СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции
(г. Орёл, 24 – 25 ноября 2023 г.)

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.С. ТУРГЕНЕВА»

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции
(г. Орёл, 24 – 25 ноября 2023 г.,)

Научное электронное издание

Под общей редакцией
кандидата физико-математических наук, доцента Т.Н. Можаровой

Орёл
ОГУ им. И.С. Тургенева
2023

УДК 51+53+681.3
ББК 22.1+22.3+32.81(072.8)
С56

Редакционная коллегия:
Т.Н. Можарова – канд. физ.-мат. наук, доц. (пред., отв. ред.);
В.И. Дорофеева – канд. физ.-мат. наук, доц. (член редкол.);
О.И. Марков – д-р физ.-мат. наук, проф. (член редкол.);
В.Д. Селютин – д-р пед. наук, проф. (член редкол.);
С.П. Строев – канд. экон. наук, доц. (член редкол.);
О.В. Тарасова – д-р пед. наук, проф. (член редкол.);
Ю.С. Федяев – канд. физ.-мат. наук, доц. (член редкол.).

С56 Современные проблемы физико-математических наук : материалы IX Всероссийской науч.-практ. конф., (г. Орёл, 24-25 ноября 2023 г.) / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, ОГУ имени И.С. Тургенева ; под общей редакцией канд. физ.-мат. наук, доц. Т. Н. Можаровой. – Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2023. – 1 CD-ROM. – Систем. требования : ПК с частотой ЦП от 800 МГц и выше ; дисковод CD-ROM.– Загл. с титул. экрана. – Текст: электронный.
ISBN 978-5-9929-1461-0

В сборнике содержатся тексты докладов, прочитанных на IX Всероссийской научно-практической конференции, проходившей 24 – 25 ноября 2023 года на базе физико-математического факультета Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева.

Материалы сборника трудов конференции предназначены научным работникам, занимающимися исследовании *в области физико-математических наук*, в том числе преподавателям, аспирантам и студентам физико-математических направлений.

Материалы издаются в авторской редакции с незначительной технической корректурой.

УДК 51+53+681.3
ББК 22.1+22.3+32.81(072.8)

ISBN 978-5-9929-1461-0 © Оформление. ОГУ имени И.С. Тургенева, 2023

Технические требования к программному обеспечению:

Программа просмотра файлов Microsoft Office Word 97-2003, программа просмотра pdf-файлов

Компьютерная верстка: А.А. Аксюхин
Технический редактор: А.А. Аксюхин

Дата подписания к использованию: 21.12.2023
CD-R. Объем – 21,5 Мб
Количество носителей -1
Контактные данные:
ул. Комсомольская, 95, г. Орёл, 302026
https://oreluniver.ru

Содержание

Математический анализ и дифференциальные уравнения.....10

Агаркова Н.Н. Васильев В.Б., Гебресласи Х.Ф. О задаче Дирихле.....10
Алгазин О.Д., Копаев А.В. Точные решения смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения со специальной правой частью в бесконечном слое.....16
Антоновская О.Г., Бесклубная А.Г. К вопросу о построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами в случае кратных комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения.....22
Боковели Н.В., Чаплыгина Е.В. Использование дифференциальных уравнений для моделирования биологических систем.....28
Вещиков А.Н., Чаплыгина Е.В. О разрешимости некоторой краевой задачи уравнения диффузии в конечном цилиндре.....35
Евхута Н.А. О периодических решениях уравнений в банаховых пространствах.....40
Евхута О.Н. Производные Ньютона-Лейбница скалярных функций и обобщенные производные.....44
Конечная Н.Н. Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений.....48
Корзюк В.И., Рудько Я.В. Первая смешанная задача в криволинейном квадранте полулинейного волнового уравнения.....55
Можарова Т.Н., Когут А.В. О свойствах интерполирующей функции.....63
Можарова Т.Н., Соломатин О.Д. Исследование решения дифференциально-операторного уравнения второго порядка с использованием R-шкалы.....68
Николаев В.Г. О размерности ядра задачи Шварца в эллипсе.....72
Резниченко И.О., Крутицкий П.А., Колыбасова В.В. Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя для уравнения Лапласа.....77
Senouci Abdelkader. Some estimates for quasimonotone functions in weighted variable exponent Lebesgue space with $0<p(x)<1$.....88
Солиев Ю.С. Об одном способе построения квадратурных формул для гиперсингулярных интегралов.....92
Чаплыгина Е.В. Задача Трикоми для функционально-дифференциального уравнения смешанного типа.....97

Алгебра, топология и геометрия.....101

Дергачев В.М., Лелявин С.Н. Стабильные симплициальные комплексы в алгебраической K теории.....101
Караваев П.С. Доказательство теоремы Брианшона с помощью комплексных чисел.....108
Котова С.Н., Попов И.Н. Двухцветный код Прюфера дерева.....112
Кыров В.А., Щетинин Д.Е. Вычисление некоторых дважды локально транзитивных групп Ли преобразований.....120
Попов И.Н. Верхняя граница спектра матрицы Лапласа-Кирхгофа графа-звезды.....126
Прояева И.В., Сафарова А.Д. Применение теории комплексных чисел в прикладной геометрии.....135

Теория вероятностей и математическая статистика.....139

Вирченко Ю.П., Теволде А.М. Электрическая прочность полимерной пленки со случайно распределенными воздушными включениями.....139
Вирченко Ю.П., Черкашин Д.А. Определение индекса племенной ценности животного на основе байесовского оценивания.....150
Ковальчук А.А. Нетранзитивные наборы случайных величин, связанных с марковскими моментами.....158
Лебедев А.В. Трехмерные непрерывные распределения, порождающие нетранзитивные наборы зависимых случайных величин.....164
Левизов С.В. Об игре «до первой остановки» 174
Малиновский Г.А. О предельном поведении числа частиц процесса Беллмана-Харриса с пуассоновской иммиграцией.....177

Методы дискретных особенностей в задачах математической физики.....187

Аксюхин А.А. Исследование трехмерной фильтрации жидкости к системе несовершенных наклонных скважин в кусочно-однородной среде с кусочно-гладкой границей сопряжения.....187
Дорофеева В.И., Дорофеев Д.Ю. Исследование влияния дренажной системы и нескольких полупроницаемых включений на процесс изменения уровня грунтовых вод.....198
Караваев П.С. О случаях совпадения спектральных линий в формуле Ридберга.....205
Кравцов А.М. Сингулярное аналитическое решение в задаче об изгибе тонкой анизотропной плиты на упругом основании.....210
Лекомцев Д.Г. Аналитическое моделирование фильтрационного течения в области, ограниченной частью эллипса специального вида, в неоднородной среде со степенным законом изменения проводимости.....215
Федяев Ю.С., Ведеников М.С. Математическое моделирование эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей от источника на непроницаемой границе в поступательном потоке.....223
Фролов М.А., Аксюхин А.А. Исследование двумерной фильтрации жидкости к системе совершенных скважин в неоднородных слоях грунта методом дискретных особенностей.....231

Физика конденсированного состояния.....243

Малай Н.В., Сохань П.В., Шостак Ю.И. К вопросу о термофорезе испаряющейся капли в вязкой неизотермической бинарной газовой среде.....243
Мусин А.И., Самойлов В.Н. Эволюция полярных угловых распределений распыленных атомов для случая (001) Ni.....253
Нифтиев Н.Н., Мамедов Ф.М. Зависимость диэлектрических потерь от частоты и температуры в кристаллах $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$.....260
Прадед А.С. Апробация теоретической модели концентрационной зависимости теплопроводности керамических соединений сесквиоксидов лантаноидов.....266
Tashpulatov S.M. Spectra of the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model. Third triplet state.....273

Турин В.О., Илюшина Ю.В., Андреев П.А., Черепкова А.Ю, Киреев Д.Д., Назрицкий И.В., Хусаинова И.В., Сушич О.А. Обобщения квантовомеханических уравнений Клейна-Гордона-Фока, Шрёдингера и Дирака на основе системы уравнений, описывающей длинноволновые колебания в модифицированной цепочке Винсента «масса в массе»....284

Наноструктуры и наноматериалы....305

Усов Н.А., Грибанов Е.Н., Марков О.И. Получение пленок висмута на поверхности кремния....305
Фарафонов А.А. Исследование поверхности кристалла кремния современными методами микроскопии....312

Инженерные приложения физико-математических наук....317

Амелькина А.А., Марков О.И. Моделирование составной ветви термоэлектрического охладителя....317
Гладков С.О., Нагибин Н.С. О форме тел, приводящей к наименьшему сопротивлению при обтекании....324
Конько М.А., Алексанян Г.К., Горбатенко Н.И., Елкин Н.С. Разработка новой электродной системы для систем многочастотной электроимпедансной томографии легких человека....330
Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Математическое моделирование стохастических продольных колебаний вязкоупругого каната с движущейся границей....337
Матюхин С.И., Мурко А.С., Ставцев А.В. Зависимость электрического сопротивления проводников от площади электрических контактов....342
Турин В.О., Щербина М.А., Багрова А.В., Назарова Д.В., Пронина О.В., Илюшина Ю.В., Рахматов Б.А., Зебрев Г.И., Кокин С.А., Макаров С.В. Учёт снижения подвижности электронов из-за прижимающего поля затвора в уравнении для компактного моделирования тока насыщения внешнего (с учётом сопротивлений истока и стока) МОП-транзистора....348

Математические методы в экономике....363

Анашкин Н.О., Абрамов В.В. Модель баланса производственного предприятия....363
Кравцов А.М., Чепурко Г.В. Оценки инвестиционной привлекательности проектов с учетом ограничений финансово экономического и технологического характера....372
Курбыко И.Ф. Статистический анализ уровня жизни населения центральных российских регионов....377
Юдин Д.В., Абрамов В.В. Методы эффективного управления производством в рамках одной динамической модели....384

Машинное обучение и анализ данных....391

Зубкова Л.Н. Алгоритмы анализа данных на основе нечеткой логики....391
Тарицына А.С. Изучение поведения характеристик взаимодействия манипулятора с объектами столкновения....395
Информатика и информационные технологии....401

Едемский В.А. Симметричная 4-адическая сложность семейства четвертичных последовательностей....401

Корниенко Д.В., Мишина С.В. Механизмы обмена данными между конфигурациями 1С и сторонними ресурсами.....409
Маркелов В.К., Привалов А.Н. Анализ методов защиты от атак социальной инженерии с использованием претекстинга.....416
Русских Т.Н., Буцев И.А. Информационное обеспечение поддержки врачебных решений.....427
Русских Т.Н., Горячев А.А., Колганова А.С. Проектные решения по разработке сервиса кредитного скоринга.....433
Семенов Е.Ю., Зубкова Л.Н. Проблемы и технологии формирования данных для решения исследовательских и аналитических задач.....439
Тарасов К.Е., Тарасова О.В. Учебный курс «Инженерная графика» с применением систем автоматизированного проектирования.....444
Черкасова В.В., Дубоделов А.Н. Использование возможностей стандартной консоли Windows.....453
Чижикова Ю.В., Чижиков В.В. Социальная инженерия: новые тренды.....459

Методика преподавания точных наук в школе и вузе.....466

Богатырь А.Е., Воронкин И.А., Богданова С.Б. Клепсидры.....466
Бухарина А.А. Реализация дифференцированного подхода при обучении школьников 5-6 классов.....470
Водопьянова И.С. Методика обобщающе-систематизирующего повторения на различных этапах обучения математике.....480
Гончарова Н.А., Гончарова М.А. Формы организации работы с одарёнными детьми при преподавании учебного предмета «Математика»: исследовательская и олимпиадная деятельность школьников.....486
Гончарова Н.А., Ермакова К.А. Математическая одаренность школьников: теория и практика.....495
Гончарова Н.А., Фокина А.С. Актуальные вопросы преподавания информатики в начальной школе.....502
Гусейнов Д.И. оглы, Гасанов О.М. оглы, Адгезалова Х.А., Джалилова С.Х. Роль использования аналогии в описании физических явлений разной природы.....510
Данилова О.Ю., Телкова С.А. О применении проблемных бинарных лекций при преподавании математики в Воронежском институте МВД России.....517
Евсеева Е.Г., Коняева Ю.Ю. Метапредметная интеграция в обучении теории вероятностей будущих физиков на основе фузионисткого подхода.....521
Жигулина А.А., Беба Д.Н. Методика изучения «деления вверх»: дополнительный материал по математике в 5-6 классах.....528
Инютин Н.В., Филатова А.А., Симоновская Г.А. Графический потенциал комплексных чисел.....532
Кокорев А.В., Волков М.А., Чернобровкина И.И. О роли изучения математических дисциплин при подготовке специалистов инженерного профиля.....537
Кокорев А.В., Еременко А.И., Шведов С.Н., Слесарчик К.Ф. О роли критического мышления при инженерной подготовке будущих выпускников технических учебных заведений.....544
Корогодина И.В. Значение рационализаторской работы в инженерном образовании.....551

Костикова Н.Н. Практико-ориентированные задачи как средство повышения мотивации учащихся на уроках математики.....555
Логунов И.С. О зависимости между тригонометрическими функциями одного аргумента.....565
Логунов И.С. Один из способов извлечения квадратного корня из числа делением.....568
Овсянникова Т.Л., Иващенко А.В. Использование Интернет-ресурса OnlineTestPad для разработки уроков по теме «Площади фигур».....571
Поседько С.В., Русаков А.А., Насибулова Е.А., Романычева Л.Б. Организационно-методический инструментарий по открытию математического детского объединения в государственной образовательной организации.....581
Рогозянская Е.А., Еремеева Н.П., Закалкина Е.В. Динамическая корректировка образовательного контента с учётом оценки эффективности онлайн-курса.....589
Русакова В.Н., Саватеева Е.С. Практика воспитания культуры системного мышления при применении алгоритмов кластеризации для анализа массивов данных.....594
Саввина О.А., Черноусова Н.В. О подготовке будущих учителей к проектированию духовно-нравственного воспитания на уроках математики.....602
Симанева Т.А., Небытова А.В. Разработка программно-методического обеспечения элективного курса «Подготовка к ЕГЭ по информатике на основе использования языка программирования Python» 607
Симанева Т.А., Нестерова С.А. Методика изучения абстрактных типов данных в старшей школе в классах с углубленным изучением информатики.....616
Симонов Н.А. Применение модели пятен для образного представления информации в нейроморфных системах.....625
Симоновская Г.А., Игонина Е.В. Методика использования опорных геометрических задач при подготовке к ЕГЭ по математике.....635
Соломатин О.Д., Лапаткина Е.И. Решение дифференциально-операторного уравнения второго порядка в пространстве $C[0,\pi]$ функций, непрерывных на отрезке $[0,\pi]$.....640
Тонких А.П. Формирование грамотной математической речи будущих учителей начальных классов.....643
Троицкая О.Н., Вохтомина Е.Д. Методика создания веб-квестов для организации процесса обучения основам кибербезопасности учащихся основной школы.....654
Чернобровкина И.И., Кокорев А.В. Метод математической индукции в практике решения школьных задач из раздела теории чисел.....663
Шевцов И.А. VR-технологии в преподавании геометрии.....668
Янченко А.Д. Методические рекомендации по изучению темы «Тела вращения» 672

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 10-15.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 10-15.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 561

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ

***Наталия Николаевна Агаркова*[1✉], *Владимир Борисович Васильев*[2], *Хадиш Фессехатсион Гебресласи*[3]**
[1,2,3]*Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия*
[1]*agarkova_n@bsu.edu.ru✉, https://orcid.org/0009-0005-1059-0416*
[2]*vbv57@inbox.ru, https://orcid.org/0000-0001-9351-8084*
[3]*1609295@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0009-0003-0223-8151*

Аннотация. *В работе исследуется разрешимость модели эллиптического псевдодифференциального уравнения в плоской области с разрезом вдоль луча.*

Ключевые слова: *псевдодифференциальное уравнение, задача Дирихле.*

Conference paper

ON THE DIRICHLET PROBLEM

***Nataliya N. Agarkova*[1✉], *Vladimir B. Vasilyev*[2], *Hadish F. Gebreslasie*[2]**
[1,2,3] *The National Research University "Belgorod State University Belgorod, Russia*
[1]*agarkova_n@bsu.edu.ru✉, https://orcid.org/0009-0005-1059-0416*
[2]*vbv57@inbox.ru, https://orcid.org/0000-0001-9351-8084*
[3]*1609295@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0009-0003-0223-8151*

Abstract. *The paper investigates the solvability of the model elliptic pseudo-differential equation in a plane domain with a section along the beam.*

Keywords: *pseudo-differential equation, Dirichlet problem.*

© Агаркова Н.Н., Васильев В.Б., Гебресласи Х.Ф., 2023

1. Введение

Модельный псевдодифференциальный оператор A с символом $A(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, определяется стандартно [2, 3]

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x-y)\xi} A(\xi) u(y) dy d\xi.$$

Мы рассматриваем следующий оператор в пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^m)$ с нормой

$$||u||_s^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi,$$

и вводим класс символов, которые не зависят от пространственной переменной x: $\exists c_1, c_2 > 0$, такие, что

$$c_1 \leq |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| \leq c_2, \ \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называют порядком псевдодифференциального оператора A.

Если $D \subset \mathbb{R}^m$ – область, то, по определению, пространство $H^s(D)$ состоит из (обобщенных) функций из пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{D}$. Норма в пространстве $H^s(D)$ индуцируется нормой пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$.

2. Общее решение

Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию [1, 7]

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) A_{=}(\xi),$$

относительно конуса C_-^a с индексом κ, таким, что $1/2 < \kappa - s < 3/2$, то можно убедиться, что общее решение уравнения

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in C_+^a, \tag{1}$$

в пространстве $H^s(C_+^a)$ имеет следующий вид (подробности можно найти в работах [5, 6])

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)} +$$

$$+ A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) \left(v.p. \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta) d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} - v.p. \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta) d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta} \right),$$

где c_0 – произвольная функция из пространства $H^{s-\kappa-1/2}(\mathbb{R})$, $v.p.$ обозначает главное значение интеграла по Коши [2, 3, 4]. Для однозначного определения этой функции зададим условие Дирихле на сторонах угла

$$u_{|_{ax_1-x_2=0}} = f(ax_1 + x_2), \quad u_{|_{ax_1+x_2=0}} = g(ax_1 - x_2), \tag{2}$$

где f, g – функции одной переменной, определенные для положительных значений аргумента.

С учетом условий (2) и их вида в образах Фурье, проинтегрируем последнее равенство сначала по t_1, затем по t_2, получая следующую систему систему линейных интегральных уравнений

$$\begin{gathered} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1(t_1, t_2)\tilde{C}_0(t_1)dt_1 + \tilde{D}_0(t_2) = \tilde{F}(t_2), \\ \tilde{C}_0(t_1) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_2(t_1, t_2)\tilde{D}_0(t_2)dt_2 = \tilde{G}(t_1), \end{gathered} \tag{3}$$

де ядра K_1, K_2 и правые части уравнений строятся по символу оператора и данным (2).

В монографии [7] доказана следующая

Теорема 2.1. *Пусть $s > 1/2$ и символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C^a_- с индексом κ, таким, что $\kappa - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$. Если выполнено условие*

$$\inf |\tilde{a}_0(t)| \neq 0, \inf |\tilde{b}_0(t1)| \neq 0,$$

то задача Дирихле (1),(2) с данными $f, g \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}_+)$ эквивалентна системе интегральных уравнений (3) *с неизвестными функциями $\tilde{C}_0, \tilde{D}_0 \in \widetilde{H}^{s-\kappa-1/2}(\mathbb{R})$ и правыми частями $\tilde{F}, \tilde{G} \in \widetilde{H}^{s-\kappa-1/2}(\mathbb{R})$.*

3. Интегральное уравнение

Если, сомножители волновой факторизации дифференцируемы, это обеспечивает возможность предельного перехода под знаком интеграла. Далее рассматривается поведение ядер K_1, K_2 при $a \to \infty$, откуда делается вывод, что ядра K_1, K_2 стремятся к одному и тому же симметрическому ядру при $a \to \infty$. Это ядра обозначим $K(t_1, t_2)$.

С учетом приведенного рассуждения заключаем, что при $a \to \infty$

система (3) примет следующий вид

$$\begin{gathered}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t_1,t_2)\tilde{C}_0(t_1)dt_1+\tilde{D}_0(t_2)=\tilde{\Phi}(t_2),\\ \tilde{C}_0(t_1)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t_1,t_2)\tilde{D}_0(t_2)dt_2=\tilde{\Psi}(t_1).\end{gathered}\tag{4}$$

Определим два оператора (I – единичный оператор)

$$P=\frac{1}{2}(I+S),\quad O=\frac{1}{2}(I-S),$$

где

$$(Sv)(t)=v.p.\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(\eta)d\eta}{t-\eta}.$$

Меняя местами переменные во втором уравнении и учитывая симметричность ядра, затем кладывая его с первым, получим одно уравнение относительно суммы функций $\tilde{C}_0+\tilde{D}_0$. Зная, что $\tilde{C}_0+\tilde{D}_0=\tilde{c}_0$, так как $P+Q=I$, последнее уравнение можно переписать в виде

$$\tilde{c}_0(t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,\tau)\tilde{c}_0(\tau))d\tau=\tilde{\Phi}(t)+\tilde{\Psi}(t).\tag{5}$$

4. Предельный случай задача Дирихле

Здесь мы рассмотрим следующую задачу Дирихле на плоскости с разрезом по лучу $\Gamma\equiv\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: x_1=0, x_2>0\}$.

$$\begin{gathered}(Au)(x)=0,\quad x\in\mathbb{R}^2\setminus\Gamma\\ u_{|_{x_1=0}}=\theta(x_2),\quad x_2\in\Gamma,\end{gathered}\tag{6}$$

где функция $\theta\in H^{s-1/2}(\mathbb{R}_+)$ является следом некоторой функции $\Theta\in H^s(C_+^a)$, определенной в конусе C_+^a при достаточно больших a. Исследуя теперь разрешимость уравнения с граничным условием

$$u_{|_{ax_1-x_2=0}}=\Theta(ax_1+x_2),\quad u_{|_{ax_1+x_2=0}}=\Theta(ax_1-x_2),\tag{7}$$

мы приходим к выводу, что вместо уравнения (5) мы получим следующее уравнение

$$\tilde{c}_0(t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,\tau)\tilde{c}_0(\tau))d\tau=\frac{2\tilde{\theta}(t)}{\tilde{A}(t)},\tag{8}$$

где

$$K(t,\tau)=\frac{A_{\neq}^{-1}\left(\frac{t+\tau}{2},0\right)}{\tilde{A}(t)},\quad \tilde{A}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A_{\neq}^{-1}\left(\frac{t+\tau}{2},0\right)d\tau. \qquad (9)$$

Теорема 4.1. *Пусть символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C_+^a с индексом κ, таким, что $\kappa-s=1+\delta$, $|\delta|<1/2$, для всех достаточно больших значений параметра a с дифференцируемыми сомножителями, $\theta(x)\in H^{s-1/2}(\Gamma)$. Тогда однозначная разрешимость задачи* (6) *эквивалентна однозначной разрешимости интегрального уравнения* (8) *в пространстве $H^{s-\kappa-1/2}(\mathbb{R})$ с данными* (9)*, $\tilde{A}(t)\neq 0$.*

Если найдено решение интегрального уравнения $\tilde{c}_0$ найдено, то фурье-образ решения задачи Дирихле (6) находится по формуле

$$\tilde{U}(t_1,t_2)=\frac{\tilde{C}_0(t_1)+\tilde{D}_0(t_2)}{A_{\neq}\left(\frac{t_1+t_2}{2},0\right)}$$

с использованием соотношений

$$\tilde{C}_0=P\tilde{c}_0,\quad \tilde{D}_0=Q\tilde{c}_0.$$

Список источников

1. Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: УРСС, 2010.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
4. Mikhlin S.G., Prößdorf S. Singular Integral Operators. Berlin, Akademie-Verlag, 1986.
5. Vasilyev V. B. Pseudodifferential equations, wave factorization, and related problems. Math.Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 18. P. 9252–9263.
6. Vasilyev V. B. Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case. Opusc. Math. 2019. V. 39. № 1. P. 109–124.
7. Vasilyev V. B. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

References

1. Vasilyev V.B. Multiplikatori integralov Furie, psevdodifferentsialnye uravneniya, volnovaya faktorizatsiya, kraevye zadachi. M.: URSS, 2010 [in Russian]
2. Gakhov F.D. Boundary Value Problems. Dover, Mineola, NY, 1981.
3. Muskhelishvili N.I. Singular Integral Equations. North-Holland, Amsterdam, 1976.
4. Mikhlin S.G., Prößdorf S. Singular Integral Operators. Berlin, Akademie-Verlag, 1986.
5. Vasilyev V. B. Pseudodifferential equations, wave factorization, and related problems. Math.Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 18. P. 9252–9263.
6. Vasilyev V. B. Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case. Opusc. Math. 2019. V. 39. № 1. P. 109–124.
7. Vasilyev V. B. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 16-21.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 16-21.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.958

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

Олег Дмитриевич Алгазин[1]✉, Анатолий Владимирович Копаев[1]
[1,2]Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[1]mopi66@yandex.ru✉
[2]kopaev50@mail.ru

Аннотация. *В работе рассматривается краевая задача для бигармонического уравнения в бесконечном n-мерном слое с граничными условиями, которые для полосы на плоскости соответствуют шарнирному опиранию одного края и свободному вертикальному скольжению второго края. Для правой части уравнения специального вида (например, полиномиального) дается алгоритм построения точного решения (например, полиномиального).*

Ключевые слова: *бигармоническое уравнение, уравнение Пуассона, задача Дирихле-Неймана, функция Грина.*

Conference paper

EXACT SOLUTIONS OF A MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A BIHARMONIC EQUATION WITH A SPECIAL RIGHT-HAND SIDE IN AN INFINITE LAYER

Oleg D. Algazin [1]✉, Anatolij V. Kopaev[2]
[1, 2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
[1]mopi66@yandex.ru✉
[2]kopaev50@mail.ru

Abstract. *The paper considers a boundary value problem for a biharmonic equation in an infinite n-dimensional layer with boundary conditions that, for a strip on a plane, correspond to hinged support of one edge and free vertical sliding of the second edge. For the right side of an equation of a special type (for example, polynomial), an algorithm for constructing an exact solution (for example, polynomial) is given.*

© Агаркова Н.Н., Васильев В.Б., Гебресласи Х.Ф., 2023

Keywords: *biharmonic equation, Poisson equation, Dirichlet-Neumann problem, Green's function.*

Введение

Мы рассматриваем краевую задачу для неоднородного бигармонического уравнения в слое

$$\Delta^2 u(x,y) = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a, \qquad n \geq 1, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(x,0) = u_{yy}(x,0) = 0, \qquad u_y(x,a) = u_{yyy}(x,a) = 0, \tag{2}$$

которые можно записать в виде

$$y = 0, \qquad u = 0, \qquad \Delta u = 0, \tag{3}$$

$$y = a, \qquad u_y = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Delta u = 0.$$

В случае $n = 1$ решение задачи $u(x,y)$ дает прогиб упругой полосы под действием нагрузки $f(x,y)$ при условии, что один край полосы шарнирно закреплен, а второй может вертикально скользить. Обзор граничных условий для бигармонического уравнения см. в [1].

Задача (1), (3) сводится к последовательному решению двух смешанных задач Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = v(x,y), \qquad u(x,0) = 0, \qquad u_y(x,a) = 0, \tag{4}$$

и

$$\Delta v = f(x,y), \qquad v(x,0) = 0, \qquad v_y(x,a) = 0. \tag{5}$$

Задача Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона (с неоднородными граничными условиями) рассмотрена нами в [2]. В случае полиномиальных данных решение является полиномом [3].

Далее мы приводим решение задачи (1), (2) в классе функций медленного роста по x для правой части $f(x,y)$ являющейся функцией медленного роста по x. Это решение в данном классе функций является единственным. Для правой части являющейся полигармонической функцией по x (в частности - полиномом) мы даем алгоритм получения точного решения задачи. Это решение также является полигармонической функцией по x (в частности - полиномом).

1. Постановка и решение задачи

Пусть правая часть уравнения (1) является функцией медленного роста по x, то есть

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\,(1+|x|)^{-m} dx < C\ , \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,, \tag{6}$$

для некоторого $m \geq 0$ и для каждого $y \in (0,a)$.

Решение задачи (1), (2) также будем искать в этом классе функций. Тогда задачи (4) и (5) имеют единственные решения [2] и решением задачи (1), (2) будет функция

$$u(x,y) = \int_0^a \int_{\mathbb{R}^n} v(t,\tau)\, G_n(x,y,t,\tau)\, dt d\tau, \tag{7}$$

где

$$v(x,y)=\int_0^a\int_{\mathbb{R}^n} f(t,\tau)\,G_n(x,y,t,\tau)\,dtd\tau\,. \qquad (8)$$

Здесь $G_n(x,y,t,\tau)-$ функция Грина задачи Дирихле.

Для $n=1$, то есть, для случая полосы на плоскости, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$G_1(x,y,t,\tau)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/2a)+\cos(\pi(y+\tau)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/2a)-\cos(\pi(y+\tau)/2a)}-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/2a)+\cos(\pi(y-\tau)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi(x-t)/2a)-\cos(\pi(y-\tau)/2a)}\,. \qquad (9)$$

Для $n=2$, то есть, для случая слоя в трехмерном пространстве, $(x,y)\in\mathbb{R}^3$,

$$G_2(x,y,t,\tau)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^\infty\left\{\frac{\operatorname{sh}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/2a)\cos(\pi(y+\tau)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y+\tau)/a)}\right.$$
$$\left.-\frac{\operatorname{sh}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/2a)\cos(\pi(y-\tau)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y-\tau)/a)}\right\}d\xi.$$

Для слоя в пространстве четной размерности, $(x,y)\in\mathbb{R}^{2k}$,

$$G_{2k-1}(x,y,t,\tau)=G^*_{2k-1}(|x-t|,y,\tau)=G^*_{2k-1}(r,y,\tau)=$$
$$=\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{k-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi r/2a)+\cos(\pi(y+\tau)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi r/2a)-\cos(\pi(y+\tau)/2a)}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi r/2a)+\cos(\pi(y-\tau)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi r/2a)-\cos(\pi(y-\tau)/2a)}\right].$$

Для слоя в пространстве нечетной размерности, $(x,y)\in\mathbb{R}^{2k+1}$,

$$G_{2k}(x,y,t,\tau)=G^*_{2k}(|x-t|,y,\tau)=G^*_{2k}(r,y,\tau)=$$
$$=\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{k-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[\frac{1}{2\pi a}\int_0^\infty\left\{\frac{\operatorname{sh}(\pi r\operatorname{ch}(\xi)/2a)\cos(\pi(y+\tau)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi r\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y+\tau)/a)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\operatorname{sh}(\pi r\operatorname{ch}(\xi)/2a)\cos(\pi(y-\tau)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi r\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y-\tau)/a)}\right\}d\xi\right].$$

Рассмотрим правую часть $f(x,y)$ специального вида, удовлетворяющую условию

$$\Delta_x^k f(x,y)=0,$$

для некоторого k, то есть, являющуюся по переменным x полигармонической функцией, в частности полиномом. Обозначим

$$\Delta=\Delta_x+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=B+A,$$

$$A^{-1}f(x,y)=\int_0^y(y-\xi)\,f(x,\xi)d\xi-y\int_0^a f(x,\xi)d\xi.$$

Легко проверить, что решением задачи Дирихле-Неймана (5)

$$\Delta v=f(x,y),\qquad v(x,0)=0,\qquad v_y(x,a)=0,$$

будет функция

$$v(x,y)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\,A^{-1-j}B^j f(x,y)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\,A^{-1-j}\Delta_x^j f(x,y),$$

которая также является полигармонической по x, $\Delta_x^k v(x,y)=0$.

Тогда решением задачи (1), (2) будет функция

$$u(x,y)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\,A^{-1-j}\Delta_x^j v(x,y).$$

Если $f(x,y)$ является полиномом по x, то решение задачи $u(x,y)$ также является полиномом по x и это решение единственно в классе функций медленного роста по x.

2. Примеры

Пример 1.

$$\Delta^2 u(x,y)=1,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\qquad 0<y<a,$$
$$u(x,0)=u_{yy}(x,0),\qquad u_y(x,a)=u_{yyy}(x,a)=0.$$

Поскольку $f(x,y)=1,\quad \Delta_x f=0$, то

$$v(x,y)=A^{-1}f(x,y)=\int_0^y(y-\xi)\,d\xi-y\int_0^a d\xi=\frac{y^2}{2}-ay.$$

В силу единственности решения в классе функций медленного роста по x, это решение дается интегралом по формуле (8). То есть, например, при $n=1$

$$v(x,y)=\int_0^a\int_{\mathbb{R}^1} f(t,\tau)\,G_1(x,y,t,\tau)\,dtd\tau=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty}\left[\ln\frac{\mathrm{ch}(\pi(x-t)/2a)+\cos(\pi(y+\tau)/2a)}{\mathrm{ch}(\pi(x-t)/2a)-\cos(\pi(y+\tau)/2a)}\right.$$
$$\left.-\ln\frac{\mathrm{ch}(\pi(x-t)/2a)+\cos(\pi(y-\tau)/2a)}{\mathrm{ch}(\pi(x-t)/2a)-\cos(\pi(y-\tau)/2a)}\right]dtd\tau=$$
$$=\frac{y^2}{2}-ay.$$

Теперь найдем $u(x,y)$. Поскольку $\Delta_x v=0$, то единственное в классе функций медленного роста по x решение задачи дается формулой

$$u(x,y)=A^{-1}v(x,y)=\frac{y^4}{24}-\frac{y^3a}{6}+\frac{ya^3}{3}.$$

Если не ограничивать рост искомого решения по x, то к найденному решению можно добавить любое решение однородной задачи

$$\Delta^2 u(x,y)=0,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\qquad 0<y<a,$$
$$u(x,0)=u_{yy}(x,0),\qquad u_y(x,a)=u_{yyy}(x,a)=0.$$

Например, при $n=1$ можно добавить

$$\sum_{k=0}^{N}\left(c_1\mathrm{ch}\left(\frac{\pi(2k+1)x}{2a}\right)+c_2x\mathrm{ch}\left(\frac{\pi(2k+1)x}{2a}\right)+c_3\mathrm{sh}\left(\frac{\pi(2k+1)x}{2a}\right)\right.$$
$$\left.+c_4x\mathrm{sh}\left(\frac{\pi(2k+1)x}{2a}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi(2k+1)y}{2a}\right).$$

Пример 2.

$$\Delta^2 u(x,y)=x^2e^y,\qquad x\in\mathbb{R}^1,\qquad 0<y<1,$$
$$u(x,0)=u_{yy}(x,0),\qquad u_y(x,1)=u_{yyy}(x,1)=0.$$

Поскольку

$$f(x,y)=1, \qquad \Delta_x=\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \Delta_x^2 f=0,$$

то $v(x,y)=A^{-1}f(x,y)-A^{-2}\Delta_x f(x,y)$ и

$u(x,y)=A^{-1}v(x,y)-A^{-2}\Delta_x v(x,y)$.

Эти вычисления легко выполняются в *Maple* или в *Mathematica*.

Единственное в классе функций медленного роста по x решение задачи

$$u(x,y)=4+\frac{1}{3}ey^3-\frac{1}{2}eyx^2-\frac{1}{6}ex^2y^3+\frac{17}{6}ey+\frac{1}{6}y^4-\frac{2}{3}y^3-\frac{8}{3}y+x^2y-$$
$$-\frac{1}{2}x^2y^2+2y^2+x^2e^y-4e^y-x^2+\frac{1}{30}ey^5.$$

Пример 3.

$$\Delta^2 u(x,y)=x_1\cos(x_1)e^{x_2}y^3, \qquad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, \qquad 0<y<1,$$
$$u(x,0)=u_{yy}(x,0), \qquad u_y(x,1)=u_{yyy}(x,1)=0.$$

Поскольку

$$f(x,y)=x_1\cos(x_1)e^{x_2}y^3, \qquad \Delta_x^2 f(x,y)=0,$$

то

$$v(x,y)=A^{-1}f(x,y)-A^{-2}\Delta_x f(x,y),$$
$$u(x,y)=A^{-1}v(x,y)-A^{-2}\Delta_x v(x,y)=$$
$$=-\frac{323}{1680}y\sin(x_1)\,e^{x_2}+\frac{7}{90}\sin(x_1)\,e^{x_2}y^2-\frac{1}{120}\sin(x_1)\,e^{x_2}y^5+$$
$$+\frac{1}{15120}\sin(x_1)\,e^{x_2}y^9+\frac{7}{60}yx_1\cos(x_1)\,e^{x_2}-\frac{1}{24}x_1\cos(x_1)\,e^{x_2}y^3+$$
$$+\frac{1}{840}x_1\cos(x_1)\,e^{x_2}y^7.$$

Здесь правая часть уравнения $f(x,y)$ и найденное решение $u(x,y)$ не являются функциями медленного роста по x. Если не накладывать никаких ограничений на рост искомого решения по x, то к найденному решению можно добавить любое решение однородной задачи

$$\Delta^2 u(x,y)=0, \qquad x\in\mathbb{R}^2, \qquad 0<y<1,$$
$$u(x,0)=u_{yy}(x,0), \qquad u_y(x,1)=u_{yyy}(x,1)=0$$

Замечание. Аналогично изложенному в статье получается решение задачи Навье для бигармонического уравнения (1) с граничными условиями

$$u(x,0)=u(x,a)=u_{yy}(x,0)=u_{yy}(x,a)=0,$$

которая сводится к последовательному решению двух задач Дирихле для уравнения Пуассона [4].

Заключение

В работе получены точные решения смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения в многомерном бесконечном слое при условии, что правая часть является полигармонической функцией по x, $\Delta_x^k f(x,y)=0$. Это решение единственно в классе функций медленного роста по x,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,y)|\,(1+|x|)^{-m}dx < C\ , \qquad |x| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\ ,$$

для некоторого $m \geq 0$ и для каждого $y \in (0,a)$.

Согласно приведенному алгоритму получения решения соответствующие вычисления легко выполняются в *Maple* или в *Mathematica*.

Список источников

1. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic // Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 54, No 2, February 2009, 79-93.

2. Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 39–52. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-2-39-52

3. Алгазин О.Д. Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и математическое моделирование. 2017. № 06. С. 1–18. DOI: 10.24108/mathm.0517.0000082

4. Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Математика и Математическое моделирование. 2015. № 4. С. 41–53. DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943

References

1. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic // Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 54, No 2, February 2009, 79-93.

2. Algazin O.D., Kopaev A.V. Solution of the Dirichlet-Neumann mixed boundary value problem for the Poisson equation in a multidimensional infinite layer// Vestnik MGTU im. N.E.Baumana. Ser. Estestvennye nauki. 2016. №3. pp. 39-52. (in Russ.) DOI: 10.18698/1812-3368-2016-2-39-52

3. Algazin O.D. Polynomial solutions of boundary value problems for the Poisson equation in a layer// Matematika i matematicheskoe modelirovanie. 2017. № 6. pp. 1–18. (in Russ.) DOI: 10.24108/mathm.0517.0000082

4. Algazin O.D., Kopaev A.V. Solution of the Dirichlet problem for the Poisson equation in a multidimensional infinite layer // Matematika i matematicheskoe modelirovanie. 2015. № 4. pp. 41-53. (in Russ.) DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 22-27.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 22-27.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.96

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Ольга Георгиевна Антоновская[1]✉, Антонина Вячеславовна Бесклубная[2]
[1,2]Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Россия
[1]olga.antonovsckaja@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-5688-7996
[2]antbesk@gmail.com

Аннотация. *В работе ставится вопрос о построении квадратичной функции Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем, удовлетворяющих ограничениям на первую производную (первую разность) в силу линеаризованной системы, в случае кратных комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения. Методика построения функции Ляпунова рассматривается на примере систем четвертого порядка.*

Ключевые слова: *динамическая система, квадратичная функция Ляпунова, первая производная (первая разность) функции Ляпунова в силу системы.*

Conference paper

TO THE QUESTION OF QUADRATIC LYAPUNOV FUNCTIONS CONSTRUCTION WITH DEFINITE LIMITATIONS OVER MULTIPLE COMPLEX-CONJUGATE ROOTS OF CHARACTERISTIC EQUATION

Olga G. Antonovskaya[1]✉, Antonina V. Besklubnaya[2]
[1, 2]Nizhny Novgorod State University Of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russia
[1]olga.antonovsckaja@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-5688-7996
[2]antbesk@gmail.com

Abstract. *In current work the question of quadratic Lyapunov function construction for continuous and discrete dynamic systems with limitations over the first derivative (the first difference) due to linearized system in the case of multiple complex-*

© Антоновская О.Г., Бесклубная А.В., 2023

conjugate roots of characteristic equation is pointed out. Method of Lyapunov function construction is examined for the example of fourth order systems.

Keywords: *dynamic system, quadratic Lyapunov function, the first derivative (the first difference) of Lyapunov function due to system.*

1. Введение

Известно [1,2], что метод функций Ляпунова является одним из самых востребованных методов теории устойчивости. При этом естественно каждый раз возникает проблема получения функции Ляпунова, наиболее удобной для решения той или иной задачи. Например, в случае получения количественных характеристик нелинейных динамических систем часто используют квадратичную функцию Ляпунова, которая строится как функции Ляпунова для соответствующей линеаризованной системы и обладает свойством ограниченности ее первой производной (первой разности) в силу линеаризованной системы [3]. В работе [4] рассматривается вопрос о выборе коэффициентов такой функции Ляпунова в случае, когда все корни характеристического уравнения различны. В [5,6] предложена методика получения такой функции Ляпунова в случае, когда есть кратные действительные корни характеристического уравнении. В настоящей работе вопрос о построении квадратичной функции Ляпунова, с теми же свойствами ставится в случае наличия кратных комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения.

2. О выборе коэффициентов квадратичной функции Ляпунова

Чтобы получить квадратичную функцию Ляпунова

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}x_ix_j\ ,\quad (K_{ij}=K_{ji},i,j=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

для которой имеет место ограничение $max(\dot{V}/V)=\delta$, для линейной дифференциальной системы, состояние равновесия которой асимптотически устойчиво, рассматривают уравнение

$$det(A_{km}-\delta K_{km})_{k,m=1}^{n}=0, \tag{2}$$

в котором A_{km} – коэффициенты первой производной (1) в силу линеаризованной системы, а δV_0 есть максимальное ее значение на поверхности $V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=V_0$, причем $2\underset{i=1,n}{max}\{Re\,\lambda_i\}\le\delta<0$ [3]. В работах [4-6] предложена методика получения квадратичной функции Ляпунова с указанным выше свойством, основанная на приведении системы к каноническому виду. Воспользуемся этой методикой и в случае, когда имеются кратные комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения. Будем предполагать, что имеется пара $\lambda,\overline{\lambda}=\mu\pm i\nu$ комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения кратности 2.

Следует отметить, что даже в случае системы дифференциальных уравнений четвертого порядка каноническим ее видом может быть как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - \nu x_2, \\ \dot{x}_2 = \nu x_1 + \mu x_2, \\ \dot{x}_3 = \mu x_3 - \nu x_4, \\ \dot{x}_4 = \nu x_3 + \mu x_4, \end{cases} \tag{3}$$

если матрица системы приводится к диагональному виду с комплексно-сопряженными $\lambda, \overline{\lambda} = \mu \pm i\nu$ на главной диагонали, так и

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - \nu x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = \nu x_1 + \mu x_2 + x_4, \\ \dot{x}_3 = \mu x_3 - \nu x_4, \\ \dot{x}_4 = \nu x_3 + \mu x_4, \end{cases} \tag{4}$$

когда каждому из собственных значений соответствует жорданова клетка размерности 2 [7, С. 184].

Квадратичную функцию Ляпунова традиционно будем искать в виде

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = K_{11}x_1^2 + K_{22}x_2^2 + K_{33}x_3^2 + K_{44}x_4^2, \tag{5}$$

где $K_{22} = K_{11} > 0, K_{44} = K_{33} > 0$ [4,8]. Тогда, в первом случае, какую бы положительно определенную квадратичную форму вида (5) мы не взяли, первая производная ее в силу системы (3) будет равна $\dot{V}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2\mu V(x_1, x_2, x_3, x_4)$, т.е. в этом случае $\delta = 2\mu$. Во втором случае уравнение (2) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} (2\mu - \delta)K_{11} & 0 & K_{11} & 0 \\ 0 & (2\mu - \delta)K_{11} & 0 & K_{11} \\ K_{11} & 0 & (2\mu - \delta)K_{33} & 0 \\ 0 & K_{11} & 0 & (2\mu - \delta)K_{33} \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

откуда получим пару двукратных корней

$$\delta = 2\mu \pm \sqrt{\frac{K_{11}}{K_{33}}}, \tag{7}$$

а значит

$$\delta_{max} = 2\mu + \sqrt{\frac{K_{11}}{K_{33}}}. \tag{8}$$

Но тогда значение $K = K_{11} / K_{33}$, соответствующее любому значению $2\mu < \delta < 0$ будет равно $K = (\delta - 2\mu)^2$. В этом случае значение $\delta = 2\mu$ недостижимо, т.к. при этом нарушается положительная определенность (5).

Переходя обратно от канонических переменных к переменным исходным, получим квадратичную функцию Ляпунова с нужными свойствами.

2. Чтобы получить квадратичную функцию Ляпунова (1), для которой имеет место ограничение $max(\Delta V / V) = \delta$, для линейной дискретной системы, состояние равновесия которой асимптотически устойчиво, рассматривают уравнение (2), в котором A_{km} – коэффициенты первой разности (1) в силу

линеаризованной системы. Здесь δV_0 есть максимальное ее значение на поверхности $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_0$, причем $\max\limits_{i=1,n} |z_i|^2 - 1 \le \delta < 0$ [3]. В работах [4-6] предложена методика получения квадратичной функции Ляпунова с указанным выше свойством, основанная на приведении системы к каноническому виду. Воспользуемся этой методикой и в случае, когда имеются кратные комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения. Будем предполагать, что имеется пара $z, \bar{z} = \mu \pm i\nu$ комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения кратности 2.

Следует отметить, что даже в случае точечного отображения четвертого порядка каноническим его видом может быть как

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \mu x_1 - \nu x_2, \\ \bar{x}_2 = \nu x_1 + \mu x_2, \\ \bar{x}_3 = \mu x_3 - \nu x_4, \\ \bar{x}_4 = \nu x_3 + \mu x_4, \end{cases} \tag{9}$$

если матрица системы приводится к диагональному виду с комплексно-сопряженными $z, \bar{z} = \mu \pm i\nu$ на главной диагонали, так и

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \mu x_1 - \nu x_2 + x_3, \\ \bar{x}_2 = \nu x_1 + \mu x_2 + x_4, \\ \bar{x}_3 = \mu x_3 - \nu x_4, \\ \bar{x}_4 = \nu x_3 + \mu x_4, \end{cases} \tag{10}$$

когда каждому из собственных значений соответствует жорданова клетка размерности 2 [7, С. 184].

Квадратичную функцию Ляпунова будем искать в виде (5), где $K_{22} = K_{11}, K_{44} = K_{33}$ [4,8]. Тогда, в первом случае, какую бы положительно определенную квадратичную форму вида (5) мы не взяли, первая разность ее в силу функций последования отображения (9) будет равна $\Delta V(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\mu^2 + \nu^2 - 1) V(x_1, x_2, x_3, x_4)$, т.е. в этом случае $\delta = \mu^2 + \nu^2 - 1$. Во втором случае уравнение (2) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} (|z|^2 - 1 - \delta)K_{11} & 0 & -\mu K_{11} & \nu K_{11} \\ 0 & (|z|^2 - 1 - \delta)K_{11} & -\nu K_{11} & \mu K_{11} \\ -\mu K_{11} & -\nu K_{11} & (|z|^2 - 1 - \delta)K_{33} & 0 \\ \nu K_{11} & \mu K_{11} & 0 & (|z|^2 - 1 - \delta)K_{33} \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

где $|z|^2 = \mu^2 + \nu^2$, откуда получим пару двукратных корней

$$\delta_{1,2} = \mu^2 + \nu^2 - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{K_{11}}{K_{33}} \pm \sqrt{4(\mu^2 + \nu^2)\frac{K_{11}}{K_{33}} + \frac{K_{11}^2}{K_{33}^2}} \right), \tag{12}$$

а значит

$$\delta_{max} = \mu^2 + \nu^2 - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{K_{11}}{K_{33}} + \sqrt{4(\mu^2 + \nu^2)\frac{K_{11}}{K_{33}} + \frac{K_{11}^2}{K_{33}^2}} \right), \qquad (13)$$

Но тогда значение $K = K_{11} / K_{33}$, соответствующее любому значению $\mu^2 + \nu^2 - 1 < \delta < 0$ будет равно $K = (1 + \delta - \mu^2 - \nu^2)^2 (1 + \delta)^{-1}$.

Переходя обратно от канонических переменных к переменным исходным, получим квадратичную функцию Ляпунова с нужными свойствами.

3. Заключение

Изложенные в статье результаты являются продолжением и дополнением исследований работ [4-6], посвященных выбору коэффициентов функция Ляпунова, построенных в виде положительно определенных квадратичных форм со специфическими свойствами и удобных для получения количественных характеристик как непрерывных, так и дискретных систем. Случай кратных комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения не менее важен, чем случай различных корней и кратных действительных корней характеристического уравнения.

Список источников

1. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
2. Косякин А. А., Шамриков Б. М. Колебания в цифровых автоматических системах. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. Антоновская О.Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. 2013. Т.49. № 9. С. 1220-1224.
4. Антоновская О. Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. 2016. Т.52. № 3. С. 276-281.
5. Антоновская О. Г., Бесклубная А. В. К вопросу о построении квадратичных функций Ляпунова в случае кратных корней характеристического уравнения // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Орёл: ОГУ им. И. С. Тургенева, 2021. С. 21-26.
6. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами в случае кратных корней характеристического уравнения. // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 707-711.
7. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
8. Антоновская О.Г. О сохранении квадратичной функции Ляпунова линейной дифференциальной автономной системы при стационарных возмущениях ее коэффициентов. // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 3. С. 295-302.

References

1. Barbashin E. A. Lyapunov functions. Moscow. Nauka, 1970. 240 p. (In Russ.).

2. Kosyakin A. A., Shamrikov B. M. Oscillations in digital automatic systems. Moscow. Nauka. 1983. 336 p. (In Russ.).

3. Antonovskaya O. G. On the construction of a quadratic Lyapunov function with given properties. Differential equations, 2013; (9):1187-1191.

4. Antonovskaya O. G. Determination of the coefficients of a quadratic Lyapunov function with given properties. Differential equations, 2016; (3):265-271.

5. Antonovskaya O. G., Beklubnaya A. V. To the question of quadratic Lyapunov functions construction over multiple roots of characteristic equation. Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. Proceedings of the conference. Orel. 2021: 21-26.

6. Antonovskaya O. G. On determining of coefficients of a quadratic Lyapunov function with given properties in the case of multiple roots of characteristic equation. Differential equations, 2023; (3): 721-725.

7. Horn R, Johnson C. Matrix analysis. New York. Cambridge University Press, 1985. 651 p.

8. Antonovskaya O. G. On the preservation of a quadratic Lyapunov function of a linear differential autonomous system under constant perturbations of the coefficients. Differential equations, 2023; (3): 293-300.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 28-34.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 28-34.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.956.6

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Наталья Владимировна Боковели[1], Елена Викторовна Чаплыгина[2]✉
[1, 2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]nv8657@mail.ru,
[2]lena260581@yandex.ru✉

Аннотация. *Рассматривается применение дифференциальных уравнений для моделирования процесса культивирования бактерий в лабораторных условиях на примере Bacillus subtilis.*

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, модель Мальтуса, модель Ферхюльста–Перла, равновесные решения, точки бифуркации, метод Ляпунова.*

Conference paper

USE OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR MODELING BIOLOGICAL SYSTEMS

Natalia V. Bokoveli[1], Elena V. Chaplygina[2]✉
[1]student of the Faculty of Physics and Mathematics, I.S. Turgenev Orel State University, Orel, Russia
[2]Head of the Department of Mathematical Analysis and Mathematics Teaching Methods, I.S. Turgenev Orel State University, Orel, Russia
[1]nv8657@mail.ru
[2]lena260581@yandex.ru ✉

Abstract. *The application of differential equations for modeling the process of cultivating bacteria in laboratory conditions using the example of Bacillus subtilis is considered.*

Keywords: *differential equation, Malthus model, Ferhulst–Perla model, equilibrium solutions, bifurcation points, Lyapunov method.*

1. Введение. Биологические системы сложны и многокомпонентны, элементы систем имеют свои механизмы взаимодействия. Моделирование живых систем с помощью дифференциальных уравнений является мощным инструментом в исследовании и понимании поведения биологических систем.

© Боковели Н.В., Чаплыгина Е.В., 2023

Рассмотрим моделирование биологической системы на примере бактерии Bacillus subtilis.

2. Бактерия сенной палочки, также известная как Bacillus subtilis, является грамположительной, спорообразующей бактерией. Она широко распространена в природе и может обитать в почве, воде и других средах. Моделирование данной бактерии с помощью дифференциальных уравнений обычно базируется на описании динамики концентраций важных компонентов внутри клетки и динамике межклеточных взаимодействий.

Размножение бактерии в лабораторных условиях - культивацию, для получения культуры (микробные клетки, которые удалось вырастить) можно описать с помощью простой модели роста. Для этого создаются эффективные (избирательные) условия для группы микроорганизмов.

Итак, если созданы элективные условия, бактерия посеяна в возобновляемую питательную среду, не подавляется никакими другими видами и выделяется её избыточная масса, то процесс культивации можно описать законом изменения числа организмов в колонии по времени или моделью Мальтуса.

Кривая роста культуры при периодическом культивировании изображена на рис. 1. Цель культивации зациклить процесс на третьей фазе путем изъятия избыточной массы.

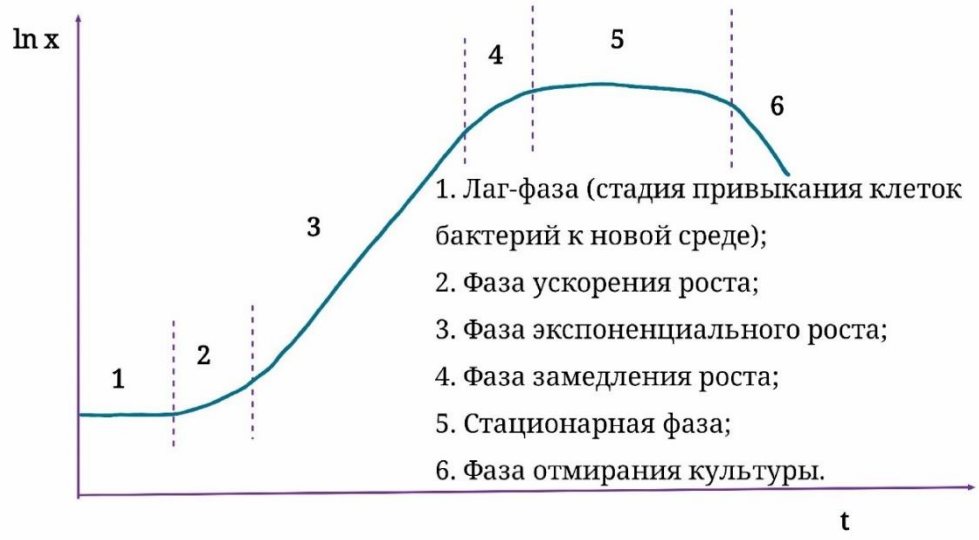


Рисунок 1. Кривая роста культуры.

Пусть $x(t)$ – плотность популяции в момент t, тогда $x(t + \Delta t)$ – плотность в момент $t + \Delta t$ и приращение $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$. За время Δt N бактерий появится, M – погибнут и осуществится забор Q

$$\Delta x = N - M - Q.$$

N зависит от x, то есть от плотности посеянных бактерий, и от времени

$$N = F(x, \Delta t),$$

где F возрастает при $x \to \infty$ и $\Delta t \to \infty$.

$$N = k_1 x \Delta t,$$
$$M = k_2 x \Delta t,$$
$$Q = k_3 x \Delta t,$$

$$\Delta x = k_1 x\Delta t - k_2 x\Delta t - k_3 x\Delta t,$$
$$\Delta x = (k_1 - k_2 - k_3)x\Delta t,$$

где k_1, k_2, k_3 - коэффициенты пропорциональности. $k = (k_1 - k_2 - k_3)$ – коэффициент, отражающий скорость естественного увеличения популяции с учетом периодического забора, получим уравнение $\Delta x = kx\Delta t$. Разделив обе части уравнения на Δt, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\int \frac{dx}{x} = \int k dt\,,$$

$$\ln x = kt + C.$$

Общее решение $x = Ce^{kt}$ как раз отражено на рис. 2, что соответствует поставленной задаче.

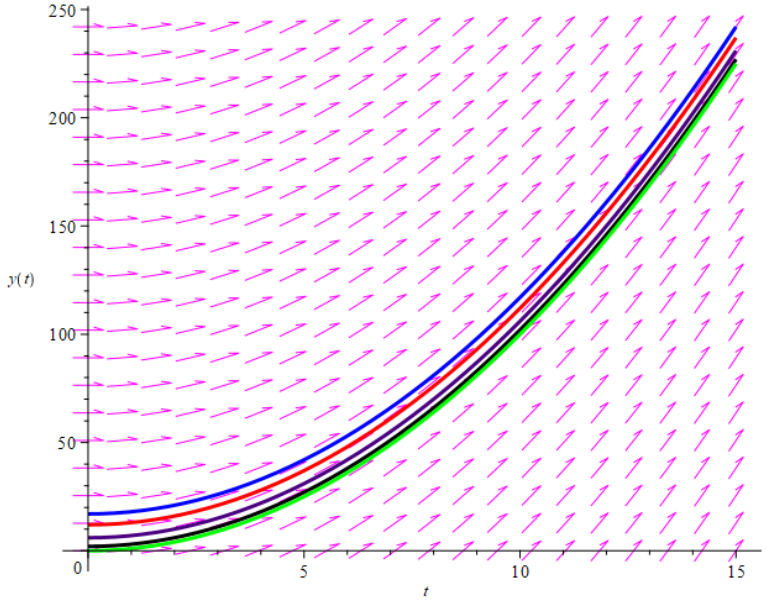


Рисунок 2. График общего решения простой модели роста.

Однако культивирование по модели Мальтуса подходит не для всех видов бактерий. Особенность таких микроорганизмов, которых очень много в природной среде, размножаться как делением при благоприятных условиях, так и спорообразованием при неблагоприятных. Природная среда – открытая система в которой в очень небольших концентрациях поступают субстраты (питательные среды), а продукты жизнедеятельности бактерии удаляются естественным путем. Для коммерческих нужд необходим именно процесс спорообразования. Поэтому в лабораторных условиях культивируют Bacillus subtilis в системах, приближенных к природной среде (в ферментёрах), которую можно описать логистическим уравнением роста. Логистическое уравнение описывает модель ограниченного роста популяции с учетом потенциальной

ёмкости экологической системы. В этой модели учитываются следующие параметры:

1. Самоотравление организмов или внутренняя конкуренция,
2. Недостаток питания,
3. Факторы стресса (воздействие УФ-лучей, засуха и т. д.)

Факторы самоотравления и стресса учитываются при подсчете прироста популяции Δx, путем уменьшения его на величину

$$h(x, \Delta t) = f(x, \Delta t) = \lambda x^2 \Delta t,$$

где λ – общий коэффициент стресса. Таким образом

$$\frac{dx}{dt} = kx - \lambda x^2.$$

Приняв за $\mu = \frac{k}{\lambda}$ получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(\frac{\mu - x}{\mu}\right).$$

Разделим переменные

$$\frac{\mu dx}{x(\mu - x)} = kdt$$

или

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\mu - x}\right) dx = kdt,$$

для $\forall \mu > x_0$, проинтегрировав, получим

$$\ln x - \ln(\mu - x) = kt + \ln C,$$

$$\frac{x}{\mu - x} = Ce^{kt}.$$

Определим скорость спорообразования при начальных условиях

$$t_0 = 0, x(0) = x_0 < \mu$$

получим закон, называемый модель Ферхюльста–Перла

$$x(t) = \frac{\mu x_0 * e^{kt}}{\mu - x_0 + x_0 e^{kt}}.$$

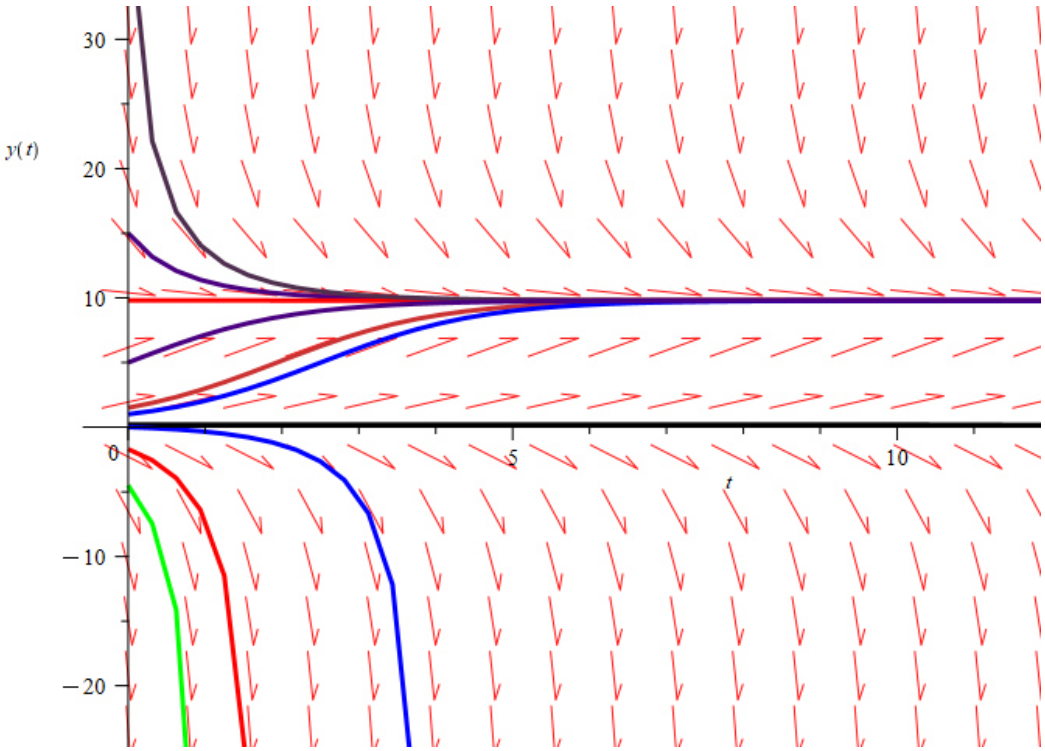


Рисунок 3. Фазовый портрет уравнения логистического роста.

Полученные интегральные кривые на рис. 3 показывают два особых решения. При $\mu = x$ получим точку равновесия, когда при малых возмущениях коэффициентов стресса система остается устойчивой, а размер популяции остается постоянным или колеблется около определенного уровня. Решение при $x = 0$ определяет точку бифуркации, это состояние системы культивирования, когда популяция бактерий неустойчива даже к малым возмущениям коэффициентов, и популяция бактерий может резко изменить своё состояние, вплоть до полной гибели.

Задача. Рассмотрим задачу о росте бактерий в ограниченной среде.

Предположим, что количество доступных ресурсов (например, питательных веществ) в среде ограничено емкостью среды K = 2.6, скорость роста бактерий определяется коэффициентом r = 0,2. Уравнение, описывающее рост популяции бактерий, может быть выражено с помощью уравнения Логистического роста, такого как уравнение Лотки-Вольтерра

$$dN/dt = rN(1 - N/K),$$

где N - количество бактерий, или уравнение Монода

$$dN/dt = rN/(K + N),$$

где N, t, r и K имеют аналогичные значения.

Эти уравнения описывают изменение популяции бактерий с течением времени и позволяют изучать влияние ресурсов на рост и устойчивость популяции. Изучая фазовый портрет (рис. 4), мы можем найти точки равновесия и определить их устойчивость.

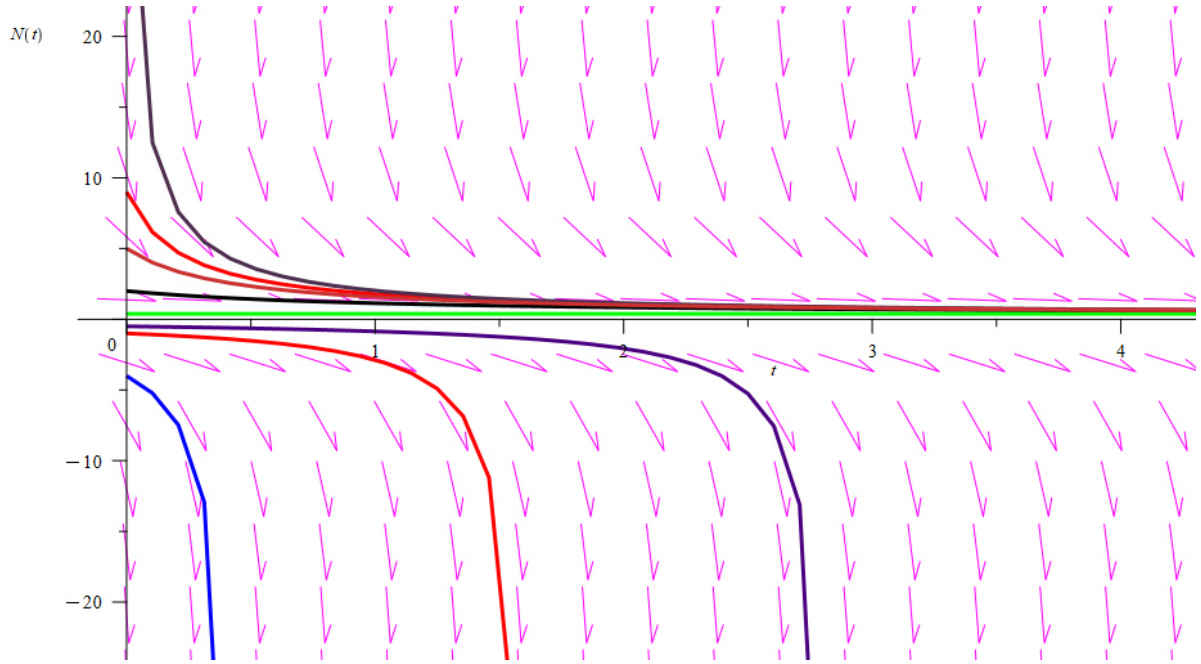


Рисунок 4. Фазовый портрет для r = 0.2.

Равновесные решения — это значения N, при которых скорость изменения популяции равна нулю, то есть $dN/dt = 0$. В уравнении роста Bacillus subtilis равновесные решения могут быть найдены путем приравнивания выражения к нулю

$$rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0.$$

Отсюда мы получаем два равновесных решения: $N = 0$ и $N = K$. Это означает, что если начальное количество популяции равно 0, то она останется 0 (выродится), а если начальное количество популяции равно K (емкости окружающей среды), то оно будет оставаться постоянным. Можно сделать вывод, что для спорообразования эффективнее всего поддерживать среду в ферментере в диапазоне между равновесными решениями.

Устойчивость равновесных решений связана с поведением системы в окрестности этих точек. Чтобы определить устойчивость равновесных решений, мы можем линеаризовать уравнение около каждого равновесного решения и анализировать его с помощью метода Ляпунова или фазовых портретов.

Для равновесного решения $N = 0$, линеаризованное уравнение имеет вид

$$\frac{dN}{dt} = rN.$$

Это уравнение является устойчивым, и любое малое возмущение относительно равновесного значения $N = 0$ будет затухать со временем.

Для равновесного решения $N = K$, линеаризованное уравнение имеет вид

$$\frac{dN}{dt} = -rN.$$

Такое уравнение является неустойчивым, и любое малое возмущение относительно равновесного значения $N = K$ будет увеличиваться со временем.

3 Заключение. Хотя представленная схема является упрощенной, логистическая кривая оказалась очень полезной для описания кривых роста многих популяций. В природе внутривидовая конкуренция не поддерживает

естественные популяции на строго постоянном уровне, но действует в широком диапазоне начальных значений плотности, приводя их к более узкому диапазону конечных значений. Это определяет тенденцию поддержания плотности в определенных пределах.

Моделирование с помощью дифференциальных уравнений требует предварительной калибровки и экспериментальных данных для определения параметров модели. Этот подход позволяет исследователям изучать различные сценарии и предсказывать поведение бактерий Bacillus subtilis в различных условиях.

Однако следует отметить, что моделирование является упрощенным представлением реальных систем, и они всегда требуют дополнительной проверки и экспериментальной подтверждения.

Список источников

1. Волькенштейн, М. В. Биофизика : учебное пособие / М. В. Волькенштейн. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2012. — 608 с.

2. Краснов, М. Л. Вся высшая математика: Т. 6 // М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко, Е.В. Шикин, В.И. Заляпин / М.: Едиториал УРСС, 2003.- 256 с.

3. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Ч.1 / Ризниченко Г.Ю. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. — 230 с.

4. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. – М.: Мир, 1970. – 326 с.

5. Эдвардс, Чарльз Генри. Дифференциальные уравнения и краевые задачи : моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB: [пер. с англ.] / Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни. - Москва [и др.] : Вильямс, 2008. – 1094 с.

References

1. Volkenshtein, M.V. Biophysics: textbook / M.V. Volkenshtein. — 4th ed., erased. - St. Petersburg: Lan, 2012. - 608 p. (In Russ.).

2. Krasnov, M.L. All higher mathematics: T. 6 // M.L. Krasnov, A.I. Kiselev, G.I. Makarenko, E.V. Shikin, V.I. Zalyapin / M.: Editorial URSS, 2003.- 256 p.

3. Riznichenko G.Yu. Lectures on mathematical models in biology. Part 1 / Riznichenko G.Yu. — Izhevsk: Regular and chaotic dynamics, Institute of Computer Research, 2019. — 230 p. (In Russ.).

4. Bailey N. Mathematics in biology and medicine. – M.: Mir, 1970. – 326 p.

5. Edwards, Charles Henry. Differential equations and boundary value problems: modeling and calculation using Mathematica, Maple and MATLAB: [trans. from English] / Charles Henry Edwards, David E. Penney. - Moscow [etc.]: Williams, 2008. - 1094 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 35-39.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 35-39.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.956.6

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В КОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

Артур Николаевич Вещиков[1], Елена Викторовна Чаплыгина[2]✉
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]7575sergei7557@gmail.com
[2]lena260581@yandex.ru ✉

Аннотация. *В работе рассматривается диффузия некоторого вещества в конечном однородном цилиндре. Исследуется вопрос о существовании решения.*

Ключевые слова: *Уравнение диффузии, функция Гринна, конечный цилиндр.*

Conference paper

ON THE SOLVABILITY OF A CERTAIN BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE DIFFUSION EQUATION IN A FINITE CYLINDER

Arthur Nikolaevich Veshchikov[1], Elena Viktorovna Chaplygina[2]✉
[1]student of the Faculty of Physics and Mathematics, I.S. Turgenev Orel State University, Orel, Russia
[2]Head of the Department of Mathematical Analysis and Mathematics Teaching Methods, I.S. Turgenev Orel State University, Orel, Russia
[1]7575sergei7557@gmail.com,
[2]lena260581@yandex.ru ✉

Annotation. *The work considers the diffusion of a certain substance in a finite homogeneous cylinder. The question of the existence of a solution is considered.*

Key words: *Diffusion equation, Greenn function, finite cylinder.*

1. Введение

В настоящее время бурно развивается теория процессов, приводящих к уравнениям параболического типа, к которым и относятся всевозможные виды диффузий. В нашей работе будет рассмотрен процесс диффузии некоторого вещества в однородном конечном цилиндре.

© Вещиков А. Н., Чаплыгина Е.В., 2023

Для того чтобы решить поставленную задачу, необходимо будет сначала получить закон, отвечающий за диффузию в целом, т. е. получить уравнение диффузии.

Экспериментально получено, что через площадь S_0 за единицу времени проходит количество частиц равное

$$\Phi = -D\frac{\partial n}{\partial x}S, \qquad (1)$$

где D определяется свойствами системы и называется **коэффициентом диффузии**. Величина Φ (поток частиц).

Умножив уравнение (1) на массу m_0 (массу одной диффундирующей молекулы), получим уравнение для потока массы $M = m_0\Phi$

$$M = -D\frac{\partial \rho}{\partial x}S. \qquad (2)$$

Связь потока частиц с градиентом $\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{dx}}$ концентрации называется **первым законом Фика.**

Второй закон Фика показывает, что имеет место зависимость концентрации диффундирующих частиц не только от координаты, но и от времени, т.е. концентрация есть функция двух переменных. Рассмотрим два параллельных квадрата одинаковой площади, расположенных в близких точках с координатами z и $z+dz$. Будем, как и ранее предполагать, что $n(z)$ — *убывающая* функция.

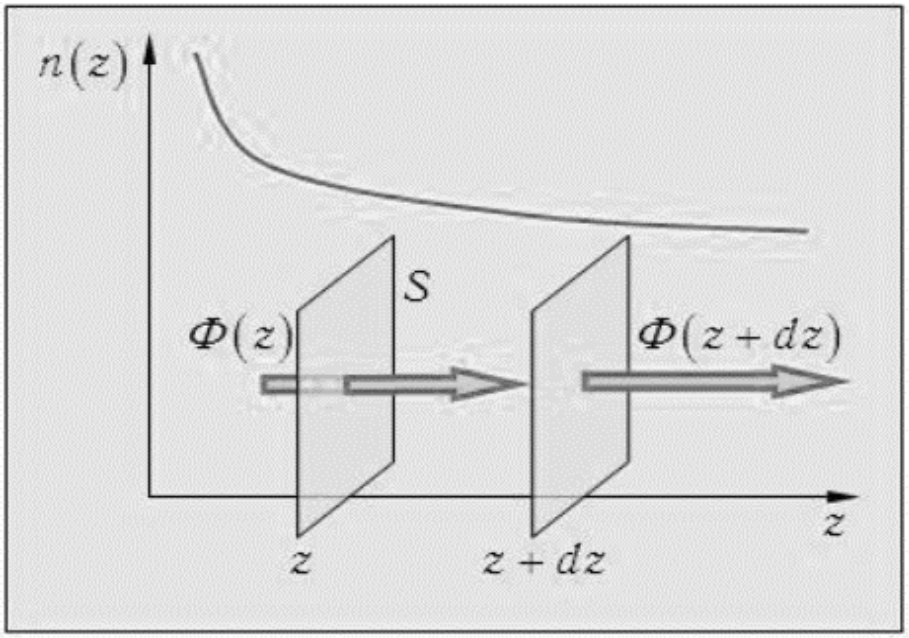


Рисунок 1. Схема диффузии вещества и убывающая функция концентрации.

Увеличение числа частиц $dN=ndV$ в пространстве между площадками за время dt равно разности числа входящих и выходящих частиц, т. е. разнице значений потока в точке z и точке $z + dz$

$$dN = \big(\Phi(z) - \Phi(z+dz)\big)dt = -\frac{d\Phi}{dz}dzdt. \qquad (3)$$

Разделив уравнение *(3)* на объем $dV=Sdz$, получим изменение концентрации частиц за время dt

$$dn = -\frac{d\Phi(z)}{dz}\cdot\frac{dt}{S}. \qquad (4)$$

Используя первый закон Фика, для равенства (4) имеем

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial n}{\partial z}\right). \quad (5)$$

Обычно коэффициент диффузии *D* не зависит ни от координат, ни от времени, т. е. является постоянной величиной поэтому *D* можно вынести за знак дифференцирования и получить уравнение, выражающее **второй закон Фика**

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial z^2}. \quad (6)$$

Итак, перепишем уравнение (6) (которое является параболическим) в привычном для нас виде и получим простейшее уравнение диффузии

$$\mathrm{u_t} = \mathrm{Du_{xx}}, \quad (7)$$

где D – есть коэффициент диффузии (зависит от диффундирующего вещества), u(x, t) – есть функция концентрации вещества в точке x, в момент времени t.

По виду уравнения (7) легко определить область D

$$\mathrm{D} = \{(\mathrm{x},\mathrm{t})\ -\mathrm{l} < \mathrm{x} < \mathrm{l};\ \mathrm{t} > 0\}.$$

2. Постановка и решение краевой задачи D.

Задача D. *Найти решение уравнения (7) удовлетворяющее следующим условиям*

$$\mathrm{u} \in C[-l;l] \cap C_{xx}(-l;l) \cap C_t(-l;l), \quad (8)$$

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},0) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{u}_{0,} \quad (9)$$

$$\mathrm{u}(-l,\mathrm{t}) = 0, \quad (10)$$

$$\mathrm{u}(l,\mathrm{t}) = 0. \quad (11)$$

Исходя из условий будем рассматривать конечный цилиндр с определенной концентрацией веществ в начальный момент времени и нулевой концентраций на левом торце цилиндра.

Задача о нахождении функции концентрации вещества, сходна с задачей о нахождении функции теплопроводности, т. к. обе эти функции принадлежат к параболическому типу, поэтому можно смело пользоваться функцией Гринна для уравнения теплопроводности

$$u(x,t) = \int_{-l}^{l} G(x,\tau,t)\, f(\tau)\, d\tau, \quad (12)$$

где

$$G(x,\tau,t) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi Dt)}} e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4Dt}} -$$

функция Гринна в точке τ, а *f (τ)* – некоторая функция, удовлетворяющая краевым условиям.

Поскольку найденная функция *u(x,t)* является решением краевой задачи, она обязана удовлетворять поставленным условиям.

Проверим условие (10)

$$\mathrm{u}(0,\mathrm{t}) = (4\pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4Dt}} f(\tau)\, d\tau.$$

Так как начальная концентрация есть величина постоянная, можно функцию $f(\tau)$ принять за константу.

Получим

$$\mathrm{u}(-\mathrm{l},\mathrm{t}) \;=\; \mathrm{u}_0(4\pi Dt)^{-\frac{1}{2}}\int_{-l}^{l} e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4Dt}}\,d\tau.$$

Оценим теперь интеграл

$$\int_{-l}^{l} e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4Dt}}\,d\tau \tag{13}$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора. Получим

$$e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4Dt}} = 1-\frac{\left(\frac{\tau-x}{\sqrt{4Dt}}\right)^2}{1}+\frac{\left(\frac{\tau-x}{\sqrt{4Dt}}\right)^4}{2}-\frac{(\frac{\tau-x}{\sqrt{4Dt}})^6}{6}+\ldots+(-1)^n\frac{(\frac{\tau-x}{\sqrt{4Dt}})^{2n}}{n!}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\tau-x}{\sqrt{4Dt}}\right)^{2n}}{n!} \tag{14}$$

Таким образом, *n*-й член ряда (14) равен

$$(-1)^n\frac{(\frac{\tau-x}{\sqrt{4Dt}})^{2n}}{n!}. \tag{15}$$

Тогда равенство (13) примет вид

$$\int_{-l}^{l}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\tau-x}{\sqrt{4Dt}}\right)^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}. \tag{16}$$

Поскольку ряд (14) сходится всюду, мы можем поменять знак суммы и интеграла местами

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-l}^{l}(-1)^n\frac{\left(\frac{\tau-x}{\sqrt{4Dt}}\right)^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}. \tag{17}$$

Проинтегрировав, приходим к новому ряду вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\tau-x}{\sqrt{4Dt}}\right)^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \tag{18}$$

Подставив в него $x = -l$ получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\tau+l}{\sqrt{4Dt}}\right)^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \tag{19}$$

Теперь вместо τ подставим пределы интегрирования *-l* и *l*, получим два ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{-l+l}{\sqrt{4Dt}})^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{0}{\sqrt{4Dt}})^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}=0$$

Видим, что первый ряд тождественно обращается в 0.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{l+l}{\sqrt{4Dt}}\right)^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{l}{\sqrt{Dt}}\right)^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}. \qquad (20)$$

Теперь сделаем оценку для второго ряда.

Ряд условно сходится по признаку Лейбница, теперь проверим абсолютную сходимость.

Применим признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{(\frac{l}{\sqrt{Dt}})^{2n+3}}{(n+1)!\,(2n+3)}}{\frac{(\frac{l}{\sqrt{Dt}})^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}}=\frac{\frac{l^2}{Dt}}{n+1}=0.$$

Таким образом, ряд (20) сходится абсолютно, и очевидно, что его значение не равно 0, т. е. интеграл (13) не равен 0, что противоречит условию (10) краевой задачи. Условие (10) краевой задачи не выполняется, решения нет.

3. Заключение

Таким образом, мы выяснили, что в конечном однородном цилиндре с определенной концентрацией в начальный момент времени, невозможно поддерживать нулевую концентрацию на его границах.

Список источников

1. Методические указания к решению краевых задач для уравнения теплопроводности методом функций Грина / Уч.-мет. пособие. Сост. Прокофьев В. Г. – Томск: Томский государственный университет, 2017. – 19 с.

2. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. - 1108 с.

References

1. Methodological instructions for solving boundary value problems for the heat equation using the Green's function method / Prokofiev V.G. – Tomsk: Tomsk State University. 2017. – 19 p. (In Russ.).

2. Gradshtein I. S. Tables of integrals, sums, series and products. I. S. Gradshtein, I. M. Ryzhik. Gos. izd. fiz.-mat. lit. – Moscow, 1963. – 1108 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 40-43.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 40-43.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.9

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Николай Александрович Евхута[1]✉
[1]*Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М. И. Платова, Новочеркасск, Россия*
[1]*evhuta@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0000-0001-7725-7021*

Аннотация. *Данная работа посвящена изучению схемы построения периодических решений для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Рассматриваются случаи конечных и бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также некоторые типы интегро-дифференциальных уравнений.*

Ключевые слова: *периодические решения, банаховы пространства.*

Conference paper

ON PERIODIC SOLUTIONS OF EQUATIONS IN BANACH SPACES

Evkhuta Nikolai[1] ✉
[1] *Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novo-cherkassk, Russia*
[1]*evhuta@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0000-0001-7725-7021*

Abstract. *This work is devoted to the study of the scheme of constructing periodic solutions for differential equations in Banach spaces. The cases of finite and infinite systems of ordinary differential equations, as well as some types of integro-differential equations are considered.*

Keywords: *periodic solutions, banach spaces.*

1. Введение

Одной из наиболее интересных и важных задач классической и современной математической физики, на протяжении достаточно длительного периода времени, остаётся задача об отыскании периодических решений для различных классов дифференциальных уравнений.

© Евхута Н.А., 2023

Такая задача, с одной стороны, служит постоянным источником всё новых и новых исследований в области линейного и нелинейного математического анализа, и, с другой стороны, является одним из наиболее важных объектов для приложения разнообразных абстрактных результатов, эффективность которых оценивается именно теми продвижениями в теории периодических решений, которые они позволяют получить.

2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка в банаховых пространствах

Нас интересуют ω–периодические решения линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t); \tag{1}$$

где A — линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X, $f(t)$ — заданная ω–периодическая непрерывная функция, принимающая значения в X. x – функция, подлежащая определению, также ω–периодическая и принимающая значения в X.

Известно (см., например, [1]), что в случае непрерывного оператора A, определенного на всем пространстве X, решения уравнения (1) даются формулой

$$x(t) = e^{At}\xi + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds, \tag{2}$$

где e^{At} — операторная функция, определенная рядом

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \tag{3}$$

Ряд в правой части (3) сходится по норме пространства непрерывных линейных операторов в пространстве X при всех $t \in (-\infty, \infty)$ равномерно на каждом отрезке. Параметр ξ при этом совпадает со значением решения $x(t)$ в нулевой точке:

$$\xi = x(0). \tag{4}$$

Если A – производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $T(t)$, то для решения $x(t)$ справедлива [2] обобщающая (2) формула

$$x(t) = T(t)\xi + \int_0^t T(t-s) f(s)ds, \tag{5}$$

при этом параметр ξ и здесь будет значением решения в нулевой точке. Для функций [2], определенных равенством (5) справедливо свойство: равномерные по t пределы на каждом отрезке являются решениями (1). Данное свойство позволяет называть функции вида (5), с непрерывными функциями $f(t)$ и $\xi \in X$ обобщенными решениями уравнения (1). Если оператор A не является непрерывным оператором на всем пространстве X, но является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы

$$T(t) = e^{At} \tag{6}$$

и в этом случае каждое обобщенное решение (1) является обычным решением этого уравнения.

Используя свойство полугруппы $T(t)$ [3] в работе [4] показано, что обощенное решение уравнения (1) является ω–периодическим тогда и только тогда, когда

$$x(\omega) = x(0). \tag{7}$$

При этом задача отыскания начальных условий $\xi = x(0)$ сводится к решению линейного уравнения

$$(I - T(\omega))\xi = \int_0^\omega T(\omega - s)f(s)ds \tag{8}$$

с непрерывным в X оператором $I - T(\omega)$.

Таким образом, определённые на $[0, \omega]$ обобщённое решение уравнения (1) с непрерывной ω–периодической функцией $f(t)$ являются сужением на $[0, \omega]$ обобщённых решений уравнения (1) тогда и только , когда выполнено условие (7).

Если оператор $I - T(\omega)$ имеет в пространстве X непрерывный обратный оператор $(I-T(\omega))^{-1}$, то уравнение (8) имеет единственное решение

$$\xi = (I - T(\omega))^{-1} \int_0^\omega T(\omega - s)f(s)ds. \tag{9}$$

3. Заключение

Получаем, что для любой ω–периодической и непрерывной функции $f(t)$ уравнение (1) имеет ω–периодическое обобщённое решение, которое задается формулой

$$x(t) = T(t)(I - T(\omega))^{-1} \int_0^\omega T(\omega - s)f(s)ds + \int_0^t T(t - s)f(s)ds. \tag{10}$$

Список источников

1. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
2. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский Е.И. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 500 с.
3. Хилле Э., Филипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962. 830 с.
4. Евхута Н.А. Периодические решения уравнений в банаховых пространствах. // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (25–26 ноября 2022 г., г. Орёл): научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией кандидата физико-математических наук, профессора Т.Н. Можаровой. — Орёл: ОГУ имени Т.С. Тургенева, 2022. С. 51–55.

References

1. Daletsky Yu.L., Krein M.G. Stability of solutions of differential equations in Banach spaces. M.: Nauka, 1970. 534 p.
2. Krasnoselsky M.A., Zabreiko P.P., Pustylnik E.I., Sobolevsky E.I. Integral operators in spaces of summable functions. M.: Nauka, 1966. 500 p.
3. Hille E., Philips R. Functional analysis and semigroups. M.: FL, 1962. 830 p.
4. Evkhuta N.A. Periodic solutions of equations in Banach spaces. // Modern problems of physical and mathematical sciences. Materials of the VIII All-Russian Scientific and Practical Conference with international participation (November 25-26, 2022, Orel): scientific electronic edition [Electronic resource] // under the general editorship of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor T.N. Mozharova. Orel. 2022. p. 51–55.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 44-47.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 44-47.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.988

ПРОИЗВОДНЫЕ НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ И ОБОБЩЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Ольга Николаевна Евхута[1] ✉
[1]*Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М. И. Платова, Новочеркасск, Россия*
[1]*evhuta@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3405-730X*

Аннотация. *Рассматривается вопросы дифференцируемости функций в слабом смысле, свзяь производных Ньтона-Лейбница и обобщенных производных.*

Ключевые слова: *производные Ньютона-Лейбница, скалярные функции, обобщенные производные, производные Радона-Никодима.*

Conference paper

NEWTON-LEIBNIZ DERIVATIVES OF SCALAR FUNCTIONS AND GENERALIZED DERIVATIVES

Olga N. Evkhuta[1] ✉
[1] *Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocher-kassk, Russia*
[1]*evhuta@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3405-730X*

Abstract. *The issues of differentiability of functions in the weak sense, including Newton-Leibniz derivatives and generalized derivatives, are considered.*

Keywords: *Newton-Leibniz derivatives, scalar functions, generalized derivatives, Radon-Nicodemus derivatives.*

1. Введение

Достаточно хорошо известно, что все функции, встречающиеся в теории приближённых методов решения операторных уравнений, на практике оказываются дифференцируемыми в смысле Фреше, а сами эти производные непрерывными.

Функции с разнообразными особенностями при этом могут быть дифференцируемыми в каком-либо более слабом смысле.

© Евхута О.Н., 2023

Однако при переходе к функциям в банаховых пространствах $f : \Omega (\subset X) \to Y$ ситуация меняется — хорошо известно, что здесь многие (встречающиеся в конкретных примерах функции), как правило, не дифференцируемы ни в каком из выше перечисленных смыслах.

Представляется естественным, пытаться дать «слабейшее из слабых» определение производной, чтобы эти формальные производные оказывались бы настоящими и чтобы эти производные обладали свойствами, которые бы позволяли их использовать в приложениях.

Одно из таких определений было предложено в [1, 2] и было названо NL-производные. В отличие от классических определений NL-производные в отдельных точках не определены (точно также как производные в теории обобщенных функций).

2. NL-производные и обобщенные производные

Понятие NL-производной близко понятию обобщенной производной Соболева–Шварца [3, 4]. Напомним определение производной Соболева–Шварца для случая, когда это определение приводит к обычной функции.

Пусть даны две определенные на (a, b) вещественные функции $f(x)$ и $g(x)$, причем первая из них непрерывна, а вторая — интегрируема по Курцвелю-Хенстоку. Функция $g(x)$ называется *обобщенной производной* функции $f(x)$, если для любой гладкой и финитной на (a, b) функции $\phi(x)$ выполняется равенство

$$\int_a^b g(x)\phi(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\phi'(x)\,dx. \tag{1}$$

Функция g является NL-производной непрерывной функции f когда она является обобщенной производной функции f.

Действительно, пусть функция $g(x)$ является NL-производной и $\phi(x)$ — гладкая и финитная на (a, b) функция. Тогда для $\alpha, \beta \in (a, b)$, для которых верно $\phi(\alpha) = \phi(\beta) = 0$, в силу теоремы об интегрировании по частям для интеграла Курцвейля–Хенстока [5, 6] имеем

$$\int_\alpha^\beta g(x)\phi(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta \left(\int_\alpha^x g(\xi)\,d\xi\right)\phi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\phi'(x)\,dx \tag{2}$$

и, тем самым, $g(x)$ является обобщенной производной $f(x)$. Формула интегрирования по частям здесь справедлива в силу того, что произведение интегрируемой в смысле Курцвейля–Хенстока функции на гладкую также интегрируемо [6] по Курцвейлю–Хенстоку.

3. Заключение

Отметим, что приведенное утверждение по существу означает, что в рассматриваемом скалярном случае понятие NL-производной совпадает с понятием производной Радона–Никодима (см., например, [7]).

Список источников

1. Евхута Н.А., Евхута О.Н., Забрейко П.П. Теоремы о гладкости нелинейных операторов и приближенные методы. // Доклады НАН Беларуси, 2013. Выпуск 57, № 5, С. 5–10.
2. Евхута Н.А., Евхута О.Н., Забрейко П.П. Свойства гладкости интегральных операторов Урысона и метод Ньютона-Канторовича. // Доклады НАН Беларуси, 2015. Выпуск 59, № 2, С. 23–28.
3. Евхута Н.А., Евхута О.Н. Производные Ньютона–Лейбница в банаховых пространствах. // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (4–5 декабря 2020 г., г. Орёл): научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией кандидата физико-математических наук, профессора Т.Н. Можаровой. — Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2020. С. 47–50.
4. Евхута Н.А., Евхута О.Н. NL-производные между функциями в банаховых пространствах. // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (18–21 ноября 2021 г., г. Орёл): научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией кандидата физико-математических наук, профессора Т.Н. Можаровой. — Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2021. С. 51–55.
5. Bartle R.G. A Modern Theory of Integration. (Graduate Studies in Mathematics, 32). American Mathematical Society: Providence, Rhode Island. 2001. 458 p.
6. Лукомский С.Ф. Интегральной исчисление (функции одной переменной). Издательство Саратовского университета. Саратов. 2005. 144 с.
7. Данфорд Н., Шварц Д.Т. Линейные операторы. Общая теория. // Москва. Издательство иностранной литературы, 1962. 896 с.

References

1. Evkhuta N.A., Evkhuta O.N., Zabreiko P.P. Smoothness theorems of nonlinear operators and approximate methods. // Reports of the National Academy of Sciences of Belarus, 2013. Issue 57, № 5, P. 5–10.
2. Evkhuta N.A., Evkhuta O.N., Zabreiko P.P. Smoothness properties of Uryson integral operators and the Newton-Kantorovich method. // Reports of the National Academy of Sciences of Belarus, 2015. Issue 59, № 2, P. 23–28.
3. Evkhuta N.A., Evkhuta O.N. Newton-Leibniz derivatives in Banach spaces. // Modern problems of physical and mathematical sciences. Materials of the VI All-Russian Scientific and Practical Conference with international participation (December 4-5, 2020, Orel): scientific electronic edition [Electronic resource] // under the general editorship of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor T.N. Mozharova. Orel. 2020. p. 47–50.
4. Evkhuta N.A., Evkhuta O.N. NL-derivatives between functions in Banach spaces. // Modern problems of physical and mathematical sciences. Materials of the VII All-Russian Scientific and Practical Conference with international participation (November 18-21, 2021, Orel): scientific electronic edition [Electronic resource] // under the general editorship of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor T.N. Mozharova. Orel. 2021. p. 51–55.
5. Bartle R.G. A Modern Theory of Integration. (Graduate Studies in Mathematics, 32). American Mathematical Society: Providence, Rhode Island. 2001. 458 p.
6. Lukomsky S.F. Integral calculus (functions of one variable). Saratov University Press. Saratov. 2005. 144 p.
7. Dunford N., Schwartz D.T. Linear operators. General theory. // Moscow. Publishing House of Foreign Literature, 1962. 896 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 48-54.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 48-54.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.928

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Наталья Николаевна Конечная[1]✉
[1] *Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, Архангельск, Россия*
[1]*n.konechnaya@narfu.ru*✉

Аннотация. *В работе получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений уравнения $l[y] = \lambda y$ при $x \to +\infty$, где выражение $l[y]$ является произведением линейных дифференциальных выражений, а λ - фиксированное комплексное число. При этом коэффициенты этих дифференциальных выражений имеют определенный степенной рост на бесконечности.*

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, асимптотика решений, квазипроизводные, квазидифференциальное выражение.*

Conference paper

ON ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS TO ONE CLASS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Natalia Konechnaya[1]✉
[1] *Northen (Arctic) State University, Arkhangelsk, Russia*
[1]*n.konechnaya@narfu.ru*✉

Abstract. *In this work asymptotic formulas are obtained for the fundamental system of solutions to the equation of the form $l[y] = \lambda y$ for $x \to +\infty$, where the expression $l[y]$ is a product of linear differential expressions, and λ is a fixed complex number. Moreover, the coefficients of these differential expressions have a certain power-law growth at infinity.*

Keywords: *differential equations, asymptotic behavior of solutions, quasi-derivatives, quasi-differential expression.*

© Конечная Н.Н., 2023

1. Введение

Пусть комплекснозначные функции $p(x), \sigma(x)$, определенные на $I := [1; +\infty)$, такие, что $p^{-1}, \sigma^2 p^{-1} \in L^1_{loc}(I)$, где $L^1_{loc}(I)$ – пространство локально суммируемых на I функций. Известно (см. [1], [2]), что эти условия позволяют посредством матрицы

$$F = \begin{pmatrix} \sigma p^{-1} & p^{-1} \\ -\sigma^2 p^{-1} & -\sigma p^{-1} \end{pmatrix}$$

определить квазипроизводную $y_F^{[1]}$ заданной функции $y \in AC_{loc}(I)$, полагая

$$y_F^{[1]} := py' - \sigma y,$$

и квазидифференциальное выражение, полагая

$$l_F[y] := -(y_F^{[1]})' - \sigma p^{-1} y_F^{[1]} - \sigma^2 p^{-1} y,$$

при условии, что $y_F^{[1]} \in AC_{loc}(I)$. Таким образом, выражение l_F имеет вид

$$l_F[y] = -(py' - \sigma y)' - \sigma p^{-1}(py' - \sigma y) - \sigma^2 p^{-1} y.$$

Область определения $D(l_F)$ выражения l_F есть множество всех функций y, таких что $y \in AC_{loc}(I)$ и $y_F^{[1]} \in AC_{loc}(I)$. При $y \in D(l_F)$ функция $l_F[y] \in L^1_{loc}(I)$.

В работе [3] показано, что выражение $l_F[y]$ можно привести к виду

$$l_F[y] = -(py')' + \sigma' y,$$

где производная от функции σ понимается в смысле теории распределений.

Пусть теперь функции $p_1, p_2, \ldots, p_n, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции p и σ, и пусть

$$F_i = \begin{pmatrix} \sigma_i p_i^{-1} & p_i^{-1} \\ -\sigma_i^2 p_i^{-1} & -\sigma_i p_i^{-1} \end{pmatrix}.$$

Обозначим символом $l_{F_i}[y]$ квазидифференциальное выражение второго порядка, построенное по матрице F_i ($i = 1, 2, ..., n$).

Следуя работе [2], определим произведение квазидифференциальных выражений. Рассмотрим матрицу

$$H = \begin{pmatrix} F_1 & M & O & O & ... & O \\ O & F_2 & M & O & ... & O \\ . & . & . & . & . & . \\ O & O & O & O & ... & M \\ O & O & O & O & ... & F_n \end{pmatrix},$$

где O – нулевая квадратная матрица второго порядка, а M – квадратная матрица того же порядка, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного 1.

Определим квазипроизводные $y_H^{[k]}$ $(k = 0, 1, ..., 2n-1)$ заданной функции y, полагая, что $y_H^{[j]}$ уже определены и $y_H^{[j]} \in AC_{loc}(I)$ при $j = 0, 1, \ldots, k-1$, а $y_H^{[0]} := y$. Получим, что

$$y_H^{[1]} := p_1(y_H^{[0]})' - \sigma_1 y_H^{[0]} = y_{F_1}^{[1]},$$

$$y_H^{[2]} := (y_H^{[1]})' + \sigma_1 p_1^{-1} y_H^{[1]} + \sigma_1^2 p_1^{-1} y_H^{[0]} = -l_{F_1}[y],$$

$$y_H^{[3]} := p_2(y_H^{[2]})' - \sigma_2 y_H^{[2]} = -(l_{F_1}[y])_{F_2}^{[1]},$$

$$y_H^{[4]} := (y_H^{[3]})' + \sigma_2 p_2^{-1} y_H^{[3]} + \sigma_2^2 p_2^{-1} y_H^{[2]} = -l_{F_2}[-l_{F_1}[y]] = l_{F_2}[l_{F_1}[y]],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_H^{[2n-1]} := p_n(y_H^{[2n-2]})' - \sigma_n y_H^{[2n-2]} =$$

$$= (-1)^{n-1}(l_{F_{n-1}}[\ldots[l_{F_2}[l_{F_1}[y]]]\ldots])_{F_n}^{[1]},$$

$$l_H[y] := (-1)^n((y_H^{[2n-1]})' + \sigma_n p_n^{-1} y_H^{[2n-1]} + \sigma_n^2 p_n^{-1} y_H^{[2n-2]})$$

Таким образом, для квазидифференциального выражения $l_H[y]$, порожденного матрицей H, справедливо равенство

$$l_H[y] = l_{F_n}[\ldots[l_{F_2}[l_{F_1}[y]]]\ldots],$$

причем

$$D(l_H) = \{y | y \in D(l_{F_1}), l_{F_1}[y] \in D(l_{F_2}), l_{F_2}[l_{F_1}[y]] \in D(l_{F_3}), ...,$$
$$..., l_{F_{n-1}}[\ldots[l_{F_2}[l_{F_1}[y]]]\ldots] \in D(l_{F_n})\}.$$

В настоящей работе найден главный член асимптотики при $x \to +\infty$ некоторой фундаментальной системы решений уравнения

$$l_H[y] = \lambda y, \tag{1}$$

где λ – фиксированный комплексный параметр.

2. Асимптотика решений на бесконечности

Сформулируем теперь основной результат. Обозначим через $o(1)$ бесконечно малую функцию при $x \to +\infty$.

Теорема.

Пусть существуют числа $\nu_i > 0$ такие, что функции p_i^{-1}, σ_i допускают представления

$$p_i = \frac{a_i x^{2+\nu_i}}{1 + r_i(x)},\ \sigma_i = x^{1+\nu_i}(b_i + s_i(x)),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $a_i \neq 0$, b_i – комплексные числа, r_i, s_i – комплекснозначные на I функции. Пусть при этом функции r_i и s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ таковы, что

$$\frac{(\ln x)^{m-1}}{x}(1 + |s_i(x)|)\,(|r_i(x)| + |s_i(x)| + |r_i(x)\,s_i(x)|) \in L^1(I), \quad (2)$$

где m — наибольшее из чисел, равных кратностям корней многочлена от переменной z

$$F_{2n}(z) = \prod_{i=1}^{n}\left((z - 1/2 + \sum_{s=0}^{i-1}\nu_s)(z + 1/2 + \sum_{s=1}^{i}\nu_s) - b_i a_i^{-1}(1 + \nu_i)\right).$$

Пусть z_1 — корень многочлена $\mathcal{F}_{2n}(z)$ кратности l_1. Тогда уравнение (1) имеет подсистему фундаментальных решений $\{y_j\}_{j=1}^{l_1}$ вида

$$y_j(x) = x^{z_1 - 1/2}\,(\ln\, x)^{j-1}\,(c + o(1)), \quad (3)$$

где $c \neq 0$.

Такую же асимптотику имеет и другая подсистема фундаментальных решений $\{y_j\},\ j = l_1 + 1, \ldots l_1 + l_2$, отвечающая корню z_2 многочлена $\mathcal{F}_{2n}(z)$ кратности l_2 и т.д.

Доказательство.

Уравнение (1) равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbf{y}' = (H + \Lambda)\mathbf{y}, \quad (4)$$

где $\mathbf{y} := (y_H^{[0]}, y_H^{[1]}, y_H^{[2]}, \ldots, y_H^{[2n-1]})^T$ (T – символ транспонирования), а Λ – квадратная матрица порядка $2n$, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного $(-1)^n\lambda$. Равносильность понимается в том смысле, что если функция y является решением уравнения (1), то вектор-функция $\mathbf{y} = (y_H^{[0]}, y_H^{[1]}, y_H^{[2]}, \ldots, y_H^{[2n-1]})^T$ является решением системы (4), и наоборот, если вектор-функция $\mathbf{y}$ – решение этой системы, то функция $y = y_H^{[0]}$ – решение уравнения (1).

Положив $\nu_0 = 0$, определим элементы d_i диагональной матрицы $D = dg(d_1, d_2, \ldots, d_{2n})$ формулами

$$d_{2k-1} = \exp\{(\sum_{s=0}^{k-1}\nu_s - 1/2)\ln x\}, d_{2k} = \exp\{(\sum_{s=1}^{k}\nu_s + 1/2)\ln x\},$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$. В системе (4) сделаем замену $\mathbf{y} = DY$, где Y – новая неизвестная $2n$-компонентная вектор-функция, и перепишем ее в виде

$$xY' = (A + B(x))Y, \quad (5)$$

где числовая матрица A и матрица-функция $B(x)$ определяются равенствами

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & M & O & O & \dots & O \\ O & A_2 & M & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & M \\ O & O & O & O & \dots & A_n \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} B_1 & O & O & \dots & O & O \\ O & B_2 & O & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & B_{n-1} & O \\ N & O & O & \dots & O & B_n \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы A_i и B_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ имеют вид

$$A_i = \begin{pmatrix} b_i a_i^{-1} - \sum\limits_{s=0}^{i-1} \nu_s + 1/2 & a_i^{-1} \\ -b_i^2 a_i^{-1} & -b_i a_i^{-1} - \sum\limits_{s=1}^{i} \nu_s - 1/2 \end{pmatrix},$$

$$B_i = \begin{pmatrix} a_i^{-1}(s_i + b_i r_i + r_i s_i) & r_i \\ a_i^{-1}(r_i(b_i + s_i)^2 + (2b_i + s_i)s_i) & -a_i^{-1}(s_i + b_i r_i + r_i s_i) \end{pmatrix},$$

N - матрица второго порядка, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного $\frac{(-1)^n \lambda}{x^{\nu_1 + \dots + \nu_n}}$, а матрица M была определена выше.

Сделав замену $x = e^t$ в системе (5), получим систему уравнений вида

$$Z'(t) = (A + R(t))Z(t), \tag{6}$$

где $Z(t) = Y(e^t)$, $R(t) = B(e^t)$. Вычисления показывают, что характеристический многочлен матрицы A совпадает с многочленом $F_{2n}(z)$.

Структура матрицы A такова, что собственный вектор матрицы, соответствующий какому-либо собственному значению (т.е. корню многочлена $F_{2n}(z)$), однозначно определяется заданием своей первой координаты, которая должна быть отлична от нуля. Таким образом, каждому собственному значению матрицы A соответствует только один собственный вектор, т.е. геометрическая кратность любого собственного значения матрицы A равна единице. Иными словами, каждому собственному значению матрицы A соответствует только одна жорданова клетка в её канонической форме. Поэтому максимум размерности жордановых клеток в канонической форме матрицы A совпадает с наибольшей алгебраической кратностью собственного значения этой матрицы.

Если матрица A имеет простое собственное число z_1, то система уравнений $Z'(t) = AZ(t)$ имеет решение $e^{z_1 t}C$, где C – собственный вектор, соответствующий z_1. Из приведенных выше равенств для элементов матрицы $B(x)$ и условия (2) при $m = 1$ следует, что все элементы матрицы $R(t)$ принадлежат пространству $L^1(I)$. Применяя

далее утверждение теоремы 1.8.1 из книги [4], получаем, что система (6) имеет решение $Z(t)$, представимое при $t \to +\infty$ в виде

$$Z(t) = e^{z_1 t}(C + o(1)).$$

Остается заметить, что решения $\mathbf{y}$ и $Z(t)$ связаны равенством

$$\mathbf{y} = DZ(\ln x).$$

Следовательно, уравнение (1) имеет решение y, представимое при $x \to +\infty$ в виде

$$y(x) = x^{z_1 - 1/2}(c + o(1)),$$

$c \neq 0$ – первая координата собственного вектора C матрицы A.

Пусть теперь z_1 – собственное число матрицы A кратности l_1, $2 \leq l_1 \leq m$. Этому числу с точностью до постоянного множителя соответствует только один собственный вектор C. Тогда система уравнений $Z'(t) = AZ(t)$ имеет решения, представимые в виде

$$e^{z_1 t}C \quad \text{и} \quad e^{z_1 t}t^l C + O(e^{z_1 t}t^{l-1}), \quad l = 1, 2, \ldots, l_1 - 1.$$

Из приведенных выше равенств для элементов матрицы $B(x)$ и условия (2) теперь следует, что все элементы матрицы $t^{m-1}R(t)$ принадлежат пространству $L^1(I)$. Применив далее теорему 1.10.1 из книги [4], легко показать, что уравнение (1) имеет подсистему фундаментальных решений $\{y_j\}_{j=1}^{l_1}$, представимых при $x \to +\infty$ в виде (3). Теорема доказана.

Замечание.

Изложенное выше доказательство теоремы позволяет получить главный член асимптотики не только решений y уравнения (1), но и некоторых их квазипроизводных $y^{[j]}$. Для этого компонента с номером $j + 1$ соответствующего собственного вектора должна быть отлична от нуля.

3. Заключение

В результате исследования найден главный член асимптотики на бесконечности некоторой фундаментальной системы решений уравнения (1), где выражение $l_H[y]$ является произведением линейных дифференциальных выражений второго порядка. При этом коэффициенты этих дифференциальных выражений второго порядка имеют определенный степенной рост на бесконечности.

Отметим, что в работе [5] обсуждается метод, позволяющий получить асимптотические формулы для решений уравнений вида (1) в случае, когда выражение $l_H[y]$ представляется как произведение двух квазидифференциальных выражений произвольного порядка.

Список источников

1. Everitt W. N.,Marcus L. Boundary value problems and sympletic algebra for ordinary differential and quasi-differentrial operators // Mathematical Surveys and Monographs. 1999. Vol. 61.
2. Everitt W.N. Linear ordinary quasi-differential expressions. Lecture notes for the Fourth International Symposium on Differential equations and Differential Geometry, Beijing, Peoples Republic of China Department of Mathematics, University of Peking. 1986. P. 1-28.
3. Мирзоев К.А., Шкаликов А.А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Математические заметки. 2016. Vol. 99, № 5. С. 788–793.
4. Eastham M. S. P. The Asymptotic solution of linear differential systems / Oxford: Clarendon Press, 1989.
5. Мирзоев К.А., Конечная Н.Н. Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами // Математические заметки. 2016. т.100, №2. С. 312—317.

References

1. Everitt W. N.,Marcus L. Boundary value problems and sympletic algebra for ordinary differential and quasi-differentrial operators // Mathematical Surveys and Monographs. 1999. Vol. 61.
2. Everitt W.N. Linear ordinary quasi-differential expressions. Lecture notes for the Fourth International Symposium on Differential equations and Differential Geometry, Beijing, Peoples Republic of China Department of Mathematics, University of Peking. 1986. P. 1-28.
3. Mirzoev K. A., Shkalikov A. A. Differential operators of even order with distribution coefficients" // Math. Notes. 2016. Vol. 99, no.5. P. 779–784.
4. Eastham M. S. P. The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems / Oxford: Clarendon Press, 1989.
5. Mirzoev K. A., Konechnaya N. N. Asymptotics of solutions of a class of linear differential equations with nonsmooth coefficients // Math. Notes. 2016. Vol. 100, no.2. P. 312–317.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 55-62.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 55-62.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.95

ПЕРВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА В КРИВОЛИНЕЙНОМ КВАДРАНТЕ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Виктор Иванович Корзюк[1], Ян Вячеславович Рудько[2]✉
[1,2]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[1]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
[1]korzyuk@bsu.by
[2]janycz@yahoo.com✉, https://orcid.org/0000-0002-1482-9106

Аннотация. *Для полулинейного волнового уравнения, заданного в криволинейном квадранте, рассматривается смешанная задача, в которой на пространственной полуоси задаются условия Коши, а на нехарактеристической кривой задаётся условие Дирихле. Для рассматриваемой задачи сформулированы теоремы существования и единственности классического решения.*

Ключевые слова: *классическое решение, смешанная задача, нелинейное волновое уравнение, полулинейное волновое уравнение, условия согласования.*

Финансирование: *работа опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.*

Conference paper

THE FIRST MIXED PROBLEM FOR A SEMILINEAR WAVE EQUATION IN A CURVILINEAR QUADRANT

Viktor I. Korzyuk[1], Jan V. Rudzko[2]✉
[1,2]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[1]Belarusian State University, Minsk, Belarus
[1]korzyuk@bsu.by,
[2]janycz@yahoo.com✉, https://orcid.org/0000-0002-1482-9106

Abstract. *For a semilinear wave equation given in a curvilinear quadrant, we consider a mixed problem in which the Cauchy conditions are specified on the spatial*

© Корзюк В.И., Рудько Я.В., 2023

half-line and the Dirichlet condition is specified on the time half-line. For the problem under consideration, the existence and uniqueness theorems for a classical solution are stated.

Keywords: *classical solution, mixed problem, nonlinear wave equation, semilinear wave equation, matching conditions.*

Funding: *this work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of implementing the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics by Agreement no. 075-15-2022-284.*

1. Постановка задачи

Рассмотрим первую смешанную задачу для уравнения

$$(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)u(t,x) - f\big(t,x,u(t,x)\big) = F(t,x), \tag{1}$$

в криволинейной области $Q = \{(t,x) : t \in (0,\infty) \wedge x \in (\gamma(t),\infty)\}$ двух независимых переменных $(t,x) \in Q \subset \mathbb{R}^2$.

Область Q, в которой ставится задача, ограничена следующими кривыми: $t = 0$ – нижняя граница области Q; $x = \gamma(t)$ – боковая граница. Полагаем, что функция γ, определяющая боковою границу области Q, удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}\gamma(0) = 0, \gamma \in C^1\big([0,\infty)\big), \gamma'(t) \in (-a,a), t \in [0,\infty),\\ \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) + at = +\infty, \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) - at = -\infty.\end{gathered} \tag{2}$$

К уравнению (1) присоединяются начальные

$$u(0,x) = \phi(x), \partial_t u(0,x) = \psi(x), x \in [0,\infty) \tag{3}$$

и граничное

$$u\big(t,\gamma(t)\big) = \mu(t), t \in [0,\infty) \tag{4}$$

условия.

Ранее в работе [13] была изучена задача (1), (3) и (4) в случае безразмерного волнового уравнения ($a = 1$ и $f \equiv 0$) в классе затухающих кусочно-гладких функций. В работе [14] было формально построено кусочно-заданное решение задачи (1), (3) и (4) в случае уравнения Клейна–Гордона–Фока, а именно: $a = 1$ и $f(t,x,u) = -u$.

В статье [2] изучалась первая смешанная задача для волнового уравнения в криволинейной полуполосе, откуда, в силу конечной скорости распространения, могут быть получены результаты о существовании и единственности классических решений задачи (1), (3) и (4) в случае $f \equiv 0$. В работе [3] также была изучена первая смешанная задача в криволинейной полуполосе для более общего линейного уравнения Клейна–Гордона–Фока с первыми производными и с переменными коэффициентами

$$\begin{gathered}\partial_t^2 u(t,x) - a^2(t,x)\partial_x^2 u(t,x) +\\ + a^{(1)}(t,x)\partial_t u(t,x) + a^{(2)}(t,x)\partial_x u(t,x) + a^{(0)}(t,x)u(t,x) = F(t,x),\end{gathered}$$

где коэффициент $a(t,x)$ не обращается в нуль ни в одной точке. Поэтому, опять же, в силу конечной скорости распространения, в линейном случае $f(t,x,u) = a^{(0)}(t,x)u$ задача (1), (3) и (4) была изучена в работе [3]. Однако там предполагалась ортогональность кривых $t = 0$ и $x = \gamma(t)$ в их точке пересечения

(0,0), т. е. налагалось дополнительное условие $\gamma'(0) = 0$. Мы же будем исследовать в настоящем докладе задачу (1), (3) и (4) без этого предположения.

2. Интегральное уравнение

Область Q характеристикой $x = at$ разделим на две подобласти $Q^{(k)} = \{(t,x) : (-1)^k(at - x) > 0 \wedge (t,x) \in Q\}$, $k = 1,2$. Введем функции $u^{(k)}$, $k = 1,2$ как решения задачи (1), (3), (4) на замыкании $\overline{Q^{(k)}}$ области $Q^{(k)}$. Обозначим

$$u(t,x) = u^{(k)}(t,x),\ (t,x) \in \overline{Q^{(k)}},\ k = 1,2. \tag{5}$$

С помощью правила характеристического параллелограмма [6] и результата работ [4, 5, 15] устанавливается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $\phi \in C^2\big([0,\infty)\big)$, $\psi \in C^1\big([0,\infty)\big)$, $\mu \in C^2\big([0,\infty)\big)$, $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\bar{Q})$ *и* $\gamma \in C^2\big([0,\infty)\big)$. *Функция и принадлежит классу* $C^2(\bar{Q})$ *и удовлетворяет уравнению (1), условиям Коши (3) и условию Дирихле (4) тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнений*

$$u^{(1)}(t,x) = \frac{\phi(x-at) + \phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \Big[F(\tau,\xi) + f\Big(\tau,\xi,u^{(1)}(\tau,\xi)\Big)\Big]d\xi,\ \ (t,x) \in \overline{Q^{(1)}}. \tag{6}$$

$$u^{(2)}(t,x) = \mu\big(\Phi(x-at)\big) + u^{(1)}\left(\frac{x+at}{2a}, \frac{x+at}{2}\right) -$$

$$- u^{(1)}\left(\frac{\gamma\big(\Phi(x-at)\big) + a\Phi(x-at)}{2a}, \frac{\gamma\big(\Phi(x-at)\big) + a\Phi(x-at)}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{\gamma(\Phi(x-at))+a\Phi(x-at)}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dz, \qquad (t,x) \in \overline{Q^{(2)}}. \tag{7}$$

и выполняются условия согласования

$$\mu(0) - \phi(0) = 0, \tag{8}$$

$$\mu'(0) - \gamma'(0)\phi'(0) - \psi(0) = 0, \tag{9}$$

$$\mu''(0) - \Big(a^2 + \big(\gamma'(0)\big)^2\Big)\phi''(0) - f\big(0,0,\phi(0)\big) - F(0,0) - 2\gamma'(0)\psi'(0) - \gamma''(0)\phi'(0) = 0. \tag{10}$$

В формуле (7) символом Φ обозначена функция, обратная к функции $\gamma_-: (-\infty, 0] \ni t \mapsto \gamma(t) - at$, т. е. $\Phi(\gamma(t) - at) = t$. Существование, единственность и гладкость Φ при условиях (2) легко доказывается исходя из простейших соображений математического анализа.

С помощью метода последовательных приближений [4, 5] и многомерной леммы Гронуолла [7] устанавливается следующая теорема о разрешимости интегральных уравнений (6) и (7).

Теорема 2. *Пусть* $\phi \in C([0,\infty))$, $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$, $\mu \in C([0,\infty))$, $f \in C(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in L_1^{\mathrm{loc}}(\bar{Q})$, $\gamma \in C^1([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица по третьей переменной, т. е. существует функция* $k \in L^2_{\mathrm{loc}}(Q)$ *такая, что* $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \le k(t,x)|z_1 - z_2|$. *Тогда решения уравнений (6) и (7) существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.*

3. Классическое решение

Фактически, теоремы 1 и 2 гарантируют существование и единственность классического решения задачи (1), (3) и (4).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $\phi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$, $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\bar{Q})$, $\gamma \in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица по третьей переменной, т. е. существует функция* $k \in L^2_{\mathrm{loc}}(Q)$ *такая, что* $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \le k(t,x)|z_1 - z_2|$. *Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение* u *, определенное формулами (5) – (7) из класса* $C^2(\bar{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (8) – (10).*

4. Неоднородные условия согласования

Теперь, подобно тому как это было сделано в работах [1, 3 – 5, 9 – 12], рассмотрим теперь задачу (1), (3) и (4) в случае, когда условия согласования (8) – (10) частично или полностью не выполняются.

Согласно теореме 1, присутствие неоднородных условий согласования нарушает непрерывность функции u или ее производных, или всего вместе. Данное заключение можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. *Если для заданных функций* μ, ϕ, ψ, γ, f, F *не выполняются однородные условия согласования (8) – (10), то какими бы гладкими функции* μ, ϕ, ψ, γ, f *и* F *не были, задача (1), (3) и (4) не имеет классического решения, определенного на* $\bar{Q}$.

Пусть заданные функции уравнения (1), краевых условий (3), (4) являются достаточно гладкими и такими, как в теореме 3: $\phi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$, $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\bar{Q})$ и $\gamma \in C^2([0,\infty))$. Так как условия согласования (8) – (10) частично, вообще говоря, не выполнены, то получим разрывными производные функции u согласно следующим выражениям

$$
\begin{gathered}
[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = \phi(0) - \mu(0), \\
[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, x = at) = \frac{a\left(\gamma'(0)\phi'(0) - \mu'(0) + \psi(0)\right)}{a - \gamma'(0)} + \\
+ \frac{1}{4a}\int_0^{2at} \left(f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right) dz = \\
= -a[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-](t, x = at).
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Здесь было использовано обозначение $(\cdot)^{\pm}$ – предельные значения функции u и её частных производных с разных сторон на характеристике $x = at$, т. е.

$$
\left(\partial_t^p u\right)^{\pm}(t, x = at) = \lim_{\delta \to 0+} \partial_t^p u(t, at \pm \delta).
$$

Обозначим $\tilde{Q} = \bar{Q} \setminus \{(t,x) : x = at\}$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* $\phi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$, $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\bar{Q})$, $\gamma \in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица по третьей переменной, т. е. существует функция* $k \in L^2_{\text{loc}}(Q)$ *такая, что* $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leq k(t,x)|z_1 - z_2|$. *Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение* u, *определенное формулами (5) – (7) из класса* $C^2(\tilde{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (11).*

Доказательство теоремы 4 следует из предыдущих рассуждений.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* $\phi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$, $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\bar{Q})$, $\gamma \in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица по третьей переменной, т. е. существует функция* $k \in L^2_{\text{loc}}(Q)$ *такая, что* $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leq k(t,x)|z_1 - z_2|$. *Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение* u, *определенное формулами (5) – (7) из класса* $C^2(\tilde{Q}) \cap C(\bar{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (8) и (11).*

Доказательство следует из теорем 1 – 3 и рассуждений выше. Действительно, если $\phi(0) = \mu(0)$, то решение u на множестве $\{(t,x) : x = at\}$ является непрерывным в силу (11). Следовательно, кроме того, что решение $u \in C^2(\tilde{Q})$, оно является непрерывнй функцией на замыкании $\bar{Q}$, $u \in C^2(\bar{Q})$

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* $\phi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$, $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\bar{Q})$, $\gamma \in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица по третьей переменной, т. е. существует функция* $k \in L^2_{\text{loc}}(Q)$ *такая, что* $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leq k(t,x)|z_1 - z_2|$. *Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение* u, *определенное формулами (5) – (7) из класса* $C^2(\tilde{Q}) \cap C^1(\bar{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (8), (9) и (11).*

Доказательство легко следует из теорем 1 – 5 и формул (11) так как в этом случае u является непрерывной на $\{(t,x) : x = at\}$, но в силу (8), (9) и (11) имеет непрерывные производные первого порядка.

Замечание 1. *Если заданные функции задачи (1), (3) и (4) не удовлетворяют однородным условиям согласования (8) – (10), то решение задачи (1), (3) и (4) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристике* $x = at$.

В качестве условий сопряжения могут быть условия (11). Теперь задачу (1), (3) и (4) можно сформулировать, используя условия сопряжения (11) следующим образом.

Задача (1), (3) и (4) с условиями сопряжения на характеристиках. *Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (3), граничным условиям (4), условиям сопряжения (11).*

Заметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для ее численной реализации.

5. Заключение

В докладе были сформулированы достаточные условия, при выполнении которых существует единственное классическое решение первой смешанной задачи в четверти плоскости для полулинейного волнового уравнения.

Список источников

1. Корзюк В. И., Рудько Я. В. Классическое решение первой смешанной задачи в криволинейном квадранте для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 8, С. 1070–1083.

2. Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н. Классическое решение в криволинейной полуполосе первой смешанной задачи для волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 1, С. 99–109.

3. Корзюк В. И., Столярчук И. И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 1, С. 77–88.

4. Корзюк В. И., Рудько Я. В. Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 2, С. 174–184.

5. Корзюк В. И., Рудько Я. В. Классическое и слабое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 43. С. 48–63.

6. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Curvilinear parallelogram identity and mean-value property for a semilinear hyperbolic equation of second-order // arXiv:2204.09408.

7. Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Dordrecht: Springer, 1991.

8. Bitsadze A. V. Equations of Mathematical Physics / A. V. Bitsadze. – Moscow: Mir, 1980.

9. Моисеев Е. И., Корзюк В. И., Козловская И. С. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1373–1385.

10. Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. 2015. № 1. С. 7–21.

11. Корзюк В. И., Наумовец С. Н., Сериков В. П. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями сопряжения и производными второго порядка в граничных условиях // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. 2020. № 3. С. 287–297.

12. Корзюк В. И., Столярчук И. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с неоднородными условиями согласования // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2019. Т. 63. № 1. С. 7–13.

13. Pelloni B., Pinotsis D. A. Moving Boundary Value Problems for the Wave Equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. V. 234. № 6. P. 1685–1691.

14. Pelloni B., Pinotsis D. A. The Klein–Gordon Equation in a Domain with Time-Dependent Boundary // Studies in Applied Mathematics. 2008. V. 121. № 3. P. 291–312.

15. Корзюк В. И., Рудько Я. В. Классическое решение задачи Коши для одномерного квазилинейного волнового уравнения // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2023. Т. 67. № 1. С. 14–19.

References

1. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential in a Curvilinear Quadrant. Differential Equations. 2023;59(8):1075–1089.

2. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumavets S. N., Classical Solution of the First Mixed Problem for the Wave Equation in a Curvilinear Half-Strip, Differential Equations. 2020;56(1):98–108.

3. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I., Classical Solution of the First Mixed Problem for Second-Order Hyperbolic Equation in Curvilinear Half-Strip with Variable Coefficients, Differential Equations. 2017;53(1):74–85.

4. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential. Differential Equations. 2022;58(2):175–186.

5. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical and Mild Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2023; 43: 48–63.

6. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Curvilinear parallelogram identity and mean-value property for a semilinear hyperbolic equation of second-order. arXiv:2204.09408.

7. Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Dordrecht, Springer, 1991.

8. Bitsadze A. V. Equations of Mathematical Physics. Moscow, Mir, 1980.

9. Moiseev E. I., Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. Classical Solution of a Problem with an Integral Condition for the One-Dimensional Wave Equation. Differential Equations. 2014;50(10):1364–1377.

10. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumovets S. N. Classical Solution of the First Mixed Problem of the One-Dimensional Wave Equation with Cauchy Type Conditions // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. 2015;(1):7–21. (In Russ.).

11. Korzyuk V. I., Naumovets S. N., Serikov V. P. A Mixed Problem for a One-Dimensional Wave Equation with Transmission Conditions and Second Derivatives in the Boundary Conditions. Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. 2020;(3):287–297. (In Russ.).

12. Korzyuk V. I., Stolyarchuk, I. I. Classical Solution of the First Mixed Problem for a Klein–Gordon–Fock Type Equation with Inhomogeneous Matching Conditions. Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. 2019;63(1):7–13. (In Russ.).

13. Pelloni B., Pinotsis D. A. Moving Boundary Value Problems for the Wave Equation. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010;234(6):1685–1691.

14. Pelloni B., Pinotsis D. A. The Klein–Gordon Equation in a Domain with Time-Dependent Boundary. Studies in Applied Mathematics. 2008:121(3):291–312.

15. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical Solution of the Initial-Value Problem for a One-Dimensional Quasilinear Wave Equation. Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. 2023;67(1):14–19.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 63-67.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences.2023. 63-67.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.98

О СВОЙСТВАХ ИНТЕРПОЛИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Татьяна Николаевна Можарова[1]✉, Александр Васильевич Когут[2]
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]tatjana.mozharova@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-1352-5343
[2]as7876903@gmail.com

Аннотация. *В работе продолжено исследование интерполирующей функции, порожденной целой векторнозначной функцией $\varphi(t)$ и линейным неограниченным оператором A.*

Ключевые слова: *линейный неограниченный оператор, целая векторнозначная функция, порядок роста и тип целой векторнозначной функции.*

Conference paper

ABOUT THE PROPERTIES OF THE INTERPOLATING FUNCTION

Tatiana N. Mozharova[1]✉, Alexander V. Kogut[2]
[1, 2]Orel State University, Orel, Russia
[1]tatjana.mozharova@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-1352-5343
[2]as7876903@gmail.com

Abstract. *The work continues the study of the interpolating function generated by the entire vector-valued function $\varphi(t)$ and the linear unbounded operator A.*

Keywords: *linear unbounded operator, entire vector-valued function, order of growth and type of entire vector-valued function.*

1. Введение

Пусть H – полная нормированная алгебра над полем комплексных чисел и A: $D(A) \to H$, $D(A) \subset H$, – замкнутый линейный неограниченный оператор, причем $D(A)$ – инвариантно относительно оператора A. Пусть функция

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k \,,\ \{x_k\} \subset H, - \qquad (1)$$

целая векторнозначная со значениями в H.

Рассмотрим выражение

© Можарова Т.Н., Когут А.В., 2023

$$\varphi(A)(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} x_k A^k(x),\ x \in D(A). \tag{2}$$

Функцию $\varphi(t)$ назовём характеристической функцией выражения (2).

В работе [2] построена часть пространства H, на которой выражение (2) определяет линейный непрерывный оператор. Для этого рассмотрено множество векторов, на которых выполняется условие:

$$\left\|A^k(x)\right\| \le C(x,a)(ak)^{\beta k};\ \forall k; \tag{3}$$

где $\beta, a > 0$ – фиксированные. В пространстве

$$H^{\beta}_{\alpha+\varepsilon_p} = \left\{x \in D(A) : \left\|A^k(x)\right\| \le C(x,p)\left[\left(\alpha+\varepsilon_p\right)k\right]^{\beta k};\quad \forall k\right\} \tag{4}$$

где $\varepsilon_p > 0$, введена норма

$$\|x\|_p = \sup_k \left\{ \frac{\left\|A^k(x)\right\|}{\left[\left(\alpha+\varepsilon_p\right)k\right]^{\beta k}} \right\} < \infty, \qquad \forall x \in H^{\beta}_{\alpha+\varepsilon_p}. \tag{5}$$

При $\varepsilon_p \searrow 0,\ p \to \infty$, нормированные пространства $H^{\beta}_{\alpha+\varepsilon_p}$ непрерывно вложены друг в друга: $H^{\beta}_{\alpha+\varepsilon_1} \supset H^{\beta}_{\alpha+\varepsilon_2} \supset ..., p = 1,2,....$ Пространство H^{β}_{α} с топологией проективного предела нормированных пространств $H^{\beta}_{\alpha+\varepsilon_p}$ с нормами (5) является полным локально-выпуклым пространством.

Ранее было доказано [2], что в указанных условиях каждая целая векторнозначная функция (1), порядок роста которой $\rho \le \frac{1}{\beta}$, а при $\rho = \frac{1}{\beta}$ тип $\sigma < \frac{\beta}{\alpha e}$, определяет на H^{β}_{α} линейный непрерывный оператор $\varphi(A)$ вида (2), переводящий это пространство в H (здесь $\alpha > 0, \beta > 0$ - фиксированные числа).

2. Основной текст статьи

Рассмотрим оператор A, обладающий целой собственной вектор – функцией $f(\lambda)$:

$$Af(\lambda) = \lambda f(\lambda);\ l_0\{f(\lambda)\} = 1;\ \forall \lambda \in C; l_0 \in H^*.$$

Предполагаем, что $f(\lambda)$ имеет порядок роста $\rho \ne 0, \infty$ и тип σ. Представим функцию $f(\lambda)$ в виде степенного ряда:

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \lambda^n;\ \ x_n \in H; \forall \lambda \in C, \tag{6}$$

причем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{\|x_n\|} = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{7}$$

Векторы $f(\lambda_j) \in H^{\beta}_{\alpha}, \forall \beta > 0, \alpha > 0.$ Здесь $\{\lambda_j\}$, $j = 1,2,...,$ - нули функции $\varphi(t)$. Доказано [1], что если $\{\lambda_j\}$, – нули $\varphi(t)$ соответственно кратности

m_j, $j=1,2,..$, то векторы $f^{(k)}(\lambda_j)\in H_\alpha^\beta$, k = 0,1,…, m_j-1, образуют систему частных (простейших или элементарных) решений уравнения

$$\varphi(A)(x)=\mathbf{0}. \tag{8}$$

Пусть функция

$$\psi_\varphi(\lambda;t)=\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(t)}{\lambda-t}, \tag{9}$$

где $\varphi\in\left[\frac{1}{\beta};\frac{\beta}{\alpha e}\right)$; а t – фиксированный комплексный параметр. Следовательно, $\psi_\varphi(\lambda;t)$, как функция λ, – целая, причем $\psi_\varphi(\lambda;t)\in\left[\frac{1}{\beta};\frac{\beta}{\alpha e}\right)$.

Такая функция при фиксированном t определяет на $H_\alpha^\beta\subset H$ линейный непрерывный оператор $\psi_\varphi[A;t_0]$, $t_0\in\mathbf{C}$, который запишем в следующем виде:

$$\psi_\varphi[A;t_0](x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left[A^{n-1}(x)+t_0A^{n-2}(x)+\ldots+t_0^{n-1}x\right]. \tag{10}$$

Можно показать, что ряд (10) абсолютно сходится по норме в H $\forall x\in H_\alpha^\beta$.

Функцию $\psi_\varphi[A;t](x)$ принято называть интерполирующей функцией, порождённой функцией $\varphi(t)$ и оператором A [1]. Рассмотрим её основные свойства.

1°. Если $x_0\in H_\alpha^\beta$, то $\psi_\varphi[A;t](x_0)$ – целая векторнозначная функция со значениями в H.

2°. Пусть φ_1, φ_2, $\varphi_1\cdot\varphi_2\in\left[\frac{1}{\beta};\frac{\beta}{\alpha e}\right)$. Тогда

$$\psi_{\varphi_1\varphi_2}[A;t]=\varphi_1(t)\,\psi_{\varphi_2}[A;t]+\psi_{\varphi_1}[A;t]\,\varphi_2(A).$$

Доказательство.

Имеем:

$$\frac{\varphi_1(\lambda)\cdot\varphi_2(\lambda)-\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)}{\lambda-t}=\frac{\varphi_1(\lambda)\cdot\varphi_2(\lambda)-\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)+\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(\lambda)-\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(\lambda)}{\lambda-t}=$$

$$=\varphi_1(t)\cdot\frac{\varphi_2(\lambda)-\varphi_2(t)}{\lambda-t}+\frac{\varphi_1(\lambda)-\varphi_1(t)}{\lambda-t}\cdot\varphi_2(\lambda).$$

Тогда по определению интерполирующей функции получаем:

$$\psi_{\varphi_1\varphi_2}[A;t]=\varphi_1(t)\,\psi_{\varphi_2}[A;t]+\psi_{\varphi_1}[A;t]\cdot\varphi_2(A).$$

3°. Пусть $\varphi_2(A)(x)=\mathbf{0}$. Тогда для φ_1, φ_2, $\varphi_1\cdot\varphi_2\in\left[\frac{1}{\beta};\frac{\beta}{\alpha e}\right)$.

$$\frac{\psi_{\varphi_2}[A;t](x)}{\varphi_2(t)}=\frac{\psi_{\varphi_1\varphi_2}[A;t](x)}{\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)}.$$

Свойство 3° непосредственно следует из свойства 2°.

4°. Пусть λ_0 – нуль кратности m функции $\varphi(t)$, $\varphi_k(t) = \dfrac{\varphi(t)}{(t-\lambda_0)^k}$. Тогда

$$\psi_\varphi^{(k)}[A;\lambda_0](x) = k!\psi_{\varphi_k}[A;\lambda_0](x),\ k = 1, 2, \ldots,\ m, \quad \forall x \in H_\alpha^\beta.$$

Доказательство.

При $k = 1$ $\varphi(t) = (t-\lambda_0)\,\varphi_1(t)$. По свойству 2°:

$$\psi_\varphi[A;t](x) = (t-\lambda_0)\psi_{\varphi_1}[A;t](x) + \varphi_1(A)(x),\ \text{т.к.}$$

$$\psi_{t-\lambda_0}[A;t] = \frac{(A-\lambda_0 E)-(t-\lambda_0)E}{A-tE} = 1.$$

При фиксированном x функция $\psi_\varphi[A;\,t](x)$ – голоморфная, поэтому:

$$\psi_\varphi^{(k)}[A;t](x) = k\,\psi_{\varphi_1}^{(k-1)}[A;t](x) + (t-\lambda_0)\psi_{\varphi_1}^{(k)}[A;t](x).$$

При $t = \lambda_0$

$$\psi_\varphi^{(k)}[A;\lambda_0](x) = k\,\psi_{\varphi_1}^{(k-1)}[A;\lambda_0](x) = k(k-1)\psi_{\varphi_2}^{(k-2)}[A;\lambda_0](x) =$$

$$= \ldots = k(k-1)(k-2)\ldots 1\cdot\psi_{\varphi_k}[A;\lambda_0](x) = k!\psi_{\varphi_k}[A;\lambda_0](x).$$

5°. Пусть $\psi_\varphi^{(k)}[A;\lambda_0](x) = 0,\ k = \overline{0,n},\ \ n \le m-1$, λ_0 – нуль кратности m функции $\varphi(t)$. Тогда x удовлетворяет уравнению $\varphi_{n+1}(A)(x) = \mathbf{0}$ и

$$\frac{\psi_\varphi[A;t](x)}{\varphi(t)} = \frac{\psi_{\varphi_1}[A;t](x)}{\varphi_1(t)} = \ldots = \frac{\psi_{\varphi_{n+1}}[A;t](x)}{\varphi_{n+1}(t)}.$$

Доказательство.

Из свойства 2° имеем $\psi_\varphi[A;t](x) = (t-\lambda_0)\psi_{\varphi_1}[A;t](x) + \varphi_1(A)(x)$.

В рассматриваемых условиях при $t = \lambda_0$ $\varphi_1(A)(x) = \mathbf{0}$ и

$$\frac{\psi_\varphi[A;t](x)}{\varphi(t)} = \frac{\psi_{\varphi_1}[A;t](x)}{\varphi_1(t)},\ \ \text{т.к.}\ \ \varphi_1(t) = \frac{\varphi(t)}{t-\lambda_0}.$$

Аналогично из свойства 2° получаем:

$$\psi_{\varphi_1}[A;t](x) = (t-\lambda_0)\psi_{\varphi_2}[A;t](x) + \varphi_2(A)(x).$$

Т.к. $\psi'_\varphi[A;\lambda_0](x) = \psi_{\varphi_1}[A;\lambda_0](x) = 0$ по условию, то $\varphi_2(A)(x) = \mathbf{0}$ при $t = \lambda_0$

и $\dfrac{\psi_{\varphi_1}[A;t](x)}{\varphi_1(t)} = \dfrac{\psi_{\varphi_2}[A;t](x)}{\varphi_2(t)}$, т.к. $\varphi_2(t) = \dfrac{\varphi(t)}{(t-\lambda_0)^2} = \dfrac{\varphi_1(t)}{t-\lambda_0}$.

Повторяя указанную операцию n раз, приходим к искомому утверждению.

6°. Пусть $\{\lambda_j\}$ – нули $\varphi(t)$ и все они простые. $f(\lambda_j)$ – собственный вектор оператора A, соответствующий собственному числу λ_j. Тогда $\psi_\varphi[A;\,\lambda_j]\,f(\lambda_k) = \delta_{kj}\,f(\lambda_j)\ \varphi'(\lambda_k)$, $\forall j,k$, δ_{kj} – символ Кронекера.

Доказательство.

$$\psi_\varphi[A;\,t]\,f(\lambda_k) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(A^n - t^n E\right)}{A-tE}\ f(\lambda_k) = f(\lambda_k)\ \frac{\varphi(t)-\varphi(\lambda_k)}{t-\lambda_k}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $t \to \lambda_j$, $j = 1, 2,\ldots$, получаем искомое утверждение.

3. Заключение

В результате исследования получены важные свойства интерполирующей функции $\psi_{\varphi}[A;t](x)$, имеющие большое значение в задачах аппроксимации решений однородных операторных уравнений вида $\varphi(A)(x) = \mathbf{0}$ посредством элементарных решений.

Список источников

1. Можарова Т.Н. Об интерполирующей функции, порожденной целой векторнозначной функцией φ(t) и линейным неограниченным оператором А. // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2016. № 1 (1). С. 31-36.

2. Можарова Т.Н. Условия существования и непрерывности оператора φ(А*)* с переменными коэффициентами в случае неограниченного оператора А. // В сборнике: Избранные труды физико-математического факультета Орловского государственного университета. Орёл, 2016. С. 62-65.

References

1. Mozharova T.N. On the interpolating function generated by an entire vector-valued function φ(t) and a linear unbounded operator A. // Continuum. Mathematics. Computer science. Education. 2016. No. 1 (1). pp. 31-36. (In Russ.).

2. Mozharova T.N. Conditions for the existence and continuity of the operator φ(A) with variable coefficients in the case of an unbounded operator A. // In the collection: Selected works of the Faculty of Physics and Mathematics of Orel State University. Orel, 2016. pp. 62-65. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 68-71.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences.2023. 68-71.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.547

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ R-ШКАЛЫ

Татьяна Николаевна Можарова[1]✉, Олег Дмитриевич Соломатин[2]
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]tatjana.mozharova@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-1352-5343
[2]solomatin_od@bk.ru

Аннотация. *Решение уравнения* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = az \frac{\partial u}{\partial z} + cu(t,z)$, *полученное в* пространстве H_R *– функций, аналитических в круге* $|z| < R$ [2], *исследуется с помощью R-шкалы. Вычислены точные характеристики роста полученного решения по R-шкале.*

Ключевые слова: *Дифференциально-операторное уравнение второго порядка, R-шкала роста, характеристики роста решения.*

Conference paper

INVESTIGATION OF THE SOLUTION OF A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR EQUATION USING THE R-SCALE

Tatiana N. Mozharova[1]✉, Oleg D. Solomatin[2]
[1, 2]Orel State University, Orel, Russia
[1]tatjana.mozharova@yandex.ru ✉, https://orcid.org/0000-0003-1352-5343
[2]solomatin_od@bk.ru

Abstract. *The solution of the equation obtained in the space of functions analytic in a circle is investigated using the R-scale. The exact growth characteristics of the obtained solution on the R-scale are calculated.*

Keywords: *Differential operator equation of the second order, R-growth scale, growth characteristics of the solution.*

1. Введение

В статье решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = az \frac{\partial u}{\partial z} + cu(t,z)$,

полученное ранее в пространстве H_R – функций, аналитических в круге $|z|<R$ $[2]$, будет исследовано с помощью R-шкалы. Также вычислим точные характеристики роста полученного решения по R-шкале. Рассматриваемое уравнение относится к типу дифференциально-операторных уравнений второго порядка.

2. Основной текст статьи

В работе авторов $[2]$ получено решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = az\frac{\partial u}{\partial z} + cu(t,z), \quad a>0, c>0,$$

удовлетворяющее «начальному» условию

$$u(0,z) = f_1(z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f_2(z), \quad f_1, f_2 \in H_R.$$

Решение уравнения осуществлялось в пространстве H_R – функций, аналитических в круге радиуса R, и записывалось в виде:

$$u(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b_n\mu_n + d_n}{2b_n\mu_n}\right)b_n z^n e^{\mu_n t} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b_n\mu_n - d_n}{2b_n\mu_n}\right)b_n z^n e^{-\mu_n t}.$$

При определенных условиях $[2]$ функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – целые, и тогда функция $u(t,z)$ – целая векторнозначная со значениями в пространстве H_R бесконечного порядка роста. В этом случае можно вычислить характеристики роста функции $u(t,z)$, используя R-шкалу для вычисления роста функций, представимых рядом экспонент.

Определение. R-p-порядком роста целой функции $f(z)$, определенной рядом $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{\lambda_n z}, z \in C, x_n \in H,$ называется величина

$$R_p(f) = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln M_p(f,\,x)}{x}, \quad R(f) = \sup_{(p)}\{R_p(f)\} -$$

R-порядок функции f. R-порядок нельзя смешивать с порядком роста целой функции, рассмотренным раньше (обычный порядок). Например, для функции $f(z) = (z^2+1)e^{-z^2}$ обычный порядок $\rho(f) = 2$, однако $R(f) = 0$.

Теорема 1. R-p-порядок можно вычислить по формуле

$$R_p(f) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n \ln\lambda_n}{\ln\dfrac{1}{\|x_n\|_p}}.$$

Если функция $f(z)$ имеет R-p-порядок $0<R_p<\infty$, то вводится величина $\tau_p(f) = \varlimsup_{x\to\infty}\dfrac{\ln M_p(f,x)}{e^{R_p x}}$ – R-p-тип функции $f(z)$, $\tau(f) = \sup_{(p)}\{\tau_p(f)\}$ – R-тип функции $f(z)$.

Теорема 2. R - p -тип $\tau_p(f)$ вычисляется по формуле

$$\tau_p(f)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\lambda_n}{e^{R_p}}\right)\left(\|x_n\|_p\right)^{\frac{R_p}{\lambda_n}}.$$

Итак, если функция $f(z)$ имеет характеристики R_p и τ_p, то асимптотическое поведение функции при $x\to+\infty$ имеет вид:

$$\|f(z)\|_p\approx\exp\left\{\tau_p e^{R_p\operatorname{Re}z}\right\}=\exp\left\{\tau_p e^{R_p x}\right\},\quad z=x+iy.$$

Вернемся к нашей функции.

$$R'(u_1)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\mu_n\ln\mu_n}{-\ln\|b_n z^n\|_p}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\mu_n\ln\mu_n}{-\ln|b_n|-n\ln p}=$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\mu_n\ln\mu_n}{-n\ln n\cdot\dfrac{\ln|b_n|}{n\ln n}-n\ln p}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\mu_n\ln\mu_n}{\dfrac{n\ln n}{\rho_1}-n\ln n}=\rho_1,$$

где ρ_1 – порядок роста функции $f_1(z)$.

Аналогично, для второго слагаемого

$$R''(u_2)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\mu_n\ln\mu_n}{-\ln\left\|\dfrac{d_n}{\mu_n}z^n\right\|_p}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\mu_n\ln\mu_n}{\dfrac{n}{\rho_2}\ln n-n\ln p}=\rho_2,$$

где ρ_2 – порядок роста функции $f_2(z)$. Следовательно, R-порядок функции $u(t,z)$ равен $R(u)=\max(\rho_1,\rho_2)$.

Также можно вычислить R - p -типы и R-тип функции $u(t,z)$:

$$\tau_1(u_1)=\sigma_1 R^{\rho_1},\quad \tau_2(u_2)=\sigma_2 R^{\rho_2},\quad \tau(u).$$

3. Заключение

В работе проведено исследование решения уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-z^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=az\dfrac{\partial u}{\partial z}+cu(t,z)$, полученное ранее в пространстве H_R – функций, аналитических в круге $|z|<R$ [2]. Исследование осуществлено с помощью R-шкалы. Вычислены точные характеристики роста полученного решения по R-шкале.

Список источников

1. Громов В.П. Ряды экспонент с переменными коэффициентами и их применение для решения дифференциально-операторных уравнений. Ученые записки лаборатории теории функций и функционального анализа ОГУ. Выпуск 5. – Орёл: Издательство ОГУ, 2005, с. 4-46.

2. Можарова Т.Н., Соломатин О.Д. Решение дифференциально-операторного уравнения второго порядка в пространстве функций, аналитических в круге. Современные проблемы физико-математических наук /

материалы VIII-ой Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (25-26 ноября 2022 г., г. Орёл): научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией кандидата физико-математических наук, профессора Т.Н. Можаровой. – Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2022. – с. 93-96.

References

1. Gromov V.P. Series of exponents with variable coefficients and their application for solving differential operator equations. Scientific notes of the Laboratory of the theory of Functions and functional analysis of OSU. Issue 5. – Eagle: OSU Publishing House, 2005, pp. 4-46. (In Russ.).

2. Mozharova T.N., Solomatin O.D. Solution of a second-order differential operator equation in the space of functions analytic in a circle. Modern problems of physical and mathematical sciences / materials of the VIII-th All-Russian Scientific and Practical Conference with international participation (November 25-26, 2022, Orel): scientific electronic edition [Electronic resource] // under the general editorship of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor T.N. Mozharova. – The Eagle: OSU named after I.S. Turgenev, 2022. – pp. 93-96. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 72-76.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 72-76.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.952

О РАЗМЕРНОСТИ ЯДРА ЗАДАЧИ ШВАРЦА В ЭЛЛИПСЕ

Владимир Геннадьевич Николаев[1] ✉
[1]*Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия*
[1]*vg14@inbox.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0003-0274-5826*

Аннотация. *Рассмотрена задача Шварца для J-аналитических функций в эллипсе Γ. Матрица J предполагается двумерной, с кратным собственным число λ, лежащем выше вещественной оси. По матрице J вычисляется вещественный неотрицательный параметр l, который зависит только ее от жорданова базиса. По эллипсу Γ вычисляется вещественный параметр q. Далее получен критерий, с помощью которого по данным значениям l и q можно сделать вывод о размерности и структуре ядра задачи Шварца в эллипсе Γ.*

Ключевые слова: *задача Шварца, J-аналитические функции, жорданов базис матрицы, собственное число матрицы, эллипс, вещественный параметр.*

Conference paper

ON THE DIMENSION OF THE KERNEL OF THE SCHWARZ PROBLEM IN AN ELLIPSE

Vladimir G. Nikolaev[1]
[1] *Novgorod State University, Velikiy Novgorod, Russia*
[1]*vg14@inbox.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0003-0274-5826*

Abstract. *In this paper we consider the Schwartz problem for J-analytic functions in the ellipse Γ. The matrix J is assumed to be two-dimensional, with multiple eigenvalue λ, lying above the real axis. By matrix J we calculate a real non-negative parameter l, which depends only on its Jordan basis. By the ellipse Γ we calculate the real parameter q. Then we obtain a criterion by which we can infer the dimension and structure of the kernel of the Schwarz problem in the ellipse Γ from the given values of l and q.*

© Николаев В.Г., 2023

Keywords: *Schwartz problem, J-analytic functions, Jordan basis of a matrix, eigenvalue of a matrix, ellipse, real parameter.*

1. Введение

Пусть матрица $J \in \mathrm{C}^{\ell\times\ell}$ не имеет вещественных собственных чисел. Пусть ℓ-вектор-функция $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, где область $D \subset \mathrm{R}^2$. Рассмотрим в D следующую однородную эллиптическую систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad z \in D. \tag{1}$$

Определение 1. [1, 2, 3, 4, 5] *Функция $\phi = \phi(z)$ как решение системы (1) называется аналитической по Дуглису $(A.\ Douglis)$, или функцией, J-аналитической с матрицей J.*

Примерами J-аналитических функций служат векторные полиномы вида

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{m}(xE + yJ)^k\cdot c_k, \quad c_k \in \mathrm{C}^\ell, \quad \ell = 1, 2, 3, \ldots,$$

где E — единичная матрица.

Рассмотрим для системы (1) следующую краевую *однородную задачу Шварца* [1, 2, 3, 4, 5].

Пусть конечная область $D \subset \mathrm{R}^2$ ограничена гладким контуром Γ. Требуется найти J-аналитическую с матрицей J в области D функцию $\phi(z) \in C(\overline{D})$, которая удовлетворяет однородному краевому условию

$$\mathrm{Re}\,\phi(z)|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Определение 2. *Ядром задачи Шварца в области D называется линейное пространство решений задачи* (2).

Очевидными решениями задачи (2) служат постоянные функции $\phi(z) \equiv ic,\ c \in \mathrm{R}^\ell$, которые назовем *тривиальными решениями*. Покажем, что возможны так же непостоянные решения однородной задачи (2).

Пример 1. Пусть $\ell = 2$, и пусть

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} (x^2 + 9y^2)\,i \\ 7x^2 + 9y^2 - 1 + 18xyi \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 7i & 1 \\ 16 & -i \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Матрица J в (3) имеет кратное собственное число $\lambda = 3i$. При этом $\mathrm{Re}\,\phi(z)|_\Gamma = 0$ на эллипсе $\Gamma:\ 7x^2 + 9y^2 = 1$.

2. Определение параметров l и q

Пусть матрица $J \in \mathrm{C}^{2\times 2}$ имеет кратное собственное число $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$, $\lambda_2 > 0$. Пусть x — присоединенный вектор матрицы J, а y — ее собственный вектор. Обозначим через J_1 и Q жорданову форму и жорданов базис матрицы J соответственно:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad Q = (x, y), \quad J = QJ_1Q^{-1}. \tag{4}$$

При этом будем предполагать, что собственный вектор y не кратен вещественному. Обозначим:

$$l = l(J) = \left|\frac{\det(\overline{y}, y)}{\det(x, y)}\right|. \tag{5}$$

Справедлива

Лемма 1. [3] Число $l(J)$ (5) не зависит от выбора жорданова базиса Q матрицы J.

Пусть вещественные параметры r_1, r_2 — полуоси эллипса Γ, r_1, $r_2 > 0$, и пусть $\alpha \in [0, 2\pi)$ — угол в положительном направлении между полуосью эллипса длины r_1 и положительным направлением оси Ox. Тогда, как известно, эллипс Γ с центром в начале координат может быть задан параметрическим уравнением

$$\Gamma:\ \xi(t) = \begin{cases} x = r_1 \cos\alpha \cdot \cos t - r_2 \sin\alpha \cdot \sin t \\ y = r_1 \sin\alpha \cdot \cos t + r_2 \cos\alpha \cdot \sin t, \quad t \in [-\pi, \pi). \end{cases} \tag{6}$$

Обозначим с учетом (6):

$$\begin{aligned} a &= r_1 \cos\alpha + ir_2 \sin\alpha + \lambda(r_1 \sin\alpha - ir_2 \cos\alpha), \\ b &= r_1 \cos\alpha - ir_2 \sin\alpha + \lambda(r_1 \sin\alpha + ir_2 \cos\alpha). \end{aligned} \tag{7}$$

В свою очередь, с учетом (7) обозначим:

$$q = \left|\frac{b}{a}\right|. \tag{8}$$

Справедлива

Лемма 2. [4] Если $\lambda_2 = \operatorname{Im}\lambda > 0$, то в (8) параметр $q \in [0, 1)$.

Далее, следуя [3] для каждого значения $n = 1, 2, 3, \ldots$ рассмотрим следующую функцию:

$$l_n(q) = \frac{1 - q^{2n}}{nq^{n-1}(1 - q^2)}, \quad q = \left|\frac{b}{a}\right| \in (0, 1), \quad n = 1, 2, 3 \ldots. \tag{9}$$

Для данной матрицы J обозначим $l_0 = l(J)$. В [3] показано, для фиксированного значения $q \in (0,1)$ существует число n_1, определяемое следующим образом:

$$l_{n_1}(q) \geq l_0; \quad l_k(q) < l_0, \quad k < n_1. \tag{10}$$

Справедлива

Теорема 1. [3, 5] Ядро задачи Шварца для изучаемого типа матриц либо состоит из одного вектор-полинома, либо тривиально.

При этом структура ядра с учетом теоремы 1 определяется следующим утверждением.

Теорема 2. [3] Пусть число $l_0 = l(J)$ найдено по формуле (5). Пусть параметр q, соответствующий эллипсу Γ (6), найден по формулам (7) и (8). Тогда если в (10) $l_{n_1}(q) = l_0$, то ядро задачи Шварца в эллипсе Γ содержит единственный нетривиальный элемент, а именно вектор-полином степени n_1. Если же в (10) $l_{n_1}(q) > l_0$, ядро задачи Шварца в данном эллипсе Γ тривиально.

3. Заключение

В результате исследования получены (теоремы 1 и 2) необходимые и достаточные условия на матрицу J и эллипс Γ, при которых ядро задачи Шварца либо одномерно, либо тривиально. Вернемся к примеру 1. В силу теоремы 1 ядро задачи Шварца для матрицы J (3) в эллипсе $\Gamma: \ 7x^2 + 9y^2 = 1$ состоит из одного квадратичного вектор-полинома $\phi(z)$.

Список источников

1. Soldatov A. The Schwarz problem for Douglis analytic functions // Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 173, no. 2. P. 221–224.
2. Vasil'ev V., Nikolaev V. Schwarz problem for first-order elliptic systems on the plane // Differential Equations. 2017. Vol. 53, no. 10. P. 1318–1328. doi: 10.1134/S0012266117100081.
3. Nikolaev V. Schwarz Problem in Ellipse for Nondiagonalizable Matrices // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 251, no 6. P. 876-901. https://doi.org/10.1007/s10958-020-05134-z.
4. Nikolaev V. A Class of Orthogonal Polynomials on the Boundary of an Ellipse // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 239, no 3. P. 363-380. doi: 10.1007/s10958-019-04311-z. http://link.springer.com/article/10.1007/s10958-019-04311-z
5. Nikolaev V. Solutions to the Schwarz Problem with Diagonalizable Matrices in Ellipse // Journal of Mathematical Sciences. 2020.

Vol. 244, no 4. P. 655-670. doi: 10.1007/s10958-019-04640-z. http://link.springer.com/article/10.1007/s10958-019-04640-z.

References

1. Soldatov A. The Schwarz problem for Douglis analytic functions // Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 173, no. 2. P. 221–224.
2. Vasil'ev V., Nikolaev V. Schwarz problem for first-order elliptic systems on the plane // Differential Equations. 2017. Vol. 53, no. 10. P. 1318–1328. doi: 10.1134/S0012266117100081.
3. Nikolaev V. Schwarz Problem in Ellipse for Nondiagonalizable Matrices // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 251, no 6. P. 876-901. https://doi.org/10.1007/s10958-020-05134-z.
4. Nikolaev V. A Class of Orthogonal Polynomials on the Boundary of an Ellipse // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 239, no 3. P. 363-380. doi: 10.1007/s10958-019-04311-z. http://link.springer.com/article/10.1007/s10958-019-04311-z.
5. Nikolaev V. Solutions to the Schwarz Problem with Diagonalizable Matrices in Ellipse // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 244, no 4. P. 655-670. doi: 10.1007/s10958-019-04640-z http://link.springer.com/article/10.1007/s10958-019-04640-z.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 77-87.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 77-87.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.644.5+517.956.224

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПРЯМОГО ЗНАЧЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Игорь Олегович Резниченко[1✉]***, Павел Александрович Крутицкий***[2]***, Валентина Викторовна Колыбасова***[3]
[1,2] *ИПМ им. М. В. Келдыша, Москва, Россия*
[3] *МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия*
[1]*io.reznichenko@physics.msu.ru*✉
[2]*krutitsk@mail.ru*
[3]*kolybasova@physics.msu.ru*

Аннотация. *В работе получена квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя для уравнения Лапласа в трехмерном случае. Плотность потенциала при этом считается непрерывной и заданной на замкнутой либо разомкнутой поверхности. Новая квадратурная формула даёт более высокую точность, чем известные формулы, что подтверждается численными тестами. Полученная квадратурная формула может использоваться при численном решении краевых задач для уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений.*

Ключевые слова: *квадратурная формула, уравнение Лапласа, потенциал простого слоя, нормальная производная потенциала простого слоя, метод граничных интегральных уравнений.*

Conference paper

QUADRATURE FORMULA FOR THE DIRECT VALUE OF THE NORMAL DERIVATIVE OF THE SINGLE LAYER POTENTIAL FOR THE LAPLACE EQUATION

Igor O. Reznichenko[1✉]***, Pavel A. Krutitskii***[2]***, Valentina V. Kolybasova***[3]
[1,2] *Keldysh Institute of Applied Mathemtics, Moscow, Russia*
[3]*Moscow State University named after M.V. Lomonosov, Faculty of Physics, Moscow, Russia*
[1]*io.reznichenko@physics.msu.ru*✉

© Резниченко И.О., Крутицкий П.А., Колыбасова В.В. 2023

[2]*krutitsk@mail.ru*
[3]*kolybasova@physics.msu.ru*

Abstract. *In this work, a quadrature formula is obtained for the direct value of the normal derivative of the simple layer potential for the Laplace equation in the three-dimensional case. The potential density is considered continuous and specified on a closed or open surface. The new quadrature formula provides significantly higher accuracy than known formulas, which is confirmed by numerical tests. The resulting quadrature formula can be used in the numerical solution of boundary value problems for the Laplace equation by the method of boundary integral equations.*

Keywords: *quadrature formula, Laplace equation, simple layer potential, normal derivative of the simple layer potential, method of boundary integral equations.*

Funding: *the work was supported by the Russian Science Foundation, Project № 17-77-300.*

1. Введение

При численном решении краевых задач для уравнения Лапласа с использованием потенциала простого слоя применяются квадратурные формулы численного интегрирования как для самого потенциала, так и для прямого значения его нормальной производной. Стандартные квадратурные формулы для потенциала простого слоя [1, Глава 2], основанные на численном интегрировании, не обеспечивают равномерной аппроксимации потенциала вблизи поверхности Γ, где задана плотность потенциала. Тем самым не сохраняется важнейшее свойство потенциала, а именно, его ограниченность и непрерывность при переходе через Γ. В [2, 3] предложены квадратурные формулы, которые сохраняют указанное свойство потенциала простого слоя и обеспечивают его равномерную аппроксимацию вблизи Γ. Квадратурная формула для нормальной производной потенциала простого слоя, основанная на аналитическом вычислении интегралов и обладающая более высокой точностью, чем формулы численного интегрирования, предложена в [4]. В настоящей работе выводится новая квадратурная формула, улучшающая формулу из [4] за счет более точного учета элементов подынтегральной функции при аналитическом вычислении интегралов. Преимущество новой формулы подтверждается численными тестами.

2. Постановка задачи

Введем в пространстве декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Пусть Γ — простая гладкая замкнутая поверх-

ность класса C^2, ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая поверхность класса C^2, содержащая свои предельные точки [5, Глава 14, § 1]. Предположим, что поверхность Γ параметризована так, что на нее отображается прямоугольник:

$$y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u,v),\ y_2 = y_2(u,v),\ y_3 = y_3(u,v);$$
$$u \in [0, A], \quad v \in [0, B];$$
$$y_j(u,v) \in C^2([0,A] \times [0,B]), \quad j = 1,2,3. \tag{1}$$

Потребуем также, чтобы различным внутренним точкам прямоугольника при указанном отображении соответствовали различные точки поверхности. Сферу, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом. Кроме того, сложные поверхности можно разбить на несколько частей и для каждой части ввести свою параметризацию, тогда дальнейшие рассуждения справедливы для каждой такой части.

Введём N точек u_n с шагом h на отрезке $[0, A]$ и M точек v_m с шагом H на отрезке $[0, B]$ и рассмотрим разбиение прямоугольника $[0, A] \times [0, B]$, который отображается на поверхность Γ

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = 0, ..., N-1;$$
$$v_m = (m + 1/2)H, \quad m = 0, ..., M-1.$$

Тем самым прямоугольник $[0, A] \times [0, B]$ разбивается на $N \times M$ маленьких прямоугольничков и через (u_n, v_m) обозначены серединки этих прямоугольничков.

Известно [5, Глава 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного) $\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$ в точке поверхности $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$ определяются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Положим $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$. Известно [5, Глава 14, § 1–2], что

$$\int_\Gamma F(y) ds_y = \int_0^A du \int_0^B dv F(y(u,v)) |\eta(y(u,v))|.$$

Заметим, что если $|\eta(y(u,v))| = 0$ в некоторой точке, то функция $|\eta(y(u,v))|$ может быть недифференцируемой в этой точке. Поэтому

дополнительно потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u,v))| \in C^1([0,A]\times[0,B]). \tag{3}$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u,v))| > 0, \quad \forall\,(u,v) \in ((0,A)\times(0,B)). \tag{4}$$

Из условия (4) следует, что $|\eta(y(u,v))| \in C^1((0,A)\times(0,B))$, но условие (3) не следует.

Потенциал простого слоя для уравнения Лапласа с заданной на поверхности Γ плотностью $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$ имеет вид

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\mu(y)}{|x-y|}ds_y =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^A du\int_0^B dv \frac{\mu(y(u,v))}{|x-y(u,v)|}|\eta(y(u,v))|, \tag{5}$$

где

$$|x-y(u,v)| = \sqrt{(x_1-y_1(u,v))^2+(x_2-y_2(u,v))^2+(x_3-y_3(u,v))^2}.$$

Пусть $\mathbf{n}_x = \eta(x)/|\eta(x)|$ – вектор единичной нормали в точке $x \in \Gamma$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|\eta(x)|}\frac{(-1)}{|x-y|^2}\sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j-y_j)}{|x-y|}.$$

Прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя $\mathcal{V}_0[\mu](x)$ в точке x имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \mu(y)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\frac{1}{|x-y|}ds_y = -\frac{1}{4\pi|\eta(x)|}\times$$

$$\times\int_0^A du\int_0^B dv\,\mu(y(u,v))|\eta(y(u,v))|\sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j-y_j(u,v))}{|x-y(u,v)|^3} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi|\eta(x)|}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv\,\mu(y(u,v))|\eta(y(u,v))|\times$$

$$\times\sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j-y_j(u,v))}{|x-y(u,v)|^3}. \tag{6}$$

Известно [6, §27.5], что прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя в наших предположениях является непрерывной на Γ функцией. Пусть $\mu_{nm} = \mu(y(u_n,v_m))$, тогда

$$\mu(y(u,v)) = \mu_{nm} + o(1),$$

для $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$.

Пусть x лежит в одном из узлов на Γ. Следовательно, прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя можно записать в виде

$$\left.\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right|_{x=y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})\in\Gamma} \approx \frac{1}{4\pi|\eta(x)|}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}\times$$

$$\times \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv\,|\eta(y(u,v))|\sum_{j=1}^{3}\frac{\eta_j(x)(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3}. \qquad (7)$$

Двойной интеграл в (7) будем называть каноническим и при его вычислении будем различать 2 случая. В первом случае точка x лежит в области интегрирования, а во втором случае — нет.

3. Вычисление канонического интеграла

Пусть точка x лежит в области интегрирования. В данном случае интегрирование ведется по прямоугольничку с центром в точке $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$, которой отвечает точка $y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) = x$ на поверхности Γ. Канонический интеграл в данном случае приближённо вычислен в работе [4] и обозначается как $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$.

Если точка x не принадлежит кусочку поверхности Γ, на котором изменяется точка $y = y(u, v)$, тогда $(u - u_n) \in [-h/2, h/2]$ и $(v - v_m) \in [-H/2, H/2]$. Разложим $y_j(u, v)$ по формуле Тейлора с центром в точке (u_n, v_m), тогда для $j = 1, 2, 3$ получим

$$y_j(u,v) = y_j(u_n,v_m) + D_j + O(H^2+h^2),$$
$$D_j = (y_j)'_u(u-u_n) + (y_j)'_v(v-v_m).$$

Здесь и далее все производные по u и v берутся в точке (u_n, v_m). Положим

$$r^2 = |x-y(u_n,v_m)|^2 = \sum_{j=1}^{3} r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n,v_m) - x_j, \quad j = 1,2,3,$$

тогда

$$y_j(u,v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2+h^2), \quad j = 1,2,3.$$

Следовательно,

$$|x-y(u,v)|^2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{3}(x_j - y_j(u,v))^2 \approx \sum_{j=1}^{3}(r_j^2 + 2r_jD_j + D_j^2) = r^2 + 2P(u-u_n) +$$
$$+2Q(v-v_m) + \alpha^2(u-u_n)^2 + \beta^2(v-v_m)^2 + 2\delta(u-u_n)(v-v_m) =$$

$$= \beta^2(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2,$$

где $U = u - u_n,\ V = v - v_m$ и

$$P = \sum_{j=1}^{3} r_j (y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^{3} r_j (y_j)'_v, \quad \alpha^2 = \sum_{j=1}^{3} ((y_j)'_u)^2,$$

$$\beta^2 = \sum_{j=1}^{3} ((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^{3} (y_j)'_u (y_j)'_v.$$

Производные по u и v берутся в точке $u = u_n,\ \ v = v_m$. Можно показать [5, Гл. 14, § 1], что

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2. \tag{8}$$

Согласно условию (4), $\alpha^2\beta^2 - \delta^2 > 0$, отсюда следует, что $\alpha^2 > 0$ и $\beta^2 > 0$.

В силу (3), для всех возможных n, m, при $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ функция $|\eta(y(u, v))|$ может быть разложена в точке (u_n, v_m) по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано [5, Гл. 10, § 5.3]

$$|\eta(y(u, v))| = |\eta(y(u_n, v_m))| + |\eta|'_u U + |\eta|'_v V + o\left(\sqrt{U^2 + V^2}\right) \tag{9}$$

Производные по u и v берутся в точке (u_n, v_m). Выражения для $|\eta|'_u$ и $|\eta|'_v$ можно найти с помощью равенства (8), а также их можно найти по формулам

$$|\eta|'_u = \frac{(\eta, \eta'_u)}{|\eta|}, \quad |\eta|'_v = \frac{(\eta, \eta'_v)}{|\eta|}, \tag{10}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов.

Воспользуемся разложением по формуле Тейлора в точке (u_n, v_m) с остаточным членом в форме Пеано

$$y_j(u, v) - x_j = r_j + (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m) + \frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u - u_n)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v - v_m)^2 + (y_j)''_{uv}(u - u_n)(v - v_m) + o\left((u - u_n)^2 + (v - v_m)^2\right),$$

Тогда

$$|\eta(y(u, v))| \sum_{j=1}^{3} \eta_j(x)(y_j(u, v) - x_j) \approx$$

$$\approx R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV,$$

$$\xi_1 = \sum_{j=1}^{3} \eta_j(x) \left(\frac{1}{2}|\eta(y(u_n, v_m))|(y_j)''_{uu} + |\eta_j|'_u (y_j)'_u\right),$$

$$\xi_2 = \sum_{j=1}^{3} \eta_j(x) \left(\frac{1}{2} |\eta(y(u_n, v_m))| (y_j)''_{vv} + |\eta_j|'_v (y_j)'_v \right),$$

$$\xi_3 = \sum_{j=1}^{3} \eta_j(x) (|\eta(y(u_n, v_m))| (y_j)''_{uv} + (|\eta_j|'_u (y_j)'_v + |\eta_j|'_v (y_j)'_u),$$

$$\xi_4 = \sum_{j=1}^{3} \eta_j(x) (|\eta(y(u_n, v_m))| (y_j)'_u + |\eta|'_u r_j),$$

$$\xi_5 = \sum_{j=1}^{3} \eta_j(x) (|\eta(y(u_n, v_m))| (y_j)'_v + |\eta|'_v r_j),$$

$$R = \sum_{j=1}^{3} \eta_j(x) |\eta(y(u_n, v_m))| r_j.$$

Все производные по $u,\ v$ берутся в точке (u_n, v_m). Из приведенных соотношений вытекает, что канонический интеграл из (7) приближенно равен следующему интегралу, который обозначим через $T_{nm}(x)$

$$\int_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} dv \frac{|\eta(y(u,v))|}{|x - y(u,v)|^3} \sum_{j=1}^{3} \eta_j(x)(y_j(u,v) - x_j) \approx$$

$$\approx \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{1}{\beta^3} \times$$

$$\frac{R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{((V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2)^{3/2}}$$

$$= T_{nm}(x). \tag{11}$$

Интеграл T_{nm} вычислен в явном виде в работе [4].

4. Основной результат

Теорема. *Пусть Γ — простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2, ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая поверхность класса C^2, содержащая свои предельные точки. Пусть Γ допускает параметризацию (1) со свойствами (3), (4), и $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$, а точка x расположена в одном из узлов на Γ. Тогда для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя (6) для уравнения Лапласа имеет место квадратурная формула*

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma} \approx \frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{n}\hat{m}} \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} + \frac{1}{4\pi |\eta(x)|} \sum_{\substack{n=0,\, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n},\hat{m})}}^{n=N-1,\, m=M-1} \mu_{nm} T_{nm}(x), \tag{12}$$

где интегралы $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ и интеграл $T_{nm}(x)$ вычислены в явном виде в работе [4].

На рассмотренных ниже тестовых примерах остаточный член в (12) ведёт себя как $O(H+h)$ равномерно по всем x, лежащим в узлах сетки.

5. Численные тесты

Тестирование квадратурных формул для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя для уравнений Лапласа проведено в случае, когда поверхность Γ является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями:

$$y_1(u,v) = \sin v \cos u, \quad y_2(u,v) = \sin v \sin u, \quad y_3(u,v) = \cos v, \tag{13}$$

причём $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$. В численных тестах используются явные формулы внутри и вне сферы из [2] для потенциалов простого слоя с заданной плотностью.

Согласно [6, гл. 5, § 27, п. 7], прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя на поверхности Γ можно найти по формуле

$$\left.\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right|_{\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot \left[\left.\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right|_{\Gamma^+} + \left.\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right|_{\Gamma^-} \right].$$

Здесь поверхность Γ рассматривается как двусторонняя, через Γ^- обозначена сторона, которую мы видим, глядя навстречу вектору нормали $\mathbf{n}_x$, а через Γ^+ обозначена противоположная сторона. В формуле берутся предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя на разных сторонах Γ.

В тестах точное прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя в узловых точках сравнивалось с приближенными значениями, вычисленными по квадратурным формулам — по улучшенной формуле (12) в соответствии с Теоремой, по квадратурной формуле, полученной в [4], и по стандартной формуле, подробно описанной в [4]. В каждой узловой точке вычислялась абсолютная погрешность для этих формул. Вычисления проводились для разных значений M и N. Значения шагов определяются формулами $h = 2\pi/N$, $H = \pi/M$. Если $N/2 = M = 25$, то $h = H \approx 0.13$; если $N/2 = M = 50$, то $h = H \approx 0.063$; если $N/2 = M = 100$, то $h = H \approx 0.031$. В таблице для каждого теста приводится максимум абсолютной погрешности вычислений по всем узловым точкам сферы.

Тест 1. В данном тесте $\mu(y(u,v)) = 1$, тогда:

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{при } |x| > 1 \end{cases}, \qquad \left.\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right|_{|x|=1} = \frac{1}{2}\,.$$

Тест 2. В данном тесте $\mu(y(u,v)) = \cos u \sin v$, тогда:

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} \dfrac{|x|\cos\varphi\sin\vartheta}{3} & \text{если } |x| < 1, \\ \dfrac{\cos\varphi\sin\vartheta}{3|x|^2} & \text{если } |x| > 1. \end{cases},$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right|_{|x|=1} = \frac{\cos\varphi\sin\vartheta}{6},$$

где φ и ϑ — азимутальный и зенитный углы в сферических координатах с началом в центре сферы.

Тест 3. В данном тесте $\mu(y(u,v)) = \cos v$, тогда:

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} \dfrac{|x|\cos\vartheta}{3} & \text{при } |x| < 1 \\ \dfrac{\cos\vartheta}{3|x|^2} & \text{при } |x| > 1 \end{cases}, \qquad \left.\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right|_{|x|=1} = \frac{\cos\vartheta}{6}\,,$$

где ϑ — зенитный угол в сферических координатах с началом в центре сферы.

6. Заключение

Результаты расчетов в приведенных тестовых примерах показывают, что улучшенная квадратурная формула (12) из Теоремы имеет первый порядок сходимости, как и квадратурная формула, полученная в [4]. При этом погрешность вычислений по улучшенной квадратурной формуле (12), предложенной в Теореме, в несколько раз меньше, чем погрешность вычислений по стандартной квадратурной формуле и в полтора раза меньше погрешности вычислений по формуле из [4]. Тем самым, улучшенная квадратурная формула (12) обеспечивает значительно более высокую точность вычислений прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя, чем две другие формулы.

Улучшенная квадратурная формула (12) может найти применение при численном решении граничных интегральных уравнений, возни-

номер теста	квадратурная формула	$M = N/2 = 25$	$M = N/2 = 50$	$M = N/2 = 100$
1	стандартная формула	0.019	0.0097	0.0062
1	формула из [4]	0.0042	0.0024	0.0013
1	улучшенная формула	0.0028	0.0016	0.00084
2	стандартная формула	0.019	0.0097	0.0049
2	формула из [4]	0.00041	0.0001	2.6E-5
2	улучшенная формула	0.00032	8.3E-5	2.1E-5
3	стандартная формула	0.011	0.0089	0.0062
3	формула из [4]	0.0044	0.0025	0.0013
3	улучшенная формула	0.003	0.0016	0.00085

Таблица 1: Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тестах 1 — 3.

кающих в процессе решения краевых задач для уравнения Лапласа методом потенциалов.

Список источников

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
2. Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В. Квадратурная формула для потенциала простого слоя. Дифференциальные уравнения, 2019, Т. 55, N 9, С. 1269 — 1284.
3. Крутицкий П.А., Резниченко И.О. Улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2023, т. 63, № 2, С. 44 — 58.
4. Крутицкий П.А., Резниченко И.О., Колыбасова В.В. Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя. // Дифференциальные уравнения, 2020, Т. 56, N 9, С. 1270 — 1288.

5. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. — М.: Физматлит, 2000.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 1981.

References

1. Brebbia C., Telles J., Vroubel L. Methods of boundary elements cops. M.: Mir, 1987.
2. Krutitskii P.A., Fedotova A.D., Kolybasova V.V. Quadrature- formula for the potential of a simple layer. Differential scientific equations, 2019, T. 55, N 9, pp. 1269 — 1284.
3. Krutitskii P.A., Reznichenko I.O. Improved quadrature formula for the potential of a simple layer. // Calculation journal body mathematics and mathematical physics, 2023, v. 63, no. 2, pp. 44 — 58.
4. Krutitskii P.A., Reznichenko I.O., Kolybasova V.V. Quadra- ture formula for the direct value of normal production noi potential of a simple layer. // Differential equations nia, 2020, T. 56, N 9, P. 1270 — 1288.
5. Butuzov V.F., Krutitskaya N.Ch., Medvedev G.N., Shishkin A.A. Mathematical analysis in questions and problems. - M.: Fizmat- lit, 2000.
6. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. - M.: Fizmatlit, 1981.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 88-91.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 88-91.

УДК 517

Conference paper

SOME ESTIMATES FOR QUASIMONOTONE FUNCTIONS IN WEIGHTED VARIABLE EXPONENT LEBESGUE SPACE WITH $0 < P(X) < 1$

Abdelkader Senouci[1]✉

[1] *Laboratory of Informatics and mathematics, University of Tiaret, Tiaret, Algeria*

[1]*kamer295@yahoo.fr*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3620-7455*

Abstract. *The aim of this work is to generalize some results of [6] for the weighted Hardy operator and its dual for quasi-monotone functions in weighted variable exponent Lebesgue space with* $0 < p(x) < 1$.

Keywords: *inequalities, quasimonotone function, Hardy operators, variable exponent.*

Funding: *This work is supported by the Direction Générale de la Recherche Scientifique et du dévéloppement Technologique, Algeria.*

1. Introduction

It is well known that for L_p-spaces with $0 < p < 1$ the Hardy inaquality is not satisfied for arbitrary non-negative measurable functions, but it is satisfied for non-negative monotone functions (see [3]).

Many investigations are devoted to the problem of boundedness of the Hardy operator in the Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ for $p(x) \geq 1$ (see for example [1] and [4]). But the investigations of the Hardy inequality in variable exponent Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ for $0 < p(x) < 1$ are much less known.

In A. Senouci and A. Zanou's paper [6], some weighted inequali-ties were established for the classical Hardy operator acting from one weighted variable exponent Lebesgue space to another weighted variable exponent Lebesgue space for non-negative quasi-monotone functions defined on $(0, \infty)$. In this paper some weighted inequalities are proved for the weighted Hardy operators. where functions f and weighted function w are quasi-monotone. In particular if $w(x) = 1$, $\alpha = 0$ and f is quasimonotone function, we have Senouci-Zanou's results (see [6]).

© Senouci A., 2023

Let $\mathbb{R}^n$ be the n-dimensional Euclidean space of points $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, Ω be a Lebesgue measurable subset of $\mathbb{R}^n$. Suppose that $p(x)$ is a Lebesgue measurable function on Ω such that $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq \overline{p} < 1$, $\underline{p} = \text{ess inf}_{x\in\Omega} p(x)$, $\overline{p} = \text{ess sup}_{x\in\Omega} p(x)$ and ω is a weight function, that is a positive Lebesgue measurable function on Ω.

Definition 1. By $L_{p(x),w(x)}(\Omega)$ we denote the set of all Lebesgue measurable function f on Ω such that

$$\rho_{p(x),w(x)}(f) = \int_\Omega (|f(x)|w(x))^{p(x)} dx < \infty. \tag{1}$$

Note that the expression

$$\|f\|_{L_{p(x),w(x)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0,\ \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leq 1\right\} \tag{2}$$

defines a quasi-norm on $L_{p(x),w(x)}(\Omega)$. $L_{p(x),w(x)}(\Omega)$ is a quasi-Banach space equipped with this quasi-norm (see [5]).

The following definition was introduced in [2].

Definition 2. We say that a non-negative function f is quasimonotone on $]0, \infty[$, if for some real number α, $x^\alpha f(x)$ is a decreasing or an increasing function of x. More precisely, given $\beta \in \mathbb{R}$, we say that $f \in Q_\beta$ if only if $x^{-\beta} f(x)$ is non-increasing and $f \in Q^\beta$ if only if $x^{-\beta} f(x)$ is non-decreasing.

2. Main results

Consider the weighted Hardy operators

$$(H_w f)(x) = \frac{1}{W(x)} \left(\int_0^x f(y) y^{-\alpha} w(y) dy\right),$$

$$(H_w^* f)(x) = \frac{1}{W(x)} \left(\int_x^\infty f(y) y^{-\alpha} w(y) dy\right),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

where $W(x) = \int_0^x y^{-\alpha} w(y),\ y > 0$ and f is a non-negative Lebesgue measurable function on $(0, \infty)$.

Note that for $w(y) \equiv 1$, and $\alpha = 0$, H_w is the usual Hardy operators

$$(Hf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \ \text{ and } \ (H^* f)(x) = \frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)dt.$$

Theorem 2.1. Let p, q be Lebesgue measurable functions on $(0,\infty)$, $0 < \underline{p} \le p(x) \le q(x) \le \overline{q} < 1$, $r(x) = \frac{\underline{p}p(x)}{p(x)-\underline{p}}$, for $x \in (0,\infty)$, $\beta > -1$, $f \in Q_\beta$, $w \in Q^\alpha$. Suppose that w_1 and w_2 are weight functions defined on $(0,\infty)$.

Then the inequality

$$\|H_w f\|_{L_{q(x),w_2(x)}(0,\infty)}$$

$$\le \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}}(\beta+1)^{-\frac{1}{\overline{p}'}} C_{p,q} d_p \Big\| \frac{y^{\frac{1}{\overline{p}'}} \big\| \frac{w_2(x)w(x)}{x^\alpha W(x)} \big\|_{L_{q(x)}(y,\infty)}}{w_1(x)} \Big\|_{L_{r(x)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(x),w_1(x)}(0,\infty)} \tag{3}$$

holds, where

$$C_{p,q}$$

$$= \left(\|\chi_{\Delta_1}\|_{L_\infty(0,\infty)} + \|\chi_{\Delta_2}\|_{L_\infty(0,\infty)} + \underline{p}\left(\frac{1}{\underline{q}} - \frac{1}{\overline{q}}\right)\right)\left(\|\chi_{S_1}\|_{L_\infty(0,\infty)} + \|\chi_{S_2}\|_{L_\infty(0,\infty)}\right),$$

$S_1 = \{x \in (0,\infty) : \ p(x) = \underline{p}\}$, $S_2 = (0,\infty)\backslash S_1$ and

$$d_p = \left(1 + \frac{\overline{p} - \underline{p}}{\overline{p}} + \|\chi_{S_1}\|_{L_\infty(0,\infty)}\right)^{\frac{1}{\underline{p}}}.$$

Remark 1. If we put $w(x) = 1$, $\alpha = 0$ in Theorem 2.1, we get Theorem 3.1 of [6].

Theorem 2.2. Let p, q Lebesgue measurable functions on $(0,\infty)$, $0 < \underline{p} \le p(x) \le q(x) \le \overline{q} < 1$, $r(x) = \frac{\underline{p}p(x)}{p(x)-\underline{p}}$, for $x \in (0,\infty)$, $\beta < -1$, $f \in Q^\beta$ and $w \in Q^\alpha$. Suppose that w_1 and w_2 are weight functions defined on $(0,\infty)$. Then the inequality

$$\|H_w f\|_{L_{q(x),w_2(x)}(0,\infty)}$$

$$\le \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}} |\beta+1|^{-\frac{1}{\overline{p}'}} C_{p,q} d_p \Big\| \frac{y^{\frac{1}{\overline{p}'}} \big\| \frac{w_2(x)w(x)}{x^\alpha W(x)} \big\|_{L_{q(x)}(0,y)}}{w_1(x)} \Big\|_{L_{r(x)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(x),w_1(x)}(0,\infty)} \tag{4}$$

holds, where $C_{p,q}$ and d_p are the constants in Theorem 3.1.

Remark 2. If we set $w(x) = 1$, $\alpha = 0$ in Theorem 2.2, we get Theorem 3.2 of [6].

Theorem 2.3. Let p, q Lebesgue measurable functions on $(0,\infty)$, $0 < \underline{p} \le p(x) \le q(x) \le \overline{q} < 1$, $r(x) = \frac{\underline{p}p(x)}{p(x)-\underline{p}}$ for $x \in (0,\infty)$, $\beta = -1$ and $w \in Q^\alpha$. Suppose that w_1 and w_2 are weight functions defined on $(0,\infty)$.

1) If $f \in Q_{-1}$, then the inequality

$$\|H_w^* f\|_{L_{q(x),w_2(x)}(0,\infty)}$$

$$\leq \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}} C_{p,q} d_p \| \frac{y^{\frac{1}{\overline{p}'}} (\ln \frac{y}{x})^{\frac{1}{\overline{p}'}} \| \frac{w_2(x)w(x)}{x^\alpha W(x)} \|_{L_{q(x)}(0,y)}}{w_1(x)} \|_{L_{r(x)}(0,\infty)} \| f \|_{L_{p(x),w_1(x)}(0,\infty)} \quad (5)$$

holds.

2) If $f \in Q^{-1}$, then the inequality

$$\|H_w f\|_{L_{q(x),w_2(x)}(0,\infty)}$$

$$\leq \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}} C_{p,q} d_p \| \frac{y^{\frac{1}{\overline{p}'}} (\ln \frac{x}{y})^{\frac{1}{\overline{p}'}} \| \frac{w_2(x)w(x)}{x^\alpha W(x)} \|_{L_{q(x)}(y,\infty)}}{w_1(x)} \|_{L_{r(x)}(0,\infty)} \| f \|_{L_{p(x),w_1(x)}(0,\infty)} \quad (6)$$

holds.

Remark 3. If we set $w(x) = 1$, $\alpha = 0$ in Theorem 2.3, we get Theorem 3.4 of [6].

References

1. Bandaliev R.A. On an inequality in Lebesgue space with mixed norm and with variable summability // Matem. Zametki. 2008. Vol. 84, no. 3. P. 323-333 (in Russian). English translation in Math. Notes. 2008. Vol. 84, no. 3. P. 303-313.
2. Bergh J., Burenkov V., Persson L.-E. Best constants in reversed Hardy's inequalities for quasimonotone functions // Acta Sci. Math. (Szeged). 1994. Vol. 59. P. 223-241.
3. Burenkov V.I. On the best constants in Hardy's inequality for $0 < p < 1$ for monotone functions // Trudy Matem. Inst. Steklov. 1992. Vol. 194. P. 58-62 (in Russian). English translation in Proc. Steklov Inst. Math. 1993. Vol. 194, no. 4. P. 59-63.
4. Orlicz W. Über konjugierte Exponentenfolgen // Stud. Math.1931. Vol. 3. P. 200-212.
5. Samko S.G. Differentiation and integration of variable order and the variable exponent Lebesgue spaces // Proc. Inter. Conf. "Operator theory for complex and hypercomplex analysis Mexico, 1994, Contemp. Math. 212 (1998), 203-219.
6. Senouci A., Zanou A. Some integral inequalities for quasi-monotone functions in weighted variable exponent Lebesgue spaces with 0<p(x)<1 // Eurasian Math. Journal. 2020. Vol. 4, no. 4. P. 58-65.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 92-96.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 92-96.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.644

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Юнус Солиевич Солиев✉
Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия
su1951@mail.ru✉

Аннотация. *Предлагается способ построения квадратурных формул для гиперсингулярных интегралов на основе квадратурных формул для сингулярных интегралов.*

Ключевые слова: *гиперсингулярный интеграл, интерполяция, квадратурная формула.*

Conference paper

ABOUT ONE METHOD OF CONSTRUCTING QUADRATURE FORMULAS FOR HYPERSINGULAR INTEGRALS

Yunus S. Soliev✉
Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia
su1951@mail.ru✉

Abstract. *A method is proposed for constructing quadrature formulas for hypersingular integrals based on quadrature formulas for singular integrals.*

Keywords: *hypersingular integral, interpolation, quadrature formula.*

1. Введение

Для построения квадратурных формул для гиперсингулярных интегралов типа Коши и Гильберта можно применить известные квадратурные формулы для соответствующих сингулярных интегралов.

2. Основной текст статьи

Рассмотрим интеграл

$$A_q f = A_q(f;x) = \int_{-1}^{1} p(t)\frac{f(t)}{(t-x)^q}\,dt, -1<x<1,$$

$$p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \alpha>-1, \beta>-1, \quad q=1,2,\ldots, \qquad (1)$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши $(q=1)$ или в смысле

© Солиев Ю.С., 2023

конечного значения по Адамару $(q>1)$, где $f(x)$- плотность интеграла.

Через $L_n f = L_n(f;x)$ обозначим интерполяционный полином Лагранжа [1] по узлам $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}\left(k=\overline{0,n}\right)$:

$$L_n f = L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k), l_k(x) = (-1)^{k+1}\frac{(1-x^2)U_{n-1}(x)}{x-x_k}, U_{n-1}(x) = \frac{\sin n\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

где слагаемые в сумме при $k=0$ и $k=n$ берутся с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Аппроксимативные свойства полинома $L_n f$ в различных функциональных пространствах подробно изучены в работе [2].

Заменяя плотность $f(x)$ интеграла $A_1 f$ на полином $L_n f$, получим квадратурную формулу

$$A_1 f = A_1(L_n f;x) + R_n f = \int_{-1}^{1} p(t)\frac{L_n(f;x)}{t-x}dt + R_n f = \sum_{k=0}^{n} B_k(x) f(x_k) + R_n f, \qquad (2)$$

где $R_n f$ – остаточный член. Коэффициенты $B_k(x)$ вычислены в работе [3]:

$$B_k(x) = \sum_{j=0}^{n} D_j \frac{l_k(x_j) - l_k(x)}{x_j - x} + l_k(x) I_0(x),$$

$$I_0(x) = \int_{-1}^{1}\frac{p(t)}{t-x}dt = \pi ctg\alpha\pi p(x) - 2^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}F\left(1,-\alpha-\beta,1-\alpha,\frac{1-x}{2}\right),$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, $F(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ – гипергеометрическая функция, D_j – коэффициенты квадратурной формулы Гаусса.

Так как (см., напр., [4])

$$A_q f = A_q(f;x) = \int_{-1}^{1} p(t)\frac{f(t)}{(t-x)^q}dt = \frac{1}{(q-1)!}\frac{d^{q-1}}{dx^{q-1}}\int_{-1}^{1} p(t)\frac{f(t)}{t-x}dt,$$

то квадратурную формулу (2) можно применить к интегралу (1):

$$A_q f = \int_{-1}^{1} p(t)\frac{f(t)}{(t-x)^q}dt = \sum_{k=0}^{n} C_k(x) f(x_k) + R_n^{(q)} f, \qquad (3)$$

где

$$C_k(x) = \frac{1}{(q-1)!}\left(\sum_{j=0}^{n} D_j\left(\frac{l_k(x_j)-l_k(x)}{x_j-x}\right)^{(q-1)} + \sum_{j=0}^{q-1} C_{q-1}^{j}\left(l_k(x)\right)^{(q-1-j)} I_j(x)\right),$$

$$I_j(x) = \pi ctg\alpha\pi p^{(j)}(x) - \varphi_j(\alpha,\beta)F\left(j+1, j-\alpha-\beta, j+1-\alpha, \frac{1-x}{2}\right),$$

$$\varphi_j(\alpha,\beta) = 2^{\alpha+\beta-j}(-1)^j j!\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\alpha-\beta+j)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)\Gamma(-\alpha-\beta)\Gamma(j+1-\alpha)},$$

а $R_n^{(q)} f$ – остаточный член.

Пусть $H_\alpha(M,[-1,1])$ - класс функций $f(x)$, определенных на $[-1,1]$ и удовлетворяющих условию Гельдера:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le M|x_1-x_2|^{\alpha},\ x_1,x_2\in[-1,1],\ 0<\alpha\le 1.$$

Далее, положим

$$H_{\alpha}^{(r)}(M,[-1,1])=\left\{f: f^{(r)}(x)\in H^{\alpha}(M,[-1,1])\right\},\ x\in[-1,1],\ r=0,1,\ldots$$

С помощью результатов работ [5], [6] устанавливается

Теорема 1. Если $f(x)\in H_{\alpha}^{(r)}(M,[-1,1]), r=0,1,\ldots,0<\alpha<1,$ то для остаточного члена квадратурной формулы (3) справедлива равномерная оценка

$$\left\|R_n^{(q)}f\right\|_C=O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{r+\alpha-q+1}}\right), r+\alpha>q-1.$$

Этот способ можно применить и при построении квадратурных формул для понимаемого в смысле конечного значения по Адамару гиперсингулярного интеграла

$$Bx=B(x;t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x(s)\frac{ds}{\sin^2\frac{s-t}{2}}. \tag{4}$$

Пусть

$$\Gamma x=\Gamma(x;t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(s)ctg\frac{s-t}{2}ds- \tag{5}$$

сингулярный интеграл с ядром Гильберта, понимаемый в смысле главного значения по Коши. В (4) и (5) $x(t)-2\pi$ -периодическая плотность интегралов.

Тогда [7]

$$\frac{d}{dt}\left(\Gamma(x;t)\right)=B(x;t). \tag{6}$$

Равенство (6) позволяет перенести квадратурные формулы для интеграла (5) на интегралы (4). Например, используя квадратурную формулу Б.Г. Габдулхаева [6], для интеграла (4) получим квадратурную формулу [8]

$$Bx=B(x;t)=\sum_{k=1}^{n}k\left\{\left(1-\lambda_{k,\nu}^{(n)}\right)^{l+1}-1\right\}\left(a_k^{(n)}\cos kt+b_k^{(n)}\sin kt\right)+R_{n,\nu}x, \tag{7}$$

где

$$a_k^{(n)}=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}x(t_j)\cos kt_j,\ b_k^{(n)}=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}x(t_j)\sin kt_j,\quad k=\overline{1,n-1},$$

$$a_n^{(n)}=\left[\frac{N-1}{n}\right]\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x(t_j)\cos nt_j,\ b_n^{(n)}=\left[\frac{N-1}{n}\right]\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x(t_j)\sin nt_j,$$

$$t_k=t_k^{(N)}=\frac{2k\pi}{N},\quad k=\overline{1,N},\ n=\left[\frac{N}{2}\right],\ N=1,2,\ldots,\nu=\overline{1,4},\ l=\left[\frac{r}{2}\right],\ r=1,2,\ldots,$$

$[\sigma]$ – целая часть σ, $\nu=\overline{1,4}$, $\lambda_{k,1}^{(n)}=1;\ \lambda_{k,2}^{(n)}=\cos\frac{k\pi}{N};\ \lambda_{k,3}^{(n)}=\frac{k\pi}{2n+2}ctg\frac{k\pi}{2n+2};$

$$\lambda_{k,4}^{(n)}=\frac{n-k+1}{n+2}\cos\frac{k\pi}{n+2}+\frac{\sin\frac{k+1}{n+2}\pi}{(n+2)\sin\frac{\pi}{n+2}},\ k=\overline{1,n},$$

а $R_{n,\nu}x$ – остаточный член.

Квадратурную формулу (7) можно записать в виде

$$A_1 x = A_1(x;t) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} x(t_k)\sum_{j=1}^{n}{}' j\left\{1-\left(1-\lambda_{j,\nu}^{(n)}\right)^{l+1}\right\}\cos j(s_k - s) + R_{n,\nu}x,\ \ n = \left[\frac{N}{2}\right],$$

где штрих у знака суммы означает, что слагаемое, соответствующее значению $j = n$ при $N = 2n$ следует разделить на 2.

Теорема 2. Если $x(t) \in H_\alpha^{(r)}(M,[0,2\pi]), r = 0,1,\ldots,0 < \alpha < 1,$ то для остаточного члена квадратурной формулы (7) справедлива равномерная оценка

$$\left\|R_{n,\nu}x\right\|_C = O\left(\frac{\ln N}{N^{\alpha+r-1}}\right), \quad \alpha + r > 1, N \geq 2,\ r \geq 1,\ \nu = \overline{1,4}.$$

3. Заключение

В результате исследования предложен способ построения квадратурных формул для гиперсингулярных интегралов, основанных на известных квадратурных формулах для сингулярных интегралов.

Список источников

1. Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. – Минск: «Вышэйшая школа», 1968, 320 с.

2. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. Интерполирование по экстремальным точкам многочленов Чебышева и его применения // Изв. вузов. Матем. 2005. № 5. С. 22–41.

3. Шешко М.А. О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла // Изв. вузов. Матем. 1976. № 12. С. 108–118.

4. Monegato G. On the weights of certain quadratures for the numerical evaluation of Cauchy principal value integrals and their derivatives // Numer. Math. 1987. Vol. 50. P. 273–281.

5. Габдулхаев Б.Г. Аппроксимация в Н-пространствах и приложения // Докл. АН СССР. 223:6 (1975). С. 1293–1296.

6. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980, 232 с.

7. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учебное пособие. Харьков, ХНУ, 2002, 92 с.

8. Солиев Ю.С. О конечномерных аппроксимациях гиперсингулярного интеграла с ядром Гильберта // Современные методы теории функций и смежные вопросы. Материалы Воронежской зимней математической школы. Воронеж, 2015., стр. 131-132.

References

1. Turetsky A.Kh. The theory of interpolation in problems. – Minsk: «Vysheyshaya shkola», 1968, 320 p. (In Russ.).

2. Gabdulkhaev B.G., Ermolaeva L.B. Interpolation by extreme points of Chebyshev polynomials and its applications // Izv. vuzov. Matem., 2005. No. 5. P. 22–41. (In Russ.).

3. Sheshko M.A. On the convergence of quadrature processes for a singular integral // Izv. vuzov. Matem., 1976. №12. P. 108–118. (In Russ.).

4. Monegato G. On the weights of certain quadratures for the numerical evaluation of Cauchy principal value integrals and their derivatives // Numer. Math. 1987. Vol. 50. P. 273–281.

5. Gabdulkhaev B.G. Approximation in H-spaces and applications // Dokl. AN SSSR. 223:6 (1975). P. 1293–1296. (In Russ.).

6. Gabdulkhaev B.G. Optimal approximations of solutions to linear problems. - Kazan: Izd-vo Kazansk. Univ., 1980, 232 p. (In Russ.).

7. Gandel Yu.V. Introduction to methods for calculating singular and hypersingular integrals. Tutorial. Kharkov, KhNU, 2002, 92 p.

8. Soliev Yu.S. On finite-dimensional approximations of a hypersingular integral with a Hilbert kernel // Modern methods of function theory and related issues. Materials of the Voronezh Winter Mathematical School. Voronezh, 2015. P. 131-132. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 97-100.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 97-100.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Елена Викторовна Чаплыгина✉
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Россия, Орёл
lena260581@yandex.ru✉

Аннотация. *Исследуется дифференциально-разностное уравнение Лаврентьева-Бицадзе с отклонением в смешанной области. Вопрос существования и единственности решения задачи сводится к разрешимости матричной системы.*

Ключевые слова: *Задача Трикоми, уравнение смешанного типа, диффеоморфизм.*

Conference paper

THE TRICOMI PROBLEM OF A MIXED-TYPE FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION

Elena V. Chaplygina✉
Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Methods of Teaching mathematics,
Orel State University, Russia, Orel
[1]lena260581@yandex.ru✉

Abstract. *The differential-difference equation Lavrentiev-Bitsadze with deviation in the mixed region is investigated. The question of the existence and uniqueness of solving the problem boils down to the solvability of the matrix system.*

Keywords: *Tricomi problem, mixed-type equation, diffeomorphism.*

1. Введение. Постановка задачи

Источником разностных, дифференциально-разностных, функциональных и дифференциально-функциональных уравнений являются краевые задачи для гиперболических систем уравнений в частных производных [1], численные методы решения задач для дифференциальных уравнений [2]. Интерес к функциональным уравнениям связан с возможностью использовать их для

© Чаплыгина Е.В., 2023

моделирования [3] сложных колебательных процессов; изучения упорядоченных структур (синергетика) [4]; проблем [5] турбулентности; устойчивости [6].

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение Лаврентьева-Бицадзе с отклонением

$$u_{xx}(x,y)+sgny\,u_{yy}(x,y)=H(y)[\,b_{0,0}u\left(\alpha_1^{-1}(x),\alpha_2^0(y)\right)+$$
$$+b_{0,1}u\left(\alpha_1^{-1}(x),\alpha_2^1(y)\right)+b_{1,0}u\left(\alpha_1^0(x),\alpha_2^0(y)\right)+ \quad (1)$$
$$+b_{1,1}u\left(\alpha_1^0(x),\alpha_2^1(y)\right)+b_{2,0}u\left(\alpha_1^1(x),\alpha_2^0(y)\right)+b_{2,1}u\left(\alpha_1^1(x),\alpha_2^1(y)\right)],$$

где $\alpha_1\ (t),\ \alpha_2\ (t)-$ сохраняющие ориентацию взаимно-обратные диффеоморфизмы класса $C^2\ \ \alpha_{3-j}\left(\alpha_j\ (t)\right)=t\quad (j=1,2)$, удовлетворяющие условиям:

$$\alpha_1(t)<t,\alpha_1'(t)>1\ (\alpha_1'(t)<1)$$

и

$$\alpha_2(t)>t,\alpha_2'(t)<1\ (\alpha_2'(t)>1);$$

$$t_n=\alpha_1(t_{n+1}),t_{n+1}=\alpha_2(t_n),\alpha_2(t_0)>0;\ \alpha_1(t_1)=t_0=0;$$
$$\alpha_j^l(t)\equiv\underbrace{\alpha_j\left(\alpha_j\left(\ldots\left(\alpha_j(t)\right)\ldots\right)\right)}_{l-\text{раз}};\ \text{если}\ l>0;$$
$$\alpha_j^l(t)\equiv\underbrace{\alpha_{3-j}\left(\alpha_{3-j}\left(\ldots\left(\alpha_{3-j}(t)\right)\ldots\right)\right)}_{-l-\text{раз}};\ \text{если}\ l<0;\ \alpha_j^0(t)=t\ (j=1,2);$$

в области $D=D^+\cup D^-$, где

$$D^+=\{(x,y):x_0<x<x_2,y_0<y<y_2\}=\bigcup_{i,j=0}^{1}D_{ij}^+\ \ \text{и}\ \ D^-=\bigcup_{i=0}^{1}D_{i0}^-\ -$$

эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_{kn}^+=\{(x,y):x_k<x<x_{k+1},y_n<y<y_{n+1}\}\ \ (k=\overline{-1,2};n=\overline{0,2});$$
$$D_{k0}^-=\left\{(x,y):-y<\alpha_1^k(x)<y+x_1,-x_1/2<y<0\right\}\ \ (k=0,1).$$

Задача. Найти в области D решение $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^2(D\backslash(J\cup I))$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,y)=P_{i,n}(x,y),(x,y)\in\bar{D}_{i,n}^+\ (i=-1,2;n=\overline{0,2});$$
$$u(x,y)=S_{k,2}(x,y),\quad (x,y)\in\bar{D}_{k,2}^+\ \ (k=\overline{-1,2});$$
$$u\left(x,-\alpha_1^k(x)\right)=\varphi_k(x),x_k<x<\alpha_2^k(x_1/2)\ (k=0,1),$$

причем

$$P_{j,2}(x,y)=S_{j,2}(x,y)\ \ (j=-1,2),\ \varphi_0(0)=P_{-1,0}(0,0);$$
$$I:y=0;\quad J=J_1\cup J_2;\quad J_1:x=x_1,\ J_2:y=y,$$

где $P_{i,n}(x,y),\ S_{k,2}(x,y),\ \varphi_k(x)-$ заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

2. Существование и единственность решения

Теорема. Если $P_{i,n}(x,y) \in C(\overline{D}_{i,n}^{+}) \cap C^2(D_{i,n}^{+})$ $(i=-1,2; n=\overline{0,2})$; $S_{k,2}(x,y) \in C(\overline{D}_{k,2}^{+}) \cap C^2(D_{k,2}^{+})$ $(k=\overline{-1,2})$; $\varphi_k(x) \in C[x_k, \alpha_2^k\left(\frac{x_1}{2}\right)] \cap C^2(x_k, \alpha_2^k\left(\frac{x_1}{2}\right))$ $(k=0,1)$; $P_{j,2}(x,y) = S_{j,2}(x,y)$ $(j=-1,2)$, $\varphi_0(0) = P_{-1,0}(0,0)$; $b_{0j} = b_{2j}$ $(j=0,1)$; $detB \neq 0$, то существует единственное решение задачи.

