# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

**Материалы X Всероссийской научно-практической конференции (г. Орёл, 29-30 ноября 2024 г.)**

Орёл
ОГУ имени И.С. Тургенева
2024

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ И.С. ТУРГЕНЕВА»

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Материалы X Всероссийской научно-практической конференции
(г. Орёл, 29-30 ноября 2024 г.)

Под общей редакцией
кандидата физико-математических наук, доцента Т.Н. Можаровой

Научное электронное издание

Орёл
ОГУ имени И.С. Тургенева
2024

УДК 51(062)+53(062)+004(062)
ББК 22.1я43+22.3я43+16я43
С568

Редакционная коллегия:
*Т.Н. Можарова* – канд. физ.-мат. наук, доц. (пред., отв. ред.);
*В.И. Дорофеева* – канд. физ.-мат. наук, доц. (член редкол.);
*О.И. Марков* – д-р физ.-мат. наук, проф. (член редкол.);
*В.Д. Селютин* – д-р пед. наук, проф. (член редкол.);
*С.П. Строев* – канд. экон. наук, доц. (член редкол.);
*О.В. Тарасова* – д-р пед. наук, проф. (член редкол.);
*Ю.С. Федяев* – канд. физ.-мат. наук, доц. (член редкол.)

С568 **Современные проблемы физико-математических наук**: материалы X Всероссийской науч.-практ. конф., (г. Орёл, 29-30 ноября 2024 г.) [Электронный ресурс] / под общ. ред. канд. физ.-мат. наук, доц. Т.Н. Можаровой. – Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2024. – 623 с. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: стационарные и переносные компьютеры с операционной системой Windows XP и выше; 3 Mb свободной памяти HDD; дисковод, мышь.

В сборнике содержатся тексты докладов, прочитанных на X Всероссийской научно-практической конференции, проходившей 29-30 ноября 2024 года на базе физико-математического факультета Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева.

Материалы сборника трудов конференции предназначены научным работникам, занимающимися исследованиями в области физико-математических наук, в том числе преподавателям, аспирантам и студентам физико-математических направлений.

*Материалы издаются в авторской редакции с незначительной технической корректурой.*

УДК 51(062)+53(062)+004(062)
ББК 22.1я43+22.3я43+16я43

ISBN 978-5-9929-1738-3 © Оформление. ОГУ имени И.С. Тургенева, 2024

**Технические требования к программному обеспечению**

Программа просмотра Pdf файлов.

***Компьютерная верстка:*** *А.А. Аксюхин*
***Технический редактор****: А.А. Аксюхин*

Дата подписания к использованию 16.12.2024 г.
CD-R. Объем – 36,7 Мб
Количество носителей – 1
Контактные данные:
ул. Комсомольская, 95, г. Орёл, 302026
https://oreluniver.ru

# Содержание

**Предисловие**.....9

**Математический анализ и дифференциальные уравнения**.....10

Аблабеков Б.С., Аблабекова А.Б., Гыязова Ж.С. Задача идентификации функции источника в специальном двумерном уравнении Аллера.....10
Антоновская О.Г., Бесклубная А.В. К вопросу об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей ограничениям на её первую производную.....17
Баротов Б.Х. Исследование разрешимости некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа с вырождением.....23
Бекиев А.Б. О разрешимости обратной задачи для уравнения четвертого порядка в прямоугольной области.....32
Боковели Н.В., Лабуз М.А., Чаплыгина Е.В. Колебания струны.....36
Евхута О.Н. Спектральные свойства интегрального оператора с положительным ядром.....43
Kamanda A.B. On certain two-dimensional discrete equations.....46
Можарова Т.Н., Можаров Н.Ю. К вопросу о функциональной реализации пространства линейных непрерывных функционалов.....50
Платонов С.С. О спектральном синтезе в пространстве решений систем уравнений в свертках на дискретных абелевых группах.....54
Резниченко И.О., Крутицкий П.А., Колыбасова В.В. О квадратурной формуле для гармонического потенциала простого слоя.....62
Солиев Ю.С. Об интерференционных квадратурных формулах для сингулярных интегралов.....73
Соломатин О.Д. Операторный метод при решении дифференциального уравнения второго порядка в частных производных.....77
Соломатин О.Д., Лапаткина Е.И. Решение интегро-дифференциальных уравнений.....81
Халилов Э.Г. Исследование решения криволинейного интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле с проекционными методами.....85
Цуканова А.М., Чернова О.В. Пример преобразования эллиптической системы.....93
Чаплыгина Е.В. Об единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе.....98

**Алгебра, топология и геометрия**.....102

Аванесян К.К., Кыров В.А. Вычисление некоторых локально дважды просто транзитивных групп Ли преобразований четырехмерного пространства.....102
Богданова Р.А., Кудачин И.В., Нещадим М.В. Функциональное уравнение на группу движений симплициальной II типа трехмерной геометрии.....108
Гамилов Я.В., Джабаров А.М., Сауляк А.Ф., Попов И.Н. Разложение многочленов по степеням линейного многочлена и по биномиальным многочленам: матричный и альтернативный методы.....114
Дергачев В.М, Лелявин С.Н. Построение бесконечных алгебраических функторов в алгебраической *K* теории.....122
Кыров В.А. Функционал энергии поверхности собственно гельмгольцевой группы.....130

Логунов И.С. Вычисление матрицы Грама одного неприводимого представления группы Ли SL(4, ℂ)....134
Нещадим М.В., Бородин А.Н., Симонов А.А. Конструкции квандлов над группами и кольцами....138
Ташпулатов С.М. Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии четырех электронных систем в примесной модели Хаббарда. Синглетные состояния....145
Черкасова В.В., Черкасов Е.Д. Исследование свойств поверхностей постоянной средней кривизны с применением мультипликативного интеграла....157

**Теория вероятностей и математическая статистика**....163

Глухов И.Ю., Зиненко И.Н. Использование методов математической статистики в изобразительном искусстве....163
Горбунова А.В. О подходе к управлению скоростью обслуживания в системах с разделением и параллельным обслуживанием заявок....173
Левизов С.В. Об игре «до первой остановки» (ч. 2)....180

**Методы дискретных особенностей в задачах математической физики**....184

Аксюхин А.А. Математическое моделирование трёхмерных задач о дебите несовершенных скважин, работающих в кусочно-однородной среде с несколькими границами сопряжения....184
Дорофеева В.И., Дорофеев Д.Ю. Исследование процесса изменения уровня грунтовых вод в неоднородных слоях при наличии дренажной системы и полупроницаемых включений....194
Караваев П.С. О случаях совпадения спектральных линий в формуле Ридберга (продолжение)....200
Лекомцев Д.Г. Изменение 1-нормы матрицы при исследовании работы совершенной скважины в анизотропной среде методом дискретных особенностей....204
Саматов Б.Т., Умаралиева Н.Т. Дискретная задача преследования с суммарными ограничениями на управления....210
Якушина С.И., Загородних Н.А., Преснецова В.Ю. Математическая модель прогноза прочности композиционного материала путём расчёта теоретического предела прочности....213

**Физика конденсированного состояния**....219

Гусейнов Д.И., Адгезалова Х.А., Гасанов О.М. Электрофизические свойства и теплопроводность сплавов систем $Er_xSn_{1-x}Se$....219
Ермаков В.И., Клементьев Е.С. Камеры высокого давления с разной угловой апертурой для нейтронных исследований в физике конденсированного состояния....224
Кеда И.С., Доценко О.А. Влияние параметров ультразвуковой обработки на комплексную диэлектрическую проницаемость композита с многостенными углеродными нанотрубками....229
Колпаков А.И., Кузьменко А.П., Матарыкин К.А. Характеризация магнетронных структур теллурида висмута *n*-типа проводимости, созданных высокочастотным магнетронным распылением....235
Нифтиев Н.Н. Электрические свойства кристаллов $FeGa_2Se_4$....244

Орлов Е.Ю., Кузьменко А.П. Влияние размерного эффекта на электронные и оптические свойства боронитридных нанокластеров типа «кольцо»....250
Тимофеева Е.Э., Попов А.В., Орловский Ю.В. Спектрально-селективное исследование рабочей схемы квантового вентиля CNOT на кристалле $CaF_2$: $Er^{3+}$....256
Тиньков Н.И. Экспериментальная установка для исследования термоэлектрических явлений в коллоидных растворах....264
Товстоган Н.С., Клементьев Е.С. Магнитокристаллическая анизотропия и одноузельные эффекты в сложных оксидах....269

**Наноструктуры и наноматериалы**....276

Дёмина П.Б., Вихрова О.В., Дорохин М.В., Лесников В.П., Кузнецов Ю.М., Байдусь Н.В., Балясников Д.М., Здоровейщев А.В., Подогов А.А. Оптические и термоэлектрические свойства структур с квантовыми точками InAs/GaAs....276
Зуйко И.С., Бодякова А.И., Калиненко А.А., Юзбекова Д.Ю., Кайбышев Р.О. Влияние старения на микротвёрдость и структуру Al-Mg-Si-Cu сплава....282
Турин В.О., Бурцев Е.И., Киреев Д.Д., Турина А.В., Щеглов И.В., Илюшина Ю.В. Дисперсионные соотношения для волн в цепочках масса-в-массе и масса-в-массе-в-массе....289

**Экспериментальная и теоретическая физика**....316

Марков О.И. Моделирование работы термоэлектрического генератора на основе теллурида висмута....316
Мышеловка Л.В., Вирченко Ю.П. Гауссовское поле флуктуаций электрической поляризации в сильно разогретых диэлектрических средах....324

**Инженерные приложения физико-математических наук**....331

Воронина О.А., Донцов В.М., Тугарев А.С. Контроль и испытания при корпусировании микросхем....331
Едемский В.А., Кайлинь Ч. Симметричная 2-адическая сложность чередующихся последовательностей с периодом 4*pq*....338
Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Применение метода Канторовича-Галеркина при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием....345
Турин В.О., Рогов А.П., Аникина А.П., Рахматов Б.А. Улучшенная аппроксимация для полевой зависимости дрейфовой скорости электронов в нитриде галлия....349

**Математические методы в экономике**....366

Курбыко И.Ф. Прогнозирование объёмов оборота розничной торговли, подверженных сезонным колебаниям....366

**Машинное обучение и анализ данных**....375

Воронков П.Э., Зубкова Л.Н. Применение интеллектуальных технологий анализа эмоциональной тональности текста для оценки контента социальных сетей....375
Гафарова К.А. Применение алгоритма цифрового моделирования сложных технических систем на основе мультиагентного подхода....381
Русских Т.Н., Желтиков А.А. Построение нейросетевых моделей классификации медицинских изображений....386

Русских Т.Н., Шаламов В.С. Сегментации изображений с нечёткими контурами на основе методов глубокого обучения....391

**Информатика и информационные технологии**....397

Амиралиева Р.З. Использование технологий искусственного интеллекта при написании научных статей на английском языке (применительно к специалистам в области математических и естественно-научных дисциплин)....397
Ведеников М.С., Федяев Ю.С. Разработка архитектуры веб-приложения для мониторинга цен на продукты питания....403
Гончарова Н.А., Кащевская В.М. Возможности интеграции технологий искусственного интеллекта в педиатрическую практику....409
Ермаков А.Ф., Зимин И.С. Сравнительный анализ информационной безопасности в квантовых и оптических системах связи....417
Ермаков А.Ф., Зимин И.С. Сравнительный анализ характеристик и перспективы использования оптических и квантовых линий связи....422
Закалкина Е.В., Рогозянская Е.А., Еремеева Н.П. Мультимедийные технологии в интерактивном обучении....428
Игнатов Д.В. Импортозамещение систем виртуализации: обзор рынка российских разработок....432
Никулин А.В. Работа с датой и временем в микросервисной архитектуре. Методы и рекомендации....440
Русакова В.Н., Козлова Ю.С. Никонорова К.С. Освоение информационных технологий для анализа данных как ступень роста профессиональных компетенций будущего медика....450
Русских Т.Н., Буцев И.А. Разработка модулей сервиса поддержки принятия врачебных решений....459
Рыжков Д.С., Привалов А.Н. Информационно-справочные системы в области строительства....466
Созина А.А. Реализация безопасной отправки почтовых сообщений посредством протоколов TLS и SASL с использованием Postfix на примере ОС Альт....475
Фролов Н.А., Привалов А.Н. Программное обеспечение для управления системами приточно-вытяжной вентиляции....485
Чижикова Ю.В., Ефремов Д.Г. Современные тенденции в социальной инженерии....492

**Методика преподавания точных наук в школе и вузе**....502

Бухарина А.А. Использование дифференцированного подхода при изучении темы «Наглядная геометрия» в 5-6 классах....502
Виситаева М.Б. Некоторые психолого-педагогические подходы при решении проблем с параметрами....511
Гончарова Н.А., Полубабин Д.Н. Методические рекомендации по организации подготовки школьников 5-6 классов к участию в математических олимпиадах....518
Данилова О.Ю., Телкова С.А. Представление связей между дисциплинами «Алгебра и геометрия» и «Математические основы криптографии» на основе графов....528
Зубкова Л.Н. Формирование конструктивных навыков школьников при изучении курса стереометрии....532

Кокорев А.В., Чернобровкина И.И., Кокорева Е.В. Роль аналитического мышления в условиях компетентностного подхода в инженерном образовании....536
Костикова Н.Н. Формирование познавательной активности учащихся при изучении темы «Обыкновенные дроби» с использованием средств наглядности....546
Кузнецова И.С., Цветкова И.В. Конструирование учебного процесса в зоне ближайшего развития обучающихся в высшей школе на примере изучения дисциплины «Высшая математика»....556
Логунов И.С. О делении окружности на равные части одним циркулем....561
Мусин А.И., Самойлов В.Н., Насыров Г.Ф. О преподавании ускоренного курса «Элементы высшей математики»....566
Овсянникова Т.Л., Марахова И.Е. Приёмы активизации познавательной учебной деятельности студентов СПО при изучении тригонометрии....573
Прояева И.В., Колобов А.Н. Применение теории объемов фигур в прикладных задачах....582
Румянцев В.С., Большакова Н.Н. Лекционная демонстрация пироэлектрического эффекта....586
Симанёва Т.А., Небытова А.В. Эффективные стратегии решения логических задач в ЕГЭ по информатике: от аналитики к программной реализации....591
Симанёва Т.А., Нестерова С.А. Методика изучения алгоритмов обработки файлов для подготовки к ЕГЭ в рамках элективного курса по информатике для профильной школы....600
Фомина Т.П., Седлева Е.А. Роль и место игровых технологий на уроках предмета «Вероятность и статистика»....610
Чернобровкина И.И., Кокорев А.В., Глушкова М.В. Функциональные способы решения задач элементарной математики....618

## Предисловие

В настоящем сборнике представлены материалы X Всероссийской научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математических наук» (СПФМН-2024), состоявшейся 29-30 ноября 2024 г. на физико-математическом факультете Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева в городе Орле и объединившей участников из крупнейших университетов Москвы, Архангельска, Белгорода, Великого Новгорода, Владимира, Воронежа, Горно-Алтайска, Ельца, Калининграда, Кирова, Коврова, Курска, Липецка, Нижнего Новгорода, Новосибирска, Новочеркасска, Оренбурга, Петрозаводска, Ростова-на-Дону, Самары, Сарова, Твери, Тольятти, Томска, Уфы, Шуи, Ялты, а также стран ближнего и дальнего зарубежья.

Целью конференции являлось обсуждение фундаментальных и прикладных проблем современной математики, физики, информационных технологий, вопросов методики преподавания.

Работа конференции проводилась по следующим секциям:

1. Математический анализ и дифференциальные уравнения.
2. Алгебра, топология и геометрия.
3. Теория вероятностей и математическая статистика.
4. Методы дискретных особенностей в задачах математической физики.
5. Физика конденсированного состояния.
6. Наноструктуры и наноматериалы.
7. Экспериментальная и теоретическая физика.
8. Инженерные приложения физико-математических наук.
9. Математические методы в экономике.
10. Машинное обучение и анализ данных.
11. Информатика и информационные технологии.
12. Методика преподавания точных наук в школе и вузе.

Благодарим всех авторов статей, докладчиков и участников за вклад в организацию нашей научно-практической конференции и ее успешное проведение.

*Организационный и программный комитеты*

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 10-16.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 10-16.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.946

# ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА В СПЕЦИАЛЬНОМ ДВУМЕРНОМ УРАВНЕНИИ АЛЛЕРА

***Бактыбай Сапарбекович Аблабеков[1]✉, Асел Бактыбаевна Аблабекова[2], Жылдыз Суюналиевна Гыязова[3]***
*[1,2,3]Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская республика*
*[1]ablabekov_63@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-0805-3532*
*[2]aselya05@mail.ru*, [3]zgyazova@gmail.com

**Аннотация.** Изучается обратная задача определения источника, зависящего от времени для специального двумерного уравнения Аллера. Дополнительная информация задаётся в виде переопределения во внутренней точке. При решении исходной задачи осуществляется переход от обратной задачи к некоторой вспомогательной прямой задаче. Получено достаточное условие однозначной разрешимости рассматриваемой задачи. При доказательстве разрешимости задачи используется метод интегральных уравнений. Существование и единственность интегрального уравнения доказаны с помощью принципа сжатых отображений.

**Ключевые слова:** обратная задача, уравнения Аллера, переопределение во внутренней точке.

Conference paper

# THE PROBLEM OF IDENTIFICATION OF THE SOURCE FUNCTION IN A SPECIAL TWO-DIMENSIONAL ALLER EQUATION

***Baktybai S. Ablabekov[1]✉, Asel B. Ablabekova[2], Zhyldyz S. Gyyazova[3]***
*[1,2,3]Kyrgyz National University named after. Zh. Balasagyna, Bishkek, Kyrgyz Republic*
*[1]ablabekov_63@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-0805-3532*
*[2]aselya05@mail.ru*, [3]zgyazova@gmail.com

***Abstract.*** *Studied the inverse problem of determining a source, depending on the time for the multidimensional pseudoparabolic equation. Additional information is*

© Аблабеков Б.С., Аблабекова А.Б., Гыязова Ж.С., 2024

*given in form of an integral redefinition with a given weight function. To study solvability of the inverse problem, we realize a conversion from inverse problem to a some direct problem. We establish conditions for the existence and uniqueness of the classical solution of the problem considered. To prove solvability of the problem, we use the method of integral equations. The existence and uniqueness of the integral equation are proved by means of the contraction mappings principle.*

***Keywords:*** *inverse problem, pseudo-parabolic equations, integral redefinition.*

**1. Введение. Постановка задачи**

Под обратными задачами для дифференциальных уравнений будем понимать задачи определения коэффициентов, правой части, начальных или граничных условий по некоторой дополнительной информации о решении прямой задачи. Наиболее полное современное состояние теории обратных для дифференциальных уравнений с обширной библиографией отражены в монографиях [1-4]. Прямые и обратные задачи для двумерного псевдопараболического уравнения при других предположениях на входные данные и другими методами изучены в работах [1,5-7]. В настоящей работе установлены достаточные условия, при которых решение обратной задачи (1)–(3) существует и единственно.

Пусть $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, где $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < L,\ 0 < y < N\}$,

$\Pi_1 = \{(x,t) : 0 < x < L,\ 0 < t \le T\}$, $\Pi_2 = \{(y,t) : 0 < y < N, 0 < y \le T\}$.

$C^{(l,m,n)}(\bar{\Omega}_T)-$ пространство функций, непрерывно дифференцируемых соответственно по переменной *t* до порядка *n* и непрерывно дифференцируемых по пространственным переменным *x* до порядка *l* и *y* до порядка *m* включительно.

В области $\Omega_T$ рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Аллера

$$u_t = \Delta_2(u_t + Du)(x,y,t) + f(x,t)h(x,y,t) + g(x,y,t),\ (x,y,t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$u(0,y,t) = \varphi_1(y,t),\ u(L,y,t) = \varphi_2(y,t),\ (y,t) \in \bar{\Pi}_1, \quad (3)$$

$$u(x,0,t) = \psi_1(x,t),\ u(N,y,t) = \psi_2(x,t),\ (x,t) \in \bar{\Pi}_2, \quad (4)$$

где $\Delta_2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $u_0(x,y)$, $h(x,y,t)$, $\varphi_i(y,t), i = 1,2$, $\psi_i(x,t), i = 1,2$ - действительные заданные функции, $D-$ коэффициент диффузивности.

**Обратная задача.** Требуется найти пару функций $\{u(x,y,t), f(x,t)\}$ из соотношений (1) -(3), если она удовлетворяют следующим условиям переопределения

$$u(x,y_0,t) = \gamma(x,t),\ (x,t) \in \bar{\Pi}_2, \quad y_0 \in (0,N) \quad (5)$$

Условие (5) называется переопределением во внутренней точке.

**Определение 1**. Под решением обратной задачи (1)-(4) будем понимать задачу определения пары функций $\{u(x,y,t), f(x,t)\} \in C^{(2,4,1)}(\Omega_T) \times C(\Pi_1)$, которая удовлетворяет условиям (1)-(4).

Будем считать, что выполнены условия согласования

$$u_0(0,y)=\varphi_1(y,0), \qquad u_0(L,y)=\varphi_2(y,0),$$
$$u_0(x,0)=\psi_1(x,0), \qquad u_0(x,N)=\psi_2(x,0), \tag{6}$$
$$\gamma(0,t)=\psi_1(0,t), \qquad \gamma(L,t)=\psi_2(0,t).$$

Пусть входные данные обратной задачи (1) -(5) удовлетворяют следующим условиям:

$$u_0(x,y)\in C^2(\bar{\Omega}),\ \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3},\ \frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2},\ \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2\partial y}\in L_1(\Omega),$$

$$u_0(0,y)=u_0(L,y)=u_0(x,0)=u_0(x,N)=0, \tag{7}$$
$$u_{0xx}(0,y)=u_{0xx}(L,y)=u_{0xx}(x,0)=u_{0xx}(x,N)=0,$$
$$u_{0yy}(0,y)=u_{0yy}(L,y)=u_{0yy}(x,0)=u_{0yy}(x,N)=0,$$

$$\varphi_i(y,t)\in C(\bar{\Pi}_1),\ \psi_i(x,t)\in C(\bar{\Pi}_2),\ i=1,2, \tag{8}$$

$$g(x,y,t),\quad \gamma(x,t)\in C^{(1,0)}(\bar{\Pi}_2). \tag{9}$$

$$h(x,y,t)\in C^{(1,2,0)}(\bar{\Omega}_T),\ \left|h(x,y_0,t)\right|\ge h_0>0,$$
$$h(0,y,t)=h(L,y,t)=h(x,0,t)=h(x,N,t)=0, \tag{10}$$
$$h_{yy}(0,y,t)=h_{yy}(L,y,t)=h_{yy}(x,0,t)=h_{yy}(x,N,t)=0.$$

## 2. Сведение обратной задачи к начальной- краевой задаче для нагруженного уравнения Аллера

Заметим, что, так как задача (1) - (5) линейна, то ее решение можно искать в виде

$$\{u(x,y,t),f(x,t)\}=\{u_1(x,y,t),0\}+\{u_2(x,y,t),f(x,t)\}, \tag{11}$$

где $u_1(x,y,t)-$ решение в $\Omega_T$ прямой задачи

$$u_{1t}(x,y,t)-\Delta_2(u_{1t}+Du_1)(x,y,t)=g(x,y,t),\quad (x,y,t)\in\Omega_T, \tag{12}$$
$$u_1(x,y,0)=u_0(x,y),\qquad (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{13}$$
$$u_1(0,y,t)=\varphi_1(y,t),\ u_1(L,y,t)=\varphi_2(y,t),\ (y,t)\in\bar{\Pi}_1, \tag{14}$$
$$u_1(x,0,t)=\psi_1(x,t),\ u_1(N,y,t)=\psi_2(x,t),\ (x,t)\in\bar{\Pi}_2, \tag{15}$$

а пара $\{u_2(x,y,t),f(x,t)\}$ - решение в $\Omega_T$ обратной задачи:

$$u_{2t}(x,y,t)-\Delta_2(u_{2t}+Du_2)(x,y,t)=f(x,t)h(x,y,t),\ (x,y,t)\in\Omega_T, \tag{16}$$
$$u_2(x,y,0)=0,\qquad (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{17}$$
$$u_2(0,y,t)=u_2(L,y,t)=0,\ (y,t)\in\bar{\Pi}_1, \tag{18}$$
$$u_2(x,0,t)=u_2(N,y,t)=0,\ (x,t)\in\bar{\Pi}_2, \tag{19}$$
$$u_2(x,y_0,t)=\gamma(x,t)-u_1(x,y_0,t),\ (x,t)\in\bar{\Pi}_2,\quad y_0\in(0,N) \tag{20}$$

В работе [5] доказано, что решение задачи (12) -(15) при однородных граничных условиях имеет вид

$$u_1(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{0kn}\exp\left(-\frac{(k^2+n^2)}{1+D(k^2+n^2)}t\right)\sin\frac{k\pi}{L}x\sin\frac{k\pi}{N}y+$$
$$+\int_0^t\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}g_{kn}(\tau)\exp\left(-\frac{(k^2+n^2)}{1+D(k^2+n^2)}(t-\tau)\right)\sin\frac{k\pi}{L}x\sin\frac{k\pi}{N}yd\tau, \quad (21)$$

где

$$u_{0kn}=\frac{4}{LN}\int_0^L\int_0^N u_0(x,y)\sin\frac{k\pi}{L}x\sin\frac{n\pi}{N}ydxdy,$$
$$g_{kn}(t)=\frac{4}{LN}\int_0^L\int_0^N g(x,y,t)\sin\frac{k\pi}{L}x\sin\frac{n\pi}{N}ydxdy.$$

Отсюда следует, что для доказательства теоремы однозначной разрешимости задачи (1)-(5) достаточно доказать существование и единственность определения пары функций $\{u_2(x,y,t),f(x,t)\}$ из условий (16)-(20).

