ru/main/article/4825362 (дата обращения: 22.10.2021).
4. Fake Sites Stealing Steam Credentials [Электронный ресурс]. – Режим доступа: свободный. – URL: https://www.zscaler.com/blogs/security-research/fake-sites-stealing-steam-credentials (дата обращения: 22.10.2021).
5. Hara M., Yamada A., Miyake Y. Visual similarity-based phishing detection without victim site information // Proceedings of the IEEE Symposium on Computational Intelligence in Cyber Security, 2009, pp. 30-36, DOI: 10.1109/CICYBS.2009.4925087.
6. Joshi Y., Saklikar S., et al. PhishGuard: A browser plugin for protection from phishing // Proc. of the 2nd International Conference on Internet Multimedia Services Architecture and Applications. 1 - 6. 10.1109/IMSAA.2008.4753929.
7. Mehanovic, D., Kevric, J. Phishing website detection using machine learning classifiers optimized by feature selection // Traitement du Signal, Vol. 37, No. 4, 2020, pp. 563-569. DOI: https://doi.org/10.18280/ts.370403.
8. More than $1m lost by punters lured by scammers using Google, Facebook [Электронный ресурс]. – Режим доступа: свободный. – URL: https://www.afr.com/companies/manufacturing/more-than-1m-lost-by-punters-lured-by-scammers-using-google-facebook-20210802-p58f78 (дата обращения: 22.10.2021).
9. More than £2.3bn lost in a year as scams surge during pandemic [Электронный ресурс]. – Режим доступа: свободный. – URL: https://www.theguardian.com/money/2021/jul/15/more-than-23bn-lost-in-a-year-as-scams-surge-during-pandemic (дата обращения: 26.10.2021).
10. Must-Know Phishing Statistics: Updated 2021 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: свободный. – URL: https://www.tessian.com/blog/phishing-statistics-2020/ (дата обращения: 26.10.2021).

11. Nguyen L. A. T., To B. L., Nguyen H. K. and Nguyen M. H. Detecting phishing web sites: A heuristic URL-based approach // Proceedings of the International Conference on Advanced Technologies for Communications (ATC 2013), 2013, pp. 597-602, DOI: 10.1109/ATC.2013.6698185.
12. Online industries most targeted by phishing attacks as of 1st Quarter 2021 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: свободный. – URL: https://www.statista.com/statistics/266161/websites-most-affected-by-phishing/ (дата обращения: 26.10.2021).
13. Syiemlieh P., Khongsit G. M., Sharma U. M., Sharma B. Phishing-an analysis on the types, causes, preventive measures and case studies in the current situation // International Organization of Scientific Research-Journal of Computer Engineering, e-ISSN: 2278-0661, p-ISSN:2278-8727, Vol-1, Page:1-8, 2015.
14. Spam and phishing in 2020 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: свободный. – URL: https://securelist.com/spam-and-phishing-in-2020/100512/ (дата обращения: 26.10.2021).
15. Tanaka S., Matsunaka T., Yamada A., Kubota A. Phishing Site Detection Using Similarity of Website Structure // Proceedings of the IEEE Conference on Dependable and Secure Computing (DSC), 2021, pp. 1-8, DOI: 10.1109/DSC49826.2021.9346256.

УДК 004.9

Русских Татьяна Николаевна
кандидат экономических наук, доцент,
доцент кафедры алгебры и математических методов в экономике,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Кухарец Дмитрий Викторович
студент магистратуры,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

ИНФОРМАЦИОННОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ ЗАСТРАХОВАННЫХ ЛИЦ В СИСТЕМЕ ОМС

Аннотация. *В статье затрагивается проблема информационного взаимодействия застрахованных лиц в системе обязательного медицинского страхования. Предлагаются проектные решения по разработке информационной системы поддержки и информационного сопровождения застрахованного лица в системе обязательного медицинского страхования.*

Ключевые слова: *обязательное медицинское страхование, информационное взаимодействие, информационная система, программные решения.*

Russkikh Tatyana Nikolayevna
candidate of economics, assistant professor,
assistant professor of algebra and mathematical methods in Economics,
Orel State University after I. S. Turgenev,
Russia, Orel

Kuharec Dmitriy Viktorovich
student,
Orel State University after I. S. Turgenev,
Russia, Orel

INFORMATION SUPPORT INSURED PERSONS IN THE COMPULSORY HEALTH INSURANCE SYSTEM

Abstract. *The article is devoted to the problem of information interaction of insured persons in the system of compulsory medical insurance. Design solutions are proposed for the development of an information system of information support of the insured person in the system of compulsory medical insurance.*

Keywords: *compulsory medical insurance, information interaction, information system, software solutions.*

В современных условиях организации обязательного медицинского страхования (далее ОМС) основная деятельность страховых медицинских организаций (далее СМО) направлена на защиту прав и интересов застрахованных лиц и контроль качества оказываемых медицинских услуг. Одной из форм контроля является информационное сопровождение пациентов.

Для обеспечения информационного сопровождения застрахованных лиц на всех этапах оказания им медицинской помощи в СМО организуется работа страховых представителей [1,2]. Институт страховых представителей – это отдельная структура в СМО, обеспечивающая информационное сопровождение застрахованных лиц посредством организации работы страховых представителей по трем уровням [1]. Общие методы, положения для работы с обращениями застрахованных лиц, а также их дальнейшее информационное сопровождение на всех этапах оказания медицинской помощи устанавливает Письмо Федерального фонда ОМС от 25.06.2018 г. N 6697/30-2/5564 «О направлении методических рекомендаций» [1]. В документе определяются участники информационного сопровождения, информационный обмен между участниками, который осуществляется на основе информационного ресурса, организованного Территориальным фондом ОМС, работающего в круглосуточном режиме.

Несмотря на внедрение механизмов повышения информационного взаимодействия с застрахованными лицами на практике сохраняется проблема низкой информированности застрахованных лиц относительно деятельности страховых медицинских организаций, проблема отсутствия необходимого уровня информационного взаимодействия застрахованных лиц и субъектов ОМС [4].

На рынке программных продуктов предлагаются информационные системы деятельности СМО, однако, несмотря на обширную вариативность программного обеспечения, данные системы, как правило, затрагивают лишь отдельные бизнес-процессы и не обеспечивают

автоматизацию процессов взаимодействия застрахованных и специалистов СМО. Вышеизложенное обуславливает необходимость разработки информационной системы (далее ИС), позволяющей страховым медицинским организациям повысить эффективность информационного взаимодействия с застрахованными лицами, обеспечит информационную поддержку контроля качества оказываемых медицинских услуг населению.

Предпроектный анализ объекта автоматизации позволил выявить основные процессы, которые должны быть автоматизированы в информационной системе [3]:

– предоставление застрахованным лицам необходимой информацией в области ОМС (сведения о медицинских организациях, страховых представителях, правах и обязанностях и др.);

– организация взаимодействия между застрахованными лицами и СМО по вопросам, связанным с оказанием медицинской помощи;

– проведение социологических опросов о качестве оказываемых медицинских услуг.

В информационной системе предлагается выделить следующих действующих лиц:

– пользователь;

– застрахованный пользователь;

– медицинская организация (МО);

– страховой представитель;

– страховая медицинская организация (СМО);

– контролирующие органы;

– администратор контакт - центра.

Актор «Пользователь ИС» характеризует общие действия для всех лиц системы: авторизоваться, просмотреть информацию. Просмотр информации подразделяется на три составляющие: просмотр справочной информации, просмотр карточки МО, просмотр результатов анкетирования (аналитических результатов по оценке удовлетворенности застрахованных лиц качеством и доступностью медицинских услуг).

Актор «Застрахованный пользователь» – это пользователь, который имеет регистрацию в ИС и полис ОМС. Данное лицо имеет следующие функции: зарегистрироваться, заполнить анкету об оценке качества медицинских услуг, составить и отправить обращение; просмотреть статус обращения, ответ на обращение. Для авторизации

в системе актор должен заполнить форму регистрации. Все обращения застрахованного пользователя будут зафиксированы в электронном журнале. Как только застрахованный пользователь отправляет свое обращение, у него появляется возможность просмотра статуса обращения, который имеет три позиции: «отправлено» (обращение получено и находится в базе), «на рассмотрении» (обращение находится на рассмотрении специалиста), «ответ получен» (на обращение получен ответ специалиста).

В рамках проведенного исследования предложены программные прототипы отдельных вариантов использования действующих лиц. На рисунке 1 приведено окно обращения. Все отправленные обращения пользователя отражены в таблице, в которой указываются: номер обращения; тип обращения (отзыв, жалоба, вопрос); дата обращения; статус обращения («Отправлено», «На рассмотрении», «Ответ получен»).

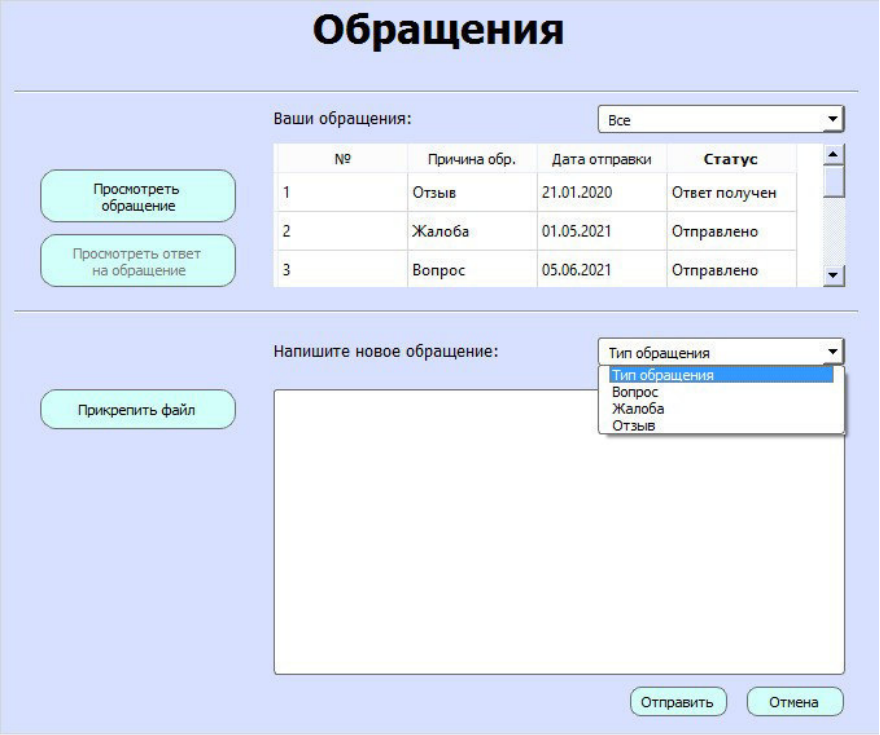


Рисунок 1 – Окно для обращений

Одной из функций застрахованного пользователя является заполнение анкеты об оценке качества и доступности медицинских услуг. На рисунке 2 приведено окно анкетирования.

В качестве математического инструментария проведения анкетирования предлагается методика, изложенная в работе [4].

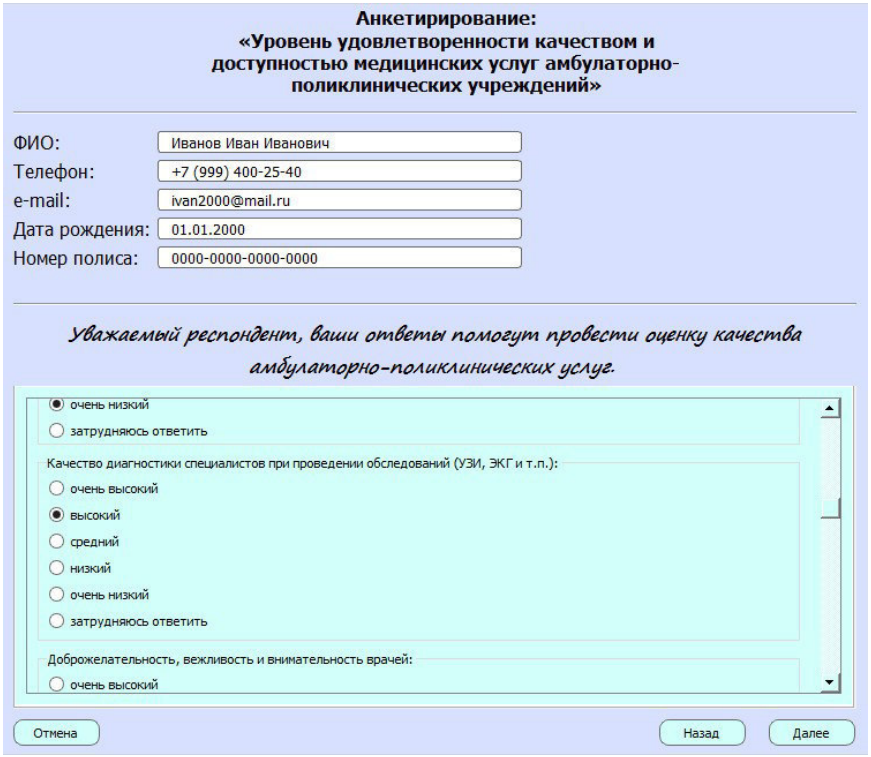


Рисунок 2 – Окно анкетирования застрахованного лица

Для актора «Страховой представитель» выделена функция – обработать обращение, зафиксированное в электронном журнале. Результатом обработки является отправка ответа застрахованному лицу на вопрос и регистрации его в электронный журнал.

Для актора «Медицинская организация» представлены функции: заполнить карточку МО, предоставить данные о деятельности МО, обработать обращение. Заполнение карточки МО предполагает предоставление информации о медицинском учреждении (полное наименование, адрес местонахождения, дата государственной регистрации, лицензия на осуществление медицинской деятельности и др.). Медицинская организация предоставляет плановый отчет о своей деятельности (число застрахованных лиц, которую получали медицинскую помощь, количество обработанных жалоб, информацию о медицинских услугах, которые получали пациенты) за определенный период времени. При рассмотрении обращения застрахованного лица страховым представителем, может возникнуть ситуация, при которой специалист не может ответить на данный вопрос ввиду своей некомпетентности. Тогда обращение перенаправляется на обработку медицинской организации. Результаты обработки регистрируются в электронном журнале.

Актору «СМО» в ИС предоставляются функции: разместить информацию, обработать результаты анкетирования, просмотреть за-

прос, сформировать отчет на полученный запрос. К контролирующим органам относятся территориальный фонд ОМС (отдел организации ОМС), Департамент здравоохранения (отдел ведомственного контроля качества, безопасности медицинской деятельности и лицензирования). В ИС для них выделяются следующие функции: сформировать запрос, просмотреть отчеты по запросам, просмотреть электронный журнал. Контролирующие органы в системе могут формировать запрос страховой медицинской организации или администратору контакт-центра для решения определенных вопросов, касающихся качества оказываемых медицинских услуг. После получения отчета от СМО или администратора контакт-центра, контролирующие органы просматривают и обрабатывают эту информацию.

Актор «Администратор контакт – центра» может подготовить плановый отчет по работе с обращениями застрахованных лиц, подготовить и отправить отчет по запросу. Функция предназначена для отправки необходимой информации, требующейся по запросу контролирующих органов.

В настоящее время процесс взаимодействия между страховыми представителями и застрахованными лицами не имеют необходимых программных инструментов для информационного обеспечения. В статье рассмотрены предлагаемые проектные решения по разработке информационной системы деятельности СМО в части взаимодействия с застрахованными лицами. Внедрение данной системы обеспечит эффективное взаимодействие СМО и застрахованных лиц, что позволит увеличить качество оказываемой медицинской помощи пациентам в регионе.

Список литературы

1. Письмо Федерального фонда обязательного медицинского страхования письмо от 25 июня 2018 года N 6696/30-2/5564 «О направлении методических рекомендаций» [Электронный ресурс]. – URL: https://rulaws.ru/acts/Pismo-FFOMS-ot-25.06.2018-N-6696_30-2_5564/
2. Приказ ФФОМС от 11.05.2016 N 88 «Об утверждении Регламента взаимодействия участников обязательного медицинского страхования при информационном сопровождении застрахованных лиц на всех этапах оказания им медицинской помощи» [Электронный ресурс]. – URL: https://legalacts.ru/doc/prikaz-ffoms-ot-11052016-n-88-ob/

3. Русских Т.Н. Информационное взаимодействие с застрахованными лицами как фактор эффективного функционирования страховых медицинских организаций / Т.Н. Русских, Д.В. Кухарец // Экономический рост как основа устойчивого развития России: сборник статей IV Всероссийской научно-практической конференции, Курск, 20-22 ноября 2019 г. – Курск: Закрытое акционерное общество «Университетская книга», 2019. – С.207-209.
4. Русских Т.Н. Математическое обеспечение мониторинга удовлетворенности потребителей качеством и доступностью медицинских услуг в регионе: монография / Т.Н. Русских. – Орел: Картуш, 2016. – 120 с.

УДК 004.852

Строев Сергей Павлович
кандидат экономических наук, доцент,
заведующий кафедрой алгебры и математических методов в экономике,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орел

Шоколов Валентин Владиславович
руководитель направления аудита,
АО «Райффайзенбанк»,
Россия, Москва

АНАЛИЗ ТОНАЛЬНОСТИ ОТЗЫВОВ О ДЕЯТЕЛЬНОСТИ БАНКА МЕТОДАМИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Аннотация. *В работе излагается авторский подход к решению задачи анализа тональности русскоязычных сообщений в сети Интернет о деятельности банков методами машинного обучения.*

Ключевые слова: *тональности текста, методы обработки текстов, алгоритмы машинного обучения.*

Stroev Sergey Pavlovich
candidate of economics, assistant professor,
head of algebra and mathematical methods in Economics,
Orel State University after I. S. Turgenev,
Russia, Orel

Shokolov Valentin Vladislavovich
head of the audit department,
Raiffeisenbank,
Russia, Moscow

ANALYSIS OF THE VOLUME OF FEEDBACKS ABOUT THE BANK'S ACTIVITIES BY METHODS OF MACHINE LEARNING

Abstract. *The paper presents the author's approach to solving the problem of analyzing the sentiment of Russian-language messages on the Internet about the activities of banks using machine learning methods.*

Keywords: *sentiments of text, methods of text processing, machine learning algorithms.*

Методы анализа эмоциональной окраски активно применяются для исследования сообщений пользователей в социальных сетях, рекомендательных сервисах. В корпоративном сегменте эти методы используются для управления репутацией компании, анализа тональности новостей, корпоративных чатов, историй взаимодействий с клиентами.

Особую актуальность методы анализа тональности приобрели в банковской сфере. Руководство банка не может пренебрегать работой с репутацией банка в медиа пространстве, поскольку, имея свободу выбора, клиенты предпочитают те банки, о которых имеются положительные отзывы в Интернет, социальных сетях, средствах массовой информации. Как следствие, банку необходимо иметь представление о репутации банка в медиа пространстве, анализировать мнения потребителей о конкретных продуктах, качестве обслуживания и предоставляемых сервисах. Обширность этого пространства актуализирует задачу автоматизации рутинных процессов по сбору и обработке соответствующей информации.

В настоящей работе излагается один из возможных подходов к решению задачи автоматизации работ по сбору и обработке информации о банке в целом, его продуктах, сервисах и качестве обслуживания, в частности, предполагающий использование технологии веб-скрейпинга, методов тематического моделирования и анализа тональности текстов.

В научной литературе [1, 3-5] выделяют три группы методов анализа тональности:

− методы, основанные на словарях и правилах;
− методы, основанные на машинном обучении;
− гибридные методы.

Использование методов первой группы предполагает составление тонального словаря языка, в котором каждой единице соответствует оценка ее эмоциональной окраски. Подобный словарь формируется либо на базе существующих словарей оценочной лексики, либо посредством краудсорсинга.

Для определения тональности исследуемого текста составляются правила, которые суммируют или модифицируют оценки эмоциональной окраски слов в зависимости от контекста.

К основным преимуществам данной группы методов относят:

- возможность корректировки качества работы соответствующих алгоритмов за счет повышения качества применяемого словаря и правил;
- возможность углубленного анализа тональности за счет создания специализированных словарей.

В то же время эти методы не лишены недостатков:

- трудоемкость и затратность составления словарей и правил;
- низкое качество работы соответствующих алгоритмов, обусловленное недостаточным объемом словаря.

Подробное описание методов, основанных на словарях и правилах, и их применение к решению задачи анализа тональности можно найти в работе [1].

При использовании методов второй группы задача анализа тональности рассматривается как задача бинарной или множественной классификации, решение которой сводится к формированию обучающего множества, выбору алгоритма классификации, построению признаков, в виде которых будет представлен текст.

Для формирования обучающего множества используются наборы данных, собранные и размеченные либо вручную, либо автоматически, например, с помощью технологии веб-скрейпинга.

Далее выбирается алгоритм решения классификационной задачи. Здесь наряду с «традиционными» методами [4], например методом k ближайших соседей, «наивного» байесовского классификатора, логистической регрессии, методом опорных векторов, деревьев решений, случайных лесов, градиентного бустинга, все интесивнее используется глубокое обучение, в частности, рекуррентные нейронные сети, сети с долговременной и кратковременной памятью, модели ELMo, BERT [2], а также предварительно обученные языковые модели. При этом отмечается [1], что при решении задачи бинарной классификации «традиционные» и нейросетевые методы дают схожие результаты, а вот при решении задачи множественной классификации нейросетевые методы показывают результат лучше.

После того, как выбран алгоритм классификации, строится признаковое пространство, в котором будут представлены тексты из обучающего множества. Для представления текста применяют модель

«мешка слов», набор n-грамм, части речи. Далее выбирается схема подсчета веса признака. Здесь применяется бинарная схема или схема, учитывающая частотность признака в тексте и в коллекции в целом.

Для оценки качества решения задачи классификации применяются стандартные статистические метрики, например точность, полнота и F-мера.

Перейдем теперь к описанию применения рассмотренных методов анализа тональности к решению задачи автоматизации работ по сбору и обработке информации о банке.

В контексте анализа тональности текстов рассмотрим следующие практические задачи, связанные с деятельностью банка:

- мониторинг репутации банка в медиа пространстве;
- анализ эмоциональной окраски и тематик отзывов клиентов о продуктах банка, качестве оказываемых услуг, сервисах;
- организация внутри банка маршрутизации клиентских запросов по решению различных проблем.

Непосредственное применение описанных выше методов анализа тональности к решению сформулированных задач осложнено, поскольку:

- отсутствует, как правило, достаточный массив размещенных данных, содержащий отзывы клиентов или иные сообщения о банке и его деятельности;
- неизвестны, как правило, тематики исходных сообщений, а это необходимо, во-первых, для сегментации исходных сообщений по темам, связанным с деятельностью банка; во-вторых, для анализа эмоциональной окраски сообщений по каждой группы.

Дополнительным естественным требованием приложения методов анализа тональности к решению перечисленных задач является минимизация временных и финансовых затрат.

В данной работе излагается авторский подход к решению указанных задач с помощью методов анализа эмоциональной окраски, предполагающий автоматизацию работ по сбору сообщений о банке, выделению тематик сообщений и их сегментации. Подход реализуется в несколько этапов.

Первоначально на этапе формирования обучающего множества осуществляется сбор, анализ и первичная обработка данных. Здесь в качестве источника исходных данных предлагается использовать крупнейший российский финансовый портал Банки.ру. На портале, в

частности, есть тематический раздел, содержащий отзывы клиентов о банках, уровне обслуживания и качестве услуг. Следует заметить, что пользовательские сообщения администрируются и это, в определенном смысле, является защитой от различного рода спама или недобросовестных оценок. В сообщении пользователь может выставить оценку банку по шкале пятибалльной шкале (1 – «плохо», 5 – «отлично»). Учитывая требование минимизации затрат, сбор данных предлагается осуществлять с помощью технологии веб-скрейпинга, инструменты для реализации которой есть в большинстве современных языков программирования. В результате получим уже размещенную выборку желаемого объема.

После сбора данных необходимо провести разведочный анализ, чтобы выяснить сбалансированность классов, распределение оценок и количества отзывов во времени. Это позволит получить первичное представление об имеющихся данных.

Далее собранные данные необходимо подвергнуть первичной обработке по следующим пунктам: приведение к нижнему регистру; удаление знаков препинания; удаление отдельно стоящих чисел; удаление слов, короче 2 символов; удаление стоп-слов. В некоторых случаях может потребоваться удаление адресов электронных страниц, хеш-тегов и т.п.

В заключение первого этапа проводится токенизация объектов множества с последующим выделением нормальной формы слова. В результате выполнения этапа получаем множество, в котором каждая запись характеризуется набором нормализованных слов и значением оценки пользователя.

На втором этапе на основе сформированного множества с помощью рассмотренных выше подходов к анализу тональности текстов строится несколько моделей, предназначенных для определения эмоциональной окраски сообщений о деятельности банка в целом. Итоговая модель выбирается по значениям установленных метрик качества (точность, полнота).

В результате получим модель для определения позитивной или негативной эмоциональной окраски текста, которая может использоваться для мониторинга репутации банка в медиа пространстве.

На третьем заключительном этапе строятся модели анализа эмоциональной окраски, предназначенные для обработки сообщений, связанных с деятельностью банка, например сообщений о конкретных продуктах банка, его сервисах, качестве обслуживания. Для по-

строения подобных моделей на основе имеющегося обучающего множества определяются темы текстов. Для этого предлагается использовать специализированные словари, а также машинные методы тематического моделирования, в частности, латентное размещение Дирихле [2]. Далее для каждой из тем формируется словарь и на его основе проводится сегментация объектов выборки по темам. По каждой теме аналогично описанному выше этапу 2 строится некоторое множество моделей анализа тональности, из которых определяется наилучшая.

В результате по каждой теме имеем модель анализа тональности, которую можно использовать для определения эмоциональной окраски сообщений по данной теме.

Список литературы

1. Грант С.И., Томас С.М., Эндрю Л.Ф. Обработка неструктурированных текстов. Поиск, организация и манипулирование. М.: ДМК Пресс, 2015.
2. Лукашевич Н.В., Четверкин И.И. Извлечение и использование оценочных слов в задаче классификации отзывов на три класса // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т.12. Вып.4. С. 73–81.
3. Котельников Е.В., Клековкина М.В. Автоматический анализ тональности текстов на основе методов машинного обучения // Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии. 2012. Т.2. Вып.11. С. 27–36.
4. Pang B., Lee L. Opinion mining and sentiment analysis // Foundations and Trends in Information Retrieval. 2008. V.2, Issue 1-2, 1-135. https://doi.org/10.1561/1500000011

УДК 004.912

Тетяненко Анатолий Валерьевич
сотрудник,
Академия ФСО России,
Россия, г. Орёл

Косенко Владислав Олегович
сотрудник,
Академия ФСО России,
Россия, г. Орёл

Серенко Валерий Николаевич
сотрудник,
Академия ФСО России,
Россия, г. Орёл

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ОСНОВЫ ВЫДЕЛЕНИЯ АББРЕВИАТУР И ИХ РАСШИФРОВКИ В ТЕКСТЕ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

Аннотация. *Данная работа описывает теоретические основы автоматизированного выделения аббревиатур и определения их расшифровок в текстах на русском языке. Изложено текущее состояние предметной области, рассмотрены существующие программные средства автоматизированного составления списка аббревиатур и их расшифровок. Приводится классификация аббревиатур по структурно-семантическим признакам и исследована их распространенность. Предложенная классификация подходит для создания алгоритмов автоматизированного выделения аббревиатур. Разработан подход к определению расшифровки аббревиатур без их непосредственного введения в текст.*

Ключевые слова: *аббревиатура, расшифровка аббревиатуры, выделение аббревиатур, классификация аббревиатур.*

Tetyanenko Anatoliy Valeryevich
employee,
FSO Academy of Russia,
Russia, Orel

Kosenko Vladislav Olegovich
employee,
FSO Academy of Russia,
Russia, Orel

Serenko Valeriy Nikolayevich
employee,
FSO Academy of Russia,
Russia, Orel

INFORMATION BASIS OF THE SELECTION OF ABBREVIATIONS AND THEIR INTERPRETATION IN THE TEXT IN RUSSIAN LANGUAGE

Abstract. *This paper describes the theoretical foundations of automated identification of abbreviations and the definition of their transcripts in texts in Russian. The current state of the subject area is described, the existing software tools for automated compilation of a list of abbreviations and their transcripts are considered. The classification of abbreviations by structural and semantic features is given and their prevalence is investigated. The proposed classification is suitable for creating algorithms for automated identification of abbreviations. An approach has been developed to determine the decoding of abbreviations without their direct introduction into the text.*

Keywords: *abbreviation, abbreviation decoding, abbreviation highlighting, abbreviation classification.*

1. Вводные положения

Развитие аббревиации и использование сокращенных лексических единиц – общая тенденция для многих алфавитных языков. Так, аббревиатуры широко используются не только в специализированных областях знания, но и в повседневной коммуникации [1].

Введём ряд определений. Под *аббревиатурой* будем понимать слово, образованное сокращением слова или словосочетания, читаемое по названию начальных букв или по начальным и крайним (общепринятые аббревиатуры) звукам слов, входящих в него. Под *расшифровкой* или *полной формой аббревиатуры* будем понимать последовательность слов, от которых образована аббревиатура. *Вве-*

дением аббревиатуры в текст является определенная последовательность аббревиатуры и её расшифровки в одном предложении текста. *Аббревиатурой без расшифровки* является аббревиатура, не имеющая расшифровки в предложении, где она расположена. Под *выделением аббревиатуры* (*расшифровки*) будем понимать получение структурной информации об аббревиатуре (расшифровке) для её дальнейшего использования.

Употребление аббревиатур – специфическая особенность научно-технических текстов, в которых аббревиатурам принадлежит большая доля информационной нагрузки [2]. В текстах художественного стиля практически отсутствуют аббревиатуры в виду отсутствия ёмких терминов, которые необходимо сокращать.

В научно-технических текстах на русском языке используются разнообразные аббревиатуры, что затрудняет возможность интуитивной расшифровки аббревиатуры человеком. При отсутствии *списка аббревиатур и* соответствующих им *расшифровок* (САиР) возникают трудности с интерпретацией аббревиатур. При этом в большинстве текстов достаточно информации для того, чтобы по определенным признакам восстановить или создать данный список. Это утверждение положено в основу данной статьи. Для отдельных текстов информации, содержащейся внутри них, может быть недостаточно, чтобы восстановить САиР. Тогда следует прибегать к анализу других текстов схожей тематики.

Потребность в восстановлении САиР может возникнуть при решении широкого класса задач обработки текстов. Здесь можно упомянуть межъязыковые преобразования текстов, в том числе – конверсию графических систем письма [3], расчет характеристик сложности текста [4], автоматизированное извлечение ключевых слов [5], рерайтинг [6] и квалиметрический анализ текста [7]. Во всех перечисленных задачах необходимо произвести предварительное выделение аббревиатур и их расшифровок (ВАиР) из текста.

Восстанавливать САиР возможно двумя способами: ручным и автоматизированным. Очевидно, что при последовательном изучении текста человеком и соотнесении по определенным признакам аббревиатур к соответствующим расшифровкам затрачивается больше времени, чем при анализе того же текста качественно созданным программным продуктом. Таким образом, цель данной статьи – представление необходимой информации для сокращения времени на

нахождение полной формы аббревиатур с помощью автоматизированных средств.

Сложность автоматизированного поиска расшифровок зависит от особенностей морфологии языка. Если классификация частей речи в предложении, как правило, учитывает семантику слова, тип формоизменения и синтаксическую роль слова, то для машинного анализа пока доступна только форма слова.

Тексты на русском языке можно разделить на три типа:

1. Тексты, в которых присутствует САиР, *введения аббревиатур* и *аббревиатуры без расшифровок*.

2. Тексты, в которых присутствуют *введения аббревиатур* и *аббревиатуры без расшифровок* (введённые ранее).

3. Тексты, которых присутствуют только *аббревиатуры без расшифровок* (ранее не были введены).

2. Состояние предметной области

Анализ источников показал, что большая часть работ, посвящённых ВАиР, написаны на иностранном языке.

В работах [8-10] представляются различные классификации аббревиатур, но не предложено решений по выделению их из текстов.

В работе [11] предложено решение для нахождения полного названия журнала по его аббревиатуре. Неизвестная аббревиатура, указанная пользователем, приводилась в формат регулярного выражения, которое предполагало возможный набор слов, начинающийся с указанных букв. Специфическая реализация полученного решения не позволяет использовать его для определения полных форм аббревиатур из других предметных областей.

В работах [12, 13] на основании определения частот встречаемости соседних слов определяется мера их связности, что позволяет предсказать вероятные полные формы аббревиатур. Достоинством такого метода является его универсальность, недостатком – высокая трудоёмкость. Материалы данных работ использовались при разработке модели выделения аббревиатур.

В работах [14, 15] предлагается исходный текст представлять в виде совокупности тем, которые образуются множеством входящих в них с разной вероятностью слов. Найденная схожесть частей текста используется как представление полной формы аббревиатуры. Данных подход предлагает множество решений с близкими вероятностя-

ми, что предусматривает дополнительную работу для пользователя на стадии отбора расшифровки интересующей аббревиатуры.

Существуют программы для ЭВМ, зарегистрированные в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (Роспатент), обладающие возможностью выявления САиР, но они не находятся в открытом доступе и не позволяют решать задачу составления САиР в случае, когда введения аббревиатур в тексте отсутствуют. Так, программа [16] реализует функцию автоматизированного формирования перечня аббревиатур, решает задачу формирования единой базы терминов (аббревиатур) и их определений (расшифровок). Программа [17] предназначена для автоматизированного извлечения терминологических структур из монографии заданной предметной области. Одной из основных функций программы является извлечение терминов, в частности, расшифровка аббревиатур.

3. Классификация аббревиатур

Разработка классификации аббревиатур осложнена особенностями их структуры, большой вариативностью, множеством различных способов аббревиации, а также взаимодействием аббревиации с другими способами словообразования. Авторы [10, 18, 19] сходятся во мнении, что аббревиатуры можно подразделять на инициальные, сложносокращённые и общепринятые. Инициальная аббревиатура составляется из первых букв её расшифровки. В сложносокращённую аббревиатуру включены не только первые, но и другие буквы сокращаемых слов. Общепринятые аббревиатуры интуитивно понятны человеку, употребляются перед определёнными структурами в тексте и имеют единственную расшифровку.

Для решения задачи автоматизированного ВАиР из текста введём классификацию аббревиатур по структурно-семантическим признакам, а также приведём в первом приближении их распространенность, изученную на материале ста случайно отобранных статей с ресурса Cyberleninka.ru из области техники, экономики, энергетики, механики, экологии, материаловедения и прикладной физики.

Под структурными признаками будем понимать использование прописных букв и знаков пунктуации в аббревиатуре. Под семантическими – смысловую доступность для читателя. В сложносокращённых аббревиатурах используются только строчные буквы. В инициальных и общепринятых аббревиатурах – прописные, строчные буквы и знаки пунктуации (структурный признак). При этом общеприня-

тые аббревиатуры имеют интуитивно понятный смысл, а для восприятия инициальных может потребоваться расшифровка в тексте (семантический признак). Сложносокращённые аббревиатуры рассматриваться в данной статье не будут.

Инициальные аббревиатуры разделены на пять типов, каждый из которых отличается по структурным признакам:

1. Тип A (53%). Инициальная аббревиатура, в которой слова полной формы разделены только пробелами и в неё входят только первые буквы слов полной формы. Например: центр информационной безопасности (ЦИБ), Latent Dirichlet Allocation (LDA).

2. Тип B (5%). Инициальная аббревиатура, в которой некоторые слова полной формы объединены знаком дефис или символом «косой черты». Например: оптико-тепловизионный комплекс (ОТК), read-only memory (ROM), input/output (IO).

3. Тип C (22%). Инициальная аббревиатура с элементами сложносокращённых слов. При этом, аббревиатура может состоять не только из прописных букв, но первая буква полной формы должна соответствовать первой букве аббревиатуры. Количество слов в расшифровке не совпадает с количеством букв в аббревиатуре. Например: гидрометеорологическая станция (ГМС), ammonium bifluoride (ABF), Белорусский автомобильный завод (БелАЗ), временно исполняющий обязанности (ВрИО).

4. Тип D (5%). Инициальная аббревиатура, отличная от языка документа. Например, протокол передачи файлов (FTP), временный идентификационный номер подвижного абонента (TMSI).

5. Тип E (2%). Инициальная аббревиатура, в которой буквы аббревиатуры разделены точками, а первые буквы слов полной формы соответствуют буквам в аббревиатуре. Например: Фамилия Имя Отчество (Ф.И.О.), Петроградская сторона (П.С.).

Общепринятые аббревиатуры (13%) применяются в разных областях: адреса (г., ул., д., пр-т), звания (к-т, л-т), точные науки (см, Гц), время суток (a.m, p.m), элемент текста (P.S.) и т.п.

Классификация аббревиатур по структурно-семантическим признакам представлена на рисунке 1.

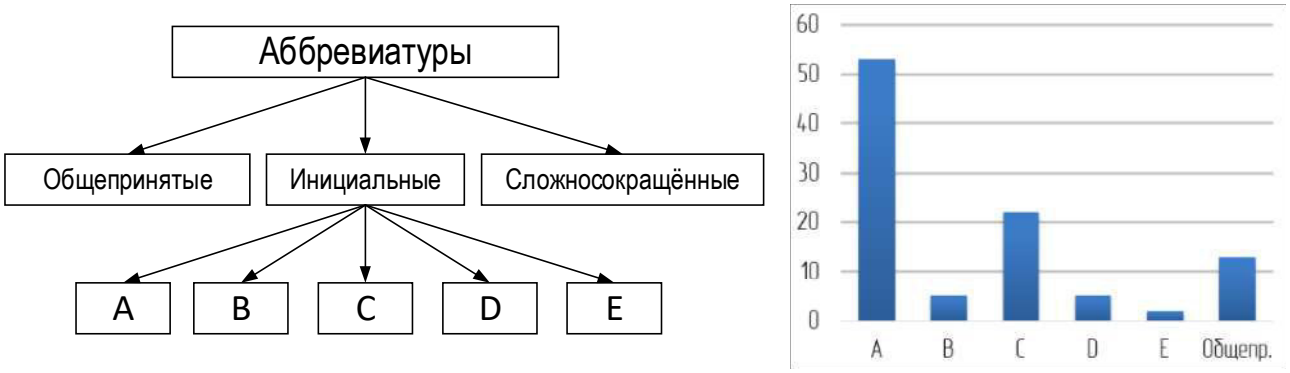


Рисунок 1 – Классификация аббревиатур
по структурно-семантическим признакам (разработано авторами)

Для создания программного средства ВАиР необходимо учитывать особенности каждого класса рассматриваемых аббревиатур.

Для примеров были использованы аббревиатуры на русском и английском языках, но предполагается, что данная классификация актуальна и для других алфавитных языков.

4. Модель выделения аббревиатур и расшифровок из текста

Процесс выделения аббревиатур и их расшифровок состоит из двух этапов.

Первый этап заключается в разделении исходного текста на предложения. Он необходим для более точного определения расшифровок аббревиатур. Разделителем предложений в тексте могут являться восклицательные и вопросительные знаки, многоточия, знаки переноса строки и точки. Однако возникает ряд проблем, связанных с тем, что точки ставятся в тексте не только в конце предложения. Чаще всего точки можно встретить в следующих конструкциях: в датах (25.10.20 г.), в адресах (ул. Ленина, д. 7), в общих аббревиатурах (т.д.), в буквенно-цифровых обозначениях (66.КП.ВРБ.00.00.00.ВО), перед номерами телефонов (тел. 89997773737), в нумерации (1.1, 1.2, …), в составе сокращения ФИО (А.А. Иванов) и в инициальных аббревиатурах (R.I.S.K.).

Второй этап разбивается на две параллельных части: *поиск мест введения аббревиатур* и *поиск аббревиатур без расшифровок* в предложениях.

Поиск мест введения аббревиатур заключается в анализе предложения на предмет наличия аббревиатуры и соответствующей расшифровки. В случае успеха информация о расшифровке и соответствующей аббревиатуре заносится в базу данных. Одна аббревиатура вводится в тексте только один раз.

Введения аббревиатур имеют определенную структуру, которая задается формулой (таблица 1) [2]. Возможны ситуации, когда при введении аббревиатуры в скобках может присутствовать текст, который не относится ни к расшифровке, ни к аббревиатуре.

Таблица 1 – Типовые формулы введения аббревиатур

Формула введения	**Примеры**
расшифровка (аббревиатура)	Специальное программное обеспечение (СПО), система (С)
аббревиатура (расшифровка)	АС (автоматическая сигнализация), СО (сигнал ожидания)
расшифровка аббревиатура	Процессор преобразования матриц ППМ, двухпроцессорная система ДС
аббревиатура – расшифровка	ЯМД – язык манипулирования данными, ЯУ – язык управления
(расшифровка – аббревиатура)	(Главная машина – ГМ)

Поиск аббревиатур без расшифровок заключается в определении по определенным признакам наличия аббревиатур в предложении.

В процессе поиска могут встречаться аббревиатуры, которые ранее не были введены в тексте. В связи с этим появляется необходимость поиска информации об их расшифровках по другим источникам. Для корректного сопоставления аббревиатуры и расшифровки из разных текстов, необходимо учитывать контекст аббревиатур.

Так как одна аббревиатура вводится в тексте, как правило, только один раз, то далее по тексту будут встречаться только аббревиатуры без расшифровок, при этом каждая выделенная аббревиатура будет однозначно соответствовать введенной ранее. Далее от предложения к предложению необходимо считывать аббревиатуры и их контекст в базу данных, после чего производить сопоставление с информацией, полученной при *поиске мест введения аббревиатур*. В случае отсутствия расшифровок необходимо производить поиск по другим текстам или по словарю.

Принципиальная схема ВАиР в тексте приведена на рисунке 2.

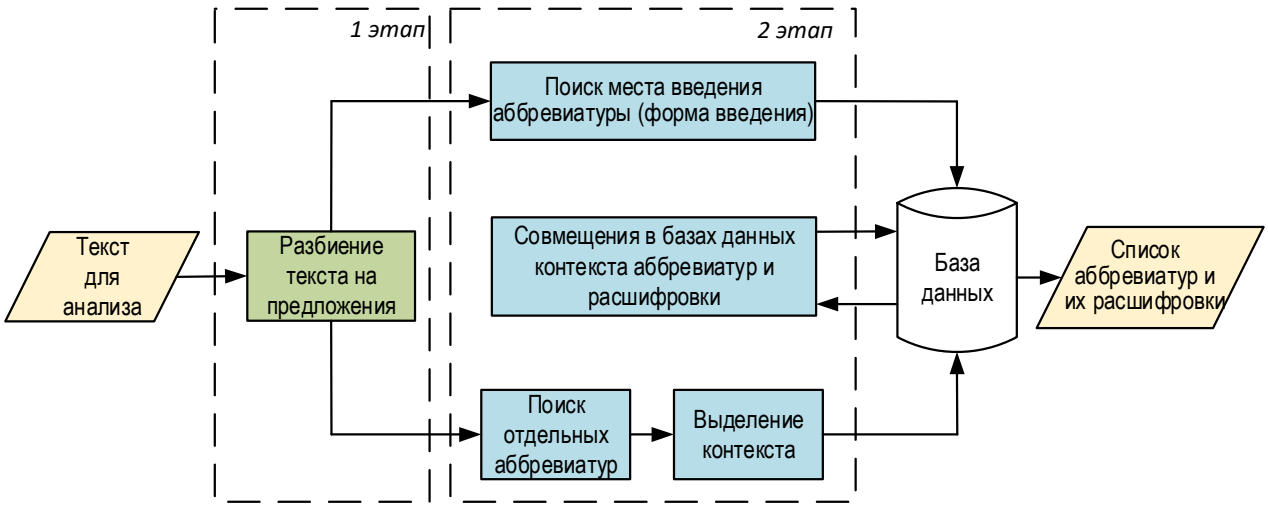


Рисунок 2 – Принципиальная схема выделения аббревиатур и расшифровок в тексте (разработано авторами)

5. Заключение

По результатам изложенного материала представляется обоснованным сделать следующие выводы:

1. Существующие программные средства имеют ограниченный функционал, не позволяющий производить расшифровку аббревиатур при отсутствии их введения в тексте.

2. Отличительной особенностью предложенной в работе классификации аббревиатур является то, что в ее основе лежат структурные признаки, которые возможно выделить из текста машинным способом.

3. Полученные в работе статистические данные распространённости аббревиатур носят предварительный характер и требуют уточнения.

4. Модель ВАиР разработана с учетом необходимости сбора информации об аббревиатурах и их расшифровке из совокупности текстов. В рамках модели происходит только сопоставление аббревиатуры, расшифровки и контекста, но не их выделение в тексте. В дальнейшем на основе предложенной классификации будут разработаны математические модели аббревиатуры, расшифровки и контекста, необходимые для программной реализации ВАиР.

Список литературы

1. Максименко, О.И. Новые тенденции аббревиации (на материале русского, английского и немецкого языков) // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Теория языка. Семиотика. Семантика. – 2017. – Т. 8. – № 1. – С. 174-181.
2. Грязнухина, Т.А. Лингвистические проблемы автоматизации редакционно-издательских процессов / Т.А. Грязнухина, Н.П. Дарчук, Л.И. Комарова и др.; отв. ред. В.И. Перебейнос, М.Д. Феллер // колл. монография: Академия наук УССР, Институт языковедения им. А.А. Потебни. — Киев: Наукова думка, 1986. – 229 с.
3. Гращенко, Л.А. Информационные основы польско-русского межъязыкового преобразования текстов / Л.А. Гращенко, Н.Н. Пивоваров // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2016. – № 19. – С. 101-106.
4. Мизернов, И.Ю. Анализ методов оценки сложности текста / И.Ю. Мизернов, Л.А. Гращенко // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2015. – № 18. – С. 572-581.
5. Ванюшкин, А.С. Методы и алгоритмы извлечения ключевых слов / А.С. Ванюшкин, Л.А. Гращенко // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2016. – № 19. – С. 85-93.
6. Науменко, Д.А. Информационные основы автоматизации рерайтинга / Д.А. Науменко, Л.А. Гращенко, Г.В. Романишин // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2019. – № 22. – С. 187-191.
7. Гращенко, Л.А. Опыт автоматизированного анализа повторов в научных текстах / Л.А. Гращенко, Г.В. Романишин // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2015. – № 18. – С. 582-590.
8. Суперанская, А.В. Общая терминология: Вопросы теории. Аббревиация в терминологии / А.В. Суперанская, Н.В. Подольская, Н.В. Васильева. – Изд. 6-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 248 с.
9. Нургалеева, Т.Г. Аббревиация как средство экспрессивного словообразования: автореф. дис. канд. филол. наук, спец. 10.02.04 «Германские языки» / Т. Г. Нургалеева. — М.: Наука, 2010. — 240 с.
10. Земская, Е.А. Современный русский язык. Словообразование: учеб. Пособие. 3-е изд., испр. и доб. – М.: Наука, 2011.

11. Jenkins K. Deciphering Journal Abbreviations with JAbbr // Code4Lib Journal. – 2009. – № 7. [Электронный ресурс] URL:https://journal.code4lib.org/articles/1758 (Дата обращения: 09.11.2021)
12. Mikolov T. Efficient Estimation of Word Representations in Vector Space / T. Mikolov, K. Chen, G. Corrado, J. Dean // arXiv.org. — 2013. [Электронный ресурс] URL:http://arxiv.org/pdf/1301.3781v3.pdf (Дата обращения: 10.11.2021)
13. Mikolov T. Distributed Representations of Words and Phrases and their Compositionality / T. Mikolov, I. Sutskever, K. Chen, G. Corrado, J. Dean // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2013. – P. 3111-3119.
14. Blei, D.M. Latent Dirichlet Allocation / D.M. Blei, A.Y. Ng, M.I. Jordan // Journal of Machine Learning Research. – 2003. – № 3. – P. 993-1022.
15. Heinrich G. Parameter estimation for text analysis. — 2004. [Электронный ресурс] URL:http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.216.695 (Дата обращения: 10.11.2021)
16. Автоматизированное формирование перечня аббревиатур (сокращений) / А.А. Чумичкин, М.В. Рутц, Г.И. Трифонов // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018663069, 19.10.2018. Заявка № 2018660897 от 04.10.2018.
17. Программа для извлечения и анализа терминологических структур смежных предметных областей / Д.А. Губанов // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019665358, 22.11.2019. Заявка № 2018664640 от 18.11.2019.
18. Алексеев, Д.И. Сокращённые слова в русском языке. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1979. – 328 с.
19. Виноградова, В.В. Русская грамматика: научные труды. В 2 т. Т. 1 – М.: Российская академия наук, 2005. — 784 с.

УДК 004.89

Черномордов Сергей Викторович
аспирант,
Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина,
Россия, Елец

Кабанов Михаил Алексеевич
аспирант,
Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина,
Россия, Елец

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОСЕТЕВЫХ МЕТОДОВ

Аннотация. *Рассматривается математическая модель технической системы, описываемой конечномерным дифференциальным уравнением второго порядка. Разработаны алгоритмы параметрической оптимизации на основе использования роя нейросетевых автоматов и обучения нейросетевых автоматов. Приведены блок-схемы указанных алгоритмов. Описан подход к подготовке и интеллектуальному анализу данных для моделирования ряда классов транспортных систем с переключениями. Полученные результаты направлены на дальнейшую реализацию алгоритмов на языке Python и могут быть использованы при решении задач моделирования технических систем с переключениями.*

Ключевые слова: *нейросетевое моделирование, машинное обучение, численные методы оптимизации, интеллектуальный анализ данных.*

Chernomordov Sergey Victorovich
postgraduate,
Bunin Yelets State University,
Russia, Yelets

Kabanov Mikhail Alekseevich
postgraduate,

Bunin Yelets State University,
Russia, Yelets

DESIGN OF PARAMETRIC OPTIMIZATION ALGORITHMS AND DATA MINING USING NEURAL NETWORK METHODS

Abstract. *A mathematical model of a technical system described by a second-order finite-dimensional differential equation is considered. Algorithms for parametric optimization based on the use of a swarm of neural network automata and training of neural network automata are developed. The block diagrams of the indicated algorithms are given. An approach to the preparation and data mining for modeling a number of classes of transport systems with switches is described. The obtained results are aimed at further implementation of algorithms in Python and can be used in solving problems of modeling technical systems with switching switching technical systems.*

Keywords: *neural network modeling, machine learning, numerical optimization methods, data mining.*

Поиск наиболее эффективных средств развития технологий цифровой экономики осуществляется посредством теоретических исследований и разработки инструментально-методического обеспечения для анализа математических моделей [1]. С помощью отечественных разработок появляется возможность формирования благоприятной среды для моделирования, применяя численные методы, методы анализа систем управления, ИИ и когнитивные технологии. В этой связи приоритетным является направление создания и совершенствования инструментально-методического обеспечения.

При моделировании нейронных сетей возникают проблемы разработки наиболее эффективных методов машинного обучения [2, 3]. В [4, 5] рассмотрены алгоритмы параметрической оптимизации, используемые в задачах машинного обучения. В [1] описаны варианты решения задач анализа и синтеза моделей нелинейных управляемых систем на базе отечественных программно-аппаратных средств. Предлагается усовершенствованный программный комплекс SSMC.

В настоящей работе рассматривается модель технической системы, задаваемая дифференциальным уравнением вида

$$m\ddot{x} = PT + mG + D(t), \qquad (1)$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор, t – время, D – гладкое возмущение в системе, G – вектор-столбец потенциального поля тяготения, m – са, P – матрица коэффициентов, $T = (t^0, t^1, \dots, t^{n-1})$ – вектор-столбец, поставленный в соответствие времени.

Задача заключается в нахождении матрицы P для построения траектории системы (1) на коротком временном интервале. Матрица P удовлетворяет условиям: $\int_{t_i}^{t_{i+2}} ||PT|| dt \rightarrow min, \hat{x}(t_i) = a, \hat{x}(t_{i+1}) = b, \hat{x}(t_{i+2}) = c$, где $\hat{x}$ – рассмотренный фазовый вектор.

Важной задачей является разработка агрегированных алгоритмов, которые сочетают в себе алгоритмы переключений и алгоритмы поиска оптимальных траекторий.

Примером подобного алгоритма выступает нейросетевой алгоритм оптимизации, который можно описать следующим образом. Случайным образом инициализируется k нейросетевых автоматов с заданной топологией для пространства оптимизируемой функции. Нейросетевой автомат – это искусственная нейронная сеть с указанными параметрами состояния (энергией и положением в пространстве функции). Такой автомат создан для реализации поиска оптимума предложенной функции.

Для двумерного случая модели (1) авторами разработан алгоритм параметрической оптимизации (алгоритм 1) на основе использования следующих методов: метода Хука–Дживса, метода искусственных нейронных сетей и метода роевой оптимизации.

Метод Хука–Дживса принадлежит к классу прямых методов и служит для поиска безусловного локального экстремума функции. Использование этого метода применительно к частным случаям задач оптимального управления системой (1) продемонстрировало эффективность при разработке алгоритма оптимизации с учетом двух фаз (исследующий поиск и поиск по образцу [6]).

Алгоритм 1 состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Инициализировать сеть из k нейросетевых автоматов ($k \geq 2$) в n-мерном евклидовом пространстве.

Шаг 2. Выполнить расчет выводов нейросетевых автоматов.

Шаг 3. Изменить положение нейросетевых автоматов в соответствии с векторами выводов.

Шаг 4. Проверить выполнение условия останова. Если условие останова выполняется, то алгоритм завершается, иначе перейти к шагу 2.

Блок-схема алгоритма 1 представлена на рисунке 1.

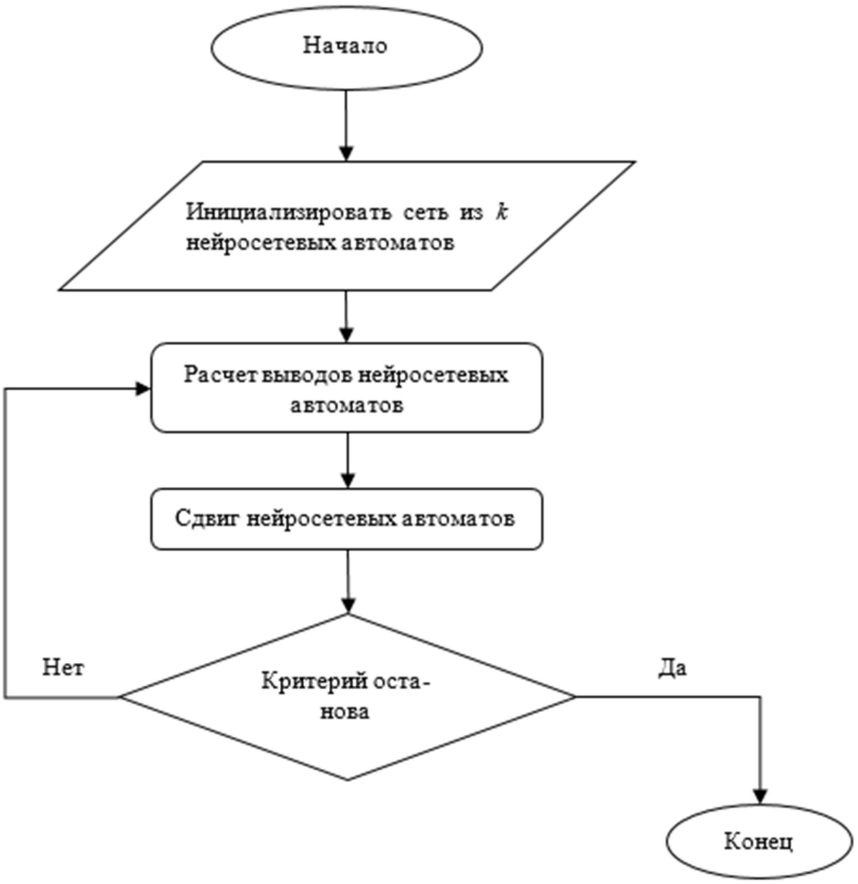


Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма параметрической оптимизации на основе роя нейросетевых автоматов

Далее приведем разработанный алгоритм 2 «Обучение нейросетевых автоматов».

Шаг 1. Инициализировать сеть из k нейросетевых автоматов ($k \geq 2$) в n-мерном евклидовом пространстве.

Шаг 2. Выполнить шаги 2–4 алгоритма 1.

Шаг 3. Найти значение функции потерь.

Шаг 4. Оптимизировать весовые коэффициенты нейросетевых автоматов.

Блок-схема алгоритма 2 представлена на рисунке 2.

Планируется дальнейшая реализация разработанных алгоритмов на языке Python с применением программно-аппаратной платформы «Эльбрус 801-РС» [1]. Важным вопросом является подготовка массивов данных для интеллектуальных систем с переключениями. В частности, для транспортных систем ряд аспектов применения методов искусственного анализа данных и когнитивного моделирования рассмотрен в [7–9].



Рисунок 2 — Блок-схема алгоритма
«Обучение нейросетевых автоматов»

В настоящей работе при изучении моделей с переключениями для обработки массивов данных предложены комбинированные нейронные сети для изучения последовательности данных, где важны не только значения, но и порядок следования этих значений. В комбинированных сетях используются элементы архитектуры как многослойных персептронов, так и рекуррентных нейронных сетей. Такой подход к интеллектуальному анализу данных позволит при настройке моделей не только выполнять выбор параметров, но и формировать оптимальные (в том или ином смысле) варианты формирования входных данных.

Полученные результаты могут быть использованы при решении задач моделирования технических систем с переключениями, задач интеллектуального анализа данных и машинного обучения. Рассмотренный подход к моделированию и анализу данных может найти применение в задачах оценки состояния элементов транспортной инфраструктуры и может быть использован при разработке интеллекту-

альных транспортных систем и для совершенствования технологии цифровых двойников.

Список литературы

1. Дружинина, О.В. Опыт разработки методов и средств нейросетевого моделирования нелинейных систем на базе отечественной вычислительной платформы «Эльбрус 801-РС» / О.В. Дружинина, Э.Р. Корепанов, В.В. Белоусов, О.Н. Масина, А.А. Петров // Нелинейный мир. – 2020. – Т. 18. – № 2. – С. 5–17.
2. Хайкин, С. Нейронные сети / С. Хайкин. – М.: Вильямс, 2016. – 1104 с.
3. Круглов, В.В. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети / В.В. Круглов, М.Н. Дли, Р.Ю. Голунов. – М.: Физматлит, 2001. – 201 с.
4. Газизов, Т.Т. Методы глобальной оптимизации / Т.Т. Газизов. – Томск: В-Спектр, 2017. – 24 с.
5. Карпенко, А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой / А.П. Карпенко. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – 446 с.
6. Аттетков, А.В. Метод Хука–Дживса / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.
7. Grachev, V.V. A method of using neural fuzzy models to determine the technical state of a diesel locomotive’s electrical equipment /V.V. Grachev, A.V. Agunov, A.V. Grischenko, V.A. Kruchek // Russian Electrical Engineering. – 2017. – V. 88. – №10. – P. 634–638.
8. Оборотов, А.В. Применение методов искусственного интеллекта и когнитивного моделирования для исследования технических систем диагностирования / А.В. Оборотов, М.А. Людаговская, М.А. Кабанов // Материалы всероссийской научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики, механики и естествознания», посвященной 100-летию профессора А.А. Шестакова (Москва, МИИТ, 23–24 апреля 2020 г.). – М.: МИИТ, 2021. – С. 115–125.
9. Оборотов, А.В. Структура и формирование базы знаний для когнитивных моделей и систем искусственного интеллекта / А.В. Оборотов, М.А. Кабанов, С.В. Черномордов // Материалы VI Международной научно-практической конференции «Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии», посвященной 100-летию со дня рождения профессора А.А. Шестакова (Елец, 16-17 сентября 2020 г.). – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2020. – С. 219–224.

УДК 004.056.5

Чижикова Юлия Владимировна
старший преподаватель кафедры информатики,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

О ПРОТИВОДЕЙСТВИИ ТЕХНОЛОГИЯМ СОЦИАЛЬНОЙ ИНЖЕНЕРИИ

***Аннотация**. В статье рассматривается проблема распространения технологий социальной инженерии в информационной безопасности, приводятся методики распространённых сценариев атак, а также выделяются основные направления деятельности для противодействия методам социальных инженеров.*

***Ключевые слова**: социальная инженерия, информационная безопасность, угрозы информационной безопасности, человеческий фактор.*

Chizhikova Yulia Vladimirovna
senior lecturer of the department of computer science,
Orel State University,
Russia, Orel

ON COUNTERING SOCIAL ENGINEERING TECHNOLOGIES

***Abstract**. The article deals with the problem of the spread of social engineering technologies in information security, provides methods of common attack scenarios, and highlights the main areas of activity to counter the methods of social engineers.*

***Keywords**: social engineering, information security, threats to information security, human factor.*

В современном мире со всё возрастающим количеством и качеством используемых информационных технологий вопросы информационной безопасности становятся всё более актуальными. Причем важными они являются не только для юридических лиц, но и для отдельно взятого человека не зависимо от его возраста, уровня образо-

вания, профессии и социального статуса. Проблемы информационной безопасности касается всех без исключения.

Злоумышленники могут получить несанкционированный доступ к персональным данным конкретного человека, различными способами узнать пароли от используемых им сервисов (электронная почта, социальные сети, сайт госуслуг), получить данные банковских карт и украсть деньги со счета.

Для человека такие действия злоумышленников могут грозить потерей доступа к аккаунтам, утечкой важных данных, в том числе персональной информации: паспортные данные, телефон, прописка, информация о имуществе, СНИЛС, информация о здоровье и родственниках. Паспортные данные и СНИЛС могут использоваться мошенниками для оформления договоров, как правило кредитных.

В современном мире существует огромный арсенал методов позволяющих злоумышленнику нарушить информационную безопасность отдельной личности или организации в целом: подбор паролей к защищаемым сервисам, запуск в системы вредоносного ПО, атаки эксплуатирующие пробелы в программном обеспечении, использование различных электронных и электро-механических устройств. Но для противодействия перечисленным методам нарушения информационной безопасности также существует достаточно много разнообразных и эффективных программных, технических и аппаратных средств защиты.

Таким образом, в условиях достаточно сбалансированного развития как средств нарушения информационной безопасности, так и советующих средств защиты от них успех злоумышленника во многом зависит от организационных решений (закупка и установка соответствующего механизма защиты, своевременное обновление программного обеспечения, наличие инструкций для персонала) и человеческого фактора (невнимательность, лень, недостаточная осведомленность, некачественное выполнение работы). Широко признано, что сотрудники организации часто являются слабым звеном в защите своих информационных активов [1].

Таким образом, в настоящий момент злоумышленникам легче направить арсенал средств не на преодоление достаточно эффективных механизмов защиты, а сосредоточить усилия на слабом звене – человеке. Поэтому, злоумышленники все чаще используют методы морально-психологического воздействия на людей с целью получить

доступ к защищаемой информации. Такие способы осуществления атаки получили название социальная инженерия.

В информационной безопасности нет одного общепринятого определения данного термина. Можно сказать, что социальная инженерия – это методы психологического манипулирования человеком с целью нарушения информационной безопасности. Метод основан на использовании слабостей человеческого фактора и является очень эффективным.

В настоящий момент количество атак, совершенных злоумышленниками с помощью методов социальной инженерии, поражает воображение и растет с каждым годом.

Так, например, по информации опубликованной банком России объем операций без согласия клиентов в 2019 году составил 577 000 операций, на общую сумму 6,4 млрд. рублей, средняя сумма операции 10 000 рублей. В 2020 году объем операций без согласия клиентов составил уже 773 000 операций, на общую сумму 9,8 млрд. рублей, средняя сумма операции 11 400 рублей.

Доля социальной инженерии в общем объеме несанкционированных операций по итогам 2020 года составила 61,8%. Причем, подавляющая доля хищений приходится на физические лица. При этом доля возврата (возмещения) похищенных денежных средств является крайне низкой 936 млн. рублей или 14,6% в 2019 году и 1,1 млрд. рублей или 11,3% в 2020 году. [2]

В обзоре Центрального банка РФ «Основные типы компьютерных атак в кредитно-финансовой сфере в 2019-2020 годах» говорится об увеличении числа кибератак на россиян с использованием методов социальной инженерии по итогам 2020 года почти в 1,9 раза. По данным регулятора, в 2019-2020 годах злоумышленники использовали телефонную связь как канал воздействия на предполагаемую жертву в 84% случаев. Около 16% произошедших инцидентов связано с получением гражданами мошеннических СМС или сообщений в различных мессенджерах. [3]

Трендом 2021 года является продолжение перехода от стратегии «от многих по чуть-чуть» к стратегии «от одного, но много», что в частности приводит к росту объемов средней суммы хищений. [2]

Можно выделить следующие виды атак с использованием социальной инженерии: фишинг, претексинг, ловля «на живца», подмена личности, «дорожное яблоко», обратная социальная инженерия.

Сценариев различных атак существует бессчётное количество. Как правило, это звонок жертве от имени человека, который имеет право знать запрашиваемую информацию. Далее в режиме цейтнот осуществляется диалог, требующий от жертвы незамедлительного принятия решения для обеспечения безопасности ресурсов, как правило, денежных средств. Злоумышленники стараются не терять контакт с жертвой, не дают возможности подумать, проанализировать ситуацию или перезвонить. Иногда сценарии связаны с конкретными явлениями, происходящими в обществе на данный момент, например, выплаты государственной поддержки связанные с короновирусом.

До недавнего времени самым распространённым методом атаки социальных инженеров в РФ был сценарий звонка от псевдосотрудника банка. Мошенник звонит жертве и представляется сотрудником банка, который предлагает услуги, или является представителем службы безопасности, обнаружившим подозрительную активность. Затем злоумышленник получает от клиента его личные данные и коды доступа после чего выводит все средства со счетов.

В настоящий момент все больше мошеннических операций осуществляется от имени сотрудника полиции. По данным «Лаборатории Касперского»в апреле 2021 года телефонные мошенники в 4 раза увеличили число звонков банковским клиентам под видом представителей правоохранительных органов, государственных структур, а также финансовых регуляторов.

Как правило, псевдо представитель полиции расследует инциденты нарушения информационной безопасности: утечки данных из банка, ловля злоумышленника «на живца». При этом злоумышленники побуждают жертву обратиться в банк, стать клиентом и оформить кредит, а затем снять средства в банкомате и пополнить счета, подконтрольные мошенникам.

Эксперты отмечают, что в разговоре с клиентами мошенники, притворяющиеся сотрудниками госструктур, могут использовать соответствующие термины и предупреждать об ответственности, например, в случае отказа сотрудничать. Они также стараются придерживаться официального тона и бывают напористы, чтобы заставить человека принять решение быстро и на эмоциях. Также мошенники могут сообщать о расследовании, в рамках которого под подозрением находятся сотрудники банков, поэтому под угрозой уголовной ответственности жертве запрещается сообщать о поступлении данного звонка кому-либо, в том числе сотрудникам банка.

Методы социальной инженерии распространены во всем мире, однако в России они получили куда большее распространение, чем в других странах. Среди основных причин такого положения эксперты называют низкую киберграмотность граждан.

Так Банк России выделил 5 групп типичных жертв телефонного мошенничества с использованием методов социальной инженерии. В частности, среди них «школьники», «домохозяйки» и «серебряный возраст» (60+ лет). По данным ЦБ, треть жертв социальной инженерии составляют граждане старше 60 лет, однако основной удар мошенников приходится на экономически активное население в возрасте 20-60 лет. При этом чаще всего жертвами мошенников становятся женщины (более 65%).

Противостоять методам социальной инженерии достаточно сложно, так как они не имеют четкого и формализованного сценария, а также используют особенности человеческой натуры – любопытство, беспечность, страх, желание помочь.

В методологии социальной инженерии объектом и средством атаки является человек, его психология, следовательно, и средства защиты должны также быть также направлены на человека.

В силу выше перечисленных особенностей, основной способ противостояния методам социальной инженерии – это методы повышающие киберграмотность граждан. Особенно продуктивна практика информирования населения о сценариях и инцидентах атак социальных инженеров. Как говорится: «Предупрежден – вооружен!» Чем больше людей узнает о конкретных практиках, тем сложнее будет злоумышленникам реализовывать отработанные сценарии. Так, например, сценарии звонка от сотрудника банка потеряли свою доходность в силу известности таких подходов большему числу людей. Информирование населения о соответствующих инцидентах может осуществляться средствами массовой информации (газеты, телевидение, радио), посредством информационных листовок с советующими инструкциями от правоохранителей, предупреждениями и разъясняющими инструкциями для клиентов от банков, распространение информации в социальных сетях, мессенджерах и т.п..

Также для повышения киберграмотности можно проводить уроки и внеклассные мероприятия соответствующей направленности для учащихся школ, средне специальных и высших учебных заведений.

Основная нагрузка для выполнения данной задачи при этом ложится на плечи правоохранителей, банков, финансовых регуляторов, средств массовой информации, а также педагогов.

Для повышения безопасности конкретного человека можно выделить следующие практические рекомендации:

1. проверяйте источник получения информации, не доверяйте ему слепо;
2. проверяйте какая информация о вас известна автору сообщения или звонящему человеку, может сотрудник банка не знает вашего полного имени;
3. остановитесь и подумайте, так как социальные инженеры часто используют иллюзию срочности;
4. критически оцените насколько правдоподобна информация.

Проблемы информационной безопасности в целом и социальной инженерии в частности являются крайне актуальными в данный момент, так как могут нанести значительный материальный ущерб любому человеку. Противостояние методам социальной инженерии, нахождение новых подходов и решений этой проблемы являются крайне актуальной задачей.

Список литературы

1. Митник К. Призрак в сети / Саймон У. — М.: Эксмо, 2012. — 416 с.
2. Банк России, Обзор операций, совершенных без согласия клиентов финансовых организаций за 2020 год. — М.:, 2021. — 16 с.
3. Банк России, Основные типы компьютерных атак в кредитно-финансовой сфере в 2019-2020 годах. — М.:, 2021. — 49 с.

Инженерные приложения физико-математических наук

УДК 532

Бондаренко Мария Александровна
кандидат технических наук,
начальник лаборатории геологии и разработки месторождений углеводородов,
АО «СевКавНИПИгаз»
Россия, Ставрополь

Кравцов Александр Михайлович
кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник лаборатории геологии и разработки месторождений углеводородов,
АО «СевКавНИПИгаз»
Россия, Ставрополь

ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА К ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ УЧАСТКУ СКВАЖИНЫ

Аннотация. *В практике добычи углеводородного сырья широко применяются скважины с горизонтальными участками стволов. Вместе с тем на настоящий момент отсутствуют математические модели для адекватного описания фильтрационного потока к горизонтальной скважине, достаточно удобные и в тоже время простые в применении в практической инженерной работе.*

В настоящей работе предлагается математическое обоснование формул для оценки дебита горизонтальной скважины в зависимости от ее длины, фильтрационных свойств пластовой системы, глубины спуска в скважину колонны насосно-компрессорных труб.

Ключевые слова*: горизонтальная скважина, обобщённая формула Дюпюи.*

Bondarenko Maria Alexandrovna
Candidate of technical sciences,
Head of the Oil and Gas Fields Geology and Exploitation Laboratory,
JSC "SevKavNIPIgaz"
Russia, Stavropol

Kravtsov Alexander Mikhailovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Leading Researcher of the Oil and Gas Fields Geology and Exploitation Laboratory,
JSC "SevKavNIPIgaz"
Russia, Stavropol

Abstract. *Wells with horizontal sections of wellbores are widely used in the practice of hydrocarbon production. At the same time, at the moment there are no mathematical models for an adequate description of the filtration flow to a horizontal well, which are quite convenient and at the same time easy to use in practical engineering work.*

This paper proposes a mathematical substantiation of the formulas for assessing the flow rate of a horizontal well depending on its length, filtration properties of the reservoir system, and the depth of running the tubing string into the well.

Keywords*: horizontal well, generalized Dupuis formula.*

Применение в практике инженерных расчетов известных формул для оценок дебита скважин с горизонтально направленным стволом ограничивается узким диапазоном значений параметров участвующих в оценке. Так, например, формула Ю.П. Борисова [1] для оценки дебита к горизонтальной скважине

$$Q = \frac{2\pi kh\Delta p}{\mu\left(\ln\left(\frac{4R_k}{L}\right)+\frac{h}{L}\ln\left(\frac{h}{2\pi r_c}\right)\right)}, \qquad (1)$$

где k –проницаемость пласта, h –толщина пласта, R_k – радиус контура питания скважины, Δp – депрессия на пласт, μ – вязкость флюида, r_c – радиус забоя скважины.

Структура формула предполагает, что для достаточно длинной скважины дебит может быть отрицательной величиной ($L > 4R_k$). Вместе с тем, физика процесса предполагает приращение дебита с увеличением длины открытого ствола.

Для очень коротких, порядка нескольких метров, горизонтальных стволов формула также дает нефизичные результаты. Перепишем формулу (1) в виде

$$Q = \frac{2\pi k h \Delta p}{\mu\left(\ln\left(\frac{R_k}{r_c}\right) + \ln\left(\frac{4r_c}{L}\right) + \frac{h}{L}\ln\left(\frac{2}{\pi}\frac{L}{4r_c}\frac{h}{L}\right)\right)}. \quad (2)$$

Добавка в знаменателе, в сравнении с формулой Дюпюи, при малых L дает положительную добавку к сопротивлению. То есть, добавив к вертикальной скважине короткий горизонтальный участок, в соответствии с этой формулой, должны получить меньший приток, чем у исходной вертикальной скважины. Что не согласуется с практикой.

Формула S.Joshi [2]

$$Q = \frac{2\pi k h \Delta p}{\mu\left(\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - (L/2)^2}}{L/2}\right) + \frac{h}{L}\ln\left(\frac{h}{2\pi r_c}\right)\right)}, \quad (3)$$

где $a = L/2\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{2R_k}{L}\right)^4}}$ - большая полуось эллипса дренирования.

Легко заметить, что формула (1) является асимптотикой формулы (2) при $L/R_k \to 0$, то есть для скважин с малой длинной горизонтального ствола формулы дают неотличимые результаты. Формула (2) страдает тем же недостатком, что и формула (1), при увеличении длины ствола первый логарифм в знаменателе становится отрицательным, а короткий горизонтальный участок формула оценивает дополнительным сопротивлением.

Существующие формулы Giger, Renard-Dupuy [3] страдают теми же недостатками. Это связано с присутствием в формулах второго логарифмического члена, стремящегося к нулю с ростом длины L. Большинство авторов связывают его с внутренним сопротивлением

колонны скважины, но с ростом длины ствола этот член стремится к нулю, а внутреннее сопротивление должно расти с ростом длины ствола. Противоречие оценки дебита скважины физике процесса транспорта флюида указывает на необходимость уточнения ограничений модели фильтрации к горизонтальной скважине.

Условно можно разделить работу по фильтрации флюида к скважине на две составляющие

- работа по транспорту флюида к стволу горизонтальной скважины;

- работа по перемещению флюида внутри ствола.

Авторы верно отмечают, что первый логарифм, также как и знаменатель в формуле Дюпюи, соответствует работе по переносу флюида от контура питания к точке стока, расположенной внутри горизонтального ствола, но выражение для работы по переносу внутри ствола требует уточнения оценки.

Получим оценки фильтрационного потока к горизонтальному участку скважины при следующих упрощающих допущениях

- пласт имеет небольшую толщину, и можно считать фильтрационный поток к горизонтальной скважине (на небольшом удалении от нее) плоскопараллельным;

- поверхность пласта, ограничивающая ствол скважины обладает однородными способностями к фильтрации флюида через нее и допустимо рассматривать ствол как однородное включение в пласт.

Описание установившегося плоскопараллельного фильтрационного потока флюида и анализ его характеристик проведем средствами анализа функций комплексного переменного.

Включение в плане занимает односвязную область ω на комплексной плоскости переменного $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$, область ограничена гладкой кривой $\partial\omega$. Функция $\zeta = w(z)$ конформно отображает внешность единичного круга в комплексной плоскости переменного $z = x + iy$ на внешность области ω. Стоки размещаются в точках, расположенных симметрично относительно оси абсцисс. Координаты точек стока в комплексной плоскости *z*

$$x = l \cdot \cos(\psi), \quad y = \pm l \cdot \sin(\psi).$$

Установившийся фильтрационный поток внутри однородного включения (хвостовика скважины) описывается комплексным потенциалом $F_{in}(\zeta)$

$$F_{in}(\zeta) = \frac{Q_0}{8\pi}\left(\ln\left(\zeta - \zeta_0^+\right) + \ln\left(\zeta - \zeta_0^-\right)\right) + F_0(\zeta),$$

где $F_0(\zeta)$ аналитическая в области включения функция, $\zeta_0^{\pm}$ - точки стока, Q_0 –мощности стоков.

В области пласта потенциал $F_{out}(\zeta)$ имеет вид

$$F_{out}(\zeta) = \frac{q}{4\pi} \cdot \ln(\zeta) + F_1(\zeta),$$

где q – мощность источника на бесконечности, $F_1(\zeta)$аналитическая во внешности области включения функция.

Потенциалы содержат неизвестные функции $F_0(z)$, $F_1(z)$, вид которых определяется из условий на границе включения. На границе включения должны быть непрерывны давления в потоках и нормальная к контуру компонента потока

$$\begin{gathered} 2\,\mathrm{Re}\left(F_{in}(t)\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(F_{out}(t)\right), \quad t \in \partial\omega \\ k_0 \cdot 2\,\mathrm{Re}\left(iF_{in}(t)\right) = k_1 \cdot 2\,\mathrm{Re}\left(iF_{out}(t)\right), \quad t \in \partial\omega \end{gathered} \tag{4}$$

В качестве примера рассмотрим случай кругового, в плане включения, единичного радиуса. Разложения потенциалов в случае кругового включения имеют вид [5]

$$F_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}.$$

Коэффициенты a_k, b_k являются вещественными в силу симметрии задачи и определяются из граничных условий (4), выражение для аффикса точки на единичной окружности

$$t = \sigma, \quad \sigma = \exp(i\varphi)$$

Здесь φ полярный угол, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс. Первое граничное условие, условие непрерывности потенциала, запишется так

$$\frac{Q_0}{4\pi}\ln(\sigma+l)+F_0(\sigma)+\frac{Q_0}{4\pi}\ln\left(\frac{1}{\sigma}+l\right)+F_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)=$$
$$=\frac{Q_1}{4\pi}\cdot\ln\left(1+\frac{l}{\sigma}\right)+\frac{q}{4\pi}\cdot\ln(\sigma)+F_1(\sigma)+\frac{Q_1}{4\pi}\cdot\ln(1+l\sigma)+\frac{q}{4\pi}\cdot\ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)+F_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

Восстанавливая по их граничным значениям функции аналитические в области включения и в его внешности [5], получим условия

$$Q_0 = Q_1,\ F_0(\sigma)= F_1(1/\sigma). \qquad (5)$$

Из граничного условия для непрерывности потока через поверхность включения получим дополнительные условия

$$k_0\cdot\left(\frac{Q_0}{4\pi}\ln(\sigma+l)+F_0(\sigma)-\frac{Q_0}{4\pi}\ln\left(\frac{1}{\sigma}+l\right)-F_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)=$$
$$=k_1\cdot\left(\frac{Q_1}{4\pi}\cdot\ln(\sigma+l)+\frac{Q_2}{4\pi}\cdot\ln(\sigma)+F_1(\sigma)-\frac{Q_1}{4\pi}\cdot\ln\left(\frac{1}{\sigma}+l\right)-\frac{Q_2}{4\pi}\cdot\ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)-F_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)$$

Восстанавливая аналитическую в области включения функцию по граничным значениям
получим

$$k_0\cdot\left(F_0(\sigma)-\frac{Q_0}{4\pi}\ln(1+l\cdot\sigma)\right)=k_1\cdot\left(-\frac{Q_1}{4\pi}\cdot\ln(1+l\cdot\sigma)-F_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right).$$

Принимая во внимание связь (5), выпишем выражения для потенциалов

$$F_0(z)=\frac{k_0-k_1}{k_0+k_1}\cdot\frac{Q_0}{4\pi}\ln(1+l\cdot z),\ F_1(z)=\frac{k_0-k_1}{k_0+k_1}\cdot\frac{Q_0}{4\pi}\ln\left(1+\frac{l}{z}\right).$$

Из условия однозначности для потенциала, для Q_2 получим выражение

$$Q_2=\frac{k_0-k_1}{k_1}\cdot Q_0.$$

Для определения числового значения Q_0 необходимо задать значение потенциала хотя бы в одной точке, так если известно пластовое давление $P_{пл}$ на контуре питания скважины, мы можем потребовать

$$2\,\mathrm{Re}(F_{out}(t_k))=P_{пл},$$

где t_k точка, лежащая на контуре питания скважины. После определения всех параметров фильтрационного течения можно вычислять распределение давлений в фильтрационном течении и скоростей фильтрации по формулам

$$P=\begin{cases}\dfrac{Q_0}{2\pi}\cdot \mathrm{Re}\left(\ln(z+l)+\dfrac{k_0-k_1}{k_0+k_1}\cdot\ln(1+l\cdot z)\right), z\in\omega,\\ \dfrac{Q_0}{2\pi}\cdot \mathrm{Re}\left(\dfrac{k_0}{k_1}\cdot\ln(z)+\dfrac{2k_0}{k_0+k_1}\cdot\ln\left(1+\dfrac{l}{z}\right)\right), z\notin\omega.\end{cases}, \qquad (6)$$

Если скачок фильтрационных свойств отсутствует $k_0=k_1$, то формулы совпадают с известными [4].

Введем обозначение $\alpha = k_0/k_1$. Параметр характеризует отношение проницаемостей. С учетом введенного обозначения (6) запишется так

$$P=\begin{cases}\dfrac{Q_0}{2\pi\cdot\alpha}\cdot \mathrm{Re}\left(\ln(z+l)+\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\ln(1+l\cdot z)\right), z\in\omega,\\ \dfrac{Q_0}{2\pi}\cdot \mathrm{Re}\left(\ln(z)+\dfrac{2}{\alpha+1}\cdot\ln\left(1+\dfrac{l}{z}\right)\right), z\notin\omega.\end{cases} \qquad (7)$$

На основе полученного решения, построим решение задачи с двумя стоками интенсивности $Q_0/2$, расположенными внутри области симметрично относительно действителной оси. Внутри круга стокам соответствуют точки $l\cdot e^{i\psi}$, $l\cdot e^{-i\psi}$. Переходя в формулах (7) к координатным системам, полученным из исходной поворотом на угол $\pi - \psi$ и $\pi + \psi$, имеем выражение для решения задачи

$$P=\begin{cases}\dfrac{Q_0}{4\pi\cdot\alpha}\cdot \mathrm{Re}\left(\ln\left(z\cdot e^{i(\pi-\psi)}+l\right)+\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\ln\left(1+l\cdot z\cdot e^{i(\pi-\psi)}\right)+\ln\left(z\cdot e^{i(\pi-\psi)}+l\right)+\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\ln\left(1+l\cdot z\cdot e^{i(\pi-\psi)}\right)\right), z\in\omega,\\ \dfrac{Q_0}{4\pi}\cdot \mathrm{Re}\left(\ln\left(z\cdot e^{i(\pi-\psi)}\right)+\dfrac{2}{\alpha+1}\cdot\ln\left(1+\dfrac{l}{z\cdot e^{i(\pi-\psi)}}\right)+\ln\left(z\cdot e^{i(\pi+\psi)}\right)+\dfrac{2}{\alpha+1}\cdot\ln\left(1+\dfrac{l}{z\cdot e^{i(\pi+\psi)}}\right)\right), z\notin\omega.\end{cases}$$

После упрощения выражения запишем в виде

$$P=\begin{cases}\dfrac{Q_0}{4\pi\cdot\alpha}\cdot \mathrm{Re}\left(\ln\left(z^2-2l\cdot\cos(\psi)\cdot z+l^2\right)+\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\ln\left(1-2l\cdot\cos(\psi)\cdot z+z^2l^2\right)\right), z\in\omega,\\ \dfrac{Q_0}{2\pi}\cdot \mathrm{Re}\left(\ln(z)+\dfrac{1}{\alpha+1}\cdot\ln\left(1-\dfrac{2l}{z}\cdot\cos(\psi)+\dfrac{l^2}{z^2}\right)\right), z\notin\omega.\end{cases} \qquad (8)$$

Исходные формулы можно получить из (8) при $\psi = \pi$.

В качестве следующей задачи рассмотрим задачу о фильтрации вблизи горизонтальной скважины, которую будем моделировать эллиптическим в плане включением, располагающимся по всей толщине пласта.

Для проницаемого включения и достаточно вытянутого эллипса можно ожидать хорошего совпадения решения модельной задачи с практически наблюдаемыми фильтрационными течениями вблизи горизонтальной скважины.

Потребуем следующего соответствия между объектами для обеспечения эквивалентности фильтрационных течений

- длина включения (расстояние между фокусами эллипса) равна длине скважины

$$2\sqrt{a^2 - b^2} = L; \tag{9}$$

- объем включения положим равным объему выработанного при бурении пространства

$$\pi \cdot a \cdot b \cdot h = \pi \cdot d^2 \cdot L/4 \tag{10}$$

- поверхность включения положим равным поверхности выработанного при бурении пространства

$$2 \cdot L \cdot h = \pi \cdot d \cdot L \quad \text{или} \quad h = \pi \cdot \frac{d}{2} \tag{11}$$

a, b – полуоси эллипса, h – толщина пласта, d – диаметр ствола скважины (определяется по диаметру долота), L –длина горизонтального участка скважины.