Вопрос существования и единственности решения задачи сводится к разрешимости матричной системы

$$\bar{u}_{xx}(x,y) + sgny\, \bar{u}_{yy}(x,y) + H(y)\begin{pmatrix} B_0 & B_1 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix}\bar{u}(x,y) = \\ = H(y)\overline{K}(x,y), (x,y) \in D_{0,0}^{\pm},$$

где

$$B_n = \begin{pmatrix} b_{1,n} & b_{0,n} \\ b_{2,n} & b_{1,n} \end{pmatrix} (n=0,1);$$

$$\bar{u}(x,y) = ((u_{0,0}(x,y), u_{1,0}(\alpha_2(x),y), u_{0,1}\big(x,\alpha_2(y)\big), u_{1,1}\big(\alpha_2(x),\alpha_2(y)\big))^T;$$

$\overline{K}(x,y)$ −известная вектор-функция,

а

$$u_{i,j}(x,y) = u(x,y), (x,y) \in D_{ij}^{\pm}\ (i,j=0,1).$$

Заключение

Решение дифференциально-разностное уравнение Лаврентьева-Бицадзе с отклонением сведено к разрешимости матричной системы в области $D_{0,0}^{\pm}$.

Список источников

1. Шарковский А.Н. Разностные уравнения и их приложения / А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко – Киев, 1986.

2. Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев – М., 1978.

3. Витт А.А. К теории скрипичной струны // Журн. техн. физики. 1936. т. 6, №9. - с. 1459-1479.

4. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Хакен Г. – М.: Мир, 1985.

5. Рошко А. Структура турбулентных сдвиговых течений: новая точка зрения // Ракет. техника и космонавтика. 1976. т. 14, №10. - с. 8-20.

6. Колмановский В.Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием / В.Б. Колмановский, В.Р. Носов – М.: Наука, 1981.

References

1. Sharkovskii A. N. Difference equations and their applications / A.N. Sharkovskii, Y.L. Maistrenko, E.Y. Romanenko – Kiev, 1986.

2. Samarski A. A., Nikolaev E. S. Methods for solving grid equations / A. A. Samarski, E. S. Nikolaev – Moscow, 1978.

3. Witt A. A. On the theory of the violin string. Techn.physics // 1936. vol. 6, No. 9. - pp. 1459-1479.

4. Haken G. Synergetics. Hierarchy of instabilities in self-organizing systems and devices / G. Haken – Moscow: Mir, 1985.

5. Roshko A. Structure of turbulent shear flows: a new point of view. technology and cosmonautics // Roshko A. – 1976. vol. 14, No. 10. p. 8-20.

6. Kolmanovsky V. B., Nosov V. R. Stability and periodic regimes of regulated systems with consequences / V. B. Kolmanovsky, V. R. Nosov – Moscow: Nauka, 1981.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 101-107.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 101-107.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 515.142.5

СТАБИЛЬНЫЕ СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ К ТЕОРИИ

Виктор Михайлович Дергачев[1], Сергей Никитович Лелявин[2]✉
[1]Московский политехнический университет, Россия, Москва
[2]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия, Москва
[2]lel@internets.ru✉

Аннотация. *Конструкция классифицирующего пространства весьма полезна при решении различных задач алгебраической топологии. На языке симплициальных множеств проводится построение симплициальных аналогов многообразий Грассмана $G_N(A)$ и Штифеля $V_{N,K}(A)$ для ассоциативного кольца, которые используются в построении функторов: $F_G : G'_N(A) \to FNA(a_0,...,a_n)$, $F_V : V'_{N,K}(A) \to FNA_k(b_0,b_1,...,b_n)$ и стабильных симплициальных комплексов: $\hat{GL}(A), \hat{G}(A), \hat{V}(A)$.*

Ключевые слова: *симплекс, подалгебра, морфизм, гомоморфизм, ретракция, флаг, K–функтор, многообразия Грассмана и Штифеля.*

Conference paper

SIMPLICIAL EMBEDDINGS IN ALGEBRAIC K THEORY

Victor M. Dergachev[1], Sergey N. Lelyavin[2]✉
[1]Moscow Polytechnic University, Russia, Moscow
[2]Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Russia, Moscow
[2]lel@internets.ru✉

Abstract. *Classification space design is very useful in solving various problems of algebraic topology. In the language of simplicial sets, simplicial analogues of Grassmann $G_N(A)$ and Stiefel $V_{N,K}(A)$ manifolds are built for the associative ring that are used in constructing functors: $F_G : G'_N(A) \to FNA(a_0,...,a_n)$, $F_V : V'_{N,K}(A) \to FNA_k(b_0,b_1,...,b_n)$ and stable simplicial complexes: $\hat{GL}(A), \hat{G}(A), \hat{V}(A)$.*

© Дергачев В.М., Лелявин С.Н., 2023

Keywords: *simplex, subalgebra, morphism, homomorphism, retraction, flag, K-functor, Grassman and Stiefel manifolds.*

1. Введение

Построим симплициальные аналоги многообразий Грассмана $G_N(A)$ и Штифеля $V_{N,K}(A)$ для ассоциативного кольца, но предварительно введем некоторые утверждения, которые нам потребуются в дальнейшем.

Утверждение. Пусть $NA(a_0,a_1,...,a_n)$ нильпотентная подалгебра для нильпотентного множества вершин $(a_0,a_1,...,a_n)$ из $G_N(A)$ и Σ_{n+1} группа подстановок $n+1$ элементов, тогда для любой подстановки $\sigma\in\Sigma_{n+1}$ справедливо равенство: $NA(a_0,a_1,...,a_n)=NA\left(a_{\sigma(0)},a_{\sigma(1)},...,a_{\sigma(n)}\right)$ [1, 17-20].

Теорема. Пусть $\left(a_{i_0},...,a_{i_k}\right)\subset(a_0,a_1,...,a_n)$ вложение нильпотентных подмножеств вершин из $G_N(A)$, тогда имеется вложение нильпотентных подалгебр: $NA\left(a_{i_0},...,a_{i_k}\right)\subset NA(a_0,a_1,...,a_n)$.

Доказательство

Переставим вершины $a_0,a_1,...,a_n$ так, чтобы вершины $a_{i_0},...,a_{i_k}$ стояли первыми в этом списке вершин: $(a_0,a_1,...,a_k)\subset(a_0,a_1,...,a_k,a_{k+1},...,a_n)$, $k<n$. Каждому вычеркиванию вершины $a_i, i>k$ в нильпотентном множестве вершин $a_0,a_1,...,a_i,...,a_n$ соответствует вычеркивание пары порождающих гомоморфизмов φ_i,ψ_i в нильпотентной алгебре $NA(a_0,a_1,...,a_i,...,a_n)$ и имеем, вложение нильпотентных подалгебр: $NA(a_0,..,\hat{a}_i,..,a_n)\subset NA(a_0,..,a_i,..,a_n)$. После вычеркивания последовательно вершин $i=k+1,...,n$ получим вложение подалгебр: $NA\left(a_{i_0},...,a_{i_k}\right)\subset NA(a_0,a_1,...,a_n)$, аналогично это можно доказать для K-нильпотентных подалгебр, тогда имеем следствие.

Пусть $\left(b_{i_0},...,b_{i_k}\right)\subset(b_0,...,b_n)$ вложение K - нильпотентных подмножеств вершин из $V_{N,K}(A)$, тогда справедливо вложение K- нильпотентных подалгебр: $NA_k\left(b_{i_0},...,b_{i_k}\right)\subset NA_k(b_0,...,b_n)$. В силу теоремы: отображению вложения симплексов в $G'_N(A)$: $j:\left(a_{i_0},...,a_{i_k}\right)\subset(a_0,...,a_n)$ соответствует вложение нильпотентных подалгебр: $NA\left(a_{i_0},...,a_{i_k}\right)\subset NA(a_0,a_1,...,a_n)$ и в силу существования контравариантного функтора $F:(a_0,...,a_n)\to FNA(a_0,...,a_n)$ имеем отображение ретрактов допустимых флагов: $F_G(j):FNA(a_0,...,a_n)\to FNA\left(a_{i_0},...,a_{i_k}\right)$, тогда имеем контравариантный функтор F_G, который ассоциирован с симплициальной схемой $G'_N(A)$.

2. Симплициальное множества Грассмана

Набор $(a_0, a_1, ..., a_n, F^n)$ называется n -мерным симплексом в комплексе $G_N(A)$ и обозначим его через σ^n_G, где $(a_0, a_1, ..., a_n)$-нильпотентное множество вершин из $G'_N(A)$, F^n- флаг из $FNA(a_0, a_1, ..., a_n)$, число n обозначает не размерность флага F^n. Отображение d_G перехода к подсимплексам в комплексе $G_N(A)$: если $j:(a_{i_0}, ..., a_{i_k}) \subset (a_0, ..., a_n)$ вложение нильпотентных множеств вершин в $G'_N(A)$, тогда $d_G : (a_0, a_1, ..., a_n, F^n) \to (a_{i_0}, ..., a_{i_k}, F^k)$. Условие транзитивности для отображений d_G и F_G, очевидно выполняется. Построенное симплициальное множество $G_N(A)$ есть Грасманиан, аналогично строим симплициальный комплекс $V_{N,K}(A)$: если $NA_k(b_0, b_1, ..., b_n)$ K-нильпотентная подалгебра алгебры $End(A^N)$, D_k- подмножество K-допустимых флагов для подалгебры $NA_k(b_0, b_1, ..., b_n), F \in D_k$-любой K-допустимый флаг на вершине $b_0 = (u_1^0, ..., u_k^0, Q_0)$, $D_k^* \subset D_k$ - множество K-допустимых флагов на вершине b_0, которые имеют ту же фильтрацию на модуле Q_0, что и флаг F Тогда в силу: $\forall \sigma^n$-условно минимальному симплексу соответствует $\sigma^n = \bigcup_{i=1}^{k} \sigma^{n_i}$, где σ^{n_i}, всевозможные минимальные симплексы для $\sigma^n \in D$ и утверждения: существует единственный минимальный флаг $F_{inf} \in D_k^* \subset D_k$. Имеем отображение $p_k : D_k \to \tilde{D}_k$, которое каждому флагу $F \in D_k$ сопоставляет минимальный флаг $F_{inf} \in D_k^* \subset D_k$, где $\tilde{D}_k$- множество минимальных флагов F_{inf} для флагов $F \in D_k$. Итак, каждому подмножеству K-допустимых флагов D_k соответствует в силу построенного отображения p_k, множество минимальных флагов $\tilde{D}_k \subset D_k$, так что определено вложение $i : \tilde{D}_k \subset D_k$. Можно показать, что для $\forall F_{inf}$ - флага справедливо $p_k(i(F_{inf})) = F_{inf}$, так как $i(F_{inf}) = F_{inf}$ и из за самой конструкции флага F_{inf}, очевидно, что $p_k(F_{inf}) = F_{inf}$. Таким образом, композиция $p_k \circ i$ является тождественным отображением: $p_k : D_k \to \tilde{D}_k$ - ретракция на подмножество.

3. Симплициальное множество Штифеля

В силу полной аналогии с комплексом $G_N(A)$ имеем контравариантный функтор F_k (аналогичный функтору $F : NA(a_0, ..., a_n) \to FNA(a_0, ..., a_n)$) из категории K-нильпотентных подалгебр алгебры $End(A^N)$ в категорию ретрактов K-допустимых (минимальных) флагов: $F_k : NA_k(b_0, ..., b_n) \to F_k NA_k(b_0, ..., b_n)$.

Определим контравариантный функтор F_V из симплициальной схемы $V'_{N,K}(A)$ в категорию ретрактов K-допустимых флагов $F_k NA_k(b_0,...,b_n)$, каждому K-нильпотентному множеству вершин $(b_0,b_1,...,b_n)$ в $V'_{N,K}(A)$ поставим в соответствии K- нильпотентную подалгебру $NA_k(b_0,b_1,...,b_n)$, которой в силу существования контравариантного функтора F_k соответствует ретракт K-допустимых флагов $F_k NA_k(b_0,b_1,...,b_n)$, тогда имеем отображение на объектах категорий: $F_V:(b_0,b_1,...,b_n)\to F_k NA_k(b_0,b_1,...,b_n)$. В силу следствия: отображению вложения K- нильпотентному множеству вершин (симплексов в $V'_{N,K}(A)$) $j:(b_{i_0},...,b_{i_k})\to(b_0,b_1,...,b_n)$ соответствует вложение: $NA_k(b_{i_0},...,b_{i_k})\subset NA_k(b_0,b_1,...,b_n)$ K-нильпотентных подалгебр, которому в силу существования функтора F_k соответствует отображение ретрактов K-допустимых (минимальных) флагов: $F_V(j):F_k NA_k(b_0,b_1,...,b_n)\to F_k NA_k(b_{i_0},...,b_{i_k})$, тогда имеем контравариантный функтор F_V, ассоциированный с симплициальной схемой $V'_{N,K}(A)$.

Построим симплициальное множество $V_{N,K}(A)$, ассоциированное с функтором F_V. Пусть $(b_0,b_1,...,b_n,F_1^n)$ есть n- мерный симплекс в комплексе $V_{N,K}(A)$, обозначим его через σ_V^n, где $(b_0,b_1,...,b_n,F_1^n)$ является n- мерным симплексом (нильпотентное множество вершин) в $V'_{N,K}(A)$, F_1^n - некоторый минимальный флаг из ретракта $F_k NA_k(b_0,b_1,...,b_n)$. Число n не является здесь размерностью флага F_1^n. Отображение d_V перехода к подсимплексам в комплексе $V_{N,K}(A)$: если $j:(b_{i_0},...,b_{i_k})\to(b_0,b_1,...,b_n)$ вложение K- нильпотентных подмножеств вершин в $V'_{N,K}(A)$, тогда $d_V:(b_0,b_1,...,b_n,F_1^n)\to(b_{i_0},...,b_{i_k},F_1^k)$, где K- флаг F_1^k, является образом K- флага F_1^n при отображении ретрактов: $F_V(j):F_k NA_k(b_0,b_1,...,b_n)\to F_k NA_k(b_{i_0},...,b_{i_k})$. Условия транзитивности для отображений d_V, F_V выполняются: $F_V(j_1)\circ F_V(j_2):F_k NA_k(b_0,b_1,...,b_n)\to F_k NA_k(b_{i_0},...,b_{i_k})$, $d_V(j_1)\circ d_V(j_2):(b_0,b_1,...,b_n,F_1^n)\to(b_{i_0},...,b_{i_{k_1}},F_1^{k_1})$, где $j_1:(b_{i_0},...,b_{i_{k_1}})\to(b_{i_0},...,b_{i_{k_2}})$, $j_2:(b_{i_0},...,b_{i_{k_2}})\to(b_0,b_1,...,b_n)$ последовательные вложения в симплициальной схеме $V'_{N,K}(A)$. Построенное Множество $V_{N,K}(A)$ есть симплициальное множество Штифеля.

Отображение $p:V_{N,K}(A)\to G_N(A)$ было определено до сих пор на вершинах (нульмерных симплексах). Продолжим его на произвольные n–мерные симплексы. Для этого определим отображение p согласно общему определению отображения одного симплициального множества, ассоциированного с функтором в другое [2, 13-16].

Каждому n–мерному симплексу в Штифеле $\sigma_V^n=(b_0,...,b_n,F_1^n)$ поставим в соответствии n–мерный симплекс в Грассмане $\sigma_G^n=(a_0,...,a_n,F_1^n)$:

K- нильпотентное множество вершин $(b_0,...,b_n)$ отображается на нильпотентное множество вершин $(a_0,...,a_n)$ тождественно, так что гомоморфизмы проектирования $\varphi_i,\psi_i \in NA_k(b_0,...,b_n)$ не изменяются, а гомоморфизмы G_i, переводящие базис $u_1^0,...,u_k^0$ модуля $P_0=\{u_1^0,...,u_k^0\}$ в базис $u_1^i,...,u_k^i$ модуля $P_i=\{u_1^i,...,u_k^i\}$ игнорируются, т.е. $G_i=0, i=1,...,n.$ При этом K- нильпотентная алгебра $NA_k(b_0,...,b_n)$ естественным образом отображается на нильпотентную алгебру $NA(a_0,...,a_n)$, а множество K-допустимых флагов D_k для K-нильпотентной алгебры $NA_k(b_0,...,b_n)$ естественно вкладывается в множество допустимых флагов D для подалгебры $NA(a_0,...,a_n)$, т.е. минимальный флаг F_1^n будет при этом элементом множества допустимых флагов $D \leftrightarrow F_1^n \in D$: каждый K-допустимый флаг множества D_k является допустимым флагом множества D.

Для флага $F_1^n \in D$ имеется в множестве условно минимальных флагов $FNA(a_0,...,a_n) \subset D$, F_1^n - некоторый условно минимальный флаг.

Таким образом, определено: $p: V_{N,K}(A) \to G_N(A)$, $\left[(b_0,...,b_n,F_1^n) \to (a_0,...,a_n,F_1^n)\right]$ отображение симплициального множества Штифеля $V_{N,K}(A)$, ассоциированное с функтором F_V в симплициальное множество Грассмана $G_N(A)$, ассоциированное с функтором F_G, которое есть отображение симплициальных множеств, ассоциированных с функторами.

Каждому морфизму $d_V:(b_0,b_1,...,b_n,F_1^n) \to (b_{i_0},...,b_{i_k},F_1^k)$ симплексов в комплексе $V_{N,K}(A)$ отвечающему вложению $j:(b_{i_0},...,b_{i_k}) \subset (b_0,...,b_n)$ K-нильпотентных множеств вершин в комплексе $V'_{N,K}(A)$, соответствует аналогичный морфизм симплексов в комплексе $G_N(A)$: $d_G:(a_0,...,a_n,F^n) \to (a_{i_0},...,a_{i_k},F^k)$, где F^n, F^k образы K- флагов F_1^n, F_1^k соответственно. Причем каждому отображению ретрактов K-допустимых флагов: $F_V(j): F_kNA_k(b_0,...,b_n) \to F_kNA_k(b_{i_0},...,b_{i_k})$ отвечает соответствующее отображение ретрактов: $F_G(j): FNA(a_0,...,a_n) \to FNA(a_{i_0},...,a_{i_k})$ допустимых флагов, так что следующие диаграммы, коммутативны:

$$\begin{array}{ccccc}
F_kNA_k(b_0,...,b_n) & \overset{F_V(j_2)}{\to} & F_kNA_k(b_{i_0},...,b_{i_{k_2}}) & \overset{F_V(j_1)}{\to} & F_kNA_k(b_{i_0},...,b_{i_{k_1}}) \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \\
FNA(a_0,...,a_n) & \overset{F_G(j_2)}{\to} & FNA(a_{i_0},...,a_{i_{k_2}}) & \overset{F_G(j_1)}{\to} & FNA(a_{i_0},...,a_{i_{k_1}}), \\
(b_0,...,b_n,F_1^n) & \overset{d_V(j_2)}{\to} & (b_{i_0},...,b_{i_{k_2}},F_1^{k_2}) & \overset{d_V(j_1)}{\to} & (b_{i_0},...,b_{i_{k_1}},F_1^{k_1}) \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \\
(a_0,...,a_n,F^n) & \overset{d_G(j_2)}{\to} & (a_{i_0},...,a_{i_{k_2}},F^{k_2}) & \overset{d_G(j_1)}{\to} & (a_{i_0},...,a_{i_{k_1}},F^{k_1}),
\end{array}$$

$j_1:\left(b_{i_0},...,b_{i_{k_1}}\right)\subset\left(b_{i_0},...,b_{i_{k_2}}\right), j_2:\left(b_{i_0},...,b_{i_{k_2}}\right)\subset(b_0,...,b_n).$

4. Стабилизация 1. (по II слагаемому Q в $G_N(A),V_{N,K}(A)$

На нульмерных симплексах построим вложение : $i_1^G:(P,Q)\to(P,Q\oplus A)$. Это вложение продолжим до симплициального вложения комплексов: $\hat{i}_1^G:G_N(A)\to G_{N+1}(A)$ прибавляя модуль A, как прямое слагаемое ко всем членам фильтрации флагов, аналогично определяем стабилизацию 1. В комплексе Штифеля: $V_{N,K}(A)$: $\hat{i}_1^V:V_{N,K}(A)\to V_{N+1,K}(A)$, $i_1^V:(e_1,...,e_k,Q)\to(e_1,...,e_k,Q\oplus A)$
Прямые пределы этих стабилизаций задают стабильные комплексы по II слагаемому $\hat{G}_p(A),\hat{V}_k(A)$.

5. Стабилизация 2. (по I слагаемому в $G_N(A),V_{N,K}(A)$

На множестве вершин определяем вложения: $i_2^G:(P,Q)\to(P\oplus A,Q), i_2^V:(e_1,...,e_k,Q)\to(e_1,...,e_k,y,Q)$, y - образующая модуля A. Продолжаем эти отображения до симплициальных вложений, прибавляя модуль A ко всем членам фильтраций флагов.

Заключение

Стабильные симплициальные комплексы $\hat{G}(A)$ и $\hat{V}(A)$, являющиеся прямыми пределами стабилизаций 1. и 2 есть симплициальные комплексы Грассмана и Штифеля [3, 161-166]. Так как отображение $p:V_{N,K}(A)\to G_N(A)$ коммутирует с обеими стабилизациями, получаем симплициальное отображение стабильных комплексов: $p:\hat{V}(A)\to\hat{G}(A)$.

Список источников

1. Dergachev V., Lelyavin S. Creation of the infinite algebraic K – functors of the p. II. Austrian Journal of Technical and Natural Sciences. № 3-4, 2018 (March – April), p. 17-20.

2. Dergachev V., Lelyavin S. Creation of the infinite algebraic *K* – functors of the p. I. Austrian Journal of Technical and Natural Sciences № 11-12, 2017, (November – December), pp. 13-16.

3. Дергачев В.М., Лелявин С.Н. Симплиционные вложения в алгебраической К-теории. Всероссийская научно-практической конференция с международным участием. СПФМН-2022, г. Орёл, (25 – 26 ноября), 2022, с. 161-166.

References

1. Dergachev V., Lelyavin S. Creation of the infinite algebraic K – functors of the p. II. Austrian Journal of Technical and Natural Sciences. № 3-4, 2018 (March – April), p. 17-20.

2. Dergachev V., Lelyavin S. Creation of the infinite algebraic K – functors of the p. I. Austrian Journal of Technical and Natural Sciences № 11-12, 2017, (November – December), pp. 13-16.

3. Dergachev V.M., Lelyavin S.N. Simplistic investments in algebraic K-theory. All-Russian scientific and practical conference with international participation. SPFMN-2022, Orel, (November 25-26), 2022, pp. 161-166.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 108-111.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 108-111.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 514.122

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БРИАНШОНА С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Пётр Сергеевич Караваев[1]✉
[1]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный, Россия*
[1]*pskaravaev@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3214-6624*

Аннотация. *Во время изучения теоремы Брианшона было обнаружено, что в открытом доступе отсутствует её доказательство с помощью комплексных чисел. В статье приводится это доказательство.*

Ключевые слова: *планиметрия, геометрия, теорема Бриашона, Брианшон, комплексные числа.*

Conference paper

BRIANCHON'S THEOREM PROVED WITH COMPLEX NUMBERS

Petr S. Karavaev[1]✉
[1] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*
[1]*pskaravaev@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3214-6624*

Abstract. *While studying Brianchon's theorem, it was found out that there is no its solution which uses complex numbers in the public domain. Therefore, the author presents the mentioned proof, which can be considered as a simple analytical one, so that it can be accessed and referred afterwards.*

Keywords: *geometry, Brianchon, Brianchon's theorem, complex numbers.*

1. Introduction

A significant number of different proofs of Brianchon's theorem have been already published, including those that use analytical methods [1, 2]. However, the solution that uses complex numbers has not been proposed

© Караваев П.С., 2023

yet. The present article focuses on Brianchon's theorem solution using complex numbers. The chosen method allows to provide both exact algebraic computations and numerical approximations (if certain complex values are given) of the geometric objects.

In order to clarify the defined problem, the theorem is formulated as follows.

Brianchon's theorem. In every circumscribed in a circle simple hexagon $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$, the diagonals X_1X_4, X_2X_5 and X_3X_6 intersect in one point.

2. The Proof

Let $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ be the tangential hexagon and let A, B, C, D, E, F be points of tangency of an inscribed circle with hexagon's sides X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_5, X_5X_6 and X_6X_1 respectively.

As is usual for proofs which use complex numbers, further in the text the complex coordinates of all points are denoted with corresponding small letters.

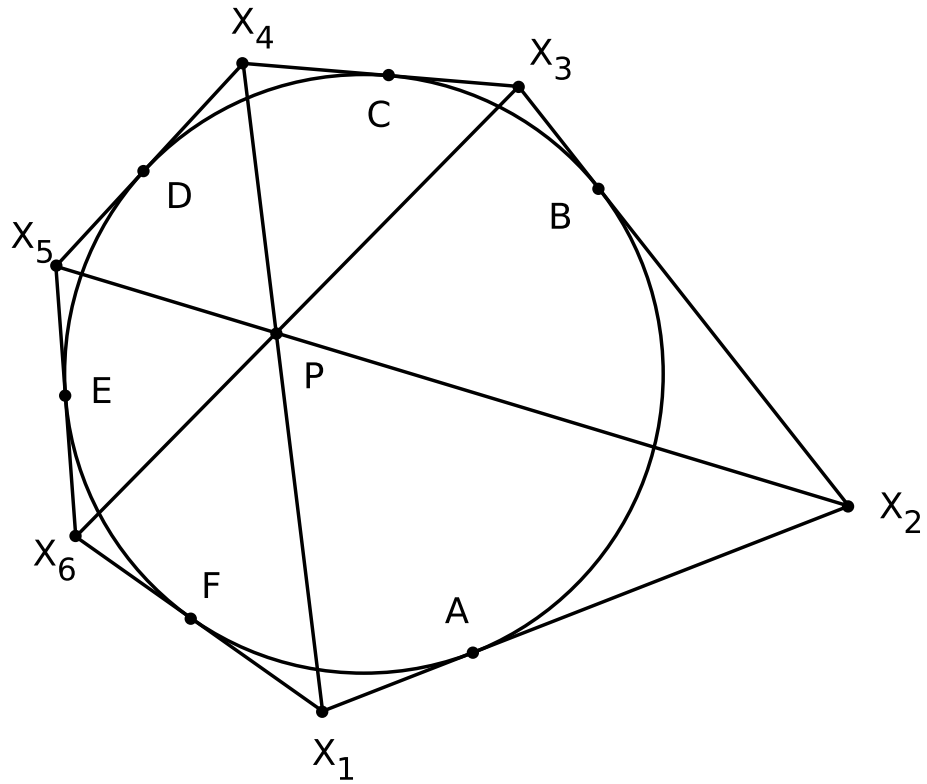


Figure 1 – Proof illustration

Let $(ABCDEF)$ be the unit circle ($z\overline{z} = 1$). According to the

formulas of the point of intersection of tangents to the unit circle [3] we obtain:

$$x_1 = \frac{2af}{a+f},\ x_2 = \frac{2ab}{a+b},\ x_3 = \frac{2bc}{b+c},\ x_4 = \frac{2cd}{c+d},\ x_5 = \frac{2de}{d+e},\ x_6 = \frac{2ef}{e+f}$$

In order to find the intersection of lines X_1X_4 and X_2X_5, we solve the system (using $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, etc.):

$$\begin{cases} \frac{z-x_4}{x_1-x_4} = \overline{\left(\frac{z-x_4}{x_1-x_4}\right)} \\ \frac{z-x_5}{x_2-x_5} = \left(\frac{z-x_5}{x_2-x_5}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z-\frac{2cd}{c+d}}{\frac{2af}{a+f}-\frac{2cd}{c+d}} = \left(\frac{\overline{z}-\frac{2}{c+d}}{\frac{2}{a+f}-\frac{2}{c+d}}\right) \\ \frac{z-\frac{2de}{d+e}}{\frac{2ab}{a+b}-\frac{2de}{d+e}} = \left(\frac{\overline{z}-\frac{2}{d+e}}{\frac{2}{a+b}-\frac{2}{d+e}}\right) \end{cases} \tag{1}$$

Then

$$\begin{cases} \frac{z}{acf+adf-acd-cdf} - \frac{\overline{z}}{c+d-a-f} = \frac{2\cdot(cd-af)}{(acf+adf-acd-cdf)\cdot(c+d-a-f)} \\ \frac{z}{abd+abe-ade-bde} - \frac{\overline{z}}{d+e-a-b} = \frac{2\cdot(de-ab)}{(abd+abe-ade-bde)\cdot(d+e-a-b)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & z\cdot((c+d-a-f)\cdot(abd+abe-ade-bde)- \\ & -(d+e-a-b)\cdot(acf+adf-acd-cdf)) = \\ & = 2\cdot(cd-af)\cdot(abd+abe-ade-bde)- \\ & -2\cdot(de-ab)\cdot(acf+adf-acd-cdf) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & z\cdot(d-a)\cdot(abd+abe+acd+bef+cdf+cef- \\ & -acf-ade-adf-bce-bcf-bde) = \\ & = 2\cdot(a-d)\cdot(abcf+adef+bcde-abef-abcd-cdef) \end{aligned}$$

As the hexagon is convex, it is obvious in terms of planimetric conclusions that $a \neq d$ and that X_1X_4 and X_2X_5 intersect in one point. Consequently, the system (1) has a unique solution, which can be achieved by the provided calculations.

It implies that X_1X_4 and X_2X_5 intersect in the point P with complex coordinate

$$p = \frac{2\cdot(abef+abcd+cdef-abcf-adef-bcde)}{abd+abe+acd+bef+cdf+cef-acf-ade-adf-bce-bcf-bde}$$

The final step is to notice the symmetry of the mathematical expression with respect to cyclic rotation of variables: $a \to b \to c \to d \to e \to f \to a$, which means that points of intersection of X_1X_4 and X_2X_5 and of X_2X_5 and X_3X_6 are the same.

Now, the point P belongs to all the diagonals X_1X_4, X_2X_5 and X_3X_6; the result follows from this.

References

1. Smart, R. 1600. Analytical Proof of Brianchon's Theorem. // The Mathematical Gazette. 1942. Vol. 26, no. 270. 137 p. https://doi.org/10.2307/3607133
2. Howard, T. C. Abridged Notation in Analytic Plane Geometry // Master thesis. University of Oslo. 2015. P. 33–38. https://www.duo.uio.no/handle/10852/45295
3. Malčeski R., Grozdev S., Anevska K. Geometry of Complex Numbers. 2015. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3714.0327

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 112-119.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 112-119.

Статья в сборнике трудов конференции

УДК 519.17

ДВУХЦВЕТНЫЙ КОД ПРЮФЕРА ДЕРЕВА

Светлана Николаевна Котова[1], Иван Николаевич Попов[2]✉
[1,2]Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, Архангельск, Россия
[1]s.kotova@narfu.ru,
[2]i.popov@narfu.ru✉

Аннотация. *В статье рассматривается вопрос о связи количества чёрных и белых вершин в двухцветном коде Прюфера дерева с общим количеством чёрных и белых вершин дерева. Формулируется необходимое условие кода Прюфера остова полного двудольного графа.*

Ключевые слова: *дерево, код Прюфера дерева, двухцветный код Прюфера дерева, матрица Лапласа-Кирхгофа.*

Conference paper

TWOCOLOR PRUFER CODE OF THE TREE

Svetlana N. Kotova[1], Ivan N. Popov[2]✉
[1, 2]Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia
[1]s.kotova@narfu.ru,
[2]i.popov@narfu.ru✉

Abstract. *The article deals with the question of the relationship between the number of black and white vertices in the twocolor Prufer code of a tree with the total number of black and white vertices of the tree.*

Keywords: *tree, Prufer code of a tree, twocolor tree prufer code, Laplace-Kirchhoff matrix.*

1. Введение

Один из способов хранения информации о помеченном дереве является код Прюфера, предложенный немецким математиком Хайнцом Прюфером в 1918 году [1]. Данный код взаимно однозначно сопоставляет дереву с n вершинами последовательность из $n-2$ целых чисел от 1 до n включительно.

© Котова С.Н., Попов И.Н., 2023

Изначально код Прюфера создавался для доказательства теоремы Кэли о количестве помеченных деревьев. В дальнейшем код стал применяться для решения комбинаторных задач, задач о деревьях и графов в общем. Выясняя особенности кода Прюфера, можно подсчитать или выдвинуть гипотезу о количестве составных частей графов. Это касается и количества остовов графа (например, есть тесная связь между кодами Прюфера и остовами полного графа) [2].

Для выяснения свойств графов применяется метод раскраски графа. Раскрашивая дерево, по сути, можем рассматривать и раскрашенные коды Прюфера (так называемые цветные коды Прюфера). При этом, исходя из правильной раскраски графов, код Прюфера раскрашивается в два цвета, например, чёрный и белый по цветам вершин дерева. Целью статьи является установления связи между количеством чёрных и белых вершин дерева с количеством чёрных и белых вершин, входящих в запись кода Прюфера данного дерева (считая, что вершины графа есть числа).

2. Основной текст статьи

Пусть $G = (V; X)$ – дерево с множеством вершин V и множеством рёбер X. Число вершин обозначим n. Каждой вершине сопоставим некоторое число от 1 до n. Такое дерево называется помеченным. В дальнейшем будем рассматривать только такие деревья.

Степень вершины $v \in V$ дерева будем обозначать $\delta(v)$. Вершина, степень которой равна 1, называется листом, остальные вершины называются узловыми.

Код Прюфера дерева: алгоритмы кодирования и декодирования

Алгоритм кодирования

Входные данные: дерево с n вершинами, отмеченными от 1 до n

• Выбирается лист дерева с наименьшим номером. Выписывается номер вершины дерева, с которой выбранный лист соединяется ребром, и выписывается номер этой вершины. Выбранный лист и ребро удаляются из дерева.

• Повторяются аналогичные операции над остатками дерева до тех пор, пока не получится дерево с двумя вершинами.

Результат: набор из $n - 2$ чисел.

Пример. Рассмотрим дерево (рисунок 1).

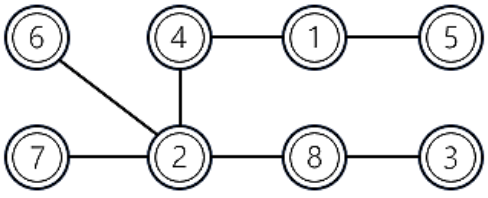


Рисунок 1. Дерево.

Код Прюфера дерева: 8,1,4,2,2,2. ■

При таком кодировании дерева останутся неудалёнными две вершины, одна из которых имеет наивысший номер. В код Прюфера номер вершины v дерева входит в количестве $\delta(v) - 1$ (для листьев дерева это означает, что их номера не участвуют в построении кода).

Алгоритм декодирования

Входные данные: набор из $n-2$ числа из списка от 1 до n

• Изображаются на плоскости n занумерованных от 1 до n точек.

• Выписывается под кодом в порядке возрастания все те из чисел от 1 до n, которые не входят в код. Полученный набор называется антикодом. Точку, отмеченную первым числом кода, соединяем с точкой, отмеченной первым числом антикода. Вычеркиваются эти числа из кода и антикода. Если вычеркнутое число из кода не встречается в остатке кода, то его вписывают на соответствующее место антикода (числа в антикоде упорядочены по возрастанию).

• Повторяются аналогичные операции над остатками кода и антикода до тех пор, пока все числа кода не будут вычеркнуты.

• Соединяются точки, отмеченные числами последнего антикода.

Результат: дерево с n вершинами, отмеченными от 1 до n

Пример. Пусть дан код Прюфера: 5,2,2,2,5,3. Процесс декодирования представлен в таблице 1.

Таблица 1 — Процесс декодирования

5,2,2,2,5,3	2,2,2,5,3	2,2,5,3	2,5,3	5,3	3	
1,4,6,7,8	4,6,7,8	6,7,8	7,8	2,8	5,8	3,8

В результате получаем дерево, изображенное на рисунке 2.

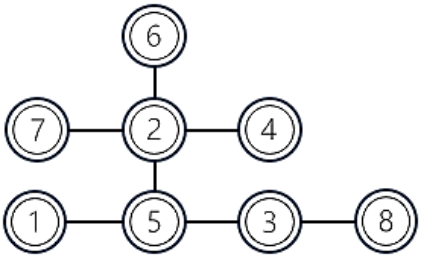


Рисунок 2. Дерево с кодом Прюфера 5,2,2,2,5,3.

Так как код состоит из 6 чисел, то дерево содержит 8 вершин. ■

Каждая последовательность из $n-2$ чисел из множества $\{1; 2; \dots; n\}$ соответствует некоторому дереву с n вершинами. Это означает, что различных кодов Прюфера равно n^{n-2}, отсюда

а) число различных помеченных деревьев с n вершинами равно n^{n-2} (теорема Кэли);

б) число остовов полного графа K_n (графа с n вершинами и $n(n-1)/2$ рёбрами, в котором все вершины смежны) равно n^{n-2}.

Коды Прюфера позволяют генерировать случайным образом деревья с данным числом вершин.

Возникает вопрос об использовании кода Прюфера для определения формулы для вычисления количества остовов различного рода графов (или, по крайней мере, на анализе получаемых данных выдвинуть гипотезу об искомом количестве или пределах изменения). В качестве примера для исследования в этом направлении может выступать полный двудольный граф $K_{n,m}$ (граф, в котором множество вершин разбито на два непересекающихся подмножества

(доли) с n и m вершинами соответственно, и все вершины одной доли смежны (только!) со всеми вершинами другой доли).

Раскраска дерева. Цветной код Прюфера дерева

Каждой вершине графа можно сопоставить некоторое натуральное число, которое называется цветом вершины. Отметим, что цвет вершины может выражать не только какое-то число, но и другие символы (например, буквы алфавита или названия истинных цветов: белый, чёрный и так далее). Говорим, что граф раскрашен, если в графе раскрашены вершины таким образом, что две смежные вершины раскрашены в разные цвета (наименьшее число цветов, необходимых для раскраски, называется хроматическим числом графа). Очевидно, что дерево можно раскрасить в два цвета.

При записи кода Прюфера раскрашенного дерева можно указать рядом, вслед за символом кода, цвета $c_1, c_2, \dots, c_{n-2}$, которые соответствуют вершинам дерева: $p_1, c_1, p_2, c_2, \dots, p_{n-2}, c_{n-2}$. Такой код назовём цветным или раскрашенным. Если в качестве «цветов» выбраны чёрный и белый цвета, то рассматриваются чёрные и белые вершины по соответствующим сопоставленным им цветам.

Рассмотрим два примера.

Пример. Для дерева с 3-я чёрными и 5-ю белыми вершинами (рисунок 3) цветной код Прюфера имеет вид: 8Б,1Ч,4Б,2Ч,2Ч,2Ч.

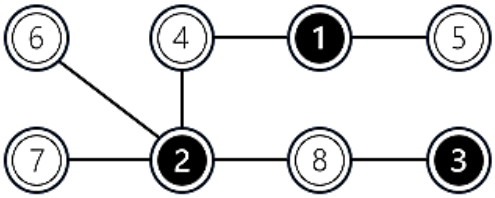


Рисунок 3. Дерево с цветным кодом Прюфера 8Б,1Ч,4Б,2Ч,2Ч,2Ч.

Количество чёрных вершин в коде равно 4, количество белых вершин – 2. ■

Пример. Для дерева с 3-я чёрными и 5-ю белыми вершинами (рисунок 4) цветной код Прюфера имеет вид: 5Б,2Ч,2Ч,2Ч,5Б,3Ч.

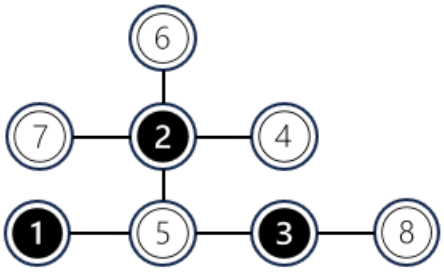


Рисунок 4. Дерево с цветным кодом Прюфера 5Б,2Ч,2Ч,2Ч,5Б,3Ч.

Количество чёрных вершин в коде равно 4, количество белых вершин – 2. ■

Можно увидеть связь между количеством чёрных и белых вершин в дереве и количеством цветов (чёрного и белого) в цветном коде Прюфера.

Теорема. Пусть дерево $G = (V; X)$ раскрашено белым и чёрным цветами. Определим множество W как множество белых вершин этого дерева, множество B – множество его чёрных вершин. Тогда в коде Прюфера дерева G число белых вершин равно $|B| - 1$, число чёрных вершин равно $|W| - 1$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по числу n вершин в дереве.

1. База индукции: $n = 2$. В этом случае а) код Прюфера не содержит ни одного числа (пустой код); б) $|W| = |B| = 1$. Число белых вершин, как и чёрных верши, в коде Прюфера такого дерева равно $0 = |W| - 1 = |B| - 1$. Поэтому утверждение для случая дерева с двумя вершинами справедливо. База индукции доказана.

2. Индукционное предположение: пусть утверждение справедливо для всех деревьев, число вершин в которых меньше n. Докажем справедливость утверждения для числа n.

Пусть x – лист с наименьшим номером дерева G, $\{x; y\} \in X$. Заметим, что код Прюфера дерева G не содержит число x, более того при декодировании число x содержится только в первом антикоде. Тогда код Прюфера дерева G начинается с y. Удалим из дерева G лист x. При этом получим дерево H с $n - 1$ вершиной. Все номера вершин дерева H, которые больше числа x, уменьшим на 1 (отметим, что самого числа x нет в коде Прюфера дерева G, как и нет ни в одном из антикодов). Тогда в дереве H нумерация вершин будет от 1 до $n - 1$ включительно.

По условию задачи дерево G раскрашено двумя цветами. Не теряя общности, будем считать, что вершина x раскрашена белым цветом. Тогда число белых вершин в дереве H равно $|W| - 1$, а чёрных – $|B|$. По индукционному предположению получаем, что в коде дерева H число белых вершин равно $|B| - 1$, а чёрных – $|W| - 2$. Отсюда в самом дереве G содержится $|B| - 1$ белых и $|W| - 1$ чёрных вершин. Индукционный переход доказан.

3. По принципу математической индукции получаем, что утверждение верно для всех деревьев. ■

Пусть $|W| = n$ и $|B| = m$. Одним из примеров цветного кода Прюфера является последовательность

$$wb = w_1 w_2 \dots w_{m-1} b_1 b_2 \dots b_{n-1},$$

где $w_1, w_2, \dots, w_{m-1} \in W, b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \in B$. Количество последовательностей формата wb равно

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{m-1 \text{ раз}} \cdot \underbrace{m \cdot m \cdot \dots \cdot m}_{n-1 \text{ раз}} = n^{m-1} \cdot m^{n-1}.$$

Получаем, что цветных кодов Прюфера, в записи которых $m - 1$ белая вершина и $n - 1$ чёрная вершина, не менее, чем $n^{m-1} \cdot m^{n-1}$.

Рассмотренное свойство деревьев для полного двудольного графа $K_{n,m}$ может быть оформлено в следующую теорему.

Теорема (Необходимое условие кода Прюфера полного двудольного графа**).** Пусть вершины одной доли B полного двудольного графа $K_{n,m}$ пронумерованы числами от 1 до n и раскрашены в чёрный цвет, вершины другой доли W пронумерованы числами от $n + 1$ до $n + m$ и раскрашены в белый цвет (тогда $|B| = n$ и $|W| = m$). Тогда каждый остов графа $K_{n,m}$ есть дерево с цветным кодом Прюфера из $m - 1$ белых и $n - 1$ чёрных вершин.

Эта теорема выражает необходимое условие, но не является достаточным, то есть не каждая последовательность, состоящая из $m-1$ белых и $n-1$ чёрных вершин, является цветным кодом Прюфера графа $K_{n,m}$ с долями W и B.

Пример. Рассмотренные на рисунках 3 и 4 деревья, являются остовыми полного графа $K_{3,5}$ (рисунок 5).

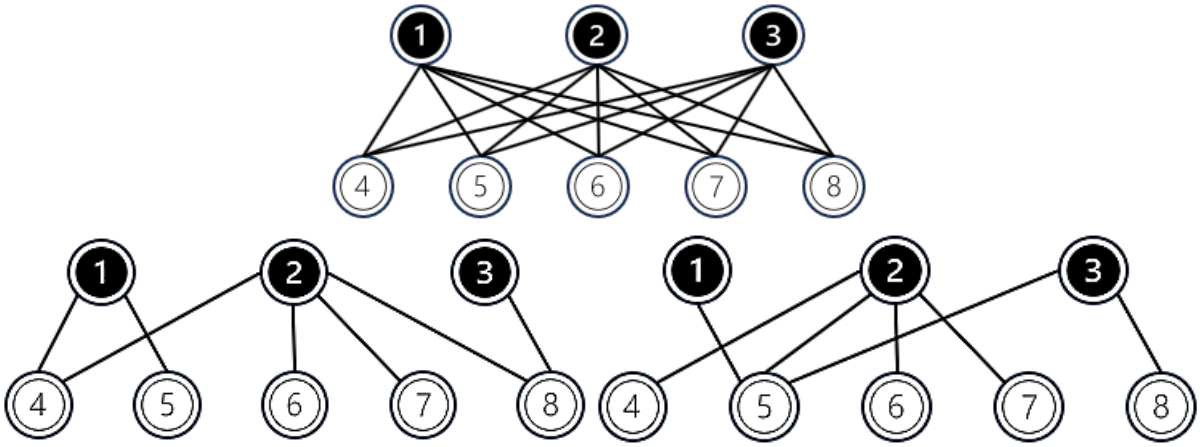


Рисунок 5. Полный двудольный граф $K_{3,5}$ и примеры его остовов

В данном случае $B=\{1;2;3\}$, $W=\{4;5;6;7;8\}$. Последовательность 1Ч1Ч1Ч4Б4Б не является цветным кодом Прюфера графа $K_{3,5}$, так как, декодируя, получаем, что вершины 1 и 2 (из доли B) должны быть смежными, хотя количество чёрных вершин в последовательности равно 4, а белых – 2, что и должно быть в каждом коде Прюфера остова графа $K_{3,5}$. Но и без декодирования можно сказать, что последовательность 1Ч2Ч3Ч4Б5Б6Б не является кодом Прюфера ни одного остова этого двудольного графа. ■

Количество остовов полного двудольного графа

Можно показать, что количество остовов полного графа $K_{n,m}$ вычисляется по формуле $m^{n-1}\cdot n^{m-1}$.

Для определения числа остовов в графе можно воспользоваться свойствами матрицы Лапласа-Кирхгофа [3].

Пусть $G=(V;X)$ – граф с множеством вершин V и множеством рёбер X, $n=|V|$. Матрица Лапласа-Кирхгофа $L(G)$ графа G – матрица размерности $n\times n$, равная $D-A$, где $D=\mathrm{diag}\big(\delta(v)\big)_{v\in V}$ – диагональная матрица степеней вершин графа G и A – матрица смежности графа G.

Важной особенностью матрицы Лапласа-Кирхгофа графа является то, что алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов матрицы L равны между собой.

Теорема (матричная теорема о количестве остовов, Кирхгоф, 1847 г.). Число остовов связного помеченного графа равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Лапласа-Кирхгофа.

Вершины с номерами от 1 до n включительно имеют степень m, вершины с номерами с $n+1$ до $n+m$ включительно имеют степень n. Поэтому матрица Лапласа-Кирхгофа L графа $K_{n,m}$ имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} m & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & m & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & m & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & n & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & n & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Матрица L – матрица размерности $m+n \times m+n$, которая разбивается на четыре подматрицы $L_{n\times n}, L_{n\times m}, L_{m\times n}, L_{m\times m}$ соответствующих размерностей:

$$L = \begin{pmatrix} L_{n\times n} & L_{n\times m} \\ L_{m\times n} & L_{m\times m} \end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраическое дополнение $A_{m+n,m+n}$ матрицы L:

$$A_{n+m,n+m} = \begin{vmatrix} L_{n\times n} & L_{n\times m-1} \\ L_{m-1\times n} & L_{m-1\times m-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & m & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & m & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & n & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & n & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Прибавим к первой строке все остальные строки и после этого прибавим первую строку ко всем строкам, начиная с $n+1$-й:

$$A_{n+m,n+m} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & m & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & n & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & n & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & m & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = m^{n-1} \cdot n^{m-1}.$$

Итак, $A_{n+m,n+m} = m^{n-1} \cdot n^{m-1}$.

Теорема. Количество остовов графа $K_{n,m}$ равно $m^{n-1} \cdot n^{m-1}$.

Получаем, что в любом двудольном графе (подграфе полного двудольного графа), с числом вершин в долях n и m соотвественно, число остовов не превышает числа $m^{n-1} \cdot n^{m-1}$.

3. Заключение

В результате исследования установлена связь между количеством чёрных и белых вершин дерева с количеством чёрных и белых вершин в записи кода Прюфера данного дерева. Исходя из связи указанных количеств, можно отсеивать последовательности, которые заведомо не могут быть кодами Прюфера полного двудольного графа.

Список источников

1. H. Prüfer, Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen, Archiv für Mathematik und Physik 27 (1918), 142-144.

2. Евстигнеев В. А. Применение теории графов в программировании. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 352 с.

3. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин, В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2001. - 288 с.

References

1. H. Prüfer, Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen, Archiv für Mathematik und Physik 27 (1918), 142-144.

2. Evstigneev V. A. Primenenie teorii grafov v programmirovanii. M.: Nauka. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoi literature, 1985. 352 s. (In Russ.)

3. Asanov M. O., Baranskii V. A., Rasin V. V. Diskretnaya matematika: grafi, matroidi, algoritmi. Ijevsk: NIC «Regulyarnaya i haotichnaya dinamika», 2001. 288 p. (In Russ.)

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 120-125.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 120-125.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 512.816

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ДВАЖДЫ ЛОКАЛЬНО ТРАНЗИТИВНЫХ ГРУПП ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Владимир Александрович Кыров[1✉]***, Дмитрий Евгеньевич Щетинин***[2]
[1,2]*Горно-Алтайский государственный университет, Республика Алтай, Горно-Алтайск, Россия*
[1]*KyrovVA@yandex.ru*[✉]*, https://orcid.org/0000-0001-5925-7706*
[2]*shetinin-1993@mail.ru*

Аннотация. *Г.Г. Михайличенко дается определение физической структуры ранга (3,2). Им же доказывается, что эта физическая структура локально эквивалентна дважды точно транзитивному действию группы Ли в пространстве R^n. В.А. Кыровым были найдены алгебры Ли некоторых таких действий в R^3 с подгруппами параллельных переносов. В данной статье находятся локальные дважды точно транзитивные действия для трёх ранее найденных алгебр Ли. При решении этой задачи сначала интегрированием уравнений Ли найдены однопараметрические подгруппы, а затем, вычислены их композиции — искомые действия.*

Ключевые слова: *Группа Ли преобразований, дважды транзитивная группа Ли преобразований, алгебра Ли, уравнения Ли, физическая структура.*

COMPUTATION OF SOME DOUBLY LOCALLY TRANSITIVE LIE TRANSFORMATION GROUPS

Vladimir Kyrov[1✉]***, Dmitry Shchetinin***[2]
[1,2] *Gorno-Altaisk State University, Altai Republic, Gorno-Altaisk, Russia*
[1]*KyrovVA@yandex.ru*[✉]*, https://orcid.org/0000-0001-5925-7706*
[2]*shetinin-1993@mail.ru*

Abstract. *G.G. Mikhailichenko gives a definition of the physical structure of rank (3.2). He also proves that this physical structure is locally equivalent to the doubly exactly transitive action of the Lie group in the space R^n. V.A. Kyrov found the Lie algebras of some such actions in R^3*

© Кыров В.А., 2023

with subgroups of parallel translations. In this article we find local doubly exactly transitive actions for three previously found Lie algebras. When solving this problem, first, by integrating the Lie equations, one-parameter subgroups were found, and then their compositions were calculated — the desired actions.

Keywords: *Lie transformation group, doubly transitive Lie transformation group, Lie algebra, Lie equations, physical structure.*

1. Введение

Согласно монографии Михайличенко Г.Г. [1] под физической структурой ранга (3,2) на гладких многообразиях M и N понимается гладкая функция $f : M \times N \to R^n$, удовлетворяющая трем аксиомам:

1) область определения функции f открытое и плотное подмногообразие в $M \times N$;

2) функция f невырождена по каждому из своих аргументов;

3) аксиома феноменологической симметрии: $\forall a, b, c \in M, \forall x, y \in N$ выполняется тождество

$$\Phi(f(a,x), f(a,y), f(b,x), f(b,y), f(c,x), f(c,y)) = 0,$$

где, например, $f(a,x)$ — значение функции f на точках $a \in M, x \in N$, а $\Phi : R^{6n} \to R^n$ — регулярная функция.

В монографии [1] также доказывается, что физическая структура ранга (3,2) локально задаёт действие дважды точно транзитивной группы Ли преобразований пространства R^n.

В данной работе $n = 3$.

В статьях [2] – [4] решалась задача нахождения алгебр Ли дважды точно транзитивных групп Ли преобразований пространства R^3 с подгруппой параллельных переносов. В данной статье по алгебрам Ли с базисными операторами [3]:

$$\begin{gathered} X_1 = x\partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = x^2\partial_x + xy\partial_y + xz\partial_z, \\ Y_2 = x\partial_y,\ Y_3 = x\partial_z; \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} X_1 = x\partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z, \\ Y_1 = x^2\partial_x + x(y + z^2/2)\partial_y + xz\partial_z, \\ Y_2 = x\partial_y,\ Y_3 = xz\partial_y + x\partial_z; \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z, \\ Y_1 = (xy + y^3/3)\partial_x + y^2\partial_y + y\partial_z, \\ Y_2 = y\partial_x,\ Y_3 = (x + y^2)\partial_x + 2y\partial_y; \end{gathered} \tag{3}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = x\partial_x,\ Y_2 = y\partial_y,\ Y_3 = z\partial_z; \tag{4}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = z\partial_x,\ Y_2 = z\partial_y,\ Y_3 = z\partial_z; \tag{5}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = y\partial_y,\ X_3 = z\partial_z,\ Y_1 = x\partial_x,\ Y_2 = z\partial_y,\ Y_3 = y\partial_z; \quad (6)$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z, \\ Y_1 = y\partial_x,\ Y_2 = y\partial_y,\ Y_3 = (\alpha x + \beta z)\partial_x + z\partial_z; \end{gathered} \quad (7)$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z, \\ Y_1 = x\partial_x,\ Y_2 = y\partial_y + rz\partial_z,\ Y_3 = z\partial_y; \end{gathered} \quad (8)$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z, \\ Y_1 = x\partial_x,\ Y_2 = y\partial_y + z\partial_z,\ Y_3 = z\partial_y - y\partial_z; \end{gathered} \quad (9)$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = x\partial_x,\ Y_2 = y\partial_y,\ Y_3 = y\partial_z, \quad (10)$$

причём $\alpha, \beta, r \neq 0$ – постоянные, находятся уравнения, задающие их локальные действия в R^3, то есть локальные дважды точно транзитивные действия в R^3.

2. Основная часть

Требуется по алгебрам Ли (1) – (10) восстановить локальные действия. Для этого по каждому из базисных операторов по уравнениям Ли [5]

$$\begin{gathered} \frac{\partial x'}{\partial a} = X^1(x', y', z'),\ \frac{\partial y'}{\partial a} = X^2(x', y', z'), \\ \frac{\partial z'}{\partial a} = X^3(x', y', z'), \\ x'|_{a=0} = x,\ y'|_{a=0} = y,\ z'|_{a=0} = z, \frac{1}{1} \end{gathered} \quad (11)$$

где $x' = x'(x, y, z, a), y' = y'(x, y, z, a), z' = z'(x, y, z, a)$; X^1, X^2, X^3 – компоненты оператора

$$X = X^1(x, y, z)\partial_x + X^2(x, y, z)\partial_y + X^3(x, y, z)\partial_z,$$

будет найдена локальная однопараметрическая подгруппа Ли преобразований.

Теорема 1. По операторам

$$\begin{gathered} \partial_x,\ x\partial_x,\ x\partial_y,\ x^2\partial_x + xy\partial_y + xz\partial_z, \\ x^2\partial_x + x(y + z^2/2)\partial_y + xz\partial_z,\ xz\partial_y + x\partial_z, \\ (xy + y^3/3)\partial_x + y^2\partial_y + y\partial_z,\ (x + y^2)\partial_x + 2y\partial_y, \\ (ax + bz)\partial_x + z\partial_z,\ y\partial_y + rz\partial_z,\ z\partial_y - y\partial_z \end{gathered} \quad (12)$$

восстанавливаются соответственно следующие локальные однопараметрические подгруппы:

$$
\begin{gathered}
x'=x+a,\ y'=y,\ z'=z,\\
x'=e^a x,\ y'=y,\ z'=z,\\
x'=x,\ y'=ax+y,\ z'=z,\\
x'=\tfrac{x}{1-ax},\ y'=\tfrac{y}{1-ax},\ z'=\tfrac{z}{1-ax},\\
x'=\tfrac{x}{1-ax},\ y'=\tfrac{axz^2}{2(1-ax)^2}+\tfrac{y}{1-ax},\ z'=\tfrac{z}{1-ax},\\
x'=x,\ y'=a^2x^2/2+axz+y,\ z'=ax+z,\\
x'=\tfrac{ay^3}{3(1-ay)^2}+\tfrac{x}{1-ay},\ y'=\tfrac{y}{1-ay},\ z'=z-\ln(1-ay),\\
x'=\tfrac{y^2(e^{4a}-e^a)}{3}+e^a x,\ y'=e^{2a}y,\ z'=z,\\
x'=xe^{\alpha a}+\tfrac{\beta z(e^a-e^{\alpha a})}{1-\alpha},\ y'=y,\ z'=ze^a,\\
x'=x,\ y'=ye^a,\ z'=ze^{ra},\\
x'=x,\ y'=y\cos a+z\sin a,\ z'=-y\sin a+z\cos a.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Доказательство теоремы сводится к интегрированию уравнений Ли (11). Продемонстрируем это на примере пятого оператора из (12). Уравнения Ли в таком случае принимают вид [5]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial x'}{\partial a}=x'^2,\ \frac{\partial y'}{\partial a}=x'y'+x'z'^2/2,\\
\frac{\partial z'}{\partial a}=x'|_{a=0}=x,\ y'|_{a=0}=y,\ z'|_{a=0}=z.
\end{gathered}
$$

Сначала проинтегрируем первое уравнение, будем иметь $x'=-\frac{1}{a+c}$. Применяя первое начальное условие, получаем $c=-\frac{1}{x}$, тогда $x'=\frac{x}{1-ax}$. Затем интегрируем третье уравнение с применением третьего начального условия: $z'=\frac{z}{1-ax}$. И, наконец, вычисляем решение второго уравнения: $y'=\frac{axz^2}{2(1-ax)^2}+\frac{y}{1-ax}$. Аналогично находятся и остальные результаты из (13).

Далее получаем основной результат статьи.

Теорема 2. Локально дважды точно транзитивные группы Ли преобразований пространства R^3 с алгебрами Ли (1) – (10) задаются соответственно следующими уравнениями:

$$
\begin{gathered}
x'=\frac{a_1x}{1+a_2x},\ y'=\frac{a_3x+y}{1+a_2x}+a_5,\ z'=\frac{a_4x+z}{1+a_2x}+a_6;\\
x'=\tfrac{a_1x}{1+a_2x},\ y'=\tfrac{-a_2xz^2}{2(1+a_2x)^2}+\tfrac{a_3x+a_4xz+a_4^2x^2/2+y}{1-ax}+a_5,\ z'=\tfrac{a_4x+z}{1+a_2x}+a_6;\\
x'=\tfrac{a_1a_3^4y^3}{3(1-a_1y)^2}+\tfrac{y^2(a_3^4-a_3)/3+a_3x+a_2y}{1-a_1y}+a_4,\\
y'=\tfrac{a_3^2y}{1-a_1y}+a_5,\ z'=z-\ln(1-a_1y)+a_6;
\end{gathered}
$$

$$x' = a_1x + a_4,\ y' = a_2y + a_5,\ z' = a_3z + a_6;$$
$$x' = x + a_1z + a_4,\ y' = y + a_2z + a_5,\ z' = a_3z + a_6;$$
$$x' = a_1x + a_4,\ y' = a_2y + a_5z,\ z' = a_3z + a_6y;$$
$$x' = a_3^\alpha x + z\beta\frac{a_3^\alpha - a_3}{\alpha - 1} + a_1y + a_4,\ y' = a_2y + a_5,\ z' = a_3z + a_6;$$
$$x' = a_1x + a_4,\ y' = a_2y + a_3z + a_5,\ z' = a_2^r z + a_6;$$
$$x' = a_1x + a_4,\ y' = a_2y + a_3z + a_5,\ z' = -a_3y + a_2z + a_6;$$
$$x' = a_1x,\ y' = a_2y,\ z' = z + a_3y + a_6,$$

причем тождественному преобразованию в первой и второй группах соответствуют значения параметров $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, в третьей и пятой – $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, в четвертой и шестой – $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$, в седьмой – $(0, 1, 1, 0, 0, 0)$, а в восьмой, девятой и десятой – $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$.

Доказательство. Вычисляются композиции однопараметрических подгрупп базисных операторов $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ алгебр Ли (1) – (10), которые с точностью до обозначений переменных и параметров вычислены в теореме 1 и приведены в (13). Затем в найденных результатах переобозначаются параметры.

3. Заключение

Задача, поставленная в данной статье, полностью решена. Она имеет продолжение, поскольку первым автором найдены еще и другие алгебры Ли дважды точно транзитивных действий групп Ли в пространстве R^3 с подгруппой параллельных переносов.

Список источников

1. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур. Барнаул: Барн. гос. пед. ун-т, 2003. 204 с.
2. Кыров В.А. К вопросу о локальном расширении группы параллельных переносов трехмерного пространства // Владикавк. матем. журн. 2021. Т. 23, № 1. С. 32–42. DOI: https://doi.org/10.46698/q6524-1245-2359-m
3. Кыров В.А. О локальном расширении группы параллельных переносов в трехмерном пространстве // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2022. Т. 32, № 1. С. 62–80. DOI: https://doi.org/10.35634/vm220105
4. Кыров В.А. О группах Ли преобразований пространства с подгруппой параллельных переносов // Математические труды. 2022. Т. 25, № 2. С. 126–148. DOI: 10.33048/mattrudy.2022.25.205

5. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

References

1. Mikhailichenko G.G. Group symmetry of physical structures. Barnaul: Barnaul State Pedagogical University, 2003. 204 p.
2. Kyrov V.A. On the issue of local expansion of the group of parallel translations of three-dimensional space // Vladikavkavkaz Mathematical Journal. 2021. Vol. 23, no. 1. P. 32–42. (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.46698/q6524-1245-2359-m
3. Kyrov V.A. On the local expansion of the group of parallel translations in three-dimensional space // Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer science. 2022. Vol. 32, no. 1. P. 62–80. (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.35634/vm220105
4. Kyrov V.A. On Lie groups of space transformations with a subgroup of parallel translations // Mathematical works. 2022. Vol. 25, no. 2. P. 126–148. (In Russ.). DOI: 10.33048/mattrudy.2022.25.205
5. Ovsyannikov L.V. Group analysis of differential equations. M.: Science, 1978. 400 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 126-134.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 126-134.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.1

ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА СПЕКТРА МАТРИЦЫ ЛАПЛАСА-КИРХГОФА ГРАФА-ЗВЕЗДЫ

Иван Николаевич Попов
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия
i.popov@narfu.ru

Аннотация. *В статье рассматривается вопрос о верхней границе спектра матрицы Лапласа-Кирхгофа графа-звезды. Формулируется условие достижимости верхней границы спектра матрицы Лапласа-Кирхгофа графа-звезды теоретически возможного предела.*
Ключевые слова: *граф, граф-звезда, спектр матрицы Лапласа-Кирхгофа.*

Conference paper

THE UPPER BOUND OF THE SPECTRUM OF THE LAPLACE-KIRCHHOFF MATRIX OF A STAR GRAPH

Ivan N. Popov
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia
i.popov@narfu.ru

Abstract. *The article deals with the question of the upper bound of the spectrum of the Laplace-Kirchhoff matrix of a star graph. The condition for the achievability of the upper bound of the spectrum of the Laplace-Kirchhoff matrix of a graph-star of a theoretically possible limit is formulated.*
Keywords: *graph, star graph, spectrum of the Laplace-Kirchhoff matrix.*

1. Введение

Множество собственных чисел с учетом их кратности квадратной матрицы называют спектром матрицы [1]. Для любого графа рассматривается матрица Лапласа-Кирхгофа [2]. Возникают взаимосвязи между спектром матрицы Лапласа-Кирхгофа графа и характеристиками самого графа [3]. Один из вопросов связан с верхней границей спектра матрицы Лапласа-Кирхгофа графа. В случае графа-звезды верхняя граница спектра матрицы Лапласа-Кирхгофа не

© Попов И.Н., 2023

превышает числа 4. В статье предложено решение задачи об условии равенства верхней границы спектра матрицы Лапласа-Кирхгофа этому числу.

2. Определение графа-звезды

Пусть n, m – натуральные числа, $n \geq 3$, $m < n$ и $(n; m) = 1$ (числа n и m взаимно просты). Единичную окружность разделим точками с номерами $1,2, \dots, n$ на n равных частей и будем последовательно соединять точки через каждые m точек, начиная с 1. Полученный граф называется графом-звездой и обозначается $S_{n,m}$; отмеченные точки являются его вершинами; количество вершин равно n. Будем рассматривать связные графы-звезды. Отметим, что условие $(n; m) = 1$ гарантирует, что граф $S_{n,m}$ является связным. На рисунке 1 указаны примеры графов-звёзд.

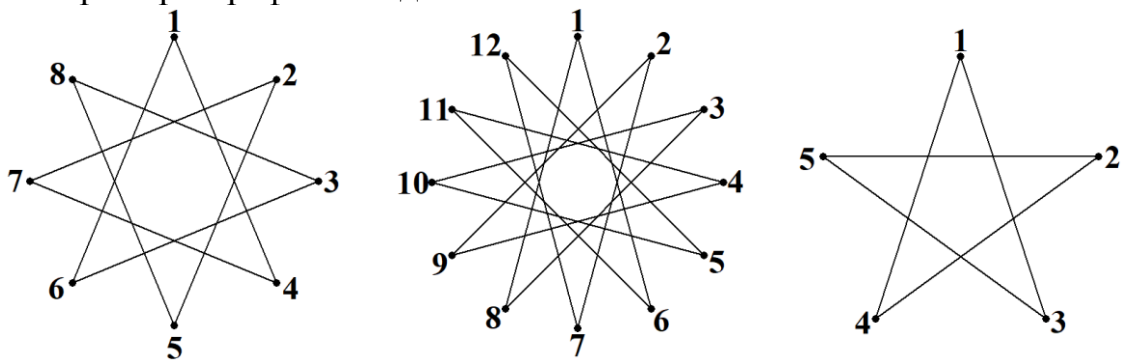


Рисунок 1. Графы-звезды: $S_{8,3}$, $S_{12,5}$, $S_{5,3}$.

При последовательном соединении точек через каждый $n - m$ точек получается тот же граф-звезда, что и при соединении точек через каждые m точек, то есть графы $S_{n,m}$ и $S_{n,n-m}$ равны. Поэтому количество различных связных графов-звезд с n помеченными в определенном порядке вершинами равно $\varphi(n)/2$, где $\varphi(n)$ – функция функции Эйлера от числа n, равная количеству натуральных чисел от 1 до n, взаимно простых с числом n. В дальнейшем будем считать, что и $m \leq n/2$ (отсюда справедливо двойное неравенство $1 \leq n - m \leq n/2$).

Матрица Лапласа-Кирхгофа графа

Матрица Лапласа-Кирхгофа $L(G)$ графа G – матрица размерности $n \times n$, равная $D - A$, где $D = \mathrm{diag}\big(\delta(v)\big)_{v \in V}$ – диагональная матрица степеней $\delta(v)$ вершин v графа G и A – матрица смежности графа G.

Пример. Для графа-звезды $S_{5,2}$ получаем: $D = \mathrm{diag}(2; 2; 2; 2; 2)$ и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L\big(S_{5,2}\big) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Особенности матрицы Лапласа-Кирхгофа графа G: матрица является квадратной; матрица симметрична относительно главной диагонали; сумма элементов каждой строки и каждого столбца равна 0; алгебраические дополнения всех элементов матрицы $L(G)$ равны между собой.

Матрица Лапласа-Кирхгофа может использоваться для определения числа остовов графа.

Теорема (матричная теорема о количестве остовов, Кирхгоф, 1847 г.). Число остовов связного помеченного графа равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Лапласа-Кирхгофа.

Матрица Лапласа-Кирхгофа графа-звезды

Матрица

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \dots & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

называется циркулянтной [4]. Как видим, циркулятная матрица вполне определяется своей первой строкой. Диагональная матрица $\mathrm{diag}(\alpha; \alpha; \dots; \alpha)$ – пример циркулянтной матрицы. Линейная комбинация циркулянтных матриц есть циркулянтная матрица.

Каждая вершина графа-звезды соединяется ровно с двумя другими вершинами, поэтому степень каждой вершины графа равна 2 и в её матрице смежности $A(S_{n,m})$ в каждой строке содержится ровно две единицы в столбцах с номерами $1 + m$ и $1 + n - m$. Матрица $A(S_{n,m})$ является циркулянтной.

По определению $L(S_{n,m}) = \mathrm{diag}(2; 2; \dots; 2) - A(S_{n,m})$. Матрица Лапласа-Кирхгофа графа-звезды $L(S_{n,m})$ является циркулянтной:

$$L(S_{n,m}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы Лапласа-Кирхгофа графа

Характеристический многочлен $h(\lambda)$ для матрицы $L(G)$ графа G определим как определитель $|L(G) - \lambda E|$, где E – единичная матрица;

$$h(\lambda) = |L(G) - \lambda E| = (-1)^n \cdot |\lambda E - L(G)|.$$

Видим, что $h(0) = |L(G)|$ – определитель матрицы $L(G)$. Так как число 0 является собственным числом матрицы $L(G)$ для любого графа G, то $h(0) = 0$, поэтому определитель матрицы Лапласа-Кирхгофа равен 0.

Рассмотрим в качества графа граф-звезды.

Заметим, что матрица $\lambda E - L(S_{n,m})$ является циркулянтной.

Один из методов вычисления определителя циркулянтной матрицы M заключается в умножении её справа на матрицу

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ \varepsilon_0^2 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_{n-1}^2 \\ \dots & & & & \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \dots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ – различные комплексные корни степени n из единицы. Если ввести в рассмотрение многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1},$$

то

$$|M \cdot R| = \begin{vmatrix} f(\varepsilon_0) & f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & \dots & f(\varepsilon_{n-1}) \\ f(\varepsilon_0)\cdot\varepsilon_0 & f(\varepsilon_1)\cdot\varepsilon_1 & f(\varepsilon_2)\cdot\varepsilon_2 & \dots & f(\varepsilon_{n-1})\cdot\varepsilon_{n-1} \\ f(\varepsilon_0)\cdot\varepsilon_0^2 & f(\varepsilon_1)\cdot\varepsilon_1^2 & f(\varepsilon_2)\cdot\varepsilon_2^2 & \dots & f(\varepsilon_{n-1})\cdot\varepsilon_{n-1}^2 \\ \dots & & & & \\ f(\varepsilon_0)\cdot\varepsilon_0^{n-1} & f(\varepsilon_1)\cdot\varepsilon_1^{n-1} & f(\varepsilon_2)\cdot\varepsilon_2^{n-1} & \dots & f(\varepsilon_{n-1})\cdot\varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} =$$
$$= f(\varepsilon_0)\cdot f(\varepsilon_1)\cdot f(\varepsilon_2)\cdot \dots \cdot f(\varepsilon_{n-1})\cdot |R|.$$

Определитель матрицы R – это частный случай определителя Вандермонда; как известно

$$|R| = \prod_{\substack{i,j\in\{0;1;\dots;n-1\}. \\ i\neq j}} (\varepsilon_i - \varepsilon_j).$$

Так как $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ при $i \neq j$, то $|R| \neq 0$; учитывая, что $|M \cdot R| = |M| \cdot |R|$, окончательно получаем формулу вычисления определителя циркулянтной матрицы:

$$|M| = f(\varepsilon_0)\cdot f(\varepsilon_1)\cdot f(\varepsilon_2)\cdot \dots \cdot f(\varepsilon_{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_k).$$

Теорема. Характеристический многочлен матрицы $L(S_{n,m})$ имеет вид:

$$h(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(\lambda - 4\sin^2\frac{\pi m k}{n}\right).$$

Доказательство. Циркулянтная матрица $\lambda E - L(S_{n,m})$ имеет вид:

$$\lambda E - L(S_{n,m}) = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Число $\lambda - 2$ находится в первом столбце, число 1 – в столбцах с номерами $1 + m$ и $1 + n - m$, тогда многочлен $f(x)$ для матрицы $\lambda E - L(S_{n,m})$ имеет вид:

$$f(x) = \lambda - 2 + x^m + x^{n-m}.$$

Пусть $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ – комплексный корень из 1, $0 \le k \le n-1$. Вычислим $f(\varepsilon_k)$, учитывая, что $\varepsilon_k^n = 1$:

$$f(\varepsilon_k) = \lambda - 2 + \varepsilon_k^m + \varepsilon_k^{n-m} = 2 - \lambda + \varepsilon_k^m + \varepsilon_k^{-m} =$$
$$= \lambda - 2 + \cos\frac{2\pi m k}{n} + i\sin\frac{2\pi m k}{n} + \cos\left(-\frac{2\pi m k}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi m k}{n}\right) =$$
$$= \lambda - 2 + 2\cos\frac{2\pi m k}{n} = \lambda - 2\left(1 - \cos\frac{2\pi m k}{n}\right) = \lambda - 4\sin^2\frac{\pi m k}{n}.$$

Следовательно,

$$h(\lambda) = (-1)^n \cdot \left|\lambda E - L(S_{n,m})\right| =$$
$$= (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1}\left(\lambda - 4\sin^2\frac{\pi m k}{n}\right) = (-1)^n \cdot \lambda \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left(\lambda - 4\sin^2\frac{\pi m k}{n}\right). \blacksquare$$

Спектр матрицы Лапласа-Кирхгофа графа-звезды

Множество собственных чисел с учетом их кратности произвольной матрицы U называется спектром матрицы U и обозначается $\sigma(U)$.

Спектр матрицы Лапласа-Кирхгофа $L(G)$ графа G обладает свойствами:

• $\sigma\big(L(G)\big) \subseteq R$ (и считается, что спектр упорядочен по возрастанию);

• $\sigma\big(L(G)\big) \subseteq [0; 2\delta]$, где $\delta = \max\limits_{v \in V}\{\delta(v)\}$ – максимальная степень вершины графа G;

• $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}\big(L(G)\big) = 2 \cdot |X|$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – все собственные числа матрицы $L(G)$, $\mathrm{tr}\big(L(G)\big)$ – след матрицы $L(G)$ (сумма элементов главной диагонали матрицы $L(G)$).

Отметим, что для любого графа G левая граница спектра (число 0) достижима. Это следует из того, что собственным вектором с собственным числом 0 матрицы $L(G)$ является вектор $(1; 1; \dots; 1)$: легко проверить, что верно равенство

$$(1; 1; \dots; 1) \cdot L(G) = 0 \cdot (1; 1; \dots; 1).$$

Правая же граница спектра матрицы $L(G)$ может быть не достижима.

Степень каждой вершины графа $S_{n,m}$ равна 2, тогда $\sigma\left(L\big(S_{n,m}\big)\right) \subseteq [0; 4]$.

Так как

$$h(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left(\lambda - 4\sin^2\frac{\pi m k}{n}\right),$$

то собственными числами матрицы $L\big(S_{n,m}\big)$ являются числа

$$\lambda_k = 4\sin^2\frac{\pi m k}{n}, \qquad k \in \{0; 1; \dots; n-1\}.$$

Отметим, что указанные числа не все попарно различны. Но считаем, что спектр $\sigma\left(L\big(S_{n,m}\big)\right)$ содержит ровно n чисел с учетом их кратности. Учитывая область изменения функции синус, получаем, что $\lambda_k \in [0; 4]$ для каждого k и $\lambda_0 = 0$, что согласуется с общей теорией.

Уже из того, что установлено, можем сформулировать следующий результат в области тригонометрии. Так как число рёбер в графе-звезде $S_{n,m}$ равно n и сумма $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ равна удвоенному числу рёбер, то

$$\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{\pi m k}{n} = \frac{n}{2} \text{ или } \sin^2\frac{\pi m}{n} + \sin^2\frac{2\pi m}{n} + \dots + \sin^2\frac{(n-1)\pi m}{n} = \frac{n}{2},$$

здесь, напомним, числа n и m рассматриваются взаимно простыми.

Правая грань спектра $\sigma\left(L\big(S_{n,m}\big)\right)$ может достигаться. Например,

• $\sigma\left(L\big(S_{8,3}\big)\right) = \{0; 2-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}; 2; 2; 2+\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}; 4\}$;

• $\sigma\left(L\big(S_{12,5}\big)\right) = \{0; 2-\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}; 1; 1; 2; 2; 3; 3; 2+\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}; 4\}$.

Рассмотрим вопрос о достижимости правой границы спектра матрицы Лапласа-Кирхгофа графа-звезды $S_{n,m}$. Рассмотрим несколько способов решения этого вопроса.

Способ 1.

Для характеристического многочлена $h(\lambda)$ матрицы $L\big(S_{n,m}\big)$ получаем:

$$h(4) = (-1)^n \cdot 4 \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left(4 - 4\sin^2\frac{\pi mk}{n}\right) = (-1)^n \cdot 4^n \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\cos^2\frac{\pi mk}{n}.$$

Вычислим $h(4)$, упростив правую часть полученного равенства.

Лемма. Для любого натурального числа n и произвольного действительного числа φ справедливо равенство

$$x^{2n} - 2x^n\cos n\varphi + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\varphi + \frac{2\pi k}{n}\right) + 1\right).$$

Доказательство. Справедливо равенство:

$$x^{2n} - 2x^n\cos n\varphi + 1 = (x^n - \exp(\varphi ni)) \cdot (x^n - \exp(-\varphi ni)).$$

Корнями уравнений $x^n - \exp(\varphi ni) = 0$ и $x^n - \exp(-\varphi ni) = 0$ соответственно являются комплексные числа

$$x = \exp\left(\left(\varphi + \frac{2\pi k}{n}\right)i\right) \quad \text{и} \quad x = \exp\left(\left(-\varphi - \frac{2\pi k}{n}\right)i\right)$$

для всех $k \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$. Тогда

$$x^{2n} - 2x^n\cos n\varphi + 1 = (x^n - \exp(\varphi ni)) \cdot (x^n - \exp(-\varphi ni)) =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1}\left[x - \exp\left(\left(\varphi + \frac{2\pi k}{n}\right)i\right)\right] \cdot \prod_{k=0}^{n-1}\left[x - \exp\left(\left(-\varphi - \frac{2\pi k}{n}\right)i\right)\right] =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1}\left(\left[x - \exp\left(\left(\varphi + \frac{2\pi k}{n}\right)i\right)\right] \cdot \left[x - \exp\left(\left(-\varphi - \frac{2\pi k}{n}\right)i\right)\right] \right) =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\varphi + \frac{2\pi k}{n}\right) + 1\right),$$

откуда следует требуемое. ■

Подставляя в равенство из леммы $x = 1$ и $\varphi = \pi$, получаем:

$$2 - 2\cos\pi n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(2 - 2\cos\left(\pi + \frac{2\pi k}{n}\right)\right) = 2^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \cos\frac{2\pi k}{n}\right),$$

то есть

$$2(1 - (-1)^n) = 2^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \cos\frac{2\pi k}{n}\right).$$

Заметим, что если натуральные числа m и n взаимно простыми, то

$$\left\{\cos\frac{2\pi k}{n}\middle| k \in \{0; 1; \ldots; n-1\}\right\} = \left\{\cos\frac{2\pi m\ell}{n}\middle| \ell \in \{0; 1; \ldots; n-1\}\right\}.$$

Действительно, так как $(m; n) = 1$, то $mu + nv = 1$ для $u, v \in Z$, тогда

$$\cos\frac{2\pi k}{n} = \cos\frac{2\pi k \cdot 1}{n} = \cos\frac{2\pi k \cdot (mu + nv)}{n} = \cos\frac{2\pi k \cdot mu}{n} = \cos\frac{2\pi mu}{n};$$

разделим u на n с остатком: $u = mq + \ell, q, \ell \in Z, \ell \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$, отсюда

$$\cos\frac{2\pi k}{n} = \cos\frac{2\pi m \cdot (mq + \ell)}{n} = \cos\frac{2\pi m\ell}{n}.$$

Тогда, если $(m;n)=1$, то

$$2(1-(-1)^n)=2^n\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\cos\frac{2\pi mk}{n}\right)=4^n\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\cos^2\frac{\pi mk}{n}.$$

Итак, если $(m;n)=1$, то

$$4^n\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\cos^2\frac{\pi mk}{n}=\begin{cases}0,\text{если } n-\text{чётное число;}\\4,\text{если } n-\text{нечётное число.}\end{cases}$$

Теорема. Пусть n,m – натуральные числа, $n\geq 4$, $(n;m)=1$ и $m\leq n/2$. Только при чётных значениях n число 4 является собственным числом матрицы Лапласа-Кирхгофа графа-звезды $S_{n,m}$.

Доказательство. Число 4 является собственным числом матрицы $L(S_{n,m})$, если $h(4)=0$. Так как

$$h(4)=4^n\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\cos^2\frac{\pi mk}{n}=\begin{cases}0,\text{если } n-\text{чётное число;}\\4,\text{если } n-\text{нечётное число,}\end{cases}$$

то число 4 является собственным числом матрицы Лапласа-Кирхгофа графа-звезды $S_{n,m}$ только при чётных значениях. ■

Способ 2.

Собственные числа матрицы $L(S_{n,m})$ вычисляются по формулам:

$$\lambda_k=4\sin^2\frac{\pi mk}{n},\qquad k\in\{0;1;\dots;n-1\}.$$

Число 4 будет принадлежать спектру матрицы $L(S_{n,m})$, если $\lambda_k=4$ для некоторого $k\in\{0;1;\dots;n-1\}$. Решение сводится к решению уравнения $4\sin^2\frac{\pi mk}{n}=4$.

Получаем:

$$4\sin^2\frac{\pi mk}{n}=4,\qquad \frac{\pi mk}{n}=\frac{\pi t}{2},t\in Z,\qquad 2mk=nt.$$

• Если n – чётное, то $k=n/2$ и $t=m$, то есть уравнение $4\sin^2\frac{\pi mk}{n}=4$ разрешимо и верхняя граница спектра матрицы $L(S_{n,m})$ достижима.

• Если n – нечётное, то числа $2m$ и n взаимно просты, поэтому из равенства $2mk=nt$ следует, что $k\vdots n$, что возможно, если только $k=0$, но $4\sin 0\neq 4$, поэтому уравнение $4\sin^2\frac{\pi mk}{n}=4$ не разрешимо и верхняя граница спектра матрицы $L(S_{n,m})$ не достижима.

Отдельно скажем, что доказать, что число 4 принадлежит спектру матрицы $L(S_{n,m})$ при чётных значениях n можно, как и для случая числа 0, явно указав собственный вектор матрицы $L(S_{n,m})$ с собственным числом 4.

Теорема. Пусть n,m – натуральные числа, $n\geq 4$, $(n;m)=1$ и $m\leq n/2$. Если n – чётное число, то число 4 принадлежит спектру $\sigma\left(L(S_{n,m})\right)$.

Доказательство. Столбцы (строки) матрицы будем называть чётными, если номер столбца (строки) является чётным, иначе – нечётными.

Так как число n – чётное и $(n; m) = 1$, то число m является нечётным.

Пусть $a = (1; -1; 1; -1; \dots; 1; -1)$ – вектор с n координатами, в котором на нечётных местах расположено число 1, на чётных – число -1. Покажем, что вектор a является собственным вектором матрицы $L(S_{n,m})$ с собственным числом 4.

Пусть L^j – j-й столбец матрицы $L(S_{n,m})$, $1 \le j \le n$.

В первом столбце число 2 находится в 1-й строке, число -1 – в строках с номерами $1 + m$ и $1 + n - m$. Так как n – чётное и m – нечётное, то число -1 располагается в чётных строках. Тогда произведение вектора a на столбце L^1 равно $1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = 4$, то есть $a \cdot L^1 = 4$.

Так как строки в матрице $L(S_{n,m})$, начиная со второй, получаются циклическим сдвигом, то

• в нечётных столбцах число 2 находится в нечётных строках, число -1 – в чётных строках;

• в чётных столбцах число 2 находится в чётных строках, число -1 – в нечётных строках.

Тогда

• если j – нечётно, то $a \cdot L^j = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = 4$;

• если j – чётно, то $a \cdot L^j = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = -4$.

В итоге получаем равенство: $a \cdot L(S_{n,m}) = (4; -4; 4; -4; \dots; 4; -4) = 4 \cdot a$, отсюда a – собственный вектор матрицы $L(S_{n,m})$ с собственным числом 4.

Итак, если n – чётное число, то 4 принадлежит спектру $\sigma\left(L(S_{n,m})\right)$. ■

3. Заключение

Основным результатом является теорема об условии достижимости верхней границы спектра матрицы Лапласа-Кирхгофа графа-звезды теоретически возможного предела.

Список источников

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2005. 280 с.

2. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин, В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2001. - 288 с.

3. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов: теория и применение. Киев, 1984. - 383 с.

4. Прасолов В. В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2003. – 336 с.

References

1. Ilin V. A., Poznyak E. G. Lineinaya algebra. M.: FIZMATLIT, 2005. – 280 p. (In Russ.)

2. Asanov M. O., Baranskii V. A., Rasin V. V. Diskretnaya matematika: grafi, matroidi, algoritmi. Ijevsk: NIC «Regulyarnaya i haotichnaya dinamika», 2001. - 288 p. (In Russ.)

3. Cvetkovich D., Dub M., Zahs H. Spektri grafov: teoriya i primenenie. Kiev: 1984. – 383 p. (In Russ.)

4. Prasolov V. V. Mnogochleni. M.: MCNMO, 2003. - 336 p. (In Russ.)

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 135-138.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 135-138.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 514(075.8):81(075.8)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ПРИКЛАДНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Ирина Владимировна Прояева[1]✉, Алия Дамировна Сафарова[2]
[1,2]Оренбургский государственный педагогический университет имени В.П. Чкалова, Оренбург, Россия
[1]docentirina@mail.ru✉,
[2]aliya.safarova.66@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена важному вопросу современного инженерного образования - решению прикладных задач с помощью математического аппарата, в частности методами комплексных чисел. Важная и неоценимая роль задач прикладного характера подтверждена многими научными открытиями в области техники, науки и т.п. Также следует отметить, что решение прикладных задач обладает огромным потенциалом для развития логического мышления человека, что показывает актуальность данного исследования и необходимость ее изучения. Основное внимание в работе авторы акцентируют на применении метода комплексных чисел в геометрии, которые являются одними из сложных при изучении математических дисциплин в ВУЗе.

Ключевые слова: метод комплексных чисел**,** планиметрические задачи, современная математика, новые технологии, элементарная геометрия.

Conference paper

APPLICATION OF THE THEORY OF COMPLEX NUMBERS IN APPLIED GEOMETRY

Irina V. Proyaeva[1]✉, Aliya D. Safarova[2]
[1,2]Orenburg State Pedagogical University named after V.P. Chkalova, Orenburg, Russia
[1]docentirina@mail.ru✉,
[2]aliya.safarova.66@mail.ru

Annotation. The article is devoted to an important issue in modern engineering education - solving applied problems using mathematics, in particular the methods of complex numbers. The important and invaluable role of applied tasks has been

Прояева И.В., Сафарова А.Д., 2023

confirmed by many scientific discoveries in the fields of technology, science, etc. It should also be noted that solving applied problems has enormous potential for the development of human logical thinking, which shows the relevance of this research and the need for its study. The authors focus their main attention on the application of the method of complex numbers in geometry, which is one of the most difficult mathematical disciplines to study at a university.

Keywords: complex number method, planimetric problems, modern mathematics, new technologies, elementary geometry.

1. Введение

В период активного развития информационных и цифровых технологий, а также в этом году, который признан годом наставника и педагога, математика со своими специфическими методами и подходами к решению прикладных задач в любой области науки и техники выходит на первый план. Особое значение эти разделы науки важны для обучения студентов на инженерных специальностях. Начиная с древних времен и на протяжении тысячелетий ученые – математики продвигали науку своими, порой безумными на первый взгляд новыми идеями и технологиями, которые сначала не принимались в силу своей непонятности. Но после прохождения некоторого времени, когда аппарат был осознан, математические методы позволяли решать сложные и порой, на первый взгляд, неразрешимые задачи разных научных направлений с легкостью. Такое же недоверие и предубеждение к себе, некоторое время назад, получила теория комплексных чисел. Ученые считали эти числа «мнимыми», «несуществующими», «вымышленными». Однако, по истечению некоторого промежутка времени, считающиеся совершенно ненужными комплексные числа приходят на помощь математикам и помогают решить многие трудные задачи. И постепенно теория комплексных чисел стала выходить на передний план в математике и ее приложениях [1].

2. Основная часть

Рассмотрим в качестве примера решение задачи прикладной геометрии, подтверждающие этот факт [2].

Задача 1. Рассмотрим параллелограммы АВСД и $A_1B_1C_1Д_1$. Докажем точки, делящие отрезки AA_1, BB_1, CC_1, $ДД_1$ в одном и том же отношении являются вершинами параллелограмма (рисунок 1).

Решение. Пусть точки M(m), N(n), P(p), K(k) делят соответственно отрезки AA_1, BB_1, CC_1, $ДД_1$ в отношении λ. Тогда комплексные координаты этих точек $m = \frac{a+\lambda a_1}{1+\lambda}, n = \frac{b+\lambda b_1}{1+\lambda}, p = \frac{c+\lambda c_1}{1+\lambda}, k = \frac{d+\lambda d_1}{1+\lambda}$.

Так как АВСД-параллелограмм, то его диагонали АС и ВД пересекаются и точкой О(о) пересечения делятся пополам. Тогда $o = \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$, поэтому $a + c = b + d$ (1). Аналогично, точка $O_1(o_1)$ пересечения диагоналей A_1C_1 и $B_1Д_1$ второго параллелограмма является серединой каждой диагонали, поэтому $o_1 = \frac{a_1+c_1}{2} = \frac{b_1+d_1}{2}$, тогда $a_1 + c_1 = b_1 + d_1$(2).Найдем комплексные координаты точек X(x), Y(y) – середин диагоналей MP, NK четырехугольника MNPK. [3]

$$x = \frac{a+c+\lambda(a_1+c_1)}{1+\lambda}, y = \frac{b+d+\lambda(b_1+d_1)}{1+\lambda}.$$

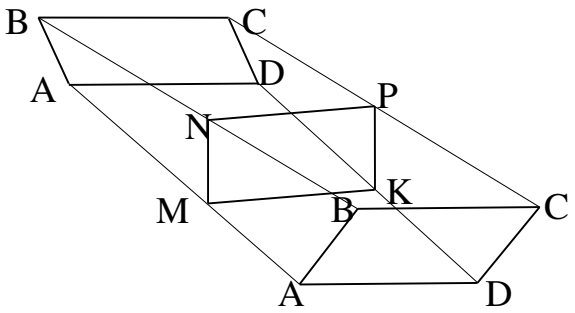


Рисунок 1. Параллелограмм

Учитывая (1) и (2), $X \equiv Y$, получили, что выполняется признак параллелограмма, касающийся свойств диагоналей. Следовательно, MNPK-параллелограмм, что и требовалось доказать.

3. Заключение

В заключение хочется отметить, что знакомство обучающихся инженерных специальностей с новыми и эффективными методами решения прикладных задач способствуют расширению научного кругозора, будет являться дополнительной опорой при решении трудных и нестандартных задач, задач олимпиадного характера. Согласно новой демоверсии единого государственного экзамена 2022 года, комплексные числа будут включены в задания, и, соответственно становятся обязательно изучаемыми в школьном курсе математики. Знакомство школьников с понятием комплексного числа может служить стимулом к развитию интереса школьников к таким разделам математики, как числовые системы, теория многочленов, аналитическая геометрия на плоскости, а также будет пропедевтикой к изучению понятия комплексного числа в вузе [5].

Список источников

1. Понарин Я. П. Метод комплексных чисел в планиметрии. // Математика в школе 1991. №2. С. 46-54

2. Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии. № 168. Изд. 4, стереотип. URSS. 2020. - 200 с.

3. Прояева И. В. Об организации компетентностно-ориентированного подхода самостоятельной работы бакалавров по математическим дисциплинам на технических специальностях ВО // Реализация компетентностного подхода в сфере инженерной подготовки (авторская монография), ООО АЭТЕРНА, 2017, г. Уфа. С. 101-106.

4. Прояева И. В., Сафарова А. Д. Организация самостоятельной работы студентов по подготовке к ГИА курсу «Геометрия», Издательство ОГПУ, Оренбург 2016.

5. Прояева И. В., Сафарова А. Д. Об особенностях преподавания раздела геометрических преобразований в школьном курсе геометрии (статья ВАК) // Мир науки, культуры и образования. 2017, №1(62). С. 150-15.

References

1. Ponarin Ya. P. Method of complex numbers in planimetry. // Mathematics at school 1991, №2. P. 46-54

2. Yaglom I.M. Complex numbers and their applications in geometry. No. 168. Ed. 4, stereotype. URSS. 2020. – 200 p.

3. Proyaeva I.V. On the organization of a competence-based approach to independent work of bachelors in mathematical disciplines in technical specialties of HE // Implementation of a competence-based approach in the field of engineering training (author's monograph), AETERNA LLC, 2017, Ufa. P. 101-106.

4. Proyaeva I.V, Safarova A.D. Organization of independent work of students in preparation for the GIA course "Geometry", OGPU Publishing House, Orenburg, 2016.

5. Proyaeva I.V, Safarova A.D. On the peculiarities of teaching the section of geometric transformations in the school geometry course (article of the Higher Attestation Commission) // World of Science, Culture and Education. 2017. No. 1 (62). P. 150-15.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 139-149.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 139-149.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.2

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ ПОЛИМЕРНОЙ ПЛЕНКИ СО СЛУЧАЙНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ВОЗДУШНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Юрий Петрович Вирченко[1]✉***, Амануэль Мехари Теволде***[2]
[1] *Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, Белгород, Россия*
[2] *Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия*
[1]*virch@bsu.edu.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0002-5413-6179*
[2]*amanuelmt1@gmail.com, https://orcid.org/0009-0006-9669-2858*

Аннотация. *Сконструирована вероятностная модель, описывающая физическое состояние пленки диэлектрика, которая содержит случайным образом распределенные в ней воздушные включения со случайным радиусом $\tilde{r}$. Анализ этой модели показал, что, при достаточно малой плотности воздушных включений, случайный радиус которых имеет почти равномерное распределение вероятностей в пределах $r_* > \tilde{r} > 0$, статистическое распределение электрической прочности со значениями, меньшими электрической прочности бездефектной пленки, имеет ровно два максимума.*

Ключевые слова: *воздушные включения, пленка диэлектрика, независимые случайные величины, двухвершинное распределение, полимерный материал, электрическая прочность, равномерное распределение, точечное случайное поле, плотность, унимодальность.*

Conference paper

ELECTRICAL STRENGTH OF A POLYMER FILM WITH RANDOMLY DISTRIBUTED AIR INCLUSIONS

Yuri P. Virchenko[1]✉***, Amanuel M. Tewolde***[2]
[1] *Belgorod State Technological University, Belgorod, Russia*
[2] *Belgorod State National Investigate University Belgorod, Russia*

© Вирченко Ю.П., Теволде А.М., 2023

[1]*virch@bsu.edu.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0002-5413-6179*
[2]*amanuelmt1@gmail.com, https://orcid.org/0009-0006-9669-2858*

Abstract. *A probabilistic model describing the physical state of a dielectric film is constructed, which contains randomly distributed air inclusions with a random radius $\tilde{r}$. The analysis of this model showed that the statistical distribution of electrical strength with values less than its values for a defect-free film has exactly two maxima. It is realized at a sufficiently small density of air inclusions with a random radius $\tilde{r}$ which has an almost uniform probability distribution within $r_* > \tilde{r} > 0$.*

Keywords: *air inclusions, dielectric film, independent random variables, two-vertex distribution, polymer material, electrical strength, uniform distribution, point random distribution, density, unimodality.*

1. Введение

Изучение явления электрического пробоя, в том числе его теоретический анализ, имеет большую историю. Несмотря на отсутствие, по нашему мнению, принципиально новых теоретических подходов к изучению этого явления, ему, вплоть до настоящего времени, уделяется большое внимание (см., например, [2]-[4]). Это продиктовано как стремлением к теоретическому осмыслению этого физического явления, так и необходимостью практической борьбы с его последствиями, ввиду того, что электрический пробой в твердотельных материалах сопровождается деградацией их физических свойств вплоть до механического разрушения.

В настоящее время, электрический пробой диэлектрических материалов удается теоретически анализировать только на уровне общефизических феноменологических представлений, так как последовательное проведение такого анализа на микроскопическом уровне приводит к чрезвычайно сложным построениям в рамках статистической физики. Таким образом, естественно, что теоретический анализ электрического пробоя в твердотельных материалах основан, как правило, на довольно грубых общефизических моделях, каждая из которых ориентирована на описание с какой-либо одной, хотя и существенной, стороны явления.

Настоящая работа посвящена теоретическому анализу электрической прочности полимерных пленок в том случае, когда в них имеются распределенные случайным образом воздушные включения, наличие которых уменьшает напряжение пробоя E. Здесь мы исследовали распределение электрической прочности пленки полимерного диэлектрика в случае малой плотности включений, когда можно считать, что

пробой порождается только одной электронной лавиной, траектория которой проходит через включения такого рода. Однако, предполагается, что толщина пленки не настолько мала, что траектория электронной лавины, реализующей пробой, на своем пути проходит более чем на два дефекта. Оказывается, что распределение электрической прочности в этом случае является двухвершинным, если плотность распределение их случайных радиусов $\tilde{r}$ является одновершинной и локализован таким образом, что она соответствует почти равномерному распределению вероятностей в пределах некоторого интервала $[0, r_*]$. Наличие описанного физического эффекта наблюдалось экспериментально для многослойных эмаль-лаковых покрытий [1] и анализировалось в [2] и [3]. Наш анализ показывает, что этот эффект проявляется в пленках любого диэлектрического материала. Это анализ основан на статистической модели, при конструкции которой использованы самые общиефизические качественные представления.

2. Физическая картина электрического пробоя пленки диэлектрика

Электрический пробой обусловлен ударной ионизацией, сопровождающейся разрывом связей между частицами диэлектрика непосредственно под действием электрического поля. Электрическая прочность $U_{\text{пр}}$ твердых диэлектриков по отношению к электрическому пробою представляет собой отношение напряжения пробоя E пленки к ее толщине d в направлении приложенного напряжения. Значения этой характеристики лежат в пределах 200-400 В/μm. Наличие расположенных случайным образом воздушных включений со случайными размерами, обуславливает случайный характер пробойного напряжения $\tilde{E}$. В случае, когда отношение $\tilde{r}/d$ не настолько велико так, что дисперсия распределения случайной величины $\tilde{E}$ заметным образом отлична от нуля, на гистограммах случайной величины $\tilde{E}$ можно наблюдать статистический разброс напряжений электропробоя и, следовательно, электрической прочности.

Если на гистограммах измеряемых физических величин, имеющих статистический разброс своих экспериментальных значений, имеется несколько максимальных каналов, то в математической статистике говорят о нарушении *унимодальности* их распределений вероятностей. Отсутствие унимодальности статистических распределений указывает на присутствие какого-либо физического механизма, приводящего к появлению такого эффекта. Такой эффект наблюдался при измерении электрической прочности эмаль-лаковых покрытий [1]. Предлагаемая нами теория указывает на то, что подобный эффект

не связан с тем, что пленка полимерного материала, с которой производились эксперименты, упоминаемые в процитированном обзоре, не обязательно должна быть многослойной. Проявление неунимодальности возможно для пленок, содержащих воздушные включения, в определенном диапазоне их плотностей при унимодальном распределении вероятностей случайных размеров, локализация которого отделена от нуля со средним квадратичным уклонением от среднего значения r_0 сравнимо с этим средним.

Будем предполагать, что воздушные включения имеют сферическую форму, что обусловлено поверхностным натяжением пузырька влючения. В таком случае размер каждого включения характеризуется одной положительной случайной величиной — радиусом пузырька $\tilde{r}$. Наличие включений в пленке диэлектрика уменьшает напряжение электропробоя, так как электрическая прочность воздуха значительно меньше, чем электрическая прочность материала пленки. Ввиду случайности радиусов дефектов, напряжение электрического пробоя также должно быть случайной величиной. Поэтому результаты проводимого по определенному правилу экспериментального изучения электрической прочности пленки фиксируются в виде статистических гистограмм напряжений электропробоя. В настоящем сообщении мы, в рамках сконструированной нами модели, изучаем возможность появления неодновершинности гистограмм экспериментально наблюдаемых напряжений электрического пробоя в случае, если $l << l_0$.

3. Статистическая математическая модель

Рассмотрим пленку диэлектрика толщины d. Основой статистической модели, в рамках которой мы описываем развитие в ней электрического пробоя, является точечное случайное поле $\{\tilde{x}_k; k = 1 \div N\}$, описывающие расположение центров сферических воздушных включений и наборы связанных с этими точками положительных случайных величин $\tilde{r}_k > 0$, $k = 1 \div N$, которые являются случайными радиусами соответствующих включений с центрами в $\tilde{x}_k$, $k = 1 \div N$. Здесь N — большое число, которое представляет число всех имеющих в пленке включений. Так как плотность расположения включений предполагается малой, то мы будем их считать не оказывающими влияния друг на друга, то есть статистически независимыми. Поэтому случайное поле $\{\tilde{x}_k; k = 1 \div N\}$ можно считать трехмерным однородным пуассоновским полем с некоторой плотностью $\rho \sim l_0^{-3}$ расположения точек в объеме пленки. Таким образом, расположения всех включений статистически не зависят друг от друга и, точно также, все случайные величины $\tilde{r}_k$, $k = 1, 2, 3, ...$ независимы в совокупности и

одинаково распределены с общей для них плотностью распределения $h(r)$.

Пусть U – электрическая прочность полимерного материала и U_0 — электрическая прочность воздуха. Движение электронной лавины, посредством которой реализуется электрический пробой, представим в виде ломанной линии, состоящей из прямолинейных отрезков, которые соединяют последовательно центры включений.

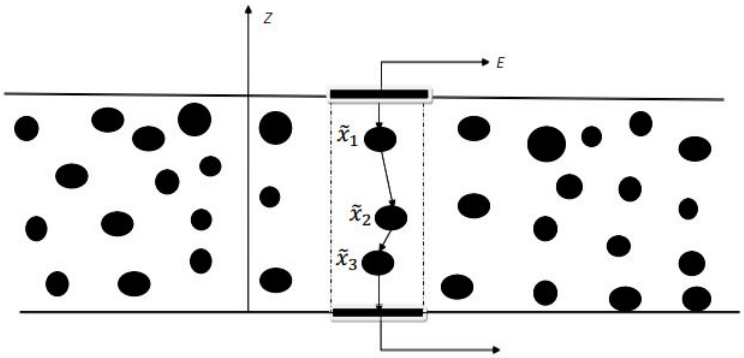


Рисунок 1 – На рисунке схематически показаны воздушные включения вместе с выделенной их цепочкой, вдоль которой стрелками обозначено движение пробойной электронной лавины

Напряжение электрического пробоя, в том случае, когда электронная лавина, в процессе своего развития, движется вдоль элемента ломаной проведенного из m-го в порядке прохождения центра x_{k_m} включения в центр $x_{k_{m+1}}$ следующего $(m+1)$-го включения складывается из напряжения электрического пробоя m-го воздушного пузырька, равного, согласно определению электрической прочности, $U_0\tilde{r}_{k_m}$, и напряжения электрического пробоя полимерного материала вдоль этого элемента, то есть оно равно сумме $U_0\tilde{r}_{k_m} + U \cdot (|\tilde{x}_{k_m}^{(m)} - \tilde{x}_{k_{m+1}}^{(m+1)}| - \tilde{r}_m)$. Следовательно, напряжение электрического пробоя, если пробойная лавина развивается по случайным образом выбранной ломаной траектории, равно

$$\sum_{m=0}^{M} \left[U_0\tilde{r}_m + U \cdot (|\tilde{x}_{k_m}^{(m)} - \tilde{x}_{k_{m+1}}^{(m+1)}| - \tilde{r}_m)\right]. \qquad (1)$$

Здесь номера k_1, ..., k_M — номера точек случайного точечного поля. Лавина развивается по ломанной, для которой сумма (1) минимальна. При этом начальная $\tilde{x}_0$ и конечная $\tilde{x}_{M+1}$ ее точки должны покрываться клеммами подводимого к полимерной пленке электрического напряжения. Таким образом, случайное напряжение $\tilde{E}$ электрического пробоя, связанное со случайным расположением дефектов и их слу-

чайными размерами дается, согласно (1), формулой

$$\tilde{E} = \min_{\tilde{x}_{k_2},\ldots,\tilde{x}_{k_M}} \sum_{m=0}^{M} \left[U_0 \tilde{r}_{k_m} + U \cdot (|\tilde{x}_{k_m} - \tilde{x}_{k_{m+1}}| - \tilde{r}_m)\right]. \qquad (2)$$

Будем считать, что $l << l_0$. Тогда размером клемм можно пренебречь и считать, что точки x_1 и x_{M+1} расположены в центрах клемм. Задача состоит в определении плотности $f(E)$ распределения вероятностей случайной величины (2) при заданных: плотности ρ расположения точек случайного поля $\{\tilde{x}_k; k = 1 \div N\}$ и плотности распределения $h(r)$ в условиях, когда средний размер включения $r_0 = \int_0^\infty rh(r)dr$ намного меньше l_0. В этом случае лавина может развиваться только так, что центры включений, вдоль которых она движется, не сильно отклоняются друг от друга в поперечном по отношению к вертикальной оси. Тогда можно считать, что траектория лавины почти прямолинейна. Более того, так как средний размер r_0 включения много меньше среднего расстояния l_0 между включениями, то $r_0 + l_0 \ll d$. Это позволяет нам пренебречь разницей между длиной каждого звена ломанной и толщиной d слоя пленки. При таких допущениях сумма в (1) равна

$$U_0\tilde{s} + U(d - \tilde{s}) = Ud - (U - U_0)\tilde{s}\,,$$

где случайные величины

$$\tilde{s} \;=\; \sum_{m=1}^{M} \tilde{r}^{(m)}$$

представляют собой суммарную длину всех M воздушных включений, вдоль которых распространяется электронная лавина. Тогда формула (2) запишется в виде $\tilde{E} = Ud - (U - U_0)\tilde{s}$ и необходимость минимизации в (2) отпадает, так как ломанные при сделанных допущениях превращаются в прямолинейные отрезки. Таким образом, напряжение электрического пробоя полностью определяется разностями напряжений электрического пробоя бездефектного полимерного материала и напряжением электрического пробоя слоя воздуха с толщиной, равной сумме всех размеров воздушных включений.

Вводя величину $E_0 = Ud$ напряжения электрического пробоя бездефектного полимерного материала, и положительную разность $\nu = U - U_0$ электрических прочностей полимера и воздуха, запишем базовую формулу для случайного напряжения $\tilde{E}$ электрического пробоя в рамках сконструированной вероятностной модели

$$\tilde{E} = E_0 - \nu\tilde{s}\,,$$

где случайная величина $\tilde{s}$ представляет собой сумму независимых, одинаково распределенных случайных величин, распределенных с плотностью $h(r)$.

Пусть E – некоторое неслучайное значение приложенного в рассматриваемом месте пленки электрического напряжения, при превышении которого случайной величиной $\tilde{E}$ происходит электрический пробой. Введем параметр $s = (E_0 - E)/\nu$. Тогда, так как неравенство $E > E_0 - \nu\tilde{s}$ эквивалентно $s < \tilde{s}$, то соответствующая вероятность $F(E) = \Pr\{\tilde{E} < E\}$ возникновения электрического пробоя равна

$$F(E) = \Pr\{\tilde{E} < E\} = 1 - \Pr\{\tilde{r} < s\}\,.$$

Следовательно, плотность $f(E)$ распределения случайной величины $\tilde{E}$ равна

$$f(E) = \frac{d}{dE}\Pr\{\tilde{E} < E\} = \nu^{-1} g_{_M}(s)|_{s=(E_0-E)/\nu}\,,$$

где учтено, что $ds/dE = -\nu^{-1}$, и введена плотность распределения $g = d\Pr\{\tilde{s} < s\}/ds$. Найдем явное выражение для этой плотности.

Вероятность $\Pr\{\tilde{s} < s\}$ состоит из суммы по всем возможным значениям $m = 0, 1, 2, ..., M$ случайной величины $\tilde{m}$ вероятностей случайных событий $\{\tilde{s} < s,\, \tilde{m} = m\}$, где $\tilde{m}$ – число воздушных включений, через которые проходит электронная лавина при появлении электрического пробоя. Эти события являются произведением независимых при $m > 0$ событий $\{\tilde{s} < s\}$ и $\{\tilde{m} = m\}$. Так как $d \gg l_0 + r_0$, то максимальное значение M случайной величины $\tilde{m}$ при реализации пробоя не может быть большим. В то же время, так как включения распределены независимо друг от друга, то встречи лавины с какими-либо различными включениями должны также рассматриваться как независимые случайные события. Поэтому распределение вероятностей $\Pr\{\tilde{m} = m\}$ определяется последовательностью независимых испытаний

$$\Pr\{\tilde{m} = m\} = \binom{M}{m} v^m (1 - v)^{M-m}\,,$$

где $v > 0$ – малый параметр, пропорциональный плотности воздушных включений в материале.

При $m = 0$ условная вероятность $\Pr\{\tilde{s} < s|k = 0\}$ равна $\theta(s)$, так как $\tilde{r} = 0$. Тогда по формуле полной вероятности получаем следующее выражение

$$\Pr\{\tilde{s} < s\} = (1-v)^M \theta(s) + \sum_{k=1}^{M} \binom{M}{m} v^m (1-v)^{M-m} \Pr\{\tilde{s} < s|m \neq 0\}\,.$$

Следовательно, искомая вероятность полностью определяется распределением вероятностей случайной величины $\tilde{s}$. Это распределение представляет собой распределение вероятностей суммы m независимых, одинаково распределенных в соответствии с плотностью $h(r)$ случайных величин. Поэтому (см., например, [4]) она равна

$$\Pr\{\tilde{s} \le s | k \ne 0\} = \int\limits_0^s \underbrace{(h * ... * h)}_{m}(r)dr\,,$$

где символом $*$ обозначена бинарная операция свертки плотностей распределений вероятностей. В результате, плотность распределения $g_M(s)$ дается следующей формулой

$$g_M(s) = (1-v)^M \delta(s) + \sum_{k=1}^{M} \binom{M}{m} v^m (1-v)^{M-m} \underbrace{(h * ... * h)}_{m}(s)\,, \quad (3)$$

где учено, что $d\theta(s)/ds = \delta(s)$ – функция Дирака.

Наличие δ-функционной особенности в плотности распределения $g_M(s)$ в точке $s = 0$ приводит к наличию δ-функционной особенности в точке $E = E_0$ в плотности распределения $f(E)$. Однако соответствующий максимум, пропорциональный $(1-v)^M$, на гистограммах экспериментальных данных довольно мал и, в дальнейшем, в расчет расчет не принимается. Таким образом, для установления наличия многовершинности распределения вероятностей напряжений электрического пробоя достаточно показать, что плотность распределения $g_M(s)$ не унимодальна при $s \ne 0$.

4. Анализ статистической модели

Покажем, что, в случае указанных выше соотношений между параметрами размерности длины: средним размером включений, средним расстоянием между включениями и толщиной пленки, когда значения параметра v не очень малы, плотность $g_M(s)$ имеет ровно две вершины в неравной нулю точке.

Так как вероятностном моделировании приходится оперировать какой-либо модельной плотностью

$$h(r) \;=\; \frac{d}{dr}\Pr\{\tilde{r} < r\}\,, \quad \int\limits_0^d h(r)dr \;=\; 1\,,$$

которая выбирается, на основе обработки экспериментальных данных. При этом приходится анализировать возможность нарушения унимодальности плотности распределения $f(E)$ на основе выбора плотности $h(r)$ из какого-либо выбранного разумным образом довольно ши-

рокого класса. В настоящей работе, мы анализируем поведение плотности $f(E)$ в том случае, когда плотность $h(r)$ унимодальна с вершиной $r_m > 0$ при $r_* > r > 0$. Однако мы будем считать, что она не локализована в окрестности этой вершины с малым средним квадратичным уклонением, а, наоборот, это уклонение сравнимо по порядку величины с r_0 и при этом $r_* \ll d$.

Проанализируем случай, когда толщина d пленки не настолько мала по сравнению с со средним расстоянием l_0 между включениями, и, следовательно, не настолько мал параметр v, пропорциональный плотности включений. С учетом неравенства $r_* \ll d$ это приводит к тому, что в сумме (3) можно ограничиться при $s > 0$ только несколькими первыми слагаемыми.

В этой работе мы рассмотрим класс плотностей $h(r) = w(x,\lambda)/r_*$, $x = r/r_*$, где $w(x,\lambda) = \lambda^{-1} w_*^{\lambda}(x/\lambda)$. Выбранный класс плотностей такова, что $w(x,\lambda) = \theta(x)\theta(1-x) + 0(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Ниже мы приводим результаты вычислений с модельной плотностью $w(x) = \theta(x)\theta(1-x)$. В этом случае плотности $w_*^m(x)$ сосредоточены на отрезках $[0,m]$, $m = 1,2,3,....$ Они унимодальны с вершинами соответственно в точках $x = m/2$ и имеют следующий вид:

$$w_*^2(x) = x\theta(1-x) + (2-x)\theta(2-x)\theta(x-1)\,,$$

$$w_*^3(x) = \frac{x^2}{2}\theta(1-x) + \theta(2-x)\theta(x-1)[1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(2-x)^2] + \frac{1}{2}(3-x)^2\theta(3-x)\theta(x-2)\,,$$

$$w_*^4(x) = \frac{x^3}{6}\theta(1-x) - \theta(x-1)\theta(2-x)[\frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-2)^3 - x + 1] +$$
$$+\theta(x-2)\theta(3-x)[\frac{1}{6}(x-2)^3 + \frac{1}{3}(x-3)^3 - x + 3] - \frac{1}{6}\theta(x-3)\theta(4-x)(x-4)^3\,,$$

$$w_*^5(x) = \frac{1}{24}\,\theta(1-x)x^4 - \theta(2-x)\theta(x-1)[\frac{1}{8}(x-1)^4 + \frac{1}{24}\,(x-2)^4 -$$
$$-\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{12}] + \theta(3-x)\theta(x-2)[\frac{1}{8}(x-2)^4 + \frac{1}{8}(x-3)^4 -$$
$$-\frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{5}{6}] - \theta(4-x)\theta(x-3)[\frac{1}{8}(x-4)^4 +$$
$$+\frac{1}{24}(x-3)^4 - \frac{1}{2}(x-4)^2 - \frac{1}{12}] + \frac{1}{24}\theta(5-x)\theta(x-4)(x-5)^4\,.$$

Подстановка этих выражений в (3) приводит к следующим выводам относительно плотностей $g_M(s)$ при $M = 3, 4, 5$.

Плотность $g_M(s)$ всегда имеет вершину в точке $x = 1$, которая сопровождается скачком справа от этой точки. Эта вершина единственна при $M = 2$. Наличие разрыва носит чисто модельный характер. Он появляется только в пределе $\lambda \to 0$. При конечных значениях параметра $\lambda > 0$, для рассматриваемого класса плотностей $w(x; \lambda)$ плотность $g_M(s)$ непрерывна в точке $x = 1$. При достаточно малых значениях v ($\eta \approx 1$) вершина в точке $x = 1$ единственна. При промежуточных значениях параметра v ($\eta \approx 4$) у плотности $g_M(s)$ появляется вторая вершина в точке $x > 1$. При значениях же v близких к 1 ($\eta \approx 10$) вершина в точке $x = 1$ практически исчезает, ввиду пренебрежимой малости отклонения плотности в окрестности этой точки от монотонного возрастания. Поэтому, при анализе плотности $g_M(s)$ посредством гистограмм, она уже не должна наблюдаться. В этом случае возрастает роль второй и вершины при $x > 1$. Такой характер изменения плотности $g_M(s)$ характерен при $M = 3$. Однако, при возрастании параметра M, исчезновение универсальной вершины ускоряется так, что уже при $M = 5$ ее наличием можно пренебречь. Таким образом, наблюдаемое на эксперименте наличие бимодальности плотности $g_M(s)$ и, соответственно, плотности $f(E)$ должно наблюдаться для тонких пленок диэлектрика и для некоторых промежуточных плотностей заключенных в ней воздушных включений таких, что число дефектов, через которые проходит электронная лавина, в процессе развития пробоя пленки, с большой вероятностью равно $M = 3 \div 5$.

5. Заключение

Итак, нами сконструирована статистическая модель развития электропробойной лавины в пленке полимерного материала. Показано, что, в условиях малости среднего размера r_0 воздушного дефекта в материале пленки по сравнению с ее толщиной d, в случае, если толщина пленки и плотность расположения дефектов в ней таковы, что прохождение электронной лавины при развитии электропробоя через воздушные включения не носит исключительного характера так, что типичные значения M числа дефектных включений, через которые она проходит, с большой вероятностью равны $3 \div 5$, на экспериментальных гистограммах электрической прочности должны проявляться ровно две вершины. Причем, это положение должно иметь место при изменении в широких пределах физических характеристик диэлектрика.

Список источников

1. Пешков И.Б. Итоги науки и техники. Электротехнические материалы, электрические конденсаторы, провода, т.10 / Moscow: Nauka, 1981. 112 p.
2. Brainskii RP Gnedenko B.V., Zaitseva G.M., Molchanov S.A. Theoretical and statistical investigation of the defect set in enamel-laquer electrically insulting coatings // Soviet Math. Dokl. 1989. Vol. 38, no. 3: P.501-505.
3. Novoseltsev A.D. Probability distributions unimodality of finite sample extremes of independent Erlang random variables // Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1479. 012104. https://doi:10.1088/1742-6596/1479/1/012104.
4. Гнеденко Б.В. Cours of the Probability Theory / Moscow: Book House «Librokom», 2011. 488 p. (In Russ.).

References

1. Peshkov I.B. Results of science and technology. Electrical materials, electrical capacitors, wires, Vol. 10 / Moscow: Nauka 1981. 112 p. (In Russ.).
2. Brainskii R.P. Gnedenko B.V., Zaitseva G.M., Molchanov S.A. Theoretical and statistical investigation of the defect set in enamel-laquer electrically insulting coatings // Soviet Math. Dokl. 1989. Vol. 38, no. 3: P.501-505.
3. Novoseltsev A.D. Probability distributions unimodality of finite sample extremes of independent Erlang random variables // Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1479. 012104. https://doi:10.1088/1742-6596/1479/1/012104.
4. Gnedenko B.V. Cours of the Probability Theory / Moscow: Book House «Librokom», 2011. 488 p. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 150-157.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 150-157.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 51-7 + 636.082

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДЕКСА ПЛЕМЕННОЙ ЦЕННОСТИ ЖИВОТНОГО НА ОСНОВЕ БАЙЕСОВСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Юрий Петрович Вирченко[1✉]***, Дмитрий Андреевич Черкашин***[2]
[1,2] *Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, Белгород, Россия*
[1]*virch@bsu.edu.ru*[✉]*, https://orcid.org/0000-0002-5413-6179*
[2]*dmt.cherkashin@gmail.com*

Аннотация. *Предлагается схема вычисления индекса племенной ценности животного в рамках математической модели отбора наиболее перспективной особи при селекционном отборе. Эта схема основана на решении задачи байесовского оценивания.*

Ключевые слова: *дискретная случайная величина, индекс племенной ценности, математическое ожидание, наиболее вероятное значение, формула полной вероятности.*

Conference paper

DETERMINATION OF THE BREEDING VALUE INDEX OF AN ANIMAL BASED ON BAYESIAN ESTIMATION

Yuri P. Virchenko[1✉]***, Dmitriy A. Cherkashin***[2]
[1,2] *Belgorod State Technological University, Belgorod, Russia*
[1]*virch@bsu.edu.ru*[✉]*, https://orcid.org/0000-0002-5413-6179*
[2]*dmt.cherkashin@gmail.com*

Abstract. *A scheme for calculating the breeding value index of an animal is proposed within the framework of a mathematical model for selecting the most promising female during the breed selection procedure. This scheme is based on solving the Bayesian estimation problem.*

Keywords: *discrete random variable; breeding value index; mathematical expectation; most probable value; Bayes' formula.*

© Вирченко Ю.П., Черкашин Д.А., 2023

1. Введение

Изучается задача генетической оценки так называемого индекса племенной ценности животного, используемого при спаривании животных в племенных хозяйствах в процессе отбора наиболее перспективных племенных животных. Важность решения такой задачи связана с тем, что процесс селекции выстраивается зоотехниками с учетом результатов решения задачи статистической оценки племенной ценности каждого из животных на основе известных данных о происхождении особи и о показанных ею результатах спаривания с другими животными. При постороении статистических оценок генетической ценности племенных животных, в настоящее время, общепринятым является подход, основанный на методе наилучшего линейного несмещенного прогноза (BLUP) [1]. В литературе утверждается, что игнорирование применения этого метода приводит к потерям в эффективности селекции, которые могут достигать 40% и более [2]. Метод расчета BLUP формулируется в терминах стохастического линейного преобразования [1]. В настоящем сообщении предлагается подход для оценки племенной ценности, основанный на решении известной в теории вероятностей задачи о вычислении апостериорных условных вероятностей по Т.Байесу (см., например, [3]).

Идеологическая основа для применения вероятностного подхода при принятиии решений о спаривании каждой пары состоит в следующем. Характеристикой каждого конкретного животного, используемого в процессе селекции, является упорядоченный набор некоторой размерности m его селекционных числовых характеристик, представляющих экономический интерес для животноводства. По каждому числовому показателю, входящему в этот набор, имеется информация о его т.н. племенной ценности, которая численно выражается селекционными индексами. Далее, вводится единый числовой показатель h, который называется индексом племенной ценности. Этот показатель численно определяет прогноз генетического потенциала племенного животного относительно выборочного среднего значения для данной популяции. Величина племенной ценности (генетической) влияет на проявление хозяйственно полезного признака потомства через дисперсионную (случайную) величину — коэффициент наследуемости при передаче генотипа животного потомкам. Это связано с тем, что ожидаемые результаты проведения селекционных мероприятий не являются точно предсказуемыми, то есть на их численные значения оказывают влияние различные случайные факторы. Именно поэтому естественно применить для описания результатов спаривания представления тео-

рии вероятностей.

Пусть, для простоты, набор числовых характеристик племенного животного состоит из одного показателя, $m = 1$. Более того, будем полагать, что эта стохастическая числовая характеристика, которую мы будем обозначать посредством $\tilde{n}$, является целочисленной и принимает значения $\{0, 1, 2, ..., N\}$ с максимальным значением N. Примером такой случайной величины может служить число рождающихся потомков фиксированной особи. Пусть такая особь в заданный момент времени, когда приходится принимать решение о спаривании, характеризуется т.н. индексом племенной ценности h. В соответствии с этим значением и условиями, в которых она находится, выбрано распределение вероятностей посредством $q_n = \Pr\{\tilde{n} = n\}$, характеризующее эти условия. Здесь значение n — ожидаемая численность потомства до принятия определенного решения о партнере спарвания. Реальная же численность потомства после спаривания с выбранным партнером является новой случайной величиной $\tilde{n}'$, на значения которой оказывают влияние как распределение вероятностей q_n, так и конкретные условия спаривания: индекс племенной ценности партнера, насколько близким является генетическое родство особи с этим партнером и внешние условия, при которых происходило спаривание.

Тогда, после спаривания, если известно, что, в результате его проведения, значение случайной величины $\tilde{n}'$ равно n', которая имеет новое, условное (апостериорное) распределение вероятностей $q_n^{(n')}$, то индекс племенной ценности животного должен быть вычислен заново и принять новое значение h' с учетом вновь полученной информации. Таким образом, имеется некоторое преобразование $h' = \mathsf{A}(h)$ значения h селекционного индекса в новое значение h'. Преобразование A зависит, таким образом, от распределения вероятностей q_n и от распределения $q_n^{(n')}$, которое определяется на основе указанной выше информации о партнере и внешних условиях. Таким образом, задача математического моделирования, посредством которой происходит переоценка индекса племенной ценности, сводится к построению преобразования A. Предлагаемый нами метод построения этого преобразования основан на баейесовском оценивании *апостериорного распределения вероятностей* $q_n^{(n')}$.

2. Индекс племенной ценности

При построении конкретной математической модели байесовского оценивания, прежде всего, нужно связать индекс племенной ценности h с распределением вероятностей $q_n = \Pr\{\tilde{n} = n\}$. Обозначим

посредством $\bar{n}$ соответствующее ему математическое ожидание

$$\bar{n} = \mathsf{E}\tilde{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n q_n \, .$$

Будем считать, что распределение q_n является унимодальным. Тогда, наряду с величиной $\bar{n}$, важной характеристикой такого распределения является наиболее вероятное значение n_* случайной величины $\tilde{n}$. Значение n_* определяется как решение уравнения

$$q_{n_*} = \max_{n \in N_+} q_n \, .$$

Определение индекса племенной ценности h не является универсальным, а зависит, вообще говоря, от принятой методики обработки статистических данных по изучаемой характеристики особи, как это имеет место в методе BLUP. В рамках нашего подхода, определим индекс h отношением

$$h = n_*/\bar{n} \, .$$

Переоценка индекса племенной ценности, то есть замена его значения h на значение h', который дается равенством

$$h' = n'_*/\bar{n}' \, ,$$

состоит в определении математического ожидания новой случайной величины $\tilde{n}'$

$$\bar{n}' = \mathsf{E}\tilde{n}' = \sum_{n=0}^{\infty} n q_n^{(n')}$$

и наиболее вероятностного значения n'_* апостериорного распределения вероятрностей $q_n^{(n')}$, которое определяется уравнением

$$q_{n'_*}^{(n')} = \max_n q_n^{(n')} \, .$$

3. Байесовское оценивание

Таким образом, для завершения конструкции преобразования A, необходимо указать связь между распределениями q_n и $q_n^{(n')}$. В настоящем сообщении мы не описываем детально математическую модель, а только лишь намечаем, в общих чертах, метод построения этого преобразования. Поэтому, мы ограничимся введением в модель стохастической матрицу $\mathcal{P}$ с матричными элементами $(\mathcal{P})_{n,n'} = p_{n,n'} = \Pr\{\tilde{n}' = n' | \tilde{n} = n\}$, в терминах которой дадим формулировку задачи. По своему, смыслу матричные элементы $p_{n,n'}$ являются условными вероятностями того, что значение случайной величины $\tilde{n}'$ равно n' при условии, что $\tilde{n} = n$. В матрице $\mathcal{P}$ сосредоточена информация об

условиях содержания особи, племенной ценности партнера и его родстве. Матрица $\mathcal{P}$ связывает распределения вероятностей q_n и новое ожидаемое распределение вероятностей $q_n^{(n')} = \Pr\{\tilde{n}' = n\}$, согласно определению условных вероятностей,

$$q_n^{(n')} = \sum_m p_{n,m} q_m \,.$$

Заметим, что в случае, если матрица $\mathcal{P}$ единичная, то это соответствует тому положению, когда ни внешние условия, ни качество партнера никак не влияют на состояние спариваемой особи. В этом случае

$$q_n^{(n')} = \sum_m \delta_{n,m} q_m = q_n \,.$$

Следовательно, $n'_* = n_*$ и

$$\bar{n}' = \sum_{n'} n' q_{n'} = \bar{n} \,.$$

В таком случае, индекс племенной ценности не изменяется $h' = h$.

Построим, теперь, распределение $q_n^{(n')}$, используя информацию о том, что в результате спаривания рассматриваемой особи и выбранного для нее партнера, характеризация которого заключена в явном виде матрицы $\mathcal{P}$, у нее появилось m потомков. В этом случае распределение $q_n^{(n')}$ должно быть заменено на условное распределение $q_n^{(n')}$, где роль условия играет указанная информация. Согласно Т.Байесу, это условное распределение дается формулой

$$q_n^{(n')} = \frac{p_{n',n} q_n}{\Pr\{\tilde{n}' = n'\}} = \frac{p_{n',n} q_n}{\sum_m p_{n',m} q_m} \,. \qquad (1)$$

Новая случайная величина $\tilde{n}'$ с распределением вероятностей $q_n^{(n')}$ имеет математическое ожидание

$$\bar{n}' = \frac{\sum_n n p_{n',n} q_n}{\sum_m p_{n',m} q_m} \,.$$

Определив для распределения (1) наиболее вероятное значение n'_*, мы получаем возможность переопределить значение индекса племенной ценности.

Заметим, что в случае, если матрица $\mathcal{P}$ единичная, то $\delta_{n',n} q_n = q_{n'} \delta_{n',n}$ и $\sum_m p_{n',m} q_m = q_{n'}$, и поэтому $q_n^{(n')} = \delta_{n,n'}$. Тогда $\bar{n}' = n'$, $n'_* = n'$, и поэтому $h' = 1$.

4. Выбор распределения q_n

Функциональный вид распределения q_n определяется каким-либо образом на основе базовых принципов вероятностного моделирова-

ния. Значения параметров распределения q_n определяются на основе статистических оценок, связанных с массивом, получаемым посредством предшествующих наблюдений. В нашем случае мы проводим такое построение осуществляется в два этапа. Сначала, используя принцип максимальности энтропии Шеннона при условии фиксации параметра $\bar{n}$, находится функциональная форма распределения, зависящая от параметра $\bar{n}$. Затем, используя принцип наибольшего правдоподобия, на основе выборки значений величины $\tilde{n}'$ для достаточно большой совокупности особей, принадлежащих к одной популяции с близкими значениями индекса h и находящихся в одних и тех же условиях содержания в процессе селекции, деделается точечная статистическая оценка параметра $\bar{n}$, на основе принципа наибольшего правдоподобия.

В простейшем случае, функциональная форма распределения q_n получается в виде $q_n = Anq^{n-1}$ с $0 < q < 1$, где из условия нормировки

$$\sum_n q_n = 1$$

находим

$$\sum_n q_n = A\frac{d}{dq}\sum_{n=0} q^n = A\frac{d}{dq}(1-q)^{-1} = A(1-q)^{-2}\,,$$

$A = (1-q)^2$.

Для распределения такого типа параметр $\bar{n}$ вычисляется следующим образом

$$\bar{n} = (1-q)^2\sum_{n=0} n^2q^{n-1} = (1-q)^2\sum_{n=0} n(n-1)q^{n-1} + (1-q)^2\sum_{n=0} nq^{n-1} =$$

$$= 1 + Aq\frac{d^2}{dq^2}\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + Aq\frac{d^2}{dq^2}(1-q)^{-1} =$$

$$= 1 + 2Aq(1-q)^{-3} = 1 + 2q(1-q)^{-1} = \frac{1+q}{1-q}\,.$$

Далее, вычисляется наиболее вероятное значение n_*, то есть значение n, при котором nq^n достигает максимума. Для решения этой задачи рассмотрим функцию $x\exp(-\lambda x)$, $\lambda = -\ln q$. Ее максимум достигается в точке $x = \lambda^{-1} = |\ln q|^{-1}$, удовлеворяющей уравнению

$$\frac{d}{dx}(x\exp(-\lambda x)) = (1-\lambda x)\exp(-\lambda x) = 0\,.$$

Таким образом, $n_* = |\ln q|^{-1}$. Учитывая оба вычисленных значения, находим формулу для индекса племенной ценности в терминах пара-

метра q,

$$h = \frac{1+q}{(1-q)|\ln q|}\,.$$

Наконец, найдем статистическую оценку параметра q на основе принципа наибольшего правдоподобия. Положим, что имеется выборочная совокупность $\{n_m; m = 1 \div N\}$. Тогда, согласно методу наибольшего правдоподобия, находится такое значение параметра q, при котором реализуется

$$\max\{A^N \prod_{m=1}^{N} n_m q^{n_m-1}\} = \max\{(1-q)^{2N} \prod_{m=1}^{N} n_m q^{n_m-1}\}\,.$$

Эквивалентным образом, это сводится к нахождению числа q, при котором реализуется максимум функции

$$2N\ln(1-q) + \sum_{n=1}^{N}(\ln n_m + (n_m-1)\ln q\,.$$

Для экстремальной точки получается уравнение

$$-\frac{2N}{1-q} + \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{N}(n_m - 1) = 0\,.$$

Его решение дает следующую статистическую оценку

$$q = \frac{\sum_{m=1}^{N} n_m - N}{\sum_{m=1}^{N} n_m + N}\,.$$

Наконец, заметим, что наиболее вероятное значение n_* оценивается по индексу h посредством $n_* = h\bar{n}$. А именно, заменив среднее значение $\bar{n}$ его выборочным значением

$$\bar{n} \approx \frac{1}{N}\sum_m n_m$$

для совокупности особей с близкими значениями индексов племенной ценности

$$h \approx= \frac{1}{N}\sum_m h_m\,,$$

положим, что n_* приближенно равно произведению этих выборочных средних. При этом параметр q приближенно равен

$$q = \frac{\bar{n}h - 1}{\bar{n}h + 1}\,.$$

Это согласуется с формулой для математического ожидания $\bar{n}$.

5. Заключение

Для завершения конструкции математической модели необходимо определить матричные элементы $\mathcal{P}$. На конструкцию этой матрицы оказывает влияние генетические характеристики партнера спаривания, условия содержания особи, а также учет эффекта имбридинга посредством использования законов Менделя на основе так называемой матрицы родства, то есть отрицательное влияние близкого родства. Случайные же естественные отклонения от законов Менделя, связанные с тем, что они выражают только лишь связь между средними генотипическими значениями, учитываются использованием распределения q_n.

Список источников

1. Henderson C.R. Accounting for Selection and Mating Biases in Genetic Evaluation // In Gianola D.; Hammond K. (eds.). Advances in Statistical Methods for Genetic Improvement of Livestock: Springer-Verlag Inc., 1990: P.413-436.
2. Кузнецов В.М. Генетическая оценка молочного скота методом BLUP // Зоотехния. 1995.№ 11. С.8-15. (In Russ.).
3. Гнеденко Б.В. Cours of the Probability Theory / Moscow: Book House «Librokom», 2011. 488 p. (In Russ.).
4. Allaire F.R., Henderson C.R. Inbreeding Within an Artificially Bred Dairy Cattle Population // Journal of Dairy Science. 1965. 48(10). P.1366-1371.

References

1. Henderson C.R. Accounting for Selection and Mating Biases in Genetic Evaluation // In Gianola D.; Hammond K. (eds.). Advances in Statistical Methods for Genetic Improvement of Livestock: Springer-Verlag Inc., 1990: P.413-436.
2. Kuznetsov V.M. Genetic evaluation of dairy cattle by BLUP method // Zootechnics. 1995.№ 11. С.8-15. (In Russ.).
3. Gnedenko B.V. Cours of the Probability Theory / Moscow: Book House «Librokom», 2011. 488 p. (In Russ.).
4. Allaire F.R., Henderson C.R. Inbreeding Within an Artificially Bred Dairy Cattle Population // Journal of Dairy Science. 1965. 48(10). P.1366-1371.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 158-163.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 158-163.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.21

НЕТРАНЗИТИВНЫЕ НАБОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫХ С МАРКОВСКИМИ МОМЕНТАМИ

Алексей Андреевич Ковальчук[1]✉
[1]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[1]*kovalchuk.a.a.99@gmail.com*✉,
https://istina.msu.ru/profile/KovalchukAlexey/

Аннотация. *Работа посвящена изучению феномена нетранзитивности торговых стратегий с постоянными и переменными уровнями на фондовом рынке. Используя теорему Дуба об остановке, а также базовые концепции теории вероятностей, удалось вывести точные оценки силы нетранзитивности для случаев сратегий с постоянными уровнями, а также проанализировать нетранзитивность для случаев с переменными уровнями.*

Ключевые слова: *нетранзитивность, теорема Дуба об остановке, фондовый рынок*

Conference paper

INTRANSITIVE SETS OF RANDOM VARIABLES, BOUNDARIES WITH MARKOV MOMENTS

Alexey Kovalchuk[1]✉
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
[1]*kovalchuk.a.a.99@gmail.com*✉,
https://istina.msu.ru/profile/KovalchukAlexey/

Abstract. *The work is devoted to studying the phenomenon of intransitivity of trading strategies with constant and variable levels in the stock market. Using Doob's stopping theorem and probability theory, it was possible to derive accurate estimates of the strength of intransitivity for cases of strategies with constant levels, and also to analyze intransitivity for cases with variable levels.*

Keywords: *intransitivity, Doob's stopping theorem, stock market*

© Ковальчук А.А., 2023

1. Введение

Фондовый рынок — это неотъемлемая часть экономического сектора уже многие столетия. Область активно развивается и вовлекает все больше и больше людей с каждым годом. Для анализа и прогнозирования поведения активов используют математические модели и методы [4]. Важной задачей является анализ свойств финансовых стратегий и отношений между ними. Стратегии можно сравнивать (какая из них лучше в каком-то смысле) с помощью различных отношений превосходства (предпочтения). Эти отношения могут быть нетранзитивными.

Отношение превосходства $\prec$ на некотором множестве объектов называется *транзитивным*, если из $A \prec B$ и $B \prec C$ следует $A \prec C$, и *нетранзитивным*, если не следует, а напротив, может быть $C \prec A$. *Нетранзитивным набором* объектов называется такой набор, на котором реализуется нетранзитивность отношения. Классическим примером нетранзитивности является игра "Камень, ножницы, бумага": Камень сильнее Ножниц, Ножницы сильнее Бумаги, однако Камень не сильнее Бумаги, а наоборот, Бумага сильнее Камня. Таким образом, отношение превосходства в случае нетранзитивности идет по кругу (задает циклический порядок).

Для числа объектов более трех, возможны различные обобщения и усиления понятия нетранзитивности и нетранзитивных наборов.

В статье С.С.Токарева [1] утверждается существование нетранзитивных наборов финансовых стратегий на фондовом рынке. Одна стратегия считается лучше другой, если она чаще дает больший результат (прибыль от продажи акций). Автор утверждает, что существует набор стратегий, при котором первая стратегия хуже второй (в указанном смысле), вторая стратегия хуже третьей, но при этом третья хуже первой, а не наоборот. Таким образом, это подходит под классическое определение нетранзитивности.

Более подробно, рассматриваются поминутные цены акций Сбербанка (за 2009 год), и стратегии по выбору момента продажи акций в течение дня, следующего типа:

1. стратегия s_1(первая): продажа акций производится в самом начале торгового дня по текущей биржевой цене (чистая прибыль всегда равна нулю).

2. стратегия s_2 (вторая): продажа акций производится в тот момент, когда их цена впервые снизится более чем на $a\%$, либо поднимется более чем на $b\%$ от их стоимости на начало торгового дня. Если

же цена за весь день ни разу не достигнет ни одного из указанных уровней, то продажа производится в конце торгов по текущей цене.

3. стратегия s_3 (третья): продажа акций производится в тот момент, когда их цена впервые снизится более чем на $c\%$, либо поднимется более чем на $d\%$ от их стоимости на начало торгового дня. Если опять же цена ни разу за весь день не достигнет ни одного из указанных критических уровней, то продажа производится в конце торгов по текущей цене.

При этом полагается $a = 0.6$, $b = 0.3$, $c = 0.3$, $d = 0.6$. Утверждается, что по первой стратегии прибыль будет чаще меньше, чем по второй, по второй чаще меньше, чем по третьей, и по третьей чаще меньше, чем по первой, причем это будет происходить с частотами около 2/3.

Представим себе следующую игру: первый игрок выбирает одну из стратегий, а второй игрок — одну из оставшихся, и выигрывает получивший большую прибыль, по итогам дня. Тогда получается, что второй игрок может гарантировать себе выигрыш с вероятностью около 2/3, выбирая свою стратегию следующей за выбранной первым игроком в циклическом порядке.

В подобных ситуациях нетранзитивность можно оценивать не только качественно (есть она или нет), но и количественно (например, через гарантированный выигрыш второго игрока), и соответствующую числовую характеристику можно назвать *силой нетранзитивности*. Интерес представляет максимизация этой силы.

Отметим, что прибыли по описанным стратегиям можно интерпретировать как три зависимые случайные величины. Согласно [6, теорема 1] для n зависимых случайных величин максимально возможное значение минимума вероятностей того, что первая величина меньше второй, вторая меньше третьей, ..., n-я меньше первой, составляет $(n-1)/n$, что при $n = 3$ дает как раз 2/3.

2. Определения и предшествующие результаты

В статье [1] не дается точное математическое обоснование, а приводятся рассуждения автора в словесной форме. Мы проведем исследование вопроса в случае 3 стратегий, а также рассмотрим более сложный вид нетранзитивности для 5 стратегий (связанных специальным графом отношений), когда количество отношений становится кратно больше, чем в первом случае. Будет дано полное математическое обоснование свойства нетранзитивности для 3 и 5 стратегий, на основе теории случайных процессов (модели броуновского движения), а также продемонстрирован ряд численных экспериментов на

реальных (современных) данных, которые подтвердят теоретические наработки. Далее, помимо стратегий с постоянными уровнями, типа предложенных в [1], будут рассмотрены некоторые стратегии с переменными уровнями (линейными и нелинейными), наборы которых также демонстрируют нетранзитивность (хотя и с меньшей силой, чем с постоянными).

Таким образом, научная новизна работы состоит в рассмотрении нетранзитивных наборов не только 3, но и 5 стратегий, а также стратегий не только с постоянными, но и переменными уровнями.

Будем строить математическую модель явления, делая некоторые предположения и упрощения. А именно, предположим, что динамика цены в течение дня описывается броуновским движением с нулевым сносом и произвольной дисперсией (которая может быть различной в разные дни). Также будем пренебрегать конечностью дня, то есть не будем ставить ограничения по времени для выхода за верхнюю или нижнюю границы. $S_t = S_0 + \sigma B_t$ - процесс цены актива, где S_0 - начальная цена (которую считаем известной), B_t - стандартное броуновское движение (винеровский процесс), $\sigma > 0$, $t >= 0$; $R_t = (\frac{S_t}{S_0} - 1) \times 100$ - процесс прибыли (в %) в случае продажи актива в момент $t >= 0$.

Введем марковские моменты:

$\tau_1 = 0, \tau_2 = \inf\{t \geq 0 : R_t \in (-\infty, -a] \cup [b, +\infty)\}$,
$\tau_3 = \inf\{t \geq 0 : R_t \in (-\infty, -c] \cup [d, +\infty)\}$

Прибыль определяется равенствами: $X_i = R_{\tau_i}, i = 1, 2, 3$. Имеем:

$$X_1 \equiv 0, \ X_2 = \begin{cases} -a, \text{ с вер. } p_-(a,b) \\ b, \text{ с вер. } p_+(a,b) \end{cases}, \ X_3 = \begin{cases} -c, \text{ с вер. } p_-(c,d) \\ d, \text{ с вер. } p_+(c,d) \end{cases}$$

Аналогично прибыль будет определяться для большего числа стратегий.

3. Важные результаты

Введем определение силы нетранзитивности для 3 стратегий:

$$P_3 := \min((P(X_1 < X_2), P(X_2 < X_3), P(X_3 < X_1)) \to \max.$$

Для случая трех стратегий с постоянными уровнями удалось определить максимум силы нетранзитивности, который оказался равен $\frac{2}{3}$, а также связь между уровнями продажи на повышение и понижение.

Также введем определение силы нетранзитивности для 5 стратегий:

$$P_5^\star := \min(P_{21}, P_{32}, P_{43}, P_{54}, P_{15}, P_{52}, P_{35}, P_{13}, P_{41}, P_{24}) \to \max$$

Отметим, что в предыдущем выражении $P(X_i < X_j) := P_{ij}$. Для случая 5 стратегий с постоянными уровнями также удалось оценить максимум силы нетранзитивности, а также уровни продажи на повышение и понижение. Стоит отметить, что в силу большого количества всевозможных взаимных расположений границ продаж предварительно был проделан численный эксперимент, после чего уже проводилась математическая оптимизация. Удалось доказать, что максимум силы нетранзитивности будет равен 0.6.

Текущие результаты удалось подтвердить на практике, проводя численные эксперименты на акциях Сбербанка (SBER) и Газпрома (GAZP) за 2017 - 2021 года.

Дополнительно были исследованы стратегии с переменными уровням: линейными и корневыми. В силу сложности их анализа мартингальными методами были проведены только численные эксперименты, где также подтвердилась нетранзитивность.

4. Выводы

Изучение нетранзитивности стратегий на фондовом рынке позволило нам понять, что инвесторы не всегда могут выбрать оптимальную стратегию для получения высокой доходности. Нетранзитивность стратегий означает, что выбирая из нескольких стратегий, каждая из которых имеет свою историю успеха и неудач, не всегда можно однозначно определить наиболее выгодную.

Проделав исследования в этой теме, удалось полностью описать случай трех стратегий с постоянными уровнями, а также провести численные эксперименты для трех и пяти стратегий с постоянными и более сложными уровнями (линейными и корневыми). Стоит отметить, что для случая 5 стратегий имеет смысл попробовать дать полное математическое обоснование. Так как количество вариантов расположений даже постоянных уровней в этом случае велико, вопрос становится достаточно сложным и неоднозначным. Также интерес вызывают уровни, отличные от постоянных.

Таким образом, нетранзитивность стратегий на фондовом рынке указывает на необходимость осуществлять свои инвестиции на основе глубокого анализа, а не просто следовать модным трендам или прошлым успехам. Инвесторы должны осознавать риски и учитывать свои индивидуальные цели и ограничения, чтобы достичь своих инвестиционных целей в долгосрочной перспективе.

Список источников

1. Токарев С.С. "Нетранзитивный лохотрон"на фондовом рынке. Об одной перспективной форме платного обучения экономике, 2009.
2. Ширяев А.Н. О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением, Совр. пробл. матем., 2007, выпуск 8, 3–78.
3. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. ФИЗМАТЛИТ, 2005.
4. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.
5. Касс С. ROCK PAPER SCISSORS SPOCK LIZARD.
6. Usiskin Z. Max–Min Probabilities in the Voting Paradox, Ann. Math. Statist. V. 35. N 2. P. 857–862.
7. Anderson T.W. A modification of the sequential probability ratio test to reduce the sample size, Ann. Math. Statist. 1960. V. 31. N 1. P. 165–197.
8. Финам, Мосбиржа, акции Сбербанк, 2021.
9. Финам, Мосбиржа, акции Газпрома, 2022.
10. Теория большого взрыва, отрывок с описанием игры.

References

1. Tokarev S.S. “Intransitive scam” on the stock market. About one promising form of paid education in economics, 2009.
2. Shiryaev A.N. On martingale methods in problems of boundary crossing by Brownian motion, Sovrem. problem Mat., 2007, issue 8, 3–78.
3. Bulinsky A.V., Shiryaev A.N. Theory of random processes. FISMATLITU, 2005.
4. Shiryaev A.N. Fundamentals of stochastic financial mathematics. M.: Fazis, 1998.
5. Cass S. ROCK PAPER SCISSORS SPOCK LIZARD.
6. Usiskin Z. Max–Min Probabilities in the Voting Paradox, Ann. Math. Statist. V. 35. N 2. P. 857–862.
7. Anderson T.W. A modification of the sequential probability ratio test to reduce the sample size, Ann. Math. Statist. 1960. V. 31. N 1. P. 165–197.
8. Finam, Moscow Exchange, Sberbank shares, 2021.
9. Finam, Moscow Exchange, Gazprom shares, 2022.
10. The Big Bang Theory, an excerpt describing the game.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 164-173.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 164-173.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.21

ТРЕХМЕРНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ПОРОЖДАЮЩИЕ НЕТРАНЗИТИВНЫЕ НАБОРЫ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Алексей Викторович Лебедев[1]✉
[1]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[1]*avlebed@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0002-9258-0588*

Аннотация. *Работа посвящена изучению феномена нетранзитивности отношения стохастического предшествования в теории вероятностей. Исходя из парадокса Кондорсе, построены примеры трехмерных непрерывных распределений, порождающих нетранзитивные наборы зависимых случайных величин. Доказаны предельные теоремы для гауссовских смесей.*

Ключевые слова: *нетранзитивность, стохастическое предшествование, копулы, гауссовские смеси, предельные теоремы*

Conference paper

THREE-DIMENSIONAL CONTINUOUS DISTRIBUTIONS GENERATING INTRANSITIVE TUPLES OF DEPENDENT RANDOM VARIABLES

Alexey V. Lebedev[1]✉
[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[1]*avlebed@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0002-9258-0588*

Abstract. *The work is devoted to the study of the phenomenon of intransitivity of the stochastic precedence relation in probability theory. Based on the Condorcet paradox, examples of three-dimensional continuous distributions that generate intransitive tuples of dependent random variables are constructed. Limit theorems for Gaussian mixtures are proven.*

Keywords: *intransitivity, stochastic precedence, copulas, Gaussian mixtures, limit theorems*

© Лебедев А.В., 2023

1. Введение

В теории и практике различные отношения превосходства между объектами часто обладают свойством транзитивности: если A превосходит B и B превосходит C, то A превосходит C. Это имеет место, например, если каждый объект можно характеризовать действительным числом и сравнение объектов сводится к сравнению этих чисел.

Однако бывает и по-другому. Например, в классической игре «камень, ножницы, бумага» «камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», но при этом «бумага» побеждает «камень», а не наоборот. Таким образом, отношение между стратегиями в этой игре нетранзитивно и не существует оптимальной чистой стратегии.

Различным аспектам и многочисленным примерам нетранзитивности отношений превосходства в природе, технике и обществе посвящен ряд статей А.Н. Поддьякова, в частности [1].

Далее мы будем говорить о нетранзитивности отношения стохастического предшествования (stochastic precedence) между случайными величинами. В [2, 3] это отношение применялось в задачах статистического анализа.

К первому упоминанию проблемы нетранзитивности с вероятностной точки зрения можно отнести работу С. Трыбулы совместно с Г. Штейнгаузом, где в качестве практического приложения была рассмотрена прочность материалов [4, 5]. Пусть в лаборатории сравнивают попарно на прочность железные бруски одинакового размера и формы, помещая их в одну рамку (тиски) и прилагая к ним одинаковую силу путем закручивания винта, пока один из брусков не сломается. Предположим, что бруски производятся на трех разных заводах (которые дают разное распределение прочности) и сравниваются бруски с первого и второго, второго и третьего, первого и третьего заводов. Тогда теоретически может сложиться парадоксальная ситуация, что бруски с первого завода «хуже» (т.е. чаще ломаются раньше) брусков со второго завода, бруски со второго «хуже» брусков с третьего, а бруски с третьего «хуже» брусков с первого.

В недавней работе [8] подобное явление было реально обнаружено в медицинской статистике при сравнении времен до смерти и до инфаркта миокарда в некоторых группах пациентов.

Тема нетранзитивности приобрела популярность на примере так называемых *нетранзитивных костей* (nontransitive, intransitive dice). Имеются в виду наборы игральных костей, на грани которых нанесены числа таким образом, чтобы создать нетранзитивные отношения соответствующих случайных величин. Предполагается, что два игрока

последовательно выбирают по кости из некоторого набора и бросают их. Тот, у кого выпало большее число, выигрывает. В силу нетранзитивности игры, второй игрок всегда может обеспечить себе преимущество. Нетранзитивные кости были популяризованы М. Гарднером [9], им посвящена обширная литература.

Автор настоящей работы продолжает начатые в [10, 11, 12, 13] исследования нетранзитивности (в этих работах можно ознакомиться более подробно с проблематикой, историей вопроса и приложениями). При этом, если ранее изучался случай независимых случайных величин, теперь речь о зависимых случайных величинах. В случае независимых случайных величин нетранзитивность возникала за счет различия в распределениях. Зависимые величины могут быть одинаково распределены, а нетранзитивность возникает за счет характера их (нелинейной) зависимости. Классическим примером в этом смысле может служить знаменитый парадокс Кондорсе.

2. Определения и предшествующие результаты

Дадим более строгие определения.

Определение 1. *Отношение $\prec$ называется нетранзитивным, если для каких-либо объектов A, B, C, из $A \prec B$, $B \prec C$ не следует $A \prec C$, а напротив, может быть $C \prec A$.*

Определение 2. *Набор объектов A, B, C называется нетранзитивным, если на нем реализуется нетранзитивность отношения превосходства, т.е. выполнено: $A \prec B \prec C \prec A$ (либо в обратном порядке).*

В более общем случае полагаем $A_1 \prec A_2 \prec \ldots \prec A_n \prec A_1$, $n \geq 3$. Таким образом, нетранзитивное отношение устанавливает циклический порядок между объектами нетранзитивного набора. Возможны и более сложные обобщения.

Определение 3. *X стохастически предшествует Y ($X \prec Y$), если*

$$\mathbf{E}\,\mathrm{sign}(Y - X) > 0$$

или

$$\mathbf{P}(X < Y) > \mathbf{P}(X > Y),$$

Если $\mathbf{P}(X = Y) = 0$ (например, случайные величины независимы и непрерывны, или с непересекающимися областями значений), то $X \prec Y$ эквивалентно

$$\mathbf{P}(X < Y) > 1/2.$$

Итак, пусть заданы случайные величины X_1, X_2 и X_3 такие, что

$$\mathbf{P}(X_1 < X_2) > \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(X_2 < X_3) > \frac{1}{2} \quad \mathbf{P}(X_3 < X_1) > \frac{1}{2},$$

тогда $X_1 \prec X_2$, $X_2 \prec X_3$, но $X_3 \prec X_1$. Таким образом, ситуация нетранзитивности возникает, когда

$$P_{X_1X_2X_3} = \min\{\mathbf{P}(X_1 < X_2), \mathbf{P}(X_2 < X_3), \mathbf{P}(X_3 < X_1)\} > \frac{1}{2},$$

причем интерес представляет не только сам факт, но и сила нетранзитивности, мерой которой может служить величина $P_{X_1X_2X_3}$.

В [5] показано, что для независимых случайных величин

$$\max_{X_1,X_2,X_3} P_{X_1X_2X_3} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618.$$

В работах [6, 7] изучалась комбинация из $n \geq 3$ независимых случайных величин, впоследствии в [14] было показано, что максимум вероятностей

$$P_{X_1\ldots X_n} = \min\{\mathbf{P}(X_1 < X_2), \ldots, \mathbf{P}(X_{n-1} < X_n), \mathbf{P}(X_n < X_1)\}$$

составляет следующую величину:

$$\max_{X_1,\ldots,X_n} P_{X_1\ldots X_n} = 1 - \left(4\cos^2\frac{\pi}{n+2}\right)^{-1}, \quad n \geq 3.$$

Для зависимых величин в [7] было доказано:

$$\max_{X_1,\ldots X_n} P_{X_1\ldots X_n} = \frac{n-1}{n}, \quad n \geq 3,$$

в частности, при $n = 3$ получаем $P_{X_1X_2X_3} = 2/3$.

Применительно к трем зависимым случайным величинам игровая интерпретация может быть следующей: разыгрывается случайный вектор (X_1, X_2, X_3), перед этим два игрока последовательно выбирают каждый свой номер компоненты вектора. Компонента с чьим номером окажется больше, тот и выиграл.

Изложим парадокс Кондорсе при голосовании, в простейшей формулировке. Пусть имеется три кандидата на некоторый пост и три избирателя, которые имеют предпочтения кандидатов в соответствии со следующими вектор-строками:

$$\begin{matrix}(1,2,3)\\(3,1,2)\\(2,3,1)\end{matrix} \tag{1}$$

Тогда при выборе между первым и вторым кандидатом побеждает первый, между вторым и третьим — третий, но между первым и третьим — первый.

Рассмотрим вероятностную модификацию этого примера.

Пусть набор зависимых случайных величин (X, Y, Z) принимает значения из (1) с вероятностями по 1/3. Тогда

$$\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(Y < Z) = \mathbf{P}(Z < X) = 2/3.$$

При этом каждая из величин равномерно распределена на множестве $\{1, 2, 3\}$.

Возникает вопрос, как перейти от дискретного распределения к непрерывному. Далее мы рассмотрим различные примеры.

Напомним также понятие копулы [15].

Определение 4. *Копулой (m-мерной) C называется функция многомерного распределения на $[0, 1]^m$ с равномерными частными (маргинальными) распределениями.*

Копулой распределения F в R^m называется копула C, удовлетворяющая

$$F(x_1, \ldots, x_m) = C(F_1(x_1), \ldots, F_m(x_m)),$$

где $F_1, \ldots, F_m$ — частные функции распределения.

Такое представление существует по теореме Скляра и единственно в случае непрерывных частных распределений.

Если заданы $X_1, \ldots X_m$, и $U_i = F_i(X_i)$, $1 \leq i \leq n$, то все U_i равномерно распределены на $[0, 1]$, с совместным распределением C, т.е. $\mathbf{P}(U_1 \leq u_1, \ldots U_m \leq u_m) = C(u_1, \ldots, u_m)$.

В непрерывном случае, если X_i одинаково распределены, то $\mathbf{P}(X_i < X_j) = \mathbf{P}(U_i < U_j)$.

3. Трехмерные непрерывные распределения

Рассмотрим сначала некоторые естественные обобщения примера Кондорсе с равномерными частными распределениями (полученные трехмерные распределения могут использоваться в качестве копул).

Пример 1. Пусть

$$X = T, \quad Y = \left\{T + \frac{1}{3}\right\}, \quad Z = \left\{T + \frac{2}{3}\right\},$$

где $\{.\}$ — дробная часть числа, T равномерно распределена на $[0, 1]$, тогда X, Y, Z равномерно распределены на $[0, 1]$ и

$$\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(Y < Z) = \mathbf{P}(Z < X) = 2/3. \qquad (2)$$

В этом случае распределение вектора оказывается непрерывным, но не абсолютно непрерывным (имеющим плотность), а сингулярным (сосредоточенным на многообразии меньшей размерности, а именно, на трех отрезках) в единичном кубе.

Обозначим плотность распределения через $p(x, y, z)$.

Пример 2. Пусть $p(x, y, z) = 2$, если $x < y < z$ или $z < x < y$ или $y < z < x$, и $p(x, y, z) = 0$ иначе. Тогда также X, Y, Z равномерно распределены на $[0, 1]$ и верно (2). Указанную плотность можно представить в виде:

$$p(x, y, z) = 1 - \operatorname{sign}\{(y - x)(z - y)(x - z)\}.$$

В этом случае трехмерное распределение имеет плотность, но эта плотность разрывна.

Рассмотрим теперь другой подход, с помощью зашумления дискретных данных, как в [16] применительно к нетранзитивным костям Эфрона (независимым случайным величинам).

Пример 3. Пусть случайный вектор (X_1, X_2, X_3) формируется следующим образом: к значениям (1), принимаемым с вероятностями по 1/3, по всем координатам прибавляются независимые нормальные величины с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma^2 > 0$. Тогда

$$P_{X_1X_2X_3} = \mathbf{P}(X_1 < X_2) = \mathbf{P}(X_2 < X_3) = \mathbf{P}(X_3 < X_1) = \\ = \frac{1}{3}\left(2\Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)\right) > \frac{1}{2},$$

где $P_{X_1X_2X_3} \to 2/3$ при $\sigma \to 0$ и $P_{X_1X_2X_3} \to 1/2$ при $\sigma \to \infty$. Нетранзитивность здесь наблюдается при *любом* уровне шума.

При $\sigma \to 0$ распределение сходится к трехточечному, а что при этом происходит с копулой?

Утверждение 1. *При $\sigma \to 0$ распределение копулы в примере 3 сходится к равномерному на объединении кубов*

$$[0, 1/3] \times [1/3, 2/3] \times [2/3, 1],$$
$$[2/3, 1] \times [0, 1/3] \times [1/3, 2/3],$$
$$[1/3, 2/3] \times [2/3, 1] \times [0, 1/3],$$

с плотностью $p(x_1, x_2, x_3) = 9$ на этом множестве и 0 иначе.

Для предельной копулы верно

$$\mathbf{P}(U_1 < U_2) = \mathbf{P}(U_2 < U_3) = \mathbf{P}(U_3 < U_1) = 2/3.$$

Перейдем теперь к более общему случаю.

4. Гауссовские смеси

Напомним, что (дискретная) *многомерная смесь* — это распределение случайного вектора, который с некоторыми вероятностями (весами) принимает значения случайных векторов с заданными распределениями (причем выбор вектора делается независимо от значений).

Если берется смесь гауссовских векторов, то ее называют *гауссовской* смесью.

Пусть случайный вектор (X_1, X_2, X_3) имеет распределение гауссовской смеси с весами p_i, $i = 1, 2, 3$ со средними (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) и ковариационными матрицами λB_i, где $B_i = (b_{i,kl})$, $i, k, l = 1, 2, 3$, — некоторые ковариационные матрицы, $\lambda > 0$.

Пусть $0 < p_i < 1/2$, $b_{i,kk} > 0$, $i, k = 1, 2, 3$.

Теорема 1. *Если* $2b_{i,kl} < b_{i,kk}+b_{i,ll}$, $k \neq l$, $i = 1, 2, 3$ *и* a_{ik} *по строкам идут в том же порядке, что в примере Кондорсе, то существует* $\lambda_1 > 0$ *такое, что при* $\lambda < \lambda_1$ *имеет место нетранзитивность, т.е.* $P_{X_1X_2X_3} > 1/2$, *и*

$$\lim_{\lambda \to 0} P_{X_1X_2X_3} = 1 - \max\{p_1, p_2, p_3\}.$$

Теорема 2. *Если* $B_i \equiv bE$, $b > 0$, $i = 1, 2, 3$, *и* a_{ik} *по столбцам идут в том же порядке, что в примере Кондорсе, то существует* $\lambda_2 > 0$ *такое, что при* $\lambda < \lambda_2$ *имеет место нетранзитивность* (U_1, U_2, U_3), *т.е.* $P_{U_1U_2U_3} > 1/2$, *и при* $\lambda \to 0$ *распределение копулы сходится к смеси равномерных распределений с весами* p_i, $i = 1, 2, 3$ *на параллелепипедах*

$$[0, p_1] \times [p_1, p_1 + p_2] \times [p_1 + p_2, 1],$$
$$[p_1 + p_2, 1] \times [0, p_1] \times [p_1, p_1 + p_2],$$
$$[p_1, p_1 + p_2] \times [p_1 + p_2, 1] \times [0, p_1],$$

так что

$$\lim_{\lambda \to 0} P_{U_1U_2U_3} = 1 - \max\{p_1, p_2, p_3\}.$$

5. Заключение

В результате исследования феномена нетранзитивности отношения стохастического предшествования случайных величин, построены примеры трехмерных непрерывных распределений, порождающих нетранзитивные наборы зависимых случайных величин. В том числе, рассмотрены некоторые классы гауссовских смесей, для них доказаны предельные теоремы.

Список источников

1. Поддьяков А. Н. Принцип нетранзитивности превосходства в разных парадигмах // Вопросы психологии. 2019. № 2. С. 3–16.
2. Arcones M. A., Kvam P. H., Samaniego F. J. Nonparametric Estimation of a Distribution Subject to a Stochastic Precedence Constraint // J. Amer. Stat. Assoc. 2002. Vol. 97, no. 457. P. 170–182.
3. Boland P. J., Singh H., Cukic B. The Stochastic Precedence Ordering with Applications in Sampling and Testing // J. Appl. Probab. 2004. Vol. 41, no. 1. P. 73–82.
4. Steinhaus H., Trybula S. On a paradox in applied probabilities // Bull. de l'Acad. Polon. des Sci. 1959. Vol. 7. P. 67–69.
5. Trybula S. On the paradox of three random variables // Zastos. Matem. 1961. Vol. 5, no. 4. P. 321–332.
6. Trybula S. On the paradox of n random variables // Zastos. Matem. (Appl. Math.) 1965. Vol. 8, no. 2. P. 143–156.
7. Usiskin Z. Max-min probabilities in the voting paradox // Ann. Math. Stat. 1964. V. 35, no. 2. P. 857–862.
8. Demler O. V., Demler I. A. Non-Transitivity of the Win Ratio and the Area Under the Receiver Operating Characteristics Curve (AUC): a case for evaluating the strength of stochastic comparisons. https://arxiv.org/abs/2309.01791
9. Gardner M. The Paradox of the Nontransitive Dice and the Elusive Principle of Indifference // Sci. Amer. 1970. Vol. 223, no. 6. P. 110–114.
10. Лебедев А. В. Проблема нетранзитивности для трех непрерывных случайных величин // Автоматика и телемеханика, 2019. № 6. С. 91–103.
11. Лебедев А. В. Нетранзитивные триплеты непрерывных случайных величин и их приложения // Информатика и ее применения, 2019. Т. 13. № 3. С. 20–26.
12. Горбунова А. В., Лебедев А. В. Эффекты стохастической нетранзитивности в системах массового обслуживания // Управление большими системами, 2020. Т. 85. С. 23–50.
13. Gorbunova A. V., Lebedev A. V. Nontransitivity of tuples of random variables with polynomial density and its effects in Bayesian models // Mathematics and Computers in Simulation, 2022. Vol. 202. P. 181–192.
14. Богданов И. И. Нетранзитивные рулетки // Матем. просв. 2010. Сер. 3. Вып. 14. С. 240–255.

15. Nelsen R. An introduction to copulas. Springer, 2006. 276 p.
16. Thangalevu K., Brunner E. Wilcoxon–Mann–Whitney test for stratified samples and Efron's paradox dice // J. Statist. Plann. Inference. 2007. Vol.137. P. 720–737.

References

1. Poddiakov A. N. The principle of intransitivity of superiority in different paradigms // Vopr. psikh. = Psych. Issues. 2019. No. 2. P. 3–16. (in Russ.)
2. Arcones M. A., Kvam P. H., Samaniego F. J. Nonparametric Estimation of a Distribution Subject to a Stochastic Precedence Constraint // J. Amer. Stat. Assoc. 2002. Vol. 97, no. 457. P. 170–182.
3. Boland P. J., Singh H., Cukic B. The Stochastic Precedence Ordering with Applications in Sampling and Testing // J. Appl. Probab. 2004. Vol. 41, no. 1. P. 73–82.
4. Steinhaus H., Trybula S. On a paradox in applied probabilities // Bull. de l'Acad. Polon. des Sci. 1959. Vol. 7. P. 67–69.
5. Trybula S. On the paradox of three random variables // Zastos. Matem. 1961. Vol. 5, no. 4. P. 321–332.
6. Trybula S. On the paradox of n random variables // Zastos. Matem. (Appl. Math.) 1965. Vol. 8, no. 2. P. 143–156.
7. Usiskin Z. Max-min probabilities in the voting paradox // Ann. Math. Stat. 1964. V. 35, no. 2. P. 857–862.
8. Demler O. V., Demler I. A. Non-Transitivity of the Win Ratio and the Area Under the Receiver Operating Characteristics Curve (AUC): a case for evaluating the strength of stochastic comparisons. https://arxiv.org/abs/2309.01791
9. Gardner M. The Paradox of the Nontransitive Dice and the Elusive Principle of Indifference // Sci. Amer. 1970. Vol. 223, no. 6. P. 110–114.
10. Lebedev A. V. The Nontransitivity Problem for Three Continuous Random Variables // Autom. Remote Control. 2019. Vol. 80, no. 6. P. 1058–1068.
11. Lebedev A. V. Nontransitive triplets of continuous random variables and their applications // Inform. primen. = Inform. Appl. 2019. Vol. 13, no. 6. P. 20–26. (In Russ.)
12. Gorbunova A. V., Lebedev A. V. Stochastic nontransitivity effects in queueing systems // Uprav. bol. sist. = Large-Scale Systems Control. 2020. Vol. 85. P. 23–50. (In Russ.)

13. Gorbunova A. V., Lebedev A. V. Nontransitivity of tuples of random variables with polynomial density and its effects in Bayesian models // Mathematics and Computers in Simulation, 2022. Vol. 202. P. 181–192.
14. Bogdanov I. I. Nontransitive Roulette // Mat. Prosv. = Math. Educat. 2010. Ser. 3. No. 14. P. 240–255. (in Russ.)
15. Nelsen R. An introduction to copulas. Springer, 2006. 276 p.
16. Thangalevu K., Brunner E. Wilcoxon–Mann–Whitney test for stratified samples and Efron's paradox dice // J. Statist. Plann. Inference. 2007. Vol. 137. P. 720–737.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 174-176.
Modern problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 174-176.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.813

ОБ ИГРЕ «ДО ПЕРВОЙ ОСТАНОВКИ»

Сергей Всеволодович Левизов
Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых, Владимир, Россия
levizov@rambler.ru

Аннотация: получена оценка длительности процесса генерации последовательности случайных чисел – до момента, когда одно из них (какое-либо) повторится дважды подряд.

Ключевые слова: случайная величина, математическое ожидание, дисперсия, дифференцирование функционального ряда.

Conference paper

TO THE PROBLEM OF A GAME UNTIL FIRST «STOP»

Sergey Vs. Levizov
Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletov, Vladimir, Russia
levizov@rambler.ru

Abstract. *The estimate of the duration of obtaining a sequence of random numbers process is received – up to the moment when any of the numbers is repeated twice in a row.*

Keywords: *random variable, mathematical expectation, variance, differentiation of functional series.*

1. **Введение**

В [2] исследовался вопрос о «средней длительности» процесса подбрасывания монеты до момента, когда какая-либо из сторон не выпадет дважды подряд. Был получен результат: математическое ожидание такой «игры» равно 3. Теперь рассмотрим ситуацию: датчик случайных чисел генерирует (ежесекундно) числа от 1 до N (N – фиксированное, натуральное) до тех пор, пока какое-либо из чисел не повторится дважды подряд, после чего датчик прекращает работу (останавливается). Насколько долго («в среднем») может продолжаться такой процесс?

© Левизов С.В., 2023

2. Основной текст статьи

Иными словами, нам нужно рассчитать математическое ожидание дискретной случайной величины $X = \{$ количество «генераций», необходимых для окончания вышеописанной «игры»$\}$. Для этого попытаемся оценить соответствующие вероятности событий : $X_n = \{$повтор какого-либо числа впервые возникает после n – й «генерации»$\}$; n = 1, 2, 3, … Это событие можно смоделировать построением последовательности чисел вида $\{k_1, k_2,\ldots, k_n\}$, состоящей из чисел 1, 2, …, N , где $k_{n-1} = k_n$, но $k_{i-1} \neq k_i$, при всех i таких, что и $1 \le i \le n - 1$.

Фактически – нужно вычислить вероятность получения последовательности («цепочки») $\{k_1, k_2,\ldots, k_n\}$ такой, что последние две позиции занимает пара совпадающих чисел (таких возможностей N), а на каждую i - ю позицию $(1 \le i \le n - 3)$ можно поставить любое из чисел, отличное от стоящего на (i + 1) - й позиции – таких возможностей всего $(N - 1)^{n-2}$. Количество же всевозможных «цепочек» длины n составляет $(N)^n$, поэтому, обозначая $P(X_n) = p_n$, имеем :

$$p_1 = 0 \text{ (самоочевидно)}, \; p_2 = \frac{N}{N^2}, \quad p_3 = \frac{N(N-1)}{N^3}, \ldots,$$

$$p_n = \frac{N(N-1)^{n-2}}{(N)^n} = \frac{1}{N-1} \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}$$

Вычисляем математическое ожидание:

$$M(X) = \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot p_n) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{1}{N-1} \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}.$$

Полученный ряд вида $\sum_{m=1}^{\infty} n \cdot (x)^{n-1}$ является равномерно сходящимся (в нашем случае $|x| = \frac{N-1}{N} < 1$), поэтому, применяя операцию дифференцирования, находим сумму:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(x)^{n-1} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} (x)^n\right)' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}.$$

Соответственно

$$M(X) = \frac{1}{N-1} \cdot \frac{2 \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right) - \left(\frac{N-1}{N}\right)^2}{\left(1 - \frac{N-1}{N}\right)^2} = \frac{1}{N-1} \cdot \frac{2N(N-1) - (N-1)^2}{(1)^2} = \frac{N^2 - 1}{N-1} = N + 1.$$

Итак, процесс «генерации» будет длиться (в среднем) (N+1) секунду.

Рассчитаем также и дисперсию случайной величины X. Получим следующее:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = M(X^2) - (N+1)^2.$$

При этом $M(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (n)^2 \cdot p_n = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (n)^2 \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}$.

Опять получился равномерно сходящийся ряд типа $\sum_{m=2}^{\infty}(n)^2\cdot(x)^{n-1}$, где $|x|=\frac{N-1}{N}<1$.

Его сумму вычисляем так:

$$\sum_{m=2}^{\infty}(n)^2\cdot(x)^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}((n+1)\cdot n-n)\cdot(x)^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\cdot n\cdot(x)^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(x)^{n-1}=$$

$$=(\sum_{n=2}^{\infty}(x)^{n+1})''-(\sum_{n=2}^{\infty}(x)^{n})'=\left(\frac{x^3}{1-x}\right)''-\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=(-2+\frac{2}{(1-x)^3})-(-1+\frac{1}{(1-x)^2})=$$

$$\frac{x^3-3x^2+4x}{(1-x)^3}.$$

Подставляя сюда $x=\frac{N-1}{N}$ и упрощая, окончательно имеем, что $M(X^2)=$

$$=\frac{\left(\frac{N-1}{N}\right)^3-3\left(\frac{N-1}{N}\right)^2+4\left(\frac{N-1}{N}\right)}{\left(1-\frac{N-1}{N}\right)^3}=(N-1)^3-3N(N-1)^2+4N^2(N-1)=(N-1)(2N^2+N+1).$$

Тогда дисперсия

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=(N-1)(2N^2+N+1)-(N^2+2N+1)=2(N^3-N^2-N-1).$$

В частности, при $N=2$ процесс можно интерпретировать как подбрасывание монеты до момента, когда она дважды подряд «приземлится» на одну и ту же сторону («гербом» или «решёткой»). Средняя длительность такой «игры» составит $M(X)=N+1=3$ «гейма», а среднеквадратичное отклонение $\sigma(X)=\sqrt{2(8-7)}=\sqrt{2}$ (ед.).

3. Заключение

Полученные результаты интересно сравнить с [1]–[2]. Видно, что длительность «игры» уменьшается в *N* раз.

Список источников

1. Левизов С.В. О выпадении «дубля» при бросании многогранника // Современные проблемы физ.-матем. наук: материалы VII Всероссийской научно - практ. конференции, г. Орёл: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2021. С. 221–225.

2. Левизов С.В. Об игре до первого «дубля» (ч. 2) // Современные проблемы физ.-матем. наук: материалы VIII Всероссийской научно - практ. конференции, г. Орёл: ОГУ им. И.С. Тургенева, 25-26 ноября 2022. С. 215–218.

References

1. Levizov S.V. To the problem of shedding “double” while throwing of a polyhedron. // Modern problems of Phys. and Math. Sci. The Materials of VII All-Russia science-pract. conf. Orel: Orel State University named after I.S. Turgenev; 2021. Pp. 221 – 225. (In Russ.).

2. Levizov S.V. To the problem of a game until «first double» (part 2) // Modern problems of Phys. and Math. Sci. The Materials of VIII All-Russia science-pract. conf. Orel: Orel State University named after I.S. Turgenev; 2022. Pp. 215–218. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 177-186.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 177-186.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.21

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ЧИСЛА ЧАСТИЦ ПРОЦЕССА БЕЛЛМАНА-ХАРРИСА С ПУАССОНОВСКОЙ ИММИГРАЦИЕЙ

Георгий Андреевич Малиновский[1]✉
[1]*Орловский Государственный Университет им. И. С. Тургенева, Орёл, Россия*
[1]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[1]*georgy.malinovsky@math.msu.ru*

Аннотация. *В настоящей работе получен закон больших чисел и центральная предельная теорема для ветвящихся процессов с пуассоновской иммиграцией и тяжёлыми хвостами времен жизни в докритическом случае.*

Ключевые слова: *Ветвящиеся процессы с иммиграцией, Тяжёлые хвосты, Предельные теоремы.*

Conference paper

ON THE LIMITING BEHAVIOR OF THE NUMBER OF PARTICLES OF THE BELLMAN-HARRIS PROCESS WITH POISSON IMMIGRATION

Georgiy A. Malinovskiy[1]✉
[1]*Orel State University, Orel, Russia*
[1]*M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[1]*georgy.malinovsky@math.msu.ru*✉

Abstract. *In this paper, we obtain the law of large numbers and the central limit theorem for branching processes with Poisson immigration and heavy-tailed lifetimes in the subcritical case.*

Keywords: *Branching processes with immigration, Heavy tails, Limit theorems.*

© Малиновский Г.А., 2023

1. Введение

В настоящей работе рассмотрены процессы Беллмана-Хар- риса, то есть ветвящиеся процессы с иммиграцией и превращениями, зависящими от длительности жизни частиц. Впервые ветвящиеся процессы с произвольным распределением времени жизни были изучены Харрисом; его основные результаты собраны в книге [7]. В частности, там представлены интегральные уравнения для моментов числа частиц и их асимптотическое поведение в надкритическом и докритическом случаях. В обзоре В. А. Ватутина и А. М. Зубкова [1] опубликованы результаты, показывающие, что в процессах Беллмана-Харриса может наблюдаться экспоненциальный рост числа частиц в момент t. Такие результаты носят название закона больших чисел в надкритическом случае. Другие известные результаты в надкритическом случае получили П. Ягерс [8], Б. А. Севастьянов [3] и А. Пейкс [10]. Однако, все эти результаты касаются ситуации, когда математическое ожидание времени жизни конечно. Интересные эффекты возникают в модели Беллмана-Харриса, если предположить, что распределение $G(t)$ имеет настолько тяжёлый хвост, что математическое ожидание времени жизни частицы бесконечно. Одна из первых работ, где изучались подобные процессы — статья В. П. Чистякова [6], где была получена, в частности, асимптотика среднего числа частиц для процесса без иммиграции. Далее, в статье Н. Каплана [9], доказаны предельные теоремы в докритическом случае для одного частного случая ветвящихся процессов с иммиграцией — когда частица вообще не оставляет потомков. Оказывается, что такие системы удобнее рассматривать как бесконечноканальные системы массового обслуживания, и Каплан доказал закон больших чисел и центральную предельную теорему для числа требований в системе $GI/G/\infty$. В работе Е. А. Чернавской [4] также рассматриваются бесконечноканальные системы с тяжёлыми хвостами времён обслуживания и более сложно устроенным входящим потоком — дважды стохастическим пуассоновским. Тут необходимо отметить, что нормировка в аналогах центральной предельной теоремы у Каплана и Чернавской не является привычным $\sqrt{t}$, а зависит от тяжести хвоста распределения времени жизни частиц. В. А. Ватутин, В. А. Топчий [2] рассматривали критические неразложимые процессы Беллмана-Харриса с двумя типами частиц, предполагая, что продолжительность жизни частиц первого типа имеет конечную дисперсию, а хвост распределения продолжительности жизни частиц второго типа правильно меняется на бесконечности с параметром $\beta \in (0, 1]$. Было показано, что, в отличие от критических неразложимых ветвя-

щихся процессов Беллмана–Харриса с конечными дисперсиями продолжительности жизни частиц обоих типов, в таких процессах вероятность обнаружить частицы первого типа в далёкий момент времени t бесконечно мала по сравнению с вероятностью невырождения всего процесса к этому моменту. Также доказана предельная теорема для распределения числа частиц первого типа в момент времени t при условии, что в этот момент в процессе имеются частицы этого типа. С точки зрения этой работы, здесь мы скорее будем интересоваться асимптотикой количества частиц второго типа.

2. Описание модели

Рассматривается ветвящийся процесс Беллмана-Харриса. В систему поступает пуассоновский поток частиц (частицы приходят по одной). Каждая частица находится в системе случайное время. По истечении этого времени она исчезает, оставляя после себя случайное число потомков. Каждая вновь появившаяся частица эволюционирует таким же образом независимо от других. Далее необходимо ввести такие обозначения:

- $X(t)$ — количество частиц в момент t; $\Phi(s,t) = e^{isX(t)}$; $u(s,t) = \ln \Phi(s,t)$.
- $X_i(T_i)$ — размер популяции, которая порождена одной частицей, пришедшей в момент T_i.
- $Z(t)$ — размер популяции, порождённой одной частицей за время t, $\varphi(s,t) = Ee^{isZ(t)}$.
- $N(t)$ — количество точек иммиграции до момента t. Предполагаем, что $N(t)$ — пуассоновский поток с интенсивностью λ.
- h_j — вероятность того, что частица породит j потомков в конце своей жизни. $h(s) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} h_j s^j$, $m_1 = h'(1), \quad m_2 = h''(1)$.
- $G(t)$ — распределение продолжительности жизни частицы. $\overline{G}(t) = 1 - G(t)$, $g(t)$ — плотность распределения $G(t)$.
- $Y_1(t) = \int\limits_0^t Z(y)dy, \quad Y_2(t) = \int\limits_0^t Z^2(y)dy.$
- $M_{Y_1}(t) = EY_1(t), \quad M_{Y_2}(t) = EY_2(t).$
- $M_Z(t) = EZ(t), \quad M_Z^2(t) = \big(EZ(t)\big)^2, \quad M_Z^{(2)}(t) = EZ^2(t).$

Будем предполагать, что для распределения продолжительности жизни частиц и для плотности распределения выполнены следующие условия:

Условие 1. Существуют положительные постоянные c_1, c_2 и $0 < \beta < 1$ такие, что при всех $t \geq 0$

$$\frac{c_1}{(1+t)^\beta} \leq \overline{G}(t) \leq \frac{c_2}{(1+t)^\beta}. \tag{1}$$

Условие 2. Существуют положительные постоянные c и $0 < \beta < 1$ такие, что при всех $t \to \infty$ справедливо асимптотическое представление

$$g(t) \sim ct^{-\beta-1}. \tag{2}$$

Из (1) следует, что $\int\limits_0^\infty t dG(t) = \infty$, то есть распределение $G(t)$ имеет тяжёлый хвост. В дальнейших рассуждениях важную роль будет играть функция

$$\rho(t) = \int\limits_0^t \overline{G}(t)dt.$$

Из (1) также следует, что $\rho(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, и при этом

$$c_1(1+t)^{1-\beta} \leq \rho(t) \leq c_2(1+t)^{1-\beta}. \tag{3}$$

Кроме того, будем считать верным:

Условие 3. $m_1 = h'(1)$ и $m_2 = h''(1)$ удовлетворяют неравенствам **а)**

$$m_1 < 1. \tag{4}$$

б)

$$m_1 + m_2 < 1. \tag{5}$$

3. Основные результаты

Начнём с формулировки леммы о виде характеристической функции числа частиц в рассматриваемой модели. Доказательство этой леммы представляет собой стандартное использование свойств Пуассоновского потока и поэтому здесь не приводится.

Лемма 1. *Пусть $X(t)$ — количество частиц в момент t в рассматриваемой модели. Тогда её характеристическая функция имеет следующий вид*

$$\Phi(s,t) = e^{-\lambda \int\limits_0^t \left(1-\varphi(s,y)\right)dy}.$$

Сформулируем закон больших чисел и центральную предельную теорему для числа частиц в момент t.

Теорема 1. *Если выполнены условия 1-3а), то при* $t \to \infty$

$$X^*(t) = \frac{X(t)}{\frac{\lambda}{1-m_1}\rho(t)} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1. \tag{6}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия 1-3б), то при* $t \to \infty$ *имеет место слабая сходимость распределения величины*

$$X^*(t) = \frac{X(t) - \frac{\lambda}{1-m_1}\rho(t)}{\sqrt{\lambda M_{Y_2}(t)}} \tag{7}$$

к стандартному нормальному распределению. При этом для $M_{Y_2}(t)$ *верна следующая оценка:*

$$c_1(1+t)^{1-\beta} \le M_{Y_2}(t) \le \frac{c_2(1+t)^{1-\beta}}{1-m_1-m_2}. \tag{8}$$

Доказательство обеих теорем начнём с рассмотрения логарифма характеристической функции числа частиц. Разложим эту функцию $u(s,t)$ в точке $s=0$:

$$u(s,t) = \left(i\lambda \int_0^t EZ(y)dy\right)s - \left(\lambda \int_0^t EZ^2(y)dy\right)\frac{s^2}{2} + o(s^2) =$$

$$= \Big(i\lambda M_{Y_1}(t)\Big)s - \Big(\lambda M_{Y_2}(t)\Big)\frac{s^2}{2} + o(s^2). \tag{9}$$

Воспользуемся интегральными уравнениями для моментов $Z(t)$ и $Y_1(t)$, приведёнными в [7] и [8].

$$M_Z(t) = \overline{G}(t) + m_1 \int_0^t M_Z(t-x)dG(x), \tag{10}$$

$$M_Z^{(2)}(t) = \overline{G}(t) + m_1 \int_0^t M_Z^{(2)}(t-x)dG(x) + m_2 \int_0^t M_Z^2(t-x)dG(x), \tag{11}$$

$$M_{Y_1}(t) = t\overline{G}(t) + \int\limits_0^t x dG(x) + m_1 \int\limits_0^t M_{Y_1}(t-x) dG(x) =$$

$$= \rho(t) + m_1 \int\limits_0^t M_{Y_1}(t-x) dG(x). \quad (12)$$

Уравнение для $M_{Y_2}(t)$ будет иметь следующий вид:

$$M_{Y_2}(t) = \rho(t) + m_1 \int\limits_0^t M_{Y_2}(t-x) dG(x) + m_2 \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-x} M_Z^2(y) dy dG(x). \quad (13)$$

Лемма 2. *Если выполнены условия 1-3а), то для $M_{Y_1}(t)$ верна следующая оценка:*

$$c_1(1+t)^{1-\beta} \le M_{Y_1}(t) \le \frac{c_2(1+t)^{1-\beta}}{1-m_1}. \quad (14)$$

Доказательство. Так как $m_1 \int\limits_0^t M_{Y_1}(t-x) dG(x) \ge 0$, то с учётом (3) получаем, что

$$M_{Y_1}(t) \ge \rho(t) \ge c_1(1+t)^{1-\beta}.$$

Далее воспользуемся монотонностью интеграла:

$$M_{Y_1}(t-x) = \int\limits_0^{t-x} M_Z(y) dy \le \int\limits_0^t M_Z(y) dy = M_{Y_1}(t),$$

откуда следует, что

$$M_{Y_1}(t) \le \rho(t) + m_1 M_{Y_1}(t) \int\limits_0^t dG(x) = \rho(t) + m_1 M_{Y_1}(t) G(t).$$

Используя оценку $G(x) \le 1$, получаем

$$M_{Y_1}(t) \le \rho(t) + m_1 M_{Y_1}(t).$$

С учётом (3)

$$M_{Y_1}(t) \le \frac{\rho(t)}{1-m_1} \le \frac{c_2(1+t)^{1-\beta}}{1-m_1}.$$

□

Лемма 3. *Если выполнены условия 1-3б), то для* $M_{Y_2}(t)$ *верна следующая оценка:*

$$c_1(1+t)^{1-\beta} \le M_{Y_2}(t) \le \frac{c_2(1+t)^{1-\beta}}{1-m_1-m_2}. \tag{15}$$

Доказательство. Аналогично Лемме 2 из (13) получаем, что

$$M_{Y_2}(t) \ge \rho(t) \ge c_1(1+t)^{1-\beta}.$$

С другой стороны,

$$M_{Y_2}(t) = \rho(t) + m_1 \int\limits_0^t M_{Y_2}(t-x)dG(x) + m_2 \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-x} M_Z^2(y)dydG(x) \le$$

$$\le \rho(t) + m_1 M_{Y_2}(t) + m_2 \int\limits_0^t M_Z^2(y)dy,$$

откуда следует, что

$$(1-m_1)M_{Y_2}(t) \le \rho(t) + m_2 \int\limits_0^t M_Z^2(y)dy \le$$

$$\le \rho(t) + m_2 \int\limits_0^t M_Z^{(2)}(y)dy = \rho(t) + m_2 M_{Y_2}(t),$$

и тогда

$$\big(1-m_1-m_2\big)M_{Y_2}(t) \le \rho(t).$$

С учётом (3)

$$M_{Y_2}(t) \le \frac{\rho(t)}{1-m_1-m_2} \le \frac{c_2(1+t)^{1-\beta}}{1-m_1-m_2}.$$

□

Дальнейшие рассуждения будут опираться на следующую лемму о свёртках, которая является небольшой модификацией Леммы 2 из работы [6].

Лемма 4. *Пусть для непрерывных функций* $\varphi(t), \chi(t) \ge 0, t \ge 0, 0 < \beta < 1$ *при* $t \to \infty$ *справедливы следующие соотношения*

$$\tilde{c}_1 t^{-\beta} \le \varphi(t) \le \tilde{c}_2 t^{-\beta}, \quad \chi(t) \sim \tilde{c} t^{-\beta-1}, \tag{16}$$

и пусть

$$W(t) = \int_0^t \varphi(t-s)\chi(s)ds = \int_0^t \varphi(s)\chi(t-s)ds.$$

Тогда

$$W(t) \sim \varphi(t) \int_0^\infty \chi(s)ds.$$

Перейдём теперь к доказательству предельных теорем.

Доказательство Теоремы 1. Применим Лемму 5 для $\varphi(t) = M_{Y_1}(t)$, $\chi(t) = g(t)$, используя оценку, полученную в Лемме 2

$$W(t) = \int_0^t M_{Y_1}(t-x)dG(x) \sim M_{Y_1}(t) \int_0^\infty dG(x) = M_{Y_1}(t).$$

Тогда из (12) при $t \to \infty$ получаем

$$M_{Y_1}(t) \sim \frac{\rho(t)}{1-m_1}. \tag{17}$$

Далее представим $X^*(t)$ как,

$$X^*(t) = \frac{X(t)}{\lambda M_{Y_1}(t)} \cdot \frac{\lambda M_{Y_1}(t)}{\frac{\lambda}{1-m_1}\rho(t)}.$$

Из (17) следует, что

$$\frac{\lambda M_{Y_1}(t)}{\frac{\lambda}{1-m_1}\rho(t)} \xrightarrow{d} 1. \tag{18}$$

Так как

$$u(s,t) = \Big(i\lambda M_{Y_1}(t)\Big)s + o(s),$$

то

$$\frac{X(t)}{\lambda M_{Y_1}(t)} \xrightarrow{d} 1. \tag{19}$$

Из сходимости по распределению к константе следует сходимость по вероятности. Объединяя (18) и (19), получаем утверждение теоремы. □

Доказательство Теоремы 2. Доказательство теоремы непосредственно следует из (9), (17) и Леммы 3. □

Следствие. *Если выполнены условия 1-3б), то для любого* $\delta > 0$ *при* $t \to \infty$ *имеет место сходимость*

$$\frac{X(t) - \frac{\lambda}{1-m_1}\rho(t)}{t^{\frac{1-\beta}{2}+\delta}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{20}$$

Доказательство.

$$\frac{X(t) - \frac{\lambda}{1-m_1}\rho(t)}{t^{\frac{1-\beta}{2}+\delta}} = \frac{X(t) - \frac{\lambda}{1-m_1}\rho(t)}{\sqrt{\lambda M_{Y_2}(t)}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda M_{Y_2}(t)}}{t^{\frac{1-\beta}{2}+\delta}}.$$

Первая дробь по Теореме 2 имеет предел по распределению. Из (15) слудет, что при $t \to \infty$

$$\frac{\sqrt{\lambda M_{Y_2}(t)}}{t^{\frac{1-\beta}{2}+\delta}} \leq \frac{\sqrt{\frac{\lambda c_2}{1-m_1-m_2}}(1+t)^{\frac{1-\beta}{2}}}{t^{\frac{1-\beta}{2}+\delta}} \to 0.$$

□

4. Заключение

В данной работе была рассмотрена модель с тяжёлыми хвостами распределения. Был доказан закон больших чисел и предельная теорема, уточняющая скорость сходимости. Получен результат, показывающий, что число частиц растёт, но скорость роста — степенная. Эффект степенного роста объясняется тяжёлыми хвостами распределения, в то время как известно, что при легких хвостах наблюдается экспоненциальный рост или стабильность.

Список источников

1. Ватутин В. А., Зубков А. М. Ветвящиеся процессы. I // Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. 1985. 23:3–67.
2. Ватутин В. А., Топчий В. А. Критические ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса с долго живущими частицами // Труды МИАН. 2013. 282:257–287.
3. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы // М.: Наука. 1971. 436.
4. Чернавская Е. А. Предельные теоремы для системы обслуживания с бесконечным числом приборов // Матем. заметки. 2015. 98(4):590–605.
5. Чистяков В. П. Предельные теоремы для ветвящихся процессов с превращениями, зависящими от возраста частиц // Теория вероятн. и ее примен. 1972. 17(1):55–70.

6. Яровая Е. Б. Модели ветвящихся блужданий и их применение в теории надежности // Автоматика и телемеханика. 2010. 7:29–46.
7. Harris. T. E. The Theory of Branching Processes // Springer-Verlag. 1963. P. 121-163.
8. Jagers P. Integrals of branching processes // Biometrika. 1967. 54(1-2):263-271.
9. Kaplan N. Limit theorems for a $GI/G/\infty$ queue // The Annals of Probability. 1975. 3(5):780-789.
10. Pakes A. G. Limit theorems for the integrals of some branching processes // Stochastic Processes and their Applications. 1975. 3(1):89-111.

References

1. Vatutin V. A., Zubkov A. M. Branching processes. I. // J Math Sci. 1987. 39:2431–2475.
2. Vatutin V. A., Topchii V.A. Critical Bellman-Harris branching processes with long-living particles // Proc. Steklov Inst. 2013. 282:243–272.
3. Sevastyanov B. A. Branching processes // Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1968. 4:635–642.
4. Chernavskaya E.A. Limit theorems for an infinite-server queuing system // Math Notes. 2015. 98:653–666.
5. Chistyakov V. P. Limit Theorems for Age-Dependent Branching Processes // heory Probab. Appl. 1972. 17(1):55–70.
6. Yarovaya E.B. Models of branching walks and their use in the reliability theory // Autom Remote Control. 2010. 71:1308–1324.
7. Harris. T. E. The Theory of Branching Processes // Springer-Verlag. 1963. P. 121-163.
8. Jagers P. Integrals of branching processes // Biometrika. 1967. 54(1-2):263-271.
9. Kaplan N. Limit theorems for a $GI/G/\infty$ queue // The Annals of Probability. 1975. 3(5):780-789.
10. Pakes A. G. Limit theorems for the integrals of some branching processes // Stochastic Processes and their Applications. 1975. 3(1):89-111.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 187-197.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 187-197.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ К СИСТЕМЕ НЕСОВЕРШЕННЫХ НАКЛОННЫХ СКВАЖИН В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ СОПРЯЖЕНИЯ

Алексей Анатольевич Аксюхин✉
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
aksyukhin@mail.ru✉*, https://orcid.org/0000-0002-4778-0716*

Аннотация. *Ставится и решается методом дискретных особенностей задача трехмерной фильтрации о дебите нескольких несовершенных наклонных скважин в кусочно-однородной среде с кусочно-гладкой границей смены однородностей. Исследуется зависимость дебита скважин от угла наклона их фильтров к вертикали, от величины скачка проницаемостей на границе сопряжения.*

Ключевые слова: *трехмерная фильтрация, метод дискретных особенностей, дебит несовершенной скважины, наклонный фильтр скважины, кусочно-гладкая граница сопряжения.*

Conference paper

RESEARCH ON THREE-DIMENSIONAL FLUID FILTRATION TO A SYSTEM OF IMPERFECT INCLINED WELLS IN A PIECEWISE HOMOGENEOUS LAYER WITH A PIECEWISE SMOOTH CONJUGATE BOUNDARY

Alexey A. Aksyukhin✉
Orel State University, Orel, Russia
aksyukhin@mail.ru✉*, https://orcid.org/0000-0002-4778-0716*

Abstract. *The problem of three-dimensional filtration on the production rate of several imperfect inclined wells in a piecewise homogeneous medium with a piecewise smooth boundary of change of homogeneities is posed and solved by the method of discrete singularities. The dependence of well production on the angle of inclination*

© Аксюхин А.А., 2023

of their filters to the vertical and on the magnitude of the permeability jump at the interface is studied.

Keywords: *three-dimensional filtration, discrete feature method, imperfect well flow rate, inclined well filter, piecewise smooth conjugate boundary.*

1. Введение

Как правило, водо- и нефтеносные слои грунта не являются однородными по своей структуре. Их проницаемость непрерывно меняется от точки к точке или скачком на границах стыковки пород с различными проницаемостями. Из-за этого построение моделей фильтрации жидкостей в таких слоях затруднено. Среди задач трёхмерной фильтрации жидкости наибольший практический интерес представляют собой проблемы отыскания дебита несовершенных скважин, работающих в таких слоях, а также вопрос о взаимном расположении фильтров скважин и их наклона к вертикали для получения наибольшего суммарного дебита.

Поставим задачу о работе несовершенных наклонных эксплуатационных скважинах, работающих в кусочно-однородной по проницаемости среде, имеющей кусочно-гладкую поверхность скачка проницаемостей, построим численную модель решения задачи для получения картины течения жидкости к системе наклонных скважине и рассчитаем дебит каждой скважины, исследуем зависимость дебита скважин от положения фильтров скважин относительно друг друга, границ сопряжения и питания, а также от величины скачка проницаемости проницаемостей.

1. Постановка задачи

Рассмотрим стационарную напорную линейную фильтрацию несжимаемой жидкости к несовершенным (по форме вскрытия пласта) скважинам, фильтры которых могут быть наклонены к вертикали под произвольным углом. Область D течения жидкости ограничена гладкой замкнутой поверхностью питания $\sigma_{\text{п}}$, класса Ляпунова и непроницаемой плоскостью σ_0. Причём, область D разбивается замкнутой кусочно-гладкой поверхностью σ того же класса, что и $\sigma_{\text{п}}$, на две области: внешнюю D_1, и внутреннюю D_2, среды в которых характеризуются коэффициентами проницаемостей $K_1(M) = k_1 K(M)$ и $K_2(M) = k_2 K(M)$ соответственно ($k_\nu = \text{const}_\nu$, $\nu = 1, 2$). Здесь $M(x, y, z)$ — точка области D. Поверхности σ и $\sigma_{\text{п}}$ не касаются и не пересекаются.

Течение жидкости в областях D_ν, $\nu = 1, 2$ описывают искомые квазипотенциалы скоростей $\varphi_\nu(M)$, которые всюду в области $D \setminus \Sigma$, за исключением фильтров скважин, удовлетворяют записанному в безразмерных величинах уравнению:

$$\nabla \cdot \left[K_\nu(M) \nabla \varphi_\nu(M)\right] = 0,\ M \in D \setminus \Sigma, \qquad (1.1)$$
$$\Sigma = \sigma \cup \sigma_{\Pi} \cup \sigma_0 \cup \sigma_{c\eta},\ \nu = 1, 2,\ \eta = 1, 2, \ldots, m,$$

где $\sigma_{c\eta}$ - поверхность фильтра скважины с номером η, и условиям сопряжения на границе на границе σ [1]:

$$\varphi_1^+(M)=\varphi_2^-(M);\ k_1(M)\left(\frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial n_M}\right)^+=k_2(M)\left(\frac{\partial\varphi_2(M)}{\partial n_M}\right)^- \qquad (1.2)$$

Здесь n_M — внешняя нормаль к поверхности σ, а индексы «+» и «-» означают предельные значения соответствующих функций при приближении к σ извне и изнутри соответственно.

На сингулярной плоскости σ (непроницаемой границе), функция $\varphi_1(M)$ удовлетворяет условию:

$$K_1(M)\frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial n_M}=0,\ M\in\sigma_0. \qquad (1.3)$$

Пусть фильтры всех m скважин целиком расположены в области D_2, и их поверхности $\sigma_{c\eta}$, $\eta=1,2,...,m$ не имеют общих точек друг с другом и с поверхностью σ. Фильтр каждой скважины будем моделировать круговым цилиндром $L_{c\eta}$ длины L_η и радиусом $R_{c\eta}$, $\eta=1,2,...,m$.

По аналогией с исследованием [1], поверхность постоянного давления на фильтре каждой скважины можно считать узкими эллипсоидами $\sigma_{c\eta}$ с фокусами в точках, совпадающими с центрами основания цилиндров $L_{c\eta}$. При этом полуоси эллипсоидов будут близки к радиусам $R_{c\eta}$ и $L_{c\eta}/2$, а объёмы цилиндров $L_{c\eta}$ и эллипсоидов $\sigma_{c\eta}$, $\eta=1,2,...,m$ будут незначительно отличаться друг от друга.

Работу η-той скважины можно моделировать линейным стоком длины L_η, расположенным на оси цилиндра $L_{c\eta}$, с расходом Π_η жидкости в единицу времени. Величину $q_\eta=\Pi_\eta/L_\eta$g будем называть дебитом скважины, приходящимся на единицу длины фильтра. Эти величины q_η, $\eta=1,2,...,m$ необходимо отыскать.

Давления жидкости на поверхности питания $\sigma_\text{п}$, и фильтрах скважин $\sigma_{c\eta}$, $\eta=1,2,...,m$ считаются известными и задаются соотношениями:

$$k_1\varphi_1^-(M)=A(M),\ M\in\sigma_\text{п}, \qquad (1.4)$$

где $A(M)$– функция распределения давления на $\sigma_\text{П}$.

$$k_2\varphi_2(M_{c\eta})=C_\eta,\ M_{c\eta}\in\sigma_{c\eta},\ \eta=1,2,...,m. \qquad (1.5)$$

Здесь, в силу малости размеров фильтра скважин по сравнению с размерами областей D_ν, $\nu=1,2$, считается, что $C_\eta=\text{const}_\eta$ — среднее значение давления на фильтре η-той скважины, а точка $M_{c\eta}$ является средней точкой поверхности фильтра $\sigma_{c\eta}$, $\varphi_1^-(M)$ — предельное значение квазипотенциала при подходе к границе $\sigma_\text{п}$, изнутри. Соотношений вида (1.5) будет столько же, сколько и скважин, т.е. m.

Декартову систему координат x, y, z выберем так, чтобы плоскость xOy совпадала с плоскостью σ_0, а ось Oz была направлена в область D.

Пусть один из концов фильтра η-той скважины (например, ближайший к плоскости σ_0,) расположен точке $M_{0\eta}(x_{0\eta}, y_{0\eta}, z_{0\eta})$, тогда координаты второго конца фильтра $M_{1\eta}(x_{1\eta}, y_{1\eta}, z_{1\eta})$, вычисляются по формулам:

$x_{1\eta} = x_{0\eta} + L_\eta \cdot \sin\theta_\eta \cdot \cos\alpha_\eta$; $y_{1\eta} = y_{0\eta} + L_\eta \cdot \sin\theta_\eta \cdot \sin\alpha_\eta$; $z_{1\eta} = z_{0\eta} + L_\eta \cdot \cos\theta_\eta$,

где θ_η и α_η — углы сферической системы координат, связанной с выбранными декартовыми координатами, показанные на рисунке 1.

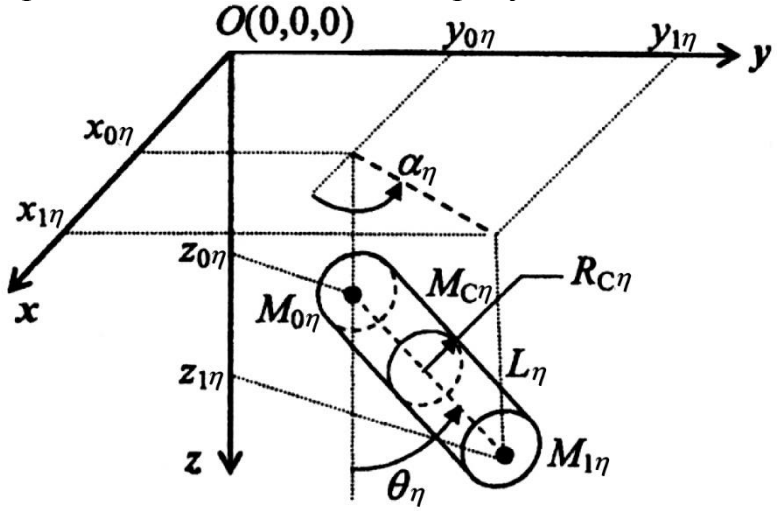


Рисунок 1. Фильтр η-той наклонной скважины в области фильтрации.