Поэтому, не ограничивая общности в задаче (1) - (5) положим, что

$$u_0(x,y)=\varphi_i(y,t)=\psi_i(x,t)=g(x,t)=0,\quad i=1,2.$$

Приведем обратную задачу (1) -(5) к некоторой вспомогательной задаче. Для этого положим $y=y_0$ в уравнении (1) и используем условие переопределения (5). Тогда получим

$$\gamma_t(x,t)=(\gamma_t+D\gamma)_{xx}(x,t))+(u_t+Du)_{yy}(x,y_0,t)+f(x,t)h(x,y_0,t). \quad (22)$$

Из (18) находим

$$f(x,t)=A(x,t)+h^{-1}(x,y_0,t)(u_t+Du)_{yy}(x,y_0,t), \quad (23)$$

где

$A(x,t)=h^{-1}(x,y_0,t)\left(\gamma_t(x,t)-(\gamma_t+D\gamma)_{xx}(x,t)\right)$ – известная функция.

Подставляя функцию $f(x,t)$ в уравнение (1), приходим к начально-краевой задаче для линейного нагруженного уравнения

$$u_t=\Delta_2(u_t+Du)(x,y,t)-h_1(x,y,t)(u_t+Du)_{yy}(x,y_0,t)+$$
$$+A(x,t)h(x,y,t), \quad (24)$$
$$u(x,y,0)=0,\qquad (x,y)\in\bar{\Omega}, \quad (25)$$
$$u(0,y,t)=u(L,y,t)=0,\ (y,t)\in\bar{\Pi}_1, \quad (26)$$
$$u(x,0,t)=u(N,y,t)=0,\ (x,t)\in\bar{\Pi}_2, \quad (27)$$

где $h_1(x,y,t)=h(x,y,t)h^{-1}(x,y_0,t)$

Вводя обозначение $u_{yy}(x,y,t)=w(x,y,t)$, из задачи (24)-(27), получим

$$w_t=\Delta_2(w_t+Dw)+h_2(x,y,t,w(x,y_0,t)), \quad (28)$$

$$w(x,y,0)=0, \qquad (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{29}$$

$$w(0,y,t)=0, \qquad w(L,z,t)=0, \qquad (y,t)\in\bar{\Pi}_1. \tag{30}$$

$$w(x,0,t)=w(N,y,t)=0, \qquad (x,t)\in\bar{\Pi}_2, \tag{31}$$

где

$$h_2(x,y,t,w(x,y_0,t)=-h_{1yy}(x,y,t)(w_t+Dw)(x,y_0,t)+A(x,t)h_{yy}(x,y,t).$$

**3. Разложение решения задачи (28) -(31) в ряд Фурье**

Решение уравнение (28) в области $\Omega_T$ ищем в виде ряда Фурье

$$w(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{k,n}(t)\vartheta_{k,n}(x,y), \tag{32}$$

где

$$w_{k,n}(t)=\frac{4}{LN}\int_0^L\int_0^N w(x,y,t)\vartheta_{k,n}(x,y)dxdy,\ \vartheta_{k,n}(x,y)=\sin\frac{k\pi}{L}x\sin\frac{k\pi}{N}y. \tag{33}$$

Предполагается, что функции $g_1(x,y,t)$ и $h_{1yy}(x,y,t)$ разлагается в ряды Фурье

$$h_2(x,y,t,w(x,y_0,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}h_{2k,n}(t,w)\vartheta_{k,n}(x,y). \tag{34}$$

где

$$h_{2k,n}(t,w)=\frac{4}{LN}\int_0^L\int_0^N h_2(x,y,t,w(x,y_0,t))\vartheta_{k,n}(x,y)dxdy. \tag{35}$$

Подставляя ряды (32) и (34) в уравнение (28), получаем

$$w'_{k,n}(t)+\frac{D\mu_{k,n}^2}{1+\mu_{k,n}^2}w_{k,n}(t)=\frac{h_{2k,n}(t,w)}{1+\mu_{k,n}^2}, \tag{36}$$

где

$$\mu_{k,n}^2=\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{N}\right)^2.$$

Решение уравнения (36), с учетом начального условия (29) имеет вид

$$w_{k,n}(t)=\frac{1}{1+\mu_{k,n}^2}\int_0^t\exp\left[-\frac{D\mu_{k,n}^2}{1+\mu_{k,n}^2}(t-\tau)\right]h_{2k,n}(\tau,w)d\tau. \tag{37}$$

Теперь подставляя представление (37) в ряд Фурье, получим

$$w(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1+\mu_{k,n}^2}\int_0^t\exp\left[-\frac{D\mu_{k,n}^2}{1+\mu_{k,n}^2}(t-\tau)\right]h_{2k,n}(\tau,w)d\tau\right]\vartheta_{k,n}(x,y). \tag{38}$$

Нетрудно доказать, что при условиях наложенных на функций $h(x,y,t),g(x,y,t)$ ряд (38) сходится абсолютно и равномерно.

Введем обозначение

$$G(x,y,\xi,\eta,t)=\frac{4}{LN}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{0k,n}\exp\left(-\frac{D\mu_{k,n}^2}{1+\mu_{k,n}^2}t\right)\vartheta_{k,n}(x,y)\vartheta_{k,n}(\xi,\eta) \tag{39}$$

Учитывая обозначения (34), (35) и (39), представление (39) перепишем в виде

$$w(x,y,t)=\int_0^t\int_0^L\int_0^N G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)h_{1yy}(\xi,\eta,\tau)(w_t+Dw)(\xi,y_0,\tau)d\eta d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^L\int_0^N G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)A(\xi,\eta)h_{\eta\eta}(\xi,\eta,\tau)d\eta d\xi d\tau. \tag{40}$$

Положив в (40) $y=y_0$, получим

$$w(x,y_0,t)=\int_0^t\int_0^L\int_0^N G(x_0,y,\xi,\eta,t-\tau)h_{1yy}(\xi,\eta,\tau)(w_t+Dw)(\xi,y_0,\tau)d\eta d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^L\int_0^N G(x,y_0,\xi,\eta,t-\tau)A(\xi,\eta)h_{\eta\eta}(\xi,\eta,\tau)d\eta d\xi d\tau. \tag{41}$$

Таким образом, мы получили систему линейных интегральных уравнений второго рода относительно функции $w(x,y,t)$, $w(x,y_0,t)$.

Итак, справедлива

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть для функции $u_0(x,y), \gamma(x,t), h(x,y,t), \varphi_j(y,t), \psi_j(x,t), j=1,2,$ выполнены условия согласования (6) и гладкости (7)- (10). Тогда существует единственное решение обратной задачи (1) -(5).

## Список источников


1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. – LAP LAMBERT Academic Publishing 2011. – 291 с.

2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 457 с.

3. Романов, В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 254 с.

4. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin U.A. Methods for solving inverse problems in mathematical fhysics. New York; Basel: Marcelker, 1999. – 709 p.

5. Аблабеков Б.С. О разрешимости смешанных задач для двумерного псевдопараболического уравнения [Текст] / Б.С.Аблабеков, А.Б. Байсеркеева // Приволжский научный вестник. 2016. №10(62). С. 5-9.

6. Аблабеков Б.С. Обратная задача определения функции источника в псевдопараболическом уравнении с интегральным переопределением [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. Б. Байсеркеева // Проблемы современной науки и образования. 2017. № 9 (91). С. 12-16.

7. Аблабеков Б.С. Локальная разрешимость многомерной обратной задачи для псевдопараболического уравнения [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. Б. Байсеркеева //Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2017. №7. С. 3-9.

## References

1. Ablabekov B.S. Inverse problems for differential equations of the third order. – LAP LAMBERT Academic Publishing 2011. – 291 p.

2. Kabanikhin S.I. Inverse and ill-posed problems. - Novosibirsk: Sib. scientific publishing house, 2009. – 457 p.

3. Romanov, V.G. Inverse problems of mathematical physics. – Moscow: Nauka, 1984. – 254 p.

4. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin U.A. Methods for solving inverse problems in mathematical fhysics. New York; Basel: Marcelker, 1999. – 709 p.

5. Ablabekov B.S. On the solvability of mixed problems for a two-dimensional pseudoparabolic equation [Text] / B.S. Ablabekov, A.B. Baiserkeeva // Privolzhsky Scientific Bulletin. 2016. No. 10 (62). P. 5-9.

6. Ablabekov B.S. The inverse problem of determining the source function in a pseudoparabolic equation with integral overdetermination [Text] / B.S. Ablabekov, A.B. Baiserkeeva // Problems of Modern Science and Education. 2017. No. 9 (91). P. 12-16.

7. Ablabekov B.S. Local solvability of a multidimensional inverse problem for a pseudoparabolic equation [Text] / B.S. Ablabekov, A.B. Baiserkeeva // Science, new technologies and innovations of Kyrgyzstan, 2017. No. 7. P. 3-9.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 17-22.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 17-22.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.925.51

# К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ ОГРАНИЧЕНИЯМ НА ЕЕ ПЕРВУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

***Ольга Георгиевна Антоновская***[1✉]***, Антонина Вячеславовна Бесклубная***[2]
[1,2]*Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Россия*
[1]*olga.antonovsckaja@yandex.ru*[✉]*, https://orcid.org/0000-0002-5688-7996*
[2]*antbesk@gmail.com*

***Аннотация.*** *В работе ставится вопрос об определении коэффициентов стационарной квадратичной функции Ляпунова для автономных дифференциальных систем, удовлетворяющей ограничению на ее первую производную в силу линеаризованной системы в случае кратных комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения. Рассматривается случай, когда матрица системы приводится к паре жордановых клеток третьего порядка, соответствующих комплексно-сопряженным корням характеристического уравнения.*

***Ключевые слова:*** *автономная дифференциальная система, квадратичная функция Ляпунова, первая производная функции Ляпунова в силу системы.*

Conference paper

# ON THE QUESTION OF DETERMINING THE COEFFICIENTS OF A QUADRATIC LYAPUNOV FUNCTION SATISFIED THE RESTRICTIONS ON ITS FIRST DERIVATIVE

***Olga Antonovskaya***[1✉]***, Antonina Besklubnaya***[2]
[1,2] *Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russia*
[1]*olga.antonovsckaja@yandex.ru*[✉]*, https://orcid.org/0000-0002-5688-7996*
[2]*antbesk@gmail.com*

© Антоновская О. Г., 2024

***Abstract.*** *The paper raises the question of determining the coefficients of the stationary quadratic Lyapunov function for autono-mous differential systems that satisfies the constraint on its first derivative due to the linearized system in the case of multiple complex-conjugate roots of the characteristic equation. The case is considered when the matrix of the system is reduced to a pair of Jordan cells of the third order, corresponding to the complex-conjugate roots of the characteristic equation.*

***Keywords:*** *autonomous differential system, quadratic Lyapunov function, first derivative of the Lyapunov function with respect to the system.*

## 1. Введение

При использовании метода функций Ляпунова [1, 2] для получения количественныцх оценок нелинейных дифференциальных систем часто используют квадратичную функцию Ляпунова [3], построенную для соответствующей линеаризованной системы и удовлетворяющей ограничениям на ее первую производную. В работе [4] предложена методика определения коэффициентов такой функции Ляпунова в случае различных корней характеристического уравнения. В [5] рассмотрен случай кратных действительных корней характеристического уравнения. В [6] ставится вопрос о построении функции Ляпунова с теми же совйствами в случае, когда имеются кратные комплексно-сопряженные корни характеристическогоу уравнения. Причем рассматривается случай когда матрица системы приводится к паре жордановых клеток второго порядка, соответствующих комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения. В настоящей работе рассматривается случай, когда матрица системы приводится к паре жордановых клеток третьего порядка, соответствующих комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения.

## 2. Выбор коэффициентов квадратиной функции Ляпунова

При выборе коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, для которой выполнение неравенства $\dot{V}(x) \leq 0$ для производной квадратичной формы $V(x)$ в силу линейной автономной системы обеспечивается с заданным запасом $\delta$ (т.е. $\dot{V}(x) < \delta V(x), x \neq 0$), естественно воспользоваться следующим утверждением, доказанным в работах [3, 7] , а именно: пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

такая, что корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. И пусть положительно опреде-

ленная квадратичная форма задана соотношением

$$V(x) = x'Kx \quad (K' = K). \tag{2}$$

Здесь знак $'$ означает транспонирование. Элементы постоянных $n \times n$-матриц $A = (a_{ij})_{ij=1}^{n}$ и $K = (K_{ij})_{ij=1}^{n}$ вещественные. Рассмотрим первую производную квадратичной формы (2) в силу системы (1)

$$\dot{V}_{(1)}(x) = x'(A'K + KA)x. \tag{3}$$

**Теорема 1.** *Пусть квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1) и на заданной поверхности уровня* $V(x) = V_0 = \mathrm{const} > 0$ *функции* $V(x)$ *максимальное значение её первой производной (3) в силу системы (1) равно* $\delta V_0$. *Тогда для собственных значений* $\lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, *матрицы коэффициентов системы (1) справедливо неравенство* $2 \max\limits_{i=\overline{1,n}} \mathrm{Re}\,\lambda_i \le \delta < 0$, *а коэффициенты квадратичной формы (2) удовлетворяют равенству*

$$\det(A'K + KA - \mu K) = 0, \tag{4}$$

*в котором* $\mu = \delta$.

Для случая, когда все корни характеристического уравнения действительны и различны, в [3] предложена методика выбора коэффициентов квадратичной формы (2), основанная на переходе с помощью линейного преобразования неизвестных к каноническому виду соответствующей дифференциальной системы, имеющему диагональный вид. В случае, когда среди корней характеристического уравнения есть кратные действительные корни, проблема состоит в том, что матрицу системы не всегда можно привести к диагональному виду. Этот случай рассмотрен в работе [5]. В статье [6] рассматривался случай, когда матрица системы может быть приведена к виду пары жордановых клеток порядка $m = 2$, соответствующих комплексно сопряженным корням характеристического уравнения.

Воспользуемся той же методикой в случае, когда матрица системы может быть приведена к виду пары жордановых клеток порядка $m = 3$, соответствующих комплексно сопряженным корням $\lambda, \bar{\lambda} = \alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения (т.е. $n = 6$).

Следует отметить, что всегда существует линейное невырожденное преобразование координат

$$x = B\xi, \quad \xi \in R^6, \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^{6}, \tag{5}$$

приводящее систему к каноническому виду [8]

$$\dot{\xi} = J_6\xi, \tag{6}$$

т.е. виду, когда матрица системы есть $6 \times 6$ матрица в вещественной жордановой канонической форме

$$J_6 = \begin{pmatrix} C(\alpha,\beta) & I & 0 \\ 0 & C(\alpha,\beta) & I \\ 0 & 0 & C(\alpha,\beta) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

в которой блоки

$$C(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Квадратичную функцию Ляпунова, подобно [5], будем подбирать в виде

$$V(\xi) = \xi' K \xi \quad (K' = K), \tag{9}$$

где матрица

$$K = \mathrm{diag}\,(K_{11}, K_{22}, ..., K_{6,6}),$$

причем, подобно [4], будем считать, что $K_{2k,2k} = K_{2k-1,2k-1} > 0$, $k = \overline{1,3}$. Первая производная квадратичной формы (9) в силу системы (6) будет иметь вид

$$\dot{V}_{(6)}(x) = x'(J_6' K + K J_6)x. \tag{10}$$

При этом элементы $A_{ij}$ $i,j = \overline{1,6}$ соответствующей ей матрицы $A_K = J_6' K + K J_6$ будут иметь вид

$$A_{2k-1,2k-1} = A_{2k,2k} = 2\alpha K_{2k-1,2k-1},\ k = \overline{1,3},$$

$$A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = 0,\ i = \overline{1,6},$$

$$A_{2k-1,2k+1} = A_{2k+1,2k-1} = K_{2k-1,2k-1},\ k = \overline{1,3},$$

$$A_{i,j} = 0,\ |i-j| > 2,\ i,j = \overline{1,6}.$$

То есть матрица $A_K$ квадратичной формы (10) есть пятидиагональная матрица, ф уравнение вида (4) запишется как

$$D_3(K_{11}, K_{33}, K_{5,5}, \mu) = \det(A_K - \mu K) =$$

$$= K_{11}^2 (2\alpha - \mu)^2 (((2\alpha - \mu)^2 K_{55} - K_{33})^2 K_{33} - K_{11} K_{55})^2 = 0, \tag{11}$$

При этом значение $\mu = 2Re\lambda = 2\alpha$, как и в случае, описанном в [5], недостижимо, т.к. при $\mu = 2\alpha$ из уравнения (11) получается условие $K_{11} K_{33}^2 = 0$, что противоречит положительной определенности (9). Таким образом, из теоремы 1 в рассматриваемом случае следует

**Теорема 2.** *Для любого $\delta \in (2\alpha, 0)$ положительно определенная квадратичная форма (9), коэффициенты которой удовлетворяют*

*условию $\mu_{max} = \delta$, где $\mu_{max}$ – наибольший корень уравнения (11), является функцией Ляпунова системы (6), где $J_6$ – вещественная каноническая форма матрицы, состоящей из пары жордановых клеток порядка $3$, соответствующих комплексно сопряженным корням $\lambda, \bar{\lambda} = \alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения, причем $\max \dot{V}_{(6)}/V = \delta$. При $\delta \leq 2\alpha$ квадратичной функции Ляпунова вида (9) с указанным свойством не существует.*

**Замечание.** Согласно теореме 2 при $m = 3$

$$\mu_{\max} = 2\alpha + \sqrt{\frac{K_{11}}{K_{33}} + \frac{K_{33}}{K_{55}}},$$

а если считать, что все отношения $K_{2i-3,2i-3}/K_{2i-1,2i-1} = k$ $(i = 2, 3)$ равны между собой, то при $m = 3$ получим, что $\mu_{max} = 2\alpha + \sqrt{2k}$.

Переходя обратно от канонических переменных к исходным и задавая конкретное числовое значение величины $K_{11} > 0$, получим квадратичную функцию Ляпунова, которая будет удовлетворять условию $\max \dot{V}_{(1)}/V = \delta$ для выбранного $\delta \in (2\alpha, 0)$ [4].

**3. Заключение**

Приведённые в статье результаты построения квадратичных функций Ляпунова с заданными свойствами в случае кратных комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения дополняют результаты о построении квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих ограничениям на первую производную (первую разность) в силу системы, полученные для случая различных корней характеристического уравнения, приведенные в работе [3], а также для случая, когда есть кратные действительные корни характеристического уравнения [5] .

## Список источников


1. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
2. Руш Н., Абетс Л., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 302 с.
3. Антоновская О.Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами. // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1220-1224.
4. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами. // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 275-281.

5. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами в случае кратных корней характеристического уравнения. // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 707-711.
6. Антоновская О.Г., Бесклубная А. В. К вопросу о построении квадратичных функций Ляпунова с заданными свойствами в случае кратных комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения. // Современные проблемы физико-математических наук. Сборник трудов конференции. Орел: ОГУ им. Тургенева, 2023.
7. Антоновская О.Г. О сохранении квадратичной функции Ляпунова линейной дифференциальной автономной системы при стационарных возмущениях ее коэффициентов. // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 3. С. 295-302.
8. Хорн Р. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

## References

1. Barbashin E. A. (Lyapunov Functions, Moscow: Nauka, 1970. 240 p.(In Russ.).
2. Rouche N., Habets P. and Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method, New York: Springer-Verlag, 1977. 302 p.
3. Antonovskaya O. G. On the construction of a quadratic Lyapunov function with given properties. // Differ. Equations, 2013; (9):1220–1224.
4. Antonovskaya O. G. Determination of the coefficients of a quadratic Lyapunov function with given properties. // Differ. Equations, 2016: (3):265-271.
5. Antonovskaya O. G. On determining of coefficients of a quadratic Lyapunov function with given properties in the case of multiple roots of characteristic equation. // Differ. Equations, 2023: (6):707-711.
6. Antonovskaya O. G., Dtsklubnaya A. V. To the question of quadratic Lyapunov functions construction with definite limitations over multiple complex-conjugate roots of characteristic equation. // Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. Conference paper. Orel, 2023. (In Russ.).
7. Antonovskaya O. G. On the preservation of a quadratic Lyapunov function of a linear differential autonomous system under constant perturbations of the coefficients. // Differ. Equations, 2023: (3):295-302.
8. Horn R., Johnson C. Matrix Analysis. New York: Cambridge Univ. Press, 1985. 655 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 23-31.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 23-31.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.968.7

# ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

***Бахтовар Хурсанкулович Баротов***[1]✉
[1]*Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия*
[1]*b.barotov@g.nsu.ru*✉*, https://orcid.org/0009-0006-8529-0837*

***Аннотация.*** *В работе изучается разрешимость краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений*

$$h(t)u - \int_0^t N(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau - \int_0^t R(t,\tau)u(x,\tau)d\tau = f(x,t),$$

$$h(t)u_t - \int_0^t N(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau - \int_0^t R(t,\tau)u(x,\tau)d\tau + c(x,t)u = f(x,t),$$

*с функции* $h(t)$*, обращающейся в нуль на отрезке* $[0,T]$ *(*$\Delta$*- оператор Лапласа по переменным* $x_1, \dots, x_n$*). Изучаемые уравнения отнесется к классу интегро – дифференциальных уравнений Вольтерры третьего рода.*

*Для изучаемых задач будут доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений-то есть решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.*

***Ключевые слова*** *интегро-дифференциальные уравнения вольтерровского типа, вырождение, краевые задачи, регулярные решеных, существование, единственность.*

Conference paper

# STUDY OF SOLVABILITY OF SOME CLASSES OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF VOLTERRA TYPE WITH DEGENERATION

***Bakhtovar Kh. Barotov***[1]✉
[1]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
[1]*b.barotov@g.nsu.ru* ✉*, https://orcid.org/0009-0006-8529-0837*

© Баротов Б. Х., 2024

***Abstract.*** *The work studies the solvability of boundary value problems for integro-differential equations*

$$h(t)u - \int_0^t N(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau - \int_0^t R(t,\tau)u(x,\tau)d\tau = f(x,t),$$

$$h(t)u_t - \int_0^t N(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau - \int_0^t R(t,\tau)u(x,\tau)d\tau + c(x,t)u = f(x,t),$$

*function* $h(t)$*, which vanishes on the interval* $[0,T]$ *(*$\Delta$*- is the Laplace operator in the variables* $x_1, \dots, x_n$*). The equations being studied will belong to the class of Volterra integro-differential equations of the third kind.*

*For the problems under study, theorems of existence and uniqueness of regular solutions will be proven, that is, solutions that have all derivatives generalized according to S.L. Sobolev and included in the corresponding equation.*

***Keywords:*** *integro-differential equations of Volterra type, degeneration, boundary value problems, regular solutions, existence, uniqueness.*

**1. Введение**

В данном исследовании рассматривается вопрос о разрешимости краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений

$$h(t)u - \int_0^t N(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau - \int_0^t R(t,\tau)u(x,\tau)d\tau = f(x,t), (*)$$

$$h(t)u_t - \int_0^t N(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau - \int_0^t R(t,\tau)u(x,\tau)d\tau + c(x,t)u = f(x,t), (**)$$

где функция $h(t)$ есть непрерывная на отрезке $[0,T](0 < T < \infty)$ функция, не имеющая фиксированного знака, $\Delta$ −оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_n$.

Уравнения (*) и (**) называется интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра третьего рода в случае, когда $N(t,\tau) \neq 0$ и $R(t,\tau) \neq 0$. Если $N(t,\tau) = 0$ и $R(t,\tau) \neq 0$, то уравнение (*) представляет собой уравнение Вольтерра третьего рода, которое было исследовано в работе [1]. Такие уравнения до сих пор не были полностью изучены, и рассмотрены лишь некоторые частные случаи. Следует отметить, что основное внимание в этих исследованиях уделяется уравнениям Вольтерры с определенным типом вырождения, как указано в работах [2]-[6]. В случае, когда $N(t,\tau) = N(\tau)$ и $R(t,\tau) = R(\tau)$ , после дифференцирования уравнения (*) по переменной $t$ получается дифференциальное уравнение с переменным направлением эволюции, которое было изучено в работах [7] и [8]. При условии $N(t,\tau) = N(\tau)$ и $R(t,\tau) = R(\tau)$ , уравнение (**) после дифференцирования по переменной $t$ становится уравнением смешанного типа. Уравнения такого типа были исследованы в работах [9]-[11].

Цель данного исследования заключается в доказательстве существования и единственности регулярных решений краевых задач для уравнений (*) и (**), то есть решений, обладающих всеми обобщенными производными по С.Л. Соболеву, входящими в уравнение.