Из условий (9) и (10) можно составить квадратное уравнение для определения полуосей эллипса

$$a^2 - b^2 = L^2/4, \quad -a^2 \cdot b^2 = -\left(d^2 \cdot L/4 \cdot h\right)^2,$$

по теореме Виета о корнях квадратного уравнения

$$X^2 - L^2/4 \cdot X - \left(d^2 \cdot L/4 \cdot h\right)^2 = 0$$

Корнями будут квадраты полуосей эллипса a^2 и $-b^2$.

Решая квадратное уравнение, найдем

$$a^2 = L^2/8 + L/8 \cdot \sqrt{L^2 + \left(2 \cdot d^2/h\right)^2}, \; b^2 = -L^2/8 + L/8 \cdot \sqrt{L^2 + \left(2 \cdot d^2/h\right)^2}$$

Преобразуем к виду

$$a = L/2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\xi^2}}, \quad b = L/2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\xi^2}}, \tag{12}$$

где $\xi = d^2/(L \cdot h)$.

Отображение внешности круговой области единичного радиуса на внешность эллиптического в плане включения осуществим конформно, функцией

$$\varsigma = R \cdot \left(z + \frac{m}{z} \right),$$

где $R = \frac{a+b}{2}$, $m = \frac{a-b}{a+b}$, a, b – полуоси эллипса.

Выразим z

$$z = \frac{\varsigma}{2R} + \sqrt{\left(\frac{\varsigma}{2R} \right)^2 - m}\,. \tag{13}$$

Здесь знак вперед радикалом выбран таким образом, чтобы точка z находилась во внешности единичного круга, когда точка ς находится во внешности центрального эллипса с полуосями a, b.

В случае (фи)

$$m = \sqrt{1+4\xi^2} - 2\xi, R = \frac{L}{4}\sqrt{\xi + \sqrt{1+4\xi^2}}\,. \tag{14}$$

Ниже приводятся первые члены разложений в ряды величин, характеризующих геометрию эллипса

$$m = 1 - 2\xi + 2\xi^2 + o\left(\xi^4\right), 1 - \sqrt{m} = \xi - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3 + o\left(\xi^3\right),$$

$$\sqrt{m} = 1 - \xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3 + o\left(\xi^3\right), R = \frac{L}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\xi + \frac{7}{8}\xi^2 + o\left(\xi^3\right)\right).$$

Положим $l = \sqrt{m}$, то есть будем считать, что оба стока находятся на берегах разреза [-F, F], где F –фокусное расстояние эллипса.

Если колонна насосно-компрессорных труб (НКТ) спущена в горизонтальное окончание скважины на длину l_c, то параметр ψ определяется так

$$\psi = \arccos\left(\frac{2l_c}{L} - 1 \right), \cos(\psi) = \left(\frac{2l_c}{L} - 1 \right), \sin(\psi) = \sqrt{1 - \left(\frac{2l_c}{L} - 1 \right)^2}$$

Если НКТ не спущена и $l_c = 0$, то $\psi = \pi$, если НКТ спущена на всю длину и $l_c = L$, то $\psi = 0$.

$$P = \frac{Q_0}{2\pi} \cdot \mathrm{Re}\left(\ln(z) + \frac{1}{\alpha+1} \cdot \ln\left(\left(1 - \frac{\sqrt{m} \cdot e^{i\psi}}{z} \right) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{m} \cdot e^{-i\psi}}{z} \right) \right) \right) + P_0$$

Выберем точку на забое скважины с аффиксом $z = e^{i\psi}$, аффикс точки на контуре питания скважины $z = 4R_c / L \cdot e^{i\psi}$, тогда выражения для забойного и пластового давления примут вид

$$P_w = \frac{Q_0}{2\pi}\cdot\frac{1}{\alpha+1}\cdot \mathrm{Re}\left(\ln\left(\left(1-\sqrt{m}\right)\cdot\left(1-\sqrt{m}\cdot e^{-2i\psi}\right)\right)\right),$$

$$P_c = \frac{Q_0}{2\pi}\cdot \mathrm{Re}\left(\ln\left(\frac{4R_c}{L}\right)+\frac{1}{\alpha+1}\cdot\ln\left(\left(1-\frac{\sqrt{m}\cdot L}{4R_c}\right)\cdot\left(1-\frac{\sqrt{m}\cdot L\cdot e^{-2i\psi}}{4R_c}\right)\right)\right)$$

$$\xi = d^2/(L\cdot h).$$

Пренебрегая малыми величинами в выражении, получим

$$P_w = \frac{Q_0}{2\pi}\cdot\frac{1}{\alpha+1}\cdot\left(\ln\left(\xi^2\cdot\sqrt{2-\left(2-\xi^2\right)\cdot\cos(2\psi)}\right)\right), P_c = \frac{Q_0}{2\pi}\cdot\ln\left(\frac{4R_c}{L}\right)$$

Формула для количества добываемого флюида принимает, соответственно, вид

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu}\frac{P_c - P_w}{\ln\left(\frac{R_c}{r_w}\right)+\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\ln\left(\frac{4r_w}{L}\right)+\frac{2}{\alpha+1}\cdot\ln\left(\frac{h}{r_w}\right)-\frac{1}{2(\alpha+1)}\cdot\ln\left(2-\left(2-\xi^2\right)\cdot\cos(2\psi)\right)}$$

Первое слагаемое в знаменателе совпадает с выражением в знаменателе формулы Дюпюи [4], поэтому допустимо интерпретировать оставшиеся слагаемые как добавки, отвечающие за эффекты связанные с конструкционными особенностями рассматриваемой скважины. Так, последнее слагаемое описывает влияние на добычу скважины глубины спуска НКТ, а оставшиеся слагаемые описывают влияние геометрии системы пласт-скважина.

Максимальное значение добычи достигается при значении $\psi=\pi/2$, что соответствует спуску колонны НКТ до уровня середины горизонтального участка скважины $\frac{l_c}{L}=\frac{1}{2}$.

Сравнить дебиты двух горизонтальных скважин с НКТ спущенной на разную длину можно с помощью асимптотики

$$Q \approx \frac{Q_{\frac{\pi}{2}}}{1-\frac{1}{2(\alpha+1)}\cdot\ln\left(\frac{1-\cos(2\psi)}{2}\right)\Big/\ln\left(\frac{R_c}{r_w}\right)}, \quad \frac{\pi}{2}\le\psi<\pi, \quad \psi\to\frac{\pi}{2}.$$

Здесь

$$Q_{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi kh}{\mu}\frac{P_c - P_w}{\ln\left(\frac{R_c}{r_w}\right)+\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\ln\left(\frac{4r_w}{L}\right)+\frac{2}{\alpha+1}\cdot\ln\left(\frac{h}{r_w}\right)-\frac{1}{2(\alpha+1)}\cdot\ln(4)}$$

добыча скважины с НКТ спущенной до середины горизонтального участка скважины. При спуске колонны НКТ на четверть длины го-

ризонтального участка скважины($\psi=2\pi/3$), как следует из формулы, уменьшение добычи составит меньше одного процента

$$\frac{1}{2(\alpha+1)}\cdot\ln\left(\frac{4}{3}\right)\Big/\ln\left(\frac{R_c}{r_w}\right)<0.01.$$

Если колона НКТ не спущена в горизонтальный участок ствола, то потери добычи могут достигать нескольких процентов.

Увеличение добычи горизонтальной скважины (с хорошими условиями фильтрации на забое скважины $\alpha > 10$, $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\approx 1$), обусловленное присутствием горизонтального участка, определяется асимптотической формулой

$$Q\approx\frac{Q_v}{1-\ln\left(\frac{L}{4r_w}\right)\Big/\ln\left(\frac{R_c}{r_w}\right)},\quad L\to\infty$$

Здесь Q_v дебит вертикальной скважины, добывающей в тех же условиях. Двукратное увеличение добычи достигается при удлинении горизонтального участка ствола $L=4\sqrt{R_c r_w}$. Так при расстоянии до контура питания R_c =500 м и радиусе ствола скважины r_w = 0.2 м длина горизонтального участка должна быть не меньше 40 м. Для четырехкратного увеличения добычи, горизонтальный ствол потребуется удлинить уже до 283 м. При максимальном удлинении $L = R_c$, добыча, в сравнении с добычей вертикальной скважины, увеличится в 6 раз.

Список литературы

1. Борисов Ю.П., Пилатовский В.П., Табаков В.П. Разработка нефтяных месторождений горизонтальными и многозабойными скважинами. М.: Изд. Недра, 1964.
2. Joshi S.D. Augmentation of well productivity with slant andhorizontal wells. 1988. Vol. 40, June. Pp. 729-739.
3. Renard G., Dupuy J.M. Formation damage effects on horizontalwell flow efficiency. 1991. Vol. 7. Pp. 768-869.
4. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика // Изд-во «Недра», М.: - 1993 г., 416 с.
5. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи теории упругости. М., Наука, 1966 г.

УДК 531.5

Варгашкин Владимир Яковлевич
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры электроники, радиотехники и систем связи,
Институт приборостроения, автоматизации и информационных технологий Орловского государственного университета им. И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

ВЫЯВЛЕНИЕ ЧАСТОТНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ СКАЧКОВ АНИЗОТРОПИИ МИКРОВОЛНОВОГО РЕЛИКТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПО ДАННЫМ ЗОНДА УИЛКИНСОНА С УГЛОВЫМ РАЗРЕШЕНИЕМ 6,87 УГЛОВЫХ МИНУТ

Аннотация. *Проанализированы результаты измерения температуры микроволнового реликтового излучения по данным зонда Уилкинсона на различных частотах из диапазона от 23 Ггц до 94 Ггц для девяти лет работы зонда в 3145728 направлениях небесной сферы. Для каждого из таких направлений выявлены изменения температуры между смежными парами интегральных накопительных периодов длительностью по одному году. Построены статистические распределения подобных изменений. Установлено, что в хвосты этих распределений могут попадать значения анизотропии, относящиеся к одним и тем же направлениям на небесной сфере, выявленные на парах частот спутниковых измерений, при вероятности случайной реализаций таких попаданий, существенно меньшей выявленной в спутниковых экспериментах вероятности этих попаданий. Выдвинуто предположение о том, что установленные неслучайные факты могут быть объяснены гравитационным микролинзированием реликтового излучения неоднородностями масс на пути излучения от поверхности последнего рассеяния ранней Вселенной к наблюдателю (Интегрированный эффект Сакса-Вольфа), которая носит частотно-независимый характер.*

Ключевые слова: *микроволновое реликтовое излучение, гравитационное микролинзирование, зонд Уилкинсона, частотная независимость, угловое разрешение, объемная плотность потока излучения.*

Vargashkin Vladimir
candidate of Sciences in Technology, docent,
Associate Professor of Department of Electronics, Radio Engineering and Communication Systems, Institute of Instrumentation, Automation and Information Technologies, Oryol State University named after I.S. Turgenev
Russia, Oryol

DETECTION OF FREQUENCY INDEPENDENCE OF ANISOTROPY JUMPS OF CMB FROM DATA BASE OF WILKINSON PROBE WITH ANGULAR RESOLUTION OF 6.87 ARC MINUTES

Abstract: *The results of measuring the temperature of CMB from the Wilkinson probe at various frequencies from the range from 23 GHz to 94 GHz for nine years of operation of the probe in the 3145728 directions of the celestial sphere were analyzed. For each of these directions, temperature changes between adjacent pairs of integral accumulation periods lasting one year were identified. Statistical distributions of such changes have been constructed. It has been found that the tails of these distributions may receive values of anisotropy that characterize the same directions in the celestial sphere, and which are found on pairs of frequencies of satellite measurements with the probability of random implementations of these hits, which turned out to be significantly less than the probability of these hits in satellite experiments. It is suggested that the established non-random facts can be explained by gravitational microlensing of CMB by inhomogeneity of masses on the path of radiation from the surface of the last scattering of the early Universe to the observer (Integrated Sachs-Wolf Effect).*

Keywords: *cosmic microwave background radiation, gravitational microlensing, Wilkinson probe, frequency independence, angular resolution, volumetric density of radiation flux.*

Настоящая работа направлена на выявление частотно-независимых скачков анизотропии микроволнового реликтового излучения в базе данных зонда «*WMAP*». Эта база, в частности, содержит результаты спутниковых измерений, выполненных [1] на пяти его частотных каналах *K* (23 *ГГц*); *Ka* (33 *ГГц*); *Q* (41 *ГГц*); *V* (61 *ГГц*) и *W* (94 *ГГц*) [2]. Результаты, полученные с использованием двух каналов *K* и *Ka*, существенным образом отличаются по оценке погрешно-

сти измерения анизотропии температуры излучения от аналогичных оценок для трех спутниковых каналов Q; V и W.

Поэтому для дальнейшего анализа была использована база данных, полученная с использованием восьми пар радиометров $Q1$; $Q2$; $V1$; $V2$, $W1$; а также $W2$; $W3$ и $W4$, которые были сгруппированы согласно их буквенным обозначениям по трем частотам.

В [3] – [4] описан способ выявления частотно-независимых флуктуаций температуры микроволнового реликтового излучения. Согласно этому методу рассчитывают изменения температуры, как разности двух значений температур для двух смежных накопительных периодов измерений по всем направлениям небесной сферы на каждой из частот спутниковых измерений. Затем строят статистические распределения рассчитанных изменений температуры и для различных пар частот спутниковых измерений устанавливают ширину хвостов этих распределений, при которой количество случайного попадания n_1 скачков температуры внутрь таких хвостов одновременно для обеих частот выбранной пары достаточно мала.

На следующем этапе путем анализа результатов спутниковых измерений устанавливают количество n_2 направлений небесной сферы, которые характеризуются скачками температуры, соответствующими их попаданиям внутрь установленных выше хвостов одновременно для обеих частот. Если $n_2 >> n_1$ делают вывод о том, что в рассматриваемом направлении скачки температуры, зафиксированные на каждой из двух частот, обусловлены действием некоторых закономерных физических факторов.

Присутствие таких скачков в одних и тех же направлениях небесной сферы на различных частотах спутниковых измерений позволяет предположить, что к исследуемым закономерным физическим факторам может быть отнесено гравитационное микролинзирование микроволнового реликтового излучения. О событиях гравитационного микролинзирования судят по частотной независимости временных функций светимости соответствующих направлений небесной сферы. Однако временной анализ флуктуаций светимости в частотной области в рассматриваемом случае затруднен, поскольку опубликованные данные спутниковых измерений являются сильно интегрированными по времени, которое составляет девять отдельных годичных накопительных измерительных циклов [2].

Процедура выявления частотно-независимых скачков анизотропии в различных направлениях небесной сферы проиллюстрирована

для углового разрешения, которому d координатной системе *HealPix* [5] соответствует покрытие небесной сферы пронумерованными пикселами, в пределах каждого из которых анизотропия температуры считается постоянной. Средний размер такого пиксела составляет 0,1145 углового градуса, или 6,87 угловых минут. Каждый пиксел стягивает телесный угол $3{,}9947416\times10^{-06}$ *ср*. Таким образом, карта небесной сферы оказывается составленной из 3145728 отдельных пикселов.

На рис.1 (*a*, *c*) представлены временные диаграммы количеств *M* спутниковых наблюдений частотно-независимых изменений температуры микроволнового реликтового излучения на протяжении девяти годичных циклов накопления результатов измерения. Этот рисунок соответствует двум рассмотренным выше частотным диапазонам наблюдений с парами радиометров *Q*1 и *V*1. Диаграммы рис.1 (*a*, *c*) содержат десять графиков изменения числа *M* от времени, построенные в целях наглядности в различных масштабах *M*.

На рис.1 (*b*, *d*) представлены временные диаграммы отношений $k = n_2/n_1$ количества n_2 спутниковых измерений частотно-независимых изменений анизотропии температуры к их обусловленному случайными факторами числу n_1 на протяжении девяти годичных циклов накопления результатов измерения. Экспериментально устанавливаемое число n_2 при этом соответствовало теоретически устанавливаемому числу n_1, равному единице.

Для построения этих графиков назначены пять значений *J* количеств *k* частотно-независимых изменений анизотропии температуры, которые могут попасть в хвост распределения статистически случайным образом. Графикам, которым на рисунке присвоены условные номера 1; 2; 3; 4; 5, соответствуют расчетные значения числа *J*, соответственно равные 100; 10; 1; 0,1; 0,01.

В полях всех диаграмм рис.1 присутствуют по два семейства графиков, одно из которых изображено выше горизонтальной оси $M=0$, либо $k=0$, а другое – ниже этой оси. Верхнему семейству графиков соответствует положительные приращения анизотропии температуры в хвосте распределения при переходе от предыдущего цикла накопления результатов измерения к последующему, а нижнему графику – отрицательные.

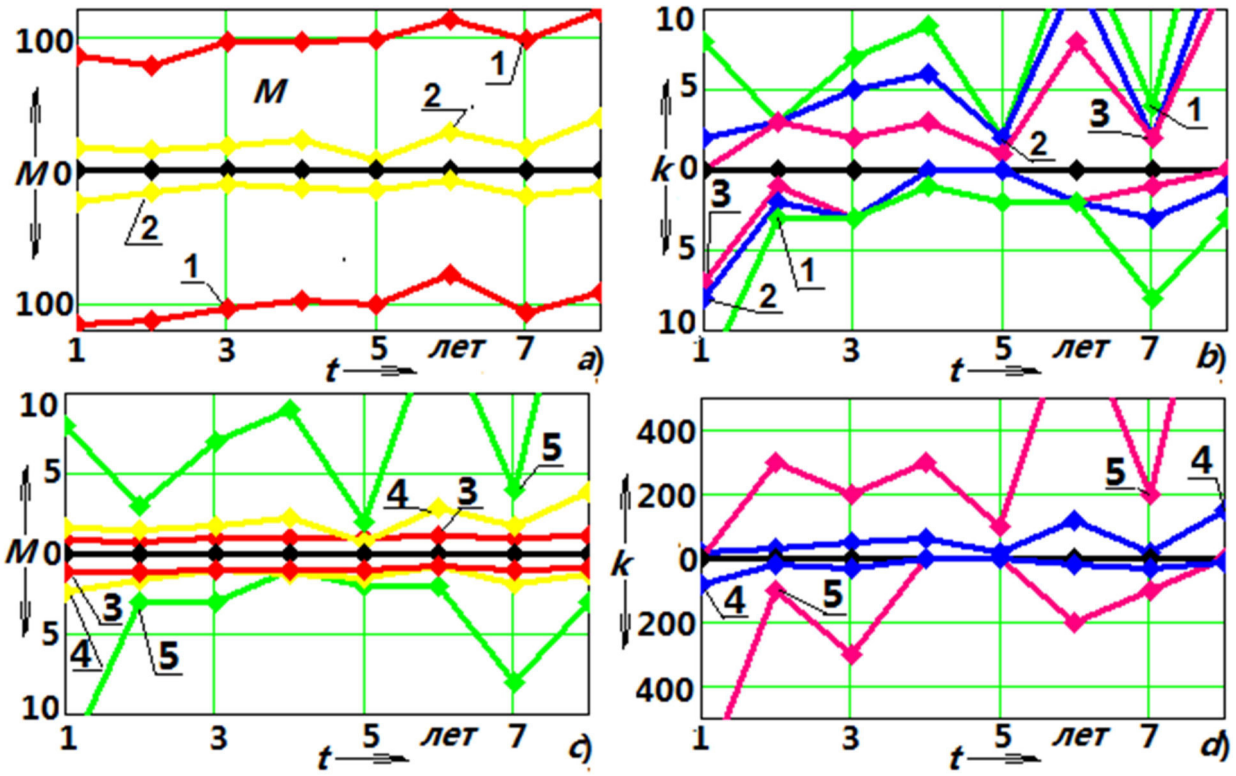


Рисунок 1 – Диаграммы зависимостей величин M (*a, c*) и k (*b, d*) от времени наблюдения при различных значениях фактора J для двух пар радиометров $Q1$ и $V1$

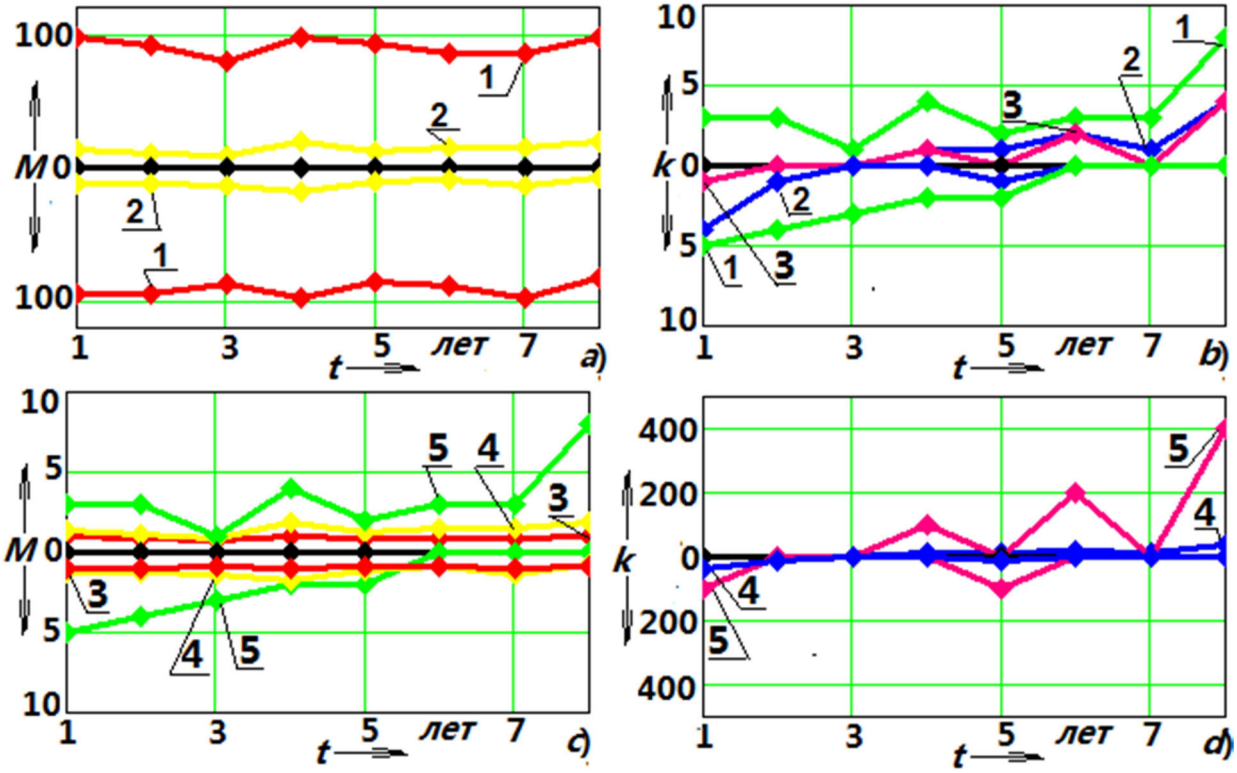


Рисунок 2 – Диаграммы зависимостей величин M (*a, c*) и k (*b, d*) от времени наблюдения при различных значениях фактора J для двух пар радиометров $Q1$ и $W1$

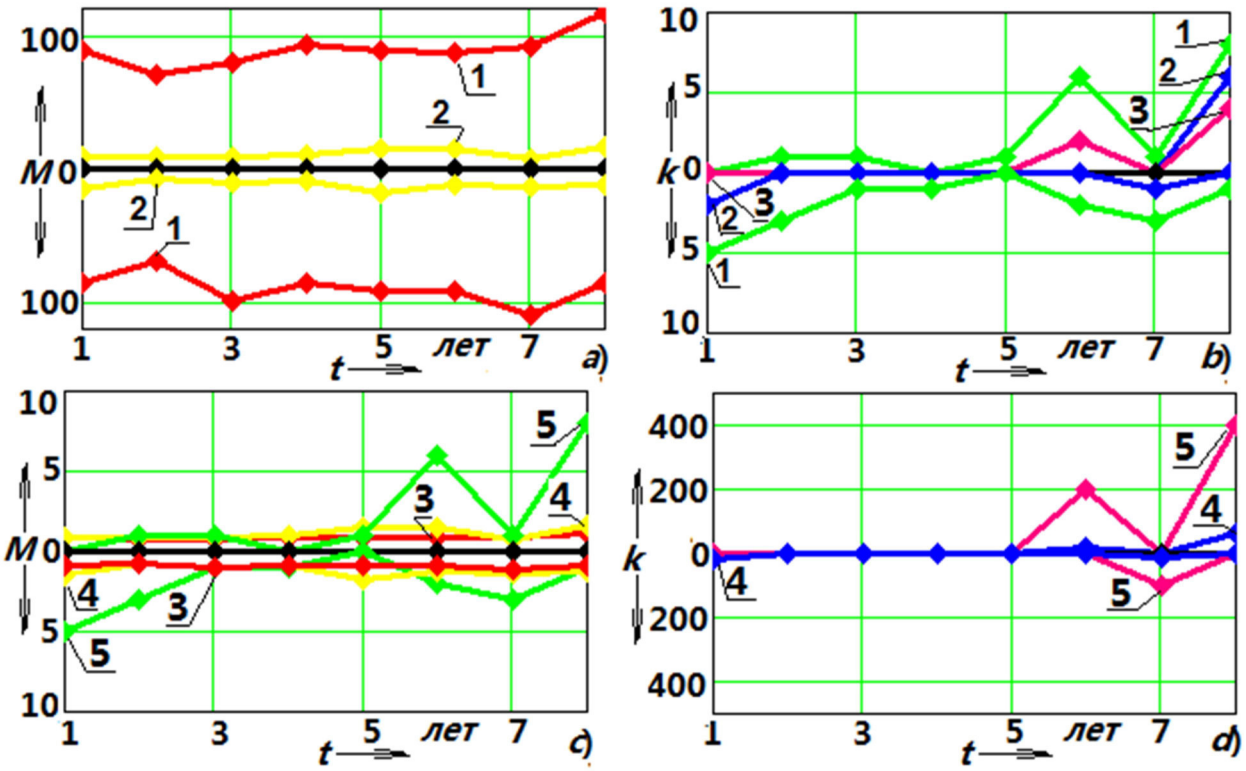


Рисунок 3 – Диаграммы зависимостей величин M (*a, c*) и k (*b, d*) от времени наблюдения при различных значениях фактора J для двух пар радиометров $V1$ и $W1$

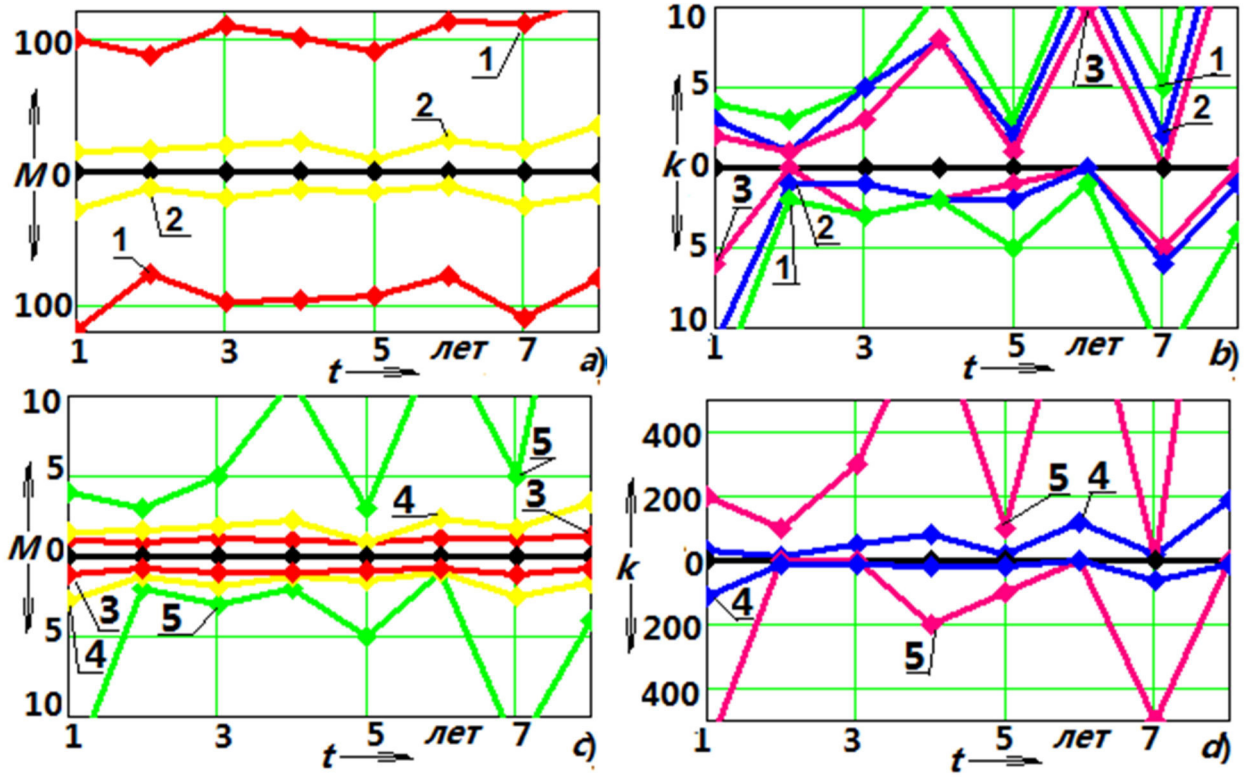


Рисунок 4 – Диаграммы зависимостей величин M (*a, c*) и k (*b, d*) от времени наблюдения при различных значениях фактора J для двух пар радиометров $Q2$ и $V2$

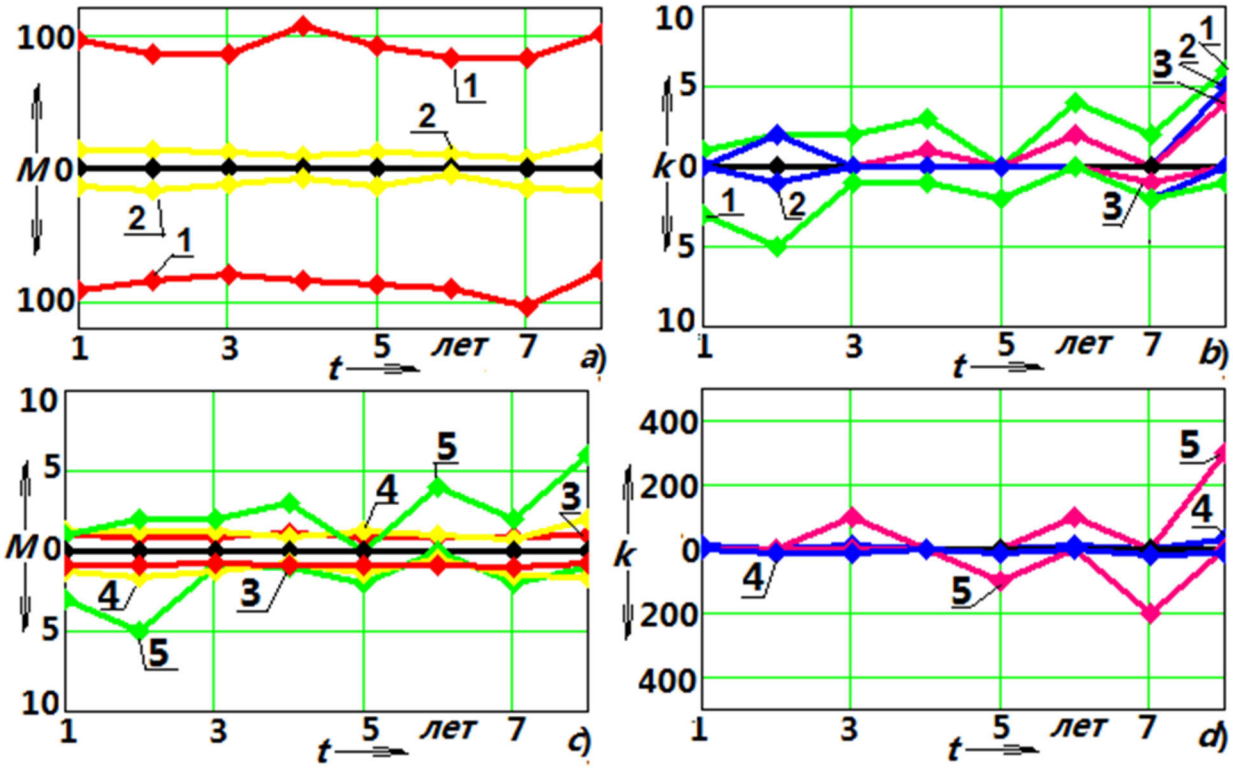


Рисунок 5 – Диаграммы зависимостей величин M (*a, c*) и k (*b, d*) от времени наблюдения при различных значениях фактора J для двух пар радиометров радиометров $Q2$ и $W2$

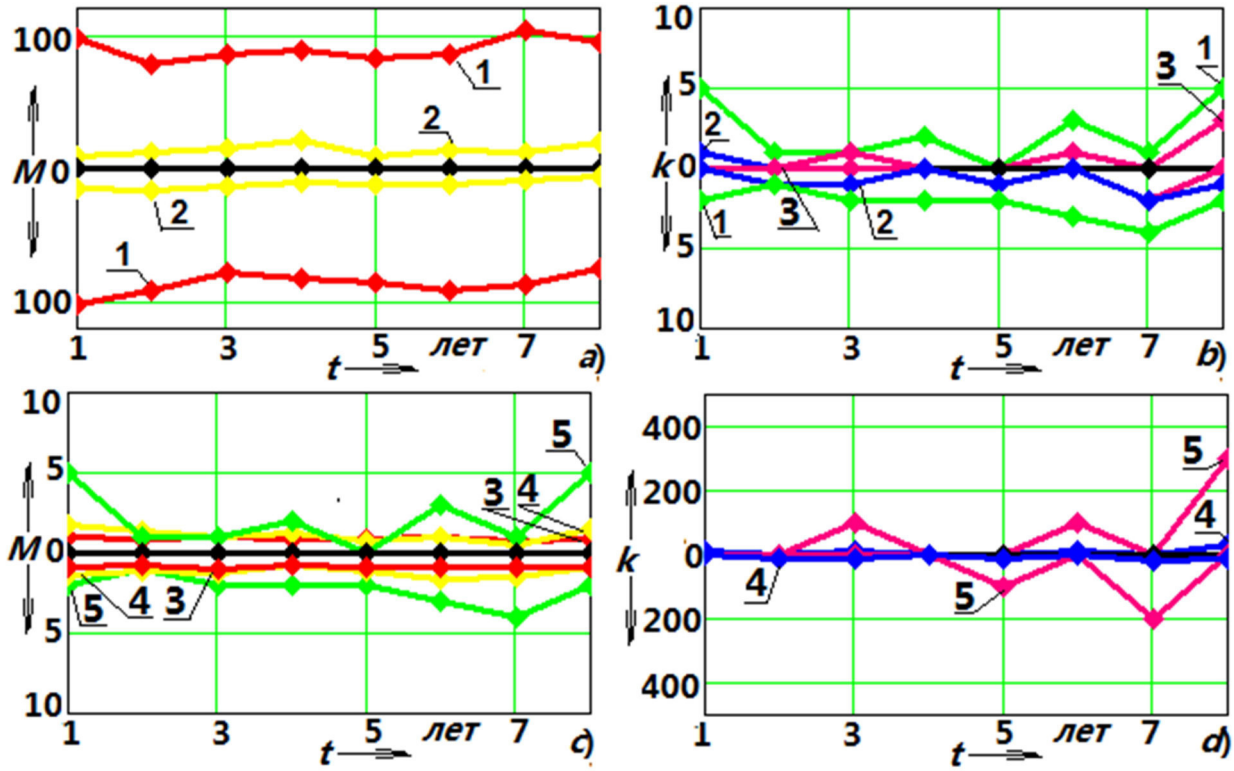


Рисунок 6 – Диаграммы зависимостей величин M (*a, c*) и k (*b, d*) от времени наблюдения при различных значениях фактора J для двух пар радиометров радиометров $V2$ и $W2$

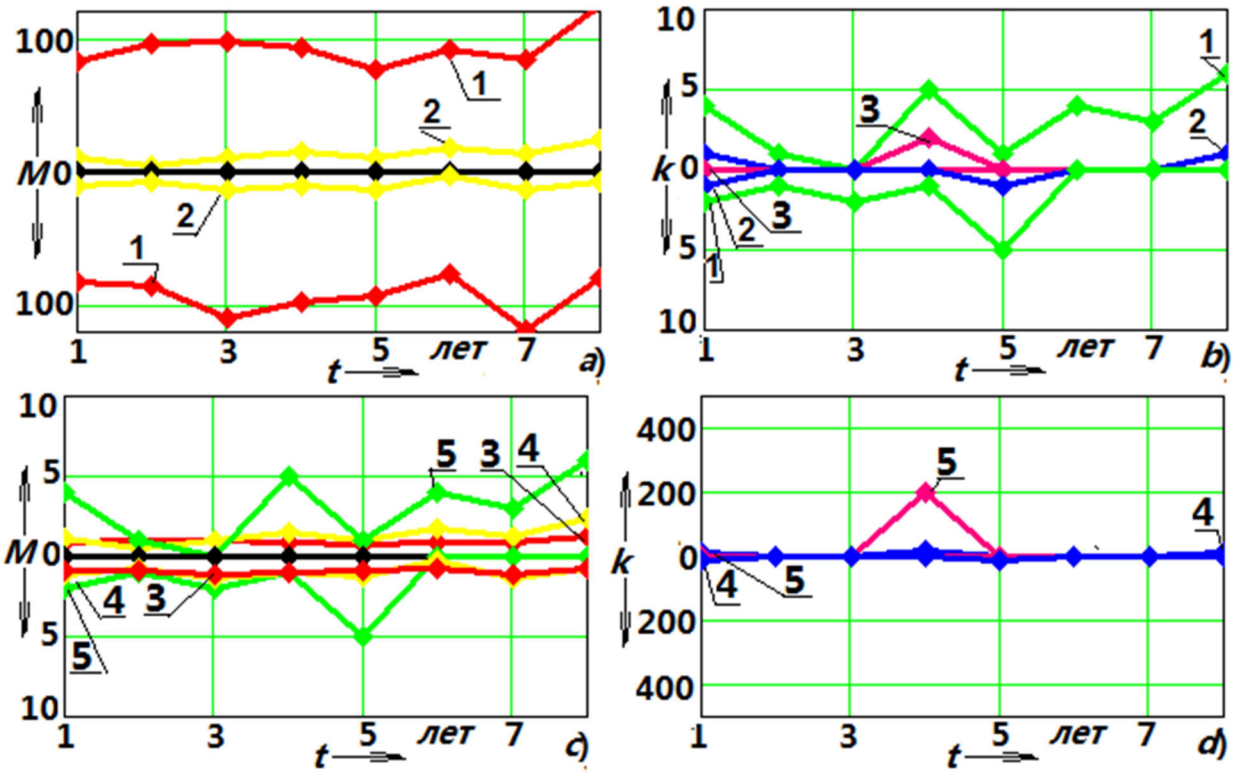


Рисунок 7 – Диаграммы зависимостей величин M (*a, c*) и k (*b, d*) от времени наблюдения при различных значениях фактора J для двух пар радиометров радиометров $Q1$ и $W3$

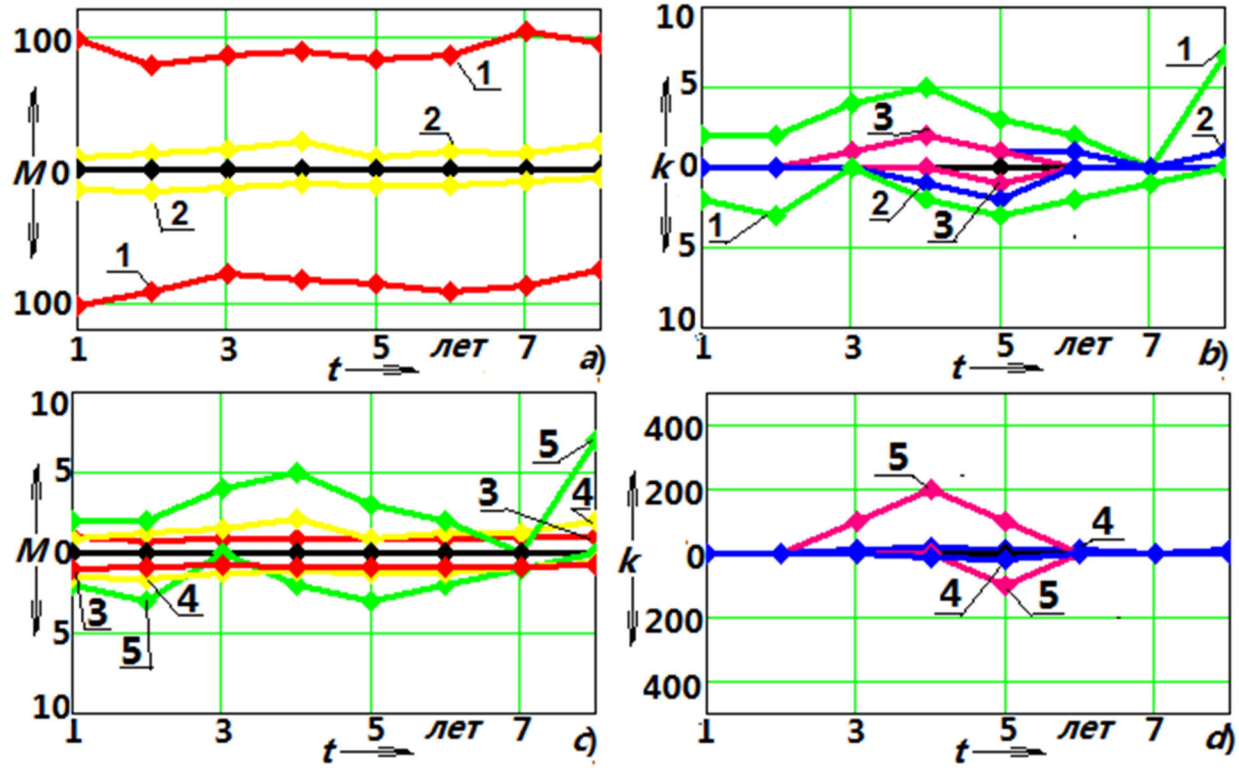


Рисунок 8 – Диаграммы зависимостей величин M (*a, c*) и k (*b, d*) от времени наблюдения при различных значениях фактора J для двух пар радиометров радиометров $V1$ и $W3$

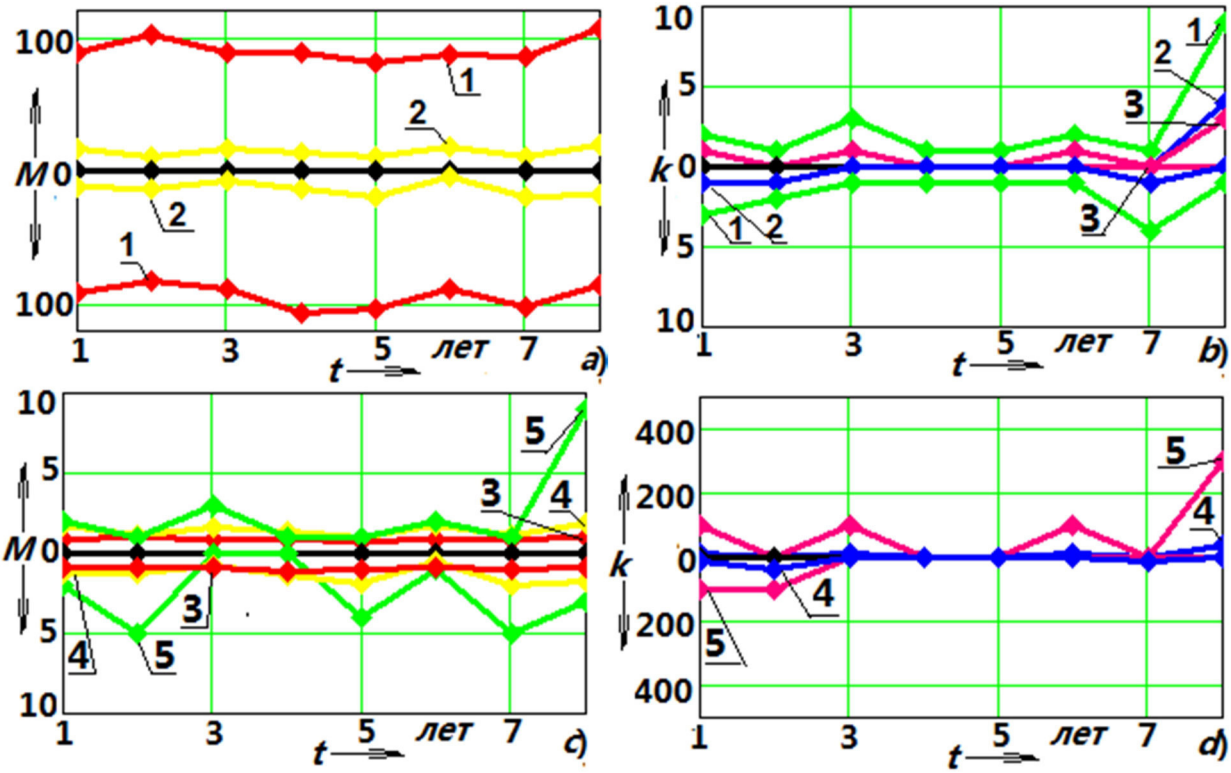


Рисунок 9 – Диаграммы зависимостей величин M (*a, c*) и k (*b, d*) от времени наблюдения при различных значениях фактора J для двух пар радиометров радиометров $Q2$ и $W4$

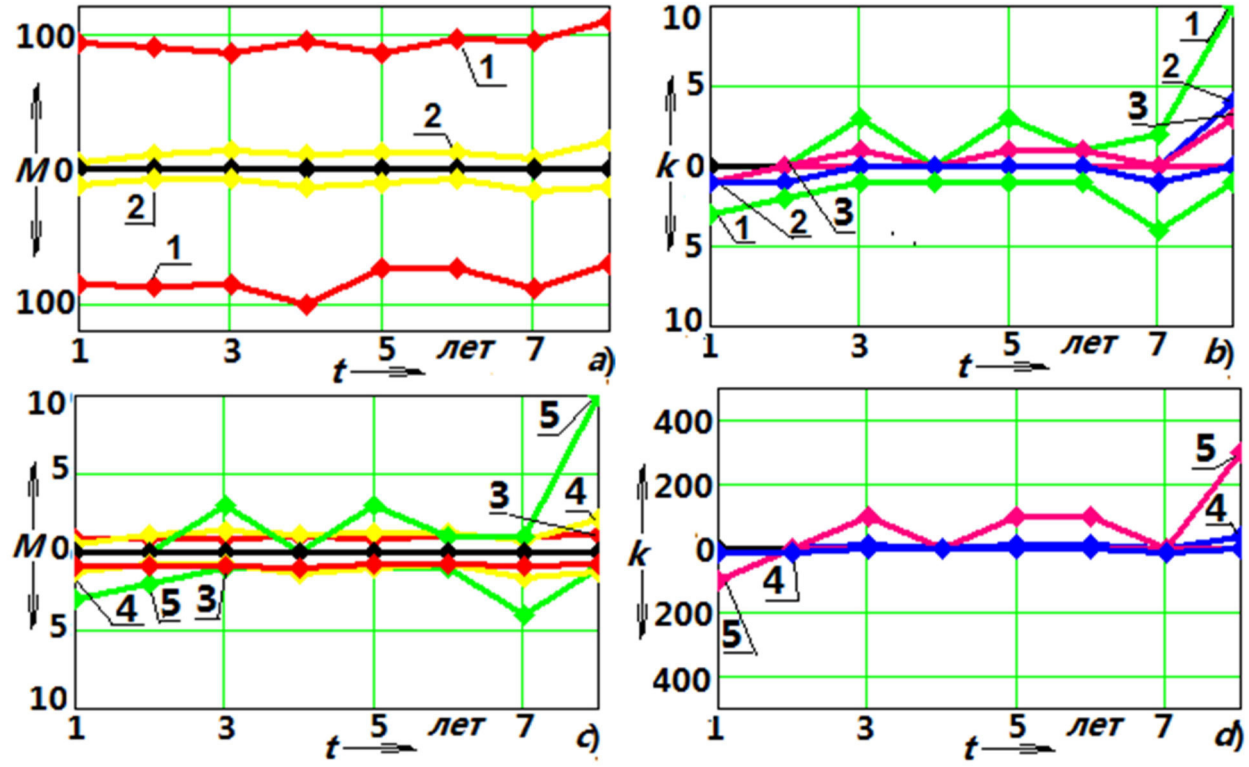


Рисунок 10 – Диаграммы зависимостей величин M (*a, c*) и k (*b, d*) от времени наблюдения при различных значениях фактора J для двух пар радиометров радиометров $V2$ и $W4$

Если, например, в какой-либо точке семейств графиков рис.1 (*b*, *d*), наблюдавшееся количество *k* превосходит единицу, то из этого следует, что в соответствующих хвостах распределения анизотропии температуры, полученных на каждой из двух частотах, присутствует лишь одно изменение анизотропии, которое может быть объяснено с позиций случайности. Остальные $M - 1$ изменений возникли в силу воздействия на излучение неслучайных факторов.

Анализ диаграмм рис.1 показывает, что с ростом фактора *k* растет число *M*, однако уменьшается сам фактор *k*. Иными словами возрастает количество точек в хвостах распределений изменений анизотропии температуры, которые являются кандидатами в частотно-независимые изменения. Однако, в их числе непропорционально быстро возрастает количество изменений, которые можно обосновать случайным сочетанием значений изменения анизотропии температуры на двух разных частотах. Вследствие этого при значениях J=100, а также $J = 10$ велика вероятность предполагать изменение анизотропии температуры частотно-независимым, тогда как оно обусловливается лишь случайным сочетанием числовых значений анизотропии температуры в хвостах распределений на различных частотах измерений.

С другой стороны, при значении J=0,01 значения *k* достигают нескольких сотен. Однако в этом случае число *M* не превышает нескольких единиц. Вследствие этого велика вероятность ошибочно считать частотно-независимые изменения анизотропии температуры следствием случайных сочетаний ее числовых значений в хвостах распределений на различных частотах измерений.

Суммируя сказанное, можно считать, что количество кандидатов в частотно-независимые изменения анизотропии температуры может составлять несколько десятков штук в течение годичного накопительного периода спутниковых измерений.

Для повышения достоверности полученных расчетов в них были включено также еще девять сочетаний пар спутниковых радиометров, указанных в подрисуночных подписях рис.1 – рис.10.

Выводы

Анализ анизотропии температуры микроволнового реликтового излучения по данным спутниковых измерений зонда «*WMAP*» вдоль различных направлений на небесной сфере, а также для различных временных периодов накопления результатов измерений и для раз-

личных частот спутниковых измерений, позволил установить ряд особенностей изменения анизотропии температуры в угловой пространственной, а также во временной областях.

Анализ распределений вероятностей появления однонаправленных изменений анизотропии температуры в хвостах их распределений в пределах одинаковых смежных периодов накопления результатов измерений в одних и тех же направлениях небесной сферы одновременно на различных частотах, позволяет сделать вывод о том, что оцененная вероятность появления таких изменений в десятки раз может превосходить статистическую вероятность их случайного появления.

Количество кандидатов в частотно-независимые изменения анизотропии температуры оценивается в несколько десятков за время годичного накопительного периода измерений с учетом разрешающей способности этих измерений в 6,87 угловых минут и количестве раздельно устанавливаемых направлений на небесной сфере, равным 3145728 в системе *Healpix* [5].

Список литературы

1. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results. Bennett, C.L., et.al., 2013, ApJS., **208**, 20B.
2. N.Jarosik, et al. Design, Implementation and Testingofthe MAP Radiometers, 2003, ApJS, **145**,413.
3. Vladimir Ya.Vargashkin. The analysis of frequency-independent jumps of CMB according to the «Planck» data. Journal of Physics: Conference. Series **1051** (2018). *Proceeding of XX International Meeting* «*Physical Interpretations of Relativity Theory*».- London: IOP published house, 2018: 012027.
4. Vladimir Ya.Vargashkin. The analysis of CMB anisotropy to temporary domain according to WMAP and Planck probes databases. Journal of Physics: Conference. Series **1557** (2020). *Proceeding of XXI International Meeting* «*Physical Interpretations of Relativity Theory*».- London: IOP published house, 2020: 012037.
5. K.M. Górski, Eric Hivon, A.J. Banday, B.D. Wandelt, F.K. Hansen, M. Reinecke, M.Bartelmann HEALPIX - a Framework for High Resolution Discretization, and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere.- 2005, ApJ **622**, 759.

УДК 65.011.56

Воронина Оксана Александровна
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры электроники, радиотехники и систем связи
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Лобанова Валентина Андреевна
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры электроники, радиотехники и систем связи
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ МОНИТОРИНГА СОСТОЯНИЯ РЕЗЕРВУАРНОГО ПАРКА ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Аннотация. *Предлагается подход к проектированию системы мониторинга состояния резервуарного парка для промышленных предприятий, где требуется накапливать запасы. Рассмотрены структура и функции подсистем определения характеристик сырья и оперативного контроля состояния резервуара.*

Ключевые слова: *резервуары, резервуарный парк, характеристики сырья, состояние резервуара.*

Voronina Oksana Aleksandrovna
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Electronics, Radio Engineering and Communication Systems
Orel State University,
Russia, Orel

Lobanova Valentina Andreevna
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Electronics, Radio Engineering and Communication Systems
Orel State University,
Russia, Orel

DESIGN OF A SYSTEM FOR MONITORING THE CONDITION OF THE TANK FARM OF AN INDUSTRIAL ENTERPRISE

Abstract. *An approach to the design of a system for monitoring the condition of a tank farm for industrial enterprises, where it is required to accumulate reserves, is proposed. The structure and functions of subsystems for determining the characteristics of raw materials and operational monitoring of the state of the reservoir are considered.*

Keywords: *tanks, tank farm, characteristics of raw materials, condition of the tank.*

Резервуары находят свое применение в процессах хранения и обработки не только продуктов нефтепереработки, но и для воды, жидкостей, сжиженных газов, сыпучих продуктов. Каждое предприятие имеет свои технологические особенности, соответственно применяемые резервуары отличаются такими специфическими характеристиками как конструкция, объем, толщина стенок, расположение, режим эксплуатации. В зависимости от хранимого сырья резервуары используются как металлические (стальные, алюминиевые), так и неметаллические (стеклопластиковые, резинотканевые, железобетонные) [1].

Применение резервуарного парка обусловлено для тех промышленных предприятий, где требуется накапливать запасы.Анализируя техническое обеспечение резервуарных парков данных предприятий, можно сделать вывод об использовании устаревшего измерительного оборудования в составе АСУТП и простейшего программного обеспечения. Это приводит к таким особенностям как невысокая скорость сбора, передачи и анализа данных о характеристиках сырья в резервуарах, особенно если территориально резервуары далеко расположены друг от друга и от АСУТП. Что вызывает в свою очередь снижение адекватности получаемых результатов. Одним из способов устранения недостатков на таких промышленных предприятиях, где используется резервуарный парк – проектирование в составе АСУТП системы мониторинга состояния резервуарного парка с использованием современных технологий, обладающей свойствами открытости и расширяемости [2].

Соответственно система мониторинга состояния резервуарного парка может найти применение как в составе АСУТП для предприя-

тий нефтепереработки, так и для многих других, например, по производству растительных масел различного назначения.

К основным задачам системы мониторинга можно отнести следующие:

– определение текущего состояния резервуара с учетом типа хранимого сырья с учетом параметров внешней среды;

– снижение потерь сырья на этапе хранения за счет мониторинга параметров технологического процесса.

На рисунке 1 приведена обобщенная структура системы мониторинга в составе АСУ ТП, включающая две подсистемы: определения характеристик сырья и оперативного контроля состояния резервуара [3].



Рисунок 1 – Обобщенная структура системы мониторинга в составе АСУТП

Функции системы мониторинга в составе АСУТП:

1) получение данных:

– установление типа сырья;

– установление типа резервуара (материал, расположение);

– определение состояния резервуара (уровень, объем, процент заполнения);

– измерение параметров внешней среды (температура, давление, влажность);

2) обработка полученных данных, сравнение текущего состояние с нормативным;

3) выработка управляющих воздействий по итогам мониторинга.

Формальная постановка задач системы мониторинга состояния резервуарного парка выглядит следующим образом:

Определить данные для подсистемы оперативного контроля состояния резервуара:

$CT = \{CT_G, CT_p\}$ – множество характеристик резервуара:

$CT_G = \{H_G, F_T, F_{BE}, D_T, M_T\}$ – множество геометрических характеристик: H_G– заглубленность в грунт, F_T – форма резервуара, F_{BE}– форма днища, D_T – толщина стенок и днища, M_T – материал резервуара.

$CT_p = \{H_p, V_p, Z_p\}$ – множество эксплуатационных характеристик: H_p – уровень сырья, V_p– объем резервуара, Z_p– процент заполнения резервуара.

Определить данные для подсистемы определения характеристик сырья:

$CM = \{MC_C, MC_{ПС}\}$ – множество характеристики сырья: CM_C – вид сырья, $CM_{ПС}$ – основные параметры сырья, выбранные с помощью метода ранговой корреляции или дисперсионного анализа.

$CC = \{T, P, \varphi\}$ – климатические условия: T –температуравнешне среды, P– давление, φ– влажность. Возможно дополнение параметров внешней среды с помощью метода ранговой корреляции или дисперсионного анализа.

Следует найти объемно-массовые характеристики сырья в резервуарах сложной формы с учетом условий хранения и параметров внешней среды:

$$VMC = f(CT, CM, CC).$$

Для определения данных используются датчики технологических параметров, исполнительные механизмы, системы автоматического регулирования, показывающие приборы. Дельнейшее взаимодействие осуществляют блоки сопряжения с датчиками за счет сбора, временного хранение собранной информации о параметрах сырья и резервуаров от датчиков и выдачи информации о параметрах каналов измерений датчиков по запросу от АСУТП.

На рисунке 2 представлена структура подсистемы оперативного контроля технологического состояния резервуарного парка с учетом полученных данных [3]. В предложенной структуре можно выделить следующие блоки:

–оценки состояний сырья и резервуарного парка;

– принятия решений по результатам сравнения текущего состояния с нормативным;

– выдачи управляющих воздействий по итогам мониторинга.

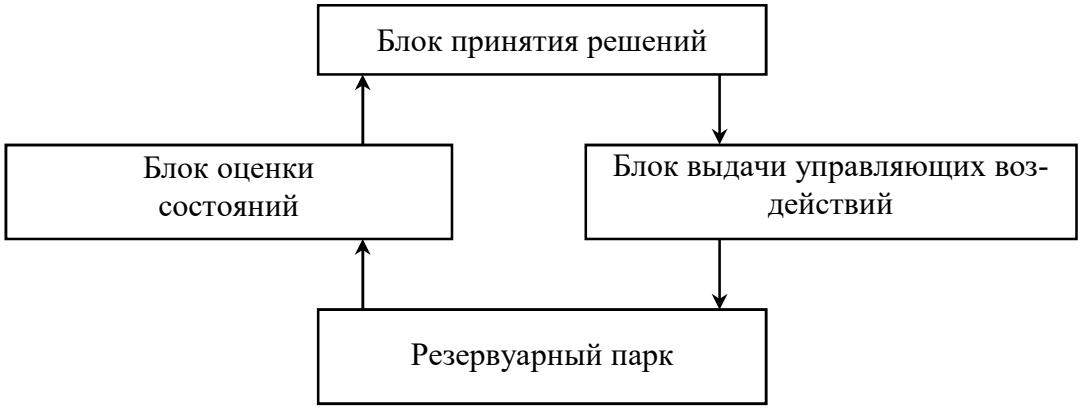


Рисунок 2 – Структура подсистемы оперативного контроля технологического состояния резервуарного парка

Для реализации свойств интероперабельности и масштабируемости системы мониторинга состояния резервуарного парка целесообразно внести дополнения в архитектуру путем получения данных не только рабочей станцией, но и сервером. Такое усовершенствование позволяет добавить системе свойства модульности, возможности разделения программ пользователей и базовых программ обработки данных о сырье и состоянии резервуарного парка [2].

В системе мониторинга резервуарного парка любого промышленного предприятия должно быть предусмотрено оперативное реагирование на выход параметров сырья и состояния резервуаров за предельные значения. При превышении значенийкаких-либо параметров сырья и состояния резервуаров управляющее воздействие выдается как сигнал оператору иликак какая-то реакция оборудования (при переполнении резервуара – сигнал управления насосом).

Список литературы

1. Системы автоматизации в нефтяной промышленности : учебное пособие / М. Ю. Прахова и др.; под общ. ред. М. Ю. Праховой – Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2019.– 304 с.
2. Маковкин, В.И., Замятин, Н.В. Система мониторинга и обработки информации о состоянии резервуарного парка /В.И. Маковкин, Н.В. Замятин// Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники – 2016. – т. 19. – № 4. – с. 95–99.
3. Лобанова, В.А., Воронина, О.А. Резервуарный парк приема, хранения и отпуска нефтепродуктов. Моделирование технологических параметров. (монография) / В.А.Лобанова, О.А.Воронина – LAMBERT ACADEMIC PABLICHING (LAP) Германия, 2011 – 196 с.

УДК 519.718

Голубева Ольга Ивановна
кандидат технических наук, доцент,
Томский государственный университет,
Россия, Томск

АЛГОРИТМЫ ПОЛУЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ ТЕСТОПРИГОДНОСТИ ДЛЯ ВСЕХ ПОЛЮСОВ ЭЛЕМЕНТОВ КОМБИНАЦИОННОЙ СХЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ SAT-РЕШАТЕЛЯ

Аннотация. *Предлагаются эффективные алгоритмы построения КНФ для получения функций тестопригодности (управляемости, наблюдаемости и обнаружения константной неисправности), а также дополнение функции наблюдаемости, полюса элемента комбинационной схемы с применением SAT-решателя. Описывается построение функций по выполняющим наборам, полученным SAT-решателем. Также предлагается эффективный алгоритм получения КНФ для всех или для подмножества полюсов схемы.*

Ключевые слова: *функции тестопригодности, тесты, наблюдаемость, управляемость, константная неисправность, КНФ, SAT-решатель.*

Golubeva Olga
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Tomsk State University,
Russia, Tomsk

ALGORITHMS FOR CONSTRUCTING TESTABILITY FUNCTIONS FOR ALL LINES OF COMBINATIONAL CIRCUIT USING SAT SOLVER

Abstract. *Efficient algorithms for constructing CNFs are proposed for obtaining testability functions (controllability, observability and stuck-at fault detection functions), as well as the complement of the observability function, of a line of a combinational circuit using a SAT solver. The construction of functions from satisfying assignments obtained by a SAT solver is described. An efficient algorithm for obtaining CNFs for all or for a subset of a circuit lines is also proposed.*

Keywords: *testability functions, tests, observability, controllability, stuck-at fault, CNF, SAT solver.*

В данной работе рассматривается построение функций тестопригодности полюсов элементов комбинационной схемы, а именно функций: управляемости, наблюдаемости и обнаружения константной неисправности, а также дополнения (инверсии) функции наблюдаемости [1]. Детализируются ранее предложенные методы [2, 3] решения задачи с применением SAT-решателя. Предлагаются эффективные алгоритмы построения КНФ для получения рассматриваемых функций для одного полюса. Также предлагается эффективный алгоритм построения КНФ для всех или для части полюсов элементов схемы при получении функций тестопригодности с применением SAT-решателя.

Функции тестопригодности находят свое применение в задачах анализа и синтеза логических схем.

Рассмотрим комбинационную схему S с n входами и m выходами и полюс v схемы. Пусть $X = \{x_1, ..., x_n\}$ – входные переменные схемы; $\varphi_i(X)$, $i = \overline{1,m}$, – функция, реализуемая i-ым выходом схемы. $\varphi_i^{v,1}(X)$ и $\varphi_i^{v,0}(X)$ – функции, реализуемые i-ыми выходами схем $S^{v,1}$ и $S^{v,0}$ с неисправностями константа 1 и 0 на полюсе v соответственно.

Функция обнаружения константной неисправности 1(0) $D^{v,1}(X)$ ($D^{v,0}(X)$) на полюсе v схемы – это булева функция, такая что $D^{v,1}(\alpha) = 1$ ($D^{v,0}(\alpha) = 1$) тогда и только тогда, когда α является тестом для неисправности константа 1 (константа 0) на полюсе v.

Функция наблюдаемости полюса v $B^v(X)$ – это булева функция, такая что $B^v(\alpha) = 1$ тогда и только тогда, когда α – это входной набор, который обеспечивает смену значения хотя бы на одном из выходов схемы при смене значения на полюсе v.

$B_i^v(X)$ – функция наблюдаемости полюса v на i-ом выходе схемы. Формулы функций наблюдаемости полюса v имеют вид:

$$B_i^v(X) = \varphi_i^{v,1}(X) \oplus \varphi_i^{v,0}(X), \quad i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

$$B^v(X) = B_1^v(X) \vee ... \vee B_m^v(X). \tag{2}$$

Пусть $f^v(X)$ – функция, реализуемая на полюсе v. Тогда формулы *функций* $C^{v,1}(X)$ 1-*управляемости* и $C^{v,0}(X)$ 0-*управляемости*:

$$C^{v,1}(X) = f^v(X);\ C^{v,0}(X) = \overline{f}^v(X). \tag{3}$$

Функции $D^{v,1}(X)$ и $D^{v,0}(X)$ можно получить на основе функций наблюдаемости и управляемости по формулам:

$$D^{v,1}(X) = B^{v}(X) \cdot C^{v,0}(X),$$
$$D^{v,0}(X) = B^{v}(X) \cdot C^{v,1}(X). \quad (4)$$

Между элементами схемы e_i и e_j выполняется отношение $e_i \prec e_j$, если: а) выход e_i соединен с входом e_j или б) существует подмножество элементов $e_{k_1},\ldots,e_{k_p}$ такое, что выполняются отношения $e_i \prec e_{k_1} \prec \ldots \prec e_{k_p} \prec e_j$. Таким образом, $e_i \prec e_j$, если в схеме есть путь от выхода e_i к входу e_j.

Аналогичным образом можно определить отношение "$\prec$" между полюсами, соединениями, входами и выходами схемы.

Назовем элемент e_j *прямым последователем* элемента e_i, если выход e_i соединен с входом e_j; при этом e_i назовем *прямым предшественником* e_j. Назовем элемент e_j *последователем* (или *потомком*) элемента e_i, а e_i – *предшественником* (или *предком*) e_j, если $e_i \prec e_j$.

$M_g^1(X) = \{(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in E_n^2(X): g(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 1\}$ – область единичных значений булевой функции $g(x_1, ..., x_n)$;

$M_g^0(X) = \{(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in E_n^2(X): g(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0\}$ – область нулевых значений функции $g(x_1, ..., x_n)$.

Обозначим через O^v множество номеров выходов, являющихся последователями полюса v. Заметим, что для получения функции наблюдаемости необходимо рассмотреть только подсхему, реализующую выходы из множества O^v, т.к. $B_i^v(X) = 0$ для $i \notin O^v$.

Далее рассмотрим Алгоритм 1 и Алгоритм 1.1 построения КНФ для получения функций тестопригодности для полюса v схемы. Также рассмотрим Алгоритм 2 построения КНФ для получения функций тестопригодности для всех полюсов элементов схемы S. Алгоритмы кратко рассмотрены в [2, 3] и основываются на той же идее, что и алгоритмы, предложенные в [2, 3] для ДНФ и BDD.

Под исключением элементов из схемы будем подразумевать также и исключение соединений, у которых исключен хотя бы один из двух полюсов, а также входов и выходов схемы, если исключены все элементы, с которыми они соединены.

КНФ для получения функций, реализуемых комбинационной схемой, с применением SAT-решателя строится следующим образом [4]: выходу каждого элемента e_i схемы сопоставляется своя перемен-

ная v_i; для e_i строится КНФ функции $v_i \sim f_i$, где f_i – функция элемента; КНФ, полученные для элементов, объединяются операцией конъюнкции. Элементы схемы можно рассматривать в произвольном порядке.

В алгоритмах для краткости будем полагать, что v – это выходной полюс элемента. Алгоритмы легко дополняются на случаи, когда v – это входной полюс элемента, вход или выход схемы.

Алгоритм 1. Построение КНФ P^v для получения функций тестопригодности: $C^{v,1}$, $C^{v,0}$, B_i^v, B^v, $D^{v,1}$, $D^{v,0}$, и $\overline{B}^v$ с использованием SAT-решателя.

1) Исключим из схемы S все элементы, не являющиеся предшественниками выходов множества O^v, получим схему S^v.

2) Выходу каждого элемента e_i сопоставим свою переменную v_i. Получим в виде КНФ P^{e_i} функции $v_i \sim f_i$, где f_i – функция элемента e_i, для всех элементов схемы S^v.

3) Для элементов – последователей v, из КНФ P^{e_i} элемента получим две КНФ: одна при единичном значении на полюсе v, вторая при нулевом значении на полюсе v. При этом у одной КНФ к индексу выходной переменной добавим 1 ($v_{i,1}$), у второй – 0 ($v_{i,0}$). Если некоторый вход элемента соединен с полюсом v, то в первой КНФ на этот вход подставим 1, во второй – 0. Выполним упрощение КНФ с константами. Если некоторый вход элемента соединен с выходом элемента, являющегося последователем v, то используем для первой КНФ входную переменную, соответствующую этому входу, с дополнительным индексом 1, для второй КНФ используем входную переменную с дополнительным индексом 0.

4) На данном шаге алгоритма строящуюся КНФ P^v получаем выполнением конъюнкции всех полученных КНФ для элементов.

5) Выполним упрощение двух под-КНФ: одна состоит из КНФ элементов с выходными переменными $v_{i,1}$, а вторая – с выходными переменными $v_{i,0}$. Этот шаг алгоритма не обязателен.

6) Получим КНФ для операций сложения по модулю 2: $B_i \sim (v_{j_i,1} \oplus v_{j_i,0})$, $j_i \in O^v$, здесь v_{j_i} – переменные, соответствующие выходам элементов соединенным с выходами схемы из множества O^v. Выполним конъюнкцию этих КНФ со строящейся КНФ P^v.

7) Получим КНФ для дизъюнкции функций B_i: $B^v \sim \bigvee_{i \in O^v} B_i$. Выполним ее конъюнкцию со строящейся КНФ и получим КНФ P^v.

В Алгоритме 1 КНФ P^v строится, используя схему S^v описанную на шаге 1 и формулы (1) и (2). Для некоторой формулы $A = F$ получаем КНФ для функции $A \sim F$.

Таким образом, в предложенном алгоритме мы используем как схему, так и формулы для построения КНФ.

В Алгоритме 1 применяется сокращенная схема S^v, она состоит из предшественников выходов, являющихся последователями полюса v. Другими словами, S^v получается из схемы S исключением всех элементов, не являющихся предшественниками выходов множества O^v.

Для реализации алгоритма можно использовать упорядочивание элементов схемы S^v так, чтобы выполнялись все отношения предшествования между элементами, т.е. если $e_{k_i} \prec e_{k_j}$, то в последовательности e_{k_i} предшествует e_{k_j}; получим последовательность элементов e_{k_1}, …, e_{k_t}. Тогда все элементы последователи элемента e^v с выходным полюсом v будут располагаться в последовательности после него. При получении функций только для одного полюса, на шаге 1 можно упорядочить элементы схемы S^v так, чтобы все элементы, не являющиеся последователями элемента e^v, находились в последовательности до e^v. Тогда для всех элементов до e^v, включая сам этот элемент, будем вычислять по одной КНФ, а после e^v – по две КНФ.

Далее по построенной КНФ P^v получим функции тестопригодности с помощью SAT-решателя описанным ниже способом.

При получении только функций наблюдаемости полюса v и дополнения функции наблюдаемости шаг 1 Алгоритма 1 преобразуется к следующему.

Алгоритм 1.1. Построение КНФ $P^{v,B}$ для получения функций наблюдаемости B_i^v, B^v и $\overline{B}^v$ с использованием SAT-решателя.

1) Обозначим $S^{v,B}$ подсхему схемы S, в которой переменная v является входной переменной, сопоставленной полюсу v схемы S. Входы элементов, соединенные с полюсом v в схеме S, соединены с входом v в схеме $S^{v,B}$. $S^{v,B}$ состоит из элементов схемы S, соединений между ними и соединенных с ними первичных входов и выходов, которые являются последователями

входа v или предшественниками этих последователей. Другими словами, схему $S^{v,B}$ получаем из схемы S исключением всех элементов после соединения полюса v с новым первичным входом v, не являющихся последователями входа v или предшественниками этих последователей.

Далее выполняются шаги 2 – 7 Алгоритма 1 для схемы $S^{v,B}$, где на шаге 3 рассматривается вход v.

Замечание. Пункт 1 Алгоритма 1.1 представляет сокращенную по отношению к исходной схеме S схему $S^{v,B}$ после соединения полюса v с новым первичным входом v. В дальнейшем на вход v выполняется подстановка констант 1 и 0. При подстановке констант также могут сократиться КНФ элементов последователей входа v.

Рассмотренное сокращение схемы приведено в примере ниже.

Получим КНФ $P^{v,B,1}$ для построения функции наблюдаемости, присвоив в КНФ $P^{v,B}$ переменной B^v значение 1. Соответственно, присвоив в КНФ $P^{v,B}$ переменной B^v значение 0, получим КНФ $P^{v,B,0}$ для построения дополнения функции наблюдаемости. Далее можно получить функцию наблюдаемости или ее дополнения по построенным КНФ $P^{v,B,1}$ и $P^{v,B,0}$ с помощью SAT-решателя. Если необходимо получить обе функции, то можно получить их вместе, получив все выполняющие наборы КНФ $P^{v,B}$ и далее определив по ним входные наборы множества единичных значений функций B^v и $\overline{B}^v$, или каждую отдельно по КНФ $P^{v,B,1}$ и $P^{v,B,0}$.

Далее рассмотрим определение по выполняющему набору, полученному SAT-решателем для КНФ P^v, принадлежит ли входной вектор области единичных (M^1) или нулевых (M^0) значений каждой функции тестопригодности полюса v, основываясь на значениях переменных v и B^v.

Пусть $\alpha|_X$ – проекция вектора α на множество входных переменных X.

Рассмотрим выполняющий набор α. Обозначим через X^v входные переменные схемы S^v. Тогда принадлежность $\alpha|_{X^v}$ множествам единичных значений различных функций тестопригодности определяется следующим образом:

1) если $\alpha|_v = 1$, то $\alpha|_{X^v} \in M^1_{C^{v,1}}$; если $\alpha|_v = 0$, то $\alpha|_{X^v} \in M^1_{C^{v,0}}$;

2) если $\alpha|_{B_i} = 1$, то $\alpha|_{X^v} \in M^1(B_i^v)$; если $\alpha|_{B_i} = 0$, то $\alpha|_{X^v} \in M^1(\overline{B}_i^v)$;

3) если $\alpha|_{B^v}=1$, то $\alpha|_{X^v}\in M^1_{B^v}$; если $\alpha|_{B^v}=0$, то $\alpha|_{X^v}\in M^1(\overline{B}^v)$;

4) если $\alpha|_{B^v}=1$ и $\alpha|_v=1$, то $\alpha|_{X^v}\in M^1_{D^{v,0}}$;

5) если $\alpha|_{B^v}=1$ и $\alpha|_v=0$, то $\alpha|_{X^v}\in M^1_{D^{v,1}}$.

Заметим, что если множество $X^v \subset X$, где X – это множество входных переменных схемы S, то переменные $X \setminus X^v$ полученного множества единичных значений функций тестопригодности устанавливаются в '-' и таким образом получаем интервалы из множества единичных значений соответствующих функций.

Значения на предшественниках и последователях полюса v для тестовых векторов из $M^1_{D^{v,1}}$ и $M^1_{D^{v,0}}$ также можно получить из выполняющих наборов.

Пример 1. Рассмотрим схему S^v с тремя входными переменными $X^v = \{x_1, x_2, x_3\}$. Для краткости предположим, что $X = X^v$. Пусть $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ – полюса, предшествующие v. Пусть один из выполняющих наборов, полученных SAT-решателем следующий:

$x_1\, x_2\, x_3 \ \ldots\ w_1\, w_2 \ldots w_k\, v \ \ldots\ B^v$

α: 1 0 1 … 0 0 … 1 0 … 1

Входной вектор $\alpha|_{X^v} = (101) \in M^1_{C^{v,0}}$, так как $\alpha|_v = 0$, и $(101) \in M^1_{B^v}$, так как $\alpha|_{B^v}=1$, следовательно, набор (101) является тестовым для неисправности константа 1. На тестовом векторе (101) полюсы w_1, w_2, .. w_k принимают значения $\alpha|_{w_1 w_2 \ldots w_k} = (00\ldots 1)$.

Аналогично из выполняющих наборов могут быть получены значения на последователях v, а также на любых полюсах схемы.

Из всех выполняющих наборов для КНФ, полученных SAT-решателем, можно получить множества единичных значений для всех функций тестопригодности.

Предлагаемый метод позволяет получить с помощью SAT-решателя все функции тестопригодности, используя только одну КНФ, размер которой сопоставим с размером КНФ для схемы S.

Все функции можно получить вместе, получив все выполняющие наборы КНФ P^v и далее определив по ним множества единичных значений каждой функции тестопригодности, или разделить вычисление и получить тесты для неисправности константа 1 и неисправности константа 0 отдельно, подставив в КНФ P^v соответствующие константы, как показано для функций B^v и $\overline{B}^v$.

Заметим, что множества наборов из области единичных значений функций тестопригодности могут быть получены аналогичным образом, используя только двоичное моделирование схемы S^v. Для этого при двоичном моделировании получим два значения на последователях полюса v: одно для значения 1, второе для значения 0 на полюсе v. Затем полученные значения подставим в (1) и (2). Таким образом, мы получаем вектор α значений на всех полюсах схемы и значения функций наблюдаемости. Далее множества единичных значений функций тестопригодности получаем так же, как показано выше для выполняющих наборов.

Построение функций тестопригодности для всех полюсов

Ранее в работах [2, 3] рассмотрен эффективный алгоритм построения функций тестопригодности для всех полюсов схемы S в виде BDD (ROBDD) или ДНФ (ОДНФ). Также было рассмотрено построение КНФ для всех полюсов схемы S для получения функций тестопригодности с применением SAT-решателя. Далее представлен полный алгоритм построения КНФ для всех полюсов схемы S.

Алгоритм 2. Построение КНФ для получения функций тестопригодности с помощью SAT-решателя для всех полюсов схемы.

1. Получим КНФ:
   a. для функций $v_i \sim f_i$ каждого элемента e_i исправной схемы S;
   b. для функций $B_i \sim (v_{j_i,1} \oplus v_{j_i,0})$, $i = \overline{1,m}$, здесь v_{j_i} – это переменные, соответствующие выходам элементов, являющихся выходами схемы, и для функции $B \sim \bigvee_{i=1}^{m} B_i$.

2. Для каждого полюса v для получения КНФ применяется Алгоритм 1. При этом на шагах 2 и 6 используются уже полученные на шаге 1 Алгоритма 2 КНФ для элементов и для функций $B_i \sim (v_{j_i,1} \oplus v_{j_i,0})$, $i \in O^v$. На шаге 7 Алгоритма 1 строится КНФ $B \sim \bigvee_{i \in O^v} B_i$ и объединяется конъюнкцией со строящейся КНФ, получаем искомую КНФ P^v.

По построенной КНФ P^v строятся функции тестопригодности с помощью SAT-решателя.

Предварительное построение КНФ для элементов исправной схемы и обозначенных формул может значительно снизить вычисли-

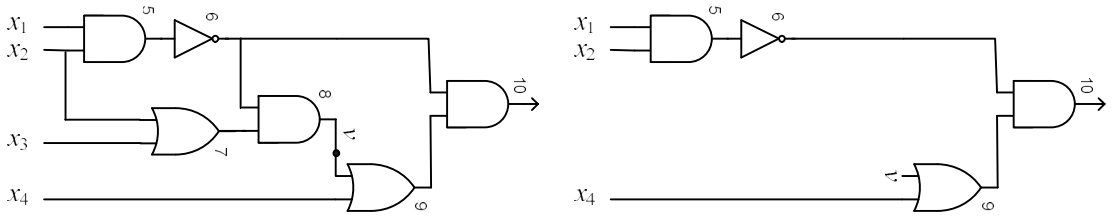
тельные затраты при построении функций тестопригодности для всех полюсов схемы.

При получении функций тестопригодности только для подмножества V полюсов схемы в Алгоритм 2 добавим следующий шаг.

1) Рассмотрим схему S^V, состоящую из элементов схемы S, соединений между ними и соединенных с ними первичных входов и выходов, которые являются предшественниками выходов, являющихся последователями хотя бы одного из полюсов множества V. (Другими словами, схема S^V – это схема S, из которой исключены элементы, не являющиеся предшественниками выходов схемы, являющихся последователями хотя бы одного из полюсов множества V).

Затем для полученной схемы выполняются шаги 1 и 2 Алгоритма 2, где рассматриваются полюса v_i из заданного подмножества V.

Пример 2. Рассмотрим схему с рисунка 1а.



а) б)

Рисунок 1 – а) схема S и полюс v, б) схема $S^{v,B}$

Для каждого элемента схемы S построим КНФ.

e_5 $v_5 \sim (x_1 \wedge x_2)$ $P^{e_5} = (x_1 \vee \overline{v}_5)(x_2 \vee \overline{v}_5)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee v_5)$;

e_6 $v_6 \sim \overline{v}_5$ $P^{e_6} = (\overline{v}_5 \vee \overline{v}_6)(v_5 \vee v_6)$;

e_7 $v_7 \sim (x_2 \vee x_3)$ $P^{e_7} = (\overline{x}_2 \vee v_7)(\overline{x}_3 \vee v_7)(x_2 \vee x_3 \vee \overline{v}_7)$;

e_8 $v_8 \sim (v_6 \wedge v_7)$ $P^{e_8} = (v_6 \vee \overline{v}_8)(v_7 \vee \overline{v}_8)(\overline{v}_6 \vee \overline{v}_7 \vee v_8)$;

e_9 $v_9 \sim (v_8 \vee x_4)$ $P^{e_9} = (\overline{v}_8 \vee v_9)(\overline{x}_4 \vee v_9)(v_8 \vee x_4 \vee \overline{v}_9)$;

e_{10} $v_{10} \sim (v_6 \wedge v_9)$ $P^{e_{10}} = (v_6 \vee \overline{v}_{10})(v_9 \vee \overline{v}_{10})(\overline{v}_6 \vee \overline{v}_9 \vee v_{10})$.

Построим КНФ для функции $B_1 \sim (v_{10,1} \oplus v_{10,0})$:

$$P^{B_1} = (\overline{v}_{10,0} \vee \overline{v}_{10,1} \vee \overline{B}_1)(\overline{v}_{10,0} \vee v_{10,1} \vee B_1)(v_{10,0} \vee \overline{v}_{10,1} \vee B_1)(v_{10,0} \vee v_{10,1} \vee \overline{B}_1)$$

КНФ P^y для функции, реализуемой на выходе схемы (на выходе элемента e_{10}), получим конъюнкцией КНФ для каждого элемента схемы: $P^y = P^{e_5} \wedge P^{e_6} \wedge P^{e_7} \wedge P^{e_8} \wedge P^{e_9} \wedge P^{e_{10}}$.

Рассмотрим полюс v схемы. Построим для него КНФ P^v и $P^{v,B}$.

Схема S^v совпадает с S, т.к. единственный выход схемы является последователем v и все элементы S являются его предшественниками.

Элементы последователи v: e_9 и e_{10}. Элементы предшественники e_9 и e_{10} при соединении полюса v с новым входом v: e_5 и e_6.

Таким образом, схема $S^{v,B}$ состоит из элементов e_5, e_6, e_9, e_{10}, соединений между ними и входов и выходов, соединенных с ними (рисунок 1б). Другими словами, для получения $S^{v,B}$ удаляем из S e_7 и e_8.