Известно также, что в отсутствии границ σ и $\sigma_п$, течение в области $D = D_1 \cup D_2$ описывает квазипотенциал $\varphi_0(M)$, который является решением уравнения (1.1), удовлетворяет условию (1.3) и содержат искомые дебиты скважин q_η, $\eta = 1, 2, ..., m$:

$$\varphi_0(M) = \sum_{\eta=1}^{m} \varphi_{0\eta}(M) = \sum_{\eta=1}^{m} \frac{q_\eta}{4\pi} \left(\ln \frac{R_{2\eta} + r_{2\eta}}{R_{1\eta} + r_{1\eta}} + \ln \frac{\tilde{R}_{2\eta} + \tilde{r}_{2\eta}}{\tilde{R}_{1\eta} + \tilde{r}_\eta} \right), \tag{1.6}$$

где $R_{\nu\eta} = \sqrt{\rho^2_{MM_{\nu\eta}} + (z_{\nu\eta} - z_M)^2}$; $\tilde{R}_{\nu\eta} = \sqrt{\rho^2_{MM_{\nu\eta}} + (z_{\nu\eta} + z_M)^2}$;

$r_{\nu\eta} = (x_{\nu\eta} - x_M)\cos\alpha_\eta + (y_{\nu\eta} - y_M)\cos\beta_\eta + (z_{\nu\eta} - z_M)\cos\gamma_\eta$;

$\tilde{r}_{\nu\eta} = (x_{\nu\eta} - x_M)\cos\alpha_\eta + (y_{\nu\eta} - y_M)\cos\beta_\eta + (z_{\nu\eta} + z_M)\cos\gamma_\eta$;

$\rho_{MM_{\nu\eta}} = \sqrt{(x_{\nu\eta} - x_M)^2 + (y_{\nu\eta} - y_M)^2}$; $\nu = 1, 2$; $\eta = 1, 2, ..., m$,

где q_η – дебит, приходящийся на единицу длины фильтра скважины, а через $\cos\alpha_\eta$, $\cos\beta_\eta$, $\cos\gamma_\eta$ обозначены направляющие косинусы отрезков $M_{0\eta}M_{1\eta}$.

2. Сведение задачи о дебите системы наклонных скважин к системе интегральных уравнений

Поиск решения задачи (1.1)-(1.6) будем вести в виде:

$$\varphi_\nu(M) = \frac{\varphi_0(M) + \Phi_\nu(M)}{k_\nu}, \; M \in D_\nu \setminus \Sigma, \; \nu = 1, 2, \tag{2.1}$$

где $\Phi_\nu(M)$ — квазипотенциалы возмущения, обусловленные наличием границ σ и $\sigma_\text{п}$. Как показано в работе [1], квазипотенциалы $\Phi_\nu(M)$, $\nu=1,2$ можно моделировать квазипотенциалами двойного слоя, непрерывно распределёнными с плотностями $g_\nu(N)$ и $f(T)$ на поверхностях σ и $\sigma_\text{П}$ соответственно:

$$\Phi_\nu(M)=\int_\sigma g_\nu(N)\,K_\nu(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N}d\sigma_N+\int_{\sigma_\text{П}} f(T)\,K_1(T)\frac{\partial F(M,T)}{\partial n_T}d\sigma_{\text{П},T}, \quad (2.2)$$

$$\nu=1,2,\ M\in D_\nu,\ N\in\sigma,\ T\in\sigma_\text{П}.$$

Здесь $\vec{n}_N$ и $\vec{n}_T$ — орты положительных нормалей, направленные во внешние к границам σ и $\sigma_\text{П}$ области, $F(M,N)$, $F(M,T)$ — фундаментальные решения уравнения (1.1), имеющие в точках N и T особенности. Функция $F(M,N)$ выбирается таким образом, чтобы на поверхности σ_0 она удовлетворяла условию вида (1.3) (функция Грина).

$$F(M,N)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R_{MN}}+\frac{1}{\tilde{R}_{MN}}\right),\ N\in\sigma, \quad (2.3)$$

где $R_{MN}=\sqrt{\rho_{MN}^2+(z_M-z_N)^2}$, $\tilde{R}_{MN}=\sqrt{\rho_{MN}^2+(z_M+z_N)^2}$,

$\rho_{MN}=\sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2}$.

Известно [2], что предельные значения потенциала двойного слоя на границах σ и $\sigma_\text{П}$ будут иметь вид:

$$\Phi_1^+(M)=\int_\sigma g_1(N)\,K_1(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N}d\sigma_N+$$
$$+\int_{\sigma_\text{П}} f(T)\,K_1(T)\frac{\partial F(M,T)}{\partial n_T}d\sigma_{\text{п},T}+\frac{g_1(M)}{2},$$
$$M\in\sigma; \quad (2.4)$$
$$\Phi_2^-(M)=\int_\sigma g_2(N)\,K_2(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N}d\sigma_N+$$
$$+\int_{\sigma_\text{П}} f(T)\,K_1(T)\frac{\partial F(M,T)}{\partial n_T}d\sigma_{\text{п},T}-\frac{g_2(M)}{2},$$
$$\Phi_1^-(M)=\int_\sigma g_1(N)\,K_1(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N}d\sigma_N+$$
$$+\int_{\sigma_\text{П}} f(T)\,K_1(N)\frac{\partial F(M,T)}{\partial n_T}d\sigma_{\text{п},T}-\frac{f(M)}{2},\quad M\in\sigma_\text{П}.$$

Таким образом, для кусочно-однородной среды $K(M)\equiv 1$, $K_1(M)=k_1$, $K_2(M)=k_2$, $k_\nu=\text{const}_\nu$, $\nu=1,2$ уравнения (1.1) обратятся в уравнения Лапласа, а граничные условия (1.2)-(1.5) с учетом функций (1.6), (2.2), (2.3), (2.4) приведут

к системе двух интегральных уравнений и m интегральных соотношений следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{g(M)}{2} - \lambda \int\limits_{\sigma} g(N) \dfrac{\partial F(M,N)}{\partial n_N} d\sigma_N - \lambda \int\limits_{\sigma_{\text{п}}} f(T) \dfrac{\partial F(M,T)}{\partial n_T} d\sigma_{\text{п},T} = \\ \qquad = \lambda \varphi_0(M), M \in \sigma; \\ \int\limits_{\sigma} g(N) \dfrac{\partial F(M,N)}{\partial n_N} d\sigma_N - \dfrac{f(M)}{2} + \int\limits_{\sigma_{\text{п}}} f(T) \dfrac{\partial F(M,T)}{\partial n_T} d\sigma_{\text{п},T} = \\ \qquad = A(M) - \varphi_0(M), M \in \sigma_{\text{п}}; \\ \int\limits_{\sigma} g(N) \dfrac{\partial F(M_{c\eta},N)}{\partial n_N} d\sigma_N + \int\limits_{\sigma_{\text{п}}} f(T) \dfrac{\partial F(M_{c\eta},T)}{\partial n_T} d\sigma_{\text{п},T} = \\ \qquad = C_\eta - \varphi_0(M_{c\eta}),\ M_{c\eta} \in \sigma_{c\eta},\ \eta = 1,2,\ldots,m, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $\lambda = \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$, $g(N)$ и $f(T)$ – искомые плотности распределения потенциала двойного слоя по поверхностям σ и $\sigma_{\text{п}}$ соответственно. Таким образом, для нахождения дебитов скважин q_η, входящих в функцию φ_0, необходимо решить систему (2.5) относительно $g(N)$, $f(T)$ и q_η, $\eta = 1,2,\ldots,m$.

3. Численное решение системы интегральных уравнений и интегральных соотношений

Следуя [1-2], для численного решения системы (2.5) перепишем её уравнения в параметрическом виде. Зададим поверхности σ и $\sigma_{\text{п}}$ параметрически: $\vec{r}_N = \vec{r}_N(u_N, v_N)$, $\vec{r}_T = \vec{r}_T(t_T, \tau_T)$, где $N \in \sigma$, $T \in \sigma_{\text{п}}$, u_N, v_N, t_T, τ_T – параметры.

Введем обозначения:

$$\frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N} d\sigma_N = \Omega(u_M, v_M, u_N, v_N) du_N dv_N,$$

где $\Omega(u_M, v_M, u_N, v_N)$ — ядро интегральных уравнений (2.5), имеет вид:

$$\Omega(u_M, v_M, u_N, v_N) = \nabla_N F(M,N) \cdot \vec{n}_N = \left(\frac{\partial F(M,N)}{\partial x(u_N, v_N)} \vec{i} + \frac{\partial F(M,N)}{\partial y(u_N, v_N)} \vec{j} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F(M,N)}{\partial z(u_N, v_N)} \vec{k} \right) \cdot \left[\dot{\vec{r}}_{N,u}, \dot{\vec{r}}_{N,v} \right] \sqrt{\left| \dot{\vec{r}}_{N,u}, \dot{\vec{r}}_{N,v} \right|^2},\ \dot{\vec{r}}_{N,u} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_N}{\partial u_N},\ \dot{\vec{r}}_{N,v} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_N}{\partial u_N},$$

$$d\sigma_N = du_N dv_N.$$

Аналогично: $\dfrac{\partial F(M,T)}{\partial n_T} d\sigma_{\Pi,T} = \Omega(t_M, \tau_M, t_T, \tau_T) d\tau_N d\tau_T$.

Если поверхности σ и $\sigma_{\text{п}}$ кусочно-гладкие, то их необходимо задавать таким образом, чтобы линии «сшивки» гладких фрагментов этих поверхностей

являлись бы координатными линиями (например, для поверхности σ такими линиями будут $u_N = \text{const}$ и $v_N = \text{const}$). Система (2.5) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{g(u_M, v_M)}{2} - \lambda \int\limits_{u_N} \int\limits_{v_N} g(u_N, v_N)\Omega(u_M, v_M, u_N, v_N)du_N dv_N - \\ - \lambda \int\limits_{t_T} \int\limits_{\tau_T} f(t_T, \tau_T)\Omega(u_M, v_M, t_T, \tau_T)dt_T d\tau_T = \\ \qquad = \lambda\varphi_0(u_M, v_M), \quad M(u_M, v_M) \in \sigma; \\ \dfrac{f(t_M, \tau_M)}{2} - \int\limits_{u_N} \int\limits_{v_N} g(u_N, v_N)\Omega(t_M, \tau_M, u_N, v_N)du_N dv_N - \\ - \int\limits_{t_T} \int\limits_{\tau_T} f(t_T, \tau_T)\Omega(t_M, \tau_M, t_T, \tau_T)dt_T d\tau_T = \\ \qquad = \varphi_0(t_M, \tau_M) - A(t_M, \tau_M), M(t_M, \tau_M) \in \sigma_{\text{п}}; \\ \int\limits_{u_N} \int\limits_{v_N} g(u_N, v_N)\Omega(M_{c\eta}, u_N, v_N)du_N dv_N + \\ + \int\limits_{t_T} \int\limits_{\tau_T} f(t_T, \tau_T)\Omega(M_{c\eta}, t_T, \tau_T)dt_T d\tau_T = C_\eta - \varphi_0(M_{c\eta}), \; M_{c\eta} \in \sigma_{c\eta}, \\ \qquad \eta = 1, 2, \ldots, m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Численное решение уравнений (3.1) заключается в замене непрерывных на поверхностях σ и $\sigma_{\text{п}}$ подынтегральных функций совокупностью их значений в дискретных точках этих поверхностей и переходу от интегральных уравнений к системе алгебраических.

Разобьем поверхность σ равномерно по параметрам u_N, v_N на $n_1 \cdot n_2$ точек (n_1 – число координатных линий $u_N = \text{const}$ с шагом h_1, n_2 – линий $v_N = \text{const}$ с шагом h_2). Аналогично, поверхность $\sigma_{\text{п}}$ представим в виде совокупности $n_3 \cdot n_4$ точек. Причем, в случае кусочно-гладких поверхностей σ и $\sigma_{\text{п}}$ их разбиение по параметрам u_N, v_N, t_T, τ_T проведём так, чтобы координатные линии $u_N = \text{const}$, $v_N = \text{const}$, $t_T = \text{const}$, $\tau_T = \text{const}$ не совпадали с линиями «сшивки» гладких фрагментов поверхностей, а отстояли от них на половину шага: $h_1/2$, $h_2/2$ и $h_3/2$, $h_4/2$. Далее, заменив по квадратурным формулам интегралы в системе (3.1) суммами и положив $du_N \approx h_1$, $dv_N \approx h_2$, $dt_T \approx h_3$, $d\tau_T \approx h_4$, получим систему $n_1 n_2 + n_3 n_4 + m$ алгебраических уравнений, решение которой будет содержать искомые дебиты скважин q_η, $\eta = 1, \ldots, m$.

Решая систему (3.2), находим неизвестные $g_{k,i}$ $(k = 1, \ldots, n_1, j = 1, \ldots, n_2)$, $f_{\gamma,\mu}$ $(\gamma = 1, \ldots, n_3, \mu = 1, \ldots, n_4)$ и искомые дебиты q_η $(\eta = 1, \ldots, m)$.

$$\frac{g(u_j,v_\ell)}{2}-\lambda\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{\substack{i=1\\(j,\ell\neq k,i)}}^{n_2} g(u_k,v_i)\Omega(u_j,v_\ell,u_k,v_i)h_1h_2-$$

$$-\lambda\sum_{\gamma=1}^{n_3}\sum_{\mu=1}^{n_4} f(t_\gamma,\tau_\mu)\Omega(u_j,v_\ell,t_\gamma,\tau_\mu)h_3h_4=\lambda\varphi_0(u_j,v_\ell),\ j=1,..n_1;\ \ell=1,...,n_2;$$

$$\frac{f(t_j,\tau_\ell)}{2}-\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{i=1}^{n_2} g(u_k,v_i)\Omega(t_j,\tau_\ell,u_k,v_i)h_1h_2- \tag{3.2}$$

$$-\sum_{\gamma=1}^{n_3}\sum_{\substack{\mu=1\\(j,\ell\neq\gamma,\mu)}}^{n_4} f(t_\gamma,\tau_\mu)\Omega(t_j,\tau_\ell,t_\gamma,\tau_\mu)h_3h_4=\varphi_0(t_j,\tau_\ell)-A(t_j,\tau_\ell),$$

$$j=1,..n_3;\ \ell=1,...,n_4,$$

$$\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{i=1}^{n_2} g(u_k,v_i)\Omega(M,u_k,v_i)h_1h_2+\sum_{\gamma=1}^{n_3}\sum_{\mu=1}^{n_4} f(t_\gamma,\tau_\mu)\Omega(M,t_\gamma,\tau_\mu)h_3h_4=$$

$$=C_\eta-\varphi_0(M_{c\eta}),\ M_{c\eta}\in\sigma_{c\eta},\ \eta=1,2,...,m.$$

Скорость течения жидкости $\vec{V}_\nu(M)=k_\nu\nabla_M\varphi_\nu(M)$ к скважине в каждой точке $M\in D_\nu\setminus\Sigma$, $\nu=1,2$ можно рассчитать по формуле:

$$\vec{V}(M)=\sum_{\eta=1}^{m}\nabla_M\varphi_{0\eta}(q_\eta,M)+\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{i=1}^{n_2} g(u_k,v_i)\nabla_M\Omega(M,u_k,v_i)h_1h_2+$$
$$+\sum_{\gamma=1}^{n_3}\sum_{\mu=1}^{n_4} f(t_\gamma,\tau_\mu)\nabla_M\Omega(M,t_\gamma,\tau_\mu)h_3h_4. \tag{3.3}$$

4. Заключение

В качестве примера решения задачи о дебитах рассмотрим фильтрацию к системе двух $m=2$ несовершенных скважин с фильтрами одинаковой длины, одна из которых наклонная, другая – вертикальная, поверхность питания $\sigma_{\text{п}}$ – гладкая полусферической формы, граница сопряжения σ – кусочно-гладкая в виде прямоугольного параллелепипеда. Поле скоростей течения к этим скважинам при $\lambda=-0{,}5$ представлено на рисунке 2.

Зависимость относительных дебитов скважин $Q=\dfrac{q_\eta}{q_0}-1$, $\eta=1,2$ от угла наклона θ_1 (или γ_1) фильтра первой скважины к вертикальной оси Oz при различных значениях $\lambda=0,\pm0{,}5$ показаны на рисунке 3. Угол γ_1 - это угол между осью фильтра и плоскостью xOy. Здесь q_0 - дебит каждой из скважин в однородной среде ($\lambda=0$), когда их фильтры вертикальны и расположены

симметрично относительно оси Oz и границы $\sigma_{\text{п}}$, параллельно друг другу (углы $\theta_1 = \theta_2 = 0^{\text{o}}$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = 90^{\text{o}}$).

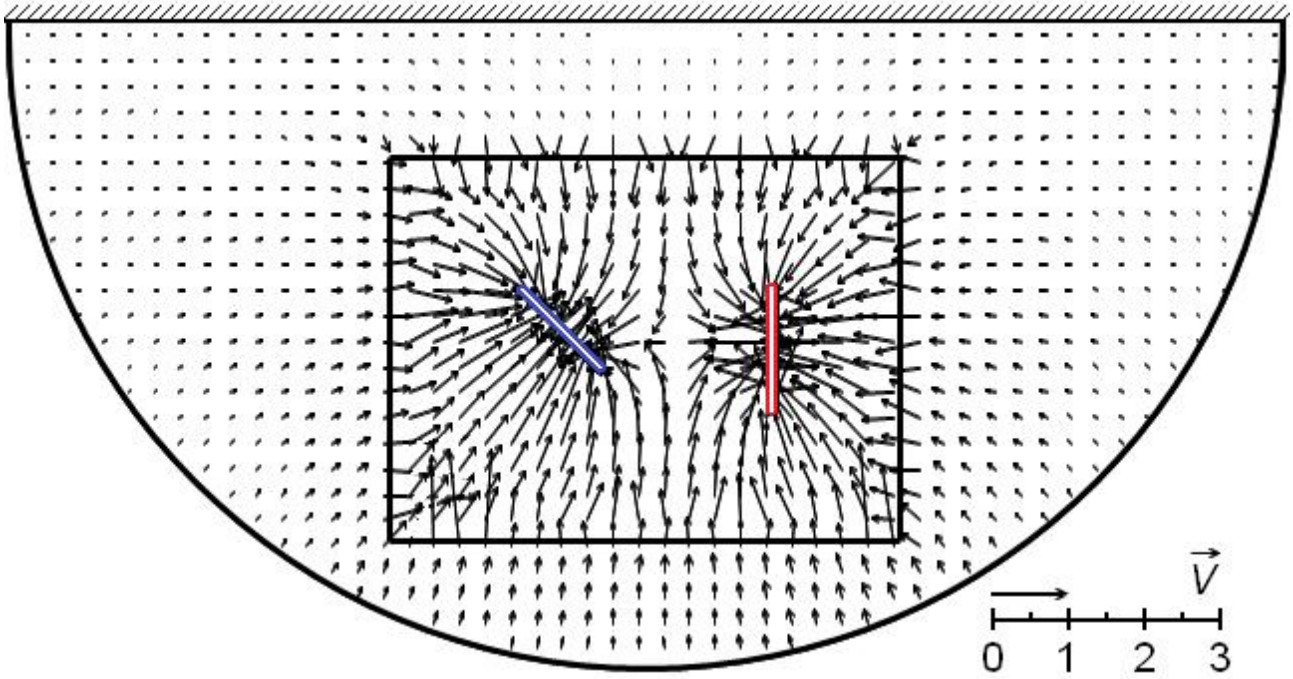


Рисунок 2. Поле скоростей течения жидкости в кусочно-однородном слое (λ=–0,5) к системе двух несовершенных скважин, одна из которых наклонная ($\theta_1 = \gamma_1 = 45^{\text{o}}$).

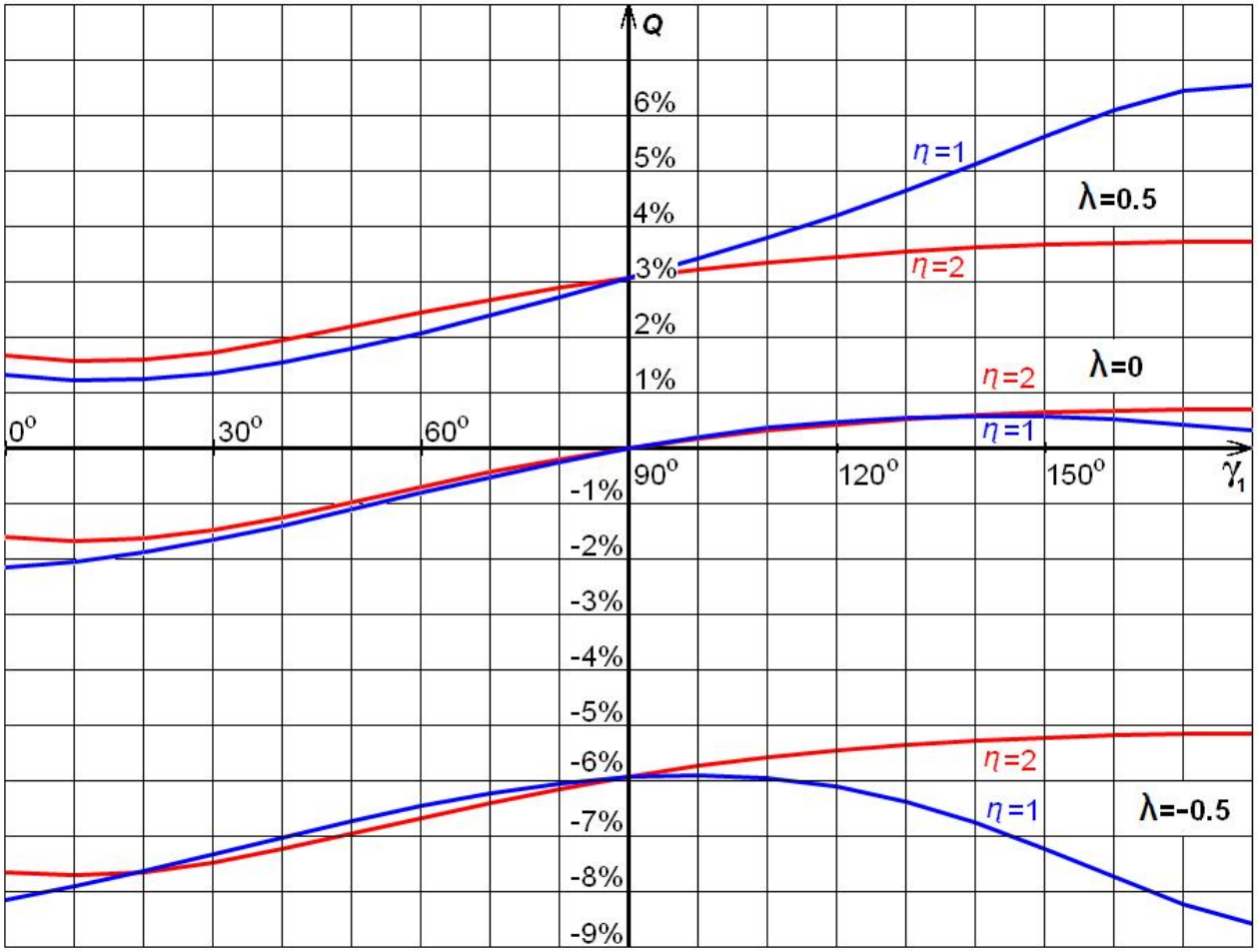


Рисунок 3. Зависимость дебитов скважин от угла γ_1 наклона фильтра первой скважины.

Из рисунка 3 видно, что дебиты обеих скважин будут тем больше, чем ближе к горизонтальному положению приближается фильтр первой скважины при фиксированном положении второго, и чем дальше друг от друга находятся фильтры скважин. Но эти изменения невелики и составляют 2-3% от дебита вертикальных скважин. Кроме того, дебит наклонной скважины q_1 становится максимальным при $\lambda > 0$ и угле наклона $\gamma_1 = 180^{\circ}$ (т.е. фильтр первой скважины расположен горизонтально, максимально удалён от фильтра второй скважины и касается поверхности питания $\sigma_{\text{п}}$).

Для оценки влияния на дебиты скважин скачка проницаемостей грунта λ на границе сопряжения σ положение симметрично расположенных фильтров скважин зафиксируем в вертикальном положении (углы: $\theta_1 = \theta_2 = 0^{\circ}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 90^{\circ}$). При этом дебиты скважин будут всегда равны друг-другу $q_1 = q_2 = q$. В отсутствии границы сопряжения σ (т.е. при $\lambda = 0$) дебит каждой скважины равен q_0. На рисунке 4 показано, что относительный дебит $q/q_0 - 1$ скважины растет с увеличением скачка проницаемостей грунта λ, что подтверждается и другими исследованиями [1].

Таким образом, полученные результаты численного решения задачи о дебите системы несовершенных наклонных скважин согласуются с известными аналитическими решениями, являющимися частными случаями данной задачи.

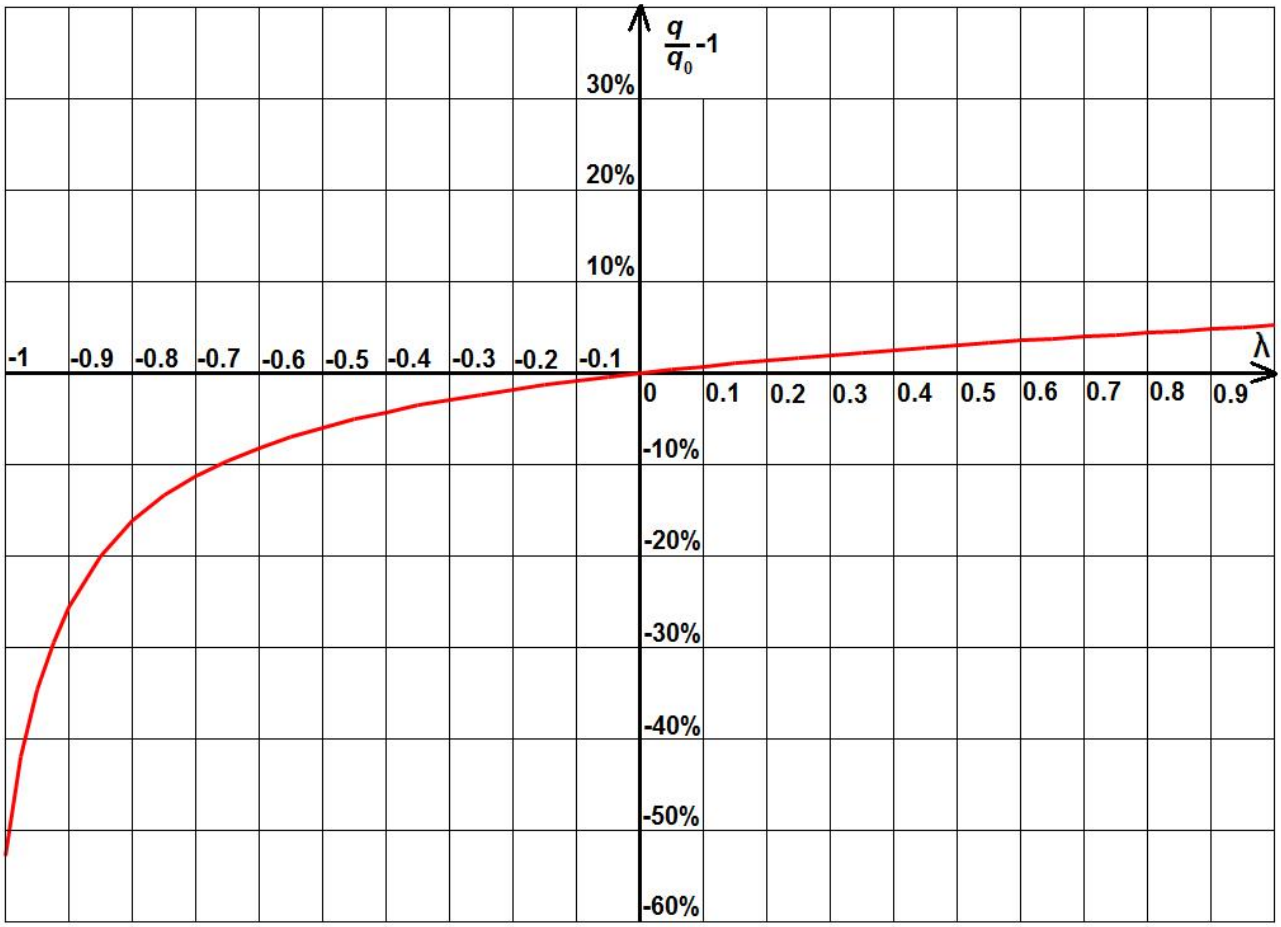


Рисунок 4. Зависимость дебитов вертикальных скважин
от величины скачка проницаемостей λ.

Список источников

1. Аксюхин, А. А. Решение трехмерной задачи о дебите скважины в кусочно-однородной среде методом дискретных особенностей / А. А. Аксюхин, В. Ф. Пивень - Труды IX международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» («МДОЗМФ-2000»), посвященного 80-летию со дня рождения профессора С.М. Белоцерковского: 29 мая – 2 июня 2000 г. [Редкол.: Авдеев Ф. С. (отв. ред.) [и др.]. – Орёл: Орловский государственный университет. 2000. С. 19-27.

2. Лифанов, И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн / И. К. Лифанов. – Москва: ТОО «Янус», 1995. – 519 с.: ил.; 21 см.; ISBN 5-88929-003-7.

References

1. Aksyukhin A. A., Piven V. F. Solution of a three-dimensional problem of well production in a piecewise homogeneous medium using the method of discrete singularities // Proceedings of the IX international symposium “Methods of discrete singularities in problems of mathematical physics”. Orel: Orel State University; 2000. pp. 19-27.

2. Lifanov I. K. Method of singular integral equations and numerical experiment in mathematical physics, aerodynamics, theory of elasticity and wave diffraction. Moscow: Janus LLP, 1995. – 519 p. ISBN 5-88929-003-7.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 198-204.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 198-204.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДРЕНАЖНОЙ СИСТЕМЫ И НЕСКОЛЬКИХ ПОЛУПРОНИЦАЕМЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ НА ПРОЦЕСС ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

Виктория Ивановна Дорофеева[1]✉, Дмитрий Юрьевич Дорофеев[2]
[1]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[2]НИТУ МИСИС, Москва, Россия
[1]vdorofey@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0001-6116-2511
[2]mitya.dorofeev@inbox.ru

Аннотация. *Исследуется процесс оседания уровня грунтовых вод на основе математической модели «поршневого» вытеснения, построенной для случая наличия дренажных систем и нескольких полупроницаемых включений произвольной формы с различными коэффициентами проницаемости в области протекания процесса. Приведены примеры процесса оседания грунтовых вод в однородных слоях при наличии двух стоков и двух включений. Численная реализация выполнена на основе метода дискретных особенностей посредством разработанного программного обеспечения с помощью языка программирования Python и пакетов NumPy, SciPy и SymPy.*

Ключевые слова: *эволюция свободной поверхности, метод дискретных особенностей, дренажная система, полупроницаемое включение.*

Conference paper

STUDY OF THE INFLUENCE OF THE DRAINAGE SYSTEM AND SEVERAL SEMI-PERMEABLE INCLUSIONS ON THE PROCESS OF CHANGING GROUNDWATER LEVEL

Viktoriya I. Dorofeyeva[1]✉, Dmitrii Yur. Dorofeyev[2]
[1]Turgenev Orel State University, Orel, Russia
[2]Research Technological University MISIS, Moskow, Russia
[1]vdorofey@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0001-6116-2511
[2]mitya.dorofeev@inbox.ru

Abstract. *The process of groundwater level subsidence is studied on the basis of a mathematical model of "piston" displacement, constructed for the case of the presence of drainage systems and several semi-permeable inclusions of arbitrary*

© Дорофеева В.И., Дорофеев Д.Ю., 2023

shape with different permeability coefficients in the area of the process. Examples of the process of groundwater subsidence in homogeneous layers in the presence of two drains and two inclusions are given. The numerical implementation is based on the discrete singularity method using the developed software using the Python programming language and the NumPy, SciPy and SymPy packages.

Keywords: *evolution of free surface, method of discrete singularities, drainage system, semi-permeable inclusion*

1. Введение

Выбор темы исследования обусловлен необходимостью изучения математической модели процесса изменения уровня грунтовых вод, что имеет непосредственное прикладной значение [1-3].

В данной работе анализируется задача о совместном движении двух жидкостей в постановке Лейбензона-Маскета (модель «поршневого» вытеснения), причем внешняя жидкость рассматривается как фиктивная; после построения основной системы интегрального и дифференциального уравнений выбирается предельный случай, в котором вязкость и плотность внешней жидкости стремятся к нулю. Для численного решения основной системы интегрального и дифференциального уравнений применяется метод дискретных особенностей, который дает возможность численно решить задачу с высокой степенью достоверности результата [4-7].

В качестве языка программирования, обеспечивающего высокую скорость и точность решения при работе с большим объемом информации, используется высоко-уровневый язык программирования Python с пакетами NumPy, SciPy и SymPy [8].

2. Основной текст статьи

Рассмотрим двумерную задачу об одновременной фильтрации двух жидкостей в пористой среде в постановке Лейбензона-Маскета [9]. В кусочно–однородном изотропном слое грунта рассмотрим область D, занятую одной жидкостью с вязкостью и плотностью $\mu_2 = 1$ и $\rho_2 = 1$, окруженную другой с вязкостью и плотностью μ_1 и ρ_1. Жидкости разделены резкой гладкой кривой L_t. Ее начальное положение L_0 известно. Область совместной фильтрации жидкостей может быть ограничена непроницаемой линией L_I, разделяющей грунт или непроницаемые породы.

Полагаем, что в области фильтрации имеется два полупроницаемых включения, причем границу, разделяющую среды с различными коэффициентами проницаемости, обозначим через $L_{S_i}, i = 1,2$. Проницаемость пористой среды описывается функцией $K_d(\boldsymbol{x}) = K_d K(\boldsymbol{x}),\ d = 0,1,2$, где $K(\boldsymbol{x}) = 1$ во всей области протекания процесса D, коэффициент K_d - безразмерная константа, $\boldsymbol{x} = (x, y) \in R^2$. Полагаем, что внутри замкнутого контура L_{S_1}проницаемость описывается функцией $K_1(\boldsymbol{x})$, внутри замкнутого контура L_{S_2}проницаемость описывается функцией $K_2(\boldsymbol{x})$, вне $L_{S_1} \cup L_{S_2}$ – функцией $K_0(\boldsymbol{x})$.Границы L_{S_1}, L_{S_2}и L_t входят в область протекания процесса, L_I – непроницаемая граница (Рисунок 1).

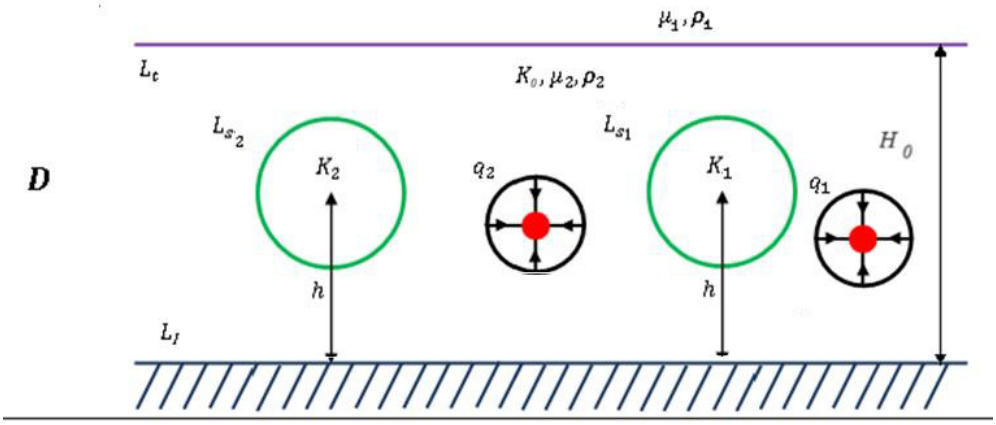


Рисунок 1. Постановка задачи.

Обозначим Ω множество всех точек из области D, не лежащих на границах $L_{S_i}, i = 1,2$ и L_t: $\Omega = D \backslash L_{S_1} \backslash L_{S_2} \backslash L_t$. Каждая из границ L_i, где $i = I, S_1, S_2, S_t$ является замкнутой (в том числе и замыкается на бесконечности) и может состоять из нескольких однотипных компонент.

В работах [7-8] показано, что эволюция границы раздела жидкостей с различными вязкостями и плотностями описывается системой интегральных и дифференциального уравнения. Эта система при пренебрежении вязкостью и плотностью внешней жидкости, а именно при $\mu_1 \longrightarrow 0$ и $\rho_1 \longrightarrow 0$, принимает вид:

$$\begin{gathered} g_{S_1}(\boldsymbol{x},t) - 2\lambda_{S_1} \sum_{j=I,S_1,S_2,t} G\left[g_j, L_j\right](\boldsymbol{x},t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in L_{S_1} \\ g_{S_2}(\boldsymbol{x},t) - 2\lambda_{S_2} \sum_{j=I,S_1,S_2,t} G\left[g_j, L_j\right](\boldsymbol{x},t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in L_{S_2} \\ g_t(\boldsymbol{x},t) - 2\lambda_t \sum_{j=I,S_1,S_2,t} G\left[g_j, L_j\right](\boldsymbol{x},t) = 2K_2 \alpha \Pi(\boldsymbol{x}) + 2K_1 \alpha \Pi(\boldsymbol{x}) \end{gathered} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \boldsymbol{v_0}(\boldsymbol{x},t) + \sum_{j=S_1,S_2,t,I} \boldsymbol{V}\left[g_j, L_j\right](\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in L_t, \tag{2}$$

где $\lambda_{S_i} = \frac{K_0 - K_i}{K_0 + K_i}, i = 1,2, x \in L_t, \lambda_t = 1, \alpha = -1,$

$$G[g, L] = \int_L g(\boldsymbol{y})\, \Omega(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) dl_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{x} \notin L,$$

$\Omega(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\partial \Phi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n_y}}, \quad \boldsymbol{V}[g_i, L_i](\boldsymbol{x}) = \int_{L_i} \frac{\partial g_i(\boldsymbol{y})}{\partial l_{\boldsymbol{y}}} V_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) dl_{\boldsymbol{y}}, i = I, S_1, S_2, t,$

$V_2 = \frac{\partial \Psi_2(M,N)}{\partial y_M} \bar{e}_x - \frac{\partial \Psi_2(M,N)}{\partial x_M} \bar{e}_y$ - скорость вихря с полной циркуляцией, равной -1, Ψ_2- функция тока этого вихря, $\bar{e}_x$и $\bar{e}_y$ - единичные орты, таким разом имеем дифференциальное уравнение движения границы L_t

Граничные условия на L_I учитываются подбором функций Φ_1 и Ψ_2:

$$\Phi_1 = -\frac{ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{2\pi} - \frac{ln|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{y}}|}{2\pi}, \Psi_2 = \frac{ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{2\pi} - \frac{ln|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{y}}|}{2\pi}, \tilde{y} = (x, -y).$$

Построим дискретный аналог для основной системы (1) и дифференциального уравнения (2) и получим численной аналог исходной задачи [7], а далее проведем вычисления на основе разработанного программного обеспечения с использованием языка программирования Python с пакетами NumPy, SciPy и SymPy [8].

Представим результаты проведенных исследований:

1. Рассмотрим случай когда $\lambda_{S_1} = -0{,}3$, $\lambda_{S_2} = 0{,}3$, $n=400$, $H_0 = 1{,}2$, $T=1{,}22$, $q1 = q2 = -1.5$, $h=0{,}4$. На Рисунке 2 построены последовательные положения подвижной границы L_t.

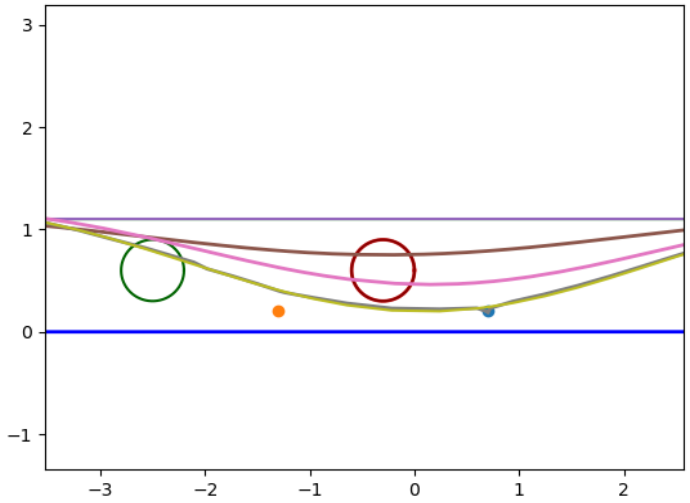


Рисунок 2. Процесс изменения уровня грунтовых вод в однородном слое при $n=400$, $T=1{,}22$, $\lambda_{S_1} = -0{,}3, \lambda_{S_2} = 0{,}3, q_1 = q_2 = -1.5$, $h=0.4$.

Поле скоростей в области протекания процесса в фиксированный момент времени $t=0$ представлено на рисунке 3.

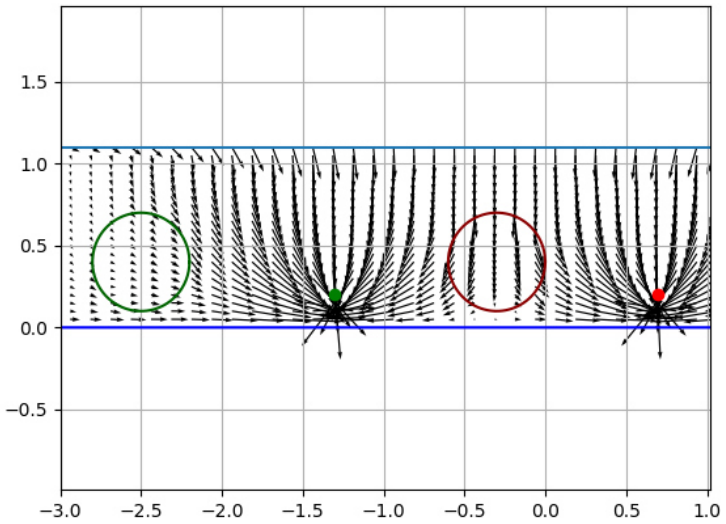


Рисунок 3. Поле скоростей при $t=0$, $n=800$, $\lambda_{S_1} = -0{,}3$, $\lambda_{S_2} = 0{,}3$, $q_1 = q_2 = -1.5$, $h=0.4$.

2. Рассмотрим случай $\lambda_{S_1} = -0{,}3$, $\lambda_{S_2} = 0{,}6$, $n=400$, $H_0 = 1{,}1$, $T=1{,}65$, $q_1 = q_2 = -1.5$, $h=0.4$. На Рисунке 4 построены последовательные положения подвижной границы L_t.

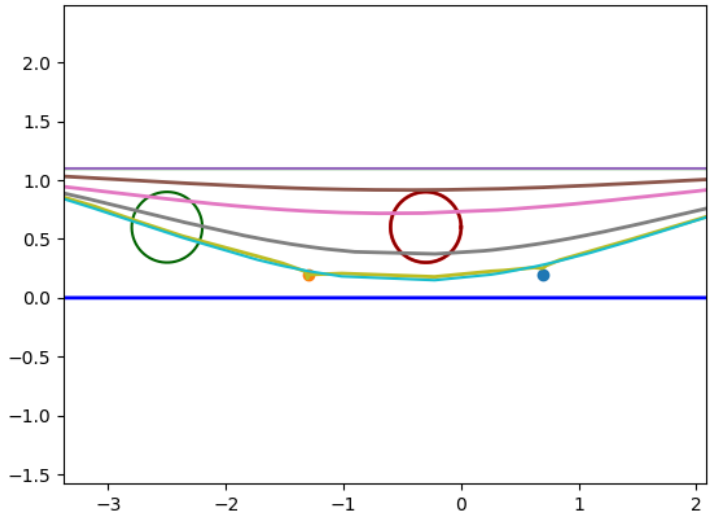


Рисунок 4. Процесс изменения уровня грунтовых вод в однородном слое при $n=400$, $T=1.65$, $\lambda_{S_1} = -0{,}3$, $\lambda_{S_2} = 0{,}6$, $q_1 = q_2 = -1.5$, $h=0.4$.

Поле скоростей в области протекания процесса в фиксированный момент времени $t=0$ представлено на рисунке 5.

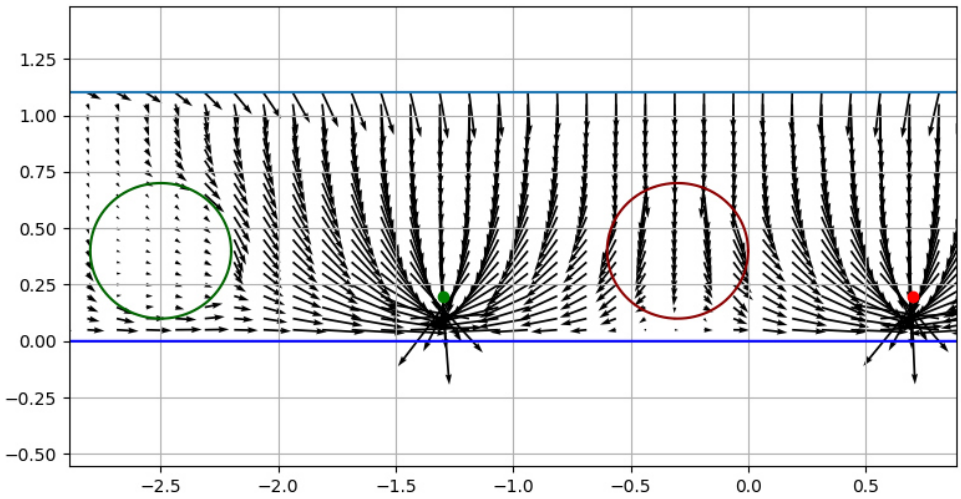


Рисунок 5. Поле скоростей при $t=0$, $n=800$, $\lambda_{S_1} = -0{,}3$, $\lambda_{S_2} = 0{,}6$, $q_1 = q_2 = -1.5$, $h=0.4$.

Можно заметить, что поле скоростей и последовательные положения границы соответствуют процессу изменения уровня грунтовых вод согласно построенной математической модели.

3. Заключение

В результате исследования можем констатировать, что построенная математическая модель достаточно хорошо описывает процесс оседания

грунтовых вод под действием силы тяжести, нескольких стоков дренажной системы и наличия нескольких полупроницаемых включений. Дальнейшие исследования направлены на анализ модели при увеличении количества полупроницаемых включений и стоков.

Список источников

1. Aysha A., Shoukat A. Modeling of groundwater level changes in an urban area. Sustainable Water Resources Management. 2021.
2. Winter, T.C., J.W. Harvey, O.L. Franke, and W.M. Alley. Ground Water and Surface Water: A Single Resource. USGS Circular 1139. 1998.
3. Ravshanov N., Daliev Sh. J. Phys.: Conf. Ser. 1441 0121634. Shifting paradigms in international investment law: more balanced, less isolated, increasingly diversified / eds. Hindelang S., Krajewski M. Oxford : Oxford University Press, 2015. 432 p.
4. Ivan K. Lifanov Singular Integral Equations and Discrete Vortices. Utrecht, VSP (1996). 475 p.
5. Nikol'skii D.N. Mathematical Simulation of the Evolution of a LiquidLiquid Interface in Piecewise Inhomogeneous Layers of Complex Geological Structure//Computation Mathemetics and Mathematical Physics, 2013. V.53, No 6. pp. 858-865.
6.Nikol'skii D.N. Three-dimensional evolution of the boundary of a polluted area in a bounded piecewise homogeneous porous material//Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2011, Volume 51, Issue 5, pp.855-861.
7. Dorofeeva V.I., Nikolsky D.N., Potapova Ek.Ur. "Mathematical Modeling of the Process of Changing the Groundwater Level by the Method of Discrete Features in the Presence of Semi-Permeable Inclusions and a Drainage System," 2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, Russian Federation, 2022, pp. 152-157, doi: 10.1109/SUMMA57301.2022.9973940.
8. Gaddis, Tony. Starting Out with Python. Pearson Education, 2018.

References

1. Aysha A., Shoukat A. Modeling of groundwater level changes in an urban area. Sustainable Water Resources Management. 2021.
2. Winter, T.C., J.W. Harvey, O.L. Franke, and W.M. Alley. Ground Water and Surface Water: A Single Resource. USGS Circular 1139. 1998.
3. Ravshanov N., Daliev Sh. J. Phys.: Conf. Ser. 1441 0121634. Shifting paradigms in international investment law: more balanced, less isolated, increasingly diversified / eds. Hindelang S., Krajewski M. Oxford : Oxford University Press, 2015. 432 p.
4. Ivan K. Lifanov Singular Integral Equations and Discrete Vortices. Utrecht, VSP (1996). 475 p.

5. Nikol'skii D.N. Mathematical Simulation of the Evolution of a LiquidLiquid Interface in Piecewise Inhomogeneous Layers of Complex Geological Structure//Computation Mathemetics and Mathematical Physics, 2013. V.53, No 6. pp. 858-865.

6.Nikol'skii D.N. Three-dimensional evolution of the boundary of a polluted area in a bounded piecewise homogeneous porous material//Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2011, Volume 51, Issue 5, pp.855-861.

7. Dorofeeva V.I., Nikolsky D.N., Potapova Ek.Ur. "Mathematical Modeling of the Process of Changing the Groundwater Level by the Method of Discrete Features in the Presence of Semi-Permeable Inclusions and a Drainage System," 2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, Russian Federation, 2022, pp. 152-157, doi: 10.1109/SUMMA57301.2022.9973940.

8. Gaddis, Tony. Starting Out with Python. Pearson Education, 2018.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 205-209.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 205-209.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 535.338.31 + 511

О СЛУЧАЯХ СОВПАДЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ В ФОРМУЛЕ РИДБЕРГА

Пётр Сергеевич Караваев[1]✉
[1]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный, Россия*
[1]*pskaravaev@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3214-6624*

Аннотация. *Спектральные линии водородоподобных атомов можно вычислить с помощью формулы Ридберга. Однако по длине волны не всегда возможно однозначно восстановить номера энергетических уровней, между которыми происходит переход электрона. В статье приводятся некоторые математические свойства этого явления.*

Ключевые слова: *формула Ридберга, спектральные линии, водородоподобный атом.*

Conference paper

ON THE CASES OF SIMILAR SPECTRAL LINES WITHIN THE RYDBERG FORMULA

Petr S. Karavaev[1]✉
[1] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*
[1]*pskaravaev@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3214-6624*

Abstract. *Spectral lines of hydrogen-like chemical elements can be calculated using the Rydberg formula. However, it is not always possible to find certain principal quantum numbers of two energy levels, between which an electron transits. In the article there are mathematical properties of this phenomenon.*

Keywords: *Rydberg formula, spectral lines, hydrogen-like atom.*

1. Введение

В конце 19 века Йоханнес Ридберг после многолетнего исследования [1] представил формулу, согласующуюся с эмпирическими дан-

© Караваев П.С., 2023

ными, позволяющую найти спектральные линии водородоподобных атомов:

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \qquad (n < m) \tag{1}$$

Здесь R – постоянная Ридберга, Z – количество протонов в рассматриваемом атоме, λ – длина волны фотона, испускаемого или поглощаемого, при переходе единственного электрона с энергетического уровня под номером n на уровень под номером m (в соответствии с моделью атома Бора–Резерфорда), $n, m \in \mathbb{N}$.

В рамках полученной формулы наблюдается интересный эффект: по длине волны не всегда возможно однозначно определить номера уровней n и m. Например, длины волн, соответствующие переходам с 5 на 7 и с 7 на 35 уровни в точности совпадают в силу следующего равенства:

$$RZ^2 \cdot \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2}\right) = RZ^2 \cdot \frac{24}{1225} = RZ^2 \cdot \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{35^2}\right) \tag{2}$$

Тема подобных совпадения спектральных линий изучена недостаточно. Далее приводятся некоторые полученные математические результаты.

2. Основная часть

Отметим, что совпадение спектральных линий в условиях формулы (1) для одного и того же водородоподобного атома в случах перехода электрона с уровня a на b и с c на d сводится к нахождению корней следующего уравнения в натуральных числах:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2} \tag{3}$$

Уточним, что тривиальные решения вида (a, b, a, b) нас интересовать не будут.

Утверждение 1. Количество нетривиальных решений (a, b, c, d) уравнения (3) в натуральных чисел бесконечно.

Доказательство. Достаточно заметить, что $(5x, 7x, 7x, 35x)$ является решением для любого $x \in \mathbb{N}$ (аналогично равенству (2)). □

Заметим, что хотя с точки зрения физики переходы с уровня $5x$ на $7x$ и с $7x$ на $35x$ являются существенно различными, с математической точки зрения это не даёт почти никакого существенно значимого представления о множестве всех решений уравнения (3). Следующие два утверждения частично решают эту проблему.

Утверждение 2. Пусть для некоторых натуральных чисел верно $p^2 = x^2 + y^2$. Тогда

$$(x^2 - y^2,\ p(x+y),\ p(x-y),\ x^2 - y^2)$$

является решением уравнения (3).

Доказательство.

$\frac{1}{(x^2-y^2)^2} - \frac{1}{(p(x+y))^2} = \frac{p^2-(x-y)^2}{(p(x+y)(x-y))^2} = \frac{x^2+y^2+(2xy-x^2-y^2)}{(p(x+y)(x-y))^2} =$
$= \frac{(x^2+y^2+2xy)-x^2-y^2}{(p(x+y)(x-y))^2} + \frac{(x+y)^2-p^2}{(p(x+y)(x-y))^2} = \frac{1}{(p(x-y))^2} - \frac{1}{(x^2-y^2)^2}\square$

Утверждение 3. Существует бесконечно много взаимно простых в совокупности четвёрок натуральных чисел (a, b, c, d), являющихся нетривиальными решениями уравнения (3).

Доказательство.

В соответствии с теорией гауссовских чисел (а именно теоремой о количестве представлений числа в виде суммы двух квадртов целых чисел [2]) для любого простого числа p, дающего остаток 1 при делении на 4, существует разложение $p^2 = x^2 + y^2$, отличное от $p^2 + 0^2$, то есть существует такое разложение, что $x > 0$, $y > 0$ – некоторые натуральные числа.

Рассмотрим такое разложение и не умаляя общности будем считать, что $x > y$. Несложно заметить, что $x \neq y$ и что $x^2 - y^2$ не делится на p (иначе $2x^2 = (x^2 + y^2) + (x^2 - y^2) =$
$= p^2 + (x^2 - y^2) \vdots p \Rightarrow x \vdots p \Rightarrow y = 0$ – противоречие).

По предыдущему утверждению четвёрка
$(x^2 - y^2,\ p(x+y),\ p(x-y),\ x^2 - y^2)$ является решением уравнения (3) в натуральных числах. Заметим, что если все числа этой четвёрки поделить на наибольший общий делитель, то мы получим некоторую новую четвёрку (a, b, c, d), которая также будет решением уравнения (3), причём эти четыре числа будут натуральными и взаимно простыми в совокупности. При этом так как $x^2 - y^2$ не делится на p, а $p(x+y)$ делится на p, наибольший общий делитель четвёрки на p не делится, а тогда $b \vdots p$.

Таким образом, было показано, что для любого простого p, дающего остаток 1 при делении на 4, найдётся четвёрка натуральных взаимно простых в совокупности чисел (a, b, c, d), являющаяся решением уравнения (3), такая, что $abcd \vdots p$ (следует из $b \vdots p$). Предположим противное: указанных в условии четвёрок конечное количество. Тогда конечно и количество простых чисел, на которые хотя бы одно из всех этих чисел делится. Но количество таких простых чисел бесконечно, потому что подходят по крайней мере все простые, дающие

остаток 1 при делении на 4. Из полученного противоречия вытекает корректность утверждения. □

Следующее утверждение показывает, что в сериях Лаймана, Бальмера, Пашена и Брэккета (для атома водорода) случаев совпадения спектральных линий не наблюдается.

Утверждение 4. Не существует четвёрки натуральных чисел (a, b, c, d), являющейся нетривиальным решением уравнения (3), в которых минимальное из чисел равно 1, 2, 3 или 4.

Доказательство. Для удобства перебора случаев установим тривиальные ограничения на решения (a, b, c, d) уравнения (3) (остальные случае сводятся к этому или тривиальны): $a < c$, $a < b$, $c < d$.

Рассмотрим некоторое решение (a, b, c, d), удовлетворяющее этим условиям. Заметим, что в таком случае минимальным из чисел четвёрки является число a. Покажем, что $a > 4$.

Заметим, что $a \neq 1$, потому что иначе

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \geqslant \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} > \frac{1}{2^2} \geqslant \frac{1}{c^2} > \frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

Заметим, что $a \neq 2$, потому что иначе

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \geqslant \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} > \frac{1}{3^2} \geqslant \frac{1}{c^2} > \frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

Заметим, что $a \neq 3$, потому что иначе

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \geqslant \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} > \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} \geqslant \frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

Заметим, что $a \neq 4$, потому что иначе

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \geqslant \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} > \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} \geqslant \frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

Во всех случаях получено противоречие вида $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} > \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$. Это означает, что все числа четвёрки больше 4. □

3. Заключение

Стоит отметить, что найденные закономерности основаны только на классическом варианте формулы Ридберга, хотя существуют её вариации, например, с учётом теории относительности [3]. В этих ситуациях вопрос существования совпадений спектральных линий остаётся открытым.

Список источников

1. Ельяшевич М. А., Кембровская Н. Г., Томильчик Л. М. Ридберг и развитие атомной спектроскопии (К столетию работы Й.Р. Ридберга о закономерностях в атомных спектрах) // Успехи физических наук. 1990. Т. 160, № 12. С. 141–165. https://doi.org/10.3367/UFNr.0160.199012f.0141.
2. Сендеров В., Спивак А. Суммы квадратов и целые гауссовы числа // Квант. 1999. № 3. С. 21–22.
3. Suto K. Theoretical and Experimental Values for the Rydberg Constant Do Not Match // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2021. Vol. 9, no. 8. P. 1993–2003. https://doi.org/10.4236/jamp.2021.98130.

References

1. El’yashevich M. A., Kembrovskaya N. G., Tomil’chik L. M. Rydberg and the development of atomic spectroscopy (Centennial of J. R. Rydberg’s paper on the laws governing atomic spectra) // Uspekhi Fizicheskikh Nauk. 1990. Vol. 160, no. 12. P. 141–165. https://doi.org/10.3367/UFNr.0160.199012f.0141.
2. Senderov V., Spivak A. Sums of squares and Gaussian integers // Kvant. 1999. No 3. P. 21–22.
3. Suto K. Theoretical and Experimental Values for the Rydberg Constant Do Not Match // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2021. Vol. 9, no. 8. P. 1993–2003. https://doi.org/10.4236/jamp.2021.98130.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 210-214.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 210-214.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 539.3

СИНГУЛЯРНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Александр Михайлович Кравцов✉
Филиал «Газпром ВНИИГАЗ Ставрополь», Ставрополь, Россия
alex_k@bk.ru✉*, https://orcid.org/0000-0002-5947-5778*

Аннотация. *В работе рассматривается построение точного решения задачи об изгибе бесконечной тонкой анизотропной плиты на упругом винклеровском основании. Считается, что основание плиты является упругим трансторопным полупространством, а напряженно-деформированное состояние плиты может быть описано уравнениями теории изгиба тонких анизотропных плит. Решение об изгибе плиты сосредоточенной силой строится при помощи метода производящих функций.*

Ключевые слова: *анизотропная плита, упругое основание, фундаментальное решение, сосредоточенная сила.*

Conference paper

SINGULAR ANALYTICAL SOLUTION IN THE PROBLEM OF BENDING A THIN ANISOTROPIC PLATE ON AN ELASTIC FOUNDATION

Alexander M. Kravtsov✉
Gazprom VNIIGAZ Stavropol Branch, Stavropol, Russia
alex_k@bk.ru✉*, https://orcid.org/0000-0002-5947-5778*

Abstract. *The paper considers the construction of an exact solution to the problem of bending an infinite thin anisotropic plate on an elastic Winkler foundation. It is believed that the base of the plate is an elastic transtropic half-space, and the stress-strain state of the plate can be described by the equations of the theory of bending of thin anisotropic plates. The solution for bending a slab by a concentrated force is constructed using the method of generating functions.*

Keywords: *anisotropic plate, elastic foundation, fundamental solution, concentrated force.*

© Кравцов А.М., 2023

1. Введение

При прочностных расчетах инженерных сооружений, геомеханическом моделировании поведения пластовых систем в процессе их упругого деформирования необходима оценка характеристик напряженно-деформированного состояния упругих конструкций и упругих тел.

Как правило, для построения оценок используют приближенные решения дифференциальных уравнений механики деформируемого твердого тела, которые исследуются численными методами: конечно-разностными методами, различными вариантами метода конечных элементов. Эти методы не позволяют корректно учитывать влияние нагрузок за пределами расчетной области на напряженно-деформированное состояние внутри расчетной области. Численные методы также не позволяют моделировать поведение условно бесконечных упругих тел при их упругом деформировании, поскольку решения в этих задачах должны быть подчинены определенным условиям затухания на бесконечности.

Таким образом, задача построения точных решений и приближенных аналитических решений упругого деформирования линейно-анизотропных тел представляет несомненный практический интерес и является актуальной.

В работе [1] для построения решений задач теории упругости линейно анизотропных сред было предложено использовать вариант метода производящих функций. Решения в этом случае удается представить в замкнутом аналитическом виде – рядами по обобщенным Бесселевым функциям. Для специальных функций, обобщений Бесселевых цилиндрических функций (ОБЦФ) в работе [2] получены разложения в ряды, реккурентные формулы, формулы интегрирования и дифференцирования для ОБЦФ. В настоящей работе рассматривается иной подход к построению аналитического решения – подход на основе метода малого параметра.

2. Постановка задачи

Построим решение задачи изгиба тонкой анизотропной плиты на упругом основании сосредоточенной силой, приложенной в начале декартовой системы координат *Oxy*, связанной с плитой. Уравнение изгиба тонких анизотропных плит в этом случае имеет вид [3, 4]:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ +4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + kw = Q \cdot \delta(x, y), \qquad (1)$$

где $w(x,y)$ - функция прогиба плиты, $k = \frac{E_0}{2(1-\nu_0^2)}$ –коэффициент жесткости «постели» плиты отнесенный к единице прогиба, $E_0, \nu_0 -$ модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала основания под плитой, Q – величина силы, $\delta(x, y)$ – дельта-функция Дирака. Здесь $D_{ij} = c_{ij}\frac{h^3}{12}$ – цилиндрические жесткости плиты, h – толщина плиты, c_{ij} - упругие модули материала плиты. Введем для удобства последующей записи математических выражений, следующие обозначения

$l^4 = D_{22}/k$ – характерный линейный размер;

$z_j = x + \mu_j y$ – обобщенные комплексные переменные;

$D_j = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_j \frac{\partial}{\partial x}$ – операторы Лехницкого [3, 4],

где μ_j- являются корнями уравнения

$$D_{11} + 4D_{16}\mu + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{26}\mu^3 + D_{22}\mu^4 = 0.$$

Для обобщенных комплексных переменных имеет место соотношение

$$(\mu_j - \mu_k)z_i + (\mu_k - \mu_i)z_j + (\mu_i - \mu_j)z_k = 0$$

В новых обозначениях (1) записывается так

$$D_1 D_2 D_3 D_4 w + \frac{1}{l^4} w = \frac{Q}{D_{22}} \cdot \delta(x, y) \quad (2)$$

В переменных z_i, z_j дифференциальные операторы Лехницкого запишутся так $D_j = \frac{1}{\mu_i - \mu_j} \frac{\partial}{\partial z_i}, D_i = \frac{1}{\mu_j - \mu_i} \frac{\partial}{\partial z_j}$.

3. Решение задачи

Известно решение задачи о статическом изгибе тонкой анизотропной плиты [3, 4]. Решение уравнения

$$D_1 D_2 D_3 D_4 w = \frac{Q \cdot \delta(x, y)}{D_{22}}$$

выражается через комплексные потенциалы$W_1(z_1), W_2(z_2)$, представленные аналитическими функциями обобщенных комплексных переменных

$$w(x, y) = Re\big(w_1(z_1) + w_2(z_2)\big)$$

Частные решения, соответствующие изгибу плиты, нагруженной сосредоточенной силой, имеют вид [3]

$$w_j(x, y) = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1}{\prod_{j \neq k}(\mu_j - \mu_k)} \cdot \frac{z_j^2}{2} \cdot \Big(ln\big(z_j\big) - \Psi(2)\Big),$$

где $\Psi(n) - $ логарифмическая производная Гамма $-$ функции[Стиган].

Фундаментальное решение может быть выражено через частные решения w_j следующим образом

$$W_0 = \sum_{j=1}^{4} A_j w_j \,, \sum_{j=1}^{4} A_j = \frac{Q}{D_{22}}.$$

Кроме того, поскольку логарифм при обходе контура, охватывающего точку приложения сосредоточенной силы, получает приращение $2\pi i$, то следует дополнительно потребовать

$$\sum_{j=1}^{4} A_j \cdot \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1}{\prod_{j \neq k}(\mu_j - \mu_k)} \cdot \frac{z_j^2}{2} = 0$$

Из сформулированных условий находим $A_j = \frac{Q}{4 \cdot D_{22}}, j = 1,2,3,4.$

Решение уравнения (2) для сосредоточенной силы имеет вид

$$W_0 = \frac{Q \cdot i}{8\pi D_{22}} \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{\prod_{k \neq j}(\mu_j - \mu_k)} \cdot \frac{z_j^2}{2} \cdot \Big(ln\big(z_j\big) - \Psi(3)\Big).$$

В случае пластинки на упругом основании полученное выражение W_0можно рассматривать как начальное приближение к решению. Полное решение находится как сумма ряда по малому параметру

$$W = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{W_p}{l^{4p}}$$

Каждый последующий член ряда получается в результате интегрирования уравнения

$$D_1 D_2 D_3 D_4 W_{p+1} = W_p, p = 0,1,2, \ldots$$

Следующее приближение

$$W_1 = \frac{Q \cdot i}{8\pi D_{22}} \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{(\mu_{sj} - \mu_j)\left(\prod_{k \neq j}(\mu_j - \mu_k)\right)^2} \cdot \frac{z_{sj} z_j^5}{5!} \cdot \left(ln(z_j) - \Psi(6)\right).$$

Здесь $z_{sj} = \bar{z}_j$. Получение последующих приближений также не вызывает затруднений. Ввиду того, что их запись имеет довольно громоздкий вид, они здесь не приводятся.

4. Выводы

Как следует из структуры записи рядов для решения, их сходимость носит абсолютный характер. Ряды по приближениям быстро сходятся, при практических вычислениях приемлемая точность достигается при удержании 5-10 членов ряда по приближениям. Следует остановиться на важном вычислительном аспекте. При вычислениях логарифмических выражений от комплексных величин важно обеспечить попадание результатов вычислений на один и тот же лист – однолистность функции.

Список источников

1. Космодамианский, А.С. Метод производящих функций в динамических задачах теории упругости / А.С. Космодамианский, А.М. Кравцов // Доклады НАН Украины сер. мат. и техн. науки, 1993. №5.

2. Кравцов, А.М. Реккурентные формулы, формулы сложения, дифференцирования и интегрирования для обобщенных цилиндрических функций / Научные школы и научные направления СевКавГТУ- Ставрополь: изд. СевКавГТУ, 2001.

3. Космодамианский, А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский – Киев-Донецк: «Вища школа», 1976, 200 с.

4. Лехницкий, С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий – М: Гостехиздат, 1957.

References

1. Kosmodamiansky, A.S. Method of generating functions in dynamic problems of elasticity theory / A.S. Kosmodamiansky, A.M. Kravtsov // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, ser. mat. and tech. Sciences, 1993. No. 5.

2. Kravtsov, A.M. Recurrent formulas, addition, differentiation and integration formulas for generalized cylindrical functions / Scientific schools and scientific directions of SevKavSTU-Stavropol: ed. SevKavGTU, 2001.

3. Lekhnitsky, S.G. Anisotropic plates / S.G. Lekhnitsky - M: Gostekhizdat, 1957.

4. Kosmodamiansky, A.S. Stress state of anisotropic media with holes or cavities / A.S. Kosmodamiansky – Kyiv-Donetsk: “Vishcha School”, 1976, 200 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 215-222.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 215-222.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 532.546

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ В ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ЧАСТЬЮ ЭЛЛИПСА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА, В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОВОДИМОСТИ

Лекомцев Денис Геннадьевич✉
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
lekomtcevdg@yandex.ru✉*, https://orcid.org/0000-0002-5936-3119*

Аннотация. *В работе рассматривается двумерное плоскопараллельное течение в анизотропной и неоднородной пористой среде в слое с раздельной анизотропией и неоднородностью. Проницаемость среды моделируется тензором второго ранга, компоненты которого моделируются степенными функциями координат, при этом в данной работе полагается, что показатель степени равен двум. Область фильтрации ограничена сегментом эллипса специального вида, который на вспомогательной плоскости переходит в полуокружность. Делается вывод о влиянии компонентов тензора проницаемости на дебит скважины, размещенной в области фильтрации.*

Ключевые слова: *теория фильтрации, скважина, пористая среда, ортотропный неоднородный пласт, тензор проницаемости*

Conference paper

ANALYTICAL MODELING OF FILTRATION FLOW IN AN AREA LIMITED BY A PART OF AN ELLIPSE OF A SPECIAL TYPE IN A HETEROGENEOUS MEDIUM WITH A POWER LAW OF CHANGE IN CONDUCTIVITY

Denis G. Lekomtcev✉
Orel State University, Orel, Russia
lekomtcevdg@yandex.ru✉*, https://orcid.org/0000-0002-5936-3119*

Abstract. *The work creates a two-dimensional plane-parallel flow in an anisotropic and orthotropic medium in a layer with separate anisotropy and heterogeneity. The permeability of the medium is modeled by a second-rank tensor, the components of which are modeled by power functions of the coordinates, while in this work it is assumed that the degree of the indicator is equal to two. The filtering area is*

© Лекомцев Д.Г., 2023

limited by a segment of a special type of ellipse, which turns into a semicircle on the auxiliary plane. A conclusion is drawn about the influence of the permeability tensor components on the debit area located in the filter area.

Keywords: *filtration theory, well, porous medium, orthotropic heterogeneous reservoir, permeability tensor*

1. **Введение**

В текущий период времени решение задач фильтрации остается важной для практики проблемой. Даже если сделать предположение о том, что в будущем вырастет значение альтернативных источников энергии в энергетике и транспортной отрасли, что тем самым снизит важность нефтедобычи, то химическая промышленность, вероятно, останется важным потребителем углеводородов [1]. Кроме этого решение задач геотермальной энергетики и обеспечения растущего населения Земли источниками водоснабжения, неизбежно будет ставить новые задачи перед теорией фильтрации. Крупномасштабная добыча нефти в предыдущие десятилетия истощила большую часть легко доступных месторождений, что требует реализации проектов нефтедобычи в труднодоступных местах или введения в эксплуатацию месторождений, со сложной структурой пород коллекторов, эксплуатация которых ранее считалась нерентабельной. Среду в которой происходит фильтрация, в наиболее широко известных классических источниках (см., например, [2]), чаще всего моделируют, как однородную и изотропную. Но, как надежно установлено в результате большого количества научных исследований [3-6], анизотропией и неоднородностью реальных пород коллекторов пренебрегать нельзя. Это делает актуальным решение модельных задач фильтрации для случая ортотропных и неоднородных пористых сред, например, такие течения исследованы и обобщены в современной работе [7].

2. **Постановка задачи**

Рассмотрим двумерную стационарную фильтрацию в области D к скважине в анизотропном неоднородном грунте с проводимостью $P = P_{ij} = H(K_{ij})$ (H - толщина пласта, (K_{ij}) $i, j = 1,2$ — тензор проницаемости). В задаче предполагается, что флюид является однофазным и несжимаемым, а скважина, вскрывает пласт на всю его толщину, т.е. является совершенной. Используем обобщенный потенциал φ, которые является функцией декартовых координат (x, y) и который удовлетворяет уравнению эллиптического типа [7] во всей области течения, исключая изолированные особые точки этой функции. Для φ получено, записанное в безразмерных величинах, уравнение [7]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(P_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(P_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0 \qquad (1)$$

где

$$P_{11} > 0 \ \ (P_{22} > 0), \ D(P_s) = P_{11}P_{22} - (P_{12} + P_{21})^2/4 > 0 \qquad (2)$$

здесь $D(P_s)$ — определитель симметричной части $P_s = (P + P^T)/2$ тензора P, $P^T = (P_{ji})$ — транспонированный тензор.

Решить уравнение (1) на физической плоскости $z = x + iy$ сложно. Для упрощения рассматриваемой задачи произведем преобразование уравнения (1), для чего выполним переход на вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$. Эти плоскости связаны гомеоморфным (взаимно однозначным и непрерывным) преобразованием $\zeta = \zeta(z)$, $(\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y))$, которое является решением уравнения типа Бельтрами [7].

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} - \mu(z)\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \qquad \left(\mu(z) = \frac{P_{22} - P_{11} - i(P_{12} + P_{21})}{P_{22} + P_{11} + 2\sqrt{D(P_s)}}, |\mu(z)| < 1\right), \tag{3}$$

где $2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$, $2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$.

Будем, далее, рассматривать слой с раздельной анизотропией и неоднородностью $P = H(K_{ij}) = k\chi(z)$ $(P_{ij} = k_{ij}\chi(z))$. В дальнейшим положим, что $H = 1$, а $\chi(z) = y^s$. В этом случае $\mu(z)$ - комплексная постоянная, а решение уравнения (3) будет иметь вид $\zeta = z + \mu\bar{z}$. Из этого преобразования можно получить соотношения связывающие, координаты на плоскостях z и ζ

$$x = \frac{(1-a)\xi - b\eta}{1 - |\mu|^2}, \quad y = \frac{(1+a)\eta - b\xi}{1 - |\mu|^2} \tag{4}$$

где $a = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}$, $b = -\frac{2\beta}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}$, $|\mu|^2 = a^2 + b^2$, $\alpha = \frac{k_{22}}{k_{11}} > 0$, $\beta = \frac{k_{12}}{k_{11}}$.

Как можно видеть из (4) на плоскости ζ, проводимость определяется следующей формулой

$$P'(\xi, \eta) = k_0\left[\frac{(1+a)\eta - b\xi}{1 - a^2 - b^2}\right]^s, \; k_0 = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} > 0$$

На вспомогательной плоскости используем систему координат $\zeta' = \xi' + i\eta'$, повернутую на угол ϑ_0 $(tg\,\vartheta_0 = b/(1+a))$, в таком случае проводимость будет функцией лишь одной переменной η'

$$P'(\zeta') = k_0'\eta'^s, \left(k_0' = k_0\left[\frac{(1+a)\cos\vartheta_0 + b\sin\vartheta_0}{1 - a^2 - b^2}\right]^s\right) \tag{5}$$

Слой (5) имеет важную особенность - сингулярную линию σ_0': $\eta' = 0$, на которой $P' = 0$, при $s > 0$. В данной статье моделирование фильтрационного течения будет происходить в верхней полуплоскости.

На вспомогательной плоскости уравнение (1) примет вид

$$\Delta\varphi + \frac{\partial \chi}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \tag{6}$$

где $\Delta\varphi = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ — оператор Лапласа.

Область фильтрации D на физической плоскости z ограничена частью эллипса $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$ специального вида, такого, что его полуоси удовлетворяют соотношениям $A = \frac{a}{1 + |\mu|}$ и $B = \frac{a}{1 - |\mu|}$ [8] (Рисунок 1). На

вспомогательной плоскости ζ этот эллипс перейдет в половину окружности $\xi'^2 + \eta'^2 = a^2$ (Рисунок 2).

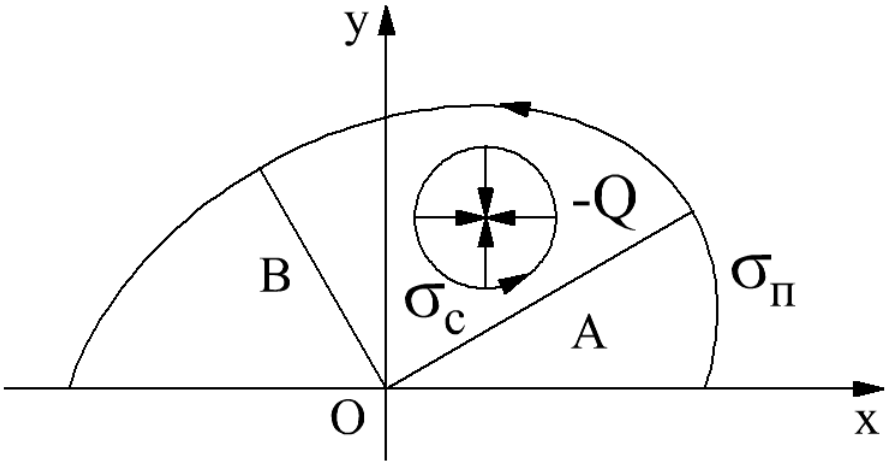


Рисунок 1. Постановка задачи на физической плоскости

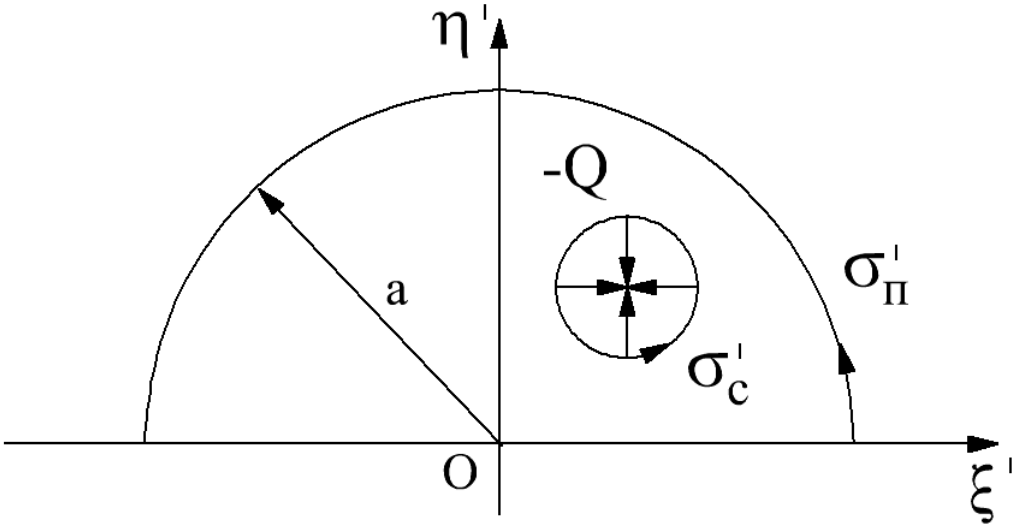


Рисунок 2. Постановка задачи на вспомогательной плоскости

На контуре $\sigma_{\text{П}} \cup \sigma_C$ ($\sigma_{\text{П}}$ – контур питания, σ_C – контур скважины) заданы давления, то есть имеем граничные условия [7]

$$\varphi^+(z) = \alpha_{\text{П}}(z), \qquad z \in \sigma_{\text{П}}, \tag{7}$$

$$\varphi(z) = \alpha_C(z), \qquad z \in \sigma_C, \tag{8}$$

где $\alpha_{\text{П}}(z)$ и $\alpha_C(z)$ – непрерывные периодические функции, знаком "+" отмечено предельное значение функции при подходе к контуру питания изнутри области. На сингулярной линии σ_0, которой может быть ограничена область D, выполняется условие [9].

$$\left(P_n(z) \frac{\partial \varphi(z)}{\partial \nu_z} \right)^+ = 0, \quad z \in \sigma_0, \tag{9}$$

где $P_n(z) = H(z) K_n(z)$ – модуль вектора $\boldsymbol{P_n}(z)$ проводимости слоя в направлении орта $\boldsymbol{n}$.

Таким образом, на физической плоскости z задача нахождения дебита скважины сводится к нахождению решении уравнения (1). На плоскости ζ' область течения D' ограничена кривой $\sigma'_{\Pi} \cup \sigma'_C$. Условия (7) и (8) на границе $\sigma'_{\Pi} \cup \sigma'_C$ примут следующий вид

$$\varphi^+(\zeta') = \alpha'_{\Pi}(\zeta'), \qquad \zeta' \in \sigma'_{\Pi},$$
$$\varphi(\zeta') = \alpha'_C(\zeta'), \qquad \zeta' \in \sigma'_C.$$

Если в этих условиях положить $\alpha'_{\Pi} = 0$, $\alpha'_C = C$ ($C = const$), то их можно переписать в следующем виде

$$\varphi^+(\zeta') = 0, \qquad \zeta' \in \sigma'_{\Pi}, \tag{10}$$
$$\varphi(\zeta') = C, \qquad \zeta' \in \sigma'_C. \tag{11}$$

Условие (9) на плоскости ζ примет иметь вид

$$\left(\eta'^s \frac{\partial \varphi(\zeta')}{\partial \eta'} \right)^+ = 0, \qquad \zeta' \in \sigma'_0. \tag{12}$$

Таким образом, окончательно задача сводится к решению уравнения (6) удовлетворяющего условиям (10)-(12).

3. Моделирование работы скважины

Поставленная выше задача допускает аналитическое решение. Следуя [10] и используя фильтрационную теорему сопряжения на полуокружности запишем для обобщенного потенциала

$$\varphi = \frac{q}{2\pi \eta' \eta'_0} Q_0(\omega) - \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 \frac{q}{2\pi \frac{a^2}{\rho^2} \eta' \eta'_0} Q_0(\omega_*)$$

где $Q_0(\omega) = \frac{1}{2} \ln \frac{\omega + 1}{\omega - 1}$ - функция Лежандра второго рода, $\omega = 1 + \frac{R^2}{2\eta' \eta'_0}$,

$R^2 = (\xi' - \xi'_0)^2 + (\eta' - \eta'_0)^2$, $\omega_* = 1 + \frac{R^2}{2\frac{a^2}{\rho^2} \eta' \eta'_0}$, $R^2 = (\frac{a^2}{\rho^2} \xi' - \xi'_0)^2 + (\frac{a^2}{\rho^2} \eta' - \eta'_0)^2$,

$\rho^2 = \xi'^2 + \eta'^2$.

Чтобы исследовать действие анизотропии пористой среды на дебит скважины используем относительный дебит [8-9]

$$\varepsilon = \frac{q}{q_0} - 1$$

На рисунке 3 представлены зависимости относительного дебита ε от значений коэффициентов α и β при значении $s = 2$.

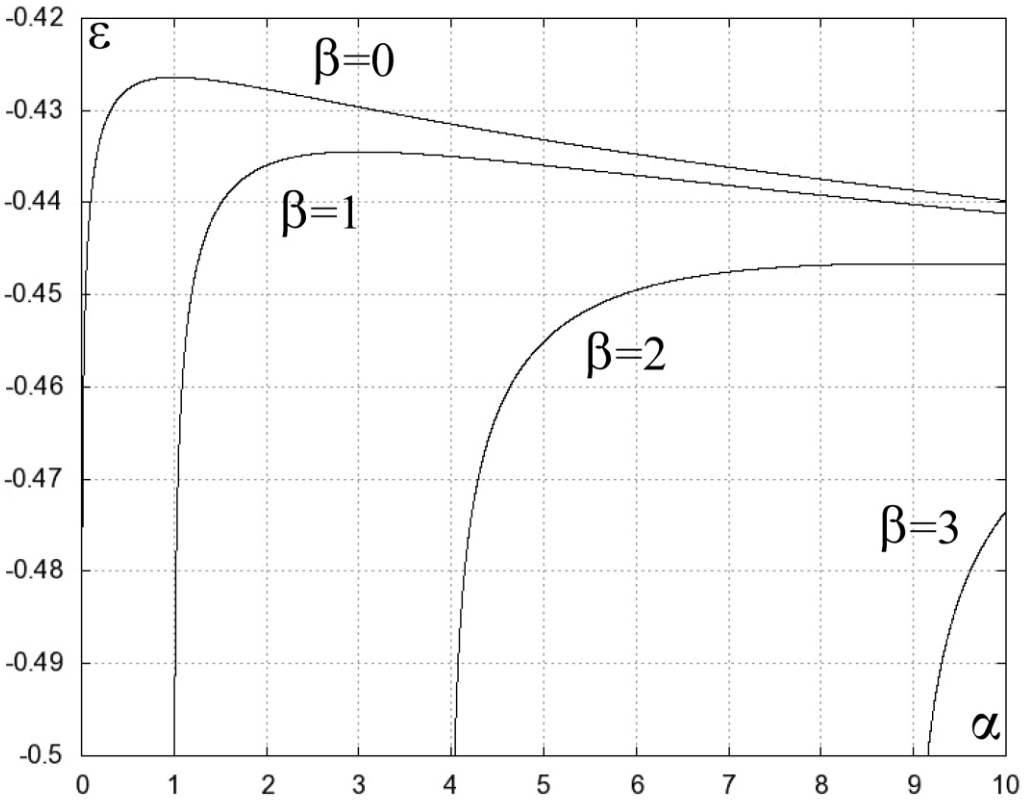


Рисунок 3. Зависимости относительного дебита ε от значений коэффициентов α и β при значении $s = 2$.

4. Заключение

В данной работе произведено двумерное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном неоднородном пласте грунта со степенным законом изменения проводимости (проницаемости). Когда контур питания – часть эллипса специального вида (который переходит в полуокружность на вспомогательной плоскости), а показатель степени равен двум, возможно аналитическое решение задачи. В случае малых α на графике относительного дебита имеется пик, который постепенно размывается при увеличении недиагональных компонентов тензора проницаемости. В области сильно анизотропных сред (больших значений α и β) вид кривых на графике качественно схож со случаем анизотропной однородной среды.

Список источников

1. Хайн Н. Геология, разведка, бурение и добыча нефти. М.: ЗАО «Олимп - Бизнес», 2004. 752 с.

2. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. 436 с.

3. Дмитриев Н.М., Мамедов М.Т., Максимов В.М. Фильтрация с предельным градиентом в анизотропных средах. Теория и эксперимент // Вестник ННГУ. 2011. №4(3). С. 749-750.

4. Adams A. Permeability anisotropy and resistivity anisotropy of mechanically compressed mudrocks. PhD Dissertation in Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2014. 561 p. DOI:10.1139/CGJ-2015-0596.

5. Nordquist T. Permeability Anisotropy of Resedimented Mudrocks. Master Of Science In Civil And Environmental Engineering. Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2015. 277 p.

6. Zhao X., Toksoz M., Cheng C. Stoneley wave propagation across borehole permeability heterogeneities // Earth Resources Laboratory Industry Consortia Annual Report. 1994. №9. P. 227-270. DOI:10.1190/1.1931957.

7. Пивень В.Ф. Математические модели фильтрации жидкости. Орёл: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2015. 408 с.

8. Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Математическое моделирование работы скважины в случае двумерной фильтрации в анизотропном неоднородном пласте // Вычислительные методы и программирование. 2020. № 1. С. 87-95. https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r108.

9. Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Численное исследование работы скважины с произвольным кусочно-гладким контуром питания в анизотропном неоднородном пласте // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. №2. С. 223–233. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.2.17.

10. Пивень В.Ф. Теория и приложение математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл: Издательство ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», 2006. 508 с.

References

1. Hyne N. Petroleum geology, exploration, drilling, and production. Tulsa: Pennwell Corp; 2001. 575 p.

2. Charnyy I.A. Underground fluid dynamics. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science; 2006. 436 p.

3. Dmitriyev N.M., Mamedov M.T., Maksimov V.M. Flow with a limiting gradient in anisotropic porous media. Theory and experiment. Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. 2011;3(4):749-750.

4. Adams A. Permeability anisotropy and resistivity anisotropy of mechanically compressed mudrocks. PhD Dissertation in Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. Boston: Massachusetts Institute of Technology; 2014. 561 p. DOI:10.1139/CGJ-2015-0596.

5. Nordquist T. Permeability Anisotropy of Resedimented Mudrocks. Master of Science in Civil and Environmental Engineering. Boston: Massachusetts Institute of Technology; 2015. 277 p.

6. Zhao X., Toksoz M., Cheng C. Stoneley wave propagation across borehole permeability heterogeneities. Earth Resources Laboratory Industry Consortia Annual Report. 1994; 9:227-270. DOI:10.1190/1.1931957.

7. Piven V.F. Mathematical models of fluid filtration. Orel: Orel State University n.a. I.S. Turgenev; 2015. 408 p.

8. Piven V.F., Lekomtsev D.G. Mathematical modeling of well operation in the case of two-dimensional filtration in an anisotropic heterogeneous layer. Numerical Methods and Programming. 2020;21(1):87-95. https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r108.

9. Piven V.F., Lekomtsev D.G. Numerical modeling of the performance of a well with an arbitrary piecewise-smooth external boundary in an anisotropic heterogeneous reservoir. Computational continuum mechanics. 2022;15(2):223–233. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.2.17.

10. Piven V.F. Theory and applications of mathematical models of filter fluids. Orel: Orel State University; 2006. 508 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 223-230.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 223-230.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА «РАЗНОЦВЕТНЫХ» ЖИДКОСТЕЙ ОТ ИСТОЧНИКА НА НЕПРОНИЦАЕМОЙ ГРАНИЦЕ В ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ПОТОКЕ

Юрий Сергеевич Федяев[1]✉, Максим Сергеевич Веденников[2]
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]FedyaevYS@gmail.com✉, https://orcid.org/0000-0001-5241-8327
[2]vedenikov.maksimka@mail.ru

Аннотация. *Исследуется осесимметричная задача о движении границы раздела «разноцветных» жидкостей в однородной пористой среде. Фильтрация вызвана работой точечного источника загрязнения заданной мощности, расположенного на непроницаемой сфере и поступательным потоком вдоль оси симметрии течения. Выписан потенциал и функция тока течения, найдено поле скоростей. Исследование эволюции границы сведено к решению задачи Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Разработан численный метод решения поставленной задачи с контролем точности. Построены последовательные положения границы раздела жидкостей. Найдена граница области загрязнения.*

Ключевые слова: *математическое моделирование, эволюция границы, модель «разноцветных» жидкостей, непроницаемая граница, поступательный поток, фильтрация жидкости*

Conference paper

MATHEMATICAL MODELING OF THE EVOLUTION OF THE INTERFACE BETWEEN “MULTI-COLORED” LIQUIDS FROM A SOURCE ON AN IMPERMEABLE BOUNDARY IN A FORWARD FLOW

Yuriy S. Fedyaev[1]✉, Maksim S. Vedenikov[2]
[1 2]Orel State University, Orel, Russia
[1]FedyaevYS@gmail.com✉, https://orcid.org/0000-0001-5241-8327
[2]vedenikov.maksimka@mail.ru

Abstract. *The axisymmetric problem of the motion of the interface between “multi-colored” liquids in a homogeneous porous medium is studied. Filtration is*

© Федяев Ю. С., Веденников М. С., 2023

caused by the operation of a point source of pollution of a given power, located on an impenetrable sphere and a translational flow along the axis of symmetry of the flow. The potential and flow current function are written out, and the velocity field is found. The study of the evolution of the interface between liquids is reduced to solving the Cauchy problem for a system of two ordinary differential equations of the first order. A numerical method for solving the problem with accuracy control has been developed. Consecutive positions of the liquid interface are constructed. The boundary of the contamination area has been found.

Keywords: *mathematical modeling, boundary evolution, model of "multi-colored" liquids, impenetrable boundary, forward flow, liquid filtration*

1. Введение

При мониторинге загрязнения окружающей среды возникают задачи исследования фильтрационных течений с источниками на непроницаемых границах. Математическому моделированию таких плоскопараллельных течений посвящён ряд работ. Так в статье [1] найдены аналитические решения, описывающие течения, создаваемые источником, находящимся на непроницаемой окружности или прямой. Также рассмотрена работа источника загрязнения на непроницаемой прямой в поступательном потоке и на непроницаемой окружности. В работе [2] исследована работа водозабора, питающегося потоком чистой грунтовой жидкости и расположенного вблизи источника загрязнения на непроницаемой прямой границе области фильтрации. В статье [3] исследовано течение, которое создаёт источник на непроницаемой прямой и окружности в поступательном потоке. Работа [4] посвящена исследованию работы водозабора, питающегося естественным потоком грунтовых вод вблизи источника загрязнения, расположенного на непроницаемой окружности.

В настоящей работе исследуется осесимметричная задача эволюции границы раздела от источника загрязнения на непроницаемой сфере в поступательном потоке. Потенциал течения найден суперпозицией простейших течений: источника на непроницаемой сфере [5] и поступательного потока [6]. Для моделирования используется подход, описанный в работе [7]. Численная схема решения задачи описана в статье [8].

2. Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричную фильтрацию жидкости в однородной пористой среде. Потенциал скорости фильтрации удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\,\varphi(M) = 0, \qquad M \in D, \tag{1}$$

которое выполняется всюду в области течения D, за исключением особых точек.

В области фильтрации присутствует непроницаемое включение, которое моделируется гладкой поверхностью σ. Для потенциала течения справедливо граничное условие Неймана

$$\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n_M}\right)^{+} = 0, \;\; M \in \sigma, \tag{2}$$

где $\vec{n}_M$ — вектор внешней нормали к границе σ.

В области течения присутствует подвижная граница Γ_t, которая разделяет различные жидкости. Полагаем, что фильтрационные свойства жидкостей одинаковы (модель «разноцветных» жидкостей). В начальный момент времени положение границы Γ_0 известно. В меридиональной плоскости она задаётся параметрическим уравнением (s — параметр)

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0(s), \;\; M \in \Gamma_0. \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение движения границы Γ_t имеет вид

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}(M), \;\; M \in \Gamma_t. \tag{4}$$

Для нахождения скорости фильтрации необходимо отыскать потенциал течения, имеющий заданные особые точки в области фильтрации, удовлетворяющий уравнению (1) и граничному условию (2). Тогда

$$\vec{v}(M) = \nabla\varphi(M), \;\; M \in D. \tag{5}$$

Изучение эволюции границы раздела жидкостей Γ_t сводится к интегрированию уравнения (4) с начальным условием (3).

3. Исследование задачи

Будем моделировать поверхность σ сферой радиуса a. Начало прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ выберем в центре этой границы. Движение жидкости вызвано источником мощности Q, который располагается на непроницаемой границе на оси симметрии течения Ox и поступательным потоком скорости V_0, направленным вдоль этой оси. Течение будет осесимметричным и его достаточно исследовать в плоскости Oxy (рисунок 1).

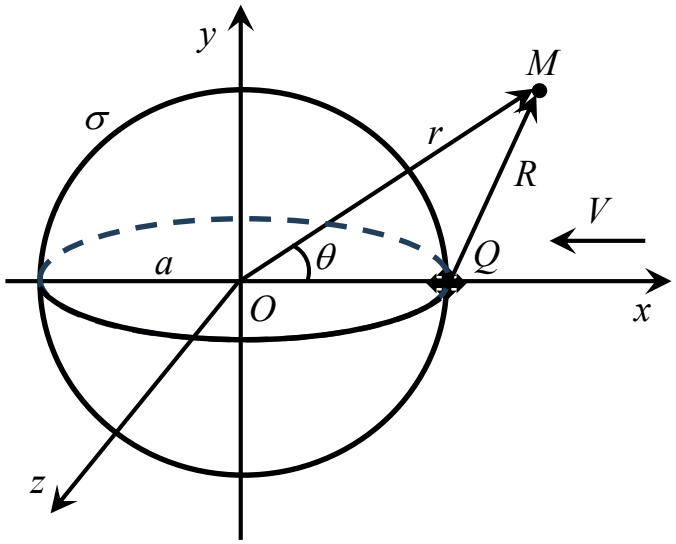


Рисунок 1. Область фильтрационного течения

Потенциал скорости фильтрации имеет вид

$$\varphi(r,\theta) = -\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\ln\frac{R + a - r\cos\theta}{r(1-\cos\theta)}\right) + V_0\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right)r\cos\theta, \tag{6}$$

где $R = \sqrt{r^2 - 2ar\cos\theta + a^2}$.

Используя фильтрационную теорему о сфере [6], функцию тока течения запишем в виде

$$\psi(r,\theta) = -\frac{Q}{4\pi}\left(1 + 2\frac{r\cos\theta - a}{R} - \frac{1}{a}(r-R)\right) + \frac{V_0}{2}\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)r^2\sin^2\theta. \qquad (7)$$

Полагаем, что начальное положение границы Γ_0 представляет собой дугу окружности малого радиуса ρ. Тогда её параметрическое задание имеет вид

$$x_M = a + \rho\cos\theta_M, \quad y_M = \rho\sin\theta_M,$$
$$\theta_M \in \left[-\pi + \arccos\frac{\rho}{2a}, \pi - \arccos\frac{\rho}{2a}\right], \quad M \in \Gamma_0. \qquad (8)$$

При численном решении задачи границу раздела «разноцветных» жидкостей необходимо задать множеством точек [7]. Для этого разобьём Γ_0 по параметру θ_M на p равных частей. В результате получим упорядоченное множество точек $E_\Gamma^0 = \{x_i^0, y_i^0, i = 0,1,\dots,p\}$. Далее для каждой точки множества E_Γ^0 решается задача Коши методом Рунге — Кутты — Фельберга с контролем погрешности численного решения [8]. Так как вблизи источника скорость точек границы резко меняется, то для выбора шага интегрирования Δt используется следующий алгоритм: задаётся максимальное смещение Δl_{max} границы Γ_t и шаг вычисляется по формуле

$$\Delta t = \min\left\{\frac{\Delta l_{max}}{v_{max}}, \Delta t_{max}\right\}, \qquad (9)$$

где v_{max} — максимальное значение скорости точек границы, Δt_{max} — максимальный шаг интегрирования. Значение Δt_{max} выбирается на основании оценки погрешности интегрирования.

При движении границы Γ_t её длина значительно изменяется и разбиение становится неравномерным. Поэтому на каждом шаге по времени положение границы интерполируется линейными сплайнами, и она заново разбивается равномерно по длине.

Полагаем, что поступательный поток направлен против оси Ox ($V_0 < 0$). В этом случае на оси симметрии имеется критическая точка, в которой скорость фильтрации обращается в ноль. Вычислив предел выражения (6) при $\theta \to 0$ получим

$$\varphi(r,0) = -\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{2}{r-a} - \frac{1}{a}\ln\frac{r}{r-a}\right) + V_0\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right)r. \qquad (10)$$

Продифференцировав (10), имеем радиальную составляющую скорости

$$v_r(r,0) = \frac{\partial\varphi(r,0)}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi}\frac{r+a}{r(r-a)^2} + V_0\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right). \qquad (11)$$

В критической точке $v_r(r_*,0) = 0$ и из (11) получаем уравнение пятой степени для отыскания r_*. Если в уравнении (11) положить $r_* = 2a$, то легко находим соотношение между Q и V_0, которое соответствует заданному положению критической точки $V_0 = -3Q/(7\pi a^2)$.

Найдём линию тока, которая проходит через критическую точку $(r_*, 0)$. Подставляя в уравнение (7) $\theta = 0$, получим $\psi(r,0) = -Q/(2\pi) = C_*$. Тогда уравнение линии тока примет вид

$$\psi(r,\theta) = C_* \,. \qquad (12)$$

На рисунке 2 показаны последовательные положения границы раздела жидкостей через равные промежутки времени. Радиус сферы $a = 1$, радиус границы Γ_0 $\rho = 0{,}05$, мощность источника загрязнения $Q = 4\pi/3$, скорость поступательного потока $V_0 = -4/7$. Чёрной жирной линией изображена линия тока, проходящая через критическую точку. Она ограничивает область течения, в которой распространяется загрязнение от источника.

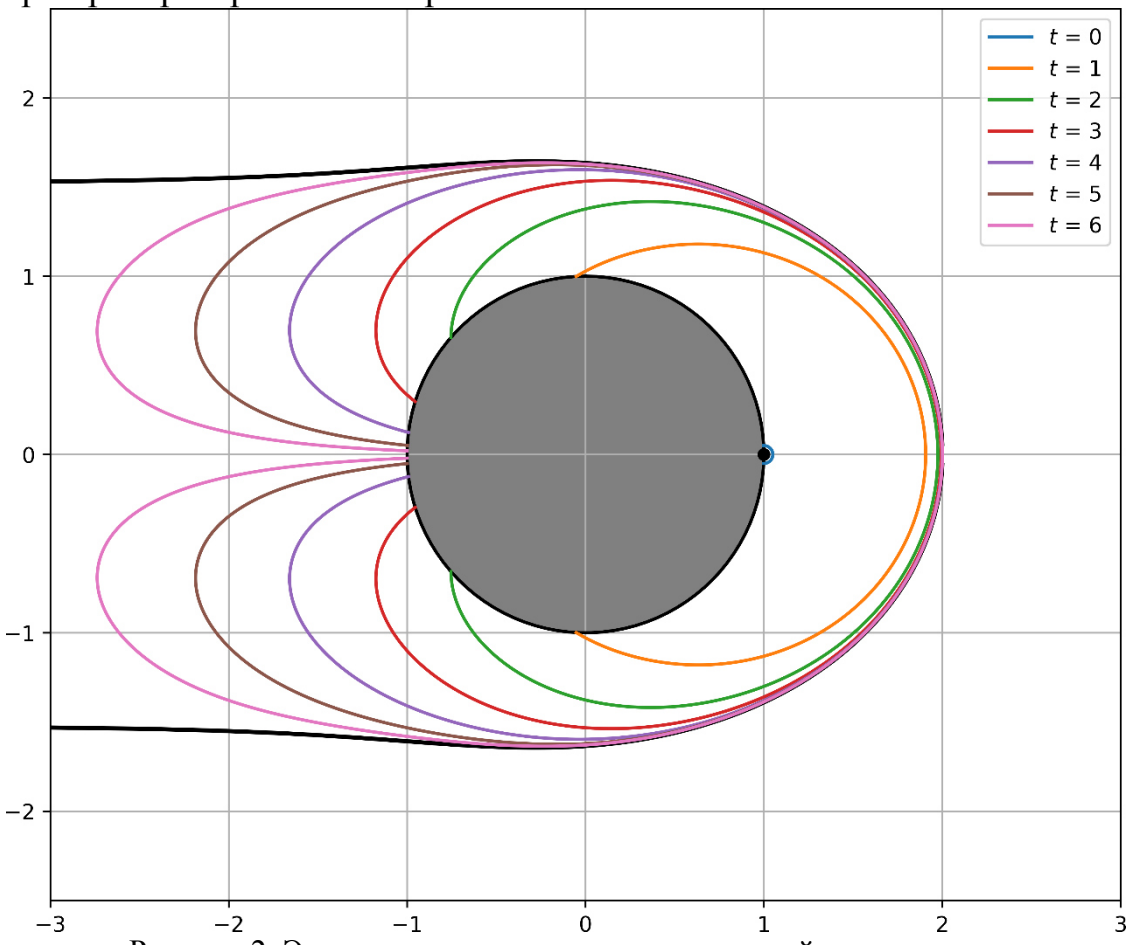


Рисунок 2. Эволюция границы раздела жидкостей от источника на непроницаемой сфере в поступательном потоке, направленном против оси Ox

Расчёты проводились для 1000 точек на границе. Шаг по времени определялся по формуле (9) при $\Delta l_{max} = 0{,}001$ и $\Delta t_{max} = 0{,}01$. На рисунке 3 показана зависимость локальной погрешности интегрирования ε от времени t, а на рисунке 4 — зависимость шага интегрирования Δt от его номера. Видим, что $\varepsilon < 3 \cdot 10^{-6}$ и по мере удаления границы Γ_t от источника шаг интегрирования растёт до Δt_{max}.

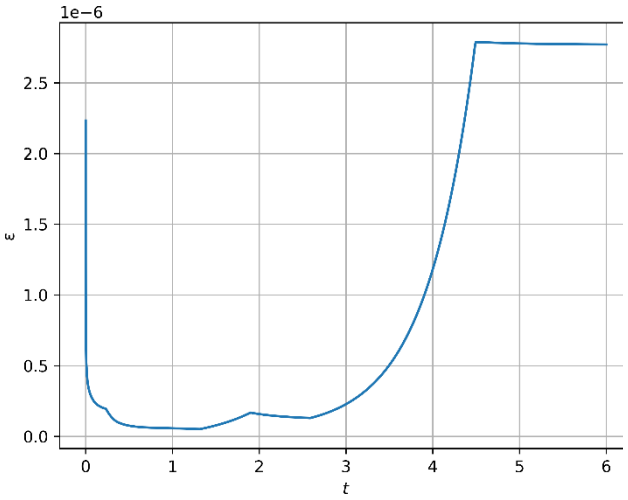


Рисунок 3. Локальная погрешность

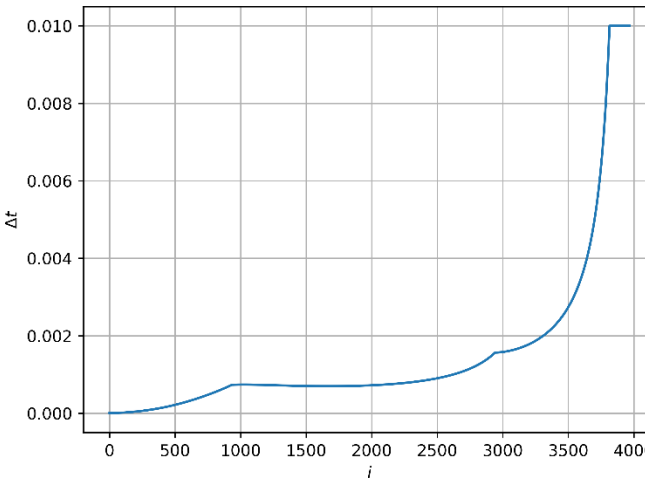


Рисунок 4. Шаг интегрирования

Полагаем, что поступательный поток направлен вдоль оси Ox ($V_0 > 0$). На рисунке 5 показаны последовательные положения границы раздела жидкостей через равные промежутки времени при $V_0 = 4/7$. Видим, что на сфере имеются критические точки. Найдём линию тока, которая проходит через эти точки. Подставляя в уравнение (7) $r = a$, получим $\psi(a, \theta) = 0$. Тогда уравнение линии тока примет вид (12), где следует положить $C_* = 0$. Видим, что загрязнение распространяется в области течения, ограниченной линией тока.

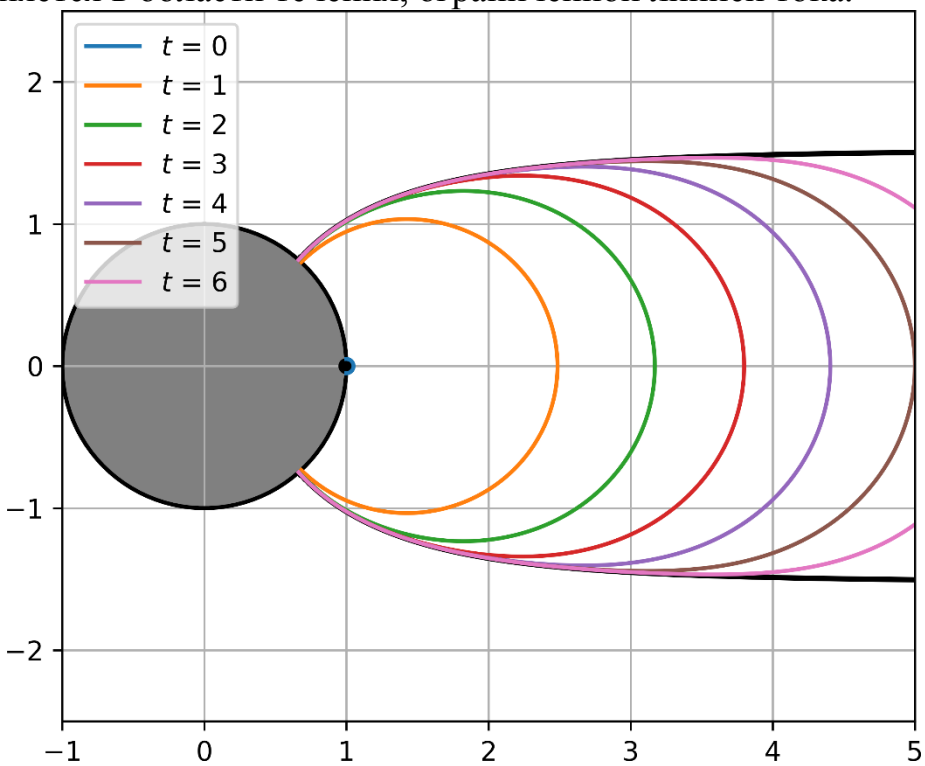


Рисунок 5. Эволюция границы раздела жидкостей от источника на непроницаемой сфере в поступательном потоке, направленном вдоль оси Ox

4. Заключение

В работе изучена математическая модель эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей от источника загрязнения на непроницаемой сфере, находящейся в поступательном потоке чистой жидкости. Выписан потенциал и функция тока течения. По заданному начальному положению границы раздела

жидкостей численно найдены последующие конфигурации. Определены границы области загрязнения.

Список источников

1. Никольский Д.Н. Фильтрационные течения от источника на окружности или прямой // Тр. Междунар. школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Вып. 5. Орёл, 2007. С. 75-78.

2. Никольский Д.Н., Деткова Ю.В. Исследование работы водозабора вблизи источника загрязнения, расположенного на непроницаемой прямой // Тр. Междунар. школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Вып. 6. Орёл, 2008. С. 69-72.

3. Пивень В.Ф., Костин О.В. Фильтрационные течения с источниками на непроницаемых канонических границах // Тр. Междунар. школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Вып. 7. Орёл, 2009. С. 92-98.

4. Деткова Ю.В., Никольский Д.Н. Исследование работы водозабора вблизи источника загрязнения, расположенного на непроницаемой окружности // Тр. Междунар. школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Вып. 7. Орёл, 2009. С. 46-51.

5. Ведеников М.С., Федяев Ю.С. Исследование фильтрационного течения жидкости от источника на непроницаемой сфере // Естественные и гуманитарные науки в современном мире: материалы Международной научно-практической конференции (1–3 июня 2022 г., г. Орёл). Орёл: ОГУ имени И. С. Тургенева, 2022. С. 130-134.

6. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл: Издательство ГОУ ВПО «ОГУ», Полиграфическая фирма «Картуш», 2006. 508 с.

7. Федяев Ю.С., Ведеников М.С. Исследование эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей при фильтрации от источника на непроницаемой границе // Современные проблемы физико-математических наук / материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (25 – 26 ноября 2022 г., г. Орёл). – Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2022. С. 234-240.

8. Ведеников М.С., Федяев Ю.С. Численная схема решения задачи эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в пористой среде // Естественные и гуманитарные науки в современном мире: материалы VI Международной научно-практической конференции, посвященная 115-летию Лакина Г.Ф. (15 мая – 17 мая, г. Орёл). Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2023. С. 155-159.

References

1. Nikol’skii, D.N., Filtration flows from a source on a circle or straight line, in Tr. Mezhdunar. shkol-seminarov “Metody diskretnykh osobennostei v zadachakh

matematicheskoi fiziki". Vyp. 5 (Proc. Int. Semin. Sch. "Methods of Discrete Singularities in Problems of Mathematical Physics." Issue 5), Orel, 2007, pp. 75–78. (In Russ.).

2. Nikol'skii, D.N. and Detkova, Yu.V., Study of the operation of a water intake near a source of pollution located on an impenetrable straight line, in Tr. Mezhdunar. shkol-seminarov "Metody diskretnykh osobennostei v zadachakh matematicheskoi fiziki". Vyp. 6 (Proc. Int. Semin. Sch. "Methods of Discrete Singularities in Problems of Mathematical Physics." Issue 6), Orel, 2008, pp. 69–72. (In Russ.).

3. Piven', V.F. and Kostin, O.V., Filtration flows with sources on impermeable canonical boundaries, in Tr. Mezhdunar. shkol-seminarov "Metody diskretnykh osobennostei v zadachakh matematicheskoi fiziki". Vyp. 7 (Proc. Int. Semin. Sch. "Methods of Discrete Singularities in Problems of Mathematical Physics." Issue 7), Orel, 2009, pp. 92–98. (In Russ.).

4. Detkova, Yu.V. and Nikol'skii, D.N., Investigation of the operation of a water intake near a source of pollution located on a circle, in Tr. Mezhdunar. shkol-seminarov "Metody diskretnykh osobennostei v zadachakh matematicheskoi fiziki". Vyp. 7 (Proc. Int. Semin. Sch. "Methods of Discrete Singularities in Problems of Mathematical Physics." Issue 7), Orel, 2009, pp. 46–51. (In Russ.).

5. Vedenikov, M.S. and Fedyaev, Yu.S. Investigation of the filtration flow of a liquid from a source on an impermeable sphere // Estestvennye i gumanitarnye nauki v sovremennom mire: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii (1–3 iyunya 2022 g., g. Oryol). Oryol: OGU imeni I. S. Turgeneva, 2022. Pp. 130-134. (In Russ.).

6. Piven', V. F., Teoriya i prilozheniya matematicheskikh modelei fil'tratsionnykh techenii zhidkosti (Theory and Applications of Mathematical Models of Fluid Filtration Flows), Orel: Orlov. Gos. Univ., 2006. (In Russ.).

7. Fedyaev, Yu.S. and Vedenikov, M.S. Study of the evolution of the interface between "multi-colored" liquids during filtration from a source on an impermeable boundary // Sovremennye problemy fiziko-matematicheskix nauk: materialy VII Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii c mezhdunarodnym uchastiem (25–26 noyabrya 2022 g., g. Orel). – Orel: OGU imeni I.S. Turgeneva, 2022. Pp. 234-240. (In Russ.).

8. Vedenikov, M.S. and Fedyaev, Yu.S. Numerical scheme for solving the problem of evolution of the interface between "multi-colored" liquids in a porous medium // Estestvennye i gumanitarnye nauki v sovremennom mire: materialy VI Mezh-dunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii, posvyashhennaya 115-letiyu Lakina G.F. (15 maya – 17 maya, g. Oryol). Orel: OGU imeni I. S. Turgeneva, 2022. Pp. 155-159. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 231-242.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 231-242.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ К СИСТЕМЕ СОВЕРШЕННЫХ СКВАЖИН В НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ ГРУНТА МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Марат Александрович Фролов[1]
Алексей Анатольевич Аксюхин[2]✉
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]markfrolov@rambler.ru
[2]aksyukhin@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-4778-0716

Аннотация. *Ставится и решается двумерная граничная задача о работе нескольких совершенных скважин в неоднородных слоях грунта, проводимость которых моделируется гармоническими и метагармоническими законами проводимости. Для произвольных гладких и кусочно-гладких границ сопряжения и питания задача сводится к системе неоднородных интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода и интегральных соотношений. Методом дискретных особенностей эта система решается численно. Определены дебиты скважин. Исследовано влияние на дебит формы контура питания, границы сопряжения и взаимное расположение скважин (интерференция).*

Ключевые слова: *двумерная напорная фильтрация, неоднородные слои грунта, задача сопряжения, система интегральных уравнений, метод дискретных особенностей, дебиты совершенных скважин, интерференция скважин.*

Conference paper

RESEARCH ON TWO-DIMENSIONAL FLUID FILTRATION TO A SYSTEM OF PERFECT WELLS IN HETEROGENEOUS SOIL LAYERS BY THE DISCRETE SINGULARITY METHOD

Marat A. Frolov[1]
Alexey A. Aksyukhin[2]✉
[1,2]Orel State University, Orel, Russia
[1]markfrolov@rambler.ru
[2]aksyukhin@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-4778-0716

© Фролов М.А, Аксюхин А.А., 2023

Abstract. *A two-dimensional boundary problem about the operation of several perfect wells in inhomogeneous soil layers, the conductivity of which is modeled by harmonic and metaharmonic conductivity laws, is formulated and solved. For arbitrary smooth and piecewise smooth interface and supply boundaries, the problem is reduced to a system of inhomogeneous integral equations of the Fredholm type of the second kind and integral relations. This system is solved numerically using the method of discrete singularities. Well flow rates have been determined. The influence of the shape of the supply circuit and the relative position of wells (interference) on the flow rate was studied.*

Keywords: *two-dimensional pressure filtration, heterogeneous soil layers, conjugate problem, system of integral equations, discrete singularity method, flow rates of perfect wells, well interference.*

Введение

Важность теоретического изучения фильтрации несжимаемой жидкости в неоднородных слоях грунта к совершенным скважинам, определение дебитов скважин и исследование их интерференции, вызваны тем, что просачивание таких жидкостей, как вода, нефть или их смеси при откачке жидкости из скважин захватывает большие массивы проницаемой толщи грунтов, структура которых, как правило, неоднородна. Неоднородность грунта вызвана переменной мощностью пласта, а также тем, что в природных условиях глинистые, песчаные и другие слои вклиниваются и сменяют друг друга.

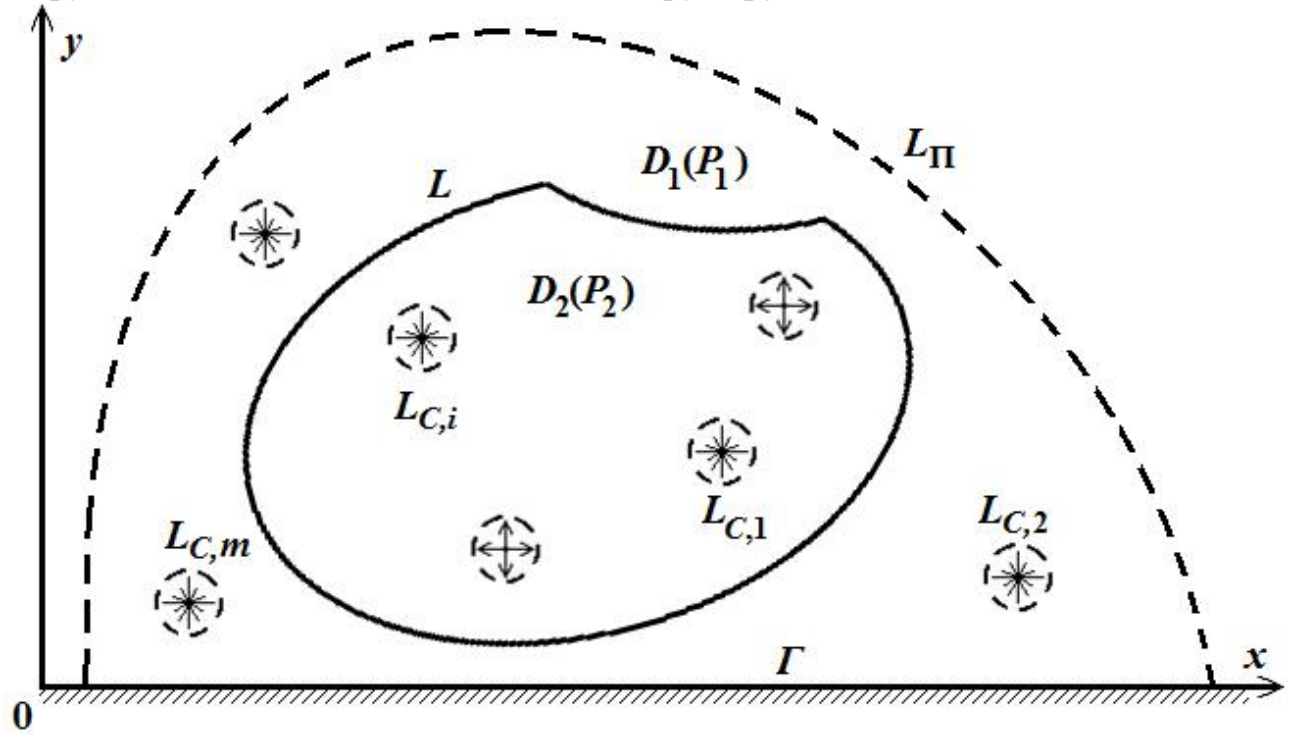


Рисунок 1. Положение контуров скважин, границ непротекания, сопряжения и питания в плоскости *xOy* при двумерной фильтрации жидкости в неоднородных слоях грунта.

1. Постановка задачи

Рассмотрим стационарную напорную линейную фильтрацию несжимаемой жидкости постоянной вязкости в изотропной неоднородной среде. Область фильтрации D может быть ограничена гладкой или кусочно-гладкой

кривой $L_{\text{П}}$. Задача о работе m скважин состоит в определении квазипотенциалов скорости $\varphi_\nu(M)$, $\nu = 1,\ 2$, описывающих течение жидкости в областях D_ν, которые разделены произвольной гладкой или кусочно-гладкой кривой L (см. рисунок 1). Искомые квазипотенциалы вне границы L и их особых точек удовлетворяют уравнению:

$$\nabla_M \cdot \left[P_\nu(M) \nabla_M \varphi_\nu(M) \right] = 0,\ M \in D_\nu,\ \nu = 1,\ 2, \tag{1.1}$$

и условиям сопряжения [1]:

$$\varphi_1^+(M) = \varphi_2^-(M),\ k_1 \left(\frac{\partial \varphi_1(M)}{\partial n_M} \right)^+ = k_2 \left(\frac{\partial \varphi_2(M)}{\partial n_M} \right)^-,\ M \in L, \tag{1.2}$$

Здесь функция $P_\nu(M) = k_\nu P(M)$ – проводимость слоя (произведение проницаемости слоя $K(M)$ на его толщину $H(M)$) в области D_ν, k_ν ($\nu = 1,\ 2$) – константы, $P(M) > 0$ – дважды непрерывно дифференцируемая в области $D = D_1 \cup D_2 \cup L$ функция координат; n_M —нормаль к границе L, направленная в область D_1, индексы «+» и «–» означают предельные значения соответствующих функций при приближении к L из D_1 и D_2 соответственно.

В гидродинамических задачах и в исследовании процессов фильтрации жидкостей и газов поиск решения задачи значительно усложняется наличием особой (сингулярной) линии Γ, на которой проводимость $P(M)$ обращается в ноль либо бесконечность. Эта кривая может частично ограничивать области D_1 и D_2, и на ней выполняются условия непротекания:

$$K_\nu(M) \frac{\partial \varphi_\nu(M)}{\partial n_M} = 0,\ \nu = 1,2,\ M \in \Gamma \tag{1.3}$$

либо она является эквипотенциалью:

$$\varphi_\nu(M) = 0,\ \nu = 1,2,\ M \in \Gamma. \tag{1.4}$$

На контуре питания $L_{\text{П}}$, задаётся давление, характеризуемое непрерывной функцией $\alpha(M)$, которая для замкнутых границ $L_{\text{П}}$ является циклической функцией координат. Условие на границе $L_{\text{П}}$ принимает вид:

$$k_1 \varphi_1^-(M) = \alpha(M),\ M \in L_{\text{П}},\ L_{\text{П}} \in D_1. \tag{1.5}$$

Каждую из m скважин будем моделировать точечным стоком (или источником), расположенным в точке M_i, мощность которого совпадает с дебитом q_i, $i = 1,2,\ldots,m$, отнесенным к проводимости слоя в точке забоя скважины. Контур скважины $L_{C,i}$ представим окружностью малого по сравнению с характерным размером области D радиуса R_C, с центром в точке M_i. В силу малости радиуса скважины давление на контуре считается постоянным и задаётся в его произвольной точке $M_{C,i}$. Условие на границе L_C имеет вид:

$$k_\nu \varphi_\nu(M_{C,i}) = C_i,\ M_{C,i} \in L_{C,i},\ \nu = 1 \text{ или } 2,\ C_i = \text{const}_i,\ i = 1,2,\ldots,m. \tag{1.6}$$

Введём квазипотенциал течения $\varphi_0(M)$, создаваемого m стоками, без учёта границ L (т.е. при $k_1 = k_2$), $L_{\text{П}}$ и $L_{C,i}$ ($i = 1,2,\ldots,m$), но учитывающий границу Γ:

$$\varphi_0(M) = \sum_{i=1}^{m} q_i \tilde{\varphi}(M, M_i),\ M \in D, \tag{1.7}$$

где q_i – приведённые постоянные дебиты скважин, функция $\tilde{\varphi}(M, M_i)$ удовлетворяет исходному уравнению (1.1) и условию (1.3), либо (1.4), M_i, $i = 1,2,\ldots,m$ – центры скважин.

2. Решение задачи

Для нахождения дебита скважины искомые квазипотенциалы, следуя [2], запишем в виде:

$$\varphi_\nu(M) = \frac{\varphi_0(M) + \varphi_\nu^*(M)}{k_\nu},\ \nu = 1,2. \tag{2.1}$$

Здесь $\varphi_\nu^*(M)$ – квазипотенциал возмущенного течения, который удовлетворяет уравнению (1.1) в области $D_\nu \setminus L$, $\nu = 1,2$.

Граничные условия (1.2) с учётом (2.1) для квазипотенциала $\varphi_\nu^*(M)$ принимают вид:

$$\begin{gathered}(1-\lambda)\varphi_1^{*+}(M) - (1+\lambda)\varphi_2^{*-}(M) = 2\lambda\varphi_0(M), \\ \left(\frac{\partial \varphi_1^*(M)}{\partial n_M}\right)^+ = \left(\frac{\partial \varphi_2^*(M)}{\partial n_M}\right)^-,\ M \in L,\ \lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

На сингулярной кривой Γ для потенциалов возмущения получим:

$$\frac{\partial \varphi_\nu^*(M)}{\partial n_M} = 0,\ \nu = 1,2,\ M \in \Gamma. \tag{2.3}$$

$$\varphi_\nu^*(M) = 0,\ \nu = 1,2,\ M \in \Gamma. \tag{2.4}$$

Условие на границе области питания (1.5) принимает вид:

$$\varphi_1^{*-}(M) = \alpha(M) - \varphi_0(M),\ M \in \sigma_{\text{П}}, \tag{2.5}$$

Когда область D_2 ограничена, а область D_1 содержит бесконечно удалённую точку (например, контур питания $L_{\text{П}}$ отсутствует), для квазипотенциала возмущения $\varphi_1^*(M)$ имеем:

$$\varphi_1^*(M) \Rightarrow 0 \text{ при } r_{MN} \to \infty, \tag{2.6}$$

где точка $N \in \sigma$, а r_{NM} — расстояние между точками N и $M \in D_1 \setminus L$. Условие (2.6) означает возмущений на бесконечности [2].

Условие (1.6) на контуре i-ой скважины $L_{C,i}$ запишем следующим образом:

$$\varphi_\nu^*(M_{C,i}) = C_i - \varphi_0(M_{C,i}),\ M_c \in \sigma_c,\ \nu = 1 \text{ или } 2,\ i = 1,2,\ldots,m. \tag{2.7}$$

Таким образом, чтобы найти дебит каждой скважины q_i необходимо отыскать квазипотенциалы $\varphi_\nu^*(M)$, $\nu = 1,2$, удовлетворяющие уравнению (1.1) и граничным условиям (2.2), (2.3) либо (2.4), (2.5) либо (2.6) и (2.7).

3. Сведение задачи к системе интегральных уравнений

Для произвольных кусочно-гладких границ задачу о дебите скважины сведём к системе интегральных уравнений. Квазипотенциал $\varphi_\nu^*(M)$, $\nu = 1,2$ ищем в виде потенциалов двойного слоя, с непрерывно распределёнными плотностями $g_\nu(N)$ и $f(T)$ на кривых L и $L_\text{П}$ соответственно [4]:

$$\varphi_\nu^*(M) = \int_L g_\nu(N)P(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N}dl_N + \int_{L_\text{П}} f(T)P(T)\frac{\partial F(M,T)}{\partial n_T}dl_{\text{П},T}, \qquad (3.1)$$

$$\nu = 1,2,\ M \in D\setminus(L\cup L_\text{П}\cup\Gamma),\ N \in L,\ T \in L_\text{П}.$$

Здесь $\vec{n}_N$ и $\vec{n}_T$ — орты положительных нормалей, направленные во внешние к границам L и $L_\text{П}$ области, $F(M,N)$, $F(M,T)$ — фундаментальные решения уравнения (1.1), имеющие в точках N и T особенности и удовлетворяющие при наличии линии Γ условиям вида (1.3) или (1.4).

Следуя [3], функцию $F(M,N)$ можно представить в виде:

$$F(M,N) = U(M,N) + \frac{1}{2\pi\sqrt{P(M)P(N)}}\cdot\ln\frac{1}{r_{MN}}, \qquad (3.2)$$

где $U(M,N)$ дважды непрерывно дифференцируемая в области $D\setminus(L\cup L_\text{П}\cup\Gamma)$ функция, она симметрична $U(M,N) = U(N,M)$ и её нормальная производная в точке $N \in L$ стремится к нулю в бесконечности. Аналогичными свойствами обладает функция $F(M,T)$, $T \in L_\text{П}$.

Учитывая свойства потенциала двойного слоя [4] находим, что условие (2.6) выполняется; второе из условий (2.2) обращается в тождество, если $g_1 = g_2 = g$, и задача о дебитах скважин сводится к решению системы двух неоднородных интегральных уравнений типа Фредгольма II рода на границах сопряжения L и питания $L_\text{П}$ и m интегральных соотношений в точках $M_{C,i}$ контуров скважин (3.2).

Решение системы (3.2) позволяет определить функции $g(N)$, $f(T)$ и искомые дебиты скважин q_i, $i = 1,2,\ldots,m$. Но точное аналитическое решение этой системы затруднено в силу сингулярности ядра интегралов в выражениях, из-за сложной произвольной формы кусочно-гладких границ L и $L_\text{П}$, и нелинейного закона изменения проводимостей слоев грунта $P_\nu(M) = k_\nu P(M)$ в областях D_ν, k_ν ($\nu = 1,\ 2$).

$$
\begin{cases}
g(M) - 2\lambda \int\limits_{L} g(N)P(N)\dfrac{\partial F(M,N)}{\partial n_N} dl_N - \\
\qquad - 2\lambda \int\limits_{L_\Pi} f(T)P(T)\dfrac{\partial F(M,T)}{\partial n_T} dl_{\Pi,T} = 2\lambda\, \varphi_0(M),\ \ M \in L; \\
\dfrac{f(M)}{2} - \int\limits_{L} g(N)P(N)\dfrac{\partial F(M,N)}{\partial n_N} dl_N - \\
\qquad - \int\limits_{L_\Pi} f(T)P(T)\dfrac{\partial F(M,T)}{\partial n_T} dl_{\Pi,T} = \varphi_0(M) - \alpha(M),\ \ M \in L_\Pi, \\
\int\limits_{L} g(N)P(N)\dfrac{\partial F(M_{C,i},N)}{\partial n_N} dl_N + \int\limits_{L_\Pi} f(T)P(T)\dfrac{\partial F(M_{C,i},T)}{\partial n_T} dl_{\Pi,T} = \\
\qquad = C - \varphi_0(M_{C,i}),\ \ M_{C,i} \in L_{C,i},\ i=1,2,...m.
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

4. Численное решение системы интегральных уравнений и соотношений методом дискретных особенностей

Используя метод дискретных особенностей систему (3.2) решим численно. Для этого зададим кривые L и L_Π параметрически: $x_N = x(\tau_N),\ y_N = y(\tau_N)$; для точки $N(x_N, y_N) \in L$ и $x_T = x(t_T),\ y_T = y(t_T)$ для точки $T(x_T, y_T) \in L_\Pi$. Здесь τ и t — параметры длин дуг кривых L и L_Π соответственно. Гладкие границы L и L_Π разобьём по параметрам τ и t на n_1 и n_2 равных частей с шагами h_1 и h_2 соответственно. Точки разбиения контуров составят множества $E_1 = \{\tau_k,\ k = 1,2,\ldots,n_1\}$ и $E_2 = \{t_l,\ l = 1,2,\ldots n_2\}$. Вычислив интегралы в левых частях этих выражений методом прямоугольников, получим систему $n_1 + n_2 + m$ линейных неоднородных алгебраических уравнений вида:

$$
\begin{cases}
g_\gamma - 2\lambda \left(\sum\limits_{\substack{k=1 \\ \gamma \neq k}}^{n_1} g_k \Omega(\tau_\gamma, \tau_k) h_1 + \sum\limits_{l=1}^{n_2} f_l \Omega(\tau_\gamma, t_l) h_2 \right) = 2\lambda\, \varphi_0(\tau_\gamma),\ \gamma = 1,2,\ldots,n_1; \\
\dfrac{f_j}{2} - \left(\sum\limits_{k=1}^{n_1} g_k \Omega(t_j, \tau_k) h_1 + \sum\limits_{\substack{l=1 \\ j \neq l}}^{n_2} f_l \Omega(t_j, t_l) h_2 \right) = \varphi_0(t_j) - \alpha(t_j),\ \ j = 1,2,\ldots,n_2; \\
\sum\limits_{k=1}^{n_1} g_k \Omega(M_{C,i}, \tau_k) h_1 + \sum\limits_{l=1}^{n_2} f_i \Omega(M_{C,i}, t_l) h_2 = C - \varphi_0(M_{C,i}),\ i = 1,2,\ldots,m,
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

где $\Omega(\tau_k, M)h_1 = P(N_k)\partial F(N_k)/\partial n_{N_k}\, dl_{N_k}$.

Решая систему алгебраических уравнений (4.1), находим неизвестные g_k ($k = 1,2,...,n_1$), f_l ($l = 1,2,...,n_2$) и дебиты q_i, ($i = 1,2,...,m$). Решения получены для λ, не являющихся собственными значениями первого из интегральных уравнений (3.2), что определяется численным экспериментом.

Формула для вычисления скорости течения жидкости в каждой из областей D_ν, $\nu = 1,2$: $\vec{V}(M) = k_\nu \nabla \varphi_\nu(M) = \nabla_M\left(\varphi_0(M) + \varphi_\nu^*(M)\right)$ принимает вид:

$$\vec{V}(M) = V_x \cdot \vec{i} + V_y \vec{j}, \text{ где}$$

$$V_x(M) = \frac{\partial\, \varphi_0(M)}{\partial\, x_M} + \sum_{k=1}^{n_1} g_k \frac{\partial \Omega(M, \tau_k)}{\partial x_M} h_1 + \sum_{l=1}^{n_2} f_l \frac{\partial \Omega(M, t_l)}{\partial x_M} h_2;$$

$$V_y(M) = \frac{\partial\, \varphi_0(M)}{\partial\, y_M} + \sum_{k=1}^{n_1} g_k \frac{\partial \Omega(M, \tau_k)}{\partial y_M} h_1 + \sum_{l=1}^{n_2} f_l \frac{\partial \Omega(M, t_l)}{\partial y_M} h_2. \qquad (4.2)$$

Предлагаемая методика численного счета позволяет рассчитать характеристики течения и определить дебиты скважин для областей с кусочно-гладкими границами сопряжения и питания, что значительно расширяет класс решаемых задач.

5. Примеры решения задач о дебите скважин

Исследуем влияние на дебиты скважин формы контура питания для различных законов проводимости слоя.

Пусть граница сопряжения L представляет собой окружность радиуса a, в центре M_0 которой расположена одиночная скважина радиусом R_C. Контур питания L_Π моделируется: а) концентрической к L окружностью радиуса b; б) квадратом со стороной $2b$ и центром в точке M_0; в) прямой, удалённой от центра скважины на расстояние b. Проводимость слоя моделируется следующими законами проводимости:

I. *Степенной слой*. $P = y^s$, $s > 0$. Особенностью такого слоя является наличие сингулярной прямой Γ с уравнением $y = 0$, проводимость на которой обращается в ноль (1.3). Фундаментальным решением уравнения (1.1) является функция [5]:

$$F(M, N) = \frac{(y_M y_N)^{-\frac{s}{2}}}{2\pi} Q_{\frac{s}{2}-1}\left(1 + \frac{r_{NM}^2}{2 y_M y_N}\right), \qquad (5.1)$$

где $Q_{s/2-1}(M, N)$ – функция Лежандра второго рода, нулевого порядка, степени $s/2 - 1$, а невозмущённый квазипотенциал принимает вид: $\varphi_0(M) = q\, y_{M_C}^{-s} F(M, M_c)$. Здесь r_{MN} – расстояние между точками M и N.

Поле скоростей течения к скважине, рассчитанное по формуле (4.2) при прямолинейном контуре питания в степенном слое степени $s = 2$, при $a = 1$, $b = 2a$, $R_c = 10^{-4} a$, показано на рисунке 2.

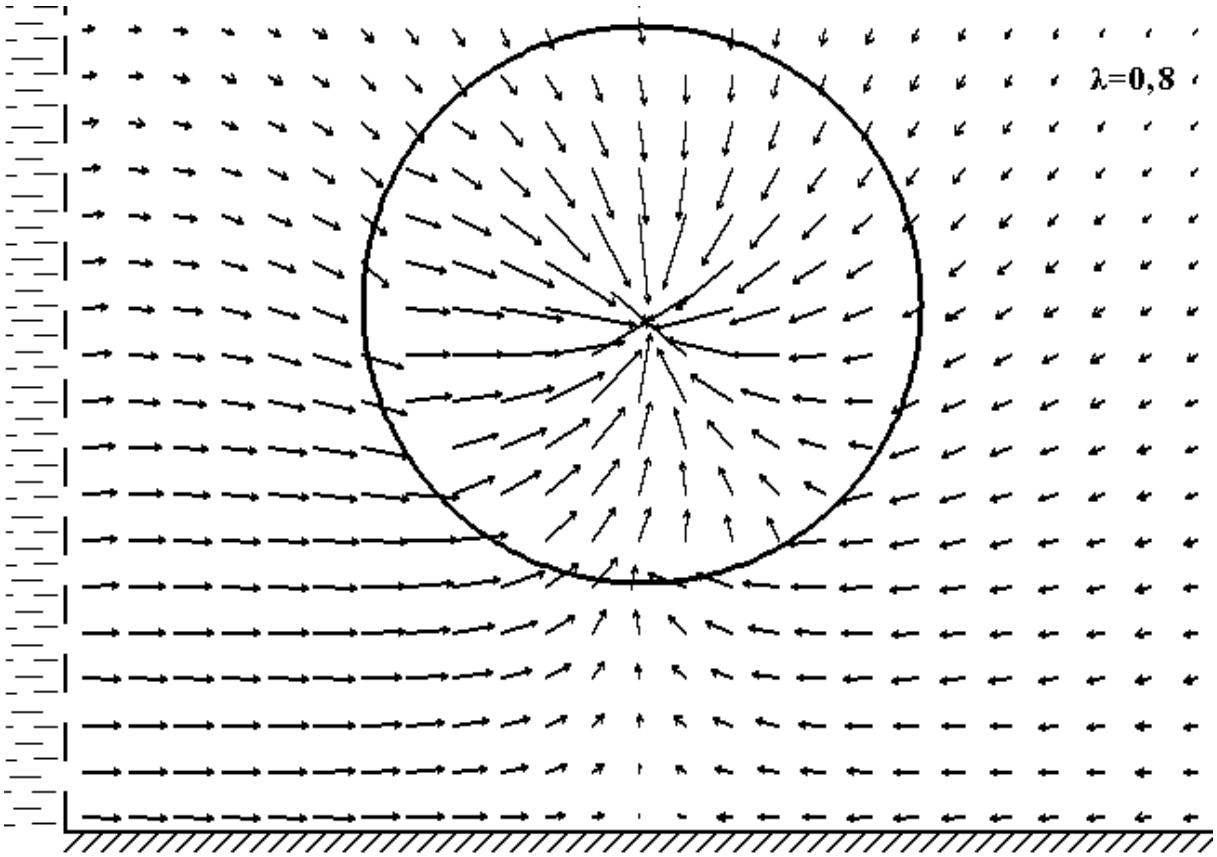


Рисунок 2. Поле скоростей течения жидкости к скважине, расположенной в степенном слое проводимости $P=y^2$ с круговой границей сопряжения L и прямолинейным контуром питания $L_п$, когда λ=0.8.

II. *Экспоненциальный слой*. $P = \exp(2\mu y)$, μ – константа ($\mu > 0$). В этом слое граница Γ находится в бесконечности. Согласно [6] имеем фундаментальное решение уравнения (1.1) в виде:

$$F(M,N) = \frac{\exp\left(-\mu\left(y_N + y_M\right)\right)}{2\pi} K_0\left(\mu r_{MN}\right), \qquad (5.2)$$

где $K_0\left(\mu r_{MN}\right)$ – функция Макдональда, а $\varphi_0(M) = q\ \exp(-2\mu y_{M_C}) F\left(M, M_C\right)$.

Относительное изменение дебита $\eta = 1 - q/q_0$ при различных параметрах λ для прямолинейного, круглого и квадратного контуров питания в степенном слое с показателем $s = 2$ и в экспоненциальном слое при $\mu = 0.1$ показано на рисунке 3. Здесь в качестве параметра q_0 выбирается дебит скважины в слое постоянной толщины с круглым контуром питания радиуса a.

Графики на рисунке 3 показывают, что дебиты скважин в слоях с различными законами проводимости $P = y^s$ и $P = \exp(2\mu y)$ при $s = 2$ и $\mu = 0.1$ для одних и тех же форм контуров питания мало отличаются друг от друга. В обоих случаях дебит растёт с увеличением параметра λ и достигает своего наибольшего значения q_0 при $\lambda = 1$. Видно, что дебит скважины в слое с прямолинейным контуром питания – наименьший, а – с круглым – наибольший. Кроме того, так как отличие дебитов для круглой и квадратной области питания,

характеризуемой параметром b, составляет не более 1%, то в расчетах можно заменять квадратную область питания круглой и наоборот.

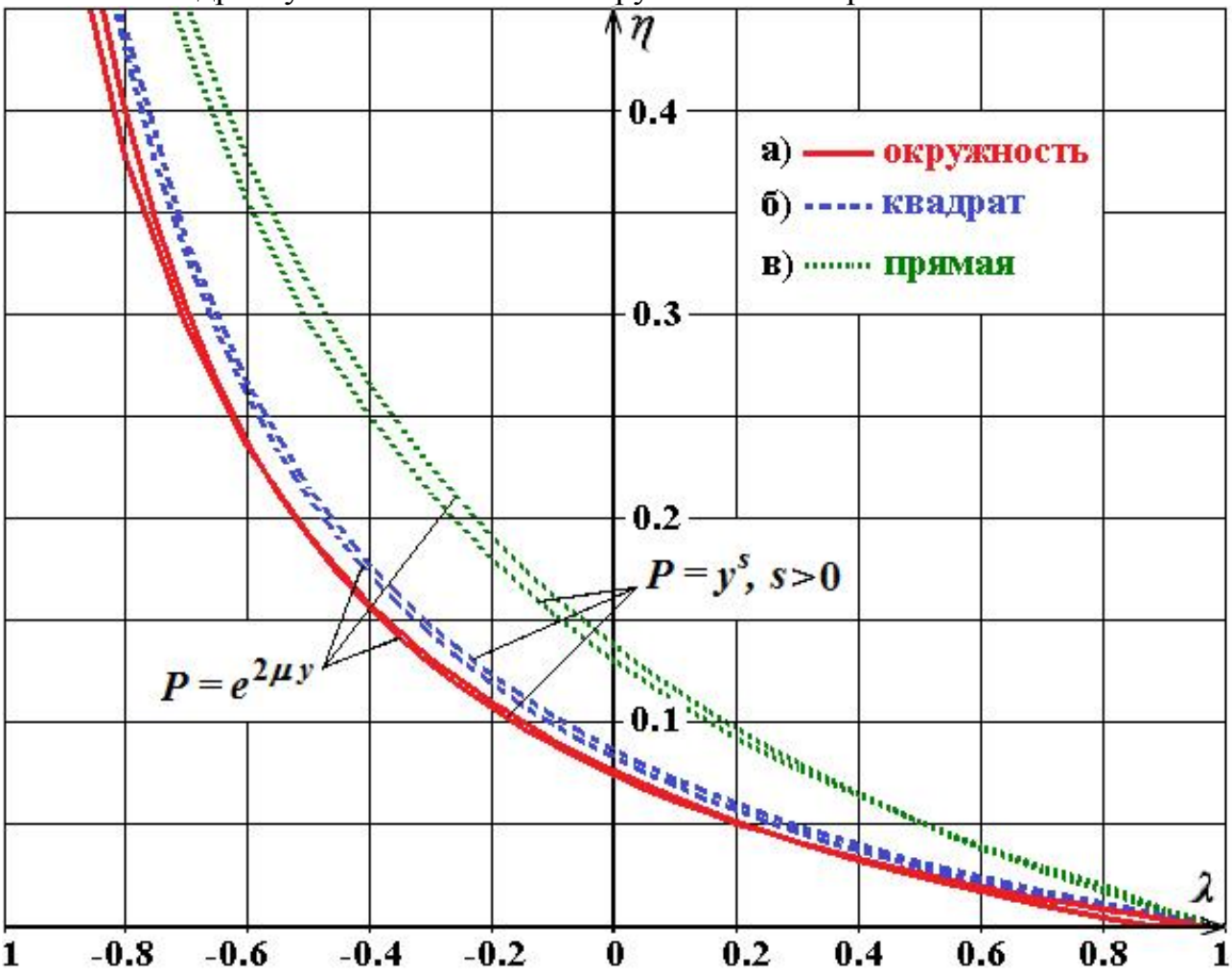


Рисунок 3. Графики зависимости относительного дебита одиночной скважины $\eta = 1 - q/q_0$ с круглой границей сопряжения L от величины скачка коэффициента проницаемости слоя λ с различными законами проводимости P и формами границы питания $L_{\text{П}}$.

6. Исследование интерференции скважин

Рассмотрим интерференцию скважин в слоях проводимости $P = y^2$ и $P = \text{sh}^2(\mu y)$. Пусть контуром питания $L_{\text{П}}$ является прямая $x = 0$, а контуром раздела сред различных проводимостей L — квадрат со стороной b и центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ (см. рисунок 4).

На сингулярной границе Γ: $y = 0$ проводимость слоёв обращается в ноль. Пусть вначале в точке M_0 расположена одиночная скважина с дебитом q_0^{λ}. Затем последовательно на прямой $x = x_0$, симметрично относительно точки M_0, на одинаковом расстоянии l_0 друг от друга, введём вторую, третью и четвёртую скважины. При этом получим дебиты системы двух, трёх и четырёх скважин: $\sum_{i=2}^{4} (q_i)^{\lambda}$. В таблицах 1, 2, 3 представлена зависимость суммарного дебита

$\eta_m = \sum_{i=2}^{m} (q_i)^{\lambda} \Big/ q_0^{\lambda}$ от числа скважин при различном значении параметра λ. При расчёте принято: $l_0 = 1$, $x_0 = 10l_0$, $y_0 = 10l_0$, $b = 8l_0$, $R_{ci} = 0.01l_0$, $C_i = 1$, $(i = 1, \ldots, 4)$, $n = 100$.

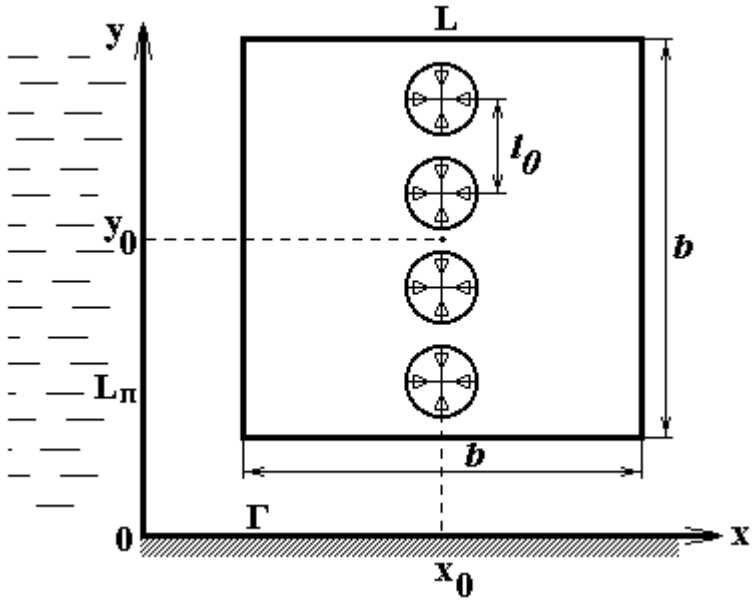


Рисунок 4. Взаимное расположение контуров скважин в неоднородном слое с прямолинейным контуром питания $L_п$ и квадратной границей сопряжения L.

Таблица 1 соответствует слою проводимости $P = y^2$. Как видно из таблицы, суммарный дебит η_m с ростом числа скважин будет увеличиваться, однако дебит системы m скважин не будет равен m–кратному дебиту одиночной скважины. В этом состоит явление интерференции скважин. Кроме того, с ростом числа скважин, вклад каждой последующей скважины в суммарный дебит системы $\eta_m - \eta_{m-1}$ будет уменьшаться.

Таблица 1. Дебиты нескольких скважин, работающих в слое с проводимостью $P=y^2$.

m	η_m				$\eta_m - \eta_{m-1}$			
	$\lambda = -0.5$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$	$\lambda = -0.5$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$
1	1	1	1	1				
2	1.34	1.46	1.54	1.61	0.34	0.46	0.54	0.61
3	1.55	1.79	1.97	2.13	0.21	0.33	0.43	0.52
4	1.69	2.07	2.35	2.63	0.15	0.28	0.38	0.50

Таблица 2. Дебиты нескольких скважин, работающих в слое с проводимостью $P=\mathrm{sh}^2(0.1y)$.

m	η_m				$\eta_m - \eta_{m-1}$			
	$\lambda = -0.5$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$	$\lambda = -0.5$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$
1	1	1	1	1				
2	1.39	1.50	1.56	1.61	0.39	0.50	0.56	0.61
3	1.64	1.87	2.02	2.13	0.25	0.37	0.45	0.52
4	1.81	2.18	2.43	2.64	0.17	0.31	0.41	0.51

Таблица 3. Дебиты нескольких скважин, работающих в слое с проводимостью $P=\mathrm{sh}^2(0.5y)$.

m	η_m				$\eta_m - \eta_{m-1}$			
	$\lambda = -0.5$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$	$\lambda = -0.5$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$
1	1	1	1	1				
2	1.655	1.664	1.669	1.673	0.655	0.664	0.669	0.673
3	2.181	2.208	2.223	2.237	0.526	0.544	0.554	0.564
4	2.622	2.682	2.717	2.747	0.441	0.474	0.494	0.51

Как видно из таблицы 1, с ростом параметра λ величины η_m и $\eta_m - \eta_{m-1}$ также будут расти и при $\lambda = 1$ (кривая L становится контуром питания) достигнут своего максимума при данном расположении скважин.

Таблицы 2 и 3 отображают зависимость $\eta_m(\lambda)$ для слоя проводимости $P = \mathrm{sh}^2(\mu y)$, при $\mu = 0.1$ (таблица 2) и при $\mu = 0.5$ (таблица 3). При $\mu \to 0$, проводимость слоя $P \to (\mu y)^2$, поэтому, числовые значения в таблицах 1 и 2 близки между собой.

С ростом параметра μ, величины η_m и $\eta_m - \eta_{m-1}$ будут возрастать (см. таблицу 3). Дебит системы m скважин будет стремиться к m–кратному дебиту одиночной скважины. Влияние параметра λ (контура L) на дебит скважин становится меньше.

Заключение

Задача о нахождении дебита нескольких скважин, работающих в неоднородных слоях грунта при наличии кусочно-гладких контуров питания, сопряжения проницаемостей и сингулярных границ (непротекания) сведена к системе интегральных уравнений и соотношений. Такая система решена численно методом дискретных особенностей. Найденные при этом значения дебитов скважин, а также плотности распределения потенциалов двойного слоя по границам сопряжения и питания позволяют рассчитать скорость течения в каждой точке исследуемых областей (за исключением границ). Исследовано влияние на дебиты скважин взаимное расположение контуров скважин в области фильтрации, закон проводимости слоя, величина скачка проницаемости слоя на границе сопряжения.

Предложенная методика решения позволяет исследовать фильтрацию к произвольному количеству скважин, найти их дебиты, изучить интерференцию скважин при многообразии форм границ сопряжения и питания для различных законов изменения проводимостей слоёв, если для них известны фундаментальные решения основных уравнений.

Список источников

1. Радыгин, В.М., Голубева, О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. - М.: Высшая школа. 1983. - 160 с.

2. Пивень, В.Ф., Аксюхин, А.А., Квасов, А.А., Фролов, М.А. Математическое моделирование граничных задач сопряжения двумерных течений в неоднородных слоях // Труды конф. «Математическое моделирование систем. Методы, приложения и средства». Воронеж. 1998. С. 131-136.

3. Пивень, В.Ф. Интегральное уравнение граничной задачи сопряжения фильтрационных течений в неоднородной среде // Труды IX межд. симпозиума «МДОЗМФ-2000». Орёл. Орловский госуниверситет. 2000. С. 343-348.

4. Лифанов, И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн / И. К. Лифанов. – Москва: ТОО «Янус», 1995. – 519 с.: ил.; 21 см.; ISBN 5-88929-003-7.

5. Аксюхин, А.А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта. Канд. дисс. Орёл. Орловский госуниверситет. 2000 г., 153 с.

6. Фролов М.А. Нахождение дебита скважины в кусочно-неоднородном слое с экспоненциальным законом изменения его толщины // Вестник науки. Сборник трудов ученых Орловской обл. в 5 томах. Т. 1. Орёл. ОрёлГТУ. 1999. С. 306-312.

References

1. Radygin V.M., Golubeva O.V. Application of functions of a complex variable in problems of physics and technology. Moscow: Higher school. 1983. – 160 p. (In Russ.).

2. Piven V.F., Aksyukhin A.A., Kvasov A.A., Frolov M.A. Mathematical modeling of boundary value problems of conjugation of two-dimensional flows in inhomogeneous layers // Proceedings of the Conf. “Mathematical modeling of systems. Methods, applications and tools”. Voronezh. 1998. pp. 131-136. (In Russ.).

3. Piven V.F. Integral equation of the boundary problem of conjugation of filtration flows in an inhomogeneous medium // Proceedings of the IX International. Symposium “MDOSMF-2000”. Orel: Orel State University. 2000. pp. 343-348. (In Russ.).

4. Lifanov I. K. Method of singular integral equations and numerical experiment in mathematical physics, aerodynamics, theory of elasticity and wave diffraction. Moscow: Janus LLP, 1995. – 519 p. ISBN 5-88929-003-7. (In Russ.).

5. Aksyukhin A.A. Mathematical modeling of boundary problems of filtration to a well in heterogeneous soil layers. PhD thesis. Orel: Orel State University. 2000. - 153 p. (In Russ.).

6. Frolov M.A. Finding the well flow rate in a piecewise inhomogeneous layer with an exponential law of change in its thickness // Bulletin of Science. Collection of works of scientists of the Orel region. In 5 volumes. Vol. 1. Orel: Orel State Technical University. 1999. pp. 306-312. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 243-252.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 243-252.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 533.72;532.5;533.7; 536.2

К ВОПРОСУ О ТЕРМОФОРЕЗЕ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ В ВЯЗКОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ БИНАРНОЙ ГАЗОВОЙ СРЕДЕ

***Николай Владимирович Малай*[1]✉, *Павел Витальевич Сохань*[2], *Юлия Ивановна Шостак*[3]**
[1,2,3]Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия
[1]malay@bsu.edu.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-3400-5371
[2]sokhanp95@gmail.com, [3]juliashostak@mail.ru

Аннотация. *В квазистационарном приближении Стокса и при малых Пекле (тепловом и диффузионном) проведено исследование явления термофореза крупной испаряющейся капли сферической формы в вязкой неизотермической бинарной газовой среде при произвольных относительных перепадах температуры в ее окрестности. Бинарная газовая среда описывается двумя относительными компонентами. Первый компонент по своему физико-химическому составу совпадает с веществом жидкой капли. Граничная поверхность для него непрерывна. Второй компонент считается основным (несущим), и граничная поверхность для него непроницаема. Испарение капли протекает в диффузионном режиме, т.е. когда основное влияние на процесс тепло- и массопереноса в окрестности капли определяется молекулярной диффузией. Молекулы конденсированной фазы испаряются или конденсируются при числах Маха, много меньших единицы. При описании свойств газообразной среды учитывался степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, диффузии и теплопроводности) и плотности от температуры. Проведенные численные оценки показали нелинейный характер зависимости термофоретической силы и скорости от средней температуры поверхности капли.*

Ключевые слова: *термофорез крупной нагретой испаряющейся капли, движение капли в поле градиента температуры.*

© Малай Н.В., Сохань П.В., Шостак Ю.И., 2023

Conference paper

ON THE ISSUE OF THERMOPHORESIS OF AN EVAPORATING DROPLET IN A VISCOUS NON-ISOTHERMAL BINARY GAS MEDIUM

***Nikolay V. Malai*[1]✉*, Pavel V. Sohan*[2]*, Yulia I. Shostak*[3]**
[1,2,3]*Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia*
[1]*malay@bsu.edu.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0003-3400-5371*
[2]*sokhanp95@gmail.com,* [3]*juliashostak@mail.ru*

Abstract. *In the quasi-stationary Stokes approximation and at low heat (thermal and diffusion), the phenomenon of thermophoresis of a large evaporating spherical droplet in a viscous non-isothermal binary gas medium with arbitrary relative temperature differences in its vicinity was studied. A binary gas medium is described by two relative components. The first component in its physic-chemical composition coincides with the substance of a liquid drop. The boundary surface for it is continuous. The second component is considered the main (carrier), and the boundary surface is impervious to it. Evaporation of the droplet proceeds in the diffusion mode, i.e. when the main influence on the process of heat and mass transfer in the vicinity of the droplet is determined by molecular diffusion. The condensed phase molecules evaporate or condense at Mach numbers much smaller than one. When describing the properties of a gaseous medium, a power-law type of dependence of the coefficients of molecular transport (viscosity, diffusion and thermal conductivity) and density on temperature was taken into account. Numerical estimates have shown the nonlinear nature of the dependence of the thermophoretic force and velocity on the average temperature of the droplet surface.*

Keywords: *thermophoresis of a large heated evaporating drop, the movement of a drop in the field of a temperature gradient.*

Введение. Движение взвешенных частиц в газообразной среде, обусловленное наличием в среде градиента температуры, называется термофорезом [1]. Термофоретическая сила перемещает частицы из области с более высокой в области с более низкой температурой.

Интерес к исследованию явления термофореза обусловлен тем, что частицы, участвующие в этом явлении, могут обладать произвольной формой поверхности (сферической, цилиндрической, сфероидальной и т.д.); быть твердыми и жидкими; на их поверхности может иметь место фазовый переход; быть неоднородными по составу; обладать анизотропией теплофизических свойств и т.д. Отсюда вытекает и широкий спектр применения этого явления в промышленности, медицине, сельском хозяйстве и т.п.

Термофорез оказывает значительное влияние на процесс осаждения частиц в каналах тепло- и массообменниках; может быть использован при проведении тонкой очистки небольших объемов газов; отборе аэрозольных проб; нанесения заданной толщины специальных покрытий; при

проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение аэрозольных частиц и регулировать это движение и т.д. Поэтому интерес к исследованию этого явления не ослабевает, а только растет.

Постановка задачи. Рассматривается крупная испаряющейся капля сферической формы радиусом R с плотностью ρ_i, теплопроводностью λ_i, вязкостью μ_i, взвешенную в вязкой неизотермической бинарной газовой смеси с плотностью ρ_e, теплопроводностью λ_e, коэффициентом взаимной диффузии D_{12}, вязкостью μ_e и внутри которой действуют тепловые источники плотностью q_i. Наличие тепловых источников приводит к тому, что средняя температура поверхности испаряющейся капли может существенно отличаться от температуры газообразной среды вдали от нее. Нагрев поверхности капли оказывает влияние на теплофизические характеристики окружающего газа и в итоге на распределение полей скорости, давления, температуры в ее окрестности. Поэтому представляет интерес исследовать явление термофореза не только при малых, но и при произвольных перепадах температуры в окрестности частицы. В основном в опубликованных до настоящего времени работах рассматривался термофорез летучей капли при малых относительных перепадах температуры, например, [2,3]. С помощью внешних источников в газе поддерживается постоянный малый градиент температуры ∇T, что приводит к возникновению термофоретической силы. Когда эта сила уравновешивается силой вязкого сопротивления среды, капля начинает двигаться равномерно со скоростью, которую называют термофоретической скоростью.

При описании свойств газовой смеси, учитывается степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса от температуры [4,5]: $\mu_e(t_e) = \mu_\infty t_e^\beta$, $\lambda_e(t_e) = \lambda_\infty t_e^\alpha$, $D_{12}(t_e) = D_\infty t_e^{1+\omega}$, $\lambda_i(t_i) = \lambda_{i0} t_i^\gamma$, $\rho_e = \rho_\infty / t_e$, $t_e = T_e / T_\infty$, $t_i = T_i / T_\infty$, где $\mu_\infty = \mu_e(T_\infty)$, $\rho_\infty = \rho_e(T_\infty)$, $\lambda_\infty = \lambda_e(T_\infty)$, $D_\infty = D_{12}(T_\infty)$, $\lambda_{i0} = \lambda_i(T_\infty)$, $0.5 \le \alpha, \beta, \omega \le 1$, $-1 \le \gamma \le +1$. Индексы “e” и “i” здесь и далее относятся к бинарной газовой смеси и частице соответственно; индексом “S” обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы и индексом “∞” – физические величины, характеризующие газовую среду вдали от капли.

Термофорез будем описывать в сферической системе координат (r, θ, φ), связанной с центром масс испаряющейся капли. Ось Oz направим в направлении вектора ∇T. Таким образом, наша задача сводится к анализу обтекания испаряющейся капли бесконечным плоскопараллельным потоком газа, скорость которого $\boldsymbol{U}_\infty$ подлежит определению ($\boldsymbol{U}_\infty \,||\, Oz$).

Распределения скоростей, давлений, относительных концентраций и температур обладают аксиальной симметрией относительно оси Oz. При указанном выборе начала системы координат каплю можно считать неподвижной, а внешнюю среду (газ) – движущейся в сторону

противоположную направлению фактического ее движения со скоростью $\boldsymbol{U_{th}} = -\boldsymbol{U}_\infty$ ($\boldsymbol{U_{th}}$ – скорость термофореза).

Система гидродинамических уравнений (линеаризованная по скорости система уравнений Навье-Стокса, уравнения теплопроводности и диффузии) имеет вид (1) [6]

$$\frac{\partial}{\partial x_k} P_e = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu_e\left[\frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^{(e)}}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_k^j \frac{\partial U_n^{(e)}}{\partial x_n}\right]\right\},\ \mathrm{div}\,(\rho_e \boldsymbol{U_e}) = 0,$$

$$\mu_i \Delta \boldsymbol{U_i} = \nabla P_i,\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{U_i} = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}(\lambda_e \nabla T_e) = 0,\quad \mathrm{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i,\ \mathrm{div}\left(\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e} D_{12} \nabla C_1\right) = 0,$$

и решалась в сферической системе координат методом, разработанный в работах [7,8]. Здесь введены следующие обозначения: $C_1 = n_1 / n_e$, $C_2 = n_2 / n_e$, $n_e = n_1 + n_2$ – полное количество молекул в единице объема смеси, $\rho_1 = n_1 m_1$, $\rho_2 = n_2 m_2$, $\rho_e = \rho_1 + \rho_2$, m_1, n_1 и m_2, n_2 масса и численная концентрация молекул первого и второго компонентов смеси. Первая компонента удовлетворяет условию $C_1 << C_2$. Это неравенство означает, что испарение капли протекает в диффузионном режиме, т.е. основное влияние на процесс тепло- и массопереноса в окрестности капли оказывает молекулярная диффузия.

Система уравнений (1) решалась с краевыми условиями (2) – (9):

$$n_2 U_r^{(e)} + D_{12}\frac{n_e^2 m_1}{\rho_e R}\frac{\partial C_1}{\partial y} = 0,\quad n_1 U_r^{(e)} - D_{12}\frac{n_e^2 m_2}{\rho_e R}\frac{\partial C_1}{\partial y} = n_{1i} U_r^{(i)}, \tag{2}$$

$$U_\theta^{(e)} - U_\theta^{(i)} = K_{TS}^{(o)}\frac{\nu_e}{R T_e}\frac{\partial T_e}{\partial \theta} + K_{DS}^{(o)}\frac{D_{12}}{R}\frac{\partial C_1}{\partial \theta}, \tag{3}$$

$$-\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} = L\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e} D_{12}\frac{\partial C_1}{\partial y} - \sigma_0 \sigma_1 R(T_i^4 - T_\infty^4), \tag{4}$$

$$T_e = T_i,\quad C_1 = C_{1S}^{(H)}(T_{iS}) + C_{1S}^{*}(T_{iS})\delta T, \tag{5}$$

$$\mu_e\left(\frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(e)}}{y}\right) + \frac{\partial \sigma}{\partial T_i}\frac{\partial T_i}{\partial \theta} = \mu_i\left(\frac{\partial U_\theta^{(i)}}{\partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial U_r^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(i)}}{y}\right), \tag{6}$$

$$U_r^{(e)} = U_\infty \cos\theta,\quad U_\theta^{(e)} = -U_\infty \sin\theta,\quad P_e = P_\infty, \tag{7}$$

$$T_e = T_\infty + |\nabla T| R\, y \cos\theta,\ C_1 = C_{1\infty}, \tag{8}$$

$$T_i \neq \infty,\ P_i \neq \infty,\ |\boldsymbol{U_i}| \neq \infty. \tag{9}$$

Здесь x_k – декартовые координаты, U_k – компоненты массовой скорости в сферической системе координат $(k = r, \theta)$, $y = r / R$, $C_{1S}^{(H)}(T_{iS}) = n_{1S}^{(H)} / n_e$, $n_{1S}^{(H)}$ – насыщенная концентрация молекул первого (испытывающего фазовый переход) компонента бинарной смеси, зависящая от средней температуры поверхности капли T_{iS}, $K_{TS}^{(0)}$, $K_{DS}^{(0)}$ – коэффициенты теплового и диффузионного скольжений, которые определяются из решения в слое Кнудсена уравнения

Больцмана. При коэффициентах аккомодации по энергии и тангенциального импульса равных единицы $K_{TS}^{(0)}=1.161$, $K_{DS}^{(0)}=0.3$ [9], $\sigma-$ коэффициент поверхностного натяжения, σ_0-постоянная Стефана-Больцмана, σ_1- интегральная степень черноты частицы, $C_{1S}^{*}=\dfrac{1}{n_e}\dfrac{\partial n_{1S}^{(H)}}{\partial T_i}$производная от насыщенной концентрации насыщенных паров капли, взятая при средней температуре поверхности капли, δT_i находится из граничных условий на поверхности капли; L$-$удельная теплота фазового перехода, $U_\infty-$ величина скорости набегающего потока ($U_\infty=|\boldsymbol{U}_\infty|$), $n_{1i}-$ число молекул в единице объема капли.

На поверхности капли ($y=1$) выполняются следующие краевые условия: непроницаемость поверхности для второго и непрерывность радиального потока для первого компонентов бинарной газовой смеси (2); разность касательных составляющих скоростей внутренней и внешней сред, равная сумме тепловой и диффузионной скоростей скольжений учтено в (3); в (4) учтено непрерывность радиальных потоков тепла с учетом тепла, идущего на фазовый переход вещества капли в первый компонент бинарной газовой смеси и излучение; равенство температур и зависимость насыщенной концентрации от температуры при фазовом переходе учтены в (5) и непрерывность касательных составляющих тензора вязких напряжений с учетом зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры учтено в (6). На большом расстоянии от испаряющейся капли (при $y\to\infty$) справедливы граничные условия (7)–(8) и конечность физических величин (при $y\to 0$), характеризующих каплю учтено в (9).

Капля считается крупной [2,3], сохраняет сферическую форму (поверхностное натяжение стремится сохранить сферическую форму и противодействует сдвиговым напряжениям, стремящимся деформировать ее) и свободной конвекцией пренебрегаем (число Грасгофа мало). Задача решается гидродинамическим методом, т.е. решаются уравнения гидродинамики с соответствующими граничными условиями.

Термофоретическая сила и скорость. Анализ полученных результатов

На основе проведенного исследования получены формулы для термофоретической силы и скорости (10), (11):

$$\boldsymbol{F_{th}}=-6\pi R\mu_\infty f_{th}|\nabla T|\,\boldsymbol{n}_z\,. \tag{10}$$

$$f_{th}=4\frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}}\frac{G_1(1)}{t_{eS}^{\alpha}\delta T_\infty\left(N_1(1)+N_4(1)\dfrac{\mu_{eS}}{3\mu_{iS}}\right)}\left\{K_{TS}^{(0)}\frac{\nu_{eS}}{t_{eS}}+K_{DS}^{(0)}D_{12}^{(S)}C_{1S}^{*}T_\infty+\frac{R}{3\mu_{iS}}\frac{\partial\sigma}{\partial t_i}-\right.$$

$$\left.-\frac{D_{12}^{(S)}n_\infty^2}{n_{2\infty}}\left[C_{1S}^{*}T_\infty\frac{\Phi_1'(1)}{\Phi_1(1)}\left(\frac{1}{n_{1i}t_{eS}}-a_1\right)-\frac{1+\alpha-\omega}{1+\alpha}M_0\ell^{(S)}t_{eS}^{1+\alpha-\omega}\left(\frac{\omega}{n_{1i}t_{eS}}-(1+\omega)a_1\right)\right]\right.$$

$$N_3(1)=G_3(1)G_1^{''}(1)-G_1(1)G_3^{''}(1)+\left(2+\frac{\ell^{(S)}}{1+\alpha}\right)\left(G_3(1)G_1^{'}(1)-G_1(1)G_3^{'}(1)\right),\ \nu_{eS}=\nu_e(T_{iS}),$$

$$N_4(1)=G_2(1)G_1^{''}(1)-G_1(1)G_2^{''}(1)+\left(2+\frac{\ell^{(S)}}{1+\alpha}\right)\left(G_2(1)G_1^{'}(1)-G_1(1)G_2^{'}(1)\right),$$

$$f_\mu=\frac{2}{3}\frac{N_2(1)+N_3(1)\dfrac{\mu_{eS}}{3\mu_{iS}}}{N_1(1)+N_4(1)\dfrac{\mu_{eS}}{3\mu_{iS}}},\quad N_1(1)=G_1(1)G_2^{'}(1)-G_2(1)G_1^{'}(1),\ \mu_{eS}=\mu_e(T_{iS}),$$

$$\delta=a_0+2\frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}}-L\frac{n_\infty^2 m_1 m_2}{\rho_\infty T_\infty \lambda_{iS} t_{eS}}D_{12}^{(S)}\left(C_{1S}^{*}T_\infty\frac{\Phi_1^{'}(1)}{\Phi_1(1)}-\omega\frac{1+\alpha-\omega}{1+\alpha}\ell^{(S)}M_0 t_{eS}^{\alpha-\omega}\right),$$

$$N_2(1)=G_1(1)G_3^{'}(1)-G_3(1)G_1^{'}(1)\ ,\ \ a_0=1+4\sigma_0\sigma_1\frac{RT_\infty^3 t_{iS}^3}{\lambda_{iS}},\ \mu_{iS}=\mu_i(T_{iS}),$$

$$a_1=\frac{m_1 G_4(1)}{\rho_\infty G_1(1)}\left(1-\frac{\mu_{eS}}{3\mu_{iS}}\frac{G_4^{'}(1)+G_1(1)-G_4(1)}{G_4(1)}\right),\qquad \boldsymbol{n_z}-$$ единичный вектор в направлении оси Oz. Здесь через $G_1(1)$, $G_2(1)$ и т.д. обозначены значения соответствующих функций, взятые при $y=1$, а через $G_1^{'}$, $G_1^{''}$ и т.д. первые и вторые производные от соответствующих функций и явный их вид приведен в работах [7,8].

Приравнивая полную силу к нулю (капля движется прямолинейно и равномерно: силы вязкого сопротивления среды уравновешивается термофоретической силой), получаем выражение для термофоретической скорости крупной испаряющейся капли сферической формы

$$\boldsymbol{U_{th}}=-\frac{f_{th}}{f_\mu}|\nabla T|\,\boldsymbol{n_z}. \tag{11}$$

Среднее значение температуры поверхности капли T_{iS} определяется из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} t_{iS}=t_{eS},\ \ \Gamma_0=t_{eS}^{1+\alpha}-1,\ M_0=\dfrac{C_{1S}^{(H)}-C_{1\infty}}{t_{eS}^{(1+\alpha-\omega)}-1}, \\ \dfrac{\ell^{(S)}}{1+\alpha}t_{eS}=\dfrac{R^2}{3\lambda_{eS}T_\infty}J_0-L\dfrac{n_\infty^2 m_1 m_2 D_{12}^{(S)}}{\rho_\infty T_\infty \lambda_{eS}}\dfrac{1+\alpha-\omega}{1+\alpha}M_0\ell^{(S)}t_{eS}^{\alpha-\omega}-\sigma_0\sigma_1\dfrac{RT_\infty^3}{\lambda_{eS}}\left(t_{eS}^4-1\right) \end{cases}.$$

Здесь $T_{iS}=T_\infty t_{iS}$, $T_{eS}=T_\infty t_{eS}$, $t_{iS}=t_{i0}(y=1)$, $\lambda_{eS}=\lambda_\infty t_{eS}^{\alpha}$, $\lambda_{iS}=\lambda_{i0}t_{iS}^{\gamma}$, $n_\infty=n_e(T_\infty)$,

$D_{12}^{(S)}=D_\infty t_{eS}^{1+\omega}$, $t_{iS}=\left(B_0+H_0\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}$, $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$, $H_0=\dfrac{(1+\gamma)R^{2\cdot}}{3\lambda_{i0}T_\infty}J_0$, $J_0=\dfrac{1}{V}\int\limits_V q_i dV$,

$\ell^{(S)}=\dfrac{t_{eS}^{1+\alpha}-1}{t_{eS}^{1+\alpha}}$ и интегрирование ведется по всему объему испаряющейся капли.

Полученные формулы (10) – (11) для силы и скорости термофореза можно использовать и при малых относительных перепадах температуры. В этом случае средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей газообразной среды вдали от нее ($\Gamma_0 \to 0$) имеем: $G_1 = 1, G_1^{'} = -3, G_1^{''} = 12,\ G_2 = 1,\ G_2^{'} = -1,\ G_2^{''} = 2,\ G_3 = 1,\ G_3^{'} = 0,$ $G_3^{''} = 0,\ N_1 = 2,\ N_2 = 3,\ N_3 = 6,\ N_4 = 6,\ G_4 = -1/2,\ G_4^{'} = 3/2,\ \Phi_1 = -1,\ \Phi_1^{'} = -2$. Формулы (10) – (11) переходят в соответствующие выражения при малых относительных перепадах температуры [2].

Для иллюстрации влияния нагрева поверхности испаряющейся капли на силу термофореза в качестве примера на Рис. 1. приведены графики зависимости функций $f_{th}^{*} = f_{th} / f_{th}\big|_{T_{iS}=800K}$, $f_{thm}^{*} = f_{thm} / f_{thm}\big|_{T_{iS}=800K}$ от средней температуры поверхности частицы T_{iS} ($800K \le T_{iS} \le 1300K$) крупной капли лития радиусом $R = 30 \cdot 10^{-6}$ м, взвешенной в воздухе ($T_\infty = 288K$, $P_\infty = 10^5\ Па$, $C_{1\infty} = 0.01$, $\alpha = 0.765,\ \beta = 0.693,\ \omega = 0.652$). Функция f_{thm}^{*} оценивалась по формулам при малых относительных перепадах температуры, но коэффициенты молекулярного переноса брались при средней температуре поверхности капли [2]. Это сделано для того, чтобы понять, можно ли использовать формулы при малых относительных перепадах температуры при описании термофореза или нет в случае, когда имеем дело с неизотермической газообразной средой. Из графиков видно, что формулы для силы и скорости термофореза, полученные при малых относительных перепадах температуры дают существенную погрешность в случае неизотермической газообразной среды. Численные значения коэффициентов взяты из [4,5,10].

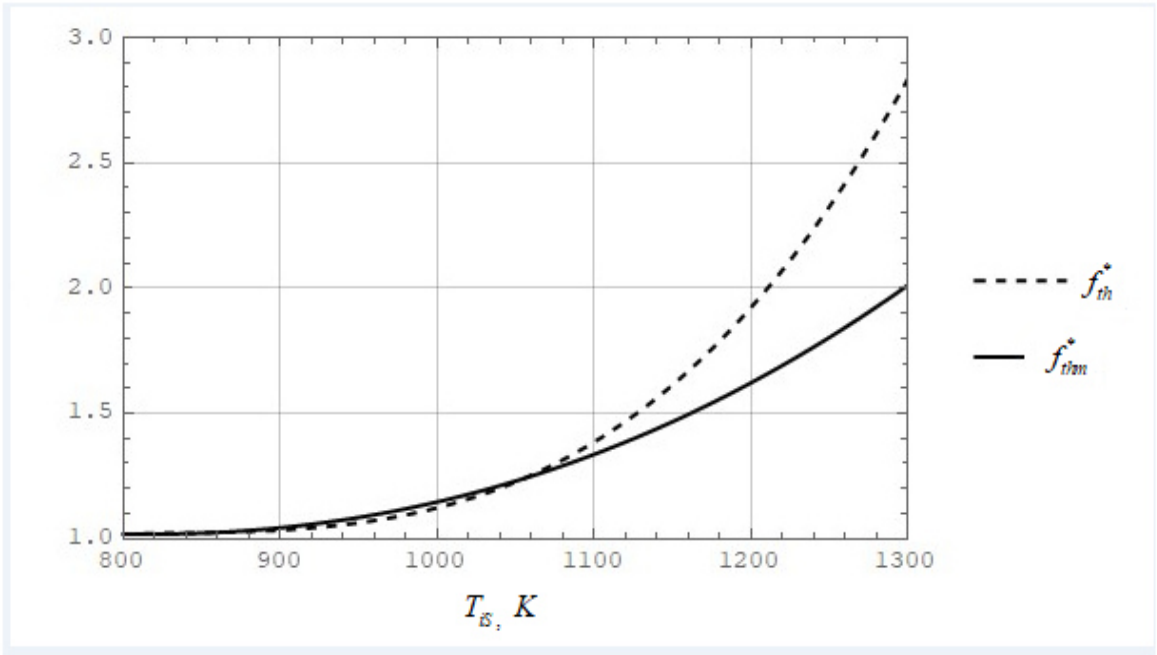


Рис. 1. Графики зависимости функций f_{th}^{*} и f_{thm}^{*} от средней температуры поверхности частицы T_{iS}.

Входящий в силу и скорость термофореза коэффициент f_{th} состоит из суммы четырех слагаемых: первое слагаемое, которое пропорциональное коэффициенту теплового скольжения $K_{TS}^{(0)}$ и, за счет которого испаряющаяся капля стремиться двигаться в сторону падения температуры во внешней среде, т.е. из области с более высокой температурой в область с более низкой температурой; четвертое слагаемое (описывающего реактивную часть импульса, действующего на каплю) связано с фазовым переходом и циркуляции вещества внутри капли (внутренние течение). Они входят в коэффициент f_{th} с разными знаками. Капля может двигаться как в сторону роста, так и в сторону падения температур; третье слагаемое обусловлено переменным межфазовым поверхностным натяжением на поверхности капли. В силу того, что для большинства жидкостей поверхностное натяжение уменьшается с ростом температуры $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t_i} < 0\right)$, третье слагаемое дает вклад в силу и скорость, направленный в сторону роста температуры во внешней к капле среде; за счет второго слагаемого (диффузионного скольжения, которое пропорционально коэффициенту $K_{DS}^{(0)}$) капля может двигаться как в сторону роста, так и в сторону падения температуры, в зависимости от масс компонентов бинарной газовой смеси. Если масса молекул компонента внешней смеси, испытывающей фазовый переход на поверхности капли $m_1 < m_2$, то $K_{DS}^{(0)} > 0$. В противном случае $K_{DS}^{(0)} < 0$. Рассмотренные выше качественно слагаемые показывают, что сила и скорость термофореза может меняться не только по величине, но и по направлению, в зависимости от конкретных значений физических величин. Кроме того, в выражение для коэффициента f_{th} входят функции G_1, G_2, G_3, Φ_1 и их первые производные, которые зависят как от средней температуры поверхности капли, так и от показателей $\alpha, \beta, \omega, \gamma$. Как показали конкретные численные оценки, они также влияют на величину силы и скорости термофореза. В полученных выше формулах можно непосредственно учесть и исследовать влияние интенсивности испарения капли на силу и скорость термофореза (а не через реактивную часть импульса) для этого в краевых условиях (5) и (7) необходимо заменить члены $n_{1i}U_r^{(i)}$ и $L\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e} D_{12}\frac{\partial C_1}{\partial y}$ на выражения $n_e \alpha_0 \nu \left(C_{1S}^{(e)}(T_i) - C_1\right)$, $-Lm_1\alpha_0\nu n_e\left(C_{1S}^{(e)}(T_i) - C_1\right)$, соответственно. Здесь $\alpha_0 -$ коэффициент испарения, $\nu -$ одна четвертая средней арифметической скорости теплового движения газовых молекул первого компонента, $C_{1S}^{(e)}(T_i) -$ насыщенная концентрация паров летучего вещества у поверхности капли.

Заключение

В статье получены формулы для силы и скорости термофореза, позволяющие описать движение крупных испаряющихся капель с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса

(вязкости, теплопроводности, диффузии) и плотности газообразной от температуры при произвольных относительных перепадах температуры и носят наиболее общий характер. Численные оценки показали нелинейный характер зависимости силы и скорости термофореза от средней температуры поверхности частицы.

Список источников

1. Epstein P.S. Zur theorie des radiometers //Z. Phys. 1929. Bd. 54. No. 7/8. S. 537-539.
2. Яламов Ю.И., Гайдуков М.Н., Щукин Е.Р. Теория термо-и диффузиофореза умеренно крупных и крупных летучих аэрозольных частиц //ИФЖ. 1975. № 2. С. 505-507.
3. Галоян В.С., Яламов Ю.И. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.
4. Бретшнайдер Ст. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета М.: Химия, 1966. 535 с.
5. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука. 1972. 720 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Т. VI. М.: Физматлит, 2003.736 с.
7. Малай Н.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде // ПМТФ. 2008. № 1. С. 74 – 80.
8. Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р. Термофоретическое движение нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы //ПМТФ. 2016. Т. 57. № 2(336). С. 164-171.
9. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц // ЖТФ. 1982. Т. 52. № 11. С. 2253-2261.
10. Смитлз К. Дж. Металлы. Справочник. М.: Металлургия, 1980. 446 с.

References

1. Epstein P.S. Zur theorie des radiometers //Z. Phys. 1929. Bd. 54. No. 7/8. 537-539 p.
2. Yalamov Yu.I., Gaidukov M.N., Shchukin E.R. Theory of thermo- and diffusiophoresis of moderately large and large volatile aerosol particles // Engineering and Physics Journal. 1975. No. 2. p. 505-507. (In Russ.).
3. Galoyan V.S., Yalamov Yu.I. Dynamics of droplets in inhomogeneous viscous media. Yerevan: Luys, 1985. 208 p.
4. Bretschneider St. Properties of gases and liquids. Engineering methods of calculation M.: Chemistry, 1966. 535 p.
5. Vargaftik N.B. Handbook of thermophysical properties of gases and liquids. M.: Nauka. 1972. 720 p.

6. Landau.L.D., Lifshits E.M. Hydrodynamics. Vol. VI. M.: Fizmatlit, 2003.736 p.

7. Malai N.V., Shchukin E.R., Stukalov A.A., Ryazanov K.S. Gravitational motion of a uniformly heated solid particle in a gaseous medium // PMTF. 2008. No. 1. pp. 74 – 80. (In Russ.).

8. Malai N.V., Limanskaya A.V., Shchukin E.R. Thermophoretic motion of heated large aerosol particles of spherical shape //PMTF. 2016. Vol. 57. No. 2(336). pp. 164-171. (In Russ.).

9. Poddoskin A.B., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. Theory of thermophoresis of moderately large aerosol particles // Journal of Technical Physics. 1982. Vol. 52. No. 11. pp. 2253-2261. (In Russ.).

10. Smithles K. J. Metals. Reference book. M.: Metallurgy, 1980. 446 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 253-259.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 253-259.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 537.534

ЭВОЛЮЦИЯ ПОЛЯРНЫХ УГЛОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РАСПЫЛЕННЫХ АТОМОВ ДЛЯ СЛУЧАЯ (001) NI

Артем Игоревич Мусин[1]✉***, Владимир Николаевич Самойлов***[2]
[1]*Московский государственный технологический университет "СТАНКИН", Москва, Россия*
[1]*Государственный университет просвещения, Мытищи, Россия*
[2]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[1]*ai.musin@physics.msu.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3167-9023*
[2]*samoilov@polly.phys.msu.ru, https://orcid.org/0000-0003-4140-2957*

Аннотация. *В работе представлены результаты молекулярно-динамических расчетов распределений атомов, распыленных с поверхности грани (001) Ni, в рамках модели 21 атома поверхности. Было показано, что поверхностные механизмы распыления играют важную роль при ионном распылении — отталкивание от ближайших атомов поверхности и притяжение к поверхности, описываемое плоским потенциальным барьером.*

Ключевые слова: *молекулярная динамика, ионное распыление, поверхностные механизмы, эффект блокировки.*

Conference paper

EVOLUTION OF POLAR ANGLE DISTRIBUTIONS OF SPUTTERED ATOMS FOR (001) NI CASE

Artem I. Musin[1]✉***, Vladimir N. Samoilov***[2]
[1]*Moscow State University of Technology "STANKIN", Moscow, Russia*
[1]*State University of Education, Mytishchi, Russia*
[2]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[1]*ai.musin@physics.msu.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3167-9023*
[2]*samoilov@polly.phys.msu.ru, https://orcid.org/0000-0003-4140-2957*

Abstract. *The report presents the results of molecular dynamics calculations of the distributions of atoms sputtered from the surface of*

© Мусин А.И., Самойлов В.Н., 2023

(001) Ni face in 21 surface atoms model. It has been shown that surface sputtering mechanisms play an important role in ion sputtering — repulsion from nearby surface atoms and attraction to the surface described by a planar potential barrier.

Keywords: *molecular dynamics, ion sputtering, surface mechanisms, blocking effect.*

1. Введение

Бомбардировка поверхности кристаллов ионным пучком приводит к распылению атомов с поверхности кристалла. Распределение распыленных атомов $F(E, \theta, \varphi)$ по энергии E, полярному углу θ и азимутальному углу φ может быть измерено экспериментально для получения информации об элементном составе и структуре поверхности, что делает эти исследования весьма актуальными.

2. Аналитические модели распыления

Для описания энергетических спектров и угловых распределений распыленных атомов предлагались несколько аналитических моделей (для аморфных и поликристаллических мишеней). Самой известной является теория распыления Зигмунда [1], которая основана на решении уравнения Больцмана для каскада упругих столкновений частиц, развивающегося в безграничной среде. Теория Зигмунда приемлемо описывает интегральный коэффициент распыления в зависимости от энергии бомбардирующих ионов, однако не может объяснить особенности дифференциальных характеристик.

Согласно теории распыления Зигмунда, начальное распределение атомов в каскаде столкновений (при пересечении поверхности), имеет вид

$$F_0(E_0, \cos\theta_0) = \frac{\cos\theta_0}{E_0^2}. \tag{1}$$

Функция F_0 уменьшается с ростом начальной энергии атома E_0 и отлична от нуля вплоть до энергии бомбардирующих ионов E_{ion}. Для конечной функции распределения F Зигмунд получил выражение

$$F(E, \cos\theta) = \frac{E\cos\theta}{(E + E_b)^3}, \tag{2}$$

где E — кинетическая энергия распыленной частицы ($E \ll E_{ion}$), θ — полярный угол, отсчитываемый от нормали к поверхности, E_b — энергия связи.

Согласно (2), наблюдаемое энергетическое распределение распыленных атомов должно иметь одинаковое положение максимума энер-

	E_0 (эВ)	φ_0	$1-\cos\theta_0$
от	0.5	0°	0
до	100	180°	1
шаг	0.01	0.5°	1/450

Таблица 1: Начальные параметры эмитируемого атома

гетического спектра (при $E = E_b/2$) для всех полярных углов вылета θ. Эта формула верна для атомов, представляющих абсолютно жесткие шары. Если же потенциал взаимодействия атомов $V(r) \propto r^{-1/m}$, то конечное распределение имеет вид

$$F = \frac{E\cos\theta}{(E+E_b)^{3-2m}}, \tag{3}$$

что соотстветствует формуле (2) при $m = 0$. Максимум интегрального энергоспектра распыленных атомов наблюдается при $E = E_b/2(1-m)$ и также не зависит от полярного угла наблюдения θ.

Экспериментальные данные [2, 3] свидетельствуют о смещении максимума энергоспектра распыленных атомов в сторону меньших энергий с ростом полярного угла наблюдения θ, что не объясняет теория Зигмунда. В работе [3] была предложена феноменологическая теория, которая давала функцию распределения в виде

$$F(E,\cos\theta) = \frac{E\cos\theta}{(E+E_b)^4}\left(E\cos^2\theta + E_b\right). \tag{4}$$

Функция (4) хорошо описывает экспериментально наблюдаемый сдвиг максимума энергоспектра в сторону меньших энергий с увеличением полярного угла наблюдения θ, однако не прослеживается ее связь с реальными механизмами вылета атомов.

3. Эмиссионная МД-модель распыления грани (001) Ni

В настоящей работе с помощью метода молекулярной динамики (МД) был выполнен расчет эмиссии атомов с поверхности грани (001) Ni с помощью модели 21 атома поверхности, которая успешно использовалась нами ранее [4]. Значение постоянной решетки бралось равным $a = 3.5168$ Å. Применяя метод абстрагирования, мы исключаем из модели распыления монокристалла (001) Ni процесс падения иона и формирование каскада столкновений, поскольку процесс эмиссии атомов является определяющим в формировании наблюдаемого распределения распыленных атомов по энергии и углам вылета.

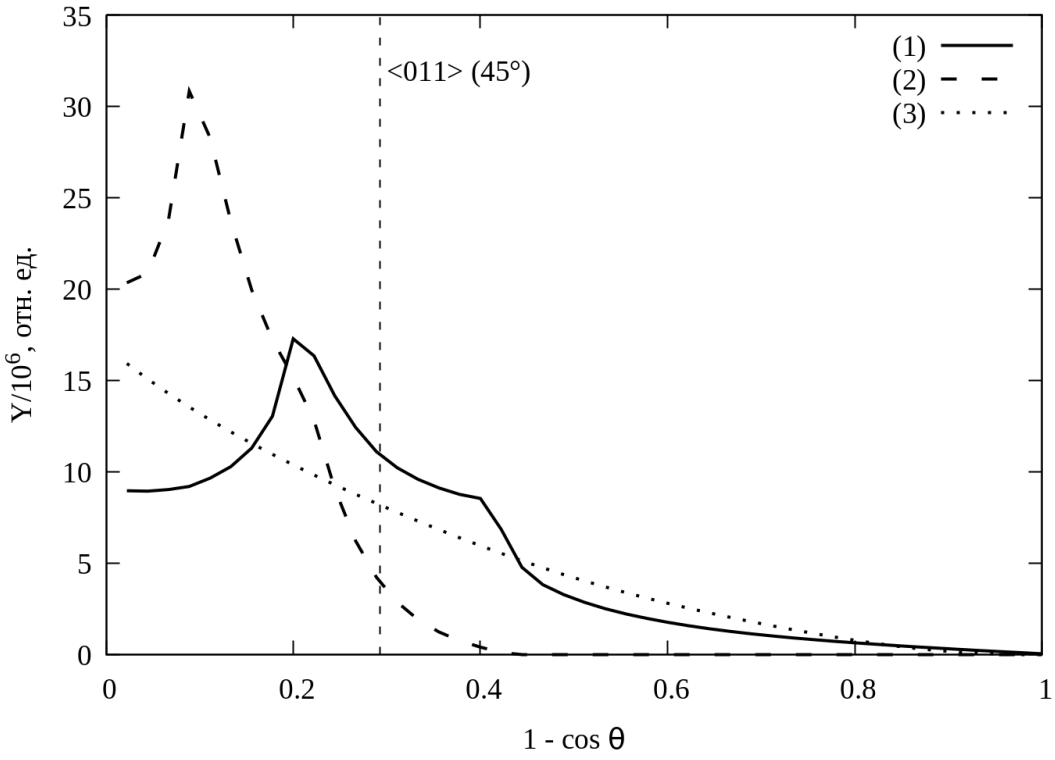


Рисунок 1 – Распределения атомов, распыленных с поверхности (001) Ni в рамках модели 21 атома, по $1-\cos\theta$ (1), $1-\cos\theta_i$ (2) и $1-\cos\theta_0$ (3). Начальная функция распределения $\cos\theta_0/E_0^2$

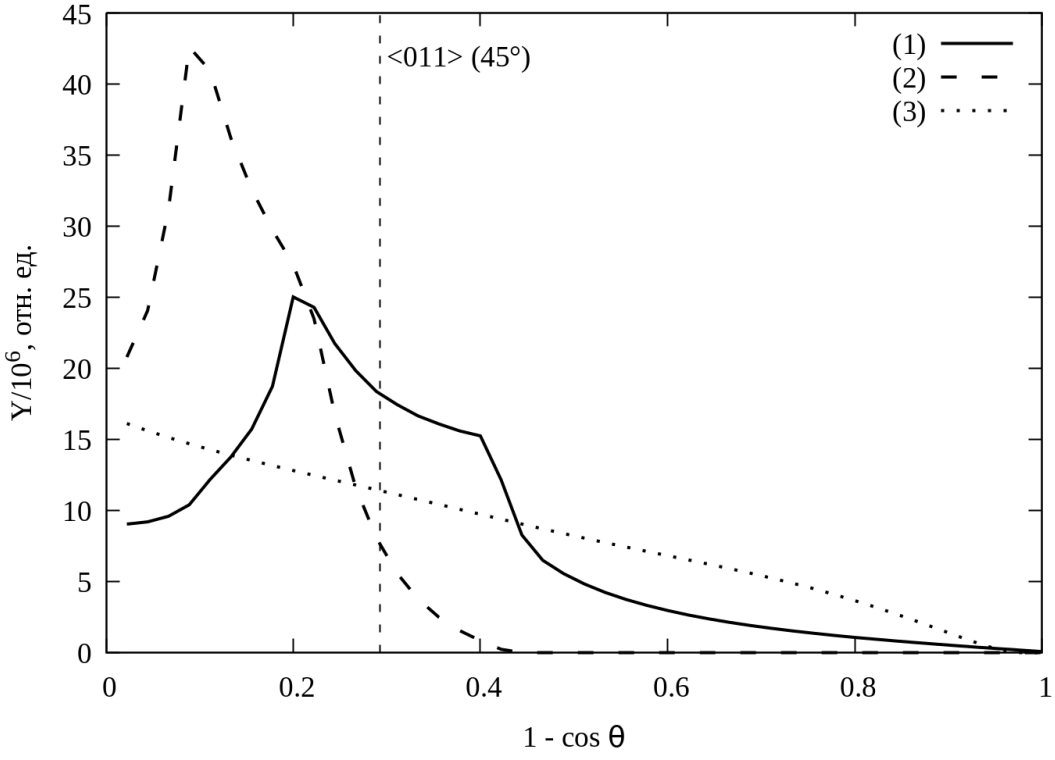


Рисунок 2 – Распределения атомов, распыленных с поверхности (001) Ni в рамках модели 21 атома, по $1-\cos\theta$ (1), $1-\cos\theta_i$ (2) и $1-\cos\theta_0$ (3). Начальная функция распределения $1/E_0^2$

В рамках МД-модели учитывалось только взаимодействие эмитируемого атома с 20 ближайшими атомами первого слоя. Вылет атома происходил с энергией E_0 под углом θ_0 от нормали к поверхности в направлении, задаваемом азимутальным углом φ_0 (таблица 1). После отлета эмитируемого атома на расстояние $r \gg a$ его энергия и углы обозначаются как $(E_i, \theta_i, \varphi_i)$. Для учета не только сил отталкивания, но и притяжения к поверхности эмитируемый атом взаимодействует с потенциальным барьером высоты $E_b = 4.435$ Å. Из законов сохранения энергии и импульса можно получить, что плоский потенциальный барьер высоты E_b вызывает преломление траектории атома согласно следующим соотношениям:

$$E = E_i - E_b, \tag{5}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{E_i \cos^2\theta_i - E_b}{E_i - E_b}}, \tag{6}$$

$$\varphi = \varphi_i, \tag{7}$$

где (E, θ, φ) — конечные энергия и углы вылета эмитируемого атома.

После прохождения потенциального барьера энергия атома уменьшается ($E < E_i$), а полярный угол — увеличивается ($\theta > \theta_i$). Это означает, что при подлете атома к барьеру должно быть $\theta < \theta_{cr}$, где $\cos\theta_{cr} = \sqrt{E_b/E_i}$, чтобы атом распылился.

На рисунке 1 представлены угловые распределения распыленных атомов, рассчитанные в рамках модели 21 атома. Использовалась начальная функция распределения (1) при эмиссии атомов с поверхности.

Рассчитанное распределение распыленных атомов по $1 - \cos\theta_0$ отличается по форме от распределения (1), в нем преобладают атомы, которые вылетали преимущественно в направлении нормали к поверхности, а вклад атомов, вылетающих вблизи поверхности, снижен. Это связано с тем, что при эмиссии не все атомы распыляются, а только те, которые преодолевают плоский потенциальный барьер. Атомы, вылетающие близко к поверхности, подлетают к барьеру под углом $\theta_i > \theta_{cr}$, и отражаются обратно, даже если их энергия была достаточна для преодоления барьера. За счет эффекта блокировки начальное распределение трансформируется в распределение атомов под барьером (по $1 - \cos\theta_i$), которое сильно сдвинуто в направлении к нормали к поверхности. Значительное количество атомов вылетало в направлении, задаваемом полярным углом $\theta_0 = 45°$, однако в этом направлении максимум отсутствует. Из-за преломления на плоском потенциальном

барьере распределение по $1 - \cos\theta_i$ впоследствии трансформируется в наблюдаемое распределение (по $1 - \cos\theta$).

Аналогичная ситуация имеет место и при использовании изотропной начальной функции распределения Вичанека-Хименез Родригеса-Зигмунда $1/E_0^2$ [5] (рисунок 2).

4. Заключение

В результате исследования было показано, что даже без учета процессов, происходящих в глубине твердого тела во время распыления, удается с помощью модели эмиссии атомов с поверхности монокристалла (001) Ni получить распределение распыленных атомов по полярному углу, соответствующее экспериментальным данным. При этом имеет место высокая эффективность фокусировки эмитированных атомов при взаимодействии с ближайшими атомами первого слоя.

В дальнейших исследованиях планируется провести похожий анализ полярных угловых распределений при эмиссии с поверхности двухкомпонентных мишеней, имеющих схожую структуру — Ni_4Mo и Ni_4W.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова [6].

Список источников

1. Sigmund P. Theory of sputtering. I. Sputtering yield of amorphous and polycrystalline targets // Phys. Rev. 1969. Vol. 184, no. 2. P. 383–416. https://doi.org/10.1103/PhysRev.184.383.
2. van Veen A. Sputtering and Scattering by Interaction of Low Energy Noble Gas Ions with Monocrystalline Metal Surfaces: Ph.D. Thesis / A. van Veen; Univ. Utrecht, Utrecht, Netherlands. 1979. URL: https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:11495566.
3. Garrison B.J. Energy distributions of atoms sputtered from polycrystalline surfaces // Nucl. Instr. Meth. B. 1986. Vol. 17, no. 4. P. 305–308. https://doi.org/10.1016/0168-583X(86)90116-3.
4. Самойлов В.Н., Мусин А.И. Эволюция энергетических и угловых распределений эмитированных атомов с изменением атомного номера вещества мишени // Поверхность. 2020. № 7. С. 104–112. https://doi.org/10.7868/S0367676518020084.
5. Vicanek M., Rodriguez J.J., Sigmund P. Depth of origin and angular spectrum of sputtered atoms // Nucl. Instr. Meth. B. 1989. Vol. 36, no. 2. P. 124–136. https://doi.org/10.1016/0168-583X(89)90574-0.

6. Voevodin Vl. et al. Supercomputer Lomonosov-2: Large Scale, Deep Monitoring and Fine Analytics for the User Community // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2019. Vol. 6, no. 2. P. 4–11. https://doi.org/10.14529/jsfi190201.

References

1. Sigmund P. Theory of sputtering. I. Sputtering yield of amorphous and polycrystalline targets // Phys. Rev. 1969. Vol. 184, no. 2. P. 383–416. https://doi.org/10.1103/PhysRev.184.383.
2. van Veen A. Sputtering and Scattering by Interaction of Low Energy Noble Gas Ions with Monocrystalline Metal Surfaces: Ph.D. Thesis / A. van Veen; Univ. Utrecht, Utrecht, Netherlands. 1979. URL: https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:11495566.
3. Garrison B.J. Energy distributions of atoms sputtered from polycrystalline surfaces // Nucl. Instr. Meth. B. 1986. Vol. 17, no. 4. P. 305–308. https://doi.org/10.1016/0168-583X(86)90116-3.
4. Samoilov V.N., Musin A.I. Evolution of the Energy and Angular Distributions of Emitted Atoms with a Variation in the Atomic Number of the Target Substance // J. Surf. Investig. 2020. Vol. 14, no. 4. P. 743–750. https://doi.org/10.1134/S1027451020040151.
5. Vicanek M., Rodriguez J.J., Sigmund P. Depth of origin and angular spectrum of sputtered atoms // Nucl. Instr. Meth. B. 1989. Vol. 36, no. 2. P. 124–136. https://doi.org/10.1016/0168-583X(89)90574-0.
6. Voevodin Vl. et al. Supercomputer Lomonosov-2: Large Scale, Deep Monitoring and Fine Analytics for the User Community // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2019. Vol. 6, no. 2. P. 4–11. https://doi.org/10.14529/jsfi190201.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 260-265.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 260-265.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 537.855

ЗАВИСИМОСТЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ ОТ ЧАСТОТЫ И ТЕМПЕРАТУРЫ В КРИСТАЛЛАХ $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$

Намиг Надирович Нифтиев[1]✉, Фаиг Мамедагаович Мамедов[1,2]
[1]Азербайджанский Государственный Педагогический Университет, Азербайджан, Баку
[2]Институт Катализа и Неорганической химии им. Академика М. Нагиева НАН Азербайджана, Азербайджан, Баку
[1]namiq7@bk.ru✉
[2]faikmamadov@mail.ru

Аннотация. *Приводятся результаты исследования тангенса угла диэлектрических потерь в $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$ при различных частотах и температурах. Установлено, что в исследованном температурном интервале диэлектрические потери обусловлены с механизмом электропроводности. Электропроводность для кристаллов $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$ связана с двумя механизмами: зонным и прыжковым. Определены энергии активации при различных значениях частоты и найдено ΔE_1 = 0,13 эВ; ΔE_2 = 0,11эВ; ΔE_1 = 0,10эВ.*

Ключевые слова: *$FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$, диэлектрических потерь, переменный ток, частота, температура, энергии активации, зонный механизм, прыжковый механизм.*

Conference paper

DEPENDENCE OF DIELECTRIC LOSSES ON FREQUENCY AND TEMPERATURE IN $FeGa_{0.4}In_{1.6}Se_4$ CRYSTALS

Namiq N. Niftiyev[1]✉, Faiq M. Mammadov[1,2]
[1]Azerbaijan State Pedagogical University, Azerbaijan, Baku
[2]Institute of Catalysis and Inorganic Chemistry named after Academician M. Nagiyev of Azerbaijan National Academy of Sciences, Azerbaijan, Baku
[1]namiq7@bk.ru✉
[2]faikmamadov@mail.ru

Abstract. *The results of a study of the dielectric loss tangent in $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$ at various frequencies and temperatures are presented. It has been established that in*

© Нифтиев Н.Н., Мамедов Ф.М., 2023

the studied temperature range, dielectric losses are due to the mechanism of electrical conductivity. Electrical conductivity for $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$ crystals is associated with two mechanisms: band and hopping. Activation energies were determined at various frequencies and found $\Delta E_1 = 0,13$ eV; $\Delta E_2 = 0,11$ eV; $\Delta E_1 = 0,10$ eV.