**2. Постановка задач**

Пусть $\Omega -$есть ограниченная область пространства $R^n$ с гладкой (для простоты – бесконечно-дифференцируемой) границей $\Gamma, Q$ есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты $T, S = \Gamma \times (0,T)$. Далее, пусть $h(t), N(t,\tau)$ и $R(t,\tau)$ есть заданные функции, определённые при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$. $\Delta-$ оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_n$.

**Краевая задача I:** найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения

$$h(t)u - \int_0^t N(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau - \int_0^t R(t,\tau)u(x,\tau)d\tau = f(x,t), \qquad (1)$$

($f\ (x,t)$ – заданная функция) и такую, что для неё выполняется условие

$$u(x,t)|_S = 0 \qquad (2)$$

**Краевая задача II:** найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнение

$$h(t)u_t - \int_0^t N(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau - \int_0^t R(t,\tau)u(x,\tau)d\tau + cu = f(x,t), \qquad (3)$$

и такую, что для неё выполняются условие (2), а также условие

$$u(x,0) = 0, x \in \Omega. \qquad (4)$$

**3. Разрешимость краевых задач I**

Разрешимость краевой задачи (1) и (2) будет установлена в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$.

Положим

$$N_1 = \int_0^T \left( \int_0^t N_t^2(t,\tau)d\tau \right) dt\ , R_1 = \int_0^T \left( \int_0^t R_t^2(t,\tau)d\tau \right) dt\ . \qquad (5)$$

**Теорема 1.** *Предположим, что выполнены условия*

$$h(t) \in C^2([0,T]), N(t,t) \in C^2([0,T] \times [0,T]),$$
$$R(t,t) \in C^1([0,T] \times [0,T]) \qquad (6)$$
$$h(0) = 0, h(T) \geq 0 \qquad (7)$$

$N(t,t) \geq N_0 > 0, R(t,t) \leq 0$ *и при* $t \in [0,T]$ *выполняются неравенства*

$$h'(t) - 2R(t,t) - 2\sqrt{R_1} \geq c_1 > 0, \qquad (8)$$
$$N(t,t) - \sqrt{N_1} \geq c_2 > 0, \qquad (9)$$

*при* $(x,t) \in \overline{Q}$;

*Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q), f_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$, *краевая задача I имеет решение* $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$.

**Доказательство.** Рассмотрим краевую задачу: Найти функцию $u(x,t)$ которая является решением интегро – дифференциального уравнение

$$h(t)u_t(x,t) + [h'(t) - R(t,t)]u(x,t) - N(t,t)\Delta u(x,t) - \\ - \int_0^t N_t(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau - \int_0^t R_t(t,\tau)u(x,\tau)d\tau = f_t(x,t), \qquad (10)$$

в $Q$ и для которой выполняется условие (2).

Покажем, что в условиях теоремы — это уравнение имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее $W_2^{2,1}(Q)$. Используем метод регуляризации и метод продолжения по параметру.

Для положительного $\varepsilon$ рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения

$$-\varepsilon u_{tt}(x,t) + h(t)u_t(x,t) + [h'(t) - R(t,t)]u(x,t) - N(t,t)\Delta u(x,t) - \\ - \int_0^t N_t(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau - \int_0^t R_t(t,\tau)u(x,\tau)d\tau = f_t(x,t), \qquad (11)$$

и такую, что для неё выполняется условие

$$u_t(x,0) = u_t(x,T) = 0, x \in \Omega, \qquad (12)$$

а также условие (2).

Разрешимость этой задачи докажем с помощью методе продолжение по параметру.

Пусть $\lambda$ есть число из отрезка [0,1]. Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в $Q$ решением уравнения

$$-\varepsilon u_{tt}(x,t) + h(t)u_t(x,t) + [h'(t) - R(t,t)]u(x,t) - N(t,t)\Delta u(x,t) - \\ - \lambda \int_0^t N_t(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau - \lambda \int_0^t R_t(t,\tau)u(x,\tau)d\tau = f_t(x,t), \qquad (13)$$

и такую, что для неё выполняются условии (2) и (12). Как следует из теоремы о методе продолжение по параметру, эта задача будет разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$ при всех $\lambda$, если 1) задача (13), (2), (12) разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$, если $\lambda = 0$ ; 2) для решений этой задачи из пространства $W_2^2(Q)$выполняется априорная оценка

$$\|u(x,t)\|_{W_2^{2,1}(Q)} \le R_0 \|f(x,t)\| L_2(Q), \qquad (14)$$

с постоянной $R_0$, не зависящей от $\lambda$.

Выполнение 1) следует из общей теории краевых задач для эллиптических уравнений.

Покажем, что пункт 2) также справедлив.

Умножим уравнение (13) на $u(x,t)$ и проинтегрируем по $Q$. Применяя интегрирование по частям, получаем

$$\varepsilon \int_Q u_t^2\,(x,t)dxdt + \int_Q \left[\frac{h'(t)}{2} - R(t,t)\right] u^2(x,t)dxdt +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{Q} N(t,t)u_{x_i}^2(x,t)\,dxdt-\lambda\int_{Q}\left(\int_{0}^{t} N_t(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau\right)u(x,t)dxxdt-$$

$$-\lambda\int_{Q}\left(\int_{0}^{t} R_t(t,\tau)u(x,\tau)d\tau\right)u(x,t)dxxdt=\int_{Q} f_t(x,t)u(x,t)dxdt. \quad (15)$$

Из неравенств Юнга и Гельдера, а также из условий теоремы следует, что из (15) вытекает первая оценка

$$\varepsilon\int_{Q} u_t^2\,dxdt+\sum_{i=1}^{n}\int_{Q} u_{x_i}^2\,dxdt+\int_{Q} u^2\,dxdt\le M_1\int_{Q} {f_t}^2 dxdt. \quad (16)$$

Умножим уравнение (13) на функцию $-\Delta u(x,t)$ и проинтегрируем по $Q$. После несложных преобразований с использованием условий теоремы, неравенств Гельдера и Юнга получим, что для решений краевой задачи (13), (2), (12) выполняется оценка

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_{Q} u_{x_it}^2\,dxdt+\int_{Q}(\Delta u)^2\,dxdt\le M_2\int_{Q} {f_t}^2 dxdt. \quad (17)$$

Умножим уравнение (13) на $-u_{tt}(x,t)$ и проинтегрируем по $Q$. Применяя интегрирование по частям, получаем

$$\varepsilon\int_{Q} u_{tt}^2\,dxdt+\int_{Q} u_t^2\,dxdt+\sum_{i=1}^{n} u_{x_it}^2 dxdt\le M_3\int_{Q}(f_t^2+f_{tt}^2)dxdt \quad (18)$$

Заметим, что в оценках $(16)-(18)$ числа $M_1, M_2$ и $M_3$ не зависят от чисел $\lambda$ и $\varepsilon$.

Из оценок $(16)-(18)$ и из второго основного неравенства для эллиптических уравнений и вытекает требуемая оценка (14).

Как говорилось раньше, из оценки (14) следует, что краевая задача (13), (2), (12) разрешима в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$. при всех $\lambda$ из отрезка [0,1]-то есть и при $\lambda=1$.

Рассмотрим задачу (13), (2), (12) в случае $\lambda=1$. В силу рефлексивности гильбертова пространства [12], теоремы вложения [13]. Поскольку постоянные $M_1, M_2$ и $M_3$ не зависят от числа $\varepsilon$, то стандартная процедура выбора сходящейся подпоследовательности из семейства $\{u^{\varepsilon}(x,t)\}_{\varepsilon>0}$ решений задачи (13), (2), (12) позволяет перейти к пределу и в пределе получить, что существует функция $u(x,t)$, являющаяся в $Q$ решением уравнение (10) принадлижащееся пространству $W_2^{2,1}(Q)$ и такая, что для неё выполняется условие (2).

Уравнение (10) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(h(t)u-\int_{0}^{t} N(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau-\int_{0}^{t} R(t,\tau)u(x,\tau)d\tau-f(x,t)\right)=0, \quad (19)$$

интегрируя и используя равенства $h(0) = u(x,0) = 0$, приходим к выводу, что решение $u(x,t)$ краевой задачи (10), (2) и будет нужным решением краевой задачи (1), (2).

Теорема доказана.

**4. Разрешимость краевых задач I II**

Разрешимость краевой задачи (3), (2), (4) будет установлена в пространстве $W_2^2(Q)$.

**Теорема 2.** *Предположим, что выполнены условия*

$$h(t) \in C^2([0,T]), N(t,t) \in C^2([0,T] \times [0,T]),$$
$$R(t,t) \in C^1([0,T] \times [0,T]) \quad (20)$$
$$h(0) = 0, h(T) \geq 0 \quad (21)$$

$N(t,t) \geq N_0 > 0, R(t,t) \leq 0, c(x,t) \geq c_0 > 0$, *числа* $N_0$ *и* $c_0$ *достаточно велики.*

*Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f_{tt}(x,t) \in L_2(Q), f(x,0) = f_t(x,0) = 0$ *и при краевая задача I имеет решение* $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in W_2^2 Q)$.

**Доказательство.** Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, которая является решением интегро-дифференциального уравнения

$$h(t)u_{tt}(x,t) - N(t,t)\Delta u(x,t) + [c(x,t) + h'(t)]u_t(x,t) +$$
$$+[c_t(x,t) - R(t,t)]u(x,t) - \int_0^t N_t(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau -$$
$$- \int_0^t R_t(t,\tau)u(x,\tau)d\tau = f_t(x,t), \quad (22)$$

и такую, что для неё выполняются условия (2) и (4). Докажем, что эта задача имеет решение, принадлежащее пространству $W_2^2 Q)$.

Вновь воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Пусть $\varepsilon$ есть положительное число, $\lambda$ есть число из отрезка [0,1]. Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в $Q$ решением уравнения

$$h(t)u_{tt}(x,t) - N(t,t)\Delta u(x,t) - \varepsilon\Delta u_t + [c(x,t) + h'(t)]u_t(x,t) +$$
$$+[c_t(x,t) - R(t,t)]u(x,t) - \lambda\int_0^t N_t(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau -$$
$$-\lambda\int_0^t R_t(t,\tau)u(x,\tau)d\tau = f_t(x,t), \quad (23)$$

и такую, что для неё выполняются условие (2) и (4).

Как следует из [9], при $\lambda = 0$ и при принадлежности функции $f_t(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ эта задача имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^2 Q)$ и такое, что $\Delta u_t(x,t) \in L_2(Q)$ .Покажем, что для решений $u(x,t)$ имееют место нужные априорные оценки.

Умножим уравнение (23) на функцию $-(T-t)\Delta u_t(x,t)$ и проинтегрируем по $Q$.

В результате получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (23), (2), (4) выполняется оценка

$$\int_Q (\Delta u)^2 dxdt \le R_0 \int_Q (f_{tt}^2 + f_t^2) dxdt. \qquad (24)$$

Дальнейшие оценки выводятся стандартным образом с помощью умножения уравнения (23) последовательно на функции $u_t(x,t), \Delta u_t(x,t)$ и интегрирование по $Q$ с использованием оценки (24). В результате получим оценку

$$\int_Q [u_{tt}^2 + (\Delta u)^2 + \varepsilon(\Delta u_t)^2] dxdt \le R_0 \int_Q (f_{tt}^2 + f_t^2) dxdt. \qquad (25)$$

Заметим, что если в слагаемом

$$-\int_Q (T-t) f_t \Delta u_t dxdt$$

не выполнять интегрирование по частям, то левые част неравенств (24) и (25) можно будет оценить величиной

$$M \int_Q f_t^2 dxdt, M = const.$$

Это означает, что при фиксированном $\varepsilon$ краевая задача (23), (2), (4) будет иметь регулярное решение при всех $\lambda$ в том числе и при $\lambda = 1$.

Если же дополнительно будет выполняться условие $f_{tt} \in L_2(Q)$, то из оценок (24) и (25) будет следовать, что при $\varepsilon \to 0$ существует последовательность $\{u_m(x,t)\}$, сходящяяся к решению краевой задачи (22), 2), (4).

Очевидно теперь, что решение задачи (22), (2), (4) даст решение задачи (3), (2), (4) то есть требуемое решение.

Теорема доказана.

## Список источников

1. Кожанов А. И. Исследование разрешимости некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений третьего рода Вольтерровского типа. Доклады Академии Наук, 2018, том 478, №3, с. 262-265.

2. Тагаева С. Б. О регуляризации и единственности решений линейных интегральных уравнений Вольтера третьего рода в пространстве суммируемых функций. Бишкек, Кыргызстан: Международный Университет Инновационных Технологий, 2013.

3. Байзакова А. Б., Бектурова А. Т. О решениях интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра III рода. Бишкек,Кыргызстан: Наука, Новые технологии и инновации Кыргызстана, №5, 2017.

4. Чистякова Е. В., Соловарова Л. С., Доан Тай Сон. Об одном методе численного решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений со слабой особенностью в ядре // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2021. Т. 10, № 3. С. 5-15.

5. Kostic M., Fedorov V. E. Asymptotically (ω, c)-almost periodic type solutions of abstract degenerate non-scalar Volterra equations. Chelyabinsk: Chelyabinsk Physical and Mathematical Jornal.2020. Vol. 5, iss.4, part 1. P. 415-427.

6. Каракеев Т. Т., Бугубаева Ж. Т. Регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с невозрастающей функцией. Бишкек, Кыргызстан: Наука, Новые технологии и инновации Кыргызстана, №2, 2020.

7. Егоров И. Е., Разрешимость одной краевой задачи для уравнения смешанного типа высокого порядка, Дифференц. уравнения, 1987, том 23, номер 9, 1560–1567.

8. Кожанов А. И., Мациевская Е. Е., Вырождающиеся параболические уравнения с переменным направлением эволюции, Сиб. электрон. матем. изв., 2019, том 16, 718–731.

9. Егоров И. Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995.

10. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в пространстве, Дифференц. уравнения, 13:6 (1977), 1098-1105.

11. Кожанов А. И. Смешанная задача для одного класса уравнений неклассического типа, Дифференц. уравнения, 15:2 (1979), 272–280.

12. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

13. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука,1980.

## References

1. Kozhanov A. I. Study of the solvability of some integral and integro-differential equations of the third kind of Volterra type. Reports of the Academy of Sciences, 2018, volume 478, no. 3, pp. 262-265.

2. Tagaeva S. B. On regularization and uniqueness of solutions to linear Voltaire integral equations of the third kind in the space of summable functions. Bishkek, Kyrgyzstan: International University of Innovative Technologies, 2013.

3. Baizakova A. B., Bekturova A. T. On solutions of integral and integro-differential Volterra equations of the third kind. Bishkek, Kyrgyzstan: Science, New technologies and innovations of Kyrgyzstan, No. 5, 2017.

4. Chistyakova E. V., Solovarova L. S., Doan Tai Son. On one method for numerical solution of degenerate integro-differential equations with a weak singularity in the kernel // Bulletin of SUSU. Series: Computational mathematics and computer science. 2021. T.10, No. 3. pp. 5-15.

5. Kostic M., Fedorov V. E. Asymptotically (ω, c)-almost periodic type solutions of abstract degenerate non-scalar Volterra equations. Chelyabinsk: Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal.2020. Vol.5, iss.4, part 1.P. 415-427.

6. Karakeev T. T., Bugubaeva Zh. T. Regularization of linear integral Volterra equations of the third kind with a nonincreasing function. Bishkek, Kyrgyzstan: Science, New technologies and innovations of Kyrgyzstan, No. 2, 2020.

7. Egorov I. E. Solvability of a boundary value problem for a high order mixed type equation, Differ. Equations, 1987, volume 23, number 9, 1560–1567.

8. Kozhanov A. I., Matsievskaya E. E., Degenerate parabolic equations with variable direction of evolution, Sibirsk. electron. math. Izv., 2019, volume 16, 718–731.

9. Egorov I. E., Fedorov V. E. Nonclassical equations of high-order mathematical physics. Novosibirsk: Computing Center SB RAS, 1995.

10. Vragov V. N. On the theory of boundary value problems for equations of mixed type in space, Differ. Equations, 13:6 (1977), 1098–1105.

11. Kozhanov A. I. A mixed problem for one class of equations of non-classical type, Differ. Equations, 15:2 (1979), 272–280.

12. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. Linear and quasilinear equations of elliptic type. M.: Nauka, 1973.

13. Trenogin V. A. Functional analysis. M.: Nauka, 1980.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 32-35.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 32-35.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.95

# О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

***Аширмет Бекиевич Бекиев***
*Каракалпакский государственный университет, г. Нукус, Узбекистан.*
*ashir1976@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8630-4360*

***Аннотация.*** *В данной работе для уравнения четвертого порядка рассмотрена обратная задача по поиску неизвестной правой части. Решение задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей спектральной задачи. Единственность решения обратной задачи вытекает из полноты системы собственных функций. Установлены достаточные условия на граничные функции, которые гарантируют теоремы существования и устойчивости решения задачи.*

***Ключевые слова:*** *обратная задача, метод разделения переменных, единственность, существование, устойчивость.*

Conference paper

# ON THE SOLVABILITY OF THE INVERSE PROBLEM FOR A FOURTH ORDER EQUATION IN A RECTANGULAR DOMAIN

***Ashirmet B. Bekiev***
*Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan*
*ashir1976@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8630-4360*

***Annotation****. In this paper, for a fourth-order equation, we consider the inverse problem of finding the unknown right-hand side. The solution to the problem is constructed as the sum of a series of eigenfunctions of the corresponding spectral problem. The uniqueness of the solution to the inverse problem follows from the completeness of the system of eigenfunctions. Sufficient conditions on the boundary functions are established that guarantee existence and stability theorems for the solution of the problem.*

***Key words****: inverse problem, method of separation of variables, uniqueness, existence, stability.*

© Бекиев А. Б., 2024

Изучение задачи динамики сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости, задачи распространения волн в диспергирующих средах, вибрации кораблей, колебания стержня, балок и пластины и другие, сводятся к решению краевых задач для уравнения четвертого порядка. Краевым задачам для уравнений четвертого порядка посвящены работы [1-5] и др. Обратные задачи возникают в различных областях науки и техники, например, некоторые задачи сейсмологии, геофизики, разведка полезных ископаемых, биологии, медицины, компьютерной томографии и т.д. приводят к изучению обратных задач [6-7].

В данной работе для уравнения четвертого порядка рассмотрена обратная задача по поиску неизвестной правой части. Решение задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей спектральной задачи. Единственность решения обратной задачи вытекает из полноты системы собственных функций. Установлены достаточные условия на граничные функции, которые гарантируют теоремы существования и устойчивости решения задачи.

В области $\Omega = \{(x,t): 0 < x < p,\ 0 < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{ttt} - u_{xxxx} - b^2 u = f(x),$$

где $b = const$.

Задача. Найти в области $\Omega$ функции $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x,t) \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{4,3}(\Omega),\ \ f(x) \in C(0,p); \tag{1}$$

$$Lu(x,t) = f(x),\ (x,t) \in \Omega; \tag{2}$$

$$\begin{gathered} u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(x,\beta) = \xi(x),\ u_t(x,\beta) = \mu(x),\ 0 \le x \le p; \end{gathered} \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = u_x(p,t) = 0,\ u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(p,t) = 0,\ 0 \le t \le \beta, \tag{4}$$

где $\varphi(x), \xi(x), \psi(x), \mu(x)$ - заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(p) = 0,\ \xi^{(i)}(0) = \xi^{(i)}(p) = 0,\ i = 1,3$.

**Лемма 1**. Пусть $\varphi(x),\ \xi(x) \in C^5[0,p],\ \varphi^{(2i+1)}(0) = \varphi^{(2i+1)}(p) = 0,$ $\xi^{(2i+1)}(0) = \xi^{(2i+1)}(p) = 0, i = 0,1; \psi(x),\ \mu(x) \in C^4[0,p]$ , $\psi^{(2i+1)}(0) = \psi^{(2i+1)}(p) = 0$ $\mu^{(2i+1)}(0) = \mu^{(2i+1)}(p) = 0, i = 0,1$. Тогда справедливы представления

$$\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k^5}\bar{\varphi}_k^{(5)},\ \psi_k = \frac{1}{\lambda_k^4}\bar{\psi}_k^{(4)},\ \xi_k = \frac{1}{\lambda_k^5}\bar{\xi}_k^{(5)},\ \mu_k = \frac{1}{\lambda_k^4}\bar{\mu}_k^{(4)},$$

где

$$\bar{\varphi}_k^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^p \varphi^{(5)}(x)\sin\lambda_k x dx, \bar{\psi}_k^{(4)} = -\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^p \psi^{(4)}(x)\cos\lambda_k x dx,$$

$$\bar{\xi}_k^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^p \xi^{(5)}(x)\sin\lambda_k x dx, \bar{\mu}_k^{(4)} = -\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^p \mu^{(4)}(x)\cos\lambda_k x dx,$$

$$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_k x,\ \lambda_k=\frac{k\pi}{p},\ k=1,2,...$$

**Теорема 1.** Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$ и $\mu(x)$ удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда существует единственное решение задачи (1)-(4).

Введем следующие нормы:

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,p]}=\left(\int_0^p|u(x,t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},\ \|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})}=\max_{\bar{\Omega}}|u(x,t)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n[0,p]}=\left(\int_0^p\left(\sum_{k=0}^n\left|f^{(k)}(x)\right|^2dx\right)\right)^{\frac{1}{2}},\ n\in N.$$

**Теорема 2**. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда для решения задачи (1)-(4) справедливы оценки:

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,p]}\le C_9\left[\|\varphi\|_{L_2}+\|\psi\|_{L_2}+\|\xi\|_{L_2}+\|\mu\|_{L_2}\right],$$

$$\|f(x)\|_{L_2[0,p]}\le C_{10}\left[\|\varphi\|_{W_2^4}+\|\psi\|_{W_2^3}+\|\xi\|_{W_2^4}+\|\mu\|_{W_2^3}\right],$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})}\le C_{11}\left[\|\varphi\|_{W_2^1}+\|\psi\|_{W_2^0}+\|\xi\|_{W_2^1}+\|\mu\|_{W_2^0}\right],$$

$$\|f(x)\|_{C[0,p]}\le C_{12}\left(\|\varphi\|_{W_2^5}+\|\psi\|_{W_2^4}+\|\xi\|_{W_2^5}+\|\mu\|_{W_2^4}\right).$$

## Список источников


1. Apakov Yu. P., Meliquzieva D. M. On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, No.4(112), 2023, pp.30–40.

2. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 2. С.311–324

3. Мегралиев Я. Т., Велиева Б. К. Обратная краевая задача для линеаризованного уравнения Бенни–Люка с нелокальными условиями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 2.

4. Berdyshev A. S., Cabada A., Kadirkulov B. J. The Samarskii–Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator // Computers and Mathematics with Applications 62 (2011) 3884–3893.

5. Джураев Т. Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент: Фан, 2000. 144 с.

6. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.

7. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.

## References

1. Apakov Yu. P., Meliquzieva D. M. On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, No.4(112), 2023, pp. 30–40.

2. Sabitov K. B. Fluctuations of a beam with clamped ends, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 311–324.

3. Megraliev Ya. T., Velieva B. K. Inverse boundary value problem for the linearized Benney–Luke equation with nonlocal conditions Citation: Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 166–182 (in Russian).

4. Berdyshev A. S., Cabada A., Kadirkulov B. J. The Samarskii–Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator // Computers and Mathematics with Applications 62 (2011), pp. 3884–3893.

5. Dzhuraev T. D., Sopuev A. To the theory of partial differential equations of the fourth order, Tashkent, Fan, 2000, 144. (In Russian).

6. Denisov A.M. Elements of the Theory of inverse Problems. Moskva. Izd-vo MGU, 1994, 208. (In Russian).

7. Kavanikhin S. I. Inverse and ill-posed problems, Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatelstvo, 2009, 457. (In Russian).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 36-42.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 36-42.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91+519.65

# КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

***Наталья Владимировна Боковели[1], Михаил Андреевич Лабуз[2], Елена Викторовна Чаплыгина[3]✉***
*[1,2,3]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]nv8657@mail.ru, [2]mlabuz535@gmail.com, [3]lena260581@yandex.ru✉*

***Аннотация.*** *Рассматривается процесс колебания струн музыкальных инструментов. Используется метод разделения переменных или метод Фурье для решения одномерного уравнения колебания струны.*

***Ключевые слова:*** *метод Фурье, колебание струны, одномерное уравнение колебания, гармоники, обертоны, частота колебаний.*

Conference paper

# STRING VIBRATIONS

***Natalia V. Bokoveli[1], Mikhail A. Labuz[2], Elena V. Chaplygina[3]✉***
*[1,2,3]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]nv8657@mail.ru, [2]mlabuz535@gmail.com, [3]lena260581@yandex.ru✉*

***Abstract.*** *The process of oscillation of strings of musical instruments is considered. The method of separation of variables or the Fourier method is used to solve the one-dimensional equation of string oscillation.*

***Keywords:*** *Fourier method, string vibration, one-dimensional vibration equation, harmonics, overtones, vibration frequency.*

Рассмотрим процесс колебания струн музыкальных инструментов, таких как гитара, скрипка и другие. Моделируют эти колебания одномерные волновые уравнения. Эти уравнения позволяют понять, как струна ведет себя при создании звука, а именно, как струны создают звук и каким образом разные параметры (такие как натяжение, материал и длина струны) влияют на акустические свойства музыкальных инструментов.

Будем рассматривать гитарную струну, которая, находясь под напряжением, может колебаться, создавая звуковые волны [3].