Построим $P^{v,B}$ по Алгоритму 1. Уже построенные P^{e_5} и P^{e_6} добавляем в $P^{v,B}$. $P^{v,B} = (x_1 \vee \bar{v}_5)(x_2 \vee \bar{v}_5)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee v_5)\,(\bar{v}_5 \vee \bar{v}_6)(v_5 \vee v_6)\ldots$

Для каждой из уже построенных КНФ P^{e_9} и $P^{e_{10}}$ создаем две копии: одна для константы 1, другая для константы 0.

$$P^{e_9,1} = (\bar{1} \vee v_{9,1})(\bar{x}_4 \vee v_{9,1})(1 \vee x_4 \vee \bar{v}_{9,1}) = v_{9,1}(\bar{x}_4 \vee v_{9,1}) = v_{9,1};$$

$$P^{e_{10},1} = (v_6 \vee \bar{v}_{10,1})(v_{9,1} \vee \bar{v}_{10,1})(\bar{v}_6 \vee \bar{v}_{9,1} \vee v_{10,1});$$

$$P^{e_9,0} = (\bar{0} \vee v_{9,0})(\bar{x}_4 \vee v_{9,0})(0 \vee x_4 \vee \bar{v}_{9,0}) = (\bar{x}_4 \vee v_{9,0})(x_4 \vee \bar{v}_{9,0});$$

$$P^{e_{10},0} = (v_6 \vee \bar{v}_{10,0})(v_{9,0} \vee \bar{v}_{10,0})(\bar{v}_6 \vee \bar{v}_{9,0} \vee v_{10,0}).$$

$P^{e_9,1}$, $P^{e_{10},1}$, $P^{e_9,0}$ и $P^{e_{10},0}$, а также P^{B_1} добавляем в $P^{v,B}$:

$$P^{v,B} = (x_1 \vee \bar{v}_5)(x_2 \vee \bar{v}_5)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee v_5)\,(\bar{v}_5 \vee \bar{v}_6)(v_5 \vee v_6)\,v_{9,1} \wedge$$
$$(v_6 \vee \bar{v}_{10,1})(v_{9,1} \vee \bar{v}_{10,1})(\bar{v}_6 \vee \bar{v}_{9,1} \vee v_{10,1})\,(\bar{x}_4 \vee v_{9,0})(x_4 \vee \bar{v}_{9,0}) \wedge$$
$$(v_6 \vee \bar{v}_{10,0})(v_{9,0} \vee \bar{v}_{10,0})(\bar{v}_6 \vee \bar{v}_{9,0} \vee v_{10,0}) \wedge$$
$$(\bar{v}_{10,0} \vee \bar{v}_{10,1} \vee \bar{B}_1)(\bar{v}_{10,0} \vee v_{10,1} \vee B_1)(v_{10,0} \vee \bar{v}_{10,1} \vee B_1)(v_{10,0} \vee v_{10,1} \vee \bar{B}_1).$$

Можно выполнить упрощение КНФ. При упрощении удалится $(v_{9,1} \vee \bar{v}_{10,1})$, а $(\bar{v}_6 \vee \bar{v}_{9,1} \vee v_{10,1})$ сократится до $(\bar{v}_6 \vee v_{10,1})$.

P^v – это $P^{v,B}$ соединенная конъюнкцией с P^{e_7} и P^{e_8}.

Список литературы

1. Голубева О.И. Функции обнаружения константной неисправности, управляемости и наблюдаемости полюса элемента комбинационной схемы // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – №1(30). – С.77–86.
2. Голубева О.И. Алгоритмы получения функций тестопригодности полюса элемента комбинационной схемы // Современные проблемы физико-математических наук / материалы VI Всероссийской

науч.-практ. конф. с международным участием г. Орёл, 04–05 дек. 2020 г. –С. 327–335.
3. Golubeva O., BDD and DNF Based Algorithms for Constructing All Testability Functions of Combinational Circuit // 2021 IEEE International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Kazan, Russia. 13−15 May 2021. –6 pp.
4. Дьяконов А.Г. Проблема выполнимости (современные алгоритмы решения). – Москва, 2006. – 52 с.

УДК 519.715

Голубева Ольга Ивановна
кандидат технических наук, доцент,
Томский государственный университет,
Россия, Томск

Рудай Даниил Владимирович
студент,
Томский государственный университет,
Россия, Томск

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФА ПЕРЕХОДОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНОЙ СХЕМЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ SAT-РЕШАТЕЛЯ

Аннотация. *Рассматривается подход к построению графа переходов последовательностной схемы. Исследуется метод, основанный на использовании SAT-решателя. Для построения графа переходов определяются возможные переходы между состояниями последовательной схемы и используются предварительные вычисления, основанные на троичном и двоичном моделировании, значительно сокращающие объем вычислений. Также рассматривается построение на основе графа переходов последовательностей, обеспечивающих заданные переходы схемы. Компьютерные эксперименты показали эффективность предложенного метода построения графа переходов с применением SAT-решателя.*

Ключевые слова: *граф переходов, троичное моделирование, SAT-решатель, последовательностная схема, переходная последовательность.*

Golubeva Olga
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Tomsk State University,
Russia, Tomsk

Ruday Daniil
Student,
Tomsk State University,

Russia, Tomsk

CONSTRUCTING TRANSITION GRAPH OF SEQUENTIAL CIRCUIT USING SAT SOLVER

Abstract. *Approach to constructing transition graph of sequential circuit is considered. A method based on using SAT solver is studied in detail. To construct a transition graph, possible one-step transitions of a sequential circuit are determined and preliminary computations based on three-value and binary simulation are used, which significantly reduce the amount of computations. The construction of transition sequences of a sequential circuit using transition graph is also considered. Computer experiments have shown the effectiveness of the proposed method of constructing transition graph using SAT solver.*

Keywords: *transition graph, three-value simulation, SAT solver, sequential circuit, transition sequence.*

В работе рассматривается подход к построению графа переходов синхронной последовательностной схемы. Построение графа, основанное на использовании SAT-решателя, исследуется подробно. Представлены результаты компьютерных экспериментов для предложенного метода построения графа переходов, применяющего SAT-решатель. Также кратко рассматривается решение задачи построения последовательности входных векторов, обеспечивающей переход схемы в одно из состояний заданного множества, по графу переходов.

Рассмотрим синхронную последовательностную схему с n входами, m выходами и p элементами памяти (триггерами). $X = \{x_1, ..., x_n\}$ – входные переменные схемы, $Y = \{y_1, ..., y_m\}$ – ее выходные переменные, $Z = \{z_1, ..., z_p\}$ – внутренние переменные схемы.

Назовем *графом переходов последовательностной схемы* ориентированный граф, у которого вершины сопоставлены состояниям схемы и есть дуга из вершины i в вершину j тогда и только тогда, когда в схеме существует одношаговый переход из состояния, соответствующего вершине i, в состояние, соответствующее вершине j, при каких-либо значениях входных переменных.

Рассматриваемый граф переходов представляет переходы последовательной схемы без значений вход-выход на дугах.

Граф переходов схемы может быть представлен бинарной матрицей M размера $2^p \times 2^p$. Строки и столбцы матрицы сопоставлены состояниям схемы. Элемент M_{ij} матрицы равен 1, если в графе есть дуга из состояния i в состояние j, иначе элемент M_{ij} равен 0.



а) б)

Рисунок 1 – а) комбинационная составляющая схемы;
б) комбинационная составляющая, реализующая функции переходов

На рисунке 1а представлена комбинационная составляющая C последовательностной схемы. При построении графа переходов рассматривается только та часть схемы, которая необходима для получения функций переходов, выходы схемы не рассматриваются. Поэтому структурное описание комбинационной составляющей, используемой для получения графа переходов, упрощается (рисунок 1б). В схеме с рисунка 1б можно исключить все элементы, не связанные с ее выходами, то есть с входами триггеров последовательностной схемы.

Система функций переходов последовательностной схемы имеет вид:

$$z_j^t = \psi_j(x_1^t,...,x_n^t,z_1^{t-1},...,z_p^{t-1}),\ j=\overline{1,p}. \qquad (1)$$

Будем представлять полное состояние схемы вектором (α,δ), где α – вектор значений входных переменных X, а δ – вектор значений внутренних переменных Z.

Двоичный вектор $\tau^i = (\tau_1^i,...,\tau_p^i)$ значений переменных Z будем называть *кодом состояния* q_i. $Q = \{q_1,...,q_t\}$, где $t = 2^p$, – множество всех состояний схемы.

Интервал N' булевых векторов размерности n называется *минимальным покрывающим интервалом множества булевых векторов* $M \subseteq E_n^2$, если $M \subseteq N'$ и не существует интервала булевых векторов N'' такого, что $M \subseteq N'' \subset N'$.

Подход к построению графа переходов последовательностной схемы

Рассмотрим общий подход к построению графа переходов последовательностной схемы предложенный в работах [1, 2] и других.

Граф переходов можно получить, рассматривая каждую пару состояний (q_i, q_j) и определяя для нее возможность перехода из состояния q_i в состояние q_j. Для этого необходимо определять существование одношагового перехода из состояния q_i в состояние q_j. Для решения этой задачи ранее были предложены методы для различных представлений функций. Однако вычисление значения отдельно для каждого элемента матрицы M требует больших вычислительных затрат. Для сокращения вычислений были предложены шаги предварительных вычислений, основанные на двоичном и троичном моделировании комбинационной составляющей схемы C', реализующей функции переходов (рисунок 1б). Сначала выполняются предварительные вычисления, а затем определяется существование только оставшихся неопределенных одношаговых переходов (для пар состояний). Предварительные вычисления позволили существенно сократить объем вычислений.

Рассмотрим шаги предварительных вычислений, получающие часть значений элементов матрицы M.

1) Выполним двоичное моделирование комбинационной составляющей схемы на K двоичных случайных векторах (α^i,γ^i), где K – некоторое выбранное число, α^i – случайный двоичный вектор длины n, а γ^i – случайный двоичный вектор длина p. В результате получим подмножество S^1 пар состояний (q_i,q_j) таких, что в схеме существует переход из состояния q_i в состояние q_j.

2) Используя троичное моделирование, получим подмножество S^2 пар состояний (q_i,q_j) таких, что в схеме не существует перехода из q_i в q_j, следующим образом.

Для каждого состояния q_i из Q такого, что существует состояние q_j такое, что (q_i,q_j) $\notin S^1$, выполним (точное или неточное) троичное моделирование функций переходов на векторе (α,τ^i), где $\alpha = (\times,\ldots,\times)$ (α состоит из неопределенных компонент), а τ^i – код состояния q_i, и найдем троичный вектор δ^i значений функций переходов.

Интервал $N(\delta^i)$, представляемый троичным вектором δ^i значений функций переходов, содержит коды всех состояний, в которые схема может перейти из состояния q_i. δ^i, полученный с помощью точного

троичного моделирования, является минимальным покрывающим интервалом для множества кодов состояний, в которые есть одношаговый переход из состояния q_i. При использовании неточного троичного моделирования интервал $N(\delta^i)$ является покрывающим (в общем случае не минимальным) интервалом для множества кодов состояний, в которые есть переход из q_i. Таким образом, все состояния, в которые схема может перейти из состояния δ^i, представлены интервалом $N(\delta^i)$. При этом возможно, что из состояния q_i достижимы не все состояния из интервала $N(\delta^i)$. Представленные свойства определены в [3].

Множество $Q\backslash N(\delta^i)$ (т.е. множество состояний, не представленных вектором δ^i) представляет подмножество, возможно не полностью, тех состояний, в которые схема не может перейти из состояния q_i (рисунок 2). Каждую пару состояний (q_i,q_k) такую, что $q_k \in Q\backslash N(\delta^i)$, включим в S^2.

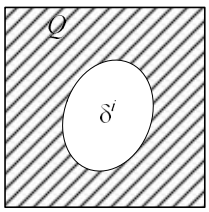


Рисунок 2 – Заштрихованная область представляет множество состояний $Q \setminus N(\delta^i)$

В матрице M графа переходов элементам, соответствующим парам состояний из множества S^1, присвоим значение один, а элементам, соответствующим парам состояний из множества S^2, присвоим значение ноль.

Рассмотрим подробнее следующее свойство, сформулированное в [3], используемое на 2-ом шаге сокращения вычислений.

Пусть выполнено точное троичное моделирование функций переходов системы (1) *на векторе* (α,δ)*, представляющем полное состояние, и получен вектор значений внутренних переменных* δ'*.* δ' *представляет минимальный покрывающий интервал множества булевых векторов значений переменных Z, а не точное множество этих векторов. Таким образом, множество состояний схемы достижимых за один шаг из множества* $N(\alpha,\delta)$ *может быть подмножеством множества* $N(\delta')$*.*

Очевидно, что это свойство также верно и для любого подмножества внутренних полюсов схемы (а не только для подмножества

полюсов – входов элементов памяти). Оно позволяет сократить объем вычислений при определении множества состояний достижимых на внутренних полюсах схемы на входном троичном векторе (как показано на шаге 2 сокращения вычислений).

Рассмотрим пары состояния S^3 не входящие в множества S^1 и S^2: $S^3 = (Q \times Q) \setminus (S^1 \cup S^2)$. К каждой паре состояний $(q_i, q_j) \in S^3$, неопределенной после шагов предварительных вычислений 1 и 2, применим точный метод определения существования перехода из состояния q_i в состояние q_j.

Рассмотренный подход к построению графа переходов может быть применен к различным представлениям функций [1, 2]. В данной работе подробно рассмотрим и исследуем метод, основанный на предложенном подходе построения графа переходов, использующий SAT-решатель. Для этого рассмотрим метод троичного моделирования [4] и метод определения существования перехода из состояния q_i в состояние q_j ([1, 2] и другие), основанные на применении SAT-решателя.

Заметим, что ранее для решения вышеперечисленных задач были предложены методы с различными опциями с целью дальнейшего исследования, в том числе используя компьютерные эксперименты, опций на эффективность. На данный момент такое исследование проведено частично. В данной работе получены экспериментальные результаты для одного из вариантов методов.

Для решения задач с применением SAT-решателя построим КНФ $P(X^t, Z^{t-1}, Z^t, V^t)$ для комбинационной составляющей схемы C' (рисунок 1б). КНФ P зависит от множеств переменных X^t, Z^{t-1}, Z^t, где Z^{t-1} и Z^t представляют значения внутренних переменных схемы в текущий и следующий моменты времени, и множества переменных V^t, соответствующих выходам элементов схемы.

$$P(x_1^t,...,x_n^t,z_1^{t-1},...,z_p^{t-1},z_1^t,...,z_p^t,V^t) \quad (2)$$

Рассмотрим задачу точного троичного моделирования и метод точного троичного моделирования, применяющий SAT-решатель.

Точное троичное моделирование комбинационных схем с использованием SAT-решателя

Определим значение булевой функции на троичном векторе α (интервале $N(\alpha)$).

Если интервал α ($N(\alpha)$) полностью лежит в области M_f^1 (M_f^0), т.е. $\forall\gamma \in N(\alpha)$: $f(\gamma) = 1$ (0), то точное значение $f(\alpha)$ равно 1 (0), если интервал α пересекается с обеими областями, т.е. $\exists\gamma_i \in N(\alpha)$: $f(\gamma_i) = 1$ и $\exists\gamma_j \in N(\alpha)$: $f(\gamma_j) = 0$, то $f(\alpha) = \times$.

Стандартное троичное моделирование комбинационной схемы является неточным в вышеуказанном смысле. Применяя стандартное троичное моделирование можно получить значение × вместо 1 или 0.

Задача точного троичного моделирования комбинационной схемы или комбинационной составляющей последовательной схемы сводится к вычислению точных значений реализуемых схемой булевых функций на троичном векторе.

На шаге 2 сокращения вычислений выполняется троичное моделирование функций переходов на векторе (α,τ^i), где $\alpha = (\times,\ldots,\times)$ (α состоит из неопределенных компонент), а τ^i – код состояния q_i, и вычисляется троичный вектор δ^i значений функций переходов. Интервал δ^i ($N(\delta^i)$) включает коды всех состояний, достижимых из состояния q_i за один шаг.

Метод точного троичного моделирования, использующий SAT-решатель, заключается в следующем [4].

Сначала выполняется двоичное моделирование по структурному описанию схемы на K, $0 < K \le |N(\alpha)|$, случайных булевых векторах из $(N(\alpha),\tau^i)$. Если при моделировании на псевдвыходе j, $j \in \{1, \ldots, p\}$, получены как значение 1, так и значение 0, то результат троичного моделирования на этом псевдовыходе – ×, то есть $\delta_j^i = \times$, если получено одно значение (1 или 0) на всех булевых векторах, то далее для второго значения (0 или 1) решается задача выполнимости КНФ.

Заметим, что если на всех псевдовыходах на некотором шаге при двоичном моделировании получено значение ×, то можно прекратить двоичное моделирование. Если $K = N(\alpha)$, то точное троичное моделирование выполняется полностью на основе двоичного моделирования. Заметим также, что даже использование $K = 1$ позволяет решать задачу выполнимости для каждого псевдовыхода только один раз.

Далее для псевдовыходов для которых на этапе двоичного моделирования получено только одно значение 1 или 0 определим, достижимо ли второе значение 0 или 1, следующим образом.

Подставим константы 1 и 0 из двоичного вектора τ^i в переменные Z^{t-1} КНФ $P(X^t, Z^{t-1}, Z^t, V^t)$, получим КНФ $P^{q_i}(X^t, Z^t, V^t)$.

Для получения точного значения троичного моделирования на псевдовыходе j исключим дизъюнкты из КНФ P^{q_i} для элементов, не связанных с выходом j, получим КНФ $P_j^{q_i}$. Заметим, что исключение дизъюнктов из КНФ является не обязательным шагом вычислений. Подставим в переменную z_j^t КНФ $P_j^{q_i}$ (или КНФ P^{q_i}) вторую константу 0 или 1, не полученную на этом выходе при двоичном моделировании, и решим задачу выполнимости КНФ. Если решение получено и для второй константы, то результат моделирования − ×. Иначе результат 1 или 0 соответственно.

Получение переходов последовательностной схемы с использованием SAT-решателя

В последовательной схеме существует одношаговый переход (q_i, q_j), если существует входной вектор α такой, что схема выполняет переход из состояния q_i в состояние q_j на α.

Рассмотрим определение существования перехода в схеме из состояния q_i в состояние q_j при применении SAT-решателя, предложенное в [1, 2].

Для пары состояний (q_i, q_j) подставим значения τ^i и τ^j в переменные Z^{t-1} и Z^t КНФ $P(X^t, Z^{t-1}, Z^t, V^t)$, получим КНФ $P(X^t, \tau^i, \tau^j, V^t) = P^{q_i q_j}(X^t, V^t)$. Выполним сокращение КНФ после подстановки констант (сокращение КНФ является необязательным шагом). С помощью SAT-решателя найдем выполняющий набор для КНФ $P^{q_i q_j}(X^t, V^t)$. Если такой набор существует, то существует и переход из q_i в q_j, иначе переход (q_i, q_j) у схемы отсутствует.

Этот способ определения существования перехода основывается на ранее предложенном способе [3], где для определения перехода из состояния q_i в состояние q_j входным переменным присваиваются неопределенные значения ‘×’, внутренним переменным присваиваются значения кода состояния q_i и далее определяется, есть ли одношаговый переход в состояние q_j при каких-либо значениях входных переменных.

Если размер схемы очень большой, схему можно сначала сократить, подставив константы из τ^i во внутренние переменные и выполнив упрощение схемы. КНФ получим по сокращенной схеме.

Результаты экспериментов

Для проверки эффективности предложенного метода построения графа переходов последовательностной схемы, использующего SAT-решатель, были проведены эксперименты на бенчмарках. Эксперименты проводились на контрольных примерах (бенчмарках) ISCAS'89, представляющих последовательностные схемы. Для оценивания работы исследуемого метода при проведении экспериментов для различных бенчмарок измерялось время построения графа переходов, а также процент определяемых значений элементов матрицы *M* на каждом шаге предварительных вычислений. Результаты компьютерных экспериментов представлены в Таблице 1.

В таблице представлены следующие данные: имя бенчмарки, количество входов, выходов, элементов памяти и элементов схемы; среднее время построения графа переходов схемы (по трем экспериментам); процент существующих одношаговых переходов в графе, определенных на шаге 1 предварительных вычислений, процент не существующих одношаговых переходов, определенных на шаге 2 предварительных вычислений, и соотношение 0 и 1 в полученной матрице *M*.

Таблица 1 – Результаты построения графов переходов

Бенчмарки	**Входы (#)**	**Выходы (#)**	**Элементы памяти (#)**	**Элементы (#)**	**Среднее время построения графа (сек.)**	**Определенные переходы на шаге 1 (только 1) (%)**	**Определенные переходы на шаге 2 (только 0) (%)**	**Соотношение 0 и 1 в матрице *M* (#0; #1)**
S27	4	1	3	10	0,01	17,19	31,25	31; 33
S386	7	7	6	159	1,01	2,15	92,77	3800; 296
S832	18	19	5	287	7,60	11,13	61,23	710; 314
S510	19	7	6	211	21,84	2,46	97,36	3995; 101
S1488	8	19	6	653	4,82	3,13	82,25	3369; 727

Шаги предварительных вычислений в экспериментах для рассмотренных бенчмарок определили от 48,44% до 99,82% одношаговых переходов (существующих и не существующих в графе). Шаг 2 предварительных вычислений, выполненный с помощью троичного моделирования, позволил определить большую часть одношаговых переходов, отсутствующих в графе. Значительная часть всех одношаговых переходов графа вычислена с помощью шагов 1 и 2 предварительных вычислений. Графы переходов для схем среднего размера построены за несколько секунд.

Построение последовательности, обеспечивающей заданные переходы схемы

При построенном графе переходов (его матрицы смежности) схемы и полученном входном векторе, на котором выполняется переход, для каждого существующего одношагового перехода, задача построения (существующей) входной последовательности, обеспечивающей переход схемы из заданного начального состояния q_0 (множества Q_0) в одно из состояний данного множества Q^*, имеет достаточно прямое решение.

Возможный подход к сокращению вычислений при построении последовательности состоит в том, чтобы после выполнения шагов 1 и 2 предварительных вычислений, сначала найти множество всех состояний Q_1, достижимых из q_0, затем множество состояний, достижимых из состояний Q_1, и т.д., пока не будет получено множество Q_k, содержащее некоторое состояние из Q^*. В результате будет получена искомая последовательность минимальной длины.

По графу переходов можно построить входные последовательности, обеспечивающие различные переходы схемы.

Список литературы

1. Голубева О.И. Построение графа переходов последовательностной схемы // Современные проблемы физико-математических наук: материалы IV Всероссийской науч.-практ. конф. с международным участием, (22 – 25 ноября 2018 г., г. Орёл). – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2018. – Ч. 1. – С. 230 – 235.
2. Golubeva O., Three-Value Simulation of Combinational and Sequential Circuits and its Applications // 2020 IEEE Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT). Moscow, Russia. 11−13 March 2020. – 7 pp.
3. Голубева О. И. Интервальные расширения булевых функций и троичное моделирование последовательностных схем // Таврический научный обозреватель. – 2017. – №5 (22). – С. 208–220.
4. Голубева О.И. Троичное моделирование комбинационных и синхронных последовательностных схем // Современные проблемы физико-математических наук / материалы V Всероссийской науч.-практ. конф. с международным участием, (26 – 29 сентября 2019 г., г. Орёл). – Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2019. – С. 274 – 281.

УДК 533. 72

Зо Аунг
аспирант,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия, Москва

Гладков Сергей Октябринович
доктор физико-математических наук, профессор,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия, Москва

К ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ ПО КАНАЛАМ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Аннотация. *Приведен алгоритм решения задачи о вычислении распределения скоростей в каналах и трубах произвольного сечения. Дано обоснование полученных решений и рассмотрены некоторые частные случаи.*

Ключевые слова: *уравнение Навье-Стокса, градиент давления, распределение скоростей по сечению.*

Zaw Aung
Ph. Dr.,
Moscow Aviation Institute (National Research University)
Russia, Moscow

S.O. Gladkov
Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Professor,
Moscow Aviation Institute (National Research University)
Russia, Moscow

ON THE THEORY OF FLOW OF LIQUIDS THROUGH CHANNELS OF ARBITRARY SECTION

Abstract. *The algorithm for solving the problem of calculating the distribution of velocities in channels and pipes of arbitrary cross-section is*

given. The substantiation of the received decisions is given and some special cases are considered.

Keywords: *Navier–Stokes equation, pressure gradient, cross-section velocity distribution.*

В настоящей работе мы рассмотрим течение жидкостей, текущих по трубам и каналам произвольного сечения под воздействием постоянного градиента давления. Как показал обзор литературы (см. [1] – [10]), нам не удалось обнаружить общего подхода при решения подобного рода задач в том случае, если сечение трубы (или канала) произвольно. Именно поэтому в настоящем сообщении мы дадим общий алгоритм решения подобного рода задач.

Пусть сечение горизонтально лежащей трубы имеет кусочно – гладкую форму, показанную на рис. 1. Ось z декартовой системы координат направлена перпендикулярно плоскости рисунка. Туда же направим и приложенный к обеим концам трубы постоянный градиент давления.

Предположим, что при $y \geq 0$ верхняя часть контура описывается зависимостью $y_1 = y_1(x_1)$, а нижняя часть контура при $y \leq 0$ – зависимостью $y_2 = y_2(x_2)$.

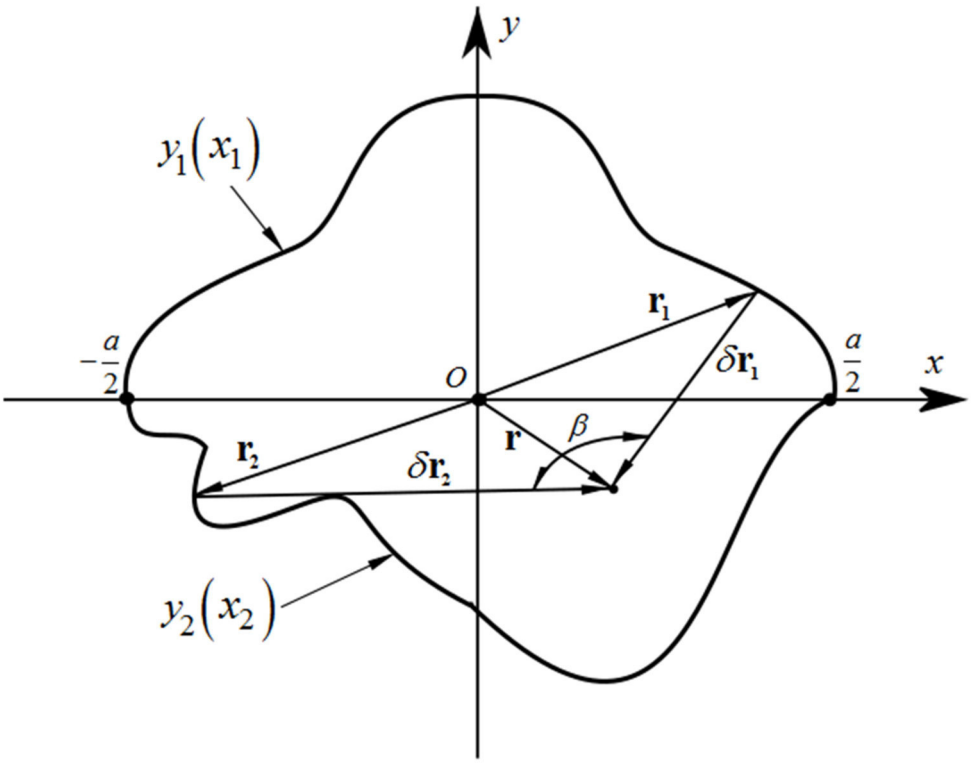


Рисунок 1 – Иллюстрация произвольного сечения трубы

Для решения задачи воспользуемся уравнением Навье – Стокса. В случае несжимаемых жидкостей оно имеет вид (см. [11] – [21])

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla P+\eta\Delta\mathbf{v}, \tag{1}$$

где ρ – плотность жидкости, P – давление, η – динамическая вязкость.

Так как речь идет о стационарной задаче, то скорость потока в соответствии с рис. 1 можно искать в виде

$$\mathbf{v}=\left(0,0,\mathrm{v}_z(x,y)\right). \tag{2}$$

В результате в уравнении (1) в силу (2) автоматически исчезает правая часть с субстанциональной производной, и его можно представить как

$$\Delta\mathrm{v}_z=\frac{1}{\eta}\frac{\partial P}{\partial z}=const. \tag{3}$$

Если решение ищется в форме (2), то уравнение непрерывности $div\mathbf{v}=0$ выполняется автоматически.

Граничные условия для уравнения (3) формулируются в виде условий «залипания» жидкости на всем контуре трубы C

$$\mathrm{v}_z\big|_{y=y_1(x_1)}=\mathrm{v}_z\big|_{y=y_2(x_2)}=0. \tag{4}$$

Как показано на рис. 1, удобно ввести два независимых вектора $\delta\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}_1=\left(x_1,y_1(x_1)\right)$, $\mathbf{r}_2=\left(x_2,y_2(x_2)\right)$. Радиус – вектор $\mathbf{r}$ представляет собой текущий вектор в ограниченной области D под контуром, включая также и все точки на контуре C.

С помощью этих двух векторов мы можем представить решение поставленной задачи в виде

$$\mathrm{v}_z=Gtg\beta\left(\delta\mathbf{r}_1\cdot\delta\mathbf{r}_2\right). \tag{5}$$

Или

$$\mathrm{v}_z=Gtg\beta\left[(x_1-x)(x_2-x)+\left(y_1(x_1)-y\right)\left(y_2(x_2)-y\right)\right]. \tag{6}$$

Подставляя функцию (6) в уравнение (3), находим

$$Gtg\beta=\frac{1}{4\eta}\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Следовательно, решение (6) можно представить, как

$$\mathrm{v}_z=\frac{1}{4\eta}\frac{\partial P}{\partial z}\left[(x_1-x)(x_2-x)+\left(y_1(x_1)-y\right)\left(y_2(x_2)-y\right)\right]. \tag{7}$$

И, значит, расход жидкости, текущей по трубе любого сечения, мы можем вычислить по формуле

$$Q=\iint\limits_D \mathrm{v}_z(x,y)\,dxdy=\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{v}_z(x,y)\Big|_{x_1=x_2=x}dy. \tag{8}$$

Если подставить сюда общее решение (7), то первое слагаемое в нем просто исчезает, и после простого интегрирования получается выражение

$$Q = -\frac{1}{24\eta}\frac{\partial P}{\partial z}\int_{-a}^{a}\left(y_2(x)-y_1(x)\right)^3 dx. \qquad (9)$$

Формулы (7) и (9) представляют собой общее решение поставленной задачи. В частных случаях они приводят к известным результатам.

Например, если в качестве примера взять сечение в виде окружности, то уравнение ее контура будет

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Поскольку $x_2 = -x_1$, то

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 - x_1^2}. \qquad (10)$$

Если теперь подставить (10) в (7), то найдем

$$\mathrm{v}_z(x,y) = \frac{1}{4\eta}\frac{\partial P}{\partial z}\left[(x-x_1)(x+x_1)+\left(y_1(x_1)-y\right)\left(-y_1(x_1)-y\right)\right] = \frac{1}{4\eta}\frac{\partial P}{\partial z}\left(x^2+y^2-a^2\right). \qquad (11)$$

То есть, как и должно быть, мы пришли к решению Пуазейля.

Согласно же (10) расход жидкости будет тогда

$$Q = -\frac{1}{3\eta}\frac{\partial P}{\partial z}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = -\frac{\pi a^4}{8\eta}\frac{\partial P}{\partial z}. \qquad (12)$$

Заключение

В заключение настоящего сообщения стоит отметить два важных момента.

1. Предложен простой алгоритм решения задач для нахождения распределения скоростей продольного потока по плоскости его сечения как функции независимых координат x, y.
2. Благодаря этому решению легко вычислить расходы жидкости в единицу времени (см. также работы [22] – [27]).

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука. 1988. 733 с.
2. Рагулин В. В. К задаче о протекании вязкой жидкости сквозь ограниченную область при заданном перепаде давления или напора. в сб.: Динамика сплошной среды, в. 27. Новосибирск. 1976. С. 78-92.

3. Альтшуль А.Д., Калицун В.И. и др. Примеры расчетов по гидравлике. М.: Стройиздат. 1976. 256 с.
4. Дорфман А.Л., Численное решение задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в разветвляющемся канале при задании перепадов давления между ответвлениями. в сб. Численные методы механики сплошной среды. Т. 10. № 7. Новосибирск. 1979. с. 52 -62.
5. Патрашев А.Н.и др. Прикладная гидромеханика. Л.: Военмориздат. 1979. 605 с.
6. Войткунский Я.И., Фаддеев Ю.И., Федяевский К.К. Гидромеханика. Л.: Судостроение. 1982. 455 с.
7. Чугаев Р.Р. Гидравлика. Л.: Энергоиздат. 1982. 672 с.
8. Башта Т.М., Руднев С.С., Некрасов Б.Б. и др. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы. М.: Машиностроение. 1982. 423 с.
9. Кузнецов Б.Г., Мошкин Н.П., Смагулов Ш., Численное исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах при заданных перепадах давления. в сб. численные методы динамики вязкой жидкости. Новосибирск. 1983. С. 203-207.
10. Карякин В.Е., Карякин Ю. Е., Расчет течений вязкой жидкости в плоских каналах произвольной формы. в сб. Численные методы механики сплошной среды. Т. 17. № 5. Новосибирск. 1986. С. 98 112.
11. Захаров Ю.Н., Градиентные методы решения задач гидродинамики. Новосибирск. Наука. 2004. 239с.
12. Прандтль Л., Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. В 2-х т. М.: ГИТТЛ. 1933-1935. 364 с.
13. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ГИТТЛ. 1947. 566 с.
14. Христианович С.А., Гальперин В.Г., Миллионщиков М.Д., Симонов Л.А. Прикладная газовая динамика. М.: ЦАГИ. 1948. 245 с.
15. Жуковский Н.Е. Гидродинамика. Собрание сочинений. Т. 2. М.: ГИТТЛ. 1949. 355 с.
16. Липман Г.В., Пакет А.Е. Введение в аэродинамику сжимаемой жидкости. М.: ИЛ. 1949. 340 с.
17. Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ. 1955. 386 с.
18. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз. 1959. 520 с.
19. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. М.: ГИИЛ. 1963. 420 с.
20. Серрин Д. Математические основы классической механики жидкости. М.: ГИИЛ. 1963. 456 с.

21. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. В 2-х ч. М.: Физматлит, 1963. 620 с.
22. С.О. Гладков. О доказательстве единственности гидродинамического решения Стокса. Известия вузов. Физика. 2018. Т. 61. В. 6. С. 103 – 105.
23. S.O. Gladkov. The theory of thermal conductivity and hydrodynamics of Maxwell gas, which is under the influence of an external sound wave. Solid State Communications. 1995. V. 94. N9. PP.789 – 791.
24. С.О. Гладков. О конвективном движении газа в цилиндрическом объеме. Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 12. С. 71 – 75.
25. С.О. Гладков. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра. ЖТФ. 2018. Т. 59. В. 3. С. 377 – 341.
26. С.О. Гладков. Об альтернативном вычислении ковариантных производных с приложением к проблемам механики, физики и геометрии. Вестник МГОУ. 2019. В. 1. С. 16 – 45.
27. S.O. Gladkov. About one method of calculation in the arbitrary curvilinear basis of the Laplace operator and curl from the vector function. Applied Mathematics and Nonlinear Science. 2021. V. 7. N2. PP. 1-9.

УДК 654

Кокорев Антон Владимирович
кандидат физико-математических наук,
сотрудник ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»,
Россия, Орел

Кузнецов Даниил Сергеевич
сотрудник ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»,
Россия, Орел

ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОЗИЦИОННОСТИ СИГНАЛОВ FSK

Аннотация. *В этом исследовании разработан и описан алгоритм идентификации модуляции для идентификации М-ичной сдвиговой манипуляции с использованием вейвлет-преобразования для изучения пика гистограммы и статистического момента высокого порядка. Было установлено, что предложенный алгоритм можно рассматривать как подходящий метод идентификации для М-ичной сдвиговой манипуляции с более низким отношением сигнал – шум.*

Ключевые слова: *ЧМ-М, вейвлет преобразование, моменты высоких порядков.*

Kokorev Anton Vladimirovich
Candidate of physical and mathematical sciences,
Employee of the Federal Guard Service Academy of the Russian Federation,
Russia, Orel

Kuznetsov Daniil Sergeevich
Employee of the Federal Guard Service Academy of the Russian Federation,
Russia, Orel

AN APPROACH FOR IDENTIFYING THE POSITIONALITY OF FSK SIGNALS

Abstract. *In this study, a modulation identification algorithm for identifying M-ary Shift Keying is developed and described using wavelet Transform to examine histogram peak and higher order statistical moments. It was found that the proposed algorithm can be considered to be suitable identification method for M-ary Shift Keying with lower SNR.*

Keywords: *M-ary FSK, wavelet transform, higher order statistical moments.*

Введение

Идентификация цифровых модулированных сигналов является одной из важных задач в области мобильной связи в целом, в частности программно-определяемого радио (SDR). К настоящему времени описано несколько алгоритмов идентификации [1,3-4,6-7].

Один из наиболее сложных и важных идентификаторов был введен Хонгом и Хо [2]. Они применили вейвлет-преобразование Хаара и теорию статистических решений для идентификации М-ичной фазовой манипуляции (ФМ-М), М-ичной частотной манипуляции (ЧМ-М) и сигналов АМ, содержащих аддитивный белый Гауссовский шум (AWGN – Additive White Gaussian Noise) без фильтрации основной полосы. Бинарная идентификация ФМ/ЧМ без разрыва фазы (CPFSK – Continue Phase Frequency-Shift Keying) и MSK (MSK – Minimum Shift Keying) была исследована Радомиром Павликом [5], и для идентификации схем модуляции был применен комплексный вейвлет Шеннона.

В этом исследовании представлен алгоритм идентификации модуляции для М-ичной частотной манипуляции с использованием вейвлет-преобразования для изучения пика гистограммы и статистического момента восьмого порядка.

Математическая модель

Пусть полученный сигнал $r(t), 0 < t < T,$ описывается как:

$$r(t) = s(t) + n(t),$$

где $s(t)$ – передаваемый сигнал, а $n(t)$ – аддитивный белый гауссов шум канала. Сигнал $s(t)$ из (1) можно представить в комплексной форме как:

$$s(t) = \tilde{s}(t)e^{f(\omega_c t + \theta_c)},$$

где ω_c – несущая частота, а θ_c – фаза несущей. Вейвлет-преобразование имеет особенность. Анализ с несколькими разреше-

ниями, которая предоставляет информацию как по частоте, так и по времени. Непрерывное вейвлет-преобразование сигнала $\mathrm{s}(t)$ определяется как:

$$\mathrm{CWT}(a,\tau) = \int s(t)\Psi_a^*(t)dt \;=\; \frac{1}{\sqrt{a}}\int s(t)\Psi_a^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt\,,$$

где a – коэффициент масштабирования, а τ – коэффициент преобразования. Функция Ψ_a^* – комплексное сопряженное материнского вейвлета.

Итоговый интеграл от $C(a,\tau)$ получается, как:

$$C(a,\tau) = \frac{\tilde{s}(t)e^{(\varphi(.)+\theta_c)}}{j\sqrt{af_c}}E_i(n,y)\,,\; i = 0,1,2,\ldots N\text{-}1$$

где $E_i(n,y) = \int_1^\infty \exp\left(\frac{-yu}{u^n}\right)du$ – экспоненциальный интеграл, а $y = -jt(2\pi f - 2\pi f_c)$

Классификация: нормализованный пик гистограммы коэффициента преобразования вейвлета используется для классификации сигналов. Если n_k – это количество вхождений в конкретное значение, тогда нормализованная гистограмма (вероятность появления) процесса задается следующим образом:

$$p(x_i) = \frac{n_k}{n}\,,$$

где n – общее число участников в конкретном процессе. Этот коэффициент применяется для измерения вероятности появления частотных компонентов, присутствующих во входящем сигнале. Класс I имеет многочастотную составляющую и несколько пиков на нормализованной гистограмме.

Подклассификация: Классификация различных схем модуляции может быть сформулирована с использованием статистических параметров. Статистический момент более высокого порядка играет основную роль в нестационарном сигнале. Он был рассмотрен для классификации нестационарных сигналов. Момент *n*-го порядка для $\mathrm{p}(x_i)$, где $i = 0,1,2,\ldots N-1$ определяется выражением:

$$\mu_n(x) = \sum_{i=0}^{N-1}(x_i - \mu_i)^n p(x_i)\,,$$

где $\mu_n = \sum_{i=0}^{N\text{-}1} x_i p(x_i)$ – среднее значение статистического процесса, а $p(x_i)$ определяется в (4.6). Момент второго порядка (дисперсия) вейвлет-преобразования, исходя из (4.5) и (4.7) может быть вычислен с помощью:

$$\mu_2 = E\left(\left|C(a,\tau)\right|^2\right) - \left[E\left(\left|C(a,\tau)\right|\right)\right]^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\left|C_i(a,\tau)\right|^2\right) - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=0}^{N-1}\left|C_i(a,\tau)\right|\right)^2,$$

где N – длина анализируемого сигнала.

$$T_1 = \frac{\mu_{1,\text{GMSK}}\mu_{2,\text{ЧМ-М}} + \mu_{1,\text{ЧМ-М}}\mu_{2,\text{GMSK}}}{\mu_{2,\text{GMSK}} + \mu_{2,\text{ЧМ-М}}}.$$

На основе дисперсии может быть проведена классификация ЧМ-М. Классификация ЧМ-М: порог T_{Fr} (где $r = 1,2,3,4,...$ для представления 2-х, 4-х, 8-х, 16-ти ... соответственно) и дальнейшая классификация подкласса I может быть сделана на основе статистического момента второго или более высокого порядка (4.7).

$$T_{Fr} = \frac{\mu_{1,\text{ЧМ-}2^r}\,\mu_{n,\text{ ЧМ-}2^{r+1}} + \mu_{1,\text{ ЧМ-}2^{r+1}}\mu_{2,\text{ ЧМ-}2^r}}{\mu_{2,\text{ ЧМ-}2^r} + \mu_{2,\text{ ЧМ-}2^{r+1}}}, \text{ где } n \geq 2.$$

Хороший подход к поиску решения этой проблемы может быть выполнен путем поиска функции, подходящей для аппроксимации как огибающей анализируемого сигнала, так и частотного содержания. Вейвлет-преобразование вычислено, и коэффициенты записаны. Эти извлеченные коэффициенты используются для генерации пиков гистограммы. По количеству пиков идентификатор определяет, что принятый сигнал относится к FSK (рис. 1).

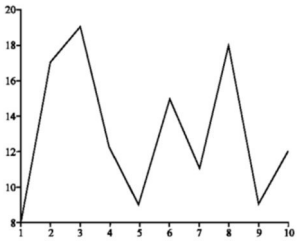


Рисунок 1 – Гистограмма пиков сигнала MFSK

После основной классификации, каждая подсистема дополнительно классифицируется на основе правил принятия решений с учетом пороговых значение для классификации подклассов (рис. 2).

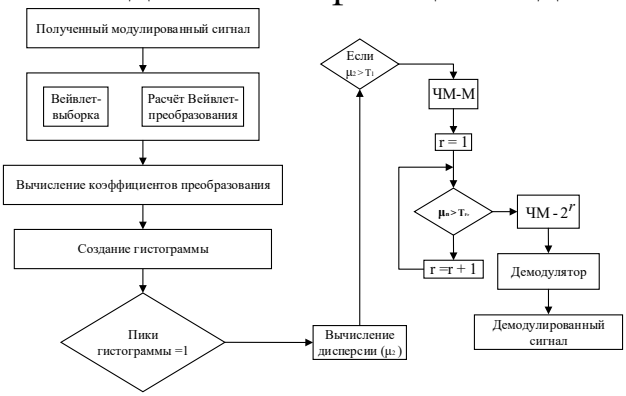


Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма идентификации ЧМ сигнала

Алгоритм, включающий генерацию тестового сигнала, добавление шума, прием, выделение признаков и идентификацию модуляции, был разработан и протестирован с использованием MATLAB. Разработанный алгоритм проверен для схем модуляции ЧМ-2, ЧМ-4, ЧМ-8, ЧМ-16, ЧМ-М. Указанные выше схемы модуляции были смоделированы MATLAB с входным сообщением из 200 символов, а АБГШ моделируется и добавляется к передаваемому сигналу в качестве шума канала.

Список литературы

1. Кучумов, А.А. Эффективность использования алгоритмов слепой обработки для разделения сигналов с различными типами модуляции / А.А. Кучумов, Мирошникова Н.Е. // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. — 2016. — Том 10. — №5. — С. 17–20.
2. Hong L., Ho K.C. Identification of digital modulation types using the wavelet transform. Proceedings of the IEEE Conference on Military Communications, pp: 427–431.
3. Li S., Song C., F. Chen Lei Shen. “Automatic Modulation Classification of MPSK signals Using High Order Cumulants” in ICSP, 2006. P. 1–4.
4. P. Prakasam, M. Madheswaran M-ary Shift Keying Modulation Sheme Identification Algorithm Using Wavelet Transform and Higher Order Statistical Moments // Journal of Applied Sciences 8(1): pp. 112–119, 2008.
5. Radomir Pavlik Binary PSK/CPFSK and MSK bandpass modulation identifier based on the complex Shannon wavelet transform. J. Elect. Eng., 56 (3-4). —2005. — P. 71–77.
6. Sadler B., Swami A. “Hierarchal Digital Modulation Classification using Cumulants”, IEEE Transactions on Communications. March 2000. Vol. 48, no. 3. P. 416–442.
7. Zhechen Zhu, Asoke K. Nandi Automatic modulation classification: principles, algorithms, and applications, Wiley, 2015.

УДК 654

Кокорев Антон Владимирович
кандидат физико-математических наук,
сотрудник ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»,
Россия, Орел

Слесарчик Константин Федорович
сотрудник ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»,
Россия, Орел

Шведов Сергей Николаевич
кандидат технических наук,
сотрудник ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»,
Россия, Орел

Еременко Александр Иванович
кандидат технических наук,
сотрудник ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»,
Россия, Орел

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИДОВ СОВРЕМЕННОЙ ЦИФРОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

Аннотация. *В статье описаны различные подходы к определению вида многопозиционной цифровой манипуляции. Проведен анализ и сравнение рассмотренных алгоритмов. Показаны основные их достоинства и недостатки. Определены наиболее перспективные направления развития исследований в данной области.*

Ключевые слова: *цифровая модуляция, системы радиоконтроля, алгоритм автоматического определения вида манипуляции сигналов.*

Kokorev Anton Vladimirovich
Candidate of physical and mathematical sciences,
Employee of the Federal Guard Service Academy of the Russian Federation,
Russia, Orel

Slesarchuk Konstantin Fedorovich
Employee of the Federal Guard Service Academy of the Russian Federation,
Russia, Orel

Shvedov Sergey Nikolaevich
Candidate of Technical sciences,
Employee of the Federal Guard Service Academy of the Russian Federation,
Russia, Orel

Eremenko Alexander Ivanovich
Candidate of Technical sciences,
Employee of the Federal Guard Service Academy of the Russian Federation,
Russia, Orel

ANALYSIS OF METHODS FOR IDENTIFYING THE TYPES OF MODERN DIGITAL MODULATION

Abstract. *The article describes different approaches to identify the type of multi-position digital manipulation. The analysis and comparison of the considered algorithms is carried out. Their main advantages and disadvantages are shown. The most promising directions for the development of research in this area are identified.*

Keywords*: digital modulation, radiocontrol systems, automatic modulation identification algorithm.*

Идентификация цифровых модулированных сигналов является одной из важных задач в области связи в целом, и в частности при применении технологии программно-определяемого радио (SDR). Процесс идентификации сигнала является промежуточным этапом между обнаружением и демодуляцией сигнала при определении характеристик сигналов в различных приложениях связи, включая управление распределением частотного спектра, мониторинг и радиоэлектронную борьбу.

На сегодняшний момент существует несколько перспективных направлений в исследованиях по определению вида модуляции. Анализ тенденций позволяет выявить основное направление развития –

решение о виде модуляции при повышении степени априорной неопределенности о наличии и виде сигнала.

Стремительный рост популярности SDR, побудил исследователей разработать новые методы идентификации цифровых сигналов:

1. метод слепой обработки BSS (blindsignalprocessing) [1];
2. метод максимального правдоподобия [2];
3. метод, основанный на теории кумулянтов [3];
4. метод расстояний [4];
5. метод Вейвлет-преобразования [5];
6. метод моментов высокого порядка [5];
7. интеллектуальные методы (метод, использующий нейронные сети [6] логических правил, деревьев решений);
8. по "сигнальному созвездию" [11];
9. параметрические методы: метод сравнения параметров с пороговыми значениями, метод опорных вектор, метод к-ближайших соседей [4];
10. распределения фаз;
11. комбинированные методы [5,9].

Поскольку системы когнитивного радио работают в режиме реального времени, вызывает интерес разработка стандартных алгоритмов для автоматического определения вида модуляции, т.е. имеет место тенденция повышения уровня автоматизации этого процесса.

Алгоритмы, основанные на методе максимального правдоподобия, показывает наилучший в смысле выбранного вероятностного критерия результат, однако требует значительных вычислительных затрат и поэтому сложно реализуемы на современной программируемой базе в режиме реального времени. Алгоритмы автоматического определения видов модуляции, основанные на вероятностном методе – одни из самых популярных методов классификации сигналов в настоящее время. Важным условием применения данного метода является априорная определенность по характеристикам канала связи.

При известных параметрах канала достигается наибольшая эффективность в определении вида модуляции, что является важным преимуществом этого метода. Недостатки метода заключаются в высокой вычислительной сложности.

С точки зрения практической реализации, параметрические методы подходят значительно лучше, так как требуют значительно меньших вычислительных затрат по сравнению с вероятностными.

К параметрическим методам относится методы, основанные на сравнении параметров с заранее вычисленными пороговыми значениями (дерево решений), метод опорных векторов [3], метод к-ближайших соседей [4], методы использующие нейронные сети [7,8] и др.

В [3] показывается, что главным недостатком метода опорных векторов является его низкая эффективность, при работе с сигналами в реальном времени.

Основным минусом метода к-ближайших соседей, в условиях ограниченности ресурсов, является условие заранее определенной выборки объектов по которым производится классификация.

Нейросети изначально подразумевают требование обучения сети на выборках большего объема. Это требует большего объема как времени, так и вычислительных ресурсов. В настоящее время данный аспект несколько теряет свою остроту.

В [11] описывается метод определения вида цифровой модуляции по «сигнальному созвездию». Важной особенностью метода созвездий является требование к максимальной точности, при определении значения несущей частоты. Даже незначительное изменение данного параметра влечет за собой существенное отклонение формы созвездия от идеальной. Отсюда следует невозможность качественно определить вид модуляции. Отметим, что шумы и качество самого приемного устройства, также существенно влияет на точность определения вида модуляции.

Метод слепого разделения источников (BSS) используется, при условии, что математическое ожидание выборки сигнала равно нулю и его стационарности.

Если полностью отсутствуют сведения о параметрах сигнала, то говорят о «полностью» слепом методе определения типа модуляции. На практике определить модуляцию при таких условиях не представляется возможным, поэтому в режиме реального времени данный метод использует априорную информацию.

Другими методами классификации сигналов, являются интеллектуальные. Они используются при решении задач распознавания не только в теории связи, но и других областях науки и техники. В указывается на причины ограниченного использования интеллектуальных методов при решении задач определения модуляции сигналов.

Основная идея интеллектуальных методов заключается в анализе признаков распознавания вида модуляции сигналов и последующее

построение правил, алгоритмов, деревьев решений и нейронных сетей.

Важным преимуществом использования распределения фаз при определении вида модуляции является более высокая точность, чем при вероятностном подходе. Основным недостатком, сильно влияющим на качество классификации сигналов, является зависимость от выбора самого классификатора.

Пороговый метод определения вида модуляции сигналов использует статистические признаки сигналов, а именно кумулянты, при создании алгоритма разделения созвездий на группы (рис. 1-2).



Рисунок 1 – Схема классификации статистических признаков сигналов

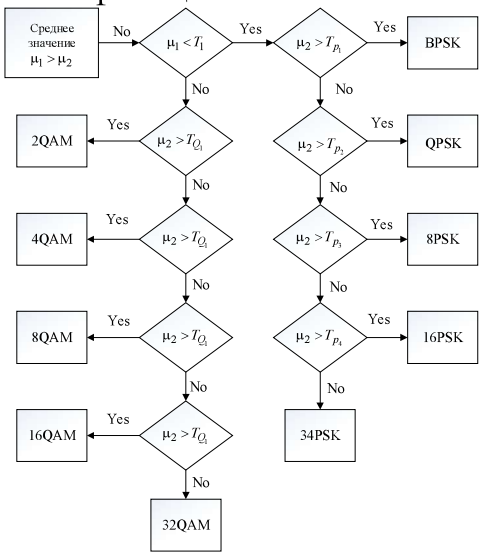


Рисунок 2 – Схема классификации статистических признаков сигналов

Кумулянты определяются как коэффициенты разложения в ряд Маклорена характеристической функции случайной величины.

Кумулянты c_1, c_2, c_3, c_4 называются соответственно средним значением, дисперсией, асимметрией и коэффициентом эксцесса случайной величины соответственно. Между кумулянтами c_n и моментами μ_n случайной величины существует связь:

$$\mu_1 = c_1, \mu_2 = c_2 + c_1^2, \mu_3 = c_3 + 3c_1 \cdot c_2 + c_1^3.$$

Подход с использованием кумулянт позволяет создать алгоритм определения вида модуляции, который меньше реагирует на отклонение несущей частоты и шумам в канале связи. Отсутствие требования

применения анализа спектральных характеристик является основной особенностью представленного метода. Особенностью использования кумулянтов и моментов высокого порядка является их использование в виде информационных признаков распознавания сигналов, вычисляемых по зарегистрированным значениям отсчетов квадратурных составляющих радиосигнала.

Работы [3,5] посвящены использованию моментов высокого порядка и кумулянтов в качестве признаков определения видов цифровой модуляции. Отметим, что основным преимуществом описываемого метода является высокое качество различения видов модуляции сигналов.

В [11] описывается алгоритм обнаружения и идентификации сигналов, согласно байесовскому правилу принятия статистических решений, являющейся принципом корреляционного сравнения принимаемой реализации с эталонным сигналом. Принятую реализацию и ее эталонный образ представляют векторами. Алгоритм принятия статистических решений сводится к скалярному произведению этих векторов. Описанный алгоритм положен в основу вейвлет-анализа для радиотехнических сигналов.

Недостатком данного алгоритма является большой объем вычислений, который возрастает экспоненциально с увеличением количества оцениваемых параметров и линейно – с расширением диапазона поиска оценок. Совместное использование ранее разработанных методов является перспективным направлением для повышения точности определения вида модуляции [5,8]. Например, использование комбинации вейвлет-преобразования и оценки параметров сигнала по методу максимального правдоподобия.

Другим примером может служить работа [3], которая посвящена разработке алгоритма идентификации вида модуляции, в котором извлечение признаков модуляции осуществлялось путем получения коэффициентов модулированных сигналов с помощью Вейвлет-преобразования и кумулянтов высокого порядка. В этой работе описан алгоритм идентификации модуляции для идентификации многопозиционной манипуляции (m-FSK, m-PSK, m-QAM). Результаты моделирования показывают, что эффективную схему определения вида модуляции можно определить для более низкого отношения сигнал/шум (SNR). Рабочие характеристики были проверены для канала с аддитивным белым Гауссовским шумом (АБГШ) на основе матрицы ошибок, пропускной способности алгоритма и рабочих ха-

рактеристик приемника. Когда SNR превышает 3 дБ, вероятность правильного идентификации вида модуляции превышает 0,984. Параметры разработанного алгоритма сравнивались с существующими алгоритмами, и было установлено, что предложенный алгоритм можно рассматривать как подходящий метод для идентификации для многопозиционной манипуляции с более низким SNR. В [6] для определения вида модуляции применяется нейронные сети с использованием кумулянтов высокого порядка, в [8] при построении нейронных сетей применяется Вейвлет-преобразование.

Методы на основе кумулянтов не позволяют с достаточной точностью определить позиционность модуляции. Методы вычисления моментов высших порядков дают недостаточную достоверность идентификации вида модуляции при низких значениях соотношения сигнал/шум. Анализ результатов и условий моделирования, рассмотренных методов показал, что в настоящее время самыми перспективными являются комплексный подход, который используют преимущества одних методов и компенсируют недостатки других [6,9].

Список литературы

1. Горячкин, О.В. Методы слепой обработки сигналов и их приложения в системах радиотехники и связи / О.В. Горячкин Радио и связь, 2003. 230 с.
2. Толстоедов, Н.А. Оценка параметров и демодуляция радиосигналов в условиях априорной неопределенности // Толстоедов, Н.А., Семкин П.В., Кузовников А.В., Сомов В.Г. / Радиотехника, 2013. № 6. С. 96-100.
3. Sadler B., Swami A. “Hierarchal Digital Modulation Classification using Cumulants”, IEEE Transactions on Communications. March 2000. Vol. 48, no. 3. P. 416-442
4. Mucherino F., Papajorgji P.J., Pardolas P.M., k-Nearest Neighbor Classification. In: Data Mining in Agriculture. Springer Optimization and Its Applications, v.34. Springer, New York, NY. 2009.
5. P. Prakasam, M. Madheswaran M-ary Shift Keying Modulation Sheme Identification Algorithm Using Wavelet Transform and Higher Order Statistical Moments // Journal of Applied Sciences 8(1): pp. 112-119, 2008
6. Аджемов, С.С. Нейросетевой метод распознавания видов модуляции радиосигналов с использованием кумулянтов высокого поряд-

ка / С.С. Аджемов, М.В. Терешнок, Д.С. Чиров // ВМУ. Серия 3. Физика. Астрономия. №6 с. 19-26, 2015.
7. Набилков, В.Д. Анализ алгоритмов автоматического определения типов модуляции радиосигналов // В.Д. Набилков, А.Л. Приоров, М.А. Дубов, С.С. Поелуев
8. K. Hassan, I. Dayoub, W. Hamouda, M. Berbineau Automatic Modulation Recognition Using Wavelet Transform and Neural Networks in Wireless Systems // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, Vol 2010, 13 pages.
9. Basu J.K., Bhattacharyya D., Kim T. // Intern. J. of Software Engineering and Its Application. 2010. 4. N 2P. 23.
10. Левин, Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин – М.: Сов. Радио, 1969, - 752 с.
11. Адженов, С.С. Алгоритм распознавания вида цифровой модуляции сигнала по форме фазового созвездия с использованием самоорганизующихся карт Кохонена // С.С. Адженов, А.А.Строгов, М.В. Терешнок, Д.С. Чиров, М.В. Иванкович / Технологии информационного сообщества 2011, с. 23-28

УДК 621.314.263

Лобанова Валентина Андреевна
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры электроники, радиотехники и систем связи,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Пилипенко Анастасия Петровна
аспирант кафедры электроники, радиотехники и систем связи,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Воронина Оксана Александровна
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры электроники, радиотехники и систем связи,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

МЕХАНИЗМЫ РАЗРУШЕНИЯ КОМПОНЕНТОВ СИЛОВЫХ IGBT МОДУЛЕЙ

Аннотация. *В статье исследованы механизмы отказов многокристальных IGBT модулей при испытании в режиме электротокового циклирования, описаны условия первичной причины отказа модуля, показана роль оборудования при испытаниях IGBT.*

Ключевые слова: *IGBT прибор, силовые полупроводниковые приборы, многокристальные IGBT модули, ресурсные испытания, циклостойкость.*

Lobanova Valentina Andreevna
candidate of technical sciences, associate professor,
associate professor of the department of electronics, radio engineering and communication systems,
Orel State University,
Russia, Orel

Pilipenko Anastasia Petrovna
postgraduate student of the Department of Electronics, Radio Engineering and Communication Systems,
Orel State University,
Russia, Orel

Voronina Oksana Aleksandrovna
candidate of technical sciences, associate professor,
associate professor of the department of electronics, radio engineering and communication systems
Orel State University,
Russia, Orel

MECHANISMS OF DESTRUCTION OF COMPONENTS OF POWER IGBT MODULES

Abstract. *The article investigates the mechanisms of failures of multi-chip IGBT modules during testing in the mode of electroshock cycling, describes the conditions of the primary cause of module failure, shows the role of equipment in IGBT testing.*

Keywords: *IGBT device, power semiconductor devices, multi-chip IGBT modules, resource tests, cycle resistance.*

Актуальность исследований стойкости силовых полупроводниковых приборов (СПП) паяной конструкции к циклическому воздействию силового тока обусловлено широким распространением модулей на базе IGBTтранзисторов. Разработчики и исследователи силовых полупроводниковых приборов ориентируются не только на требования к технологичности, себестоимости и желаемым характеристикам разрабатываемого прибора, но и на его ожидаемую наработку на отказ. Расчетные значения показателей надежности полупроводниковых приборов обеспечивают возможность оценить работоспособность и преобразовательного устройства в целом. Чтобы объективно оценить рабочий ресурс полупроводниковых модулей, необходимо знать особенности процессов деградации, происходящих в модуле во время его работы.

В данной работе рассмотрены основные механизмы, обуславливающие разрушение компонентов силовых IGBT модулей паяной конструкции и приводящие к их окончательному отказу. В нормаль-

ных условиях эксплуатации срок службы IGBT модулей составляет около 10-12 лет, поэтому для изучения механизмов отказа были проведены ускоренные испытания модулей.

Разработаны схемы появления и развития механизмов деградации компонентов силовых IGBT модулей паяной конструкции, причины их возникновения и индикаторы обнаружения. По результатам проведенного эксперимента с целью исследования влияния режима короткого и длинного электротермоциклирования на степень нагрузки различных элементов конструкции макетных образцов IGBT модулей получены зависимости напряжения насыщения коллектор-эмиттер от количества циклов. Полученные результаты позволяют определять доминирующий механизм деградации исследуемого прибора в случае отсутствия данных о режиме его испытания или эксплуатации без необходимости проведения дополнительных диагностических мероприятий.

Возникновение и развитие деградации компонентов IGBT модуля

Циклические изменения температуры внутренних компонентов модуля, которые неизбежно возникают в процессе его испытаний или эксплуатации, порождают возникновение в элементах конструкции термомеханических напряжений из-за больших различий коэффициентов температурного расширения (КТР) компонентов модуля (Рис. 1): так, например, КТР алюминия, из которого выполнены алюминиевые проводники и металлизация полупроводниковых кристаллов кремния, примерно в 9 раз выше КТР самого кремния [1]. Отсюда следует, что возникающие термомеханические напряжения напрямую способствуют запуску и развитию деградаций внутренних компонентов и соединительных интерфейсов модуля. Больше всего разрушающему воздействию подвержены паяные, сварные соединения и металлизация полупроводниковых кристаллов [2]. Ресурс модуля в целом определяется деградационными явлениями и последующим отказом наиболее ненадежного элемента (например, кристалла или соединительной проволоки). Обычно состояние данного элемента не исследуется до тех пор, пока он не выйдет из строя, после чего выявление ответственного за разрушение модуля компонента значительно затрудняется или становится невозможным благодаря финальным стадиям отказа, приводящих, например, к возгоранию некоторых деталей, взрывам, расплавлению компонентов [3].

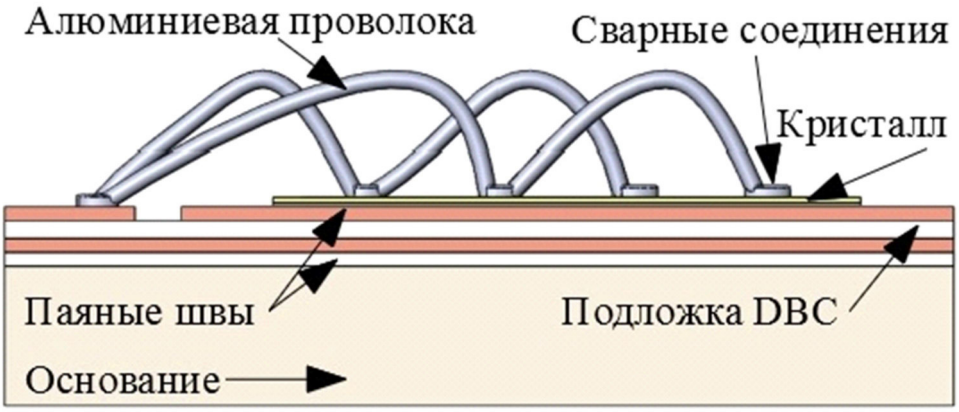


Рисунок 1 — Компоненты IGBT модуля

Коэффициенты температурного расширения(КТР) компонентов силового IGBT модуля паяной конструкции значительно отличаются между собой: так, КТР алюминия примерно в 9 раз выше КТР кремния. Такие соотношения, естественно, обусловливают запуск и развитие деградации паяных и сварных соединений в ходе ЭТЦ вследствие микроперемещений компонентов модуля (кристалл, металлизация кристалла, петли сварочной проволоки, припой, DBCподложка и т.д.) с различной амплитудой. Отсюда следуют, что основными механизмами отказов стандартных силовых IGBT модулей являются разрушение сварных соединений, деламинация DBC, усталость припоя, электромиграция и реструктуризация металлизации кристалла транзистора.

После разрушения сварного соединения может произойти расплавление проволоки как следствие значительного увеличения номинальной плотности тока в сопровождении с увеличением температуры кристалла, что приводит к деградации паяного шва.

Элемент конструкции модуля, подвергающийся наибольшим деградационным явлениям, зависит, главным образом, от режима циклирования, в особенности от длительности цикла [3]. Это связано с тем, что с увеличением длительности цикла перепад температур воздействует на более «глубокие» элементы конструкции или их интерфейсы, подвергая их влиянию термомеханических нагрузок. В случае короткой длительности циклов наибольшей степени деградации подвергаются «верхние» элементы конструкции и их интерфейсы, а воздействие нагрузок на «нижние» элементы является незначительным. Кроме того, необходимо дальнейшее совершенствование конструкции и применение современных материалов. Это позволит уточнить механизмы отказов модулей в циклических режимах работы.

Список литературы

1. Царьков В. Б. Биполярные транзисторы с изолированным затвором для начинающих. IGBT forbeginners.[Электронный ресурс]– Режим доступа: http://lipetsk.lug.ru/projects/igbt/index.html
2. Афанасьев П.В. Особенности применения биполярных транзисторов с изолированным затвором // Электрик. 2010. № 5-6. – Режим доступа: http://electrician.com.ua/posts/694
3. Рахимо М., Шнайдер Д., Шнелл Р., Айхер С., Шлапбах У. IGBT-модули HiPack на ток до 3,6 кА по технологии SPT+ – Электроника. Наука, Технология, Бизнес. – № 5/2006.

УДК 621.01

Марчук Евгений Александрович
аспирант, ассистент,
лаборатория робототехники,
Университет Иннополис,
Россия, Иннополис

Калинин Ярослав Владимирович
кандидат технических наук, доцент,
лаборатория робототехники,
Университет Иннополис,
Россия, Иннополис

СИГМОИДАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ АКТИВАЦИИ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ[1]

Аннотация. *В статье описывается способ использования сигмоидальных функций активации в инженерных задачах механики деформируемого твердого тела. Наиболее часто сигмоидальные функции активации используются в моделировании искусственных нейронных сетей. В настоящей работе приводится пример включения сигмоидальной функции активации в математическую модель системы с односторонними связями. Сигмоидальные функции активации могут использоваться для аппроксимации свойств физической нелинейности конструкционных материалов. В качестве примера приводится математическая модель модуля тросовой системы параллельного тросового робота Университета Иннополис.*

Ключевые слова: *механика, конструктивная нелинейность, сигмоидальная функция активации.*

Marchuk Eugene
Master of Science in Mechanical Engineering, Assistant,
Center for technologies in robotics and mechatronics components,
Innopolis University,
Russia, Innopolis

Kalinin Yaroslav
Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor,

[1] Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект № 19-08-01234).

Center for technologies in robotics and mechatronics components,
Innopolis University,
Russia, Innopolis

SIGMOIDAL ACTIVATION FUNCTIONS IN MECHANICAL PROBLEMS[2]

Abstract. *The article deals with a method of using sigmoidal activation functions in engineering problems of deformable body mechanics. Sigmoidal activation functions are most often used in modeling of artificial neural networks. This paper provides an example of the inclusion of a sigmoidal activation function in a mathematical model of a system with constraints. Sigmoidal activation functions can be used to approximate the properties of structural nonlinearity of materials. As an example, a mathematical model of the module of the cable system of the parallel cable robot of Innopolis University has been proposed.*

Keywords: *mechanics, structural nonlinearity, sigmoidal activation function.*

1. Введение

Функции активации получили широкое распространение в процессе развития искусственных нейронных сетей. Функции активации представлены набором наиболее употребительных, среди которых логистическая кривая, гиперболический тангенс, арктангенс, линейные выпрямители, функция Хэвисайда и т.д. [1]. Распространенность использования сигмоидальных функций активации в моделях искусственных нейронных сетей объясняется теоремой об аппроксимации, доказанной G. Cybenko в 1989 г. [2]. Как следствие, искусственные нейронные сети с нелинейными функциями активации могут использоваться для адекватной аппроксимации объектов с нелинейными характеристиками, как правило, в задачах автоматического управления. С другой стороны, функции активации могут использоваться и самостоятельно (не в составе искусственных нейронных сетей), например, при моделировании физически нелинейных конструкционных материалов [3, 4]. Следует заметить, что физическая нелинейность, к примеру, в моделях с односторонними связями, может задаваться и иными способами: ограничениями в виде неравенств, интегральными выражениями и иными способами [5, 6]. Выбор используемого способа представления конструктивной нелинейности материала во многом

[2] This work has been supported by the grant of the RFBR, 19-08-01234.

определяется удобством его использования в расчетах и численном моделировании для конкретного прикладного программного обеспечения. Описываемый далее способ представления конструктивной нелинейности модели с односторонними связями используется авторами при моделировании в модуле Simulink программного пакета Matlab.

2. Нелинейность конструкционных материалов на примере тросов

Рассмотрим задачу представления нелинейности конструкционных материалов на примере тросов. Тросы являются хорошим примером, демонстрирующим как физическую, так и геометрическую нелинейность. Физическая нелинейность троса проявляется в способности троса сопротивляться только растяжению, но не сжатию. Также модель может быть уточнена за счет учета явления вытягивания и обжимания троса в процессе эксплуатации. Геометрическая нелинейность проявляется в способности тросов к провисанию. Точные модели тросов сложны и описываются полуэмпирическими формулами, содержащими до десятка параметров, учитывающих вязкоупругие характеристики материала троса, углы свивки прядей, способы плетения, коэффициент теплового расширения и так далее [7]. Существуют и упрощенные модели, широко используемые в инженерных расчетах, например, модель тяжелой гибкой нити (растяжимой или нерастяжимой) [8, 9]. Определение параметров геометрической кривой гибкой нити (цепной линии) требует решения системы из двух трансцендентных уравнений с гиперболическими функциями. В задачах статики их численное решение не представляет затруднений, однако, в задачах кинетостатики вычислительная сложность существенно увеличивается. Цепная линия при небольшой величине стрелы провисания хорошо аппроксимируется параболической кривой, однако, при увеличении стрелы провисания погрешность вычислений значительно возрастает [9, 10]. Для каждой конкретной задачи следует выбирать подходящую модель, удовлетворяющую требованиям точности при соответствующей вычислительной сложности.

3. Сигмоидальные функции активации

В общем виде сигмоидальные функции описываются выражением:

$$\sigma(x) = \frac{k}{1+e^{a+bx}} \quad (1)$$

где k, a и b – коэффициенты, определяющие характеристики сигмоидальной функции (рисунок 1).

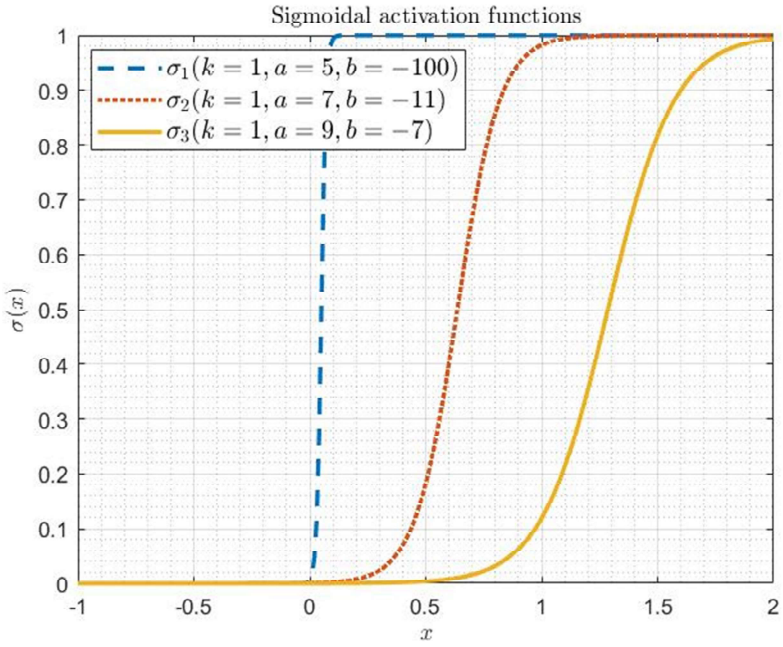


Рисунок 1 – Сигмоидальные функции активации

Одним из способов использования сигмоидальных функций в качестве функций активации является представление единичной ступенчатой функции в аналитической непрерывной форме. Коэффициенты в уравнении сигмоидальной функции выбираются такими, что обеспечивают почти ступенчатую форму кривой с участком быстрого возрастания в окрестностях нулевого значения аргумента. Такой способ представления можно использовать для моделирования систем с односторонними связями в Matlab Simulink.

4. Включение сигмоидальных функций активации в модель механики троса

Математическая модель тросовой системы параллельного тросового робота Университета Иннополис (линейные размеры 15 – 20 м и масса рабочего инструмента 1000 – 1200 кг при диаметре троса 12 мм) строится на допущении того, что тросы сильно нагружены и не провисают. Таким образом, условие геометрической нелинейности тросов в модель не включается. Конфигурация тросовой системы допускает воздействие на тросы как растягивающих, так и сжимающих усилий, что требует включения в модель условия конструктивной нелинейности. Функциональная зависимость силы натяжения троса от деформации приобретает вид:

$$f_i(\Delta l_i) = f_i \cdot \left[\frac{1}{1+e^{a+b\cdot\Delta l_i}}\right] \qquad (2)$$

где f_i - сила натяжения i-го троса, Δl_i - деформация i-го троса, a и b – коэффициенты сигмоидальной функции активации.

Таким образом, при нулевых и отрицательных значениях деформаций тросов силы натяжения тросов равны нулю, а при положительных значениях определяются в соответствии с законом Гука. Как упоминалось выше, геликоидная структура прядей реального троса у новых, необтянутых, тросов способствует появлению участка «холостого хода» в начале работы на растяжение. Этот участок также может быть обозначен в модели троса путем увеличения участка разгона сигмоидальной кривой через изменение коэффициентов a и b, формула (2).

5. Выводы

Как показывают результаты численного моделирования, сигмоидальные функции активации обеспечивают адекватное моделирование при аппроксимации конструктивной нелинейности тросов (рисунок 2).

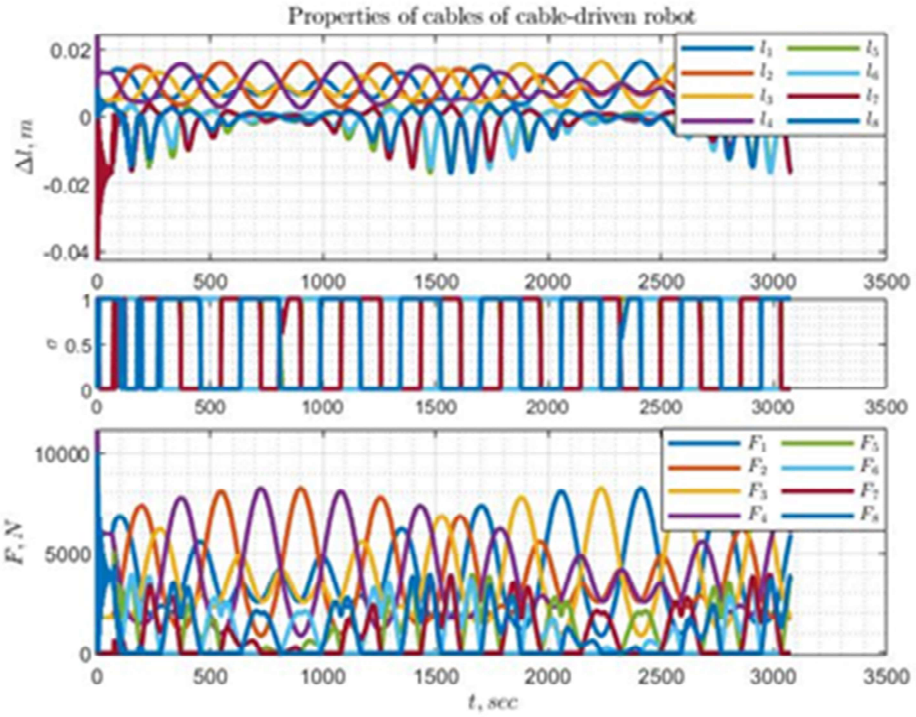


Рисунок 2 – Моделирование сил натяжения тросов
при движении рабочего инструмента тросового робота

В верхней части рисунка показаны деформации тросов в процессе движения рабочего инструмента робота по плоской траектории сложной формы, в средней части – отработка функции активации, в нижней части – силы натяжения тросов. Управляющие воздействия для распределения сил натяжения тросов не задействованы, поэтому некоторые тросы могут провисать – отрицательный знак деформации

обозначает провисание троса. В то же время, тросы не оказывают сопротивления сжимающему воздействию, поэтому силы натяжения всегда неотрицательны.

Рассмотренный в статье метод представления конструктивной нелинейности тросов используется при расчетах тросовых роботов Университета Иннополис.

Список литературы

1. Haykin S. Neural Networks and Learning Machines / S. Haykin. — Pearson Prentice Hall, 2009. — 936 p.
2. Cybenko, G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function / G. Cybenko // Mathematics of Control, Signals, and Systems. — 1989. — Issue 2. — Vol. 4. — P. 303–314.
3. Kalinin Ya. V. Specifity of Including of Structural Nonlinearity in Model of Dynamics of Cable-Driven Robot / Ya. V. Kalinin, E. A. Marchuk // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. — 2021. — vol. 22. — 10, P. 547–552.
4. Марчук, Е. А. К вопросу включения функций активации в дифференциальные уравнения динамики тросовых роботизированных систем / Е. А. Марчук, Я. В. Калинин // Математические методы в технологиях и технике. — 2021.— Номер 2. — С. 40–44.
5. Рабинович И. М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями / И. М. Рабинович. — М.: Стройиздат, 1975. — 144 с.
6. Перельмутер А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. — Киев: Издательство «Сталь», 2002. — 600 с.
7. Малиновский, В. А. Стальные канаты / В. А. Малиновский. — Одесса: Астропринт, 2001. — 188 с.
8. Irvine, M. Cable Structures / M. Irvine. — Dover Publications, 1992. — 259 p.
9. Меркин, Д. Р. Введение в механику гибкой нити / Д. Р. Меркин. — М.: Наука, 1980. — 240 с.
10. Янпольский, А. Р. Гиперболические функции / А. Р. Янпольский. — М.: Физматгиз, 1960. — 196 с.

УДК 681.5

Музалевская Марина Анатольевна
кандидат экономических наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Зеленин Даниил Павлович
бакалавр четвертого курса, ИПАИТ,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

РАЗРАБОТКА УЗЛА ТЕРМОУПАКОВОЧНОЙ МАШИНЫ

Аннотация. *В статье рассматривается разработка узла термоупаковочной машины, который позволит реализовать систему управления температурным режимом упаковывания готовой продукции.*

Ключевые слова: *узел, термоупаковочная машина, структурная схема, микроконтроллер, электрическая принципиальная схема, алгоритм работы, программа.*

Muzalevskaya Marina Anatolyevna
Candidate of Economic Sciences, docent,
Orel State University,
Russia, Orel

Zelenin Daniil Pavlovich
Bachelor of the fourth year, IPAIT,
Orel State University,
Russia, Orel

DEVELOPMENT OF A THERMO-PACKAGING MACHINE UNIT

Abstract. *The article discusses the development of a thermo-packaging machine unit, which will allow implementing a temperature control system for packaging finished products.*

Keywords: *node, thermo-packaging machine, block diagram, microcontroller, electrical schematic diagram, operation algorithm, program.*

Целью данной работы является разработка узла термоупаковочной машины, который будет применяться в упаковочном конвейере промышленного типа, позволяющем упростить и ускорить работу цеха по упаковке готовых изделий.

Актуальность выбранной темы обусловлена тем, что при производстве изделий, на упаковку готовых изделий уходит немалая часть времени. Данный узел позволит сократить сроки упаковки. Также он позволит снизить затраты труда, что тоже является одним из условий эффективности производства.

Таким образом, целью работы является создание узла на базе микроконтроллера, который позволит упаковывать готовое изделие в термоупаковку.

Структурная схема данного проекта представлена на рисунке 1. На схеме показано взаимодействие всех элементов проекта друг с другом. Микроконтроллер получает данные с кнопки, затем ждет данные с датчика, после этого полученные данные обрабатываются и передаются на исполнительный механизм.

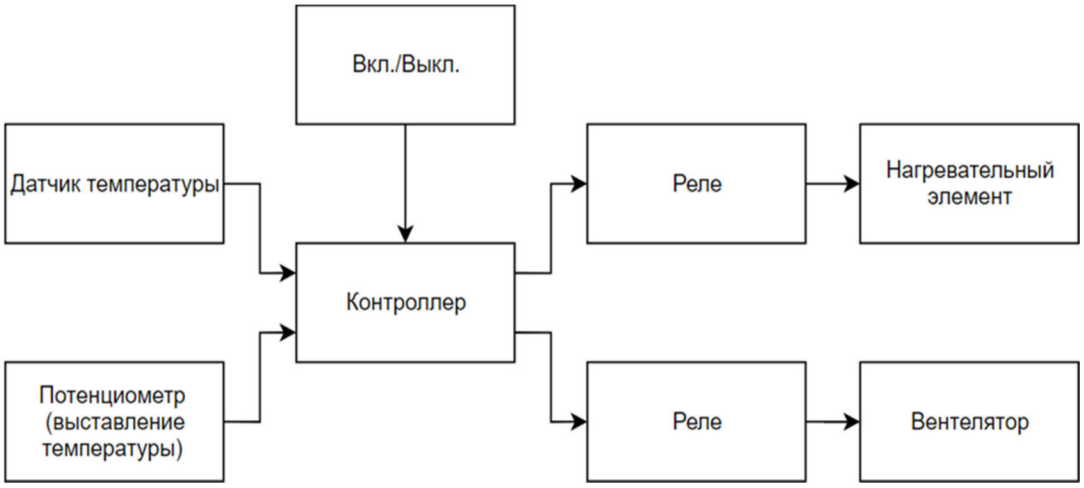


Рисунок 1 – Структурная схема

Согласно приведенной структурной схеме была разработана принципиальная электрическая схема блока управления, на базе микроконтроллера Arduino Nano.

Данная работа содержит в себе узел термоупоковочной машины. Вся система управляется микроконтроллером Arduino Nano, который в свою очередь, питается от внешнего источника тока 5 В. К пину D2 микроконтроллера подключается кнопка, по нажатию на которую срабатывает основной цикл работы узла. Пин D3 служит для подключения датчика температуры, который следит за температурным режимом, необходимой для работы системы. Реле подключаются к пи-

нам D4 и D5, к которым, соответственно, подключаются вентилятор и нагревательный элемент. Потенциометр подключается к аналоговому пину A5 Arduino Nano и служит для выставления необходимого для плавки пластика температурного режима.

Алгоритм работы узла начинается с создания и присвоения начальных значений переменным, которые будут использоваться в программе: 1. Объявление переменных; оператор if, в котором проверяется нажата кнопка или нет. 2. Получение в pot_value значение со входа POT_PIN, которое может находиться в пределах от 0 до 1023, что соответствует крайним положениям ручки потенциометра. 3. Функция map трансформирует пропорционально значение из текущего диапазона значений (0-1023) в новый диапазон (0-255). 4. Цикл будет работать, пока не будет отключена кнопка. 5. Включение реле 1. 6. Включение реле 2. 7. Опрос датчика температуры. 8. Оператор if, сравнение показаний фактических с выставленными. 9. Ждём 10 секунд. 11. Выключаем реле 1. 12. Выключаем реле 2. 13. Ждём 10 секунд.

Разработка программного обеспечения производилась в бесплатной программной оболочке Arduino IDE [1]. Данная оболочка позволяет писать программы для микроконтроллеров семейства Arduino.

Таким образом, в результате выполнения работы, был создан узел термоупаковочной машины на базе микроконтроллера, который позволяет упаковывать готовое изделие в термоупаковку.

Список литературы

1. Громаков Е.И. Проектирование автоматизированных систем: Электронный курс лекций. - Томск: Томский политехнический университет, 2009. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://window.edu.ru/resource/740/74740

УДК 621.315.2

Цуканов Борис Дмитриевич
кандидат педагогических наук, доцент,
профессор кафедры общей физики,
Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации,
Россия, Орёл

НОВОЕ ПОКОЛЕНИЕ ДАТЧИКОВ ДЛЯ СИСТЕМ БЕЗОПАСНОСТИ

Аннотация. *В статье рассматриваются технические средства обнаружения вибрационных сигналов при попытках пересечения нарушителем периметра охраняемого объекта. Основное внимание уделяется физическим принципам формирования тревожных электрических сигналов в сенсорных кабелях, устанавливаемых на заграждениях, внутри их конструкционных элементов или в грунте. Приводятся основные характеристики датчиков для контроля различных типов заграждений, территорий и строений.*

Ключевые слова: *технические средства охраны, периметровая охрана, чувствительный элемент (сенсор, датчик), сенсорный кабель, вибрационные датчики.*

Tsukanov Boris Dmitrievich
candidate of pedagogical sciences, associate professor,
professor of the department of general physics,
Russian Federation Security Guard Service Federal Academy,
Russia, Orel

A NEW GENERATION OF SENSORS FOR SECURITY SYSTEMS

Abstract. *The article contains a description of the technical means of detecting vibration signals when an intruder attempts to overcome the perimeter of the protected object. The main attention is paid to the physical principles of generating alarm electrical signals in sensor cables installed on barriers, inside their structural elements or in the ground. The main characteristics of sensors for monitoring various types of barriers, territories and buildings are presented.*

Keywords: *technical means of security, perimeter security, sensitive element (sensor, probe), sensor cable, vibration sensors*.