Keywords: *$FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$, dielectric losses, alternating current, frequency, temperature, activation energies, band mechanism, hopping mechanism.*

1. Введение

В последние годы тройные халькогенитные соединения, относящиеся к классу многокомпонентных полупроводников, стали объектом интенсивных исследований в связи с их необычными физическими и практическими применениями. Среди этих соединений особый интерес представляют магнитные полупроводники типа AB_2X_4 (где A - Mn, Fe, Co, Ni; B - Ga, In; X - S, Se, Te), физические процессы в которых мало изучены и имеют большой потенциал для расширения функционального диапазона фотоэлектронных устройств нового поколения [1-7]. На основе этих соединений могут быть созданы лазеры, модуляторы света, фотодетекторы, терморезисторы, выпрямители и другие функциональные устройства. В настоящей работе изучена частотная и температурная зависимость диэлектрических потерь кристалла $FeGa_{0,}4In_{1,6}Se_4$, относящегося к классу соединений AB_2X_4.

2. Основной текст статьи

Кристалл $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$ получен из стехиометрических количеств элементов высокой чистоты (99,999%). В результате рентгеноструктурного анализа установлено, что соединение $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$ имеет тригональную структуру с параметрами кристаллической решетки a = 3,983 Å и c = 38,811 Å. Для исследования диэлектрических потерь конденсаторы были изготовлены путем нанесения серебряной пасты на кристаллические пластины толщиной ~ 1,5 мм. Кристаллы помещаются в криостат, температуру которого можно регулировать в диапазоне 293 ÷ 400К. Точность измерения температуры ±0,5К. Диэлектрических потерь измерялся с помощью цифрового измерителя импеданса Е7-20 (25 ÷ 10^6 Гц). На образец подается измерительное напряжение 1 В.

На рис. 1 представлена зависимость тангенса угла потерь (tgδ) от частоты (f) переменного электрического поля при температурах 294,5К и 343К. Из рисунка видно, что с увеличением частоты (10^3÷ 10^6 Гц) значение тангенса угла потерь уменьшается, а с ростом температуры значение tg увеличивается.

Тангенс угла потерь определяется численно по отношению тока проводимости к току смещения. Это макроскопическая характеристика диэлектрика. Зависимость тангенса угла диэлектрических потерь от температуры, частоты электрического поля и других параметров является одной из важнейших характеристик диэлектрика, как и соответствующие зависимости диэлектрической восприимчивости. Следует отметить, что как

характеристика потерь она имеет физический смысл только в переменном электрическом поле[8]:

$$tg\delta = \frac{I_a}{I_r} = \frac{j_{am}}{j_{rm}} \qquad (1)$$

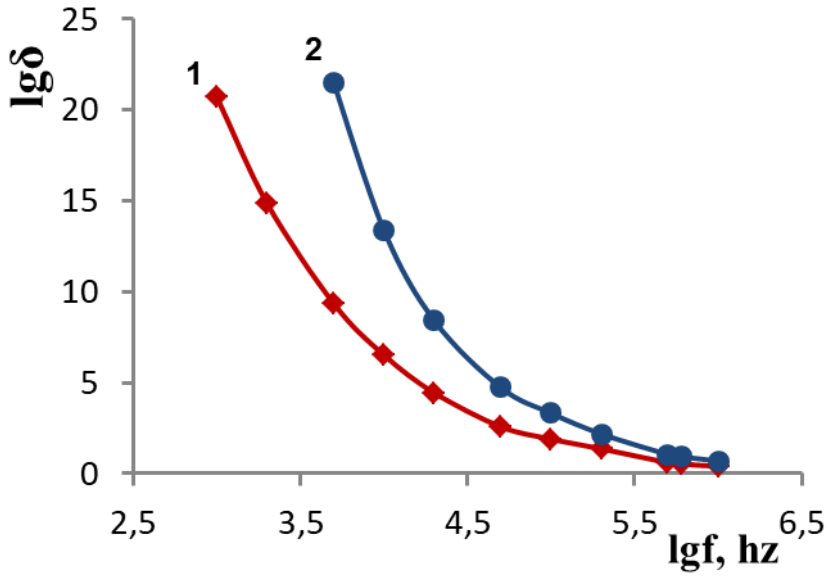


Рисунок 1. Частотная зависимость тангенса угла диэлектрических потерь для кристалла $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$ при различных температурах. Т, К: 1 - 294,5, 2 – 343.

На рис. 2 представлен график зависимости ln(tgδ·ω) ~ lnω для кристалла $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$ при температуре 294,5К. Известно, что частотная зависимость диэлектрических потерь зависит от механизма электропроводности. Таким образом, сама электропроводность может зависеть от частоты. Прыжковый механизм имеет $\sigma \sim \omega^S$ (S<1).

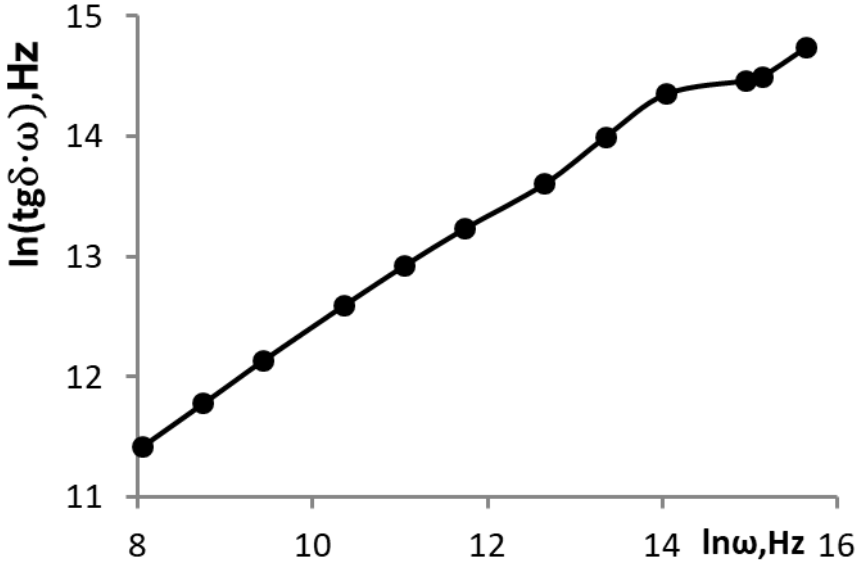


Рисунок 2. Зависимость ln(tgδ ·ω) ~ lnω при температуре 294,5К для кристалла $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$.

Если частотная зависимость тангенс угла диэлектрических потерь выражается следующим образом:

$$tg\delta(\omega) \sim (\omega^{-1} + \omega), \quad (2)$$

тогда доминирующую роль в проводимости играет зонный механизм.

А если зависимость тангенс угла диэлектрических потерь от частоты выражаться

$$tg\delta(\omega) \sim \omega(\omega^{S-2} + 1), \quad (3)$$

то доминирующую роль в проводимости играет прыжковый механизм.

Из выражения (2) видно, что при зонном механизме, играющем доминирующую роль в проводимости, в координате tgδ·ω = f(ω) должна наблюдаться прямолинейная зависимость. Из рисунка видно, что полученная кривая близка к прямой, но немного отличается от нее. Это указывает на то, что электропроводность кристалла $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$ связана со смешанно-зонным и прыжковым механизмом.

Известно, что зависимость tgδ ~ f(T) определяется следующим образом с учетом температурной зависимости электропроводности диэлектрика и полупроводника $\sigma \sim \exp(-\Delta E_\sigma / kT)$ и времени релаксации поляризации $\tau \sim \exp(\Delta E_\mu / kT)$:

$$tg\delta(T) \sim \left[\frac{1}{\omega}\exp(-\Delta E_\sigma / kT) + \omega\exp(\Delta E_\mu / kT)\right] \quad (4)$$

Здесь ΔE_σ и E_μ — энергии активации электропроводности и подвижности соответственно. Из (4) видно, что тангенс угла диэлектрических потерь диэлектрика или полупроводника может увеличиваться, уменьшаться и оставаться постоянным с ростом температуры при ω = const в области низких частот. То есть $\Delta E_\sigma \neq \Delta E_\mu$ будет.

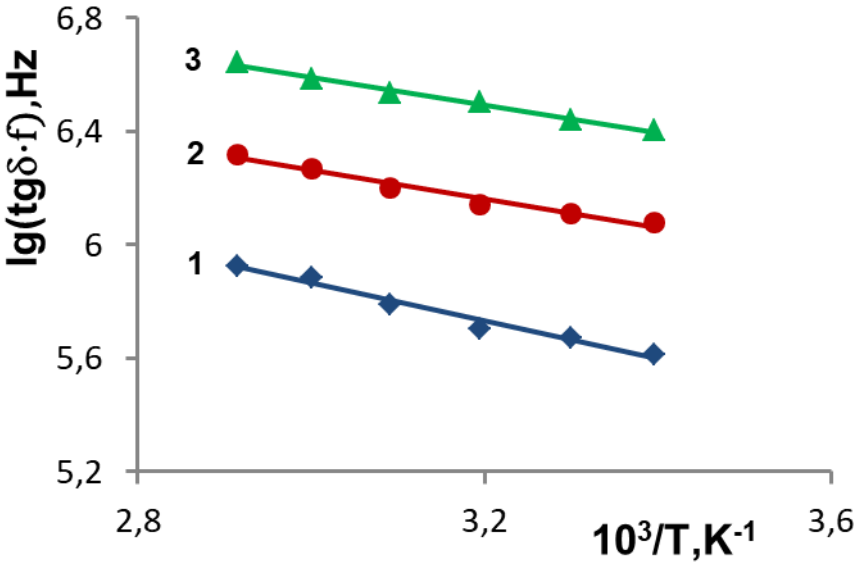


Рисунок 3. Зависимость $lg(tg\delta\cdot\omega)$ ~10^3/T на разных частотах для кристалла $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$. f, Гц: 1-10^4, 2-10^5, 3-10^6.

Увеличение $tg\delta$ в соединении $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$ с ростом температуры указывает на то, что диэлектрические потери в исследованном температурном интервале определяются главным образом I-членом выражения (4), т.е. током проводимости. Следовательно, из выражения (4) можно написать[9]:

$$tg\delta(T) \sim \frac{1}{\omega}\exp(-\Delta E_\sigma / kT) \quad (5)$$

Из (5) видно, что в области низких частот $(\omega\tau << 1)$ в системе координат $\lg(tg\delta\cdot\omega) \sim f(1/T)$ должна наблюдаться прямая зависимость диэлектрических потерь, в которой электропроводность играет основную роль. Угол наклона аппроксимирующей прямой должен характеризовать энергию активации проводимости.

На рис. 3 представлена зависимость $tg\delta\cdot\omega$ от 10^3/T в системе координат $\lg(tg\delta\cdot\omega) \sim f(1/T)$ на разных частотах для кристалла $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$. Энергия активации для разных частот рассчитана по наклону кривых и были найдены значения ΔE_1 = 0,13 эВ; ΔE_2 = 0,11эВ ΔE_1 = 0,10эВ. Это указывает на то, что диэлектрические потери связаны с механизмом электропроводности.

Заключение

В результате исследования тангенса угла диэлектрических потерь в кристалле $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$ при различных частотах и температурах установлено, что в исследованном температурном интервале диэлектрические потери обусловлены с механизмом электропроводности. Электропроводность кристалла $FeGa_{0,4}In_{1,6}Se_4$ связана со смешанно - зонным и прыжковым механизмом. Энергия активации для разных частот была рассчитана и составила ΔE_1 = 0,13 эВ; ΔE_2 = 0,11эВ; ΔE_1 = 0,10эВ.

Список источников

1. Kim H., Liu X., Kim M., Cho Y., et al. Layer-dependent band structure of ternary metal chalcogenides: thickness-controlled hexagonal $FeIn_2S_4$ // Chem. Mater., 2021. Vol. 33. P. 164-176. https://doi.org/10.1021/acs.chemmater.0c03146.

2. Yang. J., Zhou. Z., Fang J., Wen H., et al. Magnetic and transport properties of a ferromagnetic layered semiconductor $MnIn_2Se_4$ // Appl. Phys. Lett., 2019. Vol. 115, 222101. https://doi.org/10.1063/1.5126233.

3. Нифтиев Н. Н. Фотоэлектрические свойства монокристаллов $MnIn_2S_4$ // Журнал прикладной спектроскопии. 2021. Том 88. № 6. с. 967 - 969. https://doi.org/10.47612/0514-7506-2021-88-6-967-969.

4. Myoung B. R., Lim J. T., Kim C. S. Investigation of magnetic properties on spin-ordering effects of $FeGa_2S_4$ and $FeIn_2S_4$ // *J.* Magn. Magn. Mater., 2017. Vol. 438. No. 15. P. 121-125. https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2017.04.056.

5. Kim H., Tiwari A., Hwang E., Cho Y., Hwang H., Bak S., Hong Y., Lee H. $FeIn_2S_4$ Nanocrystals: A Ternary Metal Chalcogenide Material for Ambipolar Field-Effect Transistors //Adv. Sci. 2018. 1800068. www.advancedsciencenews.com.

6. Hou W., Xiao Y., Han G. An interconnected ternary MIn_2S_4 (M=Fe, Co, Ni) thiospinel nanosheet array: a type of efficient platinum-free counter electrode for dye-sensitized solar cells // Angewandte Chemie. 2017. Vol. 129, P. 9274. https://doi.org/10.1002/ange.201705399.

7. Нифтиев Н. Н., Тагиев О. Б., Мурадов М. Б., Мамедов Ф. М. Электрические свойства $FeIn_2S_4$ на переменном токе // Журнал технической физики. Санкт – Петербург. 2012. Том 82. Вып. 4. С. 147-149.

8. Физика диэлектриков / Поплавко Ю. М. Москва: Высшая школа, 1980. 400 с.

9. Мамедов Ф. М., Нифтиев Н. Н. Диэлектрические свойства слоистых монокристаллов $FeGaInS_4$ в переменном электрическом поле // ФТП. 2016. Т. 50. № 9. С. 1225 - 1229.

References

1. Kim H., Liu X., Kim M., Cho Y., et al. Layer-dependent band structure of ternary metal chalcogenides: thickness-controlled hexagonal $FeIn_2S_4$ // Chem. Mater., 2021. Vol. 33. P. 164-176. https://doi.org/10.1021/acs.chemmater.0c03146.

2. Yang. J., Zhou. Z., Fang J., Wen H., et al. Magnetic and transport properties of a ferromagnetic layered semiconductor $MnIn_2Se_4$ // Appl. Phys. Lett., 2019. Vol. 115, 222101. https://doi.org/10.1063/1.5126233.

3. Niftiyev N. N. Photoelectric properties of $MnIn_2S_4$ crystals // Journal of Applied Spectroscopy. 2022. Vol. 88. P. 1234–1236. https://doi.org/10.47612/0514-7506-2021-88-6-967-969.

4. Myoung B. R., Lim J. T., Kim C. S. Investigation of magnetic properties on spin-ordering effects of $FeGa_2S_4$ and $FeIn_2S_4$ // *J.* Magn. Magn. Mater., 2017. Vol. 438. No. 15. P. 121-125. https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2017.04.056.

5. Kim H., Tiwari A., Hwang E., Cho Y., Hwang H., Bak S., Hong Y., Lee H. $FeIn_2S_4$ Nanocrystals: A Ternary Metal Chalcogenide Material for Ambipolar Field-Effect Transistors //Adv. Sci. 2018. 1800068. www.advancedsciencenews.com.

6. Hou W., Xiao Y., Han G. An interconnected ternary MIn_2S_4 (M=Fe, Co, Ni) thiospinel nanosheet array: a type of efficient platinum-free counter electrode for dye-sensitized solar cells // Angewandte Chemie. 2017. Vol. 129, P. 9274. https://doi.org/10.1002/ange.201705399.

7. Niftiev N. N., Tagiev O. B., Muradov M. B., Mamedov F. M. AC electrical properties of $FeIn_2S_4$ // Technical Physics. 2012. Vol. 57. P. 572–574.

8. Physics of dielectrics / Poplavko Yu. M. Moscow: Higher School, 1980. 400 p.

9. Niftiyev N. N., Mammadov F.M. Dielectric properties of layered $FeGaInS_4$ single crystals in an alternating electric field // Semiconductors. 2016. Vol. 50. no. 9. P. 1203 – 1207. DOI:10.1134/S1063782616090165.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 266-272.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 266-272.

Статья в сборнике трудов конференции

АППРОБАЦИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНЦЕНТРАЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КЕРАМИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ СЕСКВИОКСИДОВ ЛАНТАНОИДОВ

Александр Сергеевич Прадед✉
Брянский государственный университет имени академика И.Г Петровского, Брянск, Россия
aleksandr.praded@mil.ru✉*, https://orcid.org/0000-0002-4124-9107*

Аннотация. *В данной работе была выполнена апробация теоретической модели концентрационной зависимости теплопроводности. Полученные при помощи теоретической модели данные были проанализированы с учётом экспериментальных измерений. На основании проведённого анализа сделан вывод о применимости использованной модели.*

Ключевые слова: *теплопроводность, концентрационная зависимость, сесквиоксиды лантаноидов.*

Conference paper

TESTING OF THE THEORETICAL MODEL OF THE THERMAL CONDUCTIVITY CONENTRATION DEPENDANCE OF THE LANTHANIDE SESQUIOXIDE CERAMICS

Alexandr S. Praded✉
Bryansk State University named after academician I.G. Petrovsky, Bryansk, Russia
aleksandr.praded@mil.ru✉*, https://orcid.org/0000-0002-4124-9107*

Abstract. *An approbation of the theoretical model of the thermal conductivity concentration dependance has been carried out in this work. The theoretical model outcome data has been analyzed taking into account experiment data. A conclusion of the model validity has been made basing on the analysis that had been carried out.*

Keywords: *thermal conductivity, concentration dependance, lanthanide sesquioxides.*

1. Введение

При исследовании тепловых свойств веществ важной количественной характеристикой является такая физическая величина, как коэффициент теплопроводности (кратко – теплопроводность), которая выступает

© Прадед А.С., 2023

энергетической характеристикой теплопередачи, что влечёт за собой необходимость в справочных данных по коэффициенту теплопроводности вещества.

Оптические керамики на основе твердых растворов оксидов редкоземельных металлов в последнее время активно разрабатываются в качестве полифункциональных материалов, в том числе лазерных активных сред [2-4, 9, 10]. Функционирование лазерного элемента жестко связано с теплопроводностью материала. В свою очередь, многочисленные попытки построения теоретических моделей, позволяющих описать поведение коэффициента теплопроводности, сталкиваются с различными трудностями.

2. Основной текс статьи

Температурные зависимости теплопроводности керамических образцов твердого раствора Y_2O_3-Gd_2O_3 (в других обозначениях $(Y_{1-x}Gd_x)_2O_3$ или Y_2O_3-*x* мол. % Gd_2O_3) с кубической сингонией были экспериментально исследованы, с участием автора настоящей работы, в интервале температур 50-300 К для концентраций $0 \le x \le 100$ мол. % [1]. Для полученных экспериментальных данных было решено апробировать теорию, описанную в работе [5]. В ней для концентрационной зависимости теплопроводности приводится следующая формула:

$$k = \frac{1}{\pi \cdot \alpha_0} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot v \cdot k_0}{\delta}} \cdot A \cdot \tan\left(\pi \cdot a_0 \sqrt{\frac{k_0 \cdot \delta}{2 \cdot k_B \cdot v}}\right), \quad (1)$$

где

$$\delta = \sum_i c_i \cdot \left(\frac{M_i - M}{M}\right)^2 \quad (2)$$

и

$$M = \sum_i c_i \cdot M_i \quad (3)$$

В выражениях (1) и (2) δ представляет собой дисперсию масс атомов тех узлов кристаллической решётки, которые подвергаются замещению атомами примести. Данные узлы имеют среднюю массу M, а также вероятность c_i оказаться занятым i-ым ионом с массой M_i. Величина k_0 показывает теплопроводность нелегированного материала при данной температуре.

Величина a_0 выражает среднее межатомной расстояние. Его величина в работе [5] рассчитывается по следующей формуле:

$$a_0 = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{M}{N_A \cdot n \cdot \rho}} \quad (4)$$

где M – молярная масса вещества, N_A – постоянная Авогадро, n – число атомов в формульной единице, ρ – плотность вещества.

Для расчёта скорости звука продольных акустических мод фононов авторы в своей модели предлагают использовать следующее выражение:

$$v = \frac{a_0 \cdot \omega_D}{\pi} \quad (5)$$

где ω_D представляет собой частоту Дебая. В свою очередь, частота Дебая находится по формуле:

$$\omega_D = \sqrt{\frac{6 \cdot N_A \cdot k_B \cdot T_{MP}}{\mu \cdot a_0^2 \cdot \varepsilon^2}} \quad (6)$$

В выражении (6) k_B обозначает постоянную Больцмана, T_{MP} – температуру плавления кристалла, μ выражает приведённую массу, которую можно найти как среднее гармоническое всех ионных масс в формульной единице, ε – постоянная Линдеманна [6].

Вместо формулы (5) была использована следующая формула для вычисления скорости звука как среднее гармоническое скоростей продольной, быстрой поперечной и медленной поперечной составляющих звуковой волны:

$$\langle v \rangle = \sqrt[3]{\frac{3}{\frac{1}{v_L^3} + \frac{1}{v_{S1}^3} + \frac{1}{v_{S2}^3}}} \quad (7)$$

где v_L, v_{S1}, v_{S2} – продольная скорость, быстрая поперечная скорость и медленная поперечная скорость звуковой волны соответственно. Скорости каждой из трёх составляющих звуковой волны могут быть найдены через упругие константы c_{11}, c_{12}, c_{44} и плотность ρ:

$$v_L = \sqrt{\frac{c_{11} + c_{12} + 2 \cdot c_{44}}{2 \cdot \rho}} \quad (8)$$

$$v_{s1} = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} \quad (9)$$

$$v_{s2} = \sqrt{\frac{c_{11} - c_{12}}{2 \cdot \rho}} \quad (10)$$

Используя данные из работ [7, 8], с помощью формул (7-10) была найдена средняя скорость распространения фононов в веществе. Расчёт межатомного расстояния был выполнен с использованием формулы (4). В таблице 1 представлены результаты расчётов для крайних составов твёрдой керамики $(Gd_xY_{1-x})_2O_3$:

Таблица 1. Скорость звука и межатомное расстояние крайних составов твёрдого раствора керамики $(Gd_xY_{1-x})_2O_3$

x·100%, Gd_2O_3	**<v>, км·с$^{-1}$**	**a_0, пкм**
0	3,986	306
100	3,009	314

На основании предположения, что концентрационные зависимости скорости звука и межатомного расстояния являются линейными, были получены следующие аппроксимирующие выражения:

$$\langle v \rangle = -997{,}09 \cdot x + 3985{,}7 \quad (11)$$

$$a_0 = 8 \cdot 10^{-12} \cdot x + 3 \cdot 10^{-10} \quad (12)$$

Расчёт дисперсии масс атомов была выполнен с использованием формул (3, 4), где в качестве масс катионов и анионов использовались массы O^{2-}, Y^{3+}, Gd^{3+}. Результат расчётов представлен в таблице 2.

Таблица 2. Расчёт дисперсии масс атомов в узлах кристаллической решётки твёрдого раствора керамики $(Gd_xY_{1-x})_2O_3$

x·100%, Gd_2O_3	**$M_Y \cdot p_Y(x)$, кг**	**$M_{Gd} \cdot p_{Gd}(x)$, кг**	**$M_O \cdot p_O(x)$, кг**	**M, кг**	**δ**
0	0,036	0,000	0,010	0,045	0,625
0,5	0,035	0,000	0,010	0,045	0,632
1	0,035	0,001	0,010	0,045	0,639
5	0,034	0,003	0,010	0,047	0,687
10	0,032	0,006	0,010	0,048	0,739
15	0,030	0,009	0,010	0,049	0,782
20	0,028	0,013	0,010	0,051	0,818
50	0,018	0,031	0,010	0,059	0,930
70	0,011	0,044	0,010	0,064	0,941
100	0,000	0,063	0,010	0,072	0,911

Используя формулу (1), данные из таблицы 1 и таблицы 2, были теоретически рассчитаны значения коэффициента теплопроводности. Полученные теоретические и экспериментальные данные размещены в таблице 3.

Таблица 3. Эмпирические и теоретические значения коэффициента теплопроводности твёрдого раствора керамики $(Gd_xY_{1-x})_2O_3$

x·100%, Gd_2O_3	**Экспериментальные данные k, $Вт \cdot м^{-1} \cdot К^{-1}$**	**Теоретические данные k, $Вт \cdot м^{-1} \cdot К^{-1}$**
0	12,8	12,8
0,5	12,0	10,0
1	11,8	8,2
5	8,4	3,1
10	7,0	1,4
15	6,1	0,5
20	5,4	-0,1
50	5,0	-4,4
70	5,5	41,4

На рисунке 1 представлены взятые из таблицы 3 экспериментальные [1] и рассчитанные теоретически значения теплопроводности ряда образцов твердого раствора $(Y_{1-x}Gd_x)_2O_3$ для комнатной температуры.

График концентрационной зависимости теплопроводности k(x) представляет собой яркий пример нелинейного поведения характеристики, сложным образом зависящей от большого числа параметров (температура, особенности структуры и состава и т.п). Особенную чувствительность к дефектности структуры величина k проявляет при низких температурах. Поэтому на рисунке 1 зависимости k(x) представлены для комнатной температуры. Сплошные кривые k(x) на этом графике проведены с учетом

главного критерия – минимального отклонения от экспериментально полученных и теоретически рассчитанных точек k(x).

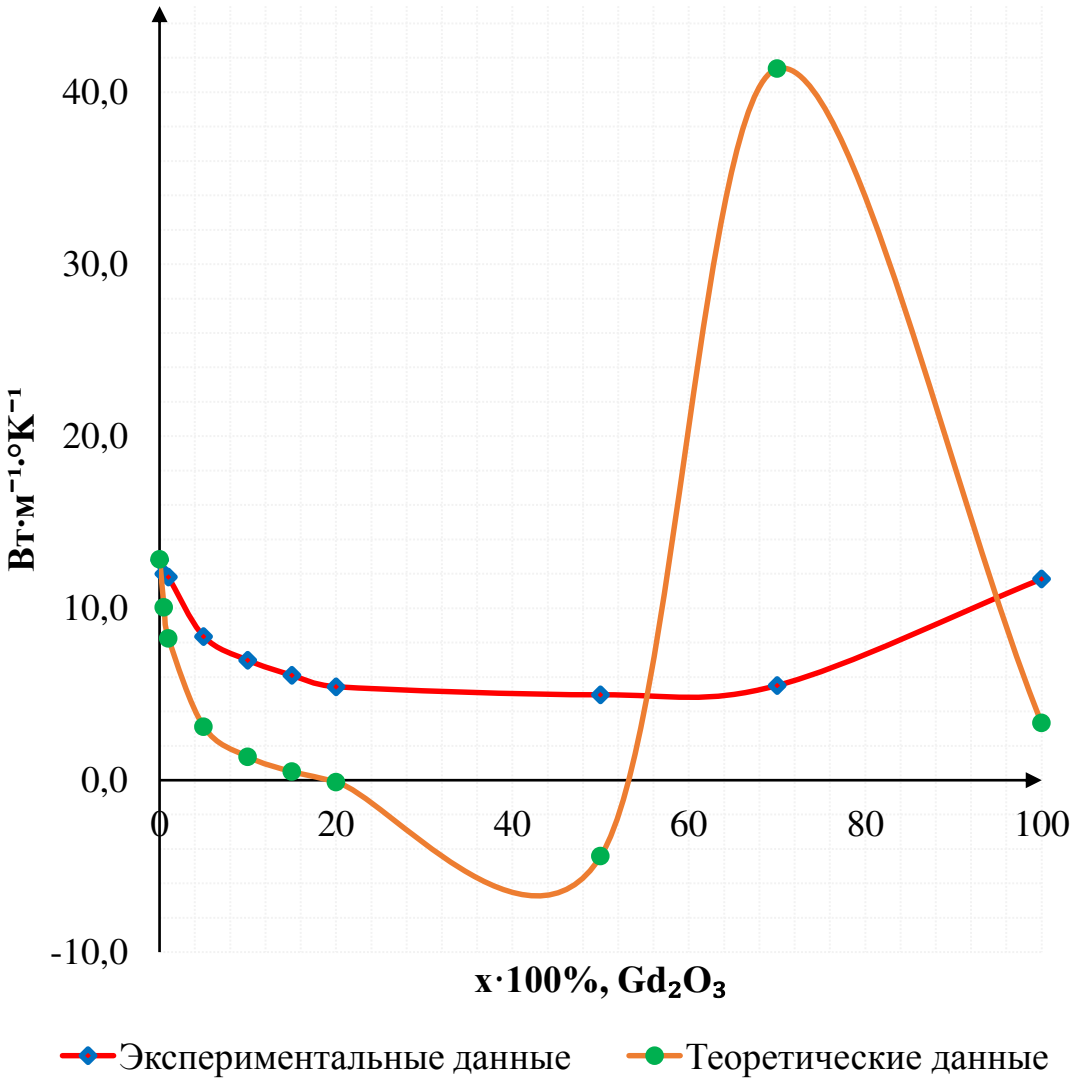


Рисунок 1. Экспериментальная и теоретическая кривые зависимости коэффициента теплопроводности образцов твёрдого раствора $(Y_{1-x}Gd_x)_2O_3$ кубической сингонии от относительного молярного содержания Gd_2O_3 при T = 300 K

Как можно видеть, теоретически полученная зависимость демонстрирует невозможные результаты, предсказывая отрицательные значения теплопроводности, когда процентное содержание Gd_2O_3 составляет примерно от 20 до 52 %, а в диапазоне от 60 до 92 % расхождение теоретических и экспериментальных данных составляет более 100 %. Возможные причины таких расхождений могут быть вызваны свойствами функции тангенс, входящей в уравнение (1).

Авторами в [5] указывается, что в уравнении (1) параметр A является «подгоночным». Для того, чтобы теоретическое и экспериментальное значение k_0 совпали и зависимость (1) в левой части рисунка 1 стала убывающей, в данной работе использовано A = -1,5. Такая необходимость вызвана тем, что функция tg(x) является возрастающей, а использование отрицательного параметра A позволяет сделать аппроксимирующую кривую убывающей. В диапазоне от x = 15 % до x = 16 % находится точка нуля функции, равная $3 \cdot \pi$,

что позволяет объяснить отрицательные значения в левой части графика. В промежутке от x = 57 % до x = 58 % находится точка разрыва функции, равная $3{,}5 \cdot \pi$, этим можно объяснить экстремально большие значения функции в правой части графика.

3. Вывод

Таким образом, использованная теоретическая модель [5] даёт неправильные результаты и не может применяться для описания концентрационной зависимости твердого раствора $(Y_{1-x}Gd_x)_2O_3$ при комнатной температуре. Для описание полученных экспериментальных данных [1] необходимы поиск и апробация другой теоретической модели.

Список источников

1. Balabanov S. et al. Thermal Conductivity of Yttria-Gadolinia Solid Solution Optical Ceramics in the Temperature Range 50–300 K // Inorganics. – 2022. – Т. 10. – №. 6. – 8 с.
2. Basyrova L. et al. Synthesis, Structure and Luminescence of Transparent "Mixed" Ceramics Dy^{3+}:$(Lu, Y, La)_2O_3$ // 2020 International Conference Laser Optics (ICLO). – IEEE, 2020. – 1 с.
3. Basyrova L. et al. Spectroscopy and efficient laser operation around 2.8 μm of Er:$(Lu, Sc)_2O_3$ sesquioxide ceramics. // J. Lumin., 2021.
4. Chaika M., Balabanov S., Permin D. Spectral characteristics of “mixed” sesquioxide Yb:$(Gd,Lu)_2O_3$ transparent ceramics. // Opt. Mater. X, 2022.
5. Gaumé R. et al. A simple model for the prediction of thermal conductivity in pure and doped insulating crystals //Appl. Phys. lett. – 2003. – Т. 83. – №. 7. – С. 1355-1357.
6. Lindemann F.A. Über die berechnung molekularer eigenfrequenzen // Phys. Z. – 1910. Т.11. – № 14. – С. 609-612.
7. Mahabul I., Pui I., Bhattacharyya S. Ab initio calculation insights into the structural, elastic and mechanical properties of high-k dielectric gadolinium oxide (Gd_2O_3) // Appl. Phys. A. – 2019. – 6 с.
8. Palko J. W. et al. Elastic constants of yttria (Y_2O_3) monocrystals to high temperatures //Jour. of Appl. Phys. – 2001. – Т. 89. – №. 12. – С. 7791-7796.
9. Permin D. A. et al. Synthesis and luminescence properties of Yb-doped Y_2O_3, Sc_2O_3 and Lu_2O_3 solid solutions nanopowders // Opt. Mater. – 2018. – Т. 77. – С. 240-245.
10. Pirri A. et al. Achievements and future perspectives of the trivalent thulium-ion-doped mixed-sesquioxide ceramics for laser applications // Materials. – 2022. – Т. 15. – №. 6. – С. 2084.

References

1. Balabanov S. et al. Thermal Conductivity of Yttria-Gadolinia Solid Solution Optical Ceramics in the Temperature Range 50–300 K // Inorganics. – 2022. – Т. 10. – №. 6. – 8 с.

2. Basyrova L. et al. Synthesis, Structure and Luminescence of Transparent "Mixed" Ceramics Dy^{3+}:$(Lu, Y, La)_2O_3$ // 2020 International Conference Laser Optics (ICLO). – IEEE, 2020. – 1 c.

3. Basyrova L. et al. Spectroscopy and efficient laser operation around 2.8 μm of Er:$(Lu, Sc)_2O_3$ sesquioxide ceramics. // J. Lumin., 2021.

4. Chaika M., Balabanov S., Permin D. Spectral characteristics of “mixed” sesquioxide Yb:$(Gd,Lu)_2O_3$ transparent ceramics. // Opt. Mater. X, 2022.

5. Gaumé R. et al. A simple model for the prediction of thermal conductivity in pure and doped insulating crystals //Appl. Phys. lett. – 2003. – Т. 83. – №. 7. – С. 1355-1357.

6. Lindemann F.A. Über die berechnung molekularer eigenfrequenzen // Phys. Z. – 1910. Т.11. – № 14. – С. 609-612.

7. Mahabul I., Pui I., Bhattacharyya S. Ab initio calculation insights into the structural, elastic and mechanical properties of high-k dielectric gadolinium oxide (Gd_2O_3) // Appl. Phys. A. – 2019. – 6 c.

8. Palko J. W. et al. Elastic constants of yttria (Y_2O_3) monocrystals to high temperatures //Jour. of Appl. Phys. – 2001. – Т. 89. – №. 12. – С. 7791-7796.

9. Permin D. A. et al. Synthesis and luminescence properties of Yb-doped Y_2O_3, Sc_2O_3 and Lu_2O_3 solid solutions nanopowders // Opt. Mater. – 2018. – Т. 77. – С. 240-245.

10. Pirri A. et al. Achievements and future perspectives of the trivalent thulium-ion-doped mixed-sesquioxide ceramics for laser applications // Materials. – 2022. – Т. 15. – №. 6. – С. 2084.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 273-283.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 273-283.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91+519.65

Conference paper

SPECTRA OF THE ENERGY OPERATOR OF SIX-ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL. THIRD TRIPLET STATE

Sa'dulla M. Tashpulatov✉
Institute of Nuclear Physics of the Academy of Science of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
sadullatashpulatov@yandex.ru✉*, toshpul@mail.ru*

Abstract. *We consider the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system for third triplet state.*

Keywords: *Hubbard model, six-electron systems, spectra, discrete spectrum, essential spectrum, octet state, quintet state, triplet states, singlet states.*

1. Introduction

In 1963, three papers [1]-[3] appeared almost simultaneously and independently, where a simple model of a metal was proposed that has become fundamental in the theory of strongly correlated electron systems. The model considers a single nondegenerate electron band with local Coulomb interaction. The Hamiltonian of the model contains only two parameters: the parameter B of electron hopping from a lattice site to a neighboring site and the parameter U of the on-site Coulomb repulsion of two electrons. In the secondary quantization representation, the Hamiltonian is written as $H = B\sum_{m,\tau,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}\, a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^{+}_{m,\uparrow}\, a_{m,\uparrow} a^{+}_{m,\downarrow} a_{m,\downarrow}$. Here $a^{+}_{m,\gamma}$ $(a_{m,\gamma})$ denotes the Fermi operator of the creation (annihilation) of an electron with spin γ at a site $m \in Z^{\nu}$, here Z^{ν} ν −dimensional integer valued lattice, and summation over τ means summation over nearest neighbors in the lattice. The model proposed in [1]-[3] was called the Hubbard model after John Hubbard, who made a fundamental contribution to studying the statistical mechanics of that system, although the local form of Coulomb interaction was first introduced for an impurity model in a metal by Anderson [4]. We also recall that the Hubbard model is a particular case of the Shubin-Wonsowsky polaron model [5], which had appeared 30 years before [1]-[3]. In the Shubin-Wonsowsky model, along with the on-site Coulomb interaction, the interaction of electrons on neighboring sites is also taken into account. Currently, the Hubbard model is one of the most intensively studied multielectron models of a metal (see [6–8], as well as Chapter III of [9]). The survey

© Tashpulatov S.M., 2023

[7] summarizes the results obtained for the Hubbard model. The more progress is made in obtaining theoretical solutions, the clearer it becomes that this simple model can exhibit a striking array of phases and regimes, many of which have explicit parallels with the observed behavior of a wide range of complex materials. For example, there is compelling evidence that ferromagnetism, various forms of antiferromagnetism, unconventional superconductivity, charge density waves, electronic liquid crystal phases, and topologically ordered phases (such as "spin liquids"), among other phases, occur in specific implementations of the Hubbard model. The role of the Hubbard model in the study of high temperature superconductivity in cuprites is discussed in [7]. It is also shown that the positive eigenvalues in the Hubbard model (corresponding to repulsive effective interactions) weaken, while the negative ones increase. The various eigenfunctions correspond to, but are not fully determined by the irreducible crystal point group representation in the Hubbard model. Obtaining exact results for the spectrum and wave functions of a crystal described by the Hubbard model is of great interest. The spectrum and wave functions of a two- and three electron systems in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [10] and [11], respectively. It is known that three-electron systems can be in three states: quartet (one type) and doublet (two types) states [11]. The spectrum and wave functions of a four-electron system in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian in the triplet state of the system were studied in [12]. Four-electron systems can be in six states: quintet (one type), triplet (three types), and singlet (two types) states [12]. The following basis functions correspond to triplet states: ${}^{1}t^{1}_{m,n,p,r} = a^{+}_{m,\uparrow}a^{+}_{n,\uparrow}a^{+}_{p,\uparrow}a^{+}_{r,\downarrow}\varphi_0$, ${}^{2}t^{1}_{m,n,p,r} = a^{+}_{m,\uparrow}a^{+}_{n,\uparrow}a^{+}_{p,\downarrow}a^{+}_{r,\uparrow}\varphi_0$, ${}^{3}t^{1}_{m,n,p,r} = a^{+}_{m,\uparrow}a^{+}_{n,\downarrow}a^{+}_{p,\uparrow}a^{+}_{r,\uparrow}\varphi_0$. In this notation, t is a triplet state, the left superscripts 1, 2, and 3 are the corresponding numbers of these triplet states, and the superscript 1 mean that the total spin of the system in triplet states is 1. We see that there are three types of triplet states here and they have different origins. The spectrum and wave functions of a four-electron system in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian in the quintet and singlet states of the system were studied in [13]. The quintet state corresponds to the free movements of four electrons in a lattice with the following basis functions: $q^{2}_{m,n,p,r} = a^{+}_{m,\uparrow}a^{+}_{n,\uparrow}a^{+}_{m,\uparrow}a^{+}_{m,p}a^{+}_{m,\uparrow}a^{+}_{r,\uparrow}\varphi_0$. Here q is a quintet state, and the superscript 2 means that the total spin of the system in the quintet state equals 2. It was proved in [13] that the spectrum of the system in the quintet state is purely continuous and coincides with the closed interval $[4A - 8B\nu, 4A + 8B\nu]$; in addition, there are no four-electron bound states or four-electron antibound states in the system. The singlet state corresponds to the following basis functions: ${}^{1}s^{0}_{p,q,r,t} = a^{+}_{p,\uparrow}a^{+}_{q,\uparrow}a^{+}_{r,\downarrow}a^{+}_{t,\downarrow}\varphi_0$, ${}^{2}s^{0}_{p,q,r,t} = a^{+}_{p,\uparrow}a^{+}_{q,\downarrow}a^{+}_{r,\uparrow}a^{+}_{t,\downarrow}$. Here s is a singlet state, and 0 means that the total spin of the system in singlet states is 0, and these two singlet states have different origins. In five-electron systems, there are a sextet state, five types of doublet states, and four types of quartet states. The structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of five-electron systems in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian in the doublet states were studied in [14]. The structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the operator of six-electron systems in the Hubbard model for the first quintet state and the first

singlet state were studied in [15] (note that the history of the problem was also described in detail there). We prove that the spectrum of a six-electron octet is purely continuous and consists of the closed interval $[6A-12B\nu, 6A+12B\nu]$, where ν is the dimension of the lattice Z^{ν}. We denote by ${}^{1}\widetilde{H}_{2}^{q}$ the first six-electron quintet; here q is a quintet state, the left superscript 1 is the index of the quintet state under consideration, and the subscript 2 indicates that the total spin of the system in quintet states equals 2. In [15] we also proved that if $\nu=1$ and $U<0$ $(U>0)$, then the essential spectrum of the first six-electron quintet state operator ${}^{1}\widetilde{H}_{2}^{q}$ is the union of seven closed intervals, and the discrete spectrum of this operator consists of at most one eigenvalue; i.e., the discrete spectrum of ${}^{1}\widetilde{H}_{2}^{q}$ either consists of a single eigenvalue or is empty. If $\nu=3$ and $U<0$ $(U>0)$, then there are four options: (1) the essential spectrum of the first six-electron quintet state operator ${}^{1}\widetilde{H}_{2}^{q}$ is the union of seven closed intervals, and its discrete spectrum consists of at most one eigenvalue, i.e., either consists of a single eigenvalue or is empty; (2) the essential spectrum of ${}^{1}\widetilde{H}_{2}^{q}$ is the union of four closed intervals, and its discrete spectrum is empty; (3) the essential spectrum of ${}^{1}\widetilde{H}_{2}^{q}$ is the union of two closed intervals, and its discrete spectrum is empty; (4) the essential spectrum of ${}^{1}\widetilde{H}_{2}^{q}$ is a closed interval, and its discrete spectrum is empty. Similar results were proved for the first singlet state of the system ${}^{1}\widetilde{H}_{0}^{s}$ (here s is a singlet state, and 0 means that the total spin of the system is 0). In this paper we continue the research begun earlier in [11–15]. It should be noted that the results of studying the structures of the essential and discrete spectra of the energy operator of the six-electron third triplet state are very different from the results of [15].

2. Hamiltonian of the system

We consider the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model and described the structure of the essential spectra and discrete spectrum of the system for third triplet state in the lattice. The Hamiltonian of the model has the form (1). The third triplet state corresponds six-electron bound states (or antibound states) to the basis functions: $3_{t}{}^{1}_{p,q,r,k,l,n}=a^{+}_{p,\uparrow}a^{+}_{q,\uparrow}a^{+}_{r,\uparrow}a^{+}_{k,\downarrow}a^{+}_{l,\downarrow}a^{+}_{n,\uparrow}\varphi_{0}$. The subspace ${}^{3}\widetilde{\mathcal{H}}_{t}^{1}$, corresponding to the third triplet state is the set of all vectors of the form $3_{\psi}{}^{1}_{t}=\sum_{p,q,r,k,l,n}f(p,q,r,k,l,n)3_{t}{}^{1}_{p,q,r,k,l,n}$, $f\in l_{2}^{as}$, where l_{2}^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $l_{2}((Z^{\nu})^{6})$. In this case, the Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space $3_{\widetilde{\mathcal{H}}}{}^{1}_{t}$. Let φ_{0} be the vacuum vector in the antisymmetric Fock space ${}^{3}\widetilde{\mathcal{H}}_{t}^{1}$. Let $3_{\widetilde{H}}{}^{1}_{t}$ be the restriction H to the subspace $3_{\widetilde{\mathcal{H}}}{}^{1}_{t}$. The third triplet state corresponds the free motion of six-electrons in the lattice and their interactions. In the six-electron systems exists octet state and quintet, triplet, and singlet states. The energy of the system depends on its total spin S. Hamiltonian (1) commutes with all components of the total spin operator $S=(S^{+},S^{-},S^{z})$, and the structure of eigenfunctions and eigenvalues of the system therefore depends on S. The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fo'ck space $\mathcal{H}_{as}$.

3. Third Triplet state

Let φ_{0} be the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$.

Theorem 1. The subspace $3_{\widehat{\mathcal{H}}_t}^1$ is invariant under the operator H, and the restriction $3_{\widehat{H}_t}^1$ of operator H to the subspace $3_{\widehat{\mathcal{H}}_t}^1$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator $3_{\bar{H}_t}^1$ acting in the space l_2^{as} as

$$\left(3_{\bar{H}_t}^1 f\right)(p,q,r,k,l,n) = 6Af(p,q,r,k,l,n) + B\sum_\tau[f(p+\tau,q,r,k,l,n) + f(p,q+\tau,r,k,l,n) + f(p,q,r+\tau,k,l,n) + f(p,q,r,k+\tau,l,n) + f(p,q,r,k,l+\tau,n) + f(p,q,r,k,l,n+\tau)] + U[\delta_{p,k} + \delta_{p,l} + \delta_{q,k} + \delta_{q,l} + \delta_{r,k} + \delta_{r,l} + \delta_{k,n} + \delta_{l,n}]f(p,q,r,k,l,n). \quad (2)$$

The operator $3_{\bar{H}_t}^1$ acts on a vector $3_{\psi_t}^1 \in 3_{\widehat{\mathcal{H}}_t}^1$ as

$$3_{H_t}^1 3_{\psi_t}^1 = \sum_{p,q,r,k,l,n\in Z^\nu}\left(3_{\bar{H}_t}^1 f\right)(p,q,r,k,l,n)3_{t_{p,q,r,k,l,n}}^1. \quad (3)$$

Lemma 1. The spectra of the operators $3_{H_t}^1$ and $3_{\bar{H}_t}^1$ coincide. [16]

We call the operator $3_{H_t}^1$ the six-electron third triplet state operator in the Hubbard model. Let $\mathcal{F}: l_2((Z^\nu)^6) \to L_2((T^\nu)^6) \equiv 3_{\widehat{\mathcal{H}}_t}^1$ be the Fourier transform, where T^ν is the $\nu-$ dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, i.e. $\lambda(T^\nu) = 1$. We set $3_{\widetilde{H}_t}^1 = \mathcal{F}3_{\bar{H}_t}^1\mathcal{F}^{-1}$. In the quasimomentum representation, the operator $3_{\bar{H}_t}^1$ acts in the Hilbert space $L_2^{as}((T^\nu)^6)$, where L_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^6)$.

Theorem 2. The Fourier transform of operator $3_{\bar{H}_t}^1$ is an operator $3_{\widetilde{H}_t}^1 = \mathcal{F}3_{\bar{H}_t}^1\mathcal{F}^{-1}$, acting in the space $3_{\widehat{\mathcal{H}}_t}^1$ be the formula

$$3_{\widetilde{H}_t}^1 3_{\psi_t}^1 = h(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi)f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi) + U\int_{T^\nu}[f(s,\mu,\gamma,\lambda+\theta-s,\eta,\xi) + f(\lambda,s,\gamma,\mu+\theta-s,\eta,\xi) + f(\lambda,\mu,s,\gamma+\theta-s,\eta,\xi) + f(\lambda,\mu,\gamma,s,\eta,\theta+\xi-s) + f(s,\mu,\gamma,\theta,\lambda+\eta-s,\xi) + f(\lambda,s,\gamma,\theta,\mu+\eta-s,\xi) + f(\lambda,\mu,s,\theta,\gamma+\eta-s,\xi) + f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,s,\eta+\xi-s)]ds \quad (4)$$

where $h(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi) = 6A + 2B\sum_{i=1}^\nu[cos\lambda_i + cos\mu_i + cos\gamma_i + cos\theta_i + cos\eta_i + cos\xi_i]$.

The spectral properties of six-electron systems in the Hubbard model in the third triplet state are closely related to those of its two-electron subsystems. Taking into account that the function $f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi)$ is antisymmetric, and using tensor products of Hilbert spaces and tensor products of operators in Hilbert spaces [17], we verify that the operator $3_{\widetilde{H}_t}^1$ can be represented in the form

$$3_{\widetilde{H}_t}^1 3_{\psi_t}^1 = \widetilde{H}_2^1 \otimes I \otimes I + I \otimes \widetilde{H}_2^2 \otimes I + I \otimes I \otimes \widetilde{H}_2^3, \quad (5)$$

where

$$(\widetilde{H}_2^1 f)(\lambda,\mu) = \{2A + 2B\sum_{i=1}^\nu[cos\lambda_i + cos\mu_i]f(\lambda,\mu) + U\int_{T^\nu} f(s,\gamma+\theta-s)ds +$$

$$+U\int_{T^\nu} f(s,\mu+\eta-s)ds,$$

$$(\widetilde{H}_2^2 f)(\gamma,\theta) = \left\{2A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[cos\gamma_i + cos\theta_i\right]f(\gamma,\theta) - U\int_{T^\nu} f(s,\mu+\theta-s)ds -$$

$-U\int_{T^\nu} f(s,\theta+\xi)ds - U\int_{T^\nu} f(s,\lambda+\eta-s)ds,$

$\left(\widetilde{H}_2^3 f\right)(\eta,\xi) = \{2A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[cos\eta_i + cos\xi_i]f(\eta,\xi) + U\int_{T^\nu} f(s,\lambda+\theta-s)ds -$

$-U\int_{T^\nu} f(s,\gamma+\eta-s)ds + U\int_{T^\nu} f(s,\eta+\xi-s)ds$, and I is the unit operators in the two-electron spaces $\widetilde{\mathcal{H}}_2$.

4. Structure of essential spectrum and discrete spectrum of operator $3_{\widetilde{H}_t^1}$

We first investigated the spectrum of operators $\widetilde{H}_2^1$, $\widetilde{H}_2^2$ and $\widetilde{H}_2^3$. Now, using the obtained results and representation (5), we describe the structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the operator $3_{\widetilde{H}_t^1}$. We must therefore investigate the spectrum and bound states or anti bound states of the operators $\widetilde{H}_2^1$, $\widetilde{H}_2^2$ and $\widetilde{H}_2^3$. All parameters $\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi$ and s a changed in the $\nu-$ dimensional torus T^ν, because all integral's $\int_{T^\nu} f_{\Lambda_i}(s)ds$ are equal. We denote $\Lambda_1 = \lambda+\mu$, $\Lambda_2 = \gamma+\theta$ and $\Lambda_3 = \mu+\eta$. Let the total quasimomentum of the two-electron system $\lambda+\mu = \Lambda_1$ be fixed. We let $L_2(\Gamma_{\Lambda_1})$ denote the space of functions that are square integrable on the manifold $\Gamma_{\Lambda_1} = \{(\lambda,\mu): \lambda+\mu = \Lambda_1\}$. It is known (see. [16], chapter II, PP. 63-84, and [17], chapter XIII, paragraph 16, PP. 303-341) that the operator $\widetilde{H}_2^1$ and the space $\widetilde{\mathcal{H}}_2 \equiv L_2((T^\nu)^2)$ can be decomposed into a direct integral of operators $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ and spaces $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda_1} = L_2\left(\Gamma_{\Lambda_1}\right)$, $\widetilde{H}_2^1 = \oplus\int_{T^\nu} \widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1 d\Lambda_1$, $\widetilde{\mathcal{H}}_2 = \oplus\int_{T^\nu} \widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda_1} d\Lambda_1$, such that the spaces $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda_1}$ are invariant with respect to the operators $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, and each operator $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ acts in space $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda_1}$ according to the formula

$\left(\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1 f_{\Lambda_1}\right)(\lambda) = \left\{2A + 4B\sum_{i=1}^{\nu} cos\frac{\Lambda_1^i}{2}\cos\left(\frac{\Lambda_1^i}{2}-\lambda_i\right)\right\} f_{\Lambda_1}(\lambda) + 2U\int_{T^\nu} f_{\Lambda_1}(s)ds,$

where $f_{\Lambda_1}(\lambda) = f(\lambda,\Lambda-\lambda)$. It is known that the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ is independent of U and coincides with the segment $\left[m_{\Lambda_1}^\nu, M_{\Lambda_1}^\nu\right]$, where $m_{\Lambda_1}^\nu = inf_{x\in T^\nu} h_{\Lambda_1}(x)$, $M_{\Lambda_1}^\nu = sup_{x\in T^\nu} h_{\Lambda_1}(x)$, here $h_{\Lambda_1}(x) = 2A + 4B\sum_{i=1}^{\nu} cos\frac{\Lambda_1^i}{2}\cos\left(\frac{\Lambda_1^i}{2}-x_i\right)$.

Defination 1. *The eigenfunction $\varphi_{\Lambda_1} \in L_2(T^\nu\times T^\nu)$ of the operator $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ corresponding to an eigenvalue $z_{\Lambda_1} \in \left[m_{\Lambda_1}^\nu, M_{\Lambda_1}^\nu\right]$ is called a bound state (BS) or antibound state (ABS) of operator $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ with the quasimomentum Λ_1, and z_{Λ_1} is called the energy of this state.*

We set $\Delta_{\Lambda_1}^\nu(z) = 1 + 2U\int_{T^\nu} \frac{ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{2A+4B\sum_{i=1}^{\nu} cos\frac{\Lambda_1^i}{2}\cos\left(\frac{\Lambda_1^i}{2}-s_i\right)-z}$.

Lemma 2. *The number $z = z_0$ not belonging to the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^1$ is an eigenvalue of that operator if and only if it is a zero of the function $\Delta_{\Lambda_1}^\nu(z)$, i.e., $\Delta_{\Lambda_1}^\nu(z_0) = 0$.*

We consider the one-dimensional case.

Theorem 3. ***a).*** *If $\nu = 1$ and $U < 0$, then the operator $\widetilde{H}_2^1$ has a unique eigenvalue $z_1 = 2A - 2\sqrt{U^2 + 4B^2 cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, that is below the continuous spectrum of $\widetilde{H}_2^1$.*

b). *If* $\nu = 1$ *and* $U > 0$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^1$ *has a unique eigenvalue* $\tilde{z}_1 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2 cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}$ *that is above the continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^1$.

Theorem 4. ***a).*** *If* $\nu = 2$ *and* $U < 0$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^1$ *has a unique eigenvalue* z_1 *that is below the continuous spectrum of* $\widetilde{H}_2^1$, *i.e.,* $z_1 < m_{\Lambda_1}^2$.

b). *If* $\nu = 2$ *and* $U > 0$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^1$ *has a unique eigenvalue* $\tilde{z}_1$ *that is above the continuous spectrum of* $\widetilde{H}_2^1$, *i.e.,* $\tilde{z}_1 > M_{\Lambda_1}^2$.

In the three-dimensional case, the operator $\widetilde{H}_2^1$ for some values of the parameters in the Hamiltonian has a unique eigenvalue z_1 such that $z_1 < m_{\Lambda_1}^3$.

We consider the Watson integral $W = \frac{1}{\pi^3}\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{3dxdydz}{3-cosx-cosy-cosz} \approx 1{,}516$.

Because the measure $d\lambda$ is normalized, $J = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dxdydz}{3-cosx-cosy-cosz} = \frac{W}{3}$.

Theorem 5. If $\nu = 3$ *and the total quasimomentum* Λ_1 *of the system have the form* $\Lambda_1 = (\Lambda_1^1, \Lambda_1^2, \Lambda_1^3) = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$. *Then*

a). *If* $U < 0$, *and* $U < -\frac{6Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^1$ *has a unique eigenvalue* z_1, *that the below of continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^1$. *Otherwise, the operator* $\widetilde{H}_2^1$ *has no eigenvalue below the continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^1$.

b). *If* $U > 0$, *and* $U > \frac{6Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^1$ *has a unique eigenvalue* $\tilde{z}_1$, *that the above of continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^1$. *Otherwise, the operator* $\widetilde{H}_2^1$ *has no eigenvalue above the continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^1$.

We denote $\Lambda_4 = \mu + \theta$, $\Lambda_5 = \theta + \xi$, and $\Lambda_6 = \lambda + \eta$. Then $\widetilde{H}_2^2$ has the form: $\left(\widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2 f_{\Lambda_2}\right)(\gamma) = \left\{2A + 4B\sum_{i=1}^{\nu} cos\frac{\Lambda_2^i}{2}\cos\left(\frac{\Lambda_2^i}{2} - \gamma_i\right)\right\} f_{\Lambda_2}(\gamma) - 3U\int_{T^\nu} f_{\Lambda_2}(s)ds$.

It is known that the continuous spectrum of $\widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ is independent of U and coincides with the segment $\left[m_{\Lambda_2}^\nu, M_{\Lambda_2}^\nu\right]$, where $m_{\Lambda_2}^\nu = inf_{x\in T^\nu} h_{\Lambda_2}(x)$, $M_{\Lambda_2}^\nu = sup_{x\in T^\nu} h_{\Lambda_2}(x)$, here $h_{\Lambda_2}(x) = 2A + 4B\sum_{i=1}^{\nu} cos\frac{\Lambda_2^i}{2}\cos\left(\frac{\Lambda_2^i}{2} - x_i\right)$.

We set $\Delta_{\Lambda_2}^\nu(z) = 1 - 3U\int_{T^\nu} \frac{ds_1 ds_2 \ldots ds_\nu}{2A+4B\sum_{i=1}^{\nu} cos\frac{\Lambda_2^i}{2}\cos\left(\frac{\Lambda_2^i}{2}-s_i\right)-z}$.

Theorem 6. ***a).*** *If* $\nu = 1$ *and* $U < 0$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^2$ *has a unique eigenvalue* $z_2 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2 cos^2 \frac{\Lambda_2}{2}}$ *that is above the continuous spectrum of* $\widetilde{H}_2^2$.

b). *If* $\nu = 1$ *and* $U > 0$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^2$ *has a unique eigenvalue* $\tilde{z}_1 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2 cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}$ *that is below the continuous spectrum of* $\widetilde{H}_2^2$.

Theorem 7. ***a).*** *If* $\nu = 2$ *and* $U < 0$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^2$ *has a unique eigenvalue* z_2 *that is above the continuous spectrum of* $\widetilde{H}_2^2$, *i.e.,* $z_2 > M_{\Lambda_2}^2$.

b). *If* $\nu = 2$ *and* $U > 0$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^2$ *has a unique eigenvalue* $\tilde{z}_2$ *that is below the continuous spectrum of* $\widetilde{H}_2^2$, *i.e.,* $\tilde{z}_2 < m_{\Lambda_2}^2$.

In the three-dimensional case, the operator $\widetilde{H}_2^2$ for some values of the parameters in the Hamiltonian has a unique eigenvalue z_2 such that $z_2 < m_{\Lambda_2}^3$.

Theorem 8. If $\nu = 3$ *and the total quasimomentum* Λ_2 *of the system have the form* $\Lambda_2 = (\Lambda_2^1, \Lambda_2^2, \Lambda_2^3) = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$. *Then*

a). *If* $U > 0$, *and* $U > \frac{4Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^2$ *has a unique eigenvalue* z_2, *that the below of continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^2$. *Otherwise, the operator* $\widetilde{H}_2^2$ *has no eigenvalue below the continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^2$.

b). *If* $U < 0$, *and* $U < -\frac{4Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^2$ *has a unique eigenvalue* $\tilde{z}_2$, *that the above of continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^2$. *Otherwise, the operator* $\widetilde{H}_2^2$ *has no eigenvalue above the continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^2$.

We denote $\Lambda_7 = \eta + \xi$, $\Lambda_8 = \lambda + \theta$, and $\Lambda_9 = \gamma + \eta$. Then operator $\widetilde{H}_2^3$ has the form: $\left(\widetilde{H}_{2\Lambda_7}^3 f_{\Lambda_7}\right)(\eta) = \left\{2A + 4B\sum_{i=1}^{\nu} cos\frac{\Lambda_7^i}{2}\cos\left(\frac{\Lambda_7^i}{2} - \eta_i\right)\right\} f_{\Lambda_7}(\eta) + U\int_{T^\nu} f_{\Lambda_7}(s)ds$.

It is known that the continuous spectrum of $\widetilde{H}_{2\Lambda_7}^3$ is independent of U and coincides with the segment $\left[m_{\Lambda_7}^\nu, M_{\Lambda_7}^\nu\right]$, where $m_7^\nu = inf_{x\in T^\nu} h_{\Lambda_7}(x)$, $M_{\Lambda_7}^\nu = sup_{x\in T^\nu} h_{\Lambda_7}(x)$,

here $h_{\Lambda_7}(x) = 2A + 4B\sum_{i=1}^{\nu} cos\frac{\Lambda_7^i}{2}\cos\left(\frac{\Lambda_7^i}{2} - x_i\right)$.

We set $\Delta_{\Lambda_7}^\nu(z) = 1 + U\int_{T^\nu} \frac{ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{2A+4B\sum_{i=1}^{\nu} cos\frac{\Lambda_7^i}{2}\cos\left(\frac{\Lambda_7^i}{2} - s_i\right) - z}$.

Theorem 9. ***a).*** *If* $\nu = 1$ *and* $U < 0$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^3$ *has a unique eigenvalue* $z_3 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2 cos^2\frac{\Lambda_7}{2}}$ *that is below the continuous spectrum of* $\widetilde{H}_2^3$.

b). *If* $\nu = 1$ *and* $U > 0$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^3$ *has a unique eigenvalue* $\tilde{z}_3 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2 cos^2\frac{\Lambda_7}{2}}$ *that is above the continuous spectrum of* $\widetilde{H}_2^3$.

Theorem 10. ***a).*** *If* $\nu = 2$ *and* $U < 0$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^3$ *has a unique eigenvalue* z_3 *that is below the continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^3$, *i.e.,* $z_2 < m_{\Lambda_7}^2$.

b). *If* $\nu = 2$ *and* $U > 0$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^3$ *has a unique eigenvalue* $\tilde{z}_3$ *that is above the continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^3$, *i.e.,* $\tilde{z}_3 > M_{\Lambda_7}^2$.

In the three-dimensional case, the operator $\widetilde{H}_2^3$ for some values of the parameters in the Hamiltonian has a unique eigenvalue z_3 such that $z_3 < m_{\Lambda_7}^3$.

Theorem 11. If $\nu = 3$ *and the total quasimomentum* Λ_7 *of the system have the form* $\Lambda_7 = (\Lambda_7^1, \Lambda_7^2, \Lambda_7^3) = (\Lambda_7^0, \Lambda_7^0, \Lambda_7^0)$. *Then*

a). *If* $U > 0$, *and* $U > \frac{12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}}{W}$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^3$ *has a unique eigenvalue* $\tilde{z}_3$ *that the above of continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^3$. *Otherwise, the operator* $\widetilde{H}_2^3$ *has no eigenvalue above the continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^3$.

b). *If* $U < 0$, *and* $U < -\frac{12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}}{W}$, *then the operator* $\widetilde{H}_2^3$ *has a unique*

eigenvalue z_3, *that the below of continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^3$. *Otherwise, the operator* $\widetilde{H}_2^3$ *has no eigenvalue below the continuous spectrum of operator* $\widetilde{H}_2^3$.

5. The main results

Now, using the obtained results and representation (5), we describe the structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$.

Theorem 12. ***a).*** *If* $\nu = 1$ *and* $U < 0$, *then the essential spectrum of the system of third triplet-state operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is exactly the union of seven segments:* $\sigma_{ess}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + c + z_3, b + d + z_3] \cup [a + e + z_2, b + f + z_2] \cup [a + z_2 + z_3, b + z_2 + z_3] \cup [c + e + z_1, d + f + z_1] \cup [c + z_1 + z_3, d + z_1 + z_3] \cup [e + z_1 + z_2, f + z_1 + z_2]$. *The discrete spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of no more one point:* $\sigma_{disc}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = \{z_1 + z_2 + z_3\}$, *or* $\sigma_{disc}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = \emptyset$. *Here, and hereafter,* $a = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $b = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $c = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $d = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $e = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_7}{2}$, $f = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_7}{2}$, $z_1 = 2A - 2\sqrt{U^2 + 4B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $z_2 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, *and* $z_3 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_7}{2}}$.

b). *If* $\nu = 1$ *and* $U > 0$, *then the essential spectrum of the system of third triplet-state operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is exactly the union of seven segments:* $\sigma_{ess}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + c + \tilde{z}_3, b + d + \tilde{z}_3] \cup [a + e + \tilde{z}_2, b + f + \tilde{z}_2] \cup [a + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3, b + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3] \cup [c + e + \tilde{z}_1, d + f + \tilde{z}_1] \cup [c + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_3, d + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_3] \cup [e + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, f + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2]$. *The discrete spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of no more one point:* $\sigma_{disc}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = \{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3\}$ *or* $\sigma_{disc}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = \emptyset$. *Here* $\tilde{z}_1 = 2A + 2\sqrt{U^2 + 4B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $\tilde{z}_2 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, *and* $\tilde{z}_3 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_7}{2}}$.

Theorem 13. ***a).*** *If* $\nu = 2$ *and* $U < 0$, *then the essential spectrum of the system of third triplet-state operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is exactly the union of seven segments:* $\sigma_{ess}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + c + z_3, b + d + z_3] \cup [a + e + z_2, b + f + z_2] \cup [a + z_2 + z_3, b + z_2 + z_3] \cup [c + e + z_1, d + f + z_1] \cup [c + z_1 + z_3, d + z_1 + z_3] \cup [e + z_1 + z_2, f + z_1 + z_2]$. *The discrete spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of no more one point:* $\sigma_{disc}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = \{z_1 + z_2 + z_3\}$, *or* $\sigma_{disc}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = \emptyset$. *Here, and hereafter,* $a = 2A - 4B\left(\cos\frac{\Lambda_1^1}{2} + \cos\frac{\Lambda_1^2}{2}\right)$, $b = 2A + 4B\left(\cos\frac{\Lambda_1^1}{2} + \cos\frac{\Lambda_1^2}{2}\right)$, $c = 2A - 4B\left(\cos\frac{\Lambda_2^1}{2} + \cos\frac{\Lambda_2^2}{2}\right)$, $d = 2A + 4B\left(\cos\frac{\Lambda_2^1}{2} + \cos\frac{\Lambda_2^2}{2}\right)$, $e = 2A - 4B\left(\cos\frac{\Lambda_7^1}{2} + \cos\frac{\Lambda_7^2}{2}\right)$, $f = 2A + 4B\left(\cos\frac{\Lambda_7^1}{2} + \cos\frac{\Lambda_7^2}{2}\right)$, z_1, z_2, *and* z_3 *are the eigenvalues of operator's, correspondingly* $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, $\widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2$, $\widetilde{H}_{2\Lambda_7}^3$.

b). *If* $\nu = 2$ *and* $U > 0$, *then the essential spectrum of the system of third triplet-state operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is exactly the union of seven segments:* $\sigma_{ess}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + c + \tilde{z}_3, b + d + \tilde{z}_3] \cup [a + e + \tilde{z}_2, b + f + \tilde{z}_2] \cup [a + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3, b + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3] \cup [c + e + \tilde{z}_1, d + f + \tilde{z}_1] \cup [c + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_3, d + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_3] \cup [e + +\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, f + z_1 + \tilde{z}_2]$. *The discrete spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of no more one point:* $\sigma_{disc}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = \{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3\}$, *or* $\sigma_{disc}\left({}^2\widetilde{H}_t^1\right) = \emptyset$. *Here* $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$, *and* $\tilde{z}_3$ *are the eigenvalues of operator's, correspondingly* $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, $\widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2$, $\widetilde{H}_{2\Lambda_5}^3$.

Let $\nu = 3$ and $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$, and $\Lambda_7 = (\Lambda_7^0, \Lambda_7^0, \Lambda_7^0)$.

Theorem 14. *The following statements hold:*

1. *Let* $U < 0$ *and* $U < -\frac{6Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, *and* $\frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2}$, *or* $\frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *or* $U < 0$ *and* $U < -\frac{4Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, *and* $\frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2}$, *or* $\frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, *or* $U < 0$ *and* $U < -\frac{12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}}{W}$, $cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *or* $cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$. *Then the essential spectrum of the system third triplet-state operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is the union of seven segments:* $\sigma_{ess}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3, b_1 + d_1 + z_3] \cup a_1 + e_1 + z_2, b_1 + f_1 + z_2] \cup [a_1 + z_2 + z_3, b_1 + z_2 + z_3] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1] \cup [c_1 + z_1 + z_3, d_1 + z_1 + z_3] \cup [e_1 + z_1 + z_2, f_1 + z_1 + z_2]$. *The discrete spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_t^1$ *is consists no more one point:* $\sigma_{disc}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = \{z_1 + z_2 + z_3\}$, *or* $\sigma_{disc}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = \emptyset$. *Here and hereafter,* $a_1 = 2A - 12Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, $b_1 = 2A + 12Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, $c_1 = 2A - 12Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}, d_1 = 2A + 12Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}, e_1 = 2A - 12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}, f_1 = 2A + 12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}$, *and* z_1, z_2 *and* z_3 *are the eigenvalues of operator's, correspondingly* $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, $\widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2$, *and* $\widetilde{H}_{2\Lambda_7}^3$.

2. *Let* $U < 0$, *and* $-\frac{6Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \le U < -\frac{4Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, *and* $\frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2}$, *or* $U < 0$, *and* $-\frac{6Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \le U < -\frac{12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}}{W}$, *and* $\frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *or* $U < 0$, *and* $-\frac{4Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \le U < -\frac{6Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, *and* $\frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2}$, *or* $U < 0$, *and* $-\frac{4Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \le U < -\frac{12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}}{W}$, *and* $\frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, *or* $U < 0$, *and* $-\frac{12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}}{W} \le U < -\frac{4Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, *and* $cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, *or* $U < 0$, *and* $-\frac{12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}}{W} \le U < -\frac{6Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, *and* $cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{1}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$. *Then the essential spectrum of the system third triplet-state operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is the union of four segments:* $\sigma_{ess}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + z_2, b_1 + f_1 +$

$z_2] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1] \cup [e_1 + z_1 + z_2, f_1 + z_1 + z_2]$, *or* $\sigma_{ess}\left({}^2\widetilde{H}_t^1\right) = = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3, b_1 + d_1 + z_3] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1] \cup [c_1 + z_1 + z_3, d_1 + z_1 + z_3]$, *or* $\sigma_{ess}\left({}^2\widetilde{H}_t^1\right) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3, b_1 + d_1 + z_3] \cup [a_1 + e_1 + z_2, b_1 + f_1 + z_2] \cup [a_1 + z_2 + z_3, b_1 + z_2 + z_3]$, *and the discrete spectrum of the system third triplet-state operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is empty set:* $\sigma_{disc}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = \emptyset$.

3. *Let* $U < 0$, *and* $-\frac{4Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \le U < -\frac{12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}}{W}$, *and* $\frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2}$, *or* $U < 0$, *and* $-\frac{12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}}{W} \le U < -\frac{4Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, *and* $\frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *or* $U < 0$, *and* $-\frac{6Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \le U < -\frac{12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}}{W}$, *and* $\frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2}$, *or* $U < 0$, *and* $-\frac{12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}}{W} \le U < -\frac{6Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, *and* $\frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, *or* $U < 0$, *and* $-\frac{4Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \le U < -\frac{6Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, *and* $cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, *or* $U < 0$, *and* $-\frac{6Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \le U < -\frac{4Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, *and* $cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$. *Then the essential spectrum of the system third triplet-state operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is the union of two segment:* $\sigma_{ess}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + z_2, b_1 + f_1 + z_2]$, *or* $\sigma_{ess}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3, b_1 + d_1 + z_3]$, *or* $\sigma_{ess}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1]$, *and the discrete spectrum of the system third triplet-state operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is empty set.*

4. *Let* $U < 0$, *and* $-\frac{12Bcos\frac{\Lambda_7^0}{2}}{W} \le U < 0$, *and* $\frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2}$, *or* $\frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2}$, *or* $U < 0$, *and* $-\frac{6Bcos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \le U < 0$, *and* $\frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, *or* $cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *or* $U < 0$, *and* $-\frac{4Bcos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \le U < 0$, *and* $\frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *or* $cos\frac{\Lambda_7^0}{2} > \frac{1}{2}cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \frac{1}{3}cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$. *Then the essential spectrum of the system third triplet-state operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is consists of single segment:* $\sigma_{ess}\left({}^3\widetilde{H}_t^1\right) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1]$, *and the discrete spectrum of the system third triplet-state operator* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *is empty.*

There are similar theorems for the case, when $U > 0$.

References

1. Hubbard J. Electron correlations in narrow energy bands. Proc. Roy. Soc. A. 1963: 276: 238–257.
2. Gutzwiller M.C. Effect of Correlation on the Ferromagnetism of Transition Metals. Phys. Rev. Lett. 1963: 10: 159–162.

3. Kanamori J. Electron correlation and ferromagnetism of transition metals. Prog. Theor. Phys. 1963:30: 275–289.

4. Anderson P.W. Localized Magnetic States in Metals. Phys. Rev. 1961:124: 41–53.

5. Shubin S.P., Wonsovsky S.V. On the electron theory of metals. Proc. Roy. Soc. A. 1934: 145: 159–172.

6. Yu. A. Izyumov, The Hubbard model in the rejime of strong electronic correlations, Advances of physical sciences, 164. No. 4, (1995) 403-427.

7. P. Arovas Daniel, Berg Erez, A. Kivelson Steven, and Raghy Srinivas, The Hubbard Model, Annu. Rev. Condens.Matter Physics, 13. (2022). 239-274. https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys- 031620-102024

8. S. G. Ovchinnikov, E. I. Shnayder, Spectral functions of the Hubbard model in the case of half-filling, Solid StatePhysics, 48., No. 8, 1428-1432.

9. Yu. A. Izyumov, N.I. Chashin, D.S. Alekseev, Theory of strongly correlated systems. The method of the generating functional, [in Russian], Moscow-Ijevsk, (1995), 390 page

10. Karpenko B.V., Dyakin V.V, and Budrina G.L. Two electrons in the Hubbard Model. Phys. Met. Metallogr. 1986: 61: 702–706. (in Russian)

11. Tashpulatov S. M. Spectral Properties of three-electron systems in the Hubbard Model. Theoretical and Mathematical Physics. 2014: 179: No 3: 712–728.

12. Tashpulatov S. M. Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard Model. Journal Phys. Conf. Ser. 2016:697: 012025, 1–25.

13. Tashpulatov S. M. The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017: 38: No 3: 530–541.

14. Tashpulatov S. M. Structure of Essential Spectrum and Discrete Spectra of the Energy Operator of Five-Electron Systems in the Hubbard Model. Doublet State. series "Trends in Mathematics "Operator Theory and Differential Equations" 2021. Springer Nature, Switzerland: 275–301.

15. Tashpulatov S. M. Structure of Essential Spectra and Discrete Spectrum of the Energy Operator of Six-Electron Systems in the Hubbard Model. First Quintet and First Singlet States. Journal of Applied Mathematics and Physics.2022. Vol. 10, No 11, PP. 3424-3461. 10.4236/jamp.2022.1011227

16. Reed M., and Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1, Functional Analysis. Acad. Press, New York. 1972.

17. Reed M., and Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 4, Operator Analysis. Acad. Press, New York. 1982.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 284-304.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 284-304.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 530.145.85

ОБОБЩЕНИЯ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА, ШРЁДИНГЕРА И ДИРАКА НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДЛИННОВОЛНОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЦЕПОЧКЕ ВИНСЕНТА «МАССА В МАССЕ»

Валентин Олегович Турин[1]✉, Юлия Викторовна Илюшина[2], Павел Андреевич Андреев[3], Анастасия Юрьевна Черепкова[4], Данил Дмитриевич Киреев[5], Илья Владимирович Назрицкий[6], Ирина Владимировна Хусаинова[7], Ольга Александровна Сушич[8]

[1,3,4,5,6,7,8]Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, Орёл, Россия

[2]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

[1]voturin@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-0450-2481

Аннотация. *Классическая одномерная бесконечная цепочка «масса в массе», в случае бесконечно большой внутренней массы и в случае длинноволнового приближения (переход к сплошности), описывается уравнением Клейна-Гордона-Фока (КГФ). В нашей работе мы рассматриваем несколько изменённую цепочку «масса в массе», в которой добавлено гармоническое взаимодействие между соседними внутренними массами. В случае длинноволнового приближения мы получаем систему из двух уравнений, являющуюся обобщением уравнения КГФ. Но уравнение КГФ является и уравнением релятивистской квантовой механики. По аналогии между классическим уравнением КГФ и его квантово-релятивистским аналогом, мы переписали полученную систему из двух уравнений так, что она стала обобщением квантово-релятивистского уравнения КГФ. На основе полученной системы мы сконструировали обобщение уравнения Дирака для свободного электрона с восьмикомпонентной волновой функцией. В отличие от уравнения Дирака с четырёхкомпонентной волновой функцией, обладающего только «оптической» ветвью дисперсии, полученное нами обобщённое уравнение Дирака обладает как «оптической», так и «акустической» ветвями дисперсии, каждая из которых представлена ветвями с положительной и отрицательной энергиями. Для всех случаев вычислены фазовые и групповые скорости. Для положительной и отрицательной «акустической» ветвей фазовые и групповые скорости равны по модулю скорости света. Для положительной и*

© Турин В.О., Илюшина Ю.В., Андреев П.А., Черепкова А.Ю., 2023

отрицательной «оптических» ветвей фазовые и групповые скорости имеют структуру как у волн де Бройля. В одномерном случае получены восемь линейно независимых решений, соответствующих восьми возможным комбинациям двух ветвей дисперсии, двух знаков полной энергии и двух возможных направлений ориентации спина, каждое в виде четырёх плоских волн. Свойства этих решений проанализированы. Аналогично тому, как из квантово-релятивистского уравнения КГФ в нерелятивистском пределе получается нестационарное уравнение Шредингера, мы получили из системы уравнений, являющейся обобщением квантово-релятивистского уравнения КГФ, систему уравнений, являющуюся обобщением уравнения Шредингера.

Ключевые слова: *одномерная бесконечная цепочка «масса в массе», предел длинноволновых колебаний, акустические и оптические ветви дисперсии, обобщение уравнения Клейна-Гордона-Фока, обобщение уравнения Шрёдингера, обобщение уравнения Дирака, восьмикомпонентная волновая функция*

Финансирование: *работа выполнена в инициативном порядке*

Conference paper

GENERALIZATION OF THE QUANTUM MECHANICAL EQUATIONS OF KLEIN-GORDON-FOCK, SCHRODINGER AND DIRAC, BASED ON THE SYSTEM OF EQUATIONS WHICH DESCRIBES THE LONG-WAVE OSCILLATIONS IN THE MODIFIED VINCENT'S MASS-IN-MASS CHAIN

Valentin O. Turin[1]✉, Yulia V. Ilyushina[2], Pavel A. Andreev[3], Anastasia Yu. Cherepkova[4], Daniil D. Kireev[5], Iliya V. Nazritsky[6], Irina V. Khusainova[7], Olga A. Sushich[8]

[1,3,4,5,6,7,8]Orel State University, Orel, Russia

[2]Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

[1]voturin@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-0450-2481

Abstract. *The classical one-dimensional infinite chain "mass in mass", in the case of an infinitely large internal mass and in the case of a long-wave approximation (transition to continuity), is described by the Klein-Gordon-Fock (KGF) equation. In our work, we consider a slightly modified "mass in mass" chain, in which a harmonic interaction between neighboring internal masses is added. In the case of the long-wave approximation, which corresponds to the transition to a continuous medium, we obtain a system of two equations, which is a generalization of the KGF equation. But the KGF equation is also an equation of relativistic quantum mechanics. By analogy between the classical KGF equation and its quantum-relativistic analogue, we have constructed a system of two equations, which is a generalization of the quantum-relativistic KGF equation. Based on this system, we have constructed a generalization of the Dirac equation for a free electron with an eight-component wave function. Unlike the Dirac equation with a four-component wave function, which has only an "optical" branch of dispersion, the generalized Dirac equation obtained by us has both "optical" and*

"acoustic" branches of dispersion, each of which is represented by branches with positive and negative energies. Phase and group velocities are calculated for all cases. For the positive and negative "acoustic" branches, the phase and group velocities are equal in modulus to the speed of light. For the positive and negative "optical" branches, the phase and group velocities have a structure similar to that of de Broglie waves. In the one-dimensional case, eight linearly independent solutions corresponding to eight possible combinations of two branches of dispersion, two signs of total energy and two possible directions of spin orientation, each in the form of four plane waves, are obtained. The properties of these solutions are analyzed. Similarly, as the non-stationary Schrodinger equation is obtained from the quantum-relativistic KGF equation in the non-relativistic limit, we obtained from the system of equations, which is a generalization of the quantum-relativistic KGF equation, a system of equations, which is a generalization of the Schrodinger equation.

Keywords: *one-dimensional infinite chain "mass in mass", limit of long-wave oscillations, acoustic and optical branches of dispersion, generalization of the Klein-Gordon-Fock equation, generalization of the Schrodinger equation, generalization of the Dirac equation, eight-component wave function*

Funding: *the work was done on an initiative basis.*

1. Введение

Мы продолжаем исследование, начатое в работах [1, 2]. В работах [3, 4] рассматривается механическая система, представляющая из себя одномерную бесконечную цепочку «масса в массе» (см. рисунок 1 (а)). Эта система является простейшим механическим фильтром и реализует концепцию эффективной массы. Впервые предложенная и исследованная в 1898 году Винсентом [3], эта система продолжает вызывать интерес и на современном этапе. Например, в работах [5, 6] она подробно исследуется, а в работе [5] выведена система уравнений в частных производных для случая длинноволнового приближения, что соответствует переходу к сплошной среде. Отметим, что в случае $M \gg m$ можно считать, что груз массы m прикреплён пружиной жёсткости K к неподвижному положению равновесия, помеченному крестиком (см. рисунок 1(б)).

2. Модифицированная цепочка Винсента «масса в массе»

В нашей работе мы рассматриваем несколько изменённую цепочку Винсента (см. рисунок 1(в)). Мы ввели гармоническое взаимодействие между грузами с одинаковой массой M, добавив пружины с коэффициентом упругости J. Силу взаимодействия между грузами с разной массой считаем пропорциональной разности их смещений с коэффициентом пропорциональности K. Силу взаимодействия между соседними грузами с одинаковой массой m, при их смещениях из положения равновесия u_n, будем считать пропорциональной разности их смещений с коэффициентом пропорциональности I. А силу взаимодействия между соседними грузами с одинаковой массой M, при их смещениях из положения равновесия U_n, будем считать пропорциональной разности их смещений с коэффициентом пропорциональности J.

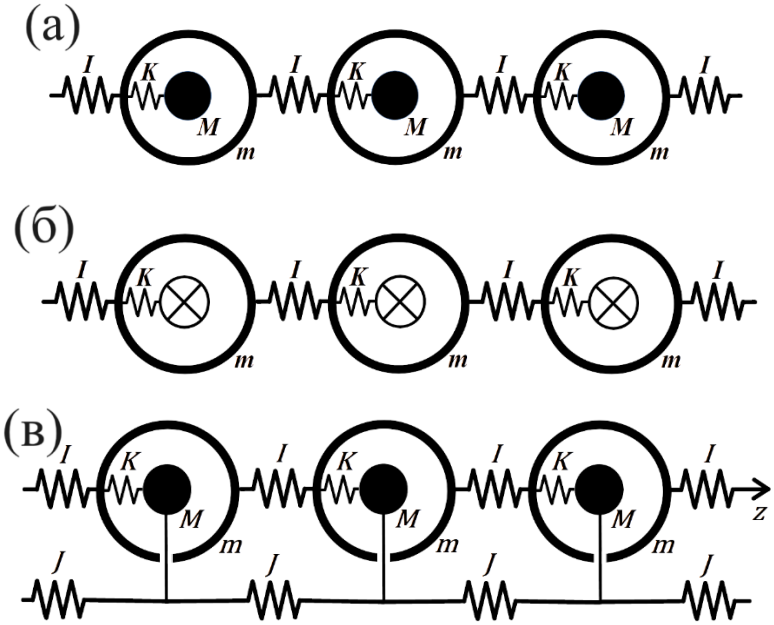


Рисунок 1. (а) Одномерная бесконечная цепочка «масса в массе». (б) Цепочка «масса в массе» в случае $M \gg m$ (положение равновесия груза m неподвижно и помечено крестиком). (в) Модифицированная цепочка «масса в массе» с добавлением гармонического взаимодействия между грузами с одинаковой массой M.

Координату положения равновесия n-го груза массы M обозначим $z_n = an$. При этом координата положения равновесия n-го груза массы m совпадает с координатой положения равновесия n-го груза массы M. Запишем второй закон Ньютона для n-ых грузов массы M и m. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m\frac{d^2u_n}{dt^2} = K(U_n - u_n) + I(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n) \\ M\frac{d^2U_n}{dt^2} = K(u_n - U_n) + J(U_{n-1} + U_{n+1} - 2U_n) \end{cases}. \quad (1)$$

Введём характерные частоты:

$$\omega_O = \sqrt{\frac{K}{m}},\ \omega_A = \sqrt{\frac{K}{M}},\ \omega_m = \sqrt{\frac{I}{m}},\ \omega_M = \sqrt{\frac{J}{M}}. \quad (2)$$

и характерные скорости:

$$s_m = a\omega_m\ ,\ \ s_M = a\omega_M\ . \quad (3)$$

Если рассматривать только длинноволновые колебания, то есть колебания с длиной волны, много большей периода цепочки ($\lambda = 2\pi/k \gg a$), то, в первом уравнении системы уравнений (1), используя разложение в ряд Тейлора до членов второго порядка малости, мы можем сделать замену:

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} \to \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad u_n = u(z_n) \to u,\ \ U_n = U(z_n) \to U,$$
$$u_{n-1} = u(z_n - a) \to u - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)a + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)a^2,$$
$$u_{n+1} = u(z_n + a) \to u + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)a + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)a^2.$$

По аналогии можно сделать замену и во втором уравнении. Получаем систему уравнений для соответствующей одномерной сплошной среды:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = s_m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \omega_O^2 (u - U) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = s_M^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \omega_A^2 (U - u) \end{cases}. \quad (4)$$

Отметим, что в случае $J = 0$ (при этом $s_M = 0$) система (4) совпадает с системой уравнений, выведенной в [5] для цепочки «масса в массе» (см. рисунок 1(а)). В работах [7, 8], при условии зануления коэффициентов нелинейности, тоже получается эта система в случае $J = 0$. В работе [9] рассматривается механическая система из двух упругих параллельных одинаковых струн, и полученная система уравнений совпадает по виду с системой (4) при том, что $s_m = s_M$ и $\omega_O = \omega_A$.

3. Уравнение Клейна-Гордона-Фока в классической механике и в релятивистской квантовой механике

В случае $M \gg m$ (или $\omega_A \ll \omega_O$) (см. рисунок 1(б)) вместо системы уравнений (4), получается уравнение Клейна-Гордона-Фока (КГФ) [9-16] для классической механики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = s_m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \omega_O^2 u \, . \quad (5)$$

Соответственно, можно сделать вывод о том, что система уравнений (4) является обобщением уравнения КГФ (5). Но уравнение КГФ является и уравнением релятивистской квантовой механики и, в одномерном случае для свободного электрона, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \left(\frac{m_e c^2}{\hbar}\right)^2 \Psi. \quad (6)$$

Заметим, что это уравнение получается из (5) заменой

$$u \to \Psi, \; s_m \to c, \; \omega_O = \sqrt{K/m} \to m_e c^2/\hbar \, . \quad (7)$$

Здесь c – скорость света. Отметим, что в трёхмерном случае для свободной частицы уравнение КГФ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Psi - \left(\frac{m_e c^2}{\hbar}\right)^2 \Psi. \quad (8)$$

Это уравнение отражает релятивистскую связь между энергией и импульсом:

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_e c^2)^2. \quad (9)$$

4. Уравнение Шрёдингера как нерелятивистский предел уравнения Клейна-Гордона-Фока

Получим нерелятивистский предел для уравнения КГФ. Помножим волновую функцию на два множителя, произведение которых равно единице:

$$\Psi = \Psi \, e^{i\frac{m_e c^2}{\hbar} t} \, e^{-i\frac{m_e c^2}{\hbar} t} = \Psi_k \, e^{-i\frac{m_e c^2}{\hbar} t}. \quad (10)$$

После подстановки $\Psi = \Psi_k \, e^{-i\frac{m_e c^2}{\hbar} t}$ в уравнение КГФ (8), которое относительно Ψ, получаем уравнение, аналог КГФ, но уже относительно Ψ_k:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \Psi_k + \frac{\hbar^2}{2m_e c^2} \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Рассмотрим случай плоской волны. При этом

$$\Psi = a e^{-i\left(\frac{E}{\hbar} t + \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{\hbar}\right)}, \quad \Psi_k = \Psi \, e^{i\frac{m_e c^2}{\hbar} t} = a \, e^{-i\left(\frac{E - m_e c^2}{\hbar} t + \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{\hbar}\right)}. \quad (12)$$

После подстановки волны Ψ_k в уравнение - аналог КГФ (11), получаем:

$$E - m_e c^2 = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{(E-m_e c^2)^2}{2m_e c^2}\,. \qquad (13)$$

Здесь второе слагаемое справа $-(E - m_e c^2)^2/2m_e c^2$ – вклад от слагаемого $(\hbar^2/2m_e c^2)\,\partial^2\Psi_k/\partial t^2$ в уравнении (11). Введём обозначение для кинетической энергии:

$$E_k = E - m_e c^2. \qquad (14)$$

Перепишем уравнение (13) используя это обозначение:

$$E_k = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{E_k^2}{2m_e c^2}\,. \qquad (15)$$

В нерелятивистском пределе, как известно

$$E_k = E - m_e c^2 \approx \frac{p^2}{2m_e} \ll m_e c^2. \qquad (16)$$

Теперь рассмотрим нерелятивистский предел уравнения (13):

$$E_k \approx \frac{p^2}{2m_e} - \frac{(p^2/2m_e)^2}{2m_e c^2} = \frac{p^2}{2m_e}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{p^2/2m_e}{m_e c^2}\right) \approx \frac{p^2}{2m_e}\,. \qquad (17)$$

Т. е. вкладом второго члена справа $(\hbar^2/2m_e c^2)\,\partial^2\Psi_k/\partial t^2$ в уравнении (11), в нерелятивистском случае, можно пренебречь. В итоге мы получаем нерелятивистский предел для уравнения КГФ для свободного электрона в виде:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_k}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\Psi_k. \qquad (18)$$

А это и есть уравнение Шрёдингера для свободного электрона [17].

5. Система уравнений Дирака

Известно, что с уравнением КГФ в релятивистской квантовой механике связан ряд проблем и дальнейшим развитием теории является система уравнений Дирака [18,19], решающая эти проблемы. Уравнения Дирака это релятивистски инвариантное уравнение движения для биспинорного классического поля электрона, представляющего из себя четырёхкомпонентную комплексную волновую функцию. Для свободного электрона система уравнений Дирака имеет вид:

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_4}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi_4}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_3}{\partial z}\right) + m_e c^2\Psi_1 \\ i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_3}{\partial x} - i\frac{\partial\Psi_3}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_4}{\partial z}\right) + m_e c^2\Psi_2 \\ i\hbar\frac{\partial\Psi_3}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\right) - m_e c^2\Psi_3 \\ i\hbar\frac{\partial\Psi_4}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} - i\frac{\partial\Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right) - m_e c^2\Psi_4 \end{cases}. \qquad (19)$$

Из этой системы можно получить четыре независимых уравнения КГФ (8):

$$\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial t^2} = c^2\,\Delta\Psi_j - \left(\frac{m_e c^2}{\hbar}\right)^2\Psi_j, \qquad j = 1, 2, 3, 4. \qquad (20)$$

При этом любая компонента Ψ_j решения уравнения Дирака автоматически является решением соответствующего уравнения КГФ, но не наоборот.

В одномерном случае система (19) распадается на две системы уравнений одинакового вида: одна для проекции спина $\hbar/2$ на ось z у частицы, описываемой компонентой Ψ_1 и античастицы Ψ_3, другая для проекции спина

$-\hbar/2$ на ось z у частицы Ψ_2 и античастицы Ψ_4. Приведём здесь только первую систему:

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = -i\hbar c\frac{\partial\Psi_3}{\partial z} + m_e c^2\Psi_1 \\ i\hbar\frac{\partial\Psi_3}{\partial t} = -i\hbar c\frac{\partial\Psi_1}{\partial z} - m_e c^2\Psi_3 \end{cases} . \quad (21)$$

Вторая система для проекции спина $-\hbar/2$ на ось z из (21) получается заменой индексов 1→2 и 3→4.

Для получения закона дисперсии в систему (21) подставим плоские волны:

$$\Psi_1 = a_1 e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p_z}{\hbar}z\right)}, \quad \Psi_3 = a_3 e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p_z}{\hbar}z\right)}. \quad (22)$$

Получается система из двух линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (E - m_e c^2)a_1 - c\,p_z a_3 = 0 \\ -c\,p_z a_1 + (E + m_e c^2)a_3 = 0 \end{cases} . \quad (23)$$

Система уравнений (23) имеет решение, если её детерминант равен нулю:

$$E^2 - m_e^2 c^4 - c^2\,p_z^2 = 0 \quad \text{или} \quad E^2 = c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4. \quad (24)$$

Отсюда следует, что

$$E = \pm\sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4} \ . \quad (25)$$

С учётом того, что $E = \hbar\omega$, $p_z = \hbar k_z$ и $\omega_O = m_e c^2/\hbar$ уравнение (24) может быть переписано в виде дисперсионного соотношения:

$$\omega^2 = c^2\,k_z^2 + \omega_O^2 \ . \quad (26)$$

А) Рассмотрим случай $E > 0$ (знак (+) в уравнении (25)):

$$E = \sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4} \ \text{ и } \ \omega = \sqrt{c^2\,k_z^2 + \omega_O^2}. \quad (27)$$

Фазовая скорость:

$$v_{p+} = \frac{\omega}{k_z} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_O^2}{k_z^2}} \ . \quad (28)$$

Групповая скорость (как известно, она даёт нам скорость частицы v):

$$v_{g+} = v = \frac{d\omega}{dk_z} = c^2\Big/\sqrt{c^2 + \frac{\omega_O^2}{k_z^2}} \ . \quad (29)$$

Система (23) имеет «электронное» решение:

$$a_{3+} = \sqrt{\frac{E - m_e c^2}{E + m_e c^2}}\ a_{1+} \ . \quad (30)$$

В нерелятивистском случае, когда $v/c = p_z/m_e c \ll 1$

$$a_{3+} \approx \frac{v}{2c}\ a_{1+} \ll a_{1+} \ . \quad (31)$$

Т. е. амплитуда a_{3+}, соответствующая позитрону, много меньше амплитуды a_{1+}, соответствующей электрону.

Б) Рассмотрим случай $E < 0$ (знак (-) в уравнении (25)):

$$E = -|E| = -\sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4} \ \text{ и } \ \omega = -\sqrt{c^2\,k_z^2 + \omega_O^2} \ . \quad (32)$$

Фазовая скорость:

$$v_{p-} = \frac{\omega}{k_z} = -\sqrt{c^2 + \frac{\omega_O^2}{k_z^2}}. \quad (33)$$

Групповая скорость:

$$v_{g-} = \frac{d\omega}{dk_z} = -c^2 \Big/ \sqrt{c^2 + \frac{\omega_O^2}{k_z^2}}\ . \tag{34}$$

Получается «позитронное» решение системы (23):

$$a_{1-} = -\sqrt{\frac{|E|-m_e c^2}{|E|+m_e c^2}}\ a_{3-}\ . \tag{35}$$

В нерелятивистском случае, когда $v/c = p_z/m_e c \ll 1$

$$|a_{1-}| \approx \frac{v}{2c}\ |a_{3+}| \ll |a_{3+}|\ . \tag{36}$$

Т. е. амплитуда $|a_{1-}|$, соответствующая электрону, много меньше амплитуды $|a_{3+}|$, соответствующей позитрону.

6. Обобщение релятивистского квантовомеханического уравнения Клейна-Гордона-Фока на основе рассмотрения модифицированной цепочки Винсента «масса в массе»

Аналогично тому, как это получается для уравнений (5) и (6), сделаем замену и в системе (4):

$$u \to \Psi,\ s_m \to c,\ s_M \to c,\ \omega_O = \sqrt{K/m} \to m_e c^2/\hbar,\ \omega_A = \sqrt{K/M} \to m_f c^2/\hbar. \tag{37}$$

Отметим, что $m_f/m_e = \sqrt{m/M}$ и $m_f \ll m_e$ если $M \gg m$, как мы и будем считать. Получим систему, являющуюся обобщением одномерного уравнения релятивистской квантовой механики КГФ (6):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \left(\frac{m_e c^2}{\hbar}\right)^2 (\Psi - \Phi) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \left(\frac{m_f c^2}{\hbar}\right)^2 (\Phi - \Psi) \end{cases}. \tag{38}$$

Система (38) легко обобщается на трёхмерный случай:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta\Psi - \left(\frac{m_e c^2}{\hbar}\right)^2 (\Psi - \Phi) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta\Phi - \left(\frac{m_f c^2}{\hbar}\right)^2 (\Phi - \Psi) \end{cases}. \tag{39}$$

Найдём закон дисперсии для системы (39). Для этого подставим в неё плоские волны:

$$\Psi = be^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t + \frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{\hbar}\right)} \quad \text{и} \quad \Phi = de^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t + \frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{\hbar}\right)} \tag{40}$$

Получим однородную систему из двух линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (E^2 - c^2p^2 - (m_e c^2)^2)b + (m_e c^2)^2 d = 0 \\ \left(m_f c^2\right)^2 b + \left(E^2 - c^2p^2 - \left(m_f c^2\right)^2\right) d = 0 \end{cases}. \tag{41}$$

Эта система имеет решение, если её детерминант равен нулю. Приравнивая детерминант к нулю, после преобразований мы получаем два уравнения:

$$E^2 = c^2p^2 \quad \text{или} \quad |E| = cp \tag{42}$$

и

$$E^2 = c^2p^2 + (m_e c^2)^2 + \left(m_f c^2\right)^2 \ \text{или} \ \ |E| = \sqrt{c^2p^2 + m_e^2 c^4(1+\varepsilon^2)}\ . \tag{43}$$

Здесь для краткости мы использовали обозначение ε:

$$\varepsilon = m_f/m_e < 1. \tag{44}$$

В нерелятивистском пределе, когда $p \ll m_e c$ из (43) имеем приближение:

$$E \approx \frac{p^2}{2m_e\sqrt{1+\varepsilon^2}} + m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}. \quad (45)$$

Введём обозначение для кинетической энергии в рассматриваемом случае:

$$E_{k\varepsilon} = E - m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}. \quad (46)$$

В нерелятивистском пределе

$$E_{k\varepsilon} \approx \frac{p^2}{2m_e\sqrt{1+\varepsilon^2}} \ll m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}. \quad (47)$$

Для линейного («акустического») закона дисперсии (42) получаем соотношение амплитуд плоских волн (40):

$$d = b. \quad (48)$$

Для нелинейного («оптического») закона дисперсии (43) получаем соотношение амплитуд плоских волн (40):

$$d = -\varepsilon^2 b. \quad (49)$$

7. Обобщение уравнение Шрёдингера как нерелятивистский предел уравнения обобщения уравнения КГФ для нелинейного закона дисперсии

Будем далее рассматривать случай нелинейного («оптического») закона дисперсии (43). Помножим волновые функции Ψ и Φ на два множителя, произведение которых равно единице (для того, чтобы выделить в фазе волновой функции кинетическую энергию), аналогично тому, как производился переход (10) к нерелятивистскому пределу в уравнении КГФ:

$$\Psi = \Psi\, e^{i\frac{m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\hbar}t}\, e^{-i\frac{m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\hbar}t} = \Psi_{k\varepsilon}\, e^{-i\frac{m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\hbar}t}, \quad (50)$$

$$\Phi = \Phi\, e^{i\frac{m_f c^2\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}{\hbar}t}\, e^{-i\frac{m_f c^2\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}{\hbar}t} = \Phi_{k\varepsilon}\, e^{-i\frac{m_f c^2\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}{\hbar}t} = \Phi_{k\varepsilon}\, e^{-i\frac{m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\hbar}t}.$$

Подставим эти выражения в систему (39). После некоторых преобразований получим систему с уравнениями, напоминающими уравнение Шрёдингера:

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\Psi_{k\varepsilon}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e\sqrt{1+\varepsilon^2}}\Delta\Psi_{k\varepsilon} + \frac{\hbar^2}{2m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\frac{\partial^2\Psi_{k\varepsilon}}{\partial t^2} - \frac{\varepsilon^2 m_e c^2}{2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\Psi_{k\varepsilon} - \frac{m_e c^2}{2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\Phi_{k\varepsilon} \\ i\hbar\frac{\partial\Phi_{k\varepsilon}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_f\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}\Delta\Phi_{k\varepsilon} + \frac{\hbar^2}{2m_f c^2\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}\frac{\partial^2\Phi_{k\varepsilon}}{\partial t^2} - \frac{\varepsilon^{-2} m_f c^2}{2\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}\Phi_{k\varepsilon} - \frac{m_f c^2}{2\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}\Psi_{k\varepsilon} \end{cases} \quad (51)$$

Соответственно, по аналогии с получением нерелятивистского предела (18) для уравнения КГФ, в нерелятивистском случае пренебрегаем в системе (51) слагаемыми

$$\left(\hbar^2/\left(2m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}\right)\right)\partial^2\Psi_{k\varepsilon}/\partial t^2 \text{ и } \left(\hbar^2/\left(2m_f c^2\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}\right)\right)\partial^2\Phi_{k\varepsilon}/\partial t^2.$$

Получаем систему уравнений, представляющую из себя нерелятивистский предел системы уравнений (51) для случая нелинейного («оптического») закона дисперсии (43):

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\Psi_{k\varepsilon}}{\partial t} \approx -\frac{\hbar^2}{2m_e\sqrt{1+\varepsilon^2}}\Delta\Psi_{k\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2 m_e c^2}{2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\Psi_{k\varepsilon} - \frac{m_e c^2}{2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\Phi_{k\varepsilon} \\ i\hbar\frac{\partial\Phi_{k\varepsilon}}{\partial t} \approx -\frac{\hbar^2}{2m_f\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}\Delta\Phi_{k\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{-2} m_f c^2}{2\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}\Phi_{k\varepsilon} - \frac{m_f c^2}{2\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}\Psi_{k\varepsilon} \end{cases}. \quad (52)$$

Отметим, что каждое уравнение системы (52) записано в виде, напоминающем уравнение Шрёдингера. Продолжим качественный анализ уравнений системы (52). Вспоминаем, что $\Phi_{k\varepsilon} = -\varepsilon^2\Psi_{k\varepsilon}$ (49) в случае плоских волн. При этом

линейные члены в правых частях взаимно компенсируются. Получаем два независимых уравнения Шрёдингера:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_{k\varepsilon}}{\partial t}\approx-\frac{\hbar^2}{2m_e\sqrt{1+\varepsilon^2}}\Delta\Psi_{k\varepsilon}\quad\text{и}\quad i\hbar\frac{\partial\Phi_{k\varepsilon}}{\partial t}\approx-\frac{\hbar^2}{2m_f\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}\Delta\Phi_{k\varepsilon}\,. \tag{53}$$

Продолжим преобразования системы (52), чтобы привести её к виду, удобному для решения. Вычитаем из первого уравнения системы (52) второе, вводим обозначение $X=\Psi_{k\varepsilon}-\Phi_{k\varepsilon}$ и, после некоторых преобразований, получим систему из двух почти разделённых уравнений:

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial X}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2m_e\sqrt{1+\varepsilon^2}}\Delta X \\ i\hbar\dfrac{\partial\Psi_{k\varepsilon}}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2m_e\sqrt{1+\varepsilon^2}}\Delta\Psi_{k\varepsilon}-\dfrac{m_e\,c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}{2}\Psi_{k\varepsilon}+\dfrac{m_e\,c^2}{2\sqrt{1+\varepsilon^2}}X \end{cases}. \tag{54}$$

Продолжим преобразования. Помножим волновую функцию $\Psi_{k\varepsilon}$ на два множителя, произведение которых равно единице (для того, чтобы избавиться от линейного члена пропорционального $\Psi_{k\varepsilon}$ во втором уравнении):

$$\Psi_{k\varepsilon}=\Psi_{k\varepsilon}\,e^{-i\,\frac{m_ec^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}{2\hbar}t}\,e^{i\,\frac{m_ec^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}{2\hbar}t}=\Psi_{k\varepsilon1}\,e^{i\,\frac{m_ec^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}{2\hbar}t}. \tag{55}$$

Получим систему из двух почти разделённых уравнений в удобной для решения форме:

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial X}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2m_e\sqrt{1+\varepsilon^2}}\Delta X \\ i\hbar\dfrac{\partial\Psi_{k\varepsilon1}}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2m_e\sqrt{1+\varepsilon^2}}\Delta\Psi_{k\varepsilon1}+\dfrac{m_ec^2}{2\sqrt{1+\varepsilon^2}}Xe^{-i\,\frac{m_ec^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}{2\hbar}t} \end{cases}. \tag{56}$$

8. Обобщение уравнения Дирака

Соответственно, возникает вопрос о формальной возможности получить на основе системы уравнений второго порядка (39), являющейся обобщением уравнения КГФ, систему уравнений первого порядка, являющуюся обобщение уравнения Дирака, аналогично тому, как система уравнений Дирака первого порядка (19) была получена на основе уравнения КГФ (8) второго порядка.

Сначала покажем, что следующая система уравнений первого порядка является обобщением системы уравнений Дирака (19) в одномерном случае для случая проекции спина $\hbar/2$ на ось z:

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial t}=-i\hbar c\dfrac{\partial\Psi_3}{\partial z}+\dfrac{m_ec^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(\Psi_1-\Phi_1) \\ i\hbar\dfrac{\partial\Psi_3}{\partial t}=-i\hbar c\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial z}-\dfrac{m_ec^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(\Psi_3-\Phi_3) \\ i\hbar\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t}=-i\hbar c\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial z}+\dfrac{m_fc^2}{\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}(\Phi_1-\Psi_1) \\ i\hbar\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial t}=-i\hbar c\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial z}-\dfrac{m_fc^2}{\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}(\Phi_3-\Psi_3) \end{cases} \tag{57}$$

Для этого нам надо показать, что из системы уравнений (57) следуют две системы уравнений типа (38):

$$\begin{cases}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z^2}-\left(\frac{m_ec^2}{\hbar}\right)^2(\Psi_1-\Phi_1)\\ \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}-\left(\frac{m_fc^2}{\hbar}\right)^2(\Phi_1-\Psi_1)\end{cases}\text{ и }\begin{cases}\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial z^2}-\left(\frac{m_ec^2}{\hbar}\right)^2(\Psi_3-\Phi_3)\\ \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial z^2}-\left(\frac{m_fc^2}{\hbar}\right)^2(\Phi_3-\Psi_3)\end{cases}.\quad(58)$$

Поделим уравнения системы (57) на $i\hbar$ и возьмём производную по времени от первого уравнения:

$$\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2}=-c\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial t\partial z}-i\frac{m_ec^2/\hbar}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right).\quad(59)$$

Возьмём производную по координате от второго уравнения:

$$\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial z\partial t}=-c\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z^2}+i\frac{m_ec^2/\hbar}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\left(\frac{\partial\Psi_3}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right).\quad(60)$$

Подставим это уравнение в предыдущее. Получаем:

$$\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z^2}-i\frac{m_ec^2/\hbar}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\left(\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}+c\frac{\partial\Psi_3}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+c\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)\right)=$$

$$=c^2\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z^2}-i\frac{m_ec^2/\hbar}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\left(-i\frac{m_ec^2/\hbar}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(\Psi_1-\Phi_1)+i\frac{m_fc^2/\hbar}{\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}(\Phi_1-\Psi_1)\right)=$$

$$=c^2\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z^2}-\left(\frac{m_ec^2}{\hbar}\right)^2(\Psi_1-\Phi_1)\ .\quad(61)$$

Здесь учтено, что первое и третье уравнения системы, получившейся после деления на $i\hbar$ системы (57), можно переписать так:

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}+c\frac{\partial\Psi_3}{\partial z}=-i\frac{m_ec^2/\hbar}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(\Psi_1-\Phi_1)\quad\text{и}\quad\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+c\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}=-i\frac{m_fc^2/\hbar}{\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}(\Phi_1-\Psi_1)\ .\quad(62)$$

Т. е. из системы (57) мы получили первое уравнение первой системы уравнений (58). Аналогично, из системы (57) можно получить и второе уравнение первой системы (58) и два уравнения второй системы (58). Можно проделать те же выкладки для случая спина $-\hbar/2$ заменив Ψ_1 на Ψ_2 и Ψ_3 на Ψ_4 в системе (57), в результате получив две системы, совпадающие по виду с (58), где надо заменить Ψ_1 на Ψ_2 и Ψ_3 на Ψ_4, соответственно.

9. Закон дисперсии для обобщения системы уравнений Дирака

Для получения закона дисперсии в систему (57) подставим решения в виде плоских волн:

$$\Psi_1=b_1e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t-\frac{p_z}{\hbar}z\right)},\Psi_3=b_3e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t-\frac{p_z}{\hbar}z\right)},\Phi_1=d_1e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t-\frac{p_z}{\hbar}z\right)},\Phi_3=d_3e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t-\frac{p_z}{\hbar}z\right)}.\quad(63)$$

Мы получаем систему однородных линейных уравнений, которую можно переписать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix}E-\frac{m_ec^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & -c\,p_z & \frac{m_ec^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & 0\\ -c\,p_z & E+\frac{m_ec^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & 0 & -\frac{m_ec^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\\ \frac{m_fc^2}{\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}} & 0 & E-\frac{m_fc^2}{\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}} & -c\,p_z\\ 0 & -\frac{m_fc^2}{\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}} & -c\,p_z & E+\frac{m_fc^2}{\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_3\\ d_1\\ d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.\quad(64)$$

Однородная система уравнений (64) имеет решение, если её детерминант равен нулю:

$$E^4-\left((\varepsilon^2+1)m_e^2c^4+2c^2\,p_z^2\right)E^2+\left((\varepsilon^2+1)m_e^2c^4+c^2\,p_z^2\right)c^2\,p_z^2=0\ .\quad(65)$$

После некоторых преобразований получаем:

$$(E^2 - c^2\, p_z^2)[E^2 - c^2\, p_z^2 - (1+\varepsilon^2)m_e^2c^4] = 0\ . \qquad (66)$$

Это уравнение распадается на два уравнения, которые, с учётом того, что $E = \hbar\omega$ и $p_z = \hbar k_z$, могут быть переписаны и как законы дисперсии. Получаем линейную или «акустическую» ветвь дисперсии:

$$E^2 = c^2\, p_z^2 \ \text{ или } \quad \Omega_A^2 = c^2\, k_z^2 \qquad (67)$$

и нелинейную или «оптическую» ветвь дисперсии:

$$E^2 = c^2\, p_z^2 + (1+\varepsilon^2)m_e^2c^4 \text{ или } \ \Omega_O^2 = \omega_O^2 + \omega_A^2 + c^2\, k_z^2 + c^2\, k_z^2 \qquad (68)$$

Из уравнения (67) следует первая пара корней уравнения (66):

$$E = \pm c\, p_z\ . \qquad (69)$$

Из уравнения (68) следует вторая пара корней уравнения (66):

$$E = \pm\sqrt{c^2\, p_z^2 + m_e^2c^4(1+\varepsilon^2\,)}\ . \qquad (70)$$

10.Анализ решений для обобщения системы уравнений Дирака

А) Рассмотрим первую пару корней уравнения (66):

$$E = \pm c\, p_z\ . \qquad (71)$$

А.1) В случае $E > 0$

$$E = c\, p_z \ \text{ и } \ \Omega_{A+} = ck_z. \qquad (72)$$

Фазовая скорость:

$$v_{pA+} = \frac{\Omega_{A+}}{k_z} = c. \qquad (73)$$

Групповая скорость:

$$v_{gA+} = \frac{d\Omega_{A+}}{dk_z} = c. \qquad (74)$$

Соответствующие амплитуды у волн (63):

$$b_{1A+} = b_{3A+} = d_{1A+} = d_{3A+}\ . \qquad (75)$$

Для соответствующих плоских волн имеем:

$$\Psi_{1A+} = \Psi_{3A+} = \Phi_{1A+} = \Phi_{3A+} = b_{1A+}e^{-i(c\,t\,-\,z)\frac{p_z}{\hbar}}\ . \qquad (76)$$

Можно предположить, что синфазные волны Ψ_{1A+} и Ψ_{3A+} суммируются, образуя суммарное решение со спином $\hbar$, что напоминает электромагнитную волну, квантом которой является фотон - калибровочный бозон электромагнитного взаимодействия, в котором участвуют электрон и позитрон. Можно предположить, что синфазные волны Φ_{1A+} и Φ_{3A+} тоже суммируются, образуя суммарное решение со спином $\hbar$. Можно предположить, что получившийся бозон как-то связан с парой частица-античастица, соответствующих волнам Φ_{1O} и Φ_{3O}, которые будут обсуждаться ниже.

А.2) В случае $E < 0$

$$E = -|E| = -c\, p_z \ \text{ и } \ \Omega_{A-} = -ck_z. \qquad (77)$$

Фазовая скорость:

$$v_{pA-} = \frac{\Omega_{A-}}{k_z} = -c\ . \qquad (78)$$

Групповая скорость:

$$v_{gA-} = \frac{d\Omega_{A-}}{dk_z} = -c. \qquad (79)$$

Соответствующие амплитуды у волн (63):

$$b_{1A-} = -b_{3A-} = d_{1A-} = -d_{3A-}. \qquad (80)$$

Для соответствующих плоских волн имеем:

$$\Psi_{1A-} = \Phi_{1A-} = b_{1A-} e^{i(c\,t+z)\frac{p_z}{\hbar}}, \quad \Psi_{3A-} = \Phi_{3A-} = -b_{1A-} e^{i(c\,t+z)\frac{p_z}{\hbar}}. \quad (81)$$

Отметим, что

$$\Psi_{1A-} + \Psi_{3A-} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \Phi_{1A-} + \Phi_{3A-} \equiv 0. \quad (82)$$

Т. е. волны взаимно компенсируются. Можно предположить, что наблюдение таких волн затруднительно.

Б) Рассмотрим вторую пару корней уравнения (66):

$$E = \pm\sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4 (1+\varepsilon^2\,)}\ . \quad (83)$$

Б.1) В случае $E > 0$ (знак (+) в уравнении (70)):

$$E = \sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4 (1+\varepsilon^2\,)} \quad \text{и} \quad \Omega_{O+} = \sqrt{c^2\,k_z^2 + \omega_O^2 + \omega_A^2}\ . \quad (84)$$

Фазовая скорость:

$$v_{pO+} = \frac{\Omega_{O+}}{k_z} = \sqrt{c^2\ + \frac{\omega_O^2+\omega_A^2}{k_z^2}}\ . \quad (85)$$

Групповая скорость:

$$v_{gO+} = \frac{d\Omega_{O+}}{dk_z} = \frac{c^2 k_z}{\Omega_{O+}} = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + \frac{\omega_O^2+\omega_A^2}{k_z^2}}}\ . \quad (86)$$

Соответствующие амплитуды у волн (63):

$$b_{3O+} = \frac{c\,p_z}{\sqrt{c^2\,p_z^2+m_e^2c^4(1+\varepsilon^2)}+m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\, b_{1O+}\ . \quad (87)$$

$$d_{1O+} = -\varepsilon^2 b_{1O+} \quad (88)$$

$$d_{3O+} = \frac{c\,p_z}{\sqrt{c^2\,p_z^2+m_e^2c^4(1+\varepsilon^2)}+m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\ d_{1O+}\ . \quad (89)$$

В случае $\omega_A \ll \omega_O$ ($m_f \ll m_e$ или $\varepsilon \to 0$) имеем:

$$b_{3O+} \to \sqrt{\frac{E-m_e c^2}{E+m_e c^2}}\ b_{1O+}\ . \quad (90)$$

Для соответствующих плоских волн имеем:

$$\Psi_{1O+} = b_{1O+} e^{-i\left(\frac{\sqrt{c^2\,p_z^2+m_e^2c^4(1+\varepsilon^2\,)}}{\hbar}t - \frac{p_z}{\hbar}z\right)}, \quad (91)$$

$$\Psi_{3O+} = \frac{c\,p_z}{\sqrt{c^2\,p_z^2+m_e^2c^4(1+\varepsilon^2)}+m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\, b_{1O+} e^{-i\left(\frac{\sqrt{c^2\,p_z^2+m_e^2c^4(1+\varepsilon^2\,)}}{\hbar}t - \frac{p_z}{\hbar}z\right)}, \quad (92)$$

$$\Phi_{1O+} = -\varepsilon^2 b_{1O+} e^{-i\left(\frac{\sqrt{c^2\,p_z^2+m_e^2c^4(1+\varepsilon^2\,)}}{\hbar}t - \frac{p_z}{\hbar}z\right)}, \quad (93)$$

$$\Phi_{3O+} = -\varepsilon^2 \frac{c\,p_z}{\sqrt{c^2\,p_z^2+m_e^2c^4(1+\varepsilon^2)}+m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\, b_{1O+} e^{-i\left(\frac{\sqrt{c^2\,p_z^2+m_e^2c^4(1+\varepsilon^2\,)}}{\hbar}t - \frac{p_z}{\hbar}z\right)}. \quad (94)$$

Б.2) В случае $E < 0$ (знак (-) в уравнении (70)):

$$E = -|E| = -\sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4 (1+\varepsilon^2\,)} \ \text{и}\ \Omega_{O-} = -\sqrt{c^2\,k_z^2 + \omega_O^2 + \omega_A^2}\ . \quad (95)$$

Фазовая скорость:

$$v_{pO-} = \frac{\Omega_{O-}}{k_z} = -\sqrt{c^2\ + \frac{\omega_O^2+\omega_A^2}{k_z^2}}\ . \quad (96)$$

Групповая скорость:

$$v_{gO-} = \frac{d\Omega_{O-}}{dk_z} = \frac{c^2 k_z}{\Omega_{O-}} = -\frac{c^2}{\sqrt{c^2 + \frac{\omega_O^2 + \omega_A^2}{k_z^2}}}\,. \tag{97}$$

Соответствующие амплитуды у волн (63):

$$b_{3O-} = -\frac{c\,p_z}{\sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4(1+\varepsilon^2)} - m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\; b_{1O-}\,. \tag{98}$$

$$d_{1O-} = -\varepsilon^2 b_{1O-}\;\;. \tag{99}$$

$$d_{3O-} = -\frac{c\,p_z}{\sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4(1+\varepsilon^2)} - m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\, d_{1O-}\,. \tag{100}$$

В случае $\omega_A \ll \omega_O$ ($m_f \ll m_e$ или $\varepsilon \to 0$) имеем:

$$b_{1O-} \to -\sqrt{\frac{|E| - m_e c^2}{|E| + m_e c^2}}\; b_{3O-}\,. \tag{101}$$

Для соответствующих плоских волн имеем:

$$\Psi_{1O-} = b_{1O-} e^{-i\left(-\frac{\sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4(1+\varepsilon^2\,)}}{\hbar} t - \frac{p_z}{\hbar} z\right)}, \tag{102}$$

$$\Psi_{3O-} = -\frac{c\,p_z}{\sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4(1+\varepsilon^2)} - m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\; b_{1O-} e^{-i\left(-\frac{\sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4(1+\varepsilon^2\,)}}{\hbar} t - \frac{p_z}{\hbar} z\right)}, \tag{103}$$

$$\Phi_{1O-} = -\varepsilon^2 b_{1O-} e^{-i\left(-\frac{\sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4(1+\varepsilon^2\,)}}{\hbar} t - \frac{p_z}{\hbar} z\right)}, \tag{104}$$

$$\Phi_{3O-} = \varepsilon^2\,\frac{c\,p_z}{\sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4(1+\varepsilon^2)} - m_e c^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\, b_{1O-} e^{-i\left(-\frac{\sqrt{c^2\,p_z^2 + m_e^2 c^4(1+\varepsilon^2\,)}}{\hbar} t - \frac{p_z}{\hbar} z\right)}. \tag{105}$$

Во всех рассмотренных случаях выполняется условие, известное для электромагнитных волн в вакууме и для волн де Бройля:

$$v_p v_g = c^2\;\;. \tag{106}$$

Результаты для одномерного случая достаточно легко обобщаются и на трёхмерный случай. Обобщение системы уравнений Дирака для свободного электрона в трёхмерном случае имеет вид:

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_4}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi_4}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_3}{\partial z}\right) + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(\Psi_1 - \Phi_1) \\ i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_3}{\partial x} - i\frac{\partial\Psi_3}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_4}{\partial z}\right) + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(\Psi_2 - \Phi_2) \\ i\hbar\frac{\partial\Psi_3}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\right) - \frac{m_e c^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(\Psi_3 - \Phi_3) \\ i\hbar\frac{\partial\Psi_4}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} - i\frac{\partial\Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right) - \frac{m_e c^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(\Psi_4 - \Phi_4) \\ i\hbar\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Phi_4}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi_4}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right) + \frac{m_f c^2}{\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}(\Phi_1 - \Psi_1) \\ i\hbar\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Phi_3}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi_3}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_4}{\partial z}\right) + \frac{m_f c^2}{\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}(\Phi_2 - \Psi_3) \\ i\hbar\frac{\partial\Phi_3}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right) - \frac{m_f c^2}{\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}(\Phi_3 - \Psi_3) \\ i\hbar\frac{\partial\Phi_4}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right) - \frac{m_f c^2}{\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}(\Phi_4 - \Psi_4) \end{cases}. \quad (107)$$

Можно показать, что, аналогично одномерному случаю, из системы (107), соответствующей обобщённому уравнению Дирака для трёхмерного случая, получается четыре независимых системы уравнений (по два уравнения в каждой), являющихся обобщением соответствующих уравнений КГФ (20):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\Psi_j}{\partial t^2} = c^2\Delta\Psi_j - \left(\frac{m_e c^2}{\hbar}\right)^2(\Psi_j - \Phi_j) \\ \frac{\partial^2\Phi_j}{\partial t^2} = c^2\Delta\Phi_j - \left(\frac{m_f c^2}{\hbar}\right)^2(\Phi_j - \Psi_j) \end{cases}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (108)$$

Отметим, что уравнения (90) и (101) — это известные результаты из теории уравнения Дирака (см. уравнения (30) и (35)). Соответственно, волны Ψ_{1O} и Ψ_{3O} соответствуют частице - электрону и античастице – позитрону. Трактовка физической природы части волн Φ_{1O} и Φ_{3O} более затруднительна. Очевидно, что Φ_{1O} соответствуют частице, а Φ_{3O} - античастице. Т. к. мы предполагаем, что соответствующая им масса покоя много меньше массы покоя электрона, т. е. $m_f \ll m_e$, условно назовём их, по аналогии с нейтрино, «электрино» и «позитрино» или на русском языке «электрончик» и «позитрончик». Отметим, что похожими свойствами обладают нейтрино — фундаментальные частицы с полуцелым спином $\hbar/2$ и массой меньше 0,12 эВ (масса электрона приблизительно 0,51 МэВ, т. е. почти в четыре миллиона раз больше). Т. к. наше исследование связано с уравнением Дирака, описывающим электрон и позитрон, то видимо электронное нейтрино и антинейтрино могут оказаться кандидатами на роль частиц, соответствующих волнам Φ_{1O} и Φ_{3O}.

Напомним, что система (64) получена из системы (57), которая соответствует спину $\hbar/2$. В этом случае все компоненты волновой функции с индексами 2 и 4 равны нулю. Чтобы получить системы уравнений соответствующих спину $-\hbar/2$ надо сделать в системах (57) и (64) замену индексов $1 \to 2$ и $3 \to 4$. Соответственно, делая такую же замену индексов в решениях системы (64), мы получим решения для случая спина $-\hbar/2$. В этом случае уже все компоненты волновой функции с индексами 1 и 3 равны нулю.

Таким образом получены восемь линейно независимых решений, соответствующих восьми возможным комбинациям двух ветвей дисперсии, двух знаков полной энергии и двух возможных направлений ориентации спина, каждое в виде четырёх плоских волн.

11. Операторный подход

Изложим полученные результаты используя операторный подход и обозначения Дирака. Уравнение Дирака для свободного электрона можно записать и в компактном виде:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_4\rangle = \widehat{H}_{D_4}|\Psi_4\rangle, \tag{109}$$

где

$$\widehat{H}_{D_4} = \hbar\omega_O\alpha_0 + c\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\hat{p}_j = m_e c^2\alpha_0 + c\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\hat{p}_j. \tag{110}$$

оператор полной энергии (гамильтониан) с операторами компонент импульса $\hat{p}_1 = \hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p}_2 = \hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$, $\hat{p}_3 = \hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$; $|\Psi_4\rangle$ - четырёхкомпонентная комплексная волновая функция (биспинор); α_0, α_1, α_2, α_3 — матрицы размера 4×4, называемые альфа-матрицами Дирака:

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix},\ \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0_2 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0_2 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0_2 \end{pmatrix}. \tag{111}$$

где 0_2 и I_2 - нулевая и единичная матрицы размерности 2×2, и σ_j (j = 1, 2, 3) — матрицы Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ . \tag{112}$$

Каждая пара альфа-матриц антикоммутирует, а квадрат каждой равен единице:

$$\alpha_j^2 = I_4, j = 0, 1, 2, 3, \tag{113}$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0_4, i, j = 0, 1, 2, 3\ (i \neq j), \tag{114}$$

где I_4 и 0_4 - нулевая и единичная матрицы размерности 4×4.

При возведении в квадрат гамильтониана $\widehat{H}_{D_4}$, с учётом свойств альфа-матриц Дирака, получаем:

$$\widehat{H}_{D_4}^2 = \left(\hbar\omega_O\alpha_0 + c\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\hat{p}_j\right)^2 = \hbar^2\omega_O^2\alpha_0^2 - c^2\hbar^2 I_4\,\Delta = \\ = (m_e c^2)^2\alpha_0^2 - c^2\hbar^2 I_4\,\Delta\,. \tag{115}$$

Соответственно, после действия на левую часть уравнения Дирака (109) оператором $i\hbar\,\partial/\partial t$, а на правую оператором $\widehat{H}_{D_4}$, получается уравнение

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\Psi_4\rangle = \widehat{H}_{D_4}^2|\Psi_4\rangle, \tag{116}$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\Psi_4\rangle = c^2\Delta|\Psi_4\rangle - \left(\frac{m_e c^2}{\hbar}\right)^2|\Psi_4\rangle\ . \tag{117}$$

Последнее уравнение можно переписать в виде четыре независимых уравнений КГФ (20). Соответственно, обобщённое уравнение Дирака можно тоже записать в компактном виде:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_8\rangle = \widehat{H}_{D_8}|\Psi_8\rangle, \tag{118}$$

где

$$\widehat{H}_{D_8} = \hbar\frac{\omega_A^2}{\sqrt{\omega_O^2+\omega_A^2}}A_{0-} + \hbar\frac{\omega_O^2}{\sqrt{\omega_O^2+\omega_A^2}}A_{0+} + c\ \sum_{j=1}^{3} A_j\,\hat{p}_j =$$

$$= \frac{m_f c^2}{\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}}A_{0-} + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}A_{0+} + c\ \sum_{j=1}^{3} A_j\,\hat{p}_j\ , \quad (119)$$

$|\Psi_8\rangle$- восьмикомпонентная комплексная волновая функция; A_{0-}, A_{0+}, A_1, A_2, A_3 - матрицы размера 4×4, являющиеся обобщением альфа-матриц Дирака:

$$A_{0-} = \begin{pmatrix} 0_4 & 0_4 \\ -\alpha_0 & \alpha_0 \end{pmatrix},\ A_{0+} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\alpha_0 \\ 0_4 & 0_4 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0_4 \\ 0_4 & \alpha_1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0_4 \\ 0_4 & \alpha_2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0_4 \\ 0_4 & \alpha_3 \end{pmatrix}\ . \quad (120)$$

Для обобщённых альфа-матриц Дирака выполняются следующие соотношения:

$$A_{0-}^2 = A_{0-}A_{0+} = \begin{pmatrix} 0_4 & 0_4 \\ -I_4 & I_4 \end{pmatrix}\ . \quad (121)$$

$$A_{0+}^2 = A_{0+}A_{0-} = \begin{pmatrix} I_4 & -I_4 \\ 0_4 & 0_4 \end{pmatrix}. \quad (122)$$

$$A_j^{\,2} = I_8,\ \ j = 1, 2, 3. \quad (123)$$

$$A_{0+}A_{0-} + A_{0-}A_{0+} = A_{0-}^2 + A_{0+}^2 = \begin{pmatrix} I_4 & -I_4 \\ -I_4 & I_4 \end{pmatrix}. \quad (124)$$

$$A_{0-}A_j + A_jA_{0-} = 0_8,\ \ j = 1, 2, 3 \quad (125)$$

$$A_{0+}A_j + A_jA_{0+} = 0_8,\ \ j = 1, 2, 3. \quad (126)$$

$$A_iA_j + A_jA_i = 0_8,\ \ i, j = 1, 2, 3\ (i \neq j). \quad (127)$$

где 0_8 и I_8 - нулевая и единичная матрицы размерности 8×8.

При возведении в квадрат гамильтониана $\widehat{H}_{D_8}$, с учётом свойств обобщённых альфа-матриц Дирака, получаем:

$$\widehat{H}_{D_8}^2 = \left(\hbar\frac{\omega_A^2}{\sqrt{\omega_O^2+\omega_A^2}}A_{0-} + \hbar\frac{\omega_O^2}{\sqrt{\omega_O^2+\omega_A^2}}A_{0+} + c\ \sum_{j=1}^{3} A_j\,\hat{p}_j\right)^2 =$$

$$= \hbar^2\omega_A^2A_{0-}^2 + \hbar^2\omega_O^2A_{0+}^2 - c^2\hbar^2\Delta = \left(m_f c^2\right)^2A_{0-}^2 + (m_e c^2)^2A_{0+}^2 - c^2\hbar^2\Delta\ . \quad (128)$$

Соответственно, после действия на левую часть обобщённого уравнения Дирака (94) оператором $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, а на правую оператором $\widehat{H}_{D_8}$, получается уравнение

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\Psi_8\rangle = \widehat{H}_{D_8}^2|\Psi_8\rangle, \quad (129)$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\Psi_8\rangle = c^2\Delta|\Psi_8\rangle - \left(\left(\frac{m_f c^2}{\hbar}\right)^2A_{0-}^2 + \left(\frac{m_e c^2}{\hbar}\right)^2A_{0+}^2\right)|\Psi_8\rangle. \quad (130)$$

Последнее уравнение можно переписать в виде четырёх независимых систем уравнений (108), по два уравнения в каждой, являющихся обобщением соответствующих уравнений КГФ (20).

12. Заключение

Таким образом, в отличие от уравнения Дирака с четырёхкомпонентной волновой функцией, обладающего только «оптической» ветвью дисперсии, полученное нами обобщённое уравнение Дирака с восьмикомпонентной волновой функцией обладает как «оптической», так и «акустической» ветвями

дисперсии, каждая из которых представлена ветвями с положительной и отрицательной энергиями. В одномерном случае получены восемь линейно независимых решений, соответствующих восьми возможным комбинациям двух ветвей дисперсии, двух знаков полной энергии и двух возможных направлений ориентации спина, каждое в виде четырёх плоских волн.

Аналогично тому, как уравнение Шрёдингера было получено как нерелятивистский предел уравнения КГФ, мы получили систему из двух уравнений, являющуюся обобщением уравнения Шрёдингера, как нерелятивистский предел полученной нами системы из двух уравнений, являющейся обобщением уравнения КГФ. При этом мы рассматривали случай нелинейного закона дисперсии.

В дальнейшей работе мы планируем обсудить ряд вопросов, связанных с предложенным в нашей работе обобщением уравнения Дирака. Это плотность заряда и плотность тока, движение в центрально-симметричном поле и спин, инвариантность относительно преобразований Лоренца. Необходимо дать физическую интерпретацию природы новых решений обобщённого уравнения Дирака для оптической и акустической ветвей дисперсии. Мы планируем изучить свойства и решения системы из двух уравнений, являющейся обобщением уравнения Шрёдингера.

Работа выполнена в инициативном порядке. Авторы выражают благодарность д.ф.-м.н. Маркову Олегу Ивановичу, д.т.н. Белкину Евгению Александровичу, д.ф.-м.н. Малай Николаю Владимировичу и Илье Дмитриевичу Копчинскому за плодотворную дискуссию.

Список источников

1. Турин В. О., Илюшина Ю. В., Андреев П. А., Черепкова А. Ю., Киреев Д. Д., Назрицкий И. В. Одномерная цепочка «масса в массе» и обобщение уравнений Клейна-Гордона-Фока и Дирака, как с «оптической», так и с «акустической» ветвями дисперсии. Материалы Международной научно-практической конференции «Естественные и гуманитарные науки в современном мире 2023». (Принято в печать).

2. Turin V. O., Ilyushina Y. V., Andreev P. A., Cherepkova A. Yu., Kireev D. D., Nazritsky I. V. A Mass-in-Mass Chain and the Generalization of the Dirac Equation with an Eight-Component Wave Function and with Optical and Acoustic Branches of the Dispersion Relation. Proceedings of the ICMNE 2023. Russian Microelectronics. 2023. (Принято в печать).

3. Vincent J.H. On the construction of a mechanical model to illustrate Helmholtz's theory of dispersion. Philos. Mag. 1898; 46: p. 557–563. https://doi.org/10.1080/14786449808621232

4. Brillouin L. Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices. McGraw-Hill, New York; 1946. 247 p.

5. Huang H.H., Sun C.T., Huang G.L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. International Journal of Engineering Science. 2009; 47(4): 610-617.

6. Huang H.H., Sun C.T. Wave attenuation mechanism in an acoustic metamaterial with negative effective mass density. New Journal of Physics. 2009; 11(1), 013003.

7. Erofeev V., Kolesov D., Malkhanov A. Nonlinear strain waves in a metamaterial defined a mass-to-mass chain. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020; 709(3), 033037.

8. Ерофеев В. И., Колесов Д. А., Мальханов А. О. Нелинейные локализованные продольные волны в метаматериале, задаваемом как цепочка «масса-в-массе» // Акустический журнал. - 2022. - Т. 68, вып. 5. - С. 475–478.

9. Gravel P., Gauthier C. Classical applications of the Klein-Gordon equation. American Journal of Physics. 2011; 79(5): 447-453.

10. Morse P.M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics. McGraw-Hill, New York; 1953. Vol. 1. 1978 p.

11. Crawford F.S. Waves. Berkeley Physics Course. McGraw-Hill, New York; 1968. Vol. 3. 625 p.

12. Mouchet A. Interaction with a field: a simple integrable model with backreaction. European Journal of Physics. 2008. Vol. 29, no 5. P. 1033-1050. https://doi.org/10.1088/0143-0807/29/5/015

13. Faletič S. A mechanical wave system to show waveforms similar to quantum mechanical wavefunctions in a potential // European Journal of Physics. 2015. Vol. 36, no 3. 035023. https://doi.org/10.1088/0143-0807/36/3/035023

14. H. de Vries, Understanding relativistic quantum field theory. http://www.physics-quest.org/

15. Колебания одномерной цепочки атомов, расположенных в периодическом гармоническом потенциале / В. О. Турин, Е. Н. Пиляева, И. В. Головин [и др.] — Текст: непосредственный // Физика и современные технологии в АПК: Материалы XI Всероссийской молодежной конференции молодых ученых, студентов и школьников с международным участием. - Орёл: ООО Полиграфическая фирма «Картуш», 2020. - С. 71–79.

16. Turin V.O. Aberration of light and matter wave / V.O.Turin, O.I. Markov, V.N. Poyarkov // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: в 2 частях. Том Часть 1. 22–25 ноября 2018 г., г. Орёл: ОГУ им. И.С. Тургенева. - 2018. - С. 199–207.

17. Schrödinger E. Collected Papers on Wave Mechanics. Chelsea Publ, New York; 1982.

18. Dirac, P. A. M. (1928). “The Quantum Theory of the Electron” (PDF). Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 117 (778): 610–624.

19. Матвеев, А. Н. Атомная физика: учебное пособие для студентов вузов / А. Н. Матвеев. - 2-е изд. - Москва: ОНИКС: Мир и Образование, 2007.

References

1. Turin V. O., Ilyushina Y. V., Andreev P. A., Cherepkova A. Yu., Kireev D. D., Nazritsky I. V. One-dimensional chain mass-in-mass and generalization of the Klein-Gordon-Fock and Dirac equations, both with optical and acoustic branches of dispersion. Proceedings of the International Scientific and Practical Conference "Natural and Human Sciences in the Modern World 2023". (Will be published in Russian).

2. Turin V. O., Ilyushina Y. V., Andreev P. A., Cherepkova A. Yu., Kireev D. D., Nazritsky I. V. A Mass-in-Mass Chain and the Generalization of the Dirac Equation with an Eight-Component Wave Function and with Optical and Acoustic Branches of the Dispersion Relation. Proceedings of the ICMNE 2023. Russian Microelectronics. 2023. (Will be published).

3. Vincent J.H. On the construction of a mechanical model to illustrate Helmholtz's theory of dispersion. Philos. Mag. 1898; 46: p. 557–563. https://doi.org/10.1080/14786449808621232

4. Brillouin L. Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices. McGraw-Hill, New York; 1946. 247 p.

5. Huang H.H., Sun C.T., Huang G.L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. International Journal of Engineering Science. 2009; 47(4): 610-617.

6. Huang H.H., Sun C.T. Wave attenuation mechanism in an acoustic metamaterial with negative effective mass density. New Journal of Physics. 2009; 11(1), 013003.

7. Erofeev V., Kolesov D., Malkhanov A. Nonlinear strain waves in a metamaterial defined a mass-to-mass chain. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020; 709(3), 033037.

8. Erofeev V.I., Kolesov D.A., Malkhanov A.O. Nonlinear Localized Longitudinal Waves in a Metamaterial Designed as a "Mass-In-Mass" Chain. Akusticheskij Zhurnal (2022); 68(5) p. 475-478. (In Russian).

9. Gravel P., Gauthier C. Classical applications of the Klein-Gordon equation. American Journal of Physics. 2011; 79(5): 447-453.

10. Morse P.M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics. McGraw-Hill, New York; 1953. Vol. 1. 1978 p.

11. Crawford F.S. Waves. Berkeley Physics Course. McGraw-Hill, New York; 1968. Vol. 3. 625 p.

12. Mouchet A. Interaction with a field: a simple integrable model with backreaction. European Journal of Physics. 2008. Vol. 29, no 5. P. 1033-1050. https://doi.org/10.1088/0143-0807/29/5/015

13. Faletič S. A mechanical wave system to show waveforms similar to quantum mechanical wavefunctions in a potential // European Journal of Physics. 2015. Vol. 36, no 3. 035023. https://doi.org/10.1088/0143-0807/36/3/035023

14. H. de Vries, Understanding relativistic quantum field theory. http://www.physics-quest.org/

15. Turin V.O., Pilaeva E.N., Golovin I.V. et al. Vibrations of an one-dimensional chain of atoms, located in the periodic harmonic potential. Physics and Modern Technologies in Agriculture: Proceedings of the XI All-Russian Youth Conference of Young Scientists, Students and Schoolchildren with international participation. 19 February 2020, Orel: LLC Printing company "Cartouche". 2020; 71-79. (In Russian).

16. Turin V.O., Markov O.I., Poyarkov V.N. Aberration of light and matter wave. Modern problems of physical and mathematical sciences. Proceedings of the IV All-Russian Scientific and Practical Conference with international participation: in 2 parts. 22–25 November 2018, Orel: Orel State University named after I.S. Turgenev. 2018; Vol. 1: 199-207. (In Russian).

17. Schrödinger E. Collected Papers on Wave Mechanics. Chelsea Publ, New York; 1982.

18. Dirac, P. A. M. (1928). “The Quantum Theory of the Electron”. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 117 (778): 610–624.

19. Matveev, A. N. Atomic physics: a textbook for university students. Moscow: ONYX: World and Education, 2007. (In Russian).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 305-311.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 305-311.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.9

ПОЛУЧЕНИЕ ПЛЕНОК ВИСМУТА НА ПОВЕРХНОСТИ КРЕМНИЯ

Никита Андреевич Усов[1]✉, Евгений Николаевич Грибанов[2], Олег Иванович Марков[3]
[1,2,3]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]nikitaus2001@mail.ru✉
[2]gribanovEN@gmail.com
[3]o.i.markov@mail.ru

Аннотация. *В работе сделана попытка нанесения пленки висмута на поверхность кремниевой подложки химическим способом, основанным на восстановлении металла избытком тетрагидридобората натрия и дальнейшим нанесением коллоидной системы на подложку. Проведено АСМ исследование полученной поверхности. Установлено образование нанокластеров висмута и определены их линейные размеры.*

Ключевые слова: *пленка висмута, кремний, нанокластеры.*

Conference paper

PRODUCTION OF BISMUTH FILMS ON THE SILICON SURFACE

Nikita A. Usov[1]✉, Evgeni N. Gribanov[2], Oleg I. Markov[3]
[1,2]Orel State University, Orel, Russia
[1]nikitaus2001@mail.ru✉
[2]gribanovEN@gmail.com
[3]o.i.markov@mail.ru

Abstract. *The paper attempts to apply a bismuth film to the surface of a silicon substrate by a chemical method based on the reduction of metal by an excess of sodium tetrahydride borate and further application of a colloidal system to the substrate. The AFM study of the obtained surface was carried out. The formation of bismuth nanoclusters has been established and their linear dimensions have been determined.*

Keywords: *bismuth films, porous silicon nanoclusters.*

© Усов Н.А., Грибанов Е.Н., Марков О.И., 2023

1. Введение

В настоящее время стало вполне очевидным то обстоятельство, что развитие электроники на микроуровне уже не является перспективным и дальнейший прогресс требует переход на наноуровень. Поэтому основные усилия исследователей направлены на разработку нанотехнологий [1,2]. Одним из перспективных направлений принято считать использование наноструктурированных пленок металлов и полупроводников. Однако в металлах концентрация электронов под воздействием различных физических факторов практически не меняется, а в полупроводниках концентрация электронов и дырок из-за большой ширины запрещенной зоны меняется только под влиянием достаточно сильных воздействий. В связи с этим, больший интерес представляют пленки полуметаллов, в частности висмута. Висмут известен как материал, представляющий интерес для электронных приложений из-за его уникальных свойств. Из-за слабого перекрытия валентной зоны и зоны проводимости он чрезвычайно чувствителен к внешним воздействиям, высокая подвижность электронов важна для быстродействия, большие длина свободного пробега и длина волны де-Бройля электронов приводит к проявлению квантовых эффектов, наблюдаемых при наноразмерных габаритах.

2. Основной текст статьи

Структура пленок висмута зависит от многих различных факторов: метода получения, материала подложки и т.д. Существуют три группы методов получения пленок: электрохимические, химические и физические. В основе электрохимических методов лежат явления электролиза. В таких методах под действием электрического тока происходит растворение анода и осаждением пленки на катоде. В химических методах покрытия образуются в результате химических превращений газообразных или жидких веществ на поверхности подложки. В физических методах осаждение происходит в результате воздействия физических факторов.

Способ электрохимического осаждения висмута предложили авторы [3], защитив свое изобретение авторским свидетельством. Исследованию электрохимического формирования тонких пленок висмута посвящена работа [4]. Сравнительно недавно ученые Южно-Уральского государственного университета [5] получали пленки висмута электроосаждением. Изучив физико-химические свойства материалов, специалисты пришли к выводу, что пленки из висмута можно использовать при разработке защиты от ионизирующих излучений.

Качественные пленки получаются методом термического испарения в вакууме на подложки с последующим отжигом [6]. Установлено, что пленки имеют блочную структур. Математическому моделированию роста пленок посвящена работа [7]. Экспериментальному исследованию физических свойств пленок висмута посвятила свою диссертационную работу бывшая выпускница бакалавриата ОГУ им. И. С. Тургенева 2016 года Макарова Е.С. [8].

Весьма важными для получения качественных пленок являются свойства поверхности, природа физико-химических процессов, протекающих на ней, а также роль внешних факторов. Одна из первостепенных задач полупроводниковой электроники — это научиться управлять свойствами поверхности. Учитывая дефектность реальной структуры подложки, наиболее актуальными вопросами в этой области являются: изучение электронного строения дефектов и их влияния на адсорбционные и другие свойства поверхностей подложки. Кремний и германий являются базовыми материалами твердотельной электроники, в том числе они используются в качестве подложки для получения пленок. Понимание механизмов взаимодействия атомов с поверхностью Si (100) в процессе роста пленки необходимо для разработки технологии процесса, который гарантирует рост качественных пленок. Модифицировать свойства поверхности кремния можно ее наноструктуризацией. Одной из разновидностей наноструктурированного кремния является пористый кремний, который обладает сильно развитой поверхностью с новыми физико-химическими свойствами поверхности. В монографии [9] рассмотрены методы получения медных пленок на пористом кремнии. Для получения пленок металлов на полупроводниковые подложки используют две группы методов. К первой относятся химическое осаждение из газовой фазы, термическое испарение, катодное и магнетронное распыление. Ко второй группе относятся методы осаждения на подложку из жидких растворов: химическое и электрохимическое осаждение. В нашей работе предлагается заменить медь висмутом. Поскольку такие структуры висмута на подложке из пористого кремния еще никто не исследовал, то первой задачей является отработка методов получения пористого кремния. Вторая задача состоит в получении пленок висмута на пористом кремнии. Структуру пленки предполагается исследовать методом атомно-силовой микроскопии [10], поскольку она используется весьма компетентными авторами [11].

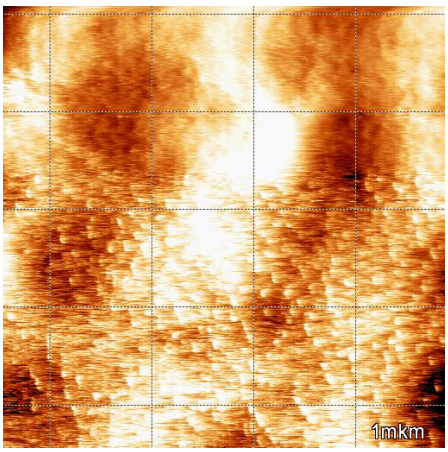


Рисунок 1. Атомно-силовое микроскопическое изображение участка поверхности кристалла кремния с наночастицами Bi.

На первом этапе работы протравливали кремниевую подложку 5% плавиковой кислотой (HF) в течении 10 минут для удаления оксидной пленки. Метод синтеза наночастиц висмута заключается в химическом восстановлении 0.1 М раствора $Bi(NO_3)_3$ избытком тетрагидридобората натрия

$NaBH_4$ в течение 10 мин при УЗ-обработке и дальнейшим нанесением, полученной системы, на кремниевую подложку. После этого кремниевую подложку сушили при температуре 40-50°С до воздушно-сухого состояния.

На рисунке 1 показан скан поверхности кремниевой подложки с осажденными наночастицами. Из него следует, что частицы Bi на подложке скапливаются в виде отдельных областей. В области скопления наночастицы почти равномерно осаждаются в виде кластеров с плотностью 50 на 1 мкм.

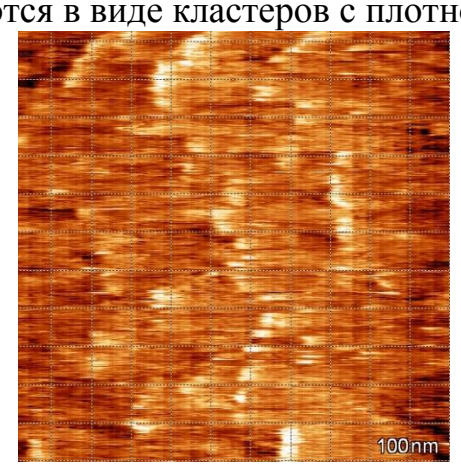


Рисунок 2. Атомно-силовое микроскопическое изображение участка поверхности кремния с наночастицами Bi.

На рисунке 2 выделена область того же участка с большим увеличением. Отчетливо становится видна неравномерность распределения наночастиц.

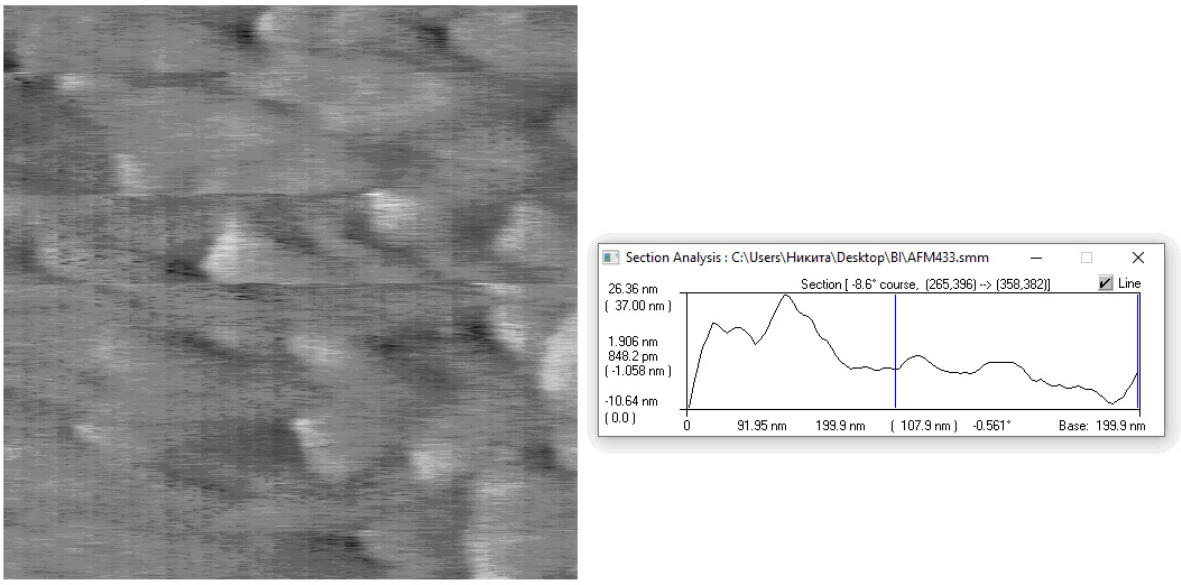


Рисунок 3. Увеличенное атомно-силовое микроскопическое изображение поверхности кремния с наночастицами Bi.

Максимальная высота кластеров достигает ~26 нм, латеральный размер ~100 нм. На профиле распределения по высоте поверхности видны частицы с высотой около ~2,5 нм и латеральным размером ~50 нм (рисунок 3).

Также обнаружены кластеры висмута большего размера (рисунок 4).

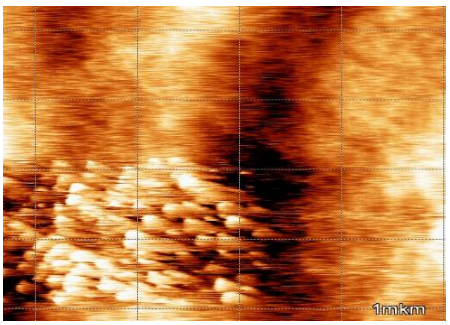


Рисунок 4. Атомно-силовое микроскопическое изображение участка поверхности кристалла кремния с наночастицами Bi.

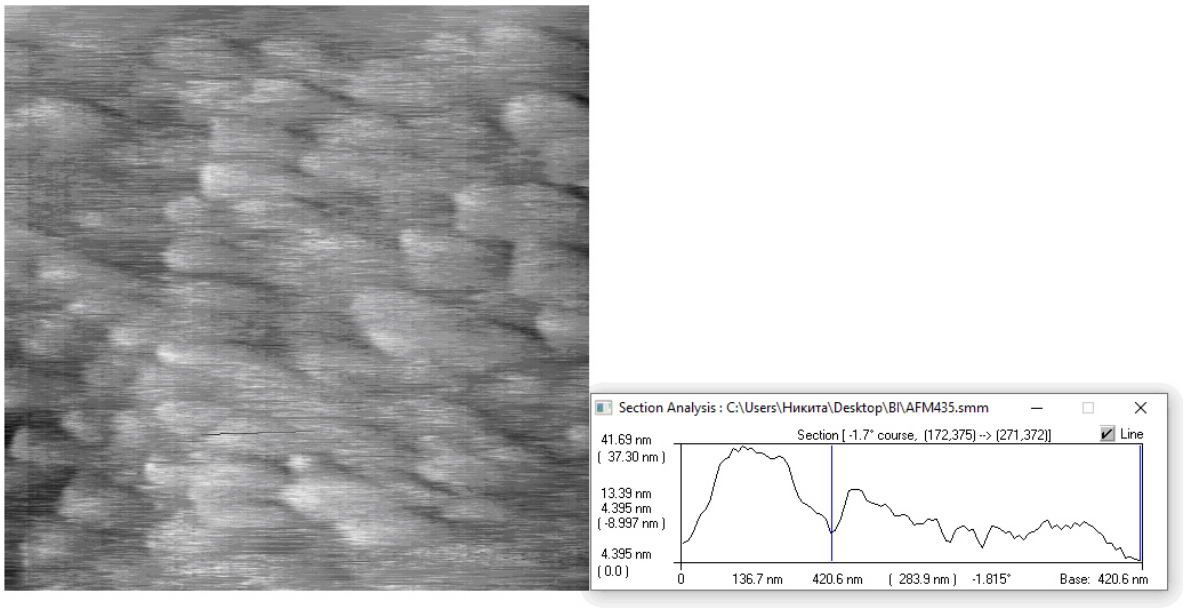


Рисунок 5. Увеличенное атомно-силовое микроскопическое изображение участка поверхности кристалла кремния с наночастицами Bi.

Анализ профиля поверхности (рисунок 5) показывает, что высота кластеров составляет ~40нм, латеральный размер обнаруженных частиц составил 140-250 нм. Латеральный размер частиц больше на 40-150% в сравнении с предыдущим участком.

3. Заключение

В результате проведенного исследования методом химического осаждения проведено осаждение нанокластеров висмута на кремниевую подложку. Хотя результаты носят еще предварительный характер, можно сделать некоторые выводы. По данным атомно-силовой микроскопии проведен анализ структурирования и зародышеобразования при формировании пленки висмута. Показано, что происходит островковый рост пленки. Во время роста латеральный размер кластеров увеличивается намного быстрее их высоты, что говорит о высокой степени диффузии оседающих атомов по поверхности. Таким образом, в процессе получения пленки на структурном уровне, фактически на всех этапах, имеет место кластеризация.

Список источников

1. Спивак Л. В., Щепина Н. Е. Физико-химические основы процессов микро- и нанотехнологии [Электронный ресурс]: учеб. пособие: в 2 ч.; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2018. Ч. 1. 202 с. Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/fiziko-khimiceskie-osnovy-processov micro-i-nanotehnologii/

2. Румянцева М.Н. Химические и электрохимические методы формирования наночастиц. Лекции. МГУ. - 64 с.

3. Дашевская Б.И., Заславская Р.Г., Серебрянская Н.С. Способ электрохимического осаждения висмута. АС 241887 кл.48а, 5/30 МПК С 23b. (заявл. 04.06.1967; опубл. 04.01.1969).

4. Баканов В.И., Ларина Н.В. Электрохимическое формирование наноструктур: тонкие пленки висмута//Известия ВУЗов, серия: Химия и химическая технология. 2012. Т. 55. №5. С. 59-62.

5. Tishkevich D.I., Grabchikov S.S., Tsybulskaya L.S., Shendyukov V.S., Perevoznikov S.S., Trukhanov S.V., Trukhanova E.L., Trukhanov A.V., Vinnik D.A. Electrochemical deposition regimes and critical influence of organic additives on the structure of Bi films // Journal of Alloys and Compounds. 2018. Vol. 735. P. 1943-1948.

6. Грабов В.М., Демидов Е.В., Иванова Е.К., Каблукова Н.С., Крушельницкий А.Н., Сенкевич С.В. Структура пленок висмута, полученных с применением предварительно сформированного на подложке ансамбля одинаково ориентированных монокристаллических островков висмута// Физика и техника полупроводников.2017. Т. 51. Вып. 7. С.867-869.

7. Грабов В. М., Демидов Е. В., Усынин Е. В. Моделирование процесса роста пленок висмута на подложке из слюды//Известия РГПУ им. А.И.Герцена. 2011. №138. С. 35-44.

8. Макарова Е. С. Развитие методов измерения теплофизических свойств тонких и тонкопленочных образцов термоэлектрических материалов. Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук. Санкт-Петербург. 2022. 197 с.

9. Бондаренко А. В. Наноструктурированные пленки меди на пористом кремнии: формирование. свойства и применение. Минск. Бестпринт. 2019. – 133 с.

10. Рыков А.С. Сканирующая зондовая микроскопия полупроводниковых материалов и наноструктур. СПб.: 2001. 52 с.

11. Грабов В.М., Демидов Е.В., Комаров В.А. Атомно-силовая микроскопия пленок висмута//Физика твердого тела. 2008. Т.50. Вып. 7. С. 1312-1316.

References

1. Spivak L.V., Shchepina I.E. Physico-chemical bases of micro- and nanotechnology processes [Electronic resource], ucheb.pos. v 2 ch. Perm. gos.nats.issled.un-t. Perm. 2018. Ch.1. 202p. http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/fiziko-khimiceskie-osnovy-processov micro-i-nanotehnologii. (In Russ.).

2. Rumyantseva M. N. Chemical and electrochemical methods of nanoparticle formation. Lektsii. MGU.64 p. (In Russ.).

3. Dashevskaya B.I., Zaslavskaya R.G., Serebryanskaya N.S. Method of electrochemical deposition of bismuth. AS 241887 kl.18a, 5/30 MPK C 23b (zayavl. 04.06. 1967; opubl. 04.1. 1969). (In Russ.).

4. Bakanov V.I., Larina N.V. Electrochemical formation of nanostructures: thin films of bismuth. Izvestiya VUZov, seriya: Khimiya i khimicheskie tekhnologii. V.55. N 5. 2012.p.59-62. (In Russ.).

5. Tishkevich D.I., Grabchikov S.S. , Tsybulskaya L.S. , Shendyukov V.S., Perevoznikov S.S., Trukhanov S.V. , Trukhanova E.L. , Trukhanov A.V. , Vinnik D.A. Electrochemical deposition regimes and critical influence of organic additives on the structure of Bi films // Journal of Alloys and Compounds. 2018. V. 735, p. 1943-1948.

6. Grabov V.M., Demidov E.V., Ivanova E.K., Kablulova N.S., Krushelnitski A.N., Senkevich S.V. The structure of bismuth films obtained using an ensemble of identically oriented single-crystal bismuth islands preformed on a substrate. Fizika I tekhnika poluprovodnikov. 2017. V.51. N. 7 p.867-869. (In Russ.).

7. Grabov V.M., Demidov E.V., Usynin E.V. Modeling of the growth process of bismuth films on a mica substrate. Izvestiya RGPU im. A.I. Gertsena. 2011. №138. c. 35-44. (In Russ.).

8. Makarova E.S. Development of methods for measuring thermophysical properties of thin and thin-film samples of thermoelectric materials. Dissertatsiya na soiskanie uchenoi stepeni kandidata tekhnicheskikh nauk. Sankt-Peterburg. 2022. 197 c. (In Russ.).

9. Bondarenko A.V. Nanostructured copper films on porous silicon: formation. properties and application. Minsk.Bestprint, 2019. 133 p. (In Russ.).

10. Rykov A.S. Scanning probe microscopy of semiconductor materials and nanostructures. SPb. 2001.52 p. (In Russ.).

11. Grabov V.M., Demidov E.V., Komarov V.A. Atomic force microscopy of bismuth films. Fizika tverdogo tela. 2008. V. 50. N 7. P.1312-1316. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 312-316.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 312-316.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 620.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛА КРЕМНИЯ СОВРЕМЕННЫМИ МЕТОДАМИ МИКРОСКОПИИ

Антон Алексеевич Фарафонов✉
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Гимназия № 1, Орёл, Россия
farafonova_irina78@mail.ru✉

Аннотация. *В статье идёт речь об исследовании геометрических параметров структур поверхности кристалла кремния с помощью металлографического микроскопа Альтами Мет 1Д, а также с помощью сканирующего зондового микроскопа СММ-2000 в атомно-силовом режиме. Исследование проводится с целью определения влияние плазмирования на сколы кристаллов кремния.*

Ключевые слова: *кристаллы кремния, плазмирование, металлографический микроскоп, сканирующий зондовый микроскоп, шероховатость, размер зерна, развитость поверхности.*

Conference paper

INVESTIGATION OF THE SILICON CRYSTAL SURFACE BY MODERN MICROSCOPY METHODS

Anton Alekseevich Farafonov✉
Orel State University named after I.S. Turgenev, Gymnasium No. 1, Orel, Russia
farafonova_irina78@mail.ru✉

Abstract: *The article deals with the study of the geometric parameters of the silicon crystal surface structures using the Altami Met 1D metallographic microscope, as well as using the CMM-2000 scanning probe microscope in atomic force mode. The study is carried out in order to determine the influence of planning on the chips of silicon crystals.*

Keywords: *silicon crystals, plasmation, metallographic microscope, scanning probe microscope, roughness, grain size, surface development.*

1. Введение

Создание устройств коммуникационной техники требует разработки

© Фарафонов А.А., 2023

систем обработки и передачи данных, обладающих повышенной надежностью и более высоким быстродействием по сравнению с существующими аналогами. Решение этой задачи базируется на полупроводниковой технологии, где ключевым элементом является кремний в силу своей широкой распространенности, устойчивости к химическим воздействиям, а главное – из-за наличия превосходно отработанных технологий создания монокристаллических образцов большого диаметра, обладающих при этом высоким структурным совершенством и степенью очистки. Также кристаллы кремния широко используются при производстве солнечных батарей и светоизлучающих элементов. Всё это обуславливает актуальность проведённого исследования.

Цель исследования состоит в определении геометрических параметров структур поверхности кристалла кремния.

Для достижения цели необходимо решить следующие *задачи*:

1) провести первоначальное исследование по изучению структуры поверхности кристалла кремния;

2) провести плазмирование поверхности кристалла кремния;

3) определить влияние плазмирования на сколы кристаллов кремния.

Объект исследования: кристаллы кремния.

Предмет исследования: геометрические параметры поверхности кристалла кремния.

2. Основной текст статьи

Кремний - химический элемент с символом Si и атомным номером 14. Это твердое, хрупкое кристаллическое вещество с сине-серым металлическим блеском, полупроводник [2].

Кремний имеет достаточно широкое применение. Технический кремний является сырьём для металлургических производств; для производства водорода в полевых условиях; для производства солнечных батарей. Сверхчистый кремний преимущественно используется для производства одиночных электронных приборов. Чистый кремний являются основным сырьевым материалом для солнечной энергетики. Монокристаллический кремний используется для изготовления зеркал газовых лазеров. Соединения кремния служат основой для производства стекла, цемента и силикатного клея.

Контроль поверхности кристалла кремния осуществлялся с помощью металлографического микроскопа Альтами Мет 1Д, а также с помощью сканирующего зондового микроскопа СММ-2000 в атомно-силовом режиме [1, 4].

В настоящее время плазмирование является одним из широко используемых способов направленного изменения поверхностных свойств материалов. Основная область его применения – это выявления стойкости различных материалов, планируемых в качестве конструкционных, к воздействиям, аналогичным воздействию солнечного ветра в открытом космосе. В процессе исследования кристаллы кремния подвергались плазмированию с помощью вакуумно-плазменной установки МАГ- 5.

На рисунке 1 и 2 представлены снимки поверхности кристалла кремния до и после плазмирования на металографическом микроскопе Альтами Мет 1Д.

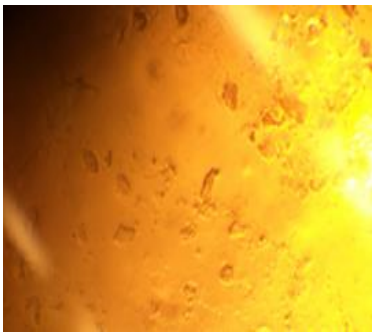


Рисунок 1. Снимок поверхности кристалла кремния до плазмирования на металографическом микроскопе.

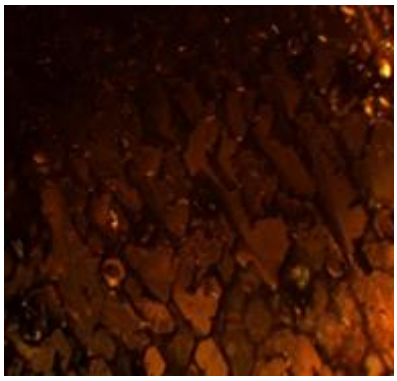


Рисунок 2. Снимок поверхности кристалла кремния после плазмирования на металографическом микроскопе.

На кристалле кремния до плазмирования видна первоначальная структура поверхности, а именно дефекты в виде террас, которые хорошо заметны на снимке с микроскопа СММ-2000 в атомно-силовом режиме (рисунок 3).

Рисунок 3 - Снимок поверхности кристалла кремния до плазмирования с микроскопа СММ-2000 в атомно-силовом режиме.

На снимках кристаллов кремния сканирующим зондовым микроскопом СММ-2000 в атомно-силовом режиме после плазмирования видны переслоения поверхности в виде измельчённых геометрических форм (Рисунок 4).

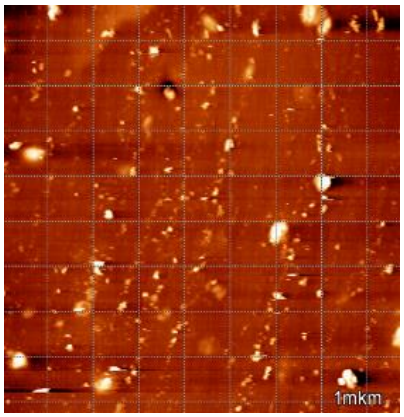


Рисунок 4. Снимок поверхности кристалла кремния после плазмирования с микроскопа СММ-2000 в атомно-силовом режиме.

С помощью программы анализа данных Scan Master for SMM-2000 нам удалось получить изображения кристаллов кремния в трёхмерном пространстве, а также сделать графики шероховатости кристаллов [3]. В результате были получены следующие данные:

Средняя шероховатость (Ra) изменилась значительно, уменьшилась почти в два раза с 15,10 nm до 8,11nm.

Средний размер зерна (Sm) и средний размер нанозерна (S) также уменьшились (с 507,9 nm / 126,7 nm до 293,6 nm / 53,88 nm соответственно).

Развитость поверхности (Lo) практически не изменилась. Она осталась в прежних показателях (1,020 - 1,016).

3. Заключение

В результате исследования получены следующие *выводы:*

1. Проведено первоначальное исследование поверхности кристаллов кремния с помощью металлографического и зондового микроскопов, сделаны соответствующие снимки, которые позволили установить параметры шероховатости кристалла кремния.
2. Проведено плазмирование поверхности кристаллов кремния с помощью с помощью установки МАГ - 5.
3. Установлено влияние на сколы кристаллов кремния плазмированием, сделаны соответствующие снимки и проведён анализ полученных данных.

Список источников

1. Елманов Г.Н., Логинов Б.А., Севрюков О.Н. Исследование топологии поверхности методом сканирующей атомно-силовой микроскопии. Лабораторный практикум: Учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2011. 64 с.

2. Кремний. Материал из Википедии – свободной энциклопедии [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://z-proton.ru >doc / SMM – 2000 opisanie tipa.pdf. – Дата доступа: 15.01.2023.

3. Новиков И.И. Дефекты кристаллического строения металлов: учебное пособие. / И.И. Новиков – М.: Изд-во Металлургия, 1983г. – 232 с.

4. Описание типа средства измерений «Микроскопы сканирующие зондовые «СММ – 2000». // Приложение к свидетельству № 42785 об утверждении типа средств измерений. – Режим доступа: http://en.wikipedia.org. – Дата доступа: 15.01.2023.

References

1. Elmanov G.N., Loginov B.A., Sevryukov O.N. Investigation of surface topology by scanning atomic force microscopy. Laboratory workshop: Textbook. Moscow: NRU MEPhI, 2011. 64 p.

2. Silicon. Material from Wikipedia – free encyclopedia [Electronic resource]. – Access mode: http://z-proton.ru >doc / SMM – 2000 opisanie tipa.pdf. – Access date: 15.01.2023.

3. Novikov I.I. Defects of the crystalline structure of metals: a textbook. / I.I. Novikov – M.: Publishing House Metallurgy, 1983 – 232s.

4. Description of the type of measuring instrument "Scanning probe microscopes "SMM – 2000". // Appendix to certificate No. 42785 on the approval of the type of measuring instruments. – Access mode: http://en.wikipedia.org. – Access date: 15.01.2023.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 317-323.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 317-323.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК536.3+621.362.1

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТАВНОЙ ВЕТВИ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОХЛАДИТЕЛЯ

Анастасия Александровна Амелькина[1], Олег Иванович Марков[2]✉
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]nastya.bakina.00@inbox.ru
[2]o.i.markov@mail.ru✉

Аннотация. *Выполнено численное моделирование преобразования энергии в составной ветви твердотельного термоэлектрического охладителя Пельтье. На конкретном примере показано, что конструирование составной ветви необходимо проводить на основе решения граничной задачи, а не традиционным методом, исходя из величины параметра эффективности Z, что может приводить к ошибочным результатам.*

Ключевые слова: *математическое моделирование, температурное поле, термоэлектрические охладители Пельтье, составная ветвь.*

Conference paper

MODELING OF A COMPOSITE BRANCH OF A THERMOELECTRIC COOLER

Anastasia A. Amelkina[1], Oleg I. Markov[2]✉
[1, 2]Orel State University, Orel, Russia
[1]nastya.bakina.00@inbox.ru
[2]o.i.markov@mail.ru✉

Abstract. *Numerical simulation of energy conversion in a composite branch of a solid-state thermoelectric Peltier cooler is performed. A concrete example shows that the construction of a composite branch must be carried out on the basis of solving a boundary problem, and not by the traditional method, based on the value of the efficiency parameter Z, which can lead to erroneous results.*

© Амелькина А.А., Марков О.И., 2023

Keywords: *mathematical modeling, temperature field, Peltier thermoelectric coolers, composite branch*.

1. Введение

Главным критерием эффективности термоэлектрического преобразования энергии является общепринятый параметр [1]

$$Z = \frac{\alpha^2}{\rho\chi}, \qquad (1)$$

где α - дифференциальная термоэдс, ρ - удельное сопротивление ветви, χ - удельная теплопроводность ветви. Поскольку в реальных термоэлектриках перечисленные кинетические коэффициенты являются функциями температуры, то его величина может значительно изменяться по всей длине ветви работающего термоэлемента. Поэтому в однородной по составу ветви ее отдельные участки работают не в оптимальных режимах. Так как термоэлектрика, эффективного в широком температурном диапазоне, не существует, то при конструировании термоэлектрических охлаждающих устройств, работающих в режиме максимального перепада температур, ветвь можно составить из нескольких сегментов термоэлектрических материалов, каждый из которых работает в условиях, близких к оптимальным, т.е. использовать составные ветви термоэлемента [2]. Обычно ветвь термоэлемента формируют из отдельных сегментов низко-, средне- и высокотемпературных термоэлектрических материалов, последовательно соединяя их между собой так, что каждый из них наиболее эффективен в своем узком интервале температур.

Создание эффективных многосекционных ветвей термоэлемента по-прежнему остается сложной научно-технологической задачей [2-5], которой был посвящен ряд докладов на межгосударственной конференции ISCTA-2023 в Санкт-Петербурге. Для ее решения в теоретической части необходимо разработать математическую модель, программное обеспечение, позволяющие рассчитать параметры ветви, а также провести ее оптимизацию по нескольким параметрам. Размер каждого сегмента ветви определяется с учетом распределения температуры, при котором материал этого сегмента обладает максимальной термоэлектрической эффективностью. В работах [3, 4] разработаны методы расчета составных термопар, в том числе [4] основанные на современных методах оптимизации, в основе которых лежит линеаризация граничной задачи. Но при этом в процессе линеаризации происходит существенное упрощение поставленной задачи. В практической части также достигнут определенный успех, так в одной из наиболее продвинутых в этом направлении работ [5] созданы экспериментальные модели термоэлементов с составными ветвями и показана перспективность такой направленности повышения эффективности термоэлементов. Однако, по-прежнему, задача проведения оптимизации составной ветви без проведения существенных упрощений не решена. В данной работе автор последовательно придерживается подхода к численному расчету составной ветви [6], основанном на численном решении граничной задачи, что

позволяет использовать экспериментально полученные температурные зависимости кинетических коэффициентов и решать нелинейную задачу точно. Учитывая, что в месте соединения частей контактное сопротивление приводит к дополнительному выделению теплоты Джоуля, целесообразно использовать составные ветви из небольшого числа сегментов. В нашем расчете рассматривался вариант из двух сегментов. Эффект Томсона не учитывался.

2. Основной текст статьи

Составная ветвь термоэлемента была поделена на два участка $L_1 + L_2 = L$ Для первого участка ветви (в безразмерной переменной $0 \le x \le L_1$) уравнение теплопроводности

$$\frac{d}{dx}\left(\chi_1 \frac{dT}{dx}\right) = -j^2 \rho_1, \tag{2}$$

Для второго участка ($L_1 \le \mathrm{x} \le L$)

$$\frac{d}{dx}\left(\chi_2 \frac{dT}{dx}\right) = -j^2 \rho_2 \tag{3}$$

Граничные условия учитывают на холодном конце ветви поглощение теплоты Пельтье

$$\chi_1 \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0} = \alpha j T\big|_{x=0}, \tag{4}$$

в месте соединения $x = L_1$ сегментов ветви поглощение (выделение) теплоты Пельтье

$$\chi_2 \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L_1} - \chi_1 \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L_1} = (\alpha_2 - \alpha_1) j T\big|_{x=L_1}, \tag{5}$$

на горячем конце ветви постоянная температура

$$T\big|_{x=1} = T_1, \tag{6}$$

где α_1, α_2 - дифференциальные термоэдс сегментов ветви,

ρ_1, ρ_2 -удельные сопротивления сегментов ветви,

χ_1, χ_2 -удельная теплопроводность сегментов ветви,

L_1, L_2 - длины сегментов ветви,

j - величина тока,

T_0 - температура холодного конца ветви,

T_1 - температура горячего конца ветви.

Для моделирования ветви n-типа, состоящей из двух сегментов использованы экспериментальные данные для двух термоэлектриков n-типа $(Bi, Sb)_2(Te, Se, S)_3$ [7] с различными параметрами эффективности Z, температурная зависимость которых приведена на рис. 1. Условно их можно назвать «высокотемпературным» 1 и «низкотемпературным» 2 термоэлектриками соответственно. Причем модуль дифференциальной термоэдс «низкотемпературного» термоэлектрика по всему интервалу температур 200-300 К не более чем на 20 мкВ/К выше, а удельная

электропроводность на 30000 См/м ниже «высокотемпературного» термоэлектрика при почти равной удельной теплопроводности

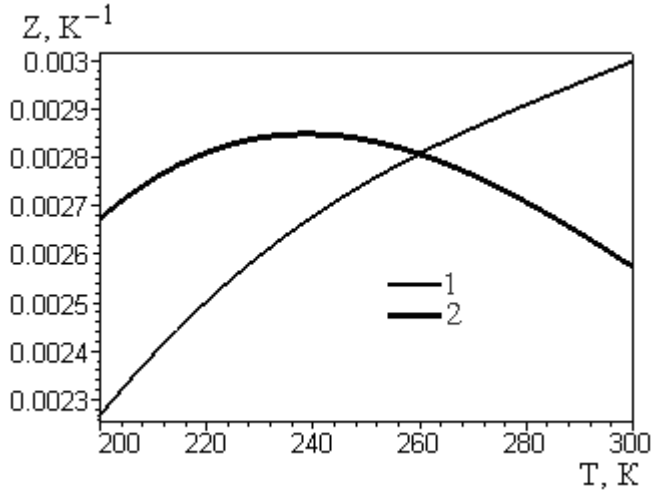


Рисунок 1. Температурные зависимости параметра эффективности «высокотемпературного» 1 и «низкотемпературного» 2 термоэлектриков.

Решение граничных задач (2,4,6) для однородных ветвей с «низкотемпературным» и «высокотемпературным» термоэлектриками в режиме максимального температурного перепада показало практически одинаковое снижение температур на холодном конце ветви до 234 К. Поэтому, основываясь только зависимости параметров Z от температуры, логично предположить расположение «низкотемпературного» термоэлектрика вблизи холодного конца ветви, а «высокотемпературную» ближе к горячему. При одинаковых длинах составных частей $L_1 = L_2$, решена граничная задача (2-5), Рассчитанное распределение температуры представлено на рисунке 2. (кривая 1). Минимальная температура холодного конца ветви составляет 236 К, т.е. при такой последовательности расположения сегментов эффективность такой составной ветви даже ниже по сравнению с однородными ветвями. При перестановке местами термоэлектриков распределение температур изменяется (кривая 2, рис.2). Минимальная температура холодного конца ветви составляет 223 К. Хорошо видимый излом кривой 2 свидетельствует о скачке градиента температуры, к которому приводит поглощение теплоты Пельтье на стыке сегментов ветви. Т.о. при перестановке местами составных частей ветви их суммарное действие различно, что однозначно указывает на ограниченность традиционного подхода к расчету эффективности термопар с использованием параметра эффективности Z.

С целью определения оптимального отношения длин сегментов ветви была решена серия граничных задач (2-5) с различными длинами и результат расчета представлен на рис. 3. Расчет был проведен в интервале отношений длины первого участка к полной длине составной ветви $0.1 \leq L1/L \leq 0.9$.

Как видно из графика (рис. 3), наиболее оптимальная длина первого участка составляет 0.55 всей длины ветви. Одновременно проводимая численная оптимизация по току, позволяет определить оптимальное значение

тока. Т.о. задача по оптимизации составной ветви охлаждающего термоэлемента может быть решена без линеаризации и сопутствующих упрощений.

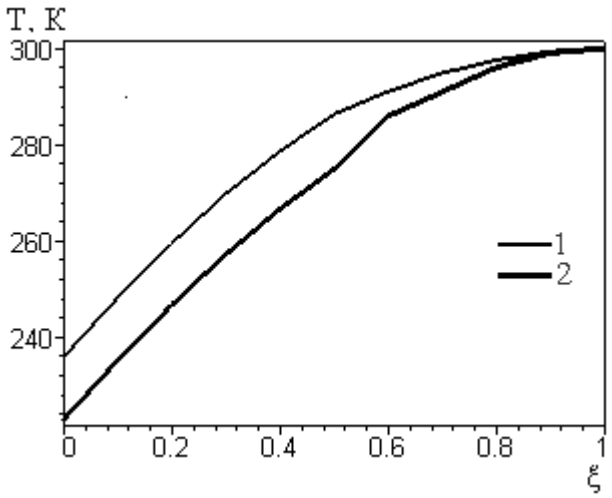


Рисунок 2. Распределение температуры в составных ветвях: 1 первая половина «низкотемпературная», вторая половина «высокотемпературная», 2 первая половина «высокотемпературная», вторая половина «низкотемпературная».

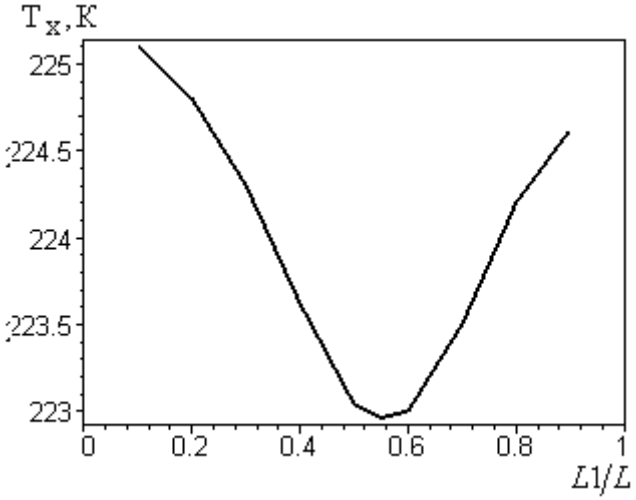


Рисунок 3. Зависимость температуры холодного конца ветви в режиме максимального перепада температур от соотношения длин составных частей ветви.

3. Заключение

В результате исследования:

1. Разработана математическая модель и методика расчета температурного поля составной ветви в режиме максимального перепада температур.

2. Параметр термоэлектрической эффективности Z является только качественной характеристикой термоэлектрика по которой можно производить предварительный отбор материала. Подбор сегментов составной ветви термоэлемента произведенный известным традиционным способом по параметру Z нерационален, т. к. в результате может приводить к более низкой эффективности составной ветви даже по сравнению с однородными ветвями.

3. Решение граничной задачи для составной ветви с учетом температурных зависимостей кинетических коэффициентов термоэлектриков позволяет правильно выбрать материал для сегментов составной ветви, определить оптимальные длины и тем самым найти температурные интервалы, в которых термоэлектрики наиболее эффективны, не совпадающие с выбором по максимальным значениям Z.

Список источников

1. Анатычук Л.И. Термоэлектричество. Т. II. Термоэлектрические преобразователи энергии. Киев: Черновцы: Институт термоэлектричества, 2003. 374 с.

2. Анатычук Л.И., Вихор Л.Н. Термоэлектричество. Т. IV Функционально-градиентные термоэлектрические материалы. Черновцы: Институт термоэлектричества, 2012. 182 с.

3. Semeniouk V.A., Svechnikova T.E., Ivanova L.D. Single stage thermoelectric coolers with temperature difference of 80 K // Proc. of XIV Int. Conf. Thermoelectrics. St.Peterburg. Russia. 1995. P. 485 – 489.

4. Kaliazin A.E., Kuznetsov V.L., Rowe D.M. Rigorous calculations related tu functionally grated and segmented thermoelements// Proc. of XX Int. Conf. on Thermoelectrics. Beijing, Chine 2001. P. 286–292.

5. Иванова Л.Д., Коржуев М.А., Петрова Л.Н., Свечникова Т.Е., Гранаткина Ю.В., Земсков В.С. Низкотемпературные термоэлектрические микрохолодильники, использующие распределенный эффект Пельтье// Доклады IX Межгосударственного семинара «Термоэлектрики и их применения». СПб, 2004. С. 422–427.

6. Марков О.И. О составной ветви низкотемпературного термоэлемента // Журнал технической физики. 2006. Т. 76. Вып. 6. С. 140–142.

7. Лукьянова Л.Н., Кутасов В.А., Константинов П.П. Термоэлектрики $n-(Bi,Sb)_2(Te,Se,S)_3$ эффективные для области температур 80 К <Т< 350 К// Доклады IX Межгосударственного. семинара «Термоэлектрики и их применения». СПб, 2004. С. 68–73.

References

1. Anatychuk L.I. Termoelektrichestvo. T. II. Termoelektricheskie preobrasovateli energii. Kiev, Chernovtsy: Institut termoelektrichestva, 2003. 374 p. (In Russ.).

2. Anatychuk L.I., Vikhor L.N. Termoelektrichestvo. T. IV. Funktsionalno-gradientnye termoelectricheskie materialy. Chernovtsy. Institut termoelektrichestva, 2012. 182 p. (In Russ.).

3. Semeniouk V.A., Svechnikova T.E., Ivanova L.D. Single stage thermoelectric coolers with temperature difference of 80 K // Proc. of XIV Int. Conf. Thermoelectrics. St.Peterburg. Russia. 1995. P. 485–489.

4. Kaliazin A.E., Kuznetsov V.L., Rowe D.M. Rigorous calculations related tu functionally grated and segmented thermoelements // Proc. of XX Int. Conf. on Thermoelectrics. Beijing, Chine, 2001. P. 286–292.

5. Ivanova L.D., Korzhuev M.A., Petrova L.N., Svechnikova T.E., Granatkina Yu.V., Zemskov V.S. Low-temperature thermoelectric micro-coolers using the distributed Peltier effect. // Doklady IV Mezhgosudarstvennogo seminara « Termoelektriki i ikh primeneniya». SPb, 2004. – P. 422–427.

6. Markov O.I. Composite branch of a low-temperature thermoelement. Technical Physics. 2006. V. 51. № 6. P. 818–820.

7. Luk`yanova L.N., Kutasov V.A., Konstantinov P.P. Thermoelectrics $n-(Bi,Sb)_2(Te,Se,S)_3$ effective for the temperature range of 80 K< T < 350 K. // Doklady IV Mezhgosudarstvennogo seminara «Termoelektriki i ikh primeneniya». SPb, 2004. P. 68–73.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 324-329.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 324-329.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 532. 526.2.011.6

О ФОРМЕ ТЕЛ, ПРИВОДЯЩЕЙ К НАИМЕНЬШЕМУ СОПРОТИВЛЕНИЮ ПРИ ОБТЕКАНИИ

Сергей Октябринович Гладков[1], Никита Сергеевич Нагибин[2]✉
[1,2]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия
[1]sglad51@mail.ru
[2]nikita.nagibin@bk.ru✉

Аннотация. *Благодаря уравнению Прандтля строго аналитически определена форма сечения тел, для которого сопротивление потоку минимально. Численное решение полученных уравнений проиллюстрировано графически.*

Ключевые слова: *уравнение Прандтля, уравнение Навье–Стокса, граничные условия.*

Conference paper

ABOUT THE SHAPE OF BODIES LEADING TO THE LEAST RESISTANCE DURING THE FLOW

Sergey Ok. Gladrov[1], Nikita S. Nagibin[2]✉
[1,2]Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
[1]sglad51@mail.ru
[2]nikita.nagibin@bk.ru✉

Abstract. *Thanks to the Prant equation, the cross-sectional shape of bodies for which the flow resistance is minimal is strictly analytically determined. The numerical solution of the resulting equations is illustrated graphically.*

Keywords: *Prant equation, Navier-Stokes equation, polar coordinates.*

Исследование явления обтекания тел в настоящее время является вполне актуальной темой, поскольку позволяет ответить на вопрос, какова должна быть форма контура, приводящего к наименьшему сопротивлению в условиях обтекания. Здесь важную роль играет число Рейнольдса, которое в разных физических условиях может быть, как много больше единицы, так и много меньше.

© Гладков С.О., Нагибин Н.С., 2023

Если речь идет о сечении тела, о котором мы и будем говорить, то для него, также, как и в трехмерном случае, за пределами пограничного слоя число Рейнольдса $\mathrm{R} = \frac{u\bar{a}}{\nu}$, где $u-$ скорость потока, $\bar{a} = \sqrt{ab} -$ средний геометрический линейный размер сечения, $a-$ характерный размер тела вдоль оси x, а $b-$ вдоль оси z, $\nu-$ кинематическая вязкость, может быть большим.

При этом уравнение Навье – Стокса сводится к такому:

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \mathrm{v}_z \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

где $\nu-$ кинематическая вязкость, $P-$ давление, $\rho-$ плотность жидкости.

Здесь учтено, что $\mathrm{v_x} >> \mathrm{v_z}$.

С учетом уравнения Бернулли $P + \frac{\rho \mathrm{v}_x^2}{2} = \frac{\rho U^2}{2}$, уравнение (1) уравнение непрерывности можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_z \dfrac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z} = \nu\left(\dfrac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial z^2}\right), \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Решения уравнений (2) при $x, z \to \infty$ должны удовлетворять двум следующим условиям $\mathrm{v}_x \to u$, $\mathrm{v}_z \to 0$. Кроме этих условий, на контуре тела $z = \eta(x)$ нормальная компонента скорости v_n исчезает. То есть скорость:

$$\eta'(x) = \frac{\mathrm{v}_z}{\mathrm{v}_x}. \tag{3}$$

Решение приведенных уравнений будем искать в виде:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_x = u + \dfrac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \mathrm{v}_z = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases} \tag{4}$$

где функцию $\psi = \psi(x, z)$ надо найти.

Если ввести вспомогательную безразмерную функцию:

$$\varphi = \frac{\psi}{u\sqrt{ab}}. \tag{5}$$

Учитывая (5), находим:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_x = u\left(1+\dfrac{\sqrt{ab}}{x}\varphi'\right), \\ \mathrm{v}_z = \dfrac{u\sqrt{ab}\xi}{x}\varphi'. \end{cases} \tag{6}$$

Обозначив $G = \varphi'$, имеем для нее:

$$\left(\xi^2+1\right)G'' + 4\xi G' + 2G - \mathrm{R}\,GG' = 0, \tag{7}$$

Его решение есть:

$$G(\xi) = \frac{1}{C_2\left(\xi^2+1\right) - \dfrac{\mathrm{R}}{4}\left[\xi + \left(\xi^2+1\right)arctg\,\xi\right]}, \tag{8}$$

где C_2 – безразмерная константа интегрирования.

И, следовательно,

$$\begin{cases} \mathrm{v}_x = u\left(1+\dfrac{\sqrt{ab}}{x}G\right) = u\left\{1+\dfrac{\sqrt{ab}}{x}\dfrac{1}{C_2\left(\xi^2+1\right) - \dfrac{\mathrm{R}}{4}\left[\xi + \left(\xi^2+1\right)arctg\,\xi\right]}\right\}, \\ \mathrm{v}_z = \dfrac{u\sqrt{ab}\xi}{x}G = \dfrac{u\sqrt{ab}\xi}{x}\dfrac{1}{C_2\left(\xi^2+1\right) - \dfrac{\mathrm{R}}{4}\left[\xi + \left(\xi^2+1\right)arctg\,\xi\right]}, \\ \xi = \dfrac{z}{x}. \end{cases} \tag{9}$$

Чтобы вычислить полную силу сопротивления необходимо принять во внимание не только обтекание по торцам тела, но также его обтекание и по обеим боковым граням.

В результате имеем $F_i = \int\limits_{2S_0+S_1} \sigma_{ik}ds^k = \int\limits_{2S_0} \sigma_{iy}dxdz + \int\limits_{S_1} \sigma_{in}ds^n..$

После всех вычислений получаем:

$$F_c = -4\mu\int_{x_0}^{x_1} \left.\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}\right|_{y=\pm\frac{h}{2}} \eta(x)dx + \tag{10}$$

$$+2\mu hu\sqrt{ab}\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(\frac{2\eta'(x)}{x^2}\left(G(\xi)+\frac{\eta(x)}{x}G'(\xi)\right)+\left(\frac{G'(\xi)}{x^2}-\frac{\eta(x)}{x^3}\left(2G(\xi)+\frac{\eta(x)}{x}G'(\xi)\right)\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{G(\xi)}{x}\right)\eta''(x)\right)\right]_{z=\eta} dx.$$

Для второго интеграла удобно воспользоваться выражением:

$$F_{2c} = 2\mu hu\sqrt{ab}\int_{x_0}^{x_1} Hdx, \tag{11}$$

где

$$H=\frac{1}{x^2}\left[\left(2G+\frac{\eta}{x}G'\right)\eta'+G'\left(1-\frac{\eta^2}{x^2}\right)-\frac{2\eta}{x}G-\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{a}{x}G\right)\eta''\right]\Bigg|_{z=\eta}, \qquad (12)$$

При этом уравнение Эйлера – Пуассона приводится к такому:

$$\left[\eta''-\frac{\eta'}{x}\left(2+\frac{\eta}{x}\frac{G''}{G'}\right)+\frac{3\eta}{x}-\frac{1}{x}\left(1-\frac{2\eta^2}{x^2}\right)\frac{G''}{G'}\right]\Bigg|_{z=\eta}=0, \qquad (13)$$

При малых числах Рейнольдса из (13) имеем

$$\eta''-\frac{\eta'}{x}\frac{3x^2-\eta^2}{x^2+\eta^2}+\frac{3\eta}{x^2}-\frac{1}{\eta}\frac{x^2-3\eta^2}{x^2+\eta^2}\left(1-\frac{2\eta^2}{x^2}\right)=0, \qquad (14)$$

где было учтено, что $\frac{G''}{G'}=\frac{x}{\eta}\left(\frac{x^2-3\eta^2}{x^2+\eta^2}\right)$. С помощью подстановки $f=\frac{\eta}{x}$ уравнение (14) приводится к виду:

$$f''x^2\left(1+f^2\right)+f'x\left(3f^2-1\right)+\frac{5f^2-2f^4-1}{f}=0, \qquad (15)$$

Его численное решение при различных граничных условиях показано на рисунках 1-3.

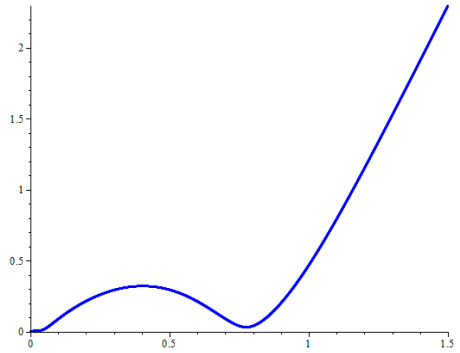


Рисунок 1. Численное решение уравнения (15) при $f\left(0,01\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}$.

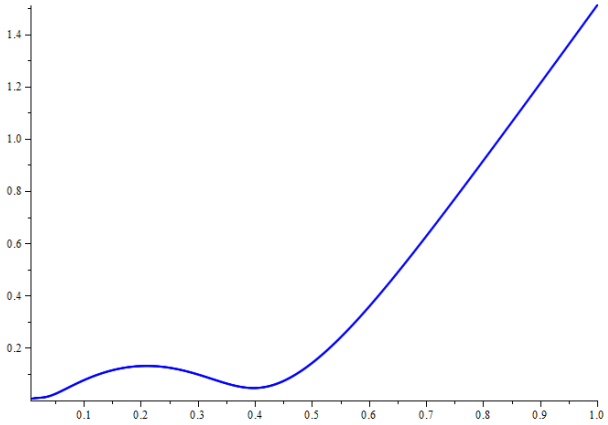


Рисунок 2. Численное решение уравнения (15) при $f\left(0,01\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}$.

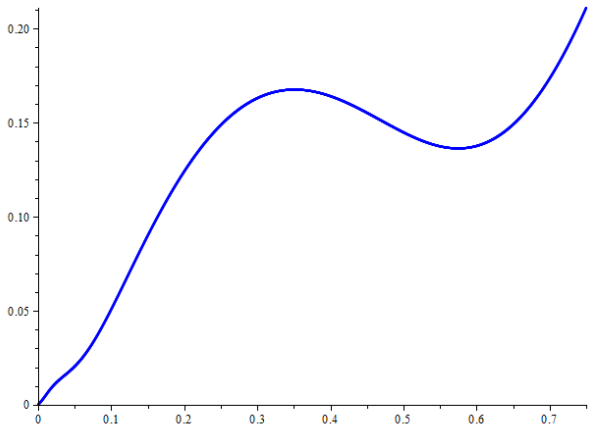


Рисунок 3. Численное решение уравнения (15) при $f(0,01)=\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}$ и произвольных числах Рейнольдса.

Заключение

1. Предложена математическая модель, позволяющая аналитически определять вид наиболее оптимального контура для хорошо обтекаемого тела.

2. Приведено численное решение задачи для произвольных чисел Рейнольдса, проиллюстрированных графически зависимость.

Список источников

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 1988. 733 с.

2. Прандтль Л., Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. В 2-х т. - М.: ГИТТЛ, 1933-1935.

3. Ламб Г. Гидродинамика. - М., ГИТТЛ, 1947.

4. Христианович С.А., Гальперин В.Г., Миллионщиков М.Д., Симонов Л.А. Прикладная газовая динамика. - М.: ЦАГИ, 1948.

5. Гладков С.О. О доказательстве единственности гидродинамического решения Стокса. Известия вузов. Физика. 2018. Т. 61. № 6. С. 103–105.

6. Gladkov S.O. The theory of thermal conductivity and hydrodynamics of Maxwell gas, which is under the influence of an external sound wave. Solid State Communications. 1995. V. 94. N 9. P. 789–791.

7. Гладков С.О. О конвективном движении газа в цилиндрическом объеме. Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. № 12. С. 71–75.

8. Гладков С.О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра. ЖТФ. 2018. Т. 59. № 3. С. 377–341.

9. Гладков С.О. К вопросу приложения второй ковариантной производной от векторной функции к задачам гидродинамики и теории упругости. Вестник МГОУ. 2019. № 3. С. 42–67.

10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука. 1971. - 424 с.

References

1. Landau L.D., Lifshits E.M. Hydrodynamics. Part 6. Mscow: Nauka, 1988. 733 p.
2. Prandtl L., Tietjens O. Hydro- and aeromechanics. In 2 volumes - M., GITTL, 1933-1935.
3. Lamb G. Hydrodynamics. - M., GITTL, 1947.
4. Khristianovich S.A., Galperin V.G., Millionshchikov M.D., Simonov L.A. Applied gas dynamics. - M., TsAGI, 1948.
5. Gladkov S.O. On the proof of the uniqueness of the Stokes hydrodynamic solution. News from universities. Physics. 2018. No. 6. pp. 103–105.
6. Gladkov S.O. The theory of thermal conductivity and hydrodynamics of Maxwell gas, which is under the influence of an external sound wave. Solid State Communications. 1995. V94. N9. pp. 789–791.
7. Gladkov S.O. On the convective movement of gas in a cylindrical volume. Letters to ZhTF. 2005. T. 31. No. 12. pp. 71–75.
8. Gladkov S.O. On the question of calculating the stopping time of a cylindrical body rotating in a viscous continuum and the dragging time of an external cylinder coaxial with it. ZhTF. 2018. T. 59. No. 3. pp. 377–341.
9. Gladkov S.O. To the question of application of the second covariant derivative of a vector function to problems of hydrodynamics and elasticity theory. Bulletin of MGOU. 2019. No. 3. pp. 42–67.
10. Elsholtz L.E. Differential equations and fundamentals of the calculus of variations. M. Science. 1971. P. 424.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 330-336.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 330-336.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК615.471; 615.478; 616-71

РАЗРАБОТКА НОВОЙ ЭЛЕКТРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМ МНОГОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ ЛЕГКИХ ЧЕЛОВЕКА

Мария Александровна Конько[1]✉, Грайр Каренович Алексанян[2], Николай Иванович Горбатенко[3], Николай Сергеевич Елкин[4]
[1,2,3,4]Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М.И. Платова, кафедра ИИСТ, Новочеркасск, Россия
[1]mari.mak787@yandex.ru✉,https://orcid.org/0000-0002-0019-8884
[2]graer@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-9611-6275
[3]gorbatenko@novoch.ru, https://orcid.org/0000-0003-1049-4801
[4]mamroax@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-9085-4170

Аннотация. *В статье представлены результаты разработки и изготовления новой электродной системы для систем многочастотной электроимпедансной томографии. Представлены сравнения принципов построения ранее разработанного макета и опытного образца новой электродной системы. Описаны результаты выполнения электрических, климатических и лабораторных испытаний для проверки работоспособности опытного образца устройства в различных условиях работы, особое внимание уделено оценке постоянства электрического контакта между структурными элементами изделия.*

Ключевые слова: *электроимпедансная томография, электродная система, неметаллические токопроводящие электроды, испытания, электрический контакт.*

Благодарности: *работа выполнена в рамках стратегического проекта «Научно инновационный кластер «Контрактный R&D центр»» Программы развития ЮРГПУ(НПИ) при реализации программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030».*

Conference paper

DEVELOPMENT OF A NEW ELECTRODE SYSTEM FOR MULTI-FREQUENCY ELECTROIMPEDANCE TOMOGRAPHY SYSTEMS OF HUMAN LUNGS

Maria A. Konko[1]✉, Grayr K. Aleksanyan[2], Nikolay I. Gorbatenko[3], Nikolay S. Yelkin[4]

© Конько М.А., Алексанян Г.К., Горбатенко Н.И., Елкин Н.С., 2023

[1,2,3,4]*South Russian State Polytechnic M.I. Platov University (NPI), department of IMST, Novocherkassk, Russia*
[1]*mari.mak787@yandex.ru*✉*,https://orcid.org/0000-0002-0019-8884*
[2]*graer@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-9611-6275*
[3]*gorbatenko@novoch.ru, https://orcid.org/0000-0003-1049-4801*
[4]*mamroax@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-9085-4170*

Abstract. *The article presents the results of the development and manufacture of a new electrode system for multi-frequency electrical impedance tomography systems. Comparisons of the principles of construction of a previously developed layout and a prototype of a new electrode system are presented. The results of electrical, climatic and laboratory tests to verify the operability of a prototype device in various operating conditions are described, special attention is paid to assessing the constancy of electrical contact between the structural elements of the product.*

Keywords: *electrical impedance tomography, electrode system, non-metallic conductive electrodes, testing, electrical contact.*

Acknowledgments: *the work was carried out within the framework of the strategic project "Scientific Innovation Cluster "Contract R&D Center""development programs of SRSPU (NPI) in the implementation of the strategic academic leadership program "Priority-2030».*

1. Введение

Оценка функций внешнего дыхания имеет высокий интерес в диагностике заболеваний легких, позволяя вовремя обнаружить негативные изменения, определить динамику изменений при проведении лечения или выявить индивидуальные параметры функционального состояния легких для конкретного человека.

В настоящее время используют разные методы оценки, один из развивающихся, новых, информативных, безлучевых и неинвазивных методов является электроимпедансная томография (ЭИТ).

Данный метод, основан на принципе изменения электроимпеданса тканей в организме при прохождении через них высокочастотного тока малой амплитуды, что позволяет получать визуализацию внутренних структур тела человека и мониторить их функциональное состояние без использования ионизирующего излучения. [1-3]

Суть метода заключается в следующем. На тело человека по периметру грудной клетки накладывается ЭС. К паре электродов подключается источник тока и инжектируется высокочастотный ток малой амплитуды. Для оценки изменения поле проводимости объекта. Одновременно с измерительных электродов регистрируются возникающие разности потенциалов. Далее источник тока подключается к следующей паре электродов и осуществляется съем разности потенциалов с других электродов, не являющихся в данный момент инжектируемыми. Подобные измерения повторяются до тех пор, пока процесс съема данных не будет

остановлен пользователем. Полученная измерительная информация инжектируется и передается в устройство обработки, где решается обратная задача и визуализация ее результатов в плоскости наложения ЭС [4].

Ранее в статье [5] был разработан макет устройства съема первичной измерительной информации для систем электроимпедансной томографии (УСПИИ ЭИТ).

Цель данной работы является изготовление опытного образца УСПИИ ЭИТ – новой электродной системы (ЭС).

В ходе данной работы ставились и решались задачи:

- сравнить принципы построения макета и опытного образца УСПИИ ЭИТ;
- оценить качественные характеристики опытного образца новой ЭС и сравнить их с макетом УСПИИ ЭИТ;
- изготовить опытный образец УСПИИ ЭИТ.

2. Сравнение принципов построения и оценка качественных характеристик опытного образца и макета УСПИИ ЭИТ. Изготовление опытного образца УСПИИ ЭИТ

В ходе проведения исследовательский испытания макета УСПИИ ЭИТ были выявлены недостатки в конструкции изделия, а именно:

- неметаллические токопроводящие электроды (НТЭ) рассыпаются;
- металлическая токопроводящая нить (МТН) контактирует с телом человека;
- электродные кабели (ЭК) внутри тканевого эластичного электродного пояса (ТЭЭП) давят при долгом ношении устройства на теле;
- входные (Вх-Р) и выходные (Вых-Р) разъемы плохо замыкаются и размыкаются;
- защита ЭК подходящих к контактам Вх-Р, Вых-Р осуществляется ненадежно, возможен обрыв;
- при нанесении маркировки, есть риск повреждения ЭК, располагающихся внутри ТЭЭП.

В этой связи, существует необходимость замены комплектующих макета на более надежные.

В таблице 1 приведены основные структурные элементы макета и опытного образца УСПИИ ЭИТ и используемые для их создания комплектующие, а также приведены обоснования замены или сохранения исходных компонентов.

Таблица 1. Основные структурные элементы новой ЭС макета и опытного образца УСПИИ ЭИТ и используемые для их создания комплектующие.