© Боковели Н. В., Лабуз М. А. Чаплыгина Е. В., 2024

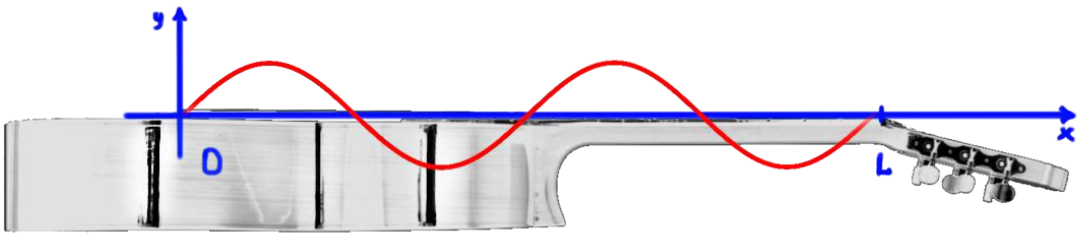



Рисунок 1 – Модель струны.

Уравнение колебания описывает, как струна будет вибрировать при вытягивании и отпускании (рис. 1). Для этого составим начально-краевую задачу для одномерного уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ , которое запишем следующим образом

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Здесь $u(x,t)$ отклонение струны от положения покоя в точке $x$ в момент времени $t$, а $c$ — скорость распространения волны вдоль струны, которая зависит от натяжения струны и её плотности, то есть $c^2 = \frac{N}{\rho}$, где $N$ – сила натяжения струны, а $\rho$ – линейная плотность.

Граничные условия для струны задаются тем, что её концы фиксированы, например, на грифе и у колка гитары. Эти условия можно записать как: $u(0,t) = 0$ и $u(L,t) = 0$, где $L$ — длина струны. Это означает, что в точках $x = 0$ и $x = L$ отклонение струны равно нулю. Так же начальные условия: $u(x,0) = f(x)$ — начальная форма струны, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ — начальная скорость струны.

Жан-Батист Жозеф Фурье, французский математик и физик, предположил, что решение волнового уравнения может быть найдено в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$, где $X(x)$ — пространственная часть, то есть зависит только от координаты, а $T(t)$ — временная часть, зависит от времени [4]. Подставляя это выражение в уравнение волн, получаем

$$X(x)\frac{d^2T(t)}{dt^2} = c^2 T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2}.$$

Видно, что полученные уравнения – это уравнения с разделяющимися переменными. Разделив, получим тождество, левая часть которого зависит полностью от *t*, а правая от *x*

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda^2,$$

где $\lambda$ — постоянная, называемая собственным значением. Мы ищем решение волнового уравнения, то есть мы хотим, чтобы у нас равенство выполнялось в любой момент времени в любой точке отрезка $[0, L]$. Две функции двух разных независимых переменных могут равняться друг другу при любом значении в одном единственном случае, когда обе эти функции одна и таже константа.

Получим вместо одного уравнения два, так как они равны одной и той же константе. Первое – временное уравнение

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \lambda^2 T(t) = 0,$$

его решение будет иметь вид

$$T(t) = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t).$$

Аналогично получим пространственное уравнение

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{c^2}X(x) = 0,$$

с решением

$$X(x) = C\cos\left(\frac{\lambda}{\mathrm{c}}x\right) + D\sin\left(\frac{\lambda}{\mathrm{c}}x\right).$$

Для того, чтобы найти функцию $u(x,t)$, то есть общее решение исходного уравнения, нам нужно перемножить полученные решения $T(t)$ и $X(x)$:

$$u(x,t) = (A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t))(C\cos\left(\frac{\lambda}{\mathrm{c}}x\right) + D\sin\left(\frac{\lambda}{\mathrm{c}}x\right)).$$

После того, как получили общее решение, можем воспользоваться граничными и начальными условиями. Мы рассматриваем самую простую и естественную задачу о колебании струны закрепленными концами, то есть ставим вопрос о звучании струнных музыкальных инструментов таких, как скрипка, балалайка, арфа, клавесин, рояль. Во всех этих инструментах струна закреплена, концы её неподвижны, значит мы можем написать, что, в любой момент времени смещения струны в точке 0 равно нулю, так же, как и в точке $L$. В начальный момент времени форма струны задаётся функцией $f(x)$, а скорости точек струны функцией $g(x)$. Из полученного уравнения $u(0,t) = (A\,cos(\lambda t) + B\,sin(\lambda t))\mathrm{C} = 0$ получаем, что $\mathrm{C} = 0$. Заменим для удобства коэффициенты *A, B* и *D*

$$u(x,t) = (a\cos(\lambda t) + b\sin(\lambda t))\sin\left(\frac{\lambda}{\mathrm{c}}x\right).$$

Из второго граничного условия будем иметь

$$u(L,t) = (a\,cos(\lambda t) + b\,sin(\lambda t))\,sin\left(\frac{\lambda}{\mathrm{c}}L\right) = 0,$$

откуда

$$sin\left(\frac{\lambda}{\mathrm{c}}L\right) = 0,$$

то есть

$$\frac{\lambda_n}{\mathrm{c}}L = \pi n,$$

откуда

$\lambda_n = \frac{\pi n c}{L}$, где *n = 1,2, …*

Получили бесконечное количество решений, и для каждого решения произвольные постоянные могут быть своими

$$u_n(x,t) = (a_n\,cos(\lambda_n t) + b_n\,sin(\lambda_n t))\,sin\left(\frac{\lambda_n}{\mathrm{c}}x\right),$$

если у нас имеется множество решений, то сумма этих решений также является решением:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(\lambda_n t) + b_n sin(\lambda_n t)) sin\left(\frac{\lambda_n}{c} x\right).$$

Мы воспользовались только граничными условиями, вообще не задумываясь о начальных, и получили, что струна с закреплёнными концами колеблется с набором самых разных частот(гармоник). При игре на гитаре выщипываются или прижимаются струны, создавая колебания [1]. Эти колебания передаются вдоль струны, и благодаря нормальным модам формируются основные ноты и гармоники звука. Каждое значение $n$ соответствует определенной гармонике. Каждая гармоника соответствует определённому режиму колебания струны. Основная гармоника $(n = 1)$ наименьшая частота, при которой струна колеблется с одним полным циклом. Когда струна колеблется в первой гармонике, она движется как целое, и объём её колебаний максимален. Вторая гармоника $(n = 2)$ первая обертоническая частота, при которой струна колеблется с двумя полными циклами. При колебании во второй гармонике струна делится на две части, и обе части колеблются в противофазе. Третья гармоника или обертоника $(n = 3)$ колебания с тремя полными циклами. В этом режиме струна разделена на три сегмента, которые колеблются. Таким образом, при колебании струны возникают гармоники, каждая из которых имеет свою частоту и форму колебаний. Эти гармоники определяют звучание струны и являются основой для многих музыкальных инструментов. Получаем, что основная частота $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$, гармоники или обертоны $(n > 1) - \omega_n = n\omega_1$, которые кратны основной частоте. Если (*n = 2)*, то получим частоты колебаний в два раза большие основной частоты.

Получатся, что любая струна с закреплёнными концами излучает целый спектр колебаний с разными частотами. Если ввести начальные условия, получим разные спектры частот, соответствующие разным начальным условиям. Это означает, что способ звукоизвлечения влияет на спектр частот. То есть помимо основной частоты, например, ля первой октавы, мы слышим ля второй октавы, ля третьей октавы и так далее, но, в зависимости от способа звукоизвлечения, интенсивность следующих гармоник будет разной. Именно по спектру частот мы отличаем звучание одного инструмента от другого. Например, у клавесина и рояля (фортепиано), у похожих музыкальных инструментов, способ звукоизвлечения разный. В отличие от рояля, в клавесине отсутствует молоточек, который играет роль ударного поршня. Вместо этого звучание получается за счет того, что струна слегка "щиплется" пиком. Удар молоточком позволяет в рояле варьировать громкость и динамику звука. При этом, мы, совершенно безошибочно, не будучи музыкантами, рояль от клавесина отличаем. У них совершенно разное звучание не только для первой октавы, но и обертоны разной интенсивности.

Итак, учитывая начальные условия

$$u(x,0) = f(x),$$

в результате будем иметь

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\lambda_n}{c} x\right) = f(x).$$

Получили разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам. Теперь воспользуемся вторым начальным условием

$$u_t(x,0) = g(x),$$

то есть

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n \sin\left(\frac{\lambda_n}{c} x\right) = g(x).$$

Так же получим разложение функции $g(x)$ в ряд Фурье по синусам. Найдём коэффициенты $a_n$ и $b_n$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n c}\int_0^L g(x)\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx.$$

Подставим коэффициенты в уравнение общего решения и, для лучшего понимания физического смысла, перепишем полученное тождество в виде

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin(\omega_n t + \varphi_n),$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \omega_n = \frac{n\pi a}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{N}{\rho}},$$

$$\sin\varphi_n = \frac{a_n}{A}, \qquad \cos\varphi_n = \frac{b_n}{A}, \qquad tg\,\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

Отсюда видно, что каждый член ряда, описывающий гармонические колебания струны, представляет собой отдельную гармонику [2]. Эти гармоники характеризуются циклической частотой $\omega_n$, которая определяет скорость колебаний и амплитудой $A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$, которая может изменяться в зависимости от точки $x$ вдоль струны, в результате чего разные точки струны имеют разные значения амплитуды колебаний (рис. 2).

Такие колебания называются стоячими волнами, которые возникают из-за интерференции двух или более гармонических волн, движущихся в противоположных направлениях. В случае струны, фиксированные концы (узлы) создают условия для формирования стоячих волн, где определённые точки струны (узлы) не колеблются, а другие (петли) колеблются с максимальной амплитудой.

Причём, амплитуда колебаний в разных точках струны может различаться.

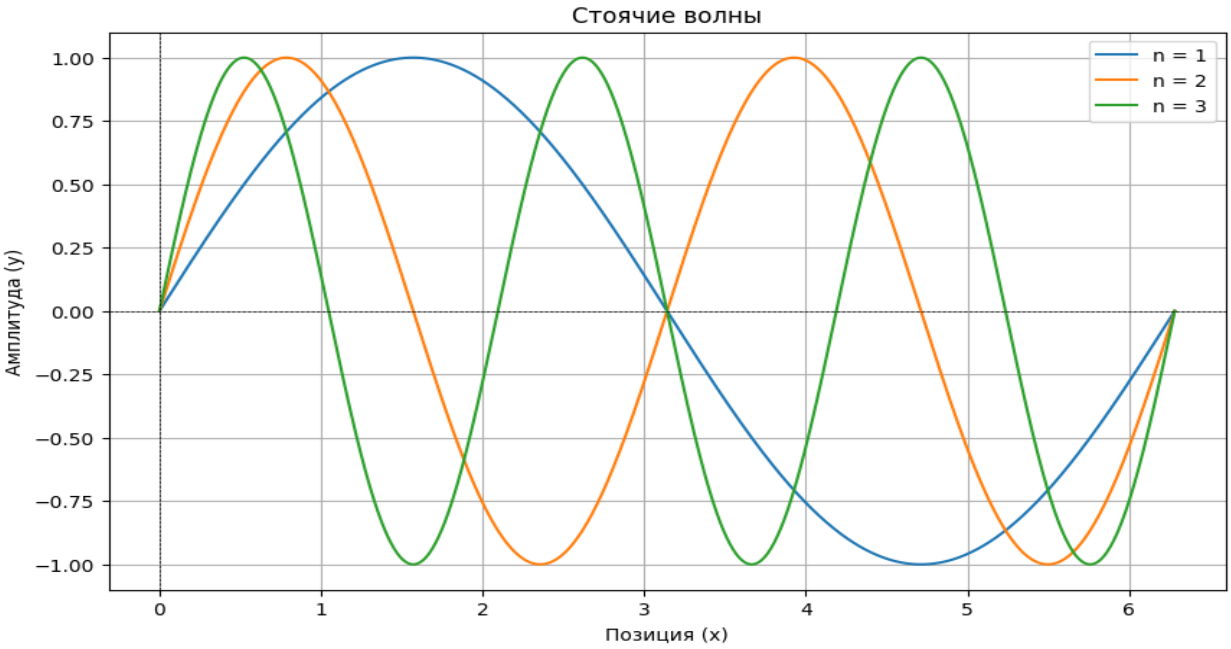



Рисунок 2 – Гармоники колеблющейся струны

Это связано с тем, что в стоячей волне есть участки с максимальной амплитудой (петли) и участки, где амплитуда равна нулю (узлы). Иногда этот эффект называется «неконтролируемым колебанием» - поскольку оно зависит от длины струны и её натяжения (рис.3). Это явление можно наблюдать в музыкальных инструментах, где топология струны влияет на звучание, и разные точки струны колеблются с разными амплитудами, создавая уникальные аккорды и ноты.

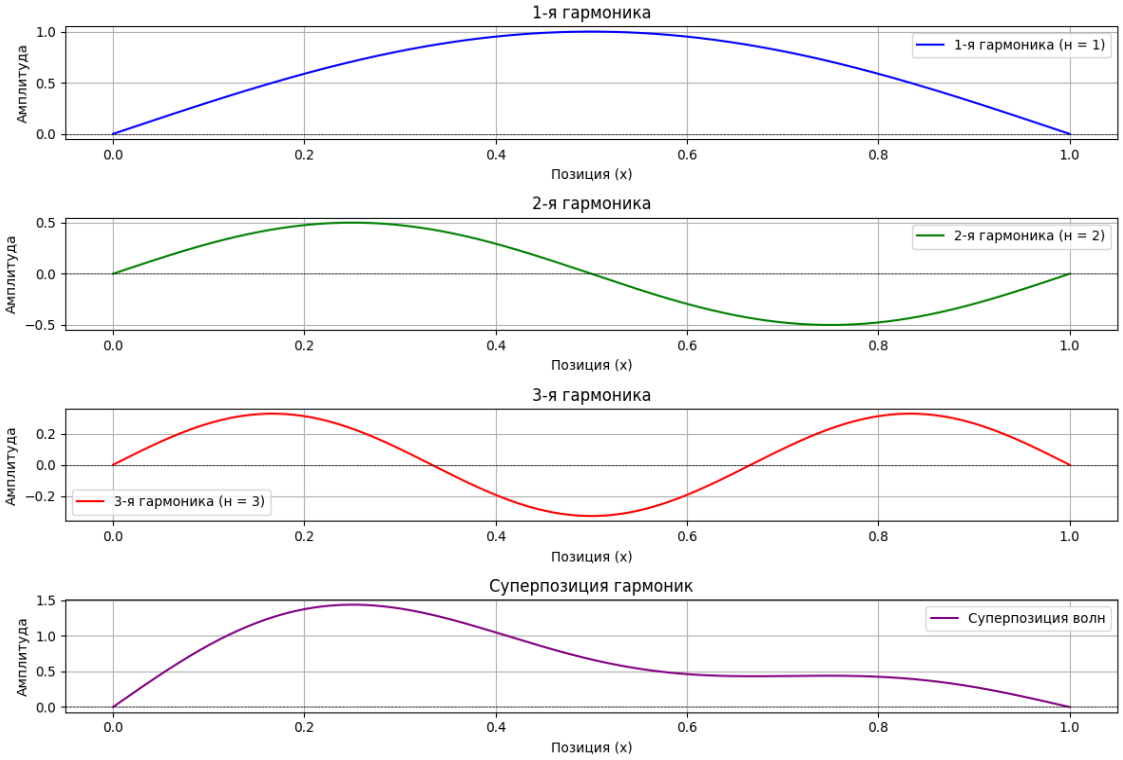



Рисунок 3 – Неконтролируемым колебания

## Список источников

1. Волошинов А. В. Математика и искусство: Книга для тех, кто не только любит математику или искусство, но и желает задуматься о природе прекрасного и красоте науки. — 2-е изд., дораб. и доп. — М.: Просвещение, 2000. — 399с.: ил. — ISBN 5-09-008033-X.

2. Карлов, Н. В. Колебания, волны, структуры / Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко. — Москва: Физматлит, 2008. — 496 с.: ил., табл.: 22 см.; ISBN 978-5-9221-0205-6.

3. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1985. – 384 с.

4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – Изд. 5-е, стереотип. – Москва: Наука, 1977. – 734 с. илл.

## References

1. Voloshinov A. V. Mathematics and Art: A book for those who not only love mathematics or art, but also want to think about the nature of beauty and the beauty of science. - 2nd ed., revised and enlarged. - M.: Education, 2000. - 399 p.: ill. - ISBN 5-09-008033-X.

2. Karlov, N. V. Oscillations, Waves, Structures / N. V. Karlov, N. A. Kirichenko. - Moscow: Fizmatlit, 2008. - 496 p.: ill., table: 22 cm; ISBN 978-5-9221-0205-6.

3. Farlow S. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. M.: Mir, 1985. - 384 p.

4. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of mathematical physics. – Ed. 5th, stereotype. – Moscow: Nauka, 1977. – 734 p. ill.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 43-45.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 43-45.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.9

# СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ЯДРОМ

***Ольга Николаевна Евхута***[1]✉
[1]*Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М. И. Платова, Новочеркасск, Россия*
[1]*evhuta@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3405-730X*

***Аннотация.*** *Вычислен спектральный радиус интегрального оператора с положительным ядром и найдены соответствующие собственные функции.*

***Ключевые слова:*** *Линейный интегральный оператор, спектральный радиус, собственные функции.*

Conference paper

# SPECTRAL PROPERTIES OF THE INTEGRAL OPERATOR WITH A POSITIVE KERNEL

***Olga N. Evkhuta***[1]✉
[1] *Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocher-kassk, Russia*
[1]*evhuta@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3405-730X*

***Abstract.*** *The spectral radius of the integral operator with a positive kernel is calculated and the corresponding eigenfunctions are found.*

***Keywords:*** *Linear integral operator, spectral radius, eigenfunctions.*

## 1. Введение

Возможность существования непрерывного спектра является характерной чертой линейных операторов общего вида в бесконечномерном пространстве. Конечномерные линейные преобразования и интегральные операторы без особенностей не имеют непрерывного спектра. Спектральный анализ операторов находит многочисленные применения в теории колебаний, теории стационарных случайных процессов, квантовой механике, дифференциальных и интегральных уравнениях, а также других областях математики и математической физики.

© Евхута О.Н., 2024

## 2. Спектральные свойства интегрального оператора

В задачах математической физики часто появляется необходимость изучать спектральные свойства линейного интегрального оператора

$$Qz(t) = \int_0^\omega g(t,s)z(s)ds \tag{1}$$

с неотрицательным ядром вида:

$$g(t,s) = \begin{cases} 1+\omega^{-1}t, & 0 \le s \le t \le \omega, \\ \omega^{-1}t, & 0 \le r < s \le \omega. \end{cases}$$

Теорема 1.

Спектральный радиус линейного интгерального оператора $Q$, задаваемого выражением (1) выражается формулой

$$\rho(Q) = \kappa\,\omega, \tag{2}$$

где $\kappa$ – положительный корень трансцендетного уравнения

$$\kappa e^{\frac{1}{\kappa}} = \kappa + 2. \tag{3}$$

Доказательство:

Известно (см., например, [1, 2]), что в условиях, указанных выше, задача о вычислении спектрального радиуса положительного оператора сводится к задаче нахождения ненулевых решений линейного операторного уравнения

$$r\,z(t) = \left(1+\frac{t}{\omega}\right)\int_0^t z(s)ds + \frac{t}{\omega}\int_t^\omega z(s)ds, \tag{4}$$

которое при $r = \kappa\omega$ имеет ненулевое неотрицательное решение $z(t)$.

Полагая

$$R(t) = \int_0^t z(s)ds \tag{5}$$

и, считая $R(1) = 1$, это уравнение можно записать в виде

$$r\,R'(t) = R(t) + \omega^{-1}\,t, \tag{6}$$

откуда

$$R(t) = \int_0^t e^{\frac{t-s}{r}}\,\frac{s}{\omega\,r}ds. \tag{7}$$

Полагая $t = \omega$ получаем уравнение для определения $r$

$$\int_0^{\omega} e^{\frac{\omega - s}{r}} \frac{s}{\omega r} ds = 1, \tag{8}$$

которое легко преобразуется к виду (2).

Из соотношения (7) получается формула для, отвечающей собственному значению $\rho(Q)$, собственной функции $Q$. Это функция вида

$$z(t) = \frac{1}{\omega} \left( e^{\frac{t}{2}} - 1 \right). \tag{9}$$

Для $z(t)$ справедливы неравенства

$$\frac{t}{\omega\, r} \leq \; z(t) \leq \frac{\kappa \left( e^{\frac{1}{\kappa}} - 1 \right)}{\omega\, r}. \tag{10}$$

**3. Заключение**

В результате исследования показано при каких условиях задача о вычислении спектрального радиуса положительного оператора сводится к задаче нахождения ненулевых решений линейного операторного уравнения.

## Список источников


1. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
2. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985. - 255 с.


## References


1. Krasnoselsky M.A. Positive solutions of operator equations. – M.: Fizmatgiz, 1962. – 394 p.
2. Krasnoselsky M.A., Lifshits E.A., Sobolev A.V. Positive linear systems. M.: Nauka, 1985. - 255 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 46-49.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 46-49.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.95

Conference paper

# ON CERTAIN TWO-DIMENSIONAL DISCRETE EQUATIONS

***Abu Bakarr Kamanda Bongay***[1]✉
[1] *Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia*
[1] *abubakarrkamanda357@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0009-0004-2042-4836*

***Abstract.*** *Some classes of discrete equations in multidimensional space are considered. In certain cases a general solution is constructed for such equations using special discrete transformations. Applying additional conditions one can extract the unique solution.*

***Keywords:*** *pseudo-differential operators, solvability, periodic wave factorization.*

## 1. Introduction

We use the following notations. Let $\mathbb{Z}^3$ be the integer lattice in $\mathbb{R}^3$, $C_n = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 > a_n|x_1| + b_n|x_2|,\ a, b > 0\}$ be the four-faced angle, $C_{n,d} = h\mathbb{Z}^3 \cap C_n, h > 0$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi], \hbar = h^{-1}$, and $a_n, b_n$ can take values $n,\ 1/n,\ n \in \mathbb{N}$. We denote $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in h\mathbb{Z}^3$ and consider functions of discrete variable $u_d(\tilde{x})$.

Let us denote

$$\zeta^2 = \sum_{k=1}^{3} \zeta_k^2, \quad \zeta_k = \hbar(e^{ih\cdot\xi_k} - 1),$$

and let $S(h\mathbb{Z}^3)$ be the discrete analogue of the Schwartz space of infinitely differentiable rapidly decreasing at infinity functions.

t The space $H^s(h\mathbb{Z}^3)$ consists of discrete functions and it is a closure of the space $S(h\mathbb{Z}^3)$ with respect to the norm

$$||u_d||_s = \left( \int_{\hbar\mathbb{T}^3} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

© Abu Bakarr Kamanda Bongay, 2024

where $\tilde{u}_d(\xi)$ denotes the discrete Fourier transform as follows

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^3} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^3, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^3.$$

Let $A_d(\xi)$ be a measurable periodic function defined in $\mathbb{R}^3$ with the basic cube of periods $\hbar\mathbb{T}^3$.

A digital pseudo-differential operator $A_d$ with the symbol $A_d(\xi)$ in discrete cone $C_{n.d}$ is called the following operator [2, 3]

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^3} h^3 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^3} A_d(\xi) e^{i(\tilde{y}-\tilde{x})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in C_{n,d}.$$

Here we will consider symbols satisfying the condition

$$c_1(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \le |A_d(\xi)| \le c_2(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

with positive constants $c_1, c_2$ non-depending on $h$. The number $\alpha \in \mathbb{R}$ is called an order of the digital pseudo-differential operator $A_d$.

**2. Main results**

We study solvability of the discrete equation

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in C_{n,d}, \tag{1}$$

in the space $H^s(C_{n,d})$, it consists of functions from the space $H^s(h\mathbb{Z}^3)$ with supports in $\overline{C_{n,d}}$. For this purpose we need certain specific domains of three-dimensional complex space $\mathbb{C}^3$. A domain of the type $\mathcal{T}_h(C_n) = \hbar\mathbb{T}^3 + iC_n$ is called a tube domain over the cone $C_n$. Such domains are periodic analogues of radial tube domains [1]. We will work with analytic functions $f(x+i\tau)$ in such domains $\mathcal{T}_h(C_n)$. Let us denote

$$\overset{*}{C}_n = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > \frac{1}{2a_n}|x_1| + \frac{1}{2b_n}|x_2|\},$$

it is so called conjugate cone to $C_n$.