Современные системы безопасности включают в себя разнообразные технические средства, обеспечивающие получение информации об угрозах и организацию необходимого противодействия. Совершенствование таких систем осуществляется в соответствии с задачами противодействия новым видам угроз и уровнем развития технических средств охраны.

Важным направлением совершенствования систем безопасности считается создание новых типов датчиков (сенсоров, чувствительных элементов, первичных преобразователей), преобразующие информацию об угрозе в электрические сигналы.

Показателем эффективности системы охраны является способность обнаружить нарушителя до его проникновения на охраняемый объект, создавая запас времени для ответных действий. В соответствии с этим лучшим местом для фиксации вторжения следует считать оборудованную границу охраняемой зоны – периметр. Из всех типов чувствительных элементов (точечных, линейных, объемных) разработчики периметровых систем охраны (ПСО) предпочитают использовать распределенные линейные датчики в виде кабелей – *сенсорные кабели*, которые регистрируют деформации и вибрации ограды или грунта [1,2 и др.]. Наибольшее развитие за рубежом и в России получили технологии охраны периметров, основанные на использовании трибоэлектрических, пьезоэлектрических, электретных, электромагнитных (микрофонных), волоконно-оптических кабелей.

Рассмотрим устройство и принцип действия сенсорных кабелей.

Трибоэлектрические кабели. Трибоэлектрический эффект (иначе – электризация трением) в таких кабелях проявляется в возникновении зарядов противоположного знака на изоляции проводов при трении или соприкосновении диэлектрических оболочек. Сущность этого процесса состоит в переходе электронов с одной контактной поверхности на другую. Перемещение электронов при контакте происходит из материала с меньшей работой выхода и соответственно с более высоким уровнем Ферми в материал с более низким уровнем Ферми. Трение увеличивает площадь взаимодействующих поверхностей и значение возникающих зарядов.

Наличие в трибоэлектрических датчиках металлических проводников важно для передачи изменений зарядов и разности потен-

циалов в трибоэлектрической паре электронному блоку обработки сигнала.

В отечественных ПСО ("Гюрза", "Лиана", "Годограф" и др.) в качестве сенсоров используются многопарные *телефонные кабели* ТПП, ТППэп, ПВЧС с медными проводами в полиэтиленовой или лавсановой изоляции. В них трибоэлектрический эффект не предусмотрен и потому требуется отбор кабелей. Для изготавливаемых по заказам производителей охранных систем трибокабелей 4CBL1041, ЧЭ 5П, ЧЭ 10П, характерно наличие экрана из алюмополимерной ленты, под которой проходят медные контактные проволоки (их еще называют дренажными). При деформации кабеля на экране и проводящих жилах формируется разность потенциалов до нескольких милливольт, что вполне достаточно для блоков обработки сигнала [3, 4].

Использование телефонных кабелей в качестве сенсора позволяет обнаруживать только медленные деформации ограды или грунта с частотами колебаний от 0,1 до 3–5 Гц. Такие колебания возникают при подкопе или перелазе через ограду. Для регистрации вибраций с большими частотами, возникающих при разрезании заграждений, применяются *коаксиальные трибоэлектрические кабели*, в которых напряжение сигнала (обычно десятки милливольт) создается между внутренним и внешним проводниками, разделенными диэлектриком или двумя диэлектриками значительной толщины.

Отличительные особенности коаксиальных трибоэлектрических кабелей: наличие внешнего второго экрана, несколько слоев диэлектрика, центральный проводник в виде двойной спирали или витой жилы из тонких проволок. К ним относятся кабели типов КТМ, КТВ–Мф, КТВУМ, используемые в российских охранных системах "Мурена", "Годограф–Универсал", "Габарит" и др. Максимальная длина охраняемой зоны 500 м, рекомендуемая – 250 м. Уровень полезного сигнала в телефонных кабелях порядка милливольта, в КТМ не менее 20 мВ, в КТМЭУ и КТВ-Пл – не менее 45 мВ, в спиральных кабелях КТВ-Мф, КТВ-МЭП, ТВС – 100 мВ и более [5].

О востребованности трибоэлектрических сенсорных кабелей можно судить по количеству выданных на них патентов. По данным Роспатента за 2007– 2019 годы только в России выдано около десяти таких патентов.

Пьезоэлектрические кабели. Для охраны периметров получили применение коаксиальные сенсорные кабели, в которых между центральным проводником и экраном находится полимерный пьезоэлек-

трик. Такие кабели называют пьезоэлектрическими и действие их основано на возникновении зарядов противоположных знаков на центральном проводнике и проводящем экране при деформации кабеля.

Создание таких кабелей стало возможно благодаря открытию пьезоэффекта в поливинилденфториде (ПВДФ), полипропилене (ПП), политетрафторэтилене (ПТФЭ), сополимерах винилденфторида с тетрафторэтиленом и других синтетических материалах. Пьезоэлектрические свойства этих материалов можно усилить посредством механической вытяжки и поляризации разогретого полимера с последующим охлаждением в электрическом поле [6].

Точно так же изготавливаются *электреты* – диэлектрики, сохраняющие состояние поляризации от нескольких часов до нескольких лет. Развитие технологии привело к созданию электретов с пьезоэлектрическими свойствами: пьезополимерных пленок из ПВДФ, пьезоматериалов из пористых ПП и ПТФЭ, композитных пьезопленок толщиной (30 – 70) мкм с нанесенными электродами толщиной от 3 мкм до 100 мкм. В 70-е годы XX века выпускались кабели с изоляцией из ПТФЭ. Их называли пьезоэлектрическими, но заряд в них создавался вследствие трения, то есть трибоэлектрического эффекта [6, с. 964].

Пьезоэлектрические кабели обладают очень высокой чувствительностью, но из-за высокой стоимости широкого применения не получили.

Электретные кабели. Встречающиеся в литературе упоминания о сенсорных электретных кабелях имеют основания, поскольку в процессе их изготовления после заливки расплавленного диэлектрика между центральной жилой и экраном создается сильное электрическое поле. После охлаждения кабеля поле выключается. В результате диэлектрик между центральной жилой и экраном остается радиально поляризованным и может использоваться как источник электрического поля. Такой диэлектрик называют электретом. Однако изменение зарядов на его поверхностях при деформации обусловлено пьезоэффектом, а не движением проводников относительно диэлектрика. Поэтому электретные кабели по принципу действия следует отнести к пьезоэлектрическим.

Электромагнитный кабель. Одним из лучших типов сенсорных кабелей по чувствительности, ширине полосы регистрируемых частот и отношению "сигнал/шум" считается электромагнитный микрофонный кабель.

Он представляет собой линейный распределенный микрофон, действующий на явлении электромагнитной индукции. В конструкции кабеля два подвижных проводника в полиэтиленовых трубках с силиконовой смазкой размещены в каналах между полюсами магнита из гибкого полимерного материала. При деформации или вибрации кабеля в подвижных проводниках индуцируется напряжение так же, как это происходит в электродинамических микрофонах. Кабель используется для размещения на оградах и в грунте. Длина сенсора составляет до 300 м на одну зону, уровень сигнала – 100 мВ и более. Высокая чувствительность микрофонных кабелей позволяет организовать прослушивание оператором звуковых сигналов вблизи ограждения периметра [2].

Волоконно-оптический кабель. Для охраны периметров и мониторинга состояния важных объектов большой протяженности (аэродромов, линий электропередачи, линий связи, трубопроводов, мостов, железных и автомобильных дорог и др.) целесообразно и экономически оправдано использование систем охраны с волоконно-оптическими датчиками. Чувствительными элементами в таких системах служат волоконно-оптические кабели (ВОК) специально разработанные сенсорные или стандартные коммуникационные для волоконно-оптических линий связи.

В сенсорных ВОК оптические волокна (от 2 до 48) могут размещаться в единственной трубке из нержавеющей стали диаметром от 1,1 мм до 6,3 мм. В коммуникационных кабелях с одномодовыми оптическими волокнами G.652, SMF–28 Ultra и другими число волокон от 4 до 288, но чаще 32, 48 или 64 [5]. В качестве сенсоров выбирают обычно несколько волокон, максимально удаленных друг от друга.

По оптическим волокнам сенсорного кабеля распространяются короткие оптические импульсы от полупроводникового лазера. Часть света рассеивается на неоднородностях волокна в обратном направлении. Такие неоднородности создаются при вибрациях или деформациях волокон. По времени прохождения обратного сигнала определяется место воздействия, по интенсивности – тип нарушителя. Другой метод локализации угроз основан на использовании *волоконных брэгговских решеток* (ВБР). Это регулярно расположенные неоднородности в сердцевине оптоволокна, которые образуют систему интерферометров Фабри–Перо. Для анализа сигнала используются программно-аппаратные комплексы, включающие когерентные ре-

флектометры и обучающиеся нейронные сети [7]. Из отечественных разработок наиболее известны системы "Ворон" и "Дунай" для контроля протяженных периметров, линий связи и трубопроводов [8, 9].

Некоторые характеристики волоконно-оптических и других сенсорных кабелей представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Основные характеристики сенсорных кабелей

Тип кабеля (ЧЭ)	Марка ЧЭ	Макс. длина зоны, м	Длина контр. уч-ка, м	Дистанц. обнар-я наруш., м	Уров. сигнала, мВ
Телефонный с трибоэл.эффектом / трибоэл спецкабель	ТПП,ТППэп, ЧЭ-5П, ПВЧС / КТВ, КТВ-Пл, КТМЭУ	250	2х250	Возд-е на ограду	1 / 45
Коаксиальный трибоэлектр. / спиральный	КТМ / ТВС, КТВ-Мф	250 300	(2-4)х250 2х300	–	20 / 100
Пьезоэлектрический (электретный)	тип 10005646, тип 10005801	200	–	–	45
Электромагнитный (микрофонный)	GDALPHA, MicrAlert	300	2х300	3,0 1,5	100
Волоконно-оптический	FIMT, ОКТ-Д, КдВО-Б	50 000	2х50 000	5,0	–

Выполненный обзор линейных датчиков для охранной сигнализации позволяет сделать следующие выводы:

1. Сенсоры (первичные преобразователи) в виде электрических и оптических кабелей действуют на разных физических эффектах, в том числе – побочных, и при разной стоимости могут иметь одинаковые технические характеристики. Поэтому в периметровой охране можно использовать в качестве датчиков новые и ранее проложенные специальные или коммуникационные кабели с нужными свойствами.

2. Новое поколение периметровых систем охраны ("Ворон", "Дунай" и другие) создано на основе волоконно-оптических датчиков и нейрокомпьютерных технологий и обеспечивает обнаружение, локализацию и распознавание типа нарушителя при длине датчиков в десятки километров.

Список литературы

1. Омельянчук, А. Периметровые извещатели: линейные против адресных точечных / А. Омельянчук // Технологии защиты. – 2014. – № 6. – URL: www.tzmagazine.ru/jpage_print.php?uid3=1333/ (дата обращения: 05.10.2021).
2. Павлов, С. Системы охраны периметра с сенсорным кабелем. Обзор перспективных технологий / С. Павлов // Системы безопасности. – 2013. – № 4. – URL: http://secuteck.ru/articles2/OPS/sistemy-ohrany-perimetra-s-sensornym-kabelem-obzor-perspektivnyh-tehnologiy (дата обращения: 05.10.2021).
3. Введенский, Б. С. Современные системы охраны периметров / Б. С. Введенский // Алгоритм безопасности. – 2003. – № 4. – URL: http://bre.ru/ security/20047.html/ (дата обращения: 05.10.2021).
4. Груба, И. И. Системы охранной сигнализации. Технические средства обнаружения / И. И. Груба. – М.: СОЛОН–ПРЕСС, 2012. – 220 с.
5. Кабельный завод «Паритет». Каталог продукции: сайт. – URL: https://paritet.su/catalog/koaksialnye/ (дата обращения: 05.10.2021).
6. Лущейкин, Г. А. Новые полимерсодержащие пьезоэлектрические материалы / Г. А. Лущейкин // Физика твердого тела. – 2006. – Том 48. – Вып. 6. – С. 963 – 964
7. Куликов, А. В. Волоконно-оптическая система охраны периметра на брэгговских решетках, как перспективный метод мониторинга безопасности объекта / А. В. Куликов // Ползуновский альманах. – 2010. – №2. – С. 274 – 278.
8. НИИПРОМ. Прикладная радиофизика: сайт. – URL: https:// www.prf-voron.ru/ (дата обращения: 05.10.2021).
9. Дунай - распределенный акустический сенсор: сайт. – URL: https://t8-sensor.ru / (дата обращения: 05.10.2021).

Методика преподавания точных наук в школе и вузе

УДК 511.3

Авдеев Иван Федорович
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орел

Авдеева Татьяна Константиновна
доктор пед. наук, профессор,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орел

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ: ИВАН МАТВЕЕВИЧ ВИНОГРАДОВ (1891-1983) И ГЕННАДИЙ ИВАНОВИЧ АРХИПОВ (1945-2013)

Аннотация. *В статье приведены краткие биографические данные Ивана Матвеевича Виноградова, выдающегося математика, крупного организатора науки, академика и Геннадия Ивановича Архипова, выдающегося советского математика, орловца. Описаны их основные достижения в области теории чисел*

Ключевые слова*: Виноградов Иван Матвеевич, Архипов Геннадий Иванович, Математический институт им. В.А. Стеклова АН, теория чисел, метод тригонометрических сумм, проблемы Гольдбаха, Варинга, Гильберта-Камке, проблема И.М. Виноградова оценок кратных тригонометрических сумм.*

THEORY OF NUMBER: IVAN MATVEEVICHVINOGRADOV (1891-1983) AND GENNADY IVANOVICHARKHIPOV (1945-2013)

Avdeev Ivan
Ph.D. in math and physics, associate professor,
Oryol State University named after I.S. Turgenev,
Russia, Orel

Avdeeva Tatyana
doctor of Education, professor,
Oryol State University named after I.S. Turgenev,
Russia, Orel

Abstract. *The article contains brief biographical information about Ivan Matveyevich Vinogradov. He was outstanding mathematician, a prominent organizer of science, academician. There is biographical information about outstanding Soviet mathematician Gennady Ivanovich Arkhipov who was born in Orel'sregion. Main achievementsin the number theory'sfield of Vinogradov Ivan Matveevich and Arkhipov Gennady Ivanovichare described in the article.*

Keywords: *Vinogradov Ivan Matveevich, Arkhipov Gennady Ivanovich, Mathematical Institute named after V.A. Steklov AN, theory of number, method of trigonometric sums, problem of Goldbach, problem of Waring, problem of Hilbert-Kamke, I.M. Vinogradov'S problem of estimates of multiple trigonometric sums.*

В этом году исполняется 130 лет со дня рождения Ивана Матвеевича Виноградова – основателя советской школы теории чисел, человека, который добился успеха благодаря напряженному труду, возможно, эта черта была передана ему по наследству.

Его отец Виноградов Матвей Авраамович являл собою пример трудолюбивого отца: вставал в 4 часа утра, косил, убирал двор, затем чисто мылся, облачался в рясу и шел служить в церковь. 18 ноября 1884 г. Его Высокопреосвященство Архиепископ Псковский и ПорховскийНафанаил посвятил Матвея в священники церкви Успения Божьей Матери погоста Милолюб Великолукского уезда [1].

Мать Ивана Матвеевича Виноградова была Александра Федоровна Новская, она окончила Псковскую Мариинскую женскую гимназию, получив специальность «домашняя наставница». Родственники считали, что у Александры Федоровны был математический дар, который она передала своим детям, их было в семье трое:

Мария (28 июня 1888 г. по стст), Надежда (12 сентября 1889 г. по стст), Иван (2 сентября 1891 г. по стст) [1].

Начальное образование Иван получил дома под руководством матери, которая заботилась о развитии детей, для них выписывалась литература по школьным предметам повышенной сложности. Когда мальчику исполнилось 8 лет, семья переезжает в Великие Луки, Матвей Авраамович получает должность настоятеля Покровской церкви города. Иван становится учеником реального училища: с большим курсом точных наук и двумя иностранными языками. В дополнении к этому в 6-7 классах училища Виноградов самостоятельно изучил элементы высшей математики по учебникам для самообразования Лоренца и Поссе. Кроме учебы были увлечения – рисование и спорт, которые Иван Матвеевич не забывал в течение всей своей жизни.

Путь в науку Виноградов начал в 1910 г., поступив на математическое отделение механико-математического факультета Петербургского государственного университета. Он с первого курса увлекся теорией чисел, продолжая традиции Эйлера, Чебышева, постигая математику на занятиях Ляпунова, Маркова (старшего), Успенского, Стеклова. Тему дипломной работы Виноградову сформулировал В.Я. Успенский – дать простое доказательство закону взаимности Гаусса. Задача была решена, защита диплома прошла успешно [1].

1914-1918 г. шла «подготовка к профессорской деятельности»: это кандидатские экзамены по математике, предреволюционные события, научная работа с В.А. Стекловым, первые серьезные статьи по математике в «Известиях Российской Академии наук» (1914 г.) в ней он формулирует новую проблему о распределении квадратичных вычетов и получает результаты, сила и глубина которых остаются непревзойденными до настоящего времени [2].

1918-1920 г. Пермский университет. В 1920 г. Виноградов возвращается в Петроград, выдержав конкурс на замещение профессорской вакансии в Политехническом институте, а вскоре был зачислен профессором и заведующим кафедрой математики, теории чисел и исчисления вероятностей в Петроградском университете [1].

С 1924 г. Виноградов занимается аддитивными проблемами теории чисел. Результат – новое решение проблемы Варинга, которое послужило началом создания мощного метода современной теории чисел - метода тригонометрических сумм. В 1770 г. Варинг высказал предложение: при любом фиксированном целом $n \geq 3$ каждое нату-

ральное число можно представить суммой фиксированного числа n – числа x -степеней натуральных чисел. Кроме проблемы Варинга, Иван Матвеевич решил своим методом тригонометрических сумм общую задачу об асимптотической формуле для числа представлений натурального числа в виде многочлена специального вида.

Несмотря на большую учебную нагрузку, Иван Матвеевич упорно занимается научной работой, которая получила высокую оценку работников науки. В газете «Ленинградская правда» от 2 октября 1928 г. в статье «О кандидатах по кафедре математических наук» высказывались некоторые предложения о возможных кандидатах на выборы в Академию наук СССР. Приведем фрагмент этой статьи «Очень сильным кандидатом мы считаем .. нашего ленинградского профессора университета и Политехнического института И.М. Виноградова. Его работы в области теории чисел вызвали восторженную оценку и у нас в СССР и за границей. Не только Главнаука премировала его труды по теории чисел, но и крупнейший авторитет, - профессор Э. Ландау в Германии, посвящает целые главы классического курса методу Виноградова. Оксфордский профессор Г.Х. Харди, узнав, что имя И.М. Виноградова фигурирует в списке кандидатов пишет: но я могу положительно заверить, что он, очевидно, человек прямо замечательного таланта и воображения и яжелаю его кандидатуре всяческого успеха». Общее собрание Академии Наук СССР от 12 января 1929 г. большинством голосов избрало И.М. Виноградова в действительные члены Академии, ему было в то время 37 лет, он стал самым молодым академиком в СССР.

В 1934 г. в Москву переезжает ФМИ АН СССР, где он был разделен на два института – Математический институт имени В.А. Стеклова и Физический институт имени П.Н. Лебедева, первый возглавил И.М. Виноградов, второй – С.И. Вавилов. Виноградов сумел привлечь к работе в отделах института выдающихся ученых математиков: Н.Н. Лузина, Б.Н. Делоне, М.А. Лаврентьева, С.Н. Бернштейна, С.Л. Соболева, Н.Е. Кочина, Н.И. Мусхелишвили, А.М. Журавского, М.В. Келдыша и др. Иван Матвеевич участвовал во всех институтских делах, будучи «директором очень волевым, наложившим сильнейший отпечаток своей личности на все развитие института» [3].

Институтом Виноградов руководил бессменно почти 50 лет (за исключением военных лет, тогда руководил С.Л. Соболев). Творческая энергия и необыкновенная работоспособность, постоянное об-

ращение к труднейшим нерешенным проблемам и фундаментальным классическим задачам теории чисел, давали свои результаты.

1934. Виноградов создает новый метод оценок тригонометрических сумм. В это время метод Виноградова был успешно применен в теории дзета-функции Римана (Н.Г. Чудаковым), в проблеме Гильберта-Камке (К.К. Марджанишвили).

В 1937 г. Виноградов разработал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами. Он доказал асимптотическую формулу для числа представлений нечетного числа суммой трех простых. Так была решена знаменитая проблема Гольдбаха (сформулирована в 1742 г. в переписке Гольдбаха с Эйлером). В последующие годы ученый неоднократно улучшал и совершенствовал свой метод.

1937 - 1939 годы были весьма напряженными. Приближалась вторая мировая война. В институты Академии наук обращались за консультациями из оборонных НИИ и КБ. Во время Великой Отечественной войны основные разработки советских математиков были посвящены военной тематике, не исключением была и «Стекловка».

11 октября 1944 г. Иван Матвеевич получил Орден Ленина за выдающиеся научные достижения, имевшие большое значение в деле разгрома гитлеровской Германии.

За исключительные заслуги перед Государством в области математики, разработку мощных аналитических методов теории чисел и за многолетнюю плодотворную работу по подготовке кадров – математиков в 1945 г. И.М. Виноградову присвоено звание Героя Социалистического труда (Указ Президиума Верховного Совета СССР от 10 июня 1945 г.)

В 1957 г. Виноградов, используя собственный метод оценок сумм Вейля, получает новую границу нулей дзета-функции Римана. Его методы, созданные для решения проблем теории чисел, находят важные применения в различных разделах математики: математическом анализе и приближенных вычислениях, в теории вероятностей и дискретной математике.

В 1972 г. И.М. Виноградову была присуждена Ленинская премия за монографию «Метод тригонометрических сумм в теории чисел».

«…Вот эта маленькая книжечка, выдвинутая на соискание Ленинской премии, просто жемчужина в истории математики. Ее будут читать не в течение десятилетий, а в течение столетий. Теоретические результаты, изложенные в этой книжке, принадлежат к лучшим в об-

ласти математики в нашем столетии» (Из выступления в Кремле академика Академии наук СССР М.В. Келдыша).

В 1976 г. вышла монография «Особые варианты метода тригонометрических сумм», в которой изложены начала теории чисел, приведен набор основных задач с решениями и комментариями к ним. Учебник называют классическим, он переиздавался 9 раз и не только в нашей стране. Последнее издание вышло в 1981 г.

В теории чисел вместе с И.М. Виноградовым работали многие математики. Мы расскажем о нашем земляке, орловце – Геннадии Ивановиче Архипове.

Геннадий Иванович родился в Ельце 12 декабря 1945 года, но после войны семья Архиповых вернулась в Орел, где росли, учились, формировались как личности ее дети: Светлана, Александр и Геннадий. Родители Гены: отец Иван Филиппович и мать Елена Михайловна были служащими, в основном, воспитанием детей занималась бабушка Марфа Давыдовна. Интересы детей удовлетворяли школа, кружки и клубы. Большое значение в жизни каждого человека играет школа, для Геннадия Ивановича это школа №24 г. Орла, которая сейчас носит имя И.С. Тургенева. Школа связала на всю жизнь Учителя математики и физики Геннадия Николаевича Плотникова и любознательного, талантливого ученика – Гену Архипова. И. Редко прерывалось их общение: уроки сменялись кружками и факультативами, иногда были просто беседы или споры над интересной и ох какой трудной задачей после уроков, а порой просто шли из школы домой, радостно обсуждая, каким легким оказался ключ к ее решению. Упорный труд Учителя и ученика не раз был вознагражден победами Гены Архипова на областных и Всероссийских олимпиадах по математике и физике. Именно в этот период академик А.Н. Колмогоров вынашивал идею о создании спецшкол для обучения математике и физике одаренных ребят, которые волей судеб оказались вдалеке от научных центров. Специализированная школа-интернат №18 физико-математического профиля была создана в августе 1963 года в Москве, приглашение учиться в ней получил и орловский школьник – Гена Архипов. Позади собеседование с А.Н. Колмогоровым и разговор с ректором МГУ И.Г. Петровским, результат – Геннадий Архипов-ученик первого набора ФМШ №18! В том, что академики не ошиблись в наборе воспитанников, показал уже следующий год. В Москве 30 июня – 10 июля 1964 года состоялась VI Международная математическая олимпиада. Вот ее результаты: Архипов Геннадий, 39 бал-

лов золото; Матиясевич Юрий, 38 баллов, золото, Алексеев Валерий, 36 баллов, серебро, Ивлев Борис, 30 баллов, бронза. Вторая победа – победитель Международной олимпиады по математике – Геннадий Архипов был зачислен студентом механико-математического факультета МГУ вне конкурса!

Судьба благоволила ему: выбран верный путь в жизни – математика, с ее проблемами, безупречными законами и логикой рассуждения; учеба в Московском университете, общение с самой авторитетной командой математиков в стране и мире. Математика закружила его и уже не отпускала от себя, новые направления в изучении математики, проблемы, задачи и открытия, которые он делал для себя. Незаметно пролетели 5 лет университетской жизни. 1969 год – окончание университета и начало другого этапа – обучение в аспирантуре Математического института имени В.А. Стеклова АН СССР, где его руководителем был Анатолий Алексеевич Карацуба [4].

Одно из древних направлений математики – теория чисел, стало столбовой дорогой для изысканий Геннадия Ивановича Архипова, проблемы, поставленные еще в XVIII веке, оставались нерешенными до середины XXвека. Над их решением Г.И. Архипов работал всю свою жизнь.

Первое знакомство с И.М. Виноградовым было у Геннадия.

В известной монографии «Метод тригонометрических сумм» (1947) Иван Матвеевич Виноградов выделил три актуальных направления исследований, связанных с его методом: оценки кратных тригонометрических сумм с вещественной функцией в экспоненте; распределение значений арифметических функций от многих переменных; диофантов анализ для целочисленных функций от большого числа переменных, причем переменные могут пробегать различные множества значений, например, множество простых чисел.

В 1975 году Г.И. Архипов защитил кандидатскую диссертацию на тему « Кратные тригонометрические суммы и приложения», в которой онрешил первые две проблемы, поставленные Иваном Матвеевичем Виноградовым в его монографии «Метод тригонометрических сумм» (1947) Эти исследования были отмечены как лучшие по Академии наук СССР за 1976-1980 г.г.

В этом же году Г.И. Архипов вместе с В.Н. Чубариковым решили проблему моментов для кратных сумм, на основе которой была построена теория, подобная теории Виноградова для однократных сумм Вейля.

В 1983 году И.М. Виноградов пригласил Г.И. Архипова в Математический институт имени В.А. Стеклова АН СССР, а это дорогого стоит, судите сами. И.М. Виноградов в беседе с И.Р. Шафаревичем сказал: «Мне по ночам не спится, и я все думаю: кого взять на работу в институт, кого передвинуть на другую должность». Каждую кандидатуру математика, принимаемого на работу, он долго взвешивал, со многими обсуждал, Этот метод «постоянного размышления, как и всегда, принес свои плоды – жизнь показала, что при подборе сотрудников «Стекловки» Виноградов удивительно редко ошибался» [1, с.135]. Не ошибся он и остановив свой выбор на Геннадии Ивановиче Архипове. В Математическом институте им. В.А. Стеклова Геннадий Иванович работал в отделе теории чисел. В 1984 году он защитил выдающуюся докторскую диссертацию на тему «Исследования по проблеме Гильберта-Камке» В 1992 г. эти исследования Г.И. Архипова были отмечены премией А.А. Маркова Российской Академии наук [4].

Развивая идеи Виноградова, в 1984 г. Г.И. Архипов совместно с В.Н. Чубариковым получили нетривиальную оценку для кратных тригонометрических сумм Вейля по сплошным промежуткам суммирования. Первые оценки кратных сумм Вейля были получены Геннадием Ивановичем в 1971 году (сама задача была поставлена Виноградовым еще в сороковые годы) и опубликованы 1974 г.

В конце 30-х годов XX века после решения И.М. Виноградовым тернарной проблемы Гольдбаха, была открыта возможность оценки сверху мощности исключительного множества в бинарной проблеме Гольдбаха-Эйлера, т.е. оценки количества натуральных чисел n, не превосходящих $x \geq 6$и не представимых суммой двух нечетных простых чисел. В 2002 г. Архипов и Чубариков нашли эту оценку.

Г.И. Архиповым доказана сходимость тригонометрических рядов Виноградова, им получены принципиально новые оценки мощности исключительного множества в аддитивных задачах типа проблемы Гольдбаха.

Получены оценки количества слагаемых в аддитивных задачах, являющихся многомерным обобщением проблем Гольдбаха-Варинга и Гильберта-Камке. Обнаружен ряд неожиданных эффектов. Оказалось, что если переменные пробегают значения:

а) натуральных чисел, то количество слагаемых возрастает экспоненциальным образом относительно степени и слабо зависит от размерности;

б) простых чисел – зависимость для количества слагаемых факториальная от степени и экспоненциальная по размерности;

в) целых алгебраических чисел – скорость роста количества слагаемых существенно меньше показательной функции от степени системы уравнений.

Геннадий Иванович является автором оригинальных монографий «Кратные тригонометрические суммы» (1980), «Теория кратных тригонометрических сумм» (1987), «тригонометрические суммы в теории чисел и анализе» (2004), которые стали настольными руководствами для специалистов в теории чисел в России и за рубежом.

Список литературы

1. Иван Матвеевич Виноградов. Ярославль, ООО «Издательство «РМП», 2011. 151 с. илл.
2. Карацуба А.А. Теория чисел – одна, но пламенная страсть. /Вестник АН СССР, 1991, №9. С. 92-96.
3. Шафаревич И.Р. Патриарх отечественной науки. /Вестник АН СССР, 1991, №9. С. 96-100.
4. Архипов Г.И. Избранные труды / Под ред. В.Н. Чубарикова. - Орел, изд-во Орловского государственного университета, 2013. - 464 с.

УДК 51-73

Богданова Софья Борисовна
кандидат физико-математических наук, доцент,
Московский авиационный институт,
Россия, Москва

Абдуллаев Шамиль Казимагомедович
студент Института №3
Московский авиационный институт,
Россия, Москва

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ ЭВОЛЮТЫ ДЛЯ ЗАДАННОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ КРИВОЙ

Аннотация. *В работе представлена программа, позволяющая визуализировать процесс построения эволюты для произвольной заданной кривой, при этом в каждой точке эвольвенты демонстрируется ее радиус и круг кривизны. Приведенные построения позволяют также показать взаимосвязи между эвольвентой и ее эволютой.*

Ключевые слова: *эволюта, эвольвента, компьютерное моделирование и программирование, математический анализ.*

Bogdanova Sophie
Candidat of physical and mathematical sciences, Assistant Professor,
Moscow Aviation Institute,
Russia, Moscow

Abdullaev Shamil
Student of Institute №3,
Moscow Aviation Institute,
Russia, Moscow

VISUALIZATION OF THE EVOLUTE CONSTRUCTION FOR A GIVEN CONTINUOUS CURVE

Abstract. *In this paper, there is a program, allowing us to visualize the process of the constructing an evolute for an arbitrarily assigned curve, nevertheless, at each point of the evolvent its radius and circle of*

curvature are illustrated. The given constructions also make it possible to demostrate the correlations between the evolvent and its evolute.

Keywords: *evolute, evolvent, computer modelling and programming, mathematical analysis.*

В настоящей работе речь идет о созданной с помощью языка программирования Python 3.8 программе, позволяющей в определенной мере устранить достаточно существенный пробел в курсе математического анализа. Дело в том, что в силу различных причин при изучении дифференциального исчисления практически не рассматривается вопрос об эволютах и эвольвентах кривых. На самом деле в историческом плане влияние этих кривых на развитие механики переоценить вряд ли возможно, поскольку именно с их помощью в 1665 году Х. Гюйгенс впервые обосновал создание изохронного маятника, позволившего ему сконструировать часовой механизм [1].

Математически обе кривые получаются достаточно просто. Кривизна линии определяется как предельное значение средней кривизны при условии, что длина дуги кривой стремится к нулю, при этом вычислить кривизну можно по хорошо известной формуле [2] – [4]:

$$K = \frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}, \tag{1}$$

если кривая задана в виде явной зависимости $y = y(x)$. Неотрицательная величина $R = \frac{1}{K}$ называется радиусом кривизны и является радиусом так называемого круга кривизны в заданной точке. Для нахождения его центра надо провести нормаль к кривой в сторону ее вогнутости и отложить отрезок, равный радиусу кривизны. Геометрическое место точек центров кругов кривизны называется эволютой заданной кривой (рис.1). Данная кривая по отношению к эволюте называется эвольвентой.

Оказывается, что уравнение эволюты $\beta = \beta(\alpha)$ можно получить параметрически [2] – [4], причем роль параметра в нем играет аргумент x заданной эвольвенты $y = y(x)$:

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'\left(1+y'^2\right)}{y''}, \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''}. \end{cases} \tag{2}$$

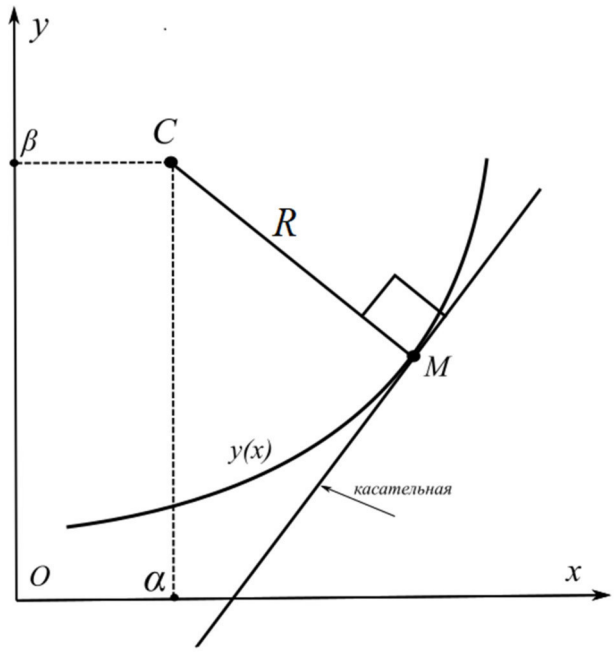


Рисунок 1 — Точка $C(\alpha,\beta)$ - центр круга кривизны кривой $y=y(x)$ в точке M, $|CM|=R$

Ясно, что не менее громоздко записывается уравнение эволюты и в случае, если эвольвента задана параметрически, т.е. $x=x(t), y=y(t)$, поскольку в систему (2) придется подставлять значения первой и вторых производных по известным формулам $y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ и $y''=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$. Вполне естественно поэтому, что аналитически удается получить уравнение эволюты лишь для немногих кривых, например, для циклоиды, эллипса, параболы [2] – [4].

Созданная на основе численных методов [5] с помощью языка Python 3.8 программа [6] позволяет продемонстрировать как сам процесс построении эволюты для произвольной заданной кривой, так и некоторые ее свойства (рис. 2 – 3):

1. Нормаль к данной кривой (эвольвенте) является касательной к эволюте, поэтому эволюта является огибающей нормалей данной кривой.
2. Данная кривая (эвольвента) по отношению к своей эволюте является ортогональной траекторией касательных к эволюте.
3. При монотонном изменении радиуса кривизны эвольвенты его приращение по абсолютной величине равно приращению длины дуги эволюты.
4. Точке экстремума радиуса кривизны эвольвенты в общем случае соответствует на эволюте точка возврата;

5. Точке эвольвенты с нулевой кривизной соответствует бесконечно удаленная точка эволюты, т.е. ей соответствует бесконечная ветвь эволюты, для которой асимптотой является нормаль к эвольвенте в точке с нулевой кривизной.

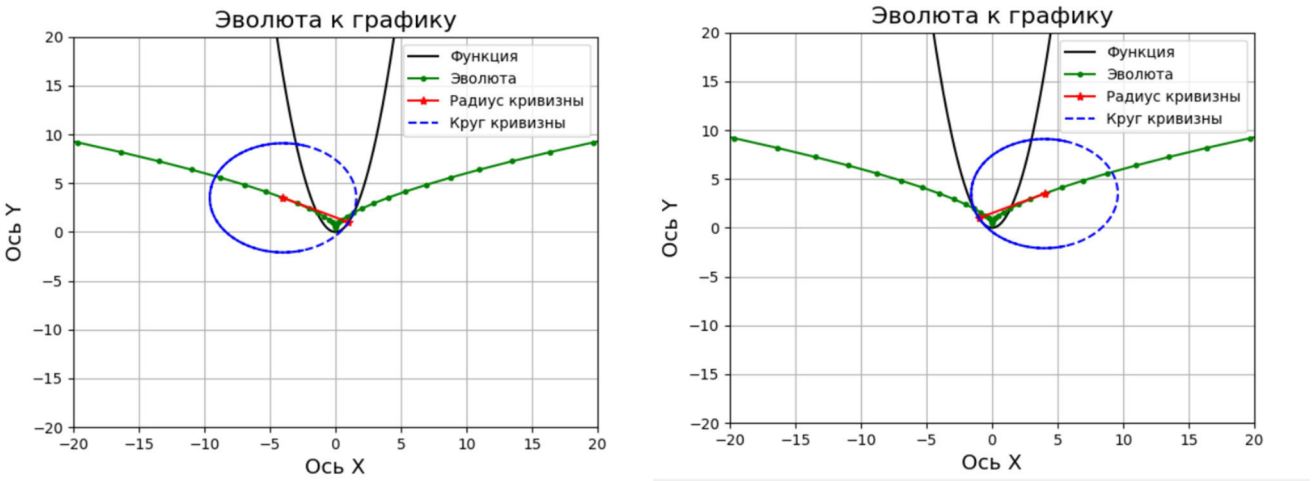


Рисунок 2 — Динамика построения эволюты к параболе

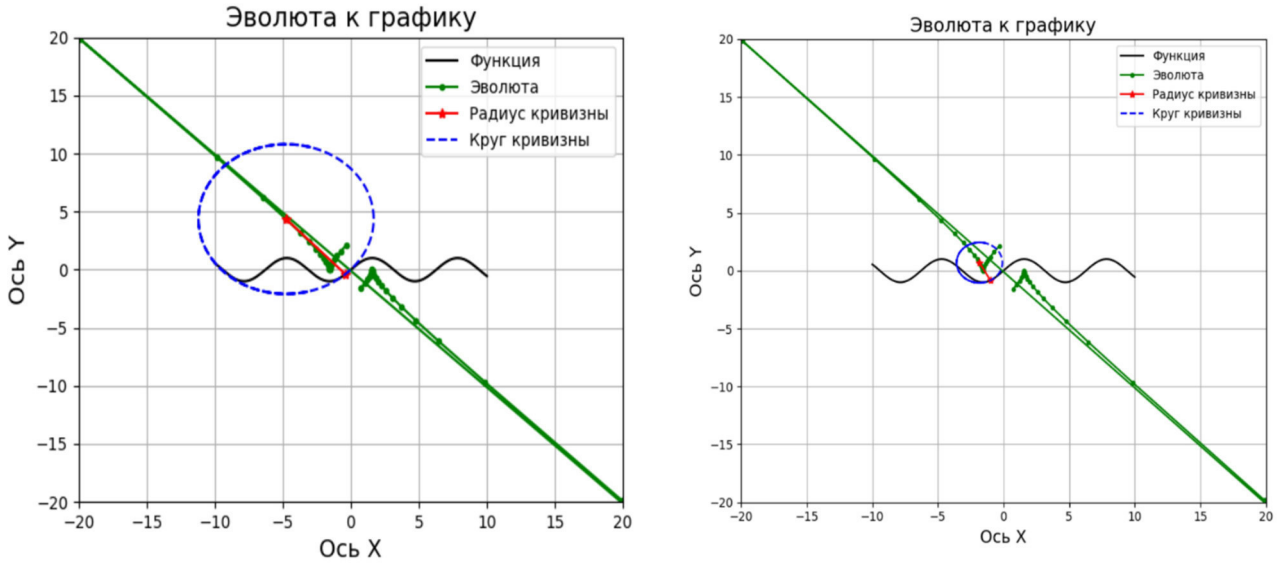


Рисунок 3 — Динамика построения эволюты к синусоиде

Список литературы

1. В.И. Арнольд. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. Серия «Современная математика для студентов». М.: Наука. 1989.
2. В.И.Смирнов. Курс высшей математики. Т.2. М.: Наука. 1967.
3. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М.: Физматгиз, 1962.

4. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1. М.: Наука, 1966.
5. Самарский А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин // М.: Альянс. - 2016.
6. https://github.com/Sleader-m1/-/blob/main/evolute Последнее обращение 06.10.2021.

УДК 51-73

Богданова Софья Борисовна
кандидат физико-математических наук, доцент,
Московский авиационный институт,
Россия, Москва

Ситнова Диана Дмитриевна
Студент Института №3,
Московский авиационный институт,
Россия, Москва

ПОСТРОЕНИЕ ПРОФИЛЯ КРЫЛА В ИЗУЧЕНИИ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Аннотация. *Показана методика построения профиля хорошо обтекаемого тела, использующая конформные отображения простейших элементарных функций. Приведена программа, позволяющая моделировать профиль крыла в зависимости от входящих параметров.*

Ключевые слова: *функция Жуковского, конформное отображение, хорошо обтекаемое тело.*

Bogdanova Sophie
Candidat of physical and mathematical sciences, Assistant Professor,
Moscow Aviation Institute,
Russia, Moscow

Sitnova Diana
Student of Institute №3,
Moscow Aviation Institute,
Russia, Moscow

THE CONSTRUCTION OF THE WING PROFILE IN STUDYING THE THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE

Abstract. *There is a technics of the constructing the profile of a well-streamlined body is shown using conformal mappings of the simplest ele-*

mentary functions. In addition, it was given a program, allowing us to simulate the wing profile in accordance with the input parameters.

Keywords: *Joukowski function, conformal mapping, well-streamlined body.*

В настоящем сообщении приведена методика, пользуясь которой студенты даже первого и второго курса технических вузов могут моделировать профиль хорошо обтекаемого тела (крыла). Приведена также ссылка [1] на программу, позволяющая визуализировать процесс построения профиля крыла.

Аналитическое описание процесса построения может быть начато еще при знакомстве с элементарными функциями комплексного переменного. При этом следует акцентировать внимание на некоторые моменты [2 – 3]. Во – первых, при изучении дробно – линейной функции $\omega = \frac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in C$, стоит подчеркнуть ее свойство «распрямлять» те окружности, которые проходят через ее особую точку $z = -\frac{d}{c}$. Во – вторых, необходимо выделить свойство функции $\omega = z^2$ увеличивать в два раза угол с вершиной в начале координат.

Этих сведений достаточно, чтобы предварительно решить вспомогательную задачу [2 – 4]: найти образ окружности, проходящей через точки $z = \pm 1$, с помощью функции Жуковского $\omega = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ (рис.1).

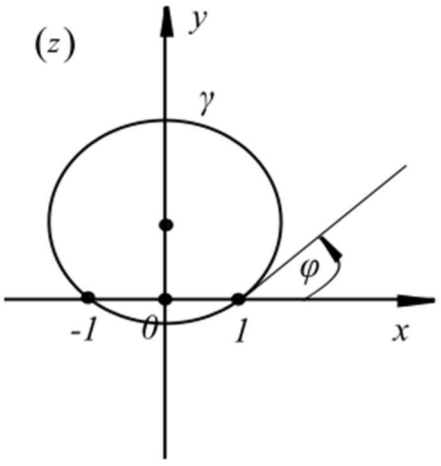


Рисунок 1 — Окружность образует угол φ с осью (ox)

Для этого функцию Жуковского следует преобразовать к виду $\frac{\omega-1}{\omega+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ и рассмотреть эту формулу как композицию двух функ-

ций $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$ и $\omega' = z'^2$. Ясно, что первая из них «распрямляет» окружность, проходящую через точку $z = -1$, а вторая – отображает прямую плоскости (z') на луч плоскости (ω') (см. рис. 2).

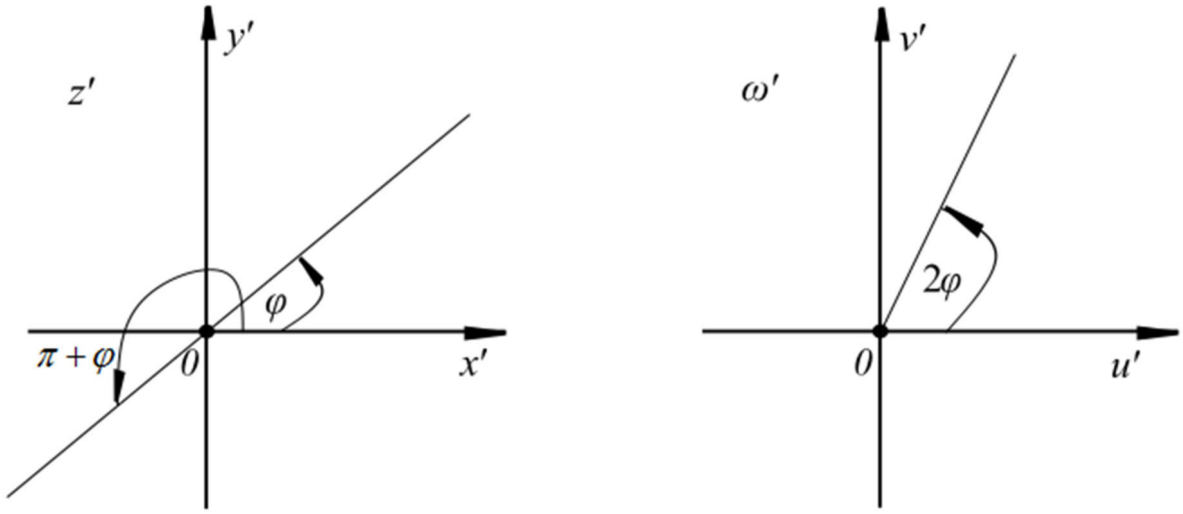


Рисунок 2 — Образы окружности, проходящей через точки $z = \pm 1$, на плоскостях $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$ и $\omega' = z'^2$

Поскольку из равенства $\dfrac{\omega-1}{\omega+1} = \omega'$ следует, что $\omega = \dfrac{\omega'+1}{1-\omega'} = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, то луч плоскости (ω') отобразится на дугу окружности (ω), проходящей через точки $\omega = \pm 1$ (проверяется непосредственно подстановкой $\omega(z = \pm 1) = \pm 1$) (рис. 3).

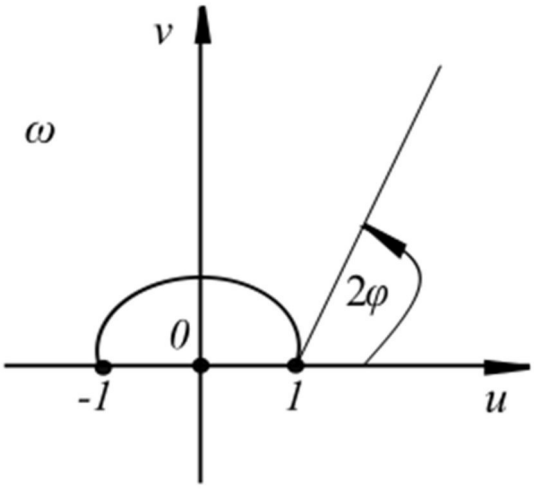


Рисунок 3 — Функция Жуковского отображает окружность, проходящую через точки $z = \pm 1$, на дугу окружности проходящей через точки $\omega = \pm 1$

Исходя из этого результата, легко видеть, что функция Жуковского всякую окружность плоскости (z), проходящую через точку $z=1$ и касающуюся внутренним образом окружность, проходящую через точки $z=\pm 1$, отображает на замкнутую кривую, имеющую в точке $\omega=1$ «заднюю кромку» (рис. 4):

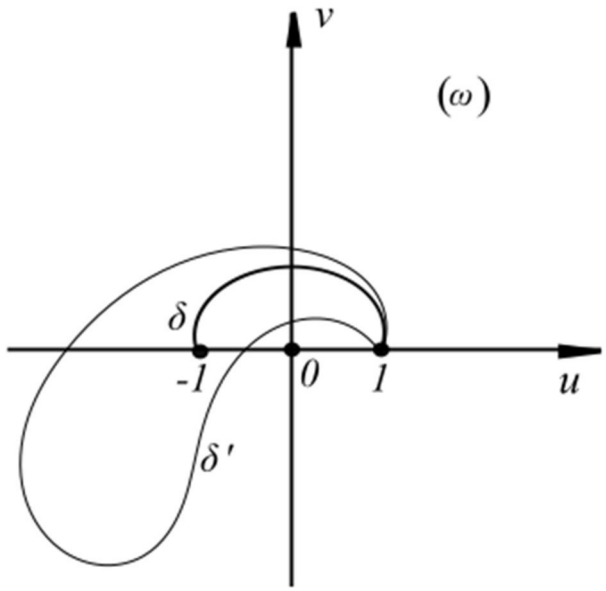


Рисунок 4 — Построенный профиль крыла

По своим характеристикам полученная кривая может рассматриваться как профиль хорошо обтекаемого тела. Как известно [5], хорошо обтекаемые тела имеют удлиненную (в направлении обтекания) форму, причем оно должно плавно заостряться в направлении обтекания. Спереди же такие тела должны быть закруглены. Именно такая форма мешает быстрому возрастанию давления вдоль тела, которое является основной причиной отрыва воздушных потоков и, как следствие, резкому падению подъемной силы.

В общем случае [2 – 4], функция $\omega=\frac{1}{2}\left(z+\frac{a^2}{z}\right)$ отображает внешность окружности, проходящую через точку $z=a$, на внешность профиля крыла, проходящего через точку $\omega=a$ (рис. 5).

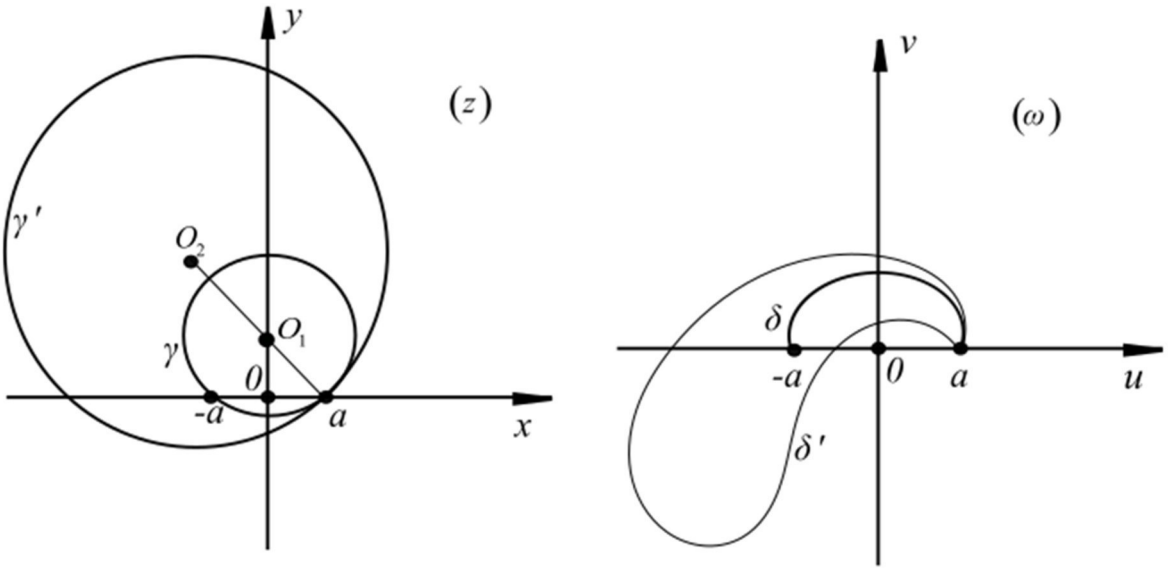


Рисунок 5 — Профиль крыла, зависящий от трех параметров.
Расстояние O_1O_2 влияет на толщину крыла,
OO_1 - на искривление крыла, а параметр a регулирует длину крыла

Программа [1], написанная на языке программирования C++, позволяет наглядно демонстрировать (рис. 6) как меняется профиль крыла в зависимости от входящих параметров: центра окружности O_2 и параметра a.

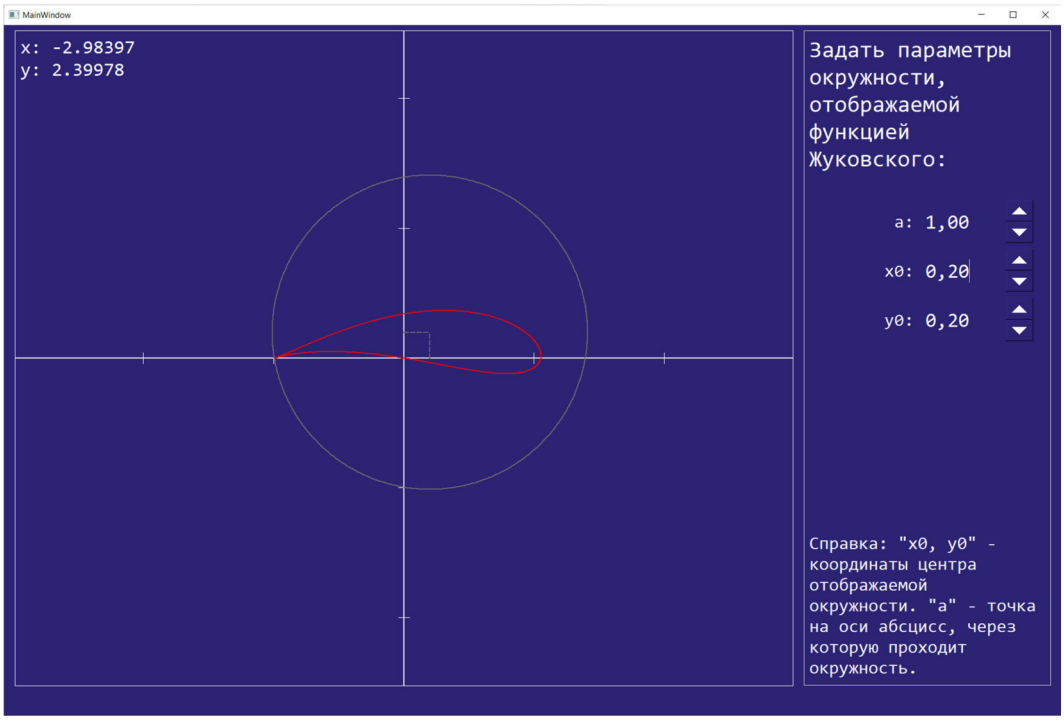


Рисунок 6 — Профиль крыла при $a=1$ и $O_2(0.2;0.2)$

Список литературы

1. https://gitfront.io/r/GreenSubstance/91acbf827eba0984910d06ef5f82f82bcc28283e/Joukowski-Airfoil/. Последнее обращение 13.10.2021.
2. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. - М.: Наука. 1970. - 304 с.
3. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука. 1966. - 388с.
4. Богданова С.Б. Основы теории конформных отображений с примерами решения задач / С.Б.Богданова, С.О.Гладков. - М.: Принтика. 2020. - 100 с.
5. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Наука. 1988. - 733 с.

УДК 510.23+517.925

Борисова Людмила Робертовна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент департамента математики,
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
Россия, г. Москва

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ НА ПЕРВОМ КУРСЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ MOODLE

Аннотация. *В статье представлена актуальная проблема преподавания математики с учетом использования современных компьютерных обучающих систем. Рассматривается проблема организации самостоятельной работы и контроля знаний студентов с учетом наличия в открытом доступе (в интернете) большого количества ресурсов, позволяющих в режиме online получить ответ на контрольное задание, а, зачастую, и подробное решение, что приводит к отсутствую мотивации к получению знаний. Рассматривается проблема разнообразия тестовой базы и приводятся конкретные примеры генерации большого числа однотипных заданий для получения каждым студентом индивидуального задания при самостоятельном выполнении заданий, с использованием компьютерной обучающей системы MOODLE.*

Ключевые слова: дистанционное обучение; генерация; гиперссылка.

Borisova Lyudmila Robertovna
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,
Associate Professor at the Department of Mathematics,
Financial University under the Government of the Russian Federation,
Russia, Moscow

SOME ASPECTS OF TEACHING MATHEMATICS IN THE FIRST COURSE USING A COMPUTER TRAINING SYSTEM MOODLE

Abstract. *The article presents the actual problem of teaching mathematics, taking into account the use of modern computer training systems.*

The problem of organizing independent work and control of students' knowledge is considered, taking into account the availability of a large number of resources in the open access (on the Internet), allowing online to receive an answer to a control task, and, often, a detailed solution, which leads to a lack of motivation to obtain knowledge. The problem of the diversity of the test base is considered and specific examples of the generation of a large number of tasks of the same type are given for each student to receive an individual task when completing tasks independently, using the MOODLE computer training system.

Keywords: *distance learning; generation; hyperlink.*

Качественное обучение математике в Финансовом университете при Правительстве РФ в 2020-2021 годах было затруднено из-за пандемии новой инфекции, приведшей к вынужденному онлайн обучению практически весь минувший учебный год, так как во многих группах студенты болели коронавирусом, вследствие чего вся группа была вынуждена учиться дистанционно.

В целом качественное обучение и объективный промежуточный контроль для полностью онлайн образования являются весьма проблематичными [1] и требуют от преподавателя больших временных и трудовых затрат: предварительного наполнения курса на применяемой образовательной платформе, подготовка и проверка домашних заданий после каждого занятия, проведение большого числа консультаций, тщательного анализа наиболее часто встречающихся ошибок и поиск путей их устранения. Преподаватели ощущают проблемы, связанные с изменением учебной нагрузки, возрастанием объёма предварительной работы, а также угрозу исключения из учебного процесса [2]. В целом роль преподавателя меняется, на передний план выходит освоение преподавателем новых электронных ресурсов и технологий, выполнение роли „навигатора“ [3]. Задача преодоления этих трудностей является для нас первоочередной.

В новом учебном 2021-2022 году работа со студентами в Финансовом университете переведена на платформу MOODLE. В институте онлайн образования при Финансовом университете все студенты обучаются дистанционно. Дистанционные группы этого института были переведены на платформу MOODLE в 2020-2021 учебном году.

Система дистанционного образования MOODLE (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment) удобна в качестве образовательной платформы, поскольку не предъявляет особых требо-

ваний ни к программному обеспечению, ни к техническим возможностям пользовательских компьютеров [4]. На этой платформе в идеале можно создать очень удобный курс, где и студенту, и преподавателю предоставлены большие возможности. Преподаватель может удобно структурировать курс, создавая свой педагогический дизайн, начиная от рабочей программы и вплоть до итоговых тестов.

MOODLE обладает рядом достоинств, важных для преподавателя любой дисциплины: 1. Возможность выбора языка интерфейса. 2. Мобильность управления блоками, возможность создания оптимальной структуры в соответствии с конкретными целями и потребностями. 3.Возможность постредактирования модуля после начала занятий в соответствии с результатами обратной связи. 4. Возможность создания календаря событий, позволяющего напомнить студенту о сроках сдачи домашних заданий, а преподавателю – о сроках их проверки. 5. Контроль посещаемости, возможность отслеживания траектории каждого студента, его прогресс в обучении. 6. Возможность постоянной связи преподаватель-студент, студент- студент. 7. Возможность коллективной дискуссии или взаимопомощи в форуме или чате. 8. Возможность использования практически любых форматов для обучающих материалов: Word документов, PDF-файлов, Power Point презентаций и др. 9. Возможность задания последовательности действий, разрешая переход к следующему этапу после выполнения предыдущих заданий. 10. Возможность создания различного типа тестов с автоматическим оцениванием. 11. Возможность создания различного типа систем оценивания.

Компьютерное тестирование как форма самостоятельной работы студентами при изучении математики позволяет студентам лучше понять изучаемую тему, особенно, если тест можно проходить много раз, и в результате тестирования преподаватель увидит лучший результат, а у самого студента появляется желание разобраться в изучаемой теме, понять свои ошибки, допущенные при прошлых попытках сдать тест, и достичь лучших результатов теста, что в конечном итоге повысит его балл. При такой самостоятельной работе рано или поздно количество переходит в качество. Студенты в любое удобное время могут использовать данную форму самоконтроля своих знаний, а преподаватели могут учитывать результаты тестирования при аттестации студентов. Тесты можно использовать для проверки знаний после усвоения студентами одной конкретной изучаемой темы, а можно также повторить весь тест цели-

ком после окончания изучения дисциплины. Это, бесспорно, помогает студенту лучше подготовиться к грядущему экзамену.

Каждый электронный курс строится на модульной основе, где модуль – это готовый учебный продукт, содержащий все, что необходимо для изучения в рамках рабочей программы и средства для контроля знаний. На рис. 1 представлена первая страница учебного курса «Математика» для студентов первого курса направления «Социология». На этой странице представлены только материалы для самостоятельного обучения первой теме дисциплины – комплексным числам. Для самостоятельной работы дома студентам предлагается необходимый теоретический материал в прикрепленном pdf-файле «Комплексные числа». В этом файле рассмотрены основные задания и их подробные решения с ответами, типичные для самостоятельных работ в начале каждого семинара по математике (на 10 минут), для контрольной работы в конце первого семестра и для зачета на последнем семинаре по изучаемой теме.

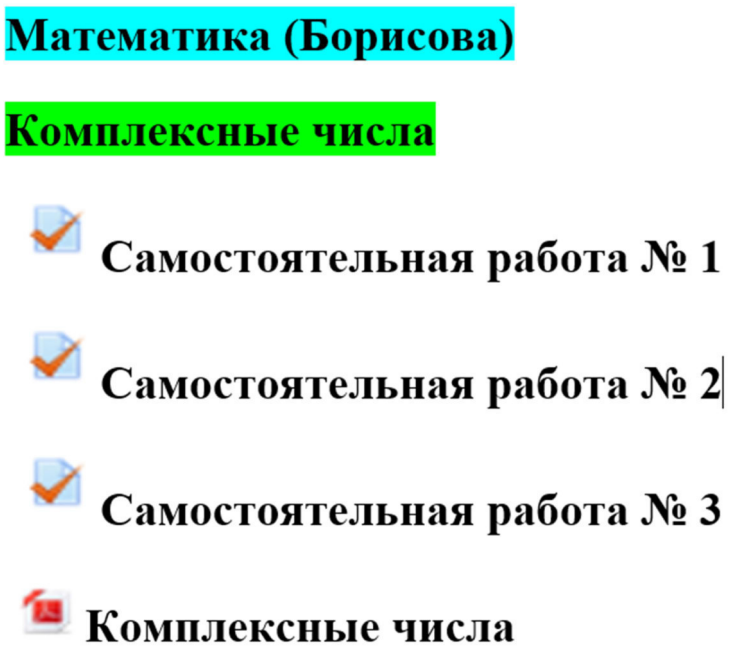


Рисунок 1 – Первая страница учебного курса Борисовой Л.Р. в системе MOODLE

На рис. 2 представлено одно из заданий самостоятельной работы № 1 с уже внесенными ответами.

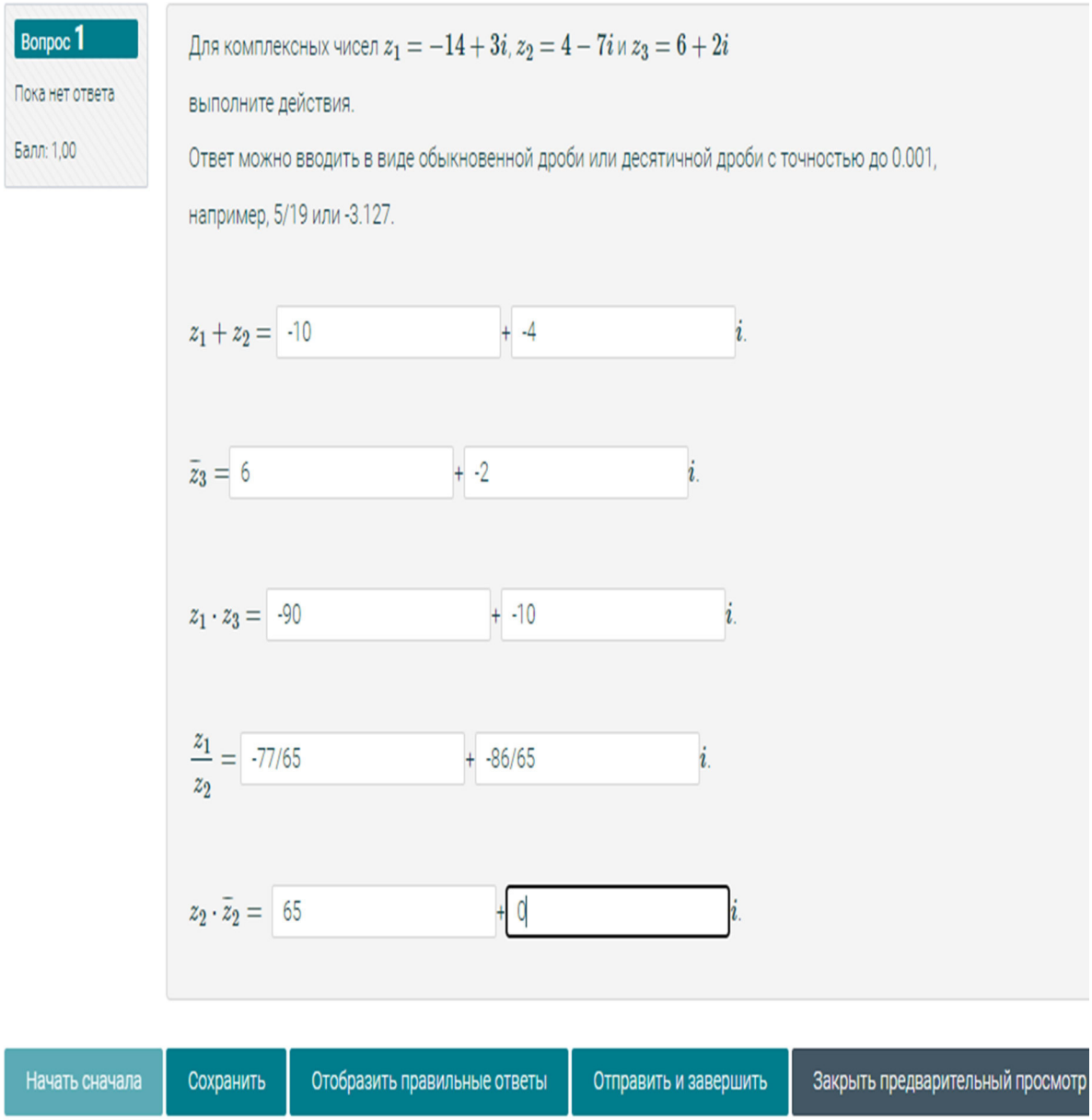


Рисунок 2 – Ответы на задание 1 работы № 1. Слева указывается действительная часть числа, справа – мнимая (без буквы *i*)

После самостоятельного решения и внесения в нужные прямоугольники ответов студент выбирает гиперссылку «Отправить и завершить», изучает правильность своих ответов (Рис.3).

За каждый правильный вопрос задания ставится оценка 0,2. Таким образом, если задание решено верно, то оно оценивается в 1 балл.

Все задания для домашней самостоятельной работы по данной теме были разработаны с использованием генерации заданий, когда в программе параметры, используемые в заданиях, случайно генерируются с использованием датчика случайных чисел и ограничений, указанных автором теста.

Вопрос 1

Верно

Баллов: 1,00 из 1,00

Для комплексных чисел $z_1 = -14 + 3i$, $z_2 = 4 - 7i$ и $z_3 = 6 + 2i$

выполните действия.

Ответ можно вводить в виде обыкновенной дроби или десятичной дроби с точностью до 0.001, например, 5/19 или -3.127.

$z_1 + z_2 =$ -10 + -4 i.

✔

Один из возможных правильных ответов: -10, -4

$\bar{z}_3 =$ 6 + -2 i.

✔

Один из возможных правильных ответов: 6, -2

$z_1 \cdot z_3 =$ -90 + -10 i.

✔

Один из возможных правильных ответов: -90, -10

$\frac{z_1}{z_2} =$ -77/65 + -86/65 i.

✔

Один из возможных правильных ответов: -1.1846153846154, -1.3230769230769

$z_2 \cdot \bar{z}_2 =$ 65 + 0 i.

✔

Один из возможных правильных ответов: 65, 0

Ваш ответ верный.

Рисунок 3 – Верное решение задания

Таким образом, одно задание – это, по меньшей мере, 1000 000 различных примеров для решения, так как все числа, встречаемые в этом задании (-14; 3; 4; -7; 6; 2) – случайные.

В заключении отметим, что в статье перечисляются достоинства компьютерной обучающей системы MOODLE, важных для преподавателя любой дисциплины.

Рассматриваются особенности этой системы для построения онлайн курса преподавателями математики на первом курсе Финансового университета при Правительстве РФ. Проанализированы разные формы контроля самостоятельности выполнения студентами заданий при выполнении контрольных, зачетных и экзаменационных работ на первом курсе. Сделан вывод, что устная часть контроля знаний, когда студент находится лицом к лицу с преподавателем и не имеет возможности пользоваться посторонней помощью, позволяет более адекватно определить уровень его знаний и выставить правильную оценку.

Список литературы

1. Жукова Г.С., Борисова Л.Р., Седых И.Ю. Цифровые трансформации в современном образовании // Монография пор редакцией Г.С. Жуковой. – М. – Кнорус. – 2021 г. – 198 С.
2. Лобова С.В., Понькина Е. В. Онлайн-курсы: принять нельзя игнорировать. // Высшее образование в России. – 2021. – Т.30. – №1. – С.23-34.
3. Тульчинский Г.Л. Цифровая трансформация образования: вызовы высшей школе // Философские науки. – 2017. – №6. – С. 121–136. (электронный ресурс). http://www.phisci.ru/files/issues/2017/06/RJPS_2017-06_Tulchinskiy.pdf.
4. https://moodle.com.

УДК 37.026.4

Боровикова Валентина Дмитриевна
учитель математики,
МБОУ «Росстанская СОШ» Ливенский р-н, Орловская область,
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет
им. И.С. Тургенева»,
Россия, д. Росстани

НАГЛЯДНОСТЬ КАК ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ОБУЧЕНИЯ

Аннотация. *Работа посвящена применению наглядности в учебном процессе как главному дидактическому принципу обучения. Описаны дидактические исследования таких известных педагогов как Л.В. Занков, В.Г. Болтянский, С.Г. Шаповаленко и Л.П. Прессман. Сделаны выводы о целесообразности применения наглядности на различных этапах уроках и внеурочной деятельности.*

Ключевые слова: *наглядность, обучение, знание, учитель, наглядные пособия.*

Borovikova Valentina Dmitrievna
mathematic teacher,
MBOU "Rosstanskaya secondary school" Livensky district, Oryol region,
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
"Oryol State University named after I.S. Turgenev ",
Russia, village Rosstani

VISIBILITY AS A DIDACTIC PRINCIPLE OF TEACHING

Abstract. *This paper is devoted to the use of visualization in the educational process as the main didactic principle of teaching. The didactic researches of such famous teachers as L.V. Zankov, V.G. Boltyansky, S.G. Shapovalenko and L.P. Pressman are described. Conclusions are made about the expediency of using of visibility at different stages of the lessons and extracurricular activities.*

Keywords: *visualization, learning, knowledge, teacher, visual aids.*

Дидактика – это раздел педагогической науки, изучающий вопросы и проблемы образования и обучения. Она, как теория образования, определяет принципы, методы, и, самое главное, организацию и содержание учебного процесса. Ведущим направлением дидактики являются принципы обучения, определяющиеся целями воспитания и отражающие главные закономерности педагогического процесса.

Одним из центральных принципов в дидактике является принцип наглядности. Этот принцип показывает неизбежность использования органов чувств на каждом этапе обучения. С целью формирования навыков, умений, знаний предполагается формирование наглядных представлений. На всех этапах учебного процесса используется принцип наглядности, который необходимо применять в различных дисциплинах, и преобразовывать в зависимости от особенностей изучения.

В дидактике в полной мере исследован и разработан раздел, который показывает сущность наглядных методов обучения. Иллюстрации, демонстрации, самостоятельные наблюдения составляют основу наглядных методов обучения. Различают зрительную, слуховую, словесную и предметную наглядность.

Одним из средств умственного развития является – наглядное пособие. Наглядные пособия занимают одно из главных мест в обучении учащегося, и считаются основой в ходе обучения. В современном мире, у учителя есть огромный выбор различных видов наглядных пособий. При этом наглядные средства обучения модернизируются и совершенствуются, становясь наиболее эффективными и удобными для решения задач учащимися, которые перед ними ставит учитель. Условия обучения, которые ставит перед учителем современный мир, вынуждают его не просто использовать наглядные пособия, но и задумываться насколько они помогают в выполнении поставленных задач урока. Наглядные средства как способствуют наилучшему усвоению знаний, так и могут быть нейтральными к процессу усвоения или даже тормозить осмысление теоретического материала.

Результативность учебно-воспитательного процесса во многом зависит от того, в какой мере он наполнен различными средствами обучения и, конечно же, от профессионализма учителя, использующего эти средства. Модернизация содержания образования необратимо требует улучшения методов, форм, средств и приемов обучения.

Разработка средств обучения тесно связана с ведущим педагогическим опытом и развитием техники.

Рациональная организация всей интеллектуальной деятельности учащегося играет большую роль в успехе обучения. Наглядность обучения оказывается одним из важнейших показателей, который влияет на характер и уровень усвоения учебного материала.

В учебном процессе очень важно, чтобы слово учителя всегда сочеталось с использованием средств наглядности, так как они обеспечивают целостное формирование понятия, образа и благоприятно влияют на понимание взаимосвязи жизненных ситуаций и научных знаний, а также на прочное усвоение знаний. Ученики имеют возможность удостовериться в истинности знаний, в реальности процессов и явлений, о которых детям рассказывает учитель, с помощью проведения самостоятельных опытов. И как раз уверенность учащихся в истинности знаний и сведений, которые они получили на уроке, делают эти знания – прочными и осознанными.

Средства наглядности способствуют повышению интереса к знаниям, процесс усвоения знаний делают более легким, способствуют формированию у учеников эмоционально-оценочного отношения к полученным знаниям, а также содействуют поддержке и развитию внимания учащегося.

Профессор Л.В. Занков в своих дидактических исследованиях писал о сочетании средств наглядности со словом преподавателя и о применении наглядности на уроках [1]. Так же в научно-исследовательском институте школьного оборудования проводились исследования, в которых приняли участие В.Г. Болтянский, С.Г. Шаповаленко и Л.П. Прессман [3]. Изучив эти исследования, можно определить основные правила и методы применения средств наглядности на уроке.

Перед тем, как выбрать для урока тот или другой вид наглядности, нужно обдумать место и этап его применения на уроке с учетом его дидактических целей.

В первую очередь, следует обратить внимание на задачи и цели урока и выбирать те наглядные пособия, которые в наибольшей степени отображают существенные моменты исследуемого на уроке явления и помогают учащимся систематизировать знания, выявлять признаки, которые находятся в основе понятия, которое формируется на данном уроке.

В зависимости от учебных задач необходимо правильно выбрать одну из форм комбинаций наглядности и слова учителя. В одной ситуации источником знаний служит слово учителя, а наглядное пособие выполняет функцию управления восприятия учащихся, а в другой ситуации – наоборот, источником знаний может послужить наглядность, сопровождаемая пояснениями учителя.

Слово учителя может учить детей наблюдению, направлять учащихся на понимание, правильное истолкование наблюдения, а наглядные пособия могут использоваться как опора для возникновения связей между явлениями, фактами, которые непонятны при обычном наблюдении [2].

При повторении и систематизации знаний изученного материала основой знания о явлениях, фактах или их связях служит слово учителя, наглядность же реализовывает функцию конкретизации, иллюстрации и подтверждения полученных ранее знаний.

Так же наглядные средства обучения могут быть основой для индивидуальной, самостоятельной работы учащихся. В данном случае учитель дает ученикам задание и задает направление в работе учащихся.

Средства обучения можно применять не только на уроках математики, но и при других формах обучения: факультативы, внеурочная деятельность, элективные курсы, учебные экскурсии, конференции. На уроках математики средства наглядности используются на всех стадиях процесса обучения: объяснение нового материала, формирование умений и навыков, закрепление изученного, проверка уровня усвоения учебного материала, выполнение домашнего задания.

Список литературы

1. Занков Л.В. Избранные педагогические труды. – М.: Педагогика, 1990.
2. Даниленко О.В., Сергеева Т.Е., Сидалинова Г.Б. и др. Методология и методы психолого-педагогических исследований. – Орск: Издательство ОГТИ, 2005.
3. Об активации познавательной деятельности учащихся с помощью аудиовизуальных средств / С.Г. Шаповаленко, Л.П. Прессман; СССР. Акад. пед. наук. Науч.-исслед. ин-т школьного оборудования и техн. средств обучения. – М.; Эгер: [б. и.], 1970.

УДК 372.851

Галкина Анастасия Владимировна
учитель математики СОШ №29 им. Д. Н. Мельникова,
Россия, Орёл

МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Аннотация. *Представленная статья посвящена методике формирования математической культуры в общеобразовательной школе. В статье были рассмотрены различные определения математической культуры. Выделены основные ее элементы: вычислительные навыки, грамотная математическая речь, умение применять в жизни математические знания, творчество и познавательный интерес к предмету. Описаны наиболее эффективные методы формирования математической культуры: устный счет, математические диктанты, ситуационная задача, памятки «Пиши и говори правильно».*

Ключевые слова: *математическая культура, вычислительные навыки, математические знания, творчество и интерес к математике.*

Galkina Anastasia Vladimirovna
A teacher of Mathematics,
School 29,
Russia, Orel

METHODS OF MATHEMATICAL CULTURE'S FORMING AT SCHOOL OF GENERAL EDUCATION

Abstract. *The given article is devoted to the methods of mathematical culture's forming at school of general education. In the article different definitions of mathematical culture were examined. Its main elements were marked out: calculating skills, competent mathematical speech, ability to use mathematical knowledge in life, creative work and cognitive interest to the subject. The most effective methods of mathematical culture's forming were described: verbal counting, mathematical dictation, contingency problem, guides «Write and speak correctly».*

Keywords: *mathematical culture, calculating skills, mathematical knowledge, creative work and interest to mathematics.*

Модернизация образования в современном мире заставляет иначе взглянуть на изучение такой дисциплины, как математика. Эта наука становится не только изучаемым предметом, но одним из главнейших факторов развития личности учащегося. В связи с этим принимается во внимание ряд нерешенных задач, одна из основных - переход от репродуктивного метода исследования базовых понятий к развитию математической культуры [7].

На сегодняшний день, уровень развития науки и техники просит освоения глубоких и прочных математических знаний. Математические расчёты, которые основаны на использовании алгоритмов основных математических действий, являются составной частью трудовой деятельности рабочего, инженера, экономиста и людей других квалификаций. А для этого у каждого из нас еще со школьной скамьи обязана быть сформирована математическая культура. Вот поэтому и в двадцать первом веке, процесс формирования математической культуры учащихся остается актуальным.

Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) среднего (полного) общего образования выдвигает следующие требования к предметным результатам по математике: «Сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира; сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях; владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач» [6].

Поэтому школьное образование должно в наибольшей степени способствовать формированию и развитию математической культуры учащихся, как в рамках учебного процесса, так и во внеурочной деятельности.

Анализ психолого-педагогической литературы позволил прийти к выводу о том, что по сегодняшний день нет единого подхода к определению сущности и содержания понятия «математическая культура». Его рассматривают:

- как целостное образование качества личности [4];
- как систему математических знаний, умений и навыков [4];

- как составляющую часть общей культуры [4];
- как набор объектов общей культуры, присваиваемых человеком [4].

Например, Шихалиев Х. Ш., раскрывает понятие «математическая культура» следующим образом:

- уровень, степень развития человечества в его умениях пользоваться математическим языком как для общения с людьми, так и для описания и познания окружающей действительности [8];
- совокупность достижений человечества в его умениях пользоваться математическим языком в качестве средства как для общения с людьми, так и для описания и познания окружающей действительности [8];
- осознанное пользование математическим языком как для общения с людьми, так и для описания и познания окружающей действительности [8].

Е.Н. Рассоха определяет понятие математической культуры как «совокупность следующих компонентов: система математических знаний и умений, математическое мышление, математический язык, математическое самообразование и творческое саморазвитие» [5].

Г.М. Булдык вводит понятие математической культуры как «сформированной системы математических знаний и навыков и умения использовать их в разных условиях профессиональной деятельности в соответствии с целями и задачами» [1].

Т.Г. Захарова, кроме математического знания, обращает внимание на четыре основных компонента, расширяющих знание математики до уровня математической культуры [3]:

- наличие математического мышления [3];
- выделение человеком математической ситуации из всего разнообразия ситуаций в окружающем мире [3];
- использование всего разнообразия средств математики [3];
- готовность к творческому саморазвитию, рефлексия [3].

Л.В. Воронина в своем исследовании обращает внимание, что математическая культура личности в каждый период ее жизни имеет свои особенности, связанные с возрастными и индивидуальными возможностями детей [2]. Под формированием математической культуры автор предлагает понимать систематический и целенаправленный процесс присвоения личностью математической культуры, необ-

ходимой ему для успешной социальной адаптации к процессам информатизации общества [2].

На основании вышеизложенного делаем вывод: *математическая культура личности* - это система приобретенных человеком математических знаний, форм и методов математической деятельности, а также способы их присвоения, которые совершенствуются в социокультурном процессе, влияют на структуру и внутренний мир личности человека [2].

При анализе педагогической и методической литературы и работе с учащимися средней и основной школы нами были выделены следующие элементы математической культуры:

- *Вычислительные навыки* [7].

Способность к выполнению математических операций – фундаментальный навык, без которого невозможно жить в современном обществе, получать образование, освоить ту или иную профессию. Необходимость формирования данной способности представляется актуальным в связи с многочисленными вычислительными ошибками при выполнении всероссийских проверочных работ, ОГЭ и ЕГЭ.

- *Грамотная математическая речь* [7].

Мыслительные процессы нередко переплетены с человеческой речью, по этой причине формирование этого элемента математической культуры имеет важнейшее значение. Почти многие школьники заучивают определения «назубок», не зная их значения, потому впоследствии и не могут применить их при решении задач, в доказательстве теорем, поскольку для связывания этапов доказательства и решения не хватает лингвистических схем и математической лексики. Принимая во внимание данный факт, формирование грамотной математической речь является одним из основных этапом формирования математической культуры.

- *Умение применять в жизни математические знания* [7].

Такой компонент математической культуры как умение переносить полученные знания в новые ситуации отражен в Федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования (ФГОС ООО) [8]. Парадигма деятельности этого стандарта подразумевает вовлечение учащихся в учебную деятельность с упором на понимание «смысла» и внедрение знаний в новые ситуации [8]. В примерной программе основного общего образования по дисциплине «математика», среди требований к результатам обучения

обозначено и умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающем мире [8].

- *Творчество* [7].

Данный компонент охарактеризовывает личность учащегося с точки зрения его активности, трудоспособности и отражает готовность к творчеству. Творческая деятельность учащихся становится возможной только в рамках продуктивной модели обучения, так как, воссоздавая готовые знания и деятельность, невозможно обеспечить необходимое развитие творческого потенциала личности. Для усвоения содержания опыта творческой деятельности, школьникам приходится сталкиваться с новыми проблемами, которые необходимо решить в процессе исследования. Следовательно, данный элемент помогает сформировать математическую культуру.

- *Познавательный интерес к предмету* [7].

Наиболее острые проблемы в образовании и воспитания на сегодняшний момент связаны с демотивацией большинства учащихся. Поэтому одна из центральных задач современной школы - является формирование у учащихся устойчивого познавательного интереса к предмету, такой интерес, который бы вдохновлял их к упорной, систематической учебной работе.

Так как же сформировать у учащихся математическую культуру?

Опишем наиболее эффективные методы формирования математической культуры, использованные нами при обучении математике.

В основной школе почти каждый урок математики начинается с ***устного счета***. Данный метод хорошо формирует сразу несколько элементов математической культуры (вычислительные навыки, грамотную математическую речь и умение применять в жизни математические знания).

Приведем примеры устных вычислений для 8 класса:

1. Выполните возведение в квадрат:

a) $(\frac{3}{x}+x)^2$;

b) $(\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y^2})^2$;

c) $(\frac{1}{2m^3}-m^3)^2$.

Сначала учащимся дается шанс подумать, как быстрее и легче выполнить это упражнение. Но если ответа не последует, можно дать

подсказку – воспользоваться формулами квадрата разности и квадрата суммы.

Данное упражнение формирует вычислительные навыки, а заодно и умения применять теоретический материал (формулы сокращенного умножения) на практике.

2. Прочитайте числовое выражение и найдите его значение:

a) $(0,7-0,2)^3$;

b) $(0,8+0,7)^2$;

c) (4,5−3,2)·(4,5+3,2).

Данное упражнение формирует сразу несколько элементов математической культуры – вычислительные навыки и за счет чтения выражений - грамотную математическую речь.

Для того чтобы, в процессе формирования математической культуры, был задействован весь класс, полезно использовать - ***математический диктант***.

Математический диктант - одна из испытанных временем форм активной работы школьников. Именно он включает в работу всех учащихся и вырабатывает определенный темп работы.

Математический диктант для 8 класса по теме «Чтение числовых выражений»:

1. Запишите числовое выражение на математическом языке:

a) Сумма *5,2a; 2,6d* и *7,4a*;

b) Разность *5,8a; 2,6d* и *2,4a*;

c) Произведение *30a* и *1,5d.*

2. Запишите и упростите: произведение разности *4a* и *15d* на их сумму.