№ п/п	Наименование структурного элемента	Макет	Опытный образец	Что изменилось
1	Тканевой эластичный электродный пояс (ТЭЭП)	Лента-резинка	Кенезео тейп	Лента резинка заменена на кенезио тейп. В опытном образце цвет ТЭЭП отражает

				типоразмер изделия. В макете типоразмер определялся по цвету ФН
2	Неметаллические токопроводящие электроды (НТЭ)	Углеродная ткань[6]	Углерод-ная ткань	В опытном образце проведена обработка краев НТЭ для предотвращения осыпания углеродной ткани
3	Электродные кабели (ЭК)	МГТФ 1х0,03	МГТФ 1х0,03; Нить из нержавеющей стали	ЭК заменены на МТН, (только в ТЭЭП), чтобы на ЭС было удобно лежать длительное время. Изменено расположение ЭК в ТЭЭП. В остальном изменений нет.
4	Фиксирующая застежка (ФЗ)	Фастекс пластиковый	Контакт-лента	Фастекс пластиковый заменен на контакт-ленту, в связи с лучшим замыканием и размыканием, а также креплением на человеке. При использовании ленты-контакт достигается лучшее прилегание НТЭ
5	Разъем (Р)	Разъем DB-25	Разъем DB-25	Изменений в конструкции опытного образца изделия нет
6	Металлическая токопроводящая нить (МТН)	Нить из нержавеющей стали	Нить из нержавеющей стали	Изменено расположение МТН в ТЭЭП. Изменено функциональное назначение МТН
7	Термоусадоч-ная трубка (ТТ)	Термическая усадочная трубка	Термическая усадочная трубка	Изменений в использовании нет
8	Разъем входной/выходной (Вх-Р/ Вых-Р)	Разъем на плату	Разъем DB-9	Разъем на плату заменен разъемом DB-9.Разъем DB-9более надежный,

				предотвращает обрыв ЭК
9	Хвостовик (кабельный спиральный ввод) (КСВ)	Кабельный спиральный ввод	Хвостовик / ТТ	Изменение размера и/или замена на ТТ в зависимости от исполнения
10	Фиксирующая нить (ФН)	Швейная нить из полиэстера	Швейная нить из полиэстера	В опытном образце ФН служит только для крепления ФЗ. Ранее в макете УСПИИ ЭИТ ФН скреплялись части ТЭЭП и наносился типоразмер изделия
11	Наконечник штыревой втулочный изолированный (НШВИ)	Не использует-ся	НШВИ 0,25-8	НШВИ предназначен для скрепления МТН и ЭК в опытном образце

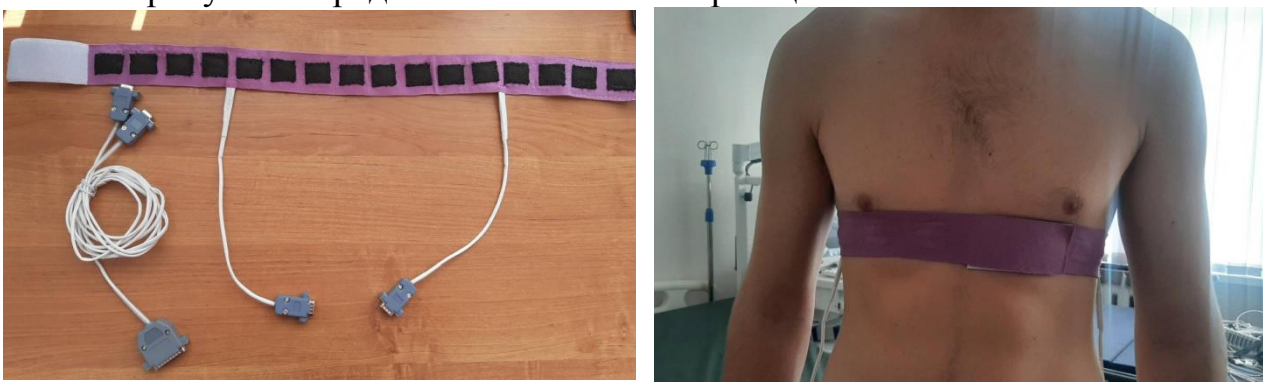
На рисунке 1 изображены готовые изделия макета и опытного образца УСПИИ ЭИТ.

а) б)

Рисунок 1. УСПИИ ЭИТ, а) макет; б) опытный образец.

В соответствии с приведенными принципами построения и техническими решениями изготовлен опытный образец ЭС.

На рисунке 2 представлен опытный образец УСПИИ ЭИТ – новая ЭС.



а) б)

в) г)

Рисунок 2. а) изготовленный опытный образец ЭС; б) опытный образец ЭС на человеке вид спереди; в) опытный образец ЭС на человеке вид сбоку; г) опытный образец ЭС на человеке вид сзади

По окончании изготовления опытного образца УСПИИ ЭИТ проведены предварительные испытания, а именно оценка электрического контакта после каждого воздействия на ЭС. Опытный образец выдержал проверку для трех типов испытаний, а именно климатических, электрических и лабораторных.

3. Заключение

В результате выполненных исследований была разработан и изготовлен опытный образец ЭС для систем многочастотной электроимпедансной томографии легких человека. Новое решение может быть применено для решения практических задач в области электроимпедансной томографии. Реализованные и доработанные принципы построения обеспечивают удобство съема измерительной информации, удобство наложения и крепления, а также снижают негативные последствия, связанные с продолжительным использованием ЭС при мониторинге функционального состояния легких на лежачих пациентах. Кроме того, предложенные конструктивные решения способствуют сокращению числа артефактов на реконструированном изображении путем обеспечения более плотного прилегания электродов к поверхности тела человека. В опытном образце УСПИИ ЭИТ исключены недостатки конструкции макета изделия. Устройство успешно прошло предварительные испытания и готова к проведению испытаний предложенного изделия совместно с устройством ЭИТ на коллективе авторов и добровольцах.

Список источников

1. Bachmann, M.C., Morais, C., Bugedo, G., Bruhn, A., Morales, A., Borges, J.B., Costa, E., Retamal, J. "Electrical impedance tomography in acute respiratory distress syndrome". Crit Care, том22, выпуск 1, 2018. – С. 263.

2. Гун, Бо; Крюгер-Циолек, Сабина; Меллер, Кнут; Шульке, Бенджамин; Чжао, Чжаньци. «Электроимпедансная томография: функциональная визуализация легких на пути к клинической практике?». Экспертный обзор респираторной медицины. 9 (6), 2015. – С. 721-737.

3. Пеккер Я.С., Бразовский К.С., Усов В.Н. Электроимпедансная томография. - Томск: НТЛ, 2004. – С. 192.

4. Алексанян Грайр. «Экспериментальные зависимости данных измерений от объема вдыхаемого воздуха при многочастотной электроимпедансной томографии»: Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2021; том 5., выпуск 5-113. - С. 39-50.

5. Алексанян Г.К., Конько М.А., Горбатенко Н.И. «Устройство съема первичной измерительной информации для систем электроимпедансной томографии»: Современные проблемы физико-математических наук, VIII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием, г. Орёл, 25 - 26 ноября 2022. – С. 374-379.

6. Мелешко А.И., Половников С.П. «Углерод, углеродные волокна, углеродные композиты». М.: Изд. «Сайнс-пресс», 2007. - С. 189.

References

1. Bachmann, M.C., Morais, C., Bugedo, G., Bruhn, A., Morales, A., Borges, J.B., Costa, E., Retamal, J. "Electrical impedance tomography in acute respiratory distress syndrome". Crit Care, 2018; vol 22: p. 263.

2. Gong, Bo; Kruger-Tsiolek, Sabina; Miller, Knut; Schalke, Benjamin; Zhao, Zhan qi (2015-11-02). "Electrical impedance tomography: functional visualization of the lungs on the way to clinical practice?". Expert review of respiratory medicine. 9 (6): p. 721-737.

3. Pekker Ya.S., Brazovsky K.S., Usov V.N. Electroimpedance tomography. - Tomsk: NTL, 2004. – p. 192.

4. Aleksanyan Grayr. " Experimental dependences of measurement data on the volume of inhaled air in multi-frequency electrical impedance tomography": Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2021; vol. 5., r. 5-113 - p. 39-50.

5. Aleksanyan G.K., Konko M.A., Gorbatenko N.I. "Device for recording primery measurement information forelectric impedance tomography systems": Modern problems of physical and mathematical sciences, VIII All-Russian Scientific and Practical Conference with international participation, Orel, November 25-26, 2022. - p. 374-379.

6. Meleshko A.I., Polovnikov S.P. "Carbon, carbon fibers, carbon composites". M., Ed. "Science Press", 2007. p. 189.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 337-341.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 337-341.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 534.11

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГОГО КАНАТА С ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

Владислав Львович Литвинов[1]✉, Кристина Владиславовна Литвинова[2]
[1,2]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[1,2]Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

[1]vladlitvinov@rambler.ru✉, https://orcid.org/ 0000-0002-6108-803X
[2]kristinalitvinova900@rambler.ru, https://orcid.org/ 0000-0002-1711-9273

Аннотация. *Исследование вязкоупругости включает анализ стохастической устойчивости стохастических вязкоупругих систем, их надежности. В работе рассмотрены стохастические линейные продольные колебания вязкоупругой балки с подвижными границами с учетом влияния сил демпфирования. Случай разностного ядра позволяет свести задачу анализа системы стохастических интегро-дифференциальных уравнений к исследованию системы стохастических дифференциальных уравнений. Для оценки коэффициентов разложения предлагается применить статистический численный метод Монте-Карло.*

Ключевые слова: *стохастические продольные колебания, колебания каната, подвижные границы.*

Conference paper

MATHEMATICAL SIMULATION OF STOCHASTIC LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF A VISCOELASTIC ROPE WITH A MOVING BOUNDARY

Vladislav L. Litvinov[1]✉, Kristina V. Litvinova[2]
[1,2]Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
[1,2]Samara State Technical University, Samara, Russia
[1]vladlitvinov@rambler.ru✉, https://orcid.org/ 0000-0002-6108-803X
[2]kristinalitvinova900@rambler.ru, https://orcid.org/ 0000-0002-1711-9273

© Литвинов В.Л., Литвинова К.В., 2023

Abstract. *The study of viscoelasticity includes the analysis of the stochastic stability of stochastic viscoelastic systems, their reliability, etc. The paper considers stochastic linear longitudinal oscillations of a viscoelastic beam with moving boundaries, taking into account the influence of damping forces. The case of a difference kernel makes it possible to reduce the problem of analyzing a system of stochastic integro-differential equations to the study of a system of stochastic differential equations. To estimate the expansion coefficients, it is proposed to apply the statistical numerical Monte Carlo method.*

Keywords: *stochastic longitudinal oscillations, vibrations of a rope, moving boundaries*

1. Introduction

At present, reliability issues in the design of machines and mechanisms require more and more complete consideration of the dynamic phenomena that take place in the designed objects. The widespread use in technology of mechanical objects with moving boundaries necessitates the development of methods for their calculation. The problem of oscillations of systems with moving boundaries is related to obtaining solutions to integro-differential and partial differential equations in time-variable domains [1-10]. Such tasks are currently not well understood. Their peculiarity is the difficulty in using the known methods of mathematical physics, suitable for problems with fixed boundaries. The complexity of the solutions obtained is explained by the fact that up to now there has not been a sufficiently general approach to the analysis of the features of the dynamics of such systems. In connection with the danger of resonance, the study of forced oscillations is of great importance here. Attempts to investigate this process have been made, but the results obtained are limited mainly by a qualitative description of dynamic phenomena [1-4]. In addition, it is recognized that deterministic modeling of systems cannot be adequate for some types of problems, so it is necessary to switch to probabilistic-statistical, where there are random variables, stochastic fluctuations. When solving here, mainly approximate methods are used [5-9], since obtaining exact solutions is possible only in the simplest cases [10].

If the damping of transverse vibrations is mainly due to the action of external damping forces, then in the case of longitudinal vibrations, the damping is mainly affected by elastic imperfections in the material of the vibrating object [5-10]. The study of viscoelasticity includes the analysis of the stochastic stability of stochastic viscoelastic systems, their reliability, etc. The paper considers stochastic linear longitudinal oscillations of a viscoelastic rope with moving boundaries, taking into account the influence of damping forces. The case of a difference kernel makes it possible to reduce the problem of analyzing a system of stochastic integro-differential equations to the study of a system of stochastic differential equations. To estimate the expansion coefficients, it is proposed to apply the statistical numerical Monte Carlo method [11].

2. Main text of the article

The differential equation describing the longitudinal vibrations of the rope (viscoelasticity is taken into account based on the Voigt hypothesis) has the form [7, 10]

$$U_{tt}(x,t)+2\alpha U_t(x,t)-a^2\left[U_{xx}(x,t)-\int_0^t K(t-\nu)U_{xx}(x,\nu)d\nu+\mu U_{xxt}(x,t)\right]=f(x,t). \quad (1)$$

Border conditions

$$U(v_0t,t)=0;\ U(v_0t+l_0,t)=0. \quad (2)$$

Initial conditions

$$U(x,0)=U_1(x);U_t(x,0)=0. \quad (3)$$

In problem (1) - (3) it is indicated: $U(x,t)$ – longitudinal displacement of the rope point with coordinate x at time t; $a^2=E/\rho$ – velocity of wave propagation in the rope, E – modulus of elasticity of the rope material, ρ – linear mass density; α – resistance force of the medium acting per unit length of the rope, proportional to the speed of movement; μ – a small parameter that takes into account viscoelasticity; v_0t+l_0 – the law of motion of the rope boundary; $f(x,t)$ – a function that characterizes an external disturbance; $K(z)$ – relaxation core.

Let's introduce new variables that stop the bounds:

$$\xi=(x-v_0t)/l_0;\quad \tau=at/l_0;\quad U(x,t)=V(\xi,\tau).$$

After transformations, we get:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau)-2vV_{\xi\tau}(\xi,\tau)-(1-v^2)V_{\xi\xi}(\xi,\tau)-2k_0V_\xi(\xi,\tau)+2k_1V_\tau(\xi,\tau)-$$
$$-d\int_\xi^{\xi+v\tau}K(-d(\xi-\eta))V_{\xi\xi}(\eta,\frac{1}{v}(\xi-\eta)+\tau)d\eta+\lambda\left(V_{\xi\xi\xi}(\xi,\tau)-\frac{1}{v}V_{\xi\xi\tau}(\xi,\tau)\right)=F(\xi,\tau); \quad (4)$$

$$V(0,\tau)=0;\ V(1,\tau)=0; \quad (5)$$

$$V(\xi,0)=V_1(\xi);\ V_\tau(\xi,0)=0. \quad (6)$$

Here $v=\frac{v_0}{a};\quad d=\frac{l_0}{v_0};\quad k_0=\alpha v l_0;\quad k_1=\alpha v d;\quad \lambda=\frac{\mu}{d};\quad F(\xi,\tau)=v^2d^2f(x,t).$

The function $F(\xi,\tau)$ can be represented as

$$F(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(\tau)\sin(\omega_n\xi),\ \omega_n=\pi n. \quad (7)$$

Theorem 1. The solution to problem (4)–(6) can be given as a string

$$V(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(\tau)\sin(\omega_n\xi). \quad (8)$$

Substituting (7), (8) into (4), after transformations, we obtain the system of equations

$$V_{n_{\tau\tau}}(\tau)+\left(2k_1+\frac{\lambda}{v}\omega_n^2\right)V_{n_\tau}(\tau)+\omega_n^2(1-v^2)V_n(\tau)+\omega_n^2d\int_\xi^1 K(-d(\xi-\eta))V_n\left(\frac{1}{v}(\xi-\eta)+\tau\right)d\eta=F_n(\tau) \quad (9)$$

with initial conditions

$$V_n(0)=2\int_0^1 V_1(\xi)\sin(\omega_n\xi)d\xi;\ V_{n_\tau}(0)=0. \quad (10)$$

We accept the initial conditions and the external load as random, representing the sum of sinusoids with random amplitudes, denoting them $\tilde{V}(\xi)$ and $\tilde{F}(\xi,\tau)$ respectively. In this case, the oscillations will be random, and equations (9) form a system of random integro-differential equations

$$\tilde{V}_{n_{\tau\tau}}(\tau)+\left(2k_1+\frac{\lambda}{\nu}\omega_n^2\right)\tilde{V}_{n_\tau}(\tau)+\omega_n^2(1-\nu^2)\tilde{V}_n(\tau)+\omega_n^2 d\int_\xi^1 K(-d(\xi-\eta))\tilde{V}_n\left(\frac{1}{\nu}(\xi-\eta)+\tau\right)d\eta=\tilde{F}_n(\tau); \quad (11)$$

$$\tilde{V}_n(0)=2\int_0^1 \tilde{V}_1(\xi)\sin\left(\omega_n\xi\right)d\xi;\ \tilde{V}_{n_\tau}(0)=0. \quad (12)$$

Characteristics of random variables - mathematical expectation, variance and covariance, have the following form:

$$M\left(\tilde{V}(\xi,\tau)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}M\left(\tilde{V}_n(\tau)\right)\sin\left(\omega_n\xi\right); \quad (13)$$

$$D\left(\tilde{V}(\xi,\tau)\right)=\sum_{n,k=1}^{\infty}D_{n,k}\left(\tau\right)\sin\left(\omega_n\xi\right)\sin\left(\omega_k\xi\right); \quad (14)$$

$$C\left(\tilde{V}(\xi,\tau,\zeta,\upsilon)\right)=\sum_{n,k=1}^{\infty}C_{n,k}\left(\tau,\upsilon\right)\sin\left(\omega_n\xi\right)\sin\left(\omega_k\zeta\right). \quad (15)$$

To find the characteristics (13) - (15) of stochastic linear longitudinal oscillations of a viscoelastic rope, it is necessary to obtain statistical estimates for the solution of a system of random integro-differential equations (11). To do this, the relaxation kernel $K(z)$ can be taken in exponential form with a random component:

$$K(z,\bar{\beta})=K(z,\bar{b})\big|_{\bar{b}=\bar{\beta}}=\sum_{j=1}^{N}c_j e^{-\beta_j z}, \quad (16)$$

where $c_j\in R_+$, β_j – is a possible value of a positive random variable b_j.

Denote the dependence of $\tilde{V}(\xi,\tau)$ and $\tilde{V}_n(\tau)$ on the random vector $\bar{b}$ as $\tilde{V}(\xi,\tau,\bar{b})$ and $\tilde{V}_n(\tau,\bar{b})$, respectively. By changing the variable

$$u_{nj}(\tau,\bar{b})=\int_\xi^1 e^{-\beta_j d\eta}\tilde{V}_n\left(\frac{1}{\nu}(\xi-\eta)+\tau\right),\bar{b})d\eta \quad (17)$$

the system of random integro-differential equations (11) is transformed into a system of random differential equations of the form

$$\tilde{V}_{n_{\tau\tau}}(\tau,\bar{b})+\left(2k_1+\frac{\lambda}{\nu}\omega_n^2\right)\tilde{V}_{n_\tau}(\tau,\bar{b})+\omega_n^2(1-\nu^2)\tilde{V}_n(\tau,\bar{b})+\omega_n^2 d\sum_{j=1}^{N}c_j e^{b_j d\tau}\,u_{nj}(\tau,\bar{b})=\tilde{F}_n(\tau). \quad (18)$$

The initial conditions will look like

$$\tilde{V}_n(0,\bar{b})=2\int_0^1 \tilde{V}_1(\xi)\sin\left(\omega_n\xi\right)d\xi;\ \tilde{V}_{n_\tau}(0,\bar{b})=0;\ u_{nj}(0,\bar{b})=0. \quad (19)$$

3. Conclusion

The paper considers stochastic linear longitudinal oscillations of a viscoelastic beam with moving boundaries, taking into account the influence of damping forces. The case of a difference kernel makes it possible to reduce the problem of analyzing a system of stochastic integro-differential equations to the

study of a system of stochastic differential equations. The study of the system (18) - (19) is possible using the statistical numerical Monte Carlo method [11-13].

References

1. Savin G.N., Goroshko O.A. Dynamics of a variable length thread // Nauk. dumka, Kiev, 1962, 332 p.
2. Samarin Yu.P. On a nonlinear problem for the wave equation in one-dimensional space // Applied Mathematics and Mechanics. - 1964. - T. 26, V. 3. - P. 77–80.
3. Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries and loads // Fizmatlit, Moscow, 2001, 320 p.
4. Lezhneva A.A. Bending vibrations of a beam of variable length // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Rigid Body Mechanics. - 1970. - No. 1. - P. 159-161.
5. Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020. Vol. 26, No. 2. P. 188-199.
6. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Mathematical models of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries // Vestn. Himself. tech. un-t. Ser. Phys and mat. science, 2015. Vol. 19, No. 2. P. 382-397.
7. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Mathematical modeling and study of the resonance properties of mechanical objects with a changing boundary: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov - Samara: Samar. state tech. un – t, 2020. – 100 p.
8. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich - Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics. 2018. No. 2. P. 70–77.
9. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations of a rope moving in a longitudinal direction // Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. T. 19. No. 4. – P. 161–165.
10. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Mathematical modeling and research of oscillations of one –dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov – Samara: Samar. state tech. un–t, 2017. – 149 p.
11. Elepov B. S., Kronberg A. A., Mikhailov G. A. and Sabelfeld K. K. Solution of boundary value problems by the Monte Carlo method. - Novosibirsk: Nauka, 1980. – 174 p.
12. Ermakov S. M. Monte Carlo Method in Computational Mathematics: An Introductory Course. - St. Petersburg: Nevsky Dialect; M.: BINOM. Knowledge Laboratory, 2009. – 192 pp.
13. Fishman G. S. Monte Carlo. Concepts, Algorithms, and Applications. — SpringerVerlag, 1995 (Corrected 3 rd printing, 1999). — 718 pp.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 342-347.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 342-347.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 537.311.5

ЗАВИСИМОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОВОДНИКОВОТ ПЛОЩАДИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОНТАКТОВ

Сергей Иванович Матюхин[1]✉, Александр Сергеевич Мурко[2], Александр Валерьевич Ставцев[3]
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[3]АО «Протон-Электротекс», Орёл, Россия
[1]sim1@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-1904-7517
[2]a.s.moor@mail.ru
[3]a.stavtsev@proton-electrotex.com

Аннотация. *Методами компьютерного моделирования изучена зависимость электрического сопротивления однородного проводника от площади электрического контакта. Предложена простая аналитическая модель, описывающая эту зависимость. Рассмотрена и решена задача о сопротивлении многослойной структуры с малым электрическим контактом.*

Ключевые слова: *однородный проводник, многослойная структура, электрическое сопротивление, площадь электрического контакта, компьютерное моделирование, аналитическая модель.*

Conference paper

DEPENDENCE OF ELECTRICAL RESISTANCE OF CONDUCTORS ON THE AREA OF ELECTRICAL CONTACTS

Sergey I. Matyukhin[1]✉, Alexander S. Murko[2], Alexander V. Stavtsev[3]
[1,2]Orel State University, Orel, Russia
[3]JSC «Proton-Electrotex», Orel, Russia
[1]sim1@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-1904-7517
[2]a.s.moor@mail.ru
[3]a.stavtsev@proton-electrotex.com

Abstract. *Using computer modeling, the dependence of the electrical resistance of a homogeneous conductor on the area of electrical contact has been studied. A simple analytical model describing this dependence is proposed. The*

© Матюхин С.И., Мурко А.С., Ставцев А.В., 2023

problem about the resistance of a multilayer structure with a small electrical contact is considered and solved.

Keywords: *homogeneous conductor, multilayer structure, electrical resistance, electrical contact area, computer modeling, analytical model.*

1. Введение

Как известно, электрическое сопротивление R прямого, однородного проводника с током определяется выражением:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{1}$$

где ρ – удельное сопротивление, l – длина, а S – площадь поперечного сечения проводника. Однако следует иметь в виду, что формула (1) справедлива только тогда, когда площадь электрического контакта S_0 к проводнику близка к S, и разностью потенциалов вдоль поверхности S можно пренебречь.

На практике это условие не всегда соблюдается, особенно, если речь идет о силовой электронике или микро- и наноэлектронике, где размеры электрических контактов могут быть много меньше поперечных размеров проводников. В этом случае электрическое поле $\vec{E}$ в объёме проводников становится неоднородным (рисунок 1), возникает зависимость плотности тока от пространственных координат, и формула (1) для расчета сопротивления даже однородных проводников становится неприменимой.

В настоящей работе зависимость электрического сопротивления R однородного проводника от площади электрического контакта изучена путём компьютерного моделирования электропроводности проводника методом конечных элементов. Разработана аналитическая модель, предназначенная для описания этой зависимости. Рассмотрена и решена задача о сопротивлении многослойной структуры с малым контактом.

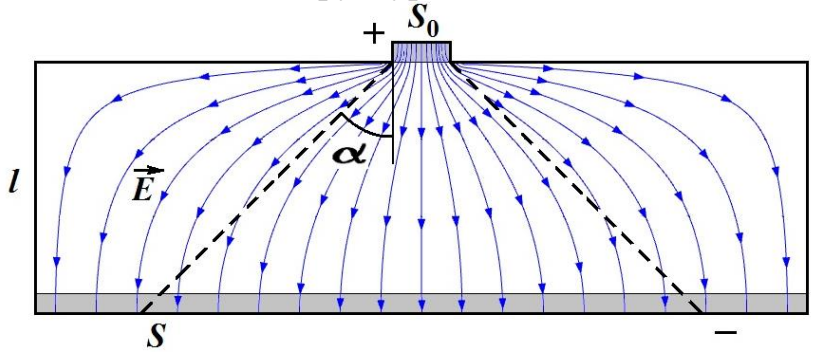


Рисунок 1. Силовые линии электрического поля $\vec{E}$ объёмного проводника сечением S с малой площадью контакта S_0.

2. Постановка задачи и результаты компьютерного моделирования

При компьютерном моделировании решалась следующая задача (рисунок 1): при заданном напряжении U на верхнем (+) и нижнем (–) электрических контактах найти сопротивление R прямого проводника с током длиной l и площадью поперечного сечения S в зависимости от размеров верхнего контакта S_0.

В качестве проводника вначале был взят цилиндрический медный проводник диаметром d = 10 см и длиной l= 3 см с удельным сопротивлением ρ = 1,67·10^{-3}мОм·см и диаметром верхнего цилиндрического контакта $d_0 \le d$. Сопротивление этого проводника рассчитывалось как отношение приложенного к контактам напряжения U к величине I протекающего тока: $R = U / I$. В свою очередь, ток I рассчитывался методом конечных элементов, путём совместного решения уравнения Лапласа для потенциала поля и уравнения электропроводности.

Результаты решения этой задачи представлены на рисунке 2 маркерами.

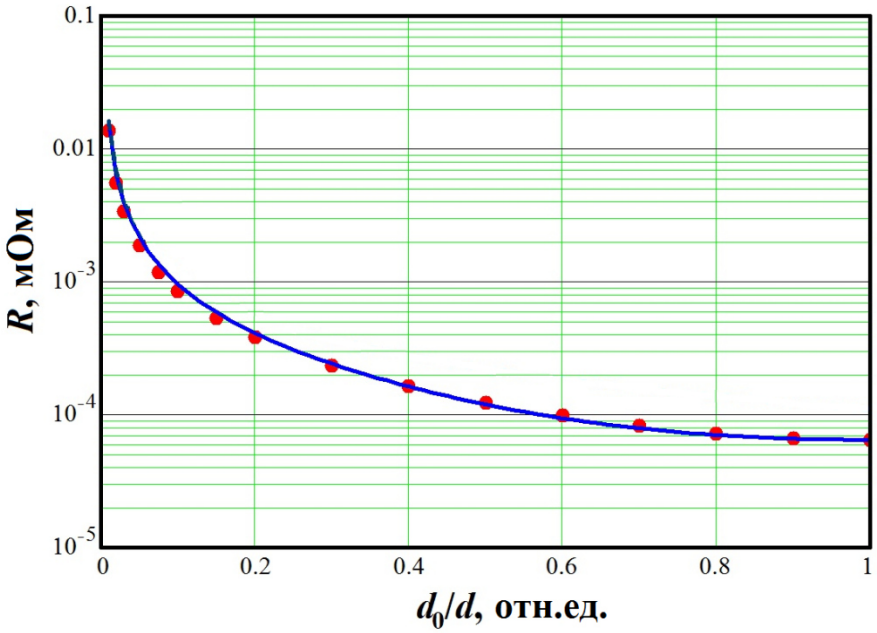


Рисунок 2. Сопротивление медного проводника диаметром d = 10 см в зависимости от диаметра электрического контакта d_0.

3. Обсуждение полученных результатов. Модель токового конуса

Как показывает рисунок 2, при изменении площади электрического контакта сопротивление проводника может меняться на несколько порядков, что связано с перераспределением электрического поля $\vec{E}$ в проводнике (рисунок 1) и с появлением пространственной зависимости у плотности протекающего через проводник тока. Сама эта зависимость является достаточно сложной, определяется геометрией контактов и может быть рассчитана только численно. Однако связанное с этим изменение сопротивления может быть вычислено аналитическими методами, исходя из известной аналогии между электрическими и тепловыми явлениями. По аналогии с тепловыми расчетами на основе представлений о тепловом конусе [1–5] сопротивление R изображенного на рисунке 1 проводника может быть рассчитано как сопротивление усеченного токового конуса (пунктир на рисунке 1) с площадью меньшего основания, равной площади электрического контакта $S_0 = \pi d_0^2 / 4$, и углом раствора 2α:

$$R = \rho \frac{l}{S}\left[1 - \left(1 - \frac{d^2}{d_0(d_0 + 2l\beta\mathrm{tg}\alpha)}\right)\beta\right], \text{ где } \beta = \begin{cases} \dfrac{d - d_0}{2l\mathrm{tg}\alpha} & \text{при } \dfrac{d - d_0}{2l\mathrm{tg}\alpha} < 1, \\ 1 & \text{при } \dfrac{d - d_0}{2l\mathrm{tg}\alpha} \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Как показывает график на рисунке 2, при $\alpha = 45^0$ расчеты по формуле (2) (сплошная кривая) находятся в удовлетворительном согласии с результатами численных расчетов(маркеры).

4. Сопротивление многослойных структур

Представления о токовом конусе позволяют проводить аналитические расчеты сопротивления не только однородных проводников, но и многослойных структур с малой площадью контактов. При этом легко сделать вывод о, вообще говоря, зависимости сопротивления многослойных структур от порядка следования слоев. Так, сопротивление структуры, состоящей, например, из меди и стали может оказаться меньше сопротивления такой же структуры, состоящей из стали и меди (рисунок 3).

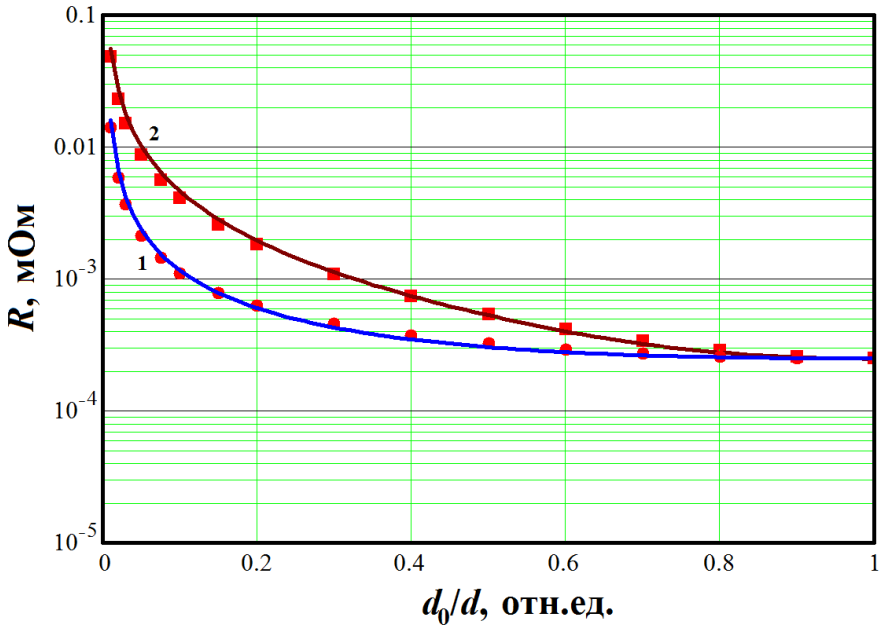


Рисунок 3. Сопротивление двуслойных структур медь-сталь (1) и сталь-медь (2) диаметром d = 10 см в зависимости от диаметра электрического контакта d_0.

Кривые, представленные на рисунке 3, рассчитаны по формуле (2) для двуслойных структур медь-сталь (1) и сталь-медь (2), изображенных на рисунке 4. Диаметр проводников в обоих случаях был равен d = 10 см, толщина меди – 1 см, толщина стали – 2 см. Менялся только порядок следования материалов.

К сожалению, как и в случае тепловых расчетов [7–10], приближение постоянного угла растекания $\alpha = 45^0$ при вычислении сопротивления многослойных структур не всегда хорошо согласуется с численным экспериментом, особенно, если материалы структуры сильно различаются по электропроводности. Поэтому, как и при тепловых расчетах [2–5], при

построении графиков на рисунке 3 мы считали, что при переходе через границу раздела двух материалов угол растекания тока меняется по закону:

$$\alpha_{i+1} = \mathrm{arctg}\left(\frac{\rho_{i+1}}{\rho_i}\,\mathrm{tg}\alpha_i\right), \qquad (3)$$

где $i = 0,1,...$ – номер слоя, ρ_i – удельное сопротивление материала слоя, $\alpha_0 = 45^0$.

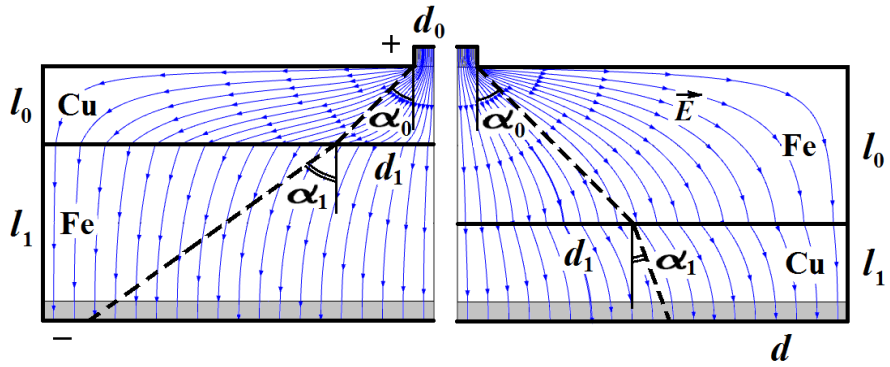


Рисунок 4. Силовые линии электрического поля $\vec{E}$ в двуслойной структуре медь-сталь (слева) и сталь-медь (справа).

При этом диаметр электрического контакта одного слоя с другим меняется в соответствии с равенством:

$$d_{i+1} = d_i + 2l_i\mathrm{tg}\alpha_i, \qquad (4)$$

где l_i – толщина соответствующего слоя, и все $d_i \le d$.

Как показывает рисунок 3, с учетом равенств (3) и (4) формула (2) дает удовлетворительное согласие аналитических расчетов (сплошные кривые) с результатами численного моделирования (маркеры).

5. Заключение

Как показывают полученные результаты, электрическое сопротивление проводников может существенно расти при уменьшении площади электрических контактов. Этот рост связан с возникающей неоднородностью электрического поля в проводниках и с обусловленной ею неоднородностью электрического тока.

В технических приложениях связанное с электрическими контактами изменение сопротивления может быть вычислено в приближении токового конуса с углом растекания тока $\alpha = 45^0$ (формула (2)). Представления о токовом конусе, являясь аналогом представлений о тепловом конусе при тепловых расчетах [1–5], позволяют проводить аналитические расчеты сопротивления не только однородных проводников, но и многослойных структур. При этом вместо приближения постоянного угла растекания $\alpha = 45^0$ для повышения точности вычислений, особенно для материалов, которые сильно различаются по электропроводности, лучше использовать выражение (3), описывающее изменение угла растекания α на границе раздела материалов.

Учитывая эффект растекания тока, при техническом использовании многослойных структур с малой площадью электрических контактов следует

иметь в виду, что их сопротивление, вообще говоря, зависит от порядка следования слоев в структуре.

Список источников

1. Yasushi Koito, Shoryu Okamoto, Toshio Tomimura. Two dimensional numerical investigation on applicability of 45° heat spreading angle // Journal of Electronics Cooling and Thermal Control. 2014.V. 4. P. 1-11.
2. Lostetter A.B., Barlow F., Elshabini A. An overview to integrated power module design for high power electronics packaging // Microelectronics Reliability. 2000. V. 40. P. 365-379.
3. Xu Y., Hopkins D.C. Misconception of thermal spreading angle and misapplication to IGBT power modules // 2014 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition. 2014. P. 545-551.
4. Cui H., Hu F., Zhang Y., Zhou K. Heat spreading path optimization of IGBT thermal network model // Microelectronics Reliability. 2019. V. 103. P. 113511.
5. Матюхин С.И., Малый Д.О., Вишняков А.С., Орлов Е.Ю., Казаков В.И. Тепловое сопротивление силовых полупроводниковых модулей паяной конструкции // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2020. № 5(343). С. 122-130.

References

1. Yasushi Koito, Shoryu Okamoto, Toshio Tomimura. Two dimensional numerical investigation on applicability of 45° heat spreading angle // Journal of Electronics Cooling and Thermal Control. 2014. V. 4. P. 1-11.
2. Lostetter A.B., Barlow F., Elshabini A. An overview to integrated power module design for high power electronics packaging // Microelectronics Reliability. 2000. V. 40. P. 365-379.
3. Xu Y., Hopkins D.C. Misconception of thermal spreading angle and misapplication to IGBT power modules // 2014 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition. 2014. P. 545-551.
4. Cui H., Hu F., Zhang Y., Zhou K. Heat spreading path optimization of IGBT thermal network model // Microelectronics Reliability. 2019. V. 103. P. 113511.
5. Matyukhin S.I., Malyi D.O., Vishnyakov A.S., Orlov E.Yu., Kazakov V.I. Thermal resistance of power semiconductor modules with soldered structure // Fundamental and applied problems of engineering and technology. 2020. № 5(343). С. 122-130. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 348-362.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences.2023. 348-362.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 621.382.323

УЧЁТ СНИЖЕНИЯ ПОДВИЖНОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ ИЗ-ЗА ПРИЖИМАЮЩЕГО ПОЛЯ ЗАТВОРА В УРАВНЕНИИ ДЛЯ КОМПАКТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТОКА НАСЫЩЕНИЯ ВНЕШНЕГО (С УЧЁТОМ СОПРОТИВЛЕНИЙ ИСТОКА И СТОКА) МОП-ТРАНЗИСТОРА

Валентин Олегович Турин[1]✉, Максим Алексеевич Щербина[2], Алина Владимировна Багрова[3], Дарья Владиславовна Назарова[4], Ольга Вячеславовна Пронина[5], Юлия Викторовна Илюшина[6], Бадурдин Амируллоевич Рахматов[7], Геннадий Иванович Зебрев[8], Сергей Александрович Кокин[9], Сергей Викторович Макаров[10]

[1,2,3,4,5]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия

[6]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

[7]Таджикский национальный университет, Душанбе, Республика Таджикистан

[8]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

[9,10]ООО «Интегральные Решения», Москва, Зеленоград, Россия

[1]voturin@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-0450-2481

Аннотация. *Ранее мы разработали внешнюю (с учётом паразитных контактных сопротивлений) компактную модель короткоканального МОП-транзистора для надпорогового режима. Мы учитывали эффект насыщения скорости носителей в сильных электрических полях и использовали линейное приближение для зависимости порогового напряжения от смещения на подложке. Кроме того, мы использовали улучшенную функцию сглаживания, которая обеспечивает монотонное убывание дифференциальной выходной проводимости при переходе между линейным режимом и режимом насыщения. Однако мы не учитывали снижение подвижности носителей из-за нормального поля под затвором. В предлагаемой статье мы учитываем и этот эффект, пока только в уравнении для тока насыщения и без учёта эффекта подложки. Рассматриваются две модели снижения подвижности. Первая является самой простой и используется в компактной модели MOSFET Level 3. Вторая более сложная и имеет вид экспоненциальной зависимости. Для тока насыщения внутреннего (без учёта контактных сопротивлений) МОП-транзистора мы получили уравнение, которое имеет одинаковую форму с учётом и без учёта*

© Турин В.О., 2023

уменьшения подвижности носителей. Для тока насыщения внешнего МОП-транзистора мы можем написать неявное уравнение для зависимости тока насыщения от внешнего напряжения на затворе. Для первой модели снижения подвижности мы можем разрешить это уравнение относительно тока насыщения. В случае второй экспоненциальной модели снижения подвижности мы не можем аналитически разрешить это уравнение относительно тока насыщения. В этом случае, чтобы найти внешний ток насыщения, мы можем использовать численные методы, например, метод итераций или расчёт метод деления пополам. Кроме того, для этого случая мы предлагаем простейшее приближенное уравнение.

Ключевые слова: *внутренний и внешний МОП-транзисторы, компактное моделирование, снижение подвижности из-за нормального поля под затвором, ток насыщения.*

Финансирование: *работа выполнена в инициативном порядке.*

Conference paper

ACCOUNTING THE ELECTRON MOBILITY DEGRADATION DUE TO THE NORMSL FIELD UNDER THE GATE IN THE EXTRINSIC MOSFET SATURATION CURRENT COMPACT MODELING

Valentin O. Turin[1]✉, Maxim A. Shcherbina[2], Alina V. Bagrova[3], Daria V. Nazarova[4], Olga V. Pronina[5], Yulia V. Ilyushina[6], Badurdin A. Rakhmatov[7], Gennady I. Zebrev[8], Sergey A. Kokin[9], Sergey V. Makarov[10]

[1,2,3,4,5]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia

[6]Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

[7]Tajik National University, Dushanbe, Tajikistan

[8]National Research Nuclear University "MEPHI", Moscow, Russia

[9,10]Integrated Solutions LLC, Zelenograd, Moscow, Russia

[1]voturin@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-0450-2481

Abstract. *Previously, we developed the extrinsic (taking into account contact resistances) short-channel MOSFET compact model for an above-threshold regime. We took into account carrier velocity saturation in high electric fields, and we used a linear approximation for the threshold voltage dependence on the body bias. Furthermore, we used an improved smoothing function. One provides a monotonic decrease in the differential output conductance during the transition between the linear and saturation regimes. However, we still did not take into account the carrier mobility reduction due to the normal field under the gate. And this is exactly what we are going to accomplish in our current paper. So far, only the equation for the saturation current will be modified without taking the body effect into account. Two models for mobility reduction are examined. The first is the simplest and is used in the MOSFET Level 3 compact model. The second is more complex and expressed in exponential form. For the saturation current of an intrinsic MOSFET (without accounting for the contact resistances), we have the equation, which has the same form with and without*

accounting for the carrier mobility reduction. For the saturation current of an extrinsic MOSFET, we have the implicit equation for the dependence of the saturation current on extrinsic gate-to-source bias. For the first mobility reduction model, we can solve this equation with respect to the saturation current. In the case of the second considered mobility reduction model, we cannot analytically solve this equation with respect to the saturation current. In this case, to find the extrinsic saturation current, we can use numerical methods, for example, the bisection method or an iterative calculation. In addition, we suggest the simplest approximate equation for this case.

Keywords: *intrinsic and extrinsic MOSFET, compact modeling, mobility reduction due to the normal field, saturation current, transconductance.*

Funding: *the work was done on an initiative basis.*

1. Введение

Ранее мы разработали внешнюю (с учётом паразитных контактных сопротивлений истока и стока) компактную модель (КМ) короткоканального МОП-транзистора (МОПТ) для надпорогового режима [1]. При этом мы учли эффект насыщения скорости носителей в сильных электрических полях, который определяется параллельной поверхности затвора составляющей электрического поля в канале МОПТ. Мы использовали линейное приближение для зависимости порогового напряжения от смещения на подложке (эффект смещения подложки). Кроме того, мы использовали улучшенную функцию сглаживания, которая обеспечивает монотонное уменьшение дифференциальной выходной проводимости МОПТ при переходе между линейным режимом и режимом насыщения. Однако мы не учитывали снижение подвижности носителей из-за нормальной составляющей поля под затвором [2-4]. В предлагаемой статье мы учитываем и этот эффект, хотя пока только в уравнении для тока насыщения и без учёта эффекта смещения подложки.

2. Деградация подвижности в зависимости от нормальной компоненты электрического поля под затвором

При компактном моделировании МОПТ снижение подвижности носителей из-за нормальной компоненты электрического поля под затвором учитывается с помощью введения зависимости эффективной поверхностной подвижности носителей от напряжения на затворе:

$$\mu_{\mathrm{n}} = f(V_{\mathrm{GT}})\,\mu_{\mathrm{n0}}. \qquad (1)$$

Здесь μ_{n0}- низкополевая подвижность в объёме, а V_{GT} - напряжение на затворе V_{GS} центрированное на пороговое напряжение V_{th}:

$$V_{\mathrm{GT}} = V_{\mathrm{GS}} - V_{\mathrm{th}}. \qquad (2)$$

Мы рассматриваем две модельные зависимости эффективной поверхностной подвижности носителей от напряжения на затворе. Первая является самой простой и используется в MOSFET Level 3 КМ [2-8]:

$$\mu_{\mathrm{n1}} = \frac{\mu_{\mathrm{n0}}}{1+\theta\,V_{\mathrm{GT}}} = f_1(V_{\mathrm{GT}})\,\mu_{\mathrm{n0}} \quad \text{где} \quad f_1(V_{\mathrm{GT}}) = \frac{1}{1+\theta\,V_{\mathrm{GT}}}. \qquad (3)$$

Здесь параметр θ называется коэффициентом модуляции.

Вторая, более сложная модель имеет вид экспоненциальной зависимости [9-11]:

$$\mu_{n2} = \mu_{n0} e^{-\theta V_{GT}} = f_2(V_{GT})\,\mu_{n0} \text{ где } f_2(V_{GT}) = e^{-\theta V_{GT}}. \quad (4)$$

3. Случай внутреннего МОП-транзистора

Сначала рассмотрим случай внутреннего (без учёта паразитных контактных сопротивлений истока и стока) МОПТ. В простейшем случае, без учёта эффекта снижения подвижности носителей под затвором и без учёта эффекта смещения подложки и когда напряжение на стоке V_{DS} невелико, используется линейное приближение для зависимости тока стока МОПТ от напряжения на стоке:

$$I_{LIN0} = g_{CH0} V_{DS}. \quad (5)$$

Здесь g_{CH0} – дифференциальная выходная проводимость МОПТ в линейном режиме:

$$g_{CH0} = \frac{\partial I_{LIN0}}{\partial V_{DS}} = \beta_0 V_{GT}. \quad (6)$$

Параметр β_0 это удельная крутизна:

$$\beta 0 = \mu n 0 C ox W L. \quad (7)$$

Здесь $C_{ox} = \varepsilon_{ox}\varepsilon_0/d$, где ε_{ox} и d - диэлектрическая проницаемость и толщина подзатворного окисла, соответственно, ε_0 - электрическая постоянная, L и W - длина и ширина канала МОПТ. Принимая во внимание эффект снижения подвижности носителей под затвором, для удельной крутизны мы можем написать:

$$\beta = \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} = \beta_0 f(V_{GT}). \quad (8)$$

Соответственно, для тока стока получаем:

$$I_{LIN} = f(V_{GT}) I_{LIN0}. \quad (9)$$

В случае использования модели (3) для эффективной поверхностной подвижности (MOSFET Level 3 КМ), для удельной крутизны получаем:

$$\beta_1 = \beta_0 f_1(V_{GT}) = \frac{\beta_0}{1+\theta V_{GT}} \quad (10)$$

и

$$I_{LIN1} = f_1(V_{GT}) I_{LIN0} = \frac{1}{1+\theta V_{GT}} g_{CH0} V_{DS}. \quad (11)$$

Отметим, что уравнение (11) можно переписать в виде:

$$\Delta I_{LIN1} = \beta 0 V_{GT} V_{DS} - \Delta I_{LIN1} \theta \beta 0 = g_{CH0} V_{DS} - \Delta I_{LIN1} R_d * = g_{CH0} V_{DS} *. \quad (12)$$

Соответственно, уменьшение подвижности носителей из-за нормального поля под затвором можно рассматривать как последовательное подключение сопротивления $R_d^* = \theta/\beta_0$ к стоку идеального транзистора, в котором не учитывается эффект уменьшения подвижности носителей из-за нормального поля под затвором и который имеет дифференциальную проводимость g_{CH0}. В этом случае V_{DS} можно рассматривать как внешнее напряжение на стоке, а $V_{DS}^* = V_{DS} - I_{LIN1} R_d^*$ можно рассматривать как внутреннее напряжение на стоке идеального транзистора.

В случае использования модели (4) (экспоненциальная модель) для эффективной поверхностной подвижности имеем:

$$\beta_2 = \beta_0 f_2(V_{GT}) = \beta_0\, e^{-\theta V_{GT}} \quad (13)$$

и

$$I_{\mathrm{LIN2}} = f_2(V_{\mathrm{GT}})\, I_{\mathrm{LIN0}} = e^{-\theta\, V_{\mathrm{GT}}} g_{\mathrm{CH0}}\, V_{\mathrm{DS}}\,. \tag{14}$$

В простейшей теории МОПТ, хорошо описывающей длинноканальные транзисторы, считается, что подвижность носителей в канале является константой μ_{n0}. На деле подвижность меняется вдоль канала и зависит от величины составляющей электрического поля, параллельной поверхности затвора, которая нарастает от истока к стоку. С ростом тянущего электрического поля вдоль канала рассеивание носителей в канале усиливается, и дрейфовая скорость насыщается в некоторой точке на максимальном уровне порядка тепловой скорости носителей. Эффект насыщения дрейфовой скорости это один из короткоканальных эффектов, который приводит к существенному изменению вида выходных характеристик МОПТ в случае короткого канала. При компактном моделировании насыщение скорости носителей учитывается с помощью простейшей модели для зависимости скорости дрейфа v_0 от электрического поля E вдоль канала:

$$v_0 = \begin{cases} \mu_{\mathrm{n0}} E, E < E_{\mathrm{S0}} \\ v_{\mathrm{S}}, E \geq E_{\mathrm{S0}} \end{cases}. \tag{15}$$

Здесь v_{S} – скорость насыщения. Мы предполагаем, что v_{S} не зависит от напряжения V_{GS} на затворе. Поле насыщения определяется так:

$$E_{\mathrm{S0}} = \frac{v_{\mathrm{S}}}{\mu_{\mathrm{n0}}}\,. \tag{16}$$

С полем насыщения связано характеристическое напряжение V_{L0}:

$$V_{\mathrm{L0}} = E_{\mathrm{S0}}\, L\,. \tag{17}$$

Принимая во внимание эффект снижения подвижности носителей из-за нормального поля под затвором, для поля насыщения получаем:

$$E_{\mathrm{S}} = \frac{v_{\mathrm{S}}}{\mu_{\mathrm{n}}} = \frac{E_{\mathrm{S0}}}{f(V_{\mathrm{GT}})}\,. \tag{18}$$

При этом характеристическое напряжение V_{L} связано с полем насыщения следующим образом:

$$V_{\mathrm{L}} = E_{\mathrm{S}}\, L = \frac{V_{\mathrm{L0}}}{f(V_{\mathrm{GT}})}\,. \tag{19}$$

Если мы используем уравнение (3) для эффективной поверхностной подвижности (MOSFET Level 3 КМ), для характеристического электрического поля получаем:

$$E_{\mathrm{S1}} = \frac{E_{\mathrm{S0}}}{f_1(V_{\mathrm{GT}})} = E_{\mathrm{S0}}(1 + \theta\, V_{\mathrm{GT}})\,. \tag{20}$$

Для соответствующего характеристического напряжения имеем:

$$V_{\mathrm{L1}} = \frac{V_{\mathrm{L0}}}{f_1(V_{\mathrm{GT}})} = V_{\mathrm{L0}}(1 + \theta\, V_{\mathrm{GT}})\,. \tag{21}$$

В случае экспоненциальной модели (4) мы имеем:

$$E_{\mathrm{S2}} = \frac{E_{\mathrm{S0}}}{f_2(V_{\mathrm{GT}})} = E_{\mathrm{S0}} e^{\theta\, V_{\mathrm{GT}}} \tag{22}$$

и

$$V_{\mathrm{L2}} = \frac{V_{\mathrm{L0}}}{f_2(V_{\mathrm{GT}})} = V_{\mathrm{L0}} e^{\theta\, V_{\mathrm{GT}}}\,. \tag{23}$$

Отметим важное соотношение:

$$\beta_1 V_{\mathrm{L1}} = \beta_2 V_{\mathrm{L2}} = \beta_0 V_{\mathrm{L0}}\,. \tag{24}$$

Из теории МОПТ известно, что при увеличении напряжения на стоке ток стока насыщается. В случае длинноканального МОПТ, описываемого простейшей теорией, причиной этого является электростатическое запирание канала. Из более сложной теории, применимой для короткоканального МОПТ, следует, что как только электрическое поле на стороне стока канала превышает E_S, скорость электронов насыщается и принимает значение v_{S}, что приводит к насыщению тока. Ток насыщения внутреннего МОПТ без эффекта уменьшения подвижности носителей из-за нормального поля под затвором и без учёта эффекта подложки, задаётся уравнением [12, 13]:

$$I_{\mathrm{SAT0}} = \beta_0 V_{\mathrm{L0}}^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L0}}}\right)^2} - 1 \right) \to \frac{\beta_0 V_{\mathrm{GT}}^2}{2}, \quad V_{\mathrm{GT}} \ll V_{\mathrm{L0}}\,. \tag{25}$$

Напряжение насыщения в этом случае задаётся уравнением:

$$V_{\mathrm{SAT0}} = V_{\mathrm{L0}} \left(1 + \frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L0}}} - \sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L0}}}\right)^2} \right) = V_{\mathrm{GT}} - I_{\mathrm{SAT0}} \frac{1}{\beta_0 V_{\mathrm{L0}}} \to V_{\mathrm{GT}}, \;\; V_{\mathrm{GT}} \ll V_{\mathrm{L0}}. \tag{26}$$

Учёт эффекта снижения подвижности носителей из-за нормального поля под затвором, даёт следующее уравнение для тока насыщения внутреннего МОПТ:

$$I_{\mathrm{SAT}} = \beta_0 \frac{V_{\mathrm{L0}}^2}{f(V_{\mathrm{GT}})} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L0}}} f(V_{\mathrm{GT}})\right)^2} - 1 \right). \tag{27}$$

Если мы используем уравнение (3) (MOSFET Level 3 КМ) для эффективной поверхностной подвижности, мы получаем для тока насыщения следующее уравнение:

$$I_{\mathrm{SAT1}} = \beta_1 V_{\mathrm{L1}}^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L1}}}\right)^2} - 1 \right) \to \frac{\beta_1 V_{\mathrm{GT}}^2}{2}, \; V_{\mathrm{GT}} \ll V_{\mathrm{L0}}. \tag{28}$$

Для напряжения насыщения получается следующее уравнение:

$$V_{\mathrm{SAT1}} = V_{\mathrm{L1}} \left(1 + \frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L1}}} - \sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L1}}}\right)^2} \right) \to V_{\mathrm{GT}}, \; V_{\mathrm{GT}} \ll V_{\mathrm{L0}}. \tag{29}$$

В случае уравнения (4) (экспоненциальная модель) мы получаем для тока насыщения следующее уравнение:

$$I_{\mathrm{SAT2}} = \beta_2 V_{\mathrm{L2}}^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L2}}}\right)^2} - 1 \right) \to \frac{\beta_2 V_{\mathrm{GT}}^2}{2}, \; V_{\mathrm{GT}} \ll V_{\mathrm{L0}}. \tag{30}$$

Для напряжения насыщения получаем:

$$V_{\mathrm{SAT2}} = V_{\mathrm{L2}} \left(1 + \frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L2}}} - \sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L2}}}\right)^2} \right) \to V_{\mathrm{GT}}, \; V_{\mathrm{GT}} \ll V_{\mathrm{L0}}. \tag{31}$$

Крутизна G_{m0} в режиме насыщения без учёта эффекта уменьшения подвижности носителей из-за нормального поля под затвором характеризует изменение тока насыщения при изменении напряжения на затворе, и определяется следующим образом:

$$G_{\mathrm{m0}} = \frac{\partial I_{\mathrm{SAT0}}}{\partial V_{\mathrm{GS}}} = \frac{\beta_0 V_{\mathrm{GT}} + I_{\mathrm{SAT0}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L0}}}\right)^2}}. \tag{32}$$

Крутизна G_{m} в режиме насыщения с учётом эффекта уменьшения подвижности носителей из-за нормального поля под затвором определяется следующим образом:

$$G_{\mathrm{m}} = \frac{\partial I_{\mathrm{SAT}}}{\partial V_{\mathrm{GS}}} = \frac{\beta_0 f(V_{\mathrm{GT}}) V_{\mathrm{GT}} + \beta_0 V_{\mathrm{L0}}^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L0}}} f(V_{\mathrm{GT}}) \right)^2} - 1 \right) f^{-2}(V_{\mathrm{GT}}) \frac{\partial f(V_{\mathrm{GT}})}{\partial V_{\mathrm{GT}}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L0}}} f(V_{\mathrm{GT}}) \right)^2}}. \quad (33)$$

Если мы используем уравнение (3) (MOSFET Level 3 КМ) для эффективной поверхностной подвижности носителей, то, после некоторых вычислений, мы получаем:

$$G_{\mathrm{m1}} = \frac{\beta_1 V_{\mathrm{GT}} - \frac{\theta}{1+\theta V_{\mathrm{GT}}} I_{\mathrm{SAT1}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L1}}} \right)^2}}. \quad (34)$$

В случае уравнения (4) (экспоненциальная модель) получаем:

$$G_{\mathrm{m2}} = \frac{\beta_2 V_{\mathrm{GT}} - \theta I_{\mathrm{SAT2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{GT}}}{V_{\mathrm{L2}}} \right)^2}}. \quad (35)$$

4. Случай внешнего МОП-транзистора

Теперь рассмотрим случай внешнего (с учётом паразитных контактных сопротивлений истока и стока) МОПТ. В этом случае паразитные контактные сопротивления R_{S} и R_{D} подключены последовательно к истоку и стоку, соответственно. При этом соотношения между внутренними ($V_{\mathrm{GT}}, V_{\mathrm{DS}}$) и внешними ($V_{\mathrm{gt}}, V_{\mathrm{ds}}$) напряжениями на затворе и стоке задаются следующими уравнениями [12, 13]:

$$V_{\mathrm{GT}} = V_{\mathrm{gt}} - IR_{\mathrm{S}}, \quad (36)$$

$$V_{\mathrm{DS}} = V_{\mathrm{ds}} - I(R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{D}}), \quad (37)$$

где I – ток стока МОПТ. Соответственно, уравнение для тока стока МОПТ в линейном режиме, в общем виде, может быть записано в виде неявного уравнения:

$$I_{\mathrm{lin}} = \beta_0 \cdot f\left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{lin}} R_{\mathrm{S}}\right) \cdot \left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{lin}} R_{\mathrm{S}}\right) \cdot \left(V_{\mathrm{ds}} - I_{\mathrm{lin}}(R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{D}})\right). \quad (38)$$

При $V_{\mathrm{ds}} \to 0$ мы имеем $I_{\mathrm{lin}}^2 \ll I_{\mathrm{lin}} \to 0$. Таким образом, мы можем линеаризовать уравнение (38) и получить приближённое уравнение для зависимости тока стока внешнего МОПТ от внешнего напряжения V_{ds} на стоке при заданном внешнем центрированном напряжении на затворе V_{gt}:

$$I_{\mathrm{lin}} \approx \frac{V_{\mathrm{ds}}}{\frac{1}{\beta_0 f\left(V_{\mathrm{gt}}\right) V_{\mathrm{gt}}} + R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{D}}}. \quad (39)$$

Теперь мы можем получить уравнение для выходной дифференциальной проводимости в линейном режиме для внешнего МОПТ:

$$g_{\mathrm{ch}} = \frac{\partial I_{\mathrm{lin}}}{\partial V_{\mathrm{ds}}} = \frac{\beta_0 f\left(V_{\mathrm{gt}}\right) V_{\mathrm{gt}}}{1 + \beta_0 f\left(V_{\mathrm{gt}}\right) V_{\mathrm{gt}}(R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{D}})}. \quad (40)$$

Если мы используем уравнение (3) (MOSFET Level 3 КМ) для эффективной поверхностной подвижности, то получаем:

$$g_{\mathrm{ch1}} \approx \frac{\beta_1 V_{\mathrm{gt}}}{1+\beta_1 V_{\mathrm{gt}} \cdot (R_{\mathrm{S}}+ R_{\mathrm{D}})}. \quad (41)$$

В случае уравнения (4) (экспоненциальная модель) мы имеем:

$$g_{\mathrm{ch2}} \approx \frac{\beta_2 V_{\mathrm{gt}}}{1+\beta_2 V_{\mathrm{gt}} \cdot (R_{\mathrm{S}}+ R_{\mathrm{D}})}. \quad (42)$$

Легко получить неявное уравнение для тока насыщения внешнего МОПТ с нулевой дифференциальной проводимостью в режиме насыщения с учётом эффекта насыщения скорости носителей и без учёта уменьшения подвижности носителей из-за нормальной составляющей поля под затвором:

$$I_{\mathrm{sat0}} = \beta_0 V_{\mathrm{L}}^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat0}} R_{\mathrm{S}}}{V_{\mathrm{L0}}} \right)^2} - 1 \right). \quad (43)$$

Это уравнение преобразуется в квадратное и может быть разрешено относительно тока насыщения с помощью формулы для корней [12, 13]:

$$I_{\mathrm{sat0}} = \frac{\beta_0 V_{\mathrm{gt}}^2}{1+\beta_0 R_{\mathrm{S}} V_{\mathrm{gt}} + \sqrt{1+2\beta_0 R_{\mathrm{S}} V_{\mathrm{gt}} + \left(V_{\mathrm{gt}}/V_{\mathrm{L0}}\right)^2}}. \quad (44)$$

Напряжение насыщения при этом равно:

$$V_{\mathrm{sat0}} = V_{\mathrm{SAT0}} \left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat0}} R_{\mathrm{S}} \right) + I_{\mathrm{sat0}} \cdot (R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{D}}). \quad (45)$$

В случае учёта уменьшения подвижности носителей из-за нормальной составляющей поля под затвором, вместо уравнения (43) мы имеем:

$$I_{\mathrm{sat}} = \beta_0 \frac{V_{\mathrm{L0}}^2}{f\left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat}} R_{\mathrm{S}}\right)} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat}} R_{\mathrm{S}}\right) f\left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat}} R_{\mathrm{S}}\right)}{V_{\mathrm{L0}}} \right)^2} - 1 \right). \quad (46)$$

Если мы используем уравнение (3) (MOSFET Level 3 КМ) для эффективной поверхностной подвижности, вместо (44) мы имеем более сложное неявное относительно I_{sat1} уравнение:

$$I_{\mathrm{sat1}} = \beta_0 V_{\mathrm{L0}}^2 \left(1 + \theta \left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat1}} R_{\mathrm{S}}\right)\right) \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat1}} R_{\mathrm{S}}}{V_{\mathrm{L0}} \left(1+\theta \left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat1}} R_{\mathrm{S}}\right)\right)} \right)^2} - 1 \right). \quad (47)$$

После некоторых математических преобразований опять получается квадратное уравнение:

$$\left((2\theta + \beta_0 R_{\mathrm{S}})\beta_0 R_{\mathrm{S}} V_{\mathrm{L0}}^2 - 1\right) I_{\mathrm{sat1}}^2 - 2 V_{\mathrm{L0}}^2 \beta_0 \left(\beta_0 R_{\mathrm{S}} V_{\mathrm{gt}} + 1 + \theta V_{\mathrm{gt}}\right) I_{\mathrm{sat1}} + \\ + \beta_0^2 V_{\mathrm{L0}}^2 V_{\mathrm{gt}}^2 = 0. \quad (48)$$

Решение этого квадратного уравнения легко находится с помощью формулы для корней. После некоторых алгебраических преобразований мы имеем:

$$I_{\mathrm{sat1}} = \frac{\beta_0 V_{\mathrm{gt}}^2}{1+\theta V_{\mathrm{gt}} + \beta_0 R_{\mathrm{S}} V_{\mathrm{gt}} - \sqrt{\left(1+\theta V_{\mathrm{gt}}\right)^2 + 2\beta_0 R_{\mathrm{S}} V_{\mathrm{gt}} + V_{\mathrm{gt}}^2 / V_{L0}^2}} = \\ = \frac{\beta_1 V_{\mathrm{gt}}^2}{1+\beta_1 R_{\mathrm{S}} V_{\mathrm{gt}} + \sqrt{1+2\beta_1 \frac{1}{1+\theta V_{\mathrm{gt}}} R_{\mathrm{S}} V_{\mathrm{gt}} + \frac{V_{\mathrm{gt}}^2}{V_L^2}}}. \quad (49)$$

Отметим, что мы имеем уравнение, очень похожее по форме на уравнение (44). Напряжение насыщения в этом случае равно:

$$V_{\mathrm{sat1}} = V_{\mathrm{SAT1}}\left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat1}}\, R_{\mathrm{S}}\right) + I_{\mathrm{sat1}} \cdot (R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{D}}). \quad (50)$$

В случае уравнения (4) (экспоненциальная модель) вместо (44) мы имеем неявное относительно I_{sat1} и трансцендентное уравнение:

$$I_{\mathrm{sat2}} = \beta_0 \frac{V_{\mathrm{L0}}^2}{e^{-\theta\left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat2}}\, R_{\mathrm{S}}\right)}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat2}}\, R_{\mathrm{S}}\right) e^{-\theta\left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat2}}\, R_{\mathrm{S}}\right)}}{V_{\mathrm{L0}}} \right)^2} - 1 \right). \quad (51)$$

Мы можем преобразовать это уравнение к виду:

$$(1 - \beta_0^2 V_{\mathrm{L0}}^2 R_{\mathrm{S}}^2) I_{\mathrm{sat2}}^2 + 2\beta_0 V_{\mathrm{L0}}^2 \left(e^{\theta\left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat2}} R_{\mathrm{S}}\right)} + \beta_0 V_{\mathrm{gt}} R_{\mathrm{S}}\right) I_{\mathrm{sat2}} - \\ - \beta_0^2 V_{\mathrm{L0}}^2 V_{\mathrm{gt}}^2 = 0. \quad (52)$$

Однако это трансцендентное уравнение не может быть решено аналитически. Чтобы найти I_{sat2}, мы можем использовать численные методы, например метод деления пополам или метод итераций. Мы используем метод итераций. Для нулевой итерации полагаем

$$I_{\mathrm{sat2},0} = 0\ . \quad (53)$$

После первой итерации мы имеем:

$$I_{\mathrm{sat2},1} = I_{\mathrm{SAT2}}\left(V_{\mathrm{gt}}\right) = \beta_0 \frac{V_{\mathrm{L0}}^2}{e^{-\theta V_{\mathrm{gt}}}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\mathrm{gt}}\, e^{-\theta V_{\mathrm{gt}}}}{V_{\mathrm{L0}}} \right)^2} - 1 \right). \quad (54)$$

Для $(i+1)$-й итерации мы имеем:

$$I_{\mathrm{sat2},i+1}\left(V_{gt}\right) = I_{\mathrm{SAT2}}\left(V_{\mathrm{gt}} - I_{sat2,i} R_S\right) = \\ = \beta_0 \frac{V_{\mathrm{L0}}^2}{e^{-\theta\left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat2},i}\, R_{\mathrm{S}}\right)}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat2},i}\, R_S\right) e^{-\theta\left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat2},i}\, R_{\mathrm{S}}\right)}}{V_{\mathrm{L0}}} \right)^2} - 1 \right). \quad (55)$$

Кроме численных методов для приближённого решения уравнения (51) мы можем использовать метод линеаризации, применённый нами ранее для расчёта тока насыщения органического транзистора [14]. В качестве начального значения тока насыщения во время процедуры линеаризации мы можем взять результат i-й итерации $I_{\mathrm{sat2},i}$. При этом разница между истинным значением тока насыщения I_{sat2} и приблизительным значением $I_{\mathrm{sat2},i}$ определяется следующим уравнением:

$$dI_{\mathrm{sat2},i} = I_{\mathrm{sat2}} - I_{\mathrm{sat2},i}. \quad (56)$$

Для значения напряжения на затворе (2), центрированного на пороговое напряжение, соответствующего приближённому значению тока насыщения $I_{\mathrm{sat2},i}$, мы имеем:

$$V_{\mathrm{GT},i} = V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat2},i}\, R_{\mathrm{S}}. \quad (57)$$

Следовательно, разница между истинным значением V_{GT} и приближённым значением $V_{\mathrm{GT},i}$ задаётся следующим уравнением:

$$dV_{\mathrm{GT}\,i} = V_{\mathrm{GT}} - V_{\mathrm{GT},i} = \left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat2}} R_{\mathrm{S}}\right) - \left(V_{\mathrm{gt}} - I_{\mathrm{sat2},i}\, R_{\mathrm{S}}\right) = \\ = \left(I_{\mathrm{sat2},i} - I_{\mathrm{sat2}}\right) R_{\mathrm{S}} = -dI_{\mathrm{sat2},i}\, R_{\mathrm{S}}. \quad (58)$$

Соответственно, для истинного значения тока насыщения I_{sat} мы можем провести следующие преобразования:

$$I_{\text{sat2}} = I_{\text{SAT2}}\left(V_{gt} - I_{\text{sat2}}R_{\text{S}}\right) = I_{\text{SAT2}}\left(V_{\text{gt}} - \left(I_{\text{sat2},i} + dI_{\text{sat2},i}\right)R_S\right) =$$
$$= I_{\text{SAT2}}\left(\left(V_{\text{gt}} - I_{\text{sat2},i}R_{\text{S}}\right) - dI_{\text{sat2},i}R_{\text{S}}\right) = I_{\text{SAT2}}\left(V_{\text{GT},i} + dV_{\text{GT},i}\right) \approx$$
$$\approx I_{\text{SAT2}}\left(V_{\text{GT},i}\right) + \left.\frac{\partial I_{\text{SAT2}}}{\partial V_{\text{GS}}}\right|_{V_{\text{GT},i}} dV_{\text{GT},i} = I_{\text{SAT2}}\left(V_{\text{GT},i}\right) + G_{\text{m2}}\left(V_{\text{GT},i}\right)dV_{\text{GT},i} =$$
$$= I_{\text{SAT2}}\left(V_{\text{gt}} - I_{\text{sat2},i}\,R_S\right) - G_{\text{m2}}\left(V_{\text{gt}} - I_{\text{sat2},i}\,R_{\text{S}}\right)\,dI_{\text{sat2},i}\,R_{\text{S}} =$$
$$= I_{\text{SAT2}}\left(V_{\text{gt}} - I_{\text{sat2},i}\,R_S\right) - R_{\text{S}}\,G_{\text{m2}}\left(V_{\text{gt}} - I_{\text{sat2},i}\,R_{\text{S}}\right)\cdot\left(I_{\text{sat2}} - I_{\text{sat2},i}\right). \quad (59)$$

Отсюда мы можем получить универсальное приближённое уравнение для тока стока:

$$I_{\text{sat2}} \approx \frac{I_{\text{SAT2}}\left(V_{\text{gt}} - I_{\text{sat2},i}\,R_{\text{S}}\right) + G_{\text{m2}}\left(V_{\text{gt}} - I_{\text{sat2},i}\,R_{\text{S}}\right)\cdot I_{\text{sat2},i}\,\cdot R_{\text{S}}}{1 + G_{\text{m2}}\left(V_{\text{gt}} - I_{\text{sat2},i}\,R_{\text{S}}\right)\cdot R_{\text{S}}}. \quad (60)$$

В простейшем случае мы можем использовать в уравнении (60) случай нулевой итерации $i = 0$, то есть $I_{\text{sat2,0}} = 0$. Соответственно, получается простейшее приближённое уравнение:

$$I_{\text{sat2, approx}} \approx \frac{I_{\text{SAT2}}\left(V_{\text{gt}}\right)}{1 + G_{\text{m2}}\left(V_{\text{gt}}\right)\cdot R_{\text{S}}}. \quad (61)$$

Здесь формула для I_{SAT2} определяется уравнением (30):

$$I_{\text{SAT2}}\left(V_{\text{gt}}\right) = \beta_2 V_{\text{L2}}^2\left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\text{gt}}}{V_{\text{L2}}}\right)^2} - 1\right) = \beta_0 V_{\text{L0}}^2 e^{\theta\,V_{\text{gt}}}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\text{gt}}}{V_{\text{L0}}e^{\theta\,V_{\text{gt}}}}\right)^2} - 1\right) \quad (62)$$

и формула для G_{m2} определяется уравнением (35):

$$G_{\text{m2}}\left(V_{\text{gt}}\right) = \frac{\beta_2 V_{\text{gt}} - \theta I_{\text{SAT2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\text{gt}}}{V_{\text{L2}}}\right)^2}} = \frac{\beta_0\,V_{\text{gt}}\,e^{-\theta\,V_{\text{gt}}} - \theta\,\beta_0 V_{\text{L0}}^2 e^{\theta\,V_{\text{gt}}}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\text{gt}}}{V_{\text{L0}}e^{\theta\,V_{\text{gt}}}}\right)^2} - 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_{\text{gt}}}{V_{\text{L0}}\,e^{\theta\,V_{\text{gt}}}}\right)^2}}. \quad (63)$$

Для напряжения насыщения имеем следующее уравнение, которое по форме совпадает с уравнением (50):

$$V_{\text{sat2}} = V_{\text{SAT2}}\left(V_{\text{gt}} - I_{\text{sat2}}\,R_{\text{S}}\right) + I_{\text{sat2}}\cdot\left(R_{\text{S}} + R_{\text{D}}\right). \quad (64)$$

5. Результаты и обсуждение

В наших расчётах мы использовали параметры MOSFET технологии 180 нм NMOS из [15] (таблица 1.5). Длина канала $L = 180$ нм; ширина затвора $W = 1$ мкм; характерное электрическое поле для насыщения скорости $E_{\text{S0}} = 8 \cdot 10^4$ В/см; $V_{\text{L0}} = E_{\text{S0}}\,L = 1{,}44$ В; $V_{\text{th}} = 0{,}45$ В; толщина подзатворного слоя диэлектрика SiO_2 $d_{\text{ox}} = 5$ нм, относительная диэлектрическая проницаемость SiO_2 ε_{ox} =3,9; удельная ёмкость подзатворного диэлектрика, т.е. ёмкость МОП-конденсатора на единицу площади $C_{\text{ox}} = \varepsilon_{\text{ox}}\varepsilon_0/d_{\text{ox}} = 6{,}9$ фФ/мкм^2. Параметр $k' = \mu_{\text{n}}C_{\text{ox}} = 270$ мкА/В^2; удельная крутизна $\beta_0 = k'\,W/L = 1\,500$ мкА/В^2. Характерный ток $\beta_0 V_{\text{L0}}^2 = 3{,}11$ мА. Паразитные контактные сопротивления $R_{\text{S}} = R_{\text{D}} = 125$ Ом были выбраны на основе параметра RDSW=250 из файла SPICE параметров Predictive Technology Model 180 nm NMOS [16]. В наших расчётах мы брали коэффициент модуляции подвижности $\theta = 0{,}4$ В$^{-1}$, который является максимальным значением из диапазона, представленного в [2].

Во-первых, мы провели расчёты без учёта снижения подвижности носителей из-за нормальной составляющей электрического поля под затвором. Зависимость тока насыщения I_{SAT0} (25) от напряжения насыщения V_{SAT0} (26) для внутреннего МОПТ представлена на рисунке 1 тёмно-серой сплошной линией. Все значения представлены в безразмерном виде: напряжение в единицах V_{L0} и ток в единицах $\beta_0 V_{\mathrm{L0}}^2$. Зависимость тока насыщения I_{sat0} (44) от напряжения насыщения V_{sat0} (45) для внешнего МОПТ представлена на рисунке 1 темно-серой пунктирной линией. Можно видеть уменьшение тока насыщения по сравнению с тёмно-серой сплошной линией из-за учёта паразитных контактных сопротивлений.

Во-вторых, мы провели расчёты для случая с учётом уменьшения подвижности носителей из-за нормальной составляющей электрического поля под затвором, с использованием уравнения (3) (MOSFET Level 3 КМ). Зависимость тока насыщения I_{SAT1} (28) от напряжения насыщения V_{SAT1} (29) для внутреннего МОПТ представлена на рисунке 1 сплошной линией серого цвета. Мы можем видеть уменьшение тока насыщения из-за эффекта уменьшения подвижности по сравнению с темно-серой сплошной линией. Зависимость тока насыщения I_{sat1} (49) от напряжения насыщения V_{sat1} (50) для внешнего МОПТ представлена на рисунке 1 пунктирной линией серого цвета. Опять же, мы можем видеть дополнительное снижение тока насыщения по сравнению с серой сплошной линией из-за учёта паразитных контактных сопротивлений.

В-третьих, мы провели расчёты для случая, учитывающего снижение подвижности носителей из-за нормальной составляющей поля под затвором, описываемой уравнением (4) (экспоненциальная модель). Зависимость тока насыщения I_{SAT2} (30) от напряжения насыщения V_{SAT2} (31) для внутреннего МОПТ представлена на рисунке 1 светло-серой сплошной линией. Мы можем видеть уменьшение тока насыщения из-за эффекта уменьшения подвижности по сравнению с темно-серыми и серыми сплошными линиями. Следует отметить, что в этом случае ток насыщения I_{SAT2} не растет монотонно с увеличением напряжения насыщения V_{SAT2}, как это происходит в случае $I_{\mathrm{SAT1}}(V_{\mathrm{SAT1}})$. Ток насыщения I_{SAT2} достигает своего максимального значения, а затем начинает уменьшаться с дальнейшим ростом напряжения насыщения V_{SAT2}.

Легко показать, что в случае $V_{GT} \to \infty$, уравнения (28) и (30) имеют следующие асимптоты: $I_{\mathrm{SAT1}} \sim V_{GT} \to \infty$ и $I_{\mathrm{SAT2}} \sim V_{\mathrm{GT}}^2 e^{-\theta V_{\mathrm{GT}}} \to 0$. Это объясняет такое разное поведение зависимостей $I_{\mathrm{SAT1}}(V_{\mathrm{SAT1}})$ и $I_{\mathrm{SAT2}}(V_{\mathrm{SAT2}})$. Увеличение напряжения на затворе увеличивает количество носителей в канале, но их подвижность уменьшается из-за эффекта уменьшения подвижности из-за нормальной составляющей электрического поля под затвором. В случае модели уменьшения подвижности, описываемой уравнением (3) (MOSFET Level 3 КМ), ток насыщения I_{SAT1} монотонно увеличивается с ростом напряжения насыщения V_{SAT1}.

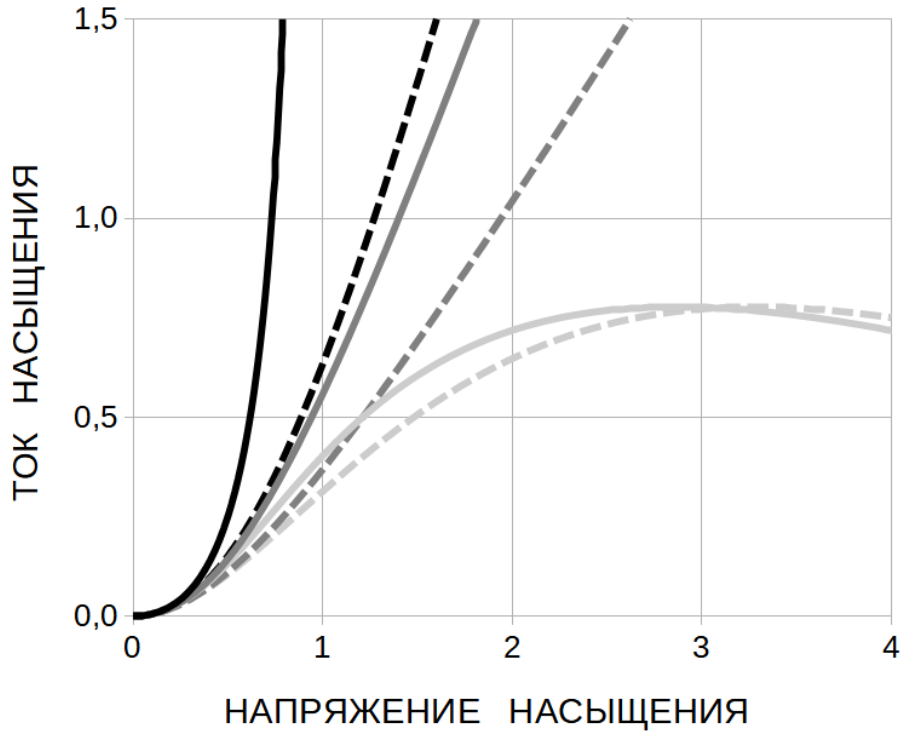


Рисунок 1. Зависимость тока насыщения от напряжения насыщения для случая внутреннего (сплошные линии) и внешнего (пунктирные линии) МОПТ.

На рис. 1 напряжение представлено в единицах V_{L0}, а ток в единицах $\beta_0 V_{\mathrm{L0}}^2$. Темно-серые линии использованы для случая без учёта эффекта снижения подвижности носителей из-за нормальной составляющей электрического поля под затвором. Серые линии используются для модели снижения подвижности, описываемой уравнением (3) (MOSFET Level 3 КМ). Светло-серые линии используются для снижения подвижности, описываемой моделью (4) (экспоненциальная модель)

Однако в случае модели снижения подвижности, описываемой уравнением (4) (экспоненциальная модель), ток насыщения I_{SAT2} сначала растёт с увеличением напряжения насыщения V_{SAT2}, а потом начинает уменьшаться.

Зависимость тока насыщения I_{sat2} (см. неявное трансцендентное уравнение (51)) от напряжения насыщения V_{sat2} (64) для внешнего МОПТ представлена на рисунке 1 светло-серой пунктирной линией. Для вычисления I_{sat2} мы использовали итерационную процедуру (53)-(55) с числом итераций $i = 10$, что дало максимальную относительную погрешность 10^{-9}. Отметим, что при $i = 4$ максимальная относительная погрешность составляла 10^{-3}, при том, что приближенное уравнение (61) даёт максимальную относительную погрешность $4{\cdot}10^{-3}$. Следовательно, мы можем заключить, что простейшее приближенное уравнение (61) в рассматриваемом случае является достаточно точным.

6. Заключение

Рассмотрены две модели снижения подвижности из-за нормальной составляющей электрического поля под затвором. Первая (3) является самой простой и используется в MOSFET Level 3 КМ. Вторая (4) более сложная и выражается в экспоненциальной форме. Для тока насыщения внутреннего МОПТ (без учёта паразитных контактных сопротивлений истока и стока) мы

имеем уравнение, которое имеет один и тот же вид с учётом (28), (30) и без учёта эффекта (25) уменьшения подвижности носителей из-за нормальной составляющей электрического поля под затвором. Для случая внутреннего МОПТ мы получили уравнения для крутизны для обеих рассмотренных моделей снижения подвижности. Для тока насыщения внешнего МОПТ мы получили неявное уравнение для зависимости тока насыщения от внешнего напряжения на затворе. Для первой модели снижения подвижности (3) мы можем разрешить это уравнение относительно тока насыщения (49). В случае второй модели снижения подвижности (4) мы не можем аналитически разрешить это уравнение относительно тока насыщения (51). В этом случае, чтобы найти ток насыщения внешнего МОПТ, мы можем использовать численные методы, например, метод деления пополам или метод итераций. Мы использовали метод итераций и получили очень хорошую точность уже после нескольких итераций. Кроме того, мы предложили простейшее приближенное уравнение (61) для этого случая, которое даёт точность, сравнимую с точностью итерационного метода после четырёх итераций. Отметим, что ранее мы предложили линейную аппроксимацию для зависимости тока стока от напряжения на стоке в режиме насыщения для внешнего МОПТ [1]. Это приближение основано на ранее предложенном уравнении для выходного сопротивления внешнего МОП-транзистора в режиме насыщения. В дальнейшем мы планируем учесть эффект уменьшения подвижности носителей из-за нормальной составляющей электрического поля под затвором в уравнении для выходного сопротивления внешнего МОП-транзистора в режиме насыщения.

Авторы благодарят Владимира Щеглова (ЗАО «Электрум АВ», Орёл, Россия) за полезную дискуссию.

Список источников

1. Turin V.O. et al. Compact Modeling of Body Effect for “Extrinsic” MOSFETs. 2022 Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT), Moscow, Russian Federation. 2022; 1-14. doi: 10.1109/MWENT55238.2022.9802241.

2. Зебрев Г. И. Физические основы кремниевой наноэлектроники: учебное пособие для вузов / Г. И. Зебрев. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.

3. Красников Г. Я. Конструктивно-технологические особенности субмикронных МОП-транзисторов / Г. Красников. - Изд. 2-е, испр. - Москва: Техносфера, 2011.

4. Колосницын Б. С. Полупроводниковые приборы и элементы интегральных микросхем. В 2-х ч. Ч. 2: Расчёт и проектирование полевых транзисторов: учеб. пособие / Б. С. Колосницын, Н. В. Гапоненко. – Минск: БГУИР, 2012.

5. Crawford R. H. MOSFET in Circuit Design. McGraw-Hill, New York; 1967. 136 p.

6. Graaff H. C. Klaassen F. M. Compact Transistor Modelling for Circuit Design. Springer-Verlag, Wien-New York; 1990. 351 p.

7. Antognetti P. and Massobrio G. Semiconductor Device Modeling with SPICE. McGraw-Hill, New York; 1993. 479 p.

8. Arora N. MOSFET Models VLSI Cir. Simulation - Theory and Practice. World Scientific, New Jersey; 2007. 605 p.

9. Rmaily R. and Rais K. A new generalized model of the effective mobility in MOS transistors operated from helium to room temperature Materials Science and Engineering: B. 2004; Volumes 114–115: 269. https://doi.org/10.1016/j.mseb.2004.07.008.

10. Maouhoub N., Rais K. Characterization of Series Resistance and Mobility Degradation Parameter and Optimizing Choice of Oxide Thickness in Thin Oxide N-Channel MOSFET. Active and Passive Electronic Components. 2011; Article ID 713129. https://doi.org/10.1155/2011/713129.

11. Maouhoub N. and Rais K. Extraction of series resistance and mobility degradation parameter in MOSFETs using iterative method. Computer Science and Information Technologies. 2020; 1(1): 26. https://doi.org/10.11591/csit.v1i1.p26-31

12. Shur M. S. Physics of Semiconductor Devices. Prentice Hall, New Jersey; 1990. 680 p.

13. Shur M. S. Introduction to Electronic Devices. John Willey and Sons, New York; 2000. 577 p.

14. Turin V. O. et al. Modelling of saturation current of an organic field-effect transistor with accounting for contact resistances. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2019; 498: 012038. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/498/1/012038.

15. Carusone T. C., Johns D., Martin K.W., Johns D. Analog Integrated Circuit Design. John Wiley and Sons, New York; 2012. 816 p.

16. Liu W. MOSFET Models for SPICE Simulation, Including BSIM3v3 and BSIM4. John Willey and Sons, New York; 2001. 600 p.

References

1. Turin V.O. et al. Compact Modeling of Body Effect for “Extrinsic” MOSFETs. 2022 Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT), Moscow, Russian Federation. 2022; 1-14. doi: 10.1109/MWENT55238.2022.9802241.

2. Zebrev G.I., Physical Basics of Silicon Nanoelectronics. Binom, Moscow; 2011. 243 p. (In Russ.).

3. Krasnikov G. Ya. Design and technological features of submicron MOSFETS. - Moscow: Technosphere; 2011. 800 p. (In Russ.).

4. Kolosnitsyn B. S., Gaponenko N. V. Semiconductor devices and elements of integrated circuits. In 2 volumes. Volume 2: Calculation and design of field-effect transistors: textbook. Minsk: BGUIR; 2012. 158 p. (In Russ.).

5. Crawford R. H. MOSFET in Circuit Design. McGraw-Hill, New York; 1967. 136 p.

6. Graaff H. C. Klaassen F. M. Compact Transistor Modelling for Circuit Design. Springer-Verlag, Wien-New York; 1990. 351 p.

7. Antognetti P. and Massobrio G. Semiconductor Device Modeling with SPICE. McGraw-Hill, New York; 1993. 479 p.

8. Arora N. MOSFET Models VLSI Cir. Simulation - Theory and Practice. World Scientific, New Jersey; 2007. 605 p.

9. Rmaily R. and Rais K. A new generalized model of the effective mobility in MOS transistors operated from helium to room temperature Materials Science and Engineering: B. 2004; Volumes 114–115: 269. https://doi.org/10.1016/j.mseb.2004.07.008.

10. Maouhoub N., Rais K. Characterization of Series Resistance and Mobility Degradation Parameter and Optimizing Choice of Oxide Thickness in Thin Oxide N-Channel MOSFET. Active and Passive Electronic Components. 2011; Article ID 713129. https://doi.org/10.1155/2011/713129.

11. Maouhoub N. and K. Rais. Extraction of series resistance and mobility degradation parameter in MOSFETs using iterative method. Computer Science and Information Technologies. 2020; 1(1): 26. https://doi.org/10.11591/csit.v1i1.p26-31

12. Shur M. S. Physics of Semiconductor Devices. Prentice Hall, New Jersey; 1990. 680 p.

13. Shur M. S. Introduction to Electronic Devices. John Willey and Sons, New York; 2000. 577 p.

14. Turin V. O. et al. Modelling of saturation current of an organic field-effect transistor with accounting for contact resistances. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2019; 498: 012038. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/498/1/012038.

15. Carusone T. C., Johns D., Martin K.W., Johns D. Analog Integrated Circuit Design. John Wiley and Sons, New York; 2012. 816 p.

16. Liu W. MOSFET Models for SPICE Simulation, Including BSIM3v3 and BSIM4. John Willey and Sons, New York; 2001. 600 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 363-371.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 363-371.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК519.86+330.44+65.012.122

МОДЕЛЬ БАЛАНСА ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Никон Олегович Анашкин[1]✉, Владимир Викторович Абрамов[2]
[1,2]Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина, Рязань, Россия
[1]n.anashkin2401@stud.rsu.edu.ru✉
[2]v.abramov@365.rsu.edu.ru

Аннотация. *В данной работе составлена динамическая модель доходов и расходов производственного предприятия. Модель представляет собой разностное уравнение, составленное по балансовому принципу. Производственные доходы и расходы учитываются путем оптимизации на основе линейного программирования. В модели также учитываются непроизводственные расходы и доходы. В рамках модели поставлены и программно решены оптимизационные задачи, возникающие при управлении предприятием.*

Ключевые слова: *доходы, расходы, баланс, предприятие, оптимизация, экономико-математическое моделирование.*

Conference paper

THE BALANCE SHEET MODEL OF A MANUFACTURING ENTERPRISE

Nikon O. Anashkin[1]✉, Vladimir V. Abramov[2]
[1,2]Ryazan State University named after S.A. Yesenin, Ryazan, Russia
[1] n.anashkin2401@stud.rsu.edu.ru✉
[2]v.abramov@365.rsu.edu.ru

Abstract. *In this paper, a dynamic model of income and expenses of a manufacturing enterprise is compiled. The model is a difference equation compiled according to the balance principle. Production income and expenses are accounted for by optimization based on linear programming. The model also takes into account non-production costs and income. Within the framework of the model,*

© Анашкин Н.О., Абрамов В.В., 2023

optimization tasks arising during enterprise management are set and programmatically solved.

Keywords: *income, expenses, balance sheet, enterprise, optimization, economic and mathematical modeling*.

1. Введение

Проблема планирования оптимального согласования материальных и финансовых средств предприятия актуальна в экономико-математическом моделировании. В статье [1] планы производства строятся на основе прогнозов возможного спроса на продукцию. В работе [2] предложена экономико-математическая модель оптимизации тарифов медицинских услуг. Проблема финансового планирования решалась в работе [3]. Симплекс-метод при планировании объемов производства применен в работе [4].Традиционно финансовая модель предприятия строится на основании анализа и корректировки текущих данных без применения оптимизационных методов. Такие подходы отражают настоящее положение предприятия, но затрудняют прогнозирование и планирование работы. Для преодоления этих трудностей в данной работе предложена динамическая модель согласования потоков товаров, ресурсов и денежных расчетов.

2. Условия работы предприятия

Рассмотрим промышленное предприятие, функционирующее в следующих условиях.

1. Расходы предприятия на производство и приобретение ресурсов ограничены производственным балансом и внешним финансированием.
2. Работа предприятия разбита на торгово-производственные периоды.
3. Сбыт продукции в рамках учитываемых ограничений гарантирован (чистые риски не учитываются).
4. Известны прогнозы цен на закупаемые ресурсы и продаваемые товары.
5. В рассматриваемое временя инвестиций в развитие производства нет.
6. Часть балансовых средств может выводиться из производства, то есть имеет место непроизводственное потребление.
7. Предполагается, что НДС учтен за счет занижения величин цен, учитываемых в расчетах.

3. Модель баланса средств предприятия

При сделанных предположениях получим следующую динамическую модель баланса средств предприятия

$$S_{n+1} = S_n + c_n^T \bar{x}_n - y_n - b_n^T x_n - d_n^T r_n - z_n + v_n, \qquad (1)$$

где S_n – баланс предприятия на конец периодаn, в течение периода n: экзогенные величины: c_n – вектор цен на товары,b_n – вектор затрат на производство товаров,d_n – вектор цен на ресурсы, z_n–условно-постоянные расходы предприятия, эндогенные величины:$\bar{x}_n$– вектор объемов проданных товаров,y_n– непроизводственные расходы предприятия,x_n– вектор

произведенных товаров,r_n– вектор закупленных ресурсов,v_n– объем внешнего финансирования.

Отметим, что в непроизводственные расходы предприятия могут быть включены выплаты по кредитам или средства, направляемые на финансирование ассоциированных предприятий. А в средства внешнего финансирования могут входить доходы от депозита, заемные средства или деньги, получаемые от ассоциированного предприятия.

Будем предполагать, что производственный баланс$f_n = c_n^T \bar{x}_n - b_n^T x_n - d_n^T r_n - z_n + v_n$ формируется изолированно под действием рыночной конъюнктуры, то есть цен на товары и ресурсы, ограничений на сбыт товаров или использования ресурсов. Модель баланса (1) запишем в виде

$$S_{n+1} = S_n - y_n + f_n. \quad (2)$$

В частности, если рассматривается *N*периодов, то из (2) получим итоговое значение баланса

$$S_N = S_0 - \sum_{n=1}^{N} y_n + \sum_{n=1}^{N} f_n,$$

где величинаS_0начальных средств предприятия может рассматриваться в качестве параметра оптимизации.

Поскольку в условиях данной модели известны прогнозы цен, то возможна ситуация, когда предприятие производит и накапливает продукцию, чтобы реализовать ее в благоприятный момент. Тогда в некоторых периодах производственный баланс может быть отрицательным. Однако будем предполагать, что в каждом периоде сумма производственного баланса и внешнего финансирования неотрицательна, в частности, дефицит производственного баланса не больше внешнего финансирования.

Модель для потока производственного баланса f_n составляем по оптимизационному принципу. Для этого учтем только производственные доходы и расходы.

Составим ограничения на потоки x_n, $\bar{x}_n$и r_nв каждом периоде *n*.

Если предприятие работает за счет самофинансирования, то естественно ввести модельное ограничение: расходы на производство товаров и закупку ресурсов в каждом периоде не больше заданной доли $\beta \in (0;1)$ текущего производственного баланса (без учета непроизводственного потребления) к концу предыдущего периода, то есть в каждом периоде выполняются неравенства

$$b_n^T x_n + d_n^T r_n \le \beta \left(S_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (c_k^T \bar{x}_k + v_k - (b_k^T x_k + d_k^T r_k + z_k) \right), \beta \in (0;1).$$

Баланс количества товаров не больше вместимости V_x склада(ов), при этом $0 \le \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}_k) \le V_x$ (здесь и далее неравенства для векторов выполняются по всем соответствующим компонентам). Количество проданного товара не больше количества товара, накопленного на складах, к концу предыдущего периода, то есть $0 \le \bar{x}_n \le \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - \bar{x}_k)$. Количество проданного товара не больше возможного спроса $\bar{x}_n \le k_n$,где k_n–прогноз потока величин спроса. Количество произведенного товара не больше, чем производственные возможности h_nпредприятия $x_n \le h_n$. Количество

проданного товара не меньше, чем поставки p_nпо договору (при наличии такового) $\bar{x}_n \geq p_n$.

Допустим, A – матрица норм расхода ресурсов на производство товаров. Тогда получим, что $\bar{r}_n = Ax_n$–вектор объемов ресурсов, использованных в период n,$r_{n+1} = r_n - Ax_n$ – уравнение динамики запасов ресурсов. Если ресурсы представлены товарно-материальными ценностями, то их баланс не больше вместимости V_r склада(ов) ресурсов $\sum_{k=1}^{n}(r_k - Ax_k) \leq V_r$. Если же речь идет об энергоресурсах, то требуется $r_k \leq R_k$, где R_k– максимально возможное потребление ресурса. Количество ресурсов, потраченных на производство, не больше баланса ресурсов (или доли баланса) $Ax_n \leq \delta \sum_{k=1}^{n-1}(r_k - Ax_k)$, $\delta \in (0; 1]$.

При перечисленных ограничениях для поиска потоковx_n, $\bar{x}_n$ и r_n эффективно используется процедура линейного программирования. По сути, возникает трехматричный вариант транспортной задачи, при котором для матричных переменных номера столбцов – это номера товаров или ресурсов, а номера строк – номера торгово-производственных периодов. В качестве целевого критерия может использоваться максимум прибыли с учетом внешнего финансирования за все рассматриваемые *N* периодов

$$\sum_{k=1}^{N}(c_k^T \bar{x}_k - b_k^T x_k - d_k^T r_k - z_k + v_k) \to max. \quad (3)$$

Другим вариантом вычисления эндогенных потоков производственного баланса является использование максимизации рентабельности предприятия за все рассматриваемые *N*периодов

$$\frac{\sum_{k=1}^{N}(c_k^T \bar{x}_k - b_k^T x_k - d_k^T r_k - z_k + v_k)}{\sum_{k=1}^{N} b_k^T x_k + d_k^T r_k + z_k} \to max.$$

В этом случае решается задача дробно-линейного программирования.

Решив оптимизационную задачу, получаем потоки x_n, $\bar{x}_n$ и r_n, а значит и поток производственного баланса f_n. Подставим результаты в уравнение (2) и получим уравнение для баланса.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Входные данные**							
2	**Настраиваемые данные**							
3	Начальный баланс S_0		4000		Доля текущего производственного баланса на расходы			0,5
4								
5			1	Ресурс 2	Ресурс 3		Максимум производства в период	Начальный запас
6		Вместимость склада	20	30	30			
7		Начальный запас	5	5	5	Вместимость склада		
8	Товар 1	Матрица расхода ресурсов	1	3	5	10	5	2
9	Товар 2		2	6	1	20	10	2

Рисунок 1. Входные данные.

4. Примеры расчетов для построенной модели

Пример 1. Рассмотрим задачу составления модели (2) на тестовых данных, которые показаны на рисунке 1: начальный баланс, вместимость складов, матрица норм расхода ресурсов, прогнозы цен и спроса и др. Решим оптимизационную задачу с критерием (3) при помощи симплекс-метода в программе Excel (настройка поиска решения показана на рисунке 3). На

рисунке 2 показаны вычисленные потоки товаров и ресурсов. На рисунке 4 – график производственного баланса и вычисленная максимальная прибыль.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
20	**Вычисляемые значения**																				
21						Баланс количества товаров										Баланс количества ресурсов					
22		Поток проданных товаров		Поток произведенных товаров		На начало периода		На конец периода		Поток закупленных ресурсов			Поток использованных ресурсов			На начало периода			На конец периода		
23	Период n	T1	T2	T1	T2	T1	T2	T1	T2	P1	P2	P3	P1	P2	P3	P1	P2	P3	P1	P2	P3
24	0	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	5	5	5	5	5	5
25	1	0	0	1	0	2	2	3	2	15	25	15	1	3	5	5	5	5	19	27	15
26	2	3	0	3	0	3	2	3	2	0	0	30	3	9	15	19	27	15	16	18	30
27	3	3	0	4	1	3	2	4	3	0	30	5	6	18	21	16	18	30	10	30	14
28	4	4	3	2	4	4	3	2	4	0	0	0	10	30	14	10	30	14	0	0	0
29	5	2	4	0	0	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рисунок 2. Вычисляемые значения.

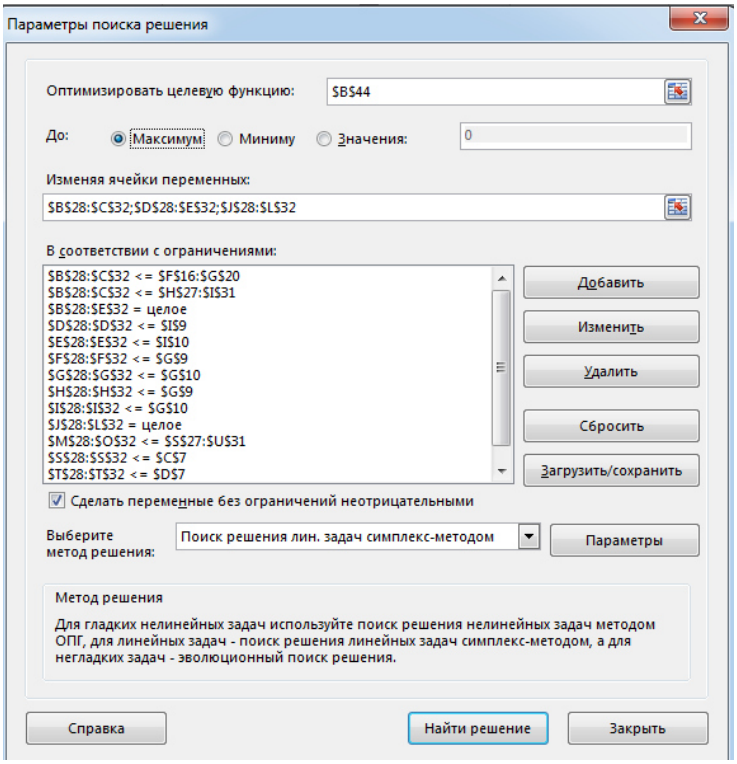


Рисунок 3. Параметры поиска решения.

	A	B	C	D
33				
34	**Вычисление производственного баланса**			
35				
36	Период n	Расходы	Доходы	Производственный баланс
37	0	0	0	4000
38	1	1280	0	2720
39	2	1320	1575	2975
40	3	800	1500	3675
41	4	260	2810	6225
42	5	0	1850	8075
43				
44	Производственная прибыль	**4075**		

Рисунок 4. Результаты вычислений.

Период	Поток цен на товары		Производственный баланс	Поток цен на товары		Производственный баланс	Поток цен на товары		Производственный баланс
	T1	T2		T1	T2		T1	T2	
1	530	210	3836	490	175	3834	550	200	4010
2	490	200	3006	475	190	2989	520	255	3720
3	470	195	4120	500	220	4001	500	195	5016
4	525	240	6880	495	200	5721	525	195	7056
5	500	180	7880	460	250	7891	560	180	8176

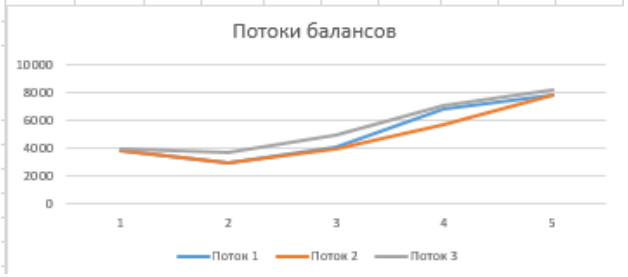


Рисунок 5. Потоки баланса при измененных условиях.

Пример 2. Изменим условия примера 1: введем другие прогнозные цены реализации товаров. По сути, рассматриваем другой перспективный сценарий изменения рыночной конъюнктуры. Затем применим аналогичную процедуру поиска (рисунок 4). Получим результаты, показанные на рисунке 5.

5. Задачи для модели баланса

Задача 1. Максимизировать непроизводственные расходы предприятия. Эти расходы можно интерпретировать как вывод средств из оборота в следующих целях: 1) для выплаты дивидендов владельцам предприятия; 2) для финансирования других производств; 3) для вложения в депозит. При этом должен выполняться целевой критерий: $\sum_{n=1}^{N} y_n \to max$.

Задача 1 решается с учетом интервальных ограничений на величину непроизводственных расходов. Нижняя граница может быть обусловлена, например, необходимостью выплачивать дивиденды владельцам, а верхняя – необходимостью оставлять свободные средства для функционирования и развития предприятия.

Задача 2. Допустим, задан набор значений C_n, $n = \overline{1,N}$ – целевые значения баланса. Необходимо выяснить, при каких условиях решение уравнения (1) удовлетворяет неравенствам $S_n \geq C_n, n = \overline{1,N}$, которые можно использовать для варьирования величин y_n и v_nв уравнении (1). В частности, для определения величин необходимых заемных средств.

Эта задача может быть обусловлена выполнением плана по прибыли, поставленным собственником предприятия или необходимостью накопления средств в целях модернизации предприятия. Например, для увеличения производственных мощностей, расширения складов и прочего.

Следующая задача ставится и решается аналогично работе [5].

Задача 3. Составить планы производства и продажи так, чтобы поток баланса приближенно удовлетворял заданному (программному) потоку C_n, $n = \overline{1,N}$, то есть требуется к минимизировать функцию

$$k(y,v) = \alpha_1 \sum_{n=0}^{N-1}(S_n - C_n)^2 + \alpha_2(S_N - C_N)^2, \quad (3)$$

где y, v – векторы непроизводственных расходов и внешнего финансирования (компоненты соответствуют различным периодам), $\alpha_1, \alpha_2 \in [0; 1]$ – веса «штрафов» отклонений значения баланса от целевых значений. При этом, как и в задаче 2, используются интервальные ограничения на переменные.

Пример 3. Используем данные из примера 1 и полученный в примере 1 поток баланса. Введем целевые значения баланса и рассчитаем величины непроизводственных расходов, минимизируя квадратичную функцию (3) с помощью программы Excel (см. рисунки 6-7).

Задача 4. Пусть известны объемы производства для каждого из периодов. При этом известна функция спроса $p_n(c_n)$, которая показывает, какое количество продукции можно реализовать при определенной цене в период n. Необходимо подобрать цены реализации продукции так, чтобы баланс отвечал заданным значениям.

	A	B	C	D	E	F
52	**Вычисление общего баланса**					
53						
54	Период n	Производственный баланс	Непроизводственные расходы	Баланс S_n	Целевой баланс C_n	(S_n-C_n)^2
55	1	2720	1219,99965	1500,00035	1500	1,1921E-07
56	2	2975	1974,99789	1000,00211	1000	4,464E-06
57	3	3675	1674,99993	2000,00007	2000	4,643E-09
58	4	6225	2225,00009	3999,99991	4000	8,5667E-09
59	5	8075	2074,99996	6000,00004	6000	1,4441E-09
60						
61	a_1	0,2				
62	a_2	0,8				
63	k(y)	9,204E-07				

Рисунок 6. Вычисление общего баланса

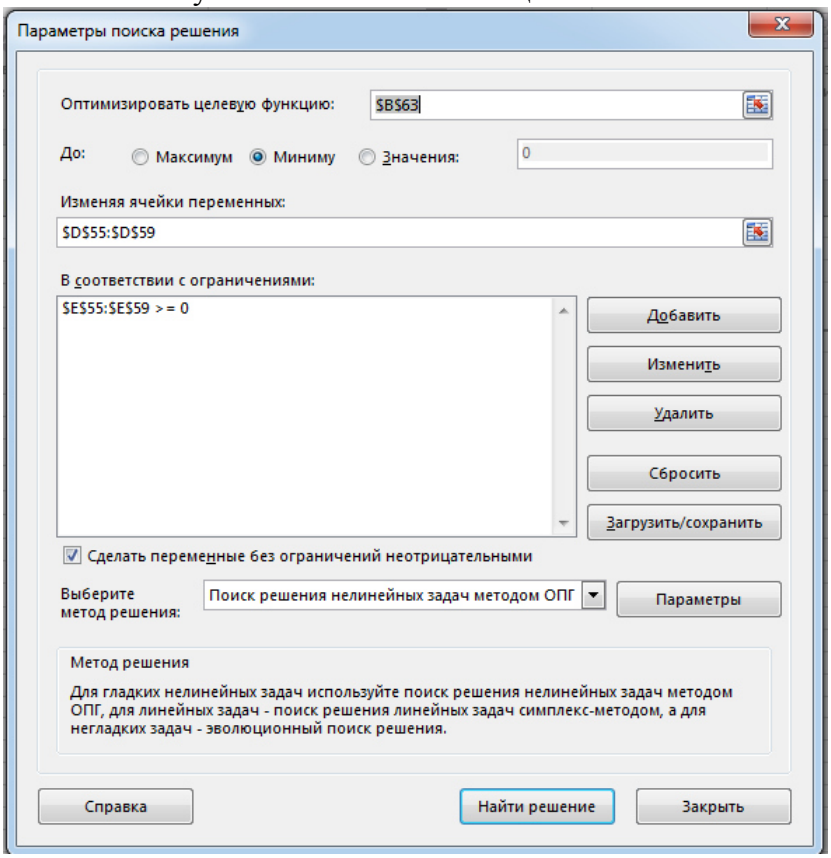


Рисунок 7. Параметры поиска решения.

При заданных потоках объемов производства эта задача решается с помощью линейного программирования.

5. Заключение

В статье предложена динамическая модель баланса финансовых средств предприятия. В рамках этой модели поставлены и решены некоторые оптимизационные задачи управления производством. На основании полученных результатов в условиях рассмотрения реальной ситуации можно было бы сделать выводы об эффективности предприятия, критически важных факторах, ограничивающих получаемую прибыль, а также спрогнозировать его дальнейшее развитие.

Список источников

1. Живицкая Е. Н., Гуринович О. В. Прогнозная модель спроса продукции предприятия и формирование модели выпуска // Доклады БГУИР. 2005. №3 (11). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/prognoznaya-model-sprosa-produk-tsii-predpriyatiya-i-formirovanie-modeli-vypuska.
2. Костырин Е. В. Моделирование оптимизации тарифов на медицинские диагностические услуги // Научные труды Вольного экономического общества России. 2009. №.2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-optimizatsii-tarifov-na-meditsinskie-diagnosticheskie-uslugi.
3. Дзюба С.А. Динамическая модель финансового результата фирмы // Финансовая аналитика: проблемы и решения. 2013. №45. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/dinamicheskaya-model-finansovogo-rezultata-firmy.
4. Ахмедова Э.Н.Г., Абдулазизова Н.Х.Г. Эффективная организация производства на предприятии по производству кондитерских изделий // Наука. 2021. №66-1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/effektivnaya-organizatsiya-proizvodstva-na-predpriyatii-po-proizvodstvu-konditerskih-izdeliy.
5. Анашкин Н.О. Поиск приближенного решения двухточечной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с параметром при помощи компьютерных вычислений // Новые информационные технологии в научных исследованиях: материалы XXVII Всерос. науч.-техн. конф. студентов, молодых ученых и специалистов. – Рязань, РГРТУ, 2022 – С. 96–98.

References

1. Zhivitskaya E.N., Gurinovich O.V. Predictive model of demand for the company's products and the formation of a model of output // Reports of BSUIR. 2005. No. 3(11). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/prognozna-ya-model-sprosa-produktsii-predpriyatiya-i-formirovanie-modeli-vypuska.

2. Kostyrin E.V. Modeling optimization of tariffs for medical diagnostic services // Scientific works of the Free Economic Society of Russia. 2009. No. 2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-optimizatsii-tarifov-na-meditsinskie-diagnosticheskie-uslugi.

3. Dzyuba S.A. Dynamic model of a firm's financial result // Financial analytics: problems and solutions. 2013. No. 45. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/dinamicheskaya-model-finansovogo-rezultata-firmy.

4. Akhmedova E.N.G., Abdulazizova N.H.G. Effective organization of production at the enterprise for the production of confectionery products // Science. 2021. No.66-1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/effektivnaya-organizatsiya-proizvod-stva-na-predpriyatii-po-proizvodstvu-konditerskih-izdeliy.

5. Anashkin N.O. Search for an approximate solution of a two-point edge problem for a system of differential equations with a parameter using computer calculations // New information technologies in scientific research: materials of the XVII All-Russian Scientific and Technical conf. of students, young scientists and specialists. – Ryazan, RGRTU, 2022 – C. 96-98.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 372-376.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 372-376.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.86

ОЦЕНКИ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПРИВЛЕКАТЕЛЬНОСТИ ПРОЕКТОВ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

Александр Михайлович Кравцов[1]✉, Галина Викторовна Чепурко[2]
[1,2]Филиал «Газпром ВНИИГАЗ Ставрополь», Ставрополь, Россия
[1]alex_k@bk.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-5947-5778

Аннотация. *Рассмотрен применительно к задачам оценки инвестиционной привлекательности проектов метод континуальных алгеброгических вычислений, который позволяет осуществлять поддержку принятия решений по многим критериям в условиях неполноты, неточности исходной информации. Постановка задачи учитывает ограничения, как технологического, так и финансово-экономического характера, что делает предлагаемый подход интересным для практических приложений. Приведен алгоритм построения инвестиционной оценки для инновационного проекта.*

Ключевые слова: *оценка инвестиционной привлекательности, континуальные вычисления, многокритериальная оптимизация.*

Conference paper

ASSESSMENT OF THE INVESTMENT ATTRACTIVENESS OF PROJECTS TAKEN INTO ACCOUNT OF FINANCIAL, ECONOMIC AND TECHNOLOGICAL LIMITATIONS

Alexander M. Kravtsov[1]✉, Galina V. Chepurko[2]
*[1,2]*Gazprom VNIIGAZ Stavropol Branch, Stavropol, Russia
*[1]*alex_k@bk.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-5947-5778

Abstract. *The method of continuous algebrological calculations, which allows supporting decision-making according to many criteria in conditions of incompleteness and inaccuracy of the initial information, is considered in relation to the problems of assessing the investment attractiveness of projects. The formulation of the problem takes into account limitations of both a technological and financial-economic nature, which makes the proposed approach interesting for practical applications. An algorithm for constructing an investment assessment for an innovative project is presented.*

© Кравцов А.М., Чепурко Г.В., 2023

Keywords: *assessment of investment attractiveness, continuum calculations, multicriteria optimization.*

1. Введение

Для решения многокритериальных задач принятия решений на основе оптимизации оценок важно получить адекватные результаты за приемлемые сроки. В работе [1] предлагается один из возможных подходов. Суть метода заключается в представление сложной задачи совокупностями простых ограничивающих правил и совокупностью простых критериев средствами континуальной логики (КЛ) и последующей обработке предикатов средствами КЛ. К недостаткам этого подхода следует отнести необходимость проведения значительного объема трудоемких вычислений. Кроме того, при поиске оптимального решения задач принятия решений информация об альтернативах решений зачастую бывает неполной, поскольку во многом имеют место временные рамки, неточности экспертных знаний, специфические особенности отдельных критериев и т.д. Учитывая перечисленные особенности, следует заранее ограничиваться определенной степенью точности представления данных и уровнем достоверности предполагаемого результата.

Обычно рассматривают три категории инвесторов: ***кредиторы***, интересы которых сводятся к получению процентов по кредитам и возвращению суммы кредита; ***стратегические инвесторы*** - потенциальные участники бизнеса (совладельцы), которые участвуют в распределении прибыли и заинтересованы в росте рыночной стоимости компании, и ***портфельные инвесторы***, интересы которых связаны с динамикой финансовых активов предприятия, обращающихся на фондовом рынке; определяющую роль при принятии ими решений играют ожидаемая доходность и риск портфеля активов.

Механизм определения инвестиционной привлекательности инвестиционных товаров, проектов или действующих организаций, относящихся к одной отрасли народного хозяйства, находящихся на экономически равноценных территориях, укладывается в рамки анализа результатов деятельности предприятия или осуществления проекта, элементов его внутренней среды. Ранжирование осуществляется исходя из категории инвестора (цели инвестирования) за счет расчетной оценки показателей доходности, финансовой устойчивости и ликвидности и других, рассматриваемых при анализе финансово-хозяйственной деятельности предприятия финансовых характеристик.

Одна из популярных современных технологий оболочечного анализа данных DEA (Data Envelopment Analysis) [3] родилась в середине XX века в связи с решением задачи оценки эффективности производственных процессов. Основоположником этого направления во многих публикациях принято считать М. Фарелла, который впервые сформулировал новый подход к решению указанной выше задачи. Он использовал в качестве наблюдений потребление нескольких факторов для производства единицы продукции разными компаниями из некоторого множества *T*. Таким образом, каждую из них можно представить точкой в многомерном пространстве потреблений факторов

производства - *S*. В качестве меры эффективности любой компании *P* из множества *T* предлагается использовать расстояние от точки в пространстве *S*, соответствующей данной компании, до изокванты эффективной компании вдоль соответствующего компании *P* радиус-вектора. В качестве изокванты эффективной компании рассматривается кусочно-линейная выпуклая оболочка множества наблюдений. Фарелл назвал эту меру технической эффективностью. Сама изокванта получила название фронтира. В дальнейшем развитии идей был решен вопрос о способе вычисления расстояния до изокванты эффективной организации. В качестве инструмента была предложена технология DEA (и введен сам термин), основанная на линейном программировании. Вычисления сводились к поиску максимума дроби, в числителе которой стояла линейная комбинация факторов, которые рассматривались как «выходы» производственного процесса, а в знаменателе - линейная комбинация «входов». Поиск максимума осуществлялся с учетом ряда ограничений на линейные комбинации «входов» и «выходов».

Изначально этот метод создавался как инструмент для сравнения функционирования некоторого изучаемого объекта с лучшими практиками.

В качестве критериев привлекательности проектов принято рассматривать внутреннюю норму доходности, коэффициент автономии, коэффициент текущей ликвидности, рентабельность активов, рентабельность продаж по чистой прибыли, рентабельность собственного капитала, доля рынка, инвестиционный климат региона и т.д.

2. Основной текст статьи

В данной работе предлагается подход к построению оценки инвестиционной привлекательности проекта, основанный на математических формализмах континуальной логики. Предполагается, что модель проекта представляется предварительно нормированными переменными $\{\lambda_i\}_{i=1}^{M}$ (включая переменные представляющие целевые показатели). Нормировка выполняется таким образом, чтобы выполнялось условие $\sum_{i=1}^{M}\lambda_i = 1,\ \ \lambda_i \geq 0,.\ i = 1..M.$

В соответствии с методологией континуальной логики множества *P*, *S*, *T*, могут быть описаны с помощью континуальных алгебрологических предикатов – $P(\boldsymbol{\lambda}) = 1, S(\boldsymbol{\lambda}) = 1, T(\boldsymbol{\lambda}) = 1$. Следует пояснить, что в континуальном случае каждой компании соответствует не одна точка множества *S*, а целая окрестность состояний, в которых может находиться компания, поскольку непрерывность по параметрам проекта допускает варьирование параметров в определенных границах. Каждый из этих предикатов может быть построен непосредственной аппроксимацией эмпирических данных по аналогичному проекту, либо сверткой предикатов условий (ограничений) на переменные проекта. Условия определяются ограничениями финансово-экономического, технологического, производственного характер, внешних по отношению к проекту обстоятельств (инвестиционный климат региона, жесткие экологические требования к проекту).

Для выполнения алгебрологических операций над предикатами они должны быть нормированы, или приведены к каноническому виду. Более подробно эти вычислительные процедуры обсуждаются в [4].

В результате решения задачи многокритериальной оптимизации по выделенным критериям результатом являются экстремальные значения - ***оценки*** и множества на которых они достигаются – ***альтернативы***, уровень доверия к альтернативам определяется по тому насколько близки к ***1*** значения левых частей предикатов условий и выбранных критериев инвестиционной привлекательности проектов. На практике значения в диапазоне ***0.7 – 0.9*** можно считать вполне приемлемыми. В случае весьма неполных данных, нижнюю границу значений для уровня доверия, возможно, опустить до ***0.3***.

Вообще, применение алгоритма поиска оценки предполагает выполнение следующих действий:

1) представить задачу правилами (зависимостями между переменными);

3) простроить функционал для соответствующего критерия;

5) определить альтернативы;

6) вычислить уровни доверия для выбранных альтернатив.

3. Заключение

В качестве основных результатов по обсуждению алгоритма построения оценки инвестиционной привлекательности проекта можно отметить следующие позиции:

- метод, реализуемый алгоритмом, позволяет получить оценки инвестиционной привлекательности проекта для любых наборов требований, в том числе и в случае противоречивых;

- наряду с оценкой, алгоритм позволяет получить уровень доверия – реализуемости этой оценки, а также описать множества текущих значений параметров проекта - альтернативы, при которых оценка справедлива (что облегчает контроль за выполнением положений проекта во время его реализации);

- алгоритм позволяет учитывать различные ограничения производственного, технологического и финансово-экономического характера на значения показателей проекта;

- возможна оперативная корректировка условий, что позволяет использовать предлагаемый алгоритм в составе систем автоматизированной интеллектуальной поддержки проектирования;

- факторизация критериального предиката позволяет проводить анализ чувствительности проекта по данному критерию к заданному набору условий (ограничений).

Список источников

1. Захаров В.В. Обобщения полиномов Бернштейна в задачах многокритериальной оптимизации / В.В. Захаров, А.М. Кравцов, С.А. Прийменко // Наука и мир, международный научный журнал, №2(6), Том 1, Волгоград, 2014.

2. Толпаев В.А. Построение экономизированных приближений функций многих переменных / В.А. Толпаев, К.С. Ахмедов, А.М. Кравцов, М.Т. Петросянц // В сборнике: Современные проблемы физико-математических наук. Материалы II международной научно-практической конференции. Орёл: ОГУ. 2016. С. 70-74.

3. Hwang S.-N., Lee H.-S., Zhu J. (eds) Handbook of Operations Analytics Using Data Envelopment Analysis. International Series in Operations Research & Management Science (ISOR). Vol. 239. Boston, MA: Springer, 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7705-2.

4. Толпаев В.А. Одна задача аппроксимации комплексов технологических данных методами нечёткой логики / В.А. Толпаев, А.М. Кравцов, М.Т. Петросянц, М.А. Бондаренко // Ученые записки Забайкальского государственного университета. 2017. Т. 12. № 4. С. 15-23. DOI: https//doi.org/10.21209/2308-8761-2017-12-4-15-23

References

1. Zakharov V.V. Generalizations of Bernstein polynomials in multicriteria optimization problems / V.V. Zakharov, A.M. Kravtsov, S.A. Priymenko // Science and World, international scientific journal, No. 2(6), Volume 1, Volgograd, 2014.

2. Tolpaev V.A. Construction of economized approximations of functions of many variables / V.A. Tolpaev, K.S. Akhmedov, A.M. Kravtsov, M.T. Petrosyants // In the collection: Modern problems of physical and mathematical sciences. Materials of the II international scientific and practical conference. Orel: OSU. 2016. pp. 70-74.

3. Hwang S.-N., Lee H.-S., Zhu J. (eds) Handbook of Operations Analytics Using Data Envelopment Analysis. International Series in Operations Research & Management Science (ISOR). Vol. 239. Boston, MA: Springer, 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7705-2.

4. Tolpaev V.A. One problem of approximating complexes of technological data using fuzzy logic methods / V.A. Tolpaev, A.M. Kravtsov, M.T. Petrosyants, M.A. Bondarenko // Scientific notes of the Transbaikal State University. 2017. T. 12. No. 4. pp. 15-23. DOI: https//doi.org/10.21209/2308-8761-2017-12-4-15-23.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 377-383.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 377-383.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.22

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРОВНЯ ЖИЗНИ НАСЕЛЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ РОССИЙСКИХ РЕГИОНОВ

Инна Фёдоровна Курбыко✉
Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г Столетовых, Владимир, Россия
levizov@rambler.ru✉

Аннотация. *На основе процедур многомерных методов математической статистики выделены группы регионов центра России, схожих по уровню жизни населения. С помощью дискриминантного анализа установлена статистическая значимость построенной классификации объектов.*

Ключевые слова*: статистические показатели, главные компоненты, кластерный анализ, Евклидово расстояние, дискриминантный анализ, классификация регионов.*

Conference paper

STATISTICAL ANALYSIS OF CENTRAL RUSSIA'S REGIONS STANDARD OF LIVING LEVEL

Inna Fe. Kurbyko✉
Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletov, Vladimir, Russia
levizov@rambler.ru✉

Abstract. *Groups of Central Russia's regions by the standard of living level are constructed on the basis of the procedures of mathematical statistics multivariate methods. The statistical significance of the constructed classification is established with the help of discriminantial analysis.*

Keywords: *statistical indicator, general components, cluster analysis, Euclidean distance, discriminantial analysis, classification of regions.*

1. Введение

Одним из основных направлений изучения социально-экономического развития страны является анализ качества жизни населения. Современная отечественная статистика располагает большим количеством показателей, характеризующих материальное благополучие граждан (см. [1, с. 151-188]).

© Курбыко И.Ф., 2023

Целью настоящей работы является построение сокращённой системы факторных переменных (главных компонент) и сравнительная оценка уровня жизни населения в субъектах Центрального федерального округа. Одним из основных направлений изучения социально-экономического развития страны является анализ качества жизни населения.

2. Основной текст статьи

Для статистического анализа выбраны показатели $(PU_1, PU_2, ..., PU_8)$ уровня жизни населения 18 центральных российских регионов в 2021 году. Наименование и натуральные численные значения показателей соответствуют статистическим данным в [1, с. 152] и [2, с. 236]. В настоящей работе показатель PU_1 представляет среднедушевые денежные доходы населения; PU_2 отвечает за реальные денежные доходы населения; PU_3 обозначает среднемесячную номинальную начисленную заработную плату работников организаций; PU_4 отвечает за реальную начисленную заработную плату работников организаций; PU_5 есть средний размер начисленных пенсий; PU_6 – реальный размер начисленных пенсий; PU_7 представляет долю численности населения с денежными доходами ниже границы бедности; PU_8 есть величина прожиточного минимума. Обработка данных выполнена с помощью инструментов прикладных программ математической статистики в среде MS Excel и STADIA. Результаты расчёта описательной статистики выборки исходных данных приведены в таблице 1.

Таблица 1. Статистические характеристики показателей.

Показатель, ед. измерения	PU_1, руб.	PU_2, %	PU_3, руб.	PU_4, %	PU_5, руб.	PU_6, %	PU_7, %	PU_8, руб.
Среднее	36146	101,7	44767	103,6	16416	98,00	10,0	11306
Станд.откл.	14323	2,279	18351	1,280	783,27	0,958	2,54	1886,2
Медиана	31870	101,1	40289	103,7	16237	97,80	10,1	10939
Минимум	28489	98,90	32403	101,2	15170	96,20	5,50	9720
Максимум	88831	107,6	112768	106,8	18239	100,9	14,3	18029

Отметим, что каждый из показателей принимает максимальное значение по региону г. Москва, за исключением показателя P_7, для которого наибольшая доля населения (14,3%) с доходами ниже границы бедности приходится на Смоленскую область, минимальная доля соответствует г. Москве.

Для получения адекватных статистических оценок, выполнена замена исходных значений $(PU_1, PU_2, ..., PU_8)$ значениями в процентах к максимальной величине каждого показателя по выборке для 18 регионов. Таким образом, получены новые переменные $(PPU_1, PPU_2, ..., PPU_8)\%$, которые оказались «одинаково» измеренными и удовлетворяющими неравенству: $32\% \le PPU_{nk} \le 100\%$ для всех $(n = 1,2,...,18; k = 1,2,...,8)$. Данные в процентах $(PPU_{nk}, n = 1,2,...,18; k = 1,2,...,8)$, согласно региону с номером «*n*», представлены ниже в таблице 2. Визуальный анализ таблицы 2 позволяет сказать, что минимальные значения показателей $(PU_1, PU_2, PU_3, PU_4, PU_5, PU_6, PU_7, PU_8)$,

соответствующих переменным $(PPU_1, PPU_2, PPU_3, PPU_4, PPU_5, PPU_6, PPU_7, PPU_8)\%$ имеют регионы, соответственно с номерами $(3;9;5;9;14;17;18;1)$.

Таблица 2. Матрица значений показателей в процентах.

n	Регион	PPU_{n1}	PPU_{n2}	PPU_{n3}	PPU_{n4}	PPU_{n5}	PPU_{n6}	PPU_{n7}	PPU_{n8}
1	Белгород.обл.	40,09	93,59	37,05	97,75	91,61	97,22	48,95	53,91
2	Брянск.обл.	35,58	94,89	31,55	97,47	86,11	96,04	90,91	62,57
3	Владимир.обл.	32,07	93,96	35,07	98,03	91,66	97,03	82,52	61,53
4	Воронеж.обл.	39,51	93,12	36,21	97,19	86,25	97,03	55,24	54,06
5	Иванов.обл.	32,29	93,03	28,73	96,63	88,45	96,63	90,21	59,69
6	Калужск.обл.	39,43	93,40	43,31	96,63	91,68	96,73	62,24	64,44
7	Костром.обл.	32,15	94,98	31,89	97,38	88,48	97,62	82,52	62,35
8	Курск.обл.	36,83	93,87	35,73	97,75	85,10	96,53	63,64	58,02
9	Липецк.обл.	39,54	91,92	35,64	94,76	88,47	96,74	56,65	55,16
10	Московск.обл.	60,56	98,89	56,79	96,07	98,84	95,94	41,96	75,32
11	Орловск.обл.	33,60	94,42	31,71	97,85	89,32	96,83	84,62	59,48
12	Рязанск.обл.	34,33	95,35	36,03	97,00	88,73	97,03	86,71	59,82
13	Смоленск.обл.	34,59	93,40	32,39	96,63	87,36	97,52	100,0	62,13
14	Тамбов.обл.	34,04	92,10	30,54	96,16	83,17	96,53	73,43	56,69
15	Тверск.обл.	34,37	94,42	35,72	97,57	90,48	97,03	75,52	62,31
16	Тульск.обл.	36,17	93,49	39,66	95,41	91,32	97,32	67,83	61,77
17	Ярослав.обл.	37,29	96,56	36,54	95,52	93,06	95,35	62,24	59,58
18	г. Москва	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	38,46	100,0

Дальнейшее исследование на основе матрицы (PPU_{nk}) выполнено по алгоритму из [3, с. 53-56] последовательного применения взаимосвязанных статистических процедур факторного, кластерного и дискриминантного анализа. На этапе факторного анализа выделены главные компоненты – факторы (GF_1, GF_2, GF_3), отвечающие за 91% дисперсии всех переменных $(PPU_1, PPU_2, ..., PPU_8)$. В этой связи принята гипотеза, состоящая в том, что подавляющая часть вариации изучаемых характеристик уровня жизни населения вполне достаточно выражается изменением трёх главных компонент, которые называются скрытыми или латентными факторами. Главные компоненты не коррелированны и представляют линейные комбинации переменных в процентах, образованные на основе собственных векторов их корреляционной матрицы. Расчёт факторных нагрузок показал: на главный фактор GF_1 с преимуществом проектируются переменные $(PPU_1, PPU_2, PPU_3, PPU_6, PPU_8)$; на фактор GF_2 – переменные (PPU_4, PPU_5, PPU_7); менее выражено на третий фактор – переменные (PPU_2, PPU_7). Конечным результатом факторных процедур явилось представление в трёхмерном векторном пространстве объектов исследования – регионов точками с тремя факторными координатами $(GF_{n1}, GF_{n2}, GF_{n3})$, согласно номеру «$n$».

Основной задачей этапа применения кластерного анализа, было построение групп объектов-регионов, схожих по своим факторным

координатам. В качестве метрики (оценки близости объектов друг к другу) выбрано евклидово расстояние, которое между двумя объектами с порядковыми номерами «*n*» и «*k*» вычислялось по формуле: $\rho(n,k)=\sqrt{\sum_{j=1}^{3}\left(GF_{nj}-GF_{kj}\right)^2}$, $(n=1,2,...,18; k=1,2,...,18)$. Результаты вычисления расстояния между двумя различными объектами приведено в таблице 3. Здесь в первой строке и первом столбце расположены номера объектов, а на пересечении *n*-ой строки и *k*-го столбца указано искомое расстояние $\rho(n,k)$.

Таблица 3. Матрица расстояний между объектами-регионами.

n/*k*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*
2	2,6	-	1,0	2,5	0,8	2,2	1,1	1,6	3,22	5,2	0,7	0,7	1,0	2,16	1,2	2,2	2,9
3	1,9	1,0	-	2,0	1,3	1,7	0,3	1,2	3,10	4,8	0,4	0,5	1,0	2,25	0,4	1,8	3,1
4	0,9	2,5	2,0	-	1,9	1,3	1,9	0,8	1,55	5,1	2,0	2,0	2,1	1,34	1,7	1,1	3,2
5	2,3	0,8	1,3	1,9	-	2,0	1,2	1,1	2,57	5,4	0,9	1,0	0,9	1,33	1,3	1,8	2,9
6	0,8	2,2	1,7	1,3	2,0	-	1,8	1,2	1,91	3,8	1,9	1,7	2,3	2,18	1,2	0,5	2,2
7	1,9	1,1	0,3	1,9	1,2	1,8	-	1,1	3,09	5,0	0,4	0,6	0,8	2,14	0,6	1,9	3,3
8	1,2	1,6	1,2	0,8	1,1	1,2	1,1	-	2,05	4,9	1,2	1,2	1,3	1,27	0,9	1,1	3,0
9	1,9	3,2	3,1	1,6	2,6	1,9	3,1	2,1	-	5,1	3,1	3,0	3,2	1,73	2,7	1,5	2,8
10	4,3	5,2	4,8	5,1	5,4	3,8	5,0	4,9	5,04	-	5,0	4,8	5,7	5,90	4,5	4,2	3,3
11	2,1	0,7	0,4	2,0	0,9	1,9	0,4	1,2	3,05	5,0	-	0,3	0,7	2,05	0,7	1,9	3,1
12	2,0	0,7	0,5	2,0	1,0	1,7	0,6	1,2	3,95	4,8	0,3	-	1,0	2,11	0,6	1,7	2,8
13	2,4	1,0	1,0	2,1	0,9	2,3	0,8	1,3	3,18	5,7	0,7	1,0	-	1,85	1,2	2,3	3,6
14	2,1	2,2	2,2	1,3	1,3	2,2	2,1	1,3	1,73	5,9	2,0	2,1	1,8	-	2,1	1,8	3,4
15	1,5	1,2	0,4	1,7	1,3	1,2	0,6	0,9	2,74	4,5	0,7	0,6	1,2	2,12	-	1,4	2,8
16	0,9	2,2	1,8	1,1	1,8	0,5	1,9	1,1	1,45	4,2	1,9	1,7	2,3	1,78	1,4	-	2,2
17	3,0	2,9	3,1	3,2	2,9	2,2	3,3	3,0	2,76	3,3	3,1	2,8	3,6	3,36	2,8	2,2	-
18	8,4	9,6	8,7	9,2	9,9	8,5	8,8	9,2	10,1	6,9	9,1	9,0	9,5	10,4	8,6	9,0	9,5

Из таблицы 3 следует, что ближе всего друг другу в метрическом пространстве расположены следующие пары регионов: Костромская и Владимирская; Орловская и Рязанская области, для которых, с точностью до 0,1, $\rho(7,3)=0,3$ и $\rho(12,11)=0,3$. Москва наиболее удалена от всех регионов и вслед за ней идёт Московская область. В частности, анализ расстояний показал, что $\max\{\rho(18,k), k=1,...,17\}=\rho(18,14)=10,4$; $\min\{\rho(18,k), k=1,...,17\}=\rho(18,10)=6,9$.

Согласно объединяющей стратегии группового соседа, получено дерево классификации 18 регионов центра России, представляющее цепочку кластеров, последовательно включающих номера объектов по мере их близости в пространстве с евклидовой метрикой:

$\{[7,3]\to[12,11]\to[12,7,3,11]\to[16,6]\to[15,12,7,311]\to[5,2]\to[8,4]\to[16,1,6]\to[15,13,12,7,3,11]\to$
$[15,5,2,13,12,7,3,11]\to[16,8,4,1,6]\to[14,9]\to[16,14,9,8,4,1,6]\to[17,16,15,5,2,13,12,7,3,11,14,9,8,4,1,6]$
$\to[17,10,16,5,15,13,2,12,7,9,11,14,3,4,8,1,6]\to[18,17,10,16,15,5,2,7,12,13,3,14,11,9,8,4,1,6]\}$.

Характерно то, что объекты с номерами «10» и «18» присоединяются к остальным только на последних двух шагах.

Близость объектов по методу группового соседа проиллюстрирована на рисунке 1, по методу ближайшего соседа – на рисунке 2. Здесь по горизонтальной оси расположены номера объектов, которые включаются в кластеры в зависимости от выбранной стратегии на уровне определённого расстояния, указанного по вертикали.

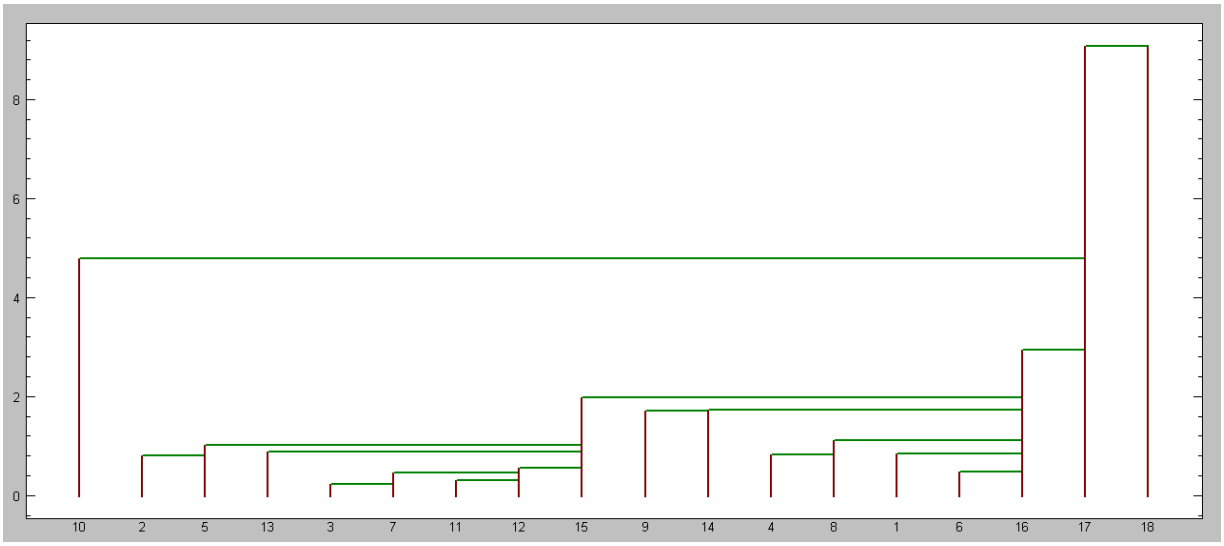


Рисунок 1. Дендрограмма по стратегии группового соседа.

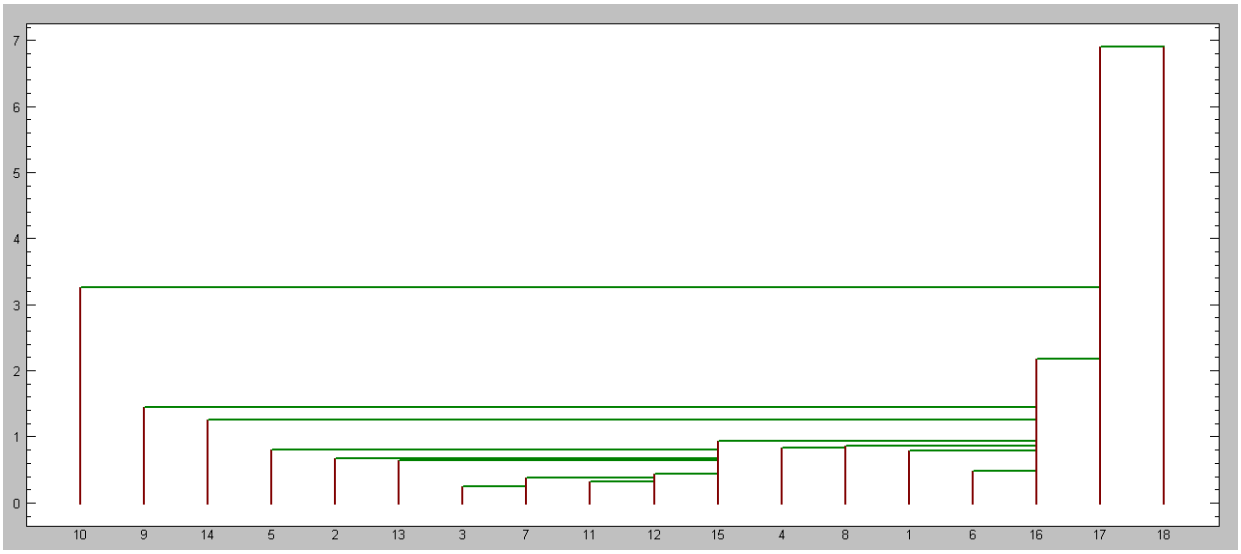


Рисунок 2. Дендрограмма по стратегии группового соседа.

Визуальный анализ рисунков 1-2 обнаружил наличие не более пяти группировок объектов, причём регион с номером «10» (Московская область) значительно отделён от остальных.

Для более отчётливого выделения групп близких объектов выполнено построение кластеров на основе разделяющей дивизивной стратегии. За результат принято разбиение на следующие кластеры: I(1;6o;10;16;17;18); II(3o;7;11;12;15); III (4o;8;9;14); IV(2;5o;13), где через (6o;3o;4o;5o) обозначены номера центральных по геометрическому расположению объектов. Отметим, что подобные группировки объектов наблюдались также на дендрограммах по стратегии Уорда и дальнего соседа. Однако двумерные проекции объектов на

плоскости главных факторов $[(GF_i, GF_j), i = 1,2,3;\ j = 1,2,3]$ показали значительную удалённость объектов с номерами «18» и «10» от центра «6с» своего кластера, что также заметно на рисунке 1. В этой связи принято решение образовать новый кластер V(10о;18) с регионами: Московская обл. и г. Москва, исключив их из первого кластера. Таким образом, построена классификация регионов по статистическим показателям $(PU_1, PU_2, PU_3, PU_4, PU_5, PU_6, PU_7, PU_8)$ уровня жизни населения, представленная ниже в таблице 4.

Таблица 4. Классификация регионов по уровню жизни населения.

№	Группы регионов центра России	Представление объектов в метрическом пространстве	Средние значения показателя PU_1, руб.
Кластер I(1;6о;16;17)			
1	Белгородская обл.	{0,10; 0,15; -1,09}	33974
6о	Калужская обл.	{0,06; 0,55; -0,39)	
16	Тульская обл.	{-0,40;0,67; -0,54}	
17	Ярославская обл.	{-0,36; 2,22;1,01}	
Кластер II(3о;7;11;12;15)			
3о	Владимирская обл.	{-0,30; -0,85; 0,51}	29584
7	Костромская обл.	{-0,39; -1,01; 0,33}	
11	Орловская обл.	{-0,67;-0,83; 0,61}	
12	Рязанская обл.	{-0,55; -0,54; 0,71}	
15	Тверская обл.	{-0,20; -0,48; 0,28}	
Кластер III (4о;8;9;14)			
4о	Воронежская обл.	{-0,73; -0,07; -1,24}	33295
8	Курская обл.	{-0,78; -0,37; -0,46}	
9	Липецкая обл.	{-1,33; 1,35; -1,42}	
14	Тамбовская обл.	{-1,98; -0,11; -0,78}	
Кластер IV (2;5о;13)			
2	Брянская обл.	{1,10; -0,60; 1,13}	30340
5о	Ивановская обл.	{-1,48; -0,43; 0,42}	
13	Смоленская обл.	{-1,13; -1,24; 0,41}	
Кластер V(10о;18)			
10о	Московская обл.	{2,87; 2,75; 0,98}	71312
18	г. Москва	{8,38; -1,18; -0.45}	

3. Заключение

На основе дисперсионного анализа доказано, что средние значения показателя среднедушевых денежных доходов PU_1 (в выделенных группах регионов) значимо отличаются между собой. Статистическая верификация результатов кластеризации, выполненная с помощью дискриминантного анализа, дала положительный результат. Суммарное межкластерное расстояние Махаланобиса, вычисленное на основе расчёта матрицы, обратной к ковариационной матрице, оказалось значимо отличным от нуля и составило $56{,}31$. Приняты гипотезы о равенстве нулю расстояний Махаланобиса от большинства объектов до центров своих кластеров с достаточно высокими

уровнями значимости в интервале $(0{,}40;0{,}98)$. Наиболее удалёнными от центров оказались регионы с номерами $(9;17;18)$.

В дальнейшем предполагается построить кластеризацию регионов по мере поступления статистической информации об уровне жизни населения за последующие годы и сравнить результаты с классификацией, представленной в таблице 4.

Список источников

1. Российский статистический ежегодник. 2022: Стат. сб. / Росстат. – М., 2022 – 691 с.
2. Регионы России. Социально-экономические показатели. 2022: Стат. сб. / Росстат. – М., 2022. – 1122 с.
3. Курбыко И.Ф. Построение классификации регионов центра России на основе показателей использования цифровых технологий // Эффективное управление инновационными процессами в условиях цифровой трансформации: сборник статей Международной научно-практической конференции (5 апреля 2023 г., г. Ижевск). – Уфа: Аэтерна, 2023. – С. 51-56.

References

1. Russian statistical year-book. 2022. Moscow: Rosstat. 2022. 691 p. (In Russ.).
2. Regions of Russia. Socio-economic indicators. 2022. Moscow: Rosstat. 2022. 1122 p. (In Russ.).
3. Kurbyko I.F. Construction of Central Russia’s regions classification on the basis of the use of digital technologies. Effective innovative processes management in conditions of digital transformation. Proceedings of Int.science-pract.conf. Ufa: Aeterna. 2023. Pp. 51-56. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 384-390.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 384-390.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.86+330.44+65.012.122

МЕТОДЫ ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ В РАМКАХ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Дмитрий Владимирович Юдин[1]✉, Владимир Викторович Абрамов[2]
[1,2]Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина, г. Рязань, Российская Федерация
[1]d.yudin2008@stud.rsu.edu.ru✉, [2]v.abramov@365.rsu.edu.ru

Аннотация. *Рассматриваются проблемы планирования производства в рамках динамической балансовой модели с дискретным временем. Решение этих проблем сведено к решению оптимизационных задач. Сопутствующие вычислительные процедуры реализованы в пакете компьютерной алгебры.*

Ключевые слова: *поэтапное планирование производства, система разностных уравнений, поток объемов производства, оптимизация.*

Conference paper

METHODS OF EFFECTIVE PRODUCTION MANAGEMENT WITHIN ONE DYNAMIC MODEL

Dmitry V. Yudin[1], Vladimir V. Abramov[2]✉
[1,2]Ryazan State University, Ryazan, Russian Federation
[1]d.yudin2008@stud.rsu.edu.ru, [2]v.abramov@365.rsu.edu.ru✉

Abstract. The problems of production planning in the framework of a dynamic balance model with discrete time are considered. The solution of these problems is reduced to solving optimization problems. The accompanying computational procedures are implemented in the computer algebra package.

Keywords: step-by-step production planning, system of difference equations, flow of production volumes, optimization.

1. Введение

Для оптимального управления производством особенно для средних и малых предприятий актуальна проблема цифровизации на уровне составления динамических планов (см., например, [1, 2] и др.). Для решения этой проблемы путем исправления недочетов модели Леонтьева была предложена балансовая экономико-математическая модель производства с дискретным временем [3]. В

© Юдин Д.В., Абрамов В.В., 2023

данной работе применим модель в качестве основы цифровой поддержки принятия решений для предприятия со стационарным производственным укладом. При этом поток объёмов производства $x(n) \in R^m$ – это решение системы

$$x(n+1) = A \cdot x(n) + f, \quad (1)$$

в которой: m – количество производимых видов продукции; n – номер торгово-производственного периода времени; A – $m \times m$-матрица, ее элементы в строках № i и в столбцах № j равны $a_i \cdot c_j / b_i$; f – m-мерный вектор с компонентами $-y_i/b_i$, для каждого вида i продукции: c_i – цена продажи (компоненты вектора c); b_i – себестоимость (компоненты вектора b); y_i – непроизводственное потребление, ассоциированное с продукцией (компоненты вектора y); a_i – доля суммарной выручки за период n, направленной на покрытие затрат производства продукции и на непроизводственное потребление, причём

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \le 1 \text{ и } a_i \ge 0;\ i = \overline{1,m}. \quad (2)$$

Решив систему (1) методом вариации, по формуле $A^n = (trA)^{n-1} \cdot A$ [4] получим выражение для потока объемов производства

$$x(n) = (trA)^{n-1} \cdot A \cdot x(0) + (A \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (trA)^{k-1} + E) \cdot f. \quad (3)$$

2. Достижение плановых состояний

В рамках модели (1) рассмотрим проблему производственного планирования. В качестве возможных целей для предприятия могут рассматриваться: достижение плановых состояний (планового объёма выпуска, увеличение показателя рентабельности, уменьшение затрат и издержек и так далее), а также оптимизация итоговых показателей (получение максимальной прибыли или выручки от реализации продукции).

Проблема управления путем достижения плановых состояний формально сводится к поиску условий, при которых система (1) имеет решение, удовлетворяющее системе неравенств (краевых условий):

задача 1: $\begin{cases} x(n) \ge diag\{d_1, \dots, d_m\} \cdot x(0) \\ n \ge N \end{cases}$. **задача 2:** $\begin{cases} c^T(n) \cdot x(n) \ge \overline{d} \cdot c^T \cdot x(0) \\ n \ge N \end{cases}$.

По условию задачи 1, начиная с определенного периода N, начальные объёмы производства каждого продукта i будут превышены не менее чем в d_i раз. В задаче 2 величина $\overline{d}$ – минимальный коэффициент наращения начальной выручки $c^T \cdot x(0)$ к заданному периоду N. Аналогично рассматривается наращение прибыли, рентабельности (тогда $\overline{d} = 1 + \mathrm{r}$, r – плановая рентабельность).

С экономической точки зрения решение системы (1) должно иметь оценку $x(n) \ge 0_m$. Для этого достаточно, чтобы $x(n+1) \ge x(n)$ в любом периоде n. Методами линейной алгебры установлены следующие **утверждения**:

1) $\det(E - A) = 1 - trA$;

2) при $trA \ne 1$ существует $(E - A)^{-1} = E - (trA - 1)^{-1} \cdot A$;

3) при $1 < trA < 1 + \min\left(\frac{a_i \cdot c_i}{b_i}\right)$ (это характерный с экономической точки зрения случай) матрица $(E - A)^{-1}$ содержит только неположительные элементы и система (1) имеет неустойчивое стационарное решение $U = W^{-1} \cdot f \geq 0_m$. В силу (2) для монотонности $x(n)$ достаточно, чтобы параметры модели (1) удовлетворяли соотношению

$$x(n+1) - x(n) = (trA)^{n-1} \cdot A \cdot \left((trA - 1) \cdot x(0) + f\right) \geq 0_m.$$

Ввод данных

Введём прогнозируемые вектор-столбцы цен, себестоимостей, долей выручки на любом этапе производства

```
> c:=matrix([[70],[53]]): b:=matrix([[64],[40]]):  B:=diag(b[1,1],b[2,1]): a:=matrix([[34/100],[66/100]]):
```

Введём прогнозируемый вектор-столбец непроизводственного потребления на конец любого этапа производства

```
> y:=matrix([[15],[19]]):
```

Определение коэффициентов модели

Определим матрицу A и вектор-столбец f

```
> A:=multiply(multiply(inverse(B),a),transpose(c)):  f:=evalm(multiply(inverse(B),y)*(-1)):
```

Запишем линейную неоднородную систему $x(n+1) = A \cdot x(n) + f$

```
> eq1:=x[1](n+1)=A[1,1]*x[1](n)+A[1,2]*x[2](n)+f[1,1]; eq2:=x[2](n+1)=A[2,1]*x[1](n)+A[2,2]*x[2](n)+f[2,1]:
```

Вычисление общего решения

Производственный поток и потоки объёмов для каждого товара

```
> u:=rsolve({eq1,eq2},{x[1],x[2]}): x[1](n):=subs(u[1],x[1](n)): x[2](n):=subs(u[2],x[2](n)):
```

Задача 1 о достижении планового состояния

Введём вектор-столбцы коэффициентов наращения и начальных объёмов производства, а также плановое время наращения объёмов

```
> d:=matrix([[13],[10]]): x(0):=matrix([[5],[7]]): N:=16:
```

Производственные потоки

```
> x[1](n):=subs(x[1](0)=x(0)[1,1],x[2](0)=x(0)[2,1],x[1](n)): x[2](n):=subs(x[1](0)=x(0)[1,1],x[2](0)=x(0)[2,1],x[2](n)):
```

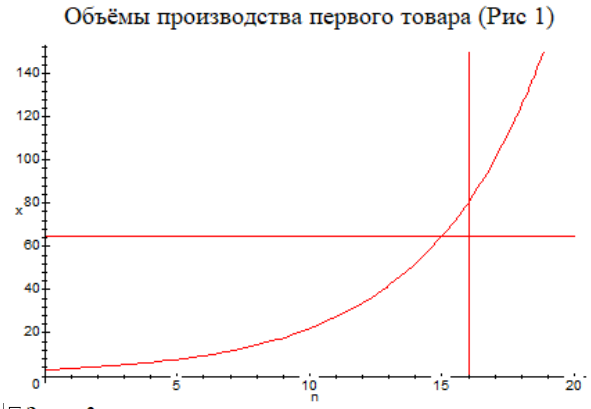
Проверка условия достижения планового состояния - объём производства каждого товара, начиная с момента N, превосходит начальный объём в заданное число раз

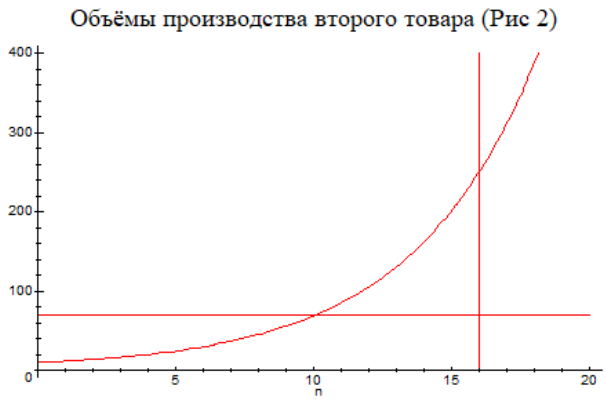
```
> reshenie:=solve(({x[1](n)>=d[1,1]*x(0)[1,1],x[2](n)>=d[2,1]*x(0)[2,1],n>=N}),n);
```

$$reshenie := \{16 \leq n\}$$

Графическая иллюстрация факта достижения планового состояния по каждому товару

```
> implicitplot({x=d[1,1]*x(0)[1,1],x=x[1](n),n=N},n=0..20,x=0..150,title=`Объёмы производства первого товара (Рис 1)`);
  implicitplot({x=d[2,1]*x(0)[2,1],x=x[2](n),n=N},n=0..20,x=0..400,title=`Объёмы производства второго товара (Рис 2)`);
```





Задача 2 о наращении выручки

Введём: величину наращения выручки, плановое время, вектор начальных объёмов производства, вектор начальных цен производства

```
> d:=3:   N:=9:   x(0):=matrix([[5],[7]]):  c_(0):=matrix([[80],[65]]):
```

Проверка условия наращения выручки за заданное время

```
> reshenie:=solve(({c[1,1]*x[1](n)>=d*x(0)[1,1]*c_(0)[1,1],c[2,1]*x[2](n)>=d*x(0)[2,1]*c_(0)[2,1],n>=N}),n);
```

$$reshenie := \{9 \leq n\}$$

Графическая иллюстрация факта наращения выручки

```
> implicitplot({x=d*(c_(0)[1,1]*x(0)[1,1]+c_(0)[2,1]*x(0)[2,1]),x=c[1,1]*x[1](n)+c[2,1]*x[2](n),n=N},n=0..10,
  x=0..5000,title=`Выручка производства`);
```

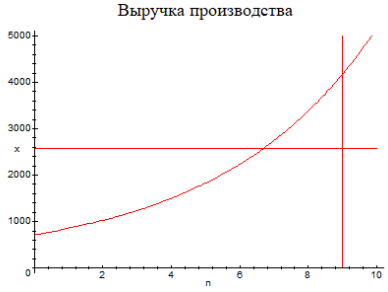


Рисунок 1. Пример решения задач 1, 2 для модели (1) в пакете Maple

Отсюда следует векторная оценка, согласующая вектор начальных объемов производства и вектор величин потребления

$$x(0) \geq \left(\frac{1}{trA-1} \cdot A - E\right) \cdot B^{-1}y,\ B^{-1} = diag\left\{\frac{1}{b_1}, \dots, \frac{1}{b_m}\right\}. \quad (4)$$

На основе полученных результатов в пакете Maple на тестовых данных были реализованы вычислительные процедуры (пример – на рисунке 1).

3. Оптимизация итоговых показателей

Рассмотрим второй способ управления моделью (1), который осуществляется за счёт оптимизации её параметров.

В качестве целевого критерия за определенное количество торговых периодов времени N для модели (1) естественно рассматривать, например ,максимум выручки или же максимум прибыли

$$\sum_{n=1}^{N} c^T \cdot x(n) \to max,\ \sum_{n=1}^{N}(c^T - b^T) \cdot x(n) \to max. \quad (5)$$

В роли оптимизационных параметров управления моделью (1) могут выступать: доли суммарной выручки a (при ограничениях (2)), размеры непроизводственного потребления y, а также начальные объёмы производства $x(0)$. В частности, если требуется подобрать параметр a, то функции из критериев (5) представляет собой многочлены -ой степени (см. расчеты рисунке 3)

$$V(a) = \sum_{n=1}^{N} c^T \cdot x(n) \to max,\ P(a) = \sum_{n=1}^{N}(c^T - b^T) \cdot x(n) \to max. \quad (6)$$

Ясно, что многочлен любой степени от m переменных является непрерывным в R^m, а так как множество заданное условиями (2) является замкнутым и ограниченным, то по второй теореме Вейерштрасса критерии (6) реализуются.

Если же в качестве параметров оптимизации в соотношении (2) выбраны векторы $x(0),\ y$, то критерии (5) – линейные. Поэтому при наличии линейных ограничений на эти переменные проблемы оптимизации производства формально сводятся к задачам линейного программирования. Подставим (3) в (5). Получим зависимости целевых критериев от $x(0), y$:

$$V(x(0), y) = \alpha \cdot x(0) - \beta \cdot y \to max,\ P(x(0), y) = \gamma \cdot x(0) - \eta \cdot y \to max, \quad (7)$$

где $\gamma = (c-b)^T A \sum_{n=1}^{N}(trA)^{n-1}$, $\eta = (c-b)^T \sum_{n=1}^{N}(A\sum_{k=1}^{n-1}(trA)^{k-1} + E)B^{-1}$, $\alpha = c^T A \sum_{n=1}^{N}(trA)^{n-1}$, $\beta = c^T \sum_{n=1}^{N}(A\sum_{k=1}^{n-1}(trA)^{k-1} + E)B^{-1}$.

Определим ограничения для критериев (7). Если предприятие работает лишь за счёт собственных средств, то $b^T x(0) \leq z_0$, где z_0 – начальные денежные средства. Если лицом, принимающим управленческие решения, задана допустимая рентабельность R, то требуется $\sum_{n=1}^{N} c^T \cdot x(n) \geq (1+R) \cdot \sum_{n=1}^{N} b^T \cdot x(n)$. Для объемов производства $x_i(n)$, составляющих производственный поток, целесообразны ресурсные ограничения $\sum_{i=1}^{m} p_{ji} \cdot x_i(n) \leq r_j(n),\ n = \overline{1, N}$, где p_{ji} – норма расхода ресурса j для производства продукции вида i, а $r_j(n)$ – поток лимита ресурса j. Если лимиты ресурсов даны на весь прогнозируемый промежуток времени без учета графика использования ресурсов, то $\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} p_{ji} \cdot x_i(n) \leq r_j$. Допустим, лицом, принимающим управленческие решения, установлена доля $q \in (0, 1]$ балансовых средств для погашения затрат на производство в каждом следующем периоде.

Определение целевых функций

```
> `Выручка`:=evalf(sum(c[1,1]*x[1](n)+c[2,1]*x[2](n),n=0..N)):
  `Затраты`:=evalf(sum(b[1,1]*x[1](n)+b[2,1]*x[2](n),n=0..N)): `Прибыль`:=evalf(`Выручка`-`Затраты`);
```

$$Прибыль := 577.101904\,x10 - 33.3377560\,y2 - 25.5995627\,y1 + 436.948585\,x20$$

Определение ограничений

Ограничения: на первоначальные затраты; на минимальную рентабельность, на использование баланса средств

```
> zatr:=b[1,1]*x10+b[2,1]*x20<=Z:  minR:=`Прибыль`>=R*`Затраты`:  minP:=y1+y2>=Y:
  bal:=evalf(sum(b[1,1]*x[1](n)+b[2,1]*x[2](n),n=0..N+1))<=(Z+`Выручка`-`Затраты`)*q:
```

Ограничения на ресурсы

```
> res1:=evalf(sum(norm_r[1,1]*x[1](n)+norm_r[1,2]*x[2](n),n=0..N)<=r[1,1]):
  res2:=evalf(sum(norm_r[2,1]*x[1](n)+norm_r[2,2]*x[2](n),n=0..N)<=r[2,1]):
```

Ограничения на максимальные объёмы продаж и минимальный спрос

```
> g1:=evalf(sum(x[1](n),n=0..N)<=g[1,1]):   g2:=evalf(sum(x[2](n),n=0..N)<=g[2,1]):
  s1:=evalf(sum(x[1](n),n=0..N)>=s[1,1]):   s2:=evalf(sum(x[2](n),n=0..N)>=s[2,1]):
```

Система ограничений

```
> systema:=simplify({zatr,minP,minR,bal,res1,res2,g1,g2,s1,s2}):
```

Результаты

Начальные объемы производства, величины потребления, при которых прибыль максимальна; максимум прибыли

```
> e1:=maximize(`Прибыль`,systema,NONNEGATIVE);
  `Макс.прибыль`:=subs(e1[1],e1[2],e1[3],e1[4],`Прибыль`);
```

$$e1 := \{x10 = 0, x20 = 6.250000000, y2 = 66.78393178, y1 = 12.86505557\}$$

$$Макс.прибыль := 175.1624373$$

Рисунок 2. Пример оптимизации для переменных $x(0), y$ модели (1) в пакете Maple.

```
> restart:with(linalg):with(plots):with(student):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

Ввод модельных данных

Введём векторы: цен - ***c***, себестоимостей - ***b***, долей выручки - ***a***, начальных объёмов производства - ***x0***, величин непроизводственного потребления - **y**, а также плановое время наращения - ***N***.

```
> c:=matrix([[70],[53]]): b:=matrix([[69],[40]]):  B:=diag(b[1,1],b[2,1]): a:=matrix([[1-a2],[a2]]):
  x0:=matrix([[5],[10]]): y:=matrix([[20],[10]]): N:=5:
```

Идентификация коэффициентов модели

```
> A:=multiply(multiply(inverse(B),a),transpose(c)):  f:=evalm(multiply(inverse(B),y)*(-1)):
  eq1:=x[1](n+1)=A[1,1]*x[1](n)+A[1,2]*x[2](n)+f[1,1]: eq2:=x[2](n+1)=A[2,1]*x[1](n)+A[2,2]*x[2](n)+f[2,1]
```

Вычисление производственного потока

Производственный поток ***u*** - частное решение системы $x(n+1)=Ax(n)+f$

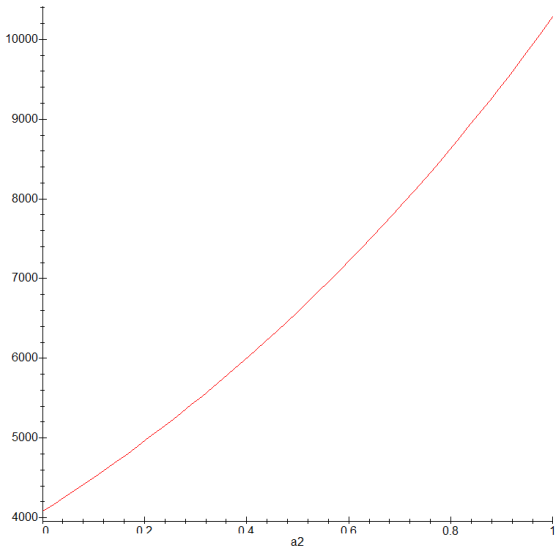
```
> u:=rsolve({eq1,eq2},{x[1],x[2]}):`нач.данные`:=x[1](0)=x0[1,1],x[2](0)=x0[2,1]:
  x[1](n):=evalm(subs(`нач.данные`,subs(u[1],x[1](n)))); x[2](n):=subs(`нач.данные`,subs(u[2],x[2](n)));
```

$$x_1(n) := -10\,\frac{229480\left(\frac{70}{69}+\frac{857}{2760}a2\right)^n - 3246120\,a2\left(\frac{70}{69}+\frac{857}{2760}a2\right)^n - 372400 + 331219\,a2 + 136263\,a2^2 + 3016640\,a2^2\left(\frac{70}{69}+\frac{857}{2760}a2\right)^n}{(2800+857\,a2)(857\,a2+40)}$$

$$x_2(n) := \frac{-3958530\,a2\left(\frac{70}{69}+\frac{857}{2760}a2\right)^n - 28000 + 5871430\,a2 + 1799700\,a2^2 + 52037040\,a2^2\left(\frac{70}{69}+\frac{857}{2760}a2\right)^n}{(2800+857\,a2)(857\,a2+40)}$$

Определение целевой функций *выручки* и её оптимизация

```
> V:=evalf(sum(c[1,1]*x[1](n)+c[2,1]*x[2](n),n=1..N)):
> plot(V,a2=0..1);
```




```
> maximize(V,{a2},{a2=0..1});
```

$$10282.70017$$

Рисунок 3. Пример оптимизации для переменной a модели (1) в пакете Maple.

Тогда $b^T \cdot x(n) \le (z_0 + \sum_{s=1}^{n-1}(c-b)^T x(s))q, \ \ n = \overline{1,N}$. Дополнительно могут учитываться рыночные ограничения $s_i(n) \le x_i(n) \le \widetilde{x_i}(n)$ по минимальному спросу (или по договорным объёмам продаж) и по максимальным объёмам продаж, $i = \overline{1,m}, \ n = \overline{1,N}$ (если ограничения распределены на все периоды, то требуется оценка $s_i \le \sum_{n=1}^{N} x_i(n) \le \widetilde{x_i}$). Так как $y \le 0_m$, то целесообразно ввести ограничение $\sum_{i=1}^{m} y_i \ge Y$ на минимальное общее потребление.

На основе полученных выводов в пакете Maple на тестовых данных (см. рисунок 1) были реализованы вычислительные процедуры (см. рисунок 2).

4. Заключение

На основе модели (1) были построены две схемы управления выпуском предприятия, первая из них основывается на достижении плановых состояний, вторая – на оптимизации итоговых показателей.

При достижении плановых состояний по модели (1) справедливы **выводы.**

1. Поток (3) является неубывающим при выборе стационарного потребления y и начальных объемов производства $x(0)$ согласно (4). В условиях утверждения 3) начальные объемы должны быть не менее стационарных объемов производства (иначе модель имеет смысл лишь на конечном числе периодов).

2. При условии (4) поток $x(n)$ является решением задач 1, 2, если он удовлетворяет соответствующему краевому условию в момент $n = N$.

В рамках модели (1) для решения проблемы управления предприятием с точки зрения оптимизации итоговых показателей имеют место **выводы.**

1. Проблема сводится к решению задач оптимизации для переменных $x(0), \ y$ с критериями (7) и ограничениями перечисленными выше, а также для переменной a с критериями (6) и ограничениями (2).

2. Соответствующие компьютерные вычислительные процедуры включают экзогенные переменные (цены, себестоимости, ресурсные ограничения и прочее) в качестве данных. Поэтому появляются возможности анализа влияния сценариев варьирования данных на устойчивость оптимальных планов, на критические значения параметров $(R, \ q, \ z_0)$.

Список источников

1. Жданов С.А. Основы теории экономического управления предприятием. М.: Финпресс, 2010.

2. Антал М.А. Особенности планирования в современном производстве // Приоритетные направления развития экономики и менеджмента: теоретические и практические аспекты. Уфа, 2021. С. 98–101.

3. Юдин Д.В. Моделирование производственного потока // На перекрестках наук: материалы Всероссийского конкурса студенческих научных работ (15 апреля – 28 мая 2022 г). ЕГУ им. И.А. Бунина, 2022. С. 81–87.

4. Юдин Д.В., Абрамов В.В. Моделирование дискретной динамики производства // XXIV Всероссийская студенческая научно-практическая конференция Нижневартовского государственного университета (5–6 апреля 2022 г). Ч. 4. НВГУ, 2022. С. 615–620.

References

1. Zhdanov S.A. Fundamentals of the theory of economic management of an enterprise. M.: Finpress, 2010.

2. Antal M.A. Features of planning in modern production // Priority directions of development of economics and management: theoretical and practical aspects. Ufa, 2021. pp. 98-101.

3. Yudin D.V. Modeling of the production flow // At the crossroads of Sciences: materials of the All-Russian competition of student scientific papers (April 15 – May 28, 2022). I.A. Bunin YSU, 2022. pp. 81-87.

4. Yudin D.V., Abramov V.V. Modeling of discrete dynamics of production // XXIV All-Russian Student Scientific and Practical Conference of Nizhnevartovsk State University (April 5-6, 2022). Part 4. NVSU, 2022. pp. 615-620.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 391-394.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 391-394.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.94

АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА ДАННЫХ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Лариса Николаевна Зубкова✉
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
ZubkovaLN@yandex.ru✉

Аннотация. *В статье рассматриваются отдельные методы анализа числовых данных для создания правил баз знаний.*

Ключевые слова: *методы извлечения правил из данных, технологии анализа числовых данных.*

Conference paper

ALGORITHMS FOR DATA ANALYSIS BASED ON FUZZY LOGIC

Larisa N. Zubkova✉
Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia
ZubkovaLN@yandex.ru✉

Annotation. *The article discusses some methods of numerical data analysis for creating knowledge base rules.*

Keywords: *methods of extracting rules from data, technologies of numerical data analysis.*

1. Введение

Анализ данных сегодня является одним из активно развивающихся направлений прикладной науки, решая очень разнообразный круг задач на основе прогностической аналитики, которая, как правило, активно использует статистические методы. Но не только методы прикладной статистики находят применение в исследовательском и подтверждающем анализе данных. Все большее значение приобретают гибридные технологии, сочетающие нейросетевое моделирование, эвристические и эволюционные методы, мягкие вычисления. В статье пойдет речь о некоторых методах для извлечения нечетких продукционных правил из числовых данных. Такие продукционные правила могут быть включены в базу знаний экспертной системы.

2. Основной текст статьи

Одним из широко применяемых для анализа данных подходов является классификация образов на основе предварительной кластеризации обучающих примеров и отнесения их к заданным классам. Существенной проблемой становится определение границ между кластерами. При нечетком подходе границы между двумя соседними кластерами или классами характеризуются наложением соседних областей, в каждой из которых классифицируемый объект характеризуется своей степенью принадлежности. Такой подход позволяет представить потенциально сложное разделение признакового пространства.

Пусть известны К образов в виде *m*-мерных четких векторов вида $\boldsymbol{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}\right), k = 1,..,K$, которые относятся к *l* классам. На первом этапе производится разбиение пространства входных признаков X_1, X_2,…,X_m на области, соответствующие лингвистическим термам. Технология этой процедуры описана в [1]. Для каждой входной переменной X_i ($i=1,\dots,m$) число термов определяется содержанием задачи. Например, для классической задачи «Ирисы Фишера», в которой m=4 и входные переменные X_1 –длина чашелистика, X_2 – ширина чашелистика, X_3 –длина лепестка, X_4 –ширина лепестка в сантиметрах для каждого входа удобно взять число термов равным трем ($j=3$): A_{i1} = *малая*, A_{i2} = *средняя*, A_{i3}= *большая*, тогда пространство входных признаков разобьется на $j^m = 3^4 = 81$ область, каждая из которых может потенциально соответствовать правилу вида (1):

$$\textbf{\textit{ЕСЛИ}}\ x_1^{(k)}\textit{есть}\ A_{1j}\ \textbf{\textit{И}}\ x_2^{(k)}\textit{есть}\ A_{2j}\ \textbf{\textit{И}}\ x_3^{(k)}\textit{есть}\ A_{3j}\ \textbf{\textit{И}}\ x_4^{(k)}\textit{есть}\ A_{4j},$$
$$\textbf{\textit{ТО}}\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)},\ x_4^{(k)}\right)\ \text{принадлежит классу } C_l, \qquad (1)$$

где классы C_1, C_2, C_3 соответственно *Setosa*, *Virginica*, *Versicolor*.

Но не все потенциальные правила станут правилами базы знаний. Претендовать на попадание в базу знаний смогут только те из них, которые будут подтверждены наблюдаемыми примерами из обучающей выборки. Кроме того, из тех правил, которые сработают на обучающих данных, должны быть исключены повторяющиеся правила и противоречивые правила, то есть те, в которых одинаковые посылки и разные заключения.

Для оптимизации набора правил используют показатель степени активности правила $\tau^{(k)}$, сгенерированного *к*-ым обучающим примером. Если *к*-ый пример обучающей выборки имеет вид: $\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}, C_l^{(k)}\right), k = 1,..,K$, а $C_l^{(k)}$ - метка класса, то соответствующее ему правило будет иметь степень активности (2):

$$\tau^{(k)} = T(\mu_{A_{k1}}\left(x_1^{(k)}\right)\mu_{A_{k2}}\left(x_2^{(k)}\right)\dots\mu_{A_{km}}\left(x_m^{(k)}\right)), \qquad (2)$$

где T – оператор Т-нормы, моделирующий логический оператор «**И**», а пример $\boldsymbol{x}^{(k)}$ будет отнесен к классу C_l со степенью $\tau^{(k)}$.

Также используются рейтинги правил. Рейтинг правила определяется после «предъявления каждому правилу первоначально сгенерированной базы

правил всех обучающих примеров». Для q-го правила рейтинг можно определить по формуле (3):

$$r_q = \sum_{k=1}^{K} T(\mu_{A_1}(x_1^{(k)}), \mu_{A_2}(x_2^{(k)}), \dots, \mu_{A_m}(x_m^{(k)})). \quad (3)$$

Извлечение нечетких продукционных правил из числовых данных может быть выполнено на основе технологий гибридных нейронных нечетких сетей в задачах классификации образов или аппроксимации функций. Пример гибридного нейронечеткого классификатора представлен на рисунке 1 [2].

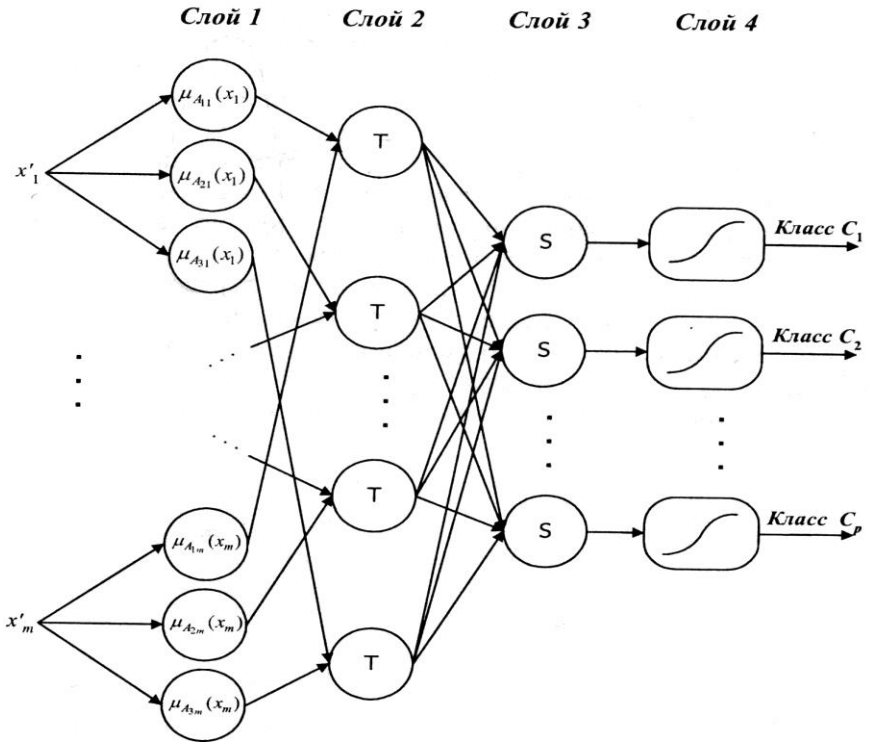


Рисунок 1. Структура гибридного нейронечеткого классификатора.

Слой 1 Его элементы формируют на выходе степени принадлежности входных переменных к определенным для них нечетким множествам A_{ij}. Значения параметров функций принадлежности $\mu_{A_{ij}}$ будут корректироваться в процессе обучения сети.

Слой 2. Каждый нейрон этого слоя является нечетким нейроном «**И**», аккумулируя входы в выход на основании операции Т-нормы.

Слой 3. Нейроны этого слоя выполняют взвешенное суммирование значений выходов элементов слоя 2.

Слой 4. Нейроны слоя формируют с использованием активационных функций выходы сети, которые трактуются как степени принадлежности объекта к соответствующему классу.

Еще одним подходом к генерации правил «ЕСЛИ-ТО» из существующих данных является использование нечеткой ассоциативной памяти для их представления. Формальным представлением правила «ЕСЛИ A_i, то B_i» становится нечеткая ассоциация (A_i ,B_i), которая соотносит l-мерное нечеткое множество B_i с n-мерным множеством A_i. Все правила (A_1 ,B_1),…, (A_n,B_n) нечеткой ассоциативной памяти выполняются параллельно. При предъявлении на вход системы нечеткого множества A' каждое правило (A_i ,B_i) отображает A' в

$B_i^{'}$, причем чем больше сходство $A^{'}$ с A_i , тем больше сходство $B_i^{'}$ с B_i . Степень сходства моделируется функцией принадлежности. Активизированные нечеткие множества $B_i^{'}$ агрегируются по правилу (4)

$$B^{'} = \sum_{i=1}^{n} w_i B_i^{'}, \quad (4)$$

где w_i - частота ассоциации, или сила ассоциации (A_i ,B_i). Нечеткий результат $B^{'}$ дефаззифицируется в числовое выходное значение, моделируемое системой нечеткой ассоциативной памяти.

3. Заключение

Используя рассмотренные методы, можно оперативно корректировать набор правил, их параметры и веса, решая задачу адаптации нечетких правил, извлеченных из данных. А этот означает возможности построения динамичных баз знаний, которые могут использоваться в экспертных системах.

Список источников

1. Рутковская, Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: Пер. с польск. И. Д. Рудинского / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский. – М.: Горячая линия – Телеком , 2004. – 452 с.

2. Борисов, В.В. Нечеткие модели и сети / В.В. Борисов, В.В. Круглов, А.С. Федулов. – М.: Горячая линия – Телеком , 2007. – 284 с.

References

1. Rutkovskaya, D. Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems: Translated from Polish by I. D. Rudinsky / D. Rutkovskaya, M. Pilinsky, L. Rutkovsky. – M.: Hotline – Telecom, 2004. – 452 p.

2. Borisov, V.V. Fuzzy models and networks / V.V. Borisov, V.V. Kruglov, A.S. Fedulov. – M.: Hotline – Telecom, 2007. – 284 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 395-400.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 395-400.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 561

ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАНИПУЛЯТОРА С ОБЪЕКТАМИ СТОЛКНОВЕНИЯ

Анастасия Сергеевна Тарицына[1]✉
[1]*Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск, Россия*
[1]*tarizina98@mail.ru*✉

Аннотация. *В работе проводится изучение поведения характеристик взаимодействия манипулятора с объектами столкновения. Эксперименты проводятся с использованием фреймворка ROS, симулятора Gazebo и ПО для манипулирования MoveIt.*

Ключевые слова: *Сенсорика, ROS, Gazebo, MoveIt.*

Conference paper

STUDYING THE BEHAVIOR OF THE INTERACTION CHARACTERISTICS OF THE MANIPULATOR WITH COLLISION OBJECTS

Anastasiya S. Taritsyna[1]✉
[1]*Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russia*
[1]*tarizina98@mail.ru*✉

Abstract. *The work studies the behavior of the interaction characteristics of the manipulator with collision objects. The experiments are carried out using the ROS framework, the Gazebo simulator and the MoveIt manipulation software.*

Keywords: *Sensory, ROS, Gazebo, MoveIt.*

1. Введение

При проведения лесовосстановительных работ необходимо знать карту местности. Для построения карты лесного участка необходимо определить где стоят препятствия и какого они типа. Можно ли препятствие сдвинуть, например, поваленное сухое дерево или неболь-

© Тарицына А.С., 2023

шой камень. Можно ли проехать сквозь препятствие, например, небольшой куст не помешает продвижению трактора. Или препятствие необходимо объехать, например, растущее дерево. Чтобы автоматизировать этот процесс можно воспользоваться автономной тележкой с закрепленым на ней манипулятором. Определять тип объекта можно, например, с помощью видеокамеры [1]. Также можно воспользоваться тактильными датчиками, например, датчиком контакта. В работе [2] датчики контакта используются для шагающего робота при преодолении и обнаружении препятствий.

Объекты разного типа при взаимодействии с манипулятором ведут себя по-разному. Например, камень можно как сдвинуть так и наклонить. Поэтому целью данной работы является изучение поведения характеристик взаимодействия манипулятора с объектами столкновения.

Возникают случаи когда нет возможности работать с реальным оборудованием. Для апробации алгоритмов и проведения экспериментов на помощь приходит моделирование. Можно создать реальный объект в цифровом виде и проводить эксперименты с ним не боясь поломки и не имея объект физически.

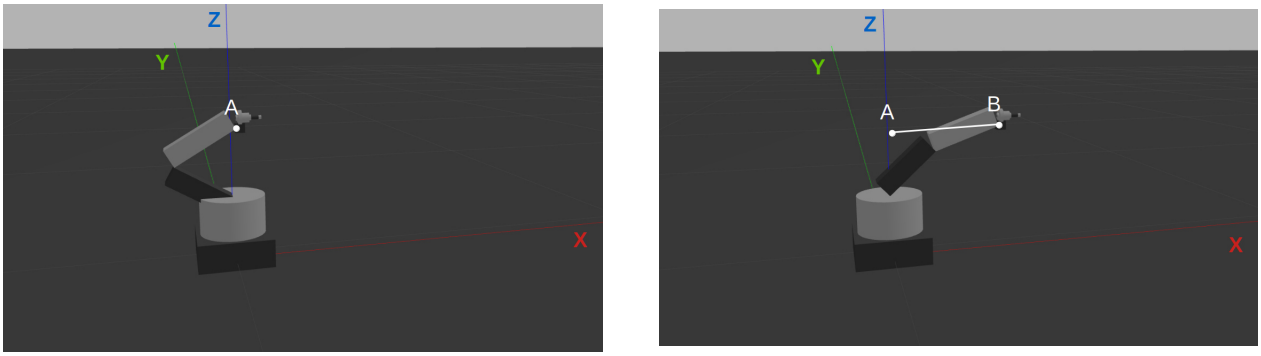
В данной работе эксперименты проводятся с использованием фреймворка ROS, симулятора Gazebo и ПО для манипулирования MoveIt.

2. Изучение поведения силы контакта и координат датчика контакта

Создана модель реального манипулятора фирмы Dobot Magician с 4 степенями свободы. К рабочему органу манипулятора прикреплен щуп. К щупу прикреплен датчик контакта.

Для осуществления движения манипулятора написана программа на языке Python с использованием интерфейса Move Group. В ходе эксперимента манипулятор перемещает щуп по горизонтали из точки A в точку B, где A(0.010, 0.000, 0.279) - начальная точка, B(0.238, 0.000, 0.279) - конечная точка (рисунок 1).

На пути манипулятора находиться объект столкновения. В качестве объекта столкновения смоделирован прямоугольный параллелепипед с массой 1 кг. Выбор необходимой массы объекта столкновения зависит от характеристик робота.



а) б)

Рисунок 1 – Перемещение модели манипулятора из точки А (а) в точку В (б) в симуляторе Gazebo.

Эксперимент проведен с тремя типами поведения объекта столкновения: "наклон-падение" (в момент столкновения объект наклоняется, а при дальнейшем продвижении манипулятора объект падает), "сдвиг-наклон" (в момент столкновения объект сдвигается вперед, а при дальнейшем продвижении манипулятора объект наклоняется), "статика" (в момент столкновения объект остается неподвижным).

Для сбора данных с датчика контакта написана программа на языке Python. С датчика снимаются такие данные как:

- Сила (Н).
- Положение контакта (по x, y, z).

Датчик предоставляет данные силы, разбитой по трем осям. Для анализа данных используется модуль сил, получаемый по формуле (1).

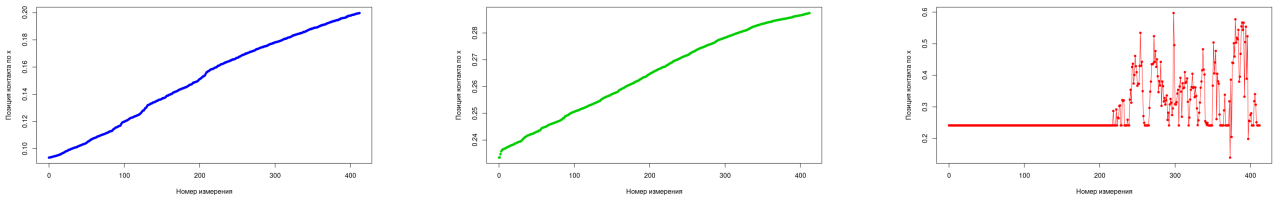
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (1)$$

Данные с датчика поступают с частотой 500 измерений в секунду. По окончанию эксперимента данные записываются в файл с расширением .xlsx.

Движение манипулятора осуществляется вдоль оси X. Т.е. по X щуп движется вперед-назад.

При типах поведения "наклон-падение" и "сдвиг-наклон" щуп продвигается вперед по X (рисунок 2а, 2б). При состоянии "статика" щуп не меняет своего положения. А после чего манипулятор ломается (рисунок 2с).

В качестве характеристик взаимодействия манипулятора с объектами столкновения рассматриваются скользящее среднее и отношения приращений. Для расчета характеристик написана программа на языке R.



а) б) с)

Рисунок 2 – Положение контакта по оси X для трех типов поведения объекта столкновения: "наклон-падение" (а) , "сдвиг-наклон" (б) и "статика" (с).

Скользящее среднее (далее - среднее) - это среднее значение определенного количества предыдущих периодов (2).

$$mean = \frac{\sum_{i=t}^{k} y_i}{n} \tag{2}$$

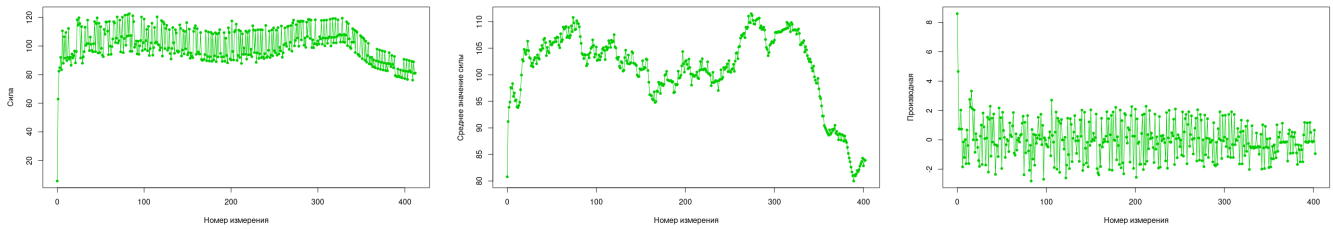
Где y_i - значения силы, n - длина окна сглаживания (количество элементов, входящих в расчет среднего). В качестве длины берутся значения 10, 20, 50 и 100 элементов. В формуле (2) значения y_t и y_k начальное и конечное значения сил соответственно. Тогда на каждой итерации получается интервал $[y_t, y_k]$, где количество элементов равно n.

Между интервалами делается шаг (количество элементов между интервалами) в 1, 5 и 10 элементов. Т.е. при шаге 5 порядковый номер сил в интервале будут меняться исходя из следующих равенств: t = t + 5, k = k + 5.

Отношение приращений (далее - скорость) считается по формуле (3). Где $\triangle y$ - прирощение функции, $\triangle x$ - прирощение аргумента.

$$v = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_k - y_t}{n} \tag{3}$$

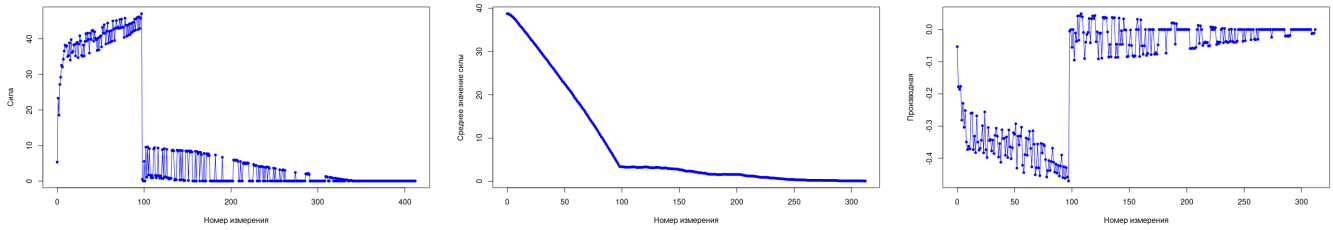
При шаге 1, n = 10 и типе "сдвиг-наклон" скорость переходит из положительных значений к нулевым (рисунок 3с).



а) б) с)

Рисунок 3 – Значения силы контакта (а), среднего значения силы контакта (б) и изменение скорости (с) при шаге 1, n = 10 и типе поведения объекта столкновения "сдвиг-наклон".

При шаге 1, n = 100 и типе "наклон-падение" скорость переходит из отрицательных значений к нулевым (рисунок 4с).



а) б) с)

Рисунок 4 – Значения силы контакта (а), среднего значения силы контакта (б) и изменение скорости (с) при шаге 1, n = 100 и типе поведения объекта столкновения "наклон-падение".

3. Заключение

В результате исследования изучено поведение характеристик взаимодействия манипулятора с объектами столкновения. В качестве характеристик рассмотрены скользящее среднее и отношение приращений.

Проведен эксперимент по перемещению щупа манипулятора по горизонтали. На пути манипулятора находился объект, который после контакта принимал одно из трех типов поведения: "наклон-падение", "сдвиг-наклон", "статика".

При поведении "наклон-падение" скорость переходит из отрицательных значений к нулевым. При поведении "сдвиг-наклон" скорость переходит из положительных значений к нулевым. При поведении "статика" скорость принимает нулевые значения.

На основе этих правил будет разработан алгоритм для определения типа препятствия в режиме реального времени.

Список источников

1. Гемуев Ш. Ш., Воротников С. А. Роботизированный комплекс сортировки твердых бытовых отходов // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. 2019. №2. С. 195-207.
2. Соколов Д. А. Методы обнаружения и преодоления препятствий для шагающих четвероногих роботов с использованием данных об окружающей среде // XI Конгресс молодых ученых. Сборник научных трудов. Том 1. 2022. С. 420-424.

References

1. Gemuev Sh. Sh., Vorotnikov S. A. Robotic complex for sorting solid household waste // Caspian Journal: management and high technologies. 2019. №2. С. 195-207. (In Russ.).
2. Sokolov D. A. Methods for detecting and overcoming obstacles for walking four-legged robots using environmental data // XI Congress of Young Scientists. Collection of scientific papers. Volume 1. 2022. С. 420-424. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 401-408.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 401-408.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.7

СИММЕТРИЧНАЯ 4-АДИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ СЕМЕЙСТВА ЧЕТВЕРТИЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Владимир Анатольевич Едемский✉
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия
vladimir.edemsky@novsu.ru✉*, https://orcid.org/0000-0003-1368-3827*

Аннотация. *Исследована симметричная 4-адическая сложность четвертичных последовательностей с периодом pq. Четвертичные последовательности получаются посредством обратного отображения Грея из пары бинарных последовательностей. Показано, что рассмотренные последовательности обадают высокой 4-адической сложностью.*

Ключевые слова: *четвертичные последовательности, циклотомия, 4-адическая сложность, символ Лежандра, гауссовы периоды.*

Финансирование: *работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00516.*

Conference paper

SYMMETRIC 4-ADIC COMPLEXITY OF QUATERNARY SEQUENCES FAMILY

Vladimir Edemskiy✉
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russia
vladimir.edemsky@novsu.ru✉*, https://orcid.org/0000-0003-1368-3827*

Abstract. *We studied the symmetric 4-adic complexity of quaternary sequences with period pq. Quaternary sequences are obtained by inverse Gray mapping from a pair of binary sequences. It is shown that the considered sequences have high 4-adic complexity.*

Keywords: *quaternaty sequences, cyclotomy, 4-adic complexy, symbol Legendre, Gauss periods.*

© Едемский В.А., 2023

Funding: *the work was supported by the Russian Science Foundation, Project № 22-21-00516.*

1. Введение

Псевдослучайные последовательности имеют широкий спектр применений. Различные регистры сдвига могут быть применены для синтеза таких последовательностей. В [1] предложен новый регистр сдвига, названный авторами регистром сдвига с обратной связью с переносом. Также в [1, 2] рассмотрена новая характеристика последовательности, её m-адическая сложность, которая определяется как длина наименьшего регистра сдвига с обратной связью с переносом, способного генерировать данную последовательность с элементами из множества $\{0, 1, , \ldots, m-1\}$, здесь m - натуральное число. Согласно [1, 2], m-адическая сложность является важной характеристикой непредсказуемости последовательности. Следовательно, её исследование, в том числе для известных последовательностей представляет интерес.

Применение математического аппарата теории чисел является одним из широко известных способов построения последовательностей и исследования их свойств, в частности, бинарных последовательностей. Обратное отображения Грея позволяет получать четвертичные последовательности из пары бинарных последовательностей. Четвертичные, наряду с бинарными, являются важным классом последовательностей. В [3, 4] исследованы свойства четвертичных последовательностей, полученных из пары бинарных последовательностей на основе обобщенных циклотомических классов Уитмена или (и) Динга-Хеллесета. В этой статье исследуем 4-адическую сложность четвертичных последовательностей с периодом pq, полученных таким же образом [4].

2. Определение последовательностей

Пусть $p > 3$ и $q > 3$ - различные простые числа и $N = pq$. Обозначим через $\mathbb{Z}_N$ кольцо классов вычетов по модулю N, а через $\mathbb{Z}_N^*$ группу его обратимых элементов. Определим $P = \{p, 2p, \ldots, (q-1)p\}$ и $Q = \{q, 2q, \ldots, (p-1)q\}$.

Пусть бинарные последовательности a, b с периодом pq определены по правилам:

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \bmod \in Q \cup \{0\}, \\ 1, & \text{если } i \bmod \in P, \\ \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i}{q}\right)\right), & \text{если } i \bmod \in \mathbb{Z}_N^*, \end{cases}$$

и

$$b_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \bmod \in Q \cup \{0\}, \\ 1, & \text{если } i \bmod \in P, \\ \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{i}{p}\right)\right), & \text{если } i \bmod \in \mathbb{Z}_N^*, \end{cases}$$

где $\left(\frac{i}{p}\right)$ - символ Лежандра. Таким образом, эти последовательности можно рассматривать соответственно как обобщенные циклотомические бинарные последовательности Уитмена и Динга - Хеллесета.

Пусть ϕ - обратное отображение Грея, то есть $\phi(0,0) = 0$, $\phi(0,1) = 1$, $\phi(1,1) = 2$ и $\phi(1,0) = 3$. Рассмотрим четвертичную последовательностей s, определенную как

$$s_i = \phi(a_i, b_i),\ i = 0, 1, \ldots, pq - 1. \tag{1}$$

Линейная сложность этой последовательности исследована в [4]. Здесь изучим её симметричную 4-адическую сложностью $\overline{\Phi}_4(s)$, которая определяется как наименьшее из 4-адической сложности последовательности $\Phi_4(s)$ и 4-адической сложности обратной последовательности [7]. Согласно [2],

$$\Phi_4(s) = \left\lfloor \log_4 \left(\frac{4^N - 1}{\text{НОД}\left(S(4), 4^N - 1\right)} + 1 \right) \right\rfloor, \tag{2}$$

где $S(x) = \sum_{i=0}^{N-1} s_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ и $\lfloor x \rfloor$ - целая часть числа x. Таким образом, для нахождения 4-адической сложности достаточно изучить наибольший общий делитель двух чисел $S(4)$ и $4^N - 1$. С этой целью в следующем разделе рассмотрим свойства обобщенных гауссовых периодов.

3. Обобщенные гауссовы периоды

Пусть g - общий примитивный корень по модулям p и q. Циклотомические классы второго порядка по модулю p определяются следующим образом: $H_j = \{g^{j+2t} \mid t = 0, 1, \ldots, (p-3)/2\},\ j = 0, 1$, аналогично введем G_0, G_1 по модулю q.

Хорошо известно, что $\mathbb{Z}_{pq} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ относительно изоморфизма $f(t) = (t \bmod p, t \bmod q)$. Пусть $F_{i,j} = f^{-1}\left(H_i \times G_j\right),\ i, j = 0, 1$. Тогда, согласно определениям последовательностей a, b и s, получаем, что

$$u_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \bmod \in Q \cup \{0\} \cup F_{0,0}, \\ 1, & \text{если } i \bmod \in F_{1,1}, \\ 2, & \text{если } i \bmod \in P \cup F_{1,0}, \\ 3, & \text{если } i \bmod \in F_{0,1}. \end{cases} \tag{3}$$

Следовательно, для вычисления НОД $(S(4), 4^N - 1)$ достаточно исследовать $\sum_{t \in F_{i,j}} 4^t$.

Обозначим через c и d целые числа такие, что $1 \equiv cp + dq \pmod{pq}$, $0 < c < q,\ 0 < d < p$. Пусть

$$\theta_j(x) = \sum_{i \in H_j} x^{dj},\ \zeta_j(x) = \sum_{i \in G_j} x^{cj},\ j = 0, 1.$$

Когда x - число, то $\theta_j(x),\ \zeta_j(x)$ называются обобщенными гауссовыми периодами. Согласно [5] , справедливы следующие сравнения:

$$(\theta_0(h) - \theta_1(h))^2 \equiv \left(\frac{-1}{p}\right) p \pmod{\frac{h^p - 1}{h - 1}}$$

$$\text{и } \theta_0(h) + \theta_1(h) \equiv -1 \pmod{\frac{h^p - 1}{h - 1}}, \quad (4)$$

где h - натуральное число, взаимно простое с p. Подобные же сравнения имеют место и для $\zeta_j(h)$ при замене p на q.

Лемма 1.

$$\sum_{l \in F_{i,j}} 4^l \equiv \theta_i(4^q)\zeta_j(4^p) \pmod{4^{pq} - 1}.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из сравнений $l \equiv ldq \pmod{p}$, $l \equiv lcp \pmod{q}$ и определения множества $F_{i,j}$.

Пусть $W_0 = F_{0,0} \cup F_{1,1},\ W_1 = F_{0,1} \cup F_{1,0}$ и $\eta_j(4) = \sum_{i \in W_j} x^i$. Свойства $\eta_j(4)$ изучены в [6], в частности, справедливы сравнения:

$$(\eta_0(4) - \eta_1(4))^2 \equiv -\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{-1}{q}\right) pq \pmod{\frac{4^{pq} - 1}{3}},$$

$$\eta_0(4) + \eta_1(4) \equiv 1 \pmod{\frac{4^{pq} - 1}{3}}. \quad (5)$$

4. 4-адическая сложность последовательности

В этом разделе завершим исследование 4-адической сложности последовательности.

Теорема 1. *Пусть последовательность s определена по* (1)*. Тогда для её 4-адической сложности справедлива следующая оценка*

$$\Phi_4(s) \geq pq - \log_4(d_1 d_2 d_3),$$

где $d_1 = НОД(4^p - 1, (q-1)/2) = 1$,

$$d_2 \leq НОД(4^q - 1, \left((3p+1)^2/4 - \left(\frac{-1}{q}\right) q(p-1)^2/4\right))$$

и

$$d_3 \le НОД((4pq \pm q \pm 1)^2/4 \pm q, \frac{3(4^{pq}-1)}{(4^p-1)(4^q-1)}).$$

Следствие 1. $\Phi_4(s) \ge pq - 1 - 4\log_4 pq$.

Доказательство. По лемме 1 и (3), получаем, что

$$U(4) \equiv 2\sum_{i\in P} 4^i + \theta_1(4^q)\zeta_1(4^p) + 2\theta_1(4^q)\zeta_0(4^p) + \\ + 3\theta_0(4^q)\zeta_1(4^p) \pmod{(4^{pq}-1)} \quad (6)$$

или

$$U(4) \equiv 2\sum_{i\in P} 4^i + \zeta_1(4^p)(\theta_0(4^q)+\theta_1(4^q)) + 2\eta_1(4) \pmod{(4^{pq}-1)}. \quad (7)$$

Так как $p > 3, q > 3$ простые числа, то

$$4^{pq} - 1 = (4^p - 1) \cdot \frac{4^q - 1}{3} \cdot \frac{3(4^{pq}-1)}{(4^p-1)(4^q-1)}$$

и НОД$(\frac{4^p-1}{3}, 4^q - 1) = 1$. Рассмотрим три случая.

1. Найдем НОД$(S(4), 4^p - 1)$. Согласно (6), имеем, что

$$U(4) \equiv 2(q-1) + 3(\theta_1(4^q) + \theta_0(4^q))(q-1) \pmod{(4^p-1)/3}$$

или, по (4) имеем, что

$$U(4) \equiv (q-1)/2 \pmod{4^p - 1}.$$

Следовательно, НОД$(S(4), 4^p - 1) =$ НОД$(4^p - 1, (q-1)/2)$.

2. Рассмотрим НОД$(S(4), \frac{4^q-1}{3})$. В этом случае

$$U(4) \equiv -2 + (4\zeta_1(4^p) + \zeta_0(4^p))(p-1)/2 \pmod{(4^q-1)/3}$$

или, в силу сравнения (4),

$$U(4) \equiv -(3p+1)/2 + (\zeta_1(4^p) - \zeta_0(4^p))(p-1)/2 \pmod{(4^q-1)/3}.$$

Значит, если $d =$ НОД$(S(4), (4^q-1)/3)$, то

$$(3p+1)^2/4 \equiv (\zeta_1(4^p) - \zeta_0(4^p))^2(p-1)^2/4 \pmod{d}$$

или, в силу сравнений (4),

$$(3p+1)^2/4 \equiv \left(\frac{-1}{q}\right) q(p-1)^2/4 \pmod{d}.$$

Таким образом, $d \leq$ НОД$((4^q-1)/3, (3p+1)^2/4 - \left(\frac{-1}{q}\right) q(p-1)^2/4)$.

3. Исследуем НОД$(S(4), \frac{3(4^{pq}-1)}{(4^p-1)(4^q-1)})$. Пусть $r = \frac{3(4^{pq}-1)}{(4^p-1)(4^q-1)}$. Тогда

$$U(4) \equiv -2 - \zeta_1(4^p) + 2\eta_1(4^q) \pmod{r}$$

или

$$U(4) \equiv -\zeta_0(4^p) + \eta_1(4) - \eta_0(4) \pmod{r}.$$

Пусть d делит НОД$(S(4), r)$. Тогда

$$\zeta_0^2(4^p) \equiv (\eta_1(4) - \eta_0(4))^2 \pmod{d}.$$

Пусть $q \equiv 1 \pmod 4$. Тогда, воспользовавшись (4) и (5) , получаем, что

$$-\zeta_0(4^p) + (q-1)/4 \equiv -pq \pmod{d}$$

или

$$\zeta_0(4^p) - \zeta_1(4^p) \equiv (4pq+q+1)/2 \pmod{d}$$

Значит

$$(\zeta_0(4^p) - \zeta_1(4^p))^2 \equiv (4pq+q+1)^2/4 \pmod{d}$$

или $q \equiv (4pq+q+1)^2/4 \pmod d$. Следовательно,

$$d \leq \text{НОД}((4pq+q+1)^2/4 - q, r).$$

Случай, когда $q \equiv 3 \pmod 4$ исследуется подобным же образом. Здесь

$$d \leq \text{НОД}\left((4pq-q\pm 1)^2/4 \pm q, \frac{3(4^{pq}-1)}{(4^p-1)(4^q-1)}\right)$$

в зависимости от вычета p по модулю 4. Применение формулы (2) завершает доказательство теоремы 1.

Рассмотрим теперь симметричную сложность. Пусть $\tilde{s} = (s_{pq-1}, s_{pq-2}, \cdot, s_0)$ - последовательность, обратная к s.

Теорема 2. *Пусть последовательность s определена по* (1)*. Тогда*

$$\overline{\Phi}(s) = \Phi_4(s) = \Phi_4(\tilde{s}).$$

Доказательство. Если $\tilde{S}(x)$ - образующий многочлен $\tilde{s}$, то

$$2\tilde{S}(4) \equiv \sum_{i=0}^{pq-1} s_{-i}4^i \pmod{4^{pq}-1}.$$

Применяя тот же самый метод, что при доказательстве теоремы 1, получаем утверждение этой теоремы.

5. Заключение

В работе исследована симметричная 4-адическая сложность семейства четвертичных последовательностей с периодом pq. Рассмотренные последовательности получены из пары бинарных обобщенных циклотомических последовательностей посредством обратного отображения Грея. Показано, что исследованные последовательности обладают высокой симетричной 4-адической сложностью, достаточной для отражения атак посредством алгоритма рациональной аппроксимации.

Список источников

1. Klapper A., Goresky M. Feedback shift registers, 2-adic span, and combiners with memory// Journal of Cryptology. 1997. Vol. 10. P. 111-147.
2. Goresky M., Klapper A. Algebraic Shift Register Sequences. Cambridge University Press. 2012.
3. Zhang C., Jing X., Xu Z. The linear complexity and 4-adic complexity of quaternary sequences with period pq// J. Appl. Math. Comput. 2023. V. 69. P. 2003–2017.
4. Ma J., Zhao W., Jia Y., Jiang H. New Generalized Cyclotomic Quaternary Sequences with Large Linear Complexity and a Product of Two Primes Period// Information. 2021.V. 12(5). URL: https://doi.org/10.3390/info12050193
5. Edemskiy, V., Wu, C.: Symmetric 2-Adic Complexity of Ding-Helleseth Generalized Cyclotomic Sequences of Period pq. Information Security and Cryptology// Lecture Notes in Computer Science. 2021. Vol. 12612. P. 318-327.
6. Edemskiy V.A., Garbar S.V. Notes about symmetric m-adic complexity of generalized cyclotomic sequences of order two with period pq//J. Phys.: Conf. Ser. Vol. 2052 012007. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2052/1/012007/pdf
7. Hu H., Feng D. On the 2-adic complexity and the k-error 2-adic complexity of periodic binary sequences// IEEE Trans. Inf. Theory. 2008. Vol.54, no 2.P. 874-883.

References

1. Klapper A., Goresky M. Feedback shift registers, 2-adic span, and combiners with memory// Journal of Cryptology. 1997. Vol. 10. P. 111-147.

2. Goresky M., Klapper A. Algebraic Shift Register Sequences. Cambridge University Press. 2012.
3. Zhang C., Jing X., Xu Z. The linear complexity and 4-adic complexity of quaternary sequences with period pq// J. Appl. Math. Comput. 2023. V. 69. P. 2003–2017.
4. Ma J., Zhao W., Jia Y., Jiang H. New Generalized Cyclotomic Quaternary Sequences with Large Linear Complexity and a Product of Two Primes Period// Information. 2021.V. 12(5). URL: https://doi.org/10.3390/info12050193
5. Edemskiy, V., Wu, C.: Symmetric 2-Adic Complexity of Ding-Helleseth Generalized Cyclotomic Sequences of Period pq. Information Security and Cryptology// Lecture Notes in Computer Science. 2021. Vol. 12612. P. 318-327.
6. Edemskiy V.A., Garbar S.V. Notes about symmetric m-adic complexity of generalized cyclotomic sequences of order two with period pq//J. Phys.: Conf. Ser. Vol. 2052 012007. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2052/1/012007/pdf
7. Hu H., Feng D. On the 2-adic complexity and the k-error 2-adic complexity of periodic binary sequences// IEEE Trans. Inf. Theory. 2008. Vol.54, no 2.P. 874-883.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 409-415.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 409-415.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.424 + 338.24

МЕХАНИЗМЫ ОБМЕНА ДАННЫМИ МЕЖДУ КОНФИГУРАЦИЯМИ 1С И СТОРОННИМИ РЕСУРСАМИ

Дмитрий Васильевич Корниенко[1]✉, Светлана Викторовна Мишина[2]
[1,2]Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина, Елец, Россия
[1]dmkornienko@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-3115-194X
[2]svmishina2017@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8187-9800

Аннотация. *Статья посвящена описанию механизмов обмена данными между конфигурациями, построенными на базе платформы 1С: Предприятие и другими программными продуктами. Данные механизмы играю значимую роль для организаций, в которых функционируют одновременно несколько информационных систем, состоящих из отдельных баз данных и имеющих территориально распределенную структуру. В статье приводится классификация методов обмена и демонстрируется способ использования REST интерфейса.*

Ключевые слова: *обмен данными, платформа 1С: Предприятие, интеграция, REST интерфейс.*

Conference paper

MECHANISMS FOR DATA EXCHANGE BETWEEN 1C CONFIGURATIONS AND THIRD PARTY RESOURCES

Dmitriy V. Kornienko[1]✉, Svetlana V. Mishina[2]
[1,2]Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
[1]dmkornienko@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-3115-194X
[2]svmishina2017@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8187-9800

Abstract. *The article is devoted to a description of the mechanisms for exchanging data between configurations built on the basis of the 1C: Enterprise platform and other software products. These mechanisms play a significant role for organizations in which several information systems operate simultaneously, consisting of separate databases and having a geographically distributed structure. The article provides a classification of exchange methods and demonstrates how to use the REST interface.*

© Корниенко Д.В., Мишина С.В., 2023

Keywords: *data exchange, 1C: Enterprise platform, integration, REST interface.*

1. Введение

Эффективная работа в компании невозможна без организации обмена данными между разными информационными системами. Задачи, связанные с обменом данных, могут быть разными. Для решения одного спектра задач достаточно простой интеграции – например, для передачи в банк списка данных сотрудников для оформления зарплатных карт. Для других задач необходим полностью автоматизированный обмен данными, с возможностью обращения к бизнес-процессам внешней системы. Есть задачи, которые носят специализированный технический характер. К ним можно отнести задачи интеграции с внешним оборудованием (например, торговым оборудованием, мобильными сканерами и т.д.) или с унаследованными или узкоспециализированными системами (например, с системами распознавания RFID-меток). В связи с этим, крайне важно, чтобы разработчик мог для каждой конкретной задачи выбрать наиболее подходящий механизм интеграции. Реализации методик интеграции посвящено достаточное количество научных статей. Приведем некоторые из них.

Описанию способов интеграции платформы 1С: Предприятие и мессенджера Telegram была посвящена статья Моисеева А.В. [6].

Особенностям интеграции конфигурации 1С: ERP со сторонними приложениями посвящена статья Гуровой К.С. [3].

Вопросами использования прикладного объекта конфигурации - внешние источники данных с целью интеграции 1С с СУБД Microsoft SQL Server занимался Анисимов А.Е. и отразил полученный результат в работе [2].

Возможности интеграции программы «1С: Управление нашей фирмой» с сервисом ЮКасса в области ведения и учета платежных операций были рассмотрены в статье Мукайдех Е.А. [7].

В данной статье речь пойдет об общих принципах обмена данными между конфигурациями, построенными на базе платформы 1С: Предприятие, и сторонними программными продуктами.

2. Основной текст статьи

Система 1С предоставляет возможность для интеграции практически с любыми внешними программами и оборудованием на основе общепризнанных открытых стандартов и протоколов передачи данных.

С ее помощью можно организовать обмен файлами различных форматов, осуществлять доступ ко всем объектам системы из внешних приложений, поддерживать различные протоколы обмена и стандарты взаимодействия с другими подсистемами (XML, JSON и т. п.), работать с Интернетом и электронной почтой. Данный подход был реализован автором Ананьевым Л. С. [1].

Платформа может поддерживать в прикладных решениях возможность создания web- и HTTP-сервисов и работу с внешними web- и HTTP-сервисами. Поддерживается доступ внешних систем к данным приложений 1С по

протоколу OData. Применение данного механизма описано в работе Кедрина В. С. [5].

Конфигурации 1С могут интегрироваться с различным оборудованием, в том числе торговым и складским, такими как терминалы сбора данных, терминалы обслуживания пластиковых карт и другие.

Механизм РИБ (распределенных информационных баз) позволяет быстро создавать территориально распределенные системы на базе платформы 1С.

Универсальный механизм обмена данными позволяет организовать взаимодействие с различными информационными системами, в том числе реализованными не на базе платформы 1С.

Например, в работе Ивановой Н. А. [4] продемонстрированы основные принципы работы универсального обмена данными в формате XML. В статье была реализована модель синхронного обмена данными в распределенной информационной базе организации на платформе 1С: Предприятие. Автор показал, что универсальный механизм обмена данными позволяет использовать не только распределенные системы на основе 1С: Предприятие, но и информационные системы, работающие на других платформах.

Таким образом, можно выделить три основных подхода к реализации интеграции, каждый из которых может быть применен к решению конкретной задачи.

Первый подход: реализация на основе механизмов интеграции, предоставляемых платформой, своего собственного специализированного API на стороне приложения 1С (например, набора Web- или HTTP-сервисов, которые будут вызывать сторонние приложения для обмена данными с приложением 1С). Плюс этого подхода – устойчивость API к изменению реализации на стороне приложения 1С. Особенность подхода - требуется менять исходный код типового решения 1С, что может потенциально потребовать усилий при слиянии исходных кодов при переходе на новую версию конфигурации. В этом случае может прийти на помощь новая прогрессивная функциональность - расширения конфигурации. Расширения - это, по сути, механизм плагинов, который позволяет создавать дополнения прикладных решений, не меняя самих прикладных решений. Вынос интеграционного API в расширение конфигурации позволит избежать сложностей при слиянии конфигураций при переходе на новую версию типового решения.

Второй подход: использование механизмов интеграции платформы, которые предоставляют доступ снаружи к объектной модели приложения и не требуют доработки приложения или создания расширения. Плюс такого подхода – не нужно менять приложение 1С. Минус – если приложение 1С было доработано, то могут потребоваться доработки в интегрируемом приложении. Пример такого подхода – использование для интеграции протокола OData, реализованного на стороне платформы 1С.

Третий подход: использование готовых прикладных протоколов, реализованных в типовых решениях 1С. Многие типовые решения от 1С и партнеров реализуют на основе механизмов интеграции, предоставляемых

платформой, свои собственные прикладные протоколы, ориентированные на конкретные задачи. При использовании этих механизмов не требуется написание кода на стороне приложения 1С, т.к. мы пользуемся штатными возможностями прикладного решения. На стороне приложения 1С нам нужно лишь выполнить определенные настройки.

Опишем возможности работы с REST. Платформа может автоматически формировать REST интерфейс для всего прикладного решения. После того, как прикладное решение опубликовано на веб-сервере, сторонние системы могут обращаться к нему через REST интерфейс с помощью HTTP запросов. Благодаря универсальности и кроссплатформенности автоматически генерируемый REST интерфейс является основным инструментом для интеграции со сторонними системами.

REST интерфейс позволяет читать данные 1С: Предприятие, изменять их, создавать новые объекты данных и удалять существующие.

Автоматический REST интерфейс может использоваться для таких задач как:

- интеграция прикладного решения с интернет-сайтами и интернет-магазинами;
- реализация сторонними средствами дополнительной функциональности прикладного решения без изменения его конфигурации;
- загрузка данных в прикладное решение и выгрузка данных из него;
- интеграция прикладного решения с корпоративными системами, возможно даже без дополнительного программирования.

Типичные операции, выполняемые через REST интерфейс это:

- получение списка документов, справочников, записей регистра сведений и т.п., возможно с фильтром;
- получение данных элемента справочника, документа (по ссылке), данных записи независимого регистра сведений (по ключу), данных набора записей подчинённого регистра (по регистратору);
- редактирование данных одного элемента справочника, документа и другого ссылочного объекта;
- создание нового элемента справочника, документа, набора записей;
- проведение одного документа, старт бизнес-процесса.

В качестве протокола доступа платформа использует протокол OData версии 3.0. Это открытый веб-протокол для запроса и обновления данных. Он позволяет оперировать данными, используя в качестве запросов HTTP-команды.

Получать ответы можно в формате Atom/XML или JSON.

В платформе реализована только серверная часть REST сервисов. То есть прикладное решение может автоматически поставлять свою функциональность через REST сервисы. Для взаимодействия со сторонними REST сервисами из 1С: Предприятие можно использовать имеющиеся в платформе средства работы с HTTP.

Основная задача REST интерфейса прикладных решений заключается в интеграции со сторонними системами. И тут проблемы не возникает, ведь клиенты OData существует практически для всех значимых платформ:

- мобильные: iOS, Windows Phone, Android;
- мерверные/настольные: .NET, Java, PHP, Objective-C, Ruby, JavaScript;
- поддержка в системах управления содержимым (CMS): Drupal, Joomla.

Пример получения содержимого справочника «Номенклатура» (рис. 1):