**Definition.** Periodic wave factorization of the symbol $A_d(\xi)$ with respect to $C_n$ is called its representation in the form

$$A_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi) A_{d,=}(\xi),$$

where factors $A_{d,\neq}(\xi)$, $A_{d,=}(\xi)$ admit analytic continuation into tube domains $\mathcal{T}_h(\overset{*}{C}_n), \mathcal{T}_h(-\overset{*}{C}_n)$ respectively satisfying the estimates

$$c_1(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{ae}{2}} \le |A_{d,\neq}(\xi+i\tau)| \le c_1'(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\kappa}{2}}$$

$$c2(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha-ae}{2}} \leq |Ad, =(\xi - i\tau)| \leq c_2'(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha-\kappa}{2}}$$

with positive constants $c_1, c_1', c_2, c_2'$ non-depending on $h$;

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left( \sum_{k=1}^{3} (e^{ih(\xi_k + i\tau_k)} - 1)^2 \right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \hbar\mathbb{T}^3,$$

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \overset{*}{C}_n \, .$$

The number $\kappa \in \mathbb{R}$ is called an index of periodic wave factorization.

let us introduce the following operator

$$(V_{a_n,b_n}\tilde{u}_d)(\xi) = (P_h'P_h''\tilde{u}_d)(\xi_1 + a_n\xi_3, \xi_2 + b_n\xi_3, \xi_3)$$
$$+(P_h'Q_h''\tilde{u}_d)(\xi_1 + a_n\xi_3, \xi_2 - b_n\xi_3, \xi_3)$$
$$+(Q_h'P_h''\tilde{u}_d)(\xi_1 - a_n\xi_3, \xi_2 + b_n\xi_3, \xi_3) + (Q_h'Q_h''\tilde{u}_d)(\xi_1 - a_n\xi_3, \xi_2 - b_n\xi_3, \xi_3),$$

with corresponding projectors

$$P_h' = (I + H_h'), \quad Q_h' = (I - H_h'),$$

$$P_h'' = (I + H_h''), \quad Q_h'' = (I - H_h''),$$

where $I$ is identity operator,

$$(H_h'\psi)(\xi) = \frac{h}{2\pi i} p.v. \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \psi(\eta_1, \xi_2, \xi_3) \cot \frac{h(\eta_1 - \xi_1)}{2} d\eta_1,$$

$$(H_h''\psi)(\xi) = \frac{h}{2\pi i} p.v. \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \psi(\xi_1, \eta_2, \xi_3) \cot \frac{h(\eta_2 - \xi_2)}{2} d\eta_2,$$

**Theorem 1.** Let the symbol $A_d(\xi)$ admits the periodic wave factorization with respect to $C_n$ with the index $\kappa$ such that $\kappa - s = n + \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, $|\varepsilon| < 1/2$ then a general solution of the equation (1) has the following form

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi) V_{a_n,b_n}^{-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_{d,k}(\xi') \zeta_3^k \right), \tag{2}$$

where $\xi' = (\xi_1, \xi_2) \in \hbar^2\mathbb{T}^2$, $c_{d,k} \in H^{s_k}(h\mathbb{Z}^2)$ are arbitrary functions, $s_k = s - \kappa + k - 1/2$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Below we consider the case $\kappa - s = 1 + \varepsilon$, so that we have only one arbitrary function in the formula (2). To determine it uniquely we use the following additional condition

$$\sum_{\tilde{x}_3 \in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}', \tilde{x}_3)h = f_d(\tilde{x}'), \quad \tilde{x}' = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \tag{3}$$

where $f_d$ is given discrete function.

**Theorem 2.** If conditions of Theorem 1 hold and $1/2 < \kappa - s < 3/2$, $f_d \in H^{s+1/2}(h\mathbb{Z}^2)$ then the problem (1),(3) has unique solution given by the formula

$$\tilde{u}_d(\xi) = A^{-1}_{d,\neq}(\xi) V^{-1}_{a_n,b_n} \tilde{c}_d(\xi'),$$

where $\tilde{c}_d$ is defined by the formula

$$\tilde{c}_d(\xi') = A_{\neq}(\xi', 0)\tilde{f}_d(\xi').$$

## Conclusion

The considered discrete boundary value problem (1),(3) should be approximation problem for corresponding continuous boundary value problem. Here the first step was done, the unique solvability and integral representation were obtained. The next step is a comparison (in certain sense) of discrete and continuous solutions and we will give it in forthcoming papers. In two-dimensional case such a comparison was obtained.

## References


1. V. Vladimirov, *Generalized Functions in Mathematical Physics*, Mir, Moscow (1979).
2. V. B. Vasil'ev, *Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London (2000).
3. A.V. Vasilyev, V.B., Vasilyev and O.A. Tarasova, "Frames of solutions and discrete analysis of pseudo-differential equations,"*Math. Meth. Appl. Sci.* **47**, No. 10, 8042–8061 (2024)

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 50-53.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 50-53.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.983

# К ВОПРОСУ О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

***Татьяна Николаевна Можарова[1]✉, Николай Юрьевич Можаров[2]***
*[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]tatjana.mozharova@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-1352-5343*
*[2]marinmarmokqw@gmail.com*

***Аннотация.*** *В работе приводится построение посредством обобщенного преобразования Фурье T функциональной реализации сопряженного пространства H*. Показывается, что H* ≈ P = [ρ; σ) и в пространстве P оператор $\varphi_0(A)^*$ реализуется как оператор умножения на характеристическую функцию $\varphi_0(t)$ оператора $\varphi_0(A)$. Указанные построения были использованы автором при получении условий разрешимости неоднородного операторного уравнения $\varphi_0(A)(x) = y$, $y \in H$.*

***Ключевые слова:*** *обобщенное преобразование Фурье, сопряженное пространство, характеристическая функция оператора.*

Conference paper

# ON THE QUESTION OF THE FUNCTIONAL REALIZATION OF THE SPACE OF LINEAR CONTINUOUS FUNCTIONALS

***Tatyana N. Mozharova[1]✉, Nikolay Yu. Mozharov[2]***
*[1,2]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]tatjana.mozharova@yandex.ru ✉, https://orcid.org/0000-0003-1352-5343*
*[2]marinmarmokqw@gmail.com*

***Abstract.*** *The paper provides a construction by means of a generalized Fourier transform T of a functional realization of the conjugate space H*. It is shown that H* ≈ P = [ρ; σ) and in the space P, the operator $\varphi_0(A)^*$ implemented as an operator of multiplication by the characteristic function $\varphi_0(t)$ of the operator $\varphi_0(A)$. These constructions were used by the author in obtaining the conditions for the solvability of the inhomogeneous operator equation $\varphi_0(A)(x) = y$, $y \in H$.*

© Можарова Т. Н., Можаров Н. Ю., 2024

***Keywords:*** *generalized Fourier transform, conjugate space, characteristic function of the operator.*

**1. Введение**

Пусть $H$ – полное локально-выпуклое пространство с топологией, заданной счётной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}$, p = 1, 2, …, и $A$ – линейный и непрерывный оператор порядка $\beta \neq 0, \infty$, типа $\alpha < \infty$; $A(H) \subset H$.

Функцию $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k$ , $x_k \in H$, удовлетворяющую условию

$$A[f(\lambda)] = \lambda f(\lambda) \text{ и } l_0\{f(\lambda)\} = 1,\ l_0 \in H^*,$$

будем называть собственной вектор-функцией оператора $A$([2]).

Пусть $f(\lambda)$ – целая, порядка $\rho$ и типа $\sigma$. Известно ([1]), что в рассматриваемых условиях $\rho \geq \frac{1}{\beta}$ и $\sigma \geq \frac{\beta}{\alpha e}$. Далее предполагаем, что p-типы $\sigma_p < \sigma$, $\forall$p, и $\{x_k\}$ – полна в $H$.

**2. Основной текст статьи**

Рассмотрим выражение

$$\varphi_0(A)(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k(x),\ c_k \in \boldsymbol{C},$$

с характеристической функцией

$$\varphi_0(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k,\ c_k \in \boldsymbol{C}.$$

Пусть $\varphi_0 \in \left[\frac{1}{\beta}; \frac{\beta}{\alpha e}\right)$. Известно ([1]), что в этих условиях $\varphi_0(A)$ – линейный непрерывный оператор, действующий из $H$ в $H$.

Заметим, что оператор $\varphi_0(A)$ действует на $f(\lambda)$ следующим образом:

$$\varphi_0(A)(f(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k(\mathrm{f}(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k \mathrm{f}(\lambda) = \varphi_0(\lambda) \cdot f(\lambda).$$

Поскольку $\varphi_0(A)(H) \subset H$, $[\varphi_0(A)]^*(H^*) \subset H^*$. Для пространства $H^*$ рассмотрим следующую функциональную реализацию $P$.

Введём оператор $T$: $H^* \to P$ такой, что $\forall s \in H^*$ соответствует целая скалярная функция $\varphi(\lambda)$:

$$T(s) = \langle s, f(\lambda) \rangle = \varphi(\lambda),\ \forall s \in H^*.$$

Как известно, оператор $[\varphi_0(A)]^*$ определён и непрерывен на $H^*$.

Обозначим

$$s' = [\varphi_0(A)]^*(s),\ s,\ s' \in H^*.$$

Тогда

$$T(s') = \langle s', f(\lambda) \rangle = \langle [\varphi_0(A)]^*(s), f(\lambda) \rangle = \langle s,\ \varphi_0(A)(f(\lambda)) \rangle =$$
$$= \langle s,\ \varphi_0(\lambda) \cdot f(\lambda) \rangle = \varphi_0(\lambda) \cdot \langle s, f(\lambda) \rangle = \varphi_0(\lambda)\ \varphi(\lambda),$$

где $\varphi_0(\lambda)$ – характеристическая функция оператора $\varphi_0(A)$. Заметим, что $\forall\ s \in H^*$.

$$|\langle s, f(\lambda) \rangle| = |\varphi(\lambda)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} s(x_k) \lambda^k \right| \leq \mathrm{C} \| f(\lambda) \|_{p_s} < \mathrm{C} e^{\left(\sigma_{p_s} + \varepsilon\right)|z|^{\rho}},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \| \cdot \|_{p_s}.$$

Таким образом, при условии $\sigma_p < \sigma$, $\forall p$, $P \subset [\rho;\ \sigma)$.
Покажем однозначность отображения

$$\forall\ s \in H^* \xrightarrow{\mathrm{T}} \varphi(\lambda) \in P \subset [\rho;\ \sigma).$$

Пусть $s_1 \neq s_2$, а $T(s_1) = \varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\lambda) = T(s_2)$.
Отсюда

$$\sum_{k=0}^{\infty} [s_1(x_k) - s_2(x_k)]\lambda^k = 0,$$

а значит,

$$s_1(x_k) - s_2(x_k) = (s_1 - s_2)(x_k) = 0,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Т.к. система $\{x_k\}$ полна в $H$, то $s_1 - s_2 = \mathbf{0} \in H^*$, что противоречит условию $s_1 \neq s_2$.

В рассматриваемых условиях это соответствие также является взаимнооднозначным. Действительно, пусть $\varphi \in [\rho;\ \sigma)$. Тогда

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n\ ,\ b_n \in \boldsymbol{C}.$$

Покажем, что этой функции $\varphi$ соответствует функционал $s_\varphi \in H^*$, такой, что $T(s_\varphi) = \varphi(\lambda)$.

Известно, ([1]), что в данных условиях для функционала $s \in \mathrm{H}^*$ справедливо представление

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n l_0\left\{\mathrm{A}^n(x)\right\},\ x \in H,\ d_n \in \boldsymbol{C},\ \forall n.$$

Для функции $\varphi(\lambda)$ положим

$$s_\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n l_0\left\{\mathrm{A}^n(x)\right\},\ x \in H.$$

Покажем, что этот функционал $s_\varphi \in H^*$.
Имеем:

$$|b_n l_0\{A^n(x)\}| = |b_n| \cdot |l_0\{A^n(x)\}| \le C(\varepsilon)\left[\frac{(\sigma_1 + \varepsilon)e\rho}{n}\right]^{\frac{n}{\rho}} \| \mathrm{A}^n(x) \|_{p_0} \le$$

$$\le C(\varepsilon)\left[\frac{(\sigma_1 + \varepsilon)e\rho}{n}\right]^{\frac{n}{\rho}} \left[\left(\alpha_{p_0} + \varepsilon\right)n\right]^{\beta n} \| x \|_q\ ,\ \exists \mathrm{p}_0,\ \mathrm{q},\ \forall \varepsilon > 0,$$ где $\sigma_1$ – тип функции $\varphi(\lambda)$, $\sigma_1 < \sigma$.

В случае $\rho > \dfrac{1}{\beta}$

$$|b_n| \cdot |l_0\{A^n(x)\}| < C(\varepsilon)\left[\frac{(\sigma_1 + \varepsilon)e\rho}{n}\right]^{\beta n} \left[\left(\alpha_{p_0} + \varepsilon\right)n\right]^{\beta n} \| x \|_q\ ,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{p}_0,\ \mathrm{q}.$$

Такая же оценка имеет место при $\rho = \dfrac{1}{\beta}$. Т.к. $\forall \mathrm{p}\ \alpha_p \le \alpha$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$(\sigma_1 + \varepsilon)\, e\rho\left(\alpha_{p_0} + \varepsilon\right) < 1.$$

Следовательно, $|s_\varphi(x)| \le C\,\|x\|_q$, $\forall\, x \in H$, и $s_\varphi \in H^*$.

Покажем, что функционалу $s_\varphi$ соответствует функция $\varphi(x)$.

$$T(s_\varphi) = \langle s_\varphi, f(\lambda)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n l_0\{A^n(f(\lambda))\} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n l_0\{\lambda^n f(\lambda)\} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n l_0\{f(\lambda)\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n = \varphi(\lambda).$$

Таким образом, показали, что $P = [\rho;\ \sigma)$.

Если в пространстве $H^*$ действует оператор $[\varphi_0(A)]^*$, то в пространстве $P$ (вообще говоря), действует двойственный ему (дуальный) оператор $[\varphi_0(A)]^{*\text{ם}}$. Однако для простоты изложения, будем полагать, что оператор $[\varphi_0(A)]^*$ действует в $P$, причём, как показано выше,

$$[\varphi_0(A)]^*(\varphi) = \varphi_0\,\varphi,\ \forall\,\varphi \in P.$$

**3. Заключение**

В результате исследования получена функциональная реализация пространства линейных непрерывных функционалов, которая может быть использована для получения условий разрешимости неоднородных операторных уравнений $\varphi_0(A)(x) = y$, $y \in H$.

## Список источников


1. Можарова Т. Н., Золотухин А. А. К вопросу о существовании и непрерывности оператора φ(A) на алгебре H // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (25 – 26 ноября 2022 г.). Орёл: ОГУ, 2022. С. 89-93.

2. Можарова Т. Н., Когут А. В. О свойствах интерполирующей функции // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (24 – 25 ноября 2023 г.). Орёл: ОГУ, 2023. С. 63-67.


## References


1. Mozharova T. N., Zolotukhin A. A. On the question of the existence and continuity of the operator φ(A) on algebra H // Modern problems of physical and mathematical sciences. Materials of the VIII All-Russian Scientific and Practical conference with international participation (November 25-26, 2022). Orel: OSU, 2022. pp. 89-93.

2. Mozharova T. N., Kogut A. V. On the properties of the interpolating function // Modern problems of physical and mathematical sciences. Materials of the IX All-Russian Scientific and Practical Conference with international participation (November 24-25, 2023). Orel: OSU, 2023. pp. 63-67.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 54-61.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 54-61.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517

# О СПЕКТРАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ В ПРОСТРАНСТВЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТКАХ НА ДИСКРЕТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

***Сергей Сергеевич Платонов***[1]✉
[1]*Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск, Россия*
[1]*SSPlatonov@yandex.ru*✉

***Аннотация.*** *В работе рассматривается задача о спектральном синтезе в топологическом векторном пространстве $\mathcal{M}(G)$ функций медленного роста на произвольной дискретной абелевой группе $G$. Доказано, что в пространстве решений медленного роста системы уравнений в свертках на дискретной абелевой группе справедлив спектральный синтез, то есть пространство решений медленного роста системы уравнений в свертках совпадает с замыканием линейной оболочки в $\mathcal{M}(G)$ всех экспоненциальных мономиальных решений этой системы.*

***Ключевые слова:*** *Спектральный синтез на абелевых группах, уравнения в свертках на группах, функции медленного роста на группах.*

Conference paper

# SPECTRAL SYNTHESIS FOR THE SPACE OF TEMPERED SOLUTIONS OF A CONVOLUTION SYSTEM ON DISCRETE ABELIAN GROUPS

***Sergey S.Platonov***[1]✉
[1] *Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russia*
[1]*SSPlatonov@yandex.ru*✉

***Abstract.*** *We consider a problem of spectral synthesis in the topological vector space $\mathcal{M}(G)$ of tempered functions on a discrete Abelian group $G$. It is proved that the space of tempered solutions of a convolution system on discrete Abelian groups admits spectral synthesis, that is the space of*

© Платонов С.С., 2024

*tempered solutions of a convolution system coincides with the closed linear span in $\mathcal{M}(G)$ of all exponential monomial solutions of this system.*

***Keywords:*** *spectral synthesis, convolution equation, tempered functions on groups.*

Пусть $G, +$ — произвольная локально компактная абелева группа (LCA-группа). Пусть $\mathcal{F}$ — топологическое векторное пространство, состоящее из комплексно-значных функций на $G$. Пространство $\mathcal{F}$ называется трансляционно инвариантным, если $\mathcal{F}$ инвариантно относительно преобразований (сдвигов)

$$\tau_y : f(x) \mapsto f(x-y), \quad f(x) \in \mathcal{F}, y \in G,$$

и все операторы $\tau_y$ непрерывны в пространстве $\mathcal{F}$.

Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ называется *инвариантным подпространством* если $\tau_y(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ для любого $y \in G$.

Будем называть *экспоненциальной функцией на группе* $G$ или *обобщенным характером группы* $G$ произвольный непрерывный гомоморфизм из группы $G$ в мультипликативную группу $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ комплексных чисел. Характеры группы $G$, то есть непрерывные гомоморфизмы из группы $G$ в группу $\mathbb{T}$ комплексных чисел с модулем 1, являются специальными случаями экспоненциальных функций. Непрерывный гомоморфизм из группы $G$ в аддитивную группу комплексных чисел называется *аддитивной функцией*. Функция $x \mapsto P(a_1(x), \ldots, a_m(x))$ на $G$ называется полиномиальной, если $P(z_1, \ldots, z_m)$ — комплексный полином от $m$ переменных и $a_1, \ldots, a_m$ — аддитивные функции. Экспоненциальным мономом называется произведение экспоненциальной функции на полиномиальную функцию. Сумма экспоненциальных мономов называется экспоненциальным полиномом на $G$.

Пусть $\mathcal{F}$ — трансляционно инвариантное функциональное пространство на группе $G$ и $\mathcal{H}$ — инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$.

Определение. Инвариантное подпространство $\mathcal{H}$ допускает спектральный ситез, если оно совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной оболочки всех экспоненциальных мономов принадлежащих $\mathcal{H}$. Говорят, что *спектральный синтез справедлив в пространстве* $\mathcal{F}$ если любое инвариантное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ допускает спектральный синтез.

Определение спектрального синтеза берет начало с работы [1] Л.Шварца, в которой справедливость спектрального синтеза установлена для $G = (\mathbb{R}, +)$ и пространство $\mathcal{F}$ может совпадать с пространством $C(\mathbb{R})$ всех непрерывных функций на $\mathbb{R}$ или с прпространством $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$

(если не оговорено противное, все функции предполагаются комплексно значными и все классические функциональные пространство снабжаются стандартными топологиями).

Справедливость или несправедливость спектрального синтеза зависит как от группы $G$, так и от пространства $\mathcal{F}$. Например, если $G = (\mathbb{R}^n, +)$, $n \geq 2$, то спектральный синтез отсутствует в пространствах $C(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (см. [2]), и спектральный синтез справедлив в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций медленного роста на $\mathbb{R}^n$ (см. [3]).

Одним из наиболее естественных пространств, в которых можно изучать спектральный синтез, является пространство $C(G)$ всех непрерывных функций на произвольной локально компактной абелевой группе $G$. Для специального случая, когда G является дискретной абелевой группой, функциональное пространство $C(G)$ состоит из всех комплексно-значных функций на G с топологией поточечной сходимости. Различные результаты о спектральном синтезе на дискретных абелевых группах представлены в книге [4]. В 2007 году M. Laczkovich и L. Székelyhidi [5] доказали, что спектральный синтез в пространстве $C(G)$ на дискретной абелевой группе $G$ справедлив тогда и только тогда ранг без кручения группы $G$ конечный. В общем случае, когда $G$ — произвольная локально компактная абелева группа, не имеется критерия для определения справедливости или несправедливости спектрального синтеза в пространстве $C(G)$.

Другим естественным функциональным пространством является пространство $\mathcal{S}'(G)$ всех обобщенных функций медленного роста на локально компактной абелевой группе $G$. Определение пространства $\mathcal{S}'(G)$ для любой LCA-группы $G$ было введено Ф. Брюа в [6]. Как и в классическом случае $G = \mathbb{R}$, пространство $\mathcal{S}'(G)$ является двойственным пространством к пространству $\mathcal{S}(G)$ быстро убывающих функций на LCA-группе $G$. Функции из пространства $\mathcal{S}(G)$ называются функциями Брюа-Шварца. Определение и основные свойства функций Брюа-Шварца см. в [6].

Для случая, когда $G$ является дискретной абелевой группой, спектральный синтез в пространстве $\mathcal{S}'(G)$ изучался в [7]. В [7] доказано, что спектральный синтез справедлив в пространстве $\mathcal{S}'(G)$ для любой конечно порожденной дискретной абелевой группе $G$, и спектральный синтез в пространстве $\mathcal{S}'(G)$ не справедлив для любой дискретной абелевой группы $G$ с бесконечным рангом без кручения.

Несмотря на то, что спектральный синтез не справедлив в пространствах $C(G)$ и $\mathcal{S}'(G)$ для произвольной дискретной абелевой группы $G$, мы можем изучать задачи о спектральном синтезе для неко-

торых специальных инвариантных подпространств в пространствах $C(G)$ и $\mathcal{S}'(G)$. Одним из естественных классов инвариантных подпространств является класс подпространств, которые являются решениями систем уравнений в свертках.

Всюду далее $G$ — дискретная абелева группа, $C(G)$ — пространство всех $\mathbb{C}$-значных функций на $G$, $C_c(G)$ — множество всех $\mathbb{C}$-значных функций на $G$ с конечным носителем.

Для любых $f \in C(G)$, $\mu \in C_c(G)$ свертка $f * \mu$ имеет вид

$$f * \mu(x) = \sum_{y \in G} f(x-y)\,\mu(y), \quad x \in G.$$

Для любых $\mu_1, \ldots, \mu_n \in C_c(G)$ пусть

$$\mathcal{W}(\mu_1, \ldots, \mu_n; C(G)) = \{f \in C(G) : f * \mu_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Тогда $\mathcal{W}(\mu_1, \ldots, \mu_n; C(G))$ является инвариантным подпространством в $C(G)$.

Следующий результат доказан L. Székelyhidi в [8].

Теорема 1. Для любых функций $\mu_1, \ldots, \mu_n \in C_c(G)$ Инвариантное подпространство $\mathcal{W}(\mu_1, \ldots, \mu_n; C(G))$ допускает спектральный синтез.

В настоящей работе получен аналог теоремы 1 для инвариантных подпространств в $\mathcal{S}'(G)$, которые являются пространствами решений систем уравнений в свертках.

Приведем необходимые сведения о пространствах $\mathcal{S}(G)$ и $\mathcal{S}'(G)$ для случая, когда $G$ является дискретной абелевой группой. В этом случае пространство $\mathcal{S}'(G)$ обобщенных функций медленного роста может отождествлено с некоторым пространством $\mathcal{M}(G)$ состоящим из обычных функций. Приведем определение пространства $\mathcal{M}(G)$. Сначала мы рассмотрим частный случай, когда $G$ является конечно порожденной абелевой группой, а затем рассмотрим общий случай, когда $G$ — произвольная абелева группа.

Пусть $G$ — конечно порожденная абелева группа, $v_1, \ldots, v_n$ — система образующих группы $G$. Произвольный элемент $x \in G$ может быть представлен в виде $x = t_1 v_1 + \ldots + t_n v_n$, где $t_j \in \mathbb{Z}$ (это представление может быть не единственным). Для $x \in G$, определим число $|x| \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ по формуле

$$|x| := \min\{|t_1| + \ldots + |t_n| : x = t_1 v_1 + \ldots + t_n v_n,\ t_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Функция $x \mapsto |x|$ удовлетворяет следующим свойствам: 1) $|x| \geq 0$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2) $|-x| = |x|$; 3) $|x+y| \leq |x| + |y|$, $x, y \in G$;

4) для любого $d \in \mathbb{Z}_+$ множество всех $x$ in $G$ для которых $|x| \leq d$ конечно.

функция $|x|$ является спецальным примером квазинормы на $G$. Будем называть ее квазинормой, соответствующей системе образующих $v_1, \ldots, v_n$.

Для любого $k > 0$, обозначим через $\mathcal{M}_k(G)$ множество всех $\mathbb{C}$-значных функций $f(x)$ на $G$ удовлетворяющих условию

$$|f(x)|(1 + |x|)^{-k} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty.$$

Множество $\mathcal{M}_k(G)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{G,k} = \|f\|_k := \sup_{x \in G} |f(x)|(1 + |x|)^{-k}.$$

Очевидно, что $\mathcal{M}_{k_1}(G) \subseteq \mathcal{M}_{k_2}(G)$ если $k_1 < k_2$, и это вложение непрерывное.

Снабдим пространство

$$\mathcal{M}(G) := \bigcup_{k>0} \mathcal{M}_k(G)$$

топологией индуктивного предела банаховых пространств $\mathcal{M}_k(G)$ (см., например, [9]). Тогда $\mathcal{M}(G)$ является локально выпуклым пространством. Из свойств квазинормы легко получить, что пространства $\mathcal{M}_k(G)$ и $\mathcal{M}(G)$ являются трансляционно инвариантными.