Здесь математический диктант формирует вычислительные навыки и грамотную математическую речь.

Одним из эффективных методов для формирования математической культуры служит - решение ***ситуационных задач***. Данный метод формирует все элементы математической культуры. За счет устного счета формируется вычислительный навык, так как данные задачи выходят из бытовых условий – формируются умения применять в жизни математические знания и познавательный интерес к предмету, а из-за того, что в данных задач учащиеся часто оперируют математическими терминами – формируется грамотная математическая речь. Также учащимся можно предложить творческое задание –

самому составить ситуационную задачу на примере своей семьи и решить ее (например, составление сметы: «Дом моей мечты»).

Разбор таких задач очень важен, так как на ОГЭ с 2020 года ввели аналог ситуационных задач № 1-5, в которых, к сожалению, учащиеся больше всего допускают разнообразные ошибки.

Приведем пример такой задачи:

1. В семье, состоящей из пяти человек, заболели ОРВИ (повысилась температура) мама и два ребенка. Нужно купить лекарства, для того, чтобы вылечить указанных ранее членов семьи, но лечение необходимо проводить всем, так у других членов семьи начинают проявляться признаки болезни. Для того чтобы купить выписанное врачом лекарство, надо прочитать инструкцию (Таблица 1 – Цена лекарств, таблица 2 – Инструкция для таблеток и суппозиторий, таблица 3 – Инструкция для суспензий). Вес всех членов семьи: мама - 55,9 кг, папа - 85,3 кг, бабушка - 73,6 кг, старший ребенок (7 лет) - 26,5 кг, а младший (1,5 года) - 9,3 кг.

a) Выберите самый выгодный вариант покупки лекарств на всю семью, если курс лечения составит 5 дней;
b) Какую сумму потратит семья на покупку лекарства, если младший ребенок откажется пить таблетки и суспензии? Курс лечения 3 дня.
c) Какую сумму потратит семья на покупку лекарства, если старший ребенок откажется пить таблетки? Курс лечения 2 дня.
d) Выберите самый выгодный вариант покупки лекарств на всю семью, если курс лечения составит 4 дня, но при покупке двух упаковок таблеток на вторую 13% скидки.

Таблица 1 – Цена лекарств

Ибупрофен	Табл, 400 мг	30 шт.	102 руб.
Ибупрофен	Табл, 200 мг	50 шт.	57 руб.
Ибупрофен	Суспензия	100 мл	168 руб.
Ибупрофен для детей	Суппозитории, 60 мг	10 шт	145 руб.

Таблица 2 – Инструкция для таблеток и суппозиторий

Возраст пациента	Таблетка, 200 мг	Суппозитории, 60 мг
Дети в возрасте 3-9 месяцев (5,5 кг-8,0 кг)		по 1 суппозиторию (60 мг) 3 раза в течение 24 ч через 6-8 ч, не более 180 мг/сутки
Дети в возрасте 9 месяцев - 2 года (8,0 кг-12,5 кг):		по 1 суппозиторию (60 мг) 4 раза в течение 24 ч через 6 часов, не более 240 мг/сутки
6-12 лет при массе тела более 20 кг	200 мг до 3 раза в сутки.	
Старше 12 лет и взрослые	по 200 мг 4 раза в день.	

Таблица 3 – Инструкция для суспензий

Возраст пациента	Мл
3-6 месяцев (вес ребенка более 5 кг)	2,5 мл (50 мг) 3 раза в течение 24 часов, не более 7,5 мл (150 мг) в сутки.
6-12 месяцев (вес ребенка 6-10 кг)	2,5 мл (50 мг) 3-4 раза в течение 24 часов, не более 10 мл (200 мг) в сутки.
1-3 года (вес ребенка 10-15 кг)	5 мл (100 мг) 3 раза в течение 24 часов, не более 15 мл (300 мг) в сутки.
4-6 лет (вес ребенка 15-20 кг)	7,5 мл (150 мг) 3-4 раза в течение 24 часов, не более 22,5 мл (450 мг) в сутки.
7-9 лет (вес ребенка 21-29 кг)	10 мл (200 мг) 3 раза в течение 24 часов, не более 30 мл (600 мг) в сутки.
10-12 лет (вес ребенка 30-40 кг)	15 мл (300 мг) 3 раза в течение 24 часов, не более 45 мл (900 мг) в сутки.

Для формирования таких элементов, как «Творчество» и «Познавательной интерес к предмету»», на практике нами использовались следующие методы:

- ведение словарей, использование памяток, например, «Пиши и говори правильно» (указывается написание и ударение в математических терминах) (Таблица 4 – Пиши и говори правильно), придумы-

вание историй, сказок, написание стихотворений с использованием математических терминов;

- подготовка рефератов, докладов, проектов, составление презентаций по различным вопросам математики, математические стенгазеты, творческие проекты;
- открытые уроки;
- конкурсы на лучшее оформление математических работ;
- оригинальные домашние задания;
- участие школьников в различных олимпиадах.

Примеры:

Таблица 4 – Пиши и говори правильно

4x=120	Четыре икс равны ста двадцати
x – 18 = 20	Разность икс и восемнадцати равна двадцати
0,07y=-2,8	Ноль целых семь сотых игрек равны минус двум целым восьми десятым

Математические стенгазеты на темы: «Ребусы в картинках», «Математика в стихах», «Интересные факты о великих математиках» и т.д.

Формирование всех элементов математической культуры должно осуществляться через разнообразные формы и методы урочной и внеурочной деятельности.

Заметим, что математическая культура – понятие многозначное со сложной структурой, потому и удовлетворяет принципу системности. Системность математической культуры означает, что она состоит из большого количества элементов различного уровня сложности и упорядоченности.

Кроме того, выявленные элементы дополняют друг друга, и, за частую, методы формирования одних, формируют другие элементы. Поэтому элементы математической культуры вступают в интегративную взаимосвязь, которая обеспечивает целостность и системность.

Процесс формирования математической культуры очень трудоемкий и должен осуществляться систематически. Каждый урок, внеклассное занятие, классная или домашняя работы по математике должны формировать основные элементы математической культуры, а для этого важно начинать их формирование с младших классов и продолжать вплоть до выпуска учащихся из учебных заведений.

Список литературы

1. Булдык, Г.М. Формирование математической культуры экономиста в вузе: монография / Г.М. Булдык. – Минск, 1997.
2. Воронина, Л.В. Математическая культура личности / Л.В. Воронина // Педагогическое образование в России. – 2012. - №3. – С. 60-67.
3. Захарова, Т.Г. Формирование математической культуры в условиях профессиональной подготовки студентов вуза: монография / Т.Г. Захарова. – М.: РГБ, 2005.
4. Насыпаная, В. А. Математическая культура учащихся: основные характеристики, функции и компоненты / В. А. Насыпаная. — Текст : непосредственный // Аспекты и тенденции педагогической науки : материалы II Междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, июль 2017 г.). — Санкт-Петербург : Свое издательство, 2017. — С. 42-45. — URL: https://moluch.ru/conf/ped/archive/216/12743/.
5. Рассоха, Е.Н. Развитие математической культуры студентов технических специальностей : дис. ... канд. пед. наук / Е.Н. Рассоха. - Оренбург, 2005. – 157 с.
6. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования : утвержден приказом Минобрнауки России от 17 мая 2012 г. № 413. - URL: http://минобрнауки.рф/ документы/2365.
7. Формирование элементов математической культуры на уроках математики. - URL: https://www.uchportal.ru/publ/23-1-0-5641.
8. Шихалиев, Х.Ш. Несколько слов об основах формирования математической культуры школьников / Х.Ш. Шихалиев // Модернизация системы непрерывного образования. Материалы VI Международной научно-практической конференции. Дагестанский государственный педагогический университет / под ред. Т.Г. Везирова. – 2014. С. 542 – 547.

УДК 372.851

Глухова Ирина Александровна
студент,
ФГБОУ ВО «ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского»,
Россия, Липецк

Дорохина Алина Сергеевна
студент,
ФГБОУ ВО «ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского»,
Россия, Липецк

Фомина Татьяна Петровна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математики и физики,
ФГБОУ ВО «ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского»,
Россия, Липецк

ТЕХНОЛОГИЯ «ПЕРЕВЕРНУТЫЙ КЛАСС» В ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКЕ

Аннотация. *Изменения, происходящие во всех сферах жизни, бросают вызов системе образования, требуя от нее «шагать в ногу со временем». Для ответа на этот вызов нужно понять, каким требованиям должны соответствовать участники образовательной деятельности — и те, кто учит, и те, кто учится. Эффективной реализации этих требований способствует внедрение модели «Перевернутый класс» в образовательную деятельность. «Перевернутый класс» – это педагогический подход, который фактически означает, что действия, которые традиционно проводились в учебной аудитории, теперь проводятся вне классной комнаты и наоборот. «Перевернутый» класс делает учащихся более активными участниками образовательного процесса по сравнению с традиционными моделями обучения. В статье рассмотрены сущность, достоинства и недостатки педагогической технологии «перевернутый класс», особенности ее применения в обучении школьников математике.*

Ключевые слова: *школьное образование, активное обучение, «перевернутый класс», «перевернутое образование»*

Glukhova Irina Aleksandrovna
student,

FGBOU VO "LSPU named after P.P. Semenov-Tyan-Shansky",
Russia, Lipetsk

Dorokhina Alina Sergeevna
student,
FGBOU VO "LSPU named after P.P. Semenov-Tyan-Shansky",
Russia, Lipetsk

Fomina Tatiana Petrovna
candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Mathematics and Physics,
FGBOU VO "LSPU named after P.P. Semenov-Tyan-Shansky",
Russia, Lipetsk

TECHNOLOGY "INVERTED CLASSROOM" IN TEACHING MATHEMATICS TO SCHOOLCHILDREN

Abstract. *The changes taking place in all spheres of life challenge the education system, requiring it to "keep up with the times." To answer this challenge, it is necessary to understand what requirements should be met by participants in educational activities — both those who teach and those who study. The implementation of the "Inverted Classroom" model in educational activities contributes to the effective implementation of these requirements. An "inverted classroom" is a pedagogical approach that actually means that actions that were traditionally carried out in the classroom are now carried out outside the classroom and vice versa. The "inverted" classroom makes students more active participants in the educational process compared to traditional learning models. The article considers the essence, advantages and disadvantages of the pedagogical technology "inverted classroom", the features of its application in teaching mathematics to schoolchildren.*

Keywords: *school education, active learning, "inverted classroom", "inverted education".*

Наше понимание о традиционной школе – это объяснение новой темы в классе на уроке и выполнение домашней работы дома. А что если представить наоборот, предоставить ребенку возможность самостоятельно без помощи наставника познакомиться с новой темой, а уже в школе отработать теорию на практике вместе с педагогом.

В 1993 г. А. Кинг в своем исследовании [1] акцентирует внимание на важности использования времени в классе для отработки ма-

териала, а не для передачи информации. А в 2016 г. один из создателей «перевернутого» обучения Д. Бергманн, запустил «Глобальную инициативу по «перевернутому» обучению» возглавляемую Эррол Сент-Клер Смит, директором по глобальному развитию.

Зачем нужен «перевернутый класс»? Для этого рассмотрим несколько недостатков традиционного обучения.

Первый из них заключается в том, что если ученик на уроке не понял что-то из новой темы, ему сложно будет наверстать. Мы все знаем, как многие дети не успевают за быстрым темпом учителя, как много времени уходит у педагога на организационные вопросы и разбор по поводу дисциплины из-за чего ребенок в полном объеме не усваивает новый материал. А дома ученикам приходится обращаться за помощью к родителям, репетиторам, чтобы опять понять суть новой темы и выполнить домашнюю работу.

Решение, которое предлагает перевёрнутый класс: теория подаётся до урока, и ученик может потратить на её изучение столько времени, сколько потребуется – хоть пять раз пересмотреть лекцию и сделать несколько конспектов. Так усваивать материал легче.

Второй недостаток нам указывает на то, что времени на практику просто не хватает, а она важнее, чем теория. Так, например, при решении квадратных уравнений, у ученика, который силён только в теории, могут возникнуть сложности в нахождении дискриминанта, нежели у того, который несколько раз потренировался в вычислении корней.

А в методике перевернутого класса именно практика идет на первом месте. Дети, приходя в школу, начинают урок сразу с решения задач, а не с объяснения учителем нового материала. Тем самым у каждого ребенка не должно возникнуть вопросов при решении домашнего задания. В итоге это приведет к тому, что ученик сможет применять знания на практике.

Мы часто слышим от школьников такие фразы, как «Мне надоело ходить в школу», «Мне там скучно», «Каждый день одно и то же». Все это говорит о следующем недостатке традиционного обучения: занятия в школе построены часто однообразно. Учитель на уроке объяснил материал, задал домашнюю работу. Школьник пришел домой, открыл учебник, начал решать задания, но появились вопросы, а кому их задать – не понятно. Поскольку на следующем уроке учитель начинает объяснять новый материал.

В условиях данной технологии все происходит иначе. Учитель предоставляет ребятам новый материал в форме видеоматериалов, параграфов, статей, ссылок на учебники. Некоторые педагоги запи-

сывают собственные видеолекции, которые высылают своим ученикам, чтобы те изучили материал дома и пришли на занятия с изученной темой. Таким образом, на уроке появляется больше времени на решение задач, что способствует уменьшению объёма вопросов при выполнении домашней работы.

Часто педагоги придерживаются мнения о том, что дети должны самостоятельно искать информацию по новому материалу, тем самым в полной мере не раскрывают смысл свежей темы.

Во всем мире есть плюсы и минусы. Любое, будь это какой-то предмет, какая-то вещь или какая-то методика, вызывает у нас неординарное мнение, может нам как нравиться, так и не вызывать положительных эмоций. Так и предложенная нами тема для обсуждения имеет свои преимущества и недостатки.

Первым преимуществом является то, что школьники изучают материал в удобном для них темпе. Они могут в любой момент остановить лекцию или перемотать. Ребенок затратит на изучении темы столько времени, сколько ему нужно для хорошего усвоения материала.

Следующим плюсом можно считать то, что изучение материала развивает у школьника самостоятельность и учение доходит до того момента, чтобы стало понятно. Ребенок не ждёт, когда ему все предоставят «на блюдце», он сам ищет ответы на свои вопросы.

Также плюсом является то, что если по каким-то причинам был пропущен урок, ты все равно получишь знания, изучив урок дома.

Еще один плюс заключается в том, что если в процессе обучения было что-то забыто из пройденного, всегда можно включить лекцию и прослушать ее заново, заполнив пропуски в знаниях.

К минусам можно отнести то, что школьники уже привыкли к такой фразе, как «задано устно – значит ничего не задано». А методика перевёрнутого класса как раз и заключает в себе сущность того, что домашнее задание – изучение нового материала – задается устно. Если ученика заранее не познакомить с концепцией данного обучения, то ему сложно будет перестроиться.

Также минусом является то, что нельзя лектору в любой момент задать вопрос по новому материалу.

Еще один минус заключается в том, что к уроку действительно надо готовиться. Не получится так, что пришел в школу и тебе все заново объяснят. А, как всем известно, современные дети пришли домой, прочитали один раз параграф, закрыли книжку и сели играть в телефон или компьютер. При методике перевёрнутого класса так уже не получится.

Рассмотрим пример подготовки и проведения одного урока математики «Простые и составные числа» с использованием технологии перевернутого обучения. Проведение такого урока требует большой подготовки не только учителя, но и учеников, их необходимо проинструктировать на тему правильного использования онлайн-ресурсов для самостоятельного изучения теории. Что касается педагога, ему необходимо найти или снять видеоурок, приготовить презентацию. А уже в школе останется проверить усвоение материала на начальном этапе и закрепить на практике. Время практических упражнений, таким образом, увеличится по сравнению с традиционным уроком. В первую очередь, стоит ответить на вопросы учащихся, возникшие в ходе выполнения домашнего задания. Нескольких учеников попросить сформулировать определения простых и составных чисел, уточнить различие между ними, объяснить способ доказательства того, что число составное. Далее можно провести небольшой тест. Например,

1. Является ли число 48 простым?
   1) да
   2) нет
2. Какое число имеет разложение $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13$?
   1) 200
   2) 65
   3) 260
   4) 130
3. Укажите строку, в которой записаны все простые числа, заключённые между числами 1 и 10.
   1) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
   2) 3, 5, 7, 9
   3) 1, 2, 3, 7, 9, 10
   4) 2, 3, 5, 7
4. Простыми делителями числа 42 являются числа:
   1) 2, 6, 7
   2) 2, 3, 5, 14
   3) 2, 3, 7
   4) 21,7,3,2
5. Укажите верно выполненное разложение числа на простые множители.
   1) $100 = 2 \cdot 2 \cdot 25$
   2) $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
   3) $400 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7$
   4) $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Ответы по ходу работы необходимо проанализировать. Желательно, чтобы сами учащиеся отстаивали свою точку зрения. Уже после проверки школьников изученного самостоятельно материала следует выполнить упражнения из учебника, в это время учитель оказывает индивидуальную помощь ученикам, испытывающим затруднения, отвечает на вопросы, координирует деятельность учащихся.

Учитывая требования общества к качеству математического образования, перевернутое обучение действительно решает задачу создания на уроке ситуации открытого общения, позволяет школьнику проявить инициативу, самостоятельность, помогает при анализе и оценивании новых знаний, т.е. помогает сформировать ключевые компетенции.

Список литературы

1. Басалгина, Т.Ю. Технология «Перевернутый класс» при изучении специальных дисциплин / Т.Ю. Басалгина // Профессиональное образование: проблемы и перспективы развития : материалы V краевой заочной научно-практической конференции, Пермь, 17 окт. 2014 г. / Пермский гос. проф. пед. колледж; сост.: Е.М. Калашникова, Н.В. Бочкарева, М.И. Макаренко. – С. 173–175.
2. King, Alison. From sage on the stage to guide on the side. – 1993. pp. 30–35.
3. Кузнецова Е.В. Педагогическая технология «перевернутый класс» в подготовке студентов-математиков / Е.В. Кузнецова, Т.П. Фомина // Моделирование и конструирование в образовательной среде. Сборник материалов VI Всероссийской (с международным участием) научно-практической, методологической конференции для научно-педагогического сообщества. Под редакцией И.А. Артемьева, В.О. Белевцовой, И.П. Родионовой, М.М. Сабитовой. – Москва, 2021. – С. 345-348.
4. Курвитс, М. Модель «Перевернутый класс». Что переворачиваем? / М. Курвитс, Ю. Курвитс // Управление школой. – 2014. – № 7/8. – С. 38–40.

УДК 378.147:004.9

Закалкина Елена Вячеславовна
кандидат экономических наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Еремеева Наталья Петровна
кандидат экономических наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Рогозянская Елена Александровна
кандидат экономических наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЛАТФОРМЫ OPEN EDX ДЛЯ СОЗДАНИЯ ОНЛАЙН-КУРСА

Аннотация. *В настоящее время процесс образования претерпевает существенные изменения в виду очевидной необходимости более широкого использования информационно-коммуника-ционных технологий на всех этапах обучения. Переход от форм принятых в традиционном обучении к более гибким и мобильным осуществляется за счет внедрения в учебный процесс онлайн-курсов, которые университеты создают и размещают на образовательных платформах.*

Ключевые слова*: онлайн-курс, дистанционное обучение, образовательные платформы, платформа Open edX.*

Zakalkina Elena Vyacheslavovna
Candidate of Economical Sciences, Associate professor,
Orel State University,
Russia, Orel

Eremeeva Nataliya Petrovna
Candidate of Economical Sciences, Associate professor,
Orel State University,
Russia, Orel

Rogozyanskaya Elena Aleksandrovna
Candidate of Economical Sciences, Associate professor,
Orel State University,
Russia, Orel

USING THE OPEN EDX PLATFORM TO CREATE AN ONLINE COURSE

Abstract. *Nowadays the education process is undergoing significant changes due to the obvious need for greater use of informational and communicative technologies at all stages of education. The transition from the forms accepted in traditional education to more flexible and mobile ones is carried out through the introduction of online-courses in the educational process, which universities create and place on educational platforms.*

Keywords: *online-course, distance learning, educational platforms, Open edX platform.*

Актуальность использования онлайн-курсов в условиях пандемии заключается в том, что отсутствие очного общения между обучающимися и преподавателями и способствуют предупреждению распространения болезни и обеспечивает безопасность учебного процесса.

В связи со сложившейся эпидемиологической ситуацией и угрозой распространения коронавирусной инфекции с 16 марта 2020 года российских студентов перевели на дистанционное обучение. В этих условиях все возможные ресурсы университетов были использованы для реализации учебного процесса посредством Интернет.

Одной из наиболее популярных и удобных средств для создания, предоставления и анализа онлайн-курсов является платформа Open edX. Это технологическая веб-платформа с открытым исходным, кодом. В ее основе лежит программное обеспечение, на котором построено множество образовательных интернет-сайтов.

Архитектура Open edX включает платформу edX, которая, в свою очередь, использует приложения для управления обучением (Learning Management System, LMS) и разработки курса (Studio). Также OpenedX содержит несколько автономных веб-сервисов, являющимися независимо развернутыми приложениями (independently deployed applications, IDA). LMS, Studio и дополнительные компонен-

ты представляют собой серверную часть. Код платформы Open edX написан на Python, для веб-приложений применялся Django. Для CSS используются фреймворки Sass и Bourbon. Для обработки HTTP-запросов применяются веб-сервера nginx и gunicorn. Клиентская часть представляет собой веб-браузер и не требует установки дополнительного ПО.

К основным компонентам OpenedX относятся LMS, Studio, Обсуждения, Аналитика, Фоновые службы, Поиск. Другие компоненты решают различные внутренние задачи (форумы, написанные с помощью языка ruby, ORA –open response assessor – компонент для оценки эссе, реализующий некоторые идеи машинного обучения) [15].

LMS является частью проекта Open edX, которую используют все пользователи системы. LMS предоставляет учащимся доступ к учебному контенту, а также показывает текущий прогресс в изучении курса. Это система управления обучением, где учащиеся регистрируются на сайте, чтобы зарегистрироваться и получить доступ к своим курсам. Для членов команд онлайн-курсов LMS включает в себя панель управления преподавателя, с информацией о количестве зарегистрированных на курсе, сроках сдачи, оценках отдельных учащихся, контрольных испытаниях. Преподаватели также используют Open edX LMS для доступа к некоторым инструментам управления, таким как статистика курсов, ручная регистрация, управление учебниками, отчеты о курсах, настройка сертификатов, электронная почта и многое другое.

LMS использует несколько хранилищ данных. Курсы хранятся в MongoDB, данные учащихся хранятся в MySQL. Собственного хранилища видео нет, для его размещения используется YouTube или AmazonS3.

По мере того, как учащиеся проходят обучение, их действия отражаются в конвейере аналитики для сбора, анализа и составления отчетов. Серверный код Django в LMS использует Mako для генерации шаблонов внешнего интерфейса. Код на стороне браузера написан в основном на JavaScript.

Курсы OpenedX состоят из блоков, называемых XBlock. XBlocks – это комплект средств разработки для edX - платформы, написанный на Python 3, с помощью которых можно создать независимые компоненты онлайн-курса. Каждый блок похож на отдельное небольшое веб-приложение. В структуре курса отдельные блоки объединяются в разделы и подразделы, содержимым блока при этом может быть тек-

стовая информация, видео, задача, обсуждение или компонент из библиотек контента, которые можно подключить отдельно. Авторы курса могут встраивать инструменты LTI для интеграции других инструментов обучения в курс Open edX.

Импорт и экспорт курса можно осуществлять посредством OLX (открытый учебный XML), основанный на XML формат для курсов.

Модули, расширяющие возможности Open edX: распределение прав на управление курсами между вузами; расширение возможностей по расчёту оценок за курс; развитие систем аналитики; интегрированный сервис рассылки; механизм единой аутентификации; межуниверситетский каталог курсов; реестр электронных сертификатов; платёжная система; системы прокторинга; видеохостинг.

На платформе Open edX контент структурируется линейным образом, поддерживает видео, текст или другой встраиваемый контент.

Для создания курса и заполнения его содержимого в Open edX используется Studio. Здесь можно организовывать общую структуру курса, создавать разделы, подразделы, отдельные блоки, а также настроить срок, когда тот или иной раздел контента будет опубликован и доступен слушателям. После создания структуры курса в Studio могут быть добавлены задачи, видеоролики и дополнительные ресурсы для обучающихся. Существует возможность изменять расписание курса, определять команду курса, определять критерии оценки результатов, публиковать свой курс и многое другое.

Studio использует ту же аутентификацию, что и LMS (тот же адрес электронной почты и пароль), но только авторы курса (пользователи с определенными разрешениями для одного или нескольких курсов) могут войти в студию. Если ученик случайно войдет в Studio, он будет перенаправлен на домашнюю страницу.

Для хранения курсов используется та же база данных Mongo, которую использует LMS.

Обсуждение курса ведется IDA, называемой Comments (комментарии или форумы). Comments - это один из немногих не-Python-компонентов, написанный на Ruby с использованием фреймворка Sinatra. LMS использует программный интерфейс, предоставляемый службой комментариев, чтобы интегрировать обсуждения в учебный процесс учащихся. Служба комментариев включает в себя процесс уведомлений, который отправляет учащимся уведомления об обновлениях по интересующим темам.

События, описывающие поведение учащихся, фиксируются ана-

литическим конвейером Open edX. События сохраняются в формате JSON в базе данных MySQL. Результаты предоставляются для Insights, специализированной IDA. Инструкторы и администраторы используют её для изучения данных. Это дает возможность контролировать, какие задания выполнены слушателями и как используются их курсы.

Количество задач, выполняемых в процессе работы OpenedX достаточно велико. Поэтому значительная часть этих задач решается фоновыми процессами, а не веб-приложениями. Такие задачи ставятся в очередь и распространяется с помощью Celery и RabbitMQ. Примеры задач в очереди:

- оценка целых курсов;
- массовая отправка писем;
- формирование отчетов о распределении ответов;
- изготовление сертификатов об окончании курса.

Проект Open edX также включает в себя IDA под названием XQueue, которое запускает отдельные процессы, выполняющие оценку работы учащихся.

Платформа Open edX использует Elasticsearch для поиска в нескольких контекстах, включая поиск курса и службу комментариев.

Open edX работает с большинством современных браузеров. Для лучшей производительности рекомендованы Chrome и Firefox. Так же поддерживаются последние версии Edge, MSIE и Safari.

Возможна установка двух реализаций edX:

– developer stack – для исследований и разработки;

– production stack – для реальной работы.

Системные требования для установки:

- Ubuntu 16.04 amd64 (требуется oraclejdk);
- 8GB памяти ;
- процессор 2.00GHz;
- Минимум 25GB места на диске, рекомендовано 50Gb.

Для более эффективной работы с компонентами платформы, настраивания задания и оформления уроков, публикации новостей, желательно иметь базовые знания HTML.

Использование онлайн-курсов на платформе Open edX в образовательном процессе дает возможность: отслеживать активность студентов во время прохождения курсов, получать и анализировать результаты обучения, засчитывать пройденные курсы в рамках освоения образовательных программ различных направлений. Онлайн-

курсы могут использоваться студентами при освоении как основных образовательных программ или отдельных ее частей, а также большим кругом обучающихся желающим получить дополнительное образование. Свобода выбора онлайн-курсов обеспечивает мотивацию высших учебных заведений к разработке и поддержке качественных и востребованных онлайн-курсов.

Список литературы

1. Государев И. Б. Развертывание и интеграция инновационных учебных сред: бордкастинг, облачные хостинги и edX. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://kodaktor.ru/articles/gosskio.pdf
2. Закалкина Е.В., Рогозянская Е.А., Еремеева Н.П., Обзор образовательных платформ для создания и размещения онлайн-курсов. Проблемы управления качеством образования: сборник статей XI Всероссийской научно-практической конференции / МНИЦ ПГАУ. - Пенза: РИО ПГАУ, 2018. – С.43-46

УДК 378.147:004.9

Закалкина Елена Вячеславовна
кандидат экономических наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Еремеева Наталья Петровна
кандидат экономических наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Рогозянская Елена Александровна
кандидат экономических наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Марахова Ирина Евгеньевна
студент,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

РАЗМЕЩЕНИЕ ОНЛАЙН-КУРСА НА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПЛАТФОРМЕ

Аннотация. *Одной из форм дистанционного образования является создание интернет курсов с массовым интерактивным участием и открытым доступом. В статье рассматриваются основные компонентыоткрытой образовательной платформы Open edX которые могут быть использованы в ходе создания и изучения компонентов онлайн-курса.*

Ключевые слова*: онлайн-курс, дистанционное обучение, образовательные платформы, платформа Open edX.*

Zakalkina Elena Vyacheslavovna
Candidate of Economical Sciences, Associate professor,
Orel State University,
Russia, Orel

Eremeeva Nataliya Petrovna
Candidate of Economical Sciences, Associate professor,
Orel State University,
Russia, Orel

Rogozyanskaya Elena Aleksandrovna
Candidate of Economical Sciences, Associate professor,
Orel State University,
Russia, Orel

Marahova Irina Evgenyevna
Student,
Orel State University,
Russia, Orel

PLACEMENT OF AN ONLINE COURSE ON AN EDUCATIONAL PLATFORM

Abstract. *One of the forms of distance education is the creation of online courses with mass interactive participation and open access. The article discusses the main components of the Open edX open educational platform that can be used during the creation and study of the components of an online course.*

Keywords: *online-course, distance learning, educational platforms, Open edX platform.*

Одной из форм дистанционного образования является создание интернет курсов с массовым интерактивным участием и открытым доступом при помощи MOOK (Массовых открытых онлайн-курсов). У российских университетов есть возможность публикации курсов на международной платформе EdX (edx.org). EdX – некоммерческая открытая образовательная платформа, предлагающая онлайн-курсы, реализуемые более чем 70 организациями-участниками. В их числе – ведущие мировые университеты, колледжи и организации. Основными компонентами Open edX которые будут использоваться в ходе создания и использования онлайн-курса являются: Studio, служащая для создания курса и заполнения его содержимого; система управление обучением (LMS), которая предоставляет учащимся доступ к учебному контенту, а также показывает текущий прогресс в изучении; об-

суждения, организованная в виде форума; аналитика, содержащая различные статистические показатели.

Для создания и редактирования курсов через веб-интерфейс в Open Edx используется Studio. Здесь можно организовывать общую структуру курса, создавать разделы, подразделы, отдельные блоки, а также настроить срок, когда тот или иной раздел контента будет опубликован и доступен обучающимся. Для загрузки веб-интерфейса Studio ОГУ им. И.С. Тургенева нужно перейти по адресу mooc.oreluniver.ru:18010.

На рисунке 1 представлен алгоритм размещения курса на платформе.



Рисунок 1 – Алгоритм размещения курса
на платформе Open edX

Первым этапом создания онлайн-курса является регистрация разработчиков в системе и регистрация самого курса. Для начала необходимо ввести название курса, которое будет доступно пользователям. Также можно указать альтернативное название, отображаемое в расширенных настройках. Далее необходимо ввести идентификатор организации и номер курса, при этом нельзя использовать пробелы и специальные символы. Если курс предполагается общедоступным, необходимо добавить в конце "x". Данные указанные в поле *Запуск курса* не влияют на дату выпуска курса. Значения, которые вводятся для организации, номера курса и курса, не могут быть отредактированы после создания курса. Эти значения используются для создания URL-адреса курса (рис. 2). Далее возможно приступать к созданию курса.

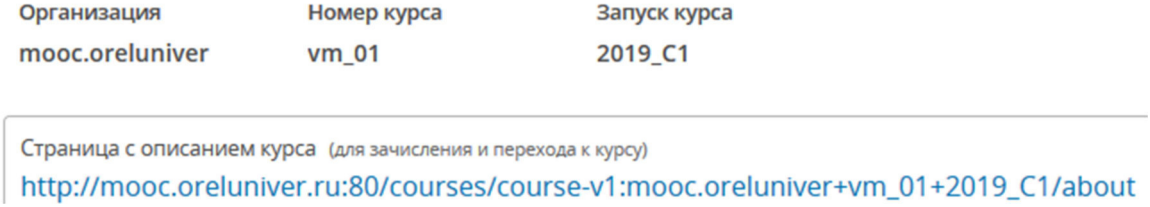


Рисунок 2 – URL-адреса курса

Для добавления новых членов команды разработчиков курса используется вкладка *Настройка.* Для публикации курса также необходимо создать страницу обзор курса «*О курсе*». Заставка этой страницы будет высвечиваться в перечне размещенных курсов. Обзор курса – это то, что видят посетители перед тем как зарегистрироваться на него. На этой страничке должно быть представлено краткое описание курса: тематика курса, цели и задачи курса, расписание курса. Помимо текстовой информации эта страница может сопровождается фотографиями команды и видеотрейлером к курсу.

Для заполнения информации о курсе и настройки расписания также используется пункт *Настройки-Расписание* и обзор курса.

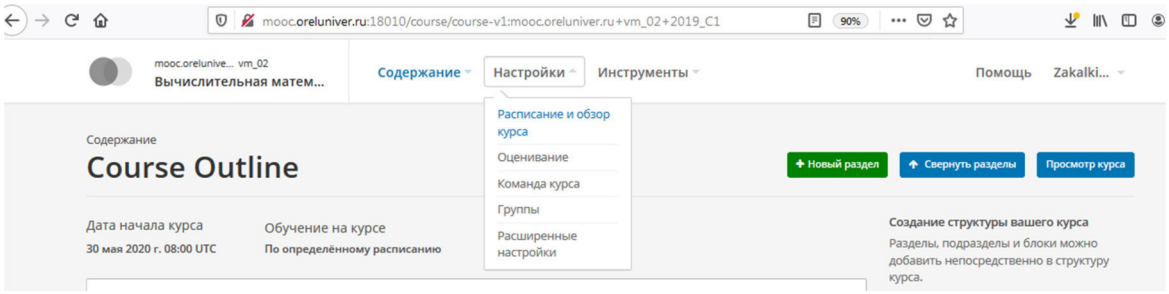


Рисунок 3 – Переход к странице «О курсе»

При переходе на страницу *О курсе* появляется ссылка с описанием курса, которая используется, чтобы пригласить слушателей, а так же имеется кнопка по которой ссылка автоматически встроится в письмо-приглашение. Здесь же указываются дата и время начала и окончания курса, даты и время регистрации. При этом используется всемирное координированное время UTC.

Для ввода информации о курсе предлагается шаблон. (рис. 4). При этом можно не ограничиваться приведенным шаблоном и дополнить старницу своими материалами, используя HTML.

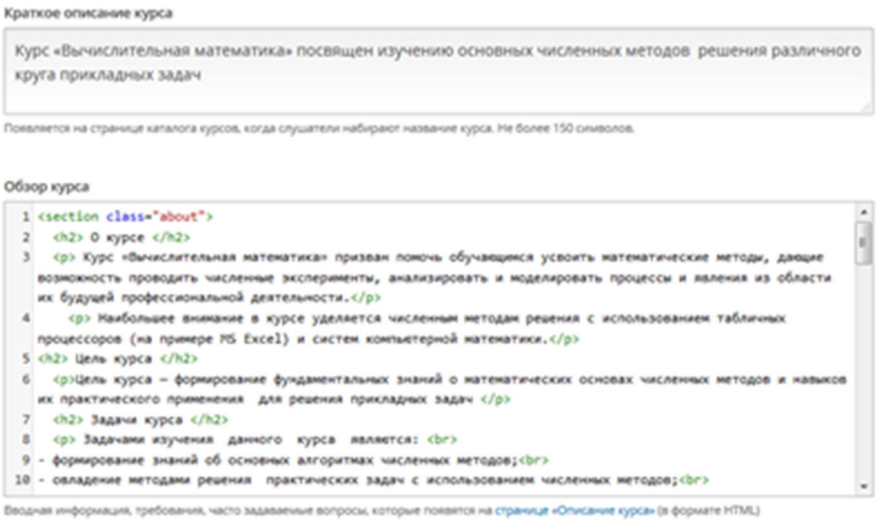


Рисунок 4 – Ввод информации о курсе

Сюда также можно загрузить фотографии разработчиков курса и изображение для визитной карточки курса или видеотрейлер.

Перед размещением курса необходимо разработать его структуру. Курс может состоять из одного или несколько разделов. Разделы представляют собой большие блоки курса и могут как носить названия больших тем (глав) курса или соответствовать неделям обучения. Раздел содержит один или несколько подразделов. Подразделы, могут содержать один или несколько блоков различного типа.

В блоках содержатся компоненты, которые являются фактическим содержимым курс. Компонентами могут быть: видео; текст; обсуждения; упражнения, контрольные задания (тесты, задачи и т.п.).

При просмотре курса слушателями все блоки подраздела будут расположены с горизонтальной навигацией на одной странице и пиктограммами для разного типа компонент.

На следующих рисунках показан рабочий процесс создания контента.

Для создания структуры курса и заполнения контента надо выбрать *Содержание-Структура* (рис. 5).

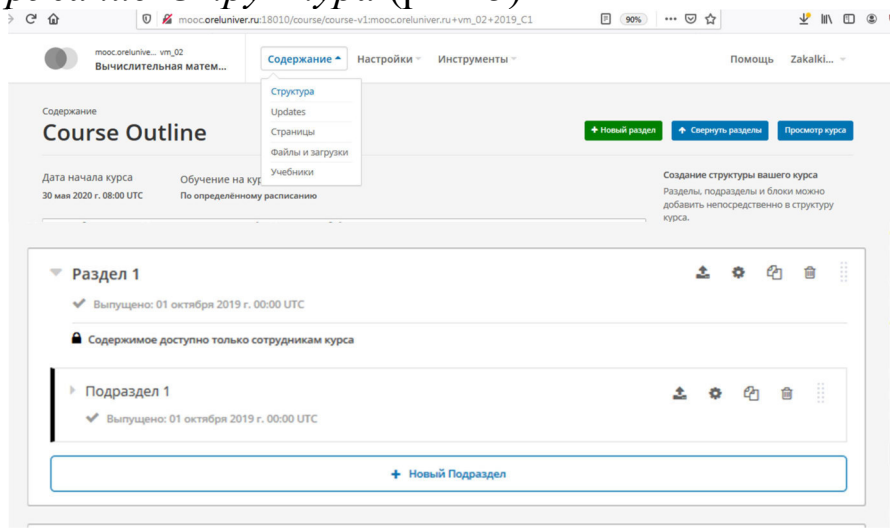


Рисунок 5 – Создание раздела и подраздела

В качестве компоненты может быть видео, текст, задача, обсуждение.

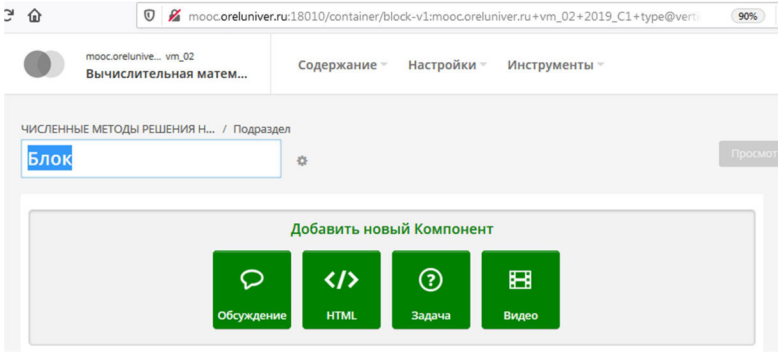


Рисунок 6 – Вид кнопок для вставки блоков

У всех материалов имеются различные типы видимостей. Слева разделы и подразделы выделены вертикальными линиями разного цвета: зеленая означает, что данный раздел (подраздел) опубликован, но дата его выпуска еще не наступила; синяя – данный подраздел опубликован и виден пользователю курса; оранжевая – выпущен, но в нем есть изменения, которые еще не опубликованы, и пользователи видят предыдущую версию данного материала; черная – содержимое раздела скрыто для пользователя.

Для каждого раздела можно указать дату и время выпуска. Для подразделов можно указать его видимость для слушателя, даты выпуска, будет ли этот раздел оцениваться, вид оценки и сроки выполнения. После указанной здесь даты слушатели не смогут отправить свои ответы на проверку.

Чтобы загрузить блок видео, вначале созданное видео следует опубликовать online, и указать в Studio ссылку на его расположение (рис. 16). При просмотре курса это видео будет воспроизводиться проигрывателем Open edX. Видео для курса публикуется на видеохостинге YouTube. Рекомендуется также иметь копию видео на альтернативном сайте с высокой пропускной способностью, например, Amazon S3. В случае, когда при просмотре материалов онлайн-курса требуемое видео не воспроизводится при обращении к Youtube, автоматически перенаправляется запрос на показ видео с альтернативного сайта. По кнопке *Дополнительно* можно установить ограничение или разрешение на скачивание видео.

Текст видео также может быть продублирован в файле с расширением «.pdf», который можно скачать по соответствующей ссылке.

Для вставки текста используется кнопка HTML. При нажатии на которую, появляется редактор. Если нас не устраивает, как текст отображается при просмотре курса, его можно отформатировать используя тэги HTML.

Для ввода и отображения математических выражений на платформе используется язык LaTeX. Для вставки изображения надо вставить ссылку на него. Для этого сначала изображение надо загрузить на платформу, используя пункт *Содержание – Файлы и загрузки*.

Используя вкладку *Содержание* можно вставить в курс **учебники** и учебно-методические пособия, которые включаются в курс в формате «.pdf» и публикуются в отдельной вкладке горизонтальной строки навигации. Конечно, использование данного типа ресурсов не должно нарушать чьи-либо авторские права. Также используя вклад-

ку *Содержание*, можно добавить свою страницу, которая появится в режиме просмотра слушателем в верхнем меню курса. Страницы *Главная* и *Курс* менять нельзя, для страниц *Вики* и *Прогресс* можно настроить их видимость.

В качестве блока можно создавать интерактивные упражнения. Для этого используется кнопка *Задача*. Существует много типов заданий и тестов, которые можно создать на платформе edX. Например:

- выбор одного варианта ответа;
- задачи с выпадающим списком;
- выбор нескольких верных ответов;
- задачи, требующие ввода числовых значений;
- задачи, требующие ввода текста и другие задания.

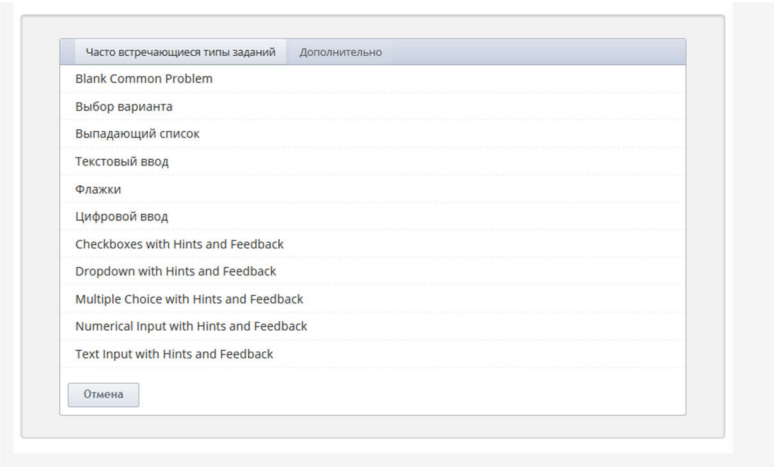


Рисунок 7 – Выбор задачи

При этом появляется шаблон, который можно отредактировать под свое задание. Например, для задания с выбором одного ответа, вводится само задание и отмечается правильный вариант ответа.

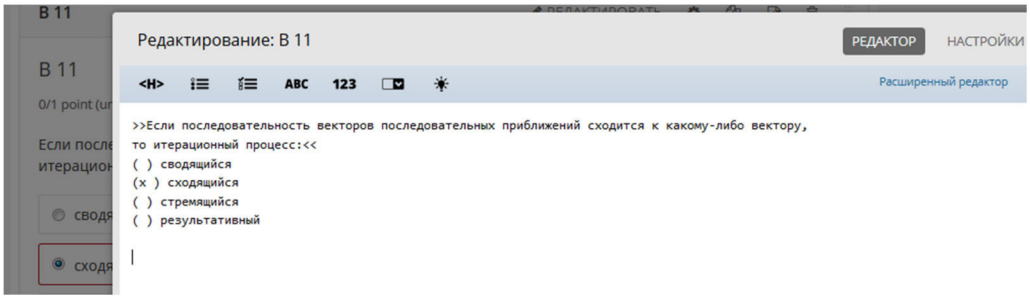


Рисунок 8 – Редактирование задачи

Кроме того, в настройках задачи можно указать вес задания (в баллах), время между попытками, число попыток, название задания, отображение правильного ответа, случайный порядок вариантов.

Если вид задания введенного с помощью шаблоне не устраивает, то можно воспользоваться расширенным HTML-редактором. При использовании этого редактора для какого-либо задания, для этой за-

дачи нельзя будет вернуться к простой версии редактирования.



Рисунок 9 – Использование Расширенного редактора для теста

Для вставки заданий, которые не оцениваются автоматически, а могут быть оценены дифференцированно преподавателем и/или другими слушателями имеется вкладка *Дополнительно*.

Разработанная структура курса по вычислительной математике была перенесена на платформу mooc.oreluniver.ru. В состав размещенного курса входят видеолекции, вокруг которых выстраиваются все остальные компоненты курса в виде методических указаний к практическим занятиям, лабораторным работам, тестовые задания для контроля и оценки знаний.

УДК 378.147

Камозина Олеся Владимировна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры «Математика»,
Брянский государственный
инженерно-технологический университет,
Россия, Брянск

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРОССВОРДОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Аннотация. *В работе показана возможность использования кроссвордов при обучении математике в техническом вузе на примере изучения тем «Теория вероятностей», «Математическая статистика».*

Ключевые слова: *кроссворд, теория вероятностей, математическая статистика, технический вуз, контроль.*

Kamozina Olesia
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Mathematics,
Bryansk State Engineering and Technological University,
Russia, Bryansk

USING CROSSWORDS IN THE STUDY OF PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS AT A TECHNICAL UNIVERSITY

Abstract. *The paper shows the possibility of using crosswords in teaching mathematics at a technical university on the example of studying the topics "Probability Theory", "Mathematical Statistics".*

Keywords: *crossword, probability theory, mathematical statistics, technical university, control.*

В начальной школе при обучении математике широко применяются элементы занимательности. Однако в старших классах, а затем и в высшей школе, от этого совсем отходят. В результате математика

для некоторых становится скучным и неинтересным предметом. Поэтому актуален вопрос применения ребусов, кроссвордов, шарад и т.д. в обучении математике старшего звена школы и в вузе.
Использование кроссвордов возможно как при проведении текущего контроля, так и при проведении контроля остаточных знаний в обучении.

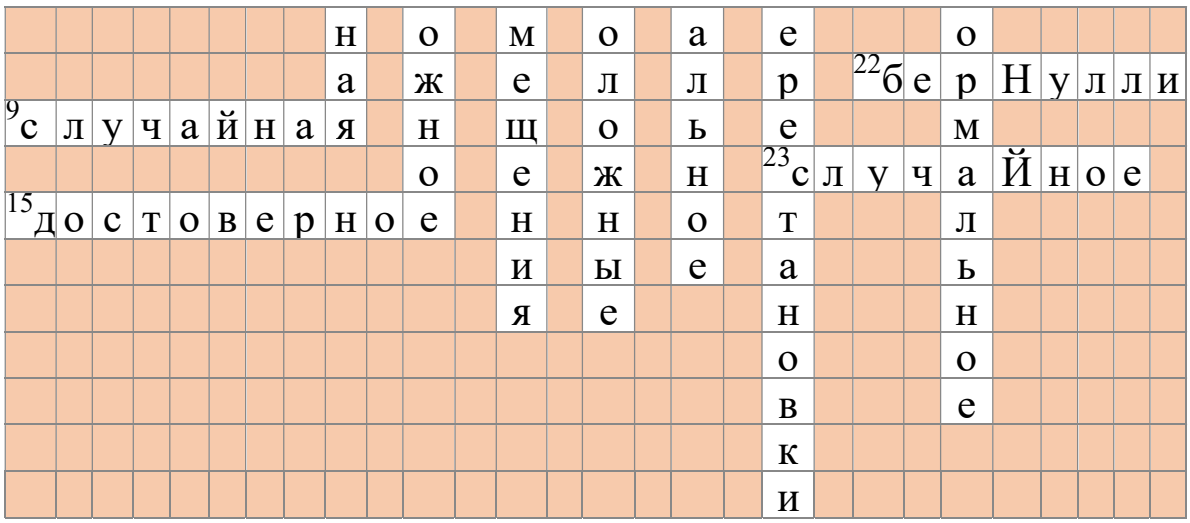
Позволяет снять эмоциональную напряженность у студентов. Оказывает закрепляющее действие при формировании знаний студентов. Помогает усвоить определения понятий разделов.

Разделы «Теория вероятностей» и «Математическая статистика» [1] присутствуют при изучении дисциплины «Математика» любого направления подготовки бакалавров. Например, если рассматривать направление 38.03.01 Экономика, то данные разделы изучаются студентами в 4 семестре [2].

Составление кроссвордов в настоящее время не вызывает сложностей. Достаточно воспользоваться современными информационными ресурсами. Для составления кроссвордов, представленных в статье, был использован информационный сервис «Cross: создание кроссвордов онлайн» [3].

Кроссворд «Случайные события. Случайные величины»

							2 в															11 с				
		1 б					е				3 п											О				
		л					р				р							7 г				Ч				
		а					о				о							е				Е				
		г					я				и							о		14 с		Т				
		о					т				з							м		о		А				
		п					5 н	е	с	о	в	м	е	с	т	н	ы	е		б		Н				
		р					о				е							т		ы		И				
		и					с				д			10 д	и	12 с	к	р	е	т	н	а	Я			
		я					т				е					у		и		и						
		т					ь				н					м		ч		е						
		с									и					м		е								
		т						8 н			е			16 п	у	а	с	с	о	н	а					
4 з	а	в	и	с	и	м	ы	е						р				к								
		у						п		13 н				о		18 б		о								
		ю		6 г	и	п	е	р	г	е	о	м	е	т	р	и	ч	е	с	к	о	е				
		щ						е		в				и		н										
		е						р		о		17 р	а	в	н	о	м	е	р	н	о	е				
		е						ы		з		а		о		м										
								в		м		з		п		19 и	с	20 п	ы	т	а	21 н	И	е		



По горизонтали:

4. События, вероятность появления одного из которых зависит от того, появилось другое событие или нет.

5. События, появление одного из которых исключает появление другого в одном и том же испытании.

6. Распределение случайной величины, в котором при вычислении вероятностей используется формула числа сочетаний.

9. Переменная величина, которая в результате испытания принимает то или иное числовое значение, заранее неизвестно какое.

10. Случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения.

15. Событие, которое в данном испытании является единственно возможным его исходом.

16. Формула … применяется

По вертикали:

1. Событие, которое влечет за собой появление другого события.

2. Отношение числа событий, благоприятствующих рассматриваемому событию, к числу всех элементарных событий.

3. Событие, состоящее в совместном наступлении рассматриваемых событий.

7. Распределение случайной величины, в котором в формулировках задач встречается фраза «до первого появления (наступления и т.д.) …».

8. Случайная величина, которая может принимать любое значение из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

11. Комбинации, составленные из данных n различных элементов по m элементов, которые отличаются только самими элементами.

12. Событие, состоящее в наступлении по крайней мере одного из рассматриваемых событий.

13. Событие, которое в данном испытании заведомо не может произойти.

14. Результат, исход испытания.

для вычислении вероятности $p_n(k)$, если вероятность $p < 0{,}1$.

17. Распределение случайной величины, в котором плотность распределения постоянна на отрезке, а вне его равна нулю.

19. Опыт, эксперимент, наблюдение явления.

22. $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ – формула … .

23. Событие, которое объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

16. Два события, которые в данном испытании несовместны и одно из них обязательно происходит.

17. Комбинации, составленные из данных n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком следования элементов.

18. Распределение случайной величины, в котором формулировка задачи удовлетворяет схеме Бернулли.

20. Комбинации, составленные из данных n различных элементов по n элементов, которые отличаются только порядком следования элементов.

21. Распределение случайной величины, в котором плотность распределения имеет вид $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Кроссворд «Статистическая обработка экспериментальных данных»

						[3]в	ы	б	[6]о	р	к	а		[10]д			
									б					и			
		[1]а							ъ					с			
		с				[5]э			е			[11]в		п			
		и				к			[9]м	о	д	а		е		[18]г	
[2]г		м				с						р		р		е	
и		м		[7]з		ц					[14]п	и	р	с	о	н	А
[4]с	р	е	д	н	е	е						а		и		е	
т		т		а		с		[13]т		[15]в		ц		я		р	
о		р		[8]ч	а	с	т	о	т	а		и				а	
г		и		и				ч		р		о				л	
р		я		т			[16]м	е	д	и	а	н	а			ь	
а				е				ч		а		н				н	
м		[12]п	о	л	и	[17]г	о	н		ц		ы				а	
м		я		ь		а		а		и		й				я	
а		т		н		у		я		и							
		ь		а		с											

				я		с											
						а											

По горизонтали:

3. Совокупность случайно отобранных объектов.

4. Показатель центра распределения вариационного ряда – … значение.

8. Число членов выборочной совокупности с данной вариантой.

9. Наиболее часто встречающееся значение признака.

12. Ломаная, соединяющая точки $(x_i; n_i)$.

14. Суть критерия … состоит в сравнении эмпирических и теоретических частот.

16. Значение признака, которое делит весь статистический упорядоченный ряд пополам.

По вертикали:

1. Выборочный параметр, который характеризует скошенность статистического ряда в ту или иную сторону от моды.

2. Ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых являются интервалы, а высотами – частоты.

5. Выборочный параметр, который характеризует «вытянутость» кривой распределения по отношению к нормальной кривой.

6. Число объектов совокупности.

7. Если $v^* = 15\%$, то изменчивость признака … .

10. Показатель степени рассеяния значений признака.

11. Ряд, состоящий из двух строк: вариант и частот.

12. Наименьшее значение частоты в интервале при расчёте X^2.

13. Оценка, показывающая приближенное значение выборочного параметра.

15. Коэффициент … характеризует изменчивость признака по отношению к среднему значению.

17. График плотности нормального распределения называется кривой …

18. Совокупность всех объектов, из которых производится выборка.

Список литературы

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. образование, 2007. – 479 с.
2. Часова, Н.А. Рабочая программа дисциплины «Математика», направление подготовки бакалавров – 38.03.01 Экономика // Н.А. Часова. – Брянск: БГИТУ, 2018. – 41 с.
3. Cross: создание кроссвордов онлайн: электронный ресурс. Режим доступа: https://cross.highcat.org/.

УДК 377

Кокорев Антон Владимирович
кандидат физико-математических наук,
сотрудник ФГКВОУ ВО «Академия ФСО России»,
Россия, Орел

Чернобровкина Ирина Ивановна
кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры алгебры и математических методов в экономике,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орел

ПРОБЛЕМЫ СТАНОВЛЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ КАК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Аннотация. *В статье описаны основные этапы развития прикладной математики. Показана важность прикладной математики, как отдельной дисциплины для студентов технических вузов. Определены основные направления развития в данной области.*

Ключевые слова*: прикладная математика, теоретическая математика, решение прикладных задач.*

Kokorev Anton Vladimirovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
employee of the " FEDERAL Guard Service Academy of the Russian Federation",
Russia, Orel

Chernobrovkina Irina Ivanovna
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Algebra
and Mathematical Methods in Economics,
Head of the department of physics,
Orel State University, Russia, Orel

PROBLEMS OF FORMATION OF APPLIED MATHEMATICS AS AN INDEPENDENT DISCIPLINE

Abstract. *The article describes the main stages of the development of applied mathematics. The importance of applied mathematics as a separate discipline for students of technical universities is shown. The main directions of development in this area are defined.*

Keywords*: applied mathematics, theoretical mathematics, solving applied problems.*

История прикладной математики с одной стороны, начинается с глубокой древности, а с другой стороны не рассматривалась как самостоятельная наука до самого последнего времени. Ее видели, как совокупность математических методов, используемых в приложениях науки и техники. Только в 21 веке встал остро вопрос разделения математики на две ветви: прикладную и «теоретическую» математику.

В начале развития математики, оба направления видны отчетливо. Существовало практически две автономные ветви математики – прикладная и чистая математика.

В Древнем Египте математика имела явный прикладной характер. Развитие математики происходило за счет поиска решений задач практического и хозяйственного характера: геометрические расчеты, вычисление времени, определение объемов неправильных фигур, землемерия. Похожим было развитие и применение математики в Древней Мексике.

Древняя Греция является родиной теоретической математики. Можно сказать, что развитие софистики стало основой для четкого отделения теоретической от прикладной математики. В основу теоретической математики были положены бездоказательные утверждения – аксиомы. Именно на этом и был основан дедуктивный способ построения логической структуры чистой математики.

Средние века в основном характеризуются хозяйственным и производственным направлением развития математики. Однако теоретическая математика отчетливо присутствует в странах средневекового Ислама, а также у алгебраистов в Европе.

Прикладная математика 17-19 веков развивала различные вычислительные методы, которые требовались для решения практических задач. Основной ее задачей являлось получение в ответе требуемого числа.

В 1 половине 20 века математический аппарат для большинства прикладных задач соответствовал школьной математики, дифференциального и интегрального исчисления, основ высшей алгебры и вариационного исчисления.

Появление и развитие ЭВМ в середине 20 века послужило сильным толчком к математизации всей науки. Космос и атомная промышленность послужили основным стимулом для дальнейшего развития прикладной математики.

Сегодня, в 21 веке, прикладная математика применяется во всех областях науки и человеческой деятельности.

В связи с развитием технологий со стороны работодателей постоянно увеличивается требуемый уровень математической подготовки будущих инженеров, а также действующие специалисты неоднократно повышают свой математический уровень. Соответственно в большинстве университетов открыты факультеты или специальности прикладной математики.

Очевидно, что в ближайшие годы процесс математизации науки, разработка новых матмоделей и применение современного матаппарата при решении прикладных задач будет только усиливаться.

Главным противоречием здесь является исследование математической модели. С одной стороны, используется аппарат «чистой» математики, а с другой, исследование использует средства прикладной математики, уровень строгости, который теоретической математикой не допускаются.

Целью работы является указание важности методического подхода при составлении учебного плана дисциплины «Прикладная математика». Основная задача которого заключается в грамотной связи теоретической математики и ее практического применения при решении профессиональных задач будущим инженером, а также изложить практический аппарат для профессиональных исследований. Обязательным является указание на роль современных возможностей чистой математики в инженерном творчестве.

Развитие вычислительной техники дало современному инженеру еще большие возможности использования современного математического аппарата при решении различных задач.

В работах [1,3] обоснована важность и специфика прикладной математики в современном обществе. Указано место дисциплины «Прикладная математика» при составлении учебного плана в соответствии с ФГОС 4 поколения.

Так зачем же нужна «Прикладная математика»? Она должна давать студентам и будущим инженерам четные ответы на вопросы: как создавать матмодели, как их интерпретировать, как они изучаются. В данном случае идет речь об изучении общих законов применения математических моделей при решении практико-ориентированных задач.

Итак, главной целью в настоящее время является обсуждение и обоснование места, специфики и методических особенностей прикладной математики.

Проблемам становления и развития прикладной математики в современном мире посвящены работы Блехмана И.И. [1], Гусева А.С., Русанова В.В. [3], Тихонова А.Н. [4] и др. Отметил задачники по прикладной математике, например, Л. Коллатц [5].

Новые факультеты прикладной математики были открыты во многих университетах страны. Их основной задачей является подготовка специалистов прикладного профиля, в том числе устранение проблемы преподавания чисто теоретической математики будущим специалистам инженерного профиля.

Факультет прикладной математики имеет отчетливо выраженный практический характер. Хотя сегодня дисциплина «Прикладная математика» как самостоятельная встречается крайне редко. Но кто же такие будущие выпускники этих факультетов? Кто такие прикладные математики? С точки зрения работодателей, это высококвалифицированные специалисты в различных инженерных областях. Они имеют необходимые математические знания, которые позволят им не только решать профессионально ориентированные задачи в их будущей профессиональной деятельности, но и являются основой для дальнейшего развития.

Отсюда вытекает важная проблема, характерная для многих кафедр прикладной математики: в состав этих кафедр должны входить не только чистые математики-теоретики, но и инженеры-практики в соответствующих областях. Таким образом, на факультете должен поддерживаться баланс между чисто теоретическим и практическим направлениями математики.

Если данные условия не будут соблюдаться, то факультеты прикладной математики фактически вырождаются в факультеты чистой математики, дублируя их программы и методологию. В настоящее время такая ситуация является очень распространенной. Следствием этого является фактическое копирование тематик учебных планов.

Один из возможных вариантов решения этой проблемы является совмещения в одном преподавателе и прикладного и чистого математика. Данная ситуация вообще являлась нормой в 17-19 веках. Например, Ньютон, Коши, Бернулли и др. является хорошими примерами совмещения в одном человеке чистого и прикладного математика. Для них характерно применение полученных теоретических знаний о различных математических методах решения задач в различных приложения науки и техники.

Главной задачей является обеспечить связь математики, как теоретической дисциплины с ее практическим использованием в качестве аппарата при решении инженерных задач.

Отличительной особенность книг по «прикладной математике» является включения необходимого теоретического математического аппарата, требуемого для решения только поставленных профессиональных задач.

В настоящее время появляются книг по прикладной математики, в которой приводится теоретический материал в той степени, который нужен для решения соответствующих прикладных задач.

Целью учебной дисциплины «прикладная математика» является подготовка студентов к усвоению будущих спецдисциплин. В их основе лежит не математика вообще, а некоторые ее разделы, необходимые будущему инженеру в его профессиональной деятельности.

Можно сказать, что прикладная математика – это теоретическая математика, опосредованная практикой. В итоге, прикладную математику можно определить, как самостоятельную дисциплину, которая для нахождения решения профессиональных инженерных задач использует различные методы из теоретической математики.

Список литературы

1. Блехман, И. И. Прикладная математика. Предмет, логика, особенности подхода / И. И. Блехман, А. Д. Мышкин, Я. Г. Пановко изд. «Наукова думка». 1976, 270 с.
2. Ревчук, И. Н. Прикладная математика: пособие / И. Н. Ревчук, В. К. Пчельник. – Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2007. — 128 с.
3. Русанов, В. В. История и методология прикладной математики / В. В. Русанов , Г. С. Росляков, – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004. – 244 с.
4. Тихонов А. Н., Вводные лекции по прикладной математике / А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров, – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 192 с.
5. Collatz L., Albrecht J. Aufgaben aus der Angerwandten Mathematik. Akademie-Verlag Berli, 1972, P. 168

УДК 53

Корогодина Ирина Витальевна
кандидат педагогических наук,
сотрудник,
Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации,
Россия, Орёл

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ КАК ЭЛЕМЕНТ НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА

Аннотация. *В статье обсуждается вопрос о возможности овладения методами научного познания при освоении курса общей физики. Приводится пример решения физической задачи исследовательского характера.*

Ключевые слова: *учебно-исследовательская деятельность, методы научного познания, исследовательская задача.*

Korogodina Irina Vitalyevna
Candidate of Pedagogic Sciences,
Academy of Federal Guard Service of Russia,
Russia, Orel

RESEARCH TASKS IN PHYSICS AS AN ELEMENT OF SCIENTIFIC ACTIVITY OF STUDENTS OF A TECHNICAL UNIVERSITY

Abstract. *The article discusses the possibility of mastering the methods of scientific cognition when mastering the course of general physics. An example of solving a physical problem of a research nature is given.*

Keywords: *educational and research activities, methods of scientific knowledge, research task.*

Согласно Федеральному образовательному стандарту одним из критериев уровня качества образования является умение обучающимися самостоятельно приобретать и использовать новые знания в реальных условиях, то есть уверенно владеть приемами познания. Развитие познавательной активности студентов младших курсов техни-

ческого вуза происходит в рамках осуществления учебно-исследовательской деятельности, как способа освоения окружающего мира.

Структура учебно-исследовательской деятельности в целом отражает структуру научного познания. Однако в отличие от научного исследования наряду с получением нового знания важным становится овладение методами познания, которые включают такие компоненты, как постановка проблемы, выдвижение гипотезы, выбор методики решения, анализ и обобщение исходных данных, формулировка научных комментариев и выводов.

Курс общей физики в рамках технического вуза обладает широкими возможностями для развития первоначальных навыков ведения исследовательской работы. Его содержание, применяемые дидактические способы и приемы, экспериментальная работа способствуют развитию творческой инициативы студентов. Хорошим форматом для осуществления учебно-исследовательской деятельности являются семинарские занятия по дисциплине "Общая физика", в рамках которых возможно решать исследовательские задачи прикладного характера.

Учитывая уровень подготовки студентов младших курсов, исследовательские задания могут носить "бытовой" характер. Так, например, при изучении темы "Интерференция и дифракция волн" можно предложить, основываясь на идеях волновой оптики, экспериментально определить диаметр зрачка глаза человека, используя измерительную рулетку.

На первом этапе, изучив литературу и собрав информацию из сети Интернет, студенты проводят анализ физической сущности процессов и явлений: убеждаются, что глаз человека можно рассматривать как оптический прибор, где важной характеристикой выступает значение разрешающей способности.

На втором этапе обучающиеся выдвигают гипотезу, что разрешающая способность глаза, как круглого объектива, связана с выполнением дифракционного критерия Рэлея [1].

На третьем этапе студенты выясняют возможность использования математической модели для расчета исходной величины. На четвертом – происходит планирование и проведение эксперимента. При этом строится алгоритм измерений и определяется используемое оборудование. Далее студенты выполняют эксперимент и проводят вычисления. В заключении – обучающиеся проводят анализ полученного результата и формулируют выводы.

Использование исследовательских задач на семинарских занятиях по общей физике оживляет занятие, создает творческую атмосферу в учебных коллективах, повышает мотивацию обучения. Всю подготовительную работу следует провести предварительно при подготовке к семинару, а сами измерения и вычисления уместно выполнять на занятии, привлекая к работе наиболее активных первокурсников учебной группы.

Таким образом, идея использования исследовательских задач в курсе общей физики как средства формирования познавательной деятельности выступает как эффективное средство в углублении и расширении багажа знаний, способствуя развитию творческого потенциала обучающихся, что полностью отвечает требованиям современного образовательного стандарта.

Список литературы

1. Савельев, И. В. Курс общей физики: учебное пособие для втузов. В 4 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – Санкт-Петербург, 2011.

УДК 53

Корогодина Ирина Витальевна
кандидат педагогических наук,
сотрудник,
Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации,
Россия, Орёл

К ВОПРОСУ О ПРЕПОДАВАНИИ ФИЗИКИ НА НЕРОДНОМ ЯЗЫКЕ

Аннотация. *В статье приводится описание методики реализации принципов наглядности при обучении физике на неродном языке, основанной на правилах поэтапности становления речевого механизма студентов, для которых русский язык не является родным.*

Ключевые слова: *правила поэтапности становления речевого механизма, принцип наглядности, средства визуализации.*

Korogodina Irina Vitalyevna
Candidate of Pedagogic Sciences,
Academy of Federal Guard Service of Russia,
Russia, Orel

TO QUESTION ABOUT TEACHING OF PHYSICS IN A NON-NATIVE LANGUAGE

Abstract. *The article provides a description of the methodology for implementing the principles of visibility in teaching physics in a foreign language, based on the rules of the stage-by-stage formation of the speech mechanism of students for whom Russian is not their native language.*

Keywords: *rules of step-by-step formation of the speech mechanism, the principle of visibility, visualization tools.*

Стратегия реформирования российской высшей школы тесно связана с интеграцией в международное образовательное пространство. Ведущие вузы страны работают по учебным программам нового поколения, которые отвечают мировым образовательным стандартам. Взятый вектор развития позволил приглашать в страну для обучения все больше представителей иностранных государств. Увеличение числа студентов, для которых русский язык не является родным, потребовало совершенствование методик обучения не только русскому

языку, как иностранному, но и пересмотра существующих подходов преподавания базовых дисциплин, в том числе курса общей физики.

Как показывает практика, занятия по русскому языку и физике проходят параллельно по времени. Студентам надо освоить и филологические азы неродной речи, и физическую терминологию на русском языке. Методические приемы, которые применяют преподаватели-предметники на занятиях с группами, где русский язык не является родным, должны учитывать первоначальную языковую базу обучающихся.

Используя правила поэтапности становления речевого механизма, преподаватель, излагая материал курса физики, формирует у студентов программу собственного высказывания, опираясь на использование разных форм зрительной наглядности. На этом этапе уместно применять ситуационные изображения (зрительный образ ситуации) и речевое воспроизведение основных физических терминов и определений. Здесь в качестве наглядных образов могут быть графический объект, анимация или элементы мультипликации. Важно, что после устранения предложенных преподавателем логических опор у обучающихся появлялись бы собственные высказывания, связанные с предметной областью изучаемой дисциплины [1].

Существенно, что речь преподавателя выступает как основное средство усиления наглядных образов. Короткие высказывания, четкие формулировки, низкий темп изложения учебного материала с опорой на средства визуализации активизируют умственную деятельность студентов по формированию физических понятий и терминов, сформулированных на русском языке.

Большое значение имеет то, чтобы наглядно-образные элементы мышления студентов переходили в их самостоятельные умения высказываться и рассуждать без опоры на конспекты или учебные пособия. Этот сложный процесс довольно длителен по времени и возможен только при совместной работе преподавателей русского языка и физики.

Большое внимание имеет развитие умения говорения. Как отмечают лингвисты (М.Н. Вятютнев, И.Б. Игнатова, В.Г. Костомаров и др.) становление речи на неродном языке является внешней устной реализацией внутренний программы обучающегося. В этой связи деятельность преподавателя должна быть направлена на переход студентов, обучающихся на неродном языке, к научному стилю речи. Для решения поставленной задачи на занятиях по курсу общей физики следует усилить внимание на визуальных образах представления информации (обозначение величин, прочтение формул, интерпрета-

цию графиков, пр.), требуя от студентов правильного произношения. Уместно будет использовать коллективное и индивидуальное прочтение определений физических терминов и законов.

Критерием успешности предложенного подхода к обучению физике на неродном языке может стать оценка степени овладения студентами научным стилем устной речи, аудио- и видеорядом, применяемым на занятиях по дисциплине "Общая физика".

В этой связи в ходе изучения законов и теорий физики рекомендуется обратить внимание на формирование навыков аудирования и говорения. Речь преподавателя с объяснением построения опорных рисунков и подробным выводом формул создает акт устного общения особенно важного в освоении дисциплины. При работе с анимационными программами (типа "Физика в картинках") комментарии преподавателя и пояснения студентов на вопросы о наблюдаемых физических явлениях и процессах позволяют отрабатывать акустическое сходство учебного (или дикторского) текста при параллельном графическом отображении, высвечиваемых на дисплее монитора. Такие программы могут применяться как в коллективной работе с группой, так и в индивидуальной работе, как элемент самокоррекции, развивая слуховые рецепторы обучающихся (О.Д. Митрофанова, С.Ф. Шатилов, А.Н. Щукин и др.).

В заключении отметим, что средства визуализации, вытекая из конкретного контекста, выступают основой для развития внутреннего мышления и оказывают эмоциональное воздействие на обучающегося. Преподаватель, активно используя современные средства наглядности, создает условия для восприятия учебного материала при построении математических моделей физических процессов, решении задач прикладного характера, проведении эксперимента и обработки результатов опыта. Предложенный подход не только ускоряет усвоение учебного материала курса общей физики студентами, для которых русский язык не является родным, но и закладывает основу для освоения ими общепрофессиональных и специальных технических дисциплин.

Список литературы

1. Самосенкова, Т. В. Методическая система обучения культуре профессионального речевого общения иностранных студентов-филологов в условиях непрерывного образования. Автореферат дис. док. пед. наук, – Санкт-Петербург, 2004.

УДК 372.851+37.048.45

Костикова Наталья Николаевна
студент,
Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева,
Россия, Орел

ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ ПОСРЕДСТВОМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ

Аннотация. Статья посвящена актуальной в настоящее время проблеме профессиональной ориентации учащихся. В статье акцентируется внимание на важности использования практико-ориентированных задач при обучении математике с целью профессионального самоопределения школьников. Определяется содержание понятий «профессиональная ориентация», «практико-ориентированная задача», приводятся примеры использования практико-ориентированных задач на уроках математики в рамках знакомства с профессиями. В результате исследования определено, что использование таких задач на уроках математики помогает понять важность данной дисциплины в дальнейшей профессиональной деятельности учащихся и способствует принятию правильного решения в выборе их будущей профессии.

Ключевые слова: профессиональная ориентация, практико-ориентированная задача, профессия, профессиональное самоопределение, обучение математике.

Kostikova Natalya Nikolaevna
Student, Orel State University,
Russia, Orel

PROFESSIONAL ORIENTATION OF PUPILS IN MATHEMATICS LESSONS THROUGH THE USE OF PRACTICE-ORIENTED TASKS

Abstract. *The article is devoted to the currently relevant problem of professional orientation of students. The article focuses on the importance of using practice-oriented tasks in teaching mathematics for the purpose of*

professional self-determination of schoolchildren. The content of the concepts "professional orientation", "practice-oriented task" is determined, examples of the use of practice-oriented tasks in mathematics lessons within the framework of acquaintance with professions are given. As a result of the study, it was determined that the use of such tasks in mathematics lessons helps to understand the importance of this discipline in the further professional activities of students and contributes to making the right decision in choosing their future profession.

Keywords: *professional orientation, practice-oriented task, profession, professional self-determination, teaching mathematics.*

Каждому человеку в своей жизни приходилось сталкиваться с проблемой выбора профессии. Это одна из самых ответственных и сложных жизненно-практических задач, поэтому к ее решению надо подойти очень серьезно.

Нельзя не согласиться со словами К.Д. Ушинского «Если Вы удачно выберете свой труд и вложите в него свою душу, то счастье само Вас отыщет», так как правильный выбор профессии предопределит дальнейшую судьбу человека, возможность заниматься любимым делом и получать от этого удовольствие. Кроме того, обоснованный выбор профессии позволяет человеку достигать успехов в его профессиональной, трудовой и общественной деятельности, а это, в свою очередь, способствует осуществлению жизненных планов человека и общества в целом.

В мотивации профессионального самоопределения «первое место по значимости занимает сфера дружеских отношений. Второе – средства массовой информации (книги, газеты, журналы, кинофильмы, телепередачи). Третье место – педагогический коллектив, классный руководитель, затем учителя-предметники, завуч и директор школы. Четвертое место – влияние семьи. Пятое место – учебные предметы, чем выше успеваемость школьника, тем более сильное влияние оказывают учебные предметы на его профессиональное самоопределение. Шестое и последующие места занимает внеклассная работа, организации, общественно-полезный и производственный труд»[2, с.9]. Как видим, часто получается так, что учащиеся к выбору профессии подходят не достаточно серьезно, а выбирают направление для дальнейшего обучения «за компанию» или под влиянием пожеланий родителей. Многие факторы профессиональной мотивации связаны со школой, поэтому большую роль в правильном реше-

нии данного вопроса играет школа, где должна быть организована грамотная работа по профессиональному самоопределению учащихся. Ведь согласно ФГОС [9] и закону об образовании Российской Федерации [4] система образования должна быть направлена на создание условий для самоопределения и самореализации личности выпускника.

Под профессиональной ориентацией чаще всего понимают «процесс формирования личностью своего отношения к профессионально-трудовой сфере и процессу самореализации через согласование внутриличностных и социально-профессиональных потребностей, процесс поиска и приобретения профессии, который осуществляется в результате анализа своих способностей, возможностей в соотнесении с требованиями профессии» [5, с.469]. Это сложный и многогранный, многоступенчатый процесс, который заключается не только в проведении тестов по профориентации, как это представляется многим, а в постоянной работе с учащимися, и начинать эту работу стоит как можно раньше.

Можно выделить следующие направления работы по профессиональной ориентации учеников в зависимости от их возраста (рисунок 1).

Как уже отмечалось ранее, зачастую в выборе профессии большую роль играет интерес к учебному предмету, в частности – к математике. Заинтересовать учащихся можно, показав им практическую значимость дисциплины в их жизни и профессии. Проявляющие интерес к изучению данной науки школьники видят в ней основу для своей будущей профессии, стараются узнать, какие специальности связаны с математикой, и начинают готовиться к поступлению в соответствующее учебное заведение.

Таким образом, основная задача работы по профессиональной ориентации при обучении математике, на наш взгляд, заключается в том, чтобы научить школьников пользоваться приобретенными на уроках знаниями для решения практических задач. В этом может помочь использование на уроках математики следующих методов и форм профориентационной работы:

– проведение бесед о профессиях, связанных с изучаемым на уроке материалом;
– участие в математических квестах, играх, конкурсах, олимпиадах;
– использование практико-ориентированных задач;

– выполнение проектных и исследовательских работ профессиональной направленности;
– просмотр фрагментов учебных кинофильмов и телепередач, в которых демонстрируется применение полученных знаний;
– оформление альбомов, плакатов, стендов и других наглядных материалов по профессиональной ориентации.

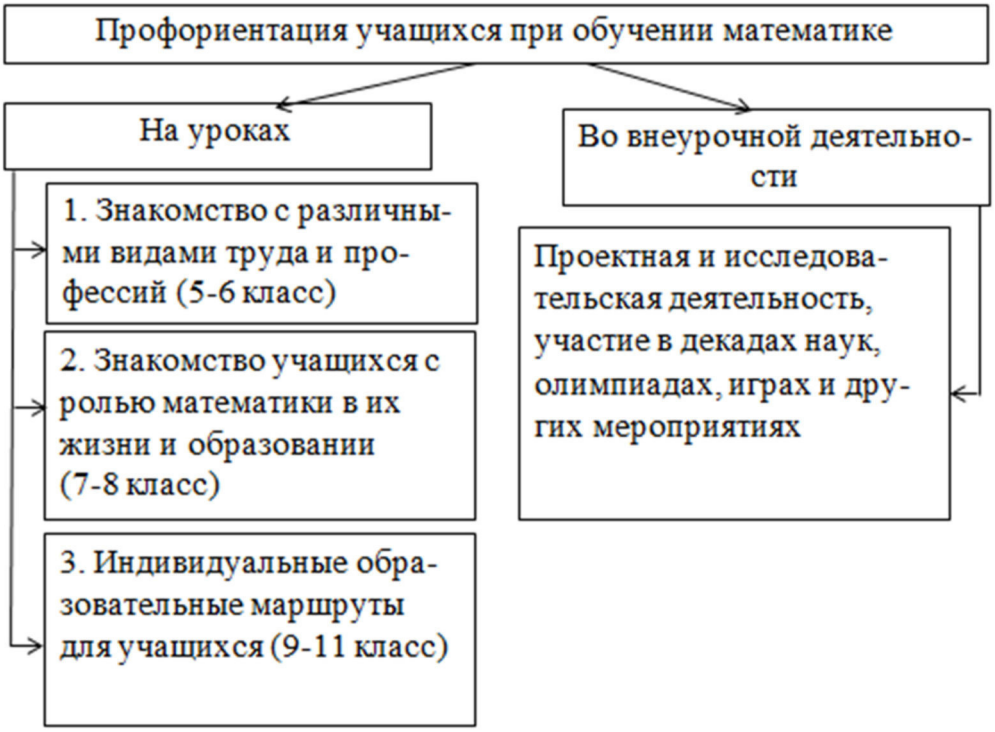


Рисунок 1 – Направления работы
по профессиональной ориентации учащихся

Приведем примеры организации профориентационной работы из нашей практики.

1. При изучении в 5 классе темы «Шкалы и координаты» с учащимися была проведена беседа о том, где эти знания могут им пригодится, таким образом они пришли к выводу о важности математики в профессии продавца.

2. При изучении в 6 классе темы «Координатная плоскость» с ребятами проводилась беседа о том, как используется данная тема в другой науке – географии для определения положения объекта на планете Земля (координаты широты и долготы).

3. При изучении в курсе геометрии 7 класса перпендикулярных прямых внимание школьников было обращено на то, где в жизни встречаются перпендикулярные прямые и где соблюдение перпендикулярности является наиболее важным моментом – это, безусловно, в профессии строителя.

4. При изучении геометрической прогрессии в курсе 9 класса подводим учащихся к выводу, что эта тема используется в другой науке – биологии, например, для выявления численности бактерий в определенный момент времени.

Примеров можно привести много, но мы остановимся более подробно на применении практико-ориентированных задач, которые, на наш взгляд, являются эффективными в процессе профессиональной ориентации школьников при обучении математике. Под практико-ориентированной задачей будем понимать текстовую задачу из окружающей действительности, использование которой направлено на формирование практических навыков, необходимых в профессиональной или повседневной деятельности.

Использование практико-ориентированных задач на уроках способствует:

– расширению кругозора учащихся;
– развитию познавательного интереса к предмету;
– закреплению и совершенствованию полученных знаний, умений и навыков;
– повышению качества знаний;
– демонстрации практического значения и важной роли предмета в жизни конкретного человека и общества в целом;
– формированию умений действовать в социально значимой ситуации;
– осуществлению профориентационной работы.

Приведем примеры использования таких задач на уроках математики в рамках знакомства с конкретной профессией (5-6 класс).

Задача 1. Повару необходимо приготовить 20 порций фруктового салата, но в книге рецептов указано, что на 3 порции фруктового салата необходимо взять 150 г бананов, 180 г киви, 120 г папайи, 210 г манго и 30 г миндальных орехов. Сколько грамм каждого ингредиента понадобится повару, чтобы приготовить 20 порций салата? И чему будет равна масса одной порции?

Решение.

Для начала найдем, сколько грамм каждого фрукта понадобится для приготовления одной порции салата:

1) 150 : 3 = 50 (г) бананов
2) 180 : 3 = 60 (г) киви
3) 120 : 3 = 40 (г) папайи
4) 210 : 3 = 70 (г) манго

5) 30 : 3 = 10 (г) миндальных орехов

Тогда масса одной порции салата будет составлять:

6) 50 + 60 + 40 + 70 + 10 = 230 (г)

На 20 порций понадобится каждого ингредиента в 20 раз больше, чем на одну порцию, поэтому:

7) 50 · 20 = 1000 (г) бананов

8) 60 · 20 = 1200 (г) киви

9) 40 · 20 = 800 (г) папайи

10) 70 · 20 = 1400 (г) манго

11) 10 · 20 = 200 (г) миндальных орехов

Ответ: масса одной порции фруктового салата 230 г; на 20 порций необходимо 1000 г бананов, 1200 г киви, 800 г папайи, 1400 г. манго и 200 г миндальных орехов.

Повар – это специалист, который готовит еду для общественного питания. «Основная цель труда повара – приготовление пищи согласно рецепту с соблюдением технологии приготовления, которая должна обладать хорошими вкусовыми качествами и красивым внешним видом. Профессия имеет три разновидности: шеф-повар, повар – кондитер и повар – технолог. Хорошему повару присущи следующие качества характера: наличие обонятельной и тактильной чувствительности, развитого глазомера, богатой фантазии; активность, ответственность, выносливость, хорошо развитая моторика рук. Квалифицированный специалист должен уметь пользоваться производственным инвентарем и оборудованием, а также соблюдать технологию приготовления мучных, кондитерских и других видов изделий».[3]

В качестве домашнего задания после решения первой задачи можно предложить учащимся следующее творческое задание: написать рецепт любимого блюда и рассчитать его приготовление для класса (или для всей школы).

Задача 2. Строительство дома начинается с рытья котлована и заливки фундамента. Планируется вырыть котлован глубиной 2 метра для постройки дома прямоугольной формы со сторонами 9 и 12 метров. Для заливки фундамента готовится специальная смесь из цемента, щебенки и песка в соотношении 1:5:3. Какой объем песка, цемента и щебенки по-отдельности понадобится?

Решение.

Котлован имеет форму прямоугольного параллелепипеда, найдем его объем:

1) $2 \cdot 9 \cdot 12 = 196$ ($м^3$)

Для приготовления смеси требуется 1 часть цемента, 5 частей щебенки и 3 части песка, значит всего:

2) $1 + 5 + 3 = 9$ (ч)

Найдем объем одной части:

3) $196 : 9 = 22$ ($м^3$) цемента понадобится

4) $22 \cdot 5 = 110$ ($м^3$) щебенки

5) $22 \cdot 3 = 66$ ($м^3$) песка

Ответ: понадобится 22 $м^3$ цемента, 110 $м^3$ щебенки и 66 $м^3$ песка.

Строитель – это «специалист, занимающийся организацией и проведением работ по строительству, эксплуатации, ремонту и реконструкции зданий и сооружений. Обществу всегда нужны дома для жизни, школы, заводы, больницы и другие сооружения. Поэтому, как бы ни менялся мир, профессия строитель всегда будет востребована и актуальна».[6]

Задача 3. Велосипед стоил 16000 руб. Сначала цену повысили на 20%, а затем понизили на 20%. Сколько стал стоить велосипед после понижения цены?

Решение.

После повышения цена составила 100+20=120% от первоначальной, т.е. $16000 \cdot 1{,}2 = 19200$ руб. После понижения цена составила 100-20=80% от предыдущей, т.е. $19200 \cdot 0{,}8 = 15360$ руб.

Ответ: 15360 руб.

Менеджер по продажам – это «высококвалифицированный специалист, призванный осуществлять связь между покупателями и торговыми/производящими организациями, для реализации товара или услуги. Основная деятельность менеджера по продажам основана на купле-продаже товаров/услуг, увеличении продаж в своем секторе, поиск и привлечение новых клиентов, управление производством и сбытом продукции с целью повышения их эффективности и увеличения прибыли». [8]

Задача 4. Планируется засеять пшеницей поле площадью 240 га. Какая масса семян пшеницы для этого потребуется? Какая масса семян может быть собрана при условии организации должного ухода?