```
<entry>
	<id>http://server/Config/odata/standard.odata/Catalog_Номенклатура(guid'
35d1f6e4-289b-11e6-8ba4-e03f49b16074')</id>
	<category term="StandardODATA.Catalog_Номенклатура"
scheme="http://schemas.microsoft.com/ado/2007/08/dataservices/scheme"/>
	<title type="text"/>
	<updated>2016-06-06T16:42:17</updated>
	<author/>
	<summary/>
	<link rel="edit" href="Catalog_Номенклатура(guid'35d1f6e4-289b-11e6-
8ba4-e03f49b16074')" title="edit-link"/>
	<content type="application/xml">
		<m:properties
xmlns:d="http://schemas.microsoft.com/ado/2007/08/dataservices"
xmlns:m="http://schemas.microsoft.com/ado/2007/08/dataservices/metadata">
			<d:Ref_Key>35d1f6e4-289b-11e6-8ba4-
e03f49b16074</d:Ref_Key>
			<d:DataVersion>AAAAAgAAAAA=</d:DataVersion>
			<d:DeletionMark>false</d:DeletionMark>
			<d:Code>000000001</d:Code>
			<d:Description>Кондиционер Mitsubishi</d:Description>
			<d:Описание>Мощность 2,5 кВт, режимы работы:
тепло/холод</d:Описание>
		</m:properties>
	</content>
</entry>
<entry>
	<id>http://server/Config/odata/standard.odata/Catalog_Номенклатура(guid'
35d1f6e5-289b-11e6-8ba4-e03f49b16074')</id>
	<category term="StandardODATA.Catalog_Номенклатура"
scheme="http://schemas.microsoft.com/ado/2007/08/dataservices/scheme"/>
```

Рисунок 1. Содержимое каталога «Номенклатура» в формате XML.

Список источников

1. Ананьев Л. С. Использование внешней обработки «Выгрузка и загрузка данных XML» при внедрении «1С: Университет ПРОФ» в Иркутском ГАУ / Л. С. Ананьев, Н. И. Федурина, А. О. Замараев // Развитие агропромышленного комплекса в условиях становления цифровой экономики в России и за рубежом: Материалы всероссийской (национальной) научно-практической конференции с международным участием, посвященной 85-летию со дня

рождения Почетного работника высшего профессионального образования РФ, доктора экономических наук Винокурова Геннадия Михайловича, Иркутск, 21 октября 2021 года. – п. Молодежный: Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского, 2021. С. 15-20.

2. Анисимов А. Ю. Интеграция 1С и MS SQL с использованием внешних источников данных / А. Ю. Анисимов // Студенческая наука и XXI век. 2022. Т. 19, № 1-1(22). С. 84-87.

3. Гурова К. С. Особенности интеграции 1С:ERP со сторонними приложениями / К. С. Гурова // Цифровизация деятельности предприятия в современных экономических условиях: СБОРНИК СТАТЕЙ, Брянск, 10 ноября 2021 года. – Брянск: Брянский государственный технический университет, 2021. С. 46-53.

4. Иванова Н. А. Моделирование синхронного обмена данных в распределенной информационной системе организации / Н. А. Иванова, О. В. Кубанских, С. Г. Нечаев // Современные наукоемкие технологии. 2020. № 5. С. 39-43.

5. Кедрин В. С. Адаптивные технологии быстрого проектирования веб-интерфейсов корпоративных образовательных систем в рамках платформы "1С: Предприятие 8.3" / В. С. Кедрин, А. В. Родюков // Информатика и образование. 2022. Т. 37, № 5. С. 5-14.

6. Моисеев А. В. Анализ способов интеграции платформы 1С: Предприятие и мессенджера Telegram / А. В. Моисеев // Математическое и программное обеспечение вычислительных систем: Межвузовский сборник научных трудов / Под редакцией Г.В. Овечкина. – Рязань: Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина. 2023. С. 54-57.

7. Мукайдех Е.А. Интеграция программы "1С: Управление нашей фирмой" с сервисом ЮКасса: функциональные возможности ведения платежных операций / Е. А. Мукайдех // Вестник образовательного консорциума Среднерусский университет. Информационные технологии. 2021. № 1(17). С. 47-53.

References

1. Ananyev L. S. Using external processing “Uploading and loading XML data” when implementing “1C: PROF University” at Irkutsk State Agrarian University / L. S. Ananyev, N. I. Fedurina, A. O. Zamaraev // Development of agro-industrial complex in the conditions of the formation of the digital economy in Russia and abroad: Materials of the All-Russian (national) scientific and practical conference with international participation, dedicated to the 85th anniversary of the birth of the Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, Doctor of Economics Gennady Mikhailovich Vinokurov, Irkutsk, October 21 2021. – p. Molodezhny: Irkutsk State Agrarian University named after. A.A. Ezhevsky, 2021. pp. 15-20.

2. Anisimov A. Yu. Integration of 1C and MS SQL using external data sources/ A. Yu. Anisimov // Student science and the XXI century. 2022. T. 19, No. 1-1(22). pp. 84-87.

3. Gurova K. S. Features of integration of 1C: ERP with third-party applications / K. S. Gurova // Digitalization of enterprise activities in modern economic conditions: COLLECTION OF ARTICLES, Bryansk, November 10, 2021. – Bryansk: Bryansk State Technical University, 2021. pp. 46-53.

4. Ivanova N. A. Modeling of synchronous data exchange in a distributed information system of an organization / N. A. Ivanova, O. V. Kubanskikh, S. G. Nechaev // Modern science-intensive technologies. 2020. No. 5. pp. 39-43.

5. Kedrin V. S. Adaptive technologies for the rapid design of web interfaces of corporate educational systems within the framework of the 1C: Enterprise 8.3 platform / V. S. Kedrin, A. V. Rodyukov // Informatics and Education. 2022. T. 37, No. 5. P. 5-14.

6. Moiseev A. V. Analysis of methods for integrating the 1C: Enterprise platform and the Telegram messenger / A.V. Moiseev // Mathematical and software for computer systems: Interuniversity collection of scientific papers / Edited by G.V. Ovechkin. – Ryazan: Ryazan State Radio Engineering University named after. V.F. Utkina. 2023. pp. 54-57.

7. Mukaidekh E. A. Integration of the program “1C: Managing our company” with the YuKassa service: functionality for conducting payment transactions / E. A. Mukaidekh // Bulletin of the educational consortium Central Russian University. Information Technology. 2021. No. 1(17). pp. 47-53.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 416-426.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 416-426.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.056

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ЗАЩИТЫ ОТ АТАК СОЦИАЛЬНОЙ ИНЖЕНЕРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕТЕКСТИНГА

Валерий Константинович Маркелов[1]✉, Александр Николаевич Привалов[2]
[1,2]Ивановский государственный университет, Шуйский филиал, Шуя, Россия
[1]v.a.l.e.m.a.r.k@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-4361-8930
[2]privalov.61@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-3311-0751

Аннотация. *В статье обосновывается актуальность проблемы защищенности пользователей социальных сетей от атак социальной инженерии с использованием претекстинга. В частности, под претекстингом понимается метод социальной инженерии, при котором злоумышленник создает ложную историю или предлог для получения конфиденциальной информации от цели. Приводится анализ диссертационных исследований и статей в области информационной безопасности пользователей социальных сетей. Обобщаются существующие методы защиты от атак социальной инженерии с использованием претекстинга.*

Ключевые слова: *информационная безопасность, социальная инженерия, социальные сети, претекстинг.*

Conference paper

NALYSING METHODS OF PROTECTION AGAINST SOCIAL ENGINEERING ATTACKS USING PRETEXTING

Valery K. Markelov[1]✉, Aleksandr N. Privalov[2]
[1,2]Shuya Branch of Ivanovo State University, Shuya, Russia
[1]v.a.l.e.m.a.r.k@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-4361-8930
[2]privalov.61@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-3311-0751

Abstract. *The article substantiates the relevance of the problem of protecting social network users from social engineering attacks using pretexting. In particular, pretexting is understood as a method of social engineering, in which an attacker creates a false story or pretext to obtain confidential information from the target. Dissertation research and articles in the field of information security of social network users are analyzed. Existing methods of defense against social engineering attacks using pretexting are summarized.*

Keywords: *information security, social engineering, social networks, pretexting.*

© Маркелов В.К., Привалов А.Н., 2023

1. Введение

В связи с переходом Российской Федерации от индустриального к постиндустриальному, информационному обществу, в современную эпоху стремительного роста информационных систем, конвергенции компьютерных и телекоммуникационных сетей возрастает потребность в эффективных методах и средствах защиты информации.

В нашей стране реализуется программа цифровой экономики [8], в которой отмечается, что информационная безопасность является одним из пяти базовых направлений развития цифровой экономики в Российской Федерации до 2024 года. При этом в качестве одной из задач данного направления является защита прав, свобод и законных интересов личности в условиях цифровой экономики. Для этого были законодательно определены права и обязанности участников информационного взаимодействия при обработке персональных данных, больших пользовательских данных, в том числе в социальных сетях, установлена ответственность за надлежащую обработку и безопасность таких данных; обеспечен контроль обработки и доступа к персональным данным, большим пользовательским данным, в том числе в социальных сетях.

Следовательно, проблема защищенности пользователей социальных сетей от атак социальной инженерии является актуальной проблемой, для решения которой необходимо разработать комплекс мер по противодействию данным угрозам.

2. Основной текст статьи

В современном информационном обществе социальные сети являются одним из основных средств для коммуникации и обмена информацией в Интернете. Согласно отчету «Digital 2023: The Russian Federation» аналитической платформы DataReportal, «по состоянию на январь 2023 года в Российской Федерации насчитывается 106 миллионов пользователей социальных сетей, что составляет 73,3% от общей численности населения страны» [16].

Результаты самооценки опроса, проводимого в июле 2023 года, Всероссийским центром изучения общественного мнения (ВЦИОМ), в котором принимали участие 1600 россиян в возрасте от 18 лет, показывают, что «86% россиян, пользующихся хотя бы одной социальной сетью или мессенджером (приложением для передачи сообщений или звонков) проводят в них время практически ежедневно» [11]. «В частности, среди молодежи 18-24 лет доля ежедневных пользователей составляет 92%, а среди 25-34 лет – 94%, при этом регулярные пользователи социальных сетей и мессенджеров с коммуникационным функционалом (ВКонтакте, Одноклассники и др.) в среднем тратят на них 272 минуты или 4,5 часа в день» [11].

Согласно Доктрине информационной безопасности Российской Федерации одной из основных информационных угроз является «возрастание масштабов компьютерной преступности, при этом методы, способы и средства совершения таких преступлений становятся все изощреннее» [13]. В качестве

одного из видов преступлений в сфере компьютерной преступности можно выделить мошенничество с использованием социальных сетей.

С юридической точки зрения, в соответствии с Уголовным кодексом Российской Федерации, под мошенничеством понимается «хищение чужого имущества или приобретение права на чужое имущество путем обмана или злоупотребления доверием (ст. 159 УК РФ)» [12]. При этом одним из видов мошенничества является мошенничество в сфере компьютерной информации, «то есть хищение чужого имущества или приобретение права на чужое имущество путем ввода, удаления, блокирования, модификации компьютерной информации либо иного вмешательства в функционирование средств хранения, обработки или передачи компьютерной информации или информационно-телекоммуникационных сетей (ст. 159.6 УК РФ)» [12]. Частным случаем такого мошенничества является мошенничество в сети Интернет.

На сегодняшний день мошенничество в сети Интернет является распространенным преступлением. Краткая характеристика состояния преступности в Российской Федерации за январь – август 2023 года показывает, что «сохраняется тенденция к увеличению количества – на 28,7% – противоправных деяний в сфере информационно-телекоммуникационных технологий, их удельный вес в числе всех преступных посягательств возрос до 32,9%, а по тяжким и особо тяжким – до 56,4%, при этом больше совершено дистанционных мошенничеств и краж» [4].

Мошенничество в сети Интернет, в том числе и в социальных сетях, осуществляется при помощи различных методов социальной инженерии, одним из которых является метод претекстинга. «Претекстинг – это метод социальной инженерии, при котором злоумышленник создает ложную историю или предлог для получения конфиденциальной информации от цели» [9, с. 27].

Следует отметить, что атаки с использованием методов социальной инженерии являются очень эффективными для злоумышленников. Согласно отчёту Verizon 2023 Data Breach Investigations Report [17], представленного компанией Verizon Business, «атаки типа «Business email compromise» («компрометация корпоративной электронной почты» – один из типов атак с использованием претекстинга) в 2023 году представляют собой более 50% всех атак с использованием методов социальной инженерии». «Анализ разновидностей действий в атаках с использованием методов социальной инженерии (по состоянию на 2023 год) показывает, что претекстинг (Pretexting) более распространен чем фишинг (Phishing)» [17, с. 32].

Из отчета RTM Group (группа экспертных и юридических компаний, специализирующихся на правовых и технических вопросах в области информационных технологий и информационной безопасности, первый на российском рынке исполнитель судебных нормативно-технических экспертиз по вопросам информационных технологий и информационной безопасности), следует, что «сумма ущерба от действий телефонных и интернет-мошенников превысила 150 миллиардов рублей в 2021 году» [6, с. 2]. В отчете также отмечается, что одними из самых распространенных способов совершения хищения при помощи интернет-технологий являются: «дистанционное

подписание фиктивного договора (для обмана используется следующий сценарий: посредством социальных сетей и мессенджеров запрашиваются необходимые данные, составляется и подписывается фиктивный договор), инвестиции в фейковые «биржи» (сценарий: обман в виде просьбы перевести «брокеру» вступительный взнос за инвестиционную деятельность), проведение обманных акций и розыгрышей призов» [6, с. 9]. В частности, «наиболее «популярными» сайтами для мошенников являются социальная сеть ВКонтакте и мессенджер Telegram» [6, с. 10]. При этом в отчете RTM Group отмечается, что чаще всего жертвы действуют добровольно, будучи обманутыми злоумышленниками.

Претекстинг обычно требует от злоумышленника предварительной подготовки, для этого ему требуются сведения о персональных данных жертвы, личном окружении, предпочтениях, месте работы и учебы. Данную информацию можно получить в Интернете в процессе изучения профилей жертвы в социальных сетях, а также при помощи специализированного программного обеспечения, ориентированного на сбор личной и конфиденциальной информации, находящейся в Интернете. В свою очередь, социальные сети являются самым легким способом получить необходимую информацию, поскольку она является общедоступной: любой человек может зайти в социальную сеть и при наличии уязвимостей в настройках конфиденциальности профиля посмотреть дату рождения, профили родственников в социальной сети, а также личные фотографии потенциальной жертвы.

В результате анализа полученных сведений о жертве, злоумышленник может представиться родственником, другом, коллегой по работе, сотрудником банка, в котором у жертвы есть счет, сотрудником правоохранительных органов и т.д. При этом злоумышленник может назвать фамилию, имя, отчество жертвы, может быть осведомлен о ее родственных и дружеских связях, что выступает маркером установления идентичности «свой – чужой» и служит налаживанию доверительного психологического контакта.

Таким образом, высокая популярность социальных сетей и увеличение количества преступлений в сети Интернет, в частности, с применением методов претекстинга, обуславливают необходимость повышения уровня защищенности пользователей от таких атак с целью совершенствования информационной безопасности в социальных сетях.

Проблемы информационной безопасности пользователей в социальных сетях подробно рассматривались авторами диссертационных исследований.

В диссертации «Методы прогнозирования распространения и защиты от информационных угроз в социальных сетях на основе случайных ветвящихся процессов» [14] Фальконе Я.И. рассматривает «проблему повышения эффективности информационной безопасности пользователей социальных сетей на основе анализа степени распространения деструктивных данных в социальных сетях и реконфигурирования информационных потоков» [14, с. 5]. При этом автор диссертационного исследования предлагает «методы прогнозирования распространения и защиты от информационных угроз, которые включают в себя модели распространения деструктивных данных на основе

случайных ветвящихся процессов и реконфигурации информационных потоков» [14, с. 6].

Ле Суан Куен в своей диссертации «Управление конфиденциальностью пользователя в социальных сетях» [5] акцентирует внимание на «угрозах конфиденциальности пользователей социальных сетей и предлагает методы управления конфиденциальностью в социальных сетях на основе протоколов, сочетающих автоморфную подпись и систему доказательств с нулевым разглашением» [5, с. 4]. В частности, для этого автор предлагает: «новые алгоритмы для сочетания автоморфной подписи на вектор сообщений и системы доказательства с нулевым разглашением, новые протоколы для сохранения конфиденциальности пользователя в социальных сетях для различных процедур (регистрация, непрямая регистрация, загрузка данных из профиля пользователя, публикация сообщения в профиле пользователя, получение учетных данных от пользователя, доступ к сервисам социальной сети); модель процесса функционирования системы защиты конфиденциальности пользователя в социальных сетях в виде сети массового обслуживания и алгоритм имитационного моделирования, которые отражают реальные процессы аутентификации пользователя; алгоритм нахождения оптимальных параметров протоколов защиты конфиденциальности пользователя» [5, с. 5].

Проблема защищенности пользователей от вредоносной информации в социальных сетях исследовалась в диссертационном исследовании Витковой Л.А. «Модели, алгоритмы и методика противодействия вредоносной информации в социальных сетях» [1]. Автор утверждает, что «основная сложность противодействия вредоносной информации в социальных сетях следует из современных тенденций развития информационной сферы, а именно увеличения объема сообщений, содержащих вредоносную информацию; скорости распространения вредоносной информации; скорости тиражирования сообщений; скорости появления новых источников распространения информации в социальных сетях; количества способов привлечения внимания аудитории; уровня гетерогенности данных, что обуславливает необходимость повышения эффективности противодействия вредоносной информации в социальных сетях, в том числе за счет оперативности, обоснованности и ресурсопотребления» [1, с. 5].

Для повышения эффективности противодействия вредоносной информации в социальных сетях автор предлагает: «комплекс моделей, который описывает социальную сеть, источник и вредоносную информацию, которая основана на теории множеств и состоит из взаимосвязанных объектов и признаков вредоносной информации, вместе формирующих вредоносно-информационные объекты; комплекс алгоритмов анализа источников и ранжирования контрмер, который учитывает связи и зависимые атрибуты объектов в социальной сети, потенциал источника, количество просмотров сообщения с вредоносной информацией, количество друзей и подписчиков источника; методика противодействия вредоносной информации, которая ориентирована на автоматический и автоматизированный выбор объектов воздействия и мер противодействия вредоносной информации из списка

ранжированных контрмер; архитектура и программные прототипы компоненты системы противодействия вредоносной информации, которая содержит оригинальные компоненты анализа и оценки источника вредоносной информации, базу данных с информацией о мерах противодействия вредоносной информации в социальных сетях, а также информацию об агентах реализации, через которые контрмеры будут реализованы, что позволяет архитектуре формировать наборы исходных данных для исследований и разработок в области противодействия вредоносной информации» [1, с. 7].

В диссертации Шварцкопф Е.А. «Риск-модели социальных информационных сетей для общения в динамике их роста и межсетевой диффузии деструктивного контента» [15] автор решает задачу «повышения уровня информационной защищенности пользователей социальных сетей для общения на основе разработки и внедрения моделей диффузии деструктивного контента для стремительно растущей и интенсивно взаимодействующей с другими социальными сетями мегасети Facebook». Для этого Шварцкопф Е.А. предлагает «риск-модели межгрупповой и межсетевой диффузии деструктивного контента, необходимые для оценки рисков возникновения эпидемических процессов между онлайн-группами и сетями, а также учитывающие сетевой рост модели процессов распространения деструктивного контента в социальной сети для общения» [15, с. 5].

Соколова Е.С. в своем диссертационном исследовании «Деструктивные твиты в сети социальных закладок: риск-модели распространения, восприятия и выявления» [10] рассматривает методы и средства противодействия угрозам нарушения информационной безопасности, обусловленных влиянием вредоносного контента в сетях социальных закладок, на основе развития и практического использования моделей, позволяющих оценивать риски распространения и восприятия деструктивных твитов, на базе исследования соцсети Twitter. Соколова Е.С. утверждает, что «предложенная методика выявления деструктивных твитов с успехом может быть использована для практического обнаружения более крупных текстовых контентов вредоносного содержания в социальных сетях других классов, для которых также могут найти свое применение разработанные риск-модели оценки восприятия пользователем сети информации в контексте измерения их вовлеченности в эпидемические процессы распространения не только негативных, но и позитивных постов, особенно в программно-технических средствах информационного мониторинга» [10, с. 7].

Проблема противодействия претекстингу как методу социальной инженерии также рассматривалась в статьях отечественных авторов.

В частности, в статье Зотиной Е.В. «Претекстинг как прием социальной инженерии, используемый телефонными мошенниками: криминологический взгляд на проблему» [2] рассматриваются криминологические особенности использования претекстинга, как метода социальной инженерии в рамках осуществления мошеннических действий с применением средств сотовой связи. Автор делает вывод о том, что «претекстинг, как вид мошеннических действий с использованием средств сотовой связи имеет ряд специфических

криминологических особенностей, к которым относится тщательная подготовка, направленная на сбор персональной информации о жертве с целью установления доверительных отношений, использование специальных психологических манипулятивных приемов, элементов экстралингвистического и паралингвистического воздействия на жертву» [2, с. 98]. При этом одной из целей профилактики мошенничества с использованием средств телефонной связи является повышение уровня информационной грамотности населения, информирование о существующих мошеннических схемах, обучение навыкам психологической устойчивости к различным существующим техникам манипулирования.

В статье «Претекстинг и способы противодействия ему» [7] Михалёва У.А. акцентирует внимание на способах защиты конфиденциальной информации от претекстинга. Автор обобщает существующие способы защиты от претекстинга, к которым относятся «информирование населения о возможных действиях мошенников через средства массовой информации; составление черного списка телефонных номеров и их автоматическая блокировка в приложениях кредитно-финансовых организаций на основе отчетов правоохранительных органов; использование антифрод-платформы в телекоммуникационных сетях связи» [7, с. 113]. При этом Михалева У.А. анализирует современные подходы противодействия претекстингу в контексте существующей проблемы телефонного мошенничества (программный комплекс, базирующийся на алгоритмах обработки естественного языка для обнаружения атаки, использование искусственного интеллекта в распознавании мошенника по эмоции речи на основе анализа частотных отклонений по каждой букве в диалоге).

В статье Костюхиной Е.А. и Ладыгина П.С. «Разработка автоматической системы для обучения противодействию претекстингу» [3] предлагается методика противодействия претекстингу с использованием чат-ботов. Содержание предлагаемой методики заключается в следующем: «разрабатываются чат-боты, одним из которых будет являться «злоумышленник», остальные – люди, выполняющие роль обычных собеседников, при этом задача пользователя, который будет практически обучаться противодействию претекстингу – выявить в ходе общения, какой из чат-ботов является настоящим злоумышленником, при этом каждом диалоге с чат-ботом будет присутствовать претекстинг, чтобы было сложнее определить настоящего злоумышленника» [3, с. 9].

Следовательно, можно выделить следующие существующие методы защиты от атак социальной инженерии с использованием претекстинга:

1) повышение уровня информационной грамотности об атаках социальной инженерии с применением претекстинга;

2) информирование о существующих мошеннических схемах с использование претекстинга;

3) обучение навыкам психологической устойчивости к существующим техникам манипулирования;

4) использование программного комплекса для распознавания мошенника по анализу его речи при телефонном разговоре.

5) использование чат-ботов для обучения выявлению мошеннических действий с применением претекстинга в процессе переписки.

3. Заключение

Таким образом, несмотря на значительный интерес других авторов как к проблемам информационной безопасности пользователей в социальных сетях, так и, в частности, к проблеме противодействию претекстингу, проблема защищенности пользователей социальных сетей от атак социальной инженерии с использованием претекстинга остается не до конца изученной.

Список источников

1. Виткова, Л. А. Модели, алгоритмы и методика противодействия вредоносной информации в социальных сетях: специальность 05.13.19 «Методы и системы защиты информации, информационная безопасность» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Санкт-Петербург, 2021. – 173 с.
2. Зотина, Е. В. Претекстинг как прием социальной инженерии, используемый телефонными мошенниками: криминологический взгляд на проблему / Е. В. Зотина // Вестник Казанского юридического института МВД России. – 2022. – Т. 13, № 4(50). – С. 93-99. – DOI 10.37973/KUI.2022.55.63.012. – EDN YMXGXW.
3. Костюхина, Е. А. Разработка автоматической системы для обучения противодействию претекстингу / Е. А. Костюхина, П. С. Ладыгин // Проблемы правовой и технической защиты информации. – 2022. – № 10. – С. 9-14. – EDN CVYMRH.
4. Краткая характеристика состояния преступности в Российской Федерации за январь - август 2023 года // МВД России. – URL: https://мвд.рф/reports/item/41741442/ (дата обращения: 07.10.2023).
5. Ле, С. К. Управление конфиденциальностью пользователя в социальных сетях: специальность 05.13.19 «Методы и системы защиты информации, информационная безопасность»: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Волгоград, 2015. – 22 с.
6. Мошенничество в сети: судебная практика и ключевые аспекты // RTM Group | Мы объединяем ИТ, право и безопасность. URL: https://rtmtech.ru/research/online-fraud-research/ (дата обращения: 18.10.2023).
7. Михалева, У. А. Претекстинг и способы противодействия ему / У. А. Михалева // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2023. – Т. 50, № 2. – С. 109-116. – DOI 10.21822/2073-6185-2023-50-2-109-116. – EDN WVUARH.
8. Об утверждении программы «Цифровая экономика Российской Федерации» // Правительство России: сайт. URL: http://government.ru/docs/28653/ (дата обращения: 04.11.2023).

9. Самойлова, А. А. Методы социальной инженерии / А. А. Самойлова // Тенденции развития науки и образования. – 2019. – № 56-3. – С. 25-28. – DOI 10.18411/lj-11-2019-48. – EDN NQJQFR.

10. Соколова, Е. С. Деструктивные твиты в сети социальных закладок: риск-модели распространения, восприятия и выявления: специальность 05.13.19 «Методы и системы защиты информации, информационная безопасность»: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Воронеж, 2018. – 16 с.

11. Социальные сети и мессенджеры: вовлеченность и предпочтения // ВЦИОМ. Новости. – URL: https://wciom.ru/analytical-reviews/analiticheskii-obzor/socialnye-seti-i-messendzhery-vovlechennost-i-predpochtenija (дата обращения: 16.10.2023).

12. Уголовный кодекс Российской Федерации // Официальный интернет-портал правовой информации. – URL: http://pravo.gov.ru/proxy/ips/?docbody&nd=102041891 (дата обращения: 15.10.2023).

13. Указ Президента РФ от 05.12.2016 № 646 «Об утверждении Доктрины информационной безопасности Российской Федерации» // «Консультант Плюс» - законодательство РФ: кодексы, законы, указы, постановления Правительства Российской Федерации, нормативные акты: сайт. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_208191/ (дата обращения: 14.10.2023).

14. Фальконе, Я. И. Методы прогнозирования распространения и защиты от информационных угроз в социальных сетях на основе случайных ветвящихся процессов: специальность 05.13.19 «Методы и системы защиты информации, информационная безопасность»: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Санкт-Петербург, 2018. – 127 с.

15. Шварцкопф, Е. А. Риск-модели социальных информационных сетей для общения в динамике их роста и межсетевой диффузии деструктивного контента: специальность 05.13.19 «Методы и системы защиты информации, информационная безопасность»: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Воронеж, 2018. – 16 с.

16. Digital 2023: The Russian Federation // DataReportal – Global Digital Insights. – URL: https://datareportal.com/reports/digital-2023-russian-federation (дата обращения: 09.10.2023).

17. Verizon 2023 Data Breach Investigations Report // Verizon. - URL: https://www.verizon.com/business/resources/reports/dbir/ (дата обращения: 25.10.2023).

References

1. Vitkova, L. A. Models, algorithms and methods of countering harmful information in social networks: specialty 05.13.19 «Methods and systems of information security, information security»: dissertation for the degree of candidate of technical sciences – St. Petersburg, 2021. – 173 p.

2. Zotina, E. V. Pretexting as a social engineering technique used by telephone fraudsters: a criminological view of the problem / E. V. Zotina // Bulletin of the Kazan Law Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia. - 2022. - T. 13, № 4(50). - C. 93-99. - DOI 10.37973/KUI.2022.55.63.012. - EDN YMXGXW.

3. Kostyukhina, E. A. Development of an automatic system for training to counteract pretexting / E. A. Kostyukhina, P. S. Ladygin // Problems of legal and technical protection of information. - 2022. - № 10. - C. 9-14. - EDN CVYMRH.

4. Brief description of the state of crime in the Russian Federation for January – August 2023 // Ministry of Internal Affairs of Russia. – URL: https://мвд.рф/reports/item/41741442/ (access date: 07.10.2023).

5. Le, S. K. User privacy management in social networks: specialty 05.13.19 "Methods and systems of information protection, information security": abstract of the dissertation for the degree of candidate of technical sciences / Le Xuan Quen. – Volgograd, 2015. – 22 p.

6. Online fraud: judicial practice and key aspects // RTM Group | We combine IT, law and security. URL: https://rtmtech.ru/research/online-fraud-research/ (access date: 18.10.2023).

7. Mikhaleva, U. A. Pretexting and ways to counteract it / U. A. Mikhaleva. A. Mikhaleva // Bulletin of Dagestan State Technical University. Technical Sciences. - 2023. - T. 50, № 2. - C. 109-116. - DOI 10.21822/2073-6185-2023-50-2-109-116. - EDN WVUARH.

8. On Approval of the Program «Digital Economy of the Russian Federation» // Russian Government: website. URL: http://government.ru/docs/28653/ (access date: 04.11.2023).

9. Samoilova, A. A. Methods of social engineering / A. A. Samoilova // Trends in the development of science and education. – 2019. – No. 56-3. – pp. 25-28. – DOI 10.18411/lj-11-2019-48. – EDN NQJQFR.

10. Sokolova, E. S. Destructive tweets in the social bookmarking network: risk models of distribution, perception and identification: specialty 05.13.19 «Methods and systems of information security, information security»: abstract of the dissertation for the scientific degree of candidate of technical scientific sciences. – Voronezh, 2018. – 16 p.

11. Social networks and messengers: involvement and preferences // VTsIOM. News. – URL: https://wciom.ru/analytical-reviews/analiticheskii-obzor/socialnye-seti-i-messendzhery-vovlechennost-i-predpochtenija (date of access: 16.10.2023).

12. Criminal Code of the Russian Federation // Official Internet portal of legal information. – URL: http://pravo.gov.ru/proxy/ips/?docbody&nd=102041891 (access date: 15.10.2023).

13. Decree of the President of the Russian Federation dated December 5, 2016 N 646 «On approval of the Information Security Doctrine of the Russian Federation» // Consultant Plus – legislation of the Russian Federation: codes, laws, decrees, decrees of the Government of the Russian Federation, regulations: website. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_208191/ (access date: 14.10.2023).

14. Falcone, Y. I. Methods for predicting the spread and protection from information threats in social networks based on random branching processes: specialty 05.13.19 «Methods and systems for information security, information security»: dissertation for the degree of candidate of technical sciences. – St. Petersburg, 2018. – 127 p.

15. Schwarzkopf, E. A. Risk models of social information networks for communication in the dynamics of their growth and inter-network diffusion of destructive content: specialty 05.13.19 «Methods and systems of information security, information security»: abstract of the dissertation for scientific competition degree of candidate of technical sciences. – Voronezh, 2018. – 16 p.

16. Digital 2023: The Russian Federation // DataReportal – Global Digital Insights. – URL: https://datareportal.com/reports/digital-2023-russian-federation (access date: 10.09.2023).

17. Verizon 2023 Data Breach Investigations Report // Verizon. – URL: https://www.verizon.com/business/resources/reports/dbir/ (access date: 25.10.2023).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 427-432.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 427-432.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.9

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПОДДЕРЖКИ ВРАЧЕБНЫХ РЕШЕНИЙ

Татьяна Николаевна Русских[1]✉, Илья Андреевич Буцев[2]
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]trusskih@rambler.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8514-7508
[2]anbucew@gmail.com

Аннотация. *В статье затрагивается проблема разработки систем поддержки врачебных решений. Описываются основные типы систем, их функции и задачи. Предлагаются проектные решения по разработке информационной системы поддержки врачебных решений.*

Ключевые слова: *информационная система, врачебные решения, функциональное моделирование, диаграмма.*

Conference paper

INFORMATION SUPPORT FOR MEDICAL DECISION MAKING

Tatyana N. Russkikh[1]✉, Ilya A. Butsev[2]
[1, 2]Orel State University, Orel, Russia
[1]trusskih@rambler.ru✉, https://orcid.org/0000-0000-0000-0000
[2]anbucew@gmail.com

Abstract. *The paper is devoted to the problem of developing medical decision support systems. The main types of systems, their functions and tasks are described. Design solutions for the development of the information system to support medical decisions are proposed.*

Keywords: *information system, medical decisions, functional modeling, chart.*

1. Введение

В настоящее время процесс информатизации затрагивает различные отрасли, включая систему здравоохранения. Одним из направлений внедрения информационных технологий в медицине является поддержка врачебных решений. Системы поддержки врачебных решений автоматизируют процессы постановки диагноза, выбора и назначения лекарственных препаратов,

© Русских Т.Н., 2023

подготовки необходимой документации, тем самым повышают эффективность работы врачей, снижают количество врачебных ошибок.

2. Основной текст статьи

Система поддержки принятия врачебных решений (далее СППВР) – это программное обеспечение, позволяющее снизить количество врачебных ошибок, повысить качество медицинской помощи за счет анализа медицинской информации, разработки рекомендаций на основе врачебной базы знаний [1].

Системы поддержки принятия врачебных решений могут быть использованы в различных областях медицины. Аналитические модули данных систем включают инструментарий машинного обучения, искусственного интеллекта и базы данных медицинской информации.

К основным задачам информационной поддержки врачебных решений можно отнести [1-4]:

– сбор и анализ данных обследований,

– формирование индивидуального профиля пациента,

– автоматическая поддержка клинических руководств,

– обеспечение врача справочно-информационным материалом,

– постановка диагноза пациенту,

– составление плана, схемы лечения,

– формирование перечня медикаментов с учетом индивидуальных противопоказаний пациента,

– выявление факторов риска и прогнозирование вариантов результата лечения,

– контроль своевременности проведения диагностических мероприятий, лабораторных исследований,

– подготовка необходимой документации.

В зависимости от функций и задач СППВР делятся на группы [1-4]:

1. Информационное-справочные СППВР. К этой группе можно отнести: справочно-библиотечные системы, электронные медицинские карты пациентов, системы автоматизации врачебных назначений, системы контроля критериев качества медицинской помощи.

2. Интеллектуальные СППВР. Данный тип систем, используя методы математической статистики, машинного обучения и искусственного интеллекта, обеспечивают поддержку принятия решений в анализе медицинских изображений, постановке медицинского диагноза.

3. Гибридные СППВР. Гибридные СППВР включают в себя информационно-справочные и интеллектуальные модули информационных систем, обеспечивая комплексную поддержку принятия решений на всех этапах диагностического процесса, лечения.

Методология разработки систем поддержки принятия врачебных решений включает несколько этапов:

1. Сбор и анализ медицинской информации.
2. Предоставление достоверных медицинских рекомендаций.
3. Проведение консультаций с экспертами.
4. Интеграция с другими информационными системами.

Ключевым процессом для автоматизации в СППВР является постановка диагноза на основе анамнеза пациента и формирование плана лечения с учетом возможных факторов риска. Процесс постановки диагноза и составления плана лечения включает следующие подпроцессы: постановка предварительного диагноза, дифференциальная диагностика, составление плана лечения.

Подробно рассмотрим процесс постановки диагноза с помощью функциональной модели IDEF0. На рисунке 1 приведена контекстная диаграмма основного процесса.

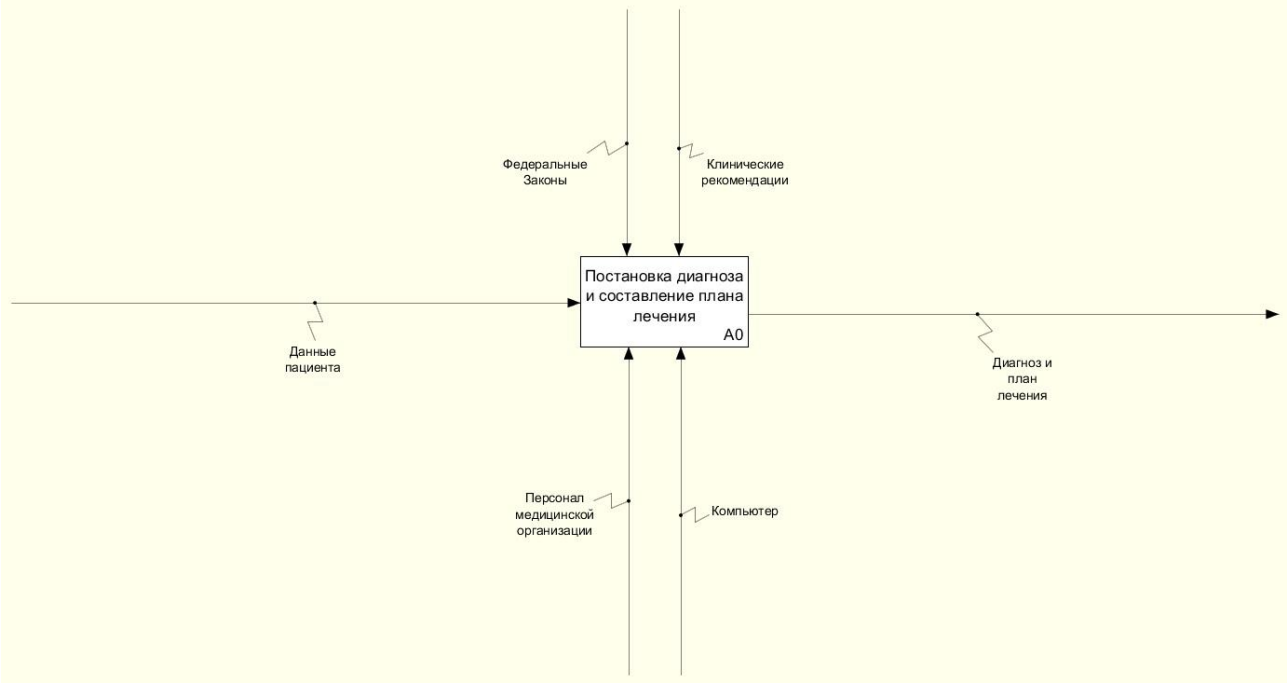


Рисунок 1. Контекстная диаграмма.

На вход модели подаются данные пациента. Система анализирует входные данные, обрабатывает их, исходя из поставленных задач, использует в процессе поддержки принятия врачебных решений. При постановке конечного клинического диагноза и составлении плана лечения врач руководствуется Федеральными законами и клиническими рекомендациями.

На рисунке 2 приведена декомпозиция основного процесса.

На первом этапе по результатам первичного осмотра пациента, анализа клинических данных, истории болезней врач ставит предварительный диагноз, далее при помощи СППВР проводит дифференциальную диагностику и составляет план лечения.

Декомпозиция процесса «Постановка предварительного диагноза» приведена на рисунке 3.

Для постановки предварительного диагноза требуется найти карту пациента, провести анализ истории болезней пациента, внести данные первичного осмотра. По результатам анализа всей информации врач ставит первичный диагноз, который в дальнейшем может быть уточнен и подтвержден системой.

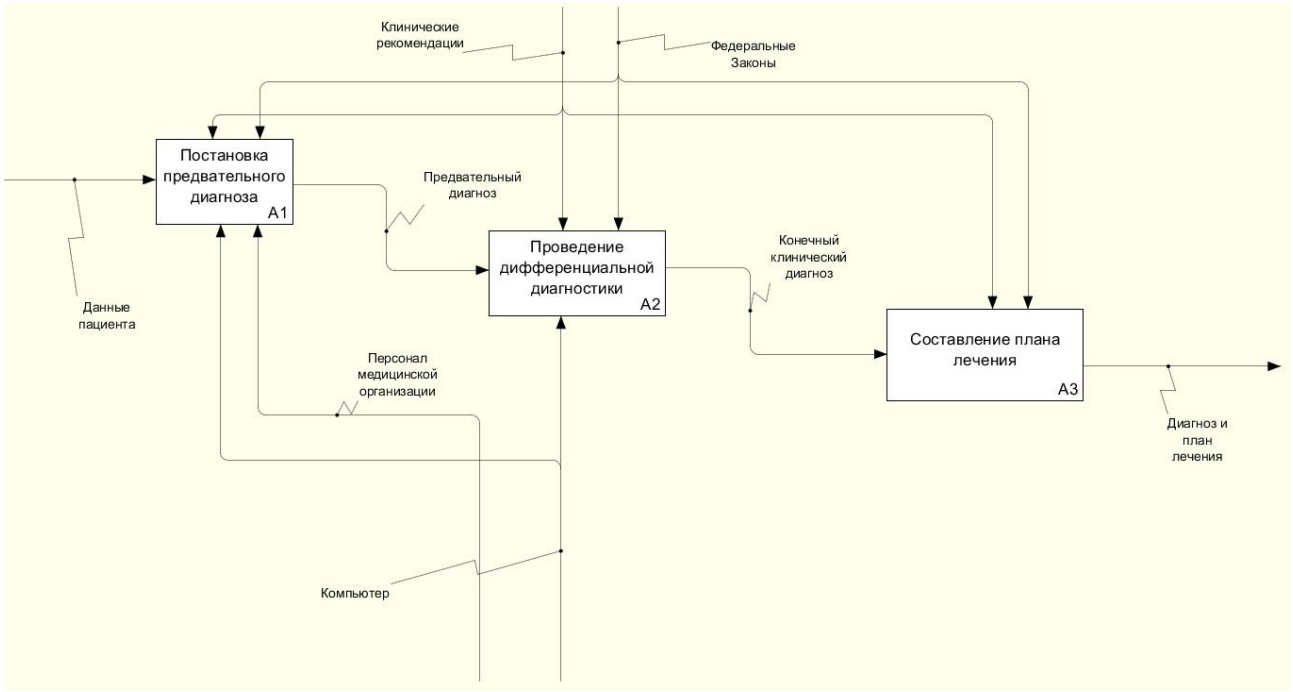


Рисунок 2. Диаграмма декомпозиции.

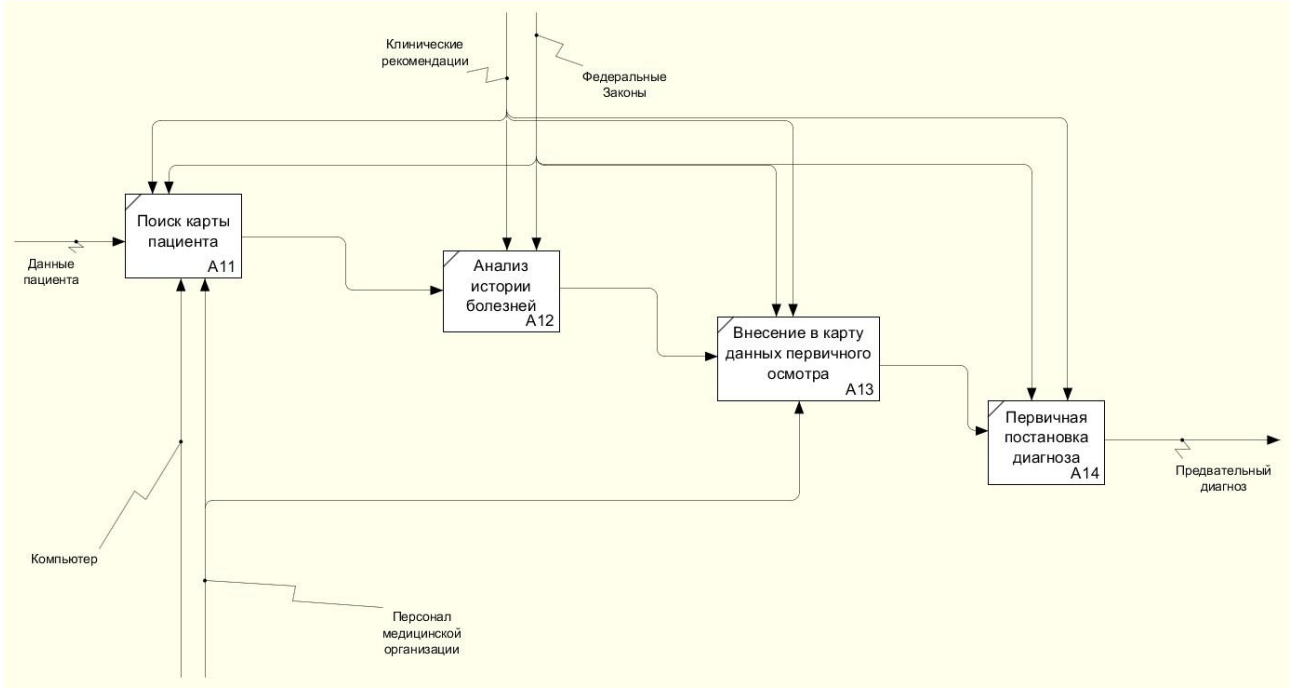


Рисунок 3. Диаграмма декомпозиции процесса «Постановка предварительного диагноза».

Рассмотрим подробнее диаграмму процесса «Проведение дифференциальной диагностики» (рисунок 4).

Первый блок диаграммы включает в себя анализ всех данных, полученных из истории болезни, результатов лабораторных и диагностических исследований и другой медицинской информации. Далее эти данные вносятся в СППВР, чтобы система могла их обработать и предоставить рекомендации для дальнейшей диагностики и лечения. Последний блок – постановка конечного клинического диагноза врачом с учетом всех полученных данных и рекомендаций СППВР.

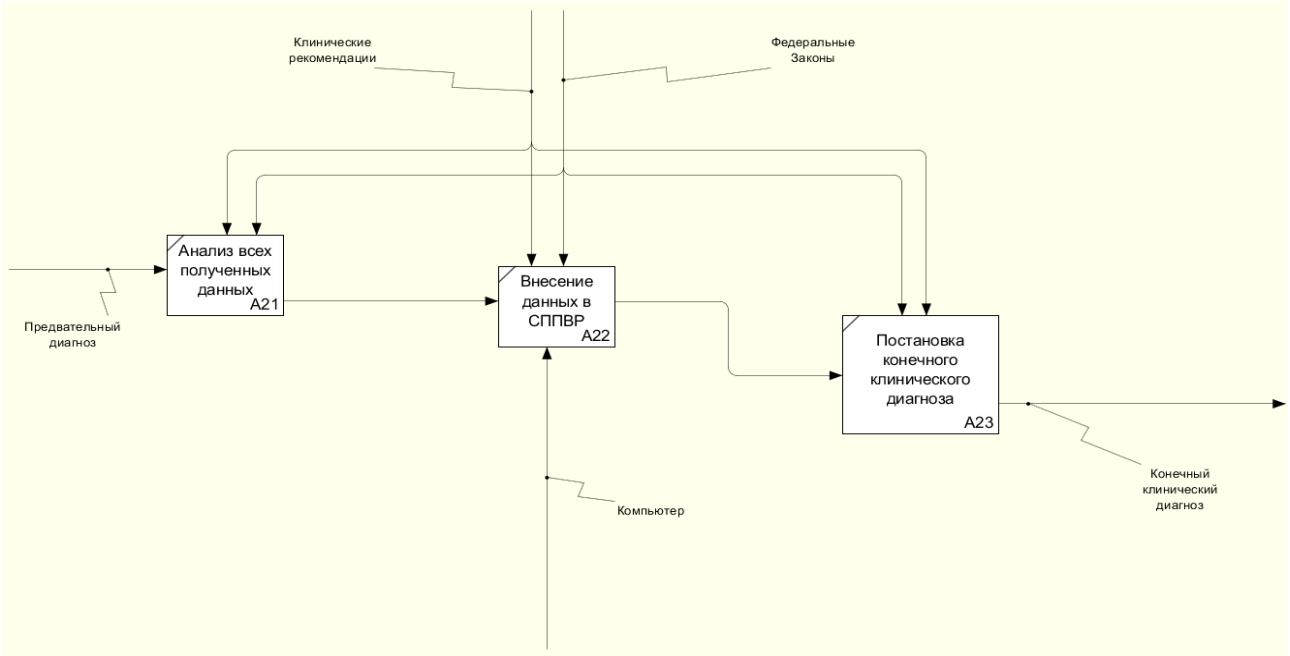


Рисунок 4. Диаграмма декомпозиции процесса «Проведение дифференциальной диагностики».

Процесс «Составление плана лечения» приведен на рисунке 5.

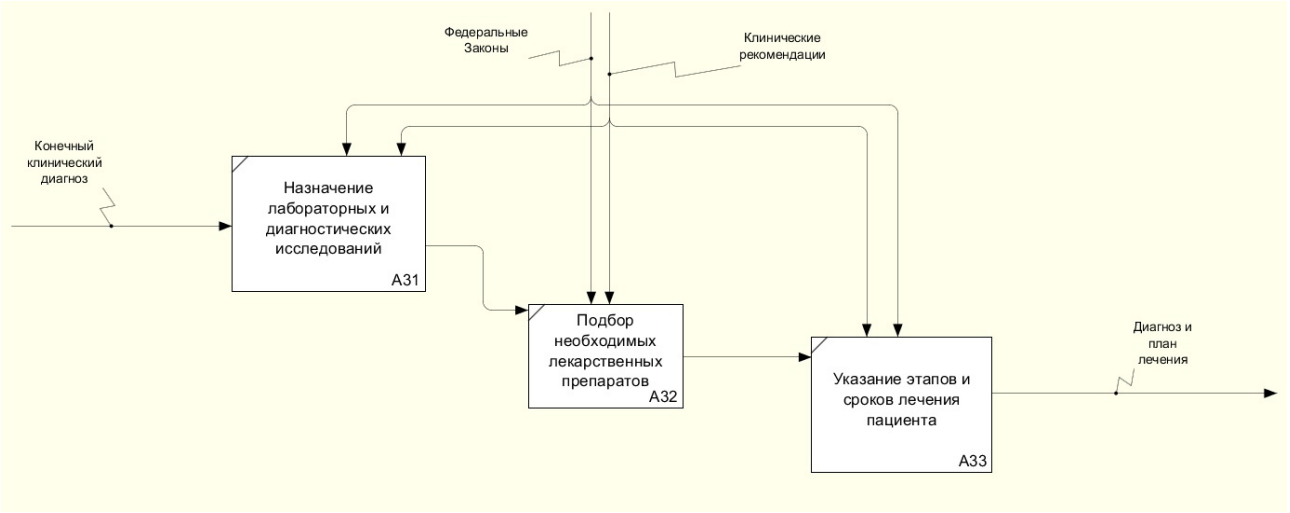


Рисунок 5. Диаграмма декомпозиции процесса «Составление плана лечения».

Первый блок включает в себя назначение необходимых лабораторных и диагностических исследований для получения дополнительной информации о здоровье пациента. Второй блок – подбор необходимых лекарственных препаратов с учетом индивидуальных противопоказаний пациента. Последний блок содержит разработку этапов и сроков лечения пациента с учетом возможных факторов риска для обеспечения максимальной эффективности процесса лечения.

3. Заключение

В результате проведенного авторами исследования выполнен анализ предметной области, построены функциональные модели основных процессов для разработки проектный решений. Функциональное моделирование

предметной области позволит разработать СППВР для повышения эффективности деятельности врачей посредством автоматизации основных бизнес-процессов.

Список источников

1. Гусев А.В., Зарубина Т.В. Поддержка принятия врачебных решений в медицинских информационных системах медицинской организации // Врач и информационные технологии. 2017. № 2. С. 60-72.

2. Атьков О.Ю., Кудряшов Ю.Ю., Прохоров А.А., Касимов О.В. Система поддержки принятия врачебных решений // Врач и информационные технологии. 2013. №6. С. 67-75.

3. Реброва О.Ю. Жизненный цикл систем поддержки принятия врачебных решений как медицинских технологий // Врач и информационные технологии. 2020. №1. С. 27-37.

4. Реброва О.Ю. Эффективность систем поддержки принятия врачебных решений: способы и результаты оценки // Клиническая и экспериментальная тиреоидология. 2019. Т.15. № 4. С. 148-155.

References

1. Gusev A.V., Zarubina T.V. Support for medical decision-making in medical information systems of a medical organization. Doctor and information technologies. 2017;(2):60-72 (In Russ.).

2. Atkov O.Yu., Kudryashov Yu.Yu., Prokhorov A.A., Kasimov O.V. Medical decision support system. Doctor and information technologies. 2013; (6): 67-75 (In Russ.).

3. Rebrova O. Yu. Life cycle of medical decision support systems as medical technologies. Doctor and information technologies. 2020; (1):27-37 (In Russ.).

4. Rebrova O. Yu Effectiveness of medical decision support systems: methods and results of evaluation. Clinical and experimental thyroidology. – 2019; (4): 148-155. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 433-438.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 433-438.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.9

ПРОЕКТНЫЕ РЕШЕНИЯ ПО РАЗРАБОТКЕ СЕРВИСА КРЕДИТНОГО СКОРИНГА

Татьяна Николаевна Русских[1]✉, Алексей Алексеевич Горячев[2], Анастасия Сергеевна Колганова[3]
[1,2,3]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]trusskih@rambler.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8514-7508
[2]goriachev.alex2018@yandex.ru
[3]kol.anasti.i@gmail.com

Аннотация. *В статье затрагивается проблема разработки систем кредитного скоринга. Описываются сервисы поддержки кредитных решений, их функции. Предлагаются проектные решения по разработке сервиса кредитного скоринга.*

Ключевые слова: *кредитный скоринг, информационные системы, сервисы, проектные решения.*

Conference paper

DESIGN DECISIONS FOR THE DEVELOPMENT OF A CREDIT SCORING SERVICE

Tatiana N. Russkih[1]✉, Alexey A. Goryachev[2]*, *Anastasia S. Kolganova[3]
[1,2,3] Orel State University, Orel, Russia
[1]trusskih@rambler.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8514-7508
[2]goriachev.alex2018@yandex.ru
[3]kol.anasti.i@gmail.com

Abstract. *The paper is devoted to the problem of developing credit scoring systems. Credit decision support services and their functions are described. Design solutions for the development of the credit scoring service are proposed.*

Keywords: *credit scoring, information systems, services, design decisions.*

1. Введение

В настоящее время стремительное развитие банковской сферы обуславливает рост потребительского спроса на кредитные услуги. В условиях

© Русских Т.Н., Горячев А.А., Колганова А.С., 2023

конкуренции банками предпринимаются различные меры по привлечению клиентов и оценки их кредитоспособности. Для подбора оптимальных кредитных предложений банки предлагают своим клиентам различные информационные сервисы, важнейшее преимущество которых заключается в аккумуляции единой информации, обеспечении поддержки принятия решений в короткие сроки. Процесс обработки заявок на кредит осуществляется с использованием технологий и методов кредитного скоринга. Автоматизированная подготовка и обработка анкетных данных клиентов способствует оптимизации деятельности банков, позволяет повысить производительность и эффективность работы персонала, улучшить качество услуг, повысить сервис и оперативность обслуживания заемщиков.

2. Основной текст статьи

Кредитный скоринг представляет собой процесс оценки уровня кредитного риска с помощью математических моделей, в результате которых повышается скорость и эффективность принятия решений относительно выдачи или невыдачи кредита, снижается вероятность невозврата кредита [1]. Основными источниками для скоринговых оценок являются анкеты клиентов, параметры и содержание которых могут отличаться, кредитная история и рейтинг потребителя [1-3]. Система оценки рисков применяется на стадии принятия решения относительно заявки на кредит. После заполнения анкеты потенциальным заемщиком все указанные им данные анализируется системой, которая присваивает определенный балл. Заемщики с высоким баллом могут получить крупные суммы под минимальный процент. Низкая балльная оценка служит поводом для отказа в кредите или выдачи кредита под максимальный процент.

Внедрение систем и сервисов кредитного скоринга позволяет автоматизировать следующие задачи [1-3]:

– увеличить кредитный портфель за счет уменьшения количества необоснованных отказов по кредитным заявкам;

– снизить долю невозвратов кредитов;

– ускорить процедуру оценки кредитоспособности заемщика;

– создать централизованную базу данных о заемщиках;

– быстро оценить динамику изменений кредитного счета индивидуального заемщика и кредитного портфеля в целом.

В результате применения скоринговой модели должно произойти уменьшение числа «плохих кредитов» в структуре кредитного портфеля.

В рамках проведенного исследования был проведен обзор и сравнительный анализ сервисов поддержки кредитных решений. Среди всех рассмотренных сервисов можно выделить помимо плюсов и ряд недостатков. Остановимся на описании отдельных минусов работы сервисов «Кредиты-онлайн.ру», «Сравни.ру», «Банкирос.ру», «Банки.ру», «Юником24».

Сервис «Кредиты-онлайн.ру» не имеет мобильного приложения. Платформа «Сравни.ру» в отличие от «Кредиты-онлайн.ру» имеет мобильную версию сервиса, однако не размещает на своем сайте актуальную информацию

по предложениям банков, нет функции их сравнения по отдельным параметрам. Сервис «Банки.ру» имеет те же недостатки, что и «Сравни.ру». Разобраться в интерфейсе сайта пользователям не всегда легко. Пользователи отмечают не совсем удобный дизайн. Например, чтобы найти информацию по компаниям, нужно переходить по разным вкладкам сайта. Сайт «Банкирос.ру» в отличие от «Банки.ру» имеет доступный и простой для понимания пользователя интерфейс, удобную систему фильтрации, однако, как и «Кредиты-онлайн.ру» не имеет мобильного приложения. Не всегда своевременно обновляется информация по займам, нет возможности сравнить параметры нескольких банков. «Юником24» в своем списке располагает малым количеством предложений по микрозаймам, микрозаймов фактически представлено только 73 предложения. Имеет мобильную версию сервиса, удобный онлайн калькулятор, а также многофункциональную систему сортировки кредитных предложений, но в отличии от ранее рассмотренных сервисов не описаны тарифы для заемщиков.

На основе анализа функционала сервисов поддержки принятия решений по подбору кредитных предложений были сформулированы требования к проектируемому сервису:

- удобный и простой для пользователя интерфейс программы;
- регистрация нового пользователя;
- просмотр и выбор предложений по кредитованию физических лиц;
- подробный фильтр поиска;
- предоставление детальной информации по каждому кредитному предложению;
- наличие онлайн-калькуляторов для предварительного расчета платежей и размера переплаты;
- возможность ознакомления с отзывами о кредитном предложении;
- возможность быстрого сравнения условий по займам и возможность выбора оптимального;
- просмотр истории заявок зарегистрированного пользователя;
- подача заявки, просмотр статуса заявки;
- возможность формирования отзыва по кредитному предложению.

В качестве действующих лиц системы могут быть выделены:

– «Пользователь»,
– «Зарегистрированный пользователь»,
– «Аналитик»,
– «Сотрудник банка».

Унифицированный процесс (далее UP) разработки предполагает использование итеративной модели жизненного цикла, управляемой требованиями к программному продукту и учитывающей риски работы. Создаваемая при этом система строится на основе программных компонентов, связанных четко определенными интерфейсами. В рамках UP работа над системой начинается с создания модели предметной области, отражающей наиболее важные сущности и их взаимосвязи [4].

В UP для представления пользователей системы и соответствующей им функциональности принято строить диаграмму вариантов использования. На данной диаграмме отображаются действующие лица и их функции (рисунке 1).

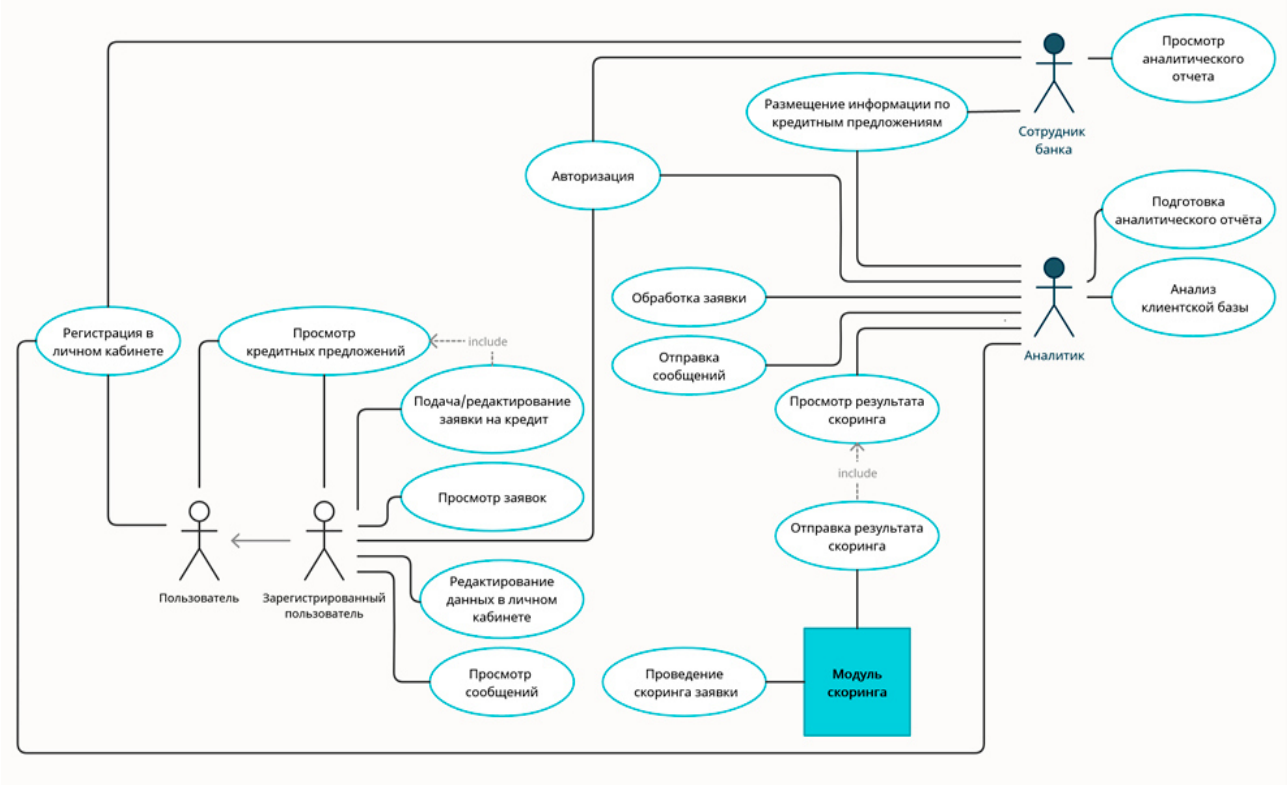


Рисунок 1. Диаграмма вариантов использования.

Зарегистрированный пользователь – это лицо, которое успешно прошло регистрацию в системе и может использовать следующие функции:

1) Авторизация. Данная функция позволяет зарегистрированному пользователю войти в систему и в свой личный кабинет.

2) Просмотр заявок. Функция позволяет пользователю просмотреть все поданные им заявки, их статусы (стадии рассмотрения заявки).

3) Подача/редактирование заявки на кредит. Данная функция позволяет пользователю заполнить форму заявки на кредит или при необходимости ее отредактировать, а затем отправить заявку на обработку.

4) Редактирование данных в личном кабинете. Функция позволяет пользователю заполнить информацию о себе в личном кабинете, при необходимости внести изменения в данные.

5) Просмотр сообщений. Данная функция позволяет пользователю просматривать сообщения в своем личном кабинете.

Аналитик – это лицо, которое рассматривает и обрабатывает заявки на кредит. Для аналитика представлены следующие функции:

1) Обработка заявки. Аналитик проводит первоначальный анализ заявки и при очевидном несоответствии требований для получения кредита отклоняет заявку. В противном случае заявка проходит дальнейшую автоматическую обработку модулем скоринга.

2) Отправка сообщений. Данная функция позволяет действующему лицу отравлять сообщения пользователям о результате обработки заявки, а также об актуальных и более подходящих кредитных предложениях.

3) Просмотр результата скоринга. Функция предоставляет возможность просматривать результат скоринга и в зависимости от результата отклонить или оповестить пользователя о необходимых требованиях для оформления кредита.

4) Анализ клиентской базы. Аналитик проводит анализ клиентской базы и выявляет самые востребованные кредитные предложения за последний месяц, проводит сегментацию клиентов с целью разработки кредитных предложений, реализует модель кредитного скоринга.

5) Подготовка аналитического отчета. Аналитик, исходя из анализа клиентской базы, подготавливает отчет о самых востребованных кредитных предложениях, часто используемых фильтрах при поиске, об оптимальных сроках и суммах кредитования, в каких кредитных предложениях наиболее высокий процент одобрения, реализует и оценивает эффективность модели кредитного скоринга.

Для сотрудника банка были представлены следующие функции:

1) Размещение информации по кредитным предложениям. Эта функция позволяет размещать или редактировать актуальные кредитные предложения для пользователей. Представленная функция также доступна для аналитика.

2) Просмотр аналитического отчета. Сотрудник банка просматривает аналитический отчет и, основываясь на данных, выявляет более востребованные кредитные предложения для пользователей, оптимальные сроки и суммы кредитования и в каких кредитных предложениях наиболее высокий процент одобрения.

В результате проведенного исследования подготовлены проектные решения по разработке сервиса кредитного скоринга. Были построены функциональные, прецедентные и объектные модели скоринга. Разработан макет программы пользовательского интерфейса подбора кредитного предложения пользователя.

Процесс разработки макета пользовательского интерфейса основывался на ряде основополагающих принципов работы сервиса, в частности:

– удобный и простой для пользователя интерфейс программы, возможность регистрации нового пользователя;

– наличие широкого выбора предложений по кредитованию физических лиц, доступность изучения пользователем;

– наличие подробного фильтра поиска;

– наличие детально собранной информация по каждому кредитному предложению;

– онлайн-калькуляторы для предварительного расчета платежей и размера переплаты;

- просмотр истории заявок зарегистрированного пользователя;
- доступность подачи заявки;
- возможность просмотра статуса заявки и другие.

3. Заключение

Проектные решения позволят разработать сервис, который обеспечит пользователю удобный и быстрый выбор кредитного предложения, подачу заявки без личного обращения в банк, просмотр статуса заявки. Для банков данная система автоматизирует процессы оценки кредитоспособности потенциальных клиентов банка и тем самым позволит снизить кредитные риски.

Список источников

Андреева Г.В. Скоринг как метод оценки кредитного риска // Банковские технологии. 2002. № 2 (15). С. 52-54.

2. Клементьев В.А. Совершенствования формы заявления-анкеты заемщика в целях снижения рисков потребительского кредитования // Финансы и кредит. 2010. № 28 (316). С. 35-39.

3. Корнилова О.А. Комплексная оценка заемщика как инструмент снижения кредитного риска // Ученые записки. 2020. № 1 (33). С. 40-43.

4. Арлоу Д., Нейштадт И. UML 2 и Унифицированный процесс. Практический объектноориентированный анализ и проектирование. СПб.: Символ-Плюс, 2007. - 624 с.

References

1. Andreeva G.V. Scoring as a method of credit risk assessment // Banking technologies. 2002; 2 (15):52-54 (In Russ.).

2. Klementyev V.A. Improving the borrower's application form in order to reduce the risks of consumer lending // Finance and credit. 2010; 28 (316): 35-39 (In Russ.).

3. Kornilova O.A. Comprehensive assessment of the borrower as a tool for reducing credit risk// Scientific Notes. 2020; 1 (33): 40-43 (In Russ.).

4. Arlow D., Neustadt. I. UML 2 and the Unified Process. Practical object–oriented analysis and design // St. Petersburg: Symbol-Plus, 2007. 624 p (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 439-443.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 439-443.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.6

ПРОБЛЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ ФОРМИРОВАНИЯ ДАННЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Семенов Евгений Юрьевич[1]✉, Зубкова Лариса Николаевна[2]
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]john-neg@yandex.ru✉, [2]zubkovaln@mail.ru

Аннотация. В настоящее время формирование и анализ данных является критически важным для решений различных исследовательских и аналитических задач в различных областях, таких как медицина, биотехнологии, финансы, география и др. Однако, хранение, обработка и анализ данных является трудоемким процессом, который требует специальных технологий и методов. В данной статье авторы исследуют основные проблемы и технологии формирования массивов данных с учетом их объема, разнообразия, скорости и надежности в различных системах управления баз данных.

Ключевые слова: хранение данных, системы управления базами данных, анализ данных, сбор данных.

Conference paper

PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR DATA FORMATION FOR SOLVING RESEARCH AND ANALYTICAL PROBLEMS

Evgeny Yu. Semenov[1]✉, Larisa N. Zubkova[2]
[1, 2]Orel State University, Orel, Russia
[1]john-neg@yandex.ru✉, [2]zubkovaln@mail.ru

Abstract. *Currently, the generation and analysis of data is critical for solving various research and analytical problems in various fields, such as medicine, biotechnology, finance, geography, etc. However, storing, processing and analyzing data is a labor-intensive process that requires special technologies and methods. In this article, the authors explore the main problems and technologies for generating data sets, taking into account their volume, diversity, speed and reliability in various database management systems.*

© Семенов Е.Ю., Зубкова Л.Н., 2023

Keywords: *data storage, database management systems, data analysis, data collection.*

Введение

В современном мире потребность в обработке и анализе больших объемов данных продолжает расти в самых различных отраслях: от науки и образования до бизнеса и правительственных организаций. В свою очередь, эффективное использование данных требует формирования качественных массивов, которые отражают релевантную информацию и позволяют проводить актуальные исследования и анализ. Так, по мнению Д.И. Шведова, способность программного инструментария обрабатывать и сопоставлять большие массивы данных, поступающие из разных источников в различных форматах и разной степени структурированности (структурированные, слабоструктурированные и неструктурированные), позволяет производить анализ, включающий выявление закономерностей в данных, прогнозирование некоторых событий и принятие решений на основе данного интеллектуального предсказания [1, с. 202].

В.Б. Фролова выделяет несколько разновидностей данных, применяемых для аналитических задач:

- традиционные аналитические данные, включающие структурированную информацию (отчетность; внутренняя и внешняя статистика; описательные элементы и пр.);
- большие данные, включающие как структурированную, так и неструктурированную информацию, которая не подлежит традиционному анализу [2, с.305].

Современные подходы к обработке данных предоставляют широкие возможности на ранее недоступном для исследователей уровне. В результате объединения различных технологий и методов, исследователи могут значительно улучшить работу и получить больше полезной информации из собранных данных.

Основной текст статьи

Процесс формирования массивов данных включает в себя следующие этапы: 1) сбор исходных данных, 2) обработка данных, 3) хранение данных. Один из главных вопросов при формировании массивов данных – это выбор правильных источников. Они должны быть достоверными, актуальными, адекватными и точными. От правильного выбора источников напрямую зависит объем работы, выполняемой на последующих этапах.

В соответствии со ст.7 Федерального закона от 27.07.2006 №149-ФЗ «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» к общедоступной информации относятся общеизвестные сведения и иная информация, доступ к которой не ограничен. Общедоступная информация может использоваться любыми лицами по их усмотрению при соблюдении установленных федеральными законами ограничений в отношении распространения такой информации [3].

Распространенной проблемой, возникающей на данном этапе является неполнота или несоответствие данных между собой. При работе с неполными

или устаревшими данными, аналитики и исследователи могут столкнуться с невозможностью проведения точного и обоснованного анализа. Кроме того, несоответствие между собой данных из разных источников может привести к ошибкам и неточностям исследования. Данную проблему следует учитывать на всех этапах работы и информацией и производить дополнительную валидацию.

Одной из основных технологий для сбора данных в сети Интернет является web-скрейпинг - процесс автоматического извлечения данных из веб-страниц с использованием специального инструментария и технологий. Программы-парсеры, такие как Scrapy, Selenium, BeautifulSoup и т.д., предлагают достаточно простой и понятный способ автоматизированной работы с HTML-документами, с целью выделения необходимой информации и последующего ее сохранения в соответствующий массив. Также к данному этапу можно отнести технологию Data Warehousing, позволяющую объединять информацию из разных источников в одну единую структуру. Таким образом, обеспечивается более полный и детализированный сбор информации об исследуемых объектах и феноменах.

Важными элементами при формировании массивов данных являются обработка сырых данных и препроцессинг. Благодаря применению методов обработки данных, таких как очистка, преобразование, нормализация, можно значительно улучшить качество и полноту исходных данных и, таким образом, увеличивать точность и адекватность исследовательского анализа. Для повышения эффективности обработки информации используются специальные алгоритмы и программы, которые помогают структурировать данные, что значительно упрощает их анализ и обработку. Однако, в реальности большая часть доступных данных является неструктурированной и слабоструктурированной, что значительно усложняет процесс их анализа и использования в исследованиях.

Наличие шумов и ошибок при формировании массивов данных также является критичным фактором. Данные могут содержать аномалии, выбросы, нерелевантные значения, которые могут существенно искажать результаты анализа и приводить к некорректным выводам. Технология Data Mining позволяет находить скрытые закономерности и взаимосвязи в больших массивах данных. Она включает в себя методы машинного обучения, статистику, искусственный интеллект и др.

Одна из наиболее важных технологий, используемых при обработке данных, - это облачные вычисления. Облачные вычисления позволяют организациям работать с обширными объемами данных, не обладая при этом собственными вычислительными ресурсами. Это позволяет снизить затраты на обработку данных, обеспечивает быстрый доступ к данным и увеличивает эффективность работы.

После того, как данные были получены и обработаны, их необходимо сохранить в удобном для дальнейшей работы формате. Для этого разработаны различные системы управления базами данных (СУБД).

Первым шагом является определение требований к базе данных. Необходимо понять, какие типы документов будут храниться, как часто они

будут обновляться, какую скорость записи и чтения необходимо обеспечивать, какой объем данных будет храниться, какие функции поиска и фильтрации требуются и т.д. Разделение данных на уровни в самом простом виде начинается с классификации данных как первичных или вторичных, а затем их сохранения на носителях, наиболее подходящих для этого уровня, с учетом того, как используются данные и какой тип носителя им требуется [4].

После определения требований необходимо проанализировать доступные базы данных. Существует множество типов баз данных: реляционные, объектно-ориентированные, документо-ориентированные, графовые и т.д. Каждый тип баз данных имеет свои преимущества и недостатки, и выбор базы данных зависит от конкретных требований проекта.

Реляционные базы данных используются для хранения структурированных данных, которые представлены в виде таблиц, состоящих из строк и столбцов. Каждый столбец представляет собой атрибут данных, а каждая строка – запись в базе данных. Для хранения текстовых данных лучше всего использовать такие СУБД как PostgreSQL или MySQL.

Для хранения документов часто используют документо-ориентированные базы данных. Они обеспечивают более эффективное хранение и поиск документов, чем реляционные базы данных. Системы управления документами на основе документо-ориентированных баз данных могут хранить все данные, относящиеся к конкретному документу, в одной записи, что обеспечивает быстрый доступ к информации. Этот подход позволяет легко и быстро добавлять новые документы или редактировать существующие.

Документо-ориентированная база данных MongoDB - одна из наиболее популярных баз данных для хранения документов. Она обеспечивает высокую скорость записи и чтения данных, легко масштабируема и имеет широкие возможности для поиска и фильтрации данных. MongoDB имеет возможность автоматически масштабироваться по горизонтали, что позволяет поддерживать работоспособность при росте числа пользователей.

Данные временных рядов, снятые в разные моменты времени, часто используются для анализа и прогнозирования трендов и паттернов. Для хранения данных временных рядов лучше всего использовать специализированные базы данных, такие как InfluxDB, которые оптимизированы для работы с такими данными и имеют широкие возможности для анализа и прогнозирования.

Интернет вещей (IoT) является одним из быстрорастущих рынков в сфере технологий. Для хранения данных сенсорных устройств IoT лучше всего использовать базы данных, которые оптимизированы для работы с данными реального времени. Например, Apache Cassandra является отличным выбором для хранения больших объемов данных IoT. Эта база данных имеет высокую производительность и масштабируемость, что позволяет обрабатывать десятки миллионов записей в секунду.

Заключение

Таким образом, формирование массивов данных является сложной задачей, требующей учета множества факторов и применения соответствующих

методов и подходов. Однако, благодаря развитию современных технологий и аналитических инструментов, предоставление качественных данных становится возможным и доступным для широкого круга исследователей и аналитиков. В будущем формирование массивов данных будет продолжать совершенствоваться, что, в свою очередь, способствует развитию исследовательских и аналитических возможностей в самых различных сферах жизнедеятельности.

Список источников

1. Шведов, Д. И. Парсинг и матчинг данных для оперативного анализа динамических ситуаций // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2017. – № 6. – С. 200-204.

2. Фролова В.Б. Большие данные и особенности их применения в финансовом менеджменте // Вестник Московского университета МВД России. - 2019. № 6. - С. 304-309.

3. Об информации, информационных технологиях и о защите информации [Электронный ресурс]: Федеральный закон Рос. Федерации от 27 июля 2006 г. №149-ФЗ. Доступ из справ.-правовой системы «КонсультантПлюс».

4. Куликов, А. А. Анализ систем хранения данных // Инновации и инвестиции. – 2023. – № 3. – С. 171-176.

References

1. Shvedov, D. I. Parsing i matching dannyh dlja operativnogo analiza dinamicheskih situacij // Gornyj informacionno-analiticheskij bjulleten' (nauchno-tehnicheskij zhurnal). – 2017. – № 6. – p. 200-204.

2. Frolova, V.B. Bol'shie dannye i osobennosti ih primenenija v finansovom menedzhmente // Vestnik Moskovskogo universiteta MVD Rossii. - 2019. №6. - p. 304-309.

3. Ob informacii, informacionnyh tehnologijah i o zashhite informacii [Jelektronnyj resurs]: Federal'nyj zakon Ros. Federacii ot 27 ijulja 2006 g. №149-FZ. Dostup iz sprav.-pravovoj sistemy «Konsultant Plus».

4. Kulikov, A. A. Analiz sistem hranenija dannyh // Innovacii i investicii. – 2023. – № 3. – P. 171-176.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 444-452.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 444-452.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.921 + 372.862

УЧЕБНЫЙ КУРС «ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА» С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Кирилл Евгеньевич Тарасов[1]✉, Оксана Викторовна Тарасова[2]
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]tarasov.kirill.orel@gmail.com✉
[2]tarasova_orel@mail.ru

Аннотация. *В статье идёт речь о значимости инженерного образования и необходимости внедрения курса «Инженерная графика» с применением система автоматизированного проектирования в профильное обучение средней общеобразовательной школы. Приводится пример содержания практической работы «Построение деталей конструктора в программе PTC Creo Parametric».*

Ключевые слова: *инженерное образование, инженерная графика, системы автоматизированного проектирования, профильное обучение, инженерные классы, графическая грамотность, графическая подготовка учащихся, информационные технологии.*

Conference paper

TRAINING COURSE "ENGINEERING GRAPHICS" WITH THE USE OF COMPUTER-AIDED DESIGN SYSTEMS

Kirill E. Tarasov[1]✉, Oksana V. Tarasova[2]
[1,2]Orel State University named after I. S. Turgenev
[1]tarasov.kirill.orel@gmail.com✉
[2]tarasova_orel@mail.ru

Annotation. *The article deals with the importance of engineering education and the need to introduce the course "Engineering Graphics" with the use of computer-aided design in specialized secondary school education. An example of the content of the practical work "Construction of constructor parts in the PTC Creo Parametric program" is given.*

© Тарасов К.Е., Тарасова О.В., 2023

Keywords: *engineering education, engineering graphics, computer-aided design systems, specialized training, engineering classes, graphic literacy, graphic training of students, information technology.*

Введение

Сегодня инженерное образование является одним из ключевых приоритетов государственной политики в образовательной сфере. В настоящее время в России растет дефицит технически грамотных, высококвалифицированных специалистов, способных обеспечить становление инновационной высокотехнологичной промышленности. Прививать интерес к технике и изобретательству молодым людям, окончившим среднюю школу и собирающимся поступать в вуз, уже поздно. Условия для развития технологического мышления необходимо создавать в средней школе.

В нашей стране созданы и продолжают совершенствоваться уникальные возможности для выявления талантливой молодежи, построения успешной карьеры в области науки, технологий, инноваций и развитие интеллектуального потенциала страны.

Основной текст

Первой ступенью в профессиональном становлении личности является школа. Именно в школе обучающиеся начинают знакомиться с профессиями, осваивать первичные практические умения и навыки, осваивать проектную деятельность, участвовать в конкурсах профессионального мастерства, конференциях и олимпиадах. Целенаправленное формирование предпрофессионального инженерного образования позволяет обучающимся подойти к выбору будущей профессии осознанно и сформировать устойчивый интерес к ее освоению.

Одним из таких шагов является организация профильного обучения школьников, направленная на изучение основ профильных дисциплин инженерного профиля подготовки. К таким дисциплинам относится «Инженерная графика», изучение основных положение которой возможно осуществлять в 10-11 классах технологического профиля и инженерных классах.

Изучение основ инженерной графики эффективно осуществлять с использованием продуктов программного обеспечения систем автоматизированного проектирования таких как PTC Creo Parametric, Solidworks, КОМПАС 3D и др.

Программа курса «Инженерная графика» с применением систем автоматизированного проектирования разработана для учащихся 10-11 классов обучающихся в инженерных классах и классах с технологическим профилем, готовящихся к поступлению в учебные заведения технического профиля. В ней рассматриваются вопросы графического оформления чертежей; основ начертательной геометрии; элементов технического рисования; машиностроительного и строительного черчения.

Курс реализуется на уровне среднего общего образования в течение 10-11 классов, рассчитан на 64 часа и состоит из модулей: «Инженерная графика с

применением PTC Creo Parametric», «Инженерная графика с применением КОМПАС-3D».

Целью курса «Инженерная графика» является использование основ начертательной геометрии, проекционного и машиностроительного черчения и инженерной и компьютерной графики, развитие у учащихся первичных представлений о принципах разработки чертежей, системах автоматизированного проектирования, навыков работы с современными системами автоматизированного проектирования, знакомство с их основными пользовательскими элементами, возможностями и общими принципами и правилами работы в них при создании и оформлении чертежей.

Задачи курса: ознакомление с предметом инженерной графики и направлениями её развития; изучение принципов разработки чертежей; изучение современных систем автоматизированного проектирования; изучение методов автоматизированного создания и оформления чертежей.

В результате усвоения этой дисциплины учащийся должен:

- ***иметь представление:*** о предмете инженерной и компьютерной графики и направлениях ее развития; о современных системах автоматизированного проектирования и инженерного анализа, их основных элементах и принципах построения и работы; о методах автоматизированного создания и оформления диаграмм и чертежей;

- ***знать и уметь использовать:*** основы инженерной и компьютерной графики; системы автоматизированного проектирования и инженерного анализа;

- ***иметь навыки:*** практической работы с системами автоматизированного проектирования и инженерного анализа для решения прикладных задач; ориентации для поиска необходимой информации в государственных стандартах.

Полученные знания и умения в рамках курса «Инженерная графика» могут эффективно использоваться, как в дальнейшем выборе профессиональной деятельности, так и для успешного обучения по инженерным специальностям в вузе. Дисциплина базируется на знаниях, полученных в процессе изучения школьного курса геометрии и основ информатики в соответствии с программой 10-11 классов общеобразовательной средней школы.

Изучение дисциплины предусматривает систематическую самостоятельную работу учащихся с рекомендуемой литературой, интернет-источниками, а также использование современных программных и технических средств при выполнении практических занятий. На практических работах обучающиеся получают навыки самостоятельного решения практико-ориентированных инженерных задач. Содержание курса позволяет уделить внимание индивидуальным интересам обучающегося, сформировать навыки выполнения и оформления практических и исследовательских работ.

Курс «Инженерная графика» знакомит обучающихся с различными направлениями инженерной деятельности, способствует самоопределению в определенной области инженерных наук и профориентации.

Содержание учебного курса

Введение. Повторение основного содержания курса «Черчение».

Основные сведения по оформлению чертежей. Геометрические построения и правила вычерчивания контуров технических деталей. Методы проецирования. Ортогональное проецирование точки, прямой и плоскости. Ортогональное проецирование плоскости. Пересечение прямой с плоскостью. Аксонометрические проекции. Геометрические тела. Пересечение поверхностей геометрических тел плоскостями. Взаимное пересечение поверхностей геометрических тел. Виды, сечения, разрезы. Основы технического черчения. Виды, сечения, разрезы.

Инженерная графика с применением PTC Creo Parametric.

Введение в САПР PTC Creo Parametric. Знакомство с программой. Пользовательский интерфейс. Навигация. Создание файла «Деталь». Операции опорных элементов. Операции формы. Операции проектирования и правки. Практическая работа: построение деталей конструктора. Создание файла «Сборка». Операции сопряжения. Практическая работа: сборка конструктора из деталей.

Инженерная графика с применением КОМПАС-3D.

Введение в САПР КОМПАС-3D. Знакомство с программой. Пользовательский интерфейс. Навигация. Создание файла «Чертеж». Импорт моделей из сторонних программ. Вставка видов с модели. Операции черчения. Практическая работа: построение чертежей деталей конструктора. Разработка сборочного чертежа. Практическая работа: разработка чертежа сборочной единицы конструктора из деталей.

Рассмотрим содержание практической работы *«Построение деталей конструктора в программе PTC Creo Parametric»* [1].

Обучающиеся приступают к разработке 3D модели человечка из LEGO в программе PTC Creo Parametric. Каждый отдельный элемент будет являться деталью, чтобы в дальнейшем мы могли произвести сборку. Для этого открываем программу PTC Creo Parametric и попадаем на начальный экран программы (Рис.1).

Далее создаем файл детали и открываем его. Перед нами появляются панели инструментов для создания детали (Рис.2).

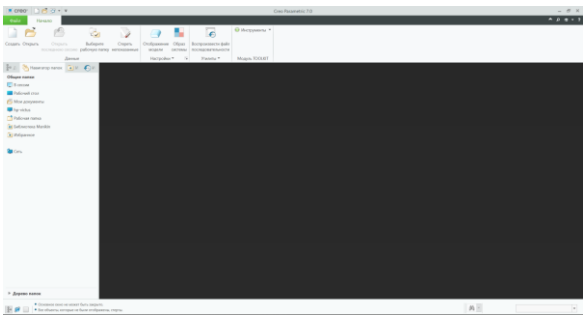


Рисунок 1. Начальный экран PTC Creo Parametric.

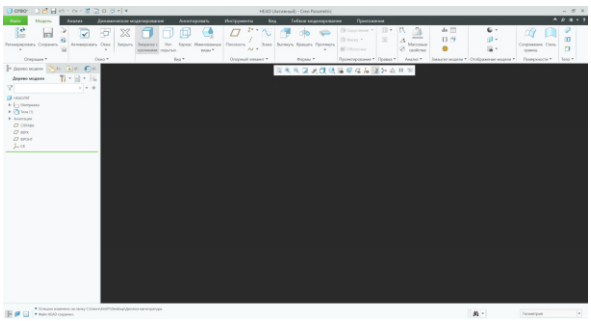


Рисунок.2. Создание детали.

Начнем с разработки модели головы. Она является телом вращения, что позволяет эффективно использовать одноименную операцию. Для этого создадим двухмерный эскиз (Рис.3). Следующим этапом применяем операцию вращение (Рис.4).

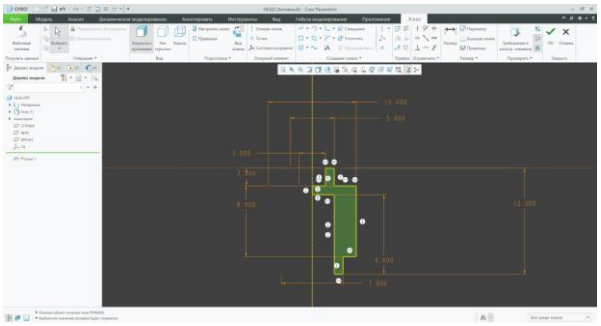


Рисунок 3. Создание эскиза детали головы.

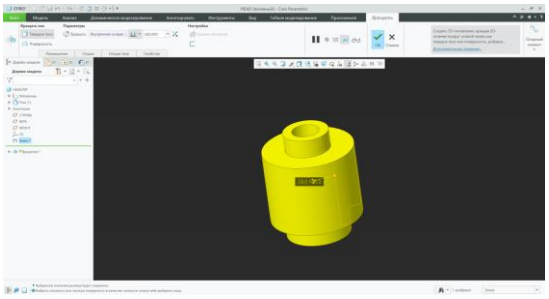


Рисунок 4. Операция вращение детали головы.

По задумке деталь не имеет острых граней по основному цилиндру, поэтому применим операцию скругление (Рис.5). Деталь готова. На следующем этапе приступим к созданию детали тела. В ее основе уже не лежат тела вращения, поэтому первой операцией мы применим прямое вытягивание. Для этого создадим двухмерный эскиз (Рис.6).

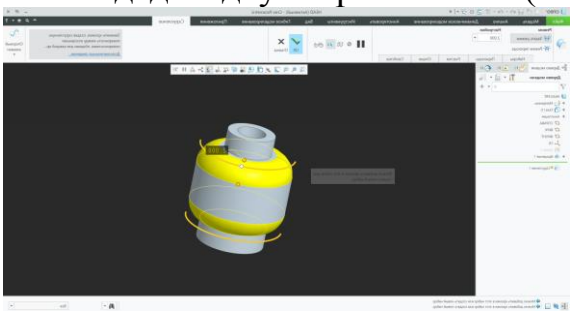


Рисунок 5. Скругление детали головы.

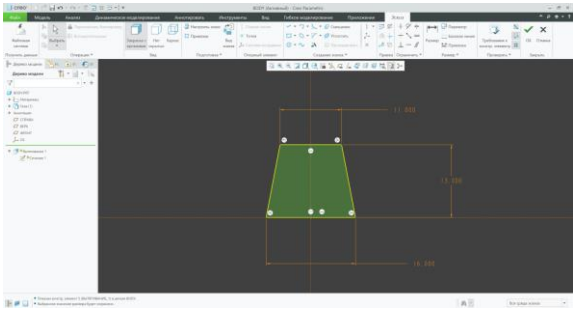


Рисунок 6. Эскиз тела.

Далее применим операцию вытягивание (Рис. 7). После этого операцией вытягивание создаем цилиндр, являющийся шеей человечка (Рис.8).

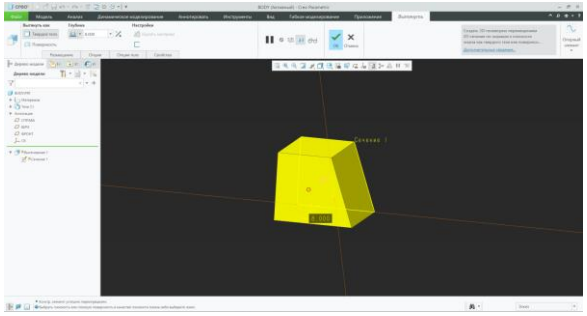


Рисунок 7. Вытягивание тела.

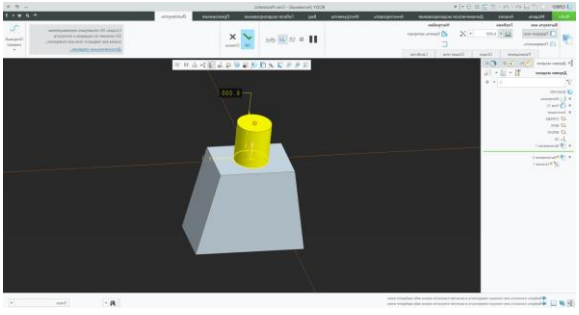


Рисунок 8. Вытягивание шеи.

Далее делаем отверстие в теле для правой руки (Рис.9). Используем зеркальное отражение для создания отверстия под левую руку (Рис. 10).

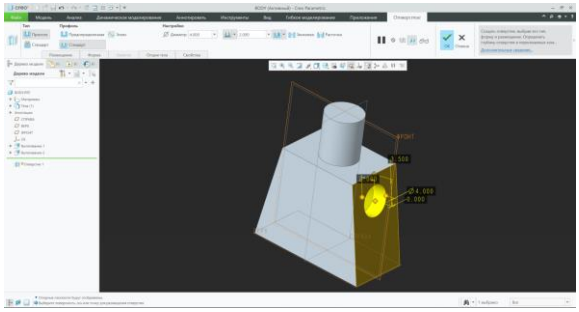


Рисунок 9. Отверстие для правой руки.

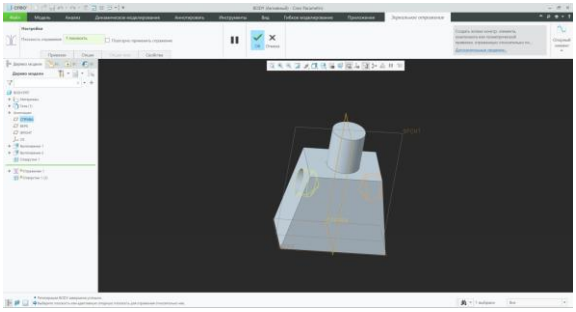


Рисунок 10. Отверстие для левой руки.

Далее создадим отверстие для ног (Рис.11). Финальным этапом по созданию детали тела является наложение скруглений (Рис.12).

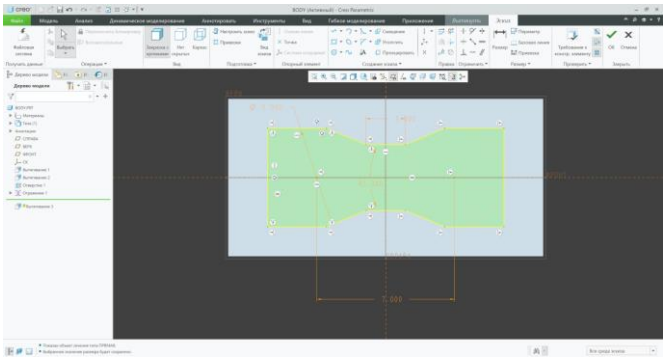


Рисунок 11. Эскиз отверстия для ног.

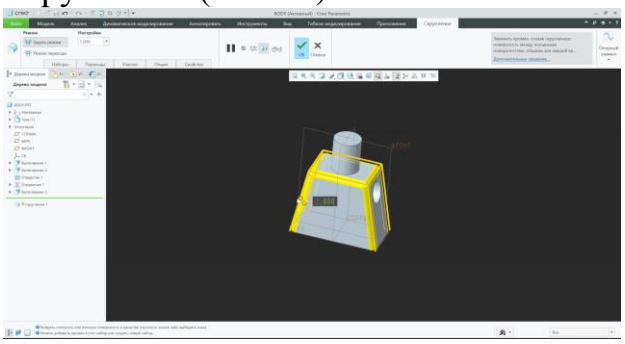


Рисунок 12. Скругления тела.

Приступим к созданию детали руки. Она имеет сложную вытянутую форму, поэтому используем операцию протягивания. Для этого создадим плоский эскиз (Рис.13). Протянем круг по построенному эскизу, образуя руку от плеча до предплечья (Рис.14).

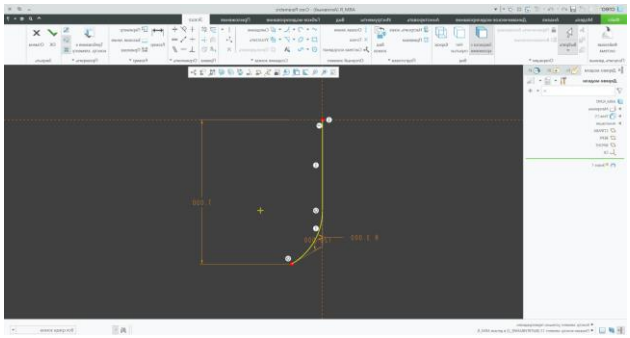


Рисунок 13. Эскиз руки для протягивания.

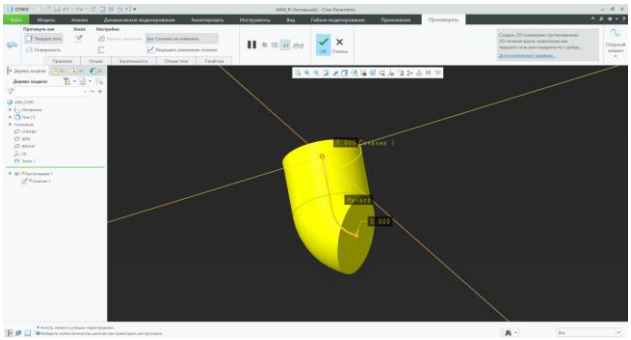


Рисунок 14. Протягивание верхней части руки.

Далее вытягиванием с сужением создадим усеченный конус – предплечье (Рис.15). Уже известными нам операциями вытягивание и отверстие завершаем создание детали руки (Рис.16).

Операцией зеркального отражения (Рис.17) создаем зависимую деталь левой руки, являющейся зеркальной копией правой (Рис.18).

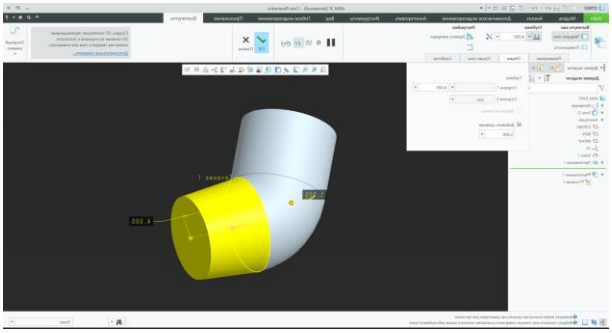


Рисунок 15. Вытягивание предплечья руки.

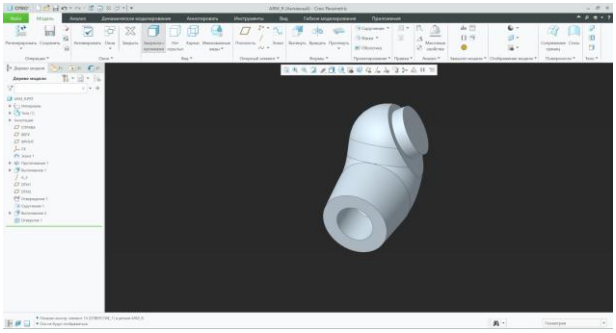


Рисунок 16. Готовая деталь правой руки.

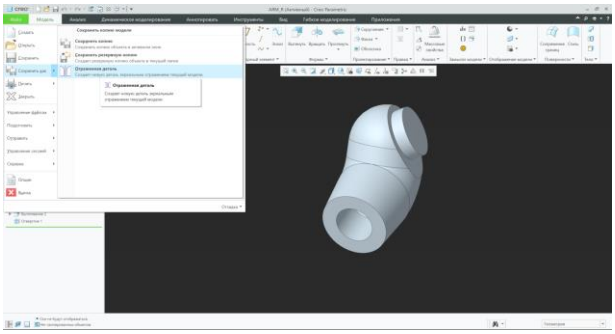


Рисунок 17. Применение операции зеркального отражения детали.

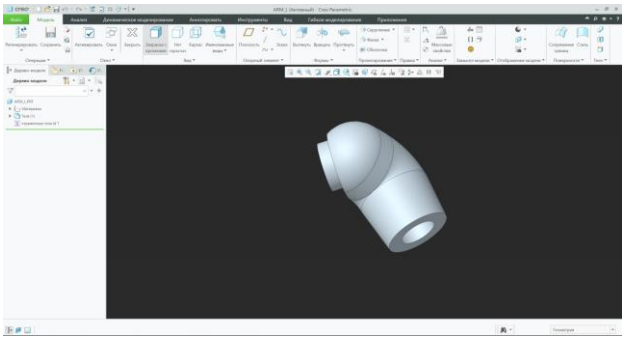


Рисунок 18. Итоговый вид детали левой руки.

Далее создадим операциями вытягивания и скругления создадим геометрию детали ног (Рис.19 и Рис.20).

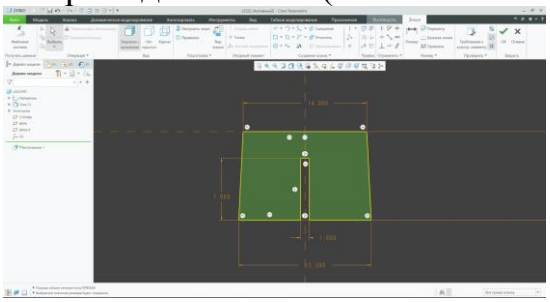


Рисунок 19. Эскиз вытягивания детали ног.

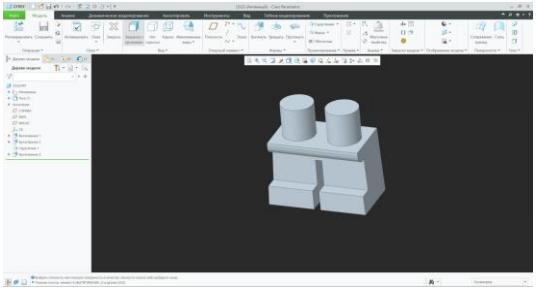


Рисунок 20. Итоговый вид детали ног.

Последней деталью модели создадим кисть (Рис.21). Данная деталь для правой и левой руки является симметричной, что позволит не создавать зеркальную копию. В предыдущей практической работе были созданы детали человечка LEGO. Теперь соберем их в единую сборку.

Для начала создадим файл сборки (Рис.22).

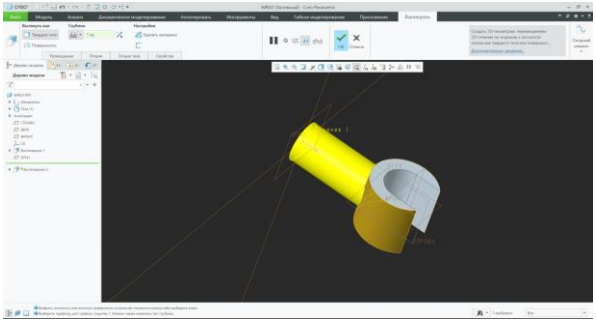


Рисунок 21. Итоговый вид детали кисти.

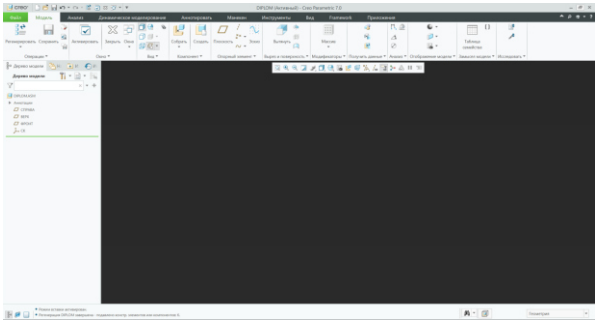


Рисунок 22. Файл сборочной единицы.

Далее разместим деталь тела человечка. Потому, что других деталей в сборке еще нет, то выберем привязку положения «По умолчанию». Это совместит начало системы координат детали и сборки (Рис.23).

Далее разместим модель головы человечка относительно тела – добавим привязку совпадения цилиндров головы и шеи, а также нижнего торца головы с поверхностью плеч (Рис.24).

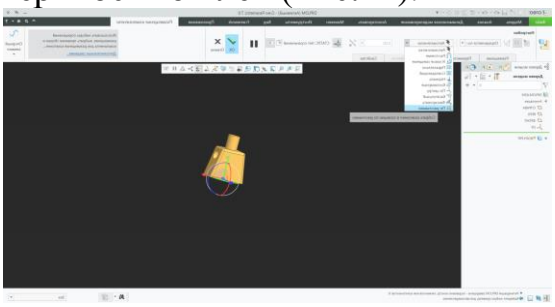


Рисунок 23. Размещение тела человечка.

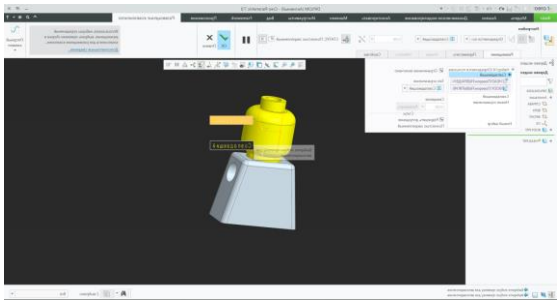


Рисунок 24. Размещение головы.

После головы добавим к сборке ноги (Рис.25). Для них потребуются привязки касательности шипов на детали ног с отверстием в теле. Кроме того, для симметричного расположения детали относительно остальной сборки зададим совпадение боковых поверхностей, предварительно включив их отображение в верхней части панели управления.

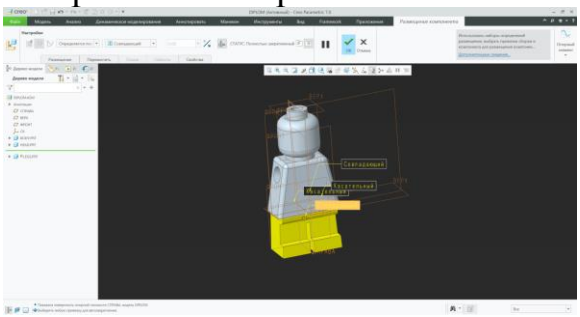


Рисунок 25. Размещение ног.

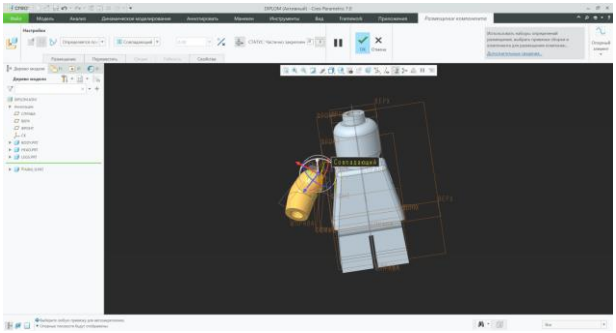


Рисунок 26. Размещение руки.

Аналогично, при помощи базовых поверхностей, разместим детали рук и кистей (Рис.26 и рис.27). Сборка человечка завершена (Рис.28).

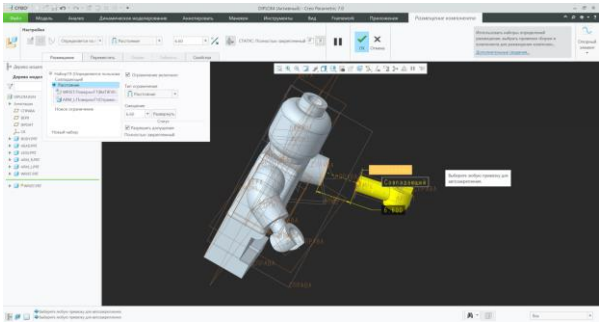


Рисунок 27. Размещение кисти.

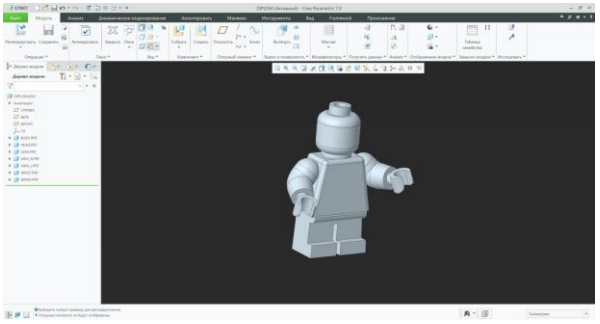


Рисунок 28. Итоговый вид человечка.

Заключение

Новизна учебного курса заключается в изменении подхода к содержанию и методам обучения учащихся. В курсе заложены различные формы работы,

направленные на расширение и углубление школьных знаний, с опорой на практическую деятельность, с учетом профориентации в выбранной профессии.

В процессе изучения основ инженерной графики учащиеся познакомятся с основными правилами построения чертежей, способами графического представления пространственных образов, возможностями пакетов прикладных программ компьютерной графики. Учащиеся научатся выполнять изображения, разрезы и сечения на чертежах, выполнять сборочный чертеж, содержащий сборочные единицы и другие данные.

В результате изучения основ инженерной графики с применением систем автоматизированного проектирования у обучающихся формируется представление о работе инженера и постепенно формируется интерес к профессии.

Список источников

1. Creo Parametric 3D Modeling Software: Программное обеспечение для 3D-моделирования : сайт. - PTC, 2023. - URL: https://www.ptc.com/en/products/creo/parametric (дата обращения: 01.11.2023). – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

References

1. Creo Parametric 3D Modeling Software: Software for 3D modeling: website. - PTC, 2023. - URL: https://www.ptc.com/en/products/creo/parametric (accessed 11.01.2023). – Access mode: for registered users. – Text: electronic.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 453-458.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 453-458.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.43

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СТАНДАРТНОЙ КОНСОЛИ WINDOWS

Владлена Владиславовна Черкасова[1]✉, Андрей Николаевич Дубоделов[2]
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]cher_vl@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0001-9169-2097
[2]andrew@imdoc.ru

Аннотация. *В данной статье авторами рассматривается возможности использования стандартных динамических библиотек Windows API для разработки аркадной компьютерной игры.*

Ключевые слова: *аркада, нумераторы, функциональный подход, динамические библиотеки.*

Conference paper

APPLICATION OF THE MULTIPLICATIVE INTEGRAL IN DIFFERENTIAL GEOMETRY

Vladlena Vl. Cherkasova[1]✉, Andrey N. Dubodelov[2]
[1,2]Orel State University, Orel, Russia
[1]cher_vl@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0001-9169-2097
[2]andrew@imdoc.ru

Abstract. *In this article, the authors consider the possibilities of using standard dynamic Windows API libraries for developing an arcade computer game*.

Keywords: *arcade, numerators, functional approach, dynamic libraries*.

1. Введение

Стандартная консоль Windows является одним из основных инструментов для работы с операционной системой. Реагирование на события, работа с файлами, создание окон, управление ресурсами – это лишь небольшая часть функций, которые реализует Windows API.

В настоящее время особый интерес представляет проектирование аркадных игр и применением функций динамической библиотеки Windows.h. Набор классов и функций, используемых в данной библиотеке, позволяет

© Черкасова В.В., Дубоделов А.Н., 2023

создавать достаточно удобные и высокопроизводительные приложения для работы с графическим интерфейсом, а также эффективно использовать системные ресурсы Windows.

Данное исследование заключалось в разработке консольного приложения, которое могло максимально эффективно использовать возможности стандартной библиотеки Windows API.

2. Основной текст статьи

Аркадные игры представляют собой довольно быстро и интенсивно развивающийся сегмент в области информационных технологий и программирования. Особенностью данного жанра игр является короткая продолжительность игры и очень интенсивный игровой процесс. Разработка аркадной игры «Змейка» осуществлялась в несколько этапов.

Первоначально была разработана общая стратегия игры, которая заключается в перемещении игрового объекта – змейки, по прямоугольному полю с целью сбора «яблок», располагающихся в случайном порядке в рамках игрового поля. Успешное потребление яблок приводит к увеличению количества звеньев змейки. В случае неудачи, то есть ошибочного перемещения: попадания в границу игрового поля или в любое звено самой змейки – игра заканчивается. При положительном исходе – змейка полностью заполняет игровое поле.

Логика игрового процесса, так называемый игровой цикл, состоит из нескольких основных элементов: окна в начала игры, реализации непосредственно активной фазы при движении змейки, окна приложения конца игры и запроса приложения на повтор.

Реализация стартового окна представлена на Рисунке 1.

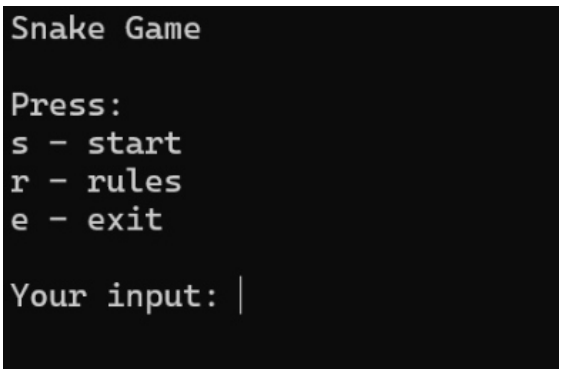


Рисунок 1. Начало аркадной игры «Змейка»

Для просмотра правил игры необходимо использовать ключ *r* или *R*. В работе игры отсутствует чувствительность к регистру, а также выполняется проверка на правильность введенного пользователем ключа начального меню.

Программная реализация активной фазы игры основывалась на применении функционального подхода в программировании [1]. Разработаны специальные функции, которые определяют размер игрового поля и расположение всех элементов интерфейса относительно него.

Основной элемент игры – змейка, реализуется с использованием такой структуры данных, как двухсторонняя очередь. Она представляет собой контейнер, который можно расширять или сжимать как с начала, так и с конца. В качестве начального положения змейки выбрана середина поля.

Появления яблок в рамках игрового поля реализуется с помощью пользовательской функции spawnApple(), которая генерирует координаты яблока с учетом размеров игрового поля и текущего положения змейки.

Реализация игрового цикла определяется функцией GameLoop(), в которой заложена основная игровая логика. В GameLoop() используются стандартные функции библиотеки Windows.h, функция PlaySound() является одной из таких функций [2]. Вызов функции осуществляется заданием нескольких аргументов. Первый аргумент является макросом препроцессора, который содержит наименование проигрываемого файла. Определяется оно как указатель на строку в кодировке Unicode или ANSI. Второй аргумент задаёт подгружаемые ресурсы и, по умолчанию, соответствует значению NULL. Третий аргумент представляет собой побитовое ИЛИ между флагами, определяющими свойства проигрываемого звука. Функция PlaySound() позволяет работать с аудио-файлами высокого качества (.wav) на низком уровне, обновляя аудиоданные без потерь.

За расположение элементов игрового окна отвечает подфункция MoveToXY(). Одним из аргументов данной функции является структура COORD. Она хранит две координаты символьных ячеек консоли: X и Y. Так, например, координаты (0, 0) принадлежат верхней левой ячейке буфера, отображаемой на экране.

Процесс консоли получает доступ к входным буферам и буферам экрана консоли с помощью дескрипторов, поэтому, воздействуя на них, можно изменять отображаемые и вводимые в консоль данные. Через функцию GetStdHandle() библиотеки Windows.h можно получить дескриптор стандартного устройства ввода (STD_INPUT_HANDLE), вывода (STD_OUTPUT_HANDLE), либо стандартной ошибки (STD_ERROR_HANDLE) соответственно.

Функция SetConsoleCursorPosition() в качестве аргументов использует дескриптор буфера экрана и позицию курсора, позволяя задать позицию курсора в указанном буфере, то есть изменить позицию курсора на экране. Задавая эту позицию, мы можем писать текст или отрисовывать символы в любом месте консоли.

Изменение цвета и атрибутов символов игрового поля задаётся функцией SetTextColor(). Для получения дескриптора стандартного устройства вывода данная функция использует GetStdHandle(), а далее через функцию SetConsoleTextAttribute(), принимающую в качестве аргументов дескриптор и флаг, обозначающий цвет, непосредственно изменяет цвет не всей ячейки консоли, а цвет отображаемого в ней текста.

Необходимо отметить, что, по умолчанию, консоль Windows поддерживает 16 цветов, созданных комбинированием через побитовое ИЛИ флагов атрибутов FOREGROUND_BLUE (синий), FOREGROUND_RED

(красный), FOREGROUND_GREEN (зелёный) с наложением FOREGROUND_INTENSITY, который повышает интенсивность цвета, делая его ярче.

Таким образом, в программе как директивы препроцессора добавлены ещё два цвета: жёлтый и фиолетовый (Листинг 1).

```
#define YELLOW_COLOR FOREGROUND_GREEN | FORE-GROUND_RED | FOREGROUND_INTENSITY
#define MAGENTA FOREGROUND_RED | FOREGROUND_BLUE | FO-REGROUND_INTENSITY
```

Листинг 1. Добавление директив препроцессора.

Определять цвета можно напрямую числовыми значениями. Например, чёрный – 0, синий – 1, зелёный– 2. Вернуть первоначальный серый цвет можно через побитовое наложение всех трёх флагов.

В программном коде аркадной игры возврат исходного цвета определён директивой препроцессора с использованием функции SetTextColor(), представленной в Листинге 2.

```
#define YELLOW_COLOR FOREGROUND_GREEN | FORE-GROUND_RED | FOREGROUND_INTENSITY
#define MAGENTA FOREGROUND_RED | FOREGROUND_BLUE | FO-REGROUND_INTENSITY
#define SET_DEFAULT_COLOR SetTextColor(FOREGROUND_RED | FOREGROUND_GREEN | FOREGROUND_BLUE)
```

Листинг 2. Функция возврата цвета SetTextColor().

Важным элементом любой игры является возможность пользователя взаимодействовать с ней. Windows API позволяет считывать нажатие клавиш клавиатуры, что реализовано в функции checkDirection() с использованием функции GetKeyState() библиотеки Windows.h (Листинг 3).