Теперь рассмотрим общий случай, когда $G$ произвольная абелева группа. Для любого конечного подмножества $P \subset G$, обозначим через $G_P$ подгруппу группы $G$ порожденную множеством $P$. Пространство $\mathcal{M}(G_P)$ уже определено, так как группа $G_P$ конечно порожденная. Для любой функции $f$ на $G$ пусть $\sigma_P(f) = f|_{G_P}$ — ограничение $f$ на подгруппу $G_P$.

По определению, пространство $\mathcal{M}(G)$ состоит из всех функций $f$ на $G$ таких, что $\sigma_P(f) \in \mathcal{M}(G_P)$ для любого конечного подмножества $P \subset G$. Пространство $\mathcal{M}(G)$ снабжается топологией проективного предела локально выпуклых пространств $\mathcal{M}(G_P)$, то есть слабейшей локалбно выпуклой топологией на $\mathcal{M}(G)$ в которой все отображения $\sigma_P : \mathcal{M}(G) \mapsto \mathcal{M}(G_p)$ непрерывны (см., например, [9]). Тогда $\mathcal{M}(G)$ является локально выпуклым пространством.

Приведем определение пространства Брюа – Шварца $\mathcal{S}(G)$ для случая, когда $G$ является дискретной абелевой группой.

Если $G$ — конечно порожденная абелева группа, то, по определению, пространство $\mathcal{S}(G)$ состоит из всех функций $g(x)$ на$G$, удовле-

творяющих условиям

$$|g(x)|(1+|x|)^k \to 0 \text{ при } |x| \to \infty$$

для любых $k > 0$, где$|x|$ — квазинорма, определенная в (1).

Пространство $\mathcal{S}(G)$ является локально выпуклым пространством с топологией, порожденной семейством полунорм

$$\mathfrak{n}_{G,k}(g) = \mathfrak{n}_k(g) := \sup_{x\in G} |g(x)|(1+|x|)^k, \quad k > 0.$$

Теперь пусть $G$ — произвольная дискретная абелева группа, пусть $P$ конечное подмножество в $G$, и пусть $G_P$ — подгруппа группы $G$ порожденная $P$. Будем считать, что любая функция $g(x)$ на подгруппе $G_P$ расширяется на $G$ полагая, что $g(x)$ при $x \in G \setminus G_P$.

По определению

$$\mathcal{S}(G) := \bigcup_P \mathcal{S}(G_P),$$

где объединение берется по всем конечным подмножествам $P \subset G$. Пространство $\mathcal{S}(G)$ является локально выпуклым пространством с топологией индуктивного предела локально выпуклых пространств $\mathcal{S}(G_P)$.

По определению, пространством обобщенных функций медленного роста $\mathcal{S}'(G)$ называется топологическое двойственное пространство к пространству $\mathcal{S}(G)$, то есть пространство всех линейных непрерывных функционалов $\varphi : \mathcal{S}(G) \mapsto \mathbb{C}$. Пространство $\mathcal{S}'(G)$ снабжается сильной топологией и является локально выпуклым пространством.

Для любой функции $f \in \mathcal{M}(G)$, $g \in \mathcal{S}(G)$ пусть

$$\langle f, g\rangle := \sum_{x\in G} f(x)g(x).$$

Можно доказать, что для любой функции $f \in \mathcal{M}(G)$ линейный функционал

$$\varphi_f(g) := \langle f, g\rangle \qquad \forall g \in \mathcal{S}(G),$$

принадлежит пространству $\mathcal{S}'(G)$ и отображение $f \mapsto \varphi_f$ is является изоморфизмом топологических векторных пространств $\mathcal{M}(G)$ and $\mathcal{S}'(G)$ (см. [7, Lemma 2.1 and Proposition 2.7]). Используя этот изоморфизм мы будем отождествлять пространство $\mathcal{S}'(G)$ обобщенных функций медленного роста с пространством $\mathcal{M}(G)$.

Пространство $\mathcal{M}(G)$ является трансляционно инвариантным на группе $G$ и можно рассматривать задачу о спектральном синтезе для инвариантных подпространств в $\mathcal{M}(G)$. Известно, что спектральный

синтез в пространстве $\mathcal{M}(G)$ справедлив не для всех дискретных групп $G$ (см. [7]), но можно изучать задачи о спектральном синтезе для специальных классов инвариантных подпространств в $\mathcal{M}(G)$.

Для любых функций $f \in \mathcal{M}(G)$ и $\mu \in \mathcal{S}(G)$ свертка $f * \mu$ определяется формулой

$$f * \mu(x) = \sum_{y \in G} f(x-y)\,\mu(y), \quad x \in G.$$

Можно показать, что $f * \mu \in \mathcal{M}(G)$ и для любой функции $\mu \in \mathcal{S}(G)$ отображение $f \mapsto f * \mu$ является линейным непрерывным оператором в пространстве $\mathcal{M}(G)$.

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — произвольные функции из $\mathcal{S}(G)$,

$$\mathcal{V}_G = \mathcal{V}(\mu_1, \ldots, \mu_n; \mathcal{M}(G)) := \{f \in \mathcal{M}(G) : f * \mu_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n\},$$

то есть $\mathcal{V}_G$ является пространством решений в $\mathcal{M}(G)$ системы уравнений в свертках. Очевидно, что $\mathcal{V}_G$ является инвариантным подпространством в $\mathcal{M}(G)$.

Основным результатом работы является следующая теорема, которая является аналогом теоремы 1.

Теорема 2. Для любой дискретной абелевой группы $G$ и для любых функций $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathcal{S}(G)$ инвариантное подпространство $\mathcal{V}(\mu_1, \ldots, \mu_n; \mathcal{M}(G))$ допускает спектральный синтез.

## Список источников


1. Schwartz L. Théorie générale des fonctions moynne-périodiques // Ann. of Math. 1947. Vol. 48, no. 2. P. 875-929.
2. Gurevich D. I. Counterexamples to a problem of L. Schwartz // Funct. Anal. Appl. 1975. Vol. 9, no. 5. P. 116-120.
3. Schwartz L. Analyse et synthése harmonique dans les espaces de distributions // Can. J. Math. 1951. Vol. 3, no. 2. P. 503-512.
4. Székelyhidi L. Discrete spectral synthesis and its applications. Berlin: Springer, 2006.
5. Laczkovich M., Székelyhidi L. Spectral synthesis on discrete groups // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2007. Vol. 143. P. 103-120.
6. Bruhat F. Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étudedes représentations des groupes $p$-adiques // Bull. Soc. math. France. 1961. Vol. 89. P. 43-75.
7. Platonov S. S. On spectral analysis and spectral synthesis in the space of tempered functions on discrete abelian groups // J. Fourier Anal. Appl. 2018. Vol. 24, no. 5. P. 1340-1375.

8. Székelyhidi L. On the principal ideal theorem and spectral synthesis on discrete Abelian groups // Acta Math. Hung. 2016. Vol. 150, no. 1. P. 228-233.
9. A. Robertson A., Robertson W. Topological vector spaces. Cambrige Tracts in Math., vol. 53. Cambrige: Cambrige Univ. Press. 1964.

## References

1. Schwartz L. Théorie générale des fonctions moynne-périodiques // Ann. of Math. 1947. Vol. 48, no. 2. P. 875-929.
2. Gurevich D. I. Counterexamples to a problem of L. Schwartz // Funct. Anal. Appl. 1975. Vol. 9, no. 5. P. 116-120.
3. Schwartz L. Analyse et synthése harmonique dans les espaces de distributions // Can. J. Math. 1951. Vol. 3, no. 2. P. 503-512.
4. Székelyhidi L. Discrete spectral synthesis and its applications. Berlin: Springer, 2006.
5. Laczkovich M., Székelyhidi L. Spectral synthesis on discrete groups // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2007. Vol. 143. P. 103-120.
6. Bruhat F. Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étudedes représentations des groupes $p$-adiques // Bull. Soc. math. France. 1961. Vol. 89. P. 43-75.
7. Platonov S. S. On spectral analysis and spectral synthesis in the space of tempered functions on discrete abelian groups // J. Fourier Anal. Appl. 2018. Vol. 24, no. 5. P. 1340-1375.
8. Székelyhidi L. On the principal ideal theorem and spectral synthesis on discrete Abelian groups // Acta Math. Hung. 2016. Vol. 150, no. 1. P. 228-233.
9. A. Robertson A., Robertson W. Topological vector spaces. Cambrige Tracts in Math., vol. 53. Cambrige: Cambrige Univ. Press. 1964.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 62-72.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 62-72.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.644.5+517.956.224

# О КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ

***Игорь Олегович Резниченко***[1✉]***, Павел Александрович Крутицкий***[2]***, Валентина Викторовна Колыбасова***[3]
[1,2] *ИПМ им. М. В. Келдыша, Москва, Россия*
[3] *МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия*
[1]*io.reznichenko@physics.msu.ru*✉

***Аннотация.*** *Выводится квадратурная формула для гармонического потенциала простого слоя в трёхмерном случае. Плотность потенциала считается непрерывной и заданной на определённом классе поверхностей. Численные тесты для вычисления потенциала вблизи поверхности при помощи предложенной квадратурной формулы показывают более высокую точность, чем у известных квадратурных формул. При этом формула обеспечивает равномерную аппроксимацию потенциала вблизи поверхности и сохраняет свойство непрерывности потенциала при переходе через поверхность.*

***Ключевые слова:*** *квадратурная формула, уравнение Лапласа, потенциал простого слоя, равномерная аппроксимация.*

Conference paper

# ON A QUADRATURE FORMULA FOR THE HARMONIC SINGLE LAYER POTENTIAL

***Igor Reznichenko***[1✉]***, Pavel Krutitskii***[2]***, Valentina Kolybasova***[3]
[1,2] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia*
[3] *Lomonosov Moscow State University, faculty of physics, Moscow, Russia*
[1]*io.reznichenko@physics.msu.ru*✉

***Abstract.*** *A quadrature formula is derived for the harmonic simple layer potential in the three-dimensional case. The potential density is considered continuous and is given on a certain class of surfaces. Numerical tests for calculating the potential near the surface using the acquired quadrature formula yield a better accuracy than those using previously known quadrature formulas. The obtained formula provides a uniform approximation of the*

© Резниченко И.О., Крутицкий П.А., Колыбасова В.В. 2024

*potential near the surface and preserves the continuity of the potential when crossing the surface.*

***Keywords:*** *quadrature formula, Laplace equation, simple layer potential, uniform approximation.*

## 1. Введение

При численном решении краевых задач для уравнения Лапласа с использованием потенциала простого слоя применяются квадратурные формулы численного интегрирования. Стандартные квадратурные формулы для потенциала простого слоя [1, Глава 2], основанные на численном интегрировании, не обеспечивают равномерной аппроксимации потенциала вблизи поверхности $\Gamma$, где задана плотность потенциала. Приближённое значение потенциала, полученное при помощи этих формул, стремится к бесконечности, когда точка, в которой вычисляется квадратурная формула, приближается к определённым точкам на поверхности $\Gamma$. Тем самым не сохраняются важнейшие свойства потенциала, а именно, его ограниченность вблизи $\Gamma$ и непрерывность при переходе через $\Gamma$.

В [2, 3] предложены квадратурные формулы, которые сохраняют указанные свойства потенциала простого слоя и обеспечивают его равномерную аппроксимацию вблизи $\Gamma$. В настоящей работе обсуждается квадратурная формула, улучшающая формулу из [2, 3] за счет более точного учета элементов подынтегральной функции при аналитическом вычислении интегралов. Эта формула обеспечивает более низкую погрешность, что подтверждается численными тестами.

## 2. Постановка задачи

Введем в пространстве декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Пусть $\Gamma$ — простая гладкая замкнутая поверхность класса $C^2$, ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая поверхность класса $C^2$, содержащая свои предельные точки [4, Глава 14, § 1]. Предположим, что поверхность $\Gamma$ параметризована так, что на нее отображается прямоугольник:

$$y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u, v),\ y_2 = y_2(u, v),\ y_3 = y_3(u, v);$$
$$u \in [0, A], \quad v \in [0, B];$$
$$y_j(u, v) \in C^2([0, A] \times [0, B]), \quad j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Потребуем также, чтобы различным внутренним точкам прямоугольника при указанном отображении соответствовали различные точки поверхности. Сферу, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности

фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом. Кроме того, сложные поверхности можно разбить на несколько частей и для каждой части ввести свою параметризацию, тогда дальнейшие рассуждения справедливы для каждой такой части.

Введём $N$ точек $u_n$ с шагом $h$ на отрезке $[0, A]$ и $M$ точек $v_m$ с шагом $H$ на отрезке $[0, B]$ и рассмотрим разбиение прямоугольника $[0, A] \times [0, B]$, который отображается на поверхность $\Gamma$

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = 0, ..., N - 1;$$

$$v_m = (m + 1/2)H, \quad m = 0, ..., M - 1.$$

Тем самым прямоугольник $[0, A] \times [0, B]$ разбивается на $N \times M$ маленьких прямоугольничков и через $(u_n, v_m)$ обозначены серединки этих прямоугольничков.

Известно [4, Глава 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного) $\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$ в точке поверхности $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$ определяются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Положим $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$. Известно [4, Глава 14, § 1–2], что

$$\int_\Gamma F(y) ds_y = \int_0^A du \int_0^B dv F(y(u, v)) |\eta(y(u, v))|.$$

Заметим, что если $|\eta(y(u, v))| = 0$ в некоторой точке, то функция $|\eta(y(u, v))|$ может быть недифференцируемой в этой точке. Поэтому дополнительно потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| \in C^1([0, A] \times [0, B]). \qquad (3)$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| > 0, \quad \forall\ (u, v) \in ((0, A) \times (0, B)). \qquad (4)$$

Из условия (4) следует, что $|\eta(y(u, v))| \in C^1((0, A) \times (0, B))$, но условие (3) не следует.

Потенциал простого слоя для уравнения Лапласа с заданной на поверхности $\Gamma$ плотностью $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$ имеет вид

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\mu(y)}{|x - y|} ds_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^A du \int_0^B dv \frac{\mu(y(u,v))}{|x-y(u,v)|}|\eta(y(u,v))|, \qquad (5)$$

где

$$|x-y(u,v)| = \sqrt{(x_1-y_1(u,v))^2+(x_2-y_2(u,v))^2+(x_3-y_3(u,v))^2}.$$

Пусть $\mu_{nm} = \mu(y(u_n, v_m))$, тогда

$$\mu(y(u,v)) = \mu_{nm} + o(1), \qquad (6)$$

для $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$. Следовательно, используя (5), имеем

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{|\eta(y(u,v))|}{|x-y(u,v)|}, \qquad (7)$$

Как видно из соотношения (7), для получения квадратурной формулы необходимо вычислить интеграл

$$\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{|\eta(y(u,v))|}{|x-y(u,v)|}, \qquad (8)$$

который будем называть *каноническим интегралом* .

### 3. Вычисление канонического интеграла

Пусть точка $x$ не принадлежит кусочку поверхности, вдоль которого изменяется точка $y = y(u,v)$ в интеграле (8). Центром этого кусочка является точка $y(u_n, v_m)$. В интеграле (8)
$(u-u_n) \in [-h/2, h/2]$, $(v-v_m) \in [-H/2, H/2]$. Разложим $y_j(u,v)$ по формуле Тейлора с центром в точке $(u_n, v_m)$, тогда для $j = 1,2,3$ получим

$$y_j(u,v) = y_j(u_n,v_m) + D_j + O(H^2+h^2),$$

где

$$D_j = (y_j)'_u(u-u_n) + (y_j)'_v(v-v_m).$$

Все производные берутся в точке $(u_n, v_m)$. Положим

$$r^2 = |x-y(u_n,v_m)|^2 = \sum_{j=1}^{3} r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n,v_m) - x_j, \quad j = 1,2,3,$$

тогда

$$y_j(u,v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2+h^2), \quad j = 1,2,3.$$

Следовательно,

$$|x-y(u,v)|^2 = \sum_{j=1}^{3}(x_j - y_j(u,v))^2 \approx \sum_{j=1}^{3}(r_j^2 + 2r_jD_j + D_j^2) =$$

$$= \beta^2(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2,$$

где $U = u - u_n,\ V = v - v_m$,

$$P = \sum_{j=1}^{3} r_j (y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^{3} r_j (y_j)'_v,$$

$$\alpha^2 = \sum_{j=1}^{3} ((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^{3} ((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^{3} (y_j)'_u (y_j)'_v.$$

Производные по $u$ и $v$ берутся в точке $u = u_n, \quad v = v_m$. Можно показать [4, Гл. 14, § 1], что

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2. \tag{9}$$

Согласно условию (4), $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$ для всех возможных $n$, $m$, поэтому

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 > 0. \tag{10}$$

Отсюда следует, что $\alpha^2 > 0$ и $\beta^2 > 0$.

В силу (3), для всех возможных $n$, $m$, при $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ функция $|\eta(y(u, v))|$ может быть разложена в точке $(u_n, v_m)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано [4, Гл. 10, § 5.3]

$$|\eta(y(u, v))| = |\eta(y(u_n, v_m))| + |\eta|'_u U + |\eta|'_v V + o\left(\sqrt{U^2 + V^2}\right), \tag{11}$$

Производные по $u$ и $v$ берутся в точке $(u_n, v_m)$.

Выражения для $|\eta|'_u$ и $|\eta|'_v$ можно записать в виде

$$|\eta|'_u = \frac{(\eta, \eta'_u)}{|\eta|}, \quad |\eta|'_v = \frac{(\eta, \eta'_v)}{|\eta|},$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов.

Интеграл (8) можно записать в виде

$$\int_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} dv \frac{|\eta(y(u, v))|}{|x - y(u, v)|} \approx$$

$$\approx \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \times$$

$$\frac{(|\eta(y(u_n, v_m))| + |\eta|'_u U + |\eta|'_v V)/\beta}{\sqrt{(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2)/\beta^2}} =$$

$$= (|\eta(y(u_n, v_m))| - |\eta|'_v Q/\beta^2)\theta_{nm}(x) +$$

$$+\frac{|\eta|'_u - |\eta|'_v\delta/\beta^2}{\beta}(J_1(H) - J_1(-H)) + \frac{|\eta|'_v}{\beta}(J_2(H) - J_2(-H)) =$$

$$= \Theta_{nm}(x). \qquad (12)$$

Здесь введены обозначения $\Theta_{nm}(x)$, $\theta_{nm}(x)$, $J_1(H)$ и $J_2(H)$. Функция $\theta_{nm}(x)$ найдена в явном виде в [2, 3]. Интегралы $J_1(H)$ и $J_2(H)$ возникают после интегрирования по $V$ с учётом неравенства (10) и вычислены в явном виде в [5].

**4. Основной результат**

Сформулируем основной результат этой работы в виде теоремы. **Теорема**. *Пусть $\Gamma$ — простая гладкая замкнутая поверхность класса $C^2$, ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая поверхность класса $C^2$, содержащая свои предельные точки. Пусть $\Gamma$ допускает параметризацию (1) со свойствами (3), (4), и $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$. Тогда для гармонического потенциала простого слоя (5) при $x \notin \Gamma$ имеет место квадратурная формула*

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm}\Theta_{nm}(x), \qquad (13)$$

*где интеграл $\Theta_{nm}(x)$, определенный в (12), вычислен в работе [5] в явном виде.*

Как следует из приведенных ниже численных тестов, остаточный член в (13) можно оценить как $O(H^2)$ равномерно по $x \notin \Gamma$, т.е. формула (13) даёт равномерную аппроксимацию и обеспечивает равномерную сходимость к потенциалу простого слоя для точек, расположенных вне $\Gamma$.

**5. Численные тесты**

Тестирование квадратурных формул для потенциала простого слоя для уравнения Лапласа проведено в случае, когда поверхность $\Gamma$ является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями:

$$y_1(u, v) = \sin v \cos u, \quad y_2(u, v) = \sin v \sin u, \quad y_3(u, v) = \cos v, \qquad (14)$$

причём $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

В рассматриваемых тестовых примерах для потенциала простого слоя с заданной на единичной сфере плотностью известно явное выражение во всём пространстве, поэтому точные значения потенциала можно сравнить с приближенными, вычисленными по квадратурным

формулам. В тестах приближенное значение потенциала простого слоя вычислялось по стандартной квадратурной формуле [1, Глава 2], либо по формуле из [2, 3], либо по улучшенной квадратурной формуле (13). Вычисления производились в некоторых точках на вспомогательных сферах, имеющих центры в начале координат и радиусы, равные $1 \pm \Delta R$. Тем самым, вспомогательные сферы находятся либо внутри, либо снаружи сферы единичного радиуса, на которой задана плотность потенциала, на расстоянии $\Delta R$ от неё. Затем были рассчитаны значения абсолютных либо относительных (когда абсолютная погрешность делится на модуль точного значения потенциала в данной точке) погрешностей в этих точках, и для каждой вспомогательной сферы определялись максимумы значений этих погрешностей.

Координаты точек, которые использовались для оценки максимальной абсолютной либо относительной погрешности:

$$x_j^{ql} = Ry_j(u_q, v_l), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$u_q = \frac{2\pi}{2N}q, \quad q = 0, \dots 2N; \quad v_l = \frac{\pi}{2M}l, \quad l = 0, \dots, 2M, \qquad (15)$$

где $y_j(u, v)$ определяется формулами (14), $R$ – радиус вспомогательной сферы. То есть эти точки расположены над и под центрами участков разбиения единичной сферы, серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ.

Вычисления проводились для различных значений $M$ и $N$. Значения шагов определяются формулами $h = 2\pi/N, \;\; H = \pi/M$.

В таблицах приведены рассчитанные максимальные значения погрешностей. В левом столбце указано отличие радиуса вспомогательной сферы от единицы: для внутренних сфер радиус равен $1 - \Delta R$, для внешних $1 + \Delta R$. В верхней строке указаны значения $M, N$.

**Тест 1.** В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = 4\pi$, тогда гармонический потенциал простого слоя имеет вид

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} 4\pi & \text{при} \;\; |x| < 1 \\ \dfrac{4\pi}{|x|} & \text{при} \;\; |x| > 1 \end{cases}.$$

В таблице 1 приведены рассчитанные максимальные значения относительных погрешностей.

**Тест 2.** В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = \cos u \sin v$, тогда гармонический потенциал простого слоя

| $\Delta R$ | $M = N = 25$ | $M = N = 50$ | $M = N = 100$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 4.0E-3; 0.0019 | 9.7E-4; 0.00044 | 2.4E-4; 0.00011 |
| 0.01 | 0.040; 0.0035 | 0.014; 0.00076 | 4.2E-3; 0.00015 |
| 0.001 | 0.065; 0.0042 | 0.038; 0.0011 | 0.017; 0.00026 |
| 0.0001 | 0.069; 0.0043 | 0.045; 0.0012 | 0.027; 0.0003 |

Внутренние сферы

| $\Delta R$ | $M = N = 25$ | $M = N = 50$ | $M = N = 100$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 5.8E-3; 0.0015 | 1.4E-3; 0.00035 | 3.4E-4; 8.6E-5 |
| 0.01 | 0.048; 0.003 | 0.016; 0.00073 | 4.3E-3; 0.00014 |
| 0.001 | 0.075; 0.0035 | 0.046; 0.00045 | 0.019; 0.00026 |
| 0.0001 | 0.070; 0.0043 | 0.047; 0.0011 | 0.031; 0.00021 |

Внешние сферы

Таблица 1: Максимальные относительные погрешности квадратурной формулы из [2, 3] (первое число в ячейках) и улучшенной формулы (13) (второе число в ячейках) в тесте 1.

имеет вид

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} \dfrac{|x|\cos\varphi\sin\vartheta}{3} & \text{при } |x| < 1, \\ \dfrac{\cos\varphi\sin\vartheta}{3|x|^2} & \text{при } |x| > 1, \end{cases},$$

где $\vartheta$ и $\varphi$ — зенитный и азимутальный углы в сферических координатах с центром в начале координат. В таблице 2 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

**6. Заключение**

Из результатов тестов видно, что улучшенная квадратурная формула (13) даёт второй порядок (по $H$) равномерной сходимости к потенциалу простого слоя и обеспечивает равномерную аппроксимацию потенциала с погрешностью $O(H^2)$. Погрешность $O(H^2)$ не зависит от расстояния до $\Gamma$ и справедлива даже на очень малых расстояниях. В то же время квадратурная формула из [2, 3] даёт первый порядок (по $H$) равномерной сходимости к потенциалу простого слоя и обеспечивает равномерную аппроксимацию потенциала с погрешностью $O(H)$. Тем самым, формула (13) превосходит результат, полученный в [2, 3]. Обе эти формулы сохраняют свойство непрерывности потенциала простого слоя при переходе через поверхность $\Gamma$, что также следу-

| $\Delta R$ | $M = N = 25$ | $M = N = 50$ | $M = N = 100$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 3.4E-3; 0.0024 | 1.1E-4; 5.7E-4 | 2.8E-7; 1.4E-4 |
| 0.01 | 0.21; 0.0044 | 0.042; 9.7E-4 | 7.1E-3; 2.0E-4 |
| 0.001 | 2.5; 0.0051 | 0.60; 0.0013 | 0.14; 3.1E-4 |
| 0.0001 | 25; 0.0052 | 6.2; 0.0014 | 1.6; 3.5E-4 |

Внутренние сферы

| $\Delta R$ | $M = N = 25$ | $M = N = 50$ | $M = N = 100$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 4.1E-3; 0.00066 | 1.6E-4; 1.4E-4 | 6.9E-7; 3.4E-5 |
| 0.01 | 0.21; 0.002 | 0.042; 5.1E-4 | 7.1E-3; 8.9E-5 |
| 0.001 | 2.5; 0.0044 | 0.60; 4.7E-4 | 0.14; 2.1E-4 |
| 0.0001 | 25; 0.0052 | 6.2; 0.0013 | 1.6; 2.6E-4 |

Внешние сферы

Таблица 2: Максимальные абсолютные погрешности стандартной квадратурной формулы [1, Глава 2] (первое число в ячейках) и улучшенной формулы (13) (второе число в ячейках) в тесте 2.