Решение.

Для решения этой задачи понадобятся некоторые дополнительные данные (таблица 1).

Таблица 1 – Нормы высева и средняя урожайность семян (кг/га)

Культура	Пшеница	Рожь	Ячмень	Овес
Норма высева	220	180	200	180
Ср. урожайность	2500	1500	1500	1500

Из таблицы видно, что норма высева пшеницы составляет 220 кг на 1 га, а средняя урожайность – 25 ц на 1 га, поэтому:

1) 220 · 240 = 52800 (кг) семян понадобится

2) 2500 · 240 = 600000 (кг) = 600 (т) будет собрано

Ответ: 52800 кг, 600 т.

Агроном – «профессионал в области земледелия. Представитель этой профессии знает обо всех тонкостях посева и выращивания культур, сбора и хранения урожая. Главная задача агронома – управлять сельскохозяйственным производством и совершенствовать его. Он занимается планированием, продумывая, когда начинать полевые работы и когда их заканчивать, что именно делать и как, разрабатывает графики сельхозработ». [6] Профессия не очень востребована в обществе, но очень важна и всегда актуальна.

В качестве домашнего задания можно предложить учащимся составить свою задачу, используя приведенные в таблице данные.

Задача 5. «Доход фирмы в месяц составляет 720 000 руб., из них $\frac{5}{9}$ идет на выплату заработной платы, 5% остатка – на оплату налогов, а 0,03 нового остатка – на оплату коммунальных услуг. Сколько денег остается после всех выплат?» [1, с.26]

Решение.

5% = 0,05

1) $\frac{5}{9}$ · 720000 = 400000 (руб) выплата заработной платы

2) 720000 – 400000 = 320000 (руб) остаток

3) 320000 · 0,05 = 16000 (руб) оплата налогов

4) 320000 – 16000 = 304000 (руб) остаток

5) 304000 · 0,03 = 9120 (руб) оплата коммунальных услуг

6) 304000 – 9120 = 294880 (руб) доход фирмы

Ответ: 294880 руб.

Экономист – это «специалист по части экономики, который разбирается в экономических вопросах и управляет хозяйством предприятия, оптимизируя его расходы и доходы. Основная цель труда экономиста – правильно расставить приоритеты и цели, чтобы получить максимальную прибыль при наименьших потерях». [3]

Очень важно, чтобы учащиеся видели в такой дисциплине как математика не только средство для поступления в институт, но и науку, необходимую в их будущей профессии. Примеряя на себя раз-

личные роли, учащимися осознаются возможности безошибочного определения своей дальнейшей профессиональной деятельности, так как это способствует пониманию того, чем занимаются различные специалисты, и сопоставлению с тем, как у школьников получается заниматься той же деятельностью.

Список литературы

1. Выговская, В.В. Сборник практических задач по математике: 6 класс // В.В. Выговская – М.: ВАКО, 2012. – 64 с.
2. Елфутина, Л.А. Особенности профессионального самоопределения современных подростков: автореф. дис. // Л.А. Елфутина. – М., 2007. – 21 с.
3. Журнал карьерного роста «WORKKING» [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://workking.ru/proforientatsiya/professiya (Дата обращения 30.10.2021г.)
4. Закон Российской Федерации «Об образовании в Российской Федерации» [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_law_140174/ (Дата обращения 24.10.2021г.)
5. Лобова, Е.В. Процесс первичного профессионального самоопределения / Е.В. Лобова // Сборник научных статей. – 2003. – Часть 1. – с. 463-470
6. Новости России и мира. Комсомольская Правда в РФ – газета, радио и сайт [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://www.kp.ru/putevoditel/obrazovanie (Дата обращения 30.10.2021 г.)
7. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «СДАМ ГИА: РЕШУ ВПР» [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://vpr.sdamgia.ru/(Дата обращения 29.10.2021г.)
8. Профориентационный портал Кузбасса «ПРОФОРИЕНТИР» [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://proforientir42.ru/dt_profession/menedzher-po-prodazham/ (Дата обращения 29.10.2021г.)
9. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.edu.ru/db/mo/Data/d_10/m1897.html (Дата обращения 24.10.2021г.)

УДК 514.1

Кузнецова Виктория Александровна
учитель математики и физики,
МБОУ «СОШ №14» г. Железногорска Курской области,
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет
им. И.С. Тургенева»
Россия, г. Железногорск

РАЗВИТИЕ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ПОСТРОЕНИЕ

Аннотация. *Работа посвящена развитию логического мышления в процессе решения задач на доказательство и построение. В работе представлены основные формы и методы развития логического мышления.*

Ключевые слова: *логическое мышление, геометрия, доказательство, построение.*

Kuznetsova Victoria Alexandrovna
Teacher of Mathematics and Physics,
MBOU "Secondary School No. 14" Zheleznogorsk, Kursk region,
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
"Oryol State University named after I.S. Turgenev"
Russia, Kursk region, Zheleznogorsk

DEVELOPMENT OF LOGICAL THINKING IN THE PROCESS OF SOLVING PROVISION AND CONSTRUCTION PROBLEMS

Abstract. *The work is devoted to the development of logical thinking in the process of solving problems for proof and construction. The work presents the main forms and methods of the development of logical thinking.*

Keywords: *logical thinking, geometry, proof, construction.*

Логическое мышление сводится к анализу, синтезу, сравнению, обобщению и другим логическим операциям. Нельзя научить ученика рассуждать, доказывать, делать выводы, если он не владеет этими логическими операциями. Они обеспечивают усвоение знаний, с помо-

щью которых происходит переход на более высокий уровень мышления.

Для того чтобы развивать логическое мышление необходимо решать задачи. Геометрические задачи на построение и доказательство занимают главное место в процессе развития логического мышления. Остановимся на них подробно и рассмотрим, насколько их активное использование на уроках планиметрии.

Решение задач по геометрии с конкретным содержанием способствует осуществлению постепенного перехода к дедуктивным доказательствам. Систематическое решение задач способствует прочному усвоению теории, видению ее практической ценности.

Все задачи по геометрии можно разделить на три вида: на вычисление, на доказательство и на построение. Но данное деление весьма символично: задачи на вычисление нередко встречаются и задачами на доказательство, потому что нуждается в обосновании; задача на построение находится в тесной связи с доказательством.

Рассмотрим подробно задачи на доказательство и построение. В задачах на доказательство необходимо обосновать какое-либо утверждение относительно геометрической фигуры, высказанное заранее. В виду это часто мы работаем с доказательством теоремы, которая не включена в программу основного курса.

Чтобы решение задачи на доказательство – значит самостоятельно доказать данную теорему. Для школьника это очень тяжелая работа. В современной системе обучения на уроках геометрии ученик чаще всего не самостоятельно приводит доказательство теоремы, а повторяет доказательство, которое дал на уроке учитель или которое было прочитано им в учебнике. Такая система работы не может дать навыков самостоятельного поиска доказательства теоремы.

Цели введения в курс геометрии задач на доказательство:

1) наиболее прочное закрепление знаний основного теоретического курса;
2) формирование навыков самостоятельной работы;
3) формирование логического мышления учащихся;
4) воспитание воли и настойчивости в достижении поставленной цели;
5) повторение изученного материала;
6) раздвижение рамок математического кругозора школьников за счет выяснения свойств фигур, имеющих довольно обширное использование (к примеру, свойство биссектрис двух смежных углов).

Решение задач на доказательство формирует и развивает логическое мышление ученика, то есть основных логических операций: анализа и синтеза. Логические операции существуют двух способов: аналитический и синтетический. Анализ и синтез играют важную роль в обучении математике. Так же большая их роль стоит в обучении построению доказательств, где они выступают в форме методов решения соответствующих задач.

Например, рассмотрим решение задачи при помощи аналитического и синтетического методов.

Доказать, что сумма внутренних углов в треугольнике равна 180°.

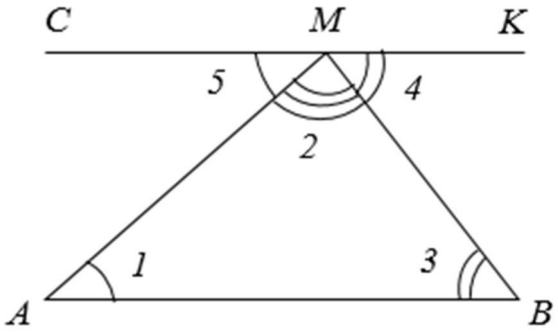


Рисунок 1 – Треугольник

Метод аналитический: 180° – величина развернутого угла, значит, достаточно показать, что при угле любого треугольника «вложатся» в развернутый угол: строим развернутый угол при вершине М:

$\angle CMK=40^{\circ}$; $\angle 2$ – есть; $\angle 5=\angle 1$; $\angle 4=\angle 3$; т.к. $\angle 5+\angle 2+\angle 4=180^{\circ} \Rightarrow \angle 1+\angle 2+\angle 3=180^{\circ}$. Что и требовалось доказать.

Метод синтетический: Проводим $CK \parallel AB$;

$\angle 5=\angle 1$; $\angle 4=\angle 3 \Rightarrow \angle 5+\angle 2+\angle 4=180^{\circ} \Rightarrow \angle 1+\angle 2+\angle 3=180^{\circ}$. Что и требовалось доказать.

«Результатом подобной последовательной работы может служить то, что учащиеся смогут самостоятельно решать различные задачи на доказательство. Часть задач из задачника можно перенести на большие листы бумаги или слайды мультимедийной презентации (чертеж и условие). Такие приемы служат для проведения устных упражнений.

Требование любой задачи на доказательство заключается в том, чтобы доказать некоторое сформулированное в задаче утверждение. А что же это означает?

В жизни нередко, говоря о доказательстве, имеют в виду просто проверку приведенного утверждения. Но в науке проверка и доказа-

тельство – это разные вещи, однако, естественно, и связанные друг с другом» [1].

«Если очень внимательно присмотреться к этому доказательству, то можем заметить, что его сутью является построение такой последовательности ранее доказанных и принятых в математике утверждений, прямым логическим следствием которых является утверждение, которое нам надо было доказать. В общем, доказать какое-либо утверждение – это означает показать, что это утверждение есть логическое следствие системы ранее доказанных и принятых в науке утверждений (или, как говорят, некоторой теории).

Любой шаг доказательства может иметь следующую структуру: 1) уже доказанное или принятое утверждение; 2) условие задачи; 3) логическое следствие из использования данного общего утверждения к данному условию задачи» [2].

Задачи на доказательство в большей степени влияют на развитие логического мышления учащихся. Исключительно при построении доказательств формируется логическое мышление учащихся, развиваются логические схемы решения задач, возникает потребность школьников в доказательстве математических фактов.

Умение использовать многие приемы, способы и методы решения математических задач должно быть доведено до автоматизма, чтобы при решении задач техническая сторона не отвлекала мышление ученика, а помогала поиску решения.

Когда ученики решают задачи на построение, они получают теоретические и практические знания «графической грамотности». Происходит развитие пространственного воображения, сообразительность.

Исследование доказательства и решение задачи способствуют большему усвоению учащимися теоретического материала, развитию их логического мышления.

При изучении геометрических построений необходимо преодолевать трудности логического порядка. В школе чтобы преодолеть эти трудности важно сопровождать логические конструкции фактическими построениями при помощи геометрических инструментов, а также изображениями, выполняемыми от руки.

Весь процесс решения задачи на построение сопровождается выполнением соответствующих чертежей («чертеж-задание», «чертеж-набросок», «чертеж-построение», «чертеж для исследования»).

Логическое и активное мышление учеников развивает решение задач на построение. Анализ, доказательство и исследование при решении задач вырабатывают у учащихся навыки правильно мыслить и логически рассуждать. При решении задач на построение они должны создать необходимую фигуру, которую можно изменять в процессе решения.

В какой момент при изучении геометрии следует представить учащимся общую схему решения задач на построение? Первым элементом для изучения следует выбрать построение в качестве перечисления и описания тех или иных операций. Вторым элементом следует выбрать исследование задачи. Третьим элементом будет является доказательство правильности выполнения построения. Четвертым элементом является анализ.

Следовательно, в деле введения понятий анализа, построения, доказательства и исследования необходимо соблюдать постепенность и настойчивость многократного систематического обращения к одним и тем же вопросам.

Список литературы

1. Груденов, Я.И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике. /– М.: Педагогика, 1987. – 160 с.
2. Гусев, В.А. Преподавание геометрии в 6-8 классах: Сб. статей. / – М.: Просвещение, 1979. – 287 с.
3. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике: учеб. пособие: в 2 ч. /– М.: Просвещение, 1977. – Ч. 1: Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – 110 с.
4. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике: учеб. пособие: в 2 ч. /– М.: Просвещение, 1977. – Ч. 2: Обучение математике через задачи и обучение решению задач. – 144 с.
5. Мухина, В.С. Возрастная психология. Феноменология развития: учебник для студ. высш. Учеб. заведений /– М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 608 с.

УДК 514.112.3

Логунов Игорь Сергеевич
Доцент кафедры математики и прикладных информационных технологий и методики обучения математике имени Н.А. Ильиной,
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, Орел

ТРИ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Аннотация. *В статье доказываются малоизвестные теоремы для произвольного треугольника и равнобедренной трапеции.*

Ключевые слова: *треугольник и его элементы, трапеция и её элементы.*

Logunov Igor Sergeevich
Associate Professor of the department of mathematics and applied information technologies and methods of teaching mathematics named after N.A. Ilyina,
Orel State University,
Russia, Orel

THREE THEOREMS FOR ONE TRIANGLE

Abstract. *The article proves little-known theorems for an arbitrary triangle and an isosceles trapezoid.*

Keywords: *triangle and its elements, trapezoid and its elements.*

Т е о р е м а 1. В произвольном треугольнике имеет место тождество (1).

Пусть h_a, h_b, h_c — высоты ΔABC, проведённые к его сторонам a, b, c; r — радиус вписанной окружности, r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей, S — площадь ΔABC, p — полупериметр. Докажем тождество:

$$4 \cdot \left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} \right) = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании равенств

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

левую часть равенства (1) перепишем так

$$4 \cdot \left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} \right) = 4 \cdot \left(\frac{a^2}{4S^2} + \frac{b^2}{4S^2} + \frac{c^2}{4S^2} \right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{S^2}. \tag{2}$$

Далее, применяя известные формулы $S = pr, S = r_a \cdot (p - a)$, $S = rb \cdot (p - b), S = rc \cdot (p - c)$, и, следовательно, преобразуем правую часть

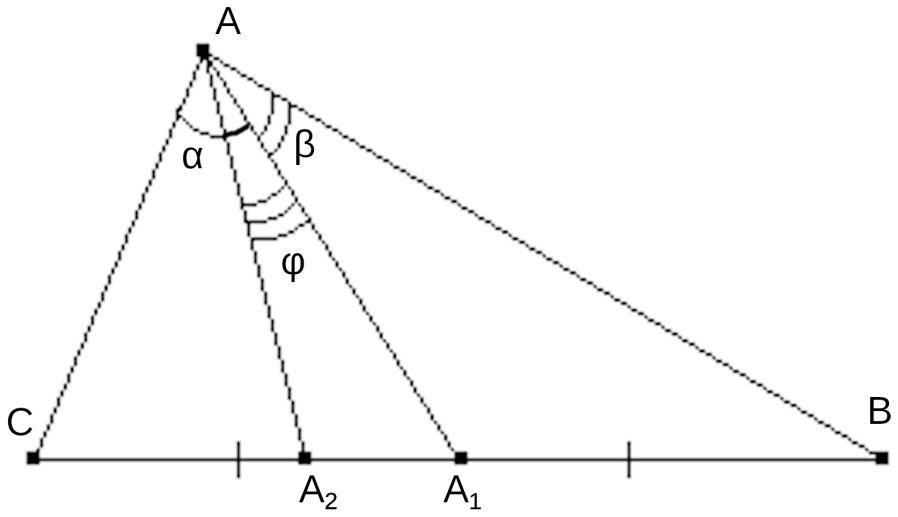
равенства (1).

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=\frac{p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2}{S^2}= \\ =\frac{4p^2-2p\cdot(a+b+c)+a^2+b^2+c^2}{S^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{S^2}. \tag{3}$$

Сравнивая равенства (2) и (3), приходим к равенству (1).

Т е о р е м а 2. Способ вычисления по углам треугольника угла между его биссектрисой и медианой, проведёнными из общей вершины.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся чертежом к задаче, где AA_1 — медиана, AA_2 — биссектриса.



Так как в ΔCAA_1 и ΔA_1AB основания CA_1 A_1B и высоты (на чертеже не присутствуют) равны, то $S_\Delta CAA_1 = S_\Delta A_1AB$ и $\frac{1}{2}AC\cdot$
$\cdot AA_1\cdot\sin CAA_1=\frac{1}{2}AA_1\cdot AB\cdot\sin BAA_1$ и далее

$$\frac{\sin CAA_1}{\sin BAA_1}=\frac{AB}{AC}. \tag{1}$$

В ΔABC по теореме синусов имеем

$$\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{AB}{AC}. \tag{2}$$

Значит,

$$\frac{\sin CAA_1}{\sin BAA_1}=\frac{\sin C}{\sin B}. \tag{3}$$

Пусть $\angle A_1AA_2=\varphi, \angle CAA_2=\alpha, \angle BAA_1=\beta$. Далее, очевидно

$$\alpha+\beta=A, \tag{4}$$

$$\varphi=\angle CAA_1-\angle CAA_1=\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{5}$$

Перепишем равенство (3) в виде

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin C}{\sin B} \tag{6}$$

и из равенства (6) по свойству пропорции имеем:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\sin C+\sin B}{\sin C-\sin B},$$

после применения тождеств для суммы и разности синусов получаем промежуточный результат:

$$\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{2\sin\frac{C+B}{2}\cos\frac{C-B}{2}}{2\cos\frac{C+B}{2}\sin\frac{C-B}{2}}$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{C+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}}. \tag{7}$$

Так как $\operatorname{tg}\frac{C+B}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ-A}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$ и согласно равенствам (4) и (5) $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2};\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\operatorname{tg}\varphi$.

Из равенства (7) окончательно получаем искомую формулу:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}. \tag{8}$$

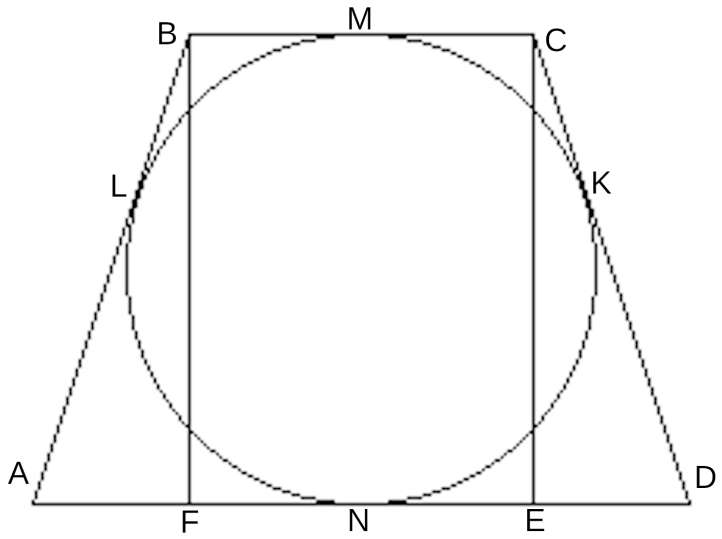
Итак, тангенс угла между медианой и биссектрисой угла любого треугольника есть произведение квадрата половины тангенса угла, из вершины которого они исходят, и тангенса полуразностей двух других углов этого треугольника, причём вычитаемое всегда есть меньший угол.

Т е о р е м а 3. Формулы для нахождения сторон трапеции по радиусам вписанной в неё окружности и описанной около неё окружности имеют вид (8),(9) и (10).

Ставится задача: вывести формулы для вычисления сторон трапеции по радиусам r вписанной и R описанной окружностей.

Поскольку дан радиус R описанной около трапеции окружности, она является равнобедренной.

Воспользуемся чертежом.



Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойству такой трапеции имеем:

$$CK = CM; KD = DN. \tag{1}$$

Сложим эти равенства почленно $CD = CM + DN = \frac{BC+AD}{2}$.

Пусть $AD = a, AB = CD = b, BC = c$, тогда, очевидно:

$$a + c = 2b. \tag{2}$$

Проведём $CE \perp AD$, из ΔCED получаем: $CE^2 = CD^2 - ED^2$ или $4r^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$. Далее из равенства (2) $b = \frac{a+c}{2}$, тогда

$$4r^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = ac, 4r^2 = ac. \tag{3}$$

По известной формуле для ΔABD имеем

$$R^2 = \frac{abc}{4S}. \tag{4}$$

$$S_\Delta ABD = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2r = a \cdot r. \tag{5}$$

$$\begin{gathered} ED = a - AE = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2}, \\ BD = \sqrt{BF^2 + FD^2} = \sqrt{4r^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2} = \\ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16r^2 + (a+c)^2}. \end{gathered} \tag{6}$$

После подстановки (5) в (6) получаем:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot DB}{4S} = \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{16r^2 + (a+c)^2}}{2 \cdot 4a \cdot r} = \frac{b \cdot \sqrt{16r^2 + (a+c)^2}}{8r},$$

но, учитывая равенство (2), имеем:

$$R = \frac{b \cdot \sqrt{16r^2 + 4b^2}}{8r} = \frac{b \cdot \sqrt{r^2 + b^2}}{4r}. \tag{7}$$

Выражение для b через данные величины r и R после тождественных преобразований принимает вид:

$$b = \sqrt{2r\sqrt{r^2 + 4R^2} - 2r^2}. \tag{8}$$

Далее используем равенства (2) и (3):

$$\begin{cases} a + c = 2\sqrt{2r\sqrt{r^2 + 4R^2} - 2r^2}, \\ a \cdot c = 4r^2. \end{cases}$$

Из этой системы найдём выражения для сторон a и c данной трапеции:

$$a = \sqrt{2r\sqrt{r^2 + 4R^2} - 2r^2} + \sqrt{2r\sqrt{r^2 + 4R^2} - 6r^2}, \tag{9}$$

$$c = \sqrt{2r\sqrt{r^2 + 4R^2} - 2r^2} - \sqrt{2r\sqrt{r^2 + 4R^2} - 6r^2} \tag{10}$$

Искомые формулы (8), (9), (10) выражают стороны a, b и c данной в условии задачи трапеции через r и R.

УДК 372.851

Марушкина Алёна Андреевна
магистрант
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Овсянникова Татьяна Львовна
кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры математики и прикладных информационных технологий и методики обучения математике имени Н.А. Ильиной
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

КУРС ПО ВЫБОРУ: «МАТЕМАТИКА ВОКРУГ ТЕБЯ» ДЛЯ 9 КЛАССА КАК СРЕДСТВО ОРИЕНТАЦИИ УЧАЩИХСЯ В МИРЕ СОВРЕМЕННЫХ ПРОФЕССИЙ

Аннотация. *В статье описана структура курса по выбору «Математика вокруг тебя» для учащихся 9 классов. Этот курс предполагает решение задач практической направленности. Показано, что при структурировании этого курса в соответствии с классификацией профессий по классам типовых решаемых задач данный курс может иметь также и профориентационную направленность.*

Ключевые слова: *преподавание математики, курс по выбору, профориентация, приложения математики.*

Marushkina Alyona Andreevna
Undergraduate
Orel State University named after I.S. Turgenev,
Russia, Oryol

Ovsyannikova Tatiana Lvovna
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Mathematics and Applied Information Technologies and Methods of Teaching Mathematics named after N.A. Ilyina
Orel State University named after I.S. Turgenev,
Russia, Oryol

ELECTIVE COURSE: "MATHEMATICS AROUND YOU" FOR THE 9TH GRADE AS A MEANS OF ORIENTATION OF STUDENTS IN THE WORLD OF MODERN PROFESSIONS

Abstract. *The article describes the structure of the elective course "Mathematics around you" for 9th grade students. This course involves solving practical tasks. It is shown that when structuring this course in accordance with the classification of professions by classes of typical tasks to be solved, this course may also have a career orientation.*

Keywords: *teaching mathematics, elective course, career guidance, applications of mathematics.*

Перед учащимися 9 класса стоит выбор направления дальнейшего обучения (выбор профильных классов средней школы или специальностей СПО). В помощь девятиклассникам предлагается проведение различных профориентационных мероприятий. В их числе могут быть курсы по выбору, предусматриваемые учебными планами средних школ, но не всегда успешно реализуемые. Однако именно такие курсы, расширяющие у учащихся понимание школьных предметов, обладают большим потенциалом в сфере профессионального самоопределения.

Курс по выбору «Математика вокруг тебя» для учащихся 9 классов, разработанный авторами статьи, имеет целью формирование осознанного выбора профиля обучения в старшей школе через оценку собственных возможностей в усвоении математического материала на основе решения различного типа задач практической направленности.

Содержание курса разработано с учётом классификации профессий по классам типовых решаемых задач [1]: «человек – живая природа», «человек – техника», «человек – человек», «человек – знаковая система», «человек – художественный образ».

Курс состоит из восьми разделов, пять из которых соответствуют сферам решаемых задач. В таблице 1 представлен план этих разделов.

Таблица 1 – Содержание первых пяти разделов курса

Сфера	Беседа о профессиях	Решаемые задачи
«человек – техника»	инженер, строитель, пилот, трак-	на составление расчётных таблиц; на нахождение опти-

Сфера	Беседа о профессиях	Решаемые задачи
	торист, автомеханик, пожарный	мального варианта; на движение; планиметрические задачи на вычисление
«человек – человек»	психолог, учитель, врач, продавец, портной, повар, фармацевт, медсестра, спасатель, юрист	на пропорции, проценты, решение логических задач; планиметрические задачи на доказательство
«человек – природа»	биолог, химик, синоптик, агроном, ветеринар, биоинженер	на смеси и растворы; на вычисление площадей, объёмов; задачи на расчёт вероятностей случайных событий, статистические задачи
«человек-знаковая система»	бухгалтер, экономист, математик, архитектор, конструктор, картограф, программист	на производительность; на проценты; на числовые последовательности; на исследование диаграмм и графиков
сфере «человек-художественный образ»	дизайнер, художник, сценарист, писатель, парикмахер, стилист	планиметрические задачи; творческие задачи

При знакомстве с группой профессий используются следующие формы работы:

– беседа с учащимися;

– доклады учащихся (сопровождающиеся презентациями);

– интервью родителей;

– виртуальные экскурсии.

В связи с тем, что одной из целей курса по выбору является как знакомство обучающихся с различными профессиями, так и формирование математического аппарата для решения практических задач, то учитель акцентирует внимание учащихся на том, что практически в каждой профессии необходимы определённые знания из курса математики. Поэтому он предлагает обучающимся ситуации, с которыми могут столкнуться в своей работе представители той или иной профессии, даже таких, на первый взгляд, отдалённых от математики,

как криминалист, агроном, мастер-отделочник, риэлтор, медицинский работник, водитель, геодезист, и др.

Практическая часть направлена на обобщение и систематизацию знаний учащихся, закрепление и развитие умений и навыков, полученных в курсе алгебры и геометрии основной школы, с учётом их профессиональной и практико-ориентированной направленности. Здесь преимущество отдаётся работе учащихся в мини-группе постоянного состава, но уделяется время и самостоятельной индивидуальной работе.

Шестой раздел – Решение задач для подготовки к ОГЭ из раздела «Реальная математика». Реальная математика – это задачи, с которыми каждый сталкивается в повседневной жизни.

Раздел «Защита индивидуального проекта» (седьмой раздел) предполагает подготовку проекта и его защиту с демонстрацией презентации про профессию, которую учащийся выбрал для себя, которую он считает подходящей и интересной. Обязательным при выполнении проекта является показ значимости математики для специалиста в соответствующей профессиональной области и включение в проект ряда математических задач, решаемых в ходе профессиональной деятельности. В ряде случаев могут быть приведены задачи, выходящие за пределы знаний 9 класса.

Восьмой раздел включает анкетирование и итоговую беседу о важности математических знаний в жизни каждого человека.

Для реализации программы с учётом поставленных задач исследования разработаны методические рекомендации, включающие следующие положения [2]:

1) Поскольку доля самостоятельной работы учащихся составляет около половины всего учебного времени данного курса, то для правильной организации работы группы и самостоятельной познавательной деятельности школьников весьма важна организационная роль учителя. Также в ходе курса учитель осуществляет разноуровневый контроль усвоения материала в рамках каждого типа задач. При этом, поскольку усвоение материала в разных группах не зависит от другого типа задач, учащиеся абсолютно безболезненно могут переходить от одного типа к другому в течение всего курса.

2) На уроках математики учитель ставит перед собой не только предметные цели, но и развивающие. Математика закладывает основу рационального мышления и интеллектуального развития. Занятия математикой формируют логическое мышление, тренируют ум, что

позволяет сопоставлять различные понятия, здраво анализировать их и осмысливать. Математические знания улучшают абстрактное мышление, усиливают его быстроту, учат анализировать, обобщать, абстрагироваться, концентрироваться, прогнозировать и тренируют память. Поэтому на занятия предлагаемого курса по выбору учащимся предлагаются специальные упражнения на развитие логического мышления, пространственного мышления, наблюдательности, памяти, внимания.

3) Одна из основных форм проведения занятий – работа учащихся в мини-группах. При отборе задач для каждой группы учитель следит, чтобы в них отражались различные темы курса алгебры и геометрии, чтобы они не повторялись по способам решения. То есть задача учителя состоит в том, чтобы в результате изучения данного курса у ребят не только сложились определенные представления о различных профессиях, но и убеждённость в том, что весь изучаемый в курсе основной школы математический материал имеет практическое применение.

Приведём несколько примеров задач, предлагаемых школьникам для решения и демонстрирующих применение математики в профессиональной деятельности различных специалистов [3-4].

Профессия – строитель. Постройка дома начинается с котлована. Требуется выкопать котлован размером 10х12 метров и глубиной 2 метра. Сколько нужно машин для вывоза грунта в течение одной смены, если грузоподъёмность одной машины 10 м³, а за смену одна машина может выполнить 8 рейсов?

Профессия – фермер. Фермеру необходимо заготовить солярку для полного цикла выращивания пшеницы на площади 100 га. Для хранения используется цистерна цилиндрической формы, диаметр основания которой составляет 1,4 м, а высота 2,2 м. Достаточно ли цистерны данного объёма для хранения солярки, предназначенной для выполнения работ по выращиванию пшеницы на указанной площади?

Профессия – учитель. Учителю нужно сравнить качественную успеваемость учеников 6 «А» и 6 «Б» за четверть. Для расчёта показателей качественной успеваемости используется формула:

$$K = \frac{N_{45}}{N},$$

где N_{45}– количество учащихся, получивших оценки «4» и «5»;

N – количество всех учащихся.

В 6 «А» 27 учеников, из них без троек закончили 15 человек. В 6 «Б» 24 ученика, из них без троек закончили 13 человек. В каком классе выше качественная успеваемость?

Профессия – врач. Врачу необходимо 500 мл раствора фурацилина. Рассчитайте какое количество антисептика потребуется для приготовления 0,2% раствора фурацилина.

Профессия – повар. При приготовлении обеда в школьной столовой нужно учитывать, что при варке мясо теряет 35% своего веса. Сколько надо взять сырого мяса, чтоб получить 20 кг варёного?

Профессия – биолог. С 1 гектара соснового леса можно собрать до 2 кг семян. В килограмме в среднем 170 штук семян. Сколько семян можно собрать с 15 гектар соснового леса?

Профессия – паркетчик. Паркетчик, вырезая квадраты из дерева, проверял их так: сравнивал длины сторон, и если все четыре стороны были равны, то считал квадрат вырезанным правильно. Надёжна ли такая проверка?

Таким образом, разработанный курс по выбору позволяет совместить профориентационную работу и углубление знаний по математике.

Список литературы

1. Климов ЕЛ. Введение в психологию труда: Учебник для вузов. – М.: Культура и спорт, ЮНИТИ, 1998. 350 с.
2. Воронина Г.А. Элективные курсы: алгоритмы создания, примеры программ: практическое руководство для учителя. – М.: Айрис-пресс, 2006. 121 с.
3. Тарасова Т.А. Сборник задач по математике с профессиональной направленностью: метод. пособие для проф. образования. – Каменка: Издательский центр ГБОУ СПО ККПТП, 2014. 40 с.
4. ОГЭ Математика. Типовые экзаменационные варианты / Под ред. И.В. Ященко – М.: Национальное образование, 2020. 222 с.

УДК 372.851

Мельников Роман Анатольевич
кандидат педагогических наук, доцент,
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина,
Россия, Елец

Саввина Ольга Алексеевна
доктор педагогических наук, профессор,
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина,
Россия, Елец

Черноусова Наталия Вячеславовна
кандидат педагогических наук, доцент,
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина,
Россия, Елец

ОБ ОПЫТЕ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ ПО ДУХОВНО-НРАВСТВЕННОМУ ВОСПИТАНИЮ ДЛЯ БУДУЩИХ МАГИСТРОВ В ОБЛАСТИ БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКИ

Аннотация. *В статье раскрываются возможности реализации духовно-нравственного воспитания в рамках подготовки магистров, будущая профессия которых подразумевает преподавательскую деятельность в образовательных организациях уровня СПО. С этой целью была разработана программа «Теория и практика духовно-нравственного воспитания в системе профессионального образования».*

Ключевые слова: *магистратура, профессиональное обучение, духовно-нравственное воспитание, национальные ценности.*

Melnikov Roman
Candidat of Pedagogics sciences, Associate Professor,
Bunin Yelets State University,
Russia, Yelets

Savvina Olga
Doctor of Pedagogics sciences, Professor,

Bunin Yelets State University,
Russia, Yelets

Chernousova Natalia
Candidat of Pedagogics sciences, Associate Professor,
Bunin Yelets State University,
Russia, Yelets

ABOUT THE EXPERIENCE OF IMPLEMENTING THE PROGRAM ON SPIRITUAL AND MORAL EDUCATION FOR FUTURE MASTERS IN THE FIELD OF BUSINESS INFORMATICS

Abstract. *The article reveals the possibilities of implementing spiritual and moral education in the framework of the preparation of masters, whose future profession implies teaching in educational organizations at the level of vocational education. For this purpose, the program "Theory and practice of spiritual and moral education in the system of vocational education" was developed.*

Keywords: *magistracy, vocational training, spiritual and moral education, national values.*

1. Введение

С 2021 г. в Елецком госуниверситете началась подготовка магистрантов по направлению 44.04.04 Профессиональное обучение, направленность (профиль) Бизнес-информатика. В Федеральном государственном образовательном стандарте по соответсвующей программе обучения, утвержденном приказом Минобрнауки России в 2018 г., появилась новая компетенция ОПК – 4, согласно которой будущий магистр должен быть «Способен создавать и реализовывать условия и принципы духовно-нравственного воспитания обучающихся на основе базовых национальных ценностей». Значит, помимо образовательной деятельности (чтение лекций, проведение практических и лабораторных занятий, руководство практиками, руководство научно-исследовательской работой обучающихся), относящейся к направлению «Бизнес-информатика», будущие магистры должны участвовать в построении воспитывающей образовательной среды в организации уровня СПО. В связи с этим возникла необходимость включения в соответствующий учебный

план новой дисциплины «Б1.О.02.02 Теория и практика духовно-нравственного воспитания в системе профессионального образования» и разработки соотвествующей рабочей программы».

2. Основная часть

К сожалению, ранее в стандартах высшего педагогического образования отсутствовала компетенция, предполагающая духовно-нравственное воспитание, поэтому у профильных кафедр почти нет опыта организации занятий, на которых бы она формировалась. С одной стороны, это можно рассматривать как отягощающее обстоятельство, но здесь стоит вспомнить афоризм «Дорогу осилит идущий», т.е. начать действовать! С другой стороны, – это замечательное новшество, так как оно позволяет продемострировать молодому поколению обратную сторону тотальной цифровизации. Её итоги мы видим воочию: молодежь днями напролет просиживает в интернете, перестаёт вживую общаться с родственниками и близкими людьми, ежедневно подвергается воздействию потока информационного шума и негативной информации, способной вызвать изменение психики человека, появление различных девиаций. Изучение духовно-нравственной культуры, в основе которой лежат национальные ценности (литература, искусство, архитектура, религия и пр.), позволит сгладить эффект агрессивного воздействия современных информационно-коммуникационных технологий на психику молодого человека, предотвратить такия явления как «цифровая ломка», аутизм и пр. Всем хорошо известны примеры, когда временным отключением сервера, сбоем в работе какой-либо программы или неполадками в операционной системе гаджета из-за проникновения в неё вируса многие молодые люди начинают нервничать, грубить старшим и т.п., что, весьма трудно поддается коррекции.

На изучение дисциплины «Теория и практика духовно-нравственного воспитания в системе профессионального образования» отводится 36 аудиторных часов в первом семестре.

Ее целью является формирование у будущего магистра способности создавать и реализовывать условия и принципы духовно-нравственного воспитания обучающихся на основе базовых национальных ценностей.

Задачи изучения дисциплины:

- знакомство с основными направлениями развития современной педагогической науки о духовно-нравственном воспитании;
- активизация самостоятельной исследовательской деятельности обучающихся.

В рамках рабочей программы дисциплины предполагается рассмотрение следующих вопросов: 1. Законодательное регулирование обучения и воспитания в Российской Федерации. 2. Высшая школа в современных условиях. 3. Воспитание как целенаправленный процесс. Закономерности и принципы воспитания. 4. Духовно-нравственное воспитание как основополагающая задача образовательных и профессиональных стандартов. 5. Духовно-нравственное воспитание как объект педагогического исследования. 6. Цель и задачи духовно-нравственного воспитания. 7. Добродетели и страсти в христианском учении о спасении. 8. Средства духовно-нравственного возрастания человека. 9. Препятствия на пути спасения в православной традиции. 10. Принципы, методы, механизмы и формы духовно-нравственного воспитания. 11. Результаты духовно-нравственного воспитания. 12. Проблема диагностики духовно-нравственного воспитания. 13. Евангельские ценности в профессиональной деятельности IT-специалиста. 14. Святоотеческие установки межличностных отношений в области бизнеса. 15. Отношение к богатству и бедности в православном христианстве. 16. Благотворительность в России: история и современность.

Для активизации самостоятельной исследовательской деятельности студентов по дисциплине была разработана тематика рефератов и соответствующий перечень проверочных исследовательских вопросов. Приведем примеры в таблице 1.

Таблица 1 – Материалы для самостоятельной исследовательской деятельности

Тема реферата	Проблемные вопросы
1. Педагогическая деятельность святого праведного Иоанна Кронштадтского	1.Какое чудо в детстве произошло со святым праведным Иоанном Кроншдатским? 2. Как святой праведный Иоанн Кронштадтский относился к приему воспитания наказанием? 3. В каком событии, произошедши в Ельце, принимал участие святой праведный Иоанн Кронштадтский?
2. Развитие педагогических идей славянофилов в России	1. Каким образом жизнь А.С. Хомякова связана с Липецким краем? 2. В каком случае А.С. Хомяков считал, что преподавание Закона Божиего «приготовляет молодого человека к неверию»? 3.В чем, по мнению А.С. Хомякова, заключается высший подвиг?
3. Жизнь и педагогические	1. Что послужило С.А. Рачинскому мотивом к отказу от научной карьеры?

взгляды С.А. Рачинского	2. Какое значение педагог придавал религиозному воспитанию и как осуществлял это на практике?
4. Педагогические идеи святителя Иоанна Златоуста	1. Для иллюстрации каких двух пороков святитель Иоанн Златоуст приводит примеры аргументов родителей к побуждению детей заниматься науками: "Такой-то, - говорят, - человек низкий и из низкого состояния, усовершившися в красноречии, получил весьма высокую должность, приобрел весьма большое имение, взял богатую жену, построил великолепный дом, стал для всех страшен и знаменит"…». Приведете свои аргументы, побуждающие получить образование. 2. Перечислите требования, которые святитель Иоанн Златоуст предъявлял к учителям. 3. Есть ли в Ельце храм, посвященный святителю Иоанну Златоусту?
5. Роль русских святых в духовной жизни общества	1. Какой поэтический совет митрополит Филарет (можно процитировать) дал А.С. Пушкину для борьбы с унынием? 2. Приведите примеры трех-четырех русских святых, оказавших влияние на духовное пробуждение нашего общества в XIX веке.
6. Педагогические идеи святителя Василия Великого	1. Почему и в каком случае святитель Василий Великий считал изучение наук полезным? 2. С какой целью святитель Василий Великий приводил рассказ о Пифагоре, приказавшем переменить напев пирующим?

3. Выводы

Включение в стандрат компетенции по духовно-нравственному воспитанию открывает новые возможности организации воспитательной работы для вузов. В качестве реализации этой возможности предлагается включение в учебный план дисциплины «Теория и практика духовно-нравственного воспитания в системе профессионального образования».

Первый опыт изучения дисциплины в ЕГУ им. И.А.Бунина позволяет говорить о положительных тенденциях. Действительно, будущие магистранты проявляют интерес к проблеме духовно-нравственного воспитания, активно включаются в обсуждение соотвествующих вопросов и выполняют рефераты, содержащие исследовательские задания.

Список литературы

1. Дивногорцева, С.Ю. Основы православной педагогической культуры : учебное пособие / С.Ю. Дивногорцева ; Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет. – Москва : ПСТГУ, 2017. – 243 с. – Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7429-1124-1 ; То же [Электронный ресурс]. – URL: http://biblioclub.ru /index.php ?page=book&id=494960

УДК 378.147.31

Морозова Наталия Николаевна
кандидат физико-математических наук, доцент,
сотрудник,
Академия Федеральной службы Охраны Российской Федерации,
Россия, Орёл

Проскурякова Людмила Константиновна
кандидат педагогических наук, доцент,
сотрудник,
Академия Федеральной службы Охраны Российской Федерации,
Россия, Орёл

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ СОВРЕМЕННОЙ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Аннотация. *В статье рассмотрена роль лекции в учебном процессе по математике; указаны факторы, обеспечивающие эффективность лекционных занятий, и требования, предъявляемые к ним. Проанализированы методические особенности лекций в условиях развития компьютерных технологий. Описаны способы активизации работы обучающихся на лекциях. Охарактеризовано дидактическое содержание основных организационно-логических этапов лекционного занятия. Представлено краткое описание возможной достаточно универсальной схемы доказательства математических теорем.*

Ключевые слова: *лекция; математика; технический вуз; методические особенности.*

Morozova Natalia Nikolaevna
candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
employee,
Academy of the Federal Security Service of the Russian Federation,
Russia, Orel

Proskuryakova Lyudmila Konstantinovna
candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
employee,
Academy of the Federal Security Service of the Russian Federation,
Russia, Orel

METHODOLOGICAL FEATURES OF A MODERN LECTURE ON MATHEMATICS AT A TECHNICAL UNIVERSITY

Abstract. *The article considers the role of lectures in the educational process in mathematics; the factors that ensure the effectiveness of lectures and the requirements for them are indicated. The methodological features of lectures in the context of the development of computer technologies are analyzed. The ways of activating the work of students at lectures are described. The didactic content of the main organizational and logical stages of the lecture session is characterized. A brief description of a possible sufficiently universal scheme for proving mathematical theorems is presented.*

Keywords: *lecture; mathematics; technical university; methodological features.*

По мнению Л. Д. Кудрявцева, "лекция занимает особое место в учебном процессе: она играет в нем основополагающую роль, направляет его, определяет его содержание и уровень. Поэтому от качества лекций во многом зависит и качество всего обучения в целом" [1, С. 22]. В образовательном процессе курса математики технического вуза лекция является основной формой организации учебного процесса, определяющей его методологию и особенности всех остальных форм учебной работы, включая внеаудиторную самостоятельную работу.

Усвоение знаний, формирование умений и компетенций, развитие мышления обучающихся на лекции достигается путем сложного сочетания таких факторов, как логика изложения учебного материала, воздействие на них устной речи преподавателя, визуальных эффектов демонстрируемой презентации и тех записей, которые преподаватель выполняет на доске по ходу чтения лекции, а также таких психологи-

ческих особенностей обучающихся, как математические способности, память, быстрота ориентирования в учебном материала, общее развитие и т. п.

Изложение учебного материала лекций по математике должно удовлетворять требованиям строгости согласно правилам формальной логики, доказательности, лаконичности, соблюдения основных принципов дидактики: системности, последовательности, систематичности, наглядности и др. [2, С.171-177]. При этом обеспечение необходимого уровня научности изложения должно сочетаться с доступностью и осуществляться с учетом учебно-познавательной готовности обучающихся к освоению изучаемого материала и, прежде всего, с учетом школьной математической подготовки, и этот уровень постепенно повышается по мере развития математической культуры обучающихся. Лекции призваны сформировать интерес обучающихся к учебной дисциплине, понимание ее значимости для последующего обучения, профессионального становления и интеллектуально-личностного развития. "Обучение должно быть построено таким образом, чтобы в его процессе учащийся, получая знания, удивлялся и восхищался мудростью тех, кто принес людям эти знания, удивлялся и восхищался гармонией … вещей, с которыми его знакомят. Чтобы он по существу оценивал смысл и значение приобретаемых знаний" [1, С. 19].

Основная особенность современной лекции состоит в широком использовании мультимедийных технологий, что, несомненно, повышает ее информационную насыщенность. Однако специфика математики как учебной дисциплины состоит в том, что ее преподавание не может быть сведено только к сообщению определенного фактологического материала математического содержания, требуется раскрытие перед обучающимися логики формирования математических понятий, доказательства теорем, решения задач. Но продемонстрировать эту логику, демонстрируя кадры презентаций, невозможно. Необходимо рассуждать с привлечением к этому процессу обучающихся, фиксируя на доске результаты этих рассуждений. Такое сочетание словесных рассуждений с их визуализацией способствует лучшему пониманию и усвоению изучаемого материала. С самой первой лекции важно формировать у обучающихся убеждение в том,

что для успешного освоения математики, надо, как советовал А.Н. Колмогоров, "заменить запоминание пониманием. Тогда и запоминать правила будет не так трудно" [3, С. 13]. Для активизации процесса развития логического мышления обучающихся на лекции целесообразно использование таких методов, как создание проблемных ситуаций, эвристическая беседа, метод рассуждения вслух и др.

Организационными и вместе с тем логическими этапами лекции по математике являются вступление, собственно изложение материала лекции и заключение. Во вступительной части лекции сообщается тема лекции и перечень планируемых к рассмотрению учебных вопросов (такая информация позволяет обучающимся прогнозировать течение лекции и лучше в ней ориентироваться); проводится экспресс-повторение учебного материала предыдущих лекций и, прежде всего, материала, который востребован в ходе данной лекции. Проведение такого повторения в форме фронтального опроса ставит обучающихся перед необходимостью подготовки к очередному лекционному занятию, стимулирует их работу с первых минут лекции и повышает ее результативность, поскольку обеспечивает лучшее аргументированное пониманию нового материала.

Активизации работы обучающихся на лекции и осознанию значения ее глубокого и прочного освоения для дальнейшего обучения в вузе способствует знакомство со схемой межпредметных связей, содержащей информацию о дисциплинах профессиональной подготовки, при изучении которых требуются знания обучающимися математического аппарата данной лекции и умения применять его в новой предметной области, а также информации о периоде изучения этих дисциплин.

С целью развития познавательного интереса, обучающиеся кратко знакомятся с историческими и гносеологическими предпосылками возникновения и последующего развития понятий, планируемых к рассмотрению на лекции, с интересными фактами из жизни и научной деятельности их создателей. Такой экскурс позволяет обучающимся оценить изучаемый материал с точки зрения его детерминированного развития и расширяют научный кругозор.

В процессе изложения учебных вопросов лекции важно установить устойчивую обратную связь с обучающимися с тем, чтобы на

протяжении всей лекции поддерживать их интеллектуально-познавательную активность и добиваться продуктивной работы.

Реальная познавательная активность обучающихся на лекции достигается реализацией идей проблемного обучения, когда обучающимся не просто предлагается учебный материал в готовом виде, но они непосредственно участвуют в процессе введения понятий, доказательства теорем, формулирования правил и алгоритмов, решения с их использованием базовых задач. Подобное сотворчество преподавателя и обучающихся развивает мышление обучающихся, способность критически оценивать возникшую проблемную ситуацию и находить оптимальные пути ее разрешения, формирует познавательную самостоятельность, умение оперативно ориентироваться в предлагаемых обстоятельствах и находить правильные ответы на проблемные вопросы преподавателя.

Проблемный подход к изложению учебного материала на лекции по математике предполагает использование таких методов, как эвристическая беседа, рассуждение вслух, построение контрпримеров, вариативность и альтернативность изложения, поиск примеров, иллюстрирующих изучаемый теоретический материал и т. д.

Метод эвристической беседы наиболее результативен при изучении в целом несложного учебного материала, существенно базирующегося на имеющемся у обучающихся багаже знаний, например, линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления функций одного и нескольких переменных. В процессе изучения более сложного учебного материала, например, теории функций комплексного переменного, гармонического анализа, целесообразно применение метода рассуждения вслух, при реализации которого, например, в ходе доказательства теорем, преподаватель вслух ставит перед собой вопросы и сам отвечает на них, проговаривая логику процесса поиска основных смысловых этапов доказательства. Демонстрация преподавателем метода рассуждения вслух содействует пониманию обучающимися особенностей и преимуществ логически последовательного аргументированного доказательства теорем и, вместе с тем, развитию у них способностей самостоятельного выполнения подобного доказательства.

Активизации интеллектуально-познавательной деятельности обучающихся способствует также знакомство с существованием альтернативных способов доказательства, например, теоремы Лопиталя, достаточных условий наличия экстремумов функции по первой производной, точек перегиба и асимптот графиков функций. При этом на лекции используется тот способ доказательства, который не представлен в рекомендованном учебном пособии и обучающимся предлагается в часы самостоятельной работы познакомиться с другим способом доказательства, критически проанализировать и сопоставить рассмотренные способы с тем, чтобы в дальнейшем, например, на экзамене, доказывать одну из этих теорем тем способом, который показался наиболее приемлемым.

Метод контрпримеров формирует у обучающихся понимание значения математической строгости формулировок и доказательства теорем, например, обязательности требования существования непрерывной производной в необходимом условии существования точки экстремума функции.

Успешному пониманию и активному усвоению основных понятий и методов, рассматриваемых на лекции, содействует вариативный подход к их предъявлению обучающимся. Это имеет место, например, в случаях с введением понятий предела функции одного переменного в текстовой, символьной, графической формах и непрерывности функции на языке пределов и приращений.

Приведение в формульном и графическом виде примеров функций одного переменного, непрерывных в точке, но не дифференцируемых в ней, является убедительной наглядной иллюстрацией необратимости теоремы о непрерывности дифференцируемой функции.

Для формирования у обучающихся дидактически грамотного умения выполнять аналитическое доказательство математических теорем полезно их познакомить на одной из первых лекций с достаточно универсальной схемой такого доказательства и, по возможности, систематически ее использовать. Основными возможными этапами доказательства являются: четкое выделение данных и заключения теоремы, введение необходимых обозначений, запись условия в символьной форме, выполнение схематического чертежа, выделение в условии теоремы смысловых частей, конкретизация условия, вспо-

минание ранее изученных теоретических положений и методов, которые могли бы быть использованы при доказательстве данной теоремы, составление плана доказательства, определение математического аппарата, планируемого к использованию при доказательстве; непосредственное выполнение и запись процесса доказательства; анализ правильности доказательства; выяснение возможности существования более рационального способа доказательства, его реализация и сопоставление с ранее выполненным; если выбранный механизм доказательства не сработал, то выполнение повторного анализа условия для выявления не обнаруженных ранее звеньев в логической цепочке связей между тем, что по условию дано и тем, что требуется доказать, и повторное доказательство теоремы [4, С. 359-360]. При выполнении процесса доказательства теоремы используются такие приемы мыслительной деятельности, как анализ, синтез, аналогия, выделение главного, обобщение, конкретизация. Вместе с тем происходит продуктивное повторение ранее изученного материала и органичное встраивание в него нового материала, что способствует формированию у обучающихся целостной системы математических знаний.

Однако на лекциях нельзя ограничиваться только введением понятий и доказательствами теорем. В целях стимулирования интереса к работе на лекции и обеспечения эффективной подготовки обучающихся к очередному практическому занятию, обязательно демонстрируются возможности и особенности практического применения изучаемого теоретического материала, предлагаются правила и алгоритмы решения соответствующих базовых задач. При этом обязательно привлечение обучающихся к процессу решения, что, с одной стороны, интенсифицирует их работу на лекции, а, с другой, – демонстрирует уровень понимания лекционного материала и позволяет уже на лекции приступить к формированию умений по его практическому использованию. Познавательное значение решаемой на лекции задачи существенно повышается в случае, когда эта задача практико-ориентированного содержания. При рассмотрении на лекции такой задачи, в условиях дефицита учебного времени, как правило, приходится ограничиваться лишь беглым анализом ее прикладного содержания, фиксируя внимание обучающихся на математической составляющей решения.

Предлагаемые подходы к изложению лекционного материала не только активизируют учебную работу обучающихся на лекции, делают ее более осознанной и результативной, но и способствуют развитию их математической культуры.

Существенное влияние на усвоение обучающимися лекционного материала оказывают особенности его визуализации. В современных условиях развития компьютерных технологий возможно определенную часть учебной информации демонстрировать на экране с использованием мультимедийных проекторов. Это, прежде всего, рисунки, таблицы, трудно выполнимые на доске графики, иллюстративные примеры, условия решаемых задач и т.п. Возможна также демонстрация формулировок понятий и теорем, но, особенно в последнем случае, целесообразно математическую информацию предъявлять на экране "пошагово", отдельными смысловыми частями, что облегчает ее понимание и конспектирование. Доказательство теорем и решение задач необходимо оформлять на доске, обсуждая излагаемый материал с обучающимися и синхронизируя проговаривание математического текста с его фиксацией на доске.

В любом случае (при использовании компьютерной техники или доски) все демонстрируемые обучающимся записи должны быть последовательными, структурированными и аккуратными, а размер букв и математических символов должен быть таким, чтобы текст хорошо был виден обучающимися даже с последних рядов лекционной аудитории.

Большое значение для успешного протекания лекции имеет темп изложения лекционного материала. Варьируя его и делая голосовые акценты, преподаватель, без каких-либо дополнительных комментариев, дает обучающимся возможность понять, какую информацию следует занести в конспект, а какая – не требует письменной фиксации.

Стоит отметить целесообразность выборочной периодической проверки преподавателем лекционных конспектов его обучающихся с тем, чтобы иметь возможность внести необходимые коррективы как в содержание лекционного материала, так и в форму его изложения.

По завершении изложения каждого учебного вопроса тезисно подводятся его итоги повторением основных смысловых моментов.

Подобное повторение обеспечивает важную (для лучшего усвоения и запоминания непосредственно на лекции) целостность восприятия учебного вопроса с акцентированием наиболее значимых его элементов.

Большую смысловую нагрузку несет третий, заключительный этап лекции, когда подводятся основные итоги лекции, анализируется и оценивается работа всего лекционного потока и отдельных обучающихся, предлагается задание для самостоятельной отработки лекционного материала, выдается список учебной литературы, рекомендуемой для углубленного изучения материала данной лекции, определяются перспективы дальнейшего изучения дисциплины и указывается содержание очередного учебного занятия. Подводя итоги лекции, важно помнить, что "результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием способностей обучаемого к дальнейшему самостоятельному образованию" [1, С. 20].

Список литературы

1. Кудрявцев, Л.Д. Современная математика и ее преподавание / Л.Д. Кудрявцев. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — 144 с.
2. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский . – 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Просвещение, 1980. — 368 с.
3. Школьникам о математике и математиках / сост. М.М. Лиман. — М.: Просвещение, 1981. — 80 с.
4. Скафа, Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография / Е.И. Скафа. — Донецк : Изд-во ДонНУ, 2004. — 440 с.

УДК 53.05

Румянцев Валентин Сергеевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры экспериментальной и теоретической физики,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Большакова Наталья Николаевна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры физики конденсированного состояния,
Тверской государственный университет,
Россия, Тверь

ДЕМОНСТРАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ

Аннотация. *В статье обоснован метод демонстрации диэлектрического гистерезиса и точки Кюри в сегнетоэлектриках при помощи электронного осциллографа, изложена методика выполнения этой демонстрации, приведена электрическая схема и описана конструкция демонстрационной установки, которая была реализована автором.*

Ключевые слова: *демонстрация, электрические свойства, сегнетоэлектрик, гистерезис, точка Кюри.*

Rumyantsev Valentin Sergeevich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Experimental and Theoretical Physics, Orel State University,
Russia, Orel

Bolshakova Natalia Nikolaevna
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Condensed Matter Physics, Tver State University,
Russia, Tver

DEMONSTRATION OF THE ELECTRICAL PROPERTIES OF FERROELECTRICS

Abstract. *The article substantiates the method of demonstrating dielectric hysteresis and the Curie point in ferroelectrics, describes the method of performing this demonstration, presents an electrical circuit and describes the design of the demonstration installation, which was implemented by the authors.*

Keywords: *demonstration, electrical properties, ferroelectrics, hysteresis, Curie point.*

Среди кристаллических диэлектриков сегнетоэлектрики выделяются тем, что в определённом интервале температур оказываются поляризованными даже в отсутствии внешнего электрического поля. Поляризованность $\vec{P}_S$ кристалла в таком состоянии называется спонтанной (т.е. самопроизвольной). В этом состоянии весь сегнетоэлектрический кристалл может быть разбит на домены – области спонтанной поляризации. В пределах одного домена кристалл поляризован однородно до насыщения. Высокотемпературная граница существования спонтанной поляризации сегнетоэлектрика называется точкой Кюри [1-3].

Под действием внешнего электрического поля доменная структура кристалла необратимо перестраивается. Эта перестройка во внешнем электрическом поле, напряжённость которого $\vec{E}$ направлена вдоль полярной оси кристалла и циклически изменяется по модулю и направлению, носит характер гистерезиса [1-3, 5]. В постоянном электрическом поле достаточно большой напряжённости сегнетоэлектрический кристалл становится однодоменным и может в значительной степени сохранять это состояние после выключения поля.

Перечисленные особенности сегнетоэлектриков позволяют считать их электрическими аналогами ферромагнетиков.

Однодоменный сегнетоэлектрический кристалл обладает ярко выраженными пироэлектрическими, пьезоэлектрическими, электрооптическими и другими уникальными свойствами [1-3]. Многие сегнетоэлектрические кристаллы допускают возможность изготавливать из них изделий по керамической технологии [2,3], что значительно расширяет и без того широкий круг их применения в современной технике.

К сожалению, в вузовских курсах физики мало внимания и времени уделяется этим замечательным материалам. Повышению интереса к ним у слушателей способствуют лекционные демонстрации. В настоящей работе описаны демонстрации основных электрических свойств сегнетоэлектриков, проводимые нами в курсе общей физики.

Демонстрация диэлектрического гистерезиса

Наиболее наглядно диэлектрический гистерезис иллюстрируется графически. На рис. 1 приведён график зависимости средней по объёму поляризованности $< \vec{P} >$ образца сегнетоэлектрического кристалла от напряжённости $\vec{E}$ приложенного к нему внешнего электрического поля. В исходном состоянии в отсутствии электрического поля образец деполяризован, то есть разбит на домены так, что его дипольный момент $\vec{p}$ и поляризованность $< \vec{P} >$ равны нулю. Этому состоянию соответствует точка *O* в начале координат (рис. 1).

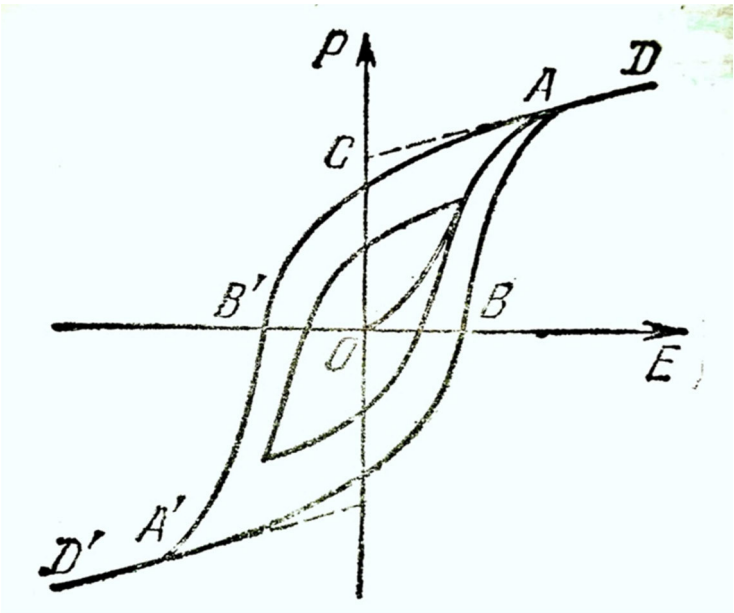


Рисунок 1 – Петли сегнетоэлектрического гистерезиса [5]

Под действием электрического поля, возрастающая напряжённость которого $\vec{E}$ направлена вдоль полярной оси кристалла, доменная структура изменяется так, что образец становится монодоменным (точка *A* на рис. 1). Дальнейшее возрастание напряжённости поля приводит к линейному росту поляризованности $< \vec{P} >$ за счёт индуцированной поляризации. На этом участке графика образец поляризован однородно до насыщения в направлении приложенного внеш-

него поля. Напряжённость $E_н$, соответствующая точке *A*, называется полем насыщения, а точке *D* соответствует максимальная напряжённость E_m. Линия *OA* на графике называется начальной кривой поляризации сегнетоэлектрика. Её нелинейность обусловлена необратимостью процессов перестройки доменной структуры кристалла во внешнем электрическом поле [1-3,5].

Изменение напряжённости приложенного поля от $\vec{E}_m$ до $-\vec{E}_m$ изменяет состояние образца по кривой *DB'A'D',* не совпадающей с *DAO*. В точке этой кривой, соответствующей $\vec{E}$ = 0, поляризованность $< P >=P_0>0$ и называется остаточной поляризованностью. Точка *B'* соответствует деполяризованному ($< \vec{P} >=0$) полидоменному состоянию, а напряжённость поля E_c в этой точке называется коэрцитивным (т.е. возвращающим) полем. В точке *A'* вновь достигается состояние насыщения поляризованности образца. Обратное изменение напряженности поля от $-\vec{E}_m$ до $\vec{E}_m$ изменяет состояние образца по кривой *D'A'BAD.* В целом замкнутая линия *DAB'A'D'BAD* называется петлей гистерезиса. Если напряжённость внешнего электрического поля, периодически изменяясь, не достигает значения $E_н$, то состояние сегнетоэлектрика изменяется по частной петле гистерезиса. На рис.1 она показана внутри полной петли *DAB'A'D'BAD*. Экстраполяция линейного участка полной петли к $\vec{E}$ = 0 даёт точку *C* на оси поляризованности. Ей соответствует значение спонтанной поляризованности $\vec{P}_s$ сегнетоэлектрика [1-3,5].

Известен осциллографический метод исследования диэлектрического гистерезиса в сегнетоэлектриках по схеме Сойера-Тауэра [1 - 3]. Нами этот метод реализован для демонстрации диэлектрического гистерезиса и точки Кюри сегнетоэлектрика.

Электрическая схема демонстрационной установки, используемой нами, приведена на рис. 2.

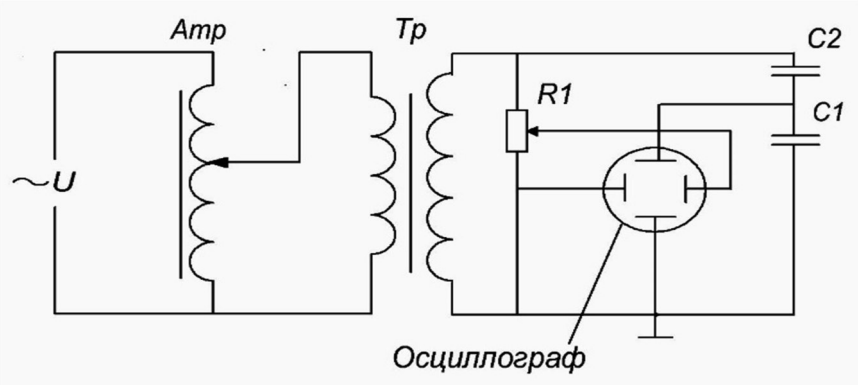
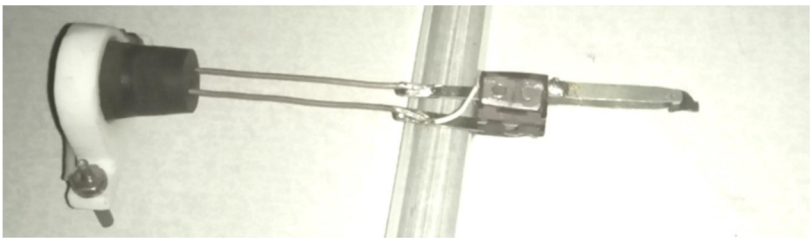


Рисунок 2 – Принципиальная электрическая схема демонстрационной установки: *Amp* – регулировочный автотрансформатор; *Tp* – повышающий трансформатор; *R1* – потенциометр; *C1* – линейный конденсатор; *C2* – сегнетоэлектрический конденсатор

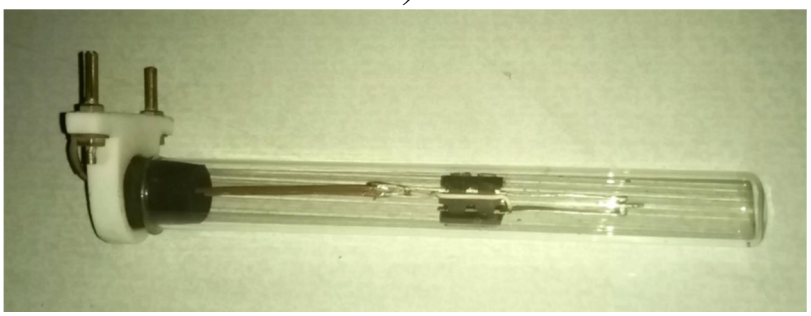
Сетевое переменное напряжение *U* частотой 50 Гц подаётся через регулировочный автотрансформатор типа ЛАТР или РНШ и повышающий трансформатор на последовательную цепочку из *C1* и *C2*. Сегнетоэлектрический конденсатор *C2* в нашем случае представляет собой тонкую плоскопараллельную пластинку, вырезанную перпендикулярно полярной оси из монокристалла триглицинсульфата (ТГС). Противоположные плоскости пластинки покрыты электродами, нанесёнными методом напыления серебра в вакууме. Конденсатор *C1* – линейный. Заряды конденсаторов *C1* и *C2* в каждый момент времени одинаковы, а заряд конденсатора *C2* и средняя по объёму поляризованность сегнетоэлектрика $< \vec{P} >$ в нём прямо пропорциональны друг другу. Поэтому напряжение U_1 на конденсаторе *C1* прямо пропорционально $< \vec{P} >$. Это напряжение подаётся на вертикально отклоняющие пластины электронного осциллографа, обеспечивая вертикальное смещение луча на его экране, прямо пропорциональное $< \vec{P} >$. Повышающий трансформатор позволяет получить напряжение выше сетевого, а также гальванически развязывает вторичную цепь от питающей электросети, повышая электробезопасность демонстрационной установки. Автотрансформатор позволяет плавно изменять переменное напряжение U_{12}, подаваемое на цепочку *C1* и *C2*. Это напряжение делится между *C1* и *C2*.обратно пропорционально их ёмкостям, а при условии $C_1 \gg C_2$ почти полностью приходится на *C2*. Так как конденсатор *C2* плоский, то напряжению на нём $U_2 \approx U_{12}$ прямо пропорциональна напряжённость *E* электрического поля в сегнетоэлектрике. Напряжение, прямо пропорциональное U_{12}, выде-

ленное потенциометром *R1*, подаётся на горизонтально отклоняющие пластины электронного осциллографа, обеспечивая горизонтальное смещение луча на его экране, прямо пропорциональное напряжённости поля *E* в сегнетоэлектрическом образце. Таким образом, на экране осциллографа изображается в определённом масштабе петля диэлектрического гистерезиса. Масштаб по вертикальной оси изменяется аттенюатором осциллографа, а по горизонтальной оси - потенциометром *R1*.

Описанный выше образец сегнетоэлектрика находится в стеклянной пробирке в специальном держателе между двумя пружинящими контактами. На рис. 3 приведена фотография держателя с установленным в нём образцом: *а* – держатель без пробирки, *б* – держатель в пробирке.



а)



б)

Рисунок 3 – Фотографии держателя с образцом сегнетоэлектрика:
а – без пробирки, *б* – в пробирке.

Основная часть электрической цепи демонстрационной установки смонтирована на вертикальной панели, имеющей контактные клеммы и гнёзда для подачи напряжения U_{12}, подключения держателя с образцом и осциллографа. Для наглядности на лицевой стороне панели изображена соответствующая часть электрической схемы установки. Фотография панели представлена на рис. 4.

Фотография демонстрационной установки в целом показана на рис. 5.

Фотография с экрана осциллографа полной петли гистерезиса показана на рис. 6.

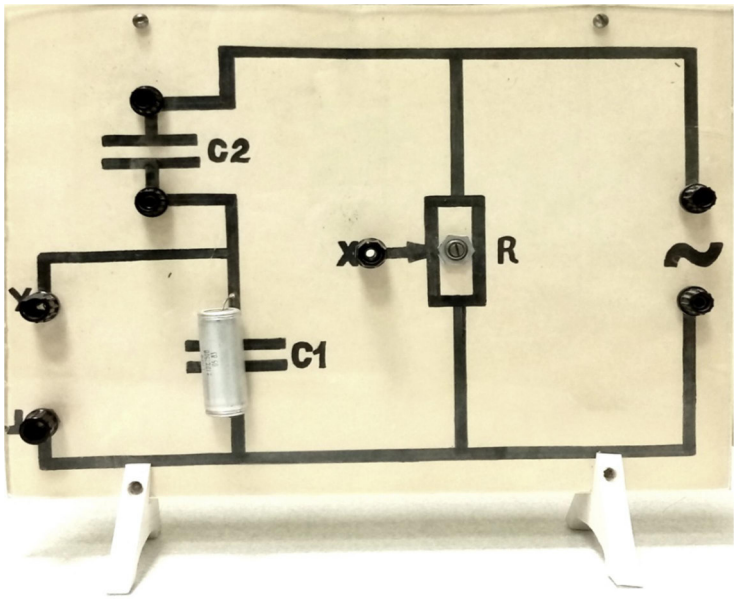


Рисунок 4 – Фотография панели демонстрационной установки

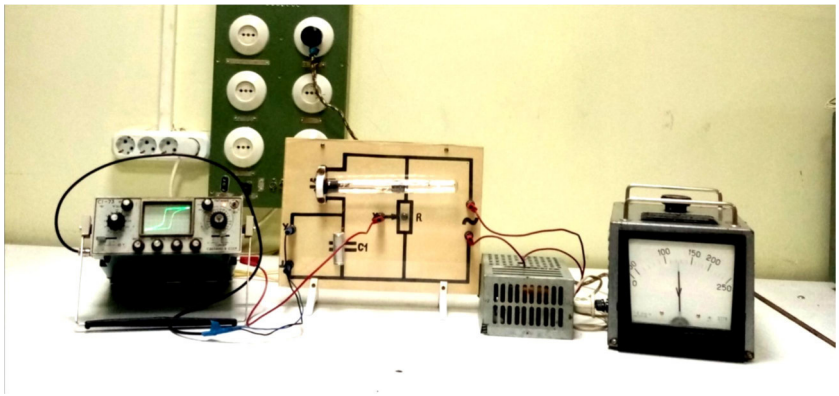


Рисунок 5 – Фотография демонстрационной установки

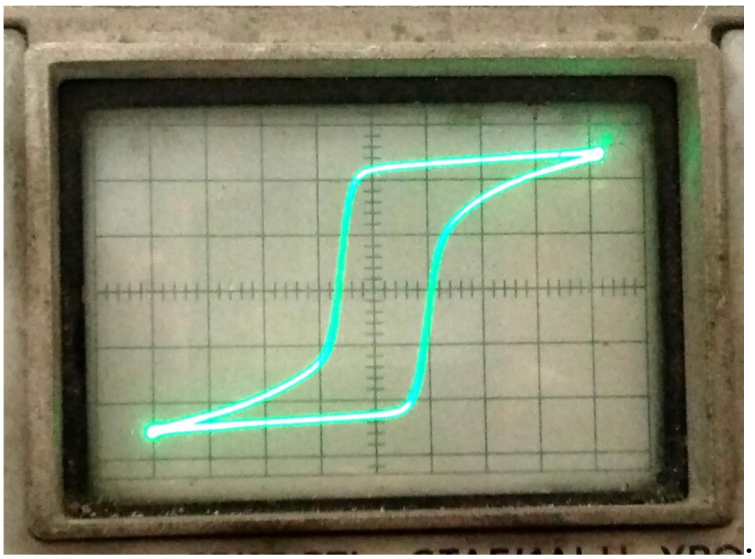


Рисунок 6 – Фотография петли гистерезиса (ТГС, комнатная температура)

Демонстрация точки Кюри сегнетоэлектрика

Для демонстрации точки Кюри сегнетоэлектрика используется минимально изменённая прежняя установка (рис. 7).

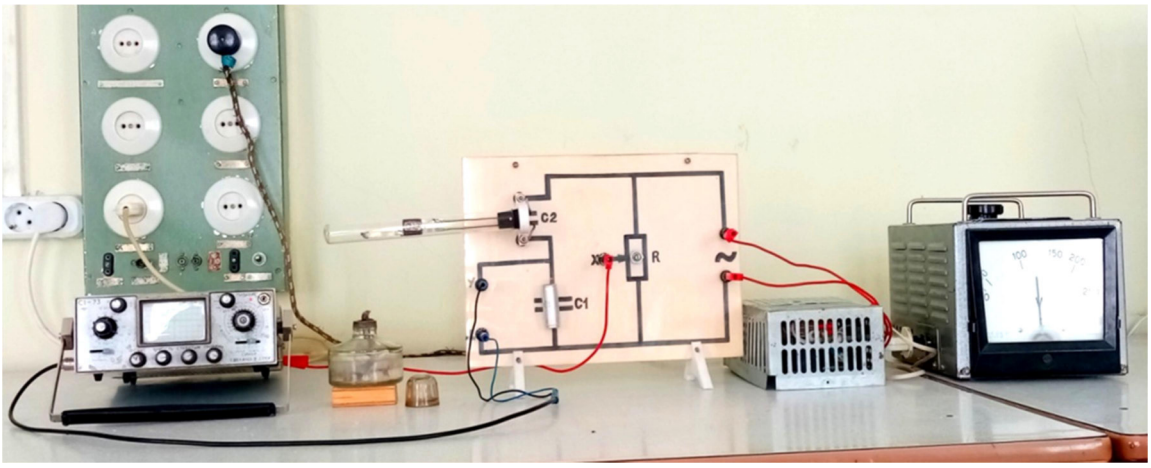
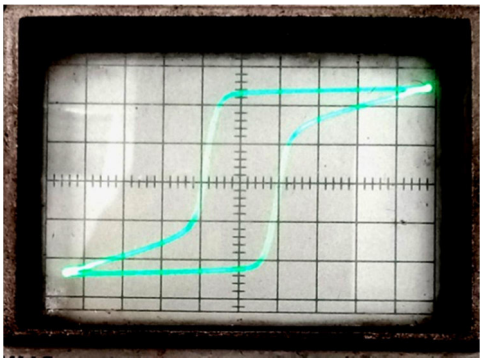


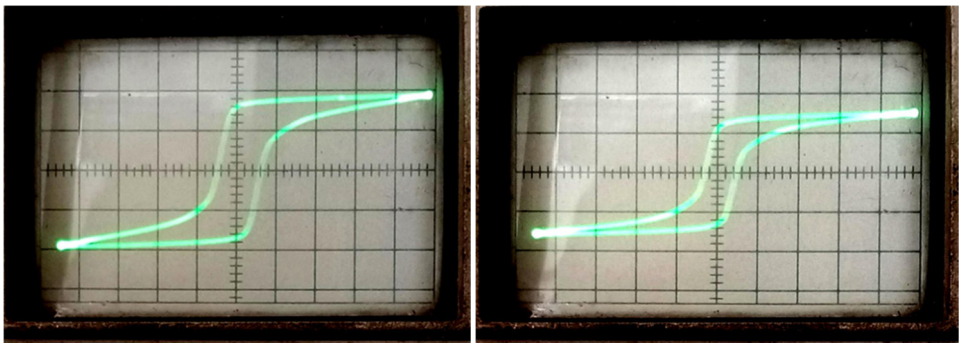
Рисунок 7 – Установка для демонстрации точки Кюри

При этой демонстрации необходимо сначала на экране осциллографа получить полную петлю гистерезиса. Затем пробирку с образцом нужно аккуратно нагревать пламенем спиртовки или газовой горелки. Напряжение, приложенное к образцу, необходимо поддерживать неизменным. С повышением температуры характерные размеры петли (остаточная поляризованность P_0 и коэрцитивное поле E_c) уменьшаются, а при переходе через точку Кюри петля вырождается в прямую линию, характерную для линейных диэлектриков. На рис. 8 представлен последовательный ряд фотографии, наглядно иллюстрирующих эволюцию петли гистерезиса образца ТГС в процессе нагревания от комнатной температуры (*а*) до температуры выше точки Кюри (*ж*). Точка Кюри кристалла ТГС равна 49 ℃.

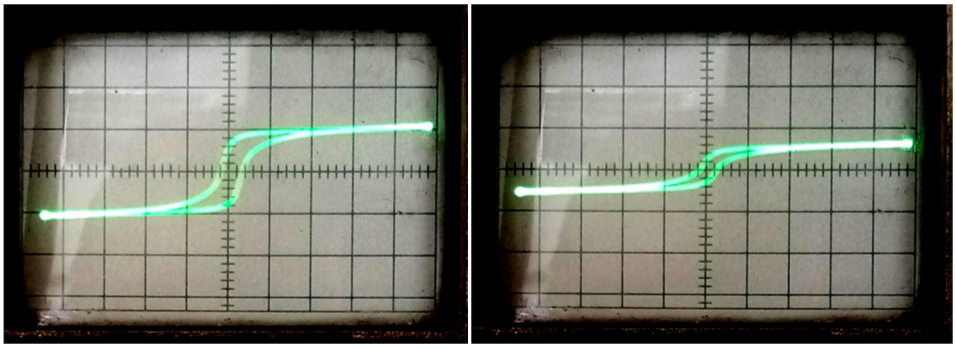
Внимание! В демонстрационной установке используется высокое переменное напряжение. В целях безопасности при любых манипуляциях в электрической цепи установки необходимо отключать её от электросети.



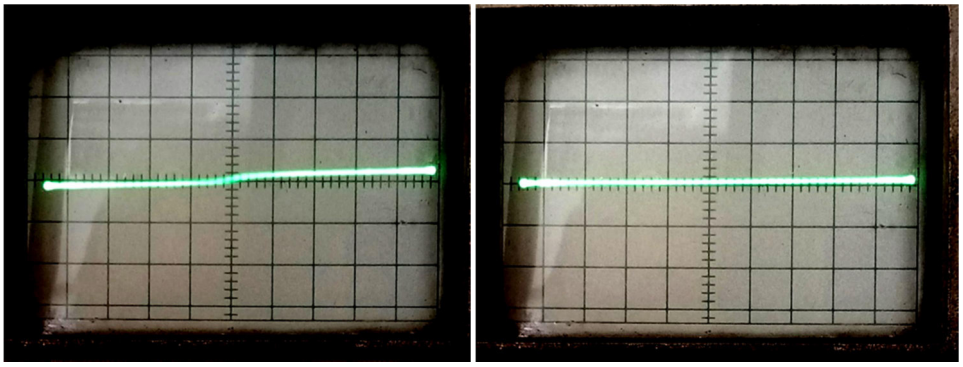
а)



б) *в)*



г) *д)*



е) *ж)*

Рисунок 8 – Изменение петли гистерезиса в ТГС с ростом температуры:
а) - комнатная температура *ж)* - выше точки Кюри

Список литературы

1. Сонин А.С., Струков Б.А. Введение в сегнетоэлектричество / Учеб. пособие для втузов. - М.: Высшая школа, 1970. 271 с.
2. Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики. Смоленский Г.А., Боков В.А., Исупов В.А., Крайник Н.Н., Пасынков Р.Е., Шур М.С. – Л.: Наука, 1971. – 476 с.
3. Лайнс М., Гласс А. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы. – М.: Мир, 1981. – 736 с.

4. Гольдин Л.Л. Руководство к лабораторным занятиям по физике./ Л.Л. Гольдин, Ф.Ф. Игошин, С.М. Козел, Н.Н. Колачевский, И.П. Мазанько, Л.В. Ногинова, И.А. Радкевич, К.А.Рогозинский, Ю.А. Самарский – М.: Наука,1973. – 688 с.
5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. – М.: Наука, 1983. – 688 с.
6. Лекционные демонстрации по физике. / М.А. Грабовский, А.Б. Млодзеевский, Р.В. Телеснин, М.П. Шаскольская, И.А. Яковлев, под ред. В.И. Ивероновой – М.: Наука, 1972. – 640 с.

УДК 371.38

Русаков Александр Александрович
кандидат физико-математических наук,
доктор педагогических наук, профессор,
МИРЭА - Российский технологический университет,
Россия, Москва

Поседько Сергей Валерьевич
педагог дополнительного образования,
ГБОУ школа №1454 “Тимирязевская”,
Россия, Москва

МОТИВАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ СРЕДСТВ ПРИ СМЕШАННОМ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ ДЕТЕЙ ДОШКОЛЬНОГО ВОЗРАСТА

Аннотация. *В статье рассматривается инструментарий, который мотивирует детей дошкольного возраста заниматься с большим интересом и трудолюбием на очных и онлайн занятиях по математике.*

Ключевые слова: *мотивация, дошкольники, дополнительное образование, смешанное обучение, дистанционное обучение, инструментарий, математика.*

Rusakov Aleksandr Aleksandrovich
Candidate of Physics and Mathematics,
Doctor of Pedagogics, Professor,
MIREA – Russian Technological University,
Russia, Moscow

Posedko Sergei Valeryevich
Teacher of additional education,
The State Budgetary Educational Institution School No. 1454 of Moscow "Timiryazevskaya",
Russia, Moscow

MOTIVATION TOOLS FOR MIXED LEARNING OF PRESCHOOL CHILDREN

Abstract. *The article discusses the tools that motivate preschool children to engage with great interest and diligence in full-time and online math classes.*

Keywords: *motivation, preschoolers, additional education, mixed learning, distance learning, tools.*

Альфа поколение детей сильно отличается от предыдущих поколений. Современные дети быстро осваивают различные цифровые и электронные гаджеты (смартфоны, компьютеры, планшеты) и практически живут в них. Учителям и педагогам нужно значительно больше прилагать усилий, чтобы увлечь детей изучением какой-либо дисциплины (математика, музыка, вышивание и так далее). Они вынуждены добавлять больше интерактивности, различных методических материалов, использовать современные средства ИКТ, чтобы уровень интереса и внимательности ребенка оставался на достаточном уровне [1].

При организации дистанционных занятий для детей дошкольного возраста, можно выделить проблему снижения уровня внимательности ребенка по сравнению с очными занятиями. Уровень внимательности детей значительно снижается при переходе от очных занятий к дистанционным. Особенно сильно это можно заметить при обучении дошкольников в дистанционном формате. Причины снижения внимательности детей могут быть связаны с отсутствием следующих факторов:

- динамичности, в сравнении с очными занятиями;
- интерактивности, в связи с отсутствием необходимых технологий;
- методической базы и навыков педагога по обучения детей в дистанционном формате;
- дидактического материала, который педагог может принести на очное занятие;
- живого общения и контакта ребенка с педагогом и другими детьми.

В данном статье мы рассмотрим пример применения мотивационного инструментария на примере смешанного (гибридного) обучения математике, который используется педагогами в дошкольных государственных учреждениях ГБОУ школа №1454 “Тимирязевская”.

Педагог в начале учебного года договаривается с детьми, что они могут зарабатывать “звездочки” на занятиях. Когда они соберут определенное количество звезд, то смогут купить у педагога что-то определенное. Педагог показывает детям, что есть в продаже, обычно это какие-то простые и красочные вещи (наклейки, карандаши, ластики, ручки и т.д.). Тем самым педагог изначально дает понять детям, что занятие это “работа”, где они будут зарабатывать, как взрослые, а потом сами будут что-то покупать. Учет звезд ведет педагог. Звезду можно получить в конце каждого занятия, если ребенок старался и хорошо занимался. Дополнительную звезду могут получить те, кто принес домашнее задание на следующее занятие. Итого максимально ребенок может получить 2 звезды за занятие. В течение учебного года ребенок может совершить 2-3 покупки. При этом, если ребенок забыл домашнее задание (выполнить или принести) то, чтобы получить звездочку, можно его принести на другое занятие.

На каждом занятии педагог отмечает у себя детей, у которых были трудности с тем или иным заданием. После родителям направляются инструкции для игры, которая позволяет тренировать определенные умения и знания ребенка. Если ребенок приносит на занятие такой выполненное тренировочное задание, то педагог дополнительно ему ставит звездочку [2]. Это является дополнительным средством мотивации, которое развивает трудолюбие ребенка и положительно зарекомендовало себя на практических занятиях по математике у дошкольников. Пример задания приведен на рисунке 1. Задача ребенка состоит в том, чтобы найти подходящий вид спереди для каждой башни и раскрасить его в нужные цвета.