```
char checkDirection() {
    if ((GetKeyState('A') | GetKeyState(VK_LEFT)) & 0x8000)
        return LEFT;
    else if ((GetKeyState('D') | GetKeyState(VK_RIGHT)) & 0x8000)
        return RIGHT;
    else if ((GetKeyState('W') | GetKeyState(VK_UP)) & 0x8000)
        return UP;
    else if ((GetKeyState('S') | GetKeyState(VK_DOWN)) & 0x8000)
        return DOWN;
    return NONE;
}
```

Листинг 3. Реализация функции checkDirection()

Стандартная функция GetKeyState() извлекает статус необходимой виртуальной клавиши. Используя маску 0x0800, получаем непосредственно значение 1, если клавиша была нажата, или 0, если клавиша не нажата. В качестве аргумента функции GetKeyState() можно использовать символ (тип char). Например, GetKeyState('A'). Однако для получения специальных клавиш, таких как shift, ctrl, стрелок вверх, влево, вправо, вниз необходимо

использовать специальные макросы VK_SHIFT, VK_CONTROL и VK_UP, VK_DOWN, VK_LEFT, VK_RIGHT.

Для более удобного понимания направления движения змейки в коде использован тип enum (перечисление) – это определённый пользователем тип [3], состоящий из именованных целочисленных констант – перечислителей, по умолчанию, соответствующих значениям от 0 до *n*-1, где *n* – количество заданных констант: enum DIRECTION {NONE, LEFT, RIGHT, UP, DOWN}.

В данном случае мы задаём свои константы NONE, LEFT, RIGHT, UP, DOWN, которые соответствуют значениям 0, 1, 2, 3, 4. Ничего не мешает использовать значения напрямую, но использование enum значительно упрощает восприятие кода

Также для взаимодействия с консолью использовалась функция system(), стандартной библиотеки cstdlib. Функция позволяет выполнять внутренние команды операционной системы прямо из кода, а не напрямую из командной строки, принимая аргументом саму команду в виде указателя на строку.

В случае Windows, функция находит и использует её стандартный интерпретатор команд (обычно CMD.EXE) и переводит указанный аргумент в команду.

Например, system("cls"); для очистки всего содержимого консоли system("pause > nul"); "pause" используется для заморозки консольного окна в ожидании действий пользователя, а system(" > nul") позволяет использовать команду "бесшумно", то есть без отображения хода выполнения и результата для пользователя.

3. Заключение

В заключении необходимо отметить, что разработанные пользовательские функции могут быть использованы не только в проектировании консольных приложений и игр, но и в программировании панелей приборов.

Список источников

1. Чукич И. Функциональное программирование на C++ / пер. с англ. В.Ю. Винника, А.Н. Киселева. – М.: ДМК Пресс, 2020. – 360 с.

2. Windows App Development [Электронный ресурс] // Using the Windows Headers – Win32 apps | Microsoft Learn: [сайт]. [2023]. URL: https://learn.microsoft.com/en-us/windows/win32/winprog/using-the-windows-headers (дата обращения: 30.10.2023).

3. Прат С. Язык программирования C++ : Пер. с англ. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2012. – 1248 с.

References

1. Chukich I. Functional programming in C++ / translated from English by V.Yu. Vinnik, A.N. Kiseleva. – M.: DMK Press, 2020. – 360 p. . (In Russ.).

2. Windows App Development [Электронный ресурс] // Using the Windows Headers – Win32 apps | Microsoft Learn: [сайт]. [2023]. URL: https://learn.microsoft.com/en-us/windows/win32/winprog/using-the-windows-headers (дата обращения: 30.10.2023).

3. Prat S. Programming language C++ : Translated from English – M.: LLC "I.D. Williams", 2012. – 1248 p. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 459-465.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 459-465.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.056.5

СОЦИАЛЬНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ: НОВЫЕ ТРЕНДЫ

Юлия Владимировна Чижикова[1]✉, Виталий Викторович Чижиков[2]
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]detkovayv@mail.ru✉, [2]chizhikovvv@bk.ru

Аннотация. *В статье рассматриваются проблемы распространения технологий социальной инженерии в современном цифровом мире, выявляются тренды развития данных технологий и их влияние на информационную безопасность, а также выделяются основные направления деятельности для противодействия методам социальных инженеров.*

Ключевые слова: *социальная инженерия, информационная безопасность, угрозы информационной безопасности, человеческий фактор, тренды*

Conference paper

SOCIAL ENGINEERING: NEW TRENDS

Yulia V. Chizhikova[1]✉, Vitaly V. Chizhikov[2]
[1,2]Orel State University, Orel, Russia
[1]detkovayv@mail.ru✉
[2]chizhikovvv@bk.ru

Abstract. *The article discusses the problem of the spread of social engineering technologies in the modern digital world, identifies trends in the development of these technologies and their impact on information security, and also identifies the main areas of activity to counter the methods of social engineers.*

Keywords: *social engineering, information security, threats to information security, human factor, trends*

1. Введение

Дистанционное мошенничество становится все более серьезной проблемой. Так, например, по данным Сбера в 2022 году с попытками обмана по телефону или интернету столкнулись 83% граждан РФ. Причем за последние два года фиксируется кратный рост количества попыток обманных действий, а также значительное увеличение дохода злоумышленников их осуществляющих.

© Чижикова Ю.В., Чижиков В.В., 2023

По данным экспертов в области кибербезопасности, объем мошенничества в РФ на сегодня оценивается в сумму от 55 до 150 миллиардов рублей в год. При этом на социальную инженерию приходится 85% всех финансовых преступлений.

В эпоху цифровых технологий социальная инженерия стала одним из наиболее эффективных методов нарушения информационной безопасности. Для данного термина нет строгого определения, можно сказать, что социальная инженерия – это методы психологического манипулирования людьми с целью получения доступа к защищаемым системам. Метод ориентирован на использование слабостей человеческого фактора и является крайне эффективным. [1, 6]

Эксперты уверены, что киберпреступники будут и дальше активно пользоваться методами социальной инженерии, которая становится все более изощренной и сложной для обнаружения.

2. Основной текст статьи

В 2022 году Банк России опубликовал очередной обзор операций, совершенных без согласия клиентов финансовых организаций. Согласно отчету Центробанка, основным инструментом злоумышленников для хищения средств осталось использование приемов и методов социальной инженерии, когда человек под психологическим воздействием добровольно переводит денежные средства или раскрывает банковские сведения, позволяющие злоумышленникам совершить хищение.

Согласно анализу, объем операций без согласия клиентов в 2022 году увеличился по сравнению с 2021 годом на 4,29% на фоне активного развития новых дистанционных платежных сервисов и роста объема денежных переводов (+39%, до 1458,6 трлн. руб.). При этом, благодаря расширению комплекса мер, которые банки принимают для противодействия мошенничеству, количество операций без согласия клиентов в 2022 снизилось на 15,31% по сравнению с 2021 годом. На рисунке 1 приведена динамика изменения общего объема и количества операций без согласия клиентов с 2019 по 2022 годы. [2-5]

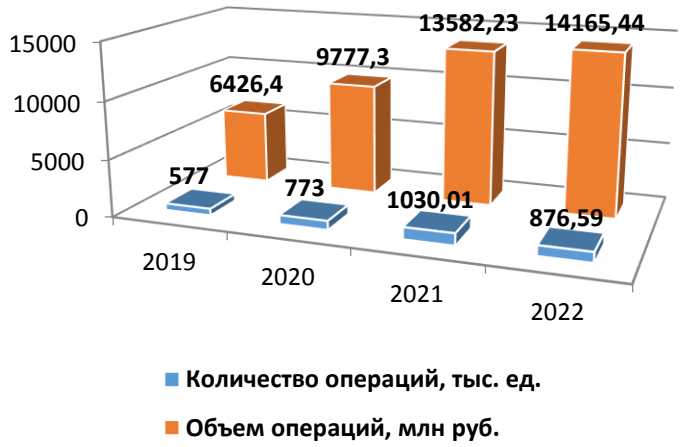


Рисунок 1. Общий объем и количество операций без согласия клиентов.

По оценкам Банка России, в 2022 году наблюдался значительный рост средней суммы одного хищения, совершенного с использованием приемов и

методов социальной инженерии. Средняя сумма одной операции без согласия клиента в 2022 году составила 15320 рублей, что, в том числе привело к увеличению общего размера ущерба по операциям без согласия клиентов. На рисунке 2 приведена динамика изменения средней суммы одной операции без согласия клиента с 2019 по 2022 годы. [2-5]

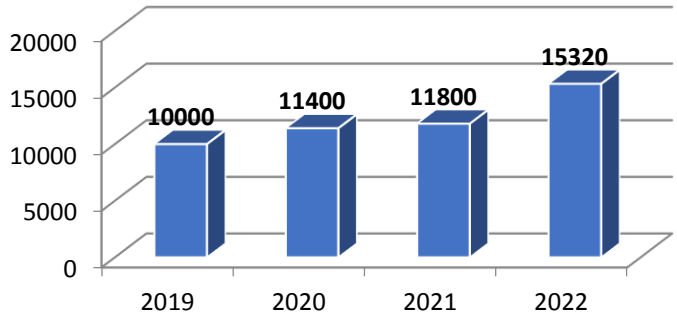


Рисунок 2. Средняя сумма одной операции без согласия клиента (руб.)

Анализируя приведенные в отчете данные о количестве и объеме операций без согласия клиентов, а также средней суммы одной операции, можно сделать вывод о сохранении выявленного в 2021 году тренда перехода злоумышленников от стратегии «от многих по чуть-чуть» к стратегии «от одного, но много», что, в частности, приводит к росту объемов средней суммы хищений. Так, например, максимальная единовременно похищенная сумма в 2022 году достигла 500 млн. рублей.

При этом возврат похищенных средств демонстрирует динамику уменьшения возмещаемых объемов. Так в 2022 году клиентам кредитных организаций вернули 4,4% (618,4 млн. руб.) от всего объема операций по переводу денежных средств, совершенных без согласия клиентов. В 2021 году данный показатель составил 6,8%, или 920,5 млн. руб.. На рисунке 3 приведена динамика изменения объемов денежных средств, возвращенных клиентам с 2019 по 2022 годы. [2-5]

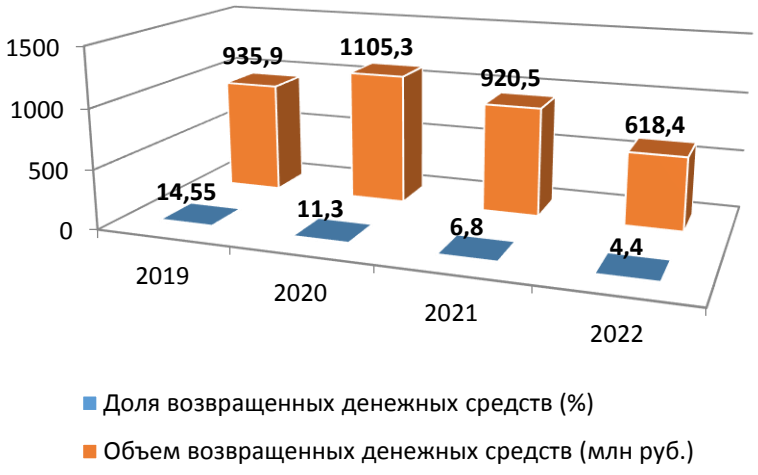


Рисунок 3. Общий объем денежных средств, возвращенных клиентам.

Отметим, что на данный момент закон не обязывает банки возвращать деньги, украденные с помощью приёмов социальной инженерии.

Согласно отчету Центробанка, за 2022 год, наиболее частым способом осуществления мошеннических действий является телефонное мошенничество. На рисунке 4 приведены наиболее распространенные каналы реализации финансовых хищений.

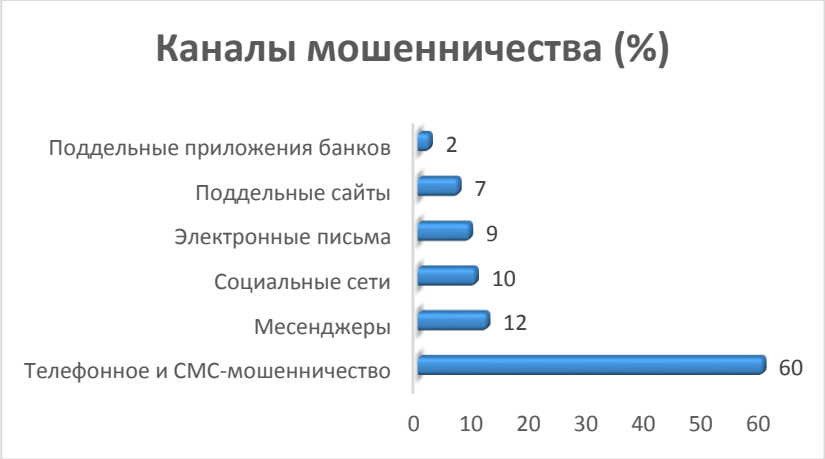


Рисунок 4. Каналы совершения мошеннический действий (%).

В 2023 году Сбер фиксирует тренд на увеличение числа мошеннических звонков. По данным банка в 2022 году среднее количество мошеннических звонков и других инцидентов достигло 6 млн в день. За последний год их количество выросло в 1,7 раза и в 2023 году средний показатель в сутки достиг 8,6 млн звонков. Против россиян ежедневно работают порядка 180-200 тыс. злоумышленников, которые организованы в мошеннические колл-центры. При этом, по мнению ЦБ, 90% мошеннических колл-центров расположено на территории Украины.

В 2022 году Банк России инициировал блокировку 756 072 номеров телефонов, используемых злоумышленниками для хищения средств у граждан, что в 4 раза больше, чем в 2021 году (179 071 номеров), зафиксировав максимум с начала такой работы в 2019 году.

Современные технологии IP-телефонии позволяют совершать звонки, подменяя реальный номер таким, который не вызовет сомнений у абонентов, например, официальный номер телефона банка. Встречаются случаи, когда абонентам звонят от имени их друзей, родственников просят срочно перевести деньги, а на экране телефона при этом высвечивается заданный злоумышленниками контакт. Пока подмена телефонного номера остается одним из самых распространенных способов осуществления финансовых краж.

Для борьбы с мошенничествами, использующими подменные номера с 1 января 2023 года вступили в силу требования статьи 46.1 Федерального закона от 7 июля 2003 года № 126-ФЗ «О связи». Представители операторов связи, Минцифры и Роскомнадзора на совместной встрече объявили, что будут бороться с телефонным мошенничеством с помощью Единой платформы верификации телефонных вызовов (ЕПВВ). Единая платформа верификации телефонных вызовов «Антифрод» предназначена для проверки того, действительно ли вызов идет с номера определившегося оператора. ЕПВВ была запущена в декабре 2022 года и является хабом, который объединяет операторов связи в борьбе с телефонным мошенничеством. Система

позволяет подключить 2000 российских операторов, включая региональные и транзитные, обработать и идентифицировать 800 млн. российских номеров. Представители Билайна, Мегафона, МТС и Tele2 объявили, что верифицируют 96% своих номеров, а 5 крупнейших российских мобильных операторов, которые владеют 80% номерной емкости РФ, уже подключены к ЕПВВ.

Мошенники отреагировали на борьбу с подменой номеров миграцией в номерную базу еще не подключенных к ЕПВВ региональных и транзитных операторов. Также во второй половине 2022 года увеличилось число попыток мошенничества с помощью звонков через мессенджеры и использование зарубежных телефонных номеров. Так как эти номера реальные, а не подменные, они проходят верификацию ЕПВВ. При этом жертвы мошенников часто игнорируют факт звонка из-за границы.

К марту 2024 все российские операторы связи должны подключиться к ЕПВВ. Эксперты предполагают, что после полного подключения, система будет очень эффективна в борьбе с подменой телефонных номеров и как следствие, произойдет миграция преступников в мессенджеры. При этом, технический вопрос с блокировкой номеров мошенников в мессенджерах пока открыт.

В качестве тренда можно выделить стремление злоумышленников не только получить доступ к средствам на счетах граждан, но и вынудить их оформить миллионные кредиты. Так, например, за 2022 год Сбер получил 5 млрд. сообщений о попытках мошенничества, в 25% случаях мошенники хотели похитить кредитные, а не личные финансы. В свою очередь согласно данным Банка России в том же 2022 году под влиянием телефонных преступников российские граждане пытались оформить кредиты на 200 млрд. рублей. Не все попытки увенчались успехом, однако статистика внушительная.

Для борьбы с кредитами, оформленными мошенническим путем Банк России разработал процедуру самозапрета на онлайн-кредитование. Самозапрет на кредиты – это ограничение, которое банк по заявлению клиента накладывает на операции, осуществляемые с помощью удаленного доступа через интернет. Запретить можно как отдельно кредитование, так и другие банковские операции или установить максимальную сумму кредита.

В январе 2023 года Центробанк подготовил законопроект, который позволит делать этот запрет единым для всех кредитных организаций. Банк России предлагает вносить ограничения в кредитную историю, чтобы банки и МФО видели его перед выдачей потребительских кредитов и займов. В предложенном Центробанком законопроекте предполагается, что самозапрет на кредиты можно будет выставить на «Госуслугах», эти данные автоматически попадут в бюро кредитных историй. 10 октября 2023 года Госдума приняла законопроект в первом чтении. Законопроект № 341256-8 О внесении изменений в Федеральный закон «О кредитных историях» и Федеральный закон «О потребительском кредите (займе)» (о праве заемщика установить запрет на заключение с ним договоров потребительского кредита (займа)). Пока законопроект не вступил в силу можно написать заявление о запрете онлайн-кредитования в конкретных банках.

Сценариев звонков злоумышленников достаточно много. Мошенники быстро адаптируются к изменениям в социальной, политической и экономической жизни общества. Однако, по-прежнему используются звонки от якобы специалистов «службы безопасности банка», «правоохранительных органов», «Центрального банка», автоинформаторов и роботизированных помощников. Кстати, в Сбере посчитали, что более 50% звонков мошенников совершается от имени «сотрудника правоохранительных органов», 27% от лица «службы безопасности банка», 12% от «технической поддержки».

С 2022 года к ранее используемым сценариям добавились сценарии, связанные с частичной мобилизацией и проведением СВО.

Из последних тенденций – мошенники обвиняют клиентов банков в госизмене и обещают до 20 лет лишения свободы. Мошенники звонят клиенту и представляются сотрудниками полиции или ФСБ. Сообщают, что сотрудник банка, в котором обслуживается клиент, украл его персональные данные и осуществляет с его счета переводы в пользу армии Украины. Но так как ответственность лежит на владельце карты, клиент может быть обвинен в государственной измене, за что ему грозит до 20 лет лишения свободы. В дальнейшем мошенники представляются «службой безопасности банка» и вынуждают клиента переводить свои средства на их счета и даже брать кредиты, объясняя это тем, что таким образом они смогут вычислить «сотрудника» банка, якобы укравшего персональные данные клиента.

В приведенном сценарии мошенничества также реализуется тренд на участие в мошеннических действиях нескольких действующих лиц («сотрудник правоохранительных органов», «специалист службы безопасности банка»), что увеличивает вероятность убедить человека в правдивости истории.

Пострадать от действий финансовых мошенников может любой человек, независимо от его возраста и статуса. Тем не менее, опрос Банка России позволил сформировать среднестатистический портрет клиента банка, наиболее уязвимого для обмана. Это работающий мужчина со средним уровнем дохода и средним образованием в возрасте от 25 до 44 лет, проживающий в городе. [2]

3. Заключение

Эксперты в области информационной безопасности уверены, что злоумышленники и дальше будут активно пользоваться методами социальной инженерии, которая становится все более изощренной и сложной для обнаружения. Техники злоумышленников постоянно совершенствуются. Письма по электронной почте, сообщения в социальных сетях и мессенджерах, телефонные звонки, в том числе с применением ботов. Для достижения цели используются все возможные каналы коммуникаций.

Однако, также появляются, развиваются и совершенствуются средства противодействия методам злоумышленников. Повышение финансовой грамотности населения в части обеспечения безопасности применяемых информационных и платежных технологий, совершенствование законодательства Российской Федерации в области обеспечения информационной безопасности, разработка и внедрение новых программных и технических средства информационной защиты.

Список источников

1. Кристофер Хэднеги Искусство обмана: Социальная инженерия в мошеннических схемах/ пер. с англ. А. Соломина. – М.: Альпина Паблишер, 2020. – 430 с.

2. Банк России, Обзор операций, совершенных без согласия клиентов финансовых организаций за 2022 год. — М.:, 2023. — 13 с.

3. Банк России, Обзор операций, совершенных без согласия клиентов финансовых организаций за 2021 год.: [сайт]. — URL: https://cbr.ru/analytics/ib/operations_survey/2021/ (дата обращения: 25.10.2023).

4. Банк России, Обзор операций, совершенных без согласия клиентов финансовых организаций за 2020 год. — М.:, 2021. — 16 с.

5. Банк России, Основные типы компьютерных атак в кредитно-финансовой сфере в 2019-2020 годах. — М.:, 2021. — 49 с.

6. Чижикова Ю. В. О противодействии технологиям социальной инженерии//Современные проблемы физико-математических наук. Материалы VII всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – 2021. – С. 422–427.

References

1. Christopher Hadnegy The Art of Deception: Social Engineering in Fraud Schemes / trans. from English A. Solomina. – M.: Alpina Publisher, 2020. – 430 p.

2. Bank of Russia, Review of transactions carried out without the consent of clients of financial organizations for 2022. - M.:, 2023. - 13 p.

3. Bank of Russia, Review of transactions carried out without the consent of clients of financial organizations for 2021.: [website]. — URL: https://cbr.ru/analytics/ib/operations_survey/2021/ (accessed: 10/25/2023).

4. Bank of Russia, Review of transactions carried out without the consent of clients of financial organizations for 2020. - M.:, 2021. - 16 p.

5. Bank of Russia, Main types of computer attacks in the credit and financial sector in 2019-2020. - M.:, 2021. - 49 pp.

6. Chizhikova Yu. V. On counteraction to social engineering technologies // Modern problems of physical and mathematical sciences. Materials of the VII All-Russian scientific and practical conference with international participation. – 2021. – pp. 422–427.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 466-469.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 466-469.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.851

КЛЕПСИДРЫ

Александра Евгеньевна Богатырь[1], Илья Алексеевич Воронкин[2], Софья Борисовна Богданова[3]✉
[1,2,3]Московский государственный технический университет гражданской авиации, Москва, Россия
[1]bogvvrtm@icloud.com
[2]mixail.koshkin.04@bk.ru
[3]sonjaf@list.ru✉, https://orcid.org/0000-0001-8503-1794

Аннотация: *Приведен пример нетривиальной задачи на составление дифференциального уравнения с разделяющимися переменными и близкая к ней, более простая физическая задача. Показана историческая ретроспектива задачи, указывающая на простоту и оригинальность конструкции водяных часов.*

Ключевые слова: *уравнения с разделяющимися переменными, поверхность вращения, часы.*

Conference paper

CLEPSYDRA

Aleksandra E. Bogatyr[1], Ilya A. Voronkin[2], Sophie B. Bogdanova[3]✉
[1,2,3]Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia
[1]bogvvrtm@icloud.com
[2]mixail.koshkin.04@bk.ru
[3]sonjaf@list.ru✉, https://orcid.org/0000-0001-8503-1794

Abstract: *The example of a nontrivial problem for composing a differential equation with separable variables and a simpler physical problem close to it were given. The historical retrospective of the problem was shown, pointing to the simplicity and originality of the design of the water-clock.*

Keywords: *equations with separable variables, rotational surface, clock.*

© Богатырь А.Е., Воронкин И.А., Богданова С.Б., 2023

1. Введение

В настоящем сообщении мы приведем пример, ярко иллюстрирующий приложение обыкновенных дифференциальных уравнений к явлениям окружающего мира [1]. Речь пойдет о математическом обосновании принципа действия первых водяных часов, клепсидров, известных еще со второго тысячелетия до н.э. [2]. Принцип действия таких часов выглядит очень просто: уровень воды поочередно достигает начертанных на стенке чаши отметок, тем самым отсчитывая «истекшие» промежутки времени. Естественно, что на дне чаши имелось при этом небольшое отверстие для вытекания воды. Такие часы использовались в греческих и римских судах для хронометрирования речей адвокатов, чтобы не допускать слишком долгих выступлений. К слову сказать, водяные часы были изобретены на полторы тысячелетия раньше маятниковых часов, созданных Гюйгенсом в 1657 году, и нисколько не уступающим им в точности хода [3]. Наша задача состоит в нахождении формы водяных часов.

2. Математическая модель водяных часов

Итак, рассмотрим сосуд произвольной формы (рис. 1), поэтому площадь его горизонтального сечения можно считать произвольной функцией расстояния сечения до дна сосуда. Высота уровня жидкости в начальный момент времени $t=0$ равна h метров. Пусть площадь сечения на высоте x равна $S(x)$, а площадь отверстия на дне сосуда s.

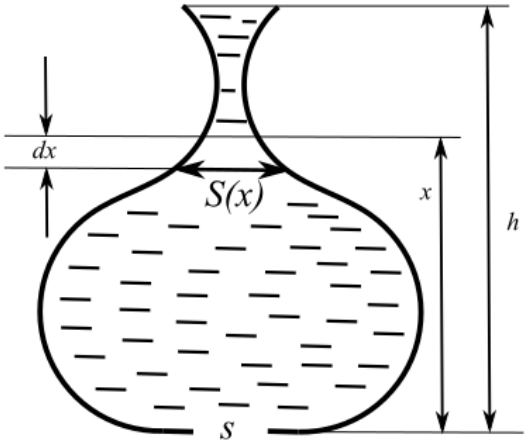


Рисунок 1. Геометрия задачи.

Известно, что скорость истечения жидкости v в момент, когда высота ее уровня равна x определяется равенством $\mathrm{v}=k\sqrt{2gx}$, где k – коэффициент скорости истечения жидкости из отверстия [4–5]. На бесконечно малом промежутке времени dt истечение жидкости можно считать равномерным, поэтому за время dt вытечет столбик жидкости, высота которого $\mathrm{v}dt$ и площадь сечения S, это вызовет понижение уровня жидкости в сосуде на dx. В силу этого можно записать дифференциальное уравнение:

$$ks\sqrt{2gx}dt = Sdx, \qquad (1)$$

или:

$$dt = -\frac{S(x)}{ks\sqrt{2gx}}dx. \qquad (2)$$

Используя (2), найдем, к примеру, время истечения воды из цилиндрического резервуара с вертикальной осью высотой 6 м и диаметром 4 м, которое имеет на дне круглое отверстие радиусом 1/12 м.

Ясно, что $S(x) = 4\pi$ и $s = \frac{\pi}{144}$. Для воды $k = 0.6$ и, следовательно, уравнение 2 примет вид:

$$dt = -\frac{217{,}152}{\sqrt{x}}dx$$

Интегрируя это уравнение, находим искомую зависимость уровня воды от времени *t*:

$$t = 434{,}304(\sqrt{6} - \sqrt{x}),\ 0 \le x \le 6.$$

При $x = 0$ время истечения воды окажется равным приблизительно 18 минут.

Для решения поставленной задачи о форме водяных часов уравнение (2) перепишем так:

$$\sqrt{x} = -\frac{S(x)}{ks\sqrt{2g}}\frac{dx}{dt}, \qquad (3)$$

И сделаем вполне естественное предположение, что чашу можно рассматривать как поверхность вращения, т.е. $S(x) = \pi r^2$. Тогда из (3) следует, что:

$$\sqrt{x} = -\frac{\pi r^2}{ks\sqrt{2g}}a, \qquad (4)$$

где $a = \frac{dx}{dt}$ – скорость падения свободной поверхности жидкости, которая по условию задачи должны быть постоянной. Далее, возведем обе части уравнения в квадрат и тогда:

$$x = cr^4, \qquad (5)$$

где $c = \frac{a^2\pi^2}{2gk^2s^2}$. Последнее означает, что форма поверхности водяных часов получается вращением кривой 5 вокруг оси (ox) (рис.2).

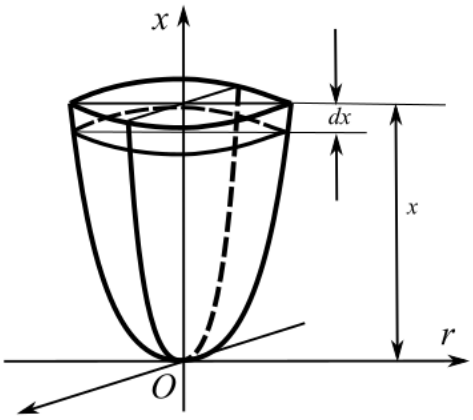


Рисунок 2. Водяные часы имеют форму поверхности вращения, образованная вращением кривой $x = cr^4$ вокруг оси (ox).

3. Заключение

В заключение отметим, что рассмотренная задача послужит полезным дополнением при изучении курса дифференциальных уравнений, в частности, при знакомстве с темой «Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными».

Список источников

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Москва. Физматлит. 1959. – 916 с.
2. Агеева В.В. Гидравлика. Ч 2. Гидродинамика. Учебное пособие. Нижний Новгород. Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет. 2011. - 25 с.
3. Амелин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. Москва, ЛЕНАНД, 2021. – 206 с.
4. Пипуныров В.Н. История часов. С древнейших времен до наших дней. Москва, Издательство «Наука». 1982. - 26 с.
5. Гешев П.И. Основы гидродинамики. Учебное пособие. Новосибирск. Новосибирский Государственный университет. 2021. – 62 с.

References

1. Andronov A.A., Witt A.A., Khaykin S.E. The theory of oscillations. Moscow. Physical education. 1959. - 916 p.
2. Geshev P.I. Fundamentals of hydrodynamics. Tutorial. Novosibirsk. Novosibirsk State University. 2021. – 62 p.
3. Pipunyrov V.N. The history of the watch. From ancient times to the present day. Moscow, The science, 1982. - 26 p.
4. Ageeva V.V. Hydraulics. Ch2. Hydrodynamics. Tutorial. Nizhny Novgorod. Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering. 2011. - 25 p.
5. Amelin V.V. Differential equations in applications. Moscow, LENAND, 2021. – 206 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 470-479.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 470-479.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91+519.65

РЕАЛИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ПОДХОДА ПРИ ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ 5-6 КЛАССОВ

Анастасия Алексеевна Бухарина✉
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
bukharinaaa_an@mail.ru✉

Аннотация. *В статье рассматривается вопрос применимости дифференцированного подхода при обучении учащихся 5-6 классов. Использование данной технологии необходимо как для школьников, имеющих высокий уровень математических знаний и высокий темп усвоения учебного материала, так и для слабоуспевающих детей. Автором предложена модель деления класса на группы, характеризующиеся различными особенностями, даны методические рекомендации по работе с каждой из групп.*

Ключевые слова: *дифференцированное обучение, внешняя и внутренняя дифференциация, группы учащихся.*

Conference paper

REALIZATION OF A DIFFERENTIATED APPROACH IN TEACHING STUDENTS OF GRADES 5-6

Anastasia A. Bukharina✉
Orel State University, Orel, Russia
bukharinaaa_an@mail.ru✉

Abstract. *The article discusses the applicability of the differentiated approach in teaching students of grades 5-6. The use of this technology is necessary both for schoolchildren with a high level of mathematical knowledge and a high rate of assimilation of educational material, and for low-achieving children. The author proposed a model for dividing the class into groups characterized by different features, and gave methodological recommendations for working with each of the groups.*

Keywords: *differentiated learning, external and internal differentiation, groups of students.*

© Бухарина А.А., 2023

1. Введение

В настоящее время важнейшей задачей школы является создание условий для индивидуального развития ребёнка. Каждый педагог стремится к такой организации учебного процесса, которая учитывала бы интересы и способности учащихся, но при этом способствовала бы полноценному усвоению образовательной программы. Дифференцированное обучение – это эффективный способ реализации запросов общества и государства, позволяющий обеспечить всестороннее, гармоничное развитие каждого школьника.

Вопросы применимости идей дифференцированного обучения в основной школе были рассмотрены в работах Н.М. Шахмаева, В.Д. Шадрикова, Ю.К. Бабанского, И.Э. Унт и других. [1, 2, 3, 4]

Несмотря на то, что методистами по данной теме сделано уже немало, проведено большое количество исследований, подтверждающих эффективность дифференцированного обучения, в школах оно по-прежнему применяется не повсеместно, эпизодически, что не позволяет в полной мере оценить результат.

2. Основной текст статьи

Идея, состоящая в том, что процесс обучения нуждается в дифференцированном подходе, была известна давно. Существуют различные подходы к определению дифференцированного обучения. Г.К. Селевко предложена следующая формулировка, которая, на наш взгляд, наиболее полно описывает особенности данного подхода. Дифференцированное обучение - это: 1) форма организации учебного процесса, при которой учитель работает с группой учащихся, составленной с учётом наличия у них каких-либо значимых для учебного процесса общих качеств (гомогенная группа); 2) часть общей дидактической системы, которая обеспечивает специализацию учебного процесса для различных групп обучаемых. [5, С. 203]

Дифференцированное обучение представляет собой важный компонент образовательной системы, который позволяет настраивать учебный процесс так, чтобы он соответствовал потребностям и специфике различных групп учащихся. Учитель адаптирует методы, материалы и подходы к обучению, учитывая индивидуальные особенности каждого ученика, чтобы обеспечить им оптимальные условия для успешного обучения.

В своих трудах И.Э. Унт выделяет три основные цели дифференциации обучения: обучающая, развивающая и воспитывающая. Интегрированный подход к дифференциации обучения, ориентированный на эти три цели, может помочь создать более эффективное и индивидуализированное образование для всех учеников. [6]

Говоря о дифференциации в образовании, все методисты подчеркивают её главную составляющую – учёт индивидуальных способностей учащихся. В педагогической литературе можно найти две формы дифференцированного обучения – внутреннюю и внешнюю.

Внешняя, или, профильная, дифференциация обучения в школе является важной стратегией, позволяющей учащимся развивать свои уникальные интересы и способности. Данная идея предоставляет выбор

различных направлений обучения и позволяет углублённо изучать предметы, что способствует более глубокому пониманию материала и подготовке к будущей профессиональной сфере. Для реализации данной инициативы должны быть сформированы соответствующие учебные планы. Такая форма организации занятий предпочтительнее для старшеклассников, которые уже получили базовое образование, обнаружили свои склонности и определились с тем направлением, которым им хотелось бы заниматься более серьёзно. Организация внешней дифференциации требует внимательного планирования, сотрудничества между учителями, администрацией и родителями, а также постоянного мониторинга и оценки эффективности применяемых методов. А для работы с учащимися 5-6 классов больше подходит внутренняя дифференциация.

Внутренняя, или уровневая, дифференциация подразумевает выделение групп учащихся в рамках одного класса, преследующее своей целью организацию разноуровневого обучения с применением различных методов обучения.

Существуют два пути реализации идей внутренней дифференциации. Первый осуществляется в традиционной форме организации дифференцированного подхода, в рамках которого учитель учитывает индивидуальные особенности учеников при построении уроков. При этом каждый школьник должен достичь единого уровня усвоения образовательной программы. Второй путь связан с использованием уровневой дифференциации, и предполагает освоение планируемых результатов обучения на разных уровнях. При составлении образовательной программы учитель делит ожидаемые результаты на две группы: «ученик научится» и «ученик получит возможность научиться». Учащиеся же обязаны освоить фиксированный объём учебной программы, и при этом они имеют право достичь больших результатов, работая в комфортном для себя темпе. Таким образом, организуется адаптация образовательного процесса в соответствии с индивидуальными способностями каждого ребенка. [7]

Существуют различные основания для дифференциации детей по группам. Так, М.И. Бурда, В.В. Дивак, Г.М. Литвиненко выделяют четыре группы по темпу овладения учебным материалом: высокий, средний, низкий темп, а также группа неуспевающих. [8]

А.А. Бударному принадлежит более широкая классификация учащихся, предполагающая 9 групп. Он делит всех школьников по уровню обученности на три большие группы: учащиеся с относительно высоким, средним и низким уровнем. В рамках каждой из перечисленных групп выделяются три подгруппы по уровню трудности задач.

Представляет интерес типология по признаку учебных возможностей школьников (высокие, средние, низкие), которая разработана М.В. Богданович. К первой группе относятся учащиеся, имеющие хорошую теоретическую базу, способные выполнять практические задания на закрепление материала, владеющие навыками самостоятельной работы, работающие в довольно быстром темпе. Вторая группа – школьники со средними учебными

возможностями – имеют хорошие способности к обучению, но при этом не очень работоспособны. Им требуется чёткий контроль со стороны учителя, в этом случае могут быть успешны в освоении учебного материала. В третью группу можно отнести учащихся с существенными проблема в знаниях, нуждающихся в постоянном контроле.

Кроме этого, существует комплексная типология, предложенная Е.В. Яковлевой. Она предполагает учёт способа обработки информации, интересов, склонностей, уровня подготовки школьника. [9]

В.А. Крутецкий, занимаясь изучением математических способностей школьников с точки зрения психологии, также выделил три группы учащихся.

- *Способные школьники*, которые без особых трудностей способны освоить учебный материал по математике, имеют хорошо развитые навыки самостоятельной деятельности, нестандартно мыслящие, способные предложить оригинальные способы решения задач.
- Вторая группа – *средние по способностям учащиеся* – это школьники, которым требуется больше усилий и временных затрат для достижения определённого уровня развития. Таким детям проще даются задания алгоритмического характера, навыки переноса известных знаний на новую ситуацию у них практически отсутствуют.
- *Относительно неспособные школьники* отличаются наличием серьёзных проблем в освоении школьной программы по математике, даже несмотря на все приложенные усилия.

В то же время автор подчёркивает, что абсолютно неспособных учащихся не существует. «Каждый нормальный и здоровый в психическом отношении школьник способен при правильном обучении более или менее успешно овладеть школьным курсом математики, приобрести знания и умения в объёме программы средней школы». [10, С. 189] Для выявления уровня математических способностей учащихся В.А. Крутецким предложены серии математических задач, рассчитанная для школьников 6-7 классов. Система заданий состоит из 26 серий, направленных на комплексную диагностику способностей к математике, и позволяет с довольно высокой точностью определить учащегося в ту или иную группу.

Первым этапом организации дифференцированного подхода является выявление основания для деления учащихся класса на группы. Знание психологических и возрастных особенностей учащихся 5-6 классов позволяет наиболее точно подобрать основание для уровневой дифференциации в обучении математике, чтобы каждый ученик мог развиваться в соответствии с индивидуальными потребностями и способностями.

Можно выделить несколько важнейших особенностей:

- в этом возрасте у детей формируется способность к целенаправленному, сложному восприятию, происходит становление избирательности, охватывающей все сферы жизни ребёнка;
- период характеризуется высоким уровнем развития механической памяти, активным формированием памяти смысловой и произвольной;

учащиеся приобретают навыки логической обработки информации для дальнейшего запоминания;

- в основном преобладает непроизвольное внимание, дети испытывают трудности при необходимости распределения или быстрого переключения внимания, в то же время внимание приобретает организованность и преднамеренный характер; период максимальной концентрации составляет не более 15-20 минут;
- происходят существенные изменения, связанные с мышлением: значительно возрастает уровень интеллектуального развития, учащиеся умеют проводить анализ и синтез, аналогии, выдвигать гипотезы и предлагать способы их проверки, стоить сложные умозаключения, обращают внимание на свойства и отношения, у них начинает формироваться абстрактное и теоретическое мышление; мышление становится более критичным, дети начинают подвергать сомнению всю окружающую их информацию;
- проявляется склонность к фантазированию, развивается воображение;
- в связи с тем, что общение со сверстниками становится наиболее значимым аспектом жизни, активно развивается речь, в том числе и внутренняя;
- ввиду серьёзных физиологических изменений могут наблюдаться быстрая утомляемость, повышенная раздражённость, медленная реакция, общее снижение работоспособности [11].

На наш взгляд, при организации дифференцированного обучения важно опираться на индивидуальные способности учащихся к математике (по В.А. Крутецкому [10]), а также на неодинаковый темп обучения (по М.И. Бурда [8]).

В связи с вышесказанным целесообразным представляется деление класса на три группы: А, В и С, для организации дифференцированного обучения. Опишем их характеристики.

Учащиеся группы А характеризуются большим потенциалом в изучении точных наук, на уроках чаще всего активны, проявляют заинтересованность, любознательны; имеют хорошо развитое абстрактное мышление, и потому с легкостью усваивают математический материал. Школьники способны самостоятельно проводить аналогии, устанавливать причинно-следственные связи, хорошо владеют математической терминологией, могут пояснить производимые ими действия, приводят точные формулировки определений и правил. Учащиеся данной группы способны выдвигать предположения, предлагать способы проверки гипотез, аргументировать свое мнение, отстаивать собственную позицию. Учителю при разработке заданий для учащихся группы А требуется особая подготовка, важно предлагать им, наряду с базовыми заданиями, нестандартные задачи, задания исследовательского типа.

Школьники, вошедшие в группу В, также достаточно успешны в освоении базового материала, но при этом испытывают некоторые трудности. Они активны во время фронтальной работы, понимают объяснение,

предложенное учителем, неплохо запоминают теоретический материал. Но в то же время у них наблюдаются сложности при решении задач, формулировании выводов и обобщении материала. Учащиеся характеризуются меньшей самостоятельностью, нуждаются в постоянной вовлеченности учителя в собственную деятельность, не всегда внимательны при выполнении простейших математических операций, в связи с чем появляется большое количество ошибок. Ученики гораздо медленнее запоминают алгоритмы действий, им требуется больше времени на отработку того или иного навыка. От учителя при работе с данной группой требуется применение различных приёмов активизации учащихся. Внимание акцентируется на базовых заданиях, но они предлагаются школьникам в различных формах, с изменёнными условиями, в разных видах деятельности.

К группе С отнесены учащиеся, обладающие большими пробелами в знаниях, с трудом усваивающие материал, которые нуждаются в постоянной помощи со стороны учителя. В ходе фронтального объяснения они испытывают сложности в понимании и нуждаются в дополнительных комментариях. Несмотря на все проблемы, разобравшись в материале, могут самостоятельно выполнять задания по аналогии, но задачи, содержащие изменённые условия, представляются для них совершенно новыми. От учителя требуется чёткая организация деятельности учащихся, постоянный контроль, вовлеченность в их работу. Разработанные задания не должны ограничивать учащихся в развитии математических способностей, но усложнение должно быть планомерным.

Представим классификацию учащихся в соответствии с определёнными нами критериями: уровнем математических способностей и темпом усвоения материала, в таблице 1.

Таблица 1 — Классификация учащихся класса
при организации дифференцированного обучения.

		Темп усвоения материала учащимися		
		Высокий уровень	Средний уровень	Низкий уровень
Математические способности школьников	Высокий уровень	A	A	B
	Средний уровень	A	B	C
	Низкий уровень	B	C	C

Для того, чтобы поддерживать мотивацию учащихся и формировать стремление к повышению своего уровня, учителю необходимо объяснить учащимся, что деление является условным и их принадлежность к той или иной группе зависит от их индивидуальных результатов: если ученик из группы А перестанет прилагать усилия в освоении материала, он будет переведен в другую группу (В или С), в то же время, если школьник будет показывать стабильно высокие результаты, он будет переведён в более высокую группу. [12]

В процессе работы очень важно своевременно отслеживать динамику интеллектуального роста учащихся. При этом могут быть использованы тесты, составленные С.К. Росошеком, позволяющие увидеть прогресс как в течение одного учебного года, так и в долгосрочном периоде. [13]

Приведём примеры заданий, которые могут быть предложены учащимся 6 класса при изучении темы «Сравнение, сложение и вычитание дробей с разными знаками» на этапе самостоятельного закрепления знаний или при организации контроля усвоения материала.

Для группы А:

1. Хозяйка приготовила 11 кг вишнёвого варенья и 13 кг клубничного варенья. Вишнёвое варенье она разлила поровну в 15 банок, а клубничное варенье – поровну в 18 банок. Какого варенья в одной банке больше: клубничного или вишнёвого?

2. Отрезок МК равен $\frac{3}{8}$ м, и он короче отрезка АС на $\frac{7}{20}$ м. Найдите длину отрезка АС. [14, с. 34]

3. Выполните действия:

а. $9 - 5\frac{7}{11}$; б. $5\frac{4}{9} + 2\frac{5}{12}$.

4. Найдите значение выражения: $\left(\frac{7}{8} - \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$.

5. Найдите две дроби, каждая из которых больше $\frac{3}{7}$ и меньше $\frac{4}{7}$.

Для группы В [15, С. 19]**:**

1. Расположите дроби $\frac{13}{24}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{4}$ в порядке возрастания.

2. Серёжа на дорогу от дома до почты затратил $\frac{7}{12}$ ч, а на дорогу от почты до магазина $\frac{7}{15}$ ч. Какой путь Сережа прошел быстрее: от дома до почты или от почты до магазина? [14, с. 33]

3. Выполните действие: [16, №2.162]

а. $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$;

б. $\frac{1}{2} + \frac{7}{9}$;

в. $\frac{3}{5} - \frac{4}{7}$;

г. $\frac{5}{7} - \frac{1}{6}$.

Для группы С [15, С. 18]**:**

1. Сравните дроби:

а. $\frac{11}{12}$ и $\frac{5}{6}$; б. $\frac{1}{3}$ и $\frac{5}{7}$.

2. Выполните сложение дробей:

а. $\frac{2}{5} + \frac{2}{10}$; б. $\frac{1}{8} + \frac{3}{7}$.

3. Вычислите разность дробей:

а. $\frac{5}{14} - \frac{1}{4}$;

б. $\frac{7}{18} - \frac{1}{4}$.

4. За завтраком, обедом и ужином был съеден один батон хлеба. За завтраком съели $\frac{2}{9}$, а за обедом – $\frac{5}{18}$ батона.

- Заполните таблицу данными, известными из условия задачи:

Было	Съели на завтрак	Съели на обед	Съели на ужин

- Когда съели больше хлеба – за завтраком или за обедом?
- Какую часть батона съели за завтраком и за обедом вместе?
- Вспомните, как узнать, какая часть батона осталась после завтрака и обеда?
- Найдите, какая часть батона была съедена на ужин? Дополните данные в таблице. [17, №453]

3. Заключение

Дифференцированный подход позволяет организовать образовательный процесс таким образом, чтобы освоение учебного материала было успешным для каждого учащегося. Это происходит посредством подбора и применения на уроках методов и форм обучения, а также разноуровневых заданий, подходящих разным группам учеников. При этом темп работы может варьироваться учителем в зависимости от уровня усвоения материала, учащиеся могут переходить из одной группы в другую в соответствии со своими учебными возможностями.

При переходе из начальной школы в основную использование дифференцированного обучения обеспечивает эффективность обучения, позволяет раскрыть потенциал каждого ученика, а также сделать освоение такого сложного предмета, как математика, комфортным для школьников.

Список источников

1. Шахмаев Н.М. Учителю о дифференцированном обучении: (метод. рекомендации). – М.: [Б. и.], 1989. 65 с.

2. Шахмаев Н.М. Дифференциация обучения в средней общеобразовательной школе // Дидактика средней школа / под ред. М.А. Данилова, М.Н. Скаткина. – М.: Просвещение, 1975. С. 251-282.

3. Унт И.Э. Индивидуализация и дифференциация обучения. – М.: Педагогика, 1990. 192 с.

4. Шадриков В.Д. Личностно ориентированное обучение // Педагогика, 1994. № 5.

5. Селевко Г.К. Энциклопедия образовательных технологий. В 2-х т. Т. 1. – М.: Народное образование, 2005. 556 с.

6. Жунисбекова Ж.А. Дифференцированное обучение учащихся // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований, 2015. № 11-5. С. 748-751.

7. Кульневич С.В., Лакоценина Т.П. Современный урок. Ч. 1: научно-практич. пособие для учителей, методистов, руковод. образоват. учрежд., студ. пед. учеб. завед., слушателей ИПК. – Ростов-на-Дону: Учитель, 2004. 288 с.

8. Овчинникова М.В. Методика работы над текстовыми задачами в начальных классах (общие вопросы): Учебно-методическое пособие для студентов специальностей «Начальное обучение. Дошкольное воспитание». – К.: Пед.пресса, 2001. 128 с.

9. Яковлева Е.В. Организация дифференцированного подхода в процессе усвоения знаний младшими школьниками // Начальная школа. 2004. № 5. С. 69–74.

10. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников / под ред. Н. И. Чуприковой. – М.: Ин-т практ. психологии; Воронеж: НПО «МОДЭК», 1998. 411 с.

11. Общая психология: Учеб. для студентов пед. ин-тов / под ред. А.В. Петровского. – М.: Просвещение, 1976. 479 с.

12. Еркибаева Г.Г. Место и роль дифференцированного обучения в обеспечении специализации учебного процесса для различных групп обучаемых // Международный журнал экспериментального образования, 2015. № 1. С. 8-12.

13. Росошек С.К. Тесты по математике для учащихся 5-9 классов средней школы, обущающихся по программе МПИ / Под ред. проф. Э.Г. Гельфан. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 59 с.

14. Чесноков А.С., Нешков К.И. Дидактические материалы по мвтематике. 6 кл. – М.: Академкнига / Учебник, 2015. 160 с.

15. Контрольно-измерительные материалы. Математика. 6 класс / сост. Л.П. Попова. – М.: ВАКО, 2021. 96 с.

16. Математика: 6 класс: базовый уровень: учебник: в 2 частях. Ч. 1 / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков [и др.]. – М.: Просвещение, 2023. 160 с.

17. Зубарева И.И. Математика. 5 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2009. 270 с.

References

1. Shakhmaev N.M. To the teacher about differentiated training: (method. recommendations). – M.: [B. I.], 1989. 65 p.

2. Shakhmaev N.M. Differentiation of education in secondary school // Didactics of secondary school / edited by M.A. Danilov, M.N. Skatkin. – M.: Enlightenment, 1975. pp. 251-282.

3. Unt I. E. Individualization and differentiation of education. – M.: Pedagogy, 1990. 192 p.

4. Shadrikov V. D. Personality-oriented learning // Pedagogy, 1994. No. 5.

5. Selevko G. K. Encyclopedia of educational technologies. In 2 vols. Vol. 1. – M.: Public education, 2005. 556 p.

6. Zhunisbekova Zh. A. Differentiated education of students // International Journal of Applied and Fundamental Research, 2015. No. 11-5. pp. 748-751.

7. Kulnevich S. V., Lakotsena T. P. Modern lesson. Part 1: scientific and practical. manual for teachers, methodologists, supervisors. educated. institution., stud. ped. ucheb. institution, IPK listeners. – Rostov-on-Don: Teacher, 2004. 288 p.

8. Ovchinnikova M.V. Methods of working on text tasks in primary classes (general questions): An educational and methodological guide for students of the specialties "Primary education. Preschool education". – K.: Pedagogical press, 2001. 128 p.

9. Yakovleva E. V. The organization of a differentiated approach in the process of acquiring knowledge by younger schoolchildren // Elementary school. 2004. No. 5. pp. 69-74.

10. Krutetsky V. A. Psychology of mathematical abilities of schoolchildren / edited by N. I. Chuprikova. – M.: In-t prakt. Psychology; Voronezh: NGO "MODEK", 1998. 411 p.

11. General psychology: Studies for students of pedagogical institutes / edited by A.V. Petrovsky. – M.: Enlightenment, 1976. 479 p.

12. Yerkibayeva G.G. The place and role of differentiated education in ensuring the specialization of the educational process for various groups of students // International Journal of Experimental Education, 2015. No. 1. pp. 8-12.

13. Rososhek S.K. Tests in mathematics for students of grades 5-9 of secondary school, studying under the MPI program / Edited by Prof. E.G. Gelfan. – Tomsk: Publishing House Vol. un-ta, 2004. 59 p.

14. Chesnokov A.S., Neshkov K.I. Didactic materials on mbtematics. 6 kl. – M.: Akademkniga/Textbook, 2015. 160 p.

15. Control and measuring materials. Mathematics. 6th grade / comp. L.P. Popova. – M.: WACO, 2021. 96 p.

16. Mathematics: 6th grade: basic level: textbook: in 2 parts. Part 1 / N.Ya. Vilenkin, V.I. Zhokhov, A.S. Chesnokov [and others]. – M.: Education, 2023. 160 p.

17. Zubareva I.I. Mathematics. 5th grade: educational. for general education students. institutions / I.I. Zubareva, A.G. Mordkovich. – M.: Mnemosyne, 2009. 270 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 480-485.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 480-485.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91+519.65

МЕТОДИКА ОБОБЩАЮЩЕ-СИСТЕМАТИЗИРУЮЩЕГО ПОВТОРЕНИЯ НА РАЗЛИЧНЫХ ЭТАПАХ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Ирина Сергеевна Водопьянова✉
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
irinavoda2211@yandex.ru✉

Аннотация. *В данной статье рассматривается методика обобщающе-систематизирующего повторения на различных этапах обучения математике в основной школе. Внимание концентрируется на важности повторения в процессе обучения математике. В статье описаны основные виды повторения и по каждому из них приведены примеры. Делается вывод о том, что повторение является неотъемлемой частью эффективного обучения математике.*

Данная статья может быть полезна для учителей математики и специалистов в области образования.

Ключевые слова: *учащиеся, линия уравнений, повторение, обобщение и систематизация материала, методика, математика.*

Conference paper

THE METHOD OF GENERALIZING AND SYSTEMATIZING REPETITION AT VARIOUS STAGES OF TEACHING MATHEMATICS

Irina S. Vodopianova✉
Orel State University, Orel, Russia
irinavoda2211@yandex.ru✉

Abstract. *In this article, the author examines the methodology of generalizing and systematizing repetition at various stages of teaching mathematics. The author focuses on the importance of repetition in the process of teaching mathematics. The article also highlights the main types of repetition and offers examples for each of them. The author concludes that repetition is an integral part of effective teaching of mathematics.*

This article may be useful for specialists in the field of education.

Keywords: *students, line of equations, repetition, methodology, mathematics.*

© Водопьянова И.С., 2023

1. Введение

Математика является стройным и строгим школьным предметом. Постепенное усвоение нового происходит на базе уже имеющихся у учащихся знаний и приобретённого опыта в решении различных математических задач. И от учителя математики требуется навык, с помощью которого у учащихся повторение прошлых знаний является логичным и своевременным, так как именно повторение можно считать одним из ведущих видов учебной деятельности, обеспечивающих прочные и глубокие знания школьников.

2. Основной текст статьи

Повторения учебного материала состоит из нескольких этапов, перечислим их:

- вводное;
- первично-закрепляющее;
- тренирующее;
- углубляющее;
- обобщающе-систематизирующее.

Каждый вид повторения имеет свои основные цели и методы организации. В нашей статье покажем, методику обобщения и систематизации знаний при изучении уравнений в основной школе на каждом из выделенных этапов.

Рассмотрим первый вид повторения – вводное повторение. Данный вид повторения может помочь школьникам увидеть связи между различными математическими темами. Это достигается за счёт включения в содержание повторения уже изученного учащимися материала. Также учащиеся могут обнаружить, как новые темы строятся на основе изученных и как можно использовать предыдущий опыт для решения новых задач. Например, линейные уравнения связаны с изучением линейной функции и ее свойств, а квадратные уравнения – с квадратичной функцией. Решение дробно-рациональных уравнений проводит параллель в знании учащихся о работе с дробями и корнями.

Примером такого повторения может служить актуализация знаний учащихся при изучении темы «Дробно-рациональные уравнения».

В классе на экран выводится ряд уравнений, среди которых есть уравнение нового вида. Например,

$$1)\ 7x - 14 = 0;$$

$$2)\ y^2 - \frac{1}{3}y - 2 = 0;$$

$$3)\ \frac{x}{18} = \frac{5}{9};$$

$$4)\ x^2 - 7x + 6 = 0;$$

$$5)\ \frac{x-1}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{5x}{6};$$

$$6)\ 13x - 2x^2 - 11 = 0;$$

$$7)\ \frac{x-2}{x+2}=\frac{x+3}{x-4}.$$

При этом учитель беседует с учащимися.

- Назовите уравнения, которые Вам знакомы.
- Укажите алгоритм их решения.

Учащиеся повторяют способы решения квадратных и линейных уравнений, происходит актуализация знаний. Учитель создает ситуацию, когда учащиеся сталкиваются с новым видом уравнения. Но это происходит постепенно с повторением уже пройденных видов уравнений, которые тесно связаны с решением дробно-рациональных уравнений.

Рассмотрим второй вид повторения – тренирующее повторение. При данном повторении лучше усваиваются различные математические понятия и вырабатываются методы, которые помогают сформировать математические навыки и запомнить основные правила. Это особенно важно, так как без устойчивых фундаментальных умений и навыков трудно развивать сложные математические темы. Так, например, первые шаги в систематическом изучении уравнений школьники делают в 7 классе, когда приступают к изучению линейных уравнений: учащиеся дают определение линейных уравнений, формулируют правила решения такого вида уравнений, проводят простейшее исследование уравнения вида *ах=в*.

Наиболее распространённой формой организации текущего повторения можно считать устные упражнения и самостоятельные работы с быстрой проверкой.

Приведем пример самостоятельной работы в 7 классе при изучении темы «Уравнение и его корни, линейное уравнение». В методическом пособии автора Феоктистова И. Е. [3] имеется вариант тестирования учащихся 7 классов по данной теме.

1. Корнем уравнения $x^2=10-3x$ является число:

1) 5; 2) -5; 3) 3; 4) 1.

2. Уравнение $3-4x=0$ имеет корень:

1) $-\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{4}{3}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$.

3. Значение выражения $3t+1$в два раза меньше значения выражения $10t+18$ при:

1) $t=-2$; 2) $t=-4$; 3) $t=4$; 4) $t=-2\frac{1}{17}$.

4. Не имеет корней уравнение:

1) $-2x=0$; 2) $5y=6y$; 3) $2x+6=2x+3$; 4) $x=10x+1$.

5. Для того чтобы реализовать партию бананов в срок, достаточно продавать по 40 кг в день. Однако каждый день продавали на 20 кг больше, в результате чего партия была распродана на 3 дня раньше срока. Предполагаемый срок реализации партии бананов составлял:

1) 12 дней; 2) 6 дней; 3) 8 дней; 4) 9 дней.

Данная работа позволит обобщить и качественно оценить знания учащихся в процессе изучения темы «Линейные уравнения». Каждое задания затрагивает различные аспекты данной темы и позволяет учащимся соединить

свои знания в единую логическую связку математических основ решения уравнений, тем самым обобщить и систематизировать материал.

Рассмотрим третий вид повторения – углубляющее повторение. Постепенно уровень сложности повышается и школьникам всё больше приходится опираться на предыдущие знания и навыки для полноценного усвоения предмета алгебры. Именно углубляющее повторение позволяет комплексно применить знания учащихся. В качестве примера можно рассмотреть следующие задания.

Задание 1. Найдите сумму кубов корней уравнения $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

Можно найти сумму кубов корней уравнения следующим образом: определить корни квадратного уравнения по формулам, связанным с нахождением дискриминанта, а затем возвести их в куб и сложить.

Но есть и другой способ более короткий в записи и его главной особенностью можно считать возможность показать школьникам всю прелесть и разнообразие решение задач разными способами.

Убедившись в существовании корней данного квадратного уравнения, учащиеся выполняют следующее преобразование:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = \\ = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2).$$

На основании теоремы Виета получаем $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, x_1x_2 = \frac{1}{2}$. Тогда

$$x_1^3 + x_2^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = 11\frac{7}{8}.$$

Второй способ решения позволил учителю обобщить и систематизировать знания учащихся по теме «Квадратные уравнения», повторить определение приведенного квадратного уравнения и связанные с ним теоремы Виета.

Задание 2. Решите уравнение с параметром $(1 - a^2)x = a^2 + 2a - 3$.

Упростим выражение:

$$(1 - a^2)x = a^2 + 2a - 3;$$
$$(1 - a)(1 + a)x = (a + 3)(a - 1);$$
$$(1 - a)(1 + a)x = -(1 - a)(a + 3);$$

При $a = 1$: $0x = 0, x$ –любое число.

При $a = -1$: $0x = -4$, нет решений.

При $a \neq \pm 1$:

$$(1 - a)(1 + a)x = -(1 - a)(a + 3);$$
$$(1 - a)x = -(a + 3);$$
$$x = -\frac{a + 3}{a + 1}.$$

Ответ: при $a = 1$: *x – любое число*;

при $a = -1$: *корней нет*;

при $a \neq \pm 1$: $x = -\frac{a+3}{a+1}$.

Исследуя решение этого уравнения, учащиеся обобщают и систематизируют знания по теме «Решение линейных уравнений». Полезно для

обобщения и систематизации знаний учащихся по теме «Решение квадратных уравнений» предложить решение уравнений, содержащих параметры.

Рассмотрим последний вид повторения – обобщающе-систематизирующее повторение. Алгебра часто включает в себя сложные формулы, правила и алгоритмы. Повторение позволяет закрепить этот материал в памяти школьника, что облегчает его использование при решении различного рода задач. Повторение может осуществляться в различных формах. Можно, например, выделить наглядный и показательный способ повторения и закрепление материала – теоретико-множественные иллюстрации.

Приведем пример такой иллюстрации - «Схема классификаций алгебраических уравнений». На рисунке 1 представлен пример данной схемы. Данная схема будет полезна для учащихся 9-ых классов при подготовке к государственной итоговой аттестации.

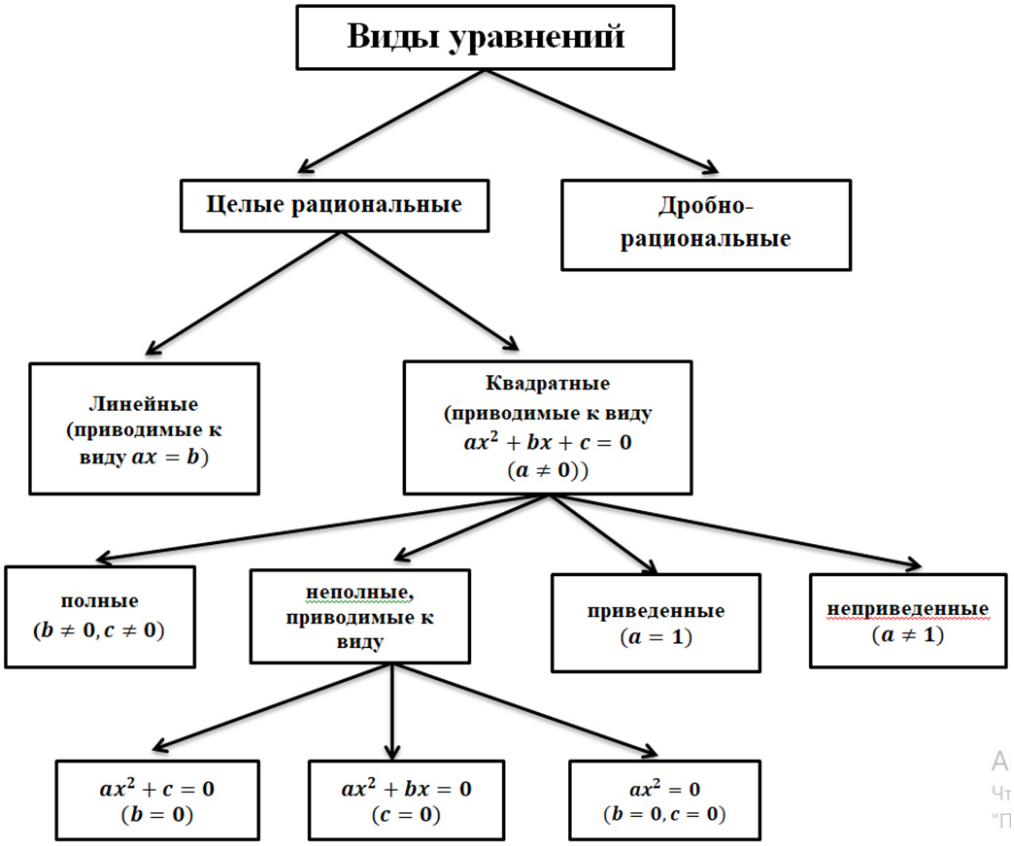


Рисунок 1. Схема «Классификация рациональных уравнений».

На зачетном уроке по этой схеме школьники проведут обобщающе-систематизирующее повторения всех уравнений, изученных в основной школе.

Основным плюсом подобных таблиц и схем является их наглядность. Такого рода обобщающие схемы желательно вывешивать в классе на определенное время, чтобы учащиеся, обращаясь к ним, могли повторить материал, используя при этом непроизвольное запоминание.

3. Заключение

Из всего вышесказанного можно сделать вывод о том, что повторение является неотъемлемой частью эффективного обучения математике.

Список источников

1. Алгебра. 8 класс: Учеб.для общеобразоват. организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. – М.: Просвещение, 2018. 287 с.

2. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7 – 9 классов. – М.: Просвещение, 1991. 239 с.

3. Феоктистов И. Е. Алгебра. Методические рекомендации. 7 класс Учеб. пособие для общеобразоват. организаций. – М.: Просвещение, 2017. 311 с.

References

1. Algebra. Grade 8: Studies for general education.organizations / Yu.N. Makarychev, N.G. Mindyuk, K.I. Neshkov, S.B. Suvorova. – M.: Enlightenment, 2018. 287 p.

2. Kostrikina N.P. Problems of increased difficulty in the course of algebra of grades 7-9. – M.: Enlightenment, 1991. 239 p.

3. Feoktistov I. E. Algebra.Methodological recommendations.Grade 7 Study guide for general education.organizations. – M.: Enlightenment, 2017. 311 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 486-494.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 486-494.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.851

ФОРМЫ ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ С ОДАРЁННЫМИ ДЕТЬМИ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА «МАТЕМАТИКА»: ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ И ОЛИМПИАДНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ШКОЛЬНИКОВ

Наталья Александровна Гончарова [1]✉***, Мария Александровна Гончарова***[2]
[1,2]*Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева, Орёл, Россия*
[1]*n.a.goncharowa@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0003-1404-2685*
[2]*maria-gonch-19@yandex.ru*

Аннотация. В настоящее время среди форм организации работы с одарёнными детьми при преподавании учебного предмета «Математика» в общеобразовательной школе особое внимание должно быть обращено на изучение и использование потенциала исследовательской и олимпиадной деятельности школьников. Поскольку учителю чаще всего приходится сталкиваться со скрытой одаренностью обучающихся вообще, и математики в частности, эти формы рассматриваются авторами как выполняющие важную дидактическую функцию – диагностическую. Авторами выявлены некоторые особенности организации исследовательской и олимпиадной деятельности математически одаренных школьников.

Ключевые слова: математическая одарённость школьников; системно-деятельностный подход; формы работы с одарёнными детьми по математике в общеобразовательной школе; исследовательская деятельность математически одаренных детей; математические олимпиады.

Conference paper

FORMS OF ORGANIZING WORK WITH GIFTED CHILDREN WHEN TEACHING THE SUBJECT "MATHEMATICS": RESEARCH AND OLYMPIAD ACTIVITIES OF SCHOOLCHILDREN

Natalia Al. Goncharova [1]✉***, Maria Al. Goncharova***[2]
[1, 2]*Orel State University named after I.S.Turgenev, Orel, Russia*
[1]*n.a.goncharowa@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0003-1404-2685*
[2]*maria-gonch-19@yandex.ru*

© Гончарова Н.А., Гончарова М.А., 2023

Abstract. *Currently, among the forms of organization of work with gifted children when teaching the subject "Mathematics" in a secondary school, special attention should be paid to the study and use of the potential of research and Olympiad activities of schoolchildren. Since the teacher most often has to deal with the hidden giftedness of students in general, and mathematics in particular, these forms are considered by the authors as performing an important didactic function – diagnostic. The authors have identified some features of the organization of research and Olympiad activities of mathematically gifted schoolchildren.*

Keywords: *mathematical giftedness of schoolchildren; system-activity approach; forms of work with gifted children in mathematics in secondary school; research activities of mathematically gifted children; mathematical Olympiads.*

1. Введение

Среди приоритетных направлений национальной системы образования выделяется создание условий для раннего выявления, развития и поддержки одаренных и талантливых детей. В эпоху цифровизации практически всех сфер жизни современного человека именно в процессе освоения предметной области «Математика и информатика» в школе у ребенка происходит формирование разных интеллектуальных умений, математических компетенций как неотъемлемых компонентов повседневной жизни человека, его общей культуры [1]. Следует также отметить сохраняющийся в научном сообществе дискуссионный характер обсуждения теории и практики работы с одаренными детьми.

2. Основной текст статьи

На практике учитель чаще всего сталкивается со скрытой одаренностью обучающихся, выявлению которой, по нашему мнению, могут способствовать развитие таких форм организации работы с одаренными детьми как исследовательская деятельность и участие в олимпиадах. Как показал проведенный анализ, при преподавании математики в школе недостаточно внимания обращается на организацию работы с одарёнными детьми. Одарённые дети – обучающиеся, к которым необходим особый подход в выстраивании и содержании образовательного процесса. В данном случае речь, прежде всего, идет об одарённости в познавательной деятельности, интеллектуальной одарённости различных видов в зависимости от предметного содержания деятельности, имеющей явный или скрытый характер [4]. Как отмечалось выше, в научном сообществе до сих пор ведутся дискуссии по поводу понятий – способности, одаренность, талант, гениальность – рассматриваемых как синонимы в образовательной, управленческой и научной практике. В связи с чем мы разделяем точку зрения исследователей, определяющих данные понятия следующим образом. Способности – это индивидуальные качества, позволяющие повысить успешность какой-либо деятельности. Одаренность – это природный дар, который позволяет индивидуальности достигать заметных результатов в какой-либо сфере деятельности. Талант – это целенаправленный труд по реализации одаренности, результаты этого труда получают общественное признание. Гениальность – это

успешная реализация таланта в самостоятельно выбранной творческой деятельности, результаты которой получают самую высокую оценку в профессиональном сообществе [7].

Основная образовательная программа реализуется образовательным учреждением в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами, в том числе, и через внеурочную деятельность. Она способствует возникновению, поддержанию и развитию у обучающихся интереса к предмету, углублению и закреплению математических знаний, формированию математического мышления и креативности. Программы курсов внеурочной деятельности – обязательный компонент раздела «Программы отдельных учебных предметов, курсов и курсов внеурочной деятельности» – входят в ООП ОО. Внеурочная деятельность дает возможность учителю выявить одарённых детей, развить их способности.

Системно-деятельностный подход при обучении математике видоизменяет характер учебного процесса, реализуемого в виде различных видов деятельности. Обучающийся из объекта превращается в субъект образовательного процесса. Учебная деятельность выступает основой, средством и условием развития личности обучающегося. Практическая реализация подхода приобретает многоуровневый характер: «учитель – ученик», «ученик – ученик», «ученик – группа учащихся». Изменяется и позиция учителя, который должен создавать условия для оптимизации образовательного процесса, построения учащимся индивидуальной траектории изучения «Математики», научить его выявлять диапазон своих знаний, констатировать проблему, формулировать проблемные задачи, проводить контроль и самоконтроль своей деятельности согласно определенным критериям, взаимодействовать при решении учебных задач.

Среди форм работы с одарёнными детьми остановимся на рассмотрении следующих двух: научно-исследовательская деятельность (возможно межпредметного характера) обучающихся и участие в олимпиадах (прежде всего в школьных и районных). Именно эти формы приобретают все более массовый характер и представляют научный интерес в контексте понимания сущности феномена одаренности вообще (и математической одаренности в частности), выявления, поддержки и развития одаренных и талантливых детей. Более того, по мнению исследователей, одаренность характеризуется «через наличие мотивации к исследовательской деятельности, способности самостоятельно разворачивать исследование, развитие интеллектуальных способностей» [9]. Таким образом, учитывая тот факт, что учителю чаще всего приходится сталкиваться со скрытой одаренностью обучающихся вообще, и математики, в частности, эти формы рассматриваются нами как выполняющие важную дидактическую функцию – диагностическую.

Сегодня у школьников есть возможность уже с первого класса заниматься исследовательской деятельностью и сообщать на научных конференциях о ее результатах. Так, на протяжении последних 11 лет в опорном вузе нашего региона – Орловском государственном университете имени И.С. Тургенева – ежегодно проводится Всероссийская молодежная научно-практическая

конференция «МИФ» (естественные и гуманитарные науки) с элементами научной школы. Конференция посвящена научным достижениям учащихся 1-11 классов образовательных школ и средних специальных учебных заведений в области научных и проектных работ по различным направлениям – свыше 30 секций и подсекций гуманитарных и естественных наук. Конференция проводится в двух форматах: очном и заочном. Кроме того, «МИФ» выступает отборочной площадкой для регионального этапа Всероссийского конкурса научно-технологических проектов «Большие вызовы» (ОЦ «Сириус»).

В научной литературе категория «исследовательская деятельность» рассматривается с разных позиций, представляя собой: образовательную технологию, форму организации учебно-воспитательной работы, специфический вид деятельности, творческий процесс самоопределения и самореализации человека как индивидуальности и носителя культуры [6, 10, 11].

Исследовательская деятельность представляет собой, по мнению специалистов, «особый вид интеллектуально-творческой деятельности, порождаемый в результате функционирования механизмов поисковой активности и строящийся на базе исследовательского поведения [10]. В основе поисковой активности лежит потребность в познании или познавательная потребность. Именно на эту потребность обращается внимание большинством исследователей в области одаренности. Так, Хромова Т.В. и Юркевич В.С. считают познавательную потребность «катализатором развития одаренности», необходимым для развития ума ребенка и его творческих способностей [5].

Исследовательская активность выражается в готовности и интеллектуальной способности к познанию реальности, самостоятельной постановке целей, открытию новых способов и средств достижения, получению непрогнозировавшихся результатов исследования и их использования для дальнейшего познания [8]. У одаренного ребенка исследовательская активность – внутреннее психологическое условие его личностной характеристики – исследовательской позиции. Исследовательская позиция рассматривается как личностное качество одаренного ребенка, выступающее фактором развития общей одаренности, способствующим становлению самосозидающегося типа личности и обеспечивающим возможность высоких достижений в интеллектуальной деятельности. Рассматривая понятия исследовательской деятельности как ряда последовательных операций и исследовательской позиции как свойства личности, Обухов А.С. подчеркивает специфику их взаимосвязи: целью организации исследовательской деятельности учащихся должно стать развитие исследовательской позиции [6]. В отношении детей, по мнению Поддьякова А.Н., в понятиях «исследовательская активность», «исследовательское поведение», «исследовательская деятельность» отражаются разные аспекты: в «исследовательской активности» – потребностно-мотивационный, в «исследовательском поведении» – взаимодействие с внешним миром, в «исследовательской деятельности» – целеустремленность и целенаправленность [8].

Таким образом, учитель по математике организуя научно-исследовательскую деятельность должен создавать благоприятную

образовательную среду для обучающихся, способствующую проявлению познавательной потребности у явно и скрыто одаренных школьников, трансформирующуюся в исследовательскую активность и проявляющуюся в исследовательском поведении и исследовательской деятельности.

По мнению специалистов, организация исследовательской деятельности в процессе преподавания учебного предмета «Математика» должна осуществляться последовательно и представлять трехуровневую систему [12]. На первом уровне (5-6 классы) происходит подготовка обучающихся к исследовательской деятельности, вводится понятие алгоритмизации обучения, углубляется и уточняется представление о плане (5-й класс); школьников учат составлять конспекты, формируют у них умение работать со справочной, критической, научной литературой (6-й класс). На втором уровне (7-8 классы) происходит обогащение категориально-понятийного аппарата научными терминами (исследование, метод исследования, виды исследования, цель и др.), овладение общенаучными умениями и навыками (ведение и фиксирование хода и результатов наблюдения или эксперимента, осуществление умственных действий, изучение специальной литературы, организация исследовательской деятельности). Третий уровень (9-11 классы) предполагает формирование у обучающихся умения управлять исследовательской деятельностью. Школьники самостоятельно выбирают и формулируют тему, определяют «зону исследования», планируют и реализуют «зоны исследования», описывают ход работы, делают выводы, вырабатывают рекомендации [12]. Вместе с тем, по нашему мнению, учитывая особенности одаренных детей, специфику проявления и содержания их математических исследовательских потребностей, исследовательского поведения и исследовательской деятельности предложенное функциональное наполнение этапов может быть нарушено или сдвинуто в пространстве и времени. Так, уже пятиклассник может пусть интуитивно, но самостоятельно (!), выбрать объект и/или предмет исследования и/или сформулировать доступным ему языком заинтересовавшую его проблему. И здесь особенно важными оказываются как сама позиция учителя-предметника в этом «научном взаимодействии» с таким обучающимся, которая должна носить доброжелательный, оптимистичный характер, создавая благоприятное пространство для исследовательской активности учащегося, так и его компетентная соруководящая, основанная на принципе партнерства, роль. Таким образом, формально обладая необходимыми компетенциями, учитель-предметник должен обладать компетентностью и готовностью к решению разнообразных вопросов (психолого-педагогических, организационных, методических и др.), связанных с построением траектории исследовательской деятельности одаренного ученика. В связи с чем, по нашему мнению, наряду с системно-деятельностным подходом представляется целесообразным использовать ситуационный подход.

Как показывает практика другой ведущей и наиболее массовой формой внеурочной работы по математике являются олимпиады. Ежегодно в нашей стране для учащихся 4-11 классов проводится всероссийская олимпиада школьников по математике. В Приказе Министерства просвещения РФ от 27

ноября 2020 года № 678, утвердившим порядок проведения данного мероприятия отмечается, что «олимпиада проводится в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний, отбора лиц, проявивших выдающиеся способности, в составы сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам» [2]. Подчеркнем, что задания именно математических олимпиад требуют от их участников умения мыслить нестандартно. Таким образом, математические олимпиады являются инструментом не только выявления, отбора, но и самореализации математически одаренных детей.

Как отмечают специалисты, в настоящее время возрастает роль предметных олимпиад, что обусловлено введением ЕГЭ и новыми правилами поступления в вузы. Вместе с тем, задания по олимпиадам – задачи повышенной трудности, нестандартные как по формулировке, так и по методам решения. Это предопределяет необходимость развития системы подготовки учащихся к олимпиадам. Подготовка к олимпиадам более результативна и эффективна, как показывает практика, если осуществляется путем разработки отдельной программы и индивидуальной образовательной траектории для одарённого ученика. Результаты участия школьников в математических олимпиадах служат своеобразным индикатором качества, в данном случае, математического образования в школе, городе, регионе. Более того, призеры федеральной олимпиады зачисляются в вузы без экзаменов, для многих школьников это ведущий стимул для ежегодного участия в таких мероприятиях. Так, в 2022-2023 учебном году в Орловской области по общеобразовательному предмету «Математика» в школьном этапе всероссийской олимпиады школьников участвовало 7256 человек, количество победителей – 511 человек; в муниципальном этапе – 961 человек, количество победителей – 33 человека. В региональном этапе ВсОШ – 57 человек, количество победителей – 1 человек. На заключительном этапе регион представляли 22 участника, 3 участника стали призерами ВсОШ по французскому языку, истории и литературе [3].

Заключение

Таким образом, среди форм работы с одарёнными детьми при преподавании учебного предмета «Математика» особо выделяются научно-исследовательская деятельность (возможно межпредметного характера) обучающихся и участие в олимпиадах (прежде всего в школьных и районных), что обусловлено их все более массовым характером и публичной популяризацией. Они представляют научный и практический интерес в контексте понимания сущности феномена одаренности вообще (и математической одаренности в частности), выявления, поддержки и развития одаренных и талантливых детей. Поскольку учителю чаще всего приходится сталкиваться со скрытой одаренностью обучающихся вообще, и математики в частности, эти формы были рассмотрены как выполняющие важную дидактическую функцию – диагностическую. Рассмотрены теоретические и

прикладные аспекты организации исследовательской и олимпиадной деятельности одаренных школьников. Так, формально обладая необходимыми компетенциями, учитель-предметник должен обладать компетентностью и готовностью к решению разнообразных вопросов (психолого-педагогических, организационных, методических и др.), связанных с построением траектории исследовательской деятельности одаренного ученика. Несмотря на имеющиеся особенности и научно-исследовательская деятельность, и участие в олимпиадах должны рассматриваться как целенаправленное, партнерское взаимодействие между учителем и учеником.

Список источников

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р [Электронный ресурс] // URL:https://docs.edu.gov.ru/id1787
2. Приказ Министерства просвещения РФ от 27 ноября 2020 г. № 678 "Об утверждении Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников" [Электронный ресурс] // URL: https://base.garant.ru/400411428
3. Информационно-методическое письмо «Об организации образовательной деятельности с одаренными детьми в 2023-2024 учебном году» [Электронный ресурс] //. URL: http://xn--h1albh.xn--p1ai/wp-content/uploads/2023/07/Odarjonnye-deti.-Informacionno-metodicheskoe-pismo.-2023-2024-uch.-g..pdf
4. Гончарова Н.А., Гончарова М.А. Методические рекомендации по организации работы с одарёнными детьми при преподавании учебного предмета «Математика» / Современные проблемы физико-математических наук / Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией к.ф.-м.н., проф. Т.Н.Можаровой. – Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2022.
5. Ермаков С.С., Юркевич В.С. Развитие познавательной потребностиу школьников в процессе обучения//Современная зарубежная психология, 2013. – Т.2. №2.– С.87-100.
6. Обухов А.С. Развитие исследовательской деятельности учащихся. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Национальный книжный центр, 2015. – 280 с.
7. Одаренность и талант в цифровой среде XXI века // Сборник статей и методических материалов XXVIII Международной научно-практической конференции. 30 января 2023 г. / Под ред. доктора пед. наук, профессора В. Ф. Габдулхакова. – Казань: Отечество, 2023 – 379 с.
8. Поддьяков А.Н. Методологические основы изучения и развития исследовательской деятельности // Исследовательская деятельность учащихся в современном образовательном пространстве / Под ред. А.С. Обухова. М.: НИИ школьных технологий, 2006. – С. 51-58.

9. Румбешта Е.А., Червонный М.А., Чиж Л.А. Организация образования одаренных в области физики и математики детей в профильном общеобразовательном учебном заведении-лицее// Вестник Томского государственного университета. – 2012. – Вып.5(120) – С.212-216.

10. Савенков А.И. Психология исследовательского поведения и исследовательской способности. [Электронный ресурс] // URL: http://www.junradio.com/publ/normativnye_dokumenty/pravovoe_regulirovanie/psikhologija_issledovatelskogo_povedenija_i_issledovatelskie_sposobnosti

11. Слободчиков В.И. Антропологический смысл исследовательской работы школьников//Развитие личности. – 2006. – №1. – С. 236-244.

12. Чугунова Л.Методическое пособие по организации исследовательской деятельности обучающихся в процессе обучения математике. [Электронный ресурс] // URL: https://znanio.ru/media/metodicheskoe-posobie-po-organizatsii-issledovatelskoj-deyatelnosti-obuchayuschihsya-v-protsesse-obucheniya-matematike.

References

1. The concept of the development of mathematical education in the Russian Federation No. 2506-r dated December 24, 2013 [Electronic resource] // URL:https://docs.edu.gov.ru/id1787

2. Order of the Ministry of Education of the Russian Federation No. 678 dated November 27, 2020 "On approval of the Procedure for holding the All-Russian Olympiad of Schoolchildren" [Electronic resource] // URL: https://base .garant.ru/400411428

Information and methodological letter "On the organization of educational activities with gifted children in the 2023-2024 academic year" [Electronic resource] //. URL: http://xn--h1albh.xn--p1ai/wp-content/uploads/2023/07/Odarjonnye-deti.-Informacionno-metodicheskoe-pismo.-2023-2024-uch.-g..pdf.

4. Goncharova N.A., Goncharova M.A. Methodological recommendations on the organization of work with gifted children when teaching the subject "Mathematics" / Modern problems of physical and mathematical sciences / Materials of the VIII All-Russian Scientific and Practical conference with international participation: scientific electronic edition [Electronic resource] // under the general editorship of Ph.D.-M.N., prof. T.N.Mozharova. – The Eagle: OSU named after I.S. Turgenev, 2022.

5. Ermakov S.S., Yurkevich V.S. Development of cognitive needs of schoolchildren in the learning process//Modern foreign psychology. – 2013. Vol. 2. No.2. – pp. 87-100.

6. Obukhov A.S. Development of students' research activities. – 2nd ed., reprint. and additional – M.: National Book Center, 2015. – 280 p.

7. Giftedness and talent in the digital environment of the XXI century // Collection of articles and methodological materials of the XXVIII International Scientific and Practical Conference. January 30, 2023 / Edited by Doctor of Pedagogical Sciences, Professor V. F. Gabdulkhakov. – Kazan: Fatherland, 2023 – 379 p.

8. Poddyakov A.N. Methodological foundations of the study and development of research activity // Research activity of students in the modern educational space / Edited by A.S. Obukhov. M.: Research Institute of School Technologies, 2006. – pp. 51-58.

9. Rumbeshta E.A., Chervonny M.A., Chizh L.A. Organization of education of gifted children in the field of physics and mathematics in a specialized general educational institution-lyceum// Bulletin of Tomsk State University. – 2012. – Issue 5(120) – pp. 212-216.

10. Savenkov A.I. Psychology of research behavior and research ability. [Electronic resource] // URL: http://www.junradio.com/publ/normativnye_dokumenty/pravovoe_regulirovanie/psikhologija_issledovatelskogo_povedenija_i_issledovatelskie_sposobnosti.

11. Slobodchikov V.I. The anthropological meaning of the research work of schoolchildren//Personal development, 2006. – No. 1. – pp. 236-244.

12. Chugunova L. Methodical manual on the organization of research activities of students in the process of teaching mathematics. [Electronic resource] // URL: https://znanio.ru/media/metodicheskoe-posobie-po-organizatsii-issledovatelskoj-deyatelnosti-obuchayuschihsya-v-protsesse-obucheniya-matematike.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 495-501.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 495-501.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.851

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОДАРЕННОСТЬ ШКОЛЬНИКОВ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Наталья Александровна Гончарова [1]✉, ***Карина Алексеевна Ермакова***[2]
[1,2]*Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева, Орёл, Россия*
[1]*n.a.goncharowa@yandex.ru*✉, *https://orcid.org/0000-0003-1404-2685*
[2]*karinaermakova4637@gmail.com*

Аннотация. В статье математическая одаренность школьников представлена в теоретическом и прикладном аспекте. Рассмотрены понятие математической одаренности, её типы и компоненты, структура математических способностей, особенности математически одаренных учащихся, возможности их выявления, развития и поддержки. На основе проведенного анализа, авторы приходят к выводу, что работа учителя-предметника с математически одаренными учащимися требует учета их особенностей в планировании урочной и внеурочной деятельности, реализации образовательного процесса по курсу и при выстраивании индивидуальных образовательных траекторий.

Ключевые слова: математическая одарённость, типы математической одарённости, математические способности, особенности математически одарённых школьников.

Conference paper

MATHEMATICAL GIFTEDNESS OF SCHOOLCHILDREN: THEORY AND PRACTICE

Natalia Al. Goncharova [1]✉, ***Karina A. Ermakova***[2]
[1,2]*Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
[1]*n.a.goncharowa@yandex.ru*✉, *https://orcid.org/0000-0003-1404-2685*
[2]*karinaermakova4637@gmail.com*

Abstract. *In the article, the mathematical giftedness of schoolchildren is presented in theoretical and applied aspects. The concept of mathematical giftedness, its types and components, the structure of mathematical abilities, the features of mathematically gifted students, the possibilities of their identification, development and support are considered. Based on the analysis, the authors come to the*

© Гончарова Н.А., Ермакова К.А., 2023

conclusion that the work of a subject teacher with mathematically gifted students requires taking into account their characteristics in the planning of scheduled and extracurricular activities, the implementation of the educational process on the course and when building individual educational trajectories.

Keywords: *mathematical giftedness, types of mathematical giftedness, mathematical abilities, features of mathematically gifted schoolchildren.*

1. Введение

В настоящее время практически в каждой стране проводится работа по развитию и оказанию поддержки одаренной и талантливой молодежи [6]. Россия не является исключением и у нас действует национальная система выявления и поддержки одаренной и талантливой молодежи. В современном мире, где технологические инновации играют ключевую роль, ценность математической одаренности кратно возрастает. Это обусловливает изучение сущности математической одаренности в современной педагогике, особенностей математически одаренных учащихся, роли учителя-предметника в выявлении, развитии и поддержке таких школьников при реализации образовательного процесса.

2. Основной текст статьи

Математика рассматривается сегодня как явление общечеловеческой культуры. Приобщение к ней – прежде всего приобщение к общекультурным ценностям [7]. В процессе обучения детей математике педагоги нередко обращают внимание на то, что некоторые дети обладают способностями к математике. Обычно математическая одаренность воспринимается как способность к арифметическим вычислениям и пониманию математических идей, к рассуждению математически. Однако скорость решения задач и хорошие оценки по математике не всегда являются показателями, характеризующими одаренность в математике.

Остановимся на ряде определений «математической одаренности» как психолого-педагогической категории. Так, Д.Б. Богоявленская считает ее одной из разновидностей интеллектуальной одаренности, своеобразной суммой математических способностей, которые способны прогрессировать в процессе осуществления специальной математической деятельности. Дж. Рензулли трактует такой вид одаренности через математические способности и приобретенный опыт, силу воли и любовь к труду, умственный потенциал или интеллект, совокупный срез личностных возможностей познания и развития способностей к освоению знаний. Математическая одаренность, по мнению другого исследователя, – это комплекс познавательных возможностей индивидуума, особых способностей и высокой тяги к осуществлению математической деятельности, которая становится ведущим фактором достижения успеха и высоких результатов среди представителей одного возраста и социального класса, на базе личного способа познания математических дисциплин [9].

Таким образом, математическая одаренность рассматривается как вид интеллектуальной одаренности конкретного индивидуума, основой которой выступают математические способности, проявляющиеся в потребности, мотивации к математической деятельности, сопровождающейся достижением более высоких, чем обычно, результатов.

Математическая одаренность представляет собой сложный феномен, который может выражаться в разных формах. Некоторые дети проявляют свои математические способности уже в раннем возрасте, показывая удивительную способность к решению сложных математических проблем, в то время как другие могут обнаружить свою одаренность в этой области в более позднем возрасте. Это может выражается в способности к абстрактному мышлению, умении делать логические выводы, и даже в творческом подходе к решению математических задач.

Учитывая, что математическая одаренность чаще всего начинает проявляться только к пятому классу, интерес представляет следующая типология математически одаренных людей. Согласно типологии выделяют «геометров» и «аналитиков». Так, для «аналитиков» характерен абстрактно-логический тип мышления, интровертность, замкнутость, рассудительность, слабая нервная система. Они преимущественно используют аналитический способ решения задачи. В отличие от них, «геометры» проявляют общительность и даже беззаботность, экстравертность, имеют наглядно-образный тип мышления, сильную нервную систему [9].

Математическую одаренность изучал психолог В.А. Крутецкий, который разработал следующую структуру математических способностей:

– добывание математической информации – умения формализовано воспринимать математическую информацию, усваивать формальную структуру задачи;

– переработка математического материала: а) умения логически мыслить в области числовых и объемных отношений, символики; умения мыслить математическими знаками; б) умения быстро обобщать математические объекты, отношения и действия; в) умения к кратким математическим рассуждениям; г) умения осуществлять гибкие мыслительные процессы; д) умения ясно, просто и рационально представлять решения; е) умения быстро перестроиться с одного мыслительного процесса на другой и обратно при математических рассуждениях;

– хранение математической информации – математическая память должна являться суммарной памятью на математические отношения, схемы рассуждений и доказательств, методов решения задач и подходов к ним;

– общий обобщающий элемент – математическая ориентация интеллекта [5].

Таким образом, математические способности раскрываются через специфику получения, обработки и хранения математической информации. Это, по мнению Д.Б. Богоявленской и А.Н. Низовцевой, составляющие математической одаренности [2]. Исследователями предлагаются такие компоненты математической одаренности: способность к математическому обобщению; рациональность решения (способность находить наиболее краткий

путь решения, отсекать лишнее, не имеющее прямого отношения к достижению цели, поставленной задаче); чувство «математической эстетики» (способность видеть красоту и изящество в простом, остроумном, кратком и экономичном способе решения); обратимость мышления; математическая интуиция [11].

Для выявления математической одаренности у школьников можно использовать различные методы, такие как оценка их способности к абстрактному мышлению, решению сложных математических задач, работы с числами и формирование логических связей. Также можно проводить тестирование, которое поможет определить уровень математических навыков и понимания ребенка.

При обучении математически одаренных учащихся необходимо учитывать их особенности. Так, по мнению М.А. Холодной, прежде всего таких школьников характеризуют более высокие показатели сформированности понятийного опыта: при формулировании вопросов они конструируют более сложный семантический контекст при установлении связи между тремя изолированными понятиями, формулируют более сложные проблемы в связи с заданным объектом на основе более глубокого анализа его признаков [8]

В исследованиях, проведенных в последние годы, ученые обращают внимание на психологические и педагогические аспекты математической одарённости. Они исследуют эффективные методы обучения, психологические особенности развития одарённых детей, а также пути повышения эффективности системы поддержки для этих детей.

Одаренные в математике школьники часто проявляют повышенный интерес к различным математическим концепциям и проводят много времени, занимаясь самостоятельными исследованиями и экспериментами. Среди важных факторов, влияющих на одаренность учащегося, выделяются эксперимент, задавание вопросов, развитие критического мышления и сотрудничество с другими одарёнными детьми.

Однако, несмотря на ярко выраженные математические способности, одарённые дети часто сталкиваются с такими трудностями как недостаток индивидуального внимания, прежде всего со стороны учителя-предметника, в обычных классах, отсутствие соответствующих методик обучения и ограниченный доступ к «продвинутым» математическим материалам. Как показывает практика, при традиционном формате организации образовательного процесса в общеобразовательной школе учителю бывает сложно работать в классе, где есть хоть один одаренный ребенок. Ведь он может демонстрировать разную скорость своей учебной деятельности: например, быстро решить какое-нибудь математическое задание и долго разбираться в поиске других способов его решения. Следует также учитывать, что некоторые математически одаренные учащиеся могут испытывать социальные трудности из-за своих особых интересов и способностей. Они могут чувствовать себя изолированными из-за своих уникальных интересов, что может привести к недооценке и недопониманию их потребностей образовательной средой. Поэтому важно обеспечить таким школьникам соответствующую поддержку, корректируя реализуемую образовательную

программу или создавая специальные образовательные программы, которые позволят им развивать свой потенциал и удовлетворять свою любознательность в области математики.

Существуют различные методы обучения и задания для математически одарённых детей. Особо выделим разработку индивидуальных программ обучения, которые позволяют ученикам изучать материал на более глубоком уровне и в своем собственном темпе. Для стимулирования интереса и развития математических способностей учащихся используются различные задания, включающие сложные задачи, творческие проекты и математические игры.

Важную роль в поддержке и развитии математически одарённых детей в настоящее время играют предметные олимпиады разных уровней (Всероссийская олимпиада школьников, Московская математическая олимпиада и др.) Участие в таких мероприятиях дают возможность для школьников проявить свои способности и соревноваться с другими одарёнными детьми.

Безусловно, математическая одаренность не является чем-то, что предопределено человеку по рождению. Дети могут развивать свои математические навыки и улучшать свою математическую одаренность через обучение, практику и постоянное упражнение в решении математических задач. Многие успешные математики постепенно развивали свои навыки и знания. Вместе с тем математическая одаренность не является гарантией успеха в жизни и не должна быть единственной основой для оценки развития ребенка. Дети с математической одаренностью также нуждаются в развитии других навыков и интересов, а также поддержке в области социального и эмоционального развития.

3. Заключение

Таким образом, в настоящее время продолжается научное осмысление феномена математической одаренности. Являясь одной из задач концепции развития математического образования в нашей стране, математическая одаренность объективно требует внесения изменений в сложившуюся практику реализации образовательного процесса по курсу математики в школе: учета работы с математически одаренными учащимися в урочной и внеурочной деятельности [1]. Учитель-предметник должен знать особенности математически одаренных детей, чтобы своевременно выявить таких учеников, создать условия для развития их математических способностей, как при реализации образовательного процесса, так и при выстраивании индивидуальных образовательных траекторий. Он должен активно соучаствовать в достижении тех самых особых результатов в учебе и других видах деятельности, где математические способности одаренного ученика оказываются востребованными и получают оценку и подтверждение (например, в предметной олимпиаде).

Список источников

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р [Электронный ресурс] // URL:https://docs.edu.gov.ru/id1787

2. Богоявленская Д.Б. К проблеме соотнесения общих, специальных и творческих способностей (на примере математической одаренности/ Д.Б.Богоявленская и А.Н.Низовцева// Психология. Журнал ВШЭ. 2017.№2.С.278-297.

3. Гончарова Н.А., Гончарова М.А. Методические рекомендации по организации работы с одарёнными детьми при преподавании учебного предмета «Математика» / Современные проблемы физико-математических наук / Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией к.ф.-м.н., проф. Т.Н.Можаровой. – Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2022.

4. Кемахлы Шевкет Башер. Одаренность в области математики // Научное обозрение. Педагогические науки. – 2021. – № 6. – С. 10-14. [Электронный ресурс] // URL: https://science-pedagogy.ru/ru/article/view?id=2400

5. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьника. Москва. 1968. [Электронный ресурс] // URL: https://archive.org/details/1968_20220426_202204/page/4/mode/2up.

6. Мягких А.А. Проблемы развития интеллектуального потенциала Российской Федерации. Вестник факультета управления. СПбГЭУ.2018 – Вып.3-1 – С. 200-209.

7. О математической одаренности детей дошкольного возраста [Электронный ресурс] // URL: https://pandia.ru/text/78/345/441.php.

8. Холодная М.А. Интеллектуальная одаренность как проявление особенностей организации индивидуального ментального опыта// Основные концепции творчества и одаренности. М.: Молодая гвардия. 1997. – С.295-314

9. Шадрин В.Ю. Математическая одаренность школьника как социально-педагогический феномен// Успехи современного естествознания. 2008. – №2. – С. 84-85.

10. Шарипова Т.А., Шахматова А.Г. "Особенности образования математически одаренных детей в условиях реализации ФГОС: опыт Казани". - М.: Издательство "Педагогика", 2019.

11. Юркевич В.С. Одаренный ребенок: Иллюзии и реальность: Кн. для учителей и родителей. М.: Просвещение, 1996. – 128 с.

References

1. The concept of the development of mathematical education in the Russian Federation No. 2506-r dated December 24, 2013 [Electronic resource] // URL:https://docs.edu.gov.ru/id1787.

2. Bogoyavlenskaya D.B. On the problem of correlation of general, special and creative abilities (on the example of mathematical giftedness/ D.B.Bogoyavlenskaya and A.N.Nizovtseva// Psychology. HSE Journal. 2017. No. 2. pp. 278-297.

3. Goncharova N.A., Goncharova M.A. Methodological recommendations on the organization of work with gifted children when teaching the subject "Mathematics" / Modern problems of physical and mathematical sciences / Materials of the VIII All-Russian Scientific and Practical conference with international participation: scientific electronic edition [Electronic resource] // under the general editorship of Ph.D.-M.N., prof. T.N. Mozharova. – The Eagle: OSU named after I.S. Turgenev, 2022.

4. Kemakhly Shevket Basher. Giftedness in mathematics // Scientific Review. Pedagogical sciences. – 2021. – No. 6. – pp. 10-14. [Electronic resource] // URL: https://science-pedagogy.ru/ru/article/view?id=2400

5. Krutetsky V.A. Psychology of mathematical abilities of a student. Moscow. 1968. [Electronic resource] // URL: https://archive.org/details/1968_20220426_202204/page/4/mode/2up.

6. Myagkikh A.A. Problems of intellectual potential development of the Russian Federation. Bulletin of the Faculty of Management. SPbGEU. 2018 – Issue 3-1 – p. 200-209.

7. On mathematical giftedness of preschool children [Electronic resource]:- https://pandia.ru/text/78/345/441.php.

8. Kholodnaya M.A. Intellectual giftedness as a manifestation of the peculiarities of the organization of individual mental experience// Basic concepts of creativity and giftedness. Moscow: Molodaya gvardiya. 1997. – p. 295-314.

9. Shadrin V.Yu. Mathematical giftedness of a schoolboy as a socio-pedagogical phenomenon// Successes of modern natural science. 2008. – No. 2. – pp. 84-85.

10. Sharipova T.A., Shakhmatova A.G. "Features of the education of mathematically gifted children in the conditions of the implementation of the Federal State Educational Standard: the experience of Kazan." - M.: Publishing House "Pedagogy", 2019.

11. Yurkevich V.S. Gifted child: Illusions and reality: Book. for teachers and parents. M.: Enlightenment, 1996. – 128 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 502-509.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 502-509.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 373.31

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Наталья Александровна Гончарова [1]✉***, Анастасия Сергеевна Фокина***[2]
[1,2]*Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
[1]*n.a.goncharowa@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0003-1404-2685*
[2] *anastasiya.fokina.04@mail.ru*

Аннотация. *Продолжающийся процесс модернизации структуры школьного образования в условиях цифровизации российского общества обусловливает необходимость изучения информатики в начальной школе. В статье рассмотрены актуальные вопросы преподавания информатики в начальной школе. Авторы делают выводы, касающиеся содержания курса информатики с учетом особенностей учащихся начальной школы, его методической и информационной поддержки, в т.ч. посредством использования различных образовательных платформ и цифровых ресурсов, а также организации преподавания информатики в начальной школе. Обращено также внимание на имеющиеся и появляющиеся у учителей возможности использования цифровых сервисов и информационных систем, готовых современных УМК по информатике и разработку собственных, авторских учебные материалов.*

Ключевые слова: *цифровизация образования, преподавание информатики в начальной школе, образовательные технологии (игровые технологии), образовательные платформы, цифровые ресурсы.*

Conference paper

CURRENT ISSUES OF TEACHING COMPUTER SCIENCE IN PRIMARY SCHOOL

Natalia Al. Goncharova [1]✉***, Anastasia S. Fokina***[2]
[1,2]*Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
[1]*n.a.goncharowa@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0003-1404-2685*
[2] *anastasiya.fokina.04@mail.ru*

© Гончарова Н.А., Фокина А.С., 2023

Abstract. *The ongoing process of modernizing the structure of school education in the context of digitalization of Russian society makes it necessary to study computer science in primary school. The article deals with topical issues of teaching computer science in primary school. The authors draw conclusions concerning the content of the computer science course, taking into account the characteristics of primary school students, its methodological and informational support, including through the use of various educational platforms and digital resources, as well as the organization of teaching computer science in primary school. Attention is also drawn to the existing and emerging opportunities for teachers to use digital services and information systems, ready-made modern computer science teaching materials and the development of their own, copyrighted educational materials.*

Keywords: *digitalization of education, teaching computer science in elementary school, educational technologies (gaming technologies), educational platforms, digital resources.*

1. Введение

Процесс цифровизации общества неразрывно связан с изменениями социального заказа государства к школам и включает модернизацию структуры школьного образования. Это затрагивает как содержание образовательных программ, так и используемых образовательных технологий. Полученное в начальной школе образование служит базой для дальнейшего обучения ребенка в основной школе. В этой связи ведущей целью начального образования является формирование у учащихся комплекса универсальных учебных действий (далее – УУД), обеспечивающих способность к самостоятельной учебной деятельности (умение учиться).

2. Основной текст статьи

В последние десятилетия особое значение в развитии обучающегося на уровне начального общего образования (НОО) приобретает изучение информатики. Ведь полученные учащимся знания, опыт выполнения предметных и УУД по данному предмету, начальное овладение языком информатики послужат основой обучения на уровне основного общего образования и будут востребованы в повседневной жизни. Так, по мнению директора Института цифрового образования МГПУ, информатику «необходимо изучать непрерывно, начиная с начальной школы» и «…уже в «началке» необходимо формировать информационную культуру в рамках самостоятельного предмета «Информатика». С ним соглашается и другой эксперт – руководитель продукта «Информатика» от Яндекс учебника – который подчеркивает, что взаимодействие с информационными системами сейчас начинается с довольно малого возраста и в первом-втором классе дети уже спокойно пользуются домашним компьютером, смартфоном родителей [7].

Содержание образования в целом должно соответствовать концептуальным положениям федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования (ФГОС НОО), ведущим из которых является ориентация образования на достижение

результатов [1]. Так, например, в ФГОС НОО (2-го поколения) метапредметные результаты включают: универсальные познавательные учебные действия (базовые логические действия, базовые исследовательские действия, работа с информацией); универсальные коммуникативные действия (общение, совместная деятельность, презентация); универсальные регулятивные действия (саморегуляция, самоконтроль). Таким образом, формирование УУД в рамках блока «Работа с информацией» обусловливает необходимость изучения информатики уже в начальной школе.

Целью изучения информатики в школе является воспитание и развитие качеств личности, отвечающих требованиям информационного общества, в частности приобретение учащимися информационной и коммуникационной компетентности (далее ИКТ-компетентности). Следует отметить, что многие составляющие ИКТ-компетентности входят и в структуру комплекса УУД. Таким образом, часть метапредметных результатов образования в курсе информатики входят в структуру предметных, т.е. становятся непосредственной целью обучения и отражаются в содержании изучаемого материала.

Кроме того, значительный объём предметной части в содержании курса информатики для начальной школы имеет пропедевтический характер. В связи с чем, по сравнению с другими курсами в начальной школе, удельный вес метапредметной части содержания этого курса оказывается довольно большим. Как следствие в начальной школе курс информатики приобретает интегративный, межпредметный характер. Именно на него возложена главная роль формирования ИКТ-компетентности и УУД. Более того, курс информатики, в отличие от большинства других дисциплин начальной школы, является относительно новым: это касается и его роли, и места в структуре начального образования, и целей, и задач, и содержания и объема. Многие вопросы до сих пор остаются дискуссионными. Так, вопросы современной методики обучения информатике, в том числе и в начальной школе, представлены в работах Босовой Л.Л. [3]; Лапчика М.П., Семакина И.Г., Хеннер Е.К.[6]; Софроновой Н.В., Бельчусова А.А.[9]; Т. А. Рудченко и А. Л. Семенов [4]. Отчасти это обусловлено спецификой не только самого курса, но и возрастом обучающихся. Младший школьный возраст – очень ответственный период школьного детства, от которого зависит дальнейшее развитие интеллекта и личности. Он характеризуется психофизиологическими новообразованиями, переходом от наглядно-образного к словесно-логическому мышлению. В этом возрасте детей не интересует устройство компьютера, его свойства, процессы. Но вместе с тем дети младшего школьного возраста намного легче усваивают основные термины и понятия курса информатики. Кроме того, в младшем возрасте происходит наиболее интенсивное развитие школьного интеллекта [8, С.157]. Поэтому задача учителя заключается в формировании системы первоначальных представлений в соответствии с возрастом ребёнка.

Как было сказано выше в соответствии с новым ФГОС НОО и ООП, основной целью изучения информатики в начальной школе является

формирование у обучающихся основ ИКТ-компетентности. Это предопределяет и содержание курса. В нём условно можно выделить:

– основные информационные объекты и структуры (цепочка, дерево, таблица).

– основные информационные действия (в том числе логические) и процессы (поиск объекта по описанию, построение объекта по описанию, группировка и упорядоченье объектов, выполнение инструкции, в том числе программы или алгоритма и т.д.).

– основные информационные методы (метод перебора полного или систематического, метод проб и ошибок, метод разбиения задачи на подзадачи и т.д.).

Согласно ООП, в основе изучения курса информатики должен быть заложен системно-деятельностный подход, который заключается в вовлечении обучающегося в учебную деятельность, формировании компетентности учащегося в рамках курса. Он реализуется не только за счёт подбора содержания образования, но и за счёт определения наиболее оптимальных видов деятельности учащихся. Ориентация курса на системно-деятельностный подход позволяет учесть индивидуальные особенности учащихся начальной школы, построить индивидуальные образовательные траектории для каждого обучающегося.

Поскольку курс информатики входит в предметную область «Математика и информатика», в соответствии с новым базисным учебным планом начального образования, учебные часы для него (полностью или частично) должны быть выделены из этой предметной области. Интегративный, межпредметный характер курса лишь условно позволяет отделить данный курс от других предметных курсов начальной школы. Так, коммуникативная и языковая компетентности (входящие в понятие ИКТ-компетентности и формируемые в рамках курса), входят в содержание предметных областей «Русский язык», «Литература». А компьютерная грамотность входит в содержание предметной области «Технология». Таким образом, часы на рассматриваемый курс могут выделяться как из предметных областей «Русский язык» и «Технология», так и из других областей: «Окружающий мир», «Изобразительное искусство», «Музыка», «Литература». Начиная со второго класса, часы на курс информатики могут выделяться из части базисного плана, формируемой участниками образовательного процесса.

В силу межпредметного характера курса информатики для начальной школы образовательное учреждение при формировании собственной программы начального образования на основе государственной, обладает свободой при выделении количества учебных часов на данный курс и решении вопроса о том, с какого класса дети будут изучать информатику. Считается, что если это произойдет с 1-го или 2-го класса, то достаточно 1 часа в неделю, а если с 3-го – то можно выделить от 1-го до 2-х часов в неделю.

Процесс обучения требует от учителя много сил и решения непростых задач: сделать уроки интересными, понятно донести информацию. Именно в начальной школе особое внимание должно быть уделено технологии, методике

проведения урока, грамотного определения формы организации учебной деятельности. Так, урок информатики должен быть эмоционально насыщен, пробуждать интерес и потребность в знаниях. Кроме того, учителю необходимо выбрать оптимальный для себя и учащихся темп и ритм проводимого урока. Следует также чередовать виды деятельности учащихся, использовать различные современные методы и приемы обучения. Необходимо учитывать, что на практике хорошо себя зарекомендовали игровые технологии, которые помогают учащимся начальной школы в рамках урока не только снимать усталость и напряжение за счет смены формы деятельности, но и в более доступной и привычной форме понять и закрепить изучаемый материал. Действительно, в основу обучения с использованием игр на уроках информатики положены принципы наглядности, доступности подачи информации. Игры в обучении позволяют повысить интерес учащихся к предмету, познавательную активность и развить способности младших школьников. Для того чтобы применение игр стало эффективным необходимо уделить особое внимание подбору заданий, которые соответствуют целям игры.

Особое внимание должно быть уделено структуре самого урока информатики в начальной школе, который может проводиться в двух вариантах: «машинном» и «безмашинном». Так, при, например, «машинном» варианте урок включает следующие этапы: 1) организационный момент, включая объявление темы и целей урока (1-3 мин); 2) разминка – короткие математические, логические задачи и задачи на развитие внимания или компьютерная разминка (ввод и редактирование текста) (3-5 мин.); 3) основная тема (безмашинная часть урока) (10-15 мин.); 4) физкультминутка (1-2 мин); 5) работа за компьютером (10-20 мин.); 6) подведение итогов, выводы, гимнастика для глаз (2-3 мин.).

Поскольку компьютер является сложным техническим устройством, который содержит электромагнитное излучение, в начальной школе следует уделять повышенное внимание технике безопасности. Работа на компьютере должна соответствовать санитарно-эпидемиологическим требованиям. Так, согласно СанПиН 1.2.3685-21 «Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания», помещения, где находится техника, должны быть хорошо освещены. Для учащихся 1-2 классов работа на компьютере должна составлять не более 20 минут, а для учащихся 3-4 классов не более 25 минут [2].

Не менее важным вопросом выступает проблема учебно-методического обеспечения курса информатики, для выбора которого современному учителю предоставляются широкие возможности. При этом в своей практике он может использовать как готовые УМК (например, УМК «Информатика 1-4» авторов Т. А. Рудченко и А. Л. Семенов, рекомендованный Министерством образования и науки Российской Федерации), так и разработать собственные учебные материалы (тестовые задания, тренажеры, презентации и т.д.), используя различные образовательные платформы и цифровые ресурсы [4]. Эксперты отмечают, что практически все учителя используют в своей работе различные цифровые сервисы и информационные системы [5].

Кроме того, в нашей стране с 2019 года реализуется федеральный проект «Цифровая образовательная среда» (ЦОС). Его частью стало создание федеральной государственной информационной системы «Моя школа», к которой с 1 января текущего года начали подключать все школы России. Подчеркнем, что система разработана как инструмент в помощь учителю, родителю, ученику. В настоящее время пользователям ФГИС «Моя школа» доступны личные кабинеты, библиотека верифицированного образовательного контента, тестирующая подсистема, облачное хранение, редактирование документов и другие сервисы. В электронной библиотеке размещено 6,5 тыс. образовательных материалов, а к 2024 году в ней будут представлены материалы по каждому уроку для всех предметов школьной программы с первого по одиннадцатый класс.

ФГИС «Моя школа» представлена в виде подсистем как для создания электронных образовательных ресурсов «Интерактивные учебные материалы», так и для изменения характера взаимодействия участников образовательного процесса и расширения образовательного контента («Электронное обучение», «Сферум», «Цифровой урок»). Все это способствует индивидуализации учебного процесса, что особенно актуально для начальной школы.

Хотелось бы особо подчеркнуть, что у педагогов нашего региона (Орловской области) с ноября текущего года появилась возможность пользоваться бесплатной электронной библиотекой практик Сферума. Как ожидается, с помощью цифровых инструментов учителя сделают свои уроки более разнообразными и интересными. Более того, библиотека включает рекомендации по эффективному и органичному использованию учебного профиля Сферум в VK Мессенджере для решения образовательных задач, адресованные как учителям-предметникам, классным руководителям, так и педагогам дополнительного образования.

Как показывает практика, в последние годы в своей работе учителя, особенно начальной школы, активно используют российскую интерактивную и адаптивную образовательную платформу «Учи.ру» для изучения школьных предметов в интерактивной форме. Здесь предлагаются простые и прозрачные условия пользования: ученики выполняют интерактивные задания, а система автоматически подстраивается под уровень их подготовки. В зависимости от скорости и правильности решения задач план корректируется. Если ребенку нужно больше времени на усвоение материала, то платформа «Учи.ру» добавит тематические задания, даст дополнительные пояснения, проведет работу над ошибками. Если материал ребенком усваивается легко, то можно быстрее перейти к новой теме. Функционал платформы постоянно обновляется. Особо подчеркнем, что на этой платформе учитель может размещать и свои задания для учащихся в разделе «Задания от учителя»: есть возможность задавать домашнее задание, составляя его из заданий по той теме, которую изучали на уроке или провести проверочную работу, используя готовую или собрав её из банка заданий.

Таким образом, грамотное использование возможностей платформы «Учи.ру» в начальной школе способствует развитию у учащихся навыков

самообразования и самоконтроля, повышению уровня комфортности обучения, познавательной активности и инициативности младших школьников, формированию информационно-коммуникационной компетентности, созданию ситуации успеха, повышению мотивации и уверенности в себе, развитию познавательного интереса и, как следствие, повышению качества знаний учащихся.

Отметим также, что в настоящее время существует большое число и других программных продуктов (платформ), которые учителя могут использовать для создания авторского образовательного контента, например, сервис Google Classroom, отечественная платформа CoreApp и многие другие.

3. Заключение

На основе вышеизложенного, можно сделать вывод о том, что преподавание информатики в начальной школе является достаточно новой и востребованной самой жизнью практикой. Школьники, которые изучают информатику с раннего возраста, проявляют больший интерес к научно-техническим дисциплинам, имеют более развитую компьютерную грамотность и готовы к дальнейшему изучению информатики в старших классах. Это объективно требует решения актуальных вопросов преподавание информатики в начальной школе: уточнения/определения содержания курса, его методической и информационной поддержки, организацию учебного процесса с учетом особенностей учащихся начальной школы, грамотного использования учителем современных и инновационных методов и форм обучения информатике, образовательных платформ и цифровых ресурсов.

Список источников

1. Приказ Министерства просвещения РФ от 31 мая 2021 г. № 286 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования» [Электронный ресурс]: – Режим доступа: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/400807193.

2. Санитарные правила и нормы СанПиН 1.2.3685-21 «Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания». /Постановление Роспотребнадзора от 28.01.2021 г. № 2. [Электронный ресурс]: – Режим доступа: https://www.rospotrebnadzor.ru/files/news/GN_sreda%20_obitaniya_compressed.pdf

3. Босова Л.Л. Обучение информатике младших школьников. М.: МГПУ, 2020. – 297 с.

4. Информатика. Сборник рабочих программ. 1-4 классы: пособие для учителей общеобразовательных организаций / Т.А. Рудченко, А. Л. Семёнов. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 55 с.

5. Калмицкий М. Цифровизация образования в России выходит на новый уровень [Электронный ресурс]: – Режим доступа: https://rg.ru/2023/02/13/cifrovizaciia-obrazovaniia-v-rossii-vyhodit-na-novyj-uroven.html.

6. Лапчик М.П., Семакин И.Г., Хеннер Е.К. Методика обучения информатике. СПб: Лань, 2020. - 392 с.

7. Набиркина М. Почему школьным урокам информатики нужен «апгрейд» // РГ.26.05.2021. [Электронный ресурс]: – Режим доступа: https://rg.ru/2021/05/26/pochemu-shkolnym-urokam-informatiki-nuzhen-apgrejd.html.

8. Пузанкова Л.В. Особенности преподавания информатики в начальной школе// Общество: социология, психология, педагогика. 2021. №5. - С. 155-159.

9. Софронова Н.В., Бельчусов А.А. Теория и методика обучения информатике. М.: Юрайт, 2019. – 401 с.

References

1. Order of the Ministry of Education of the Russian Federation No. 286 dated May 31, 2021 “On Approval of the Federal State Educational Standard of primary general education" [Electronic resource]: – Access mode: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/400807193.

2. Sanitary rules and norms of SanPiN 1.2.3685-21 "Hygienic standards and requirements for ensuring the safety and (or) harmlessness of environmental factors for humans". /Resolution of Rospotrebnadzor No. 2 dated 28.01.2021. [Electronic resource]: – Access mode: https://www.rospotrebnadzor.ru/files/news/GN_ sreda%20_obitaniya_compressed.pdf.

3. Bosova L.L. Teaching computer science to younger schoolchildren.: MSPU, 2020. – 297 p.

4. Computer science. Collection of work programs. Grades 1-4: a manual for teachers of general education organizations / T.A. Rudchenko, A. L. Semenov. – 2nd ed. - M.: Enlightenment, 2014. – 55 p.

5. Kalmitsky M. Digitalization of education in Russia is reaching a new level [Electronic resource] // - Access mode: https://rg.ru/2023/02/13/cifrovizaciia-obrazovaniia-v-rossii-vyhodit-na-novyj-uroven.html.

6. Lapchik M.P., Semakin I.G., Henner E.K. Methods of teaching computer science. St. Petersburg: Lan, 2020. - 392 p.

7. Nabirkina M. Why do school computer science lessons need an "upgrade"// RG.26.05.2021. [Electronic resource]: – Access mode: https://rg.ru/2021/05/26/pochemu-shkolnym-urokam-informatiki-nuzhen-apgrejd.html.

8. Puzankova L.V. Features of teaching computer science in primary school// Society: sociology, psychology, pedagogy. 2021. No. 5. pp. 155-159.

9. Sofronova N.V., Belchusov A.A. Theory and methodology of teaching computer science. Moscow: Yurayt, 2019. – 401 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 510-516.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 510-516.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 53:37.016

РОЛЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АНАЛОГИИ В ОПИСАНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ РАЗНОЙ ПРИРОДЫ

Джахангир Ислам оглы Гусейнов[1]✉, Октай Маил оглы Гасанов[2], Хатыря Агакарим кызы Адгезалова[3], Севиндж Хазай кызы Джалилова[4]
[1,2,3,4]Азербайджанский Государственный Педагогический Университет, Баку, Азербайджан
[1]cahngir.adpu@mail.ru✉, [2]1959oktay@mail.ru
[3]xatirafizik@mail.ru, [4]sevinjjalilova@yahoo.com

Аннотация. *Метод аналогии позволяет учащимся развивать умение находить, вычислять и объяснять физические свойства и величины на основе подобия прикладных математических моделей, получая при этом более глубокое понимание известных физических явлений, понятий и процессов. Показано, что использование аналогии как познавательного метода играет эффективную роль на начальном этапе познания новых физических явлений, в ряде случаев методы, основанные на использовании аналогии, очень удобны при решении задач физики и эффективно используются для дальнейшего развития междисциплинарных и внутридисциплинарных связей.*

Ключевые слова: *познавательные методы, аналогия, природные явления, потенциальные поля, междисциплинарная связь, решение задач.*

Conference paper

THE ROLE OF USING ANALOGY IN DESCRIBING PHYSICAL PHENOMENA OF DIFFERENT NATURES

Jahangir Is. Huseynov[1]✉, Oktay M. Hasanov[2], Khatyrya A. Adgezalova[3], Sevinj K. Jalilova[4]
[1,2,3,4]Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan
[1]cahngir.adpu@mail.ru✉, [2]1959oktay@mail.ru
[3]xatirafizik@mail.ru, [4]sevinjjalilova@yahoo.com

Abstract. *The analogy method allows students to develop the ability to find, calculate and explain physical properties and quantities based on the similarity of applied mathematical models, while gaining a deeper understanding of known physical phenomena, concepts and processes. It is shown that the use of analogy as a cognitive*

© Гусейнов Д.И.о., Гасанов О.М.о., Адгезалова Х.А.к., Джалилова С.Х.к., 2023

method plays an effective role at the initial stage of cognition of new physical phenomena; in some cases, methods based on the use of analogy are very convenient in solving physics problems and are effectively used for the further development of interdisciplinary and intradisciplinary connections.

Keywords: *cognitive methods, analogy, natural phenomena, potential fields, interdisciplinary communication, problem solving.*

При обобщенном повторении предусмотренного учебным планом курса физики открываются хорошие возможности для широкого применения методов научного познания. При повторении можно просмотреть весь объем учебного материала и провести параллели между сходными понятиями и процессами, применить разные качественные методы познания, использовать широкий спектр межпредметных и внутрипредметных связей. Поскольку в основе метода аналогии лежит сравнение, проявляющееся при сопоставлении тел, процессов и событий, особое значение приобретает его роль в процессе повторения. При повторении аналогичный метод позволяет развивать у учащихся умение находить, вычислять и объяснять физические свойства и величины на основе подобия прикладных математических моделей, получая при этом более глубокое понимание известных физических явлений, понятий и процессов.

Например, для наглядности и экономии времени, используем аналогию между математическими формулами ($F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$), соответствующими характеристикам гравитационного и электростатического полей и сил взаимодействия, между массой и зарядом (m→q), гравитационная постоянная аналогична постоянной Кулона, (G→k), а напряженность гравитационного поля аналогична напряженности электрического поля ($\vec{g} \to \vec{E}$). Зная потенциальный характер этих полей, и известное выражение для работы, совершаемой при перемещении тела массой m с расстояния r_1 на расстояние r_2 в гравитационном поле Земли ($A = GmM(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$), то для электростатического поля, создаваемое стационарным зарядом Q пробного заряда q с расстояния r_1 можно определить работу, совершенную при перемещении на расстояние r_2:

$$A = kqQ(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

Для глубокого овладения физикой и развития физического познания необходимо установить обучение, основанное на последовательном использовании методов научного познания в средней школе. Однако, как показывает педагогический опыт, научить школьников использовать качественные методы физики при обучении теоретическому материалу и решении задач довольно сложно. Для этого от учителя требуется систематическое использование специальных действий и приемов. Чтобы полностью понять их суть, необходимо привести яркие примеры, описывающие их проявления из разных разделов и тем физики.

Опыты показывают, что в обучении, особенно в процессе обобщения повторения курса физики в вузе, эффективно использование метода аналогов по сравнению с подобием методов математических расчетов, то есть

математических моделей. Таких примеров в существующих учебниках много, но они не всегда наглядно продемонстрированы. Бывают такие случаи, когда математические выражения, созданные при количественном описании физических явлений, позволяют представить различные физические свойства и интерпретировать их физический смысл.

Одной из актуальных проблем обучения физике в общеобразовательной школе является обучение проблемному решению физических задач. Решение задач позволяет школьникам привыкнуть к правильности и логичности суждений, критическому осмыслению полученных результатов, развивает гибкость и пластичность мышления. Для успешного решения задач по физике необходимо четко понимать условие и требование задачи, знать теоретические основы, владеть математическим аппаратом и мыслительными операциями по поиску решения, знать, с чего начать и что делать в этой ситуации.

Решение задач по физике это сложный процесс, требующий не только знаний по математике и физике, но и специальных навыков. Необходимо проанализировать, переформулировать и перемоделировать условие задачи, заменить исходную проблему другой проблемой или разделить ее на подзадачи, разработать план решения, сформулировать гипотезы и проверить предлагаемые решения.

Процесс решения любой задачи по физике: восприятие и понимание содержания, поиск плана решения, реализация плана и проверка решения. Для понимания, каждый студент должен не только внимательно прочитать, но и понять ситуацию, описанную в задаче. Это важно для понимания и применения физических терминов, отношений между данными и неизвестными величинами. Поэтому формирование умения решать физические задачи следует начинать с создания условий, обеспечивающих полное и достаточное понимание ситуации, описанной в задаче.

Часто при решении задач оказывается, что она похожа на другую, уже решенную, и степень близости проблем может быть самой разной. Сосредоточив внимание на аналогии между новыми и старыми проблемами, мы получаем дополнительные шансы на успех в поиске решений новых. Тема аналогии очень важна при решении задач по физике, так как использование аналогии при решении задач по физике позволяет сократить количество вычислительных шагов и, как следствие, время, затрачиваемое на решение той или иной задачи. Отметим, что степень близости задач может быть разной. Сосредоточив внимание на аналогии между решенной задачей и новой задачей, наши шансы на успешное выполнение новой задачи резко возрастают. Таким образом, «рассуждения по основе аналогии» — один из многих методов решения задач.

Чтобы убетиться в сказанном, рассмотрим решение двух похожих задач.

Задача:

В баллоне емкостью 1,0 л находится газ под давлением p=500 кПа. За сколько ходов поршневого насоса с объемом камеры V_0 = 0,2 л можно выкачать воздух из баллона до давления p_n = 6,65 Па? Процесс прокачки происходит при постоянной температуре.

Решение:

В начальном состоянии за первый ход поршня газ объемом V и давлением p занимает объем $V+V_0$. Поскольку этот процесс происходит при постоянной температуре, то p$V = p_1(V + V_0)$, отсюда мы можем найти давление p_1 из закона Бойля-Мариота

$$p_1 = \frac{pV}{V + V_0}$$

Затем газ выбрасывается из насосной камеры в атмосферу и начинается второй ход поршня. В начале второго хода давление газа в баллоне равно p_1, а в конце p_2. Снова применяя закон Бойля-Мариота, получаем

$$p_1V = p_2(V + V_0);\ \ p_2 = \frac{p_1V}{V + V_0} = p\left(\frac{V}{V + V_0}\right)^2.$$

Аналогично можно найти давление p_3 после 3-го хода поршня

$$p_3 = \frac{p_2V}{V + V_0} = p\left(\frac{V}{V + V_0}\right)^3.$$

Давление в цилиндре после n-го хода поршня

$$p_n = p\left(\frac{V}{V + V_0}\right)^n$$

Если прологарифмировать последнее выражение и решить полученное уравнение относительно n получим

$$n = \frac{lg\left(p_n/p\right)}{lg\left(\frac{V}{V+V_0}\right)}.$$

Аналогичная задача:

Конденсатор электрической емкостью C зарядится до напряжения U, и отключили от источника тока. К этому заряженному конденсатору подключается незаряженный конденсатор емкостью C_0, а после зарядки он отключается и разряжается. Сколько раз нужно подключить и разрядить конденсатор емкостью C_0 , что бы напряжение на конденсаторе C стало U_n?

Решение:

Поскольку этот вопрос аналогичен предыдущему вопросу, можно предположить, что ответ будет аналогичен ответу из предыдущей задачи.

$$n = \frac{lg\left(U_n/U\right)}{lg\left(\frac{C}{C + C_0}\right)}$$

Давайте решим задачу, чтобы проверить нашу гипотезу.

При подключении незаряженного конденсатора к заряженному конденсатору происходит перераспределение зарядов. Поскольку количество заряда в это время сохраняется, мы можем написать:

$$CU = U_1(C + C_0).$$

где

$$U_1 = \frac{CU}{C + C_0}$$

Во втором подключении происходит перераспределение заряда CU_1

$$CU_1 = (C + C_0)U_2;\ U_2 = \frac{U_1 C}{C+C_0} = U\left(\frac{C}{C+C_0}\right)^2,$$

Напряжение на конденсаторе после n-го соединения будет

$$U_n = U\left(\frac{C}{C + C_0}\right)^n$$

Если прологарифмировать последнее выражение и решить полученное уравнение относительно n получим

$$n = \frac{lg\left({}^{U_n}/_{U}\right)}{lg\left(\frac{C}{C+C_0}\right)}.$$

Теперь давайте предложим некоторые вопросы, относящиеся к разным разделам общей физики. Решив эти предложенные задачи, мы можем ясно увидеть наличие аналогии между ними.

Аналогия 1:

Задание 1. Определить работу, затраченную на деформацию, чтобы изменить удлинение пружины с жесткостью k от x_1 до x_2.

Ответ: $A = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$

Задание 2. Какую работу необходимо совершить, чтобы изменить заряд конденсатора емкостью C от значения q_1 до значения q_2?

Ответ: $A = \frac{1}{2C}(q_2^2 - q_1^2)$

Аналогия 2:

Задание 1. U-образная трубка частично заполнена жидкостью. Площадь поперечного сечения трубы везде одинакова, а общая длина заполненной части l. Определить период малых колебаний поверхности жидкости в такой системе.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$

Задание 2. Найти период малых колебаний жидкости массой m ареометра с плотностью ρ. Ареометр представляет собой закрытую трубку с площадью поперечного сечения S и плавает вертикально при погружении в жидкость.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}$

Таким образом, при изучении курса физики студенты сталкиваются с различными природными явлениями. Из-за разнообразия изучаемых явлений многие из них испытывают трудности в решении задач. Однако одни и те же законы и методы решения задач могут использоваться в разных разделах физики. Понимание этого позволяет учащимся более успешно решать задачи и, следовательно, повышать качество своих знаний.

Значение аналогов в обучении связано с повышением научно-теоретического уровня изложения материала по физике в высшей школе, формированием научного мировоззрения студентов. В педагогической практике для объяснения в основном используется аналогия. Аналогии и модели

позволяют глубже понять процесс изучения физики, что, в свою очередь, позволяет учащимся лучше понимать физические законы и процессы. Метод аналогии позволяет рассмотреть новые вопросы и сопоставить их с ранее изученными. Использование хороших аналогий позволяет добиться большей ясности.

Аналогии позволяют понять сущность физических законов и явлений, представить их в более доступной для учащихся форме, лучше понять единство законов природы. Использование межпредметных аналогий делает процесс обучения интересным и творческим, способствует интеграции знаний и развитию личности учащегося. В то же время, рассматривая сходство, не следует забывать искать и различия. Метод аналогии, связанный с идеями кибернетики и синергетики, может быть эффективно использован для дальнейшего развития междисциплинарных связей.

Список источников

1. Браже Р. А., Жданкина А. А. Физическая аналогия между электромагнетизмом и гидродинамикой в учебном процессе // Физическое образование в вузах. –2011. Т. 17, № 4, с. 92 – 99.

2. Ланкина М. П., Эйсмонт Н. Г., Дубенский Ю. П. Активизация умственной деятельности учащихся: моделирование обучения физике: –Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2013. – 148 с.

3. Ларченкова Л. А. Методическая система обучения решению физических задач в средней школе: монография. – СПб.: Изд-воРГПУ им. А. И. Герцена, 2013. – 156 с.

4. Попков В. И. Роль аналогии в развитии физики // Актуальная наука. 2017, № 1, с. 6-13.

5. Bartlett D., Analogies Between Electricity and Gravity, Metrologia 41, S115 2004.

6. Podolefsky Noah S. and Finkelstein Noah D. Use of analogy in learning physics: The role of representations // Phys. Rev. Spec. Top. - Physics Education Research 2, 020101. 2006.

References

1. Brazhe R. A., Zhdankina A. A. Physical analogy between electromagnetism and hydrodynamics in the educational process // Physical education in universities. – 2011. T. 17, no. 4, p. 92 – 99.

2. Lankina M. P., Eismont N. G., Dubensky Yu. P. Activation of mental activity of students: modeling of physics teaching: – Omsk: Om Publishing House. state University, 2013. – 148 p.

3. Larchenkova L. A. Methodological system of teaching solving physical problems in secondary school: monograph. – St. Petersburg: Publishing House of the Russian State Pedagogical University named after. A. I. Herzen, 2013. – 156 p.

4. Popkov V.I. The role of analogy in the development of physics // Current Science. 2017, no. 1, p. 6-13.

5. Bartlett D., Analogies Between Electricity and Gravity, Metrologia 41, S115 2004.

6. Podolefsky Noah S. and Finkelstein Noah D. Use of analogy in learning physics: The role of representations // Phys. Rev. Spec. Top. - Physics Education Research 2, 020101. 2006.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 517-520.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 517-520.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 378.147

О ПРИМЕНЕНИИ ПРОБЛЕМНЫХ БИНАРНЫХ ЛЕКЦИЙ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В ВОРОНЕЖСКОМ ИНСТИТУТЕ МВД РОССИИ

Ольга Юрьевна Данилова[1]✉, Светлана Анатольевна Телкова[2]
[1,2]Воронежский институт МВД России, Воронеж, Россия
[1]danilova_olga@hotmail.com✉, https://orcid.org/0009-0006-2300-0937
[2]tsa76@inbox.ru, https://orcid.org/0000-0003-2401-8363

Аннотация. *При проведении занятий в вузах широко применяются современные образовательные технологии, к которым относятся активные и интерактивные методы обучения. Использование проблемных бинарных занятий в учебном процессе способствует повышению у обучающихся познавательного интереса к изучаемым дисциплинам, а также выявлению взаимосвязей как на внутрипредметном, так и на междпредметном уровнях. Проведение проблемной бинарной лекции двумя лекторами по двум смежным дисциплинам позволяет обучающимся быть не просто пассивными слушателями, а стать активными участниками образовательного процесса, что приводит к более глубокому пониманию изложенного материала. Авторами предложена технологическая схема организации проблемного бинарного лекционного занятия, показаны особенности и выявлены трудности, с которыми сталкивается преподаватель при подготовке к проведению данного типа занятий. Также авторами приведен успешный пример проведения проблемной бинарной лекции лектором-математиком и лектором-физиком при изучении темы «Дифференциальные уравнения высших порядков» в ходе курса математики.*

Ключевые слова: *активные и интерактивные методы обучения, проблемная бинарная лекция, внутрипредметные связи, межпредметные связи, технологическая схема занятия.*

Conference paper

ON THE APPLICATION OF PROBLEMATIC BINARY LECTURES IN THE TEACHING OF MATHEMATICS AT THE VORONEZH INSTITUTE OF THE MINISTRY OF INTERNAL AFFAIRS OF RUSSIA

Olga Yu. Danilova[1]✉, Svetlana A. Telkova[2]

© Данилова О.Ю., Телкова С.А., 2023

[1,2]*Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russia*
[1]*danilova_olga@hotmail.com*✉*, https://orcid.org/0009-0006-2300-0937*
[2]*tsa76@inbox.ru, https://orcid.org/0000-0003-2401-8363*

Abstract. *When conducting classes at universities, modern educational technologies are widely used, which include active and interactive teaching methods. The use of problematic binary classes in the educational process helps to increase students' cognitive interest in the studied disciplines, as well as to identify relationships both at the intra-subject and inter-subject levels. Conducting a problematic binary lecture by two lecturers in two related disciplines allows students to be not just passive listeners, but to become active participants in the educational process, which leads to a deeper understanding of the material presented. The authors proposed a technological scheme for the organization of a problematic binary lecture class, showed the features and identified the difficulties faced by the teacher in preparing for this type of classes. The authors also provide a successful example of a problematic binary lecture by a mathematical lecturer and a physics lecturer when studying the topic "Differential equations of higher orders" during a mathematics course.*

Keywords: *active and interactive teaching methods, problematic binary lecture, intrasubject connections, intersubject connections, technological scheme of the lesson.*

1. Введение

При проведении занятий в высших учебных заведениях в настоящее время широко используются современные технологии обучения, к которым относятся активные и интерактивные методы [1-5]. Проведение междисциплинарного лекционного бинарного занятия двумя лекторами способствует более глубокому усвоению сложного лекционного материала через непосредственное участие обучающихся в образовательном процессе, в ходе которого обучающиеся взаимодействуют как с лектором, так и с друг другом. При этом повышается мотивация познавательной деятельности у обучающихся, что приводит к дальнейшему углубленному изучению смежных дисциплин, занятию научной деятельности. Однако следует учесть, что проведение такого вида занятий потребует от преподавателя много времени и усилий для подготовки лекции.

2. Основной текст статьи

Авторами был изучен и переработан обширный материал по проблеме применения бинарных лекций в образовательном процессе при преподавании естественнонаучных дисциплин. На рисунке 1 представлена разработанная на основе изученного материала технологическая схема организации и проведения межпредметных проблемных лекций [6], используемая при преподавании дисциплины «Математика».

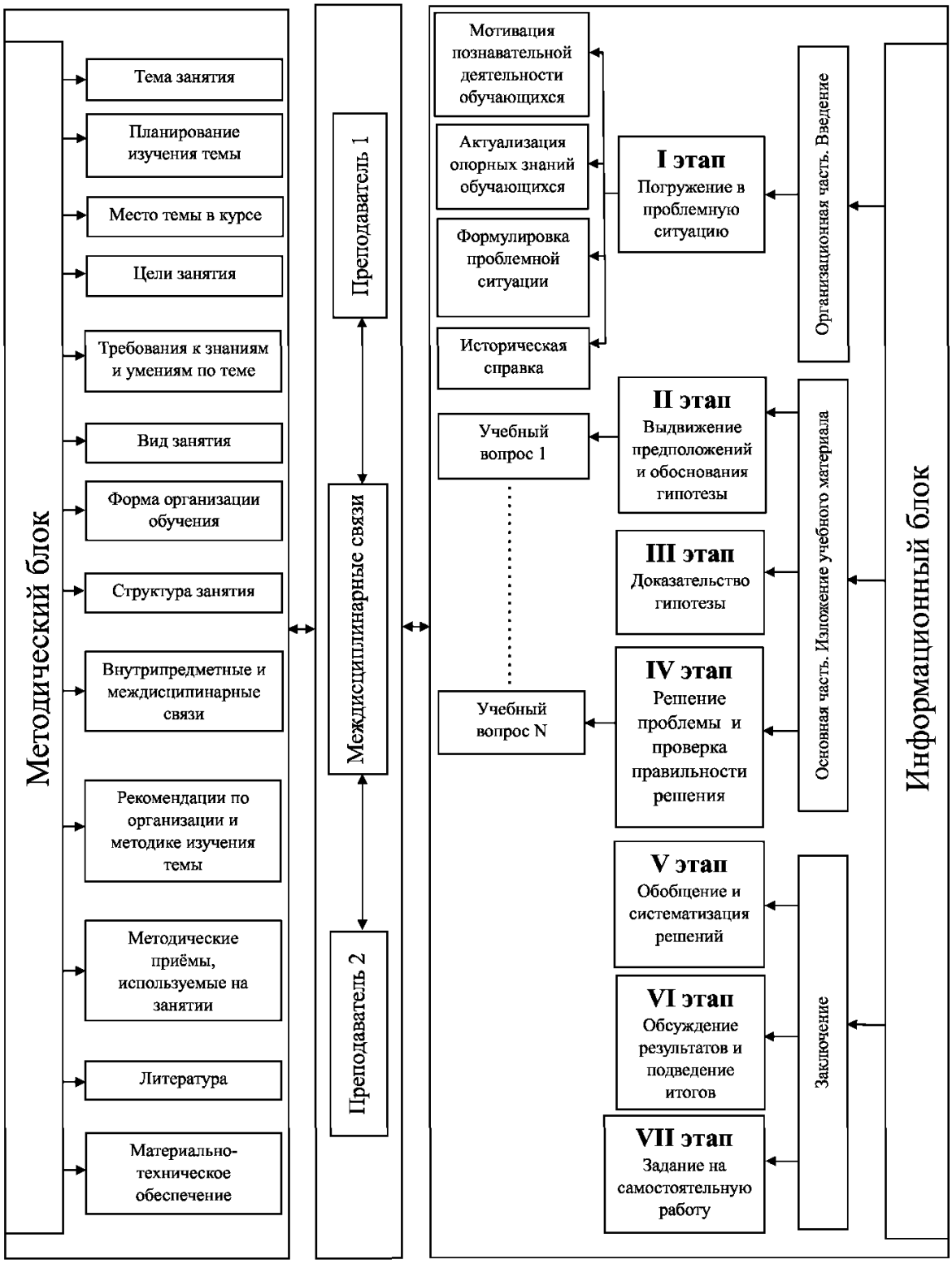


Рисунок 1. Технологическая схема организации и проведения междисциплинарных проблемных бинарных занятий.

3. Заключение

Преподавателями кафедры математики и моделирования систем Воронежского института МВД России совместно с преподавателями кафедры физики и радиоэлектроники неоднократно были проведены проблемные бинарные лекции по курсу математики. Опыт таких занятий показывает, что они оказываются более эффективными по сравнению с традиционными видами занятий. Проведение лекционного занятия лектором-математиком и лектором-

физиком способствует более подробному и всестороннему изложению изучаемого материала.

Список источников

1. Лапыгин Ю.Н. Методы активного обучения: учебник и практикум для вузов. М.: Издательство Юрайт, 2015. - 248 с.
2. Мухина Т.Г. Активные и интерактивные образовательные технологии (формы проведения занятий) в высшей школе: учеб. пособие. Н. Новгород: ННГАСУ, 2013 - 97 с.
3. Полат Е.С. Современные педагогические и информационные технологии в системе образования: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Е.С. Полат, М.Ю. Бухаркина. - 3-е изд., стер. - М.: Издательский центр «Академия», 2010. - 368 с.
4. Кузнецова Т.В., Рядовская О.Д. Организация и проведение бинарного занятия // Решетневские чтения, 2018. Т. 2. - С. 571-572.
5. Ламонина Л.В., Смирнова О.Б., Степанова Т.Ю. К вопросу об активных методах обучения на лекции: из опыта применения в преподавании математических и информатических дисциплин // Электронный научно-методический журнал Омского ГАУ, 2019. — №1 (16) январь-март. - URL: http://e-journal.omgau.ru/images/issues/2019/1/00696.pdf. — ISSN 2413-4066 (дата обращения 10.09.2023).
6. Данилова О.Ю. Реализация инновационных организационных форм обучения в образовательных организациях высшего образования / О.Ю. Данилова, С.А. Телкова // Право и образование, 2023. - № 9. - С. 10-20.

References

1. Lapygin Yu.N. Methods of active learning: textbook and workshop for universities. Moscow: Yurayt Publishing House, 2015. - 248 p. (In Russ.).
2. Mukhina T.G. Active and interactive educational technologies (forms of classes) in higher school: studies.manual. N. Novgorod: NNGASU, 2013 – 97 p. (In Russ.).
3. Polat E.S. Modern pedagogical and information technologies in the education system: studies.manual for students. higher. studies. institutions / E.S. Polat, M.Y. Bukharkina. - 3rd ed., ster. - M.: Publishing center "Academy", 2010. - 368 p. (In Russ.).
4. Kuznetsova T.V., Ryadovskaya O.D. Organization and conduct of binary classes // Reshetnev readings, 2018. Vol.2. - pp. 571-572. (In Russ.).
5. Lamonina L.V., Smirnova O.B., Stepanova T.Yu. On the issue of active teaching methods at lectures: from the experience of using mathematical and computer disciplines in teaching // Electronic Scientific and Methodological Journal of Omsk State University, 2019. - No. 1 (16) January - March. – URL: http://e-journal.omgau.ru/images/issues/2019/1/00696.pdf. - ISSN 2413-4066 (accessed 10.09.2023). (In Russ.).
6. Danilova O.Yu. Implementation of innovative organizational forms of education in educational institutions of higher education / O.Yu. Danilova, S.A. Telkova // Law and Education, 2023. - No. 9. - pp. 10-20. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 521-527.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 521-527.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.851

МЕТАПРЕДМЕТНАЯ ИНТЕГРАЦИЯ В ОБУЧЕНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БУДУЩИХ ФИЗИКОВ НА ОСНОВЕ ФУЗИОНИСТКОГО ПОДХОДА

Елена Геннадиевна Евсеева[1], Юлия Юрьевна Коняева[2]✉
[1,2]ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
[1]e.evseeva@donnu.ru
[2]konyaeva.y@inbox.ru

Аннотация. *Рассматриваются вопросы обучения теории вероятностей бакалавров физико-технических направлений подготовки с точки зрения метапредметной интеграции. Отмечается роль фузионистского подхода, как средства повышения эффективности освоения будущими физиками способов действий их будущей профессиональной деятельности. Особое внимание уделено задачам профессиональной деятельности будущих физиков, решаемым с применением вероятностно-статистических методов. Представлены методические требования к процессу метапредметной интеграции в обучении теории вероятностей студентов-физиков на основе фузионистского подхода.*

Ключевые слова: *фузионистский подход, теория вероятностей, метапредметная интеграция, вероятностно-статистические методы.*

Conference paper

META-SUBJECT INTEGRATION IN TEACHING PROBABILITY THEORY TO FUTURE PHYSICISTS ON THE BASIS OF THE FUSIONIST APPROACH

Elena G. Evseeva[1], Yuliya Yu. Konyaeva[2]✉
[1,2]Donetsk State University, Donetsk, Russia
[1]e.evseeva@donnu.ru
[2]konyaeva.y@inbox.ru

Abstract. *The paper considers the issues of teaching probability theory to bachelors of physics and technology in terms of meta-subject integration. The role of the fusionist approach as a means of increasing the efficiency of mastering by future physicists of the ways of action of their future professional activity is noted. Special attention is paid to the tasks of professional activity of future physicists, solved with*

© Евсеева Е.Г., Коняева Ю.Ю., 2023

the use of probabilistic-statistical methods. Methodological requirements to the process of meta-subject integration in teaching probability theory to physics students on the basis of the fusionist approach are presented.

Keywords: *fusionist approach, probability theory, meta-subject integration, probabilistic-statistical methods.*

Важнейшим направлением развития современного общества является интеграция и глобализация социальных и образовательных процессов. Следовательно, необходимы подходы, которые обеспечат профессиональную направленность в обучении, высокое качество и эффективность, что приобретает особую значимость в подготовке современных инженерных кадров.

Повышению эффективности обучения математике будущих инженеров благоприятствует применение интегративного подхода, который трактуется как базисная категория профессиональной подготовки будущего инженера, представляющая собой комплекс методов, организационных форм и средств обучения, направленных на повышение качества его математической подготовки посредством обеспечения межпредметной, внутрипредметной и метапредметной интеграции. Кроме того, интеграция в обучении должна осуществляться также и в плане разработки общих для различных дисциплин методов и технологий обучения, применения схожих методологических подходов в обучении [2].

Одним из проявлений интегративного подхода в современном образовании является фузионистский подход, который рассматривается нами применительно к обучению бакалавров физико-технических направлений подготовки дисциплине «Теория вероятностей» (ТВ). Трактуя фузионистский подход к обучению ТВ как развитие интегративного подхода в направлении слитного изучения стохастики с физикой, считаем, что направлениями реализации этого подхода должны выступить:

- внутрипредметная интеграция, проявляющаяся в интеграции теории (стохастическая составляющая) и практики (физическая составляющая);
- межпредметная интеграция, предполагающая формирование у будущих физиков межпредметных способов действий по физике в процессе обучения теории вероятностей для дальнейшей реализации их при изучении других дисциплин в системе высшего физико-технического образования [3];
- метапредметная интеграция, состоящая в формировании метапредметных стохастических понятий в предметном поле физики; в формировании у студентов метапредметных способов действий по стохастическому моделированию, реализуемых в физике.

Внедрение в систему профессиональной подготовки в высшей школе метапредметной интеграции направленно на формирование целостного мировоззрения специалистов посредством развития у них надпрофессиональных метакомпетенций на основе практико-ориентированной направленности образовательного процесса и межпредметной интеграции. Метапредметность подразумевает интеграцию содержания образования и направлена на устранение разобщенности знаний обучающегося, разделенных по отдельным дисциплинам, и получение им представлений о целостной картине мира [5].

Метапредметный подход в педагогике рассматривался в работах Л.Н. Азаровой [1], Р.Р. Гатулина, Н.В. Громыко, Ю.В. Громыко, А.А. Клещевой [4], В.С. Минаковой [4], А.В. Хуторского. Е.В. Сизова [5] считает, что метапредметная интеграция способствует созданию некоторой точки сближения естественнонаучного и технического знания в контексте формирования научной картины мира.

По мнению В.С. Минаковой и А.А. Клещевой, теория вероятностей обладает большим потенциалом как инструмент метапредметного обучения [4]. Анализируя связи теории вероятностей с другими дисциплинами, ученые приходят к выводу, что учащихся необходимо целенаправленно знакомить с элементами статистического мышления по различным дисциплинам, помимо курса математики, чтобы они понимали случайность явлений, которые изучают в науке, так как представления о мире случайного познаются из наблюдений за ними в окружающей жизни. При этом важные характерные черты наблюдаемых явлений можно видеть в ходе сбора статистических сведений и наглядного их представления [4, с. 96].

Многие ученые исследуют использование вероятностно-статистических идей при обучении физике. Так, Г.Б. Саматов, К.Р. Саттаркулов, О.Ф. Абдуллаева предлагают изучение физики основывать на вероятностно-статистических представлениях. Такой подход, по мнению ученых, целесообразно применить при изучении физических основ квантовой физики начиная с темы “Законы излучения абсолютно черных тел” (законы Кирхгофа, Вина, формулы Вина, Релея–Джинса, Планка), фотоэффект, эффект Комптона, волны Де-Бройля, соотношения неопределенностей Гейзенберга [6].

С нашей точки зрения, метапредметная интеграция, позволяет сформировать у студентов понятия и способы действий изучаемой дисциплины, которые применимы и в других учебных и научных областях. В теории вероятностей такими понятиями являются, например, понятия «вероятность», «гипотеза», «среднее значение», «достоверность», «событие» и другие. Этими понятиями оперируют не только в научном обиходе, но и в жизни, например, говоря о вероятности осадков или других событий. К метапредметным способам действий по теории вероятностей можно отнести такие: ранжирование результатов измерений; построение вариационных рядов; построение гистограммы и полигона распределения; оценку частоты наступления события и другие.

Например, при изучении молекулярно-кинетической теории в системе физико-технического образования необходимо, чтобы студенты уже овладели такими стохастическими понятиями как «случайность», «вероятность случайного события», «статистическая система», «закон распределения случайной величины», которые применяются для формирования физических понятий «вероятность макросостояния», «второй закон термодинамики в статистической форме», «распределение молекул по скоростям» и др.

Для реализации метапредметной интеграции студентам-физикам могут быть предложены задачи разного уровня сложности, ориентированные на формирование понятий, способов действий изучаемой теории вероятностей. В задачах необходимо проанализировать физические явления, выбрать

математические модели для их описания, использовать понятия и методы элементарной стохастики.

Задача 1. По результатам измерения температуры воздуха получены следующие статистические сведения: $+3^0$C; $+1^0$C; 0^0C; 0^0C; $+4^0$C; $+5^0$C; $+2^0$C; $+1^0$C; $+2^0$C; $+2^0$C; $+3^0$C; $+4^0$C; $+6^0$C; $+5^0$C; $+4^0$C; 0^0C; $+1^0$C; $+2^0$C; $+4^0$C; $+1^0$C; $+3^0$C; $+3^0$C; $+3^0$C; -2^0C; -1^0C; -3^0C; $+4^0$C; $+1^0$C. Определить размах, квартильную разность, среднее линейное отклонение. Чему приближенно равно математическое ожидание температуры воздуха?

Задача 2. Амплитуда напряжения на выходе усилителя имеет плотность распределения $f(x) = 0{,}25x^{-0{,}5}$ причем все возможные значения амплитуды напряжения (выраженные в вольтах) принадлежат отрезку [0,4]. Записать функцию распределения амплитуды сигнала на отрезке [0,4] данного устройства.

Задача 3. Во сколько раз изменится значение максимума функции $f(E)$ распределения молекул идеального газа по энергиям, если температура газа увеличится в 2 раза? Решение пояснить графиком.

Задача 4. Какая часть молекул водорода, находящегося при температуре T, обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной скорости не свыше чем на 5 м/с? Задачу решить для двух значений T: 1) $T = 400\ K$; 2) $T = 900\ K$.

При решении предложенных задач у студентов формируются такие метапредметные стохастические понятия (закон распределения, функция распределения Максвелла, плотность распределения, наиболее вероятное значение случайной величины, математическое ожидание, среднее линейное отклонение, вариационный ряд, размах вариации).

Так же осуществление метапредметной интеграции предлагаем ввести в практику обучения теории вероятностей студентов темы «Стохастический анализ физических моделей». Исследование физических моделей (радиоактивность, шумы, электронный газ), позволяет сформировать у студентов-физиков представления о частоте события, законе распределения и функции распределения. Построение стохастической модели (энергетические зоны в кристаллах, распределение молекул по скоростям и энергиям, т.п.) и исследование ее характеристик создают условия не только для развития стохастической культуры студентов, но и учат их судить о степени вероятности события, оценке ожидаемого результата, а значит, создают условия для развития у обучающихся элементов вероятностно-статистического мышления.

Актуальным для студентов физико-технических направлений подготовки является стохастическая обработка результатов лабораторного эксперимента (подсчет погрешностей, построение графиков, вычисление средних значений величины). Экспериментальные данные носят вероятностный характер, а значит, результаты эксперимента можно рассматривать в качестве случайных величин, выпадающих с определенной частотой. На занятиях по теории вероятностей обучающимся могут быть предложены лабораторные работы с готовыми экспериментальными данными. При этом результаты измерений можно рассматривать как некоторую статистическую информацию, которую с помощью математических методов обобщают и выявляют направленность, позволяющую судить о точности результата измерений.

Рассмотрим лабораторную работу, в которой после измерений силы тока и напряжения резистора из совокупности элементов с одинаковой маркировкой, получено (см. таблицу 1):

Таблица 1 – Экспериментальные данные по лабораторной работе.

№ резистора	1	2	3	4	5	и т.д.
Сила тока I (А)	2,6	2,5	2,7	2,6	2,9	и т.д.
Напряжение U (В)	127	126	130	125	130	и т.д.

Отметим в прямоугольной системе координат точки, по оси абсцисс откладываем значения силы тока, а по оси ординат – значения напряжения (рисунок 1). Совокупность построенных точек называется полем корреляции.

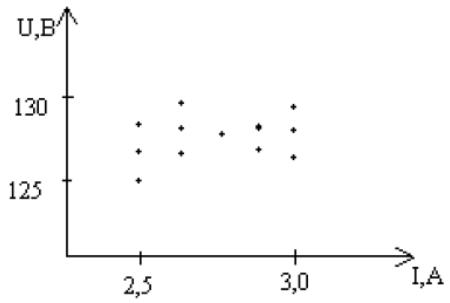


Рисунок 1. Поле корреляции.

Поле корреляции показывает, как связаны между собой две величины. Закономерности для небольшой группы точек может не наблюдаться, а для всей совокупности точек поля корреляции могут быть заметны некоторые изменения одной величины с изменением значений другой. При одной и той же форме может наблюдаться различная теснота связи.

Из приведенного примера можно заключить, что при изучении темы «Стохастический анализ физических моделей» у студентов физико-технических направлений подготовки происходит формирование как метапредметных стохастических понятий (экспериментальные данные, частота события, закон распределения и функция распределения, корреляция, корреляционная связь и др.), так и способов действий по стохастическому моделированию в физике (обработка результатов физических экспериментов методами математической статистики).

Методическими требованиями к процессу метапредметной интеграции выступают:

- выделение метапредметных понятий по теории вероятностей, используемых при изучении физики;
- обеспечение единства в интерпретации вероятностно-статистических понятий и методов во всех дисциплинах профессиональной подготовки студентов физико-технических направлений подготовки;
- выделение способов действий по стохастическому моделированию физических явлений и процессов;

- разработка системы задач, направленных на формирование метапредметных понятий по теории вероятностей;
- введение в курс теории вероятностей тем, обеспечивающих осуществление метапредметной интеграции;
- разработка лабораторных работ, направленных на освоение студентами способов действий по статистическому моделированию в физике.

Таким образом, применение фузионистского подхода к обучению будущих физиков дисциплине «Теория вероятностей» призвано повысить эффективность освоения будущими физиками способов действий их будущей профессиональной деятельности. Одним из путей реализации фузионистского подхода является осуществление метапредметной интеграции за счет формирования метапредметных стохастических понятий, а также в формировании способов действий по стохастическому моделированию в предметном поле физики.

Список источников

1. Азарова Л.Н., Кирова В.А. О диагностике метапредметных компетенций у первокурсников высших образовательных учреждений // Теория и практика общественного развития. 2015. С. 220-223.
2. Евсеева Е.Г., Прокопенко Н.А. Обучение математике будущих инженеров на основе интегративного подхода: монография. Донецк: ДонНУ, 2020. – 308 с.
3. Коняева Ю.Ю. Межпредметная интеграция как направление реализации фузионистского подхода в обучении теории вероятностей будущих физиков // Дидактика математики: проблемы и исследования. 2023. № 59. С. 29-38.
4. Минакова П.С., Клещева А.А. Теория вероятностей как инструмент метапредметного обучения // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Педагогика и психология. 2022. № 4(308). С. 90-98. doi: 10.53598/2410-3004-2022-4-308-90-98.
5. Сизова Е.В. Реализация метапредметного подхода в высшей школе: от теории к практике // Мир науки: научный интернет-журнал. 2017. Т. 5. № 6. URL: https://mir-nauki.com/PDF/37PDMN617.pdf.
6. Саматов, Г.Б., Абдуллаева, О.Ф. Методика изучения тем «Корпускулярно-волновой дуализм», «Соотношения неопределенностей Гейзенберга» в группах углубленного преподавания «физики» в академических // ORIENSS. 2022. № 3. С.987-995. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metodika-izucheniyatem-korpuskulyarno-volnovoy-dualizm-sootnosheniya-neopredelennosteygeyzenberga-v-gruppah-uglublennogo – Текст: электронный.

References

1. Azarova L.N., Kirova V.A. On the diagnosis of meta-subject competencies in first-year students of higher educational institutions. Teoriya i praktika obshchestvennogo razvitiya - Theory and Practice of Social Development. 2015. P. 220-223. (In Russ.).

2. Evseeva E.G., Prokopenko N.A. Mathematics education of future engineers on the basis of integrative approach: monograph. Donetsk: DonNU; 2020. - 308 p. (In Russ.).

3. Konyaeva Yu.Yu. Interdisciplinary integration as a direction of realization of the fusionist approach in teaching probability theory to future physicists // Didactics of mathematics: problems and research. – 2023;59: p. 29-38. (In Russ.).

4. Minakova P.S., Kleshcheva A.A. Probability theory as a tool of meta-subject teaching // Vestnik of Adygeya State University. Series: Pedagogy and Psychology. 2022; 4(308):90-98. doi: 10.53598/2410-3004-2022-4-308-90-98. (In Russ.).

5. Sizova E.V. Realization of meta-subject approach in higher education: from theory to practice // Mir nauki: scientific online journal. 2017. Vol. 5. no. 6. URL: https://mir-nauki.com/PDF/37PDMN617.pdf. (In Russ.).

6. Samatov, G.B., Abdullaeva, O.F. Methodology of studying the topics "Corpuscular-wave dualism", "Heisenberg uncertainty relations" in groups of advanced teaching of "physics" in academic // ORIENSS. 2022;3: 987-995. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metodika-izucheniyatem-korpuskulyarno-volnovoy-dualizm-sootnosheniya-neopredelennosteygeyzenberga-v-gruppah-uglublennogo. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 528-531.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 528-531.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК [373.5.016:51]:94

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ «ДЕЛЕНИЯ ВВЕРХ»: ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО МАТЕМАТИКЕ В 5-6 КЛАССАХ

Анастасия Александровна Жигулина[1]✉, Дмитрий Николаевич Беба[2]
[1,2]Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Елец, Россия
[1]nasta-3913@yandex.ru✉
[2]qup95@mail.ru

Аннотация. *Операция деления – довольно сложное действие. Осуществлять деление было трудным во все времена, но особенно до XVIII века. Тогда тех немногих, кто смог овладеть этой операций, называли гениями, им давали почётный титул «доктора абака», то есть «доктора математических наук» в современном понимании. Этому было несколько причин, главная из которых – отсутствие удобного способа деления. В статье реконструирован способ деления вверх и разработан алгоритм его использования в современной школе.*

Ключевые слова: *методика изучения арифметических действий, история математики.*

Conference paper

METHODS FOR TEACHING «UPWARD DIVISION»: SUPPLEMENTARY MATH RESOURCES FOR 5TH AND 6TH GRADERS

Anastasia A. Zhigulina[1]✉, Dmitriy N. Beba[2]
[1,2]Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
[1]nasta-3913@yandex.ru✉
[2]qup95@mail.ru

Abstract. *The division operation is quite complex. Performing division has been difficult throughout history, but especially before the 18th century. Back then, the few who managed to master this operation were called geniuses, and were given the honorary title of «doctor of the abacus», that is «doctor of mathematical sciences» in the modern sense. There were several reasons for this, the main one being the lack of*

© Жигулина А.А., Беба Д.Н., 2023

a convenient method for division. In the article the method of upward division has been reconstructed and an algorithm for its use in modern schools has been developed.
Keywords: *methods for teaching arithmetic operations, history of mathematics*.

1. Введение

В отечественной методической школе имеется богатый опыт включения исторического материала в преподавание школьного курса математики. В работах В.В. Бобынина, И.Я. Депмана, И.Г. Башмаковой, Б.В. Гнеденко, Ю.А. Дробышева, К.А. Рыбникова, А.П. Юшкевича, Т.С. Поляковой, Г.И. Глейзера и др. обоснована целесообразность включения исторического компонента в преподавание математики и предложены различные пути его реализации.

Г.И. Глейзер составил исторические справки о происхождении чисел, счёта, арифметических обозначений. Однако не уделил внимания происхождению арифметических действий. О.К. Перепелкина разработала систему заданий для обучающихся 5 класса по темам «Сложение и вычитание натуральных чисел», «Умножение и деление натуральных чисел», «Обыкновенные дроби», «Десятичные дроби» с использованием различных видов исторического материала. При этом автор не рассмотрел возможности использования аутентичных текстов, что объясняется трудностью их перевода на современный язык, отсутствием современных комментариев древних текстов и пр.

2. Основной текст статьи

2.1. Из истории метода деления «галерой»

Способ, который используют сейчас во всём мире, когда-то назывался «золотым способом деления» потому, что был очень удобным.

«Золотой» способ деления, наш «уголок» (или «столбик»), относят к способам деления «вниз», так как числа записываются друг под другом. Но ещё 300 лет назад чаще всего использовали другие способы деления – деление «вверх». Знакомство с одним из таких способов, а именно способом «галеры», расширит научный кругозор школьников, а также поможет лучше усвоить известный способ деления «уголком», оценить его удобство.

Способ деления «галерой» появился в средние века. В 9 веке он упоминается у арабского математика Аль-Хорезми, в 15 веке его довольно подробно разработали итальянские учёные. Такое название он получил за то, что его запись напоминает по форме военный корабль – (итал. galera) галеру. В России этот способ стал известен благодаря Леонтию Филипповичу Магницкому, который описал его в своём учебнике «Арифметика», первом русском учебнике математики, вышедшем в 1703 году. Л.Ф. Магницкий впервые на русском языке ввёл термины «делимое», «делитель», «частное».

На рисунке 1 представлен фрагмент из этого учебника. Это и есть пример деления «галерой».

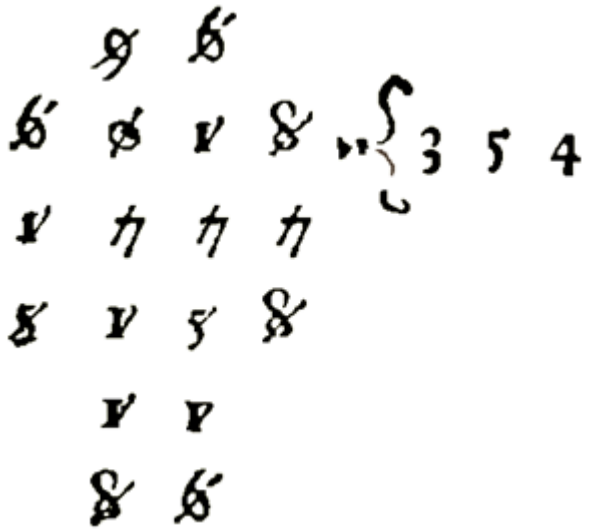


Рисунок 1. Способ деления «галерой», представленный в «Арифметике» Магницкого.

2.2. Алгоритм деления «галерой»

Рассмотрим порядок (алгоритм) деления «галерой». Для наглядной иллюстрации удобно использовать клетки.

1. Запишем делимое 6018, справа от него запишем скобку (черту), за которой будем писать цифры частного.
2. Слева под делимым пишем делитель 17 (цифра под цифрой).
3. Делим 60 на 17, берём по 3, записываем эту тройку за скобкой.
4. Умножаем 17 на 3, получаем 51, записываем это число под делимым (цифра под цифрой).
5. Вычитаем 51 из 60, остаётся 9, эту девятку пишем сверху над делимым (над нулём).
6. Первый шаг деления закончен. Теперь, чтобы не запутаться, зачёркиваем цифры, с которыми мы работали, то есть 6 и 0 из делимого, 1 и 7 из делителя и 5 и 1 – результат произведения частного и делителя («вычитающий» у Магницкого).
7. На втором шаге будем делить 91 на 17, напишем делитель ещё раз (цифра под цифрой, то есть 1 под 9, 7 под 1, в первой свободной клетке, не трогая уже записанные цифры!).
8. Делим 91 на 17, берём по 5, записываем эту пятёрку за скобкой рядом с тройкой.
9. Умножаем 17 на 5, получается 85, пишем 8 под 9, 5 под 1 (опять не трогая написанные ранее цифры!).
10. Вычитаем 85 из 91, получается 6, записываем эту шестёрку над единицей из 91.
11. Второй шаг деления закончен. Зачеркнём ненужные (использованные) цифры, 9 и 1 из делимого, 1 и 7 из делителя и 8 и 5 – результат произведения частного и делителя.
12. На третьем шаге деления будем делить 68 на 17. Снова подписываем делитель 1 под 6, 7 под 8.

13. Делим 68 на 17, берём по 4, записываем эту четвёрку за скобкой после 3 и 5.

14. Умножаем 17 на 4, получается 68. Записываем это число под делимым, то есть 6 под 6, 8 под 8 (не трогаем уже написанные цифры!).

15. Вычитаем 68 из 68, получаем 0. Деление закончено. Зачёркиваем все оставшиеся цифры, кроме частного за скобкой. Получили 6018:17=354.

3. Заключение

Таким образом, деление «вверх» включает два важных этапа 1) запись компонентов операции (делителя, делимого, вычитаемого, остатка и пр.); 2) вычёркивание использованных цифр. Методика обучения этому способу деления включает использование клеток тетради.

В результате исследования реконструирован способ деления вверх и разработан алгоритм его использования в современной школе. Подробное комментирование выполнения этой операции, разработанное нами, открывает новые возможности использования аутентичных текстов («Арифметики» Л.Ф. Магницкого) в современном образовательном процессе.

Список источников

1. Полякова Т.С. История математики: период математики постоянных величин. Математика средневековья и эпохи Возрождения. Ростов-на-Дону; Таганрог: Южный Федеральный университет, 2021. - 120 с.

2. Глейзер Г.И. История математики в школе. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1964. - 376 с.

3. Перепелкина О.К. Теория и методика обучения математике в 5 классе средней школы на историческом компоненте // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2018. № 4 (100). С. 239-246.

4. Магницкий Л.Ф. Арифметика. М.: Синодальная тип., 1703. - 404 с.

References

1. Polyakova T.S. History of mathematics: the period of mathematics of constant quantities. Medieval and Renaissance mathematics. Rostov-on-Don; Taganrog: Southern Federal University; 2021. - 120 p. (In Russ.).

2. Gleizer G.I. The history of mathematics in school. A handbook for teachers. Moscow: Prosveshchenie Publ.; 1964. - 376 p. (In Russ.).

3. Perepelkina O.K. Theory and methods of teaching mathematics in the 5th forms basing on historical component. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva - Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Y. Yakovlev. 2018; (4(100)):239-246. (In Russ.).

4. Magnitsky L.F. Arithmetic. Moscow: Synodal Typography; 1703. 404 p. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 532-536.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 532-536.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.53

ГРАФИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Никита Викторович Инютин[1✉]***, Анастасия Алексеевна Филатова***[2]***, Галина Александровна Симоновская***[3]
[1,2,3]*Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия*
[1]*inyutin.02@mail.ru*[✉]
[2]*filatova1909@yandex.ru*
[3]*simonovskaj_g@mail.ru*

Аннотация. *В данной статье рассмотрен вопрос изучения функционала графиков функций в базовом курсе математики и математического анализа на примере комплексных чисел.*

Ключевые слова: *комплексные числа, зависимость переменных, график функции, python.*

Conference paper

THE GRAPHICAL POTENTIAL OF COMPLEX NUMBERS

Nikita V. Inyutin[1✉]***, Anastasia A. Filatova***[2]***, Galina A. Simonovskaya***[3]
[1,2,3]*Bunin Yelets State University, Yelets, Russia*
[1]*inyutin.02@mail.ru*[✉]
[2]*filatovan2@mail.ru*
[3]*simonovskaj_g@mail.ru*

Abstract. *This article discusses the issue of studying the functional graphs of functions in the basic course of mathematics and mathematical analysis on the example of complex numbers.*

Keywords: *complex numbers, variable dependence, function graph, python.*

1. Введение

При изучении фундаментальных основ математики в современной методике значимую роль играет геометрическая интерпретация

© Инютин Н.В., Филатова А.А., Симоновская Г.А., 2023

понятий и процессов. Графическое представление отображений, зависимостей, функций над полем комплексных чисел представляет особый интерес. Помимо непосредственного изображения чисел возможно использование программных средств. Функционал разработанной программы позволяет выводить на график множество точек, полученных подстановкой чисел из определённого промежутка в комплексную функцию.

2. Геометрическое представление комплексных чисел

Упорядоченная пара (a, b) действительных чисел называется комплексным числом, где a - действительная часть комплексного числа, b - мнимая часть. Комплексное число вида z = (a, b) можно представить алгебраической формой записи вида z = a + bi, где $i^2 = 1$ – мнимая единица [1, 3].

Комплексное число z = a + bi изображается на координатной плоскости точкой M (a, b). Такая плоскость, точки которой формируются комплексными числами - комплексная плоскость. Действительные числа располагаются на координатной оси Ox, поэтому она называется действительной осью. Чисто мнимые числа изображаются точками оси ординат, поэтому ось Oy называется мнимой осью.

В ходе исследования проблемы изображения различных зависимостей над числовым полем, была предпринята попытка разработки программы позволяющей выводить изображение заданного графика функции.

Для создания программы использовался язык программирования Python. Работу с комплексными числами позволяет осуществлять встроенный тип данных complex, где действительная часть - вещественное число, а мнимая – вещественное число, умноженное на мнимую единицу (в Python записывается как “j”). С комплексными числами можно проводить такие же математические операции, как и с обыкновенными.

Проблему в геометрическом представлении графиков функций помогает решить библиотека matplotlib.pyplot, которая на основании массивов генерирует множество точек на координатной плоскости. Работа с массивами обеспечивается благодаря библиотеке numpy.

Основная часть программы – функция, принимающая параметры заданного числа a, обозначающего границу диапазона подставляемых чисел (0, a), комплексную функцию и шаг s, влияющий на точность построения графика, то есть на расстояние между точками (чем больше значение параметра s, тем больше расстояние между точками). В зависимости от заданных параметров в цикле от 0 до a с шагом s

выполняется просчёт комплексной функции и на каждом этапе массивы заполняются значениями: x – действительной частью, y – мнимой частью (рисунок 1). После чего программа формирует график: указывается масштаб окна, сопоставляются массивы x и y, благодаря чему в комплексной плоскости выделяются точки, из которых формируется график функции.

```
def draw(a, func, s=0.01):
    x = []
    y = []

    for a in numpy.arange(0, a, s):
        cpx = func(a)
        x.append(cpx.real)
        y.append(cpx.imag)

    plt.figure(figsize=(6, 6))
    plt.scatter(x, y)
    plt.show()
```

Рисунок 1 – Код программы

Комплексные функции для программы передаются в формате a + 1j, где a - подстановочная переменная, которая принимает заданные пользователем значения, 1j - мнимая часть. Кроме того, существует возможность создания сложных функций, используя различные математические операции и постоянные значения, например, результатом работы программы в которую передаётся функция (a * e^{1j*a}), a = 20, s = 0.01, будет график с изображением спирали (рисунок 2).

3. Заключение

В результате исследования продемонстрирован способ графического представления комплексных чисел с использованием языка программирования Python [2]. Данный программный продукт может применяться в методике преподавания математики и на базовых курсах изучения математического анализа. Разработка проста для понимания пользователя, что способствует лучшему усвоению темы комплексных функций, и позволяет наглядно представить поведение функции в зависимости от своих свойств и заданных параметров. Кроме того, данный программный продукт может применяться для построения графиков в аспектах цифровой обработки сигналов или при изучении электромагнитных и иных видов волн. Также цикличное изображение упрощает потребность изображать различные узоры, что может при-

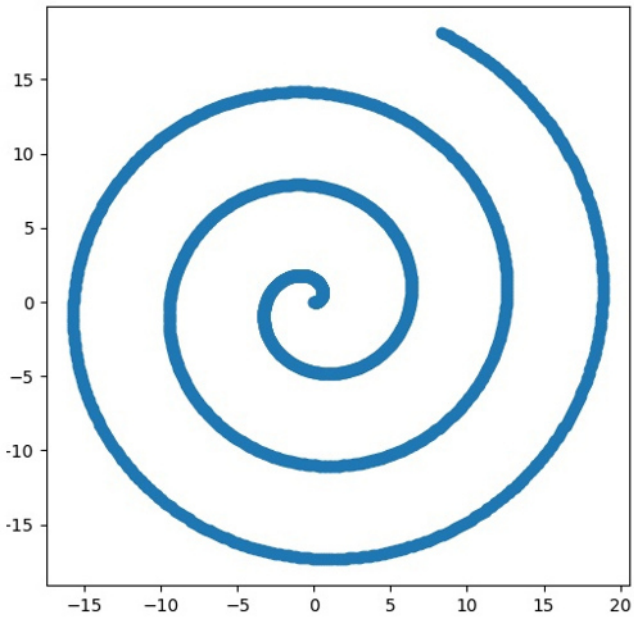


Рисунок 2 – График функции

меняться при графическом дизайне. В процессе работы над программой был получен ценный практический опыт работы с комплексными функциями и языком программирования Python.

Список источников

1. Лавров И. В., Терещенко А. М. Теория функций комплексной переменной: Учебное пособие / Министерство образования и науки РФ, Национальный исследовательский университет "МИЭТ". - 2-е изд. - М.: МИЭТ, 2015. - 168 с.
2. Лутц М. Программирование на Python, том I. Пер. с англ. СПб.: Символ-Плюс, 2011. 992 с.
3. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комлпексной перемнной: Учебник для вузов / Под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. - 6-е изд., стер. - М.: Физматлит, 2010. - 336 с.

References

1. Lavrov I.V., Tereshchenko A.M. Theory of functions of a complex variable: Textbook / Ministry of Education and Science of the Russian Federation, National Research University “MIET”. - M.: MIET, 2015. - 168 p. (In Russ.).
2. Lutz M. Programming in Python, volume I. St. Petersburg: Symbol-Plus, 2011. 992 p.

3. Sveshnikov A. G., Tikhonov A. N. Theory of complex functions variable: Textbook for universities / Ed. A.N. Tikhonova, V.A. Ilyina, A. G. Sveshnikova. - M.: Fizmatlit, 2010. - 336 p. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 537-543.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 537-543.

Статья в сборнике трудов конференции

О РОЛИ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН ПРИ ПОДГОТОВКЕ СПЕЦИАЛИСТОВ ИНЖЕНЕРНОГО ПРОФИЛЯ

Антон Владимирович Кокорев[1]✉, Михаил Анатольевич Волков[2], Ирина Ивановна Чернобровкина[3]
[1,2]Академия ФСО России, Орёл, Россия
[3]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]pears911@mail.ru✉, [2]mivolk@yandex.ru

Аннотация. *В работе проанализирована роль математического образования в процессе обучения будущих инженеров. Обоснована важность изучения фундаментальных основ высшей математики, а также предложены пути повышения качества инженерного мышления будущих выпускников учебных заведений технического профиля.*

Ключевые слова: *инженерное образование, математическая культура, прикладная математика, математическое мышление*

Conference paper

ABOUT THE ROLE OF STUDYING MATHEMATICS DURING PREPARING ENGINEERING SPECIALISTS

Anton V. Kokorev[1]✉, Mikhail A. Volkov[2], Irina I. Chernobrovkina[3]
[1,2]Federal Guard Service Academy of the Russian Federation, Orel, Russia
[3]Orel State University, Orel, Russia
[1]pears911@mail.ru✉, [2]mivolk@yandex.ru

Abstract. *The paper analyzes the role of mathematical education in the process of training future engineers. The importance of studying the fundamental foundations of higher mathematics is substantiated, as well as ways to improve the quality of engineering thinking of future graduates of technical educational institutions are proposed.*

Keywords: *engineering education, mathematical culture, applied mathematics, mathematical thinking.*

1. Введение

Непрерывное развитие технологий повышает требование к уровню подготовки выпускников технических вузов. Наряду с хорошими

© Кокорев А.В., Волков М.А., Чернобровкина И.И., 2023

фундаментальными знаниями по математике, способностями самостоятельно следить и осваивать новые технологии инженер должен иметь развитое математическое и инженерное мышление.

Особенности школьной математической подготовки не позволяют в полной мере реализовать идею формирования и развития математического мышления, поэтому это является одной из важных задач современной высшей инженерной школы.

Обучение математике в школе и вузе как фактов развития личностных качеств исследовали известные математики и педагоги: Н.Я. Виленкин, Б.В. Гнеденко, Г.В. Дорофеев, А.Л. Жохов, В.И. Игошин, Т.А. Иванова, Д. Икрамов, В.С. Корнилов, Л.Д. Кудрявцев, Т.Н. Миракова.

2. Основной текст статьи

В настоящее время активно внедряются новые наукоемкие технологии, значительно повышающие требования к уровню подготовки выпускников высших учебных заведений инженерного профиля. Они должны не только применять полученные знания в практической деятельности, но и быть готовыми находить решения нестандартных инженерных задач, где требуется применения личных качеств.

Характерной чертой современного общества является постоянное повышение требований к математической подготовке будущих специалистов технической направленности. Сегодня математический аппарат и методика его применения являются неотъемлемой частью различных сфер человеческой деятельности: исследование, конструирование, производство, психолого-педагогическая область.

В современном мире необходимыми являются не столько знания в области математики, сколько математический склад мышления, позволяющий специалистам по средствам применения математического аппарата решать поставленные задачи в различных областях науки и техники.

Академик Кудрявцев Л.Д. [3] утверждал, что главной целью изучения различных направлений в области математики является воспитание математической культуры: знание основ математического аппарата и его применения, развитие интуиции, логического мышления.

Поэтому на начальном этапе обучения математическое образование для современного инженера является наиболее эффективным способом формирования его будущих профессиональных качеств. Следовательно, содержание и объем курса математических дисциплин должны не только соответствовать общенаучным и специальным дисциплинам, но подчиняться общей логике построения всей системы обучения.

Курс математических дисциплин направлен на формирование и развитие математической компетенции обучающихся. Под этим термином будем понимать «систему знаний, умений и навыков исследования математических моделей профессиональных задач» [7]. Отметим, что логическое мышление, умение работать с информацией и навыки самостоятельной работы являются важнейшей частью математической компетенции.

Математическая компетенция включает в себя фундаментальные знания предметных компетенций [7]:

• алгебраическая (знание основ математического аппарата, необходимого для решения практических задач, навыки составления математических моделей, развитие логического мышления);

• геометрическая (знание пространственных форм и умение находить основные соотношения между их числовыми характеристиками);

• функциональная (знание основных функциональных зависимостей и умение использовать их при исследовании реальных процессов);

• вероятностная (знания основ теории вероятности и математической статистики при построении моделей реальных процессов и явлений);

• топологическая (знание геометрических свойств фигур и пространств).

Одним из самых методически разработанных и обоснованных современных методов развития математической компетенции является междисциплинарная интеграция [4], позволяющая развить целостность представлений об окружающем мире и способствовать сближению предметных знаний.

Однако интеграция во многом носит фрагментарный и спонтанный характер. В следствии чего, студенты имеют трудности в процессе изучения спец. дисциплин, вызванные отсутствием умений и навыков применения фундаментальных знаний полученных при изучении общепрофессиональных дисциплин.

Многие исследователи обосновывают [1], что развитие навыков самостоятельной работы также играет большую роль в формировании профессиональных качеств будущих инженеров. Но реализация этих идей аналогично сталкивается с объективными сложностями, вызванными классическими представлениями о целях и методах преподавания общепрофессиональных и особенно естественнонаучных дисциплин.

Практически отсутствует преемственность в обучении курсам вузовских дисциплин, рабочие программы общепрофессиональных и специальных циклов не согласованы во времени изучения.

Стабильное развитие современного общества невозможно без постоянной модернизации и инноваций в различных областях науки и технике. Поэтому особую важность приобретают способности и навыки творческого характера: не просто проанализировать, воспроизводить и улучшать уже имеющееся, но и проектировать и внедрять новшества, имеющий инновационный характер, т.е. на качественно более высоком технологическом уровне. Это необходимо во всех производственных сферах, что в настоящее время называется «high-tech» или «высокие технологии»

Отметим, что профессия инженера требует формирования качественной математической культуры, аналитического мышления, знания методов статистической обработки многомерных данных, факторного анализа. Но главное – это развить умения абстрагироваться: выделять и обобщать в массе вроде бы разнородных фактов именно ту их абстрактную сущность, которая и позволяет применять к их исследованию изученные ранее математические

методы. Сначала задачу надо сформулировать, далее решить, а в конце результат интерпретировать в исходных терминах.

Какая же роль математики в системе подготовки специалистов технического профиля? С одной стороны, новые стандарты требуют освоения большого объема фундаментальных математических знаний, умений применять существующие математические методы на практике. С другой стороны, появляются современные технические и информационные средства, позволяющие значительно упростить процесс решения профессиональных задач. Возникает вопрос: зачем изучать математику в таком существенном объеме? Ведь можно стать специалистом в своей области, не изучая настолько объемный и сложный курс классических математических дисциплин. Действительно, проще изучить небольшой курс по решению стандартных задач, необходимых в профессиональной деятельности, а также сформировать навыки самостоятельной работы с техническими программами и справочниками. Следуя этой логике, мы не учитываем главные достоинства изучения математики, как науки фундаментальной. А именно:

- математику необходимо рассматривать как единую науку (объединяя логически изучение различных её разделов).
- математика формирует и развивает мышление (абстрактное и аналитическое).
- математика используется во всех отраслях современной науки и техники.

Под единством математики будем понимать тот факт, что её нельзя рассматривать только как определенный набор формул и алгоритмов, требуемых в будущей профессиональной деятельности. Специалисты, которые имеют только такие знания в области математики в будущем будут не способны решать инженерные задачи требующие развитого абстрактного и аналитического мышления.

Особенностью математических дисциплин является то, что они имеют дело не с реальными объектами и явлениями, а оперируют абстрактными понятиями и структурами. В некоторой степени ими можно описывать реальность, но смысл и содержание математического аппарата не тождественен их конкретному наполнению. Поэтому при включении математических дисциплин в образовательный процесс студенты получают навыки и умения логического мышления (анализа и синтеза, сравнения и обобщения), развития памяти, пространственного мышления.

При формировании содержания математических дисциплин, важно понимать, что основными целями изучения математики являются:

– развитие мышления,
– профессиональная подготовка.

В процессе реализации второй цели студентам требуется освоить определенный набор умений, навыков и алгоритмов решения стандартизированных профессиональных задач.

Первая цель является гораздо более многогранной и требует особого внимания при её реализации в процессе обучения. Именно развитие интуиции, аналитического и абстрактного мышления позволяет инженеру вникать в суть

явлений и процессов, выявляя основные факторы для создания и внедрения математических моделей, описывающих их.

Главная цель обучения математике в техническом учебном заведении - получение современного инновационного образования. Обучение математике развивает у студента строгую дисциплину мышления. «Математику уже за то любить стоит – что, она ум в порядок приводит» - писал М.В. Ломоносов.

В.А. Успенский утверждал [6], что математические знания формируют у студентов три важнейших качества, которые важны для будущего инженера. Ни одна дисциплина, кроме математики, не способна дать:

- умение отличать истину от ложности,
- умение отличать смысл от бессмысленности,
- умение отличать понятное от непонятного.

Изучение фундаментальной математики на первых курсах позволит студенту в будущем ориентироваться в сущности общенаучных и специальных дисциплин, понимать логическую связь, критически анализировать технологии «прошлого» и «настоящего», предвидеть перспективные направления развития своей области деятельности.

В результате обучения выпускник должен [7]:

– понимать и уметь пользоваться литературой: справочниками, таблицами, Интернет-ресурсами,

– грамотно формулировать техническую проблему (в ней уже содержался примерный путь её математического решения),

– строить или выбрать математическую модель,

– найти решение проблемы с использованием построенной модели,

– проверять полученный результат на его соответствие первоначальной проблеме,

– оценивать область допустимых решений и погрешности,

– интерпретировать результаты моделирования в технологические новшества,

– понимать и обосновывать конкурентоспособность предлагаемых решений.

Перечисленные выше требования к специалисту-выпускнику позволят в его будущей профессиональной деятельности не только использовать и модернизировать уже существующие технологии, но и создавать инновационные решения на новых физических началах.

Отметим, что математика как фундаментальная наука имеет большой гуманитарный и прикладной ресурс, используемый не только при реализации связей между реальными явлениями и процессами, но и для развития навыков исследовательского характера при решении профессиональных задач, умений анализировать и синтезировать математические модели реальных процессов, а также развивать инженерную интуицию процессе поиска решений в условиях неопределенности.

Поэтому важно не только внедрять системы прикладных и профессионально-ориентированных задач в процесс обучения математики, но и

использовать процесс обучения математики для формирования основных личностных характеристик будущего инженера.

Это является основным фактом, указывающим на важность изучения как фундаментальной, так и прикладной математики, непрерывность ее обучения.

Традиционно, процесс обучения математике для будущих специалистов инженерного профиля играет крайне важную роль. Использование фундаментальных основ математики не только при решении задач прикладного характера (межпредметные связи математики и общепрофессиональных и специальных дисциплин), но и для взаимодействия общенаучных и специальных дисциплин между собой.

Однако до сих пор курс математической подготовки для инженерных специальностей составлен во многом традиционно. Без учета требований, касающихся не только интеграции математических и специальных дисциплин, но и развития инженерного мышления или это сделано достаточно формально.

Особенность инженерной подготовки заключается не только в знаниях и умениях применять математические методы при решении профессиональных задач, но и использование сформированного инженерного мышления для анализа существующих и разработки инновационных инженерных решений.

3. Заключение

В результате нашего исследования можно сделать вывод, что при формировании содержания математических дисциплин следует исходить из цели современного инженерного образования и четко понимать способы ее реализации. Для этого необходимо развивать фундаментальную составляющую математического образования, актуализировать связь математических, общенаучных и специальных учебных дисциплин, вводить новые дисциплины, например, «Прикладная математика» [2, 5], развивать навыки самостоятельной и творческой деятельности. Указанные методы будут являться эффективным только тогда, когда при формировании содержания рабочих программ различных математических дисциплин основной целью является единство и непрерывность на протяжении всего курса обучения современного инженера.

Список источников

1. Ившина Г. В., Каштанова Е. К. Самостоятельная работа студентов как средство развития математических компетенций // Russian Journal of Education and Psychology. 2012. №4.

2. Кокорев А.В., Чернобровкина И.И. Проблемы становления прикладной математики как самостоятельной дисциплины VIII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» (СПФМН-2022) Орёл, 25-26 ноября 2022 г.

3. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание / с предисловием П.С. Александрова: учебное пособие для вузов. – 2-е изд. доп. –М.: Наука. Главная редакция физико-математической литература, 1985. – 176 с.

4. Нуриева Э. Н., Бакеева Л. В. Междисциплинарные связи как способ формирования общекультурных и общепрофессиональных компетенций // Вестник Казанского технологического университета. 2012. №23.

5. Одиноков А.С., Кокорев А.В., Волков М.А., Сучкова Е.Е. О проблемах проектирования содержания программы учебной дисциплины «Прикладная математика» в учебных заведениях СПО электротехнического профиля с учетом межпредметных связей // Ученые записки Орловского государственного университета. № 4 (97), 2022 г.

6. Успенский В.А. Труды по нематематике. С приложением семиотических посланий А. Н. Колмогорова к автору и его друзьям. В 2 т. Том 1. М.: ОГИ, 2002. - 584 с.

7. Щипцова Т.А., Щипцова А.В., Мустафина Д.А. Математическое мышление как основа инженерного образования // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 5. – С. 83-84.

References

1. Ivshina G. V., Kashtanova E. K. Independent work of students as a means of developing mathematical competencies // Russian Journal of Education and Psychology. 2012. №4.

2. Kokorev A.V., Chernobrovkina I.I. Problems of formation of applied mathematics as an independent discipline VIII All-Russian Scientific and Practical conference with international participation "Modern problems of physical and mathematical sciences" (SPFMN–2022) Eagle, November 25-26, 2022.

3. Kudryavtsev L.D. Modern mathematics and its teaching / with a preface by P.S. Alexandrov: a textbook for universities. – 2nd ed. supplement –M.: Nauka. The main edition of the physical and mathematical literature, 1985. – 176 p.

4. Nurieva E. N., Bakeeva L. V. Interdisciplinary connections as a way of forming general cultural and general professional competencies // Bulletin of Kazan Technological University. 2012. № 233.

5. Odinokov A.S., Kokorev A.V., Volkov M.A., Suchkova E.E. On the problems of designing the content of the curriculum of the discipline "Applied Mathematics" in educational institutions of SPO electrotechnical profile taking into account interdisciplinary connections // Scientific notes of the Orel State University. No. 4 (97), 2022.

6. Uspensky V.A. Works on nemathematics. With the appendix of A.N. Kolmogorov's semiotic messages to the author and his friends. In 2 vols . Vol. 1. - Moscow: OGI, 2002. - 584 p.

7. Shchiptsova T.A., Shchiptsova A.V., Mustafina D.A. Mathematical thinking as the basis of engineering education // Successes of modern natural science. - 2012. – No. 5. – pp. 83-84.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 544-550.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 544-550.

Статья в сборнике трудов конференции

О РОЛИ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ПРИ ИНЖЕНЕРНОЙ ПОДГОТОВКЕ БУДУЩИХ ВЫПУСКНИКОВ ТЕХНИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Антон Владимирович Кокорев[1], Александр Иванович Еременко[2], Сергей Николаевич Шведов[3], Константин Федорович Слесарчик[4]✉
[1,2,3,4]Академия ФСО России, Орёл, Россия
[1,2,3]pears911@mail.ru, [4]interline57@mail.ru✉

Аннотация. *В работе проанализирована роль критического мышления в процессе обучения будущих инженеров. Обоснована важность изучения фундаментальных основ высшей математики как основного фактора формирования и развития критического мышления. Описаны возможные пути повышения качества подготовки будущих инженеров.*

Ключевые слова: *критическое мышление, фундаментальная математика, инженерное образование, математическое мышление*

Conference paper

ON THE ROLE OF CRITICAL THINKING IN THE ENGINEERING TRAINING OF FUTURE GRADUATES OF TECHNICAL EDUCATIONAL INSTITUTIONS

Anton V. Kokorev [1], Alexander I. Eremenko[2], Sergey N. Shvedov[3], Konstantin F. Slesarchuk [4]✉
[1,2,3,4]Federal Guard Service Academy of the Russian Federation, Orel, Russia
[1,2,3]pears911@mail.ru, [4]interline57@mail.ru✉

Abstract. *The paper analyzes the role of critical thinking in the process of training future engineers. The importance of studying the fundamental foundations of higher mathematics as the main factor in the formation and development of critical thinking is substantiated. Possible ways to improve the quality of training of future engineers are described.*

Keywords: *critical thinking, fundamental mathematics, engineering education, mathematical thinking*

© Кокорев А.В., Еременко А.И., Шведов С.Н., Слесарчик К.Ф., 2023

1. Введение

Согласно определению, инженеры – это специалисты в области технической информации. С каждым днем профессиональные задачи, стоящие перед инженерами, только усложняются. Это влечет за собой изменения требований, заключающиеся не только в увеличении объема, используемого математического аппарата и методов его применения, но и к повышению уровня сформированности критического мышления, применяемого в контексте решения поставленной задачи. В настоящей работе проанализирована важность и ценность абстрактного мышления для специалистов технического профиля.

Еще начиная со школы «критическое мышление» является наиболее авторитетным фактором, используемым при решении задач в различных дисциплинах: от философии до математики. Им часто характеризуют интеллектуальный потенциал обучающихся. Преподаватели согласны, что «критическое мышление» является необходимым навыком для будущей профессиональной деятельности, однако многие затрудняются точно ответить, а что это такое, соответственно не могут четко сформулировать, как этому научить. Данная проблема приобретает еще более острый характер в высшей школе, где современные требования для выпускников постоянно растут.

Для инженера поиск решения задач – это профессия. Поэтому «критическое мышление» является одним из основных инструментов, без которого технические и математические знания становятся бесполезными.

Что именно понимают в настоящее время под термином «критическое мышление»? В работе проанализирована сущность этого понятия и показана важность его формирования и способы его развития.

2. Основная часть

Рассмотрим различные подходы к определению критического мышления. Для этого нам понадобиться оперировать следующими логическими операциями: анализ, синтез и оценка.

Анализ - это разбиение проблемы на части и нахождение взаимосвязей между ними [5]. Синтез - это обдумывание других способов решения проблемы либо путем включения новой информации, либо путем объединения частей по-другому [5]. Наконец, оценка - это вынесение суждения о результатах с использованием имеющихся фактических данных.

Джессоп Л. [1] понимал под критическим мышлением интеллектуальный и дисциплинированный процесс осмысления, анализа, синтеза и оценки информации, полученной в результате опыта или наблюдения, рассуждения или размышления, в качестве руководства к действию. Т.е. Джессоп рассматривает анализ, синтез и оценку как основу критического мышления.

Скривен М. [4] утверждает, что критическое мышление - это процесс комбинированный. Инженерная деятельность предполагает создание новых идей и решений, т.е. происходит синтез. Без понимания самой проблемы невозможно создание новых решений, а значит, это приводит нас к процессу анализа - первому этапу инженерной деятельности. Однако на этом применение навыков критического мышление не заканчивается. Результаты, полученные в процессе синтеза (второй этап), могут быть абсолютно разными по отношению

к результату решения поставленной задачи: один может быть лучше второго, либо проблема в принципе остаётся нерешённой. На завершающем этапе нам необходимо оценить предварительные полученные способы решения задачи, чтобы найти наилучший ответ согласно выбранным критериям.

Рассмотрим иной подход к определению термина «критическое мышление». Цяо С. понимает под ним научное мышление. Вначале такая точка зрения выглядит необычной, т.к. ассоциируется с понятием «научный метод». Проанализировав определения этого термина, можно выделить основные этапы критического мышления [2]:

- формулировка вопроса,
- сбор информации,
- формирование гипотезы,
- проверка гипотезы,
- анализ данных,
- интерпретация данных,
- выводы, которые являются основой для новой гипотезы,
- публикация результатов,
- повторное тестирование.

Последовательность описанных действий имеет сходство с приведенным выше определением критического мышления. Отличия обусловлены характерными особенностями профессиональной деятельности ученых и инженеров.

Рассмотренные выше различные подходы к пониманию «критического мышления» указывают на актуальность и важность для будущих инженеров формирования и развития элементов логического мышления: анализа, синтеза и оценки. Без полного понимания поставленной задачи (этап анализа), инженер не сможет перейти к её решению, т.е. к этапу синтеза.

В работе мы акцентируем внимание на критическом мышлении будущего инженера, хотя из анализа литературы можно сказать, что оно свободно применяется и в других дисциплинах: как в технических, так и гуманитарных. Нельзя рассматривать критическое мышление только с точки зрения, например, математических дисциплин. Его развитие и использование в процессе обучения не ограничиваются только естественнонаучными дисциплинами. Цяо С. [2] утверждал, что критическое мышление развивается благодаря изучению, например, истории или философии. Логическое мышление также является важной составляющей других гуманитарных наук: английский язык, лингвистика, обществознание и др. Специфика различных дисциплин вносит свои особенности в процесс критического мышления, но сами логические операции: анализ, синтез и оценка, остаются в его основе.

Логические процессы анализа и синтезы были исследованы Выготским Л.С. [6], Калмыковой З.И. Операции сравнения и оценки рассматриваются в работах Богоявленской Д.Н., Менчинчкой Н.А., Рубинштейн С.Л. Вопросы, связанные с развитием навыков анализа и синтеза в школе, поднимаются в работах Гибш И.А., Крупич В.И. [7], Эрдниев Б.П.

Однако развитию аналитико-синтетической деятельности в вузе посвящено значительно меньше работ. Например, Эпова Е.В. [9] разработала методику формирования и развития навыков анализа и синтеза будущих учителей посредством изучения курса алгебры и теории чисел в педагогическом вузе. Проблема формирования логического мышления в единой системе инженерной подготовке освещена недостаточно. Исследования носят фрагментарный характер.

Исследования специалистов в области возрастной психологии (Выготский В.А., Крутецкий В.А.) показали, что формирование способностей к логическому мышлению происходит непрерывно в течение всей жизни. В студенческом возрасте (16-24 года) наблюдается наибольшая эффективность развития мыслительной деятельности: стремление проникнуть в сущность изучаемых явлений, потребность в установлении причинно-следственных связей.

Анализ, синтез и оценку используют при изучении каждой темы в математике. В пример приведём тему «Исследование функции» в математическом анализе. Вначале учащиеся разбивают исследование на составные части (происходит анализ): найти область определения, область значений, исследовать на четность и периодичность, найти нули функции, первую и вторую производные, выбрать дополнительные точки. Синтез заключается в итоговом построении графика этой функции с использованием полученных данных. При построении двух и более графиков функций, полезным бывает сравнить их графики между собой и указать связь между алгебраическим выражением и графической интерпретацией.

Пример показывает, что основные операции логического мышления применяются для более полного и глубокого понимания изучаемой темы. Это является не только основой для применения существующих методов и алгоритмов в прикладных науках, но и применяется при создании новых теорий.

Информационная подготовка студентов является приоритетным направлением процесса обучения студентов. Вопросам формирования и развития мыслительных операций уделяется недостаточно времени. Однако современные требования к будущим инженерам требуют не только уделить им повышенное внимание, но и сделать одной из основных целей обучения в 21 веке.

Таким образом сегодня существует проблема недостаточной методической разработанности этих вопросов. Использование дисциплин математического цикла для решения данного вопроса обусловлено несколькими факторами:

- изучение математики начинается с первого курса и продолжается на протяжении 3-4 семестров,
- содержание каждой математической дисциплины способствует развитию логического мышления,
- все дисциплины изучаются последовательно и непрерывно, а также объединены в единую систему обучения,
- изученный мат. аппарат и методика решения задач используются в других дисциплинах инженерных и гуманитарных наук.

Для достижения поставленных целей необходимо разработать систему обучения, основывающуюся на математических определениях, понятиях, теоремах и задачах, а также направленную на повышение уровня сформированности логического мышления, что и будет основой для развития профессионально значимых качеств личности будущего инженера.

Большинство педагогов согласны с тем, что критическое мышление должно быть в центре внимания в процессе непрерывного обучения в системе школа-вуз. Существует множество научно обоснованных методов развития логического мышления на различных этапах обучения, но их комплексное внедрение сталкивается с определенными трудностями. Поэтому разработка теории и методики использования содержания математических дисциплин, способствующей эффективному развитию логического мышления студентов, является актуальной проблемой современной системы образования.

Для её решения необходимо эффективное развитие всех основных мыслительных способностей студентов. Для этого требуется разработать:

– научно обоснованную технологию обучения;

– комплекс учебно-методических материалов;

– методы определения содержания этапов изучения математических дисциплин в соответствии с уровнем развития мыслительных способностей;

– дидактические средства развития мыслительных способностей;

– модернизированные версии классических методов обучения.

Для достижения этих требований содержание дисциплин должно удовлетворять следующим условиям:

Теоретический аспект (внутрипредметный уровень):

✓ содержание дисциплины должно включать в себя не только описание основных методов решения задач, но и содержать полноценные доказательства всех используемых утверждений (леммы, теоремы).

Практический аспект (внутрипредметный уровень):

✓ внедрение системы задач на вычисления с использованием описанной методики в ходе практических занятий,

✓ специально подобранные наборы упражнений на доказательство несложных теоретических утверждений (лемм),

✓ система примеров и задач для подтверждения и применения теоретического материала.

Практический аспект (дисциплинарный уровень – не выходит из математического цикла):

✓ критическое мышление в индивидуальной работе (анализ научной литературы и синтез при нахождении решения проблемы) Джессоп Л. [1]. Например, «мозговой штурм» и критический анализ при решении индивидуальных заданий.

✓ критическое мышление в групповой работе (анализ научной литературы и синтез при нахождении решения проблемы + сравнения и оценка результатов). Радзи Н. предлагает групповые дискуссии и форумы для развития навыков критического мышления [3].

Общие аспекты (наддисциплинарный уровень):

✓ междисциплинарное взаимодействие [8],

✓ актуальность развития способностей к самостоятельной работе.

Описанные выше различные методы направленны на одну и туже цель. Для решения профессиональных задач будущим инженерам требуется значительно больше, чем просто знание математического аппарата и существующие методики его применения для решения прикладных задач. Для этого и необходим новый подход в современной системе образования, заключающийся во внедрении развития критического мышления в течение всего процесса обучения будущих инженеров.

3. Основные выводы

В работе мы попытались проанализировать, что такое критическое мышление и почему оно так важно для инженера. Систематизировав полученные результаты исследования, мы пришли к выводу, что его можно рассматривать, как «нечто» похожее на научный метод, включающий следующие этапы: определение, понимание проблемы, поиск решения, оценка результата и повторение. Основными компонентами каждого из этапов являются анализ, синтез и оценка.

Критическое мышление является мощнейшим инструментом инженера при решении профессиональных задач. Содержание дисциплин математического цикла является одним из основных средств его формирования и развития. Поэтому это необходимо учитывать при реализации современной системы образования.

Список источников

1. Jessop, L. P. Expanding our students' brainpower: idea generation and critical thinking skills. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 44(6), 140-144.

2. Qiao, C. Science Education and Fostering of Critical Thinking in China. In Second International Conference on Education Technology and Training, 2009. ETT '09 (pp. 114–117). Presented at the Second International Conference on Education Technology and Training, 2009.

3. Radzi, N. M., Abu, M. S., & Mohamad, S. Math-oriented critical thinking skills in engineering. In 2009 International Conference on Engineering Education (ICEED), (pp. 212-218). Presented at the 2009 International Conference on Engineering Education (ICEED).

4. Scriven, M., Paul, R. "Defining Critical Thinking." National Council for Excellence in Critical Thinking Instruction. Retrieved

5. Ивин А.А. Философия: Энциклопедический словарь. - М.: Гардарики. / Под редакцией А.А. Ивина. 2004. - 1072 с.

6. Выготский Л.С. Психология искусства / Под ред. М.Г. Ярошевского. – М.: Педагогика, 1987. - 344 с.

7. Крупич В.И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. М.: Прометей, 1995. - 165 с.

8. Одиноков А.С., Кокорев А.В., Волков М.А., Сучкова Е.Е. О проблемах проектирования содержания программы учебной дисциплины «Прикладная

математика» в учебных заведениях СПО электротехнического профиля с учетом межпредметных связей Ученые записки Орловского государственного университета. № 4 (97), 2022 г.

9. Эпова Е. В. Формирование аналитико-синтетической деятельности у студентов педвузов при изучении курса алгебры и теории чисел: Дис. канд. пед. наук: 13.00.02: Новосибирск, 2000. - 198 с.

References

1. Jessop, L. P. Expanding our students' brainpower: idea generation and critical thinking skills. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 44(6), 140–144.

2. Qiao, C. Science Education and Fostering of Critical Thinking in China. In Second International Conference on Education Technology and Training, 2009. ETT'09 (pp. 114–117). Presented at the Second International Conference on Education Technology and Training, 2009.

3. Radzi, N. M., Abu, M. S., & Mohamad, S. Math-oriented critical thinking skills in engineering. In 2009 International Conference on Engineering Education (ICEED), (pp. 212-218). Presented at the 2009 International Conference on Engineering Education (ICEED).

4. Scriven, M., Paul, R. "Defining Critical Thinking." National Council for Excellence in Critical Thinking Instruction. Retrieved

5. Ivin A.A. Philosophy: An Encyclopedic dictionary. - M.: Gardariki. / Edited by A.A. Ivin. 2004. - 1072 p.

6. Vygotsky L.S. Psychology of art / Edited by M.G. Yaroshevsky. - M.: Pedagogy, 1987. - 344 p.

7. Krupich V.I. Theoretical foundations of teaching the solution of school mathematical problems. M.: Prometheus, 1995. - 165 p.

8. Odinokov A.S., Kokorev A.V., Volkov M.A., Suchkova E.E. On the problems of designing the content of the curriculum of the discipline "Applied Mathematics" in educational institutions of the SPO electrotechnical profile, taking into account interdisciplinary connections, Scientific notes of the Orel State University. No. 4 (97), 2022.

9. Epova E. V. Formation of analytical and synthetic activity among students of pedagogical universities when studying the course of algebra and number theory: Dis. Candidate of Pedagogical Sciences: 13.00.02: Novosibirsk, 2000. - 198 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 551-554.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 551-554.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.853

ЗНАЧЕНИЕ РАЦИОНАЛИЗАТОРСКОЙ РАБОТЫ В ИНЖЕНЕРНОМ ОБРАЗОВАНИИ

Ирина Витальевна Корогодина✉
Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, Орёл, Россия
ekorogodin@yandex.ru✉

Аннотация. *В статье обсуждается вопрос о значении рационализаторской работы в подготовке инженерных кадров. Приводится описание демонстрационной установки «Контур с током в однородном магнитном поле».*

Ключевые слова: *инженерное образование, рационализаторская работа, вращающий момент сил магнитного поля.*

Conference paper

THE IMPORTANCE OF RATIONALIZATION WORK IN ENGINEERING EDUCATION

Irina V. Korogodina✉
Academy of Federal Guard Service of Russia, Orel, Russia
ekorogodin@yandex.ru✉

Abstract. *The article discusses the importance of rationalization work in the training of engineering personnel. A description of the demonstration installation "Contour with current in a uniform magnetic field" is given.*

Keywords: *engineering education, rationalization work, torque of magnetic field forces.*

1. Введение

Современные вызовы, стоящие перед экономикой России, потребовали поиска новых путей в системе инженерного образования. Модернизация производства и развитие технологий в рамках импортозамещения направлены на создание устойчивого экономического развития и обеспечение безопасности страны. Подготовка инженерных кадров для работы на современном производстве – основная задача высшей школы.

© Корогодина И.В., 2023

Технические вузы создают уникальную атмосферу для получения высокого уровня знаний и развития исследовательских компетенций будущих инженеров. В настоящее время активно происходит возрождение рационализаторского движения, в которое вовлекается все больше обучающихся, способных творчески мыслить.

В основе рационализаторства лежит разработка новых решений, направленных на совершенствование существующих устройств и механизмов. Активное внедрение технических новинок в работу конкретных узлов и деталей способно обеспечивать оптимальную адаптацию действующего оборудования к конкретным условиям эксплуатации. Рационализаторские предложения вносят изменения в сторону повышения производительности, улучшения качества продукции и обеспечения безопасности труда.

2. Основной текст статьи

Принимая участие в рационализаторской работе под руководством преподавателя, студенты технических вузов развивают самостоятельность и способность к самообучению, более глубоко и всесторонне осваивают технические дисциплины, в том числе курс физики. С другой стороны – рацпредложения обучающихся могут представлять интерес для демонстрации законов и явлений природы и находят применение в визуализации учебного материала дисциплины «Общая физика». Уникальные модели, изготовленные руками студентов, занимают достойное место в кабинете физических лекционных демонстраций технических вузов.

В курсе общей физики предусмотрено изучение действия магнитного поля на замкнутый контур с током. Пусть положение контура прямоугольной формы определяется углом α (рисунок 1). Разложим вектор магнитной индукции $\vec{B}$ на две составляющие: $\vec{B}_{\perp}$ – перпендикулярная к плоскости контура и $\vec{B}_{\parallel}$ – ему параллельная.

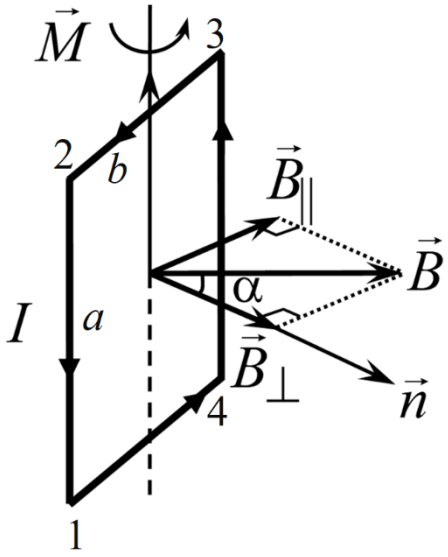


Рисунок 1. Рамка с током в магнитном поле.

Из рисунка 1 имеем, что на расположенные параллельно линиям вектора $\vec{B}_{\parallel}$ участки 2–3 и 4–1 действие силы Ампера равно нулю. Стороны 1–2 и 3–4 рамки испытывают влияние пары сил $F_1 = F_2 = IaB_{\parallel}$, которая образует вращающий момент

$$M = F_1 \cdot b = IabB_{\parallel}.$$

Поскольку $B_{\parallel} = Bsin\alpha$ и $Iab = IS = p_m$ – магнитный момент контура, то

$$M = p_m Bsin\alpha, \quad (1)$$

где $\alpha = (\widehat{\vec{p}_m, \vec{B}})$.

Вращающий момент M поворачивает контур так, чтобы его магнитный момент $\vec{p}_m$ установился по направлению вектора индукции $\vec{B}_{\parallel}$ магнитного поля.

Выражение (1) можно записать в векторной форме

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (2)$$

По формуле (2) можно рассчитать вращающий момент сил для контура любой формы при произвольном его положении в однородном магнитном поле. Данный эффект лежит в основе действия электроизмерительных приборов и электрических двигателей.

Демонстрацию вращения контура с током в магнитном поле можно наблюдать при помощи установки, внешний вид которой представлен на рисунке 2.

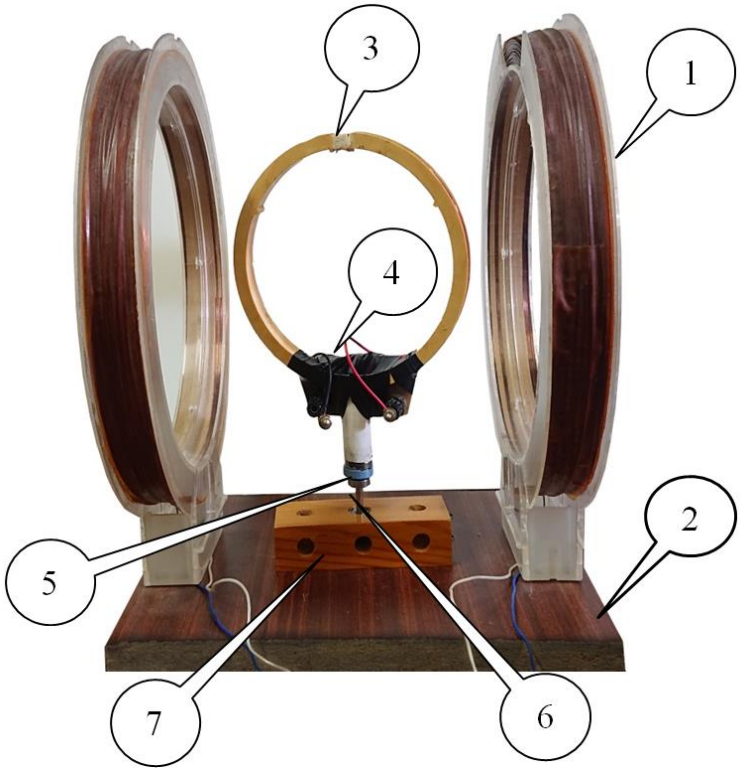


Рисунок 2. Демонстрационная установка.

Установка состоит из двух соосных катушек 1, расположенных на платформе 2, и контура 3, который через опорный подшипник 5 установлен

на стойке 6, закрепленной на опоре 7. При включении элемента питания 4 в контуре 3 создается постоянный ток.

При параллельном подключении катушек к внешнему источнику питания в пространстве между ними возникает однородное магнитное поле, внутрь которого помещается контур 3 с током.

На первом этапе демонстрации можно показать, что если отсутствует ток в контуре 3, расположенном произвольно относительно оси катушек 1, то магнитное поле не оказывает на него никакого действия (контур остается в покое).

На втором этапе – демонстрируем, что при подаче электрического тока в контуре 3, расположенном перпендикулярно плоскости катушек 1, магнитное поле создает вращающий момент и совершает его поворот на угол 90^{o}.

Применение разработанной и изготовленной студентами установки «Контур с током в однородном магнитном поле» обеспечивает наглядность влияния магнитного поля на направление разворота контура с током.

3. Заключение

В заключение отметим, что поделки и устройства, выполненные обучающимися в ходе реализации рацпредложений, компактны и удобны в эксплуатации. Их использование в учебном процессе усиливает визуализацию рассматриваемых физических явлений. А для студентов – участие в рационализаторстве адаптирует теоретические знания к решению конкретных практических задач.

Таким образом, оценивая роль и место рационализаторской работы в техническом вузе, можно отметить её положительное влияние на развитие творческого потенциала будущих инженеров и серьезный вклад в материальную базу учебных заведений.

Список источников

1. Савельев И. В. Курс общей физики: учебное пособие для втузов. В 4 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. – СПб, 2011.

References

1. Savelyev I. V. Course of general physics: a textbook for higher education institutions. In 4 vols. Vol. 1. Mechanics. Molecular physics and thermodynamics. – St. Petersburg, 2011.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 555-564.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 555-564.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.851+37.031.1

ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Наталья Николаевна Костикова✉
Коровье-Болотовская средняя общеобразовательная школа, Орёл, Россия
natalya-kostikova@mail.ru✉

Аннотация. *Статья посвящена актуальной в настоящее время проблеме повышения мотивации учащихся на уроках математики. В статье акцентируется внимание на важности использования практико-ориентированных задач при обучении математике с целью повышения мотивации школьников. Определяется содержание понятий «мотивация», «практико-ориентированная задача», приводятся примеры использования практико-ориентированных задач на уроках математики с целью повышения интереса к изучению конкретных тем. В результате исследования определено, что использование таких задач на уроках математики помогает понять важность данной дисциплины в дальнейшей практической и профессиональной деятельности учащихся, что способствует формированию положительной мотивации к изучению предмета, и, как следствие, повышению качества математического образования.*

Ключевые слова: *мотивация, практико-ориентированная задача, познавательный интерес, обучение математике.*

Conference paper

PRACTICE-ORIENTED TASKS AS A MEANS OF INCREASING STUDENTS' MOTIVATION IN MATH LESSONS

Natalya N. Kostikova✉
Korovye-Bolotovskaya secondary school, Orel, Russia
natalya-kostikova@mail.ru✉

Abstract. *The article is devoted to the current problem of increasing the motivation of students in mathematics lessons. The article focuses on the importance of using practice-oriented tasks in teaching mathematics in order to increase the motivation of schoolchildren. The content of the concepts "motivation", "practice-*

© Костикова Н.Н., 2023

oriented task" is determined, examples of the use of practice-oriented tasks in mathematics lessons are given in order to increase interest in studying a specific topic. As a result of the study, it was determined that the use of such tasks in mathematics lessons helps to understand the importance of this discipline in the further practical and professional activities of students, which contributes to the formation of positive motivation to study the subject, and, as a result, to improve the quality of mathematical education.

Keywords: *motivation, practice-oriented task, cognitive interest, teaching mathematics.*

1. Введение

Одной из центральных проблем при достижении конкретных целей в любой сфере деятельности является мотивация, а в ее основе лежат, по мнению психологов, интересы и потребности личности. Эффективное овладение теоретическими знаниями и практическими умениями напрямую зависит от уровня развития мотивации к предмету. Следовательно, для успешного достижения школьниками успехов в учебе, необходимо обучение сделать более желанным процессом.

Мотивация – сложный механизм соотнесения личностью внутренних и внешних факторов поведения, который определяет возникновение, направление и способы осуществления определенной деятельности. Благодаря ей приводятся в соответствие цель и средства достижения деятельности, осознается целесообразность и осмысленность действий [1, с. 148].

Практика показывает, что учащиеся с большим интересом воспринимают и решают задания практического содержания, поскольку такие задания демонстрируют учащимся связь обучения с жизнью. Важная роль в системе подготовки школьников к применению приобретаемых знаний в практической деятельности принадлежит изучению школьного курса математики, поскольку математические методы позволяют отразить связь теории с практикой на уровне общенаучной методологии. Это определяет значимость математики в формировании у школьников умений решать задачи, возникающие в процессе практической деятельности человека.

2. Основной текст статьи

Формирование мотивации при изучении математики можно назвать одной из главных проблем современной школы. Актуальность данной проблемы обусловлена обновлением содержания обучения, направленным на формирование у учащихся приемов самостоятельного приобретения знаний и умений, что не является возможным без интереса школьника к предмету. В качестве средства его формирования при обучении математике следует использовать практико-ориентированные задания, составленные с учетом специфики изучения курса математики в общеобразовательной школе.

Под практико-ориентированными задачами будем понимать, прежде всего, текстовые математические задачи, целью которых является формирование умений действовать в социально-значимых ситуациях. Это задачи из окружающей действительности, направленные на формирование практических

навыков, необходимых в повседневной деятельности. Они помогают научить школьников работать с информацией, находить и выделять главное, выстраивать и обосновывать пути решения, работать в группах или парах, высказывать и отстаивать свою точку зрения, желания и убеждения в ходе поисковой творческой деятельности.

Функции этих задач определяются целями математического образования, поэтому, исходя из этих целей, выделяют четыре основные функции: обучающая, воспитывающая, развивающая и контролирующая. [2, с. 103]. В методике обучения математике проведена дальнейшая декомпозиция основных функций задач в учебном процессе; в теории и практике обучения выделены стимулирующая, обучающая, реализующая, контролирующая, оценивающая, прогностическая, развивающая, воспитывающая, прагматическая, коммуникационная, ознакомительная и интегрирующая функции. Реализация данных функций способствует повышению эффективности использования задач в обучении [3].

Кроме общих дидактических функций, практико-ориентированные задачи направлены на реализацию таких важных специфических функций, как мотивационная и рефлексивная. Мотивационная функция задач формирует устойчивую мотивацию учебной и производственной, а в дальнейшем и профессиональной деятельности, поддерживает постоянный интерес к учению. Рефлексивная функция задач поднимает самосознание на уровень теоретического мышления, способствует активному осмыслению или переосмыслению полученных знаний и способов решения задач, формирует эффективные стратегии решения различных типов задач и приемы представления результатов их решения [5, с. 74].

В процессе введения нового учебного материала использование задач с целью мотивации знаний, умений и методов способствует созданию условий для реализации связи обучения математике с жизнью и будущей профессией. Кроме того, такой подход открывает учителю возможности для реализации элементов проблемного обучения на уроках математики, значимость которого нельзя переоценить. Использование задач проблемного характера учит школьников самостоятельности, приемам поиска, доказательства, исследования, выделению существенных свойств математических объектов, обеспечивает осознанное овладение теорией, способствует развитию основных мыслительных действий и, что очень важно, формированию интереса к предмету и будущей практической деятельности. Ведь интерес является стимулом для приобретения учащимися новых знаний, умений и навыков, готовит их к сознательному самоопределению. Поэтому учителю при изучении новых математических понятий необходимо сформировать у учащегося понимание того, что изучаемый материал будет важен и полезен в его дальнейшей деятельности, в том числе профессиональной.

Для постановки проблемы можно использовать и отдельные фрагменты практических задач, а в дальнейшем на этапе закрепления и углубления знаний, учащихся рассмотреть поставленную задачу в целом. Необходимо, чтобы подобранные задачи приводили учащихся к необходимости приобретения новых математических знаний, которые в дальнейшем позволяли бы решить не только

поставленную задачу, но и другие задачи прикладного, возможно и профессионального характера. Для создания проблемных ситуаций перед изложением нового учебного материала целесообразно использовать практико-ориентированные задачи, отличающиеся простотой решения и ясностью фабулы.

Приведем несколько примеров таких задач.

Введению понятия линейной функции можно предварить постановку следующей задачи.

Задача №1. Автомобиль стоит 800 тыс. руб, а его годовая амортизация (износ) составляет 70 тыс руб. Выразите зависимость стоимости автомобиля от времени его эксплуатации.

Решение.

Пусть время эксплуатации автомобиля – k лет, а его фактическая стоимость – y тыс. руб, тогда стоимость автомобиля в зависимости от времени его эксплуатации будет определяться по формуле:

$y = 800 – 70k$.

Или, например, вот такая задача:

Задача №2. На складе было 700 кг угля. Ежедневно на склад привозили еще по 40 кг. Выразить формулой зависимость количества угля p (в кг) от времени t (в днях).

Решение.

$p = 700 + 40t$.

Учащиеся впервые встречаются с подобными зависимостями, их вид и свойства им неизвестны. После рассмотрения еще нескольких примеров из практики учителем вводится понятие линейной функции и рассматриваются ее свойства. Необходимо подчеркнуть, что все приведенные примеры – это реальные модели линейных функций, обладающие теми же свойствами.

Можно задать к задачам дополнительные вопросы:

- для чего необходимо задавать функцией такие зависимости?
- какой будет стоимость автомобиля через 7 лет?
- сколько угля будет на складе через неделю?
- через сколько дней угля на складе станет больше тонны?

Перед введением понятия линейного уравнения с двумя переменными можно предложить учащимся такую задачу.

Задача №3. В животноводческой ферме требуется проложить водопровод длиной 203 м. В магазине имеются трубы длиной 7 м и 5 м. Сколько труб каждого вида необходимо купить для прокладки водопровода? (Такая ситуация часто встречается на практике в условиях села).

Прежде чем приступать к решению задач, обратимся к классу:

- зачем вообще нужно покупать трубы разной длины, почему бы не купить все одинаковые? (возможно, они отличаются в стоимости и подбор оптимального соотношения позволит сэкономить бюджет);
- зачем рассчитывать, какое количество труб каждой длины нужно купить? (во-первых, - резать трубы – не такая уж и простая задача, поэтому лучше подобрать так, чтобы резать пришлось как можно реже, а во-вторых, количество

большое количество сварных соединений труб увеличивая вероятность прорыва водопровода).

Решение.

При составлении уравнения у учащихся не возникнет затруднений. Обозначив через x число труб длиной 7 м, а через y – длиной 5 м, они легко получат уравнение: $7x + 5y = 203$. Но с таким уравнением школьники встречаются впервые, поэтому дальнейшее решение станет невозможным, пока учитель не познакомит учащихся с понятием линейного уравнения с двумя переменными и его решением.

При введении понятия квадратного уравнения можно предложить учащимся следующую задачу:

Задача №4. Трактор МТЗ в сутки при двухсменной работе расходует на 1,5 кг автола меньше, чем трактор ДТ-54. Каков среднесуточный расход автола каждым трактором, если МТЗ израсходовал 75 кг автола, а трактор ДТ-54, проработав на двое суток меньше, 94 кг автола.

Сначала проведем профориентационную работу над задачей, можно задать учащимся вопросы:

- для каких целей может понадобиться решение данной задачи? (выяснить, какой трактор расходует больше автола, и подумать о рациональности его использования);
- в какой сфере деятельности встречаются подобные задачи?

Далее целесообразно предложить учащимся самостоятельно составить уравнение по условию задачи.

Решение.

Обозначим за x (кг) – суточный расход автола трактором МТЗ, тогда трактор ДТ-54 расходует (x+1,5) кг автола в сутки. Трактор ДТ-54 израсходовал 94 кг автола, а трактор МТЗ – 75 кг, работая на двое суток больше. Составим уравнение:

$\frac{75}{x} - \frac{94}{x+1,5} = 2$. Выполнив тождественные преобразования, учащиеся приходят к уравнению:

$\frac{2x^2+22x-112,5}{x(x+1,5)} = 0$. Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель – не равен нулю, значит $x \neq 0$ и $x \neq -1,5$ (что, в принципе, и невозможно по условию задачи).

Значит, решение задачи сводится к решению квадратного уравнения

$2x^2 + 22x - 112,5 = 0$.

Решение полученного уравнения требует от учащихся умения решать квадратные уравнения, поэтому решить поставленную задачу они не смогут. Для ее решения необходимо овладеть соответствующими теоретическими знаниями, что и является целью дальнейшей работы учителя с классом. В итоге работы урока следует решить уравнение и записать ответ.

Таким образом, и в данном случае введение новых математических понятий обусловлено потребностями практики. Школьники убеждаются в

практической необходимости математических знаний, что повышает их внимание и интерес к изучению нового материала.

Также раскрыть практическую значимость математики и широкую общность ее выводов позволяют примеры из окружающей действительности. Они должны быть убедительными, простыми и доступными для понимания учащимися.

Также немаловажное значение имеет привлечение учащихся к самостоятельному нахождению примеров применения математических знаний в известных им повседневных, житейских и профессиональных явлениях и сопровождение их практическими выводами. Такая работа является эффективным средством укрепления связи обучения математике с жизнью, способствует расширению кругозора учащихся, а, следовательно, способствует повышению мотивации к изучению предмета.

Большую роль в развитии познавательного интереса представляют задачи на выявление вида функций по готовым чертежам. Такие задачи можно предлагать учащимся 7 класса при изучении функциональной линии.

Задача №5. На чертеже (рисунок 1) изображен план участка в масштабе 1:10000 (размеры указаны в м). Составьте формулу для вычисления его площади и определите вид функции, выраженной данной формулой.

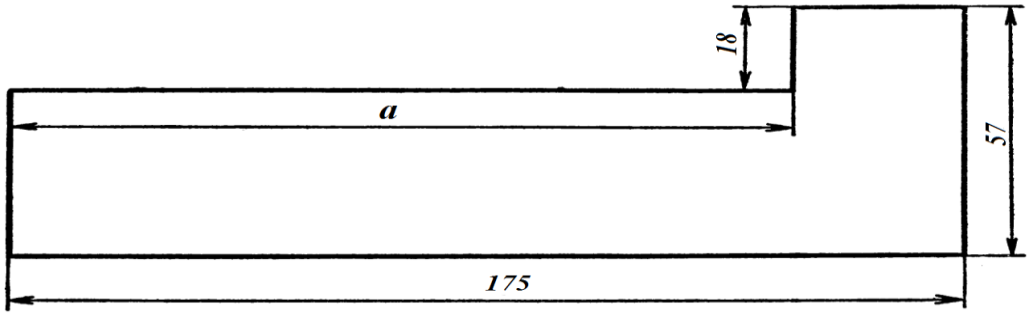


Рисунок 1. План участка.

Решение.

Площадь участка: $S=57\cdot175 - 18a = 9975 - 18a$.

Формула имеет вид $y=kx+b$, значит функция, выраженная полученной формулой, – линейная.

Для закрепления и углубления знаний практико-ориентированные задачи могут быть применены в различных формах: для работы со всем классом или индивидуально для работы с отдельными учениками, или же, как творческие задания ученикам, проявляющим интерес к изучению математики и ее приложениям. Для наглядности рекомендуется сопровождать условие задачи чертежами, рисунками, схемами, фотографиями.

На этапе закрепления можно включать в систему в числе других практико-ориентированных задач задачи с недостающими значениями величин и даже с недостающими данными. Это создает условия для формирования у школьников полезных политехнических умений и навыков: таких как использование справочных материалов и таблиц, выполнение измерений, которые они могут

использовать для решения, либо выяснить, какие данные им могут быть необходимы.

Самостоятельное составление практико-ориентированных задач имеет существенное значение в работе по закреплению знаний. Для этого может быть использован опыт учащихся и приобретенные в процессе общественно-полезного и производственного труда знания. Целесообразно, чтобы кабинет математики был оснащен необходимыми таблицами с техническими характеристиками машин и механизмов и справочными материалами, чтобы можно было выполнить более качественно работу по составлению таких задач.

В систему упражнений на закрепление знаний по теме «Проценты» может быть включена следующая задача.

Задача №6. «Цена товара в 100 условных единиц сначала понизилась на 10%, потом повысилась на 10%. На сколько процентов понизилась или повысилась цена товара за 2 раза?» [4, с. 43].

Решение.

Учащиеся могут ошибочно полагать, что цена товара не изменилась. На примере данной задачи можно наглядно пояснить смысл процентов и дробей в целом – значение величины, процент которой указан, зависит, от чего этот процент взят. Можно для наглядности показать на рисунке (рисунок 2).

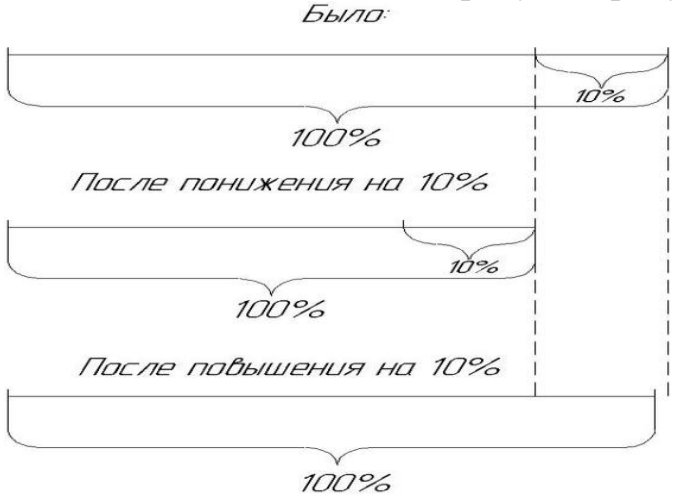


Рисунок 2. Изменение цены товара.

Так, в нашем случае, 10% от первоначальной стоимости будет больше 10% от полученной после понижения стоимости.

Сначала переведем проценты в дробь, пусть это будет десятичная, допустим, если по программе десятичные дроби уже пройдены. В противном случае можно применять обыкновенную дробь, суть от этого не изменится.

10% = 0,1

Найдем, на сколько понизилась цена товара: $0{,}1 \cdot 100 = 10$ (усл. ед.)

После понижения цена стала равной: 100 – 10 = 90 (усл. ед.)

Найдем, на сколько затем повысилась цена товара. Была цена 90 усл. ед., значит 10% от 90: $0{,}1 \cdot 90 = 9$ (усл. ед.)

После повышения цена стала равной: 90 + 9 = 99 (усл. ед.)

Итак, была цена 100, стала 99, изменилась на: 100 – 99 = 1 (усл. ед.)

Была цена 100, она уменьшилась на 1, найдем, какую часть первоначальной цены составляет 1 и переведем в проценты:

1 : 100 = 0,01 = 1%

Ответ: цена уменьшилась на 1%.

Или, например, такая задача.

Задача №7. Влажность свежескошенной травы составляет 60%, а влажность сена – 20%. На сколько процентов уменьшается масса заготовленного сырья после просушки?

Похожие задания встречаются на ОГЭ и ЕГЭ, необходимо обратить на этот момент внимание учащихся после решения, т.к. это также будет способствовать повышению мотивации к изучению темы.

Решение.

Пусть масса травы – х кг. Тогда сухого вещества в ней 0,4х кг. Она не изменяется после просушки, т.к. уменьшается лишь масса воды. Масса сухого вещества составляет 0,8 массы сена. Тогда масса сена составит 0,4х : 0,8 = 0,5х кг. Таким образом, в результате просушки травы ее масса уменьшается на х – 0,5х = 0,5х кг, или на 50%, т.е. в 2 раза.

Ответ: на 50%.

Для учащихся сельских школ может быть интересно такое задание:

Задача №8. В таблице показана примерная структура стада (в процентах) крупного рогатого скота при различных направлениях скотоводства (таблица 1).

Составьте по данным таблицы задачу на проценты и решите ее.

Решение.

В мясном направлении имеется 18 быков старше 2 лет. Определите, сколько всего животных в этом направлении. Сколько коров?

18 быков – это 6%

6%=0,06

Таблица 1. Структура стада крупного рогатого скота при различных направлениях скотоводства (в процентах).

Виды животных	Направление скотоводства						
	Мясное	Мясо-молочное		Молочно-мясное	Молочное		
		Варианты			Варианты		
		I	II		I	II	III
Коровы	35	40	45	50	50	60	65
Нетели	4	2	2	3	4	4	5
Телки старше 1 года	12	3	3	4	7	6	6
Телки до 1 года	32	34	40	41	37	28	23
Быки-производители	1	1	1	1	1	1	1
Быки 1-2 года	10	12	6	1	1	1	-
Быки старше 2 лет	6	8	3	-	-	-	-

Тогда всего животных:

18:0,06=300

Найдем, сколько коров:

35%=0,35

300·0,35=105

Ответ: всего 300 животных, из них 105 коров.

Приведенные решения к задачам являются лишь примерами.

Можно провести дальнейший анализ данных из таблицы, подвести учащихся к вопросу о том, почему в каждых направлениях скотоводства выделяется различный процент каждого вида животных. Например, почему коров в молочном направлении наибольшее количество, а в мясном – наименьшее или почему быки-производители составляют 1% в каждом направлении и т.п.

Решение таких задач зачастую сопряжено большими затратами времени и нуждается в дополнительном теоретическом обеспечении, поэтому их применение лучше (по возможности) вынести преимущественно на внеклассные и факультативные занятия по математике.

3. Заключение

В результате исследования, определено, что обучение математике с использованием практико-ориентированных задач способствует более прочному усвоению знаний и умений, так как у школьников возникают ассоциации с понятными и известными событиями и действиями. Особенность таких заданий (связь с профессией, с жизнью, необычная формулировка) вызывает у обучающихся интерес к математике как к учебному процессу, приводит к развитию творческой активности, любознательности, формированию положительной мотивации к изучению предмета.

Список источников

1. Джидарьян И.А. О месте потребностей, эмоций и чувств в мотивации личности / И.А. Джадарьян // Теоретические проблемы психологии личности. – 1974. – с. 145-169.

2. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – М.: Просвещение, 1977. – 112 с.

3. Мерзляк А.Г. Алгебра: 7 класс: учебник для учащихся обще-образовательных организаций / под ред. В. Б. Подольского. – М.: Вентана-Граф, 2019. – 260 с.: ил.

4. Никольский С.М. и др. Математика. 5 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2018. – 272 с.: ил.

5. Сафин В.Ф. Психологический аспект самоопределения личности / В. Ф. Сафин, Г. П. Ников. // Психологический журнал. - 1984. - 5 т. - №4. - с. 165-174.

References

1. Dzhidaryan I.A. On the place of needs, emotions and feelings in the motivation of personality / I.A. Jadaryan // Theoretical problems of personality psychology. - 1974. – pp. 145-169.

2. Kolyagin Y.M. Problems in teaching mathematics. Part I. Mathematical problems as a means of teaching and developing students. – M.: Enlightenment, 1977. – 112 p.

3. Merzlyak A.G. Algebra: Grade 7: textbook for students of general education organizations / edited by V. B. Podolsky. – M.: Ventana-Graf, 2019. – 260 p.: ill.

4. Nikolsky S.M. et al. Mathematics. 5th grade: studies. for general education. institutions. – M.: Enlightenment, 2018. – 272 p.: ill.

5. Safin V.F. Psychological aspect of self-determination of personality / V. F. Safin, G. P. Nikov. // Psychological Journal. – 1984. – 5 vol. - No. 4. – pp. 165-174.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 565-567.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 565-567.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 512.12

О ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

Игорь Сергеевич Логунов✉
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
logun57orel@mail.ru✉

Аннотация. *В статье предлагается удобный способ решения задания ЕГЭ по математике профильного уровня части 1 (2024 год). Приведём пример.*
Ключевые слова: *Тригонометрические функции одного аргумента, формулы с квадратами функций, деления функций, обратных величин.*

Conference paper

ON THE RELATIONSHIP BETWEEN THE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS OF ONE ARGUMENT

Igor S. Logunov✉
Oryol State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia
logun57orel@mail.ru✉

Annotation. *The article offers a convenient way to solve the task of the Unified State Exam in mathematics of the profile level of part 1 (2024). Let's give an example.*
Keywords: *Trigonometric functions of one argument, formulas with squares of functions, division of functions, inverse quantities.*

1. Введение

Среди заданий ЕГЭ по математике профильного уровня части 1 под номером 7 (2024 год) встречаются задания типа: по заданному значению одной из тригонометрических функций некоторого аргумента и ограничениям на него определить значения остальных тригонометрических функций этого аргумента. Если исходная функция не является синусом или косинусом, то не очевидна последовательность формул, которые следует применить, а само решение далеко не рационально.

2. Основной текст статьи

Поэтому школьникам можно порекомендовать следующую удобную схему, в которой необходимые формулы делятся на три вида.

© Логунов И.С., 2023

А. Формулы с квадратами функций:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1;$$
$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha};$$
$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}.$$

Б. Формулы деления функций:

$$tg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$
$$ctg\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

В. Формулы обратных величин:

$$\sin\alpha \cdot cosec\ \alpha = 1;$$
$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1;$$
$$tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1.$$

Вычисления можно проводить в следующем порядке:

1. записываем функцию, по величине обратную данной;

2. из формулы квадратов функций, в которой есть заданная функция или ей обратная по величине, находим последовательно третью и четвертую, обратную третьей по величине;

3. по одной из формул деления находим пятую и шестую функцию, обратную пятой по величине.

Замечание 1: функции $\sec\alpha$ и $cosec\ \alpha$ в настоящее время встречаются крайне редко.

Замечание 2: при решении задания номер 7 (из тригонометрии) используются три формулы обратных величин, одна формула с квадратами функций и одна формула деления функций.

Указанная схема действительно удобна, так как по максимуму используется легкие в смысле вычислений формулы и по минимуму трудные формулы. При следовании этой схеме не тратиться драгоценное на экзамене время по поиску нужных формул.

Кроме того, если у экзаменующегося отсутствует четкий план решения задания, то он вынужден дважды применять формулы с квадратами функций, при извлечении квадратного корня записывая одновременно два знака ±. Если данная функция меньше нуля, то две исходные функции имеют знаки ± и две другие функции имеют знаки $\overline{+}$. При этом верхние знаки должны соответствовать одному аргументу, определяемому значением данной функции, а нижние знаки-другому аргументу.

Напротив, при однократном извлечении квадратного корня неважно, как расставить знаки ± или $\overline{+}$, а значение остальных находимых функций будут выбраны применением правила знаков при умножении или делении. Обратные по значению величины имеют всегда одинаковые знаки.

Пример. Найти $\cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha,\ ctg\ \alpha,\ sec\ \alpha,\ cosec\ \alpha$, если

$\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Имеем из основного тригонометрического тождества:

$cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha = 1 - (-\frac{7}{25})^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$.

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$ и $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$.

$tg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{7}{25} \cdot \left(-\frac{25}{24}\right) = \frac{7}{24}$; $ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{24}{7}$;

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{25}{24}$; $cosec\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = -\frac{25}{7}$.

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{24}{25}; tg\ \alpha = \frac{7}{24}; ctg\ \alpha = \frac{24}{7}; \sec\alpha = -\frac{25}{24}; cosec\ \alpha = -\frac{25}{7}$.

3. Заключение

Автор надеется, что материал данной статьи поможет школьникам уверенно получить положенный 1 балл за выполнение указанного задания ЕГЭ.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 568-570.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 568-570.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 512.12

ОДИН ИЗ СПОСОБОВ ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ ЧИСЛА ДЕЛЕНИЕМ

Игорь Сергеевич Логунов✉
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
logun57orel@mail.ru✉

Аннотация. *В статье на примерах рассматривается способ извлечения квадратного корня из числа делением.*
Ключевые слова: *Квадратный корень из числа, частное, остаток, среднее арифметическое делителя и частного.*

Conference paper

ONE WAY TO EXTRACT THE SQUARE ROOT OF A NUMBER IS BY DIVISION

Igor S. Logunov✉
Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia
logun57orel@mail.ru✉

Annotation. *The article uses examples to discuss the method of extracting the square root of a number by division.*
Keywords: *Square root of a number, quotient, remainder, arithmetic mean of the divisor and quotient.*

1. Введение

Нередко требуется извлечь квадратный корень из числа вручную. Существует несколько таких способов. Приведём один из них.

2. Основной текст статьи

Пусть требуется извлечь квадратный корень из числа 71824. Очевидно, выполняется двойное неравенство

$$\sqrt{40000} = 200 < \sqrt{71824} < 300 = \sqrt{90000}.$$

Делим данное число на одно из «подходящих» чисел из этого интервала, пусть на 260: $71824 = 260 \cdot 276 + 64$. Получаем в частном 276, в остатке 64. Вычисляем среднее арифметическое делителя и частного:

© Логунов И.С., 2023

$$\frac{260+276}{2}=268.$$

Можно проверить вручную, что $268^2=71824$ или $\sqrt{71824}=268$.

Замечание 1. Можно разделить данное число не на 260, а на другое число из интервала (200; 300), например, на число 270. Тогда частное равно 266, но в итоге получаем то же самое число

$$268=\frac{270+266}{2}.$$

Замечание 2. Приведённый выше способ даёт правильный результат только тогда, когда число, на которое выполняется деление данного числа, находится «близко» от искомого квадратного корня.

Теоретическое обоснование данного способа вытекает из любопытной теоремы о разности между средним арифметическим и средним геометрическим чисел a и b, которая оказывается меньше дроби, числителем которой служит квадрат разности этих чисел, а знаменателем – умноженное на 8 меньшее из них.

Оказывается, что при $b<a$ имеет место неравенство:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{a\cdot b}<\frac{(a-b)^2}{8\cdot b}.$$

В нашем примере остаток от деления числа 71824 на 260 равен 64. Если им пренебречь, то с точностью до единицы $\sqrt{71824}=\sqrt{260\cdot 276}$.

По теореме получаем: $\frac{260+276}{2}-\sqrt{260\cdot 276}<\frac{(260-276)^2}{8\cdot 260}=\frac{256}{8\cdot 260}=\frac{8}{65}<1$. Так как мы искали корень с точность до 1, то, очевидно, число $\frac{260+276}{2}$ является искомым корнем.

Замечание 3. Если делитель взять «далеко» от искомого корня, то указанная разность будет больше 1, а среднее арифметическое будет отличаться от искомого корня.

3. Заключение

Приведем способы устного извлечения квадратного корня из чисел, являющихся полными квадратами, от 625 до 15625. Имеется четыре случая и четыре интервала:

1.) (25^2=625; 50^2=2500);

2.) (50^2=2500; 75^2=5625);

3.) (75^2=5625; 100^2=10000);

4.) (100^2=10000; 125^2=15625).

Пусть a < 25, тогда общий вид указанных выше чисел b таков:

$50-a$, если $b\in(25;50)$;

$50+a$, если $b\in(50;75)$;

$100-a$, если $b\in(75;100)$;

$100+a$, если $b\in(100;125)$.

Квадраты этих чисел таковы:

$(50-a)^2=2500-100\,a+a^2=100\cdot(25-a)+a^2$;

$(50+a)^2=2500+100\,a+a^2=100\cdot(25+a)+a^2$;

$(100-a)^2=10000-200\,a+a^2=100\cdot(100-2\,a)+a^2$;

$$(100 + a)^2 = 10000 - 200\,a + a^2 = 100 \cdot (100 - 2\,a) + a^2.$$

Заметим, что приведенные выше числа имеют одинаковое число единиц и десятков и отличаются в разряде сотен.

Примеры.

1) $\sqrt{1521} = 50 - 11 = 39$, так как для чисел, меньших 25, лишь квадрат числа 11 оканчивается на 21.

2) $\sqrt{5329} = 50 + 23 = 73$, так как для чисел, меньших 25, лишь квадрат числа 23 оканчивается на 29.

3) $\sqrt{6724} = 100 - 18 = 82$, так как для чисел, меньших 25, лишь квадрат числа 18 оканчивается на 24.

4) $\sqrt{13456} = 100 + 16 = 116$, так как для чисел, меньших 25, лишь квадрат числа 16 оканчивается на 56.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 571-580.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 571-580.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91+519.65

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСА ONLINETESTPAD ДЛЯ РАЗРАБОТКИ УРОКОВ ПО ТЕМЕ «ПЛОЩАДИ ФИГУР»

Татьяна Львовна Овсянникова[1]✉, Алёна Витальевна Иващенко[2]
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]otl19@yandex.ru✉, [2]lela.ivahen@yandex.ru

Аннотация. *Статья посвящена описанию особенностей разработки уроков с помощью образовательного Интернет-ресурса OnlineTestPad. Приведены примеры таких уроков по темам «Площадь параллелограмма» и «Площади четырёхугольников».*

Ключевые слова: *обучение математике, Интернет-ресурс OnlineTestPad, площади фигур.*

Conference paper

USING THE INTERNET RESOURCE ONLINETESTPAD TO DEVELOP LESSONS ON THE TOPIC “SQUARE OF FIGURES”

Tatiana L. Ovsyannikova[1]✉, Alena V. Ivashchenko[2]
[1,2]Orel State University, Orel, Russia
[1]otl19@yandex.ru✉
[2]lela.ivahen@yandex.ru

Abstract: *The article is devoted to the descriptions of the development of lessons using the educational Internet resource OnlineTestPad. Examples of such lessons on the topics “The area of parallelogram” and “The areas of quadrilaterals” are shown.*

Keywords: *math educational, the educational Internet resource OnlineTestPad, areas of the figures.*

1. Введение

Образовательный Интернет-ресурс «OnlineTestPad» предоставляет удобную платформу для создания собственных или использования уже готовых разнообразных дидактических материалов (тестов, опросников, кроссвордов, логических игр, уроков и комплексных заданий), которые могут быть использованы как для дистанционного, так и для очного онлайн обучения. Здесь предлагается бесплатная регистрация как для учителей, так и для учеников, что

© Овсянникова Т.Л, Иващенко А.В. 2023

делает его доступным для всех заинтересованных лиц. Имеется функционал, позволяющий объединить обучающихся в группы (классы) с привязкой к преподавателю изучаемой дисциплины.

Таким образом, учитель может самостоятельно сконструировать урок, который учащиеся могут посмотреть в удобное для них время и нужное количество раз. Такие уроки будут полезны часто болеющим детям, школьникам, пропускающим уроки из-за необходимости участвовать в конкурсах и соревнованиях, а также всем желающим лучше усвоить изучаемый материал. И особенно выручат такие уроки при необходимости осуществлять дистанционное обучение.

Рассмотрим подробнее работу учителя над созданием интерактивных уроков на примере темы «Площади фигур».

2. Основной текст статьи

Создавая интерактивные уроки на платформе «OnlineTestPad», учителю необходимо обращать внимание как на методические особенности изучения темы, так и на техническую сторону разработки [1].

При разработке урока сначала создаётся ссылка на урок и осуществляются его настройки (ограничение времени доступа к уроку или установка кодового слова для его открытия). В настройках допускается включение комментариев учащихся к данному уроку. Эту ссылку на урок учитель отправляет учащимся и делает урок открытым для посещения.

На «Начальную страницу» урока добавляется изображение, подходящее к теме урока, описание урока и указания для учащихся по его прохождению. В разделе «Регистрация» учащиеся для продолжения работы должны ввести свои фамилию и имя. Без заполнения этого раздела они не смогут перейти к изучению материала урока, а учитель будет проинформирован, кто приступил к изучению урока и какие результаты получены.

Раздел «Содержание» – это раздел, содержащий дидактические материалы урока, предназначенные для изучения и расположенные по шагам – в правильном порядке с пояснениями и заданиями. Как и любой урок, интерактивный урок, созданный на платформе «OnlineTestPad», реализуется поэтапно и содержит такие этапы как: актуализация знаний, объяснение нового материала, закрепление изученного, контроль знаний и другие. Для каждого из них есть технические инструменты их осуществления.

В содержание урока можно добавлять учебную информацию, представленную в различных форматах, выбор которых зависит от цели урока. Это могут быть: PDF-файлы, видео, чертежи и рисунки, ссылки на полезные ресурсы. Эти материалы могут быть как разработаны самим учителем, так и взяты из источников, находящихся в открытом доступе. Каждый вид прикреплённой информации сопровождается и дополняется текстовыми пометками для учащихся, например, указывается, что необходимо просмотреть видео или ответить на вопросы по тексту.

Раздел «Задание» предназначен для проверки знаний учащихся. «OnlineTestPad» предлагает удобные инструменты для создания тестов и опросов, которые затем присоединяются к уроку. При создании теста на

«OnlineTestPad» учителям предлагается выбрать тип теста: психологический, личностный или образовательный. Это позволяет учителям адаптировать тесты под конкретные цели урока и детально проверить, как учащиеся усвоили материал урока. Задания в образовательном тесте отличаются большим разнообразием структур и форматов: выбор одного или нескольких ответов, ввод числа или текста, сопоставление, прикрепление файла с ответом и другие варианты. Вопросы тестов могут быть текстовыми, содержать формулы, сопровождаться прикреплёнными чертежами и рисунками, при необходимости осуществляется обратная связь – в виде комментариев к заданию.

Что очень важно, платформа позволяет учителям настраивать систему оценивания для каждого созданного теста. Это означает, что учителя могут выбирать различные критерии оценивания и методы подсчёта баллов в зависимости от сложности каждого задания и теста в целом. Это способствует более точной оценке знаний учеников.

Нестандартной и интересной формой проверки знаний являются кроссворды. На сайте имеется возможность создания различных типов кроссвордов, таких как классические кроссворды, сканворды, судоку и другие. Это отличный способ не только осуществления контроля, но и развития логического мышления и памяти учеников. Создание кроссвордов на данной платформе просто и интуитивно понятно.

Итоговые разделы урока – «Результат» и «Статистика». Раздел «Результат» показывает оценку за тест, которую учитель устанавливает в системе оценивания. При выставлении оценки учитывается количество баллов, полученных за правильные ответы из максимально возможного количества баллов в процентах. В разделе «Статистика» учитель отслеживает посещение урока и оценки, полученные учащимися за урок. В этом разделе можно увидеть таблицы результатов выполнения работы в целом и по отдельным заданиям.

Таким образом, учитель создаёт взаимосвязанную цепочку шагов урока, проходя которые, учащиеся достигают поставленной цели урока.

В качестве примера рассмотрим следующие уроки.

Урок 1. «Площадь параллелограмма» состоит из пяти шагов [4]. Каждый из шагов соответствует этапам урока изучения нового материала: актуализация знаний (подготовка к изучению нового материала), первичное усвоение новых знаний, первичное закрепление изученной теоремы путём решения задач и первичная проверка понимания (проведение теста).

На первом шаге урока (рисунок 1) проводим актуализацию знаний. Учащиеся повторяют классификацию четырёхугольников при помощи готовой схемы, представленной на экране. Это будет способствовать лучшему усвоению темы: пониманию взаимосвязи между разными видами четырёхугольников, выделению отличий параллелограмма от других четырёхугольников.

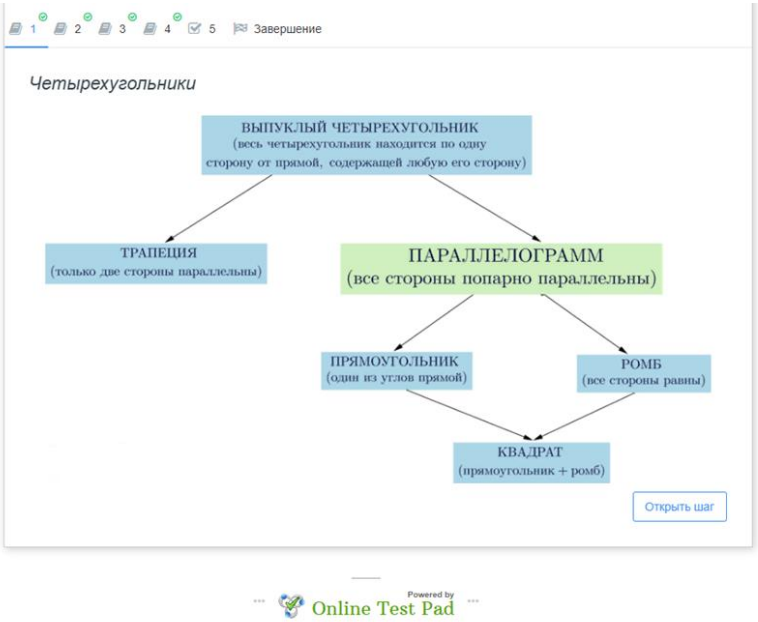


Рисунок 1. Вид экрана: ШАГ 1 урока 1.

На втором шаге (рисунок 2) продолжается актуализация знаний. Учащиеся повторяют определение параллелограмма, его свойства и признаки, которые наглядно представлены в текстовом, графическом и символическом виде. Благодаря этому этапу ученики будут готовы к изучению нового материала.

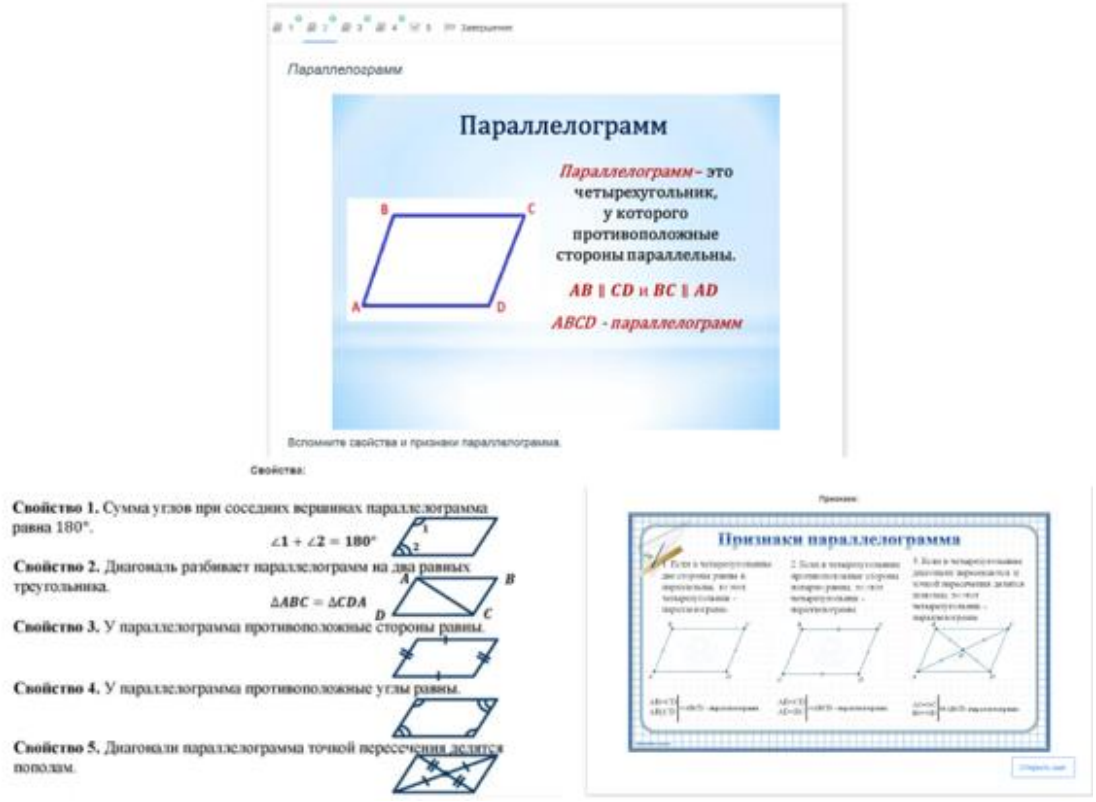


Рисунок 2. Вид экрана: ШАГ 2 урока 1.

Третий шаг урока (рисунок 3) посвящён изучению теоремы о площади параллелограмма. Здесь представлен видео-урок [6], в котором проводится

подробное доказательство данной теоремы. Учащиеся познакомятся с выводом формулы для вычисления площади параллелограмма по его высоте и основанию, к которому проведена высота.

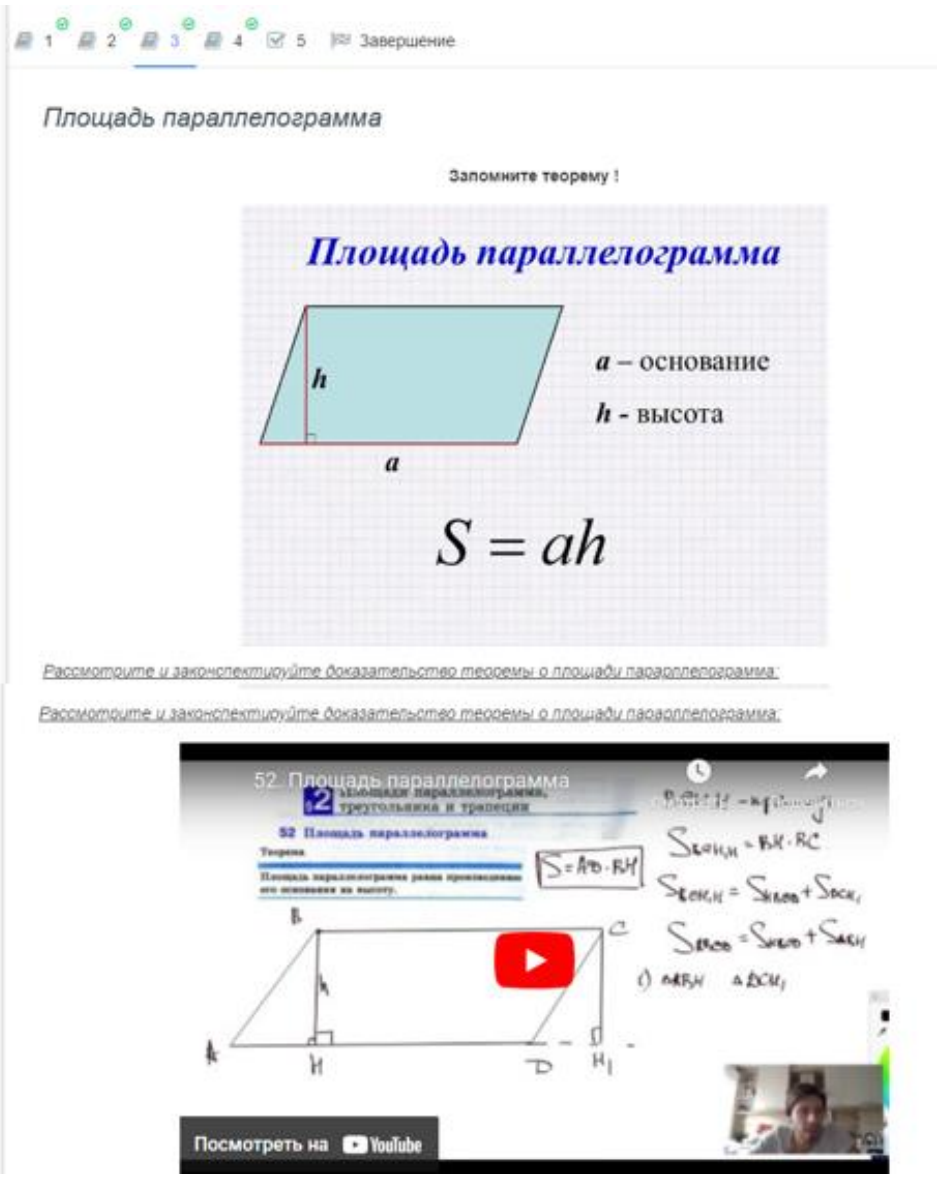


Рисунок 3. Вид экрана: ШАГ 3 урока 1.

На четвёртом шаге (рисунок 4) представлен ещё один видеоматериал [3], посвящённый применению выведенной формулы. Здесь проведён развёрнутый разбор решения четырёх задач на нахождение площади параллелограмма, в каждой из которых применяется изученная формула. Задачи подобраны следующим образом:

1) непосредственное применение формулы – по высоте и основанию находится площадь параллелограмма;

2) из формулы по известным площади и основанию находится высота параллелограмма;

3) для применения формулы необходимо достроить высоту и найти её длину из прямоугольного треугольника;

4) для нахождения основания параллелограмма с помощью изученной формулы надо составить пропорцию.

То есть задания представлены по нарастающей сложности.

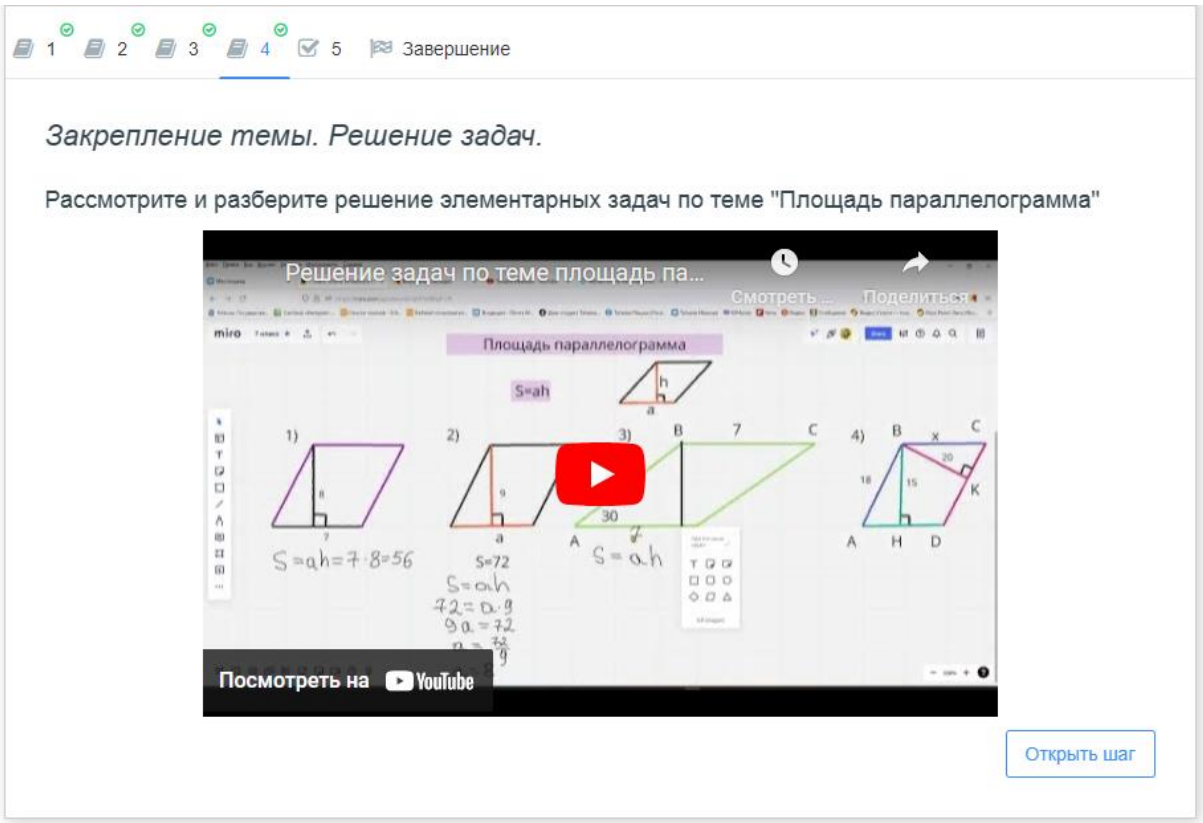


Рисунок 4. Вид экрана: ШАГ 4 урока 1.

Наконец, на пятом и последнем шаге урока – тест, состоящий из пяти заданий. Ученикам предлагаются задания разных типов на применение изученной формулы: выбор одного правильного ответа, выбор нескольких правильных ответов, введение числовой ответа (решение задач). Задания будут представлены как с чертежами, так и без них, чтобы проверить понимание и умение применять изученную формулу в различных ситуациях.

Таким образом, данный урок предлагает полный спектр информации по изучаемой теме и проверку знаний. В результате прохождения урока ученики получат не только теоретические знания, но и практические навыки, необходимые для работы с формулой для нахождения площади параллелограмма.

Урок 2. Решение задач по теме: «Площади четырёхугольников». Это урок обобщения и систематизации изученного [5].

Первый и второй шаги урока – это актуализация знаний (рисунок 5). Ученикам на первом шаге предлагается вспомнить определения и основные свойства четырёхугольников. Для этого им предлагается заполнить таблицу с помощью символов «+» и «-». Цель заполнения таблицы – обратить внимание учащихся на ключевые моменты, которые будут использоваться при решении задач на эту тему.

На втором шаге располагается таблица с верно заполненными столбцами, где ученики смогут провести самопроверку. Если ученики испытывали трудности при заполнении таблицы, либо допустили ошибки, то им рекомендуется обратиться к видеоматериалу «Четырёхугольники» [2], а после его просмотра снова заполнить таблицу. Такая работа может идти в удобном для ученика темпе и позволит ему качественнее подготовиться к решению задач.

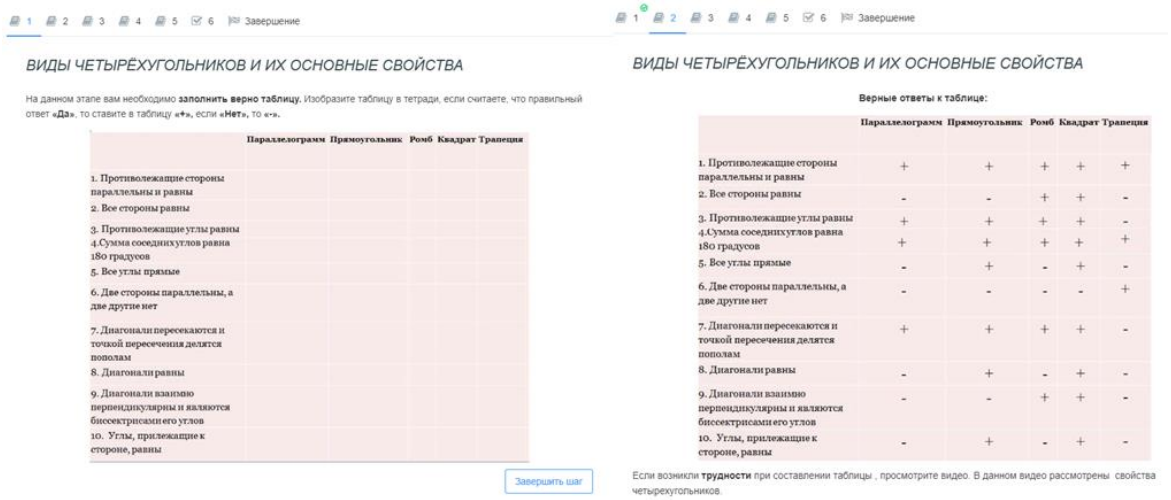


Рисунок 5. Вид экрана: ШАГИ 1 и 2 урока 2.

На третьем шаге (рисунок 6), продолжается актуализация знаний, связанных с нахождением площадей многоугольников. Ученикам представлены известные им теоремы и формулы площадей треугольника и четырёхугольников в систематизированном виде. Причём формулы и теоремы представлены и в словесном, и символическом виде, а также сопровождаются чертежами. Таким образом, ученикам будет проще обобщить изученный материал.

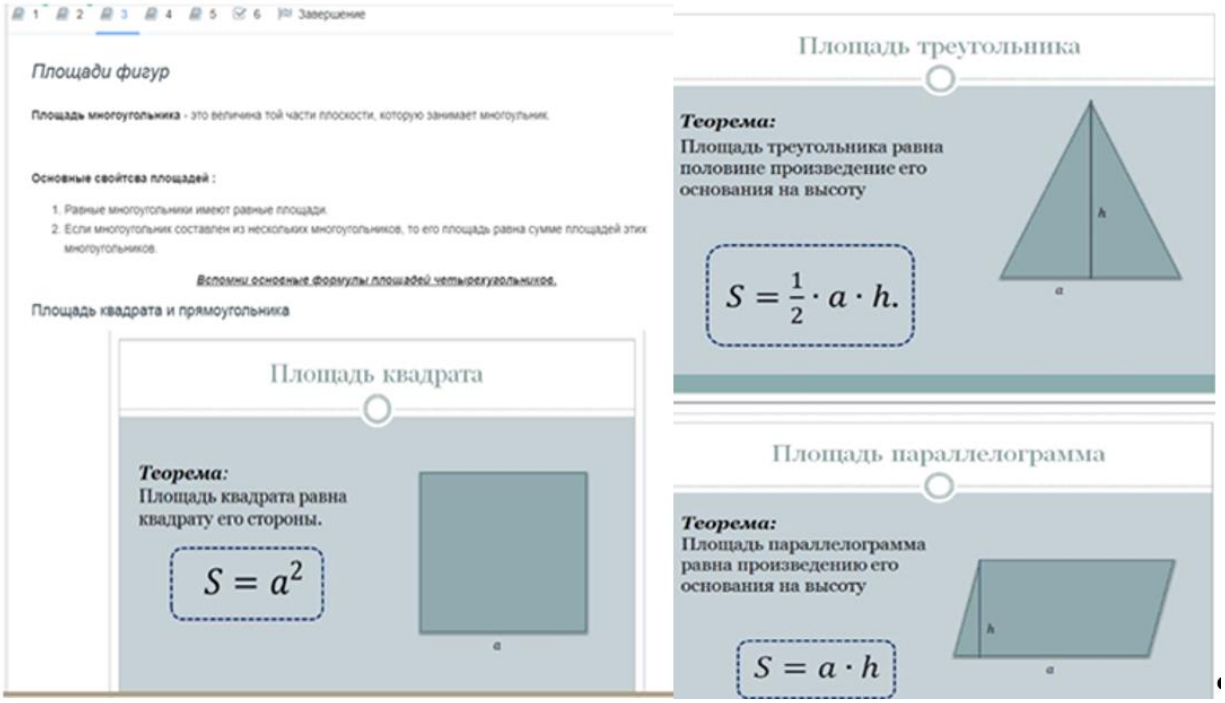


Рисунок 6. Вид экрана: ШАГ 3 урока 2.

Четвёртый шаг (рисунок 7) посвящён самостоятельному решению задач с последующей самопроверкой. Учащимся предлагаются для решения задачи разного уровня сложности на применение изученных формул. На этом этапе задачи подобраны следующим образом: сначала нужно найти площадь треугольника, зная высоту и основание, а затем найти основание треугольника, зная площадь и высоту. Далее, зная площадь, основание и высоту параллелограмма, необходимо найти его вторую высоту. И наконец, зная основание и площадь трапеции, нужно найти её второе основание.

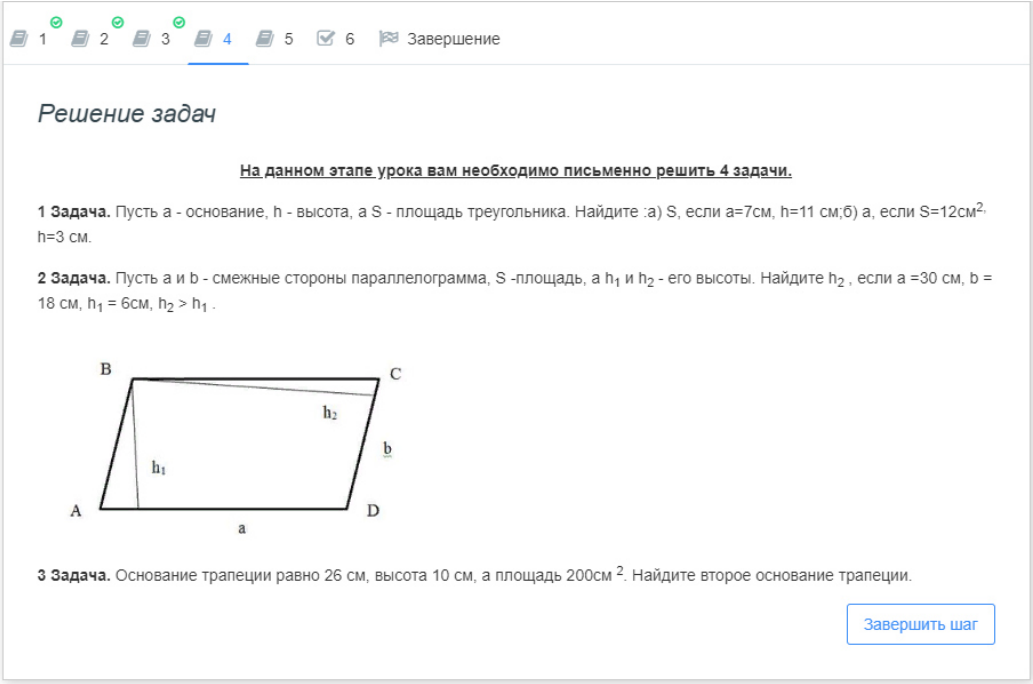


Рисунок 7. Вид экрана: ШАГ 4 урока 2.

На пятом шаге (рисунок 8) расположен файл с подробным решением задач. Он поможет ученикам не только проверить свои ответы, но и обнаружить ошибки в рассуждениях, а затем исправить их. Как и в случае самопроверки теории, учащиеся не сразу открывают решения и ответы, сначала они пытаются выполнить задания самостоятельно.

Наконец, на шестом шаге предлагается пройти контрольное тестирование. Ученикам предложено восемь заданий разных типов: выбор одного правильного ответа, выбор нескольких правильных ответов, введение числовой ответа (решение задач), установление соответствия, а также загрузка файла (решение задачи с развёрнутым ответом – обоснованием решения, чтобы всесторонне проверить понимание и умение использовать формулы) на применение изученных формул. Задачи представлены как с чертежами (учащиеся работают информацией, представленной графически), так и без них (учащиеся должны самостоятельно представляют информацию в графическом виде). Задания 1-7 оцениваются в один балл, а задание 8 (с загрузкой файла) – будет оцениваться в два балла, которые выставит учитель после проверки полученного письменного решения. После проверки последнего задания учителем сайт автоматически

пересчитает баллы, набранные учеником, и выставит окончательную оценку в соответствии с заданными критериями.

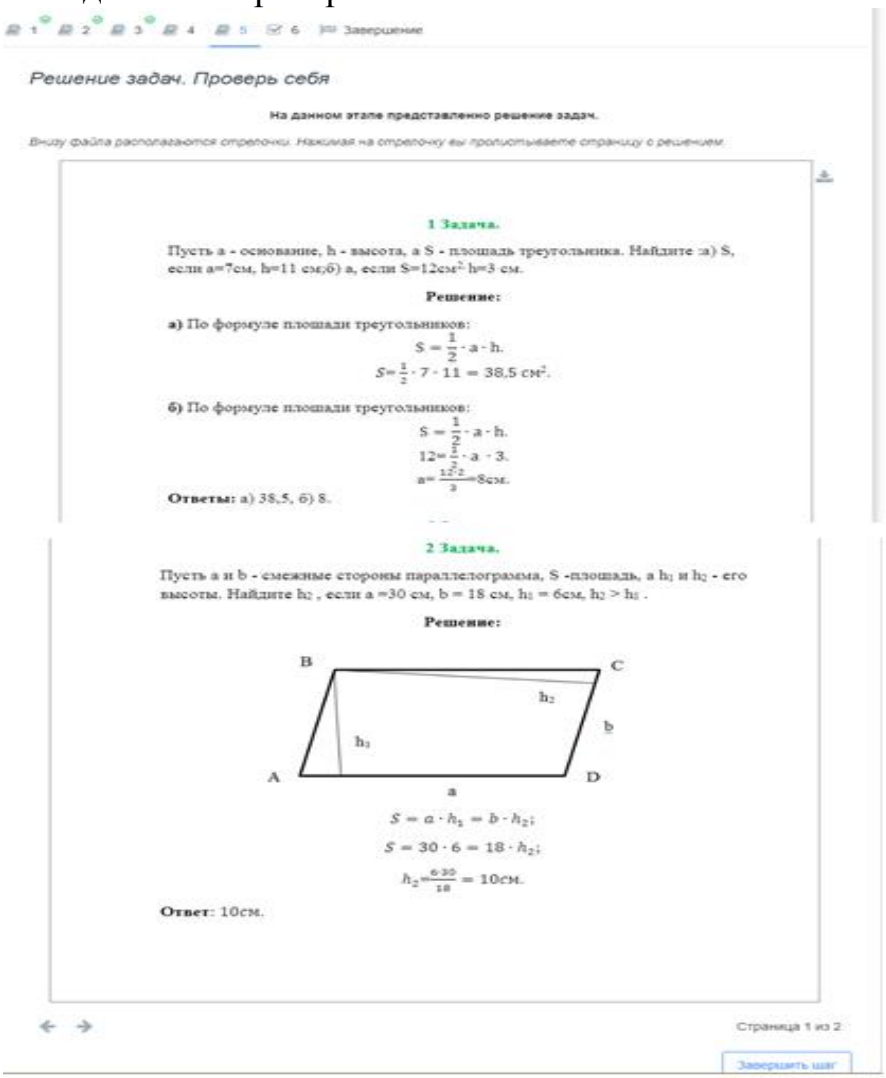


Рисунок 8. Вид экрана: ШАГ 5 урока 2.

Таким образом, второй урок содержит все этапы, характерные для урока обобщения и систематизации знаний: актуализацию знаний; работу по воспроизведению и коррекции опорных знаний (понятий, формул, теорем); усвоение знаний в систематизированном виде и их применение для решения задач (с самопроверкой и внешним контролем).

Построенный таким образом урок с одной стороны позволит учащимся обобщить и систематизировать знания по теме «Площади четырёхугольников», а с другой включает каждого ученика в активную работу в посильном темпе, формирует навыки самоконтроля, обеспечивает личную ответственность за полученные результаты.

3. Заключение

Сайт «OnlineTestPad» предоставляет удобную и гибкую платформу для создания и проведения уроков, в том числе уроков геометрии. Он помогает учителям и ученикам эффективно использовать время и ресурсы в процессе обучения, обеспечивая комфортное и интерактивное обучение.

Список источников

1. Аствацатуров Г.О. Как создать интерактивный урок в Online Test Pad // Академия цифрового учителя – https://www.youtube.com/watch?v=h3FtK4c5JIc.

2. Ахматова Д.Н. Четырёхугольники. Геометрия 8 класс // Дорогая Математика – https://www.youtube.com/watch?v=gmbx8IyZv_4.

3. Иванова Т. Решение задач по теме площадь параллелограмма // Татьяна Иванова – https://www.youtube.com/watch?v=FQztSvwfFlY.

4. Площадь параллелограмма – https://onlinetestpad.com/35rydrpyrlzja.

5. Площади четырёхугольников – https://onlinetestpad.com/uowkvwtob5yqi.

6. Сумин Е.Е. 52. Площадь параллелограмма // Геометрия с нуля – https://www.youtube.com/watch?v=aqVT79_fGB4.

References

1. Astvatsaturov G.O. How to create an interactive lesson in Online Test Pad // Academy of Digital Teacher – https://www.youtube.com/watch?v=h3FtK4c5JIc.

2. Akhmatova D.N. Quadrangles. Geometry 8th grade // Dear Math – https://www.youtube.com/watch?v=gmbx8IyZv_4.

3. Ivanova T. Solving problems on the topic area of a parallelogram // Tatiana Ivanova – https://www.youtube.com/watch?v=FQztSvwfFlY.

4. The area of the parallelogram – https://onlinetestpad.com/35rydrpyrlzja.

5. Squares of quadrilaterals – https://onlinetestpad.com/uowkvwtob5yqi.

6. Sumin E.E. 52. Parallelogram area // Geometry from scratch – https://www.youtube.com/watch?v=aqVT79_fGB4.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 581-588.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 581-588.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 37.08+373.2

ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ ПО ОТКРЫТИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДЕТСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ В ГОСУДАРСТВЕННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Сергей Валерьевич Поседько[1]✉, Александр Александрович Русаков[2], Елена Андреевна Насибулова[3], Людмила Брониславовна Романычева[4]
[1]ГБОУ школа №1454 "Тимирязевская", Москва, Россия
[2]РТУ МИРЭА, Москва, Россия
[3]ГБОУ школа №2107, Москва, Россия
[4]ГБОУ школа №49, Москва, Россия
[1]posedko.sv@gmail.com✉
[2]vmkafedra@yandex.ru
[3]nasibulova@2107school.ru
[4]romanichevalb@sch49.ru

Аннотация. *В данной статье мы рассмотрим различные аспекты организации дополнительного образования на примере дошкольных образовательных организаций (ДОО) глазами штатного педагога (воспитателя). Покажем с какими проблемами сталкивается педагог при организации детского объединения в очном формате. Опишем опыт предоставления организационно-методического инструментария педагогам для организации детских объединений естественнонаучной направленности "Школа математики Декарт". Организационно-методический инструментарий включает в себя дистанционное обучение (инструктаж) педагогов методике обучения по программе "Школа математики Декарт" с проведением открытого занятия с детьми по итогу обучения; дополнительные общеобразовательные общеразвивающие программы "Школа математики Декарт" для детей 4, 5, 6 лет с поурочными планами занятий и подробным описанием всех заданий; комплект инвентаря, который необходим для проведения занятия в течение учебного года в группах не более 8 детей в очном формате; доступ к информационной системе, которая позволяет привлекать родителей к процессу обучения и снижает временные издержки педагогов при организации детского объединения.*

Ключевые слова: *дошкольники, математическое развитие, очные занятия, обучение педагогов и воспитателей, дошкольная образовательная организация.*

© Поседько С.В., Русаков А.А., Насибулова Е.А., Романычева Л.Б., 2023

Conference paper

ORGANIZATIONAL AND METHODOLOGICAL TOOLS FOR THE MATHEMATICAL CLASSES ESTABLISHING IN A STATE EDUCATIONAL ORGANIZATIONS

Sergey V. Posedko[1]✉, Alexander A. Rusakov[2], Elena An. Nasibulova[3], Lyudmila B. Romanycheva[4]

[1]The State Budgetary Educational Institution School № 1454 "Timiryazevskaya", Moscow, Russia

[2]The Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Professional Education "MIREA – Russian Technological University"

[3]The State Budgetary Educational Institution School № 2107, Moscow, Russia

[4]The State Budgetary Educational Institution School № 49, Moscow, Russia

[1]posedko.sv@gmail.com✉

[2]vmkafedra@yandex.ru

[3]nasibulova@2107school.ru

[4]romanichevalb@sch49.ru

Abstract. *In this article, we will consider various aspects of the additional education organization taking the example of preschool educational organizations (pre-school) from the kindergarten teachers side. Let's show what problems a teacher faces while organizing an association for the children being educated in an intramural way. We will describe our experience in granting teachers organizational and methodological tools in order to arrange natural science orientation classes for children - "Descartes School of Mathematics". The organizational and methodological tools include on-line lectures for kindergarten teachers about the methodology of teaching the "Descartes School of Mathematics" program, with an open lesson with children as the outcome of training; additional general educational and evolutional programs "Descartes School of Mathematics" for children aged 4, 5, 6 with lesson plans and detailed description of all tasks; a set of inventory, which is necessary for the intramural classes in groups of no more than 8 children during the academic year; access to a data system that allows parents to be involved in the educational process and reduces teachers time costs while organizing a children's association.*

Keywords: *preschoolers, mathematical development, offline classes, training of teachers and educators, preschool educational organization.*

1. Введение

Дополнительное образование является традицией российского математического образования согласно концепции развития математического образования РФ [1]. Дополнительное образование играет важнейшую роль в развитии, самоопределении и формировании личности детей. Спектр направлений дополнительных объединений очень широк, начиная от направленностей по основным школьным дисциплинам (математика, русский

язык, иностранный язык, музыка, танцы и другие) и заканчивая более узкими и современными направлениями (робототехника, лего-конструирование, программирование, гейм-девелопмент, авиа-моделирование, 3d-анимация и прочее).

Согласно исследованию, проведенному «Нетологией-групп» в 2020 году - «Исследование российского рынка онлайн-образования», количество организаций, осуществляющих дополнительное образование, стабильно растет. С 2015 по 2017 гг. число учреждений, оказывающих услуги дополнительного образования для детей всех возрастов, увеличилось на 76%. Треть родителей сообщили, что их дети посещали дополнительные занятия вне ДОО, при этом было ими затрачено в среднем в 2 раза больше денежных средств, чем в среднем на дополнительные занятия в ДОО [2]. Согласно исследованию Федерального института развития образования РАНХиГС «Состояние негосударственного сектора в региональных системах дополнительного образования детей» в 2022 году доля государственных образовательных организаций составила 95% [3].

Основная цель системы дополнительного образования, определенная в национальном проекте «Образование», заключается в достижении показателя «80% детей в возрасте от 5 до 18 лет, охваченных дополнительным образованием к 2024 году» [4]. Для достижения этой цели и расширения доступных образовательных услуг была разработана и одобрена целевая модель развития региональных систем дополнительного образования. Эта модель в настоящее время внедряется в большинстве регионов Российской Федерации [3, 5].

Цель модернизации системы образования, заключается в следующем [3]:

- улучшение качества образования, сосредотачивая внимание на содержании образовательных программ, а не на самих образовательных учреждениях. Эта инициатива направлена на развитие организаций (в том числе частных), способных обеспечивать высокое качество образовательных услуг и достижение хороших образовательных результатов.

- повышение разнообразия и конкуренции в образовании путем вовлечения частного сектора. Частным компаниям предоставляется доступ к государственным средствам путем выдачи персональных сертификатов (ваучеров) каждому ребенку в регионе. Также разрабатываются региональные платформы-агрегаторы для услуг дополнительного образования.

На основании этого можно сделать вывод, что качество содержания дополнительных общеобразовательных общеразвивающих программ должно расти. Доля частных компаний в сфере дополнительного образования детей, тоже должна вырасти.

А теперь давайте посмотрим на все вышесказанное глазами штатного педагога (воспитателя) ДОО. Это значит, что педагогу необходимо повышать качество содержания, методики и способов при организации своего детского объединения, чтобы иметь возможность конкурировать в такой системе. В особенности это касается внебюджетных детских объединений, которые проводятся в стенах ДОО, так как от этого в значительной мере зависит заработная плата педагога. Если руководство образовательной организации занимает активную позицию по развитию своих сотрудников, то педагогов могут

отправить на дополнительные курсы по совершенствованию методики обучения, помочь разработать более привлекательную образовательную программу или обновить имеющийся инвентарь. Если педагогам ДОО придется в основном полагаться только на свой энтузиазм, то ситуация будет складываться не оптимистично. Руководство ДОО и педагоги заинтересованы в том, чтобы у них были внебюджетные кружки, так как средства, которые поступают от родителей, идут как на заработную плату педагога, так и на развитие ДОО.

2. Основной текст статьи

Разложим процесс организации внебюджетного детского объединения очного формата педагогом в государственном ДОО в г. Москва на организационные процессы (см. таблицу 1). В таблице приведены процессы, которые мы осуществляем в своей практике обучения в ДОО, поэтому они могут немного отличаться, если рассматривать другие ДОО. Но для того, чтобы попытаться представить объем трудозатрат педагога для организации детского объединения, этого списка будет вполне достаточно.

Таблица 1. Список процессов для организации детского объединения в ДОО.

№	Название процесса
1	Разработка дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы (ДООП) и поурочных планов
2	Поиск/покупка необходимого инвентаря, который отсутствует в ДОО (различные игровые наборы, специальные кубики)
3	Разработка домашних заданий, если они предусмотрены ДООП
4	Разработка методики проведения занятия по ДООП
5	Определение и согласование расписания и места для занятий
6	Подготовка информационных и справочных материалов для родителей (листовки, презентации, тексты)
7	Информирование родителей об открытии набора (родительские собрания, родительские чаты и др.)
8	Обработка списка поданных заявлений от родителей (определение в нужную группу, зачисление, сообщение дополнительной информации)
9	Отслеживание статусов заявлений от “заявление подано” до “подписан договор”
10	Подготовка к занятию (распечатка заданий, сбор нужного инвентаря и т.д.)
11	Проведение занятий
12	Заполнение отчетности после занятия (заметки, списки детей, учет достижений)
13	Отправка отчетности родителям после занятий
14	Заполнение журналов (бумажных или электронных)
15	Информирование родителей (оплата квитанций, перенос занятий и др.)

16	Работа с родителями (ответы на поступающие вопросы)
17	Работа с должниками, не оплатившими своевременно занятия
18	Заполнение табелей посещаемости
19	Формирование и отправка родителям полугодовых/годовых отчетов по результатам и успехам детей
20	Проведение дополнительных мероприятий по совместному участию родителей и детей (олимпиады, конкурсы, выступления)
21	Совершенствование образовательной программы, добавление новых заданий и корректировка текущих
22	Обмен опытом с профильными специалистами по возникающим вопросам при организации детского объединения

Если проанализировать этот список из 20-ти (см. таблица 1) пунктов, то можно заметить, что непосредственное проведение занятия с детьми содержится только в одном пункте. Пообщавшись с многими педагогами, которые ведут внебюджетные детские объединения, можно сделать вывод, что порой общение с родителями (пункты 16 и 17) занимает больше времени, чем работа с детьми. При этом зачастую родители это не понимают. В целом процесс организации детского объединения оказывается достаточно сложным и трудозатратным для педагога ДОО.

При этом педагогу необходимо дополнительно владеть компетенциями, которые обычно не свойственны людям такой профессии, например, умение создать привлекательные презентационные материалы для родителей (пункт 6), эффектно выступать на собраниях и заинтересовывать родителей (пункт 7). Но эти навыки являются совершенно необходимыми для набора детей в группы, особенно, когда перед родителями появляется большое многообразие детских объединений для посещения, как в ДОО, так и вне.

Для создания комплексного подхода к организации детского объединения в рамках дополнительного образования был разработан организационно-методический инструментарий, который помогает педагогам в ДОО открыть детское объединение по математическому развитию детей в очном формате обучения. Организационно-методический инструментарий тестировался в 13 государственных ДОО города Москвы на протяжении нескольких лет командой педагогических работников.

Разработанная ДООП служит отличным дополнением к основной образовательной программе в ДОО в части развития познавательного интереса к математике. В школьной программе объем информации по математике, которую должен освоить ребенок, распределен неравномерно в течение всех лет обучения. Для этого достаточно вспомнить насколько нелегко детям дается освоение темы Дроби (5 класс) или разделов Геометрии (7 класс). Важно обеспечить преемственность знаний при изучении элементарных математических представлений в ДОО и математики в школе (не только в начальной). Например, в ДООП есть серия игр, в которых нужно помочь курьеру отвезти половину пиццы и четверть пирога Чебурашке. Дети с интересом и легкостью справляются с такими заданиями, когда нужно выделить «часть»

целого, а рассказывать про числитель и знаменатель совсем необязательно. Или, например, дошкольники отлично помогают чудо-машинке выбраться из подземелья, называя координаты клеток (система координат); уверенно строят башни из кубиков по виду сверху, слева или спереди (проекции). Все это позволяет дошкольнику поиграть в то, с чем он столкнется в средней школе только в более формальном виде, когда время на обработку поступающей информации будет ограничено.

Организационно методический инструментарий разработан таким образом, чтобы в результате педагог ДОО тратил меньше времени на организацию занятий при более высоком уровне его организации. Организационно методический инструментарий содержит в себе: дистанционный курс обучения педагога по методике обучения по образовательной программе с очным открытым занятием в конце (пункт 4); ДООП “Школа математики Декарт” для 4, 5, 6 лет с поурочными планами занятий с подробными видео описаниями всех заданий (пункты 1, 10); разработанные домашние задания ко всем занятиям (пункт 3); разработанные методические материалы для родителей, которые могут направляться родителям в случае наличия трудностей у ребенка при выполнении задания на занятии; информационную систему, которая позволяет быстро подготовиться к занятию, автоматически формировать и отправлять отчеты после занятий и итоговые отчеты по успехам и трудностям детей, автоматически формировать табели посещаемости (пункты 10, 12, 13, 18, 19) [6]; комплект инвентаря, который необходим для организации занятий в течение учебного года (пункт 2); готовый набор информационных материалов для родителей: презентации, листовки, тексты (пункт 6); инструкции по выступлению на родительских собраниях, отправки информационных сообщений (пункт 7); ежегодное бесплатное участие детей от 5 до 11 лет в онлайн-олимпиаде по математике “Декарт” (пункт 20) [7]; обновление/корректировка образовательной программы для поддержания ее актуальности (пункт 21); методическая поддержка по вопросам организации обучения (пункт 22).

3. Заключение

В результате 15 из 22 процессов были оптимизированы и автоматизированы, что позволило снизить временные издержки педагога на организацию математического детского объединения.

В результате использования представленного организационно-методического инструментария, основную часть затрачиваемого на организацию детского объединения времени педагог имеет возможность уделять непосредственно образовательному процессу и может сосредоточиться на основной задаче - развитии детей.

В летний период 2023 года разработанный организационно-методический инструментарий был внедрен в 3 ДОО города Москвы: ГБОУ школа № 2107 (ул. Трифоновская дом 45Ас1, пер. Васнецова 2), ГБОУ школа № 49 (ул. Бутлерова 26А). Дистанционный курс обучения прошли 6 штатных педагогов ДОО. Были сформированы 14 групп всех возрастов, в которые записались 93 ребенка. В

среднем 6-7 детей на каждую группу, при условии, что максимальное количество детей в группе не более 8 (комплект инвентаря рассчитан на групповые занятия с детьми, не более 8 детей одновременно). От педагогов и от родителей были получены положительные отзывы.

Такой организационно-методический инструментарий в арсенале педагога позволяет ему конкурировать с образовательными организациями вне стен ДОО в рамках дополнительного образования.

Конечно, необходимо делать дополнительные исследования, чтобы оптимизировать и корректировать инструментарий, что и будет задачей нашей дальнейшей деятельности.

Список источников

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс] // Сайт Министерства Просвещения Российской Федерации, Режим Доступа: https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/ / (дата обращения: 25.10.2023).
2. Исследование российского рынка онлайн-образования (2020 г.) [Электронный ресурс]. URL: https://disk.yandex.ru/i/9vGG4NSupcdVTQ / (дата обращения: 25.10.2023).
3. Глухов П.П., Попов А.А. Состояние негосударственного сектора в региональных системах дополнительного образования детей. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2022. 44 с.
4. Паспорт национального проекта «Образование» (утв. президиумом Совета при Президенте Российской Федерации по стратегическому развитию и национальным проектам (протокол от 24 декабря 2018 г. № 16)). http://government.ru/info/35566/ / (дата обращения: 25.10.2023).
5. Приказ № 467 от 3 сентября 2019 г. «Об утверждении Целевой модели развития региональных систем дополнительного образования детей». http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001201912090014 / (дата обращения: 25.10.2023).
6. Поседько, С.В. Методические особенности обучения дошкольников с использованием информационных технологий для связи педагога дошкольного образовательного учреждения с родителями / А.А. Русаков, С.В. Поседько // Педагогическая информатика. – 2021. – № 2. – С. 66-70.
7. Поседько, С.В. Инструментарий для организации онлайн-олимпиад для детей младшего возраста по математике / А.А. Русаков, С.В. Поседько // Педагогическая информатика. – 2023. – № 1. – С. 78-84.

References

1. The concept of the development of mathematical education in the Russian Federation [Electronic resource] // Website of the Ministry of Education of the Russian Federation, Access Mode:

https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276 / (accessed: 25.10.2023).

2. Research of the Russian online education market (2020) [Electronic resource]. URL: https://disk.yandex.ru/i/9vGG4NSupcdVTQ / (accessed: 25.10.2023).

3. Glukhov P.P., Popov A.A. The state of the non-state sector in regional systems of additional education for children. Moscow: Publishing House "Delo" RANEPA, 2022. - 44 p.

4. Passport of the national project "Education" (approved by the Presidium of the Council under the President of the Russian Federation for Strategic Development and National Projects (Protocol No. 16 of December 24, 2018)). http://government.ru/info/35566/ / (accessed: 25.10.2023).

5. Order No. 467 of September 3, 2019 "On approval of the Target Model for the development of regional systems of additional education for children". http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001201912090014 / (accessed: 25.10.2023).

6. Posedko, S.V. Methodological features of teaching preschoolers using information technologies for communication of a teacher of a preschool educational institution with parents / A.A. Rusakov, S.V. Posedko // Pedagogical informatics. - 2021. – No. 2. – pp. 66-70.

7. Posedko, S.V. Tools for organizing online Olympiads for younger children in mathematics / A.A. Rusakov, S.V. Posedko // Pedagogical informatics. – 2023. – No. 1. – pp. 78-84.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 589-593.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 589-593.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 378.147:004.9

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОРРЕКТИРОВКА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО КОНТЕНТА С УЧЁТОМ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОНЛАЙН-КУРСА

Елена Александровна Рогозянская[1]✉, Наталья Петровна Еремеева[2], Елена Вячеславовна Закалкина[3]
[1,2,3]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]e_a_roggy@mail.ru✉
[2]erenata0901@mail.ru
[3]zakalkin@mail.ru

Аннотация. *Внедрение цифровых технологий в учебный процесс является ключевым фактором совершенствования образования в настоящее время. Благодаря цифровизации, стало возможно использование онлайн-курсов для обучения и проверки знаний обучающихся. Высшие учебные заведения кроме традиционных форм обучения могут использовать дистанционные технологии и вводить онлайн-обучение практически по всем дисциплинам. Аналитический потенциал образовательной платформы позволяет динамически корректировать образовательный контент с учётом оценки эффективности онлайн-курса.*

Ключевые слова: *онлайн-курс, МООК, образовательные платформы.*

Conference paper

DYNAMIC ADJUSTMENT OF EDUCATIONAL CONTENT TAKEN INTO ACCOUNT OF THE EVALUATION OF THE EFFECTIVENESS OF THE ONLINE COURSE

Elena A. Rogozyanskaya[1]✉, Nataliya P. Eremeeva[2], Elena V. Zakalkina[3]
[1,2,3]Orel State University, Orel, Russia
[1]e_a_roggy@mail.ru✉
[2]erenata0901@mail.ru
[3]zakalkin@mail.ru

Abstract. *The introduction of digital technologies into the educational process is a key factor in improving education at present. Thanks to digitalization, it has*

© Рогозянская Е.А., Еремеева Н.П., Закалкина Е.В., 2023

become possible to use online courses for training and testing students' knowledge. In addition to traditional forms of education, higher education institutions can use distance technologies and introduce online learning in almost all disciplines. The analytical potential of the educational platform allows you to dynamically adjust educational content taking into account the assessment of the effectiveness of the online course.

Keywords: *online course, MOOCs, educational platforms.*

1. Введение

В образовательной сфере основной тенденцией последних лет является перевод учебного контента в онлайн-формат. Оптимальное использование современных цифровых технологий, повышение степени как самостоятельного, так индивидуального участия студента в образовательном процессе являются основными векторами улучшения качества знаний. Современное высшее учебное заведение всё больше стремится привести количество онлайн-курсов разных уровней к количеству преподаваемых дисциплин. Также как традиционный курс онлайн-курс проектируется, согласуясь с целями и программой конкретной учебной дисциплины. Поэтому крайне важно создать систему адекватных оценочных метрик для определения того, насколько достигнуты поставленные цели.

2. Основной текст статьи

В основе образовательного процесса, базирующегося на применении онлайн-технологий обучения лежит контролируемая самостоятельная работа студента, поддерживаемая элементами обратной связи с преподавателем.

В настоящее время большинство образовательных организаций реализуют гибридную систему обучения с частичным включением электронных образовательных технологий в учебный процесс. При совмещении очных и дистанционных занятий в соответствии с учебным планом образовательной организации обучающемуся доступен онлайн-контент в удобной форме и в удобное для него время.

И в этой связи ключевым аспектом в ходе проектирования и разработки онлайн-курса становится оценка эффективности обучения, создания системы метрик, как показателя качественных характеристик образовательного процесса.

Формирование учебного проекта предполагает определение потребностей в обучении в целом и конкретных его целей. И здесь одним из важнейших элементов является блок оценки результатов обучения, функциональное назначение которого и состоит в определении того, насколько достигнуты первоначально поставленные цели. Адекватная и эффективная оценка – это анализ и соотнесение фактического прогресса в соотнесении с планами образовательного процесса, направленными на будущую профессиональную реализацию.

По тому, насколько решены задачи онлайн-обучения, можно судить об успешности конкретного образовательного продукта. Главным показателем, который определяет эффективность образовательного контента, является достижение студентами поставленных целей. Для большинства студентов вузов

онлайн-курс это просто замена очного обучения дистанционным и целью прохождения курса для них, является получение, в первую очередь, положительной оценки в ходе промежуточной аттестации. Поэтому часть метрик, которые применяются для оценки коммерческих онлайн-курсов, не применимы для учебных курсов в рамках образовательного процесса в вузе.

Онлайн-курс может быть обязательным и его прохождение учитывается преподавателем в ходе текущей и промежуточной аттестации. Тогда такой показатель, как процент прошедших курс не является актуальным. А вот такой показатель как время, затраченное на выполнение заданий, должен быть учтен. Онлайн-курс может дополнять обязательный к изучению материал и тогда цель прохождения курса, это получение дополнительных знаний, которые могут быть использованы для выполнения проектов, создания портфолио и просто саморазвития. И здесь для определения эффективности курса могут выступать данные полученные в ходе входного и выходного контроля.

Чрезвычайно важно разработать систему показателей эффективности онлайн-курса для того, чтобы на практике оценить результаты дистанционного образования и как результат, устранить возможные недостатки.

В ходе проектирования онлайн-курса необходимо предусмотреть такие формы контроля, которые позволят оценить все запланированные результаты. Следовательно, каждый раздел или тема курса должна иметь итоговую форму контроля. Важно определить по каким критериям, шкалам или процедурам будет проходить оценка полученных навыков и знаний, будут ли эти формы контроля автоматическими или с применением взаимо- и самооценки.

Методисты онлайн-курса должны разработать механизм определения итоговой оценки за весь курс. Он может предполагать и назначение дополнительных баллов за личные достижения обучающихся в ходе его прохождения, например, они могут базироваться на рейтинге участников, как итоговом, так и по отдельной теме, что, безусловно позволит повысить мотивацию студента.

Для успешного прохождения онлайн-курса и достижения поставленных целей обучения студенту уже из описания курса должно быть понятно, какие обязательные контрольные точки содержит курс, по каким критерия оценивается их прохождение и каков алгоритм расчета итогового балла. Также он должен быть информирован о наличии блокирующих элементов промежуточного контроля.

Подавляющее большинство современных образовательных платформ представляют достаточно широкий набор измерительных элементов для оценивания эффективности онлайн-обучения.

То, насколько успешна траектория обучения отдельного студента показательно характеризует один из базовых измерительных элементов – прогресс. Именно этот показатель позволяет увидеть в какой момент и с какими сложностями столкнулся обучающийся и отрегулировать обратную связь. Статус обучения определяется процентом освоенного материала и очень важен для преподавателя, когда онлайн-курс предполагает строгую дату его окончания.

Для наибольшей эффективности оценивания результатов обучения целесообразно использовать двойное тестирование с проведением входного контроля, что позволяет определить и общую эффективность и по-модульно. Современные платформы позволяют настраивать инструменты анализа ответов в виде статистики попыток до правильного ответа. В отдельных ситуациях этот элемент позволяет оценить или уровень подготовки студента или необходимость пересмотра формулировки вопросов теста ли внесения уточнений в теоретический материал. Поводом для корректировки или дополнения излагаемого материала может быть встроенная статистика, отслеживающая популярность отдельных модулей. Важной метрикой служит обратная связь с обучающимися в рамках онлайн-курса и для больше адекватности откликов следует реализовывать ее в формате тестирования, что позволяет сформулировать вопросы таким образом, чтобы акцентировать внимание студентов на наиболее значимых моментах оценки эффективности курса.

Итоговое тестирование на онлайн-платформе с применением цифровых средств прокторинга является неотъемлемой частью полноценного завершения онлайн-курса. Использование синхронной или асинхронной системы прокторинга, в конечном итоге, позволяют получить объективные результаты тестирования для принятия более точных решений и прогнозов дальнейшего обучения.

Онлан-курс не должен быть раз и навсегда созданным учебным продуктом. Даже печатные учебники и пособия проходят корректировку и переиздания, но происходит это очень медленно. Онлайн-курс удобен тем, что внесение в него изменений может проходит динамически, с учетов отзывов обучающихся и оценки результатов его прохождения.

3. Заключение

Так как аналитическая статистика в онлайн-обучении содействует в том числе целям прогнозирования, то полученная в результате объективная информация позволит проектировать будущие сложные по своей модульности курсы и траектории обучения. Хорошо произведенный мультимедийный контент курса, отслеживание прохождения студентом промежуточного тестирования, мониторинг трудоёмких тем, возможность корректировки содержимого курса в онлайн-режиме, интерактивное взаимодействие участников обучения, всё это безусловно оказывает влияние на его результативность в целом.

Список источников

1. Требования и рекомендации по разработке онлайн-курсов, публикуемых на национальной платформе открытого образования. URL: https://cdn.openedu.ru/f1367c/Требования_и_рекомендации_по_разработке_онлайн_курсов.pdf.

2. Рогозянская Е.А., Еремеева Н.П., Закалкина Е.В. Влияние различных видеопроизводственных решений на вовлеченность студентов в онлайн-обучение: материалы VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (4 – 5 декабря 2020 г., г. Орёл): научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией кандидата физико-математических наук, профессора Т. Н. Можаровой. – Орёл: ОГУ имени И. С. Тургенева, 2020. – С. 527-531.

3. Закалкина Е.В., Рогозянская Е.А., Еремеева Н.П. Создание онлайн-курса по вычислительной математике. Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2020. № 1 (86). С. 178-181.

4. Иванова, Н. Ю. Дистанционное образование в условиях цифровой трансформации современного вуза: монография / Н. Ю. Иванова, А. А. Кошелев. - Саратов: Вузовское образование, 2022. - 87 c.

References

1. Requirements and recommendations for the development of online courses published on the national platform of open education. URL: https://cdn.openedu.ru/f1367c/Requirements_and_recommendations_on_the_development_of_online_courses.pdf.

2. Rogozyanskaya E.A., Eremeeva N.P., Zakalkina E.V. The influence of various video production solutions on the involvement of students in online learning: materials of the VI All-Russian scientific and practical conference with international participation (December 4-5, 2020, Orel): scientific electronic publication [Electronic resource] // edited by the candidate of physico -Mathematical Sciences, Professor T. N. Mozharova. - Eagle: OSU named after I. S. Turgenev, 2020. - P.527-531.

3. Zakalkina E.V., Rogozyanskaya E.A., Eremeeva N.P. Creating an online course in computational mathematics. Scientific notes of Oryol State University. Series: Humanities and social sciences. 2020. No. 1 (86). pp. 178-181.

4. Ivanova, N. Yu. Distance education in the conditions of digital transformation of a modern university: monograph / N. Yu. Ivanova, A. A. Koshelev. - Saratov: Higher education, 2022. – 87 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 594-601.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 594-601.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 51-7:004.9:37.01

ПРАКТИКА ВОСПИТАНИЯ КУЛЬТУРЫ СИСТЕМНОГО МЫШЛЕНИЯ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ АЛГОРИТМОВ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА МАССИВОВ ДАННЫХ

Вера Николаевна Русакова[1]✉, Екатерина Станиславовна Саватеева[2]
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]v.n.rusakova@yandex.ru✉
[2]katrin_s@inbox.ru

Аннотация. *В статье рассматривается проблема воспитания культуры системного мышления студентов специальности 01.03.05 Статистика, выбравших в качестве профиля обучения современный анализ данных (data science). Раскрывается возможность практической реализации такого воспитания при решении задачи кластеризации.*

Ключевые слова: *воспитание культуры системного мышления, основы системного анализа, кластерный анализ как инструмент системного, метод k-средних, применение электронных таблиц*

Conference paper

PRACTICE OF EDUCATION CULTURE OF SYSTEMIC THINKING IN USING CLUSTERING ALGORITHMS FOR DATA ARRAY ANALYSIS

Vera N. Rusakova[1]✉, Ekaterina S. Savateeva[2]
[1,2]Orel State University, Orel, Russia
[1]v.n.rusakova@yandex.ru✉
[2]katrin_s@inbox.ru

Abstract. *The article discusses the problem of educating the culture of systemic thinking of students in the specialty 01.03.05 Statistics who have chosen modern data analysis (data science) as a training profile. The possibility of practical implementation of such education in solving the clustering problem is revealed.*

Keywords: *education of a culture of system thinking, the basics of system analysis, cluster analysis as a tool of system analysis, the k- averages method, the use of spreadsheets*

© Русакова В.Н., Саватеева Е.С., 2023

1. Введение

В современном обществе важность системного мышления трудно переоценить. Огромный объем обрабатываемой человеком информации требует обязательного ее анализа, переработки в более компактную форму и систематизации полученных данных просто для того, чтобы иметь возможность их усвоить.

Будущая профессиональная деятельность студентов направления подготовки 01.03.05 Статистика предполагает умение правильно организовать работу с данными, что необходимо влечет применение системного подхода при обработке статистических данных. Для приобретения навыков мышления, при котором все элементы рассматриваются в их взаимосвязи, что позволяет качественно работать с данными, не упуская отдельных нюансов, в рамках курса «Основы системного анализа» предлагается ряд лабораторных работ, при выполнении которых, учащиеся получают практический опыт в решении задач, приближенных к реальном условиям, в которые предстоит погрузиться будущим статистикам, выбравшим своим профилем современный анализ данных (data science).

2. Область применения кластерного анализа

Одной из типовых задач, позволяющих воспитать профессионалов, обладающих системным мышлением, является задача кластеризации, для решения которой требуется проанализировать взаимосвязи между рассматриваемыми объектами для объединения их в группы по отдельным признакам.

Кластерный анализ дает исследователю следующие возможности:

-может работать не только с числовыми данными (объекты анализа могут иметь практически любую природу);

-позволяет разделить многомерный массив данных на группы сразу по нескольким параметрам.

-дает возможность сжимать большие объемы информации, представляя в более компактной и понятной форме.

-метод можно применять несколько раз (до достижения необходимого результата), получая на каждом шаге возможность значительных изменений направления дальнейшего анализа данных. [1]

То есть, кластерный анализ способен решить, например, следующие задачи.

-Анализ клиентской базы компании. Здесь кластерный анализ может помочь выделить группы клиентов с похожими потребностями и предпочтениями, что позволит более эффективно ориентироваться на их потребности и разрабатывать персонализированные продукты и услуги.

-Анализ социальных сетей. Кластерный анализ может помочь выделить группы пользователей со сходными интересами, что позволит более эффективно проводить таргетированную рекламу и коммуникацию.

-Анализ медицинских данных. Метод кластерного анализа может помочь выделить группы пациентов с похожими заболеваниями и факторами риска, что позволит более эффективно проводить лечение и профилактику.

-Анализ рынка недвижимости. Кластерный анализ позволяет выделить группы объектов недвижимости с похожими характеристиками, что позволит более эффективно проводить анализ рынка и прогнозировать его развитие.

-Анализ климатических данных. Выделение группы регионов с похожими климатическими характеристиками позволит более эффективно проводить анализ изменений климата и прогнозировать их последствия.

3. Практика воспитания культуры системного мышления при решении задачи кластеризации

Метод k-средних (k-means) заключается в разделении объектов на k кластеров на основе их сходства. Шаги алгоритма:

1. Определение количества кластеров k.
2. Случайным образом выбираются k центров кластеров.
3. Каждый объект присваивается ближайшему центру кластера.
4. Производится пересчет координат центров кластеров на основе средних значений координат всех объектов, отнесенных к данному кластеру.
5. Повторение шагов 3-4 до тех пор, пока центры кластеров не перестанут изменяться.

Формула расстояния между объектами для обоих случаев может быть различной в зависимости от задачи и типа данных. Например, для объектов, характеризующихся числовыми признаками можно определить Евклидово расстояние между двумя точками по формуле:

$$\rho(x_i, x_j) = \sqrt{\sum_{m=1}^{k} (x_{im} - x_{jm})^2} \quad (1)$$

Кластерный анализ можно применять, используя для этих целей стандартный набор инструментов MS Excel [2].

В рамках лабораторной работы рассмотрим следующую задачу.

Некоторой фирме необходимо обновить парк компьютерной техники для сотрудников. Отдел обеспечения рассматривает следующие варианты:

Таблица 1. Выбранные для анализа характеристики ноутбуков.

Бренд	Диагональ экрана (дюймы)	Цена (руб.)
Apple	13.3	100000
Lenovo	15.6	50000
Dell	14.0	70000
HP	17.3	80000
ASUS	12.5	40000

Необходимо разделить имеющиеся коммерческие предложения на группы по сходным параметрам для дальнейшего анализа внутри групп.

Для решения данной задачи средствами MS Excel, нужно выполнить следующую последовательность шагов.

1. Создайте новую книгу MS Excel и скопируйте в нее таблицу 1.
2. На новом листе «Станд» вычислите среднее значение (функция СРЗНАЧ) и среднее квадратическое отклонение (функция СТАНДОТКЛОН)

всех значений в каждом из столбцов предыдущей таблицы, выведя их в тех же ячейках, как на рисунке 1.

7	$\bar{x}_i$	14,54	68000
8	s	1,919114379	23874,67277
9			

Рисунок 1. Результат применения функций.

3. Вычислите $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{s}$ - стандартизированные значения для каждого признака (столбца), где $\bar{x}_i$ – среднее, x_i –значения, s – среднее квадратическое отклонение.

Используем формулы, относительные и смешанные ссылки MS Excel для вычисления стандартизованных значений (рисунок 2):

	A	B	C
1	Бренд	Диагональ экрана	Цена
2	Apple	=(Данные!B2-Станд!B$7)/Станд!B$8	
3	Lenovo		
4	Dell		
5	HP		
6	ASUS		
7	$\bar{x}_i$	14,54	68000
8	s	1,919114379	23874,67277
9			

Рисунок 2. Создание формулы и вычисление стандартизованных значений.

Важно не забывать про тип ссылки – абсолютная, для быстрого заполнения таблицы. Формат ячеек указываем числовой с округлением до сотых (рисунок 3).

	A	B	C
1	Бренд	Диагональ экрана	Цена
2	Apple	-0,65	1,34
3	Lenovo	0,55	-0,75
4	Dell	-0,28	0,08
5	HP	1,44	0,50
6	ASUS	-1,06	-1,17
7	$\bar{x}_i$	14,54	68000,00
8	s	1,92	23874,67
9			

Рисунок 3. Стандартизованные значения.

Стандартизация позволяет сравнивать данные между собой, не учитывая единицы измерения, то есть нормализует их.

	A	B	C	D
11	Бренд	Диагональ экрана	Цена	
12	Apple	-0,65	1,34	k1
13	Lenovo	0,55	-0,75	
14	Dell	-0,28	0,08	k2
15	HP	1,44	0,50	
16	ASUS	-1,06	-1,17	k3

Рисунок 4. Первоначальный выбор кластеров.

4. Выбираем количество кластеров, которые мы хотим получить. Для примера выберем 3 кластера.

5. Случайным образом разбиваем имеющиеся объекты на группы, например, так, как показано на рисунке 4.

6. Находим центры кластеров как среднее в каждой группе по соответствующему признаку (рисунок 5).

11	Бренд	Диагональ экрана	Цена	
12	Apple	-0,65	1,34	k1
13	Lenovo	0,55	-0,75	
14	Dell	-0,28	0,08	k2
15	HP	1,44	0,50	
16	ASUS	-1,06	-1,17	k3
17				
18	2. Найдем координаты центров кластеров			
19	C1	=СРЗНАЧ(B12:B	0,29	
20	C2	0,58	0,29	
21	C3	-1,06	-1,17	

Рисунок 5. Формула для определения центров кластеров.

7. Рассчитываем расстояние от каждого объекта до каждого центра кластера, используя формулу расстояния между точками на плоскости:

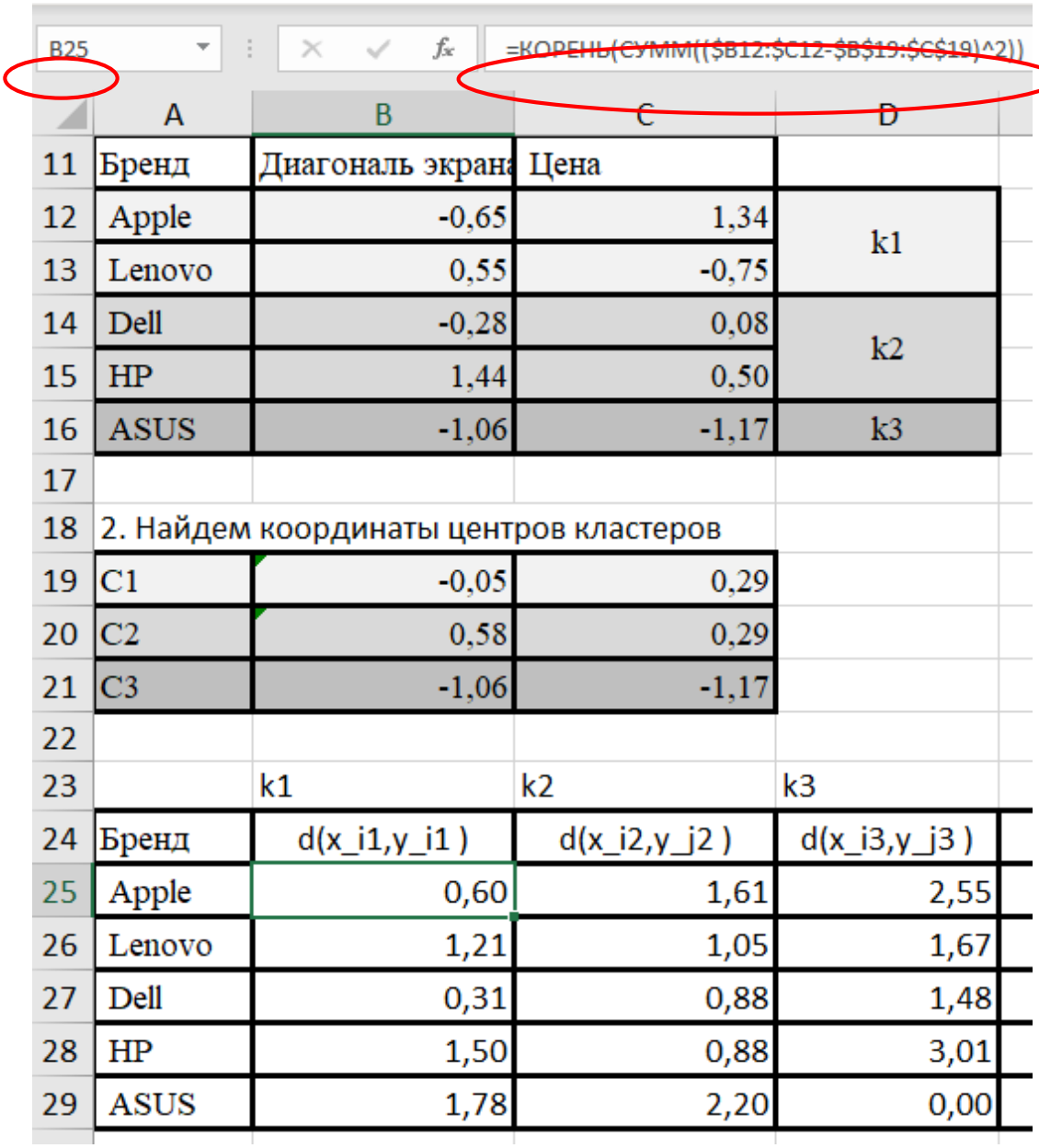
$$d(x_{im}, y_{jm}) = \sqrt{\sum_{m=1}^{k} (x_{im} - y_{jm})^2} \qquad (2)$$

где x_{im} – координаты объектов (значение m-го признака для i-го объекта), а y_{jm} – координаты центра соответствующего кластера (для m-го признака).

Поскольку требуется из каждого значения в строке объекта вычитать каждое соответствующее значение строки центра кластера, то воспользуемся формулой массива (ее также можно использовать для сворачивания формулы при вычислении расстояний в методе k ближайших соседей).

В ячейку B25 вводим формулу (см. рисунок 6) без {}, а затем нажимаем CTRL+SHIFT+ENTER. Excel будет вычитать соответствующие ячейки, а затем суммировать квадраты получившихся разностей. Затем растягиваем формулу на весь столбец. Для двух следующих столбцов придется поменять в формуле координаты центра кластера на следующие (C2 и C3 соответственно).

8. Каждый бренд относим к ближайшему центру кластера. Для этого найдем минимальное значение расстояния из всех расстояний до центров кластеров (рисунок 7).



B25 =КОРЕНЬ(СУММ(($B12:$C12-$B$19:$C$19)^2))

	A	B	C	D
11	Бренд	Диагональ экрана	Цена	
12	Apple	-0,65	1,34	k1
13	Lenovo	0,55	-0,75	
14	Dell	-0,28	0,08	k2
15	HP	1,44	0,50	
16	ASUS	-1,06	-1,17	k3
17				
18	2. Найдем координаты центров кластеров			
19	C1	-0,05	0,29	
20	C2	0,58	0,29	
21	C3	-1,06	-1,17	
22				
23		k1	k2	k3
24	Бренд	d(x_i1,y_i1)	d(x_i2,y_j2)	d(x_i3,y_j3)
25	Apple	0,60	1,61	2,55
26	Lenovo	1,21	1,05	1,67
27	Dell	0,31	0,88	1,48
28	HP	1,50	0,88	3,01
29	ASUS	1,78	2,20	0,00

Рисунок 6. Формула для вычисления расстояния от первого объекта до центра первого кластера.

23		k1	k2	k3	
24	Бренд	d(x_i1,y_i1)	d(x_i2,y_j2)	d(x_i3,y_j3)	мин
25	Apple	1,21	1,61	2,55	=МИН(B25:D25)
26	Lenovo	1,21	1,05	1,67	1,05
27	Dell	0,31	0,88	1,48	0,31
28	HP	1,50	0,88	3,01	0,88
29	ASUS	1,78	2,20	0,00	0,00

Рисунок 7. Определение минимального из расстояний до центров кластеров.

И определим до центра какого из кластеров расстояние минимально для каждого из объектов (рисунок 8).

	A	B	C	D	E	F
23		k1	k2	k3		
24	Бренд	d(x_i1,y_i1)	d(x_i2,y_j2)	d(x_i3,y_j3)	мин	
25	Apple	1,21	1,61	2,55	1,21	=ИНДЕКС($B$23:D25;1;
26	Lenovo	1,21	1,05	1,67	1,05	ПОИСКПОЗ(E25;B25:D25;0))
27	Dell	0,31	0,88	1,48	0,31	k1
28	HP	1,50	0,88	3,01	0,88	k2
29	ASUS	1,78	2,20	0,00	0,00	k3
30						

Рис.8. Формула, позволяющая определить, - расстоянию от центра какого из кластеров соответствует найденное выше минимальное расстояние.

9. Копируем ниже исходную таблицу и выделяем в ней новые кластеры (рисунок 9).

32	Бренд	Диагональ экран	Цена	
33	Apple	-0,65	1,34	k1
34	Lenovo	0,55	-0,75	k2
35	Dell	-0,28	0,08	k1
36	HP	1,44	0,50	k2
37	ASUS	-1,06	-1,17	k3
38				

Рисунок 9. Одинаковые кластеры выделены одним оттенком для лучшего визуального восприятия.

10. Повторяем шаги 6-9 до тех пор, пока центры кластеров не перестанут менять свое положение или не будет достигнуто максимальное количество итераций (здесь и далее будем ограничиваться пятью, при необходимости).

В рассматриваемом примере уже на следующем шаге получим то же расположение центров кластеров, что и на предыдущем.

40	C1	-0,46	0,71			
41	C2	1,00	-0,13			
42	C3	-1,06	-1,17			
43						
44		k1	k2	k3		
45	Бренд	d(x_i1,y_i1)	d(x_i2,y_j2)	d(x_i3,y_j3)	мин	
46	Apple	0,65	2,20	2,55	0,65	k1
47	Lenovo	1,78	0,77	1,67	0,77	k2
48	Dell	0,65	1,29	1,48	0,65	k1
49	HP	1,91	0,77	3,01	0,77	k2
50	ASUS	1,98	2,31	0,00	0,00	k3
51						

Рисунок 10. Результат кластеризации.

Таким образом, выделены 3 класса, состоящие из компьютеров с номерами: «1 и 3», «2 и 4» и «5».

Здесь в отдельный кластер выделен компьютер с минимальной ценой.

В целом, в данном примере мы получили три кластера, каждый из которых содержит компьютеры с похожими характеристиками. Кластеры могут быть проанализированы дополнительно для выявления закономерностей и принятия решений на основе полученных результатов.

4. Заключение

Кластерный анализ, в данном контексте выступая в качестве инструмента системного анализа, позволяет воспитывать в будущих статистиках привычку к аккуратной работе с данными в ходе аналитической работы, а также способствует выработке практического умения в применении системного подхода в профессиональной деятельности и развития соответствующего типа мышления, что является основой не только data science, но и любого научного исследования.

Список источников

1. Как сделать кластерный анализ в excel: сфера применения и инструкция // [Электронный ресурс], URL: https://exceltable.com/otchety/kak-sdelat-klasternyy-analiz (Дата обращения: 01.11.2023).

2. Справка MS Excel // [Электронный ресурс], URL: https://support.microsoft.com/ru-ru/excel / (Дата обращения: 01.11.2023).

References

1. How to do cluster analysis in Excel: scope and instructions // [Electronic resource], URL: https://exceltable.com/otchety/kak-sdelat-klasternyy-analiz (Date of access: 11/01/2023).

2. MS Excel Help // [Electronic resource], URL: https://support.microsoft.com/ru-ru/excel / (Access date: 11/01/2023).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 602-606.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 602-606.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК [373.5.016:51]:94

О ПОДГОТОВКЕ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ К ПРОЕКТИРОВАНИЮ ДУХОВНО-НРАВСТВЕННОГО ВОСПИТАНИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Ольга Алексеевна Саввина[1]✉, Наталия Вячеславовна Черноусова[2]
[1,2]Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Елец, Россия
[1]oas5@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-0866-6945
[2]chernousovi@mail.ru, http://orcid.org/0000-0001-5240-9025

Аннотация. *В статье поднимается проблема нарушения преемственности знаний в области духовно-нравственного воспитания между поколениями. В качестве одного из подходов решения этой проблемы предлагается реализация программы дополнительного образования по проектированию духовно-нравственного воспитания в процессе преподавания физико-математических дисциплин. Уникальность программы состоит в том, что она представляет опыт соработничества Елецкой епархии Русской православной Церкви, МП ОО «Объединение православных ученых» и ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина». Для чтения лекций приглашаются священноначалие и клирики.*

Ключевые слова: *методика обучения математике, духовно-нравственное воспитание.*

Conference paper

ABOUT PREPARING FUTURE TEACHERS FOR DESIGN SPIRITUAL AND MORAL EDUCATION AT MATH LESSONS

Olga A. Savvina[1]✉, Nataliya V. Chernousova[2]
[1,2]Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
[1]oas5@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-0866-6945
[2]chernousovi@mail.ru, http://orcid.org/0000-0001-5240-9025

Abstract. *The article raises the problem of violation of the continuity of knowledge in the field of spiritual and moral education between generations. As one of the approaches to solving this problem, it is proposed to implement a program of additional education on the design of spiritual and moral education in the process of teaching physical and mathematical disciplines. The uniqueness lies in the fact that it*

© Саввина О.А., Черноусова Н.В., 2023

represents the experience of collaboration between the Yelets diocese of the Russian Orthodox Church, the MP OO "Association of Orthodox Scientists" and the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Bunin Elets State University". Priests and clergy are invited to give lectures.

Keywords: *methods of teaching mathematics, spiritual and moral education.*

Введение

Вот уже более десяти лет современные дети имеют уникальную возможность познакомиться с богатейшим наследием православия в рамках дисциплины «Основы духовно-нравственной культуры народов России» (ОДНКНР). Однако ни их родители, ни их учителя не изучали в школе предмет «Основы православной культуры» [1].

Поэтому перед современным научно-педагогическим сообществом стоит задача разработки методологии, форм и методов устранения разрыва поколений в области решения задач духовно-нравственного воспитания. Интересный опыт проектирования нравственного воспитания на уроках математики предлагает В.Н. Клепиков. В качестве источников духовно-нравственных смыслов на уроках математики он предлагает рассмотреть: «жизненный нравственный опыт педагога и учащихся; этически осмысленные биографии и эпизоды жизни учёных, этически ориентированная интерпретация содержания образовательного материала; нравственно выраженные межличностные отношения, складывающиеся между субъектами образовательного процесса; нравственно направленная творческая деятельность педагога и учащихся» [2].

Основной текст статьи

Проектирование духовно-нравственного воспитания в процессе обучения математике остается практически вне поля зрения исследователей. Небольшое число работ по данной тематике ограничивается разработкой исторических экскурсов и фабул текстовых задач, направленных на воспитание нравственных качеств.

Современный педагог-математик В.Н. Клепиков предлагает технологию, которая «позволяет решать проблему духовно-нравственного воспитания средствами основных дисциплин, не создавая отдельного предмета, не привлекая специальных преподавателей, и в рамках существующего учебного плана, но привлекая значительные потенциалы основного и дополнительного образования» [2]. На наш взгляд, реализация этой технологии в настоящее время осложнена методологической рассогласованностью школьных предметов и традициями духовно-нравственного воспитания в православной культуре [3].

Еще одна распространенная методологическая ошибка последнего времени – использование в обучении задач по теории вероятностей, в которых пропагандируется игра в азартные игры, в карты. Составители заданий не учитывают, что карты имеют антихристианскую символику. Протодьякон Владимир Василик объясняет: «Масть «крести», кощунственно символизирующая Крест Господень, обозначается словом, свидетельствующим об иудейском гнушении Крестом. Пики символизируют Копье Лонгина, пронзившее ребро Христово (Ин.19:34), на что намекает и само название «пика»,

то есть копье. «Черви» подразумевает евангельскую губку на трости: «один из воинов, взял губку, наполнил уксусом и, наложив на трость, давал Ему пить» (Мф.27:48). Наконец, «бубны» символизируют гвозди, которыми был распят Христос» [4].

Совместными усилиями исследователей МПОО «Объединения православных ученых» и Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина разработан комплекс программ повышения квалификации, направленных на обучение будущих учителей математики проектированию духовно-нравственного воспитания.

Первый опыт реализации программы был осуществлен в 2018 году. Затем обучение по переработанной программе состоялось в 2019 г. и 2021 г., о чем уже сообщалось ранее [5].

25-29 сентября 2023 г. была реализована уже четвертая программа повышения квалификации «Проектирование духовно-нравственного воспитания в процессе обучения математике, физике и информатике в школе и вузе».

В духовно-нравственном воспитании выделяют несколько уровней. Например, протоиерей Геннадий Заридзе предлагает следующую иерархию: «Воспитывая детей, мы должны воспитывать сначала хорошего человека, хорошего гражданина своего отечества, а потом уже христианина. Это разные этапы воспитания, но они всегда соприсутствуют в обязательном порядке» [5].

Из предложенной иерархии уровней следует последовательность этапов проектирования воспитания в процессе обучения математике. На первом этапе формируются нравственные качества (честность, трудолюбие, милосердие и пр.), на втором этапе воспитывается любовь к Отечеству, на третьем этапе воспитываются духовные качества личности обучающегося (любовь к Богу). Понятно, что воспитание духовных качеств личности (третий этап) немыслимо вне Церкви, поэтому для толкования православного взгляда о духовных основах человека в рамках реализации программы дополнительного образования целесообразно приглашать священство.

В 2023 г. большое впечатление на слушателей произвела лекция «Философские аргументы в пользу бытия Бога», прочитанная почетным профессором Преосвященнейшим епископом Елецким и Лебедянским Максимом.

Важно отметить, что на лекцию собрались не только слушатели курсов, но также студенты, преподаватели университета, учителя школ города, школьники и преподаватели елецкой Православной гимназии имени свт. Тихона Задонского (зарегистрировалось около 90 слушателей).

Цикл лекций «Основы духовно-нравственного воспитания молодежи в России: тенденции, поиски, проблемы» протоиерея Геннадий Заридзе, председателя МПОО «Объединение православных ученых» (Воронеж) также вызвал большой интерес.

Помимо официальной части, в программу непременно включается культурная составляющая. В 2018 г., например, была совершена поездка по святым местам, в 2023 г. – посещение музыкально-литературной композиции, исполненной детским ансамблем «Колоколики» (муз. рук. О.Е. Манина).

Композиция была посвящена 400-летию со дня рождения святителя Митрофана Воронежского.

Заключение

В результате исследования были выявлены факты методологических ошибок проектирования воспитания в процессе обучения математике. В качестве формы проектирования духовно-нравственного воспитания в процессе обучения математике предложена программа дополнительного образования и описан многолетний опыт ее реализации. Вход на лекции открыт для всех желающих.

Важным компонентом программы является неформальная составляющая. Это может быть паломническая поездка по святым местам или музыкально-литературное представление.

Список источников

1. Саввина О.А., Щербатых С.В. Развитие духовно-нравственной культуры в процессе реализации программ дополнительного образования (на примере курсов повышения квалификации преподавателей математики и физики)// Историческая память и связь поколений как духовно-нравственная основа патриотического воспитания молодежи Сборник статей по материалам научно-практической конференции в рамках XXVIII Международных Рождественских образовательных чтений (г. Москва, 27 января 2020 г.). Москва: МФЮА, 2020. С. 111–115.
2. Клепиков В.Н. Духовно-нравственные смыслы современного математического образования // Школьные технологии. 2019. № 2. С. 17–27.
3. Саввина О.А., Симоновская Г.А., Щербатых С.В. Воспитание в процессе обучения математике: исторические тенденции и современные вызовы // Математика в школе. 2023. №2. С. 3–7.
4. Василик Владимир, диакон. О «святочных гаданиях» и картах [электронный ресурс] // https://pravoslavie.ru/58806.html#_ftnref1.
5. Gerasimova, Yevgeniya, Dvoryatkina, Svetlana, Savvina, Olga and Shcherbatykh, Sergey. "Implementing a Spiritual and Moral Education Program for Maths Teachers" Journal of Teacher Education for Sustainability, vol.23, no.1, 2021, pp. 69-83. https://doi.org/10.2478/jtes-2021-0006.
6. Заридзе Геннадий, прот. Отсутствие преподавания духовно-нравственной культуры как фактор усиления антропологического кризиса // Международный научный вестник (Вестник Объединения православных ученых). 2014. № 3 (3). С. 5–9. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_26590439_77067086.pdf (дата обращения: 28.05.2021).

References

1. Savvina O.A., Shcherbatykh S.V. The development of spiritual and moral culture in the process of realizing the programs of supplementary education (on the example of refresher courses for the teachers of mathematics and physics) // Historical memory and the connection of generations as the spiritual and moral basis of patriotic

education of youth A collection of articles based on the materials of the scientific and practical conference within the framework of the XXVIII International Christmas Educational Readings (Moscow, January 27, 2020). M., 2020. pp. 111–115. (In Russ.).

2. Klepikov V.N. Spiritual and moral meanings of modern mathematical education // School technologies. 2019. No. 2. P. 17–27.

3. Savvina O.A., Simonovskaya G.A., Shcherbatykh S.V. Education in the process of teaching mathematics: historical trends and modern challenges // Mathematics at school. 2023. No. 2. P. 3–7. (In Russ.).

4. Vasilik Vladimir, deacon. About “Yuletide fortune-telling” and cards [electronic resource] // https://pravoslavie.ru/58806.html#_ftnref1.

5. Gerasimova, Yevgeniya, Dvoryatkina, Svetlana, Savvina, Olga and Shcherbatykh, Sergey. "Implementing a Spiritual and Moral Education Program for Maths Teachers" Journal of Teacher Education for Sustainability, vol.23, no.1, 2021, pp. 69-83. https://doi.org/10.2478/jtes-2021-0006.

6. Zaridze, Gennady. (2014). Otsutstvie prepodavaniya duhovno-nravstvennoj kul'tury kak faktor usileniya antropologicheskogo krizisa [Lack of teaching of spiritual and moral culture as a factor of strengthening the anthropological crisis]. Mezhdunarodnyj nauchnyj vestnik (Vestnik Ob"edineniya pravoslavnyh uchenyh) - International Scientific Bulletin (Bulletin of the Association of Orthodox Scientists). No. 3 (3), pp. 5-9. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 607-615.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 607-615.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.8

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНО–МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «ПОДГОТОВКА К ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON»

Татьяна Александровна Симанева[1]✉, Александра Викторовна Небытова[2]
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]simanevata@mail.ru✉
[2]twicemy3456@gmail.com

Аннотация. *В статье рассматривается программно-методическое обеспечение элективного курса по информатике по подготовке к ЕГЭ на основе использования языка программирования Python. Приводится примерное планирование учебного материала и рассмотрена методика решения некоторых задач ЕГЭ с использованием языка программирования Python.*

Ключевые слова: *подготовка к ЕГЭ по информатике, методика решения задач, язык программирования Python.*

Conference paper

DEVELOPMENT OF SOFTWARE AND METHODOLOGICAL SUPPORT FOR THE ELECTIVE COURSE "PREPARATION FOR THE UNIFIED STATE EXAM IN INFORMATICS BASED ON THE USE OF THE PYTHON PROGRAMMING LANGUAGE"

Tatyana Al. Simaneva[1]✉, A.B. Nebytova[2]
[1,2]Orel State University, Orel, Russia
[1]simanevata@mail.ru✉
[2]twicemy3456@gmail.com

Abstract*. The article discusses the software and methodological support of an elective course in computer science in preparation for the Unified State Exam based on the use of the Python programming language. An approximate planning of the educational material is given and the methodology for solving the problems of the Unified State Exam using the Python programming language is considered in detail.*

Keywords: *preparation for the Unified State Exam in Informatics, problem-solving methodology, Python programming language.*

© Симанева Т.А., Небытова А.В., 2023

1. Введение

Каждый год выпускники школ стоят перед проблемой, какой предмет сдавать на ЕГЭ. Для школьников, выбравших техническую специальность, связанную с IT – технологиями, обязательным является экзамен по информатике По данным Роспотребнадзора [1] в 2023 году сдавали ЕГЭ по информатике 117 900 человек, средний тестовый балл за экзамен составил 58,39. Количество сдавших экзамен по информатике на 81–100 баллов составило 14%, а набравших 100 баллов менее 1%.

Анализ статистики результатов выпускников показал, что основные проблемы связаны с нехваткой времени и трудностями при решении задач на программирование. В рамках разработанного элективного курса «Подготовка к ЕГЭ по информатике с использованием языка Python» мы попытались решить данную проблему путем углубления знаний в области программирования и оптимизацией времени на решение задач, используя язык Python, даже для задач напрямую несвязанных с программированием. Это, на наш взгляд, позволить сократить время на решения задач напрямую несвязанных с программированием, например, по логике, комбинаторике, системам счисления и другим и сократить количество вычислительных ошибок допускаемых абитуриентами.

2. Основной текст статьи

В соответствии с требованиями Роспотребнадзора с 2023 года утверждены новые правила сдачи ЕГЭ по информатике, а именно компьютеризированный формат сдачи экзамена, что позволяет каждому участнику предоставить возможности использования:

- автоматизированного рабочего места без выхода в сеть «Интернет» с установленным специализированным ПО «Станция КЕГЭ»,
- набора стандартного ПО (текстовые редакторы, редакторы электронных таблиц, среды программирования на языках: Школьный алгоритмический язык, C#, C++, Pascal, Java, Python),
- программа Microsoft Windows «Калькулятор», предназначенную для выполнения вычислительных операций,
- графический редактор Microsoft Paint.

Таким образом, компьютеризированный формат сдачи экзамена позволяет многие трудоёмкие задачи, которые раньше решались с помощью ручки и листа бумаги, решать быстро на компьютере.

Анализ КИМов [2] показал, что при выполнении многих задач можно сократить время за счет использования шаблонов-алгоритмов на языке программирования Python, а также исключить возникновение ошибки из-за неправильного подсчета. Знание языка на достаточно хорошем уровне позволяет решить следующие типы задач:

- позиционные системы счисления (тип 14 задания ЕГЭ),
- построение таблиц истинности логических выражений (тип 2 задания ЕГЭ),

- преобразования логических выражений (побитовой конъюнкции, числовых отрезков и делимости (тип 15 задания ЕГЭ),
- комбинаторика (тип 8 задания ЕГЭ),
- составление программ для алгоритмов исполнителей (Робот, Автомат, Редактор, Черепаха и другие. Тип 5, 6,12 задания ЕГЭ),
- рекурсивные алгоритмы (тип 16 задания ЕГЭ),
- обработка числовой последовательности (тип 17 задания ЕГЭ),
- выигрышная стратегия (тип 19, 20, 21 задания ЕГЭ),
- обработка символьных строк (тип 24 задания ЕГЭ),
- обработка целочисленной информации (тип 25 и 26 задания ЕГЭ),
- программирование (тип 27 задания ЕГЭ).

Анализ обобщённого плана варианта КИМ ЕГЭ 2024 года по информатике показал, что в соответствии с новым форматом экзамена можно оптимизировать 30% от всего времени при решении задач с помощью компьютера.

Как показывает анализ Федеральной образовательной программы [3] и Федеральной рабочей программы [4] на 2023-2024 учебный год предметные результаты обучения информатики для базового курса недостаточны для сдачи ЕГЭ на 90+. Таким образом, элективный курс должен способствовать устранению данного разрыва в подготовке школьников. Основное внимание, по нашему мнению, должно быть направлено на углубление изучения языка Python и технологии решения различных задач с его использованием на основе алгоритмов - шаблонов.

Основная цель создания элективного курса – системное использование языка Python для подготовки учащихся к решению задач различного типа, не только по программированию.

Разрабатывая рабочую программа элективного курса «Подготовка к ЕГЭ по информатике с использованием языка Python», мы учли нормативно-правовые документы по разработке и организации элективных курсов в старшей школе.

Рабочая программа элективного курса предназначена для подготовки учащихся к экзамену по информатике и составлена из расчета 1 час в неделю (34 часа в год).

Элективный курс курса «Подготовка к ЕГЭ по информатике с использованием языка Python» предполагает расширение и углубление теоретического материала, позволяющее формирование практических навыков выполнения тестовых заданий на экзамене на основе системного использования языка программирования Python.

Задачи курса:

- изучение структуры и содержания контрольных измерительных материалов по информатике, при решении которых можно использовать язык программирования Python;
- формирование умения анализировать тип задания и использовать готовые шаблоны– программы для решения задач на языке программирования Python;

- систематизация знаний и умений по курсу информатики на основе языка программирования Python;
- отработка навыков решения тестовых заданий в формате ЕГЭ.

Формы проведения занятий: интерактивные формы проведения занятия на основе ИКТ технологий, самостоятельные работы, контрольные работы.

Программой предусмотрены методы обучения: проблемное изложение, частично- поисковый метод, метод проектов.

Ниже приведено примерное тематическое планирование элективного курса «Подготовка к ЕГЭ по информатике с использованием языка Python» (см. таблицу 1):

Таблица 1. Тематическое планирование.

Наименование тем курса	**Тип урока**	**Кол-во часов**
Введение. Контрольно-измерительные материалы ЕГЭ по информатике, решаемые с использованием Python	Урок первичного предъявления новых знаний	1
Модуль. Системы счисления		
1.1 Системы счисления. Позиционные системы счисления. Двоичная система счисления. Восьмеричная система счисления. Шестнадцатеричная система счисления.	Урок усвоения навыков и умений	2
1.2 Другие системы счисления. Алгоритм перевода числа в различные системы счисления с помощью языка Python	Комбинированный урок	2
1.3 Алгоритм перевода числа в различные системы счисления с помощью языка Python. Решение задач ЕГЭ.	Урок обобщения и систематизации нового знания	2
1.4 Самостоятельная работа “Системы счисления”	Самостоятельная работа	1
Модуль «Алгебра логики»		
2.1 Логика и компьютер. Логические операции. Логические операции. Практикум: задачи на использование логических операций и таблицы истинности.	Комбинированный урок	2
2.2 Упрощение логических выражений. Синтез логических выражений. Логические задачи.	Комбинированный урок	2
2.3 Решение задач ЕГЭ	Интегрированный урок	2
2.4 Самостоятельна работа «Алгебра логики»	Самостоятельная работа	1

Модуль «Алгоритмизация»		
3.1 Исполнители. Решение задач ЕГЭ	Урок первичного предъявления нового знания	1
3.2 Исполнение алгоритмов. Решение задач ЕГЭ	Комбинированный урок	1
3.3 Самостоятельная работа	Самостоятельная работа	1
Модуль «Программирование»		
4.1 Алгоритм для конкретного исполнителя с фиксированным набором команд; алгоритм, содержащего цикл и ветвление. Решение задач.	Комбинированный урок	2
4.2 Программы, использующие процедуры и функции. Решение задач.	Комбинированный урок	2
4.3. Массивы. Решение задач.	Комбинированный урок	2
4.4 Рекурсивный алгоритм. Решение задач.	Комбинированный урок	2
4.5 Программы для решения задач средней сложности	Комбинированный урок	2
4.6 Решение задач структуры данных (списки, словари, деревья, очереди, стеки)	Урок повторения нового знания	4
4.7 Решение задач ЕГЭ	Урок обобщения и систематизации знаний	1
4.8 Контрольная работа	Контрольная работа	1

В результате изучения элективного курса ученик должен знать/ понимать:

- особенности проведения ЕГЭ по информатике,
- структуру и содержание КИМов ЕГЭ по информатике, при решении которых можно использовать язык программирования Python;

уметь:

- эффективно распределять время на выполнение заданий на экзамене
- применять алгоритмы-шаблоны на языке Python для решения тестовых заданий по перечисленным выше тематическим блокам,
- владение умением понимать программы, написанные на выбранном для изучения универсальном алгоритмическом языке высокого уровня; знанием основных конструкций программирования,
- алгоритмы и функции для перевода чисел в разные системы счисления,
- использовать логические значения, операции и выражения с ними на языке программирования Python,

• составлять циклические, рекурсивные, вспомогательные алгоритмы, процедуры и функции и записывать их на языке программирования Python.

По нашему мнению, внедрение данного курса позволит подготовить учащихся к ЕГЭ по информатике и предоставит им возможность сдать его на хорошие баллы 90+.

Приведем пример методики использования алгоритма – шаблона для решения логической задачи ЕГЭ тип 2 «Построение таблиц истинности логических выражений». Рассмотрим задачу с сайта Решу ЕГЭ [5].

Задача № 15814 Логическая функция *F* задаётся выражением:

$(x \equiv (w \vee y)) \vee ((w \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow w))$.

Дан частично заполненный фрагмент, содержащий **неповторяющиеся** строки таблицы истинности функции *F*.

Определите, какому столбцу таблицы истинности соответствует каждая из переменных x, y, z, w.

Переменная 1	**Переменная 2**	**Переменная 3**	**Переменная 4**	**Функция**
???	???	???	???	*F*
1			1	0
			1	0
1		1		0

В ответе напишите буквы *w*, *x*, *y*, *z* в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала - буква, соответствующая первому столбцу; затем - буква, соответствующая второму столбцу, и т. д.). Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

Для решения данной задачи можно использовать алгоритм-шаблон на языке программирования Python, который выглядит следующим образом:

```
for x in range(2):
    for y in range(2):
        for z in range(2):
            for w in range(2):
```

Первым шагом в рассмотрении алгоритма-шаблона будет анализ символики. Чтобы записать логическое выражение на языке программирования Python необходимо знать представление логических операторов (см. таблицу 2):

Таблица 2. Логические операторы.

Логический оператор	*Запись на Python*
Отрицание ¬	not()
Логическое умножение ∧	And
Логическое сложение ∨	Or
Импликация →	<=
Эквиваленция ≡	==
Ложь	False

По условию задачи, нам даны 4 переменные, для которых необходимо перебрать все возможные варианты значений: истина и ложь (0 и 1). Следовательно, у нас возможны $2^4 = 16$ различных комбинаций.

Далее необходимо правильно записать логическую функцию. Анализирую таблицу из задания, видим, что значение функции принимает 0, т.е. ложь. Нам необходимы только те значения переменных, которые при подстановке в выражение (if ((x = =(w or y)) or ((w<=z)and (y<=w)) = = False:) выведут ложь. Если функция удовлетворяет условию, то программа выведет набор значений переменных (print(x,y,z,w)).

Для того, чтобы перебрать всевозможные значения x, y, z, w от 0 до 1 (истина или ложь) записываем 4 вложенных цикла, в каждом рассматриваем возможные значения для конкретной переменной.

Решение данной задачи имеет вид:

```
print("x y z w")
for x in range(2):
  for y in range(2):
    for z in range(2):
      for w in range(2):
     if ((x = =(w or y))or ((w<=z)and (y<=w)) = = False:
        print(x,y,z,w)
```

В результате выполнения программы получим таблицу значений для x,y и z, при которых функция равна 0.

x y z w
0 0 0 1
0 1 0 0
0 1 0 1
0 1 1 0

Проанализировав часть выведенной таблицы, можно соотнести её столбцы и строки с исходными данными из задания. Заголовки в запущенной программе помогают не перепутать столбцы. Один столбец без единиц – x второй столбец, один столбец с единственной единицей – z. Остается правильно соотнести оставшиеся столбцы: y –первый столбец, w – четвёртый.

Ответ: yxzw.

Рассмотрим еще один номер с сайта Решу ЕГЭ [5].

№3195 Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, К, Р, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААК
3. ААААР
4. ААААУ
5. АААКА

……

Запишите слово, которое стоит на 350-м месте от начала списка.

Решение с помощью языка Python.

Используя тип данных словарь, решим задачу: данный набор букв, где число – ключ, а слово – это значение буквы (А, К, Р, У) (a = {0: "А", 1: "К", 2: "Р", 3: "У"}). Шаблон- алгоритм выглядит следующим образом:

```
for i in range(0, len(a)):
    for j in range(0, len(a)):
        for g in range(0, len(a)):
            for m in range(0, len(a)):
                for n in range(0, len(a)):
```

где количество вложенных циклов зависит от длины слова в условии, в диапазон – длина определённого словаря. Перебирая варианты слов, будем считать их количество. В качестве условия поставим, что искомое слово стоит на 350 месте. Как только такое значение появиться выводим его, для отображения букв из словаря, запрашиваем вывод цифр, которые дали нам 350 повторений.

```
a = {0: "А", 1: "К", 2: "Р", 3: "У"}
k = 0
for i in range(0, len(a)):
    for j in range(0, len(a)):
        for g in range(0, len(a)):
            for m in range(0, len(a)):
                for n in range(0, len(a)):
                    k += 1
                    if k == 350:
          print(a[i], a[j], a[g], a[m], a[n], end=" ")
```

Ответ: К К К У К.

Заключение

Разработанный элективный курс, ориентирован на развитие у старших школьников алгоритмического стиля мышления и умения решать задачи ЕГЭ на основе шаблонов – программ на языке Python. Данный курс, поможет ученикам овладеть знаниями в области программирования, которые будут востребованы в дальнейшем обучении в вузе по IT - направлениям.

Фундаментальное обучение алгоритмизации в старших классах обеспечивает учащимся основу для успешного решения задач ЕГЭ по информатике, развивает у учеников алгоритмическое, критическое мышление, а также готовность использовать язык Python для решения широкого спектра задач ЕГЭ и даёт огромные возможности для успешной сдачи экзамена по информатике.

Список источников

1. Рособрнадзор подвёл итоги основного периода ЕГЭ-2023 URL: https://skillbox.ru/media/education/rosobrnadzor-podvyel-itogi-osnovnogo-perioda-ege2023/ (дата обращения: 04.11.2023).

2. Приказ Минпросвещения России, Рособрнадзора № 233/552 от 04.04.2023 г. «Об утверждении Порядка проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования» URL: https://fipi.ru/ege/normativno-pravovye-dokumenty (дата обращения: 04.11.2023).

3. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. URL: https://fgosreestr.ru/educational_standard/federalnyi-gosudarstvennyi-obrazovatelnyi-standart-srednego-obshchego-obrazovaniia-1 (дата обращения: 30.10.2023).

4. Федеральная рабочая программа по информатике (углубленный уровень) URL: https://static.edsoo.ru/projects/fop/index.html#/sections/3002 (дата обращения: 30.10.2023).

5. URL: https://inf-ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 04.11.2023).

References

1. Rosobrnadzor summed up the results of the main period of the USE-2023 URL: https://skillbox.ru/media/education/rosobrnadzor-podvyel-itogi-osnovnogo-perioda-ege2023/ (accessed: 04.11.2023).

2. Order of the Ministry of Education of Russia, Rosobrnadzor No. 233/552 dated 04.04.2023 "On Approval of the Procedure for Conducting State Final Attestation on Educational Programs of Secondary General Education" URL: https://fipi.ru/ege/normativno-pravovye-dokumenty (accessed: 04.11.2023).

3. Federal'nyy gosudarstvennyy obrazovatel'nyy standart srednego obshchego obrazovan URL: https://fgosreestr.ru/educational_standard/federalnyi-gosudarstvennyi-obrazovatelnyi-standart-srednego-obshchego-obrazovaniia-1 (accessed: 30.10.2023).

4. Federal Work Program on Informatics (Advanced Level) URL: https://static.edsoo.ru/projects/fop/index.html#/sections/3002 (accessed: 30.10.2023).

5. URL: https://inf-ege.sdamgia.ru/ (accessed: 04.11.2023).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 616-624.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 616-624.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.8

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ АБСТРАКТНЫХ ТИПОВ ДАННЫХ В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ В КЛАССАХ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ ИНФОРМАТИКИ

Татьяна Александровна Симанева[1]✉, Светлана Александровна Нестерова[2]
[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]simanevata@mail.ru✉
[2]snesssterova@gmail.com

Аннотация. *В статье рассматривается методика изучения абстрактных типов данных в старшей школе в соответствии с требованиями ФГОС СОО и ФРП по информатике для углубленного уровня. Приводится примерное планирование учебного материала и подробно рассмотрена методика решения задач с использованием стека и очереди и дека на языке программирования Python.*

Ключевые слова: *абстрактные типы данных, методика решения задач, язык программирования Python.*

Conference paper

METHODOLOGY OF STUDYING ABSTRACT DATA TYPES IN HIGH SCHOOL IN CLASSES WITH IN-DEPTH STUDY OF COMPUTER SCIENCE T.A.

Tatyana Al. Simaneva[1]✉, S.A. Nesterova[2]
[1,2]Orel State University, Orel, Russia
[1]simanevata@mail.ru✉
[2]snesssterova@gmail.com

Abstract. *The article discusses the methodology for studying abstract data types in high school in accordance with the requirements of the Federal State Educational Standards for Computer Science and the IDF in Informatics for the advanced level. An approximate planning of the educational material is given and the methodology for solving problems using a stack and a queue and a deck in the Python programming language is considered in detail.*

Keywords: *abstract data types, problem-solving techniques, Python programming language.*

© Симанева Т.А., Нестерова С.А., 2023

1. Введение

Фундаментальность в области алгоритмизации играет важную роль в обеспечении успешной подготовки старших школьников к будущей профессиональной деятельности в области IT. Современные методы программирования требуют глубокого понимания построения алгоритмов на основе абстрактных типов данных, таких как стек, дек, очередь, связные списки и других.

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО) [1] и федеральная рабочая программа по информатике (ФРП) (углубленный уровень) [2] определяют серьезные требования к результатам обучения в области алгоритмизации и структур данных.

Авторы современных учебных пособий по информатике для углубленного уровня [3] включают теоретический материал по абстрактным типам данных, но методические аспекты решения задач данного типа остаются за рамками учебников. В этой связи является актуальным вопрос разработки методики решения задач с использованием таких структур как стек, дек, очередь, двунаправленная очередь, связные списки на языке программирования Python.

2. Основной текст статьи

Подход к реализации решения задач с использованием абстрактных типов данных с учащимися старших классов представляет собой сложный и многогранный процесс, который требует систематичности, глубокого анализа и тщательной подготовки для учителя и ученика. Важными составляющими этого подхода являются: первоначальное понимание задачи и ее целей, обоснованный выбор методологии и инструментов, а также эффективное планирование и организация учебной деятельности.

Структуры данных являются основными блоками любой программы, и эффективное их использование позволяет улучшить производительность, экономить ресурсы и сделать программы более надежными. Более того, при решении задач с абстрактным типом данных развиваются навыки абстрактного мышление, оптимизации алгоритмов и анализа его сложности, что является важным аспектом, как в академическом обучении, так и в практическом программировании.

Задачи со связными структурами данных, относятся к задачам высокого уровня сложности и их решение направлено на формирование фундаментальных знаний в области информатики и программирования. В общем, понимание и умение решать задачи по структурам данных не только готовит школьника к сдаче ЕГЭ, но и имеет критическое значение для успешной карьеры в области информатики.

В рамках курсового исследования выделены наиболее сложные вопросы в рамках углубленного изучения программирования в старшей школе и разработан элективный курс по изучению связных структур данных таких как: стек, очередь, дек, связный список на языке программирования Python.

Ниже приведено примерное планирование элективного курса по изучению связных структур данных, при этом использовался также и объектно-ориентированный подход с использованием классов.

Тематическое планирование

- 1. Структуры данных. Функции и классы. (4 часа)

1.1 Функции в Python, определения и операции;
1.2 Использование функций для организации классов в Python;
1.3 Решение задач с использованием классов;
1.4 Самостоятельная работа на решение задач с использованием классов.

- 2. Структуры данных. Словари и файлы (8 часов):

2.1 Словари в Python, определения и операции;
2.3 Файлы в Python, определения и операции, текстовые файлы;
2.4 Решение задач с использованием словарей и файлов;
2.5 Самостоятельная работа на решение задач с использованием словарей и файлов.

- 3. Структуры данных. Организации стека в Python (4 часа):

3. 1 Списки в Python, определения и операции;
3.2 Использование списка для организации стека;
3.3 Использование класса для реализации стека;
3.3 Решение задач с использованием стеков;
3.4 Самостоятельная работа на решение задач с использованием стека.

- 4. Структуры данных. Использование модуля «collections» для организации очереди и дека (4 часа):

4.1 Очередь и дек в Python, определения;
4.2 Решение задач с использованием очереди, модуль «collections»;
4.3 Решение задач с использованием дек, модуль «collections»;
4.4 Самостоятельная работа на решение задач с использованием очереди и дека.

- 5. Структуры данных. Связные списки (3 часа):

5.1 Определение связных списков, реализация в Python;
5.2 Решение задач с использованием связных списков;
5.3 Самостоятельная работа на решение задач с использованием связных списков.

- 6. Решение задач повышенной трудности (4 часа)
- 7. Разработка индивидуального программного проекта (5 часов)
- 8. Защита индивидуального программного проекта (2 часа)

Приведем пример методики решения задачи на организацию стека, очереди и дека.

Задача 1. Организация стека с помощью типа данных список (Python).

```
def menu(): #Объявление функции menu(), которая выводит список действий,
# которые можно выполнить со стеком
    print(''Выберите действие:
    1. Добавить элемент в стек
    2. Убрать элемент из стека
    3. Просмотреть верхний элемент стека
```

```
    4. Проверить стек на пустоту
    5. Выход''  )
  stack = []  #Создание пустого списка для работы со стеком
 point = 0  #Создание переменной для обращения к пунктам меню
 while point != 5:# Создание цикла while для работы со стеком пока пункт
#меню не будет равен 5
    menu()  #Вызов функции menu
    point = int(input('Введите номер пункта: ')) #Считывание
номера выбранного действия из стандартного ввода и его сохранение в
переменную point
    if point == 1: #Если выбрано действие 1, то происходит добавление
нового элемента в стек
        number = int(input('Введите элемент: '))
        stack.append(number)  #Добавление элемента number в стек
    elif point == 2: #Если выбрано действие 2, то из стека происходит
удаление элемента
        if stack: #Проверка: не пуст ли стек
            stack.pop() #Удаление первого элемента стека
        else: #Если стек пуст,
            print(None) #то вывод None
    elif point == 3: #Если выбрано действие 3, то происходит вывод
первого элемент стека
    if stack: #Проверка: не пуст ли стек
      print(stack[len(stack) - 1]) #Вывод первого элемента стека
    else:  #Если стек пуст,
      print(None) #то вывод None
    elif point == 4: #Если выбрано действие 4, то происходит проверка:
пуст ли стек
        if stack: #Если стек не пуст,
            print(False)
        else: #Если стек пуст,
            print(True)
```

Задача 2. Организация стека на языке программирования Python с помощью класса(объектно-ориентированное программирование).

```
class Stack: #Объявление класса для представления стека
  def __init__(self): #Функция для инициализации объекта класса Stack
        self.stack = []  #Объявление списка self.stack для хранения
элементов стека
    def push(self, elem): #Функция для добавления элемента в стек
        self.stack.append(elem) #Добавление элемента в стек с
    def pop(self): #Функция для удаления элемента из стека
        if self.stack: #Проверка: не пуст ли стек
```

```
            return self.stack.pop() #Удаление первого элемента стека с помощью метода pop()
        else: #Если стек пуст:
            return None #возвращение None
    def top(self): #Функция для возвращения первого элемента стека
        if self.stack: #Проверка: не пусть ли стек
        return self.stack[len(self.stack) - 1] #Возвращение первого элемента стека
        else: #Если стек пуст:
            return None #возвращение None
    def empty(self): #Функция для проверки: пуст ли стек
        if self.stack: #Если стек не пуст:
            return False #возвращение False
        else: #Если стек пуст
            return True #Возвращение True
stack = Stack() #Создание объекта класса Stack
point = 0 #Создание переменной для обращения к пунктам меню
while point != 5: # Создание цикла while для работы со стеком
    print('''Выберите действие:
        1. Добавить элемент в стек
        2. Убрать элемент из стека
        3. Просмотреть верхний элемент стека
        4. Проверить стек на пустоту
        5. Выход'' )
    point = int(input('Введите номер пункта: ')) #Считывание номера выбранного действия из стандартного ввода и его сохранение в переменную point
    if point == 1: #Если выбрано действие 1, то происходит добавление нового элемента в стек:
    number = int(input('Введите элемент: ')) #1.Считывание элемента и его сохранение в переменную number
    stack.push(number)  #2.Использование функции push
    elif point == 2: #Если выбрано действие 2, то из стека происходит удаление элемента
    stack.pop() #Использование функции pop
    elif point == 3: #Если выбрано действие 3, то происходит вывод верхний элемент стека
    print(stack.top()) #Печать работы обращения к функции top
    elif point == 4: #Если выбрано действие 4, то происходит проверка: пуст ли стек
    print(stack.empty()) #Печать работы обращения к функции empty
```

Для организации очереди и дека можно воспользоваться классом deque из модуля collections. Класс deque представляет собой двунаправленную очередь.

Задача 3. Организация очереди на языке программирования Python.

```
From collections import deuce
#Подключение класса deuce из модуля collections
    def menu(): #Объявление функции menu(),
#Вывод списка действий, которые можно выполнить с очередью
        print(''Выберите действие:
        1. Добавить элемент в очередь
        2. Убрать элемент из очереди
        3. Просмотреть верхний элемент очереди
        4. Посмотреть последний элемент очереди
        5. Проверить очередь на пустоту
        6. Выход'' )
queue = deque() #Объявление переменной queue, которая будет хранить элементы очереди
point = 0 #Создание переменной для обращения к пунктам меню
while point != 6: # Создание цикла while для работы с очередью
    menu() #Вызов функции menu(), которая выводит список действий
point = int(input('Введите номер пункта: ')) #Считывание номера выбранного действия из стандартного ввода и его сохранение в переменную point
    if point == 1: #Если выбрано действие 1, то происходит добавление нового элемента в очередь
number = int(input('Введите элемент: ')) #Считывание элемента и его сохранение в переменную number
    queue.append(number) #Добавление элемента number в очередь
    elif point == 2: #Если выбрано действие 2, то из очереди происходит удаление элемента
    if queue: #Проверка: не пуста ли очередь
    queue.popleft() #Удаление верхнего элемента очереди, если очередь не пуста
    else: #Если очередь пуста:
        print(None) #вывод None
    elif point == 3: #Если выбрано действие 3, то происходит вывод первого элемента очереди
    if queue: #Проверка: не пуста ли очередь
    print(queue[0]) #Вывод первого элемента очереди, если очередь не пуста
    else: #Если очередь пуста:
    print(None) #вывод None
    elif point == 4: #Если выбрано действие 4, то происходит вывод последнего элемента очереди
```

```
if queue: #Проверка: не пуста ли очередь
print(queue[len(queue) - 1]) #Вывод последнего элемента очереди, если очередь не пуста
else: #Если очередь пуста:
print(None) #вывод None
elif point == 5: #Если выбрано действие 5, то происходит проверка: пуста ли очередь
if queue: #Проверка: не пуста ли очередь
print(False) #Вывод False, если очередь не пуста
else: #Если очередь пуста:
print(True) #вывод True
```

Задача 4. Организации дека (двунаправленной очереди) на языке программирования Python.

```
from collections import deque
#Подключение подмодуля deque модуля collections
def menu(): #Объявление функции menu()
    print(''Выберите действие:
    1. Добавить элемент в дек в конец
    2. Добавить элемент в дек в начало
    3. Убрать элемент из дека с начала
    4. Убрать элемент из дека с конца
    5. Просмотреть верхний элемент дека
    6. Посмотреть последний элемент дека
    7. Проверить дек на пустоту
    8. Выход'' )
    queue = deque() #Объявление переменной queue, которая будет хранить элементы дека
point = 0 #Создание переменной для обращения к пунктам меню
while point != 8: # Создание цикла while для работы с деком
menu() #Вызов функции menu(), которая выводит список действий, которые можно выполнить с очередью
point = int(input('Введите номер пункта: ')) #Считывание номера выбранного действия из стандартного ввода и его сохранение в переменную point
if point == 1: #Если выбрано действие 1, то происходит добавление нового элемента в конец дека
number = int(input('Введите элемент: ')) #Считывание элемента и его сохранение в переменную number
queue.append(number) #Добавление элемента number в конец дека
elif point == 2: #Если выбрано действие 2, то происходит добавление нового элемента в начало дека
number = int(input('Введите элемент: ')) #Считывание элемента и его сохранение в переменную number
```

```
            queue.appendleft(number) #Добавление элемента number в начало дека
        elif point == 3: #Если выбрано действие 3, то из начала дека происходит удаление элемента
            if queue: #Проверка: не пуст ли дек
            queue.popleft() #Удаление первого элемента дека, если дек не пуст
            else: #Если дек пуст:
            print(None) #вывод None
        elif point == 4: #Если выбрано действие 4, то из конца дека происходит удаление элемента
            if queue: #Проверка: не пуст ли дек
            queue.pop() #Удаление последнего элемента дека, если дек не пуст
            else: #Если дек пуст:
            print(None) #вывод None
        elif point == 5: #Если выбрано действие 5, то происходит вывод первого элемента дека
            if queue: #Проверка: не пуст ли дек
            print(queue[0]) #Вывод первого элемента очереди, если дек не пуст
            else: #Если дек пуст:
            print(None) #вывод None
        elif point == 6: #Если выбрано действие 6, то происходит вывод последнего элемента дека
            if queue: #Проверка: не пуст ли дек
            print(queue[len(queue) - 1]) #Вывод последнего элемента очереди, если дек не пуст
            else: #Если дек пуст:
            print(None) #вывод None
        elif point == 7: #Если выбрано действие 7, то происходит проверка: пуст ли дек
            if queue: #Проверка: не пуст ли дек
            print(False) #Вывод False, если дек не пуст
            else: #Если дек пуст:
            print(True) #вывод True
```

Заключение

Разработанный элективный курс, ориентирован на развитие у старших школьников алгоритмического стиля мышления и умения разрабатывать сложные программные решения на языке программирования Python. Данный курс, поможет ученикам овладеть знаниями в области профессионального

программирования, которые будут востребованы в дальнейшем обучении в вузе по IT - направлениям.

Фундаментальное обучение алгоритмизации в старших классах обеспечивает учащимся основу для решения широкого спектра задач и поощряет их креативность, критическое мышление и готовность к инновационным подходам в мире информационных технологий, а также даёт огромные возможности для успешной сдачи ЕГЭ.

Список источников

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. URL: https://fgosreestr.ru/educational_standard/federalnyi-gosudarstvennyi-obrazovatelnyi-standart-srednego-obshchego-obrazovaniia-1 (дата обращения: 30.10.2023).
2. Федеральная рабочая программа по информатике (углубленный уровень) URL: https://static.edsoo.ru/projects/fop/index.html#/sections/3002 (дата обращения: 30.10.2023).
3. Поляков К. Ю. Информатика: 10-й класс: базовый и углублённый уровни: учебник: в 2 частях / К. Ю. Поляков, Е. А. Еремин. — 5-е изд., стер. — Москва: Просвещение, 2023 — Часть 1 — 2023. — 350 с. — ISBN 978-5-09-103613-8. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/334925 (дата обращения: 04.11.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

References

1. Federal'nyy gosudarstvennyy obrazovatel'nyy standart srednego obshchego obrazovan URL: https://fgosreestr.ru/educational_standard/federalnyi-gosudarstvennyi-obrazovatelnyi-standart-srednego-obshchego-obrazovaniia-1 (accessed: 30.10.2023).
2. Federal Work Program on Informatics (Advanced Level) URL: https://static.edsoo.ru/projects/fop/index.html#/sections/3002 (accessed: 30.10.2023).
3. Polyakov K. Yu., Eremin E. A. Informatika: 10-y klass: bazovyy i dlublennyy urov: uchebnik: v 2 chasti [Informatics: 10th class: basic and deepened levels: textbook: in 2 parts]. - 5th ed., erased. — Moscow: Prosveshcheniye, 2023 - Part 1 - 2023. - 350 p. - ISBN 978-5-09-103613-8. - Text: electronic // Lan: electronic library system. - URL: https://e.lanbook.com/book/334925 (accessed: 04.11.2023). - Access mode: for authorizations. Users.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 625-634.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 625-634.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.827+004.838+004.85

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ПЯТЕН ДЛЯ ОБРАЗНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ В НЕЙРОМОРФНЫХ СИСТЕМАХ

Николай Анатольевич Симонов✉
Физико-технологический институт имени К.А. Валиева РАН, Москва, Россия
nsimonov@ftian.ru✉*, https://orcid.org/0000-0001-5523-2907*

Аннотация. *В работе исследуется возможность применения математической модели пятен для представления вторичных (ментальных) образов человека, а также семантической информации в форме образов для применения в области искусственного интеллекта. Разработан базовый математический аппарат для представления и обработки качественной информации об элементарных пространственных отношениях между пятнами и показана адекватность его применения для представления ментальных образов. В частности, аппарат пятен позволяет моделировать обучение и рассуждения с использованием немонотонной логики. Кроме того, предложенный аппарат может быть использован для решения обратных задач, в том числе с использованием метода обучения. Предлагается концепция создания нейронных сетей и нейроморфных систем нового типа, в которых семантическая информация представляется в форме образов, а обработка информации – в форме понятийно-образного мышления.*

Ключевые слова: *ментальные образы, семантическая информация, искусственный интеллект, нейронные сети.*

Благодарности: *Автор выражает глубокую благодарность В. Ф. Лукичеву, К. В. Руденко, А. А. Гостеву, Е. В. Волковой и Г. К. Толоконникову за поддержку и ценные советы, данные при обсуждении данной работы.*

Финансирование: *Работа выполнена в рамках Государственного задания ФТИАН им. К.А. Валиева РАН Минобрнауки РФ по теме № FFNN-2022-0019.*

Conference paper

APPLICATION OF THE SPOT MODEL FOR IMAGERY REPRESENTATION OF INFORMATION IN NEUROMORPHIC SYSTEMS

Nikolai A. Simonov✉
Valiev Institute of Physics and Technology RAS, Moscow, Russia
nsimonov@ftian.ru✉*, https://orcid.org/0000-0001-5523-2907*

© Симонов Н.А., 2023

Abstract. *The work explores the possibility of using a mathematical model of spots to represent mental imagery of a person, as well as semantic information in the form of imagery for use in the field of artificial intelligence. A basic mathematical apparatus has been developed for representing and processing qualitative information about elementary spatial relationships between spots and the adequacy of its use for the representation of mental imagery has been shown. In particular, the spot apparatus allows one to model learning and reasoning using non-monotonic logic. In addition, the proposed apparatus can be used to solve inverse problems, including using the learning method. The concept of creating neural networks and neuromorphic systems of a new type is proposed, in which semantic information is presented in the form of imagery, and information processing is in the form of conceptual and imaginative thinking.*

Keywords: *mental imagery, semantic information, artificial intelligence, neural networks*

Acknowledgments: *The author expresses deep appreciation to Lukichev V.F., Rudenko K.V., Volkova E.V., and Gostev A.A. for support and fruitful discussions of various aspects of this work.*

Funding: *The work was supported by the Program no. FFNN-2022-0019 of the Ministry of Science and Higher Education of Russia for Valiev Institute of Physics and Technology of RAS.*

1. Введение

Для решения проблемы гибкости и надежности искусственного интеллекта (ИИ) необходимо использовать методы представления информации и результатов мыслительной деятельности в форме, свойственной человеку. В принципе, использование численных методов моделирования обучения и распознавания образов не вполне адекватно природе человеческого мышления. Этот факт частично объясняет существующие проблемы применения глубоких нейронных сетей (ГНС) для решения практических задач, связанных с обучением и распознаванием образов. Как отмечали некоторые авторы, принципиальные недостатки ГНС связаны с тем, что они не понимают окружающий мир. Основная проблема ИИ – это ошибки ГНС, которые являются неизбежными спутниками ИИ, управляемого данными [1]. Эти недостатки не позволяют использовать нейронные сети в критических областях, связанных с безопасностью и здоровьем людей. По мнению автора, для решения этих проблем ГНИ необходима разработка и создание интеллектуальных систем, способных не только представлять информацию в образной форме, но и моделировать понятийно-образное мышление.

Хотя в настоящее время интенсивные исследования мозга ведутся на уровне нейрофизиологии, а некоторые авторы даже рассматривают мозг как объект органической гибридной наноэлектроники [2], в настоящей работе моделирование процессов деятельности мозга рассматривается на уровне психологии. А именно, мы исследуем возможность использования понятия вторичных (ментальных) образов [3] для представления семантической

информации в ИИ и математического моделирования образов, мышления, обучения.

Образы представляют собой ментальные объекты со смысловыми свойствами, играющими важнейшую роль не только в восприятии, но и в памяти, эмоциях, языке, желаниях и действиях-исполнениях [4]. Ментальные образы рассматриваются как строительные блоки мышления, которые имеют решающее значение для таких психических процессов, как категоризация, умозаключение, память, обучение и принятие решений [5].

Очевидно, для описания образного представления необходимо разработка специального математического аппарата. Наличие элементарных пространственных свойств у ментальных образов позволило автору настоящей работы предложить математическую модель пятен, которые соответствуют абстрактным нечетким пространственным объектам с элементарными пространственными отношениями между ними для представления образов с использованием некоторых геометрических аналогий [6]. Отметим, что пятна также можно представить как геометрические тела с заданной неполной информацией о них.

В работах [6]–[8] был предложен принципиально новый подход к созданию алгоритмов ИИ и нейронных сетей нового типа. Разработанные алгоритмы модели пятен позволяют создать модель нейронов и нейронных сетей нового типа, способных не только представлять информацию в образной форме, но и моделировать понятийно-образное мышление. Оказалось, что, помимо ИИ, предложенная модель может быть использована и в других областях. Например, она применима к решению обратных задач методом обучения, для шумоподавления изображений, а также – для построения изображений компьютерной томографии (КТ) с эффектом шумоподавления [8].

2. Применение модели пятен для представления семантической информации в образной форме

2.1. Представление семантики в форме ментальных образов

Как подчеркнуто в работе [9], теория информации, созданная Шенноном в 1948 году, является статистической теорией синтаксической информации. У классической же теории семантической информации есть два недостатка: она исходит из идеальной модели языка, которая является совершенно нереалистичной моделью, а количественная мера семантической информации не имеет отношения к сущности семантической информации [9]. Автор [10] также отмечает, что фундаментальная теория семантической информации еще не была создана. Однако независимо от количественного измерения или качественной оценки, представление семантической информации является общей необходимостью и неизбежной основой [9].

Отметим, что рассматриваемый ниже аппарат модели пятен является адекватным также для представления семантической информации в форме образной структуры. Действительно, ментальные образы [3]–[5] имеют прямое отношение к смыслу, содержащемуся в информации. Например, человек понимает смысл изучаемого предмета, если у него формируется образное

представление об этом предмете. И наоборот, если такого образа не возникает, он воспринимает предмет формально, у него не появляется интуиции в этой области.

С помощью модели пятен можно создать представления образов, изоморфные структурам образов в образной сфере человека [7]. С другой стороны, понятие образа можно обобщить, выведя его за пределы психических процессов человека. Тогда мы можем представлять любую семантическую информацию в образной форме и рассматривать абстрактное образное пространство в качестве модели семантического информационного пространства.

2.2. Применение модели пятен для представления ментальных образов

2.2.1. Интуитивное определение пятен

Пятна представляют собой математические объекты с элементарными пространственными свойствами, для которых определены их внутренняя область, внешняя область (окружение) и логическая связь между этими областями для любых двух пятен [8]. Обозначим связь между пятнами a и b как ab, которая является логической величиной, и запишем две аксиомы для связи

$$\forall a, (aa = 1), \forall a \forall b \; (ab = ba) \qquad (1)$$

Тогда, если обозначить окружение пятна a как $\tilde{a}$, то для него можно ввести еще две аксиомы:

$$a\tilde{a} = 0, \qquad \tilde{\tilde{a}} = a \qquad (2)$$

В общем случае, «форма» пятен и свойства их окружения, такие как размерность или пространственная кривизна, не предопределены, но могут быть выявлены на основе качественной информации об их элементарных пространственных отношениях (ЭПО) с другими пятнами, таких как раздельность, пересечение, включение, неразличимость и т. д.

Мы вводим понятие базиса пятна, представляющего собой ансамбль (структуру) пятен, относительно которого с помощью ЭПО определяется информация о рассматриваемых пятнах. Совокупность таких ЭПО мы называем представлением (отображением) пятна на базисе пятен. С другой стороны, с помощью ЭПО можно кодировать проекцию пятна на базис или его перемещение. Заметим, что понятие базиса имеет аналогию с понятием системы координат, а отображение пятна на базисе является определенным обобщением понятия измерения.

В общем случае, пятна базиса могут пересекаться друг с другом. Но в частном случае, когда все базисные пятна раздельны, мы называем такой базис ортогональным. Если же все пятна ортогонального базиса не пересекаются с любым другим пятном, а могут находиться с ним только в отношениях раздельности или включения, то такой базис мы называем атомарным. Заметим, что пятна атомарного базиса аналогичны точкам, пикселям или вокселям.

Важным фактом является принципиальная возможность точного восстановления формы исследуемой четкой фигуры, используя ее ЭПО с другими четкими фигурами, что доказано в работе [8]. Конечно, для этого потребуется бесконечное множество таких данных, а при конечном их числе

изображение четкой фигуры будет соответствовать пятну. Поэтому, в модели пятен четкие геометрические фигуры рассматриваются в виде предельного случая пятен.

Несмотря на оригинальность рассматриваемой модели, она оказалась идеологически близкой ряду других математических теорий, предложенных для представления и обработки качественной информации [11]. Например, существует широкая область исследований качественных пространственных представлений и рассуждений – мереотопология [12], идея которой была заложена еще A. N. Whitehead в 1929 г. [13]. Модели пятен также близки ряд идей таких теорий как нечеткие множества L. Zadeh [14], грубые множества Z. Pawlak [15], Granular Computing [16] и мягкие множества Д.А. Молодцова [17]. В частности, Молодцов писал, что мягкое множество рассматриваются как объект, который задается только своими приближениями, а самого точного описания объекта, вообще говоря, нет. Заметим, что это аналогично заданию пятна с помощью его отображений на базисы пятен.

2.2.2. Математический аппарат модели пятен

Вместо действительных чисел, в модели пятен вводятся (логические) L4 числа, с помощью которых кодируются ЭПО между пятнами. L4 число α определяются как 2×2 таблица логических величин [6]–[8]:

$$\alpha = \langle a|b\rangle \equiv \begin{bmatrix} ab & a\tilde{b} \\ \tilde{a}b & \tilde{a}\tilde{b} \end{bmatrix} \tag{3}$$

В таблице 1 показаны соответствия между некоторыми ЭПО и L4 числами.

Таблица 1. Соответствие ЭПО и L4 чисел.

Отношения:	L4 число $\langle a\|b\rangle$
Пересечение, $a >< b$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Раздельность, $a <> b$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Включение, $a > b$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Часть, $a < b$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Неразличимость, $a \approx b$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Мы также вводим L4 векторы и L4 матрицы [6]–[8], которые в качестве своих элементов включают L4 числа, вместо действительных чисел. L4 вектор $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ кодирует отображение пятна a на базисе пятен $X = \{x_i\}$ и определяется как

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = [\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n], \quad \text{где } \alpha_i = \langle a|x_i\rangle \tag{4}$$

Аналогичным образом определяется L4 матрица $\mathbf{A} = \langle Y|X\rangle$ как таблица L4 чисел

$$\mathbf{A} = \langle Y|X\rangle \equiv \begin{bmatrix} \langle y_1|x_1\rangle & \cdots & \langle y_1|x_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle y_m|x_1\rangle & \cdots & \langle y_m|x_n\rangle \end{bmatrix} \tag{5}$$

которая кодирует отображение базиса пятен $X = \{x_i\}$ на базис $Y = \{y_j\}$. В результате произведения L4 вектора $\boldsymbol{a}_X$ и L4 матрицы $\langle Y|X\rangle$ получается новый L4 вектор $\boldsymbol{a}_Y$, который кодирует отображение того же пятна a на базисе пятен $Y = \{y_j\}$:

$$\boldsymbol{a}_Y = \langle Y|X\rangle\, \boldsymbol{a}_X \tag{6}$$

Следовательно, L4 матрицы содержат информацию, позволяющую преобразовать отображение пятен из одного базиса в другой. Правила такого матрично-векторного умножения определены в [8] равенствами (11) – (17) как для случая атомарного базиса, так и для общего случая базиса.

i. Представление образов с помощью пятен

Пятна позволяют представлять ментальные образы и моделировать мышление в форме, близкой к человеческому интеллекту. При этом семантическая информация представляется в образной форме, а рассуждения производятся с помощью немонотонной логики, когда выводы делаются на основе имеющихся знаний, а получение новых знаний может изменить выводы.

Поскольку семантика образа может быть задана с помощью его отношений с другими образами, ее можно определить местом положения этого образа в образной сфере [5]. Очевидно, для представления семантической информации в форме образной структуры мы должны обеспечить, чтобы ЭПО между этими пятнами были идентичными отношениям между образами в этой структуре образов. Назовем такое представление – пространственным представлением образов [7].

Следовательно, отображение пятна на базисе пятен моделирует семантику соответствующего образа. Очевидно, что модель пятен может обеспечить многомерное пространственное представление ментальных образов. Кроме того, предложенный подход может быть обобщен для представления семантических образов и семантического пространства в области ИИ.

b. Решение обратных задач

Из определения L4 матрицы $\langle Y|X\rangle$ следует, что ее обратная матрица $\langle X|Y\rangle$ равна

$$\langle Y|X\rangle^{-1} \equiv \langle X|Y\rangle = \left[\langle x_i|y_j\rangle\right] \tag{7}$$

а значит, она всегда существует и равна транспонированной матрице $\langle Y|X\rangle$ с дополнительно транспонированными ее элементами (L4 числами). Поэтому, как следует из равенств (11) – (17) работы [8], формально решение уравнения

$$\boldsymbol{a}_Y = \langle Y|X\rangle\, \boldsymbol{a}_X$$

можно представить в виде:

$$\widehat{\boldsymbol{a}}_X = \langle X|Y\rangle\, \boldsymbol{a}_Y = \langle X|U\rangle \cdot \langle U|W\rangle \cdot \langle W|V\rangle \cdot \langle V|Y\rangle\, \boldsymbol{a}_Y \tag{8}$$

где базис U состоит из пересечений пятен в X, базис V – пересечений пятен в Y и W – пересечений пятен в U and V базисах. Как отмечено в [8], в общем случае обратное решение (8) является приближенным, т.е. $\boldsymbol{a}_X \cong \widehat{\boldsymbol{a}}_X = \langle Y|X\rangle^{-1}\, \boldsymbol{a}_Y$

c. Моделирование обучения и рассуждений с помощью пятен

Процессу обучения в ИИ соответствует задача нахождения неизвестной L4 матрицы **A** на основании совокупности обучающих примеров в виде L4 векторов $\{\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i\}$, что определяет равенство

$$\boldsymbol{y_i} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x_i} \tag{9}$$

Для задачи распознавания (классификации) изображений, $\boldsymbol{x_i}$ – это L4 векторы, кодирующие изображения, представленные в пикселях, а $\boldsymbol{y_i}$ – соответствуют L4 векторам, представленных на базисе рассматриваемых классов. Рассмотрим L4 матрицы $\mathbf{X} = [\boldsymbol{x_i}]$ и $\mathbf{Y} = [\boldsymbol{y_i}]$, составленные из векторов обучающих данных. Тогда мы можем определить искомую L4 матрицу **A** из следующего выражения:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}^{-1} = \langle B_Y|Y\rangle \cdot \langle Y|X\rangle \cdot \langle X|B_X\rangle \tag{10}$$

Здесь обратная матрица $\mathbf{X}^{-1}$равна танспонированной матрице **X** [8], а B_X и B_Y – ортогональные базисы, на которых представлены L4 векторы $\boldsymbol{x_i}$ and $\boldsymbol{y_i}$, соответственно. Заметим, что равенство (10) дает схематичную интерпретацию процесса обучения в области ИИ [18].

С помощью L4 вектора можно также кодировать семантику или суждение об образе, а умножением L4 матрицы на этот вектор – моделировать рассуждение. В результате умножения получается новый L4 вектор, который можно интерпретировать как новый образ для полученного вывода. Следовательно, L4 матрицы должны моделировать знания, которые используются в процессе рассуждений. Таким образом, произведение L4 матрицы **A** на L4 вектор $\boldsymbol{a}$ моделирует следующее рассуждение [7], [8]:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a} \qquad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} \rightarrow_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{b} \tag{11}$$

где $\boldsymbol{a}$ - предпосылка, L4 матрица **A** – знание, а $\boldsymbol{b}$ – вывод.

Это соответствует рассуждениям с немонотонной логикой, когда:

– выводы делаются на базе существующих знаний,

– получение новых знаний может изменить вывод.

d. Концепция нейро-образных сетей

Как отмечалось выше, используя модель пятен, можно расширить понятие семантических образов, выйдя за пределы психических процессов человека. А именно, мы можем представлять семантическую информацию в образной форме для нейронных сетей и нейроморфных систем. В статье [6] был предложен новый тип нейронной сети на основе аппарата пятен. В такой сети L4 матрицы играют роль слоев сети, тогда как входные и выходные сигналы представлены L4 векторами. В такой сети каждый слой выполняет операцию умножения L4 матрицы на L4 вектор (11), что можно рассматривать как акт понятийно-образного рассуждения.

С учетом проведенного в данной работе анализа, такую сеть можно рассматривать как нейро-образную сеть. Действительно, входной L4 вектор здесь представляет семантическую информацию для образа, а умножение на L4 матрицу каждого слоя моделирует акт рассуждения, семантический вывод которого представлен в форме L4 вектора. Следовательно, нейро-образные сети следует отнести к области объяснимого ИИ.

Реализация предлагаемой нейро-образной сети может осуществляться как в виде компьютерной программы, так и путем разработки специальных нейроморфных устройств. Последний вариант может быть реализован в виде логической схемы с использованием существующей КМОП технологии или схемы, построенной с применением новых нейроморфных компонент, таких как мемристоры или FeFET, перспективных для технологии СБИС.

Эти компоненты могут играть роль синапсов и контролировать подключение/отключение соответствующих искусственных нейронов, построенных на КМОП технологии. При этом, с помощью этих устройств можно формировать и настраивать структуру нейронной сети. Их преимущество состоит в том, что мемристоры и FeFET обладают энергонезависимой памятью и могут сохранять настройки нейронной сети.

3. Заключение

Рассмотрена возможность применения новой математической модели пятен для моделирования семантической информации в форме ментальных образов. Предложена новая архитектура нейро-образных сетей, которых следует отнести к области объяснимого ИИ. Несомненно, дальнейшая разработка предложенного принципа создания нейронных сетей и нейроморфных устройств будет являться также движением в направлении создания сильного ИИ.

Поскольку предлагаемый аппарат пятен позволяет представлять семантическую информацию в образной форме, можно сформулировать новую парадигму создания нейроморфных систем нового типа, способных не только представлять информацию в образной форме, но и моделировать понятийно-образное мышление.

Список источников

1. Горбань А. Н. Проблема надежности многомерного ИИ в многомерном мире. Презентация на Заседании Совета ОНИТ РАН, 17 февраля 2022 г. https://cloud.niime.ru/s/fwfX8eYHg6EDz6q

2. Abramov I. I. Artificial Intelligence Will Never Completely Replace Humans // Russian Microelectronics. 2022. Vol. 51, no. 6. P. 376–386. https://doi.org/10.1134/S1063739722700147

3. Nanay B. Mental Imagery // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / eds. Zalta E. N. 2021. URL: https://plato.stanford.edu/archives/win2021/entries/mental-imagery/.

4. Pitt D. Mental Representation // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / eds. Zalta E. N. 2020. URL: https://plato.stanford.edu/entries/mental-representation/

5. Гостев А. А. Психология вторичного образа. М: Литрес, 2022.

6. Симонов Н. А. Концепция пятен для задач искусственного интеллекта и алгоритмов нейроморфных систем // Микроэлектроника. 2020. Т. 49, № 6. С. 459–473. https://doi.org/10.31857/S0544126920050087

7. Simonov N. A., Rusalova M. N. Mental imagery representation by model of spots in psychology // Natural Systems of Mind. 2023. Vol. 3, no. 1. P. 4–23. https://doi.org/10.38098/nsom_2023_03_01_01

8. Simonov N. A. Application of the model of spots for inverse problems // Sensors. 2023. Vol. 23, no. 3. 1247. https://doi.org/10.3390/s23031247

9. Zhong Y. A theory of semantic information // China communications. 2017. Vol. 14, no. 1. P. 1–17. https://doi.org/10.1109/CC.2017.7839754

10. Ma S., Wu Y., Qi H., Li H., Shi G., Liang Y., and Al-Dhahir N. A Theory for Semantic Communications. 2023. arXiv:2303.05181.

11. Симонов Н.А. Сравнение модели пятен с другими моделями качественных данных и размытых объектов // Сборник научных трудов X-й Международной научно-технической конференции ИММВ-2021. Смоленск: Универсум, 2021. Т1. С. 337–347.

12. Cohn A. G., Bennett B., Gooday J. M., and Gotts N. RCC: a calculus for region based qualitative spatial reasoning // GeoInformatica. 1997. Vol. 1, no. 3. P. 275–316.

13. Whitehead A. N. Process and reality: An essay in cosmology. Cambridge: Cambridge University Press, 1929.

14. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Inf. Control. 1965. Vol. 8, no 3. P. 338–353. http://dx.doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X.

15. Pawlak Z. Rough sets // International Journal of Computer and Information Sciences. 1982. no. 11. P. 341–356. http://dx.doi.org/10.1007/BF01001956.

16. Yao J. T., Vasilakos A. V., and Pedrycz W. Granular Computing: Perspectives and Challenges // IEEE Trans. on Cybernetics. 2013. Vol. 43, no. 6. P. 1977–1989. https://doi.org/10.1109/TSMCC.2012.2236648.

17. Молодцов Д. А. Теория мягких множеств. М.: УРСС, 2004.

18. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. Cambridge: MIT Press, 2016.

References

1. Gorban A. N. The problem of reliability of multidimensional AI in a multidimensional world. Presentation at the Meeting of the Council of ONIT RAS, February 17, 2022. (In Russ). https://cloud.niime.ru/s/fwfX8eYHg6EDz6q

2. Abramov I. I. Artificial Intelligence Will Never Completely Replace Humans. Russian Microelectronics. 2022;51(6):376-386. https://doi.org/10.1134/S1063739722700147.

3. Nanay B. Mental Imagery. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Zalta E.N., eds. 2021. URL: https://plato.stanford.edu/archives/win2021/entries/mental-imagery/.

4. Pitt D. Mental Representation. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Zalta E. N., eds. 2020. URL: https://plato.stanford.edu/entries/mental-representation/

5. Gostev A. A. Psychology of the secondary image. M: Litres; 2022.

6. Simonov N. A. Spots concept for problems of artificial intelligence and algorithms of neuromorphic systems. Russian Microelectronics. 2020; 49:431-444. https://doi.org/10.31857/S0544126920050087.

7. Simonov N. A., Rusalova M. N. Mental imagery representation by model of spots in psychology. Natural Systems of Mind. 2023;3(1):4-23. https://doi.org/10.38098/nsom_2023_03_01_01.

8. Simonov N. A. Application of the model of spots for inverse problems. Sensors. 2023;23(3):1247. https://doi.org/10.3390/s23031247.

9. Zhong Y. A theory of semantic information. China communications. 2017;14(1):1-17. https://doi.org/10.1109/CC.2017.7839754.

10. Ma S., Wu Y., Qi H., Li H., Shi G., Liang Y., and Al-Dhahir N. A Theory for Semantic Communications. 2023. arXiv:2303.05181.

11. Simonov N.A. Comparison of the spot model with other models of high-quality data and blurred objects. Proceeding of the 10th International Scientific and Technical Conference IMSCAI-2021. Smolensk: Universum; 2021; 1:337-347. (In Russ).

12. Cohn A. G., Bennett B., Gooday J. M., and Gotts N. RCC: a calculus for region based qualitative spatial reasoning. GeoInformatica. 1997;1(3):275-316.

13. Whitehead A. N. Process and reality: An essay in cosmology. Cambridge: Cambridge University Press; 1929.

14. Zadeh L.A. Fuzzy sets. Inf. Control. 1965;8(3):338-353. http://dx.doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X.

15. Pawlak Z. Rough sets. International Journal of Computer and Information Sciences. 1982;(11):341-356. http://dx.doi.org/10.1007/BF01001956

16. Yao J. T., Vasilakos A. V., and Pedrycz W. Granular Computing: Perspectives and Challenges. IEEE Trans. on Cybernetics. 2013;43(6):1977-1989. https://doi.org/10.1109/TSMCC.2012.2236648.

17. Molodtsov D. A. The theory of soft sets. M: URSS Publ.; 2004. (In Russ).

18. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. Cambridge: MIT Press; 2016.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 635-639.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 635-639.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.551

МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОПРОНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Галина Александровна Симоновская[1]✉, Елена Викторовна Игонина[2]
[1,2]Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Елец, Россия
[1]simonovskaj_g@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0001-8328-1589
[2]elenaigonina7@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7369-6219

Аннотация. *В статье рассматриваются вопросы обучения школьников решению геометрических задач с использованием опорных задач. При подготовке к единому государственному экзамену по математике особое место уделяется геометрической составляющей. Для более эффективного построения процесса обучения решению сложных планиметрических и стереометрических заданий возможно использование опорных задач. Наличие у обучающихся опыта работы с такими задачами позволяет более успешно им справляться со сложными заданиями геометрического характера.*

Ключевые слова: *обучение математике, опорная задача, правильный треугольник.*

Conference paper

THE METHODOLOGY OF USING GEOMETRIC REFERENCE PROBLEMS IN PREPARATION FOR THE UNIFIED STATE EXAM IN MATHEMATICS

Galina Al. Simonovskaya[1]✉, Elena V. Igonina[2]
[1, 2]Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
[1]simonovskaj_g@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0001-8328-1589
[2]elenaigonina7@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7369-6219

Abstract. *The article deals with the issues of teaching schoolchildren to solve geometric problems using reference problems. When preparing for the unified state exam in mathematics, a special place is given to the geometric component. For a more effective construction of the learning process for solving complex planimetric and stereometric tasks, it is possible to use reference tasks. The students' experience of working with such tasks allows them to cope more successfully with complex tasks of a geometric nature.*

© Симоновская Г.А, Игонина Е.В., 2023

Keywords: *teaching mathematics, reference problem, right triangle.*

1. Введение

Контрольно-измерительные материалы ЕГЭ по математике постоянно изменяются: вносятся новые задания, расширяется содержание математических заданий, пересматривается порядок расположения геометрических и алгебраических задач. Так в 2023 году школьникам предложили на едином экзамене первые две задачи с геометрических содержанием, а в 2024 году появится новое задание, в котором проверяется умение работать с векторами. Помимо этого во второй части контрольно-измерительных материалов представлены две геометрических задачи повышенного уровня. И как показывает опыт, школьники и не приступают к их выполнению. Исправить такую ситуацию учителя и методисты пытаются по сегодняшний день. На наш взгляд, одним из путей преодоления страха перед геометрической задачей у школьника, это выделение набора простейших задач (опорных), которые часто используются при решении сложных серьезных как планиметрических, так и стереометрических задач.

2. Основной текст статьи

Трудности при решении геометрических задач на Едином государственном экзамене (ЕГЭ) по математике возникают по многим причинам. Геометрические задачи часто включают в себя сложные понятия, такие как теоремы, постулаты и геометрические свойства. Понимание и правильное применение этих концепций может оказаться сложной задачей для учащихся. С другой стороны геометрические задачи требуют способности точно визуализировать формы и их взаимоотношения. У некоторых учащихся могут возникнуть проблемы с пространственным мышлением, что затрудняет визуализацию геометрических фигур и манипулирование ими.

Одной из главных причин является проведение многоэтапного решения задачи. Для решения часто требуется несколько шагов. Каждый шаг может включать применение различных геометрических принципов, что делает процесс решения задач более сложным и трудоемким.

Чтобы преодолеть эту трудность, учащиеся рассматривают простые задачи, которые впоследствии могут быть использованы. Таких задач не должно быть очень много, но спектр их действия должен быть широким и эффективным.

Под опорными задачами понимают задачи, которые часто используются при решении других более сложных. Такого рода задачи – это отдельные этапы (кирпичики) решения задания серьезного, часто объемного, из других разделов геометрии. Имея такой универсальный набор задач, школьник при анализе предложенного ему задания найдет сходные условия, похожие структуры и начнет процесс решения. Толчок движения в правильном направлении даст именно рассмотренная ранее опорная задача.

При решении простых и сложных планиметрических задач, школьник часто обращается к треугольнику. Треугольники часто используются при решении задач, поскольку они обладают уникальными свойствами и связями,

которые делают их универсальными и применимыми в различных ситуациях. Свойства треугольников, такие как углы, длины сторон и теорема Пифагора, позволяют применять тригонометрию и геометрию для решения задач, связанных с расстояниями, высотами, углами и многим другим. Треугольники также служат строительными блоками для более сложных фигур, облегчая решение задач в области стереометрии.

Школьный курс геометрии охватывает различные аспекты треугольников, включая их свойства, классификацию и взаимосвязь между их углами и сторонами. Учащиеся узнают о типах треугольников, таких как равносторонний, равнобедренный и разносторонний, а также о соответствующих им свойствах. Они изучают угловые отношения внутри треугольников, включая сумму внутренних углов, отношения между углами и сторонами, а также концепции конгруэнтности и подобия. Кроме того, школьников знакомят с различными теоремами, такими как теорема о неравенстве треугольника, теоремами синусов и косинусов. Все эти знания используются и для решения задач, связанных с фигурами, где треугольник выступает как внутренний элемент.

Остановимся на рассмотрении свойств правильного треугольника.

Правильный треугольник, также известный как равносторонний треугольник, обладает следующими свойствами:

1. Все три стороны имеют одинаковую длину.
2. Все три угла равны и составляют 60 градусов.
3. Сумма углов всегда равна 180 градусов.
4. Он имеет три линии симметрии, делящие его на три равные части.
5. Высота или расстояние от любой вершины до противоположной стороны также является медианой и биссектрисой треугольника.
6. Центр описанной окружности и центр вписанной окружности совпадают.
7. Он имеет максимальную площадь при данном периметре среди всех треугольников.
8. Он имеет минимальный периметр для данной площади среди всех треугольников.

Несомненно, все сведения о равностороннем треугольнике – это опорные задачи.

Особое внимание школьников нужно обратить на численные характеристики элементов правильного треугольника со стороной равной $\boldsymbol{a}$ (рисунок 1).

Заучивание значений длины высоты и площади для правильного треугольника является необходимостью при подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня. При правильном осмыслении результатов вычислений связанных с равносторонним треугольником, позволяет быстро (практически устно) решать задачи первой части.

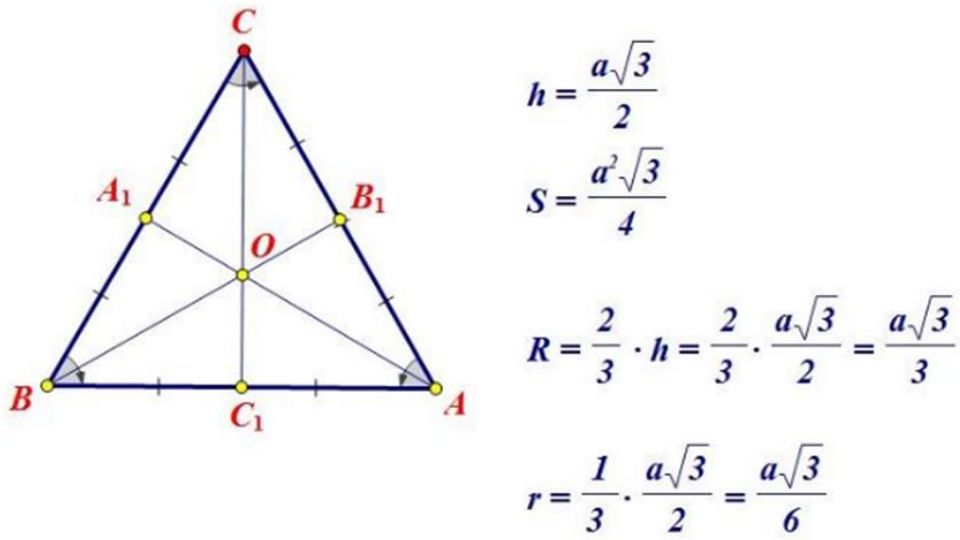


Рисунок 1. Основные формулы для правильного треугольника.

Так, например, в следующей задаче ответ учащийся дает устно.

Задача 1. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника (рисунок 2).

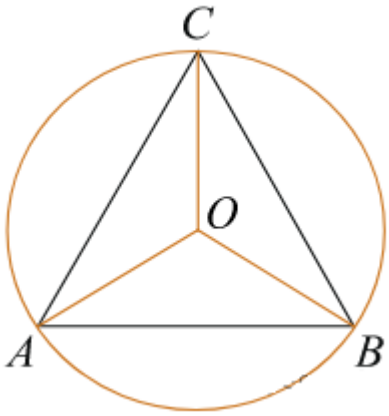


Рисунок 2. Чертеж к задаче 1

При решении следующей задачи необходимо вспомнить, что правильный шестиугольник состоит из шести равносторонних треугольников. И решение становится очевидным. Конечно, необходимы и другие познания из стереометрии, но трудность в решении заключалось именно в нахождении взаимосвязи в площадях частей основания.

Задача 2. Найдите объём правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF*, если объём треугольной пирамиды *SABC* равен 33 (рисунок 3).

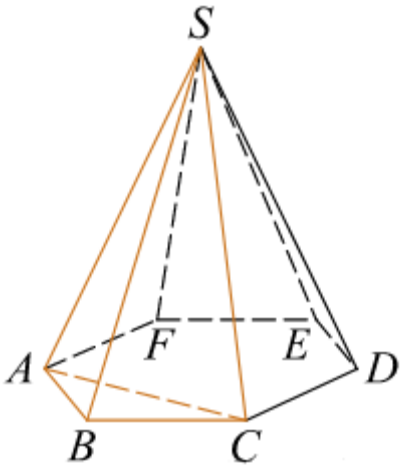


Рисунок 3. Чертеж к задаче 2.

3. Заключение

Геометрические задачи относятся к математическим задачам, которые связаны со свойствами, отношениями и измерениями геометрических фигур и тел. Они могут варьироваться от базовых понятий, таких как нахождение площади или периметра фигуры, до более сложных задач, связанных с углами, преобразованиями или трехмерными фигурами. При использовании опорных геометрических задач школьник быстрее ориентируется при решении сложных, многоэтапных заданиях геометрического содержания.

Список источников

1. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 20-е изд. – Москва: Просвещение, 2010.

2. Куланин Е.Д., Федин С.Н. Избранные задачи по геометрии. Треугольник. - Москва: Илекса, 2016.

References

1. Geometry. 7th-9th graders. common. institution / L.S Atanasyan, V.F. Butuzov, S.B. Kadomtsev and others. - 20th Ed. -Moscow: pro-holy, 2010.

2. It's Kulanin. D., Fedin S.N. Selected table of geometries. Cocked hat. - Moscow: Ilexa, 2016.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 640-642.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 640-642.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.547

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ $C[0,\pi]$ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ $[0,\pi]$

Олег Дмитриевич Соломатин[1]✉, Елизавета Игоревна Лапаткина[2]
[1,2]Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, Орёл, Россия
[1]solomatin_od@bk.ru✉

Аннотация. *Решается уравнение* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ a>0$ *в* пространстве $C[0,\pi]$ *– функций, непрерывных на отрезке* $[0,\pi]$. *Установлен характер решения.*

Ключевые слова: *Дифференциально-операторное уравнение, пространство функций, непрерывных на отрезке, собственные функции оператора.*

Conference paper

SOLUTION OF A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR EQUATION IN THE SPACE $C[0,\pi]$ OF FUNCTIONS CONTINUOUS ON A SEGMENT $[0,\pi]$

Oleg D. Solomatin[1]✉, Elizaveta I. Lapatkina[2]
[1,2]Orel State University, Orel, Russia
[1]solomatin_od@bk.ru✉

Abstract. *The equation* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ a>0$ *is solved in the space* $C[0,\pi]$ *of functions continuous on a segment* $[0,\pi]$. *The nature of the solution is established.*

Keywords: *Differential operator equation, space of functions continuous on a segment, operator's eigenfunctions.*

© Соломатин О.Д., Лапаткина Е.И., 2023

1. Введение

В данной работе решим уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ a > 0$ в пространстве $C[0,\pi]$ – функций, непрерывных на отрезке $[0,\pi]$. Установим характер решения. Рассматриваемое уравнение относится к типу дифференциально-операторных уравнений второго порядка.

2. Основной текст статьи

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ a > 0, \quad u(0,x) = f_1(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f_2(x),$$

$$f_1(x),\ f_2(x) \in C[0,\pi], \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A[u(t,x)], \quad A = -a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Оператор имеет собственные функции $\{\sin nx\}$.

$$A[\sin nx] = \lambda_n \sin nx;$$

$$-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}[\sin nx] = \left(-a(n\cos nx)\right)'_x = an^2 \sin nx = an^2(\sin nx),$$

то есть $\lambda_n = an^2,\ n = 0,1,\ldots$.

Пусть

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)\sin nx dx,$$

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin nx, \quad d_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_2(x)\sin nx dx.$$

Решение запишется в виде:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\left\{C_1 e^{\sqrt{a}\cdot nt} + C_2 e^{-\sqrt{a}\cdot nt}\right\}, \quad C_1 + C_2 = 1.$$

Далее, находим:

$$u(0,x) = f_1(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\left\{C_1\sqrt{a}\cdot n + C_2\left(-\sqrt{a}\cdot n\right)\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\sqrt{a}\cdot n(C_1 - C_2) = f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin nx, \quad b_n\sqrt{a}\cdot n(C_1 - C_2) = d_n.$$

$$C_1 - C_2 = \frac{d_n}{b_n\sqrt{a}\cdot n}, \quad C_1 + C_2 = 1, \quad 2C_1 = 1 + \frac{d_n}{b_n\sqrt{a}\cdot n} = \frac{b_n\sqrt{a}\cdot n + d_n}{b_n\sqrt{a}\cdot n},$$

$$C_{1n} = \frac{b_n\sqrt{a}\cdot n + d_n}{2b_n\sqrt{a}\cdot n},\ 2C_2 = 1 - \frac{d_n}{b_n\sqrt{a}\cdot n} = \frac{b_n\sqrt{a}\cdot n - d_n}{b_n\sqrt{a}\cdot n},\ C_{2n} = \frac{b_n\sqrt{a}\cdot n - d_n}{2b_n\sqrt{a}\cdot n}.$$

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\sqrt{a}\cdot n+d_n}{2b_n\sqrt{a}\cdot n}b_n\sin nx\cdot e^{\sqrt{a}\cdot nt}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\sqrt{a}\cdot n-d_n}{2b_n\sqrt{a}\cdot n}b_n\sin nx\cdot e^{-\sqrt{a}\cdot nt}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n+\frac{d_n}{\sqrt{a}\cdot n}\right)\sin nx\cdot e^{\sqrt{a}\cdot nt}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n-\frac{d_n}{\sqrt{a}\cdot n}\right)\sin nx\cdot e^{-\sqrt{a}\cdot nt}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\cdot\left(e^{\sqrt{a}\cdot nt}+e^{-\sqrt{a}\cdot nt}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\sqrt{a}\cdot n}\sin nx\cdot\left(e^{\sqrt{a}\cdot nt}-e^{-\sqrt{a}\cdot nt}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n ch\left(\sqrt{a}\cdot nt\right)+\frac{d_n}{\sqrt{a}\cdot n}sh\left(\sqrt{a}\cdot nt\right)\right]\sin nx,\quad x\in[0,\pi].$$

Далее рассмотрим вопрос сходимости. Пусть

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{1}{|b_n|}}{n}=a_1>0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{1}{|d_n|}}{n}=a_2>0.$$

Полученные ряды сходятся соответственно в полосах $|\mathrm{Re}\,t|<a_1$ и $|\mathrm{Re}\,t|<a_2$. Тогда $|\mathrm{Re}\,t|<a=\min(a_1,a_2)$.

Заметим, что оператор A имеет и другие наборы собственных функций. Например, функции

$$\{\cos nx\}:\ A[\cos nx]=\lambda_n\cos nx,\quad \lambda_n=an^2,\ n\geq 0.$$

Их также можно использовать для решения задачи.

3. Заключение

В работе решено уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ a>0$ в пространстве $C[0,\pi]$ – функций, непрерывных на отрезке $[0,\pi]$. Установлен характер решения.

Список источников

1. Громов В.П. Ряды экспонент с переменными коэффициентами и их применение для решения дифференциально-операторных уравнений. Ученые записки лаборатории теории функций и функционального анализа ОГУ. Выпуск 5. – Орёл: Издательство ОГУ, 2005, с. 4-46.

References

1. Gromov V.P. Series of exponentials with variable coefficients and their application for solving differential operator equations. Scientific notes of the Laboratory of the theory of Functions and functional analysis of OSU. Issue 5. – Orel: OSU Publishing House, 2005, pp. 4-46.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 643-653.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 643-653.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 373.3

ФОРМИРОВАНИЕ ГРАМОТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ РЕЧИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ

Александр Павлович Тонких✉
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, Брянск, Россия
a_tonkih@mail.ru✉*, https://orcid.org/0000-0002-2140-8334*

Аннотация. *В статье представлены направления работы по формированию грамотной математической речи будущих учителей начальных классов на занятиях по теории и методике обучения математике в начальной школе. Рассмотрены формы активизации учебного процесса и применение интенсивных методов преподавания, направленные на развитие речи студентов в связи с падением уровня математической грамотности и ослаблением внимания к формированию и развитию культуры речи.*

Ключевые слова: *математика, математический язык, математическая речь, математическая грамотность, математическое образование, математическая подготовка, учитель начальных классов.*

Conference paper

FORMATION OF COMPETENT MATHEMATICAL SPEECH OF FUTURE PRIMARY SCHOOL TEACHERS

Aleksandr P. Tonkikh✉
Bryansk State University, Bryansk, Russia
a_tonkih@mail.ru✉*, https://orcid.org/0000-0002-2140-8334*

Abstract. *The article presents the directions of work on the formation of competent mathematical speech of future primary school teachers in classes on the theory and methodology of teaching mathematics in elementary school. The forms of activation of the educational process and the use of intensive teaching methods aimed at the development of students' speech in connection with the decline in the level of mathematical literacy and the weakening of attention to the formation and development of speech culture are considered.*

© Тонких А.П., 2023

Keywords: *mathematics, mathematical language, mathematical speech, mathematical literacy, mathematical education, mathematical training, primary school teacher.*

1. Введение

Развитие речи студентов – одна из важнейших задач, которая решается высшей школой в процессе преподавания всех учебных дисциплин. Столь пристальное внимание к речевому развитию студентов не случайно. Ведь за последние десятилетия мы ослабили внимание к воспитанию культуры как речи, так и мышления. Однако учителю, пожалуй, больше, чем представителям большинства других профессий, следует постоянно обращать внимание на свою речь и непрерывно её совершенствовать, добиваясь безукоризненной правильности и прозрачности.

К сожалению, на практике нередко и преподаватели математических дисциплин не обращают должного внимания на то, как отвечает студент, на небрежность его речи, а ограничиваются лишь содержанием ответа, его математической правильностью. Математик не может проявлять безразличие не только к содержанию, но и к форме ответа. Поскольку то, что может сделать преподаватель математики, порой затруднительно для преподавателей других, нематематических дисциплин. Именно на занятиях по математике студенты должны привыкать к краткой, предельно чёткой и логически отточенной речи, не засорённой лишними словами и фразами, в которой нет места неправильным ударениям, искажений понятий и терминов. Математическое образование может и должно стать средством речевого развития будущих учителей начальных классов, научить их кратко, грамотно и точно формулировать свои мысли.

2. Основной текст статьи

Развитие математической речи студентов – будущих учителей начальных классов – сложный и многогранный процесс, находящийся под влиянием очень многих факторов: книг, журналов, естественного, разговорного языка, средств массовой информации, учебных занятий и др.

Естественно, особое место среди перечисленных факторов занимает процесс математической подготовки студентов при изучении таких дисциплин, как «Основы математической обработки информации», «Теоретические основы начального курса математики», «Методики преподавания математики в начальной школе». Поскольку именно на занятиях по этим дисциплинам процесс развития математической речи студентов должен перестать быть стихийным и приобрести целенаправленный характер.

Проблема формирования математической речи в научно-педагогической литературе обсуждается давно. Изучением различных подходов к формированию математического мышления и совершенствованию математического языка занимались Б.В. Гнеденко [1], В.А. Далингер [3], Т.А. Иванова, А.С. Горчаков [6], Дж Икрамов [5] А.А. Махонина [9],

А.А. Столяр [10], Л.М. Фридман [15] и многие другие известные педагоги и математики.

Анализ содержания научных и научно-методических разработок позволяет определить различные подходы к трактовке дефиниции «математическая речь». Мы под математической речью будем понимать вид межличностной коммуникации людей, выражающий содержание в виде математических терминов (список математических понятий, используемых при решении математических задач), символьных (математических символов, букв латинского, греческого, готического алфавитов) и графических обозначений (таблицы, диаграммы), математических моделей (уравнения, неравенства, их системы, графы) вместе с элементами визуализации (графики, схемы, чертежи) и естественного языка. [9].

Наиболее распространенные ошибки, которые стали в последнее время появляться в математической речи студентов (да и некоторых преподавателей математики) проанализированы в работе [13]. Среди них:

– неправильное название десятичных дробей;
– неправильное название цифр и чисел;
– неправильное название букв;
– неправильное название математических терминов;
– неправильное оформление математических текстов;
– неправильное склонение числительных;
– неправильная расстановка ударений в словах.
– неправильное определение дат;
– неправильное название математических понятий и разделов математики.

В цитируемой статье отмечается, что огромная негативная роль в их появлении и распространении принадлежит средствам массовой информации: телевидению, радио, интернет и т.п. Однако и учителя, и преподаватели математических дисциплин тоже вносят свой «вклад» в засорение языка математики.

В настоящее время принято выделять несколько уровней развития речи. Среди них: произносительный, лексический, грамматический уровни, которые предполагают работу над ударением, темпом речи и паузами, смысловыми и эмоциональными интонациями, обогащение словаря учащихся, построение синтаксических конструкций (словосочетаний, предложений) и т.д. [4]

Говоря о развитии речи студентов на занятиях по математике, прежде всего, следует иметь в виду такие её качества, как лаконичность, обоснованность, логичность, объективность, целостность, связность, точность, ясность и смысловая законченность. Направления работы по развитию всех этих качеств математической речи студентов, рассмотрим ниже. В её основу положен целый комплекс ошибок математической речи, представленных в статье [13].

I. Учить студентов *правильно называть многозначные числа и десятичные дроби*, правильно их записывать и склонять. Например, число – одно из основных понятий математики, используемое для количественной характеристики, сравнения, нумерации объектов и их частей. Цифры – система знаков для записи конкретных значений чисел. «Цифра» и «Число»

отличаются друг от друга также, как «Буква» и «Слово». Поэтому говорить «Сложим цифры» неверно, нельзя говорить, «Первые три цифры в ряду 23, 14, 90, 132, 785,77, 98 – двузначные», «172 – это большая цифра» и т.п.

Нельзя «7,8%» называть «семь и восемь процента» (правильно «семь целых восемь десятых процента», а «23,6° мороза» – «двадцать три и шесть градусов мороза» (правильно «двадцать три целых шесть десятых градуса мороза»; число 0,5 – «ноль пять» (правильно «ноль целых пять десятых»; число 2020 – «двадцать двадцать» (правильно «две тысячи двадцать»). Грешат такими вольностями в названиях десятичных дробей и натуральных чисел не только средства массовой информации, но и отдельные личности (в частности, чиновники, школьники, студенты и даже преподаватели). С завидной регулярностью, нам сообщают: «Восемь и три миллиарда рублей получено …», «Построили шесть и четыре миллиона квадратных метров жилья», «Фестиваль двадцать двадцать два» и т.п. Некоторые «продвинутые» рекламодатели, ведущие теле- и радиопередач «исправляются» и, например, число 8,3 называют не «восемь и три», а «восемь и три десятых», хотя правильно всё же его нужно называть так: «восемь целых три десятых».

По нормам русского языка обязательно должно быть четко обозначено начало числа**.** Поэтому неправильно вместо «один миллион триста тысяч» говорить «миллион триста тысяч», а в датах вместо «одна тысяча» – только «тысяча». Так, вместо «одна тысяча девятьсот тридцатый год» говорят «тысяча девятьсот тридцатый год», что не допустимо.

Разумеется, вышеперечисленные ошибки не должны допускать в своей речи учителя начальных классов.

II. *Формирование умений правильно употреблять слова и математические термины*. Например, студенты иногда неправильно употребляют слова: «не больше», «не меньше», «хотя бы один», неверно называют некоторые латинские и греческие буквы, не знают, какого они рода, и неправильно их склоняют.

Следует помнить: названия латинских букв *x, y, z* – мужского рода, а остальных латинских букв – среднего рода; при чтении выражений названия букв не изменяются по падежам; если коэффициент отличается от 1, то выражение читают во множественном числе. Например, «$d = 13$» нужно читать «дэ равно тринадцати», а не «дэ равен тринадцати»; «$y = 6$» – «игрек равен шести», а не «игрек равно шести»; «$6x = 12$» – «шесть икс равны двенадцати», а не «шесть икс равно двенадцати» или «шесть иксов равно двенадцати»; буква *Q* называется в латинском алфавите «ку», а в английском – «кью», поэтому «$q = 7$» читают «ку равно семи», а не «кью равно семи». Не следует забывать, что буква *y* в латинском алфавите называется «игрек», а не «игрик», и не «игрэк».

Названия всех греческих букв в математике принято читать в среднем роде, существительные синус (sin), косинус (cos), тангенс (tg), котангенс (ctg), логарифм (log) – мужского рода.

Некоторые студенты, употребляя математические термины, не отдают себе отчёт, и что они означают, и что за ними стоит. Например, можно

услышать: «Да у нас зачетов в этом семестре на порядок больше, чем у вас». Не задумываясь, что «на порядок больше (меньше)» – это «в 10 раз больше (меньше)», а «на два порядка больше (меньше)» – «в 100 раз больше (меньше)» ($100 = 10^2$)! Показатель степени числа 10 и есть порядок. Но некоторые из них всё еще наивно считают, что фраза «на два порядка» то же самое, что «в два раза», фраза «на три порядка» то же самое, что «в три раза» и т.п.

В математической речи (и вообще в естественнонаучной) совершенно недопустимо использование уменьшительно-ласкательных форм математических терминов. Однако, на уроках (особенно в начальной школе) часто можно услышать, как учитель прямоугольник называет «прямоугольничек», круг – «кружочек», угол – «уголок», цифра – «циферка» и т.п. Следует помнить, что в русском языке у математических терминов нет уменьшительно-ласкательной формы.

В последнее время дисциплину «Теория вероятностЕЙ» стали часто называть «Теория вероятностИ». В математике никогда не было и нет ни раздела «Теория вероятности», ни дисциплины с таким названием. Не смотря на это, некоторые преподаватели всё же выпускают книги по теории вероятностИ, а студенты и школьники пишут рефераты и доклады по теории вероятностИ. В России даже сняли фильм под названием «Теория вероятностИ», который в широком прокате появился на наших экранах в 2018 году. Грамотная математическая речь не должна содержать подобных «вольностей».

III. Научить студентов *формулировать правильно утверждение, обратное и противоположное данному, формулировать отрицание данного утверждения (высказывания) и устанавливать их истинность*. Например, рассмотрим истинное высказывание: «Если четырехугольник ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны». Высказывание обратное данному формулируется так: «Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то этот четырехугольник ромб» (оно ложное), высказывание противоположное данному – «Если четырехугольник не ромб, то его диагонали не взаимно перпендикулярны» (тоже ложное), а вот высказывание противоположное обратному (или обратное противоположному) – «Если диагонали четырехугольника не взаимно перпендикулярны, то этот четырехугольник не ромб» истинное. Отрицанием данного высказывания является высказывание: «Существуют четырехугольники, являющимися ромбами, диагонали которых не взаимно перпендикулярны» (тоже ложное).

Вот еще пример. Рассмотрим высказывания: «Существуют натуральные числа, которые делятся на 3» (истинное) и «В любом треугольнике сумма внутренних углов не равна 180^o» (ложное). Их отрицаниями будут высказывания: «Любое натуральное число не делится на 3» (ложное) и «Существуют треугольнике, сумма внутренних углов которых равна 180^o» (истинное). Однако студенты формулируют отрицания этих высказываний так: «Не существуют натуральные числа, которые делятся на 3» (ложное) или «Существуют натуральные числа, которые не делятся на 3» (истинное), «Не в любом треугольнике сумма внутренних углов равна 180^o» (ложное) или «В

любом треугольнике сумма внутренних углов равна 180^o» (истинное). Такие формулировки студентами отрицаний данных высказываний неправильные. В чем легко убедиться, если вспомнить, как формулируются отрицания высказываний, содержащих кванторы [12].

IV. Научить студентов *читать текст сюжетных задач по частям, делать акцент* на числовых данных и на словах, которые определяют дальнейших ход решения задачи (в частности, выбор арифметических действий, метода или способа решения задачи) [5].

V. Совершенствование *техники пересказа текста*. Усваивая технику пересказа, студент учится умению полно и логически грамотно передавать содержание прочитанного и услышанного, правильно употреблять общие и специальные понятия и термины. На занятиях по математике пересказ текста часто связан с разбором содержания текстовых задач.

Развитию умения студента передавать содержание читаемого текста способствует такой методический прием, как *переформулирование текста математического задания*. Данный прием можно применять не только при работе с текстовыми задачами, но и при изучении таких тем, как «Элементы математической логики», «Соответствия и отношения», при рассмотрении геометрического материала, чтении арифметических и алгебраических выражений. Например, можно предложить студентам выполнить задание: «Прочитайте разными способами: а) $12 – 7$; б) $5 + 8$» (Предполагаемые ответы: а) «Из двенадцати вычесть семь», «Двенадцать минус семь», «Семь вычесть из двенадцати», «Разность двенадцати и семи», «На семь меньше, чем двенадцать», «Уменьшаемое двенадцать, вычитаемое семь», «Двенадцать уменьшить на семь»; б) «Восемь прибавить к пяти», «Пять плюс восемь», «Сложить пять и восемь», «Сумма пяти и восьми», «Пять увеличить на восемь», «На восемь больше, чем пять», «Слагаемые пять и восемь» и т.п.).

При работе с подобными заданиями, преподаватель может проверить правильность названия и склонения числительных, рациональный порядком слов в высказывании, возможность перестановки слов без ущерба для смысла высказывания, использованием математических законов для разнообразия формулировок. Можно предлагать студентам и обратные задания: «Запишите высказывание «Двенадцать b меньше утроенного значения a, уменьшенного на семь» в виде математического выражения» (Ответ: $12b < 3a – 7$). Упражнения подобного рода не только расширяют лексический запас студента, но и способствуют формированию представлений об уникальности, универсальности математического языка, который предельно кратким, сжатым образом описывает окружающую действительность.

VI. Лексический уровень развития речи отрабатывается и в ходе формирования *умения выделять главные и «лишние» слова* в тексте задачи. Например, рассмотрим задачу: «Расстояние на кольцевом маршруте между станцией метро «Карамышевский парк» и станцией метро «Третья аллея» равно 12,5 км. Электропоезд «Голубая стрела» с рекламой «Летайте только самолетами авиакомпании «Аэромаг», размещенной на его вагонах, отходит от станции «Карамышевский парк» в 15:30 со скоростью 30 км/ч. В какое время

электропоезд «Голубая стрела» прибывает на станцию метро «Третья аллея»?». В результате исключения из текста задачи «лишних» слов получается такая лаконичная формулировка задачи, ничуть не изменяющая её суть: «Расстояние между двумя станциями метро равно 12,5 км. Поезд отходит от одной станции в 15:30 со скоростью 30 км/ч. В какое время он прибывает на другую станцию?

VII. Большие возможности по развитию речи студентов таит в себе *работа с различными моделями текстовых задач*, в частности составление задач по краткой записи, чертежу, выражению. Особо здесь следует остановиться на решении задач различными методами (арифметическим, алгебраическим, геометрическим и др.) [5]. При решении текстовых задач мы формируем у студентов не только умение правильно ставить вопросы для разбора задачи, но и самостоятельно классифицировать объекты, выделять и устанавливать взаимосвязи между явлениями, что, в свою очередь, способствует форме математического стиля мышления.

VIII. Развитие математической речи студентов – процесс непрерывный. Он не может быть ограничен рамками того или иного занятия. Чтобы привлечь внимание студента к математике, а заодно и обогатить его речь новыми словами, полезно на занятиях и во внеаудиторной работе использовать *исторический и занимательный материал*, побуждать студентов к выполнению творческих заданий (составлять математические кроссворды, чайнворды, загадки, сказки; осуществлять подборку пословиц, поговорок, крылатых слов и выражений и т.п.) [11].

Например, при изучении темы «Величины и их измерение» уместно вспомнить пословицы и поговорки, связанные с такими величинами, как длина, площадь, объем, время, масса, при изучении темы «Системы счисления» можно обсудить секреты математических фокусов, а при изучении темы «Геометрические фигуры и их свойства» попросить студентов составить кроссворды или придумать сказки, в которых главные персонажи – геометрические фигуры. Сведения из истории математики можно и нужно использовать при изучении всех тем курса. Знание истории математики обогащает математическую речь новыми терминами, позволяет осмыслить их происхождение и применение, развивает образное мышление.

IX. Объективные связи между естественным и математическим языками настолько глубоки, что межпредметные связи между обучением математике и языкам – как родному, так и иностранным – также потенциально являются двусторонними. Учителю необходимо следить не только за правильностью решения задач и примеров, но и за правильным произношением слов, грамотностью письма, правильным стилем при построении предложений. В частности, уже с первых уроков в начальной школе следует уделять особое внимание *правильности чтения и склонения числительных*. Учителю необходимо показывать образец чтения числительных для того, чтобы у детей накапливался собственный речевой опыт.

Реализация данного направления работы по формированию грамотной математической речи будущего учителя начальных классов может быть

достигнута путем использования метода проектов [14]. Так, студентам можно предложить создать проекты на тему: «Склонение количественных числительных», «Склонение составных количественных числительных», «Склонение порядковых числительных», «Склонение собирательных числительных», «Склонение дробных числительных», «Склонение неопределенно-количественных числительных» и др.

X. Обсудить, как *правильно ставить ударения* в математических словах и терминах, можно при защите проектов, темы которых могут быть такими: «Как правильно ставить ударения в словах русского языка», «Говорим правильно на уроках математики».

3. Заключение

В результате исследования установлено, что грамотная математическая речь является свидетельством четкого и организованного мышления, а владение языком математики, понимание точного содержания предложений, логических связей между предложениями распространяется и на владение естественным языком, тем самым внося весомый вклад в формирование и развитие мышления человека в целом.

Процесс формирования грамотной математической речи студентов сопровождается не только количественными изменениями их математического языка, но и этот процесс играет огромную роль в качественной трансформации личности, обусловленной переходом на более высокий уровень развития.

Считаем, предложенные формы организации учебной деятельности, позволяют активизировать развитие математической речи студентов и могут оказать помощь в достижении более высоких результатов обучения математике будущих учителей начальных классов.

В первую очередь эта работа должна проводиться на лекционных, семинарских и практических занятиях, при написании курсовых и дипломных работ, рефератов, сообщений, эссе, в другой внеаудиторной работе. Её результат – современный учитель начальной школы, который является носителем и образцом применения грамотной математической речи.

Список источников

1. Гнеденко Б.В. Математика в современном мире: Книга для внеклассного чтения 8-10 классов \\ (Мир знаний) - Москва: Просвещение, 1980 – с. 128.

2. Городилова М. А. О проблемах, связанных с формированием математической речи студентов при обучении математике в техническом вузе / М. А. Городилова // Теория и практика общественного развития. – 2014. – № 6. – С. 75-77.

3. Далингер В.А. Развитие математической речи учащихся при обучении математике // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 6. – С. 83-85.

4. Демидова Т. Е. Начальный курс математики и развитие речи учащихся / Т. Е. Демидова, В. С. Егорина, А. П. Тонких // Начальная школа плюс До и После. – 2003. – № 4. – С. 1-10.

5. Демидова Т. Е. Текстовые задачи и методы их решения / Т. Е. Демидова, А. П. Тонких. – Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова Издательский Дом (типография), 1999. – 261 с.

6. Иванова Т. А. Развитие математической речи школьников в процессе изучения определения понятий, теорем, правил / Т. А. Иванова, А. С. Горчаков // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 6. – С. 240.

7. Икрамов Дж. Математическая культура школьников. Методические аспекты проблемы развития мышления и языка школьников при обучении математике. Ташкент: Укитувчя, 1981. – 277 с.

8. Зуева, Д. А. Культура математической речи учителя: основные качества и условия их развития / Д. А. Зуева // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. – 2009. – № 112. – С. 134-139.

9. Махонина А.А. Методика формирования математической речи учащихся 5-6 классов при введении математических понятий // Педагогика и психология: от вопросов к решениям. – Томск: Федеральный центр науки и образования Эвенсис, 2016 г.

10. Столяр А.А. Логические проблемы преподавания математики. Минск: Высшая школа, 1965. – 254 с.

11. Тонких А. П. Математика: учебное пособие для студентов факультетов подготовки учителей начальных классов : для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 031200 - педагогика и методика начального образования : в 2 кн. / А. П. Тонких ; А. П. Тонких. – 2-е изд., испр. – Москва: Кн. дом Университет, 2008. – 20 с.

12. Тонких А. П. Основы математической обработки информации: Учебно-методическое пособие. – Брянск: Курсив, 2013. – 224 с.

13. Тонких А. П. За чистоту математического языка // Управление образованием: теория и практика. – 2023. – № 1(59). – С. 60-80.

14. Тонких А. П. Проектная деятельность в курсе обучения математике будущего учителя начальных классов: компетентностный подход // Вестник Брянского государственного университета. – 2017. – № 2(32). – С. 286-292.

15. Фридман Л.М. Учитесь учиться математике М.: Просвещение, 1985. – 114 с.

16. Шармин Д. В. Формирование культуры математической речи учащихся в процессе обучения алгебре и началам анализа: дис. на соис. учен. степ. канд. пед. наук. Омск, 2005.

17. Шестакова Л. Г., Юшкова Д. В. Формирование математической речи у обучающихся общеобразовательной школы // Международный журнал экспериментального образования. – 2019. – № 1. – С. 40-45.

References

1. Gnedenko B.V. Mathematics in the modern world: A book for extracurricular reading of grades 8-10' \\ (World of knowledge) - Moscow: Enlightenment, 1980 – p. 128.
2. Gorodilova M.A. On the problems associated with the formation of mathematical speech of students when teaching mathematics at a technical university / M. A. Gorodilova // Theory and practice of social development. - 2014. – No. 6. – pp. 75-77.
3. Dalinger V.A. The development of mathematical speech of students in teaching mathematics // Modern science-intensive technologies. - 2014. – No. 6. – pp. 83-85.
4. Demidova T.E. The initial course of mathematics and the development of students' speech / T. E. Demidova, V. S. Egorina, A. P. Tonkikh // Elementary school plus Before and After. - 2003. – No. 4. – pp. 1-10.
5. Demidova T.E. Text problems and methods of their solution / T.E. Demidova, A.P. Tonkikh. – Moscow: Lomonosov Moscow State University Publishing House (printing house), 1999. – 261 p.
6. Ivanova T.A. Development of mathematical speech of schoolchildren in the process of studying definitions of concepts, theorems, rules / T. A. Ivanova, A. S. Gorchakov // Modern problems of science and education. - 2013. – No. 6. – p. 240.
7. Ikramov J. Mathematical culture of schoolchildren. Methodological aspects of the problem of the development of thinking and language of schoolchildren in teaching mathematics. Tashkent: Ukituvcha, 1981. – 277 p.
8. Zueva D.A. The culture of mathematical speech of the teacher: the main qualities and conditions of their development / D. A. Zueva // Proceedings of the A.I. Herzen Russian State Pedagogical University. - 2009. – No. 112. – pp. 134-139.
9. Mahonina A.A. Methodology for the formation of mathematical speech of students of grades 5-6 with the introduction of mathematical concepts // Pedagogy and psychology: from questions to solutions. – Tomsk: Federal Center for Science and Education Evensis, 2016.
10. Stolyar A.A. Logical problems of teaching mathematics. Minsk: Higher School, 1965. – 254 p.
11. Tonkikh A.P. Mathematics: a textbook for students of primary school teacher training faculties: for students of higher educational institutions studying in the specialty 031200 - pedagogy and methods of primary education: in 2 books / A.P. Tonkikh; A.P. Tonkikh. – 2nd ed., ispr. – Moscow: Publishing house University, 2008. – 20 p.
12. Tonkikh A. P. Fundamentals of mathematical information processing: An educational and methodological manual. – Bryansk: Italics, 2013. – 224 p.
13. Tonkikh A. P. For the purity of mathematical language // Education management: theory and practice. – 2023. – № 1(59). – Pp. 60-80.

14. Tonkikh A. P. Project activity in the course of teaching mathematics to a future primary school teacher: a competence approach // Bulletin of the Bryansk State University. – 2017. – № 2(32). – Pp. 286-292.

15. Friedman L.M. Learn to learn mathematics M.: Enlightenment, 1985. – 114 p.

16. Sharmin D.V. Formation of the culture of mathematical speech of students in the process of teaching algebra and the basics of analysis: dis. on sois. uchen. step. Candidate of Pedagogical Sciences. Omsk, 2005.

17. Shestakova L.G., Yushkova D.V. Formation of mathematical speech among students of secondary school // International Journal of Experimental Education. – 2019. – No. 1. – pp. 40-45.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 654-662.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 654-662.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.8

МЕТОДИКА СОЗДАНИЯ ВЕБ-КВЕСТОВ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ ОСНОВАМ КИБЕРБЕЗОПАСНОСТИ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Ольга Николаевна Троицкая[1]✉, Ева Дмитриевна Вохтомина[2]✉
[1,2]Северный (Арктический) Федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия
[1]o.troitskaya@narfu.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-7885-9435
[2]eva.vohtomina@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-0144-432X

Аннотация. *Внедрение цифровых технологий во все сферы деятельности общества привело к тому, что каждый школьник 10-18 лет является активным пользователем киберпространства. Анализ нормативно-правовой документации говорит о том, что сегодня необходимо организовать целенаправленное обучение школьников кибербезопасности. Статья содержит описание процесса проектирования содержания веб-квестов как средств обучения основам кибербезопасности и методической модели их разработки. Пример веб-квеста для учащихся 9 класса, цель которого состоит в определении правовых норм деятельности в киберпространстве и формировании умений определять ответственность за киберпреступления.*

Ключевые слова: *учащиеся, методика, содержание обучения, кибербезопасность, веб-квест.*

Conference paper

METHODOLOGY FOR CREATING WEB QUESTS FOR ORGANIZING THE PROCESS OF TRAINING THE BASICS OF CYBER SECURITY FOR BASIC SCHOOL STUDENTS

Olga N. Troitskaya[1]✉, Eva D. Vohtomina[2]✉
[1,2] Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia
[1]o.troitskaya@narfu.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-7885-9435
[2]eva.vohtomina@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-0144-432X

Abstract. *The introduction of digital technologies into all spheres of society has led to the fact that every student aged 10-18 is an active user of cyberspace. An*

© Троицкая О.Н., Вохтомина Е.Д., 2023

analysis of regulatory documents suggests that today it is necessary to organize targeted cybersecurity training for schoolchildren. The article contains a description of the process of designing the content of webquests as a means of teaching the basics of cybersecurity and a methodological model for their development. An example of a webquest for 9th grade students, the purpose of which is to determine the legal norms of activity in cyberspace and develop the skills to determine responsibility for cybercrimes.

Keywords: *school students, methodology, learning content, cybersecurity, web-quest.*

1. Введение

Необходимость обучения учащихся основной школы основам кибербезопасности является сегодня общепризнанным фактом. В «Методических рекомендациях для внедрения в основные общеобразовательные программы современных цифровых технологий» в качестве одного из элементов процесса цифровой трансформации выделена «поддержка цифровой компетентности учащихся», которая предполагает «обучение учащихся этикету, правилам безопасного поведения в сети Интернет» [1]. ФГОС ООО, утвержденный 31 мая 2021 года, регламентирует формирование и развитие компетенций школьников, «включая владение основами информационной безопасности, умением безопасного использования средств ИКТ и информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» [2]. Авторы методических рекомендаций [3] указывают на возможность организации непрерывного обучения кибербезопасности путем «дополнения вопросами кибербезопасности уроков информатики», а также за счет включения соответствующей информации в другие школьные курсы, например, «Обществознание» [3].

Таким образом, на первый план встают вопросы организации процесса обучения школьников основам кибербезопасности и выбора соответствующих средств обучения.

2. Основной текст статьи

Особенность средств обучения кибербезопасности заключается в том, что они должны включить учащихся в активную деятельность изучения киберпространства и формирования умений грамотного поведения в нем. В [4] доказано, что одним из элементов системы средств обучения основам кибербезопасности являются веб-квесты. Именно они позволяют формировать умения защищаться от опасного контента, соблюдать интернет-этикет, определять ответственность за киберпреступления.

На рисунке 1 представлен процесс проектирования содержания, подлежащего изучению обучающимися в рамках веб-квестов по кибербезопасности.

Особенность методики создания веб-квестов для организации процесса обучения основам кибербезопасности состоит в том, что первоначально определяется конечный продукт деятельности всех участников веб-квеста в соответствии с поставленной целью. Только затем определяются роли,

команды, задания, ресурсы, критерии оценки. Особое внимание заслуживают рекомендации педагогам.

Рисунок 1. Процесс проектирования содержания веб-квестов по кибербезопасности.

Так как знания в области кибербезопасности носят метапредметный характер, то веб-квесты могут проводить не только учителя информатики, но и учителя литературы, математики, химии, обществознания. Методическая схема разработки веб-квестов по кибербезопасности представлена на рисунке 2.

Рисунок 2. Методическая модель разработки веб-квестов по кибербезопасности.

Рассмотрим пример реализации методической модели создания веб-квестов по кибербезопасности. ФГОС ООО, утвержденный 31 мая 2021 года, определяет необходимость формирования у школьников умений соблюдать «базовые нормы информационной этики и права при работе с приложениями на любых устройствах и в сети Интернет» [2]. В соответствии с Доктриной информационной безопасности, обеспечить безопасность в киберпространстве можно только за счет «сочетания законодательной, правоприменительной, правоохранительной, судебной, контрольной и других форм деятельности государственных органов во взаимодействии с органами местного самоуправления, организациями и гражданами» [5]. Соответственно, цель веб-квеста «Человек в киберпространстве: права и обязанности» состоит в том,

чтобы «раскрыть правовые акты в области информационных технологий и защиты киберпространства, умения определять ответственность за киберпреступления» [6].

Учитывая содержание школьного курса информатики 9 класса, а именно изучение особенностей создания веб-сайтов, мы определили в качестве основного результата деятельности девятиклассников создание макета главной страницы сайта «Человек в киберпространстве: права и обязанности». Учащиеся на уроках информатики знакомятся с тем, как, каким образом должна быть оформлена главная страница сайта, определена его структура, представлено содержание сайта. Заданная тематика веб-квеста позволит сформировать у девятиклассников не только умения проектировать сайт, но и знания о законах, действующих в киберпространстве. Именно поэтому вкладка «Введение» содержит следующее приветствие (рисунок 3).

Дорогие ребята, приветствуем вас на веб-квесте
«Человек в киберпространстве: права и обязанности»!

В процессе прохождения заданий веб-квеста вы узнаете, какую информацию необходимо охранять в киберпространстве, какие законы действуют в глобальной сети, как самому не стать правонарушителем.

Для того, чтобы начать прохождение веб-квеста, выберите в соответствии с вашими интересами **Роль**.

В результате весь ваш коллектив будет разделен на команды.

Вместе вы создадите макет главной страницы сайта:
«Человек в киберпространстве: права и обязанности»

Рисунок 3. Главная страница веб-квеста.

Представленный формат и результат веб-квеста позволяет определить соответствующие роли, команды и задания. Всего в рамках веб-квеста выделено три роли: веб-дизайнер, юрист-консультант, контент-менеджер. Особое внимание юрист-консультанты будут уделять вопросам защиты авторского права, контент-менеджеры – персональных данных, веб-дизайнеры – визуализации правильного поведения в киберпространстве.

Таким образом, все участники веб-квеста будут разделены на три команды в соответствии с выбранной ролью. Далее каждая команда приступает к выполнению заданий. Рассмотрим в качестве примера задания команды «Юрист-консультант». Речь идет о Федеральном законе № 152-ФЗ «О персональных данных» [7], Гражданском кодексе Российской Федерации [8], Федеральном законе № 149-ФЗ «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» ([9] - [11]), Уголовном кодексе Российской Федерации [12].

Задание 1. Изучите нормативно-правовые акты, представленные для Вас в Ресурсах. Ответьте на следующие вопросы:

1. Какие виды информации подлежит защите в киберпространстве? Приведите примеры.

2. Какая ответственность предусмотрена за нарушения законодательства в этой области? Приведите примеры.

3. Можно ли утверждать, что справедливы выражения: «Незнание законодательства не освобождает от ответственности» и «Не запрещено – не значит, что разрешено».

Задание 2. Ознакомьтесь с представленными примерами нарушения авторских прав в Интернете:

10 самых громких споров из-за интеллектуальной собственности. – URL: https://ria.ru/20120426/635112901.html.

Приведите 2 примера нарушения авторских прав, с которыми Вы сталкивались в своей жизни.

Задание 3. Вы являетесь юрист-консультантом сайта «Киберволонтеры: на страже порядка!». Составьте рекомендации клиентам в представленных ниже ситуациях. Обоснуйте ответ.

1. Фотограф Александр участвовал в областном конкурсе профессионального мастерства. Он стал победителем, значительно опередив своих коллег по сумме набранных баллов. Однако радости от такой победы он практически не испытал. На следующий день Александр увидел свою фотографию на главной странице известного Интернет-издания, но под другой фамилией.

2. Сотрудники крупного риэлторского агентства обнаружили сайт, который по оформлению и содержанию полностью дублировал сайт компании, в которой они работали. Веб-адрес данного сайта практически не отличался от соответствующего адреса агентства. Следствием стал переход части клиентов на сторону конкурентов и серьезные финансовые потери риэлторского агентства.

Задание 4. Создайте для страницы «Защита авторского права» сайта «Киберволонтеры: на страже порядка!» пошаговый алгоритм деятельности клиентов в ситуации нарушения их авторского права.

Команда «Контент-менеджер» занимается разработкой содержания страницы «Защита персональных данных» сайта «Человек в киберпространстве: права и обязанности» актуальной информацией. Особое внимание члены команды уделяют описанию правильного поведения в ситуации неправомерного разглашения персональных данных. Команда «Веб-дизайнер» разрабатывает графическую визуализацию алгоритмов поведения в ситуациях нарушения кибербезопасности.

После выполнения предложенных заданий каждая команда передает учителю свои результаты. Он объединяет их в дизайн-макет главной страницы сайта, созданный на основе MS PowerPoint. Соответствующие методические рекомендации по работе над веб-квестом «Человек в киберпространстве: права и обязанности» описаны во вкладке «Педагогу».

Сегодня в рамках приводимого исследования разработаны веб-квесты для учащихся с 5 по 9 классы. В таблице 1 представлено дополнение описания целей каждого веб-квеста [6] ожидаемым результатом деятельности учащихся.

Таблица 1. Веб-квесты для обучения школьников основам кибербезопасности.

Класс	Название веб-квеста	Цель веб-квеста	Результат деятельности участников веб-квеста
5	Киберпреступники: вымысел или реальность?	Сформировать знания о киберпреступлениях, их видах, умения распознавать опасность в киберпространстве и защищать себя в глобальной сети	Социальная реклама (постер «Киберпреступники: вымысел или реальность?»)
6	Социальные сети: добро или зло?	Сформировать знания о понятии «персональные данные», умения корректно заполнять свои профили в социальных сетях	Интерактивный плакат (изображение страницы аккаунта в социальной сети)
7	Кибербезопасность и мы	Сформировать знания правил поведения в киберпространстве, умений их применять	Дерево безопасности в Интернете
8	Киберпространство: взгляд изнутри	Раскрыть преимущества использования киберпространства, умения определять угрозы пребывания в нем	Путеводитель по киберпространству (буклет, первая сторона которого «Достопримечательности киберпространства», вторая – «Темная сторона киберпространства»)
9	Человек в киберпространстве: права и обязанности	Раскрыть правовые акты в области информационных технологий и защиты киберпространства, умения определять ответственность за киберпреступления	Макет главной страницы сайта «Человек в киберпространстве: права и обязанности».

3. Заключение

Исследования, проведенные в период с 2017 года по 2023 год, показали, что учащиеся 5-9 классов имеют представления о типичных ситуациях риска в киберпространстве, возможных последствиях принятия неверного решения в нем, но навыки безопасного поведения у них не сформированы. Мы предлагаем применять в качестве средств обучения веб-квесты, разработанные с учетом субъектного опыта школьников, их индивидуальных особенностей и познавательных потребностей.

Включение веб-квестов в процессе обучения безопасному поведению в киберпространстве позволяет сформировать у учащихся умения распознавать типичные ситуации риска, выбирать наиболее оптимальную стратегию поведения, нивелировать киберугрозы. Это доказано в процессе проведения в школах Архангельской области мероприятия «Неделя кибербезопасности» с 2019 года по 2023 год.

Список источников

1. Методические рекомендации для внедрения в основные общеобразовательные программы современных цифровых технологий. – URL: https://docs.cntd.ru/document/565227683.
2. Приказ Минпросвещения России от 31.05.2021 № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования». – URL: https://fgosreestr.ru/uploads/files/238eb2e61e443460b65a83a2242abd57.pdf
3. Методические рекомендации «Основы кибербезопасности». – URL: https://www.единыйурок.рф/osnovy
4. Вохтомина Е.Д., Троицкая О.Н. Система средств обучения кибербезопасности учащихся школ // Новые информационные технологии в образовании и науке. 2022. № 6. С. 17-22.
5. Указ Президента РФ от 5 декабря 2016 г. № 646 «Об утверждении Доктрины информационной безопасности Российской Федерации». - URL: http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/71456224.
6. Вохтомина Е.Д., Троицкая О.Н. Использование возможностей web-технологий в процессе формирования у учащихся навыков безопасного поведения в киберпространстве // Web-технологии в реализации удалённого формата образования. Сборник статей участников Международной научно-практической конференции. Научный редактор С.В. Миронова, отв. редактор С.В. Напалков. Арзамас, 2021. С. 106-110.
7. Федеральный закон от 27 июля 2006 г. № 152-ФЗ «О персональных данных». – URL: https://base.garant.ru/12148567/.
8. Гражданский кодекс Российской Федерации. Раздел VII. Права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации. – URL: https://base.garant.ru/10164072/9cd87e493d9fc9c9d85aab7e16da9038/.
9. Федеральный закон от 27 июля 2006 г. N 149-ФЗ «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» (с изменениями и

дополнениями). Статья 15.2. Порядок ограничения доступа к информации, распространяемой с нарушением авторских и (или) смежных прав. – URL: https://base.garant.ru/12148555/60c09e09434149352a66a686c0270cf6/.

10. Федеральный закон от 27 июля 2006 г. N 149-ФЗ «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» (с изменениями и дополнениями). Статья 15.5. Порядок ограничения доступа к информации, обрабатываемой с нарушением законодательства Российской Федерации в области персональных данных. – URL: https://base.garant.ru/12148555/8cca63ac59cc39099e30208093444833/.

11. Федеральный закон от 27 июля 2006 г. N 149-ФЗ «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» (с изменениями и дополнениями). Статья 17. Ответственность за правонарушения в сфере информации, информационных технологий и защиты информации. – URL: https://base.garant.ru/12148555/a7b26eafd8fd23d18ca4410ac5359e0e/.

12. Уголовный кодекс (УК РФ). Статья 146. Нарушение авторских и смежных прав. – URL: https://base.garant.ru/10108000/0c5956aa76cdf561e1333b201c6d337d/.

References

1. Methodological recommendations for the introduction of modern digital technologies into basic general education programs. – URL: https://docs.cntd.ru/document/565227683.

2. Order of the Ministry of Education of Russia dated May 31, 2021 No. 287 “On approval of the federal state educational standard of basic general education.” – URL: https://fgosreestr.ru/uploads/files/238eb2e61e443460b65a83a2242abd57.pdf.

3. Methodological recommendations “Fundamentals of cybersecurity”. – URL: https://www.uniyurok.rf/osnovy.

4. Vokhtomina E.D., Troitskaya O.N. System of means of teaching cybersecurity to school students // New information technologies in education and science. 2022. No. 6. P. 17-22.

5. Decree of the President of the Russian Federation of December 5, 2016 No. 646 “On approval of the Information Security Doctrine of the Russian Federation.” - URL: http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/71456224.

6. Vokhtomina E.D., Troitskaya O.N. Using the capabilities of web technologies in the process of developing students’ skills for safe behavior in cyberspace // Web technologies in the implementation of remote education format. Collection of articles by participants of the International Scientific and Practical Conference. Scientific editor S.V. Mironov, rep. editor S.V. Napalkov. Arzamas, 2021. pp. 106-110.

7. Federal Law of July 27, 2006 No. 152-FZ “On Personal Data”. – URL: https://base.garant.ru/12148567/.

8. Civil Code of the Russian Federation. Section VII. Rights to the results of intellectual activity and means of individualization. – URL: https://base.garant.ru/10164072/9cd87e493d9fc9c9d85aab7e16da9038/.

9. Federal Law of July 27, 2006 N 149-FZ “On information, information technologies and information protection” (as amended and supplemented). Article 15.2. The procedure for restricting access to information distributed in violation of copyright and (or) related rights. – URL: https://base.garant.ru/12148555/60c09e09434149352a66a686c0270cf6/.

10. Federal Law of July 27, 2006 N 149-FZ “On information, information technologies and information protection” (as amended and supplemented). Article 15.5. The procedure for restricting access to information processed in violation of the legislation of the Russian Federation in the field of personal data. – URL: https://base.garant.ru/12148555/8cca63ac59cc39099e30208093444833/.

11. Federal Law of July 27, 2006 N 149-FZ “On information, information technologies and information protection” (as amended and supplemented). Article 17. Responsibility for offenses in the field of information, information technology and information protection. – URL: https://base.garant.ru/12148555/a7b26eafd8fd23d18ca4410ac5359e0e/.

12. Criminal Code (Criminal Code of the Russian Federation). Article 146. Infringement of copyright and related rights. – URL: https://base.garant.ru/10108000/0c5956aa76cdf561e1333b201c6d337d/.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 663-667.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 663-667.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.851

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В ПРАКТИКЕ РЕШЕНИЯ ШКОЛЬНЫХ ЗАДАЧ ИЗ РАЗДЕЛА ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Ирина Ивановна Чернобровкина[1]✉, Антон Владимирович Кокорев[2]
[1]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
[2]Академия ФСО России, Орёл, Россия
[1]iichernobrovkina@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-3170-4986
[2]pears911@mail.ru

Аннотация. *Метод математической индукции вполне доступен для понимания и изучения на уроках математики в средней или старшей школе. Более того, встречаются олимпиадные задачи, которые решаются только этим способом. Поэтому, целесообразно выделить время либо на уроках математики, либо на внеурочных занятиях для изучения этого метода. В статье также приводятся примеры, которые рекомендуется прорешать со школьниками для закрепления изученного материала.*

Ключевые слова: *метод математической индукции, теория делимости, методика преподавания математики в школе.*

Conference paper

METHOD OF MATHEMATICAL INDUCTION IN THE PRACTICE OF SOLVING SCHOOL PROBLEMS FROM THE SECTION OF NUMBER THEORY

Irina I. Chernobrovkina[1]✉, Anton V. Kokorev[2]
[1]Orel State University, Orel, Russia
[2] Russian Federation Security Guard Service Federal Academy
[1]iichernobrovkina@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-3170-4986
[2]pears911@mail.ru

Abstract. *The method of mathematical induction is quite accessible to understand and study in mathematics lessons in middle or high school. Moreover, there are Olympiad problems that can only be solved in this way. Therefore, it is advisable to allocate time either in mathematics lessons or in extracurricular activities to study this method. The article also provides examples that are recommended to be solved with schoolchildren to consolidate the material studied.*

© Чернобровкина И.И., Кокорев А.В., 2023

Keywords: *method of mathematical induction, theory of divisibility, methods of teaching mathematics at school.*

1. Введение

Важную роль в математике играет множество натуральных чисел, которое еще называют натуральным рядом. Натуральные числа употребляют для счета, либо для упорядочения. В первом случае они выражают количества, во втором – порядок.

В 1891 г. Пеано (1858 – 1932) предложил определение множества натуральных чисел:

Определение: *натуральными числами* называются элементы всякого не пустого множества N, на котором определено бинарное отношение «следует непосредственно за» и обладающее следующими 4-мя свойствами, которые называют аксиомами Пеано:

1) Существует натуральное число А1(единица), которое не следует ни за каким другим числом, т.е. а – натуральное число, а′ - число, следующее за ним, то $\forall a$ а′ $\neq 1$.

2) Для любого натурального числа А2 существует и только одно следующее за ним натуральное число;

3) Любое натурального числа А3 следует не более, чем за одним натуральным числом, т.е. если а′ = в′, где а′ следует за а и в′ следует за в, то а = в.

4) (аксиома индукции) Каждое множество натуральных чисел М, которое содержит 1 и которое с каждым натуральным числом а содержит и следующее за ним число а′, совпадает с множеством натуральных чисел, M = N.

2. Основной текст статьи

Теория чисел, и в частности, теория делимости достаточно широко представима в теории и практике школьной математики [2].

Метод математической индукции [3] – один из часто применяемых методов при доказательстве некоторых утверждений и теорем. Он знаком школьникам, увлекающимся математикой. Некоторые олимпиадные задачи предполагают использование этого метода при решении задач. Наиболее эффективно его применять при решении некоторых задач теории чисел. Приведем ряд таких примеров, которые можно использовать при работе с математически одаренными детьми и включать в текст, например, школьной олимпиады по математике.

Теорема 1 (принцип математической индукции). Если утверждение Т верно для 1, и если из предположения, что оно верно для к следует его справедливость для к +1, то оно верно для любого натурального n.

Вывод: чтобы доказать методом математической индукции справедливость некоторого утверждения для любого натурального числа n, надо: 1) доказать, что утверждение верно для n = 1; 2) предположить, что утверждение верно для n=к; 3) доказать, что оно верно для к+1. Тогда на основе принципа математической индукции заключают, что утверждение верно для n.

Теорема 2 (2-я форма принципа математической индукции). Если утверждение Т справедливо для 1, и если из предположения, что оно верно для всех натуральных чисел, меньших к, следует его справедливость для натурального числа к, то оно верно для любого натурального числа n.

Теорема 3 (обобщение второй формы принципа математической индукции). Если некоторое утверждение Т справедливо для натурального числа n_0 и если из предположения, что оно верно для всех натуральных чисел l ($n_0 \le l$ < к) следует его справедливость для натурального числа к, то оно верно для любого натурального числа.

Пример: $2^n > 2n+1$, $n_0 = 3$.

Пример 1. Доказать методом математической индукции, что при любом натуральном n выражение n^3+11n делится на 6

Решение:

Шаг 1. Покажем, что утверждение верно для n = 1

1 + 11 = 12, что делится на 6.

Шаг 2. Предположим, что утверждение верно для n = k, т.е.

k^3+11k делится на 6

Шаг 3. Покажем, что утверждение верно для n = k + 1, т.е.

$(k+1)^3+11(k+1)$ делится на 6.

Рассмотрим $(k+1)^3+11(k+1) = k^3+ 3k^2 + 3k + 1 + 11k+11 = (k^3+ 11k) + +3(k^2 + k +4)$.

Первое слагаемое в последнем выражении делится на 6 по шагу 2. Второе слагаемое явно делится на 3. Покажем, что $k^2 + k +4$ делится на 2.

$k^2 + k +4 = k(k +1) + 4$. $k(k +1)$ - два последовательных натуральных числа, одно из которых обязательно делится на 2. Таким образом, что $k^2 + k +4$ делится на 2, а все выражение $(k+1)^3+11(k+1)$ делится на 6.

Согласно принципу математической индукции, данное утверждение верно для любых натуральных n.

Пример 2. Доказать методом математической индукции, что при любом натуральном n выражение $3^{2n+2}-8n-9$ делится на 64.

Решение:

Шаг 1. Покажем, что утверждение верно для n = 1

$3^4-8-9 = 81 - 17 = 64$, что делится на 64.

Шаг 2. Предположим, что утверждение верно для n = k, т.е.

$3^{2k+2}-8n-9$ делится на 64.

Шаг 3. Покажем, что утверждение верно для n = k + 1, т.е.

$3^{2(k+1)+2}-8(k + 1) - 9$ делится на 64.

Рассмотрим $3^{2(k+1)+2}-8(k + 1) - 9 = 9\cdot3^{2(k+1)} - 8k - 8 - 9 = 9\cdot3^{2k+2} - 8k - 8 - - 9 - 72k + 72k - 81 + 81 = 9(3^{2k+2} -8k - 9) + 64k + 64$.

Выражение в скобках делится на 64 по шагу 2. Значит и все выражение делится на 64.

Согласно принципу математической индукции, данное утверждение верно для любых натуральных n.

Пример 3. Доказать методом математической индукции, что при любом натуральном n выражение $7^{n+2}+8^{2n+1}$ делится на 57.

Решение:

Шаг 1. Покажем, что утверждение верно для n = 1

$7^{1+2}+8^{2+1} = 343 + 512 = 855$, что делится на 57.

Шаг 2. Предположим, что утверждение верно для n = k, т.е.

$7^{k+2}+8^{2k+1}$ делится на 57.

Шаг 3. Покажем, что утверждение верно для n = k + 1, т.е.

$7^{k+1+2}+8^{2k+2+1}$ делится на 57.

Рассмотрим $7^{k+3}+8^{2k+3} = 7\cdot 7^{k+2} + 64\cdot 8k^{2k+1} - 7\ 8^{2k+1} + 7\cdot 8^{2k+1} = 7(7^{k+2} + 8^{2k+1}) + 57\cdot 8^{2k+1}$.

Выражение в скобках делится на 57 по шагу 2. Значит и все выражение делится на 57.

Согласно принципу математической индукции, данное утверждение верно для любых натуральных n.

Пример 4. Доказать методом математической индукции, что при любом натуральном n выражение $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.

Решение:

Шаг 1. Покажем, что утверждение верно для n = 1

$11^{1+2}+12^{2+1} = 1331 + 1728 = 3059$ делится на 133.

Шаг 2. Предположим, что утверждение верно для n = k, т.е.

$11^{k+2}+12^{2k+1}$ делится на 133.

Шаг 3. Покажем, что утверждение верно для n = k + 1, т.е.

$11^{k+3}+12^{2k+3}$ делится на 133.

Рассмотрим $11^{k+3}+12^{2k+3} = 11\cdot 11^{k+2} + 12^2\cdot 12^{2k+1} - 11\cdot 12^{2k+1} + 11\cdot 12^{2k+1} = 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133\cdot 12^{2k+1}$.

Выражение в скобках делится на 133 по шагу 2. Значит и все выражение делится на 133.

Согласно принципу математической индукции, данное утверждение верно для любых натуральных n.

Пример 5. Доказать методом математической индукции, что любая натуральная степень числа 15 при делении на 7 дает остаток 1, т.е. доказать, что при делении 15^n на 7 в остатке всегда получится 1.

Шаг 1. Покажем, что утверждение верно для n = 1

$15 = 7\cdot 2 + 1$.

Шаг 2. Предположим, что утверждение верно для n = k, т.е.

при делении 15^k на 7 в остатке получится 1.

Шаг 3. Покажем, что утверждение верно для n = k + 1, т.е. при делении 15^{k+1} на 7 в остатке получится 1.

Рассмотрим $15^{k+1} = 15^k \cdot 15 = 15^k(14 + 1) = 14\cdot 15^k + 15^k$. Первое слагаемое делится на 7 без остатка, а второе, по шагу 2, делится на 7 с остатком 1. Таким образом, утверждение доказано и, согласно принципу математической индукции, данное утверждение верно для любых натуральных n.

Пример 6. Доказать, что для любого натурального числа n выражение

$5^{2n+1}\cdot 2^{n+2} + 3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$ делится на 19.

Шаг 1. Покажем, что утверждение верно для n = 1

$5^{2+1}\cdot 2^{1+2} + 3^{1+2}\cdot 2^{2+1} = 1000 + 216 = 1216$, что делится на 19.

Шаг 2. Предположим, что утверждение верно для n = k, т.е.

$5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1}$ делится на 19.

Шаг 3. Покажем, что утверждение верно для n = k + 1, т.е.

$5^{2(k+1)+1} \cdot 2^{(k+1)+2} + 3^{(k+1)+2} \cdot 2^{2(k+1)+1}$ делится на 19.

Рассмотрим и преобразуем выражение

$5^{2(k+1)+1} \cdot 2^{(k+1)+2} + 3^{(k+1)+2} \cdot 2^{2(k+1)+1} = 5^{2k+3} \cdot 2^{k+3} + 3^{k+3} \cdot 2^{2k+3} = 5^2 \cdot 2 \cdot 5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 2^2 \cdot 3 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} = 50 \cdot 5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 12 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} = 38 \cdot 5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 12 \cdot 5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 12 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} = 38 \cdot 5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 12 \cdot (5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1})$. Первое слагаемое содержит множитель 38, поэтому делится на 19, а второе содержит множитель, который, по шагу 2, также делится на 19.

Таким образом, утверждение доказано и, согласно принципу математической индукции, данное утверждение верно для любых натуральных n.

Еще больше заданий можно взять из пособия [1].

3. Заключение

Предлагаемые задания достаточно хорошо усваиваются школьниками, особенно старших классов, свободно владеющих действиями со степенями.

Список источников

1. Леонтьева А.В. Сборник задач (метод математической индукции): Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 19 с.

2. Чернобровкина И.И., Чернобровкина Ю.В. Элементы теории чисел в школьном курсе математики // Научный альманах. 2016. №4 – 2(18). С. 313-316.

3. Шень А. Математическая индукция. - М.: МЦНМО, 2016. 32 с.

References

1. Leontyeva A.V. Collection of problems (method of mathematical induction): Educational and methodological manual. – Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 2014. – 19 p.

2. Chernobrovkina I. I., Chernobrovkina Yu. V. Elements of number theory in a school mathematics course // Scientific almanac. 2016. No. 4 – 2(18). pp. 313-316.

3. Shen A. Mathematical induction. - M.: MTsNMO, 2016. 32 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 668-671.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 668-671.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.551

VR-ТЕХНОЛОГИИ В ПРЕПОДАВАНИИ ГЕОМЕТРИИ

Иван Андреевич Шевцов✉
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Елец, Россия
vanya_shevtsov_02@mail.ru✉

Аннотация. *Технологии виртуальной реальности (VR) стали многообещающим инструментом революции в образовании. В этой научной статье исследуется применение виртуальной реальности в преподавании геометрии с целью повышения вовлеченности учащихся и их пространственного понимания. Погружая учащихся в виртуальную среду, VR обеспечивает интерактивный и интуитивный опыт, способствующий активному обучению и концептуальному пониманию. В этой статье рассматриваются преимущества, проблемы и потенциальные применения виртуальной реальности в образовании по геометрии, предоставляя ценную информацию преподавателям и исследователям, стремящимся использовать эти инновационные технологии.*

Ключевые слова: *VR-технологии, обучение геометрии.*

Conference paper

VR TECHNOLOGIES IN TEACHING GEOMETRY

Ivan Andreevich Shevtsov✉
Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
vanya_shevtsov_02@mail.ru✉

Abstract. *Virtual reality (VR) technologies have become a promising tool for the revolution in education. This scientific article explores the use of virtual reality in teaching geometry in order to increase student engagement and spatial understanding. By immersing students in a virtual environment, VR provides an interactive and intuitive experience that promotes active learning and conceptual understanding. This article examines the advantages, challenges and potential applications of virtual reality in geo-metric education, providing valuable information to teachers and researchers seeking to use these innovative technologies.*

Keywords: *VR technologies, geometry training.*

© Шевцов И.А., 2023

1. Введение

Внедрение цифровых технологий в школьное образование трудно переоценить. Новые технологии постепенно, но уверенно проникают в школу. Об этом красноречиво говорят цифры: до 2024 года из российского бюджета планируют выделить около 750 млн рублей на цифровизацию детского образования.

Традиционные методы преподавания геометрии часто сталкиваются с проблемами в привлечении учащихся к изучению геометрических понятий и связей. Проблема развития пространственного мышления обучающихся – еще одна трудность в успешном освоении предмета. Использование современных интерактивных технологий, таких как интерактивные доски, планшеты или программное обеспечение для геометрии, позволят вовлечь учащихся в практическую деятельность на уроке и вне его. Эти инструменты обеспечивают визуальное представление геометрических концепций и позволяют учащимся манипулировать фигурами и исследовать их взаимосвязи. Учащиеся смогут проектировать и строить модели, создавать масштабные чертежи или использовать геометрию для решения практических задач в архитектуре, инженерии или искусстве. А использование манипулятивных средств, как блоки узоров, танграммы или геоборды, а также 3D-модели, помогут учащимся визуализировать геометрические фигуры и манипулировать ими. Эти материальные объекты позволят улучшить понимание и обеспечить конкретное представление абстрактных концепций.

Интеграция технологий VR предлагает новый подход к устранению трудностей в ходе обучения геометрии школьников.

2. Основной текст статьи

Виртуальная реальность (VR) может значительно улучшить преподавание геометрии, обеспечивая захватывающий и интерактивный опыт. Учащиеся могут исследовать трехмерные формы и пространственные отношения в виртуальной среде, улучшая свои навыки понимания и визуализации. VR может моделировать реалистичные сценарии и позволять учащимся манипулировать геометрическими объектами и исследовать их с разных точек зрения, способствуя более глубокому пониманию концепций. Кроме того, VR может обеспечить увлекательные и интерактивные занятия, такие как виртуальные головоломки или игры, чтобы сделать изучение геометрии более приятным и запоминающимся.

Необходимо отметить, что среди преимуществ, привносимых технологиями виртуальной реальности при обучении геометрии, это повышение уровня вовлеченности школьников, улучшение пространственного понимания, повышение мотивации и возможности персонализировать обучение. А иммерсивная природа виртуальной реальности помогает стимулировать школьника к исследовательской деятельности, способствуя более глубокому пониманию геометрии как науки.

Хотя использование в обучении геометрии технологий виртуальной реальности имеет множество преимуществ, не стоит забывать и о недостатках,

ограничениях их использования, соответствия техническим требованиям и стоимости оборудования виртуальной реальности.

Технология виртуальной реальности является дорогостоящей и требует специального аппаратного и программного обеспечения, которое может быть недоступно для всех образовательных учреждений или отдельных лиц. Не все учащиеся могут иметь доступ к устройствам виртуальной реальности или необходимое пространство для их эффективного использования, что ограничивает охват и инклюзивность преподавания геометрии на основе виртуальной реальности. Опыт использования новых виртуальных технологий показывает, что у некоторых пользователей появляется ощущение дискомфорта или укачивания, что не допустимо в ходе процесса обучения. И одна из главных проблем – это отсутствие разработанного доступного высококачественного контента с геометрией виртуальной реальности.

Несмотря на эти проблемы, VR по-прежнему может быть ценным дополнительным инструментом в обучении геометрии, предоставляя уникальные визуализации и симуляции, которые улучшают понимание и вовлеченность. Рассматриваемые технологии обеспечивают захватывающую и интерактивную среду обучения, где учащиеся могут манипулировать геометрическими объектами, исследовать трехмерное пространство и визуализировать абстрактные концепции более конкретным и интуитивно понятным способом.

Современные гаджеты среди которых хотелось бы выделить VR-очки позволяют не только повысить качество образования, но и привить интерес к предмету.

Применение VR-очков позволяет погрузить школьника в геометрический мир. Очки виртуальной реальности создают захватывающую трехмерную среду, которая дает возможность учащимся исследовать геометрические формы и структуры в интерактивной и увлекательной форме. Такой гаджет позволяет увидеть не только объемные изображения, но и побывать внутри конструкции. Что позволяют получить обучающемуся практический опыт моделирования, углубить понимание геометрических принципов и взаимосвязей. Кроме того, VR-очки обеспечивают персонализированный опыт обучения, немедленную обратную связь и возможность самостоятельного исследования, способствуя активному обучению.

3. Заключение

В заключение можно сказать, что технологии виртуальной реальности открывают значительные перспективы в улучшении образования в области геометрии, обеспечивая захватывающий и интерактивный опыт обучения.

Список источников

1. Асамбаев А.А., Асамбаев А.Ж. Элементы технологии дополненной реальности на уроках геометрии // StudNet. 2021. №6. - URL: https://cyberleninka.ru/article/n/elementy-tehnologii-dopolnennoy-realnosti-na-urokah-geometrii (дата обращения: 01.11.2023).

2. Дронова А.И., Смыковская Т.К. Цифровые сервисы при изучении геометрии в основной школе // Педагогика, психология, общество: от теории к практике: материалы II Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Чебоксары, 18 июля 2023 года / Чувашский республиканский институт образования Министерства образования Чувашской Республики. – Чебоксары: Общество с ограниченной ответственностью «Издательский дом «Среда», 2023. – С. 98-103.

3. Новикова Е., Холодкова В. Дополненная и виртуальная реальность как средство развития творческого потенциала учащегося // Компьютерные инструменты в школе. – 2018. - №2. С. 31-40.

4. Утеулиев, Н. С. Применение дополненной реальности в процессе обучения геометрии // Математика и проблемы образования: Материалы 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, Киров, 22–24 сентября 2022 года. – Киров: Издательство "Веси", 2022. – С. 169-171.

5. Школа и виртуальная реальность [Электронный ресурс]. - URL: https://dzen.ru/a/Yl6bSZcbBEuM-5cm?utm_referer=www.google.com (дата обращения: 01.11.2023).

References

1. Asambayev A.A., Asambayev A.J. Elements of augmented reality technology in geometry lessons // StudNet. 2021. No.6. - URL: https://cyberleninka.ru/article/n/elementy-tehnologii-dopolnennoy-realnosti-na-urokah-geometrii (accessed: 01.11.2023).

2. Dronova A.I., Smykovskaya T.K. Digital services in the study of geometry in primary school // Pedagogy, psychology, society: from theory to practice : materials of the II All-Russian Scientific and Practical conference with international participation, Cheboksary, July 18, 2023 / Chuvash Republican Institute of Education of the Ministry of Education of the Chuvash Republic. Cheboksary: Limited Liability Company "Publishing House "Wednesday", 2023. – pp. 98-103.

3. Novikova E., Kholodkova V. Augmented and virtual reality as a means of developing a student's creative potential // Computer tools at school. - 2018. - No.2. pp. 31-40.

4. Uteuliev, N. S. Application of augmented reality in the process of teaching geometry // Mathematics and problems of education: Materials of the 41st International Scientific Seminar of Teachers of Mathematics and Computer Science of universities and pedagogical universities, Kirov, September 22-24, 2022. – Kirov: Vesi Publishing House, 2022. – pp. 169-171.

5. School and virtual reality [Electronic resource]. - URL: https://dzen.ru/a/Yl6bSZcbBEuM-5cm?utm_referer=www.google.com (accessed: 01.11.2023).

Современные проблемы физико-математических наук. 2023. С. 672-675.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2023. 672-675.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91+519.65

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕМЫ «ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ»

Анна Дмитриевна Янченко✉
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия
d_anya57@bk.ru✉

Аннотация. *В данной статье рассматриваются особенности изучения тел вращения, а также методика работы с ними. Также даны методические рекомендации по изучению каждого круглого тела.*

Ключевые слова: *тело вращения, цилиндр, конус, усеченный конус, шар, пирамида.*

Финансирование: *работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 17-77-3019.*

Conference paper

METHODOLOGICAL RECOMMENDATIONS FOR STUDYING THE TOPIC “BODIES OF ROTATION”

Anna D. Yanchenko✉
Orel State University named after I.S. Turgeneva, Orel, Russia
d_anya57@bk.ru✉

Abstract. *This article discusses the features of studying bodies of rotation, as well as methods of working with them. Methodological recommendations for studying each round body are also given.*

Keywords: *body of rotation, cylinder, cone, truncated cone, ball, pyramid.*

Funding: *the work was supported by the Russian Science Foundation, project No. 17-77-3019.*

1. Введение

В настоящее время тела вращения изучаются во втором полугодии 11 класса. Всего на изучение темы по учебнику Л.С. Атанасяна отводится 17 часов, при этом предусмотрено проведение двух контрольных работ.

Тема «Тела вращения» усваивается учащимися, как правило, на достаточном уровне. Однако имеются типичные проблемы при изучении этой

© Янченко А.Д., 2023

темы. Анализ состояния знаний и умений учащихся показывает, недостаточную сформированность навыков в решении стереометрических задач, ошибки и недочеты как в выполнении графической части задания, так и в неумении проводить теоретические обоснования отдельных этапов решения, не всегда корректное использование теоретического материала, неаккуратно выполненные записи. Отрицательно сказывается на результатах работы отсутствие прочных вычислительных навыков у учащихся, утрата основных знаний и умений по курсу планиметрии.

Изучение каждого из тел вращения имеет свои особенности, которые важно учесть учителю. Выделим эти особенности и покажем методику работы с ними.

2. Основной текст статьи

Рекомендации при изучении цилиндра.

Часть сведений о цилиндре уже известны учащимся из курса геометрии предыдущих классов.

При изучении цилиндра следует обратить внимание на оси и плоскости симметрии цилиндра. Учащиеся должны прийти к выводу, что плоскость, параллельная основаниям цилиндра и проходящая через середину его высоты, также является плоскостью симметрии цилиндра.

Необходимо обратить внимание на построение сечений, обсудить, какая фигура является таким сечением.

При изучении темы впервые встречается такое понятие, как «тело, вписанное в другое тело». Надо обратить внимание учащихся на то, что общего определения для такой ситуации не предоставляется. Для каждого вида описанного и каждого вида вписанного тела определение будет сформулировано отдельно. При введении определения новой пары тел, одно из которых вписано в другое, следует детально рассмотреть аналогичные особенности их взаимного расположения. Подчеркнуть, что вписать в цилиндр и описать вокруг цилиндра можно не всякую призму. Указать, какими свойствами должна обладать призма, чтобы её можно было вписать в цилиндр либо описать около цилиндра. Учащиеся должны осознать, чем обоснованы эти свойства, и в дальнейшем применять эту информацию при решении задач.

Рекомендации при изучении конуса.

Определение конуса проходит по такой же схеме, что и определение цилиндра: вначале определяется поверхность конуса, а затем определяется конус как тело с указанной границей. Нужно обратить внимание, что боковая поверхность конуса – ограниченная фигура.

Так же, как и при изучении цилиндра, необходимо обратить внимание на построение сечений, обсудить, какая фигура является таким сечением.

Полезно рассматривать модель развертки конуса при определении площади боковой и полной поверхности.

Рекомендации при изучении усеченного конуса.

Усеченный конус – это новое понятие для обучающихся. Его можно определять двояко: как результат деления конуса на два тела плоскостью, параллельной плоскости основания, и как результат вращения прямоугольной

трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной основаниям. Важен именно тот факт, что трапеция вращается вокруг той стороны, которая перпендикулярна основаниям. Именно поэтому при вращении оснований трапеции получаем круги, лежащие в параллельных плоскостях.

Следует обратить внимание учащихся, что если пересечь конус плоскостью, не параллельной плоскости основания, то образовавшееся тело усечённым конусом не является.

Рекомендации при изучении комбинации геометрических тел.

Комбинация усечённых конуса и пирамиды.

Комбинации усечённого конуса и усечённой пирамиды достаточно сложны. Целесообразно сделать вывод о том, что основания усечённой пирамиды являются гомотетичными многоугольниками, вписанными в гомотетичные окружности (описанными около гомотетичных окружностей). Следует обратить внимание на то, что при рассмотрении комбинации конуса и пирамиды обязательным условием является совпадение вершин конуса и пирамиды. Поэтому условия того, что в пирамиду можно вписать конус (около пирамиды можно описать конус), два: кроме требования существования вписанной в основание (описанной около основания) окружности, ещё имеется требование, чтобы вершина пирамиды проектировалась в центр этой окружности.

Многогранники, вписанные в сферу.

Определение многогранника, вписанного в сферу, достаточно просто. В данном определении не требуется, чтобы многогранник был выпуклым. Отдельно следует рассмотреть пирамиду и призму, вписанные в сферу.

Многогранники, описанные около сферы.

Определение многогранника, описанного около сферы, так же, как и многогранника, вписанного в сферу, достаточно просто. Нужно обратить внимание на то, что в данном определении не указано, является ли многогранник выпуклым. Однако далее при формулировке достаточных условий того, что в многогранник можно вписать сферу, формулировка «выпуклый» присутствует.

Следует обратить внимание на то, что, характеризуя положение центра вписанной в многогранник сферы, рассматривается расстояние от точки до плоскостей, содержащих грани, а не до самих граней. Это очень важный момент. Ведь исходя из определения расстояния от точки до фигуры, расстояние от точки до многогранника не обязательно равно расстоянию от точки до плоскости многогранника.

Тела вращения, вписанные в сферу, и описанные около сферы.

Поскольку цилиндр, конус и сфера являются телами вращения, то представить эти тела вписанными в сферу достаточно легко. Этому помогают рисунки, на которых изображены равнобедренный треугольник, прямоугольник и равнобедренная трапеция, вписанные в окружность. Эти же рисунки помогают уяснить взаимное расположение элементов этих тел, знания о которых необходимы для решения задач.

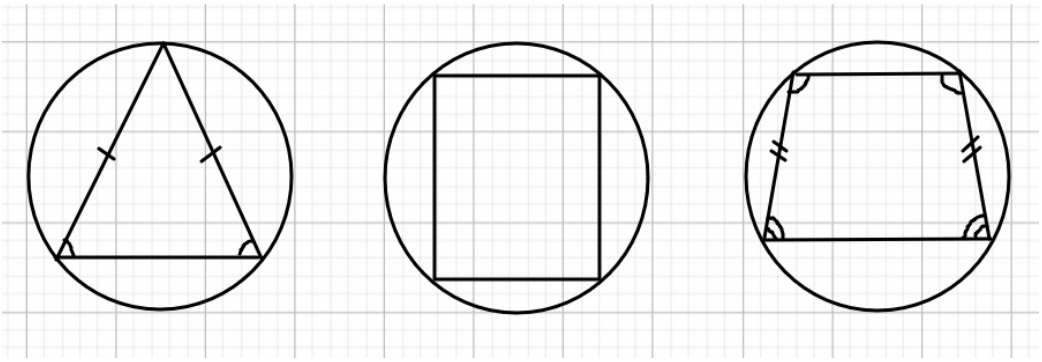


Рисунок 1. Вписанные в окружность геометрические фигуры.

Следует обратить внимание учащихся на то, что любой цилиндр и любой конус, и любой усечённый конус можно вписать в сферу.

Рекомендации при изучении сферы и шара.

Учащиеся достаточно легко воспринимают этот материал, поскольку он ассоциативно и непосредственно связан со многими понятиями, изученными в курсе планиметрии.

Целесообразно перед изучением этой темы повторить такое понятие, как ГМТ, а также напомнить учащимся определения окружности, круга и формул с ними связанных.

Рекомендации при изучении взаимного расположения сферы и плоскости.

Перед началом изучения данной темы следует повторить с учащимися определение сферы как ГМТ и актуализировать знания о том, как соотносится с радиусом сферы расстояние от центра сферы до точки, находящейся на сфере, внутри сферы и вне её.

На основании этой информации учащиеся достаточно легко воспринимают случаи, когда сфера и плоскость не имеют общих точек и когда их пересечением является окружность.

Следует обратить внимание учащихся на то, что понятие фигуры, касающейся сферы, вводится только для плоских фигур. При этом для касания недостаточно, чтобы фигура принадлежала касательной плоскости: сфера и фигура должны иметь общую точку. С другой стороны, наличие только одной общей точки у фигуры и сферы тоже недостаточно для того, чтобы фигура касалась сферы.

Следует обратить внимание учащихся на то, что через данную точку сферы можно провести бесконечно много прямых, касающихся данной сферы в этой точке. Этот факт не имеет планиметрического аналога.

Свойство касательной плоскости к сфере является аналогом планиметрического свойства касательной к окружности.

3. Заключение

Анализ педагогической, методической и дидактической литературы позволил выявить ряд важных методических моментов, которые надо учесть при изучении темы «Тела вращения».