ет из приведенных численных результатов. Из таблиц также вытекает, что стандартная квадратурная формула (см. [1, 2, 3] ) не обеспечивает равномерной сходимости и равномерной аппроксимации потенциала простого слоя, поскольку погрешность этой формулы неограниченно возрастает вблизи $\Gamma$.

Квадратурные формулы для потенциалов используются при численном решении краевых задач математической физики методом граничных интегральных уравнений. Краевые задачи для многосвязных областей сведены к однозначно-разрешимым интегральным уравнения в [6] для уравнения Лапласа в трехмерном случае и в [7, 8, 9] для уравнения Гельмгольца в двумерном случае вне разомкнутых кривых.

## Список источников


1. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
2. *Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В.* Квадратурная формула для потенциала простого слоя. Дифференциальные уравнения, 2019, Т. 55, N 9, С. 1269 — 1284.
3. *Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В.* О квадратурной формуле для потенциала простого слоя в трехмерном случае. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2019, N 112., 26 с.

4. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. — М.: Физматлит, 2000.
5. *Крутицкий П.А., Резниченко И.О.* Улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2023, т. 63, № 2, С. 44 — 58.
6. Крутицкий П.А. Смешанная задача для уравнения Лапласа в трехмерной многосвязной области. // Дифференциальные уравнения, 1999, т. 35, № 9, с. 1179 — 1186.
7. Krutitskii P.A. The Helmholtz equation in the exterior of slits in a plane with different impedance boundary conditions on opposite sides of the slits. // Quarterly of Applied Mathematics, 2009, v. 67, № 1, pp. 73 — 92.
8. Krutitskii P.A. Mixed problem for the Helmholtz equation outside cuts on the plane // Differential Equations, 1996, v. 32, № 9, pp. 1204 — 1212.
9. Krutitskii P.A. The Dirichlet problem for the 2-D Helmholtz equation in a multiply connected domain with cuts. // ZAMM, 1997, v. 77, № 12, pp. 883 — 890.

## References

1. *Brebbia K., Telles J., Wroubel L.* Boundary Element Methods. Moscow: Mir, 1987. (in Russ.)
2. *Krutitsky P.A., Fedotova A.D., Kolybasova V.V.* Quadrature formula for the potential of a simple layer. Differential equations, 2019, Vol. 55, N 9, P. 1269 — 1284. (in Russ.)
3. *Krutitskiy P.A., Fedotova A.D., Kolybasova* V.V. On the quadrature formula for the potential of a simple layer in the three-dimensional case. // Preprint of Keldysh Institute of Problems of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, 2019, N 112., 26 p. (in Russ.)
4. *Butuzov V.F., Krutitskaya N.Ch., Medvedev G.N., Shishkin A.A.* Mathematical analysis in questions and problems. — M.: Fizmatlit, 2000. (in Russ.)
5. *Krutitsky P.A., Reznicenko I.O.* Improved quadrature formula for the simple layer potential. // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2023, v. 63, no. 2, pp. 44 — 58. (in Russ.)
6. Krutitsky P.A. Mixed problem for the Laplace equation in a three-dimensional multiply connected domain. // Differential Equations, 1999, v. 35, no. 9, pp. 1179 — 1186.

7. Krutitskii P.A. The Helmholtz equation in the exterior of slits in a plane with different impedance boundary conditions on opposite sides of the slits. // Quarterly of Applied Mathematics, 2009, v. 67, N1, pp. 73 — 92.
8. Krutitskii P.A. Mixed problem for the Helmholtz equation outside cuts on the plane // Differential Equations, 1996, v. 32, N 9, pp. 1204 — 1212.
9. Krutitskii P.A. The Dirichlet problem for the 2-D Helmholtz equation in a multiply connected domain with cuts. // ZAMM, 1997, v. 77, № 12, pp. 883 — 890.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 73-76.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 73-76.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.518.12

# ОБ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

***Юнус Солиевич Солиев***[1]✉
[1]*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Москва, Россия*
[1]*su1951@mail.ru*

***Аннотация.*** *Для сингулярного интеграла по действительной оси построена и исследована квадратурная формула интерференционного характера. Рассматривается также интерполяционная квадратурная формула для сингулярного интеграла с ядром Гильберта.*

***Ключевые слова:*** *сингулярный интеграл; интерференция; квадратурная формула.*

Conference paper

# ON INTERFERENCE QUADRATURE FORMULAS FOR SINGULAR INTEGRALS

***Yunus S. Soliev***[1]✉
[1]*Moscow Automobile and Road Construction State University (MADI), Moscow, Russia*
[1]*su1951@mail.ru*

***Abstract.*** *For a singular integral along the real axis, a quadrature formula of an interference nature is constructed and investigated. An interpolation quadrature formula for a singular integral with the Hilbert kernel is also considered.*

***Keywords:*** *singular integral; interference; quadrature formula.*

Рассмотрим понимаемый в смысле главного значения по Коши сингулярный интеграл

$$Kf = K(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-x}\,dt, \qquad (1)$$

где $f(x)$ - плотность интеграла.

Пусть $L_p(R)$ – пространство всех измеримых на $R$ функций $f$ с нормой

© Солиев Ю. С., 2024

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} < \infty, \text{ где } \|f\|_p = \left\{ \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, 1 \le p < \infty; \ \sup_{t \in R} |f(t)|, p = \infty \right\},$$

$\omega_k(f,t)_p = \omega_k(f,t)_{L_p}$ – модуль гладкости $k$ -го порядка $f$ в $L_p(R)$, $L_p^r(R)$ – подпространство функций $f \in L_p(R)$, для которых производная $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на R и $\|f^{(r)}\|_p = \|f^{(r)}\|_{L_p} < \infty$, $B_{p,\sigma}$ – множество целых функций экспоненциального типа $\le \sigma$, принадлежащих $L_p(R)$, $B_{\infty,\sigma} = B_\sigma$.

Следуя [1] через $B^{(1)}{}_\sigma$ обозначим класс целых функций *f(z)*, удовлетворяющих следующим условиям:

$$f(z) = O\left( \left(1 + |z|^l\right) e^{\sigma|y|} \right), z = x + iy, l \in N; \ \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0; \ f\left( \frac{k\pi}{\sigma} + \alpha \right) = O(1), k \in Z.$$

Отметим, что класс $B_\sigma$ является правильной частью класса $B^{(1)}{}_\sigma$.

Если $f(x) \in B_\sigma^{(1)}, \sigma \ge \pi$, то [1] функция $f\left( x - \frac{2m+1}{2\sigma}\pi \right) + f\left( x + \frac{2m+1}{2\sigma}\pi \right)$, $m \in Z$, ограничена при $x \in R$. При $m = 0$ имеем интерференцию С.Н. Бернштейна [2].

Введем оператор

$$L_\sigma f = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( f\left( \frac{k\pi}{\sigma} - \frac{2m+1}{2\sigma}\pi \right) + f\left( \frac{k\pi}{\sigma} + \frac{2m+1}{2\sigma}\pi \right) \right) \operatorname{sinc} \sigma \left( x - \frac{k\pi}{\sigma} \right),$$

где $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$, $m$ – фиксированное целое число.

Заменяя плотность интеграла (1) оператором $L_\sigma f$, получим квадратурную формулу

$$Kf = K(L_\sigma f; x) + R_\sigma f = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( f\left( \frac{k\pi}{\sigma} - \frac{2m+1}{2\sigma} \right) + f\left( \frac{k\pi}{\sigma} + \frac{2m+1}{2\sigma}\pi \right) \right) (k\pi - \sigma x) \operatorname{sinc}^2 \frac{\sigma x - k\pi}{2} + R_\sigma f, \quad (2)$$

где $R_\sigma f = R_\sigma(f; x)$ – остаточный член.

Оператор $L_\sigma f$ и квадратурная формула (2) носят интерференционный характер, однако они не являются интерполяционными. Заметим, что в работе [3] построены некоторые квадратурные формулы для интеграла $Kf$, использующие различные комбинации синк-функций.

**Теорема 1.** *Если* $f \in L_p^r(R) \cap B_\sigma^{(1)}, r = 0,1,\ldots, 1 < p < \infty, \sigma \ge \pi$, *то для остаточного члена квадратурной формулы (2) справедлива оценка:*

$$\|R_\sigma f\|_p = O\left( \sigma^{-r} \omega_k\left( f^{(r)}, \frac{1}{\sigma} \right)_p \right).$$

**Следствие 1**. *Если в условиях теоремы 1* $\omega_k(f,\delta)_p = 0(\delta^\alpha), 0 < \alpha < 1$, *то справедлива оценка* $\|R_\sigma f\|_p = O(\sigma^{-r-\alpha}), r + \alpha > 0.$

**Следствие 2**. *Если в условиях теоремы 1* $\omega_k(f,\delta)_p = 0(\delta^\alpha), 0 < \alpha < 1$, *то*

*справедлива равномерная оценка* $\|R_\sigma f\|_C = O\left(\sigma^{-r-\alpha+\frac{1}{p}}\right)$, $p(r+\alpha)>1$.

В работах А.Ю. Трынина (см., напр., [4]) рассмотрены вопросы аппроксимации функций, заданных на отрезке действительной оси, различными конструкциями операторов типа $L_\sigma f$.

Используя различные комбинации интерполяционных формул, можно расширить класс равномерной сходимости полученных интерполяционных формул.

Рассмотрим применение одного такого процесса [5] к приближенному вычислению интеграла

$$If = I(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}\,dt,$$

понимаемого в смысле главного значения по Коши, где $f(x)$ – заданная $2\pi$ – периодическая плотность интеграла.

Следуя [5], через $L_n(x) = L_n(f;x)$ обозначим интерполяционный полином типа Джексона степени $n-1$, удовлетворяющий условиям:

$$L_n(x_k) = f(x_k),\ L_n^{(M)}(x_k) = 0, x_k = \frac{2k\pi}{n}\ (k = \overline{0,n-1}),$$

где $M$ – положительное четное целое число.

Аппроксимируя плотность интеграла $If$ полиномом $L_n(x)$, получим интерполяционную квадратурную формулу

$$If = I(L_n f;x) + R_n f = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(n-j)^M}{(n-j)^M + j^M}\sin j(x_k - x) + R_n f,$$

где $R_n f = R_n(f;x)$ – остаточный член.

**Теорема 2**. *Если* $f(x)$ *– непрерывная функция с модулем непрерывности* $\omega(\delta)$, *то справедлива оценка* $\|R_n f\|_C = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln n\right)$.

## Список источников


1. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. — М., 1960. — 624 с.

2. Бернштейн С.Н. Перенесение свойств тригонометрических полиномов на целые функции конечной степени / С.Н. Бернштейн // Собрание сочинений. Т. 2. —1954. — С. 446-467.

3. Солиев Ю.С. Некоторые квадратурные формулы для преобразования Гильберта / Ю.С. Солиев // Материалы международной научной конференции «УОМШ», Том 1. Уфа: РИЦ БашГУ. — 2022. — С.174-176.

4. Трынин А.Ю. Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа — Якоби / А.Ю. Трынин // Изв. РАН. Сер. матем., —2011. —Т.75 (6). — С.129–162.

5. Varma A.K. On a New Interpolation Process / A.K. Varma // J. of Approximation Theory. —1971. —V.4. — P.159-164.

## References

1. Timan A.F. Approximation theory of functions of a real variable / A.F. Timan. - M., 1960. - 624 p. (In Russ.).

2. Bernstein S.N. Transfer of properties of trigonometric polynomials to entire functions of finite degree / S.N. Bernstein // Collected Works. T. 2. -1954. - P. 446-467. (In Russ.).

3. Soliev Yu.S. Some quadrature formulas for the Hilbert transform / Yu.S. Soliev // Proceedings of the international scientific conference "UOMSh", Volume 1. Ufa: RIC BashSU. - 2022. - P. 174-176.(In Russ.).

4. Trynin A.Yu. On interpolation operators based on solutions to the Cauchy problem and Lagrange-Jacobi polynomials / A.Yu. Trynin // Izv. RAS. Ser. Mathematics, -2011. —T.75 (6). — P.129–162.(In Russ.).

5.Varma A.K. On a New Interpolation Process / A.K. Varma // J. of Approximation Theory. —1971. —V.4. — P.159-164.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 77-80.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 77-80.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.547

# ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ПРИ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

***Олег Дмитриевич Соломатин***
*Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*solomatin_od@bk.ru*

***Аннотация.*** *Уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u(0,x,y) = \cos(x+y), \quad u_t'(0,x,y) = y\left(x^2+1\right), \quad a \in C$$

*решается в пространстве $H(D)$ функций, аналитических в односвязной области $D \subset C$. Вычислены точные характеристики роста полученного решения.*

***Ключевые слова:*** *Дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, операторный метод, характеристики роста решения.*

Conference paper

# AN OPERATOR METHOD FOR SOLVING A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION IN PARTIAL DERIVATIVES

***Oleg D. Solomatin***
*Orel State University, Orel, Russia*
*solomatin_od@bk.ru*

***Abstract.*** *The equation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u(0,x,y) = \cos(x+y), \quad u_t'(0,x,y) = y\left(x^2+1\right), \quad a \in C$$

*is solved in the space of functions that are analytic in a simply connected domain. The exact growth characteristics of the resulting solution are calculated.*

***Keywords:*** *Second-order partial differential equation, operator method, growth characteristics of the solution.*

## 1. Введение

В статье решается уравнение

© Соломатин О. Д., 2024

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u(0,x,y) = \cos(x+y), \quad u_t'(0,x,y) = y\left(x^2+1\right), \quad a \in C$$

в пространстве $H(D)$ функций, аналитических в односвязной области $D \subset C$. Вычислены точные характеристики роста полученного решения. Рассматриваемое уравнение относится к типу дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных.

**2. Основной текст статьи**

Порядок уравнения $m = 2$. Пространство $H(D)$ функций, аналитических в односвязной области $D \subset C$. Начальные данные уравнения $x_0 = \cos(x+y)$, $x_1 = y\left(x^2+1\right)$ принадлежат пространству $H(D)$. Оператор

$A = a\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} : H(D) \to H(D)$. По теореме (см. [1]) решение представляется в виде $u(t,x,y) = u_0(t,x_0) + u_1(t,x_1)$, где

$$u_0(t,x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(x_0)}{(2n)!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n\left(\cos(x+y)\right)}{(2n)!} t^{2n}.$$

Вычислим оператор $A^n\left(\cos(x+y)\right)$.

$$A^0\left(\cos(x+y)\right) = \cos(x+y),$$

$$A^1\left(\cos(x+y)\right) = a\left(\cos(x+y)\right)''_{xy} = a\left(-\sin(x+y)\right)'_y = -a\cos(x+y),$$

$$A^2\left(\cos(x+y)\right) = -a^2\left(\cos(x+y)\right)''_{xy} = -a^2\left(-\sin(x+y)\right)'_y = a^2\cos(x+y),$$

$$A^3\left(\cos(x+y)\right) = a^3\left(\cos(x+y)\right)''_{xy} = a^3\left(-\sin(x+y)\right)'_y = -a^3\cos(x+y),$$

$$A^4\left(\cos(x+y)\right) = -a^4\left(\cos(x+y)\right)''_{xy} = -a^4\left(-\sin(x+y)\right)'_y = a^4\cos(x+y),$$

……

$$A^n\left(\cos(x+y)\right) = (-1)^n a^n \cos(x+y).$$

Тогда находим

$$u_0(t,x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n \cos(x+y)}{(2n)!} t^{2n} = \cos(x+y)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{\frac{2n}{2}}}{(2n)!} t^{2n} =$$

$$= \cos(x+y)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{a}\right)^{2n}}{(2n)!} t^{2n} = \left[\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}\right] = \cos(x+y)\cos\left(\sqrt{a}t\right).$$

Далее,

$$u_1(t,x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(x_1)}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n\left(y\left(x^2+1\right)\right)}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

Вычислим оператор $A^n\left(y\left(x^2+1\right)\right)$.

$A^0\left(y\left(x^2+1\right)\right)=y\left(x^2+1\right),\ A^1\left(y\left(x^2+1\right)\right)=a\left(y\left(x^2+1\right)\right)''_{xy}=a\left(y\cdot 2x\right)'_y=2ax,$

$A^2\left(y\left(x^2+1\right)\right)=2a^2x''_{xy}=2a^2 1'_y=0,\ \ldots,\ A^n\left(y\left(x^2+1\right)\right)=0.$

Тогда находим

$$u_1\left(t,x_1\right)=y\left(x^2+1\right)t+\frac{2ax}{6}t^3=y\left(x^2+1\right)t+\frac{ax}{3}t^3,$$

и, следовательно,

$$u\left(t,x,y\right)=\cos\left(\sqrt{a}t\right)\cos\left(x+y\right)+y\left(x^2+1\right)t+\frac{ax}{3}t^3.$$

Вычислим теперь характеристики роста полученного решения.

$$\beta_p\left(\cos\left(x+y\right)\right)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\left\|A^n\left(\cos\left(x+y\right)\right)\right\|_p}{n\ln n}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\left\|\left(-1\right)^n a^n\cos\left(x+y\right)\right\|_p}{n\ln n}=$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\left|a\right|^n+\ln\left\|\cos\left(x+y\right)\right\|_p}{n\ln n}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln\left|a\right|+\ln\left\|\cos\left(x+y\right)\right\|_p}{n\ln n}=0$$

– операторные $p$-порядки вектора $x_0$.

$$\alpha_p\left(\cos\left(x+y\right)\right)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\left\|A^n\left(x_0\right)\right\|_p}}{n^{\beta_p(x_0)}}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\left\|\left(-1\right)^n a^n\cos\left(x+y\right)\right\|_p}}{n^{\beta_p(x_0)}}=$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\left|a\right|\sqrt[n]{\left\|\cos\left(x+y\right)\right\|_p}}{n^{\beta_p(x_0)}}=\left|a\right|\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\left\|\cos\left(x+y\right)\right\|_p}}{1}=\left|a\right|$$ – операторные $p$-типы

вектора $x_0$. Тогда порядок и тип роста вектора $x_0$ равны

$$\rho\left(\cos\left(x+y\right)\right)=\frac{m}{m-\beta\left(x_0\right)}=\frac{2}{2-0}=1,$$

$$\sigma\left(\cos\left(x+y\right)\right)=\left(\frac{m-\beta\left(x_0\right)}{e}\right)\left(\alpha\left(x_0\right)^{\frac{1}{m-\beta(x_0)}}\right)\left(\frac{e}{m}\right)^{\frac{m}{m-\beta(x_0)}}=\sqrt{\left|a\right|}.$$

Аналогично для вектора $x_1=y\left(x^2+1\right)$ находим:

$$\beta_p\left(y\left(x^2+1\right)\right)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\left\|A^n\left(y\left(x^2+1\right)\right)\right\|_p}{n\ln n}=0,$$

$$\alpha_p\left(y\left(x^2+1\right)\right)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\left\|A^n\left(y\left(x^2+1\right)\right)\right\|_p}}{n^{\beta_p(x_1)}}=0,$$

$$\rho\left(y\left(x^2+1\right)\right)=1,\ \sigma\left(y\left(x^2+1\right)\right)=0.$$

Таким образом, характеристики роста функции $u(t)$ – решения этой задачи Коши – равны $\rho(u(t))=1$ и $\sigma(u(t))=\sqrt{|a|}$.

**3. Заключение**

В работе решено уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad u(0,x,y)=\cos(x+y),\quad u_t'(0,x,y)=y(x^2+1),\quad a\in C$$

в пространстве $H(D)$ функций, аналитических в односвязной области $D\subset C$. Вычислены точные характеристики роста полученного решения. Для решения уравнения применялся операторный метод.

## Список источников

1. Громов В.П. Операторный метод решения линейных уравнений. Ученые записки лаборатории теории функций и функционального анализа ОГУ. Выпуск 3. – Орел: Издательство ОГУ, 2002, с. 4-36.

## References

1. Gromov V.P. An operator method for solving linear equations. Scientific notes of the OSU Laboratory of Theory of Functions and Functional Analysis. Issue 3. – Orel: OSU Publishing House, 2002, pp. 4-36.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 81-84.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 81-84.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.547

# РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

***Олег Дмитриевич Соломатин[1]✉, Елизавета Игоревна Лапаткина[2]***
*[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]solomatin_od@bk.ru✉*

***Аннотация.*** *Решается интегро-дифференциальное уравнение вида*

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \int_0^x \frac{u(t,\varsigma)}{(x-\varsigma)^{1-\alpha}} d\varsigma, \quad \alpha > 0, \quad m \geq 1 \qquad (1)$$

*в классе функций $u(t,x)$, непрерывных по переменной $x$ и дифференцируемых по переменной $t$. Вычислены характеристики роста полученного решения.*

***Ключевые слова:*** *Интегро-дифференциальное уравнение, оператор дробного дифференцирования, порядок и тип оператора, характеристики роста функции.*

Conference paper

# SOLVING INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

***Oleg D. Solomatin[1]✉, Elizaveta I. Lapatkina[2]***
*[1, 2]Orel State University, Orel, Russia*
*[1]solomatin_od@bk.ru✉*

***Abstract.*** *An integro-differential equation of the form*

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \int_0^x \frac{u(t,\varsigma)}{(x-\varsigma)^{1-\alpha}} d\varsigma, \quad \alpha > 0, \quad m \geq 1 \qquad (1)$$

*is solved in the class of functions continuous with respect to a variable and differentiated with respect to a variable. The growth characteristics of the resulting solution are calculated.*

***Keywords:*** *Integro-differential equation, fractional differentiation operator, order and type of operator, characteristics of function growth.*

© Соломатин О. Д., Лапаткина Е. И., 2024

**1. Введение**

В данной работе решим уравнение (1) в классе функций $u(t,x)$, непрерывных по переменной $x$ и дифференцируемых по переменной $t$. Вычислим характеристики роста полученного решения. Рассматриваемое уравнение относится к типу интегро-дифференциальных уравнений.

**2. Основной текст статьи**

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение (1). Найдем решения уравнения (1), удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = f_k(x), \quad k = 0,1,...,m-1. \tag{2}$$

где $f_k(x)$ – функции, непрерывные на отрезке $[0,b]$.

Поставленную задачу будем решать в классе функций $u(t,x)$, непрерывных по переменной $x$ и дифференцируемых по переменной $t$. Запишем уравнение (1) в операторной форме:

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = A\left[u(t,x)\right], \quad A = \Gamma(\alpha)\cdot J_\alpha,$$

где $J_\alpha(\varphi)(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-\varsigma)^{\alpha-1}\varphi(\varsigma)d\varsigma, \quad \varphi \in C[0,b], \quad \alpha > 0,$

– оператор дробного интегрирования порядка $\alpha$, действующий в пространстве $C[0,b]$ функций, непрерывных на отрезке $[0,b]$; $\Gamma(\alpha)$ – значение гамма-функции в точке $\alpha$.

**Теорема.** Задача (1)-(2) имеет решение при любых начальных условиях $f_k(x) \in C[0,b], \quad k = 0,1,...,m-1$, и оно представляется в виде:

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{m-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\Gamma(\alpha)\right]^n \cdot J_{\alpha n}^m(f_k)}{(mn+k)!}t^{mn+k}\right\}, \tag{3}$$

где $J_{n\alpha} = J_\alpha^n, \quad n \geq 1, \quad J_0^\alpha = E$.

Ряд (3) сходится абсолютно по топологии пространства $C[0,b]$ в каждой точке $t \in C$ и представляет целую векторнозначную функцию со значениями в $C[0,b]$. Характеристики роста функции (3) равны:

$\rho(u) = \dfrac{m}{m+\alpha}$ – порядок роста, $\sigma(u) = (m+\alpha)\Gamma(\alpha)\left(\dfrac{b}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{m+\alpha}}\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{m}{m+\alpha}}$ – тип роста.

Доказательство. Непосредственно исходя из определения оператора $A = \Gamma(\alpha)J_\alpha$, находится его порядок $\beta(A) = -\alpha$ и тип $\alpha(A) = \Gamma(\alpha)\left(\dfrac{eb}{\alpha}\right)^\alpha$. Операторные порядки и типы функций $f \in C[0,b]$ относительно оператора $A$,

все одинаковы и равны порядку и типу самого оператора. Далее, применяя теорему 1 (см. [1]), получим решение (3) задачи (1)-(2). Характеристики роста целой функции (3) вычисляем по формулам:

$$\rho(f)=\frac{m}{m-\beta(f)},\quad \sigma(f)=\left(\frac{m-\beta(f)}{e}\right)(\alpha(f))^{\frac{1}{m-\beta(f)}}\left(\frac{e}{m}\right)^{\frac{m}{m-\beta(f)}}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы.