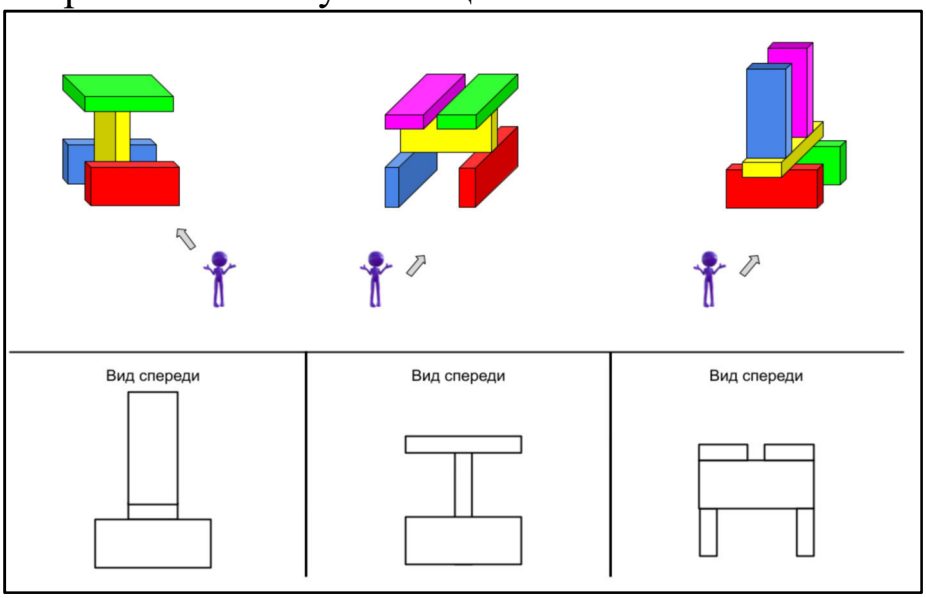


Рисунок 1 – Тренировка фронтальной проекции

С точки зрения педагога условная валюта является достаточно сильным инструментом при работе с детьми. В период до введения такой системы мотивации было достаточно много ситуаций, когда ребенок осознанно не хотел выполнять задание, а хотел просто поиграть в игрушки или вещи, которые находились в данный момент в комнате (карандаши, кубики и прочее). Со стороны ребенка он ничего не терял в этот момент. Если задание оказывалось не по душе ребенку, то он просто мог отдохнуть, не мешая остальным. После применения мотивационной составляющей ребенку приходится принимать достаточно сложные и взрослые решения. При этом он теряет не фиктивную звездочку, если будет баловаться, а теряет возможность заполучить настоящий интересный физический приз. Важно заметить, что в такие сложные моменты, когда ребенок делает выбор играть в не очень интересную игру и потерять звезду или постараться и заработать, ребенок сам принимает решения.

Попробуем выделить несколько аспектов данного инструментарий в руках педагога, которые положительно влияют на процессы обучения:

- воспитательный, ребенок учится сам принимать решения как взрослый;
- учебный, ребенок старается выполнять всё, что ему предоставляет педагог;
- целеполагание, ребенок приходит на занятие, чтобы заработать (получить звезду, а потом купить что-то);
- самоорганизация, ребенок старается выполнять все требования, чтобы получить максимальное количество звезд.

Можно выделить негативные аспекты от внедрения такого мотивационного инструментария:

- ребенок расстраивается, если он по каким-то причинам не принес домашнее задание и не получил звездочку, а ребенок, сидящий рядом с ним принес и получил. Решение данной ситуации состоит в том, что педагог напоминает ребенку о возможности принести в следующий раз и получить награду;
- некоторые дети индифферентно отнеслись к данному элементу мотивации, таких детей не более 5 из 73.

Факт потери чего-то оказался сильнодействующим для ребенка. Поэтому после применения данного мотивационного инструментария, были замечены значительные улучшения в отношении поведения и дисциплины. Данный инструментарий применялся как в очных,

так и в дистанционных занятиях. В случае дистанционных занятий, родителям ребенка достаточно прислать выполненное домашнее задание любым электронным способом педагогу.

Особенно сильный эффект был замечен в случае дистанционных групповых занятиях. Важно принять факт, что для большинства детей дошкольного возраста, которые участвовали в исследовании, дистанционные занятия были первым опытом. До введения мотивационного инструментария уровень интереса и внимательности ребенка (по мнению педагогов) на очных занятиях значительно превышал уровень интереса и внимательности ребенка на дистанционных занятиях. После введения мотивационного инструментария было замечено значительное увеличение интереса и внимательности детей на дистанционных занятиях. Поэтому сделать вывод, что мотивационный инструментарий положительно сработал в случае дистанционных занятий для повышения уровня интереса и внимания.

В течение 2020-2021 учебного года процент выполненных домашних заданий составил 79%, при этом до введения данного инструментария, процент выполнения домашних заданий был 54% (в исследовании участвовали 73 ребенка). Важно заметить для того, чтобы получить звездочку, необходимо было выполнить задание и принести его на следующее занятие и показать педагогу, также задание засчитывалось, если родители отправляли фото выполненного задания педагогу. Следовательно, можно заключить, что данная мотивационная система показала достаточно неплохой результат. При этом домашнее задание являлось не обязательным само по себе, то есть ребенок по своему желанию мог его не выполнять.

Данный инструментарий также применялся к детям младшего школьного возраста при обучении в группах дополнительного образования. В результате эффект от введения данной мотивационной составляющей в образовательный процесс оказался положительным.

В результате внедрение мотивационного инструментария в учебный процесс детей дошкольного возраста положительно влияет на:

1) уровень внимательности и интереса ребенка на протяжении очного и дистанционного занятия;
2) развитие трудолюбия ребенка;
3) отношение ребенка к занятиям как к “взрослой работе”;

4) воспитательную составляющую обучения, ребенку предоставляется возможность самостоятельно принимать решения в определенных ситуациях.

Список литературы

1. Гильденскиольд, С. Р. Проблемы использования технологии интерактивного обучения в групповой работе при дистанционном обучении / С. Р. Гильденскиольд, А. А. Волкова // Актуальные проблемы биологической и химической экологии : Материалы VII Международной научно-практической конференции, Москва, 18–19 февраля 2021 года. – Москва, 2021. – С. 420-425.
2. Русаков, А.А. Методические особенности обучения дошкольников с использованием информационных технологий для связи педагога дошкольного образовательного учреждения с родителями / А.А. Русаков, С.В. Поседько // Педагогическая информатика. – 2021. – № 2. – С. 66-70.

УДК 372.8

Рыманова Татьяна Евгеньевна
кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры математики и методики ее преподавания,
Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина,
Россия, Елец

Черноусова Наталия Вячеславовна
кандидат педагогических наук, доцент,
директор института математики, естествознания и техники,
Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина,
Россия, Елец

К ВОПРОСУ О РОЛИ МАТЕМАТИКИ В ПОВЫШЕНИИ УРОВНЯ ОБРАЗОВАННОСТИ СОВРЕМЕННЫХ ШКОЛЬНИКОВ

Аннотация. *В работе исследуется вопрос повышения образованности школьников российской провинции в современном цифровом пространстве. На основе анализа разных точек зрения рассматривается содержательное наполнение категории «образованность». Проводимая экспериментальная работа позволила выяснить пути решения данной проблемы. В качестве одного из средств повышения образованности подрастающего поколения можно использовать дистанционную научно-образовательную межпредметную олимпиаду. Результаты исследования свидетельствуют об эффективности проводимой работы.*

Ключевые слова: *цифровое пространство, образованность, дистанционная межпредметная научно-образовательная олимпиада.*

Rymanova Tatyana
candidate of Pedagogical Sciences, associate Professor,
Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of its Teaching,
Yelets Bunin Yelets state University,
Russia, Yelets

Chernousova Natalia
candidate of Pedagogical Sciences, associate Professor,
Director of the Institute of Mathematics, Natural Science and Technicians,
Yelets Bunin Yelets state University,
Russia, Yelets

ON THE ROLE OF MATHEMATICS IN IMPROVING THE LEVEL OF EDUCATION OF MODERN SCHOOLCHILDREN

Abstract*. The paper examines the issue of improving the education of schoolchildren of the Russian province in the modern digital space. Based on the analysis of different points of view, the content of the category "education" is considered. The experimental work carried out made it possible to find out ways to solve this problem. As one of the means of increasing the education of the younger generation, you can use a remote scientific and educational interdisciplinary Olympiad. The results of the study indicate the effectiveness of the work carried out.*

Keywords*: digital space, education, distance interdisciplinary scientific and educational Olympiad.*

Сегодня российское образование вступило в период цифровой трансформации. Последнее носит глобальный характер. В связи с этим очень много говорится о положительном эффекте данного процесса. Однако объективная реальность показала, что цифровизация образовательного пространства требует детального и вдумчивого подхода к ее реализации. Вынужденное дистанционное обучение в 2020 году высветило много вопросов, требующих скорейшего решения как в теоретическом, так и прикладном аспектах.

На волне новых тенденций глобализации в Международной программе по оценке образовательных достижений школьников появился новый ориентир «функциональная грамотность». Отталкиваясь от смыслового значения русского слова «грамотность» нетрудно представить, что в мировом образовательном пространстве возникли серьезные проблемы. При этом предпринимаются мощные попытки ввести в научный лексикон отечественных ученых данную категорию и адаптировать к традиционным педагогическим взглядам и устоям [1, 6]. Напомним, что исторически в отечественном образовании кри-

терием его качества являлось такое понятие как «образованность» молодого поколения.

Международное исследование PISA указывает, что «функциональная грамотность включает читательскую, математическую, финансовую и естественно-научную грамотность, креативное мышление и глобальные навыки» [6]. По мнению Б.С. Гершунского, данную категорию следует рассматривать как «этап в становлении человека», «необходимую ступень и образованности, и профессиональной компетентности, и культуры человека… содержащую в себе «эмбрионы», ростки каждого из последующих этапов становления личности» [1, с. 60]. Очевидно, что предприняты попытки сопоставить определенным образом новое понятие с традиционными устоявшимися в российском образовании представлениями.

К сожалению, сегодня очень мало исследований, нацеленных на изучение проблемы образованности молодого поколения. Историческая ретроспектива показывает, что данным вопросам в отечественной науке всегда уделялось пристальное внимание. Так выдающийся русский ученый П.Ф. Каптерев призывал рассматривать образованность через призму культурности индивидуума, как уровень понимания личности историко-культурного наследия предков, осознания своей роли в развитии общества [2]. П.Г. Редкин справедливо указывал, что смысловая нагрузка понятия «образованность» для конкретного человека корректируется с изменением или развитием его собственного образования [3]. Анализ разного рода источников философского, психолого-педагогического, культурологического характера по данной проблематике позволяет констатировать, что на сегодняшний день не существует единого мнения среди ученых по данному вопросу. Тем не менее, тематика публикаций свидетельствует о многогранности вопроса. Обобщая различные точки зрения, можно охарактеризовать образованность как интегративность культурности, познавательных процессов и синтеза современных знаний из разных научных областей. Для характеристики исследуемой категории нами были выделены уровни: низкий, ниже среднего, средний, выше среднего и высокий. Характеристические особенности каждого из них представлены в ранее опубликованной статье [5].

Несомненно, вопросам образованности необходимо уделять пристальное внимание в школьные годы. В настоящее время с уверенностью можно констатировать, что вектор освоения подрастающим поколением основ научного знания сместился в основную шко-

лу. Особая роль в контексте вышесказанного принадлежит естественно-математическим дисциплинам, имеющим огромный воспитательный и развивающий потенциал и оказывающим существенное влияние на повышение образованности подростка Кроме того, как показывают социологические исследования российского общества, в молодежной среде наблюдаются духовно-нравственные проблемы, от которых во многом зависит национальная безопасность государства. В связи с этим становится принципиально важным организация научно обоснованной работы в подростковой среде (5-9 классы), направленной на решение данных вопросов в масштабе конкретно взятого региона.

Кафедра математики и методики ее преподавания Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина на протяжении семи лет проводит исследование, нацеленное на выяснение путей повышения уровня образованности школьников, в рамках которого ежегодно проводится региональная научно-образовательная дистанционная межпредметная олимпиада «На перекрестках наук».

Задания предлагаются из разных научных областей: математики, географии, физики, астрономии, истории математики, краеведения. Математические задачи составляют не менее 40%. При этом преследуется цель воспитания у подростков математической культуры, развития логического и аналитического мышления, выработки навыков поиска креативного и эвристического подходов к решению.

Например, в этом году ученикам 6 класса было предложено задание: «Найдите сумму целых решений неравенства $|x-5| \leq 3$». Напомним, понятие модуля вводится при изучении положительных и отрицательных чисел. Данный материал тяжело усваивается школьниками, поэтому предложенное олимпиадное задание носит пропедевтический характер. Решать алгебраически неравенства такого вида ученики еще не умеют, но, тем не менее, используя геометрическую интерпретацию понятия «модуля» ученики справляются с заданием: «На числовой прямой отмечаем точку с координатой 5. От этой точки вправо и влево отсчитываем 3 единичных отрезка. Получаем точки с координатами +2 и +8. Решения неравенства находятся внутри и на концах отрезка [2; 8]. Получим целые решения: 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Их сумма равна 35». Заметим, что процесс решения задачи состоит из нескольких этапов. Этим заданием хотелось показать важность изучения данного вопроса для дальнейшего изучения материала по теме

«Неравенства» и методические возможности использования опережающего обучения.

Для учеников 7 класса одним из заданий по математике было следующее задание: «Один покупатель купил 25% имевшегося куска полотна, второй покупатель – 30% остатка, а третий – 40% нового остатка. Сколько (в процентах) полотна осталось непроданным?». Тема «Проценты» не нова для них, но представлена здесь в более проблемной интерпретации, требующей и внимательного прочтения задания, знания математических фактов по теме. Обозначив за x весь имеющийся кусок ткани, несложно, а именно проблемно для школьников было прийти к правильному математическому выражению для проданного куска – $0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}75x$. Следующим этапом решения для большинства школьников было составление пропорции, решение которой приводило к ответу.

Резюмируя выше сказанное, отметим, что, предлагая школьникам различные математические задачи, мы стремится продемонстрировать ребятам красоту их решения, важность знаний, а педагогам показать на примере предлагаемых олимпиадных заданий методические возможности повышения математической культуры, последнее является одним из слагаемым современной трактовки понятия «образованность». Кроме того, в результате проводимого исследования рассматриваются возможности проектирования научно-методической модели повышения образованности школьников в условиях цифровой трансформации всех государственных институтов через призму научных знаний, исторических традиций, культурного потенциала, менталитета российской провинции как социокультурный механизм прогресса.

Список литературы

1. Гершунский, Б.С. Грамотность для XXI века / Б.С. Гершунский // Советская педагогика. – 1990. − № 4. – С. 58−64
2. Каптерев, П.Ф. Избранные педагогические сочинения / П.Ф. Каптерев. – М.: Педагогика, 1982. – 707 с.
3. Редкин, П.Г. Избранные педагогические сочинения / Сост. В.Я. Струминский. – М.: Госучпедиз, 1958. – С. 247-249.
4. Рыманова, Т.Е. Межпредметная олимпиада как средство определения уровня образованности современных школьников [Электронный документ] / Т.Е. Рыманова // Вестник Оренбургского государ-

ственного педагогического университета Серия «Педагогика» (история и теория математического образования). – 2017. № 2(22).
5. Рыманова Т.Е. Образованность подрастающего поколения как залог национальной безопасности страны / Т.Е. Рыманова // Н.И. Лобачевский и математическое образование в России: материалы Международного форума по математическому образованию, 18-22 октября 2017 г. (XXXVI Международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов) – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – Т.1.- С.74-79.
6. Чигишева, О. П. Развитие функциональной грамотности исследователя как актуальная задача непрерывного образования/ О.П. Чигишева // Непрерывное образование: XXI век. – 2018. – Вып. 4 (24).

УДК 372.8

Саватеева Екатерина Станиславовна
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры математики и прикладных информационных технологий и методики обучения математике им. Н.А. Ильиной,
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, Орел

Русакова Вера Николаевна
кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры математики и прикладных информационных технологий и методики обучения математике им. Н.А. Ильиной,
Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, Орел

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В РАМКАХ КУРСА МЕДИЦИНСКОЙ ИНФОРМАТИКИ

Аннотация. *В статье представлены методические рекомендации по встраиванию элементов изучения тематики искусственного интеллекта в курс информатики, изучаемый студентами-медиками. Обосновывается необходимость такой модификации курса, подчеркивается наличие у студентов необходимой знаниевой базы для успешного усвоения материала. Основной целью здесь авторы видят мотивацию студентов-первокурсников в дальнейшем изучении машинного обучения и работы нейросетей для применения их возможностей в профессиональной деятельности.*

Ключевые слова: *методика обучения, искусственный интеллект, машинное обучение, нейросети.*

Savateeva Ekaterina Stanislavovna
candidate of pedagogical sciences,
associate professor of mathematics and applied information technologies and methods of teaching mathematics named after N.A. Ilyina,
Orel State University,
Russia, Orel

Rusakova Vera Nikolaevna
candidate of pedagogical sciences, associate professor,
associate professor of mathematics and applied information technologies and methods of teaching mathematics named after N.A. Ilyina,
Orel State University,
Russia, Orel

METHOD OF STUDYING POSSIBILITIES OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE WITHIN COURSE OF MEDICAL INFORMATICS

Abstract. *The article presents methodical recommendations for integrating elements of the study the artificial intelligence into the course of informatics studied by medical students. The need for such a course modification is justified, it is emphasized, that students have the necessary knowledge base for successful assimilation of the material. The main goal here authors see the motivation of freshman students in the further study of machine learning and the work of neural networks to apply their opportunities in professional activities.*

Keywords: *training methodology, artificial intellect, machine learning, neural networks.*

Математическая статистика существует несколько столетий, однако методы, которые она использует, не устаревают, а только совершенствуются. От классической задачи Фишера о соцветиях ириса, до возможностей искусственного интеллекта и машинного обучения. Этому способствует ряд факторов:

- рост мощностей компьютеров и их многовариантность (настольные персональные компьютеры, ноутбуки, планшеты, моноблоки, смартфоны, фитнес-браслеты);
- облачные сервисы с возможностью непрерывного доступа, хранения больших данных, и, собственно, осознание обществом необходимости наличия и обработки больших данных;
- высокая компьютерная грамотность специалистов широкого круга профессий.

Прогнозная аналитика нужна не только на бирже акций, но и в областях деятельности, которые считаются, по большей части, гуманитарными или естественнонаучными, например, в медицине. Необходимости оценки возможных сценариев развития общества с точки

зрения здравоохранения по данным различных мониторингов способствует ряд факторов:

- увеличение численности населения, в частности, увеличение пожилого сегмента, и, соответственно, возрастание болезней, характерных для старшей возрастной группы;
- рост числа заболеваний, появление новых болезней, в частности, COVID-19, в связи с которым возникла потребность прогнозирования развития пандемии;
- необходимость оптимизации расходов на медицину, в частности, в рамках страховой медицины;
- потребность в медицинских кадрах приводит в частности, к необходимости удаленного консультирования, постановки диагноза, назначения лечения.

Все эти факторы в целом показывают, что медицинскому работнику, врачу необходимо знать возможности прогнозной аналитики, искусственного интеллекта – машинного обучения, нейронных сетей.

Размышления об искусственном интеллекте восходят к философским трактатам семнадцатого века, однако термин искусственный интеллект (ИИ) был введен в середине двадцатого века. Интерес к созданию ИИ в обществе то разгорался, то затухал. В начале двухтысячных возможности компьютеров и достижения математики, стали основой развития теории машинного обучения, и позволили получить ошеломляющие результаты в расчетах, использующих большое число изменяющихся фактов.

Машинное обучение (machine learning), основа искусственного интеллекта, – это процесс машинного анализа подготовленных статистических данных для поиска закономерностей и создания на их основе нужных алгоритмов (настройки параметров нейронной сети), которые затем будут использоваться для прогнозов. Созданные на этапе машинного обучения алгоритмы позволят в дальнейшем компьютерному искусственному интеллекту сделать корректные выводы на основании предоставленных ему данных [2].

Согласно ФГОС среднего общего образования, даже на базовом уровне школьники должны обладать, в том числе, знанием основных конструкций программирования [5]. Студенты специальности лечебное дело в первом семестре изучают математику, в том числе, начала статистики. Таким образом, начальных представлений об основах работы компьютера и принципах анализа данных хватает для того, что-

бы рассмотреть возможности искусственного интеллекта, прогнозной аналитики.

Во втором семестре в рамках дисциплины Медицинская информатика, можно познакомить студентов с основами машинного обучения на примере данных из открытых источников, используя библиотеку scikit-learn языка программирования Python. Объяснение действий, производимых в каждом из рассматриваемых блоков машинного кода, позволит понять принцип организации работы по обучению моделей ИИ.

Таким образом, материал лекции может включать:

- понятие ИИ, экскурс в историю его возникновения и внедрения в различные области жизни современного общества;
- понятие машинного обучения;
- представление о нейронных сетях;
- описание процесса подготовки данных, выбора и обучения модели;
- пример реализации на языке Python.

В качестве последнего можно познакомить студентов с моделью «случайного леса» для встроенного в Python датасета diabetes (диабет) [3], приведенной, например, в курсе по машинному обучению из [1], и позволяющей прогнозировать состояние больных через год, зная текущие результаты их обследования.

Для лабораторной работы по теме можно предложить следующие задания.

1. Настройка нейросети. В качестве тренажера воспользуемся задачами, предложенными в открытом доступе Академией ИИ для школьников https://ai-academy.ru/training/lessons/mashinnoe-obuchenie/.

Необходимо, изменяя параметры: скорость обучения, вид нейрона, а также архитектуру нейронной сети и веса классифицировать точки по цветам. В качестве отчета записать параметры и результат – на каком минимальном шаге обучения данные были классифицированы после нескольких попыток.

2. Знакомство с on-line сервисами, построенными на основе ИИ [1]:

Quick Draw – распознавание рисунков нейронной сетью (https://quickdraw.withgoogle.com/)

Microsoft Azure – распознавание лиц (https://azure.microsoft.com/ru-ru/services/cognitiveservices/face/#overview)

Teachable Machine – распознавание движений (https://teachablemachine.withgoogle.com/)

Google Sematris – игра в ассоциации на базе искусственного интеллекта (https://research.google.com/semantris/)

Яндекс.Диалоги – создание чат-ботов на платформе голосового помощника Алиса от Яндекс (https://dialogs.yandex.ru/)

Яндекс Автопоэт – сервис позволяет распознать или озвучить любой текст на нескольких языках (https://yandex.ru/autopoet)

В качестве отчета прикрепить скрины тестового использования 2-3 сервисов.

3. В качестве дополнительного задания для заинтересованных студентов можно предложить построить прогноз максимальной частоты сердечных сокращений на основе датасета UCI Heart Disease Data на Kaggle [4]. Пример загрузки данных из файла можно посмотреть в [1].

Подчеркнем, что раскрытие темы искусственного интеллекта в рамках дисциплины «Медицинская информатика» позволит повысить интерес студентов первого курса к применению его возможностей в будущей профессиональной деятельности и мотивировать их на дальнейшее изучение одной из самых перспективных областей развития современного общества. Позволит сделать более осознанный выбор в пользу факультативных занятий по ИИ.

Список литературы

1. Академия искусственного интеллекта для школьников https://ai-academy.ru/ (дата обращения 24.10.2021)
2. Искусственный интеллект (ИИ) / Artificial Intelligence (AI) как ключевой фактор цифровизации глобальной экономики // URL: https://www.crn.ru/news/detail.php?ID=117544 (дата обращения 24.10.2021)
3. Обучающие ресурсы «Департамента статистики» Diabetes Data // https://www4.stat.ncsu.edu/~boos/var.select/diabetes.html (дата обращения 24.10.2021)
4. Общедоступные наборы файлов, необходимые для работы в области науки о данных. UCI Heart Disease Data https://www.kaggle.com/redwankarimsony/heart-disease-data (дата обращения 24.10.2021)

УДК 372.851

Семенова Анастасия Андреевна
студент,
Рязанский государственный университет имени С.А.Есенина,
Россия, Рязань

АКТИВИЗАЦИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В 6 КЛАССЕ У НЕУСПЕВАЮЩИХ ШКОЛЬНИКОВ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ

Аннотация. *Рассмотрены особенности поколения Z и способы формирования интереса к познавательной деятельности. Сформулированы условия развития деятельности обучающихся.*

Ключевые слова: *познавательная деятельность, активизация познавательной деятельности, педагогика школы, учебный процесс, педагогическая деятельность, поколение Z, опорные конспекты.*

Semenova Anastasia Andreevna
student,
Ryazan State University named after S.A.Yesenin,
Russia, Ryazan

ACTIVATION OF COGNITIVE ACTIVITY IN THE 6TH GRADE OF UNDERACHIEVING STUDENTS IN ELECTIVE CLASSES IN MATHEMATICS

Abstract. *The features of generation Z and ways of forming interest in cognitive activity are considered. The conditions for the development of students' activities are formulated.*

Keywords: *cognitive activity, activation of cognitive activity, school pedagogy, educational process, pedagogical activity, generation Z, reference notes.*

Актуальность данного исследования состоит в наличии конфликта интересов между требованиями, предъявляемыми обществом к выпускнику школы, и личностными особенностями выпускников.

С одной стороны, общество «выставляет школе социальный заказ» на активную, целенаправленную личность, имеющую высокий

интеллектуальный потенциал. В связи с этим программа курса математики с каждым годом усложняется, требования к ученикам на экзамене возрастают, а родители все чаще говорят о том, что ребенка перегружают в школе и он не запоминает информацию. А с другой стороны, интерес к математике с каждым годом лишь угасает.

Последнее связано с тем, что нынешнее поколение школьников – поколение Z - «цифровые аборигены», которое имеет ряд отличительных особенностей.

Во-первых, интернет для учеников рассматриваемого поколения – привычная среда обитания. Именно там они проводят большую часть своей жизни, а в связи с эпидобстановкой и вводом частичного дистанционного обучения, сетевое время школьников значительно возросло. Если раньше дети знали «Окей, Google », «Алису» и «Siri», то в период ДО они освоили РСДО, Фоксфорд, Геогебру и т.д. И все это произошло, или не произошло, только благодаря работе учителя.

Во вторых, у поколения Z нет необходимости по крупицам собирать данные, они у них всегда под рукой в смартфоне – Google знает все.

То поколение, с которым нам приходится работать, стремится минимизировать усилия, выстраивать все с учетом собственной прагматичности, ему важно знать роль каждого задания в реальной жизни. Они хорошо ощущают разрыв между формальным образованием и навыками, которые понадобятся для работы, поэтому они требуют быстрого обучения необходимым знаниям и занимаются самообразованием.

Так же следует отметить, что не все ученики понимают значимость математики в их жизни, считая ее просто обязательным предметом ОГЭ и ЕГЭ. Это связано со спецификой изучения математики в школе. Все это идет из начальной школы. Основа арифметики, принятие математического языка через символьную, буквенную и цифровую форму записи не вызывает у школьников особого труда. Дети понимают, что математика – нечто легкое, что можно уловить «на лету», не читая параграфы дома, не уча аксиомы и др.

Придя в 5 класс, учащиеся около полугода, а то и больше, работают с тем, что уже известно с начальной школы, расслабляясь при этом. Обучающиеся в буквальном смысле не замечают, как вектор их успеха меняет направление на противоположное. Словно «снежный ком», школьники копят то, что недопоняли, прослушали, посчитали ненужным.

С учетом возрастных особенностей детей, можно заявить об изменении авторитета в лице учителя, на сверстников. Работа педагога заключается в поиске самых эффективных, интересных, современных форм, моделей, условий и способов обучения школьников. То есть в работе современного учителя на первый план выходит проблема активизации деятельности учащихся в процессе обучения.

В основной школе учащиеся начинают овладевать высшими формами мыслительной деятельности – теоретическим, формальным, рефлексивным мышлением. У подростка появляется способность рассуждать гипотетико-дедуктивным способом, то есть на основе общих посылок, абстрактно-логически (в словесном плане), не прибегая к опоре на действия с конкретными предметами.

Изучение психологических и педагогических аспектов образовательного процесса и специфики предмета «математики», позволяет сделать вывод, что только при грамотном подборе вида деятельности на уроке учитель сможет достигнуть лучших результатов.

Задача учителя – правильно замотивировать школьника и направить его способности в нужное русло, а также не воспринимать новое поколение через призму собственных ценностей и идеалов. И дело тут не в «добре» и «зле», «хорошем» и «плохом», а лишь в том, что прежний подход в обучении имеет низкий КПД. Стоит понять, что сопротивление – стратегически не верный ход. Нам однозначно необходимо взаимодействовать с новым поколением, а лучше это делать в «мире».

Главная цель любого учителя – сформировать определенную систему знаний у школьников, а путь, которым идет педагог, у всех различен.

Именно здесь хочется отметить уникальную и действенную методику, которой славится советский и украинский педагог Виктор Федорович Шаталов. Этот человек смог разработать универсальную систему обучения с использованием опорных сигналов. Вся суть его педагогической деятельности являлась доказательством того, что даже самый слабый ученик при грамотной работе педагога способен достичь невероятных высот. В.Ф. Шаталов уверен, что деление на «сильных и слабых» – показатель непрофессионализма учителя.

Виктор Федорович говорил: «Отличников учить легко. А ты попробуй заинтересовать ребят, на которых все махнули рукой»[4].

Шаталов В.Ф. разработал систему ОС и ОК (опорных сигналов и опорных конспектов), которые являются стимулами для запоминания

материала школьниками. Опорные конспекты представляют собой схему из 7±2 тезисов, которые содержат в себе определенную смысловую нагрузку. Эта краткая логическая цепочка, которая развернется на столько, на сколько способен это сделать сам ребенок. Годовой курс по любому предмету с помощью ОК можно повторить за 15 минут.

Еще одной особенностью технологии В.Ф. Шаталова является разделение процессов слушания и письма. В школе Виктора Федоровича ученик слушает учителя, активно вникает в материал урока, а в конце занятия вместе с учителем записывает опорный конспект или же получает его в готовом виде.

Таким образом, методика В.Ф. Шаталова своим минимализмом будет притягивать поколение Z. Опытным путем он пришел к тому, что, зная необходимый достаточный теоретический материал, ученик сможет решить практическое задание. Шаталов В.Ф. являлся одним из тех, кто по-новому подошел к подаче материала, группируя взаимосвязанные темы в крупные блоки. Подобно художнику, Виктор Федорович «писал полотно» - свои опорные конспекты, а только после того, как ученики видели результат, «разбирал детали картины» - применял знания на практике. У школьников был «готовый продукт».

В.Ф.Шаталов «минимизировал» учебные пособия того времени — «выжал из них всю воду», оставил лишь существенное. Поэтому его книги выгодно отличаются от школьных талмудов — они в несколько раз тоньше. А это именно то, что нужно современным школьникам.

Поэтому, можно говорить о возможности использования данной методики и ее актуальности в XXI веке.

Работая в МБОУ г. Рязани, в 6 классе, я столкнулась с проблемой неуспеваемости некоторых школьников. Мотивация учащихся чаще всего положительная и отрицательная, то есть, с применением положительных и отрицательных стимулов. Как выяснилось, многие темы, вызывающие трудности у определенных лиц, были приняты в рассмотрение еще в 1-4 классе. Однако не все школьники усвоили весь материал, предложенный учителем, а как следствие, он же не воспринимается детьми и в 6 классе.

Не исключено среди отстающих встретить тех, кому та или иная тема в определенный момент изучения показалась очень легкой, что позволило обучающемуся перестать изучать теорию.

Тогда, когда уже имеются недочеты в системе знаний школьника, приходит время срочной работы с неуспевающими учащимися с использованием коррекционных методик, способных вернуть детям мотивацию к изучению математики.

В своем исследовании я планирую использовать методику В.Ф. Шаталова с адаптацией ее к существующему УМК по математике и индивидуальных особенностей каждого ребенка.

Ведущая, цель исследовательской работы – мотивация отстающих школьников к изучению точного предмета, путем информирования их в большей степени, чем остальных детей класса. Наша задача с помощью интересных фактов, занимательной подачи информации и грамотном делении сложного на простое, донести до школьников значимость предмета, показать связь изучаемого и явлений реальной жизни.

На данном этапе идет апробация материала.

Список литературы

1. Возрастная психология: Полный жизненный цикл развития человека. Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. — М.: ТЦ «Сфера», 2001. -464с.
2. Конструирование современного урока математики: кн. для учителя / С. Г. Манвелов. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 2005. — 175 с.
3. Мифы о «поколении Z» / Н. В. Богачева, Е. В. Сивак; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Институт образования. — М.: НИУ ВШЭ, 2019. — 64 с. — 200 экз. — (Современная аналитика образования. № 1 (22)).
4. Педагогическая психология в вопросах и ответах: учеб. пособие / В. А. Петерс. - М. : Лига, 2006. - 128 с.

УДК 372.8

Симанева Татьяна Александровна
кандидат педагогических наук, доцент,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Топченко Роман Константинович
магистр 1 года обучения,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

МЕТОДИКА ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦИФРОВЫХ ОНЛАЙН СЕРВИСОВ

Аннотация. *В статье рассматривается методика организации проектной деятельности по математике с использованием онлайн сервиса Trello и Padlet.*

Ключевые слова: *методика математики, проектная деятельность, цифровые онлайн сервисы.*

Simaneva Tatyana Aleksandrovna
candidate of pedagogical sciences, associate professor,
Department of informatics,
Orel State University,
Russia, Orel

Topchenko Roman Konstantinovich
Master of 1 year of study,
Orel State University
Russia, Orel

METHODS OF ORGANIZATION OF PROJECT ACTIVITIES IN MATHEMATICS USING DIGITAL ONLINE SERVICES

Abstract. *The article discusses the methodology of organizing project activities in mathematics using the online service Trello and Padlet.*

Keywords: *methodology of mathematics, project activities, digital online services.*

В современном процессе обучения в условиях цифровизации образования и реализации новых образовательных стандартов проектная деятельность учащихся становится все более актуальной. Сегодня от учителя ждут инновационных подходов в обучении, он должен стать конструктором новых педагогических ситуаций, более творчески подходить к разработке своих уроков используя цифровые образовательные ресурсы и сервисы, делая образовательный процесс более разнообразным, интересным и современным. В соответствии с требованием ФГОС, именно в процессе самостоятельной работы над созданием проекта учащиеся используют обобщенные способы деятельности и создают собственный продукт в процессе освоения нового знания.

В настоящее время инструментальную основу проектной деятельности составляют средства и сервисы ИКТ. Их использование необходимо на всех этапах разработки проекта (1):

- планирование и организация проекта;
- коммуникация участников проектной деятельности;
- сопровождения, наблюдения, эксперимента;
- получения нового знания, включая работу с информационными ресурсами сети, анализ открытых данных и их обработку.

Проект направлен на создание того, чего еще не существует (например, журнала, программы, социального эффекта и т.д.) и предполагает наличие проектного замысла, который достигается в процессе его реализации.

Мотивирующим началом проекта является его творческое название, вызывающее интерес к проблеме и побуждающее к исследованию (2). Например, в проектной деятельности по математике одним из таких названий может быть: «Мир удивительных чисел». Такое название привлечет внимание учащихся к изучению одного из фундаментальных разделов математики - алгебры и теории чисел. Первыми вопросами учеников при обсуждении будут: «Что это за числа? И чем они могут удивить?», и это может мотивировать их к изучению чего-то нового.

Основополагающий вопрос: Почему числа называются удивительными? (какие числа называются удивительными?)

Проблемный вопрос: Зачем нам изучать «Удивительные числа»? Что удивительно в этих числах?

По мере изучения темы исследования появятся и другие проблемные вопросы, позволяющие детализировать изучение «удивительных чисел», например, «с кем дружат «дружественные числа»?» «в чём совершенство «совершенных» и «суперсовершенных» чисел?», «насколько похожи между собой числа – близнецы?», «а есть ли углы в треугольных числах?», «какая связь между кроликами и числами Фибоначчи?».

Все эти вопросы будут стимулировать познавательную деятельность учеников, поддерживая их интерес к теме проекта. Кроме того, можно поставить задачу – в рамках проекта подсчитать, сколько таких чисел в определенном диапазоне, написать программу, генерирующую эту последовательность, в этом случае мы задействуем механизмы межпредметных связей, используя инструментом познания язык программирования.

Реализация проекта, требует от преподавателя постоянного контроля и внимания за его выполнением, необходимо помочь учащимся сформулировать учебные вопросы (задачи), направить учебно-исследовательскую деятельность учащихся.

Примерные учебные вопросы для каждого из видов «Удивительных чисел»:

1. Знакомы ли вам удивительные числа (дружественные, совершенные, числа-близнецы, простые числа, суперсовершенные, треугольные, числа Фибоначчи)?
2. Хотели бы узнать больше об этих числах?
3. Кто и как открыли удивительные числа?
4. Какими свойствами обладают удивительные числа?
5. Как их найти?

Организация проектной деятельности в период дистанционной формы обучения, в условиях пандемии, достаточно сложное дело, как для учеников при выполнении группового проекта, так и для учителя. Дистанционное обучение предполагает использование таких средств, методов, организационных формы обучения, а также форм взаимодействия учителя и учащихся, которые реализуются средствами информационных сетей, специальными цифровыми инструментами и онлайн сервисами. Особенностью такой формы является то, что традиционные этапы (погружение в проект, планирование работы, презентация результатов, оценка, рефлексия) проходят не в очной форме

общения с участниками, а в режиме онлайн в синхронном или асинхронном формате (видеоконференция, сетевое общение в соц. сетях, чатах, форумах, через электронные письма). В статье мы обсудим, организацию проектной деятельности с использованием онлайн сервисов: Trello, Padlet, Mindmeister. С помощью этих цифровых онлайн сервисов, ученики вместе с учителем, в режиме реального времени, могут заниматься проектной деятельностью, не выходя из дома. Эти цифровые инструменты помогут учащимся, у которых нет возможности очного общения, детям с ОВЗ или детям, находящимся на домашнем обучении.

Для организации и контроля проектной деятельности можно использовать сервис Trello — простой, бесплатный и гибкий визуальный онлайн-инструмент для управления проектами и персональными задачами (рисунок 1).

Доски Трелло имеют 4 основных компонента – доска, колонки, карточки и меню, которые дают практически безграничные возможности для совместной работы учащихся над проектом и постоянному контролю над их деятельностью со стороны учителя.

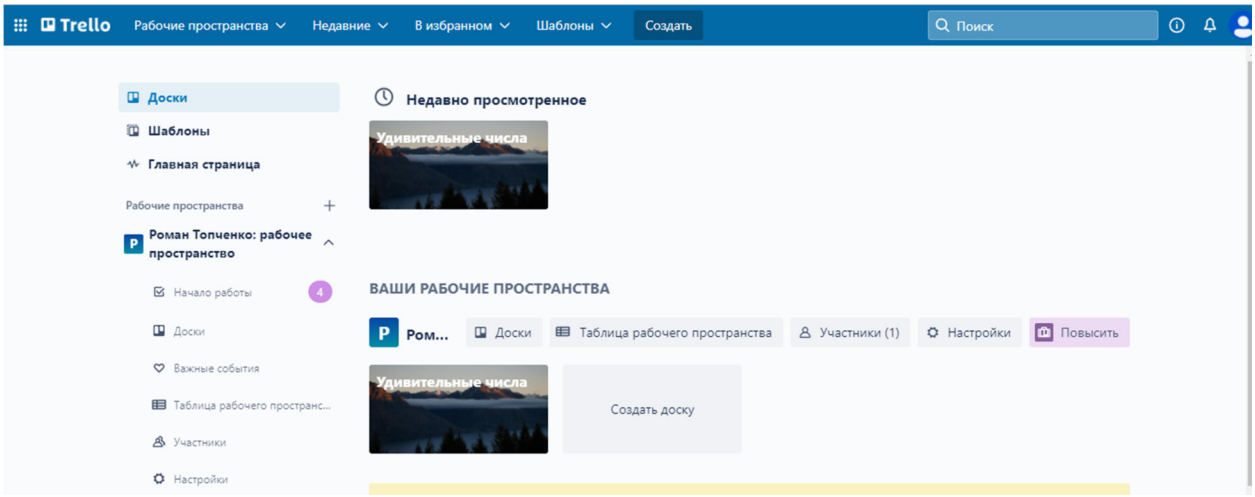


Рисунок 1 – Общий вид сервиса Trello

Доска отражает проект или место, где задачи собраны по какому-то общему признаку (отдел, направление, канал и так далее).

Колонки содержат в себе карточки, помогая сортировать их по прогрессу или различным этапам (рисунок 2).

Ограничения на количество колонок нет, поэтому Трелло позволяет отобразить наглядно даже самый длинный и сложный процесс, разбив его на отдельные логические этапы.

Карточки — они содержат всю информацию по задачам и идеям проекта. В карточках можно описывать задачи, которые необходимо выполнить на каждом этапе реализации проекта.

Кроме того, в **Меню** видна вся активность, которая производилась на доске ранее. Это позволяет оперативно реагировать на все изменения в карточках и контролировать учителю или самим учащимся процесс выполнения проектного задания (комментировать выполнение, устанавливать дедлайны, отправлять отчетные файлы по почте из данного сервиса).

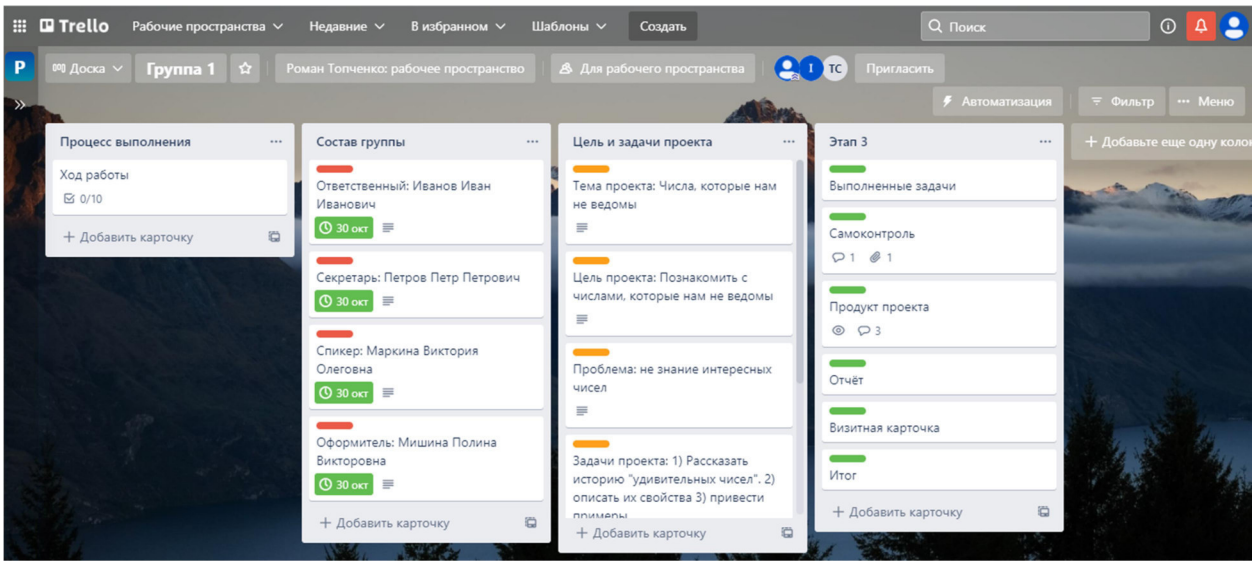


Рисунок 2 – Рабочая область с колонками

Групповой проект «Удивительные числа» 6 класс

Проблема: многие школьники математику считают трудным и не интересным предметом, новые знания в области натуральных чисел позволят мотивировать учащихся к познавательной активности и повысить интерес к математике.

Актуальность: возможность получение информации об удивительных числах позволит повысить интерес учащихся к фундаментальной области математики - алгебре и теории чисел.

Цель: как можно больше отыскать удивительных чисел, рассмотреть их свойства и закономерности.

Задачи:

1. Исследовать историю открытия удивительных чисел.
2. Выделить интересные виды удивительных натуральных чисел: простые, числа-близнецы, фигурные, совершенные, дружественные;
3. Установить свойства и закономерности получения удивительных чисел;
4. Составить алгоритм получения эти чисел;

5. Программная реализация получения этих чисел на одном из языков программирования.

Объект исследования: простые, фигурные, совершенные, дружественные, компанейские числа.

Предмет исследования: свойства, алгоритмы нахождения натуральных удивительных чисел, программная реализация получения этих чисел на языке программирования в пределах 100000.

Приемы и методы исследования: основным методом исследования видов чисел являются изучение и обработка научно-популярной литературы, интернет - источников, систематизация данных.

В рамках проекта предлагается к изучению следующие виды «удивительных» натуральных чисел: простые числа, числа-близнецы, фигурные числа, многоугольные числа, дружественные числа, совершенные и суперсовершенные числа, компанейские числа, число Шахерезады.

Ученики распределяются на группы, для каждой группы создается отдельное рабочее пространство в Trello в виде доски для планирования, фиксации результатов и контроля выполнения по каждому этапу проекта (ссылка на виртуальное пространство для совместной работы) (рисунок 3).

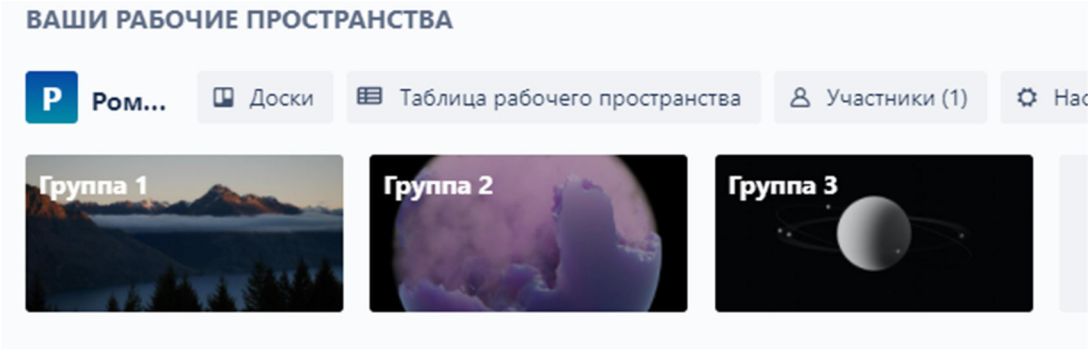


Рисунок 3 – Вид рабочего пространства для каждой группы проекта

Для размещения материала и представления доступа к совместной работе над проектом учащимся предлагается онлайн среда Padlet (ссылка на виртуальное пространство для совместной работы).

На каждом занятии в режиме видеоконференции учитель контролирует выполненную работу, корректирует ее в соответствии с целями и задачами этапа проекта, обсуждает с учениками то, что им необходимо сделать самостоятельно на следующем этапе проекта, карточка с заданием для самостоятельной работы отражена в соответствующей колонке. Для реализации видеоконференции можно ис-

пользовать такие приложения как zoom или Skype, далее учащиеся выполняют работу, самостоятельно общаясь между собой по видеосвязи, на форумах, в чате, по электронной почте.

Этапы работы группы над проектом

Занятие 1. Обсуждение (видеоконференция, синхронный режим работы, онлайн).

На данном занятии, учитель информирует учащихся о том, что им необходимо провести обсуждение в группе, в результате которого необходимо выбрать: ответственного за проект (руководитель обсуждений), секретаря (фиксирует все общие решения); спикера (представляет результаты работы группы для всего класса); оформителя (готовит тексты, слайды для презентации промежуточных и конечных результатов работы группы).

А так же в процессе обсуждения, необходимо представить тему проекта, его цель, решаемую проблему, а также планируемый продукт, который будет способствовать решению проблемы в каждом случае. Результаты фиксируются на соответствующих карточках в среде Trello (рисунок 4).

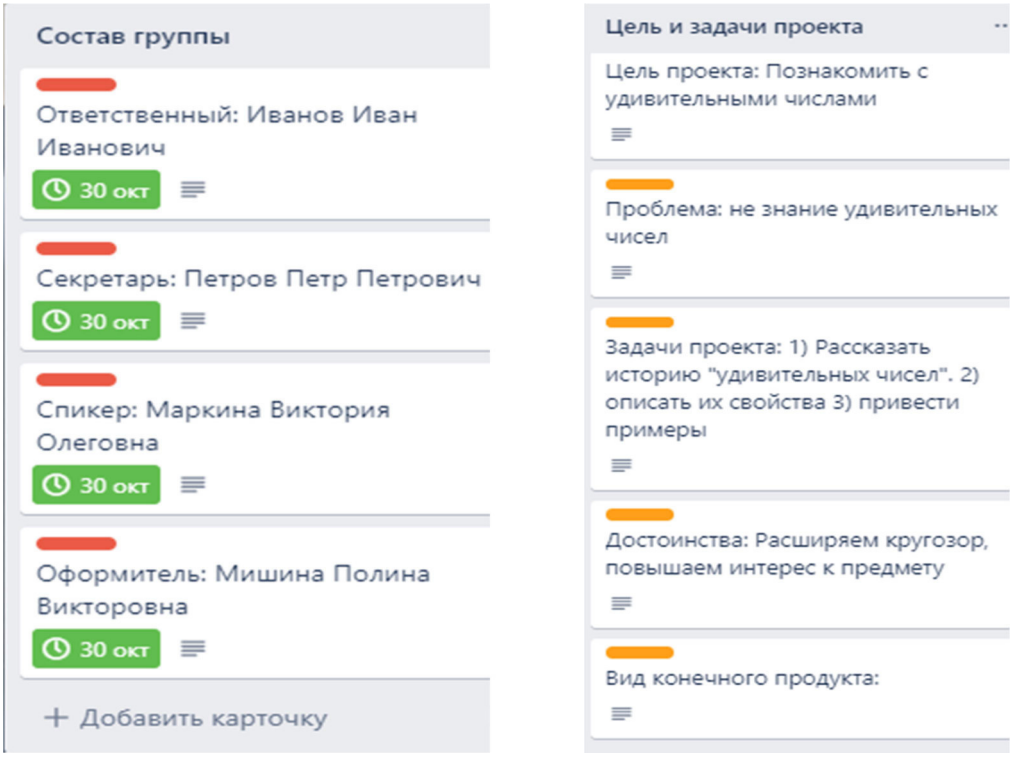


Рисунок 4 – Результаты фиксации в карточках

Для группового обсуждения можно использовать онлайн программы такие, как Zoom и Skype. Также учащиеся для онлайн связи могут использовать различные социальные сети. Среда Trello предо-

ставляет ученикам в разделе комментарии, общения между собой или с учителем.

Занятие 2. Выполнение поставленных задач (самостоятельная работа, асинхронный режим, онлайн, офлайн)

На данном этапе учащиеся решают задачи, которые были поставлены. Результат фиксируется на отдельной карточке «Этап: Выполненные задачи». Если учащиеся собрали результаты выполненных задач в отдельный файл, то его необходимо прикрепить в соответствующий раздел.

Для дополнительной наглядности учащиеся могут использовать, заранее приготовлены учителем ментальные карты mindmeister или виртуальную доску Padlet, указав в Trello, разделе комментарии в ссылку на Padlet (рисунок 5) или mindmeister как виртуальное пространство для совместной группой работы.



Рисунок 5 – Доска Padlet с представлением подготовленных материалов

Занятие 3. Самоконтроль, контроль (видеоконференция, синхронный режим работы).

Учащимся необходимо обсудить в группе полученные результаты. В процессе самоконтроля, ученики проверяют кто, что сделал и фиксируют результаты в карточке «Этап: Самоконтроль, контроль». Если у учащихся нет возможности встретить в очном формате, то для группового обсуждения можно использовать программу Zoom, но при этом учитель присутствует на данной конференции, давая экспертную оценку проделанной работе.

Занятие 4. Подготовить продукт проекта (самостоятельная работа, асинхронный режим)

На данном этапе учащимся необходимо подготовить продукт проекта, т. е. то, что будет являться результатом проектом. Продуктом проекта может быть, небольшой журнал, рассказывающий об удивительных числах, опорный конспект, презентация, программа на языке программирования. Продукт проекта добавляется в карточку с названием «Этап: Продукт проекта».

Занятие 5. Обсуждение оценки проекта. Заполнение отчета. (видеоконференция, самостоятельная работа, синхронный, асинхронный режим работы)

В онлайн режиме или в очном формате учащиеся обсуждают оценку готового продукта. Учащиеся самостоятельно готовят файл с отчетом и прикрепляют его в карточку «Отчёт». Файл содержит информацию о проделанной работе. Так же для дополнительной наглядности, учащиеся могут написать кратко свой отчет на виртуальной доске.

Задание 6. Подготовка итоговой презентации проекта (самостоятельная работа).

Учащиеся должны подготовить «Визитную карточку» - это небольшой отчет по проекту в виде презентации. Для совместной работы над презентацией можно использовать приложение «Google презентации». Данная онлайн программа позволит ученикам совместно работать над презентацией, находясь на большом расстоянии, друг от друга. Сам файл презентации или ссылку на презентацию необходимо разместить в карточки «Визитная карточка» и представить для проверки учителю не менее чем за сутки до итоговой защиты. В карточке «Этап: Итог» учащиеся пишут свои достижения.

Учитель в процессе выполнения проекта проводит контроль выполняемой работы учащихся, отмечая при этом в карточке «Процесс выполнения» (рисунок 6) этапы, которые ученики уже выполнили. Если у учителя есть вопросы, он может их задать в разделе «Комментарии»

Занятие 7. Итоговая видеоконференция с защитой проекта (синхронный режим работы)

Учащиеся выступают с презентацией по итогам проекта, обсуждают итоги проделанной работы, проводят самооценку работы над проектом и своих достижений.

В процессе реализации проектной деятельности по математике ученики целенаправленно продвигаются к заранее намеченной цели, уверенно преодолевают трудности, у учеников расширяется кругозор в области фундаментальной науки, развиваются творческие способности, совершенствуются навыки и умения самостоятельной работы, уверенного владения цифровыми технологиями, а также повышается интерес к предмету, уровень знаний и эрудиции.

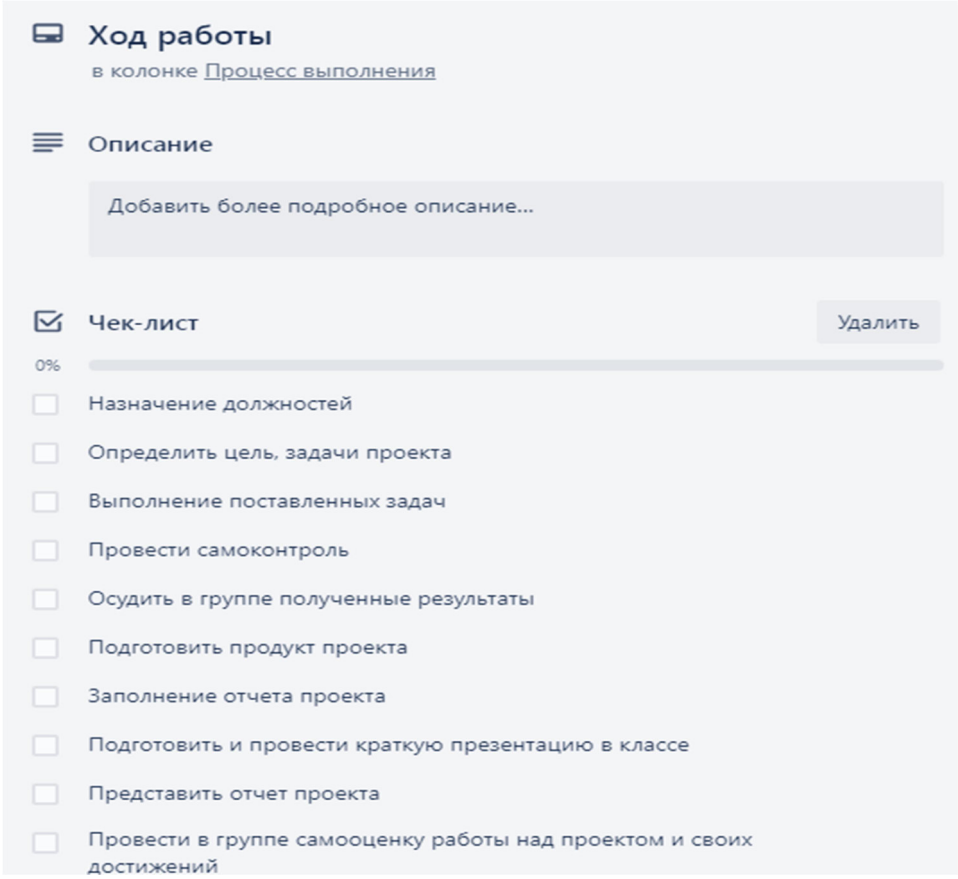


Рисунок 6 – Контроль за выполнением проекта

Список литературы

1. Леонтович А. В., Саввичев А. С. Исследовательская и проектная работа школьников. 5-11 классы / Под ред. А. В. Леонтовича. — 3-е изд. — М:.ВАКО, 2018. — 160с.
2. Брыскина О.Ф.Информационно-коммуникационные технологии в образовании: учебник / О.Ф. Брыскина, Е.Н. Понамарева, М.Н.Сонина. – М.: ИНФРА-М, 2018 – 549 с.

УДК 378.147.31

Симоновская Галина Александровна
кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры математики и методики ее преподавания,
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина,
Россия, Елец

К ВОПРОСУ О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ БАКАЛАВРОВ ТЕХНИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

Аннотация. *Статья посвящена поиску путей повышения математической подготовки бакалавров технических направлений. Математическая подготовка специалиста технической сферы должна носить характер фундаментальности, а, следовательно, теоретические основы математики должны быть изучены. Использование накопленного опыта работы в условиях пандемии позволяет повысить качество проведения лекций по математическим дисциплинам, уделяя внимание более глубокому рассмотрению фундаментальных основ.*

Ключевые слова: *математическая подготовка, бакалавр технического направления подготовки, лекция по математическим дисциплинам.*

Simonovskaya Galina
candidate of pedagogical sciences, associate professor,
Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of its Teaching,
Bunin Yelets State University,
Russia, Yelets

TO THE QUESTION ABOUT MATHEMATICAL TRAINING OF BACHELORS OF TECHNICAL DIRECTIONS

Abstract. *The article is devoted to the search for ways to improve the mathematical training of technical bachelors. The mathematical training of a specialist in the technical field should be fundamental in nature, and, therefore, the theoretical foundations of mathematics should be studied. Using the accumulated experience of working in a pandemic can improve*

the quality of lectures on mathematical disciplines, paying attention to a deeper consideration of the fundamental foundations.

Keywords: *mathematical training, bachelor of technical direction of training, lecture in mathematical disciplines.*

Подготовка будущих специалистов технических направлений в России осуществляется как в технических, так и в классических университетах. Федеральный государственный образовательный стандарт обеспечивает единство этой подготовки, однако содержательная часть определяется вузом самостоятельно.

Математическая подготовка специалистов технической сферы является необходимой и должна характеризоваться фундаментальностью. Руководствуясь лишь необходимостью формирования у обучающихся компетенций указанных в стандарте, была выявлена проблема определения уровня изучаемых математических дисциплин. Перед каждым преподавателем поставлен вопрос: На что нужно обратить более пристальное внимание? Какие теоретические вопросы предложить студентам изучить самостоятельно, что не рассматривать вовсе? Возможно, ограничиться лишь практическим приложением, проигнорировав теоретическое обоснование?

Целью исследования является определение баланса между теоретической и практической частью математической составляющей в подготовке бакалавра технических направлений.

Математическую подготовку по техническим направлениям условно можно подразделить на несколько этапов: изучение разделов с точки зрения теоретических аспектов, рассмотрение их практического характера, применение математического аппарата при изучении профессиональных дисциплин.

Основные формы изучения математических дисциплин в вузе – лекции и практические занятия [1]. Вот именно на лекционных занятиях необходимо и определить баланс между теоретическими и практическими аспектами.

В пользу сокращения объема и глубины рассмотрения теоретических аспектов можно отнести следующее: сокращение аудиторных часов на изучение дисциплин, в том числе и математических; увеличение объема времени отводимого на самостоятельную работу студентов; наличие большого количества справочных материалов, таблиц информационно-программных средств, которые позволяют получать результат без самого решения.

Но, с другой стороны, отсутствие фундаментальных основ, не позволят обучающемся свободно ориентироваться в профессиональных дисциплинах, в ситуациях, когда нужно знать глубокие основы математических понятий. Как правило, для технических направлений необходимы знания по исследованию функций нескольких переменных, умение решать дифференциальные уравнения и их системы в частных производных, а это невозможно без усвоения фундаментальных основ по функции одной переменной. Так получаем цепочку математических структур из которой ничего нельзя пропустить. Поэтому отказаться от рассмотрения теоретических основ математики не представляется возможным.

Как организовать процесс изучения математических дисциплин, сохраняя фундаментальность, не упуская логичности, научности изучения [2].

Лекционный материал должен отвечать основным требованиям: научность содержания, логически стройное и последовательное изложение, информационная насыщенность, творческий характер, яркость изложения и т.д. [3].

Ситуация с пандемией COVID-19 в 2019 году повлияла на организацию образовательного процесса, наработанный опыт использования различных дистанционных образовательных технологий, пригодился и при проведении лекции в аудитории.

Лекционный материал предлагается студентам в электронном виде заблаговременно для рассмотрения основных вопросов. Наличие вопросов в материале, позволяет студентам акцентировать внимание на главном. Таким образом, студент приходит на лекцию подготовленным, он понимает структуру изучаемого материала, не тратиться много времени на запись самой лекции. У преподавателя появляется время на разъяснение наиболее трудных моментов, повторение важных аспектов лекции, разбору большего количества примеров.

Так, например, при изучении темы «Матрицы. Определители» колоссально много времени освобождается в ходе лекции, так как ни преподавателю, ни студенту не надо записывать в общем виде матрицы n-ого порядка, появляется возможность проговорить, обратить внимание на тонкости работы с данными структурами.

Это один из аспектов использования положительного опыта долговременной работы в дистанционном формате. Но использование данного подхода, работа в электронной информационно-

образовательной среде позволяют сделать лекции не только качественной, но и понятной и интересной студентам.

Список литературы

1. Вузовская лекция. – Учебно-методическое пособие. / Сост. В.С. Зайцев. – Челябинск: Издательство ЗАО «Библиотека А. Миллера», 2018 – 43 с.
2. Педагогика высшей школы. Учебно-методическое пособие / Сост. Н.И. Мешков, Н.Е. Садовникова. – Саранск: , 2010 – 80 с.
3. Педагогика и психология высшей школы : Учеб. пособие / 2-е изд., доп. и перераб. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2002 – 543 с.

УДК 517.382

Соболев Сергей Константинович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

Томашпольский Виктор Яковлевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

Голосов Андрей Олегович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ В РАЗДЕЛЕ «НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ» КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Аннотация. *Рассматриваются методические вопросы, связанные с изучением несобственных интегралов в курсе «Интегральное исчисление» в техническом вузе. Обсуждается необходимость включения в курс заданий различного уровня сложности: кроме задач на вычисление интегралов и на непосредственное применение признаков сравнения предлагается рассмотреть задачи повышенной трудности, в частности, на исследование несобственных интегралов с параметром. Решение таких задач способствует более глубокому усвоению учебного материала и формированию у студентов исследовательских навыков. Подробно разобраны несколько примеров исследования сходимости несобственного интеграла с одним или двумя параметрами. В каждом примере указываются знания и умения, необходимые для его решения.*

Ключевые слова: *определенный интеграл, несобственный интеграл, признак сходимости, признак сравнения, абсолютная сходимость, условная сходимость.*

Sobolev Sergey Konstantinovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University
(National Research University),
Moscow, Russia

Tomashpolsky Viktor Yakovlevich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University
(National Research University),
Moscow, Russia

Golosov Andrey Olegovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University
(National Research University),
Moscow, Russia

PROBLEMS WITH PARAMETER IN THE SECTION «IMPROPER INTEGRALS» IN THE CALCULUS AT A TECHNICAL UNIVERSITY

Abstract. *Methodological issues related to the study of improper integrals in the course "Integral calculus" at a technical university are considered. The necessity of including tasks of various levels of complexity in the course is discussed: in addition to tasks for calculating integrals and for the direct application of comparison features, it is proposed to consider problems of increased difficulty, in particular, for the study of improper integrals with a parameter. The solution of such problems contributes to a deeper assimilation of educational material and the formation of students' research skills. Several examples of the study of the convergence of an improper integral with one or two parameters are analyzed in detail. Each example specifies the knowledge and skills needed to solve it.*

Keywords: *definite integral, improper integral, convergence, convergence test, comparison test, absolute convergence, conditional convergence.*

Несобственные интегралы являются важнейшим средством для решения разнообразных задач в различных разделах высшей математики [1, 2]. Традиционно студенты технических вузов в разделе «Несобственные интегралы» изучают их свойства, два признака сравнения: мажорантный и предельный, теорему о связи абсолютной и обычной сходимости, признак Дирихле [3, 4, 5].

Мы предлагаем рассмотреть задачи на исследование несобственных интегралов с параметрами в качестве задач повышенной сложности. Решение такой задачи носит исследовательский характер, поскольку придётся рассмотреть разные случаи. От студентов требуется уверенное владение различными разделами курса математического анализа. Задачи такого типа вызывают интерес у обучающихся и служат повышению мотивации к изучению данного раздела.

Разберем ряд задач на исследование сходимости несобственных интегралов с параметром.

Пример 1. При каких положительных значениях параметра p сходится интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(x-\sin x\right)^p}$?

Решение**.** По-видимому, тут вряд ли применим мажорантный признак сравнения, скорее, тут подойдет предельный признак. Но как подобрать эквивалентную функцию? Применим формулу Маклорена с остатком в форме Пеано:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right) \text{ при } x \to 0.$$

Получим $\left(x-\sin x\right)^p \square \frac{x^{3p}}{6^{3p}}$ при $x \to 0$.

Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{6^p\,dx}{x^{3p}}$ сходится при $p<\frac{1}{3}$ (как интеграл вида $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$) Следовательно, по предельному признаку сравнения исходный интеграл сходится также при $p<\frac{1}{3}$.

При решении данной задачи требуется хорошо знать раздел «Формула Тейлора», а также хорошо ориентироваться в разделе «сравнение бесконечно малых».

Пример 2. При каких положительных значениях параметра p сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left(\operatorname{arcctg} x\right)^p\,dx$?

Решение. Этот интеграл можно также исследовать, применив предельный признак сравнения. Чтобы побрать эквивалентную функцию можно применить формулу $\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, верную при $x>0$. Однако очень немногие студенты помнят эту формулу. Выясним порядок малости функции $\operatorname{arcctg} x$ относительно $1/x$ при $x\to+\infty$ с помощью правила Лопиталя:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arcctg} x}{1/x^k}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1/\left(1+x^2\right)}{-k/x^{k+1}}=1$ при $k=1$. Значит $\operatorname{arcctg} x \sim \frac{1}{x}$ при $x\to+\infty$. Таким образом, получим $\left(\operatorname{arcctg} x\right)^p \sim \frac{1}{x^p}$ при $x\to+\infty$.

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$. Следовательно, по предельному признаку сравнения исходный интеграл сходится также при $p>1$.

Для решения этой задачи нужно хорошо знать теорию пределов и дифференциальное исчисление.

Пример 3. При каких положительных значениях параметра p сходится интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^p \, dx$?

Решение. И вновь задачу можно решить, применив предельный признак. Этот несобственный интеграл имеет особенность при $x = \frac{\pi}{2}$. Поэтому эквивалентную функцию теперь нужно подбирать при $x \to \pi/2$: $(\operatorname{tg} x)^p = \left(\operatorname{ctg}(\pi/2 - x)\right)^p \sim \frac{1}{(\pi/2 - x)^p}$ при $x \to \pi/2$. Интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\pi/2 - x)^p}$ сходится при $p < 1$. Следовательно, по предельному признаку сравнения исходный интеграл сходится также при $p < 1$.

Для решения этой задачи нужно владеть техникой нахождения эквивалентных бесконечно малых стандартного вида.

Пример 4. При каких положительных значениях параметров p и q сходится интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q}$?

Решение**.** Сначала рассмотрим разные значения параметра p. При $p > 1$ можно применить признак сравнения: $\frac{1}{x^p (\ln x)^q} \le \frac{1}{x^p (\ln 2)^q}$. Интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln 2)^q}$ сходится при любом значении q. Следовательно, по признаку сравнения исходный интеграл сходится.

При $p < 1$ также можно применить признак сравнения, однако потребуются более сложные оценки. Неравенство $\frac{1}{x^p (\ln x)^q} \ge \frac{1}{x}$ равносильно неравенству $\ln x \le x^{\frac{1-p}{q}}$. Как известно, функция $\ln x$ имеет меньший порядок роста при $x \to +\infty$, чем x^α при любом $\alpha > 0$, значит существует число x_0 такое, что для всех $x \ge x_0$ выполняется не-

равенство $\dfrac{1}{x^p\left(\ln x\right)^q} \geq \dfrac{1}{x}$. Интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$ расходится, следовательно, по мажорантному признаку сравнения исходный интеграл также расходится при любом значении q.

Теперь рассмотрим случай $p = 1$:

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\left(\ln x\right)^q} = \left\{\begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{matrix}\right\} = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^q} \quad .$$

Данный интеграл сходится при $q > 1$ и расходится при $q \leq 1$.

Следовательно, при $p = 1$ и $q > 1$ исходный интеграл сходится, а при $p = 1$ и $q \leq 1$ интеграл расходится.

Для решения этой задачи нужно владеть техникой интегрирования и уметь сравнивать бесконечно большие величины.

Пример 5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(px)}{x^q} dx \qquad (*)$$

при положительных значениях параметров p, q.

Решение. При $q > 1$ и любом $p > 0$ данный интеграл сходится абсолютно по мажорантному признаку сравнения, поскольку

$$0 \leq \left|\frac{\sin(px)}{x^q}\right| \leq \frac{1}{x^q} \quad .$$

При $p,\ q > 0$ данный интеграл просто сходится по признаку Дирихле: функция $f(x) = \sin(px)$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\dfrac{1}{p}\cos(px)$, а функция $g(x) = \dfrac{1}{x^q}$ положительна, имеет отрицательную при $x > 1$ производную $g'(x) = -\dfrac{q}{x^{q+1}}$ и стремится нулю при $x \to +\infty$. Заметим, что при этих же значениях $p,\ q > 0$ по признаку Дирихле сходится и интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(px)}{x^q} dx \ .$$

Покажем, что интеграл (*) при $q \le 1$ не сходится абсолютно. В самом деле,

$$\left|\frac{\sin(px)}{x^q}\right| \ge \frac{\sin^2(px)}{x^q} = \frac{1-\cos(2px)}{2x^q} = \underbrace{\frac{1}{2x^q}}_{\varphi(x)} - \underbrace{\frac{\cos(2px)}{2x^q}}_{\psi(x)} = h(x).$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \psi(x)dx$ сходится, а $\int_1^{+\infty} \varphi(x)dx$ при $q \le 1$ расходится, потому расходится интеграл $\int_1^{+\infty} h(x)dx$ и, следовательно $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(px)}{x^q}\right| dx$.

Ответ: при $q > 1$ сходится абсолютно, при $0 < q \le 1$ сходится условно, не зависимо от $p > 0$. Для решения данной задачи надо хорошо знать свойства и признаки сходимости несобственных интегралов.

Эти и аналогичные задачи можно дать на экзамене студентам, претендующим на оценку «отлично». Методические вопросы, связанные с изучением несобственных интегралов, обсуждались на методическом семинаре кафедры «Высшая математика» [6].

Список литературы

1. Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н.. Интегральное исчисление функций одного переменного. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. - 528 с.
2. Зорич В.А. Математический анализ: учебник для вузов – М.: Изд-во МЦНМО, 2018. Ч. 1. 2018., 564 с.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учеб. пособие для втузов. Ред. Б.П. Демидович - М.: АСТ: Астрель; 2010. – 495 с.

4. Минеева О.М., Неклюдов А.В., Скуднева О.В. Несобственные интегралы: метод. указания к выполнению типового расчета – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 41 с.
5. Солдатенко И.Г., Фаликова И.Д. Несобственные интегралы: метод. указания к решению задач по курсу "Интегралы и дифференциальные уравнения" – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – 34 с.
6. Соболев С.К., Томашпольскаий В.Я., Методический семинар на кафедре «Высшая математика», Гуманитарный вестник (МГТУ им. Н.Э. Баумана): электронный журнал, 2018 .- № 7, http://hmbul.ru/catalog/edu/pedagog/537.html DOI: 10.18698/2306-8477-2018-7-537

УДК 372.851

Тарасов Кирилл Евгеньевич
магистрант,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Тарасова Оксана Викторовна,
доктор педагогических наук, профессор,
директор института педагогики и психологии,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ КУРСА ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКИ, ПРЕДНАЗНАЧЕННОГО ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ СРЕДНЕЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ ПОДГОТОВКИ

Аннотация: *В статье поднимается вопрос о необходимости изучения основ инженерной графики учащимися средней общеобразовательной школы технологического профиля подготовки, о важности математических знаний для выполнения различных построений, представлено применение системы автоматизированного проектирования Компас-3D для выполнения геометрических построений, связанных с делением окружности на равные части.*

Ключевые слова: *система автоматизированного проектирования Компас-3D, геометрические построения, основы инженерной графики, окружность.*

Kirill Evgenievich Tarasov
Master 's student,
Orel State University,
Russia, Orel

Tarasova Oksana Viktorovna
Doctor of Pedagogical Sciences, Professor,
Director of the Institute of Pedagogy and Psychology,
Orel State University,
Russia, Orel

THE MATHEMATICAL COMPONENT OF THE COURSE OF ENGINEERING GRAPHICS INTENDED FOR TEACHING STUDENTS OF SECONDARY SCHOOL OF TECHNOLOGICAL PROFILE TRAINING

Abstract: *The article raises the question of the need to study the basics of engineering graphics by students of a secondary school of technological training, the importance of mathematical knowledge for performing various constructions, the application of the Компас-3D computer-aided design system for performing geometric constructions associated with dividing a circle into equal parts is presented.*

Keywords: *Компас-3D computer-aided design system, geometric constructions, fundamentals of engineering graphics, circle.*

В последние годы государство все больше уделяет внимания подготовке инженерных кадров, уровень квалификации которых во многом определяет темпы развития экономики и техники нашей страны. Первые шаги профессионального обучения необходимо осуществлять в процессе организации профильного обучения в школе. Именно в школе учащиеся, ориентированные на поступление в технические вузы, должны овладеть начальными навыками черчения, инженерной графики.

В настоящее время в средней школе предмет «Черчение» исключен из числа обязательных учебных предметов. Элементы черчения составляют лишь незначительную часть образовательной области «Технология» и в представленном в ней объёме не позволяют сформировать необходимые практические навыки.

В связи с этим школы создают свои дополнительные общеобразовательные программы. Ряд таких программ посвящены основам инженерной графики. Изучение этих таких курсов нельзя произвести без комплекса математических знаний. В первую очередь к ним относятся геометрические построения с применением традиционных чертежных инструментов: линейки и циркуля.

Геометрические построения эффективно выполнять с помощью системы автоматизированного проектирования, например, Компас-3D. Система имеет простой и понятный интерфейс, который позволяет быстро освоить функциональные возможности программы и приступить к работе. Для того чтобы первые шаги по работе в системе были легче, разработчики Компас-3D предлагают интерактивные

уроки для изучения основного инструментария, которые собраны в «Азбуке Компас-3D».

Построение, выполненное с Компас-3D, будет чётким, наглядным, точным. Выполнение построения возможно только при условии сформированности соответствующих математических знаний.

Приведём пример применения САПР Компас-3D для выполнения деления окружности. Все построения выполняются учащимися под руководством учителя с целью научиться использовать Компас-3D и закрепить навыки выполнения геометрических построений.

Деление окружности на девять равных частей

Из точки *D* данной окружности через центр *O* проводим вспомогательную дугу. Соединив полученные точки *M* и *N* прямой, мы таким образом разделим окружность на три равные части с центральным углом, равным 120°.

Если центральный угол разделить на три равные части, тогда получим три новых угла, равные 40°, а $\frac{360}{9} = 40^\circ$ (Рис.1).

Можно сразу определить угол, равный 40°. Для этого радиус данной окружности OC_1 нужно разделить на шесть равных частей и через крайнюю точку *C* полученного отрезка провести прямую, параллельную диаметру *AB*, на этой прямой вправо и влево отложить по пять таких же частей, обозначив крайние точки *K* и *E*.

Если точки крайних частей соединить с центром окружности, то образуется равнобедренный треугольник *KOE*, вершину которого составляет угол, равный 80°, а углы при основании треугольника буду равны 50°.

Стороны треугольника *KOE*, пересекая линию данной окружности, определяют точки 2 и 9.

Для определения точек 6 и 5 соединяем полученные точки 2 и 9 с точкой *D* и из центра *O* параллельно прямым *D*2 и *D*9 проводим два луча для получения точек 6 и 5.

Точки 8 и 3 определяем вспомогательными дугами, проведенными из точек *K* и *E* радиусом, равным EC_1 или KC_1. Первая точка совмещена с точкой C_1. При точном построении прямые *D*–2 и *D*–9 должны пересекать лучи *O*–6 и *O*–5.

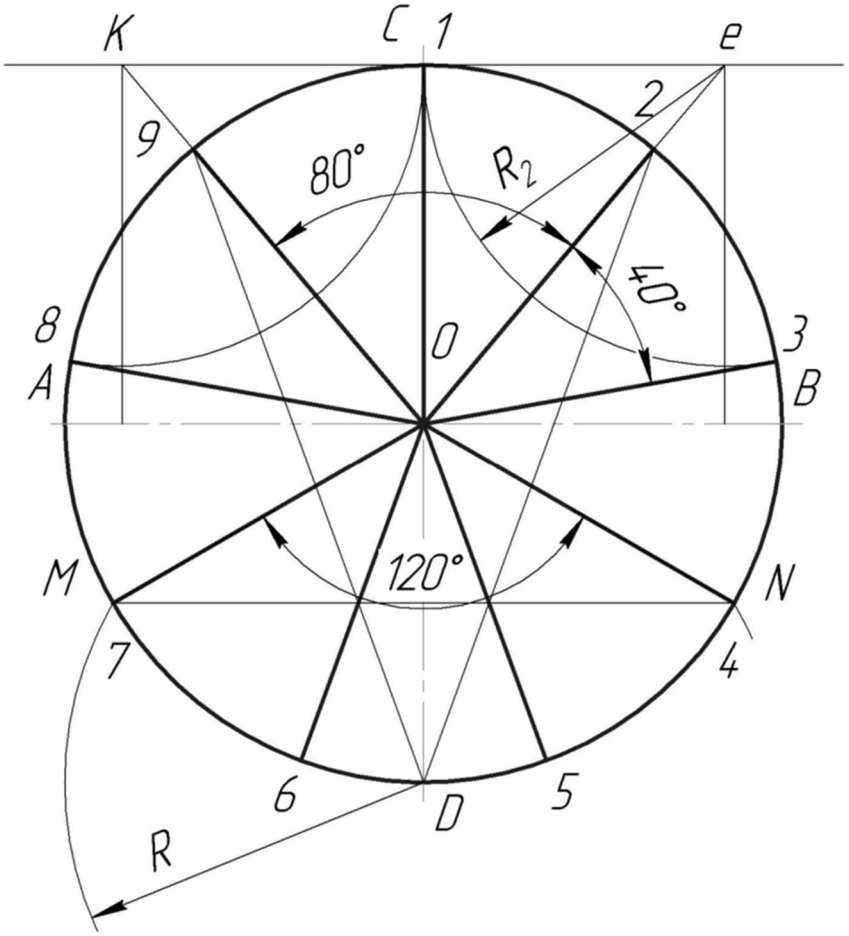


Рисунок 1 – Деление окружности

Деление окружности на восемнадцать равных частей

Чтобы разделить окружность на восемнадцать частей, достаточно лучи, полученные при делении на девять частей, продолжить до пресечения с противолежащими частями окружности. Центральный угол $\frac{1}{18} = \frac{360}{18} = 20^\circ$. Для определения $\frac{1}{36}$ части, центральный угол которой равен будет 10°, достаточно обратить внимание на то, что лучи *O*–8 и *O*–3 с радиусами *OA* и *OB* образуют углы, равные 10°.

Рассмотренные нами способы деления окружности на девять частей освобождают нас от такой операции, как откладывание на линии окружности сторон многоугольника измерителем или циркулем, что влечет за собой накопление погрешностей. В результате построение получается неточным.

Построение правильного треугольника по данной стороне

Разделив окружность на *n* частей, вы можете вписать или описать соответствующий правильный многоугольник. Для этого достаточно соединить точки, полученные при делении окружности.

Из крайних точек заданной стороны проводим дуги до их пересечения и полученную точку соединяем с крайними точками. Радиус вспомогательных дуг должен быть равен данной стороне.

При построении правильного треугольника необходимо принять во внимание величину центрального угла и угла при вершине: центральный угол должен быть равен 120°, а углы при вершине -60°. В техническом черчении построение правильного треугольника выполняют с помощью рейсшины и угольника с углами в 30° и 60° или двух угольников.

Построение квадрата по данной стороне

Определяем середину данной стороны и в этой точке восстановим перпендикуляр, на котором откладываем величину, равную данной стороне.

Через верхнюю точку перпендикуляра проводим параллельную прямую, на которой откладываем величину данной стороны. Полученные четыре точки соединяем.

Построение шестиугольника по данной стороне

Радиусом, равным дано стороне, из точек 1 и 2 проводим дуги, пересекающиеся в точке *O*, которая будет центром шестиугольника. Из центра на продолжении этих дуг тем же радиусом определяем вершины 3 и 4, соединяем полученные вершины прямой, которая должна проходить через точку *O*.

Эта прямая является одной из диагоналей шестиугольника. Две диагонали должны быть проведены из данных точек 1 и 2, и на них тем же радиусом определяем вершины 5 и 6. Соединив полученные точки прямыми, получим искомый шестиугольник (Рис. 2).

Центральные углы шестиугольника должны быть равны 60°, а углы при вершинах – 120°. Шестая часть этого многоугольника представляет собой равносторонний треугольник.

Говоря о правильном шестиугольнике, необходимо помнить о двух его характерных размерах: один из них именуется диагональным и обозначается на технических чертежах буквой *D*, а второй – расстояние между сторонами его – обозначается буквой *S*. Размер *D* равен диаметру описанной окружности, а размер *S* – диаметру вписанной окружности.

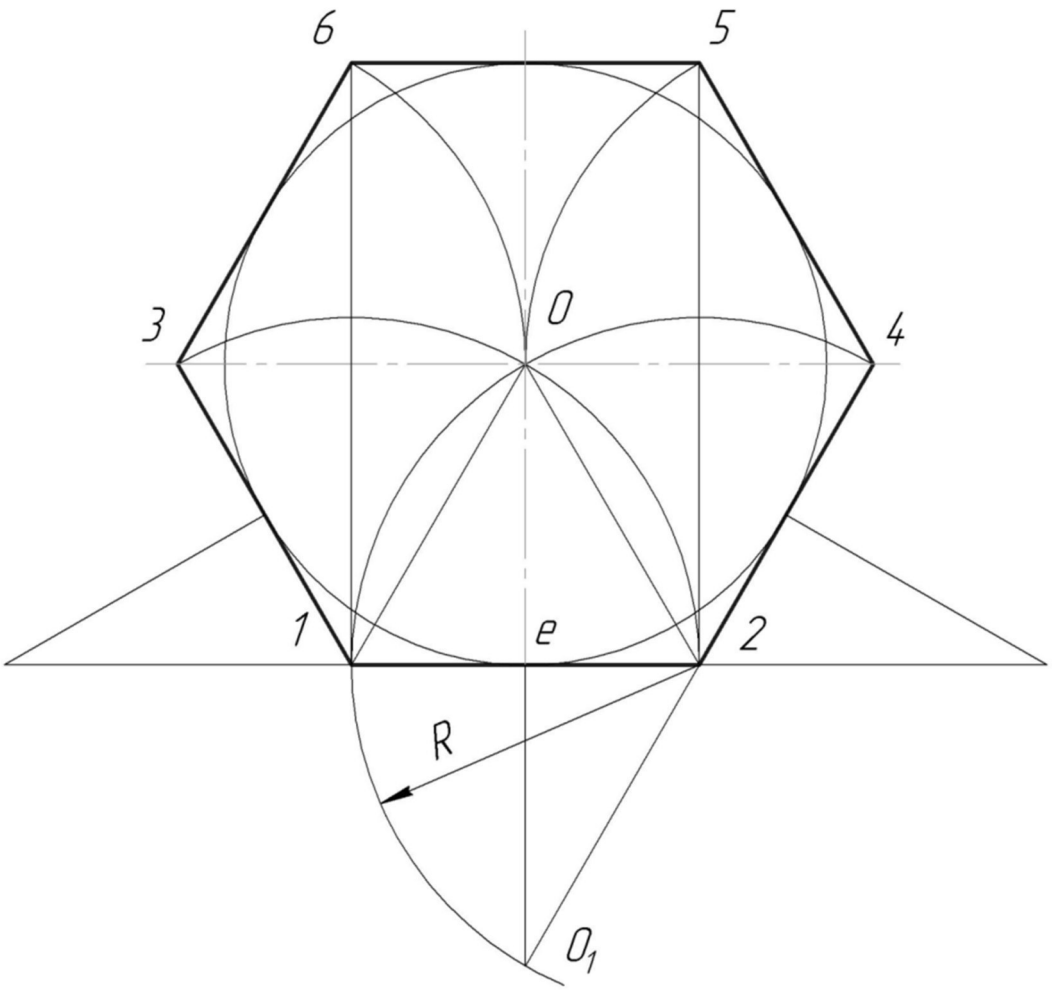


Рисунок 2 – Шестиугольник

В техническом и машиностроительном черчении исходным размером чаще всего является величина *S*, как контролируемый размер; он именуется «размер под ключ».

Познакомимся сначала со способом построения правильного шестиугольника в случае, когда дан размер *S* (Рис.3).

СПОСОБ ПЕРВЫЙ. *1-я операция*. Проводим с помощью угольников взаимно перпендикулярные прямые, которые в пересечении определяют центр *O*.Из центра радиусом *OA* проводим вспомогательную окружность, обозначив горизонтальный диаметр е буквами *A* и *B*. Из точек *A* и *B* этим же радиусом определяем на линии окружности точки *E* и *K*. Соединив точки *E* и *K* с точками *A* и *B*, на вертикальном диаметре окружности в пересечении с проведенными прямыми определим еще две точки *C* и C_1. Образовавшийся треугольник CC_1B – равносторонний. Горизонтальный диаметр *AB* делит этот треугольник на два прямоугольных треугольника, у которых угол при вершине *C* равен 60°, а угол при вершине *A* – 30°.

2-я операция. Через точки *A* и *B* проводим прямые, параллельные вертикальному диаметру окружности, а затем через точки *C* и C_1 параллельно горизонтальному диаметру проводим прямые до пересечения их с прямыми, проведенными через точки *AB*. Этим мы определили четыре вершины: 2 и 3, 5 и 6.

Для определения вершин 1 и 4 надо на линии вертикального диаметра отложить отрезки, равные стороне треугольника *BC*.

Соединив полученные вершины 1 и 4 с вершинами 2, 6 и 5, 3 мы таким образом получили искомый шестиугольник. Контролем построения будет вспомогательная окружность, стороны шестиугольника должны быть касательные к линии ее в точках *E* и *K*.

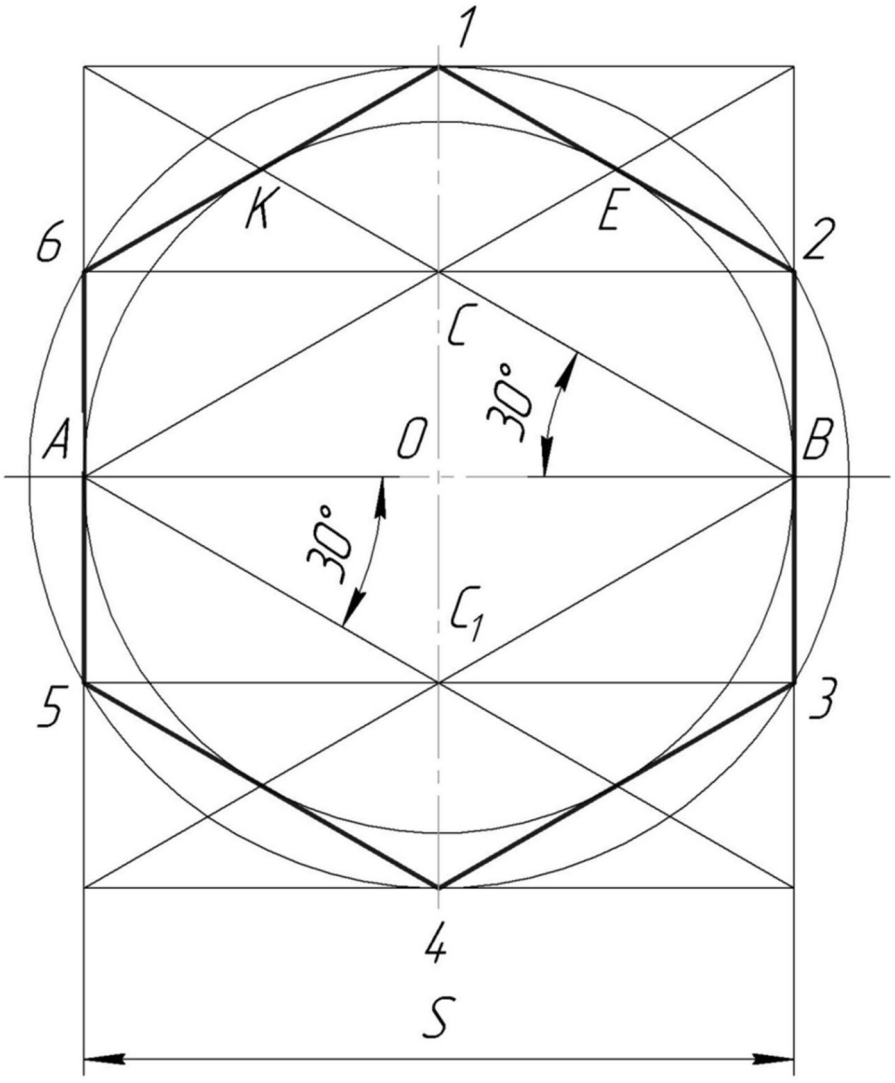


Рисунок 3 – Правильный шестиугольник

СПОСОБ ВТОРОЙ. На рисунке 3 показано, как может быть выполнено это построение с помощью рейсшины и угольника с углами 60° и 30°.

Приемы построения рейсшиной и угольником связаны со схемой построения первым способом.

Прямую проводим по ребру гипотенузы угольника, а прямые, параллельные диаметру, проводим по рейсшине.

Итак, формирование основ инженерной графики возможно осуществлять с помощью применения различных САПР, в том числе Компас-3D. При этом ключевое значение приобретают знания математического характера, которые составляют основу целого ряда инженерных дисциплин.

УДК 372.8

Фарафонова Ирина Владимировна
кандидат педагогических наук,
старший преподаватель кафедры теории и методики начального общего образования,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

Чижикова Ольга Викторовна
магистр 2 курса,
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева,
Россия, Орёл

РАБОТА НАД УЧЕБНЫМИ ПРОЕКТАМИ ПО ОКРУЖАЮЩЕМУ МИРУ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Аннотация. *В статье речь идёт об особенностях организации работы с младшими школьниками над учебными проектами при изучении предмета «Окружающий мир» по учебно-методическому комплекту «Школа России».*

Ключевые слова: *учебный проект, младший школьник, окружающий мир.*

Farafonova Irina Vladimirovna
candidate of pedagogical sciences,
Senior Lecturer at the Department of Theory and Methods of Primary General Education,
Oryol State University named after I.S. Turgenev,
Russia, Oryol

Chizhikova Olga Viktorovna
2nd year master,
Oryol State University named after I.S. Turgenev,
Russia, Oryol

WORKING ON EDUCATIONAL PROJECTS ON THE ENVIRONMENTAL WORLD AT PRIMARY SCHOOL

Abstract. *The article deals with the peculiarities of organizing work with younger schoolchildren on educational projects when studying the subject "The World Around" according to the educational and methodological package "School of Russia".*

Keywords: *educational project, junior student, the world around.*

Одним из системных компонентов образовательного процесса в в учреждениях среднего общего образования, затрагивающего принципы проблемного и деятельностного метода при личностно ориентированном обучении и педагогике сотрудничества, является метод учебных проектов. Данный метод предполагает решение актуальных вопросов и проблем в ситуации, когда решение старыми, традиционными методами не возможно. Использование данного метод как компонента образовательной системы школьников не противоречит сложившейся классно-урочной системе.

Советские педагоги заинтересовались методом учебных проектов в 20-30 годах прошлого столетия. Они видели в нём при условии критического переосмысления источник развития творческой инициативы и самостоятельности обучающихся, способ развития самостоятельности мыслительной деятельности, не простого запоминания и воспроизведения знаний, а, главное, умения применять их на практике в реальной жизни. При этом учащемуся предлагалась свобода и активность действий, а учитель лишь направлял самостоятельную работу учащихся.

Однако, отсутствие системы в изучении дисциплин, поскольку постоянных образовательных программ в данный период не было, и для изучения обучающие изучали только те знания, которые имели практическое применение в жизни, привело к нарушению основных законов дидактики: прочности, системности и последовательности.

В настоящий момент идеи основоположника метода проектов Джона Дьюи были переосмыслены с учетом современных требований образовательной системы и нашли своё отражение в деятельностном и личностно ориентированном подходе к процессу обучения.

Под методом проектов мы будем понимать «совокупность учебно–познавательных приемов, которые позволяют учащимся приобретать знания и умения в процессе планирования и самостоятельного выполнения определенных заданий с обязательной презентацией результатов» [1].

Проектно-исследовательская деятельность предполагает совместную деятельность учителя и учащихся познавательного, творческого или игрового характера, подчинённую общей цели и определёеым способам и методическим приёмам деятельности. Основу проектно-исследовательской деятельности составляет результат учебно-познавательной деятельности, достижение которого связано с решением практической, теоретической, социально-значимой проблемы.

Процесс получения результата проектно-исследовательской деятельности обучающихся при определённых условиях называют проектом. «Под проектом понимается обоснованная, спланированная и осознанная деятельность, направленная на формирование у школьников определенной системы интеллектуальных и практических умений» [2]. В любом случае «проект» - это явление многогранное, и рассматривать его нужно с разных точек зрения.

Для обучающегося проект открывает возможности самостоятельно создавать что-то интересное, причём этот процесс может осуществляться в разных формах: групповая или индивидуальная. Это учащимся максимально проявить себя, попробовать свои силы, приложить свои знания, принести пользу и показать публично достигнутый результат.

Для учителя учебный проект является средством обучения обучающихся проектированию. В данном процессе предполается деятельность по поиску способа решения проблемы через рассмотрение нескольких конкретных задач в определенных условиях.

Организация проектной деятельности в начальной школе – очень непростая задача, которая требует огромного желания, много сил и значительного времени. Но если грамотно организовать данную работу, то такие затраты дадут ощутимый эффект, который, прежде всего, связан с личностным развитием.

Рассмотрим плюсы и минусы проектной деятельности младших школьников. К плюсам можно отнести следующее:

– в процессе проектной деятельности у обучающихся формируются навыки самообразования и самоконтроля;
– отрабатывается технологичный алгоритм: от поставленной задачи до получения конкретного результата;
– выстраиваются навыки групповой деятельности;
– осуществляется индивидуальный подход;
– повышается интерес к познавательной деятельности.

Однако при организации проектной деятельности школьников, в том числе и в начальной школе, можно выделить ряд отрицательных моментов:

– переоценивая свои возможности и технические неполадки в процессе представления своего проекта ученик достаточно часто испытывает стресс;
– возможно возникновение коммуникативных трудностей со сверстниками в процессе работы над проектом;
– субъективизм при оценивании деятельности младших школьников;
– увеличение нагрузки на учителя в процессе проектной деятельности младших школьников.

Учащиеся начальной школы в силу возрастных особенностей не способны осуществлять полноценного проектирования. Поэтому им доступны лишь элементы проектной деятельности. Полноценной технологии проектной деятельности в начальной школе на данный момент не разработано. Имеется лишь опыт учителей - практиков, который позволяет успешно внедрять элементы проектной деятельности в процесс обучения младших школьников на уроках и во внеурочной деятельности.

Учебный предмет «Окружающий мир» раскрывает ценность природы для человека с разных сторон. Ценность многообразия природы рассматривается, основываясь на гармоничном отношении людей и других представителей всего живого. Изучение природы приобретает другой смысл: не практическое использование природных богатств, а их эстетическая, познавательная, исследовательская, нравственная ценность. Вот основной посыл для изучения данного предмета на ступени начального общего образования.

Поэтому в курсе «Окружающий мир» учебно-методического комплекта «Школа России» автор – Плешаков Андрей Анатольевич в досточном объёме включил рубрику «Наши проекты», позволяющую с учётом разных педагогических технологий, в том числе и проектной деятельности, выполнять основные задачи, стоящие перед данной дисциплиной. Так во втором классе автор заявляет шесть проектов: «Родной город (село)», «Красная книга, или Возьмём под защиту», «Профессии», «Родословная», «Города России» и «Страны мира» [3,4].

Остановимся подробнее на одном из них. Например, проект «Родословная» [4]. Целью данного проекта, по замыслу автора, является изучение истории семьи для установления более прочных связей

поколений, более близкому общению членой семьи, знакомство с историческими корнями своего рода и создание генеологического древо своей семьи.

Для этого вначале учитель предлагает определить такие понятия как «род», «родители», «родные», «родня», «родственники», «родословная». Все они обладают общим корнем. Далее для «погружения в проект» необходимо уточнить у учащихся задумывались ли они о своём происхождении, своих наследственных особенностях. Далее предполагается исследовательская работа по сбору информации о членах своего рода в нескольких поколениях. Собрав необходимый материал и подкрепив его иллюстративно, обучающийся должен её оформить в виде генеологического древа. И представить семейное древо, сопровождая презентацию кратким рассказом о каждом их представителей рода.

Таким образом, проектная деятельность в начальной школе позволяет изучить более широкий спектр вопросов содержания образовательного процесса, используя наиболее подходящие для этого технологии.

Список литературы

1. Проектные задачи в начальной школе: пособие для учителя / [А.Б. Воронцов, В.М. Заславский, С.В. Егоркина и др.]; под ред. А.Б. Воронцова – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 176 с.
2. Пахомова Н.Ю. Метод учебного проекта в образовательном учреждении. Пособие для учителей и студентов педагогических вузов / Н.Ю. Пахомова. – М.: АРКТИ, 2003. – 112 с.
3. Окружающий мир. 2 класс. Учеб. для оющеобразоват. организаций. В 2 ч. Ч.1 / А.А. Плешаков. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 144 с.
4. Окружающий мир. 2 класс. Учеб. для оющеобразоват. организаций. В 2 ч. Ч.2 / А.А. Плешаков. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 144 с.

УДК 53(07)

Филимонова Лилия Владимировна
кандидат педагогических наук, доцент,
Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина,
Россия, Елец

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ПОНЯТИЯ «ВЕС ТЕЛА» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ФИЗИКИ

Аннотация. *В статье сравниваются различные определения понятия «вес тела», даваемые в разных учебниках по физике для основной школы, а также в пособиях для учителей по методике преподавания физике. Выявляются противоречия и логические ошибки в использовании данного понятия. Даются рекомендации по формированию данного понятия у школьников.*

Ключевые слова: *вес тела, методика обучения физике, культура логического мышления, принцип целостности.*

Lilia Vladimirovna Filimonova
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Bunin Yelets State University,
Russia, Yelets

TECHNOLOGY FOR STUDYING THE CONCEPT OF " WEIGHT OF BODY " IN THE SCHOOL PHYSICS COURSE

Abstract. *The article compares various definitions of the concept of "weight of body" given in various physics textbooks for primary school, as well as in manuals for teachers on the methodology of teaching physics. Contradictions and logical errors in the use of this concept are detected. Recommendations are given on the formation of this concept among schoolchildren.*

Keywords: *weight of body, methods of teaching physics, culture of logical thinking, the principle of integrity.*

Формирование научных понятий было, есть и будет самой важной задачей изучения любой науки. Понятия являются основной формой рационального вида мышления человека в отличие от чув-

ственного. Поэтому учитель физики обязан уделять особое внимание контролю правильности усвоения физических понятий всеми учащимися в классе.

А.В. Усова в своей монографии приводит целый ряд критериев усвоения научного понятия [12]. К ним относятся:

- полнота усвоения содержания понятия, т.е. всех его существенных признаков,
- степень усвоения объема понятия, т.е. множества конкретных примеров, обозначаемых этим понятием,
- правильность соотнесения данного понятия с другими, схожими понятиями и т.д.

Одним из самых трудных для понимания является понятие «вес тела», которое вводится впервые в 7 классе школьного курса физики, но формирование которого может продолжаться вплоть до изучения дисциплины вузовского цикла «Теоретическая механика». Отметим, что теоретическая механика – это наука о механических движении и взаимодействии вещественных тел. С «высоты» знания теоретической механики видны многие недоразумения, которые встречаются в начале формирования данного понятия.

Рассмотрим более общий подход, а затем проанализируем особенности представленных в различных литературных источниках частных случаев.

Физический мир состоит из взаимодействующих тел. Поэтому выделяем абстракцию – *свободное* тело, т.е. тело, на которое не действуют другие тела или тело, которое ни с кем ни взаимодействует. Таким образом, свободное тело свободно от каких-либо взаимодействий. Движение такого тела ничем не ограничено, продолжается сколь угодно долго и не меняется. И, отталкиваясь от такой идеальной ситуации, как от «начала отсчета» логической цепочки рассуждений, переходим к противоположному случаю – примеру, когда движение тела ограничивается действием иных тел.

В 7 классе мы рассматриваем *свободное* падение тела вблизи поверхности Земли под действием силы тяжести. Здесь слово «свободное» используется в усеченном смысле: все же одна сила со стороны земного шара на рассматриваемое тело действует – это сила тяжести, но зато действие других тел исключается. И движение в этом случае уже происходит с ускорением относительно поверхности Земли, направленным к центру планеты. И здесь логично продолжить рассуждение, рассмотрев, а что будет, если свободно падающее тело

встретит на своем пути «опору». Понятие «опора» нигде не объясняется, никак не вводится, особенно в школе. И только дойдя до понятия «связи» в теоретической механике, начинаешь осознавать суть дела.

Получается, что опора – это тело, которое накладывает ограничения на движение другого тела, а именно препятствует его свободному падению. То есть опора – это частный случай **связи**. Поясним снова из теоретической механики, что связь – это «тело, препятствующее движению рассматриваемого объекта (тела, узла) в пространстве, а реакция связи – это сила, с которой связь действует на этот объект» [9, с.8].

Далее рассматриваем два варианта удержания тела от свободного падения: 1) подвешиваем его на нити, которая в такой роли получает название «подвес», 2) кладем на горизонтальную (направленную поперек движения при свободном падении) опору, т.е. неподвижное относительно Земли тело с плоской поверхностью. И тут же во втором случае возникает вопрос: а как быть с силой трения, как горизонтальной составляющей силы реакции такой связи? Нужно ли рассматривать опору как гладкую горизонтальную поверхность, чтобы исключить несущественные (второстепенные) признаки ситуаций, не относящиеся к сути формируемого понятия «веса тела»? Этот момент тоже нигде в учебной литературе не обсуждается. Однако это очень важный момент, так как сила реакции опоры, которой приравнивается по третьему закону Ньютона вес тела при сравнении их модулей, направлена именно перпендикулярно опоре.

То есть понимание «веса тела» неразрывно связано с пониманием «силы реакции опоры». И учителю физики прежде всего самому важно отчетливо видеть всю картину рассматриваемой ситуации в деталях.

Двигаемся дальше по логической цепочке и задаемся вопросом: а может ли считаться опорой движущееся тело? Например, пол движущегося лифта. И только с учетом вышеизложенного, а именно определения понятия опоры, как тела, препятствующего свободному падению, можно утвердительно ответить на этот вопрос. Да, опора может двигаться, и при этом тело, находящееся на опоре, движется вместе с опорой как единое целое, т.е. их кинематические величины совпадают. Исходя их этого, разрешаем еще одно непонимание. А именно, смысл ускорения в формуле веса тела при ускоренном движении:

$$P = m(g \pm a). \qquad (1)$$

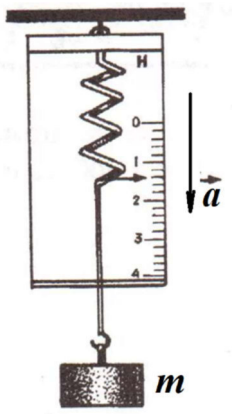
Здесь возможны три варианта пояснений в школьном учебнике по физике:

1. a - это ускорение опоры,
2. a - это ускорение тела,
3. a - это ускорение тела на опоре,
4. a - это ускорение тела вместе с опорой как единого целого - *правильный ответ*,
5. a - это ускорение…и не сказано какого объекта.

Важность наличия в учебнике ответа на данный вопрос легко увидеть на примере решения очень интересной задачи, которую представим в конце статьи.

А пока рассмотрим предлагаемые разными авторами учебников определения веса тела и их варианты трактовки случаев уменьшения и увеличения веса тела по формуле (1).

1) В 7 классе дается определение: «…*вес тела это сила, с которой тело, вследствие его притяжения к Земле, действует на опору или подвес*» [4, с.83]; в учебнике же для 9 класса далее рассматривается «вес тела, движущегося с ускорением», т.е. вариант ответа – 2. И значение веса приравнивается силе упругости, т.е. рассматривается случай тела, подвешенного к пружинным весам. Однако здесь некорректность: при резком опускании руки, удерживающей весы с подвешенным к ним грузом, вниз отмечается, что ускорения весов и груза будут равны. Это не всегда так, ведь они связаны не жесткой связью, а пружиной. А более детальных пояснений нет. И далее при рассмотрении случая сообщения весам ускорения вверх видим, что ускорение сменило вариант ответа на 1. В конце параграфа делается вывод, что все сказанное относительно увеличения и уменьшения веса справедливо для любого подвеса и для любой опоры. И далее приводится пример сравнения веса автомобиля в двух случаях: 1) при движении автомобиля по выпуклому мосту и 2) при неподвижном расположении его на том же мосту. И второй пример с весом летчика, движущегося по траектории в форме окружности, плоскость которой вертикальна. Во всех этих случаях вес тела рассматривается лишь как сила,



противопоставляемая силе реакции опоры в третьем законе Ньютона. То есть в этих примерах вес – это сила, с которой тело действует на опору, и уже не важно в силу каких причин. А данное ранее определение, где причиной веса указано притяжение к Земле, в этих примерах вступает в логическое противоречие с новым смыслом «старого» термина.

2) Рассмотрим учебник Балашова М.М. В нем явно предлагается именно *определение* «веса тела»: «*сила с которой тело действует на горизонтальную опору или вертикальный подвес, называется* **весом** *тела*» [1, с.226]. Ни о каком притяжении к Земле здесь речь уже не идет. И тогда под определение подпадает сила давления груза на опору и в случае, если груз прижимается к опоре рукой. А это уже логическая ошибка – неразличение (смешивание) понятий «вес тела» и «сила давления груза на опору». Далее отмечается, что вес – это «сила упругости, с которой тело действует на опору или подвес» [1, с.227]. На наш взгляд, это - пример некорректности речи учителя физики. Мы считаем, что сила упругости и вес тела в контексте решения задач по физике являются совершенно разными силами, обозначаются по-разному, понимаются поразному… А если речь идет о природе силы, т.е. смысловой контекст представляет собой рассмотрение четырех фундаментальных взаимодействий или иное разбиение, то о нем надо говорить яснее. В отношении формулы (1) в данном учебнике автором отмечается, что в ситуациях движения тела по выпуклому мосту, вращения шарика на нити в вертикальной плоскости, вообще не стоило бы употреблять термин «вес тела». Мы согласны с таким мнением. Однако, пишет автор учебника, встречаются такие задачи, где этот термин все же используется и предлагает использовать формулу (1), где смысл ускорения – вариант 3. И тогда получается противоречие самому понятию «опоры».

3) В учебнике физики за 7 класс под редакцией А.А. Пинского и В.Г. Разумовского вес тела рассматривается в связи с деформациями тел под действием одновременно двух сил – силы тяжести и силы реакции опоры. И эти деформации объявляются причиной действия тел на опору или подвес. «*Сила, с которой тело, деформированное силой тяжести и реакцией опоры, давит на опору (или натягивает нить), называется*

весом тела» [13, с.110]. Данный подход кажется вообще далеким от общей логики, изложенной вначале данной статьи. А в отношении формулы (1) имеем вариант 4.

4) В учебнике 7 класса А.В. Перышкина и Н.А. Родины находим объединение двух определений, рассмотренных в 1) и 2). «***Сила, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на горизонтальную опору или вертикальный подвес, называется весом тела***» [6, с. 52]. Здесь также ничего не сказано о важном условии – неподвижности опоры и подвеса относительно поверхности Земли. Но без этого невозможно логически перейти к рассмотрению случая движущейся опоры. И тогда возникает вариант 5, где не ясно вообще, о чьем ускорении идет речь в формуле (1).
5) Э.Т. Изергин в своем учебнике по физике для 7 класса из серии «Инновационная школа» дает следующее определение рассматриваемому понятию: «***Сила, с которой деформированное тело вследствие притяжения к Земле действует на опору или подвес, называется весом тела***» [3, с. 148]. При этом автор указывает на электромагнитную природу веса тела как частного случая силы упругости. И далее на с. 174 пишет: «Вес тела, движущегося вертикально вниз с ускорением a, меньше веса покоящегося тела, равного mg». В формуле (1) соответствует вариант 2: «…груз опускается с ускорением a…». Далее предлагается к решению задача нахождения веса тела массой m, которое поднимают с помощью нити вертикально вверх с ускорением a. При этом умалчивается из определения веса фраза «вследствие притяжения к Земле», и этот нюанс не поясняется.

Очень важное замечание делает в своей статье В.В Ештокина: «В курсе физики 7 класса следует учесть, что вес тела рассматривается только для случая, в котором тело и подвес находятся в состоянии покоя относительно Земли, т.е. в данном случае модуль веса тела будет равен модулю силы тяжести» [2, с.119]. Но на практике мы видим различные варианты изучения данного понятия даже в 7 классе.

В книге по теории и методике обучения физике в основной школе А.В. Усовой отмечаются следующие задачи урока физики в 7 классе на тему «Вес тела»: 1) разграничить «вес тела» и «силу тяжести», а для этого хорошо опереться на демонстрацию – шар, подвешенный на нити, растягивает нить силой своего **веса**, но если нить перерезать,

то шар падает под действием **силы тяжести;** 2) рассмотреть лишь случай неподвижных горизонтальной опоры и подвеса, 3) показать, что при действии на опору груза она деформируется (рис.), и также деформируется сам груз, 4) отметить взаимный характер действия тел друг на друга, 5) дать определение веса в следующей формулировке: «Силу, с которой тело давит на опору или растягивает подвес вследствие притяжения к Земле называют весом тела», отметив, что «вес тела – одно из проявлений силы тяжести» [11, с. 57]. Однако случай применения формулы (1) в данной книге не рассматривается.

В пособии для учителя Перышкина А.В. с соавторами находим рекомендацию: «…Необходимо позаботиться о том, чтобы представления, которые возникнут у учащихся относительно силы тяжести и веса, не пришли впоследствии в противоречие с теми объяснениями, которые им будут давать в старших классах» [5, с. 72]. Далее подчеркивается, что сила тяжести и вес тела имеют разную природу (сила тяготения и сила упругости), а путать эти силы учащиеся не могут, так как изучают их впервые и не имеют еще такой привычки. Тут же акцентируется внимание учителя на «соблюдении правильной терминологии», т.е. учитель должен следить за своей речью, различая не только понятия «сила тяжести – вес», но и понятия «вес тела – масса тела».

Таким образом, очень важно в методике изучения понятия «вес тела» правильно выстраивать весь контекст учебного материала, соблюдая принципы целостности и системности, а также основные правила культуры логического мышления. Обеспечивать преемственность содержания учебного материала при изучении физики в разных классах. Только тогда понимание учащихся станет главной движущей силой в их мотивации к изучению физики в школе.

Пример верного задания контекста, но отсутствия верного определения веса тела находим у И.В. Яковлева в его электронном пособии по физике. «Рассмотрим тело, находящееся в поле силы тяжести. Предположим, что есть опора или подвес, препятствующие свободному падению тела. Вес тела — это сила, с которой тело действует на опору или подвес. Подчеркнём, что вес приложен не к телу, а к опоре (подвесу). По третьему закону Ньютона силы $\vec{P}$ и $\vec{N}$ равны по модулю (P = N) и противоположны по направлению» [14, с. 57].

Есть и другие варианты изучения понятия веса тела, например, на основе рассмотрения различных примеров из жизни с использованием IT-технологий [8].

Выводы

1) В учебной литературе зафиксировано несогласованное использование понятия «вес тела» со множеством противоречий. Эта ситуация требует методической и научной коррекции со стороны ведущих ученых, с последующим принятием универсального подхода всеми учителями и преподавателями физики.

2) Установлен факт некорректного применения даваемых определений понятия «вес тела», типичных ситуаций логической ошибки в понимании веса и применении этого термина к ряду задач по физике.

3) Имеет место расширение и дополнение смысла ранее введенных понятий в старших классах, но тогда необходимо устанавливать новые отношения и взаимосвязи в системе различных трактовок терминов в разных ситуациях, чтобы не допустить конфликта смыслов в понимании учащихся и не снизить их познавательный интерес к изучению физики.

В заключение приведем пример задачи [10, с. 41], которую невозможно логично объяснить, если опираться на неправильную методику изучения понятия «вес тела» (рис.).

272. Определить вес мальчика массой 40 кг в положениях A и B (рис. 50), если $R_1 = 2$ м, $v_1 = 10$ м/с, $R_2 = 10$ м, $v_2 = 5$ м/с.

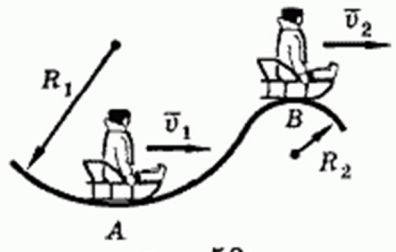


Рис. 50

По ходу ее решения требуется непротиворечиво теоретическому материалу учебника ответить на ряд вопросов:

1) Чей вес ищем в задаче? Ответ: вес мальчика.
2) Что служит опорой для мальчика? Ответ: санки.
3) А если нет санок и мальчик скатывается с горки без них?
4) А может ли опоры быть подвижной? Как можно опереться о то, что движется?
5) Чье ускорение следует подставлять в формулу (1)? Ответ ищем в теории учебника.
6) Почему вес мальчика в точках А и В разный? Неужели его поразному в этих точках притягивает Земля? Зависит ли сила притяжения Земли от движения мальчика или его опоры?

7) Имеет ли смысл в этом случае говорить о весе тела? Не лучше ли назвать силу, с которой мальчик давит на движущиеся санки, *силой давления* мальчика на санки?

Предлагаю читателю самостоятельно ответить на все эти вопросы.

Список литературы

1. Балашов М.М. Физика: Проб. Учеб. для 9 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1993. – 319 с.: ил.
2. Ештокина В.В. 3.11. Методика конструирования урока по физике "Вес тела. Невесомость" / В. В. Ештокина // Проблемы и перспективы развития образования по физике: общеобразовательные учреждения, педагогические вузы : Доклады научно-практической конференции, Москва, 12–13 апреля 2017 года. – Москва: Московский государственный областной университет, 2017. – С. 117-121.
3. Изергин, Э. Т. Физика: 7 класс: учебник : [12+] / Э. Т. Изергин. – Москва: Русское слово, 2013. – 209 с.: ил. – (ФГОС. Инновационная школа). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=486263 (дата обращения: 29.10.2021). – ISBN 978-5-91218-414-7. – Текст: электронный.
4. Кикоин И.К., Кикоин А.К. Физика: Учеб. для 9 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1990. – 191 с.: ил.
5. Перышкин А.В. и др. Преподавание физики в 6-7 классах средней школы: Пособие для учителя/ А.В. Перышкин, Н.А. Родина, Х.Д. Рошовская. – 4-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 1985. – 256 с., ил.
6. Перышкин А.В., Родина Н.А. Физика: Учебник для 7 кл. сред. шк. М.: Просвещение, 1991. – 174 с.: ил.
7. Петров Ю.А. Азбука логического мышления. – М.: Изд-во Моск. ун-та. 1991. – 104 с.
8. Пивоваров В.П. Вес тела и невесомость в школьной программе по физике: изучение темы с использованием информационных технологий / В. П. Пивоваров // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: Сборник научных трудов II Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Смоленск, 14 апреля 2018 года. – Смоленск: Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании, 2018. – С. 135-146.

9. Теоретическая механика. Учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей заочной формы обучения / Сост. Н.А. Воронович, М.А. Осипенко, Р.М. Подгаец. – Перм. гос. техн. ун-т., Пермь. 2006. – 138 с.
10. Сборник задач по физике: Для 9-11 кл. общеобразоват. учреждений / Сост. Г.Н. Степанова. – М.: Просвещение, 1995. – 256 с.: ил.
11. Усова А.В. Теория и методика обучения физике в основной школе. Часть вторая. Частные вопросы. – Ульяновск: изд-во «Корпорация технологий преподавания». 2006. – 288 с.
12. Усова А.В. Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения. 2-е изд., испр. – М.: Изд-во Ун-та РАО, 2007. – Труды д. чл. и чл.-кор. Российской академии образования (РАО). Монография. – 309 с.
13. Физика: Учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений/ А.А. Пинский, В.Г. Разумовский, Ю.И. Дик и др.: Под ред. А.А. Пинского, В.Г. Разумовского. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2003. – 208 с.: ил.
14. Яковлев И.В. Физика. [электронный текст] http://mathus.ru/phys/book.pdf

УДК 376.42+372.851

Хорцев Андрей Валерьевич
студент,
ФГБОУ ВО «ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского»,
учитель математики,
МБОУ СШ № 41 им. М.Ю. Лермонтова,
Россия, Липецк

Фомина Татьяна Петровна
к.ф.-м.н., доцент,
ФГБОУ ВО «ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского»,
Россия, Липецк

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕЙМИФИКАЦИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ ШКОЛЬНИКОВ С НАРУШЕНИЯМИ В РАЗВИТИИ

Аннотация. *Основными задачами обучения детей с особыми образовательными потребностями являются формирование прочных базовых знаний по преподаваемой дисциплине, социализация личности, способствующая успешному включению учащихся в общество и предполагающая подготовку к активному участию детей в будущей социальной жизни. Однако реализовать их с помощью традиционных методов обучения в рамках школьного образования достаточно сложно, что актуализирует использование современных методов. В данной работе обсуждается возможность применения игрового обучения, в частности, геймификации на уроках математики.*

Ключевые слова: *геймификация, математика, интеллектуальные нарушения, нарушения в развитии, учащиеся с ОВЗ, игровое обучение*

Khortsev Andrey
student,
Lipetsk State Pedagogigal University,
Math Teacher,
Secondary School No. 41,
Russia, Lipetsk

Fomina Tatiana Petrovna
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Lipetsk State Pedagogigal University,
Russia, Lipetsk

THE USE OF GAMIFICATION IN TEACHING MATHEMATICS TO SCHOOLCHILDREN WITH DEVELOPMENTAL DISABILITIES

Abstract. *The main objectives of teaching children with special educational needs are the formation of solid basic knowledge of the discipline taught, the socialization of the individual, contributing to the successful inclusion of students in society and involving preparation for the active participation of children in future social life. However, it is quite difficult to implement them using traditional teaching methods within the framework of school education, which actualizes the use of modern methods. This paper discusses the possibility of using game learning, in particular, gamification in math lessons.*

Keywords: *gamification, mathematics, intellectual disabilities, developmental disabilities, students with disabilities, game learning.*

Каждый ребенок, имея определенный уровень способностей и знаний на данном этапе жизни, является уникальным и требует индивидуального подхода в процессе обучения и воспитания. В своей образовательной практике каждый педагог сталкивается со школьниками, у которых отмечается абсолютно разный уровень возможностей усвоения знаний. Среди них могут быть дети, имеющие особые образовательные потребности в связи с наличием дефектов развития.

Б.М. Бим-Бад характеризует понятие «интеллектуальные нарушения» у детей как гипогнатию психики [4], недоразвитие познавательной, эмоционально-волевой и моторной сфер личности. Основой данного дефекта является отставание в развитии мышления.

При нарушении умственного развития у школьников наблюдается слабая любознательность, неспособность к отвлечению и обобщению, плохая восприимчивость к изучению и пониманию нового материала, а также замедленная обучаемость. Таким обучающимся сложнее понять логические связи между предметами, из-за чего им необходимо намного больше времени для изучения и закрепления материала.

Одной из неблагоприятных сторон при обучении школьников с умственной отсталостью является наличие в слабо развитой форме навыков социального взаимодействия, умения приобретать и усваивать общественный опыт, в частности, при общении со сверстниками или взрослыми людьми [3, 6].

Многие ученые и учителя на разных этапах развития педагогики по-своему трактовали решение проблемы обучения детей с ограниченными возможностями здоровья. В частности, Л.В. Выготский утверждал, что оно не должно опираться на завершенные и пройденные процессы развития, поскольку тогда оно бездейственно относительно общего развития [2].

Согласно федеральному государственному образовательному стандарту для детей с интеллектуальными нарушениями (умственной отсталостью), процесс обучения должен быть направлен на разностороннее развитие личности школьника и формирование основ учебной деятельности [7].

Так, учитель должен организовать учебный процесс, ставя его основными целями формирование базовых знаний и умений по преподаваемой теме, развитие эмоционального интеллекта и навыков социального взаимодействия, культурное и нравственное обогащение детей, приобретения ими необходимого опыта [5]. Однако все это необходимо осуществлять, удовлетворяя особые образовательные потребности школьников через обеспечение:

1) разработанных путей оптимального развития;

2) дифференцированного и индивидуализированного обучения;

3) формирования и развития социально-бытовых навыков;

4) постепенного расширения образовательного пространства за рамки данной организации и внутри нее;

5) применения необходимых методов и средств обучения.

Федеральный образовательный стандарт также устанавливает в своей основе деятельностный и дифференцированный подходы, осуществляемые через разнообразие организационных форм учебного процесса, обеспечивающих рост творческого потенциала, обогащение форм взаимодействия со сверстниками и взрослыми в познавательной деятельности.

Но отсутствие сформированных на необходимом уровне навыков ориентирования в поставленной ситуации, использования приобретенного опыта в понимании и решении учебной задачи, а также слабая способность к изучению нового позволяют сделать вывод о

трудности восприятия проблемного вопроса при изучении новой темы, возможности его преодоления и применения эталона решения на этапе закрепления материала. Имеющиеся у школьников сложности в сфере социального взаимодействия также являются преградой при обучении их новой теме или ее закреплении. В связи с этим возникает необходимость применения такого обучения, которое будет способствовать выполнению дидактической задачи и цели, активной социализации обучающихся, погружая их при этом в более комфортную атмосферу на основе знакомого, привычного вида деятельности. Именно таким является игровое обучение [10].

С.М. Вишнякова определяет его как технологию, целью которой является усвоение знаний и приобретение умений и навыков через активизацию самостоятельной познавательной деятельности учащихся, направленную на работу с учебной информацией, с помощью игрового вовлечения детей в творческую деятельность [1].

Игровое обучение примечательно тем, что ему, как и простой игре, присуща развивающая деятельность, предпринимаемая по указанию педагога, но по добровольному желанию самих детей, благодаря чему сами учащиеся могут получить удовольствие от процесса учения.

К важным свойствам игровой технологии можно отнести активную творческую и познавательную деятельность обучающихся. Поскольку игра имеет высокую эмоциональную окрашенность и носит положительный развлекательный характер, дети становятся открытыми к общению и взаимодействию с другими участниками образовательного процесса. Применение рассматриваемого обучения позволяет снизить напряженность учащихся, свойственную им при обычном, стандартном обучении, а также существенно сократить их утомляемость во время занятий. Немаловажным достоинством использования игр является формирование и поддержание устойчивого интереса к математике. Отсюда следует вывод о положительном характере влияния данного обучения при проведении уроков у детей с интеллектуальными нарушениями.

В рамках игрового подхода необходимо выбирать такие формы проведения занятий, с помощью которых это становится возможным. Одними из эффективных способов для реализации обозначенных задач являются различного рода дидактические и сюжетно-ролевые, деловые игры, применение которых позволяет говорить о геймификации образования.

Брэнд Эндерс характеризует данный термин как внедрение игровых элементов и игровой механики к деятельности неигрового характера для придания ей большей эффективности и привлекательности [8]. Отметим, что основная цель применения данного приема в образовательном процессе состоит в том, чтобы сделать стандартное обучение увлекательнее и занимательнее, а не свести его к простой игре. Ведь, прежде всего, игровой подход ориентирован на достижение заранее поставленных и обозначенных целей обучения и результатов, регламентированных образовательным стандартом и учебной программой.

В работе [9] автором выделены несколько способов игрофикации учебного процесса:

1) внесение в процесс обучения элементов игрового характера, соответствующих заранее поставленным целям;

2) введение системы наград, служащей мотивацией детям к выполнению заданий;

3) разработка уровней сложности: основываясь на дифференцированном подходе, педагогу необходимо разработать несколько уровней сложности. Так учащиеся, преодолевая вызовы возрастающей трудности, будут переходить на новый уровень с большей мотивацией и интересом;

4) соблюдение принципов практико-ориентированности и самостоятельности обучения, в результате чего дети начнут приобретать особый опыт собственной деятельности и приобретать необходимые знания через него.

При внедрении геймификации на уроках с учащимися, имеющими интеллектуальные нарушения, необходимо соблюдать ряд условий:

1) обучающиеся должны в полной мере осознавать и понимать игровую ситуацию, в которую попали;

2) необходимо обговорить правило, состоящее в игре не друг против друга, а вместе с другими. Только в таком случае дети будут видеть в своем однокласснике не соперника или конкурента, а партнера по обучению;

3) педагог должен контролировать познавательную деятельность детей на каждом этапе работы, направлять ее в нужное русло.

Немаловажным является учет интересов личности, состоящий в реализации сюжетной составляющей планируемого урока в зависи-

мости от склонностей, предрасположенностей, увлечений обучающихся.

Так, в рамках исследования было разработано и проведено геймифицированное мероприятие для учащихся с интеллектуальными нарушениями 6Е класса МБОУ СШ № 41 им. М.Ю. Лермонтова, ставящее цель закрепление полученных знаний и отработку сформированных умений по теме «Нумерация многозначных чисел».

В качестве оборудования можно использовать интерактивную панель, на которой дети видят задания, и ноутбук для следования по интерактивной карте.

Сначала среди обучающихся был проведен опрос, на тему какого фильма, сериала, комикса или мультфильма проводилась бы игра. После совместного обсуждения перечисленных вариантов было решено взять в качестве основы серию известных комиксов, видеоигр и фильмов про Бэтмена. Соответственно, все задания были ориентированы на данную тематику. Проблемная ситуация, начинающая урок, также была поставлена с учетом темы (рисунок 1).

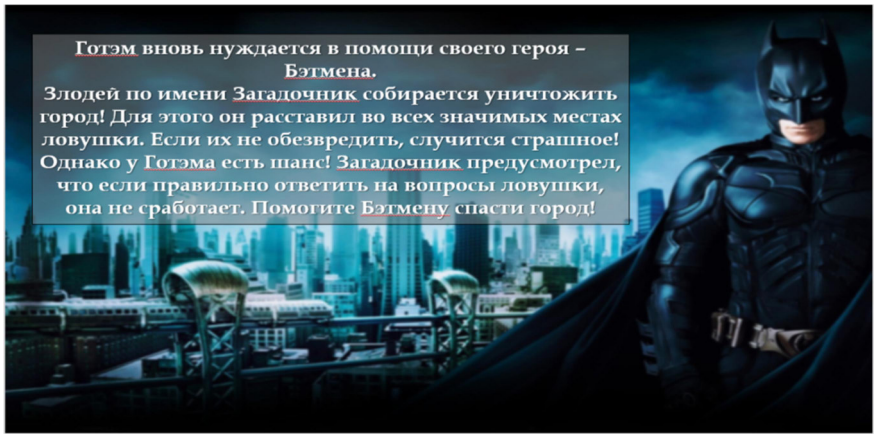


Рисунок 1 – Введение в игру

Деятельность учащихся на уроке была организована в форме коллективного обсуждения заданий и способов их решения: дети обменивались полученным в ходе предыдущих уроков опытом. Примечательно то, что обмен опытом происходил как от сильных учеников к слабым, так и наоборот. Совместно проговаривая процесс выполнения задачи, школьники приходили к единому ответу и по собственному желанию озвучивали его вслух, записывали на интерактивной панели.

Сюжет игры основывается на поимке известного злодея и спасении города от катастрофы. Для выполнения учебных задач была разработана специальная интерактивная карта, управляемая с помощью

клавиатурной мыши или сенсорным нажатием на необходимую ячейку (рисунок 2).



Рисунок 2 – Интерактивная карта

Выбор ячейки, содержащей задание, происходит случайным образом и определяется по выпавшему количеству очков на игральном кубике.

Каждое задание игры имеет сюжетную основу, заключающуюся в обезвреживании ловушки с помощью решения поставленной задачи через изученные способы. Перечень заданий приведен ниже.

Развилка 1:

1. Странная ловушка! Она отключается, когда слышит правильно названные числа: 1215, 7823, 91 101, 230 005.

1.1. Загадочник решил проверить, насколько хорошо Вы умеете раскладывать многозначные числа по разрядам. Запишите следующие числа в виде суммы разрядов: 7650, 99 115.

1.2. Странная ловушка! Она отключается, когда слышит правильно названные числа: 21 193, …, 21 202.

1.3. На трех разных высотных зданиях Вы видите число 891 345. Подпись под ним гласит «Сделай круглым!». Что означает эта подсказка?

Развилка 2:

2. Странная ловушка! Она отключается, когда видит правильно записанные числа: 7 сот. тысяч 5 дес. тысяч 1 ед. тысяч 6 сот. 3 дес. 9 ед.; 1 дес. тысяч 5 ед. тысяч 7 сот. 3 ед.; 9 сот. тысяч 3 ед. тысяч 4 дес.

2.1. Зайдя в здание мэрии, вы видите большую ловушку, состоящую из сумм разных чисел. Интересно, можно ли сделать их короче:

$$3000 + 500 + 70 + 6 =$$
$$90\,000 + 1000 + 300 + 50 + 8 =$$
$$600\,000 + 70\,000 + 2000 + 500 + 90 + 1 =$$

2.2. Загадочник хитер! Код от ловушки – все числа, которые находятся между следующими двумя: 3712, …, 3721.

2.3. В полицейском участке Вы видите Робина, помощника Бэтмена. К счастью, он нашел опасное приспособление раньше, и уже хотел его обезвредить. Проверьте, правильно ли он ввел код:

$$3781 \approx 4000$$
$$56\,781 \approx 56\,000$$
$$312\,003 \approx 400\,000$$

Развилка 3:

3. Странная ловушка! Она отключается, когда видит правильно записанные в таблицу разрядов числа: 25 361, 271 541, 60 302.

3.1. Странная ловушка! Она отключается, когда видит правильно записанные предыдущие и следующие за данными числа:

$$\ldots, 1912, \ldots$$
$$\ldots, 40\,031, \ldots$$

3.2. На улицах города вы встретили помощника Бэтмена, Робина, который обезвреживал ловушки. К счастью, он разгадал загадку злодея. Но правильно ли?

$$3175 = 3000 + 10 + 70 + 5$$
$$62\,037 = 6000 + 2000 + 0 + 30 + 70$$
$$185\,363 = 100\,000 + 80\,000 + 5000 + 300 + 60 + 3$$

3.3. Среди деревьев Вы видите небольшое устройство, обезвредить которое можно, вписав длинный код. Его можно получить, если округлить число 156 781 до: десятков, сотен, единиц тысяч, десятков тысяч, сотен тысяч.

Общие задания:

4. Прибыв к большому особняку, Вы заметили на его пороге разложенную ловушку. Чтобы обезвредить ее, сложите!

$$20\,000 + 30\,000 =$$
$$70\,000 + 10\,000 =$$
$$190\,000 + 100\,000 =$$

5. Загадочник готов сдаться, если вы ответите на последний его вопрос: как записать в таблицу разрядов число 15 000 000?

Отметим, что проведенная игра имела успех среди обучающихся 6Е класса. На последнем этапе урока была проведена рефлексия, на которой было организовано групповое обсуждение. Дети могли свободно выразить свои впечатления от проведенного урока, назвать его положительные и отрицательные черты.

Среди положительных черт ими было назван нестандартный подход к процессу обучения ввиду редкого проведения дидактиче-

ских и сюжетных игр на уроках, а также появившийся интерес и мотивацию выполнения поставленных задач.

Отрицательным моментом является отсутствие опыта работы в команде, вследствие чего на начальном этапе ребятам было сложно скоординировать действия. Однако, постепенно приобретая опыт взаимодействия в коллективе, учащиеся смогли преодолеть возникшие трудности.

Обобщая вышесказанное, отметим, что внедрение геймификации в процесс обучения детей с интеллектуальными нарушениями носит, в основном, положительный характер, заключающийся в появлении интереса к учению, взаимообмене опытом и развитии умения работать в группе. Немаловажным в применении рассматриваемого приема является учет образовательных потребностей школьников, их личностные особенности и интересы, а также уровень имеющихся знаний и умений.

Список литературы

1. Вишнякова, С.М. Профессиональное образование: Словарь: Ключевые понятия, актуал. лексика / С.М. Вишнякова // М-во общ. и проф. образования РФ. Упр. сред. проф. образования, Науч.-метод. центр сред. проф. образования. – М.: Новь, 1999. – 535 с.
2. Выготский, Л.С. Проблема обучения и умственного развития в школьном возрасте // Умственное развитие детей в процессе обучения: Сборник статей / Л.С. Выготский. – М.-Л.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1935. – С. 3-19.
3. Исаев, Д.Н. Умственная отсталость у детей и подростков: руководство / Д.Н. Исаев. – Санкт-Петербург: Речь, 2007. – 389 с.
4. Педагогический энциклопедический словарь / гл. ред. Б. М. Бим-Бад. – 3-е изд., стер. – М.: Большая российская энциклопедия, 2009. – 527 с.
5. Примерная адаптированная основная общеобразовательная программа образования обучающихся с умственной отсталостью (интеллектуальными нарушениями) (вариант 1) – URL: https://fgosreestr.ru/registry/primernaya-adaptirovannaya-osnovnaya-obshheobrazovatelnaya-programma-nachalnogo-obshhego-obrazovaniya-obuchayushhixsya-s-umstvennoj-otstalostyu/
6. Сапожникова, Т.В. Особенности развития детей с интеллектуальной недостаточностью / Т.В. Сапожникова. – Бийск : КГБУСО

«Краевой реабилитационный центр для детей и подростков с ограниченными возможностями «Родник». – URL: https://step.alregn.ru/mamina-shkola/pomoshch-roditelyam/vidy_pomoshchi_semyam/osobennosti-razvitiya-detey-s-intellektualnoy-nedostatochnostyu/
7. Федеральный государственный образовательный стандарт обучающихся с ограниченными возможностями здоровья (утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 19 декабря 2014 г. № 1598) / Министерство образования и науки РФ. – Москва, 2014.
8. Enders, B. Gamification, Games, and Learning: What Managers and Practitioners Need to Know / B. Enders // Thee Learning Guild. – 2013.
9. Хорцев, А.В. Использование геймификации при изучении вероятностно-статистического материала на уроках математики / А.В. Хорцев // ДОСТИЖЕНИЯ ВУЗОВСКОЙ НАУКИ 2021: сборник статей XVII Международного научно-исследовательского конкурса. – Пенза: МЦНС «Наука и просвещение», 2021. – С. 293-298.
10. Хорцев, А.В. Использование современных методов обучения и контроля знаний учащихся по математике в дистанционном формате / Д.А. Безделина, А.В. Хорцев // Школа молодых ученых: материалы областного профильного семинара по проблемам естественных наук (16 октября 2020 г.). – Липецк: ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, 2020. – С. 34-37.

УДК 378.147.31

Цуканов Борис Дмитриевич
кандидат педагогических наук, доцент,
профессор кафедры общей физики,
Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации,
Россия, Орёл

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Аннотация. *Рассматриваются значение методологии, методологические вопросы и методологические принципы познавательной деятельности. Анализируются возможности курса физики в формировании методологических знаний и умений, и их применение на основе обобщенных планов изучения физических явлений, законов, теорий.*

Ключевые слова*: методология, уровни и принципы методологии, методологическая компетенция, вопросы методологии в физике.*

Tsukanov Boris Dmitrievich
candidate of pedagogical sciences, associate professor,
professor of the department of general physics,
Russian Federation Security Guard Service Federal Academy,
Russia, Orel

METHODOLOGICAL FOUNDATIONS OF PHYSICAL EDUCATION

Abstract. *The importance of methodology, methodological issues and methodological principles of cognitive activity are considered. The possibilities of the physics course in the formation of methodological knowledge and skills, and their application on the basis of generalized plans for the study of physical phenomena, laws, theories are analyzed.*

Keywords: *methodology, levels and principles of methodology, methodological competence, questions of methodology in physics.*

В очередной раз изменились Государственные образовательные стандарты высшего образования. Новые ФГОС не получили статуса четвертого поколения стандартов. Они называются актуализированными ФГОС ВО 3++ и по-прежнему ориентируют профессорско-

преподавательский состав на реализацию компетентностного подхода в образовании. Это означает, что главной задачей образовательного процесса следует считать формирование компетенций (универсальных, общепрофессиональных, профессиональных), в структуру которых входят знания, умения, способность и готовность выполнять определенные виды деятельности. Например, в содержании ФГОС ВО 11.05.02 "Специальные радиотехнические системы" только в наименованиях универсальных компетенций выпускника специалитета мы встречаем "осуществлять…, управлять…, организовывать…, применять…, анализировать…, определять…, поддерживать…, создавать"[1: с. 9]. При этом в тексте всего документа слово "деятельность" используется пятьдесят раз. Профессиональный стандарт 06.005 "Специалист по эксплуатации радиоэлектронных средств (инженер-электроник)" содержит перечень трудовых функций (восемь функций) и для каждой из них список трудовых действий (видов деятельности) и умений, посредством которых эти функции должны осуществляться [2].

Это не противоречит лучшим традициям отечественной педагогики, одной из которых является сочетание в образовательном процессе различных видов деятельности: деятельности обучающего, деятельности обучающегося, совместной учебной деятельности. Организация деятельности является задачей методологии. В соответствии с этим ведущим системообразующим фактором в подготовке компетентного специалиста становится формирование методологической компетенции, начиная с методологических знаний и умений и далее – к методологической грамотности и методологической культуре. Потребность в этом ощущается уже на начальном этапе обучения в вузе, когда создается общенаучная база подготовки будущего инженера и специалиста. От методологической компетентности будущего выпускника зависит успешность его обучения в вузе и карьерный рост в служебно-профессиональной деятельности.

Четкого и общепризнанного определения методологической компетенции в доступной литературе не приводится. Предложим свою формулировку, которая не противоречила бы общепринятой терминологии. Обратимся к понятиям *методология* и *компетенция*.

Советский энциклопедический словарь содержит следующее определение методологии: "Методология (от *метод* и *...логия*) – учение о структуре, логической организации, методах и средствах деятельности" [3: с. 808]. Это определение мы встречаем также у А. М. Новикова и Д. А. Новикова [4: с. 11]. Рядом авторы приводят другое определение, несколько отличающегося от первого: "Методология –

система принципов и способов организации и построения теоретической и практической деятельности, а также учение об этой системе" [4: с. 11].

Сущность компетенции, по нашему мнению, в наибольшей степени выражает определение А. В. Хуторского: "Компетенция – отчужденное, заранее заданное социальное требование (норма) к образовательной подготовке ученика, необходимой для его эффективной продуктивной деятельности в определенной сфере" [5]. Это соответствует нашей точке зрения о том, что компетенции – это стандарты деятельности (трудовые функции, трудовые действия, необходимые знания и умения), освоение которых необходимо и достаточно для профессиональной самореализации специалиста. Все это должно отражаться в предлагаемом определении методологической компетенции.

Методологическая компетенция – это система знаний, умений, навыков, мотивов, формирующих в процессе обучения студентов представление о структуре, организации, методах и средствах деятельности.

Методологическая компетенция обладает структурой, включающей в себя когнитивный, мотивационный и практический компоненты [6: с. 3, и др.]. Все они формируются и развиваются при изучении конкретных учебных дисциплин. На младших курсах в решении этой задачи важную роль играет физика.

В соответствии с обозначенной проблемой проанализируем педагогические возможности курса физики для методологической подготовки обучающихся [7: с. 84-85] . Принято рассматривать философский, общенаучный и частнонаучный уровни методологии и методологической компетенции. В различной степени все выделенные уровни должны быть реализованы при изучении физики. Если рассматривать физическое образование как систему в виде учебной модели физической науки, использующей такие же понятия, математический аппарат, методы исследования, то формирование методологических знаний и умений должно отражать методологию физики и осуществляться средствами физического образования и в интересах образования.

В содержании физического образования можно выделить несколько категорий *методологических вопросов*:

– вопросы терминологического характера;

– вопросы, связанные с элементами физических знаний (о физическом явлении, физической величине, физическом законе, теории, объекте и т.д.);

– вопросы, связанные с овладением учебными, или познавательными умениями и знаниями;

– вопросы, связанные с общенаучными методами познания (наблюдением, экспериментом, гипотезой, моделированием, идеализацией, абстрагированием, сравнением, аналогией, математическим методом, мысленным экспериментом);

– вопросы, связанные с формированием научного мышления, научного мировоззрения и современной физической картины мира;

– вопросы организации учебной, учебно-исследовательской и научно-исследовательской работы студентов и слушателей.

Содержание физики позволяет естественным образом познакомить обучающихся с содержанием *методологических принципов* научного исследования и учебной деятельности. На предметных занятиях для этого необходимо рассмотреть:

– *принцип детерминизма* в классической и квантовой физике, проявляющийся в обусловленности явлений,

– *принцип соответствия*, который устанавливает связь новых научных теорий с существовавшими ранее;

– *принцип дополнительности*, который требует для целостного описания явления использовать дополняющие друг друга классы понятий классической и квантовой физики.

Методологические знания и умения формируются на всех видах учебных занятий, но особая роль в этом отводится вводной и заключительной лекциям, и обобщениям в конце изучаемых разделов курса.

В содержании вводной лекции по физике обычно рассматривается вопрос о методах и принципах познания (исследовательской и учебной деятельности). Обозначенные выше три принципа считаются общепризнанными, необходимыми и достаточными. Их список не пытаются расширить или изменить. Причина в том, что научное исследование направлено на получение новых знаний о свойствах материи. Это новые знания имеют связи с объективной реальностью (регулируются принципом детерминизма); с предшествующей системой научного знания (регулируются принципом соответствия); с познающим субъектом (регулируются принципом дополнительности).

Начиная с вводной лекции и продолжая на предметных занятиях, обучающиеся знакомятся с объектом и предметом изучения физики, с элементами научных знаний, общенаучными методами исследования и соответствующими уровнями познания. Выявляя аналогию в науке и учебной дисциплине, целесообразно на вводной лекции сформировать представление об организационных формах (лекциях,

семинарах и других) и методах образовательной деятельности (преподавания и учения) по физике, о значении лабораторного практикума и учебно-исследовательского эксперимента, о методах организации, стимулирования, мотивации и контроля в системе совместной учебной деятельности, об особенностях работы с современными источниками информации.

На вводной лекции обучающиеся знакомятся с элементами, структурой, логикой и алгоритмом научного познания в виде *факты → модель → гипотеза → следствия → эксперимент → теория или новая гипотеза.* Важно также на доступных примерах рассмотреть вопрос о структуре физической теории *(основание, ядро, выводы*).

Применение теоретического метода студенты и слушатели наблюдают на лекционных занятиях и реализуют в процессе аудиторной и внеаудиторной самостоятельней работы по конкретным темам программы. Здесь формируются и развиваются представления о видах материи, формах ее движения, о фундаментальных взаимодействиях и фундаментальных физических теориях. На лекциях важно не оставить без рассмотрения методологические принципы. Так, при изучении теории относительности и квантовых статистик обязательно привлечение принципа соответствия. При изучении свойств микрообъектов в квантовой механике нельзя обойтись без корпускулярно-волнового дуализма и принципа дополнительности. Рассмотрение статистического смысла волновой функции неизбежно приводит к новой трактовке принципа причинности: абсолютный детерминизм сменяется вероятностным.

Рассмотренные выше примеры укладываются в рамки частнонаучного уровня методологии. Общенаучный и философский уровни методологии свойственны выводам, обобщениям и методам, которые сформировались в физике, но обрели более высокий статус. Примерами могут служить закон сохранения энергии, неуничтожимость материи, структура элементарных частиц, корпускулярно-волновой дуализм, границы применения классической механики, соотношение классических и квантовых статистик, законы диалектики в физических процессах и системах. Синергетика, сформировавшаяся при исследовании открытых систем в термодинамике, обрела статус междисциплинарной области знаний и применяется для изучения биологических, социальных и других систем.

Каждая форма организации образовательного процесса открывает возможности для формирования методологической компетенции. *Лабораторные занятия* в явной форме ориентированы на освоение экспериментальных методов исследования, обработки результатов

измерения, табличного и графического методов их представления в соответствии с алгоритмом: *эксперимент → теория → следствия → практика.*

Практические и семинарские занятия имеют особое значение, поскольку они ориентированы на развитие специфических методов учебной деятельности. На практических занятиях по физике важное место занимают *упражнения*. При наличии системы учебных задач этот метод является мощным средством формирования методологических умений: анализировать ситуацию, формулировать проблему, выбирать способ решения, представлять результат, оценивать его достоверность. Проведение семинаров имеет особые цели:

– приведение в систему знаний по изученному разделу программы;

– выявление пробелов в знаниях;

– заполнение пробелов в знаниях;

– развитие умений устных сообщений, выступлений с докладами, ведения дискуссий и др.

В системе аудиторных занятий особое место занимает *самостоятельная работа под руководством преподавателя*. Для развития умений методологического характера (познавательных, или учебных) рекомендуется использовать учебные тексты, в которых специально структурированная информация дополняется методическими указаниями, рекомендациями и контрольными вопросами. В методические рекомендации мы включаем обобщенные планы изучения физических величин, явлений, законов, теорий.

Рассмотрим примеры методологических ошибок, характерных для физического образования.

В педагогической практике и учебных текстах можно встретить некорректное употребление понятий, когда отождествляются явления и величины. Так вместо "сила тока" говорят "ток", резистор называют сопротивлением, конденсатор – емкостью. Также неправильно называть магнитную индукцию магнитным полем, а напряженность электрического поля – электрическим полем.

Иногда отождествляются физические объекты и физические величины. Можно встретить выражения "энергия переходит", "энергия излучается", "энергия распространяется" и т. п. Ошибка в том, что энергия отрывается от носителя, т.е. материи. Стало общепринятым выражение "темная энергия" для обозначения особого вида материи, составляющего большую часть материи во Вселенной. Это понятие используется наравне с "темной материей" и имеет смысл вида материи. Такое название следует признать явно неудачным, поскольку в

таком контексте энергия не может быть количественной характеристикой движения материи.

Отдельной темой является терминология в области единиц физических величин. Если говорят "единица измерения", то следует иметь в виду, что измерение – это процесс. При измерении значение физической величины сравнивают с однородной величиной, принятой за единицу. Процесс же можно сравнивать только с процессом. Соответственно единицей процесса может быть другой, элементарный процесс. Однако выражение "единица измерения" вместо "единица величины" можно встретить даже в учебных пособиях по физике.

Также некорректным является использование термина "величина" вместо "значение". Например, когда говорят или пишут "величина скорости", "величина напряжения", забывают, что скорость и напряжение являются физическими величинами и такое сочетание означает "величина величины".

Важно уметь разделять понятия разного уровня и не сопоставлять разнопорядковые категории. Это важно, когда речь идет о характеристиках объекта, которыми могут быть *свойства* (хрупкость, цвет, форма, состав) и *величины* (плотность, электропроводность, удельное сопротивление, размеры, температура плавления и другие). Этот подход важен при использовании внешне похожих понятий, например, магнитная индукция и электромагнитная индукция, индуктивность и самоиндукция, взаимная индуктивность и взаимная индукция. Для понимания их сущности следует прежде всего разделить физические величины (обозначаются буквами, выражаются в определенных единицах) и физические явления (не имеют буквенных обозначений и единиц).

Выполненный анализ проблемы позволяет сделать следующие выводы:

1) Образование в вузе ориентировано на формирование и развитие компетенций (универсальных, общепрофессиональных, профессиональных), которые включают в себя знания, умения, способность и готовность выполнять определенные виды деятельности.
2) Изучение организации, структуры, методов и средств учебной и педагогической деятельности входит в задачи методологии.
3) Освоение методологии учебной деятельности при изучении физики создает основу сначала учебной, а затем – профессиональной деятельности будущих специалистов. По этой причине изучение основ методологии на материале физики предлагаем рассматривать как одно из приоритетных направлений совершенствования физического образования.

Список литературы

1. ФГОС ВО специальности 11.05.02 - Специальные радиотехнические системы (уровень специалитета) С изменениями и дополнениями от 13 июля 2017 г. 21 с. – URL: http://fgosvo.ru/uploadfiles/ fgosvospec/ 110502 _C_ 15062018.pdf (дата обращения: 09.10.2021).
2. Профстандарт 06.005 – Специалист по эксплуатации радиоэлектронных средств (инженер-электроник) // – URL: https:// classinform.ru/profstandarty /06.005-inzhener-radioelektronshchik. html (дата обращения: 09.10.2021).
3. Советский энциклопедический словарь – М.: Сов. энциклопедия, 1989. – 1632 с.
4. Новиков, А. М., Новиков, Д. А. Методология / А. М. Новиков, Д. А. Новиков / М.: СИН-ТЕГ. – 668 с.
5. Хуторской, А. В. Ключевые компетенции и образовательные стандарты. / А. В. Хуторской // Интернет журнал "Эйдос" . – 2002. –23 апреля. – URL: http://www.eidos.ru/ journal /2002/0423.htm (дата обращения: 09.10.2021)
6. Пашкова, А. В. Развитие методологической компетенции студентов в области педагогической психологии на основе социального конструкционизма / А. В. Пашкова / Автореф. дисс...канд. пед.наук. – Н.-Новгород, 2008.
7. Цуканов Б.Д. Методологические компоненты компетенций в общем курсе физики / Инновации в образовании: (сборник) /Б. Д. Цуканов // Сборник материалов V Международной научно-практической конференции. Орел: Издательство ООО «Модуль-Картуш», 2013.– 274 с. С. 82-85.

УДК 378.147.31

Черных Герман Анатольевич
кандидат физико-математических наук,
доцент,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Россия, Санкт-Петербург

Куперин Юрий Александрович
доктор физико-математических наук,
профессор,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Россия, Санкт-Петербург

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ДИЗАЙН КУРСОВ, ЧИТАЕМЫХ В ДИСТАНЦИОННОМ ФОРМАТЕ В СФЕРЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Аннотация. *Рассматривается проблематика построения учебных курсов, относящихся к области компьютерных наук, и читаемых дистанционно в связи с пандемией коронавируса. Предлагаются методы повышения усвояемости материала студентами в контексте наблюдающейся тенденции снижения мотивации к обучению. Обсуждаются вопросы целесообразности и эффективности преподавания в режиме реального времени (очного или дистанционного) в условиях наличия альтернативных курсов.*

Ключевые слова: *педагогический дизайн, компьютерные науки, онлайн образование, методология преподавания, дистанционный формат*

German A. Chernykh
Candidate of physical and mathematical sciences,
Associate Professor,
Saint-Petersburg State University,
Russia, Saint-Petersburg

Yuri A. Kuperin
Doctor of physical and mathematical sciences,
Professor,
Saint-Petersburg State University,
Russia, Saint-Petersburg

INSTRUCTIONAL DESIGN OF DISTANCE COURSES IN COMPUTER SCIENCE

Abstract. *We consider the problems of constructing educational courses related to the field of computer science and read remotely in connection with the coronavirus pandemic. Methods of increasing the assimilation of the material by students in the*

context of the observed tendency to decrease the motivation for learning are proposed. The issues of the feasibility and effectiveness of the real-time teaching format in the context of the availability of alternative courses on distance learning platforms are discussed.

Keywords: *instructional design, instructional systems design, computer science, teaching methodology, online course*

Введение

Продолжающаяся в настоящее время пандемия COVID-19 обострила ряд проблем в классическом высшем образовании. Вынужденный переход на дистанционную форму проведения занятий без пересмотра методологий преподавания приводит к снижению эффективности обучения. Помимо сопутствующих дистанционному формату объективных негативных аспектов психологического и технического плана, четко проявились факторы, являющиеся следствием интенсивного развития информационных и образовательных интернет ресурсов. В частности, наличие качественных онлайн курсов на известных платформах дистанционного обучения не только может ставить под сомнение целесообразность чтения определенных курсов в прежнем real-time (дистанционном) формате, но и мотивировать руководство вуза к исключению из учебного плана низко эффективных позиций. В условиях неуклонного роста количества онлайн курсов, созданных на высоко профессиональном уровне, а также доступности практически любой информации, методологические проблемы образования особенно значимы именно для высших учебных заведений, где слушатели априори способны к самостоятельному обучению. В качестве инструмента решения обозначенной проблемы сравнительно недавно появилась новая специальность — педагогический дизайн (instructional design или instructional systems design), цели и задачи которой реализуются на основе системного подхода к построению учебных дисциплин в условиях современного информационного общества.

Рассматривая область компьютерных наук, легко выделить достаточно много учебных дисциплин, ситуацию с поддержанием которых, в актуальном состоянии с точки зрения эффективности дистанционного формата можно считать критической. Ниже перечислены некоторые факторы общего плана, снижающие конкурентноспособность подобных курсов:

- Однородность и модульность. А именно, учебный материал представляет собой совокупность относительно самодостаточных блоков, с незначительно варьируемой сложностью. В качестве типичного примера можно привести теорию по алгоритмам и структурам данных, изложение которой часто сводится к монотонному изучению большого количества часто однообразного материала без внутренней единой структуры, а учебники более походят на справочники [3].

- Вводные и обзорные курсы. В виду невозможности достаточно глубокого погружения в материал, отягощенной необходимостью широкого охвата последнего, а также априорно допускаемым низким уровнем подготовленности слушателей, содержание подобных курсов также часто разбивается на совокупность мало связанных между собой частей, что к иллюзии простоты добавляет элемент однообразия.
- Наличие альтернативных онлайн курсов, сделанных на высоком профессиональном уровне, которые могут полностью заменить собой курсы, читаемые не только в дистанционном формате, но и очно. Платформы, размещающие у себя учебные онлайн курсы, предоставляют дополнительный функционал: автоматическая проверка заданий и оценивание, рейтинги, форумы и т.п.

Описанная проблематика актуальна не только для компьютерных наук. Однако стоит заменить, что преподавателям и специалистам именно из этой области легче остальных создать онлайн курс благодаря своим профессиональным компетенциям. Как следствие, конкуренция между очно читаемыми и онлайн курсами выделяется своей остротой именно в сфере компьютерных наук. Безусловно, полного замещения очного высшего образования онлайн форматом не будет, но, к примеру, в отношении элективных дисциплин, в особенности, при наличии платной основы обучения, изменения уже происходят с нарастающей интенсивностью.

Общие структуры учебных курсов

Рассматривая педагогический дизайн как полный комплекс мер по созданию, продвижению и поддержке конкурентноспособного учебного курса, мы в настоящей работе концентрируемся на построении общей структуры материала, предусмотренного к проработке в рамках курса, а не частных методиках, наподобие различных техник проведения занятий, систем поощрения (наказания), соревновательности и прочее, нацеленных на повышение уровня мотивации студентов к прохождению курса. Далее представлены некоторые типы подобных структур.

Базовый проект

Теоретический и практический материал курса, включая самостоятельную работу, строится на решении большого количества задач в рамках одного сложного творческого практического проекта. Промежуточные цели и задачи должны быть неотъемлемой составной частью базового проекта. Вся деятельность в рамках курса мотивирована достижением одной общей цели, но каждый студент должен пройти все этапы. Существуют популярные онлайн курсы, устроенные именно подобным образом. В качестве примера можно привести курс "Build a Modern Computer from First Principles: From Nand to Tetris (Project-Centered Course)"[4] на платформе Coursera [5], где слушателям предлагается построить

эмулятор компьютера, начиная с элементарных логических элементов. Иногда целесообразно разделение курса на малое количество идеологически связанных подпроектов, таким образом, чтобы курс не терял целостности. Примером могут служить курсы по программированию (React, ReactNative, Expo и т.д.) Владилена Минина [6].

"Новогодняя ель"

Это образное название описывает структуру курса с базовым проектом, где сохраняется необходимость изучения большого количества отдельных небольших модулей, не встроенных в основную канву. Одним из авторов настоящей работы читается курс "Объектно-ориентированное программирование где слушатели должны освоить не только классические базовые принципы ООП применительно к синтаксису языка Java, но и хорошо ориентироваться в паре десятков так называемых шаблонов проектирования [7]. Имеется два базовых проекта. В рамках первого целью является создание приложения для кодирования-декодирования по методу Хаффмана, что позволяет пройти путь от построения элементарных структур данных (пара, стек, очередь) до сложных (дерево Хаффмана, очередь с приоритетом и т.п.). Второй проект посвящен созданию приложения с графическим интерфейсом, где вместе с закреплением изученных в первом блоке принципов ООП, происходит выход на более высокий уровень разработки. Изучение шаблонов проектирования осуществляется в фоновом режиме преимущественно силами самих слушателей, которые осваивают материал самостоятельно и делают доклады с последующим обсуждением, а преподаватель играет роль модератора и активного слушателя.

Связующая проблематика

Описанные выше подходы хорошо применимы для чтения практических курсов, однако плохо подходят для теоретических в ситуациях, когда нецелесообразно или сложно выстроить последовательную канву изложения по примеру классических разделов математики или физики. Для решения этой проблемы в теории курса выбирается такая совокупность принципов, идей, законов и пр., которая может быть использована в качестве связующего материала для различных разделов курса, таким образом, чтобы слушатели видели односвязную структуру, где присутствуют не только вертикальные связи в рамках самодостаточных модулей, но и горизонтальные, объединяющие отдельные части курса в целое. Содержательная часть, в частности, обзорных курсов для широкой аудитории, изначально представляет собой набор своего рода "точечных погружений"в материал, слишком обширный для полного изучения, что приводит к модульной структуре. Каждый из авторов настоящей работы читает свою версию курса «Концепции современного естествознания» — «КСЕ. Мир глазами физика» и «КСЕ. Модели реальности». В качестве связующей проблематики выбраны концепции пространства, детерминизма-индетерминизма, открытости и

замкнутости, индивидуального-коллективного поведения, которые объединят в единое целое размышления о классической механике, термодинамике, теории относительности, квантовой механики, сложных системах.

Иерархия идей

Настоящий подход есть частный случай предыдущего и хорошо подходит для курсов по теории алгоритмов и их анализу, машинному обучению, типам и структурам данных, а также другим курсам преимущественно теоретического плана. Необходимо все множество блоков материала курса разбить на кластеры, объединенные одной проблематикой (идеей), и при изучении последовательности блоков в рамках одного кластера акцентировать внимание слушателей на выбранном важном идеологическом моменте. Идеальной является ситуация, когда возможен иерархический процесс кластеризации, где на самом высоком уровне проявится единая связующая проблематика. В качестве примера можно привести теорию по методам машинного обучения или искусственному интеллекту, где кластеризация может быть проведена с применением следующих концептов: роль и природа пространства признаков; обучение с учителем и без; эмерджентность; выбор гипотез и т.п.

Заключение

Авторы настоящей работы не претендуют на изобретение абсолютно новых принципов педагогического дизайна. Кажется естественным, что талантливые преподаватели всегда в той или иной степени пользуются элементами подходов, приведенных в предыдущих разделах. Здесь была совершена попытка выделения именно тех аспектов, которые могут помочь мотивировать аудиторию высшего учебного заведения к эффективному освоению курса в условиях дистанционного формата и жесткой конкуренции со стороны платформ онлайн образования. И акцент был сделан именно на идеологической составляющей материала учебных курсов, что безусловно нацелено в первую очередь на вдумчивых слушателей. В контексте вынужденного дистанционного формата, вызванного пандемией, необходимо упомянуть еще один немаловажный фактор успешности курса — это разные формы коллективной работы, нацеленной на общение: дискуссии, обсуждения презентаций, выделенных тем и обсуждение домашних заданий. Слушатели должны ощущать себя в сообществе, что является несомненным преимуществом real-time формата, пусть и дистанционного. Как уже акцентировалось во введении, высшее образование сейчас претерпевает значительные изменения с нарастающей интенсивностью, поэтому наступление новой реальности должно побуждать преподавателей к поиску новых методологий обучения, активному встраиванию себя в эволюционный процесс. Это интересная работа, мотивирующая каждого из нас к постоянному саморазвитию, а не рутинному чтению давно разработанных курсов.

Список литературы

1. 5 Basic Principles Of Instructional Systems Design. // [Электронный ресурс]. URL: https://elearningindustry.com/instructional-systems-design-5-basic-principles (дата обращения: 28.10.2021).
2. Instructional System Design (ISD): Using the ADDIE Model. // [Электронный ресурс]. URL: https://www.lib.purdue.edu/sites/default/files/directory/butler38/ADDIE.pdf (дата обращения: 28.10.2021).
3. Макконнелл Дж. Основы современных алгоритмов. — 2-е дополненное издание. — М.: Техносфера. — 2004. — 368 с.
4. Build a Modern Computer from First Principles: From Nand to Tetris (Project-Centered Course). // // [Электронный ресурс]. URL: https://www.coursera.org/learn/build-a-computer (дата обращения: 28.10.2021).
5. Coursera. // [Электронный ресурс]. URL: https://www.coursera.org (дата обращения: 28.10.2021).
6. Instructor Владилен Минин. // [Электронный ресурс]. URL: https://www.udemy.com/user/vladilen (дата обращения: 28.10.2021).
7. Joshi Rohit. Java Design Patterns. Ebook. — Java Code Geeks. — 2015. — 183 с.

УДК 372.852

Щербатых Владимир Егорович
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математики и методики ее преподавания,
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина,
Россия, Елец

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ОБУЧАЮЩИЕ ПРОГРАММЫ С ФУНКЦИЕЙ ТЕСТИРОВАНИЯ, КАК ЭФФЕКТИВНОЕ СРЕДСТВО ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Аннотация. *Мир во всем своем многообразии сегодня меняется очень быстро. Соответственно меняются все сферы деятельности человека в свете модернизации, наукоемкости, а, следовательно, и цифровизации. Трудовые ресурсы теперь должны быть знающими, умеющими и способными к саморазвитию. 10-20 лет назад это, как правило, могли быть люди с богатым опытом работы, а сегодня таким требованиям должны соответствовать выпускники вузов, чтобы быть конкурентноспособными на рынке труда. Делая краткий обзор современной ситуации в образовании, связанной с ковидом, автор в статье показывает, что компьютерные обучающие программы, созданные при определенных условиях, хоть и не панацея, но, способны эффективно работать по укреплению базовых знаний студентов.*

Ключевые слова*: высшее образование, цифровизация образования, обучающая компьютерная программа, образовательный процесс, вуз.*

Shcherbatykh Vladimir Egorovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of its Teaching,
Bunin Yelets State University,
Russia, Yelets

COMPUTER TRAINING PROGRAMS WITH TESTING FUNCTION AS AN EFFECTIVE E-LEARNING TOOL

Abstract. *The world in all its diversity is changing very rapidly today. Accordingly, all spheres of human activity are changing in the light of modernization, science intensity, and, consequently, digitalization. Labor resources must now be knowledgeable, able and capable of self-development. 10-20 years ago, as a rule, these could be people with rich work experience, and today university graduates must meet such requirements in order to be competitive in the labor market. Making a brief overview of the current situation in education related to covid, the author in the article shows that computer training programs created under certain conditions, although not a panacea, are able to effectively work to strengthen the basic knowledge of students.*

Keywords*: higher education, digitalization of education, training computer program, educational process, university.*

1. Введение

Совершенно очевидно, что в сильно меняющемся сегодня мире, тональность всех перемен, как правило, в большей мере, чем что либо, создает цифровизация – внедрение современных цифровых технологий практически во все сферы деятельности человека. Это явление глобально, поэтому оно не обошло стороной и систему образования РФ, практически все существующие организации, осуществляющие обеспечение образовательной деятельности.

Совершенствование цифровых технологий позволяет назвать современный мир, как эпоху со стремительно развивающейся наукой в широком смысле этого слова. Это, естественно, приводит к непрерывному повышению уровня технологического оснащения производств и предприятий в целом, что в свою очередь способствует конкуренции, основанной на повышении качества продукции, работ и иных услуг.

Компании и корпорации сильно заинтересованы в привлечении в свои штаты наиболее знающих и умеющих специалистов. Как следствие, происходит конкуренция или соперничество на рынке труда, в том числе и между выпускниками высших учебных заведений, которые еще не имеют опыта трудовой деятельности.

Следовательно, основная задача любого вуза сегодня и в будущем заключается в подготовке к выпуску уже готового во всех смыслах специалиста, вооруженного не только профессиональной компетентностью, которая, как известно, определяется интегративным ка-

чеством, куда входят высокие уровни овладения знаниями, умениями, навыками, но и психологической готовностью к дальнейшему постоянному росту в своей профессии. Иными словами: выпускник вуза должен иметь практико-ориентированные знания и уметь пополнять этот запас самостоятельно. Но это предполагает изменение всей системы образования.

2. Материалы и методы

Как известно, до 2000 г. применялся единый государственный стандарт высшего профессионального образования, который, в силу указанных выше причин (мощное поступательное развитие наук, техники и технологий, экономики и общества), потерял свою актуальную направленность, поэтому с того же 2000г. Министерство науки и высшего образования РФ разработало несколько федеральных государственных образовательных стандартов, в которых непрерывно повышались требования к структуре образовательных программ, к условиям их реализации и освоению. Сейчас идет обсуждение уже 4-го поколения ФГОС ВО.

Но одними изменениями ФГОС ВО задачу повышения уровня образования выпускников вузов не решить.

Для образовательного процесса требуется выработка новых систем, методов и приемов обучения, более эффективных, чем прежние, не отбрасывая, однако, классическую форму – ведь никто не отменял санитарно-эпидемиологические правила и нормативы для студентов вузов, а, кроме того, нельзя допустить потерю таких качеств отечественного образования, как фундаментальность, научность и самобытность.

Как показывает последний учебный год (2020-2021), из-за пандемии коронавируса высшее образование столкнулось с таким новым вызовом времени, как необходимость результативно работать дистанционно. Если учесть, что современные студенты-очники не только учатся, но уже и где-то подрабатываают, а заочное обучение становится все более популярным, то вполне очевидно, что перед вузами страны (да и мира) встает острая потребность в разработке действенных дистанционных форм обучения.

Надо отдать должное многим образовательным учреждениям РФ, которые, проведя колоссальную работу, смогли в малые временные сроки организовать учебный процесс, примененяя новые подхо-

ды и технологии, предотвратив возможные профессиональные недоработки.

Прежде всего, это цифровизированный учебный материал, который можно рассылать по социальным сетям студентам, не участвующим непосредственно в учебном процессе; возможность дистанционного проведения занятий в виде видеолекций и виртуальных практических работ; видеоконференции с обсуждением элементов выполнения практических работ, компьютерные программы, позволяющие тестировать и (или) обучать учащихся и т.д.

3. Резудьтаты исследования

Приведем несколько тезисов, на наш взгляд, бесспорных для провинциальных вузов:

1) первокурсники приходят на учебу с разным по качеству багажом знаний и неодинаковой степенью восприятия нового материала;
2) многие первокурсники не умеют самостоятельно работать;
3) в учебном процессе нельзя ориентироваться на слабых студентов, поскольку у остальных не будет должного роста знаний;
4) доля часов в учебном плане, отводимых на индивидуальные занятия со студентами очень мала.

На наш взгляд, правильно разработанные компьютерные обучающие программы (КОП), помогут преодолеть возникающие трудности образовательного процесса в силу указанных выше причин.

Компьютерных обучающих программ сегодня уже много, но хочется остановиться на нашем видении таких программ.

Известно, что КОП – это программа, созданная для конкретных образовательных целей, имеет тематическое содержание и направлена на взамодействие с обучаемыми. КОПы создаются, как правило, не педагогами, а программистами, имеют относительно простую структуру и базируются на возможно согласованной литературе, как правило, без должного учета преподавательского опыта. Многие преподаватели способны писать такие программы, но для этого требуются огромные временные затраты, на которые не все могут пойти в силу разных причин.

4. Обсуждения и заключение

По нашему мнению, обучающие программы должны рарабатываться совместно и программистами, и преподавателями соответствующих дисциплин, причем эти программы должны иметь диффе-

ренцируемую структуру по уровню знаний студентов (слабый, средний, сильный). Для каждой категории должны быть разработаны своя стратегия подачи нового материала (теория и практика), система тестирования и оценивания знаний.

При разработке элементов тестирования по умению решать задачи, необходимо предусмотреть подсказки трех уровней, появляющиеся на экране монитора после утвердительного ответа обучаемого на приглашение программы взять подсказку. Первая подсказка – посредством теории (теорема, определение, формула); вторая подсказка – через подробное решение подобного примера; и третья подсказка – представление решения данного примера. Но далее подобный пример той же сложности нужно будет решить. Весь этот процесс программа должна отслеживать и учитывать при оценивании (педагогом заранее должны быть разработаны специальные критерии оценивания, а программистом воплощены в программу). В результате выполнения такой программы, можно будет видеть, сколько раз студент брал подсказки, какого уровня и по какой теме, как справился с остальными заданиями, перечень разделов дисциплины, где были совершены ошибки, и, наконец, какую получил оценку. Кроме этого, должны быть выполнены следующие условия: процесс тестирования может проводиться в любое удобное для студента время в компьютерном классе или на сайте института вуза; результаты проделанной работы необходимо автоматически передавать на почту преподавателя; выполнение работы должно быть ограничено по времени.