1) $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\int\limits_0^x \dfrac{u(t,\varsigma)}{\sqrt{x-\varsigma}}d\varsigma,\quad u(0,x)=f(x)\in C[0,b]$. Здесь $m=1,\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Это уравнение имеет решение для любой начальной функции $f(x)\in C[0,b]$. Оно является целой вектор-функцией, которая представляется рядом:

$$u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n J_{\frac{n}{2}}[f(x)]}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{\pi}\right)J_{\frac{n}{2}}[f(x)]}{n!}t^n,$$

где

$$J_{\frac{n}{2}}[f(x)]=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^x(x-\varsigma)^{\frac{n}{2}-1}f(\varsigma)d\varsigma.$$

Характеристики роста функции $u(t,x)$ равны:

$$\rho(u)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},\quad \sigma(u)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{3}{2}\sqrt{\pi}\cdot\sqrt[3]{2b}.$$

2) $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=\int\limits_0^x \dfrac{u(t,\varsigma)}{\sqrt[3]{x-\varsigma}}d\varsigma,\quad u(0,x)=f_1(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=f_2(x)$.

Здесь $m=2,\alpha=\dfrac{2}{3}$. Уравнение имеет решение для любых начальных данных $f_1(x),f_2(x)\in C[0,b]$. Оно является целой вектор-функцией $u(t,x)$ со значениями в пространстве $C[0,b]$ и представляется следующим рядом:

$$u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right]^n J_{\frac{2n}{3}}[f_1(x)]}{(2n)!}t^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right]^n J_{\frac{2n}{3}}[f_2(x)]}{(2n+1)!}t^{2n+1}.$$

Характеристики роста функции $u(t,x)$ равны:

$$\rho(u)=\frac{3}{4},\quad \sigma(u)=\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{3b}\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

## 3. Заключение

В работе решено уравнение $\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \int_0^x \frac{u(t,\varsigma)}{(x-\varsigma)^{1-\alpha}} d\varsigma, \quad \alpha > 0, \quad m \geq 1$ в классе функций $u(t,x)$, непрерывных по переменной $x$ и дифференцируемых по переменной $t$. Вычислены характеристики роста полученного решения.

## Список источников

1. Громов В.П. Операторный метод решения линейных уравнений. Ученые записки лаборатории теории функций и функционального анализа ОГУ. Выпуск 3. – Орел: Издательство ОГУ, 2002, с. 4-36.

## References

1. Gromov V.P. An operator method for solving linear equations. Scientific notes of the OSU Laboratory of Theory of Functions and Functional Analysis. Issue 3. – Orel: OSU Publishing House, 2002, pp. 4-36.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 85-92.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 85-92.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.64

# ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ПРОЕКЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

***Эльнур Гасан оглы Халилов***[1]✉
[1]*Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку, Азербайджан*
[1]*elnurkhalil@mail.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0001-7603-5072*

***Аннотация.*** *В работе дано обоснование метода коллокации для интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве.*

***Ключевые слова:*** *внешняя краевая задача Дирихле, уравнение Гельмгольца, метод граничных интегральных уравнений, криволинейный сингулярный интеграл, метод коллокации.*

Conference paper

# STUDY OF THE SOLUTION OF THE CURVILINEAR INTEGRAL EQUATION OF THE EXTERNAL DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH PROJECTION METHODS

***Elnur H. Khalilov***[1]✉
[1]*Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan*
[1]*elnurkhalil@mail.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0001-7603-5072*

***Abstract.*** *The paper provides a justification for the collocation method for the integral equation of the external Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in two-dimensional space.*

***Keywords:*** *external Dirichlet boundary value problem, Helmholtz equation, boundary integral equation method, curvilinear singular integral, collocation method.*

## 1. Введение

Известно, что в частных случаях (когда область является кругом, квадратом и др.), можно найти точное решение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве. Однако, во многих

© Халилов Э. Г. о., 2024

случаях невозможно найти точное решение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца. В связи с этим возникает интерес к исследованию приближенного решения этой краевой задачи. Одним из методов решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца является ее приведение к интегральному уравнению. Отметим, что основное преимущество применения метода интегральных уравнений к исследованию внешних краевых задач заключается в том, что подобный подход позволяет свести задачу, поставленную для неограниченной области, к задаче для ограниченной области меньшей размерности.

Пусть $D \subset R^2$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей $L$, а $f$ – заданная непрерывная функция на $L$. Рассмотрим внешнею краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца: найти функцию $u \in C^{(2)}\left(R^2 \setminus \overline{D}\right) \cap C\left(R^2 \setminus D\right)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в $R^2 \setminus \overline{D}$, условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{x}{|x|}, grad\, u(x)\right) - i k u(x) = o\left(\frac{1}{|x|^{1/2}}\right), \; x \to \infty,$$

равномерно по всем направлениям $x/|x|$ и граничному условию

$$u(x) = f(x) \text{ на } L,$$

где $\Delta -$ оператор Лапласа, $k -$ волновое число, причем $\mathrm{Im}\, k \geq 0$.

В работе [1, с. 102–103] показано, что если решение $u(x)$ внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца имеет нормальную производную в смысле равномерной сходимости, то неизвестная нормальная производная $\rho(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial \nu(x)}$, $x \in L$, удовлетворяет интегральному уравнению второго рода

$$\rho + \widetilde{K}\rho = Tf \tag{1}$$

и интегральному уравнению первого рода

$$S\rho = -f + Kf, \tag{2}$$

где $\nu(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in L$,

$$(S\varphi)(x) = 2\int_L \Phi(x,y)\varphi(y)dL_y, \;\; x \in L,$$

$$(K\varphi)(x) = 2\int_L \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)}\varphi(y)dL_y, \;\; x \in L,$$

$$(\widetilde{K}\rho)(x) = 2\int_L \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)}\rho(y)dL_y, \;\; x \in L,$$

$$(Tf)(x) = 2\frac{\partial}{\partial \nu(x)}\left(\int_L \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} f(y)dL_y\right), \;\; x \in L,$$

$\Phi(x,y) -$ фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, т. е.

$$\Phi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-y|} & при\ \ k=0,\\[2ex] \dfrac{i}{4}H_0^{(1)}\big(k|x-y|\big) & при\ \ k\neq 0,\end{cases}$$

здесь $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, определяемая формулой $H_0^{(1)}(z)=J_0(z)+iN_0(z)$,

$$J_0(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

– функция Бесселя нулевого порядка,

$$N_0(z)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)J_0(z)+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

– функция Неймана нулевого порядка, а $C=0.57721\ldots$ – постоянная Эйлера.

Несмотря на разрешимости интегральных уравнений (1) и (2), эти уравнения не имеют единственного решения. Однако, Бертон и Миллер [2] доказали, что интегральное уравнение второго рода

$$\rho+\widetilde{K}\rho-i\eta S\rho=Tf-i\eta(Kf-f), \tag{3}$$

полученное из линейных комбинаций уравнений (1) и (2), разрешимо единственным образом в пространстве $C(L)$, где $\eta\neq 0$ – произвольное действительное число, а через $C(L)$ обозначено пространство всех непрерывных функций на $L$ с нормой $\|\varphi\|_{\infty}=\max\limits_{x\in L}|\varphi(x)|$. Следует указать, что уравнение (3) имеет то преимущество, что его решение является нормальной производной в смысле равномерной сходимости решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца на $L$. При этом функция

$$u(x)=\int_L\left\{f(y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)}-\rho(y)\Phi(x,y)\right\}dL_y,\quad x\in R^2\setminus\overline{D},$$

является решением внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца. Кроме того, отметим, что уравнение (3) имеет то преимущество, что его решение является решением уравнения моментов ([1, с. 105]). Для удобности, в дальнейшем уравнение (3) будем писать в следующем операторном виде:

$$\rho+A\rho=Bf, \tag{4}$$

где $A\rho=\widetilde{K}\rho-i\eta S\rho$ и $Bf=Tf-i\eta(Kf-f)$.

Отметим, что в работе [3] для построения квадратурных формул для потенциалов простого и двойного слоев использована асимптотическая формула для функций Ханкеля первого рода нулевого порядка, которая не дает возможности определить скорость сходимости этих квадратурных формул. Кроме того, построенный Ляпуновым контрпример показывает (см. [4, с. 89–90]), что для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью производная, вообще говоря, не существует. Поэтому вычислить значение функции

$(Bf)(x)$ в определенных точках не представляется возможным, а это показывает сложность исследования приближенного решения уравнения (3). Следует указать, что в работе [5], рассматривая нормальную производную потенциала двойного слоя как гиперсингулярный интеграл (см. [5, с. 115-116]), т.е. понимая интеграл в смысле конечного значения по Адамару, с методом «подобластей» построена квадратурная формула для нормальной производной потенциала двойного слоя при дополнительно налагаемом условии на функции $f$ (см. [5, с. 285–291]). Однако, известно, что при этом условии выражение для нормальной производной потенциала двойного слоя может быть представлено в виде с сингулярным интегралом (см. [1, с. 57], [5, с. 100]), т.е. интеграл $(Tf)(x)$ существует в смысле главного значения Коши. Кроме того, следует указать, что построенная в работе [5] квадратурная формула не является практичной в том смысле, что ее коэффициенты являются сингулярными интегралами.

Несмотря на то, что целый ряд работ посвящен исследованию приближённого решения интегральных уравнений внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве, из–за вышеперечисленных причин до сих пор более практичным способом не исследовано приближенное решение интегрального уравнения (4) с теоретическом обоснованием. В настоящей работе же, рассматривая нормальную производную потенциала двойного слоя как интеграл в смысле главного значения Коши, дано обоснование метода коллокации для уравнения (4).

**2. Основные результаты**

Сначала построим квадратурную формулы для интегралов $(A\rho)(x)$ и $(Bf)(x)$, $x \in L$. Предположим, что кривая $L$ задана параметрическим уравнением $x(t)=(x_1(t),x_2(t))$, $t \in [a,b]$. Разобьем промежуток $[a,b]$ на $n > 2M_0(b-a)/d$ равных частей: $t_p = a + \dfrac{(b-a)p}{n}$, $p=\overline{0,n}$, где $M_0 = \max\limits_{t\in[a,b]} \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} < +\infty$ (см. [6, с. 561]) и $d-$стандартный радиус (см. [7, с. 400]). В качестве опорных точек возмем $x(\tau_p)$, $p=\overline{1,n}$, где $\tau_p = a + \dfrac{(b-a)(2p-1)}{2n}$. Тогда кривая $L$ разбивается на элементарные части: $L = \bigcup\limits_{p=1}^{n} L_p$, где $L_p = \{x(t)\colon t_{p-1} \le t \le t_p\}$.

Известно, что (см. [8])

(1) $\forall p \in \{1,2,\ldots,n\}$: $r_p(n) \sim R_p(n)$, где $r_p(n) = \min\{|x(\tau_p)-x(t_{p-1})|, |x(t_p)-x(\tau_p)|\}$, $R_p(n) = \max\{|x(\tau_p)-x(t_{p-1})|, |x(t_p)-x(\tau_p)|\}$, а запись $a(n) \sim b(n)$ означает, что $C_1 \le \dfrac{a(n)}{b(n)} \le C_2$, где $C_1$ и $C_2$ положительные постоянные, не зависящие от $n$.

(2) $\forall p \in \{1,2,\ldots,n\}$: $R_p(n) \le d/2$;

(3) $\forall p, j \in \{1,2,...,n\}:\ r_j(n) \sim r_p(n)$;

(4) $r(n) \sim R(n) \sim \dfrac{1}{n}$, где $R(n) = \max\limits_{p=\overline{1,n}} R_p(n)$, $r(n) = \min\limits_{p=\overline{1,n}} r_p(n)$.

Очевидно, что существует натуральное число $n_0$ такое, что

$$\sqrt{R(n)} \le \min\{1, d/2\},\ \forall n > n_0 .$$

Для функции $\varphi(x) \in C(L)$ вводим модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi, \delta) = \max_{\substack{|x-y| \le \delta \\ x, y \in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|,\ \delta > 0 .$$

Пусть

$$Q_p = \{j \mid 1 \le j \le n, |x(\tau_p) - x(\tau_j)| > \sqrt{R(n)}\},$$

$$\Phi_n(x, y) = \frac{i}{4} H_{0,n}^{(1)}(k|x-y|),\ x, y \in L,\ x \ne y,$$

и

$$V_n(x,y) = \left(\frac{i}{4} - \frac{C}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{k|x-y|}{2}\right)(y-x, \nu(y)) \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!m!} -$$

$$-(y-x, \nu(y)) \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l}\right) \frac{(-1)^{m+1} k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m+1}(m-1)!m!} - \frac{1}{2\pi}(y-x, \nu(y)) \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m}(m!)^2},$$

здесь

$$H_{0,n}^{(1)}(z) = J_{0,n}(z) + i N_{0,n}(z), \quad J_{0,n}(z) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m},$$

$$N_{0,n}(z) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2} + C\right) J_{0,n}(z) + \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l}\right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}.$$

Рассмотрим матрицы $A^n = (a_{pj})_{p,j=1}^{n}$ и $B^n = (b_{pj})_{p,j=1}^{n}$ с элементами

$$a_{pp} = 0;$$

$$a_{pj} = \frac{2(b-a)}{n}\left(\frac{\partial \Phi_n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \nu(x(\tau_p))} - i\eta \Phi_n(x(\tau_p), x(\tau_j))\right) \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2} \quad \text{при } p \ne j,$$

и

$$b_{pp} = \frac{2(b-a)}{\pi n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne p}}^{n} \frac{(x(\tau_p) - x(\tau_j), \nu(x(\tau_j)))(x(\tau_p) - x(\tau_j), \nu(x(\tau_p)))}{|x(\tau_p) - x(\tau_j)|^4} \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2} -$$

$$- \frac{b-a}{\pi n} \sum_{j \in Q_p} \frac{(\nu(x(\tau_j)), \nu(x(\tau_p)))}{|x(\tau_j) - x(\tau_p)|^2} \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2} + i\eta;$$

$$b_{pj} = \frac{2(b-a)}{n}\left[\frac{\partial V_n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \nu(x(\tau_p))} - \frac{(x(\tau_p) - x(\tau_j), \nu(x(\tau_j)))(x(\tau_p) - x(\tau_j), \nu(x(\tau_p)))}{\pi |x(\tau_p) - x(\tau_j)|^4} -\right.$$

$$-i\eta\frac{\partial\Phi_n\left(x(\tau_p),x(\tau_j)\right)}{\partial\nu\left(x(\tau_j)\right)}\Bigg]\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\ ,\quad \text{при } j\notin Q_p \text{ и } j\neq p;$$

$$b_{pj}=\frac{2(b-a)}{n}\Bigg[\frac{\partial V_n\left(x(\tau_p),x(\tau_j)\right)}{\partial\nu\left(x(\tau_p)\right)}-\frac{\left(x(\tau_p)-x(\tau_j),\nu\left(x(\tau_j)\right)\right)\left(x(\tau_p)-x(\tau_j),\nu\left(x(\tau_p)\right)\right)}{\pi\left|x(\tau_p)-x(\tau_j)\right|^4}+$$

$$+\frac{\left(\nu\left(x(\tau_j)\right),\nu\left(x(\tau_p)\right)\right)}{2\pi\left|x(\tau_j)-x(\tau_p)\right|^2}-i\eta\frac{\partial\Phi_n\left(x(\tau_p),x(\tau_j)\right)}{\partial\nu\left(x(\tau_j)\right)}\Bigg]\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\ ,\ \text{при } j\in Q_p,$$

соответственно.

**Теорема 1.** *Пусть функция* $\rho(x)$ *непрерывна на* $L$. *Тогда выражение*

$$\left(A^n\rho\right)\left(x(\tau_p)\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{pj}\,\rho\left(x(\tau_j)\right)$$

*в опорных точках* $x(\tau_p)$, $p=\overline{1,n}$, *является квадратурной формулой для интеграла* $(A\rho)(x)$, *причем справедлива оценка*

$$\max_{p=\overline{1,n}}\left|(A\rho)\left(x(\tau_p)\right)-\left(A^n\rho\right)\left(x(\tau_p)\right)\right|\le M^*\left(\omega(\rho,1/n)+\|\rho\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).$$

**Теорема 2.** *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема на* $L$ *и*

$$\int_0^{diam\,L}\frac{\omega(grad\,f,t)}{t}dt<+\infty.$$

*Тогда выражение*

$$\left(B^nf\right)\left(x(\tau_p)\right)=\sum_{j=1}^{n}b_{pj}f\left(x(\tau_j)\right)$$

*в опорных точках* $x(\tau_p)$, $p=\overline{1,n}$, *является квадратурной формулой для* $(Bf)(x)$, *причем справедлива оценка*

$$\max_{p=\overline{1,n}}\left|(Bf)\left(x(\tau_p)\right)-\left(B^nf\right)\left(x(\tau_p)\right)\right|\le M\left[\frac{\|f\|_\infty\ln n}{n}+\frac{\|grad\,f\|_\infty}{\sqrt{n}}+\int_0^{1/\sqrt{n}}\frac{\omega(grad\,f,t)}{t}dt\right].$$

Пусть $C^n$ – пространство $n$–мерных векторов $z^n=\left(z_1^n,z_2^n,...,z_n^n\right)^{\mathrm{T}}$, $z_l^n\in C$, $l=\overline{1,n}$, с нормой $\left\|z^n\right\|=\max\limits_{l=\overline{1,n}}\left|z_l^n\right|$, где запись "$a^{\mathrm{T}}$" означает транспонировку вектора $a$. Используя теоремы 1 и 2, интегральное уравнение (4) заменяем системой алгебраических уравнений относительно $z_l^n$ – приближенных значений $\rho(x(\tau_l))$, $l=\overline{1,n}$, которую запишем в виде

$$\left(I^n+A^n\right)z^n=B^nf^n,\qquad(5)$$

---

* Здесь и далее через $M$ будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

где $I^n$ – единичный оператор на пространстве $C^n$ (т.е. $I^n$ – единичная матрица $n$ – го порядка), $f^n = p^n f$, а $p^n : C(L) \to C^n$ – линейный ограниченный оператор, определяемый формулой

$$p^n f = \left(f(x(\tau_1)), f(x(\tau_2)),..., f(x(\tau_n))\right)^{\mathrm{T}}$$

и называемый оператором простого сноса.

Пользуясь теоремой Г.М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений ([9]), можно доказать следующую основную теорему.

**Теорема 3.** *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема на* $L$ *и*

$$\int_0^d \frac{\omega(grad\, f, t)}{t} dt < \infty.$$

*Тогда уравнения* (4) *и* (5) *имеют единственные решения* $\rho_* \in C(L)$ *и* $z_*^n \in C^n$ $(n \geq n_0)$, *соответственно, и* $\left\| z_*^n - p^n \rho_* \right\| \to 0$ *при* $n \to \infty$ *с оценкой скорости сходимости*

$$\left\| z_*^n - p^n \rho_* \right\| \leq M \left[ \omega(grad\, f, 1/n) + \frac{\|f\|_\infty + \|grad\, f\|_\infty}{\sqrt{n}} + \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\omega(grad\, f, t)}{t} dt \right].$$

### 3. Заключение

В результате исследования построена квадратурная формула для одного класса сингулярных интегралов, и даны оценки погрешностей построенных квадратурных формул. На основе этих квадратурных формул интегральное уравнение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве заменяется системой алгебраических уравнений, при этом устанавливается существование и единственность решения этой системы. Показано сходимость решения системы алгебраических уравнений к значению точного решения интегрального уравнения в опорных точках и указывается скорость сходимости метода.

## Список источников


1. Colton D. L., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. New York: JohnWiley & Sons; 1983. 271 p.

2. Burton A. J., Miller G. F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary–value problems // Proceedings of the Royal Society London. 1971. Vol. A323. P. 201–220.
https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0097

3. Kress R. Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering // Mathematical and Computer Modeling. 1991. Vol. 15, no. 3–5. P. 229–243.
https://doi.org/10.1016/0895-7177(91)90068-I

4. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. Москва: Гос. Изд. Тех.–Теорет. Лит.; 1953. 415 с.

5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. Москва: Янус; 1995. 520 с.

6. Мусхелешвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Москва: Физ.-мат. лит.; 1962. 599 с.

7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. : Наука; 1976. 527 с.

8. Khalilov E. H., Bakhshaliyeva M. N. Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2019. Vol. 45, no. 1. P. 155–162. http://proc.imm.az/volumes/45-1/45-01-12.pdf.

9. Вайникко Г.М. Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1979. Т. 16. С. 5–53.

## References

1. Colton D. L., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. New York: JohnWiley & Sons; 1983. 271 p.

2. Burton A. J., Miller G. F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary–value problems. Proceedings of the Royal Society London. 1971; A323: 201–220.
https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0097

3. Kress R. Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering. Mathematical and Computer Modeling. 1991; 15(3-5): 229–243.
https://doi.org/10.1016/0895-7177(91)90068-I

4. Gunter N. M. Potential theory and its applications to basic problems of mathematical physics. Moscow: Gostekhizdat; 1953. 415 p. (In Russ.).

5. Lifanov I. K. Method of singular integral equations and numerical experiment. Moscow: Yanus; 1995. 520 p. (In Russ.).

6. Muskhelishvili N. I. Singular integral equations. Moscow: Fizmatlit; 1962. 599 p. (In Russ.).

7. Vladimirov V. S. The equations of mathematical physics. Moscow: Nauka; 1981. 512 p. (In Russ.).

8. Khalilov E. H., Bakhshaliyeva M. N. Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2019; 45(1): 155–162. http://proc.imm.az/volumes/45-1/45-01-12.pdf.

9. Vainikko G. M. Regular convergence of operators and approximate solution of equations. Journal of Soviet Mathematics. 1981; 15: 675–705. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01377042.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 93-97.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 93-97.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.9

# ПРИМЕР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

***Анастасия Михайловна Цуканова*[1]✉*, Ольга Викторовна Чернова*[2]**
[1,2]*Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия*
[1]*1854367@bsu.edu.ru*✉*, https://orcid.org/0009-0002-5222-7963*
[2]*Chernova_Olga@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4175-5448*

***Аннотация.*** *В конечной области $D$ комплексной плоскости $C$ рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с постоянными $2\times2$ матричными старшими коэффициентами. В работе показано, что при выполнении определенных условий на матричные коэффициенты и с помощью подходящей обратимой линейной подстановки исходная система может быть сведена к более простому виду системы с постоянным старшим коэффициентом определенного вида.*

***Ключевые слова:*** *жорданова форма матрицы, комплексная плоскость, собственные векторы, эллиптическая система.*

Conference paper

# EXAMPLE OF TRANSFORMATION OF AN ELLIPTIC SYSTEM

***Anastasia Tsukanova*[1]✉*, Olga Chernova*[2]**
[1,2] *Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia*
[1]*1854367@bsu.edu.ru*✉*, https://orcid.org/0009-0002-5222-7963*
[2]*Chernova_Olga@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4175-5448*

***Abstract.*** *In a finite domain $D$ of the complex plane $C$, we consider a system of linear differential equations with constant $2\times2$ matrix leading coefficients. The work shows that if certain conditions on the matrix coefficients and with the help of a suitable invertible linear substitution, the original system can be reduced to a simpler form of a system with a constant leading coefficient of a certain type.*

***Keywords:*** *Jordan Matrix Form, Complex Plane, Eigenvectors, Elliptic System.*

© Цуканова А.М., 2024

Пусть $D$ – конечная область комплексной плоскости $C$ переменной $z = x + iy$. Рассмотрим в $D$ систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$A_1 U'_x(z) + A_2 U'_y(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z),\ z \in D, \quad (1)$$

где коэффициенты при старших членах – постоянные матрицы вида $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -i & -i \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in C^{2\times 2}$, а $2 \times 2-$ матричные коэффициенты $a(z) = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix}, b(z) = \begin{pmatrix} b_{11}(z) & b_{12}(z) \\ b_{21}(z) & b_{22}(z) \end{pmatrix}$ и вектор-функция $F(z) = (F_1(z), F_2(z))$ принадлежат классу $C(D)$. Комплексную вектор-функцию $U = (U_1, U_2)$ класса $C^1(D)$, удовлетворяющую этой системе тождественно будем считать решением системы (1).

Так как матрицы $A_1, A_2$ невырождены, рассмотрим матрицу $A = -A_2^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} i & i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$ и запишем систему (1) в более компактной форме:

$$U'_y(z) - AU'_x(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad z \in D. \quad (2)$$

Матрица $A$ не имеет вещественных собственных значений: $\det(A - \lambda E) = (\lambda + i)(\lambda - 2i) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -i, \lambda_2 = 2i$. Поэтому согласно [1] система (2) – общая эллиптическая система с постоянными старшими коэффициентами.

Хорошо известно [2], что если квадратная матрица такова, что уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ имеет $n$ различных корней, то найдется невырожденная матрица $B$, такая, что матрица $B^{-1} \cdot A \cdot B$ диагональна, причём на диагонали стоят решения уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ – собственные значения матрицы $A$ . Действительно, мы можем записать матрицу $A$ в собственном базисе, который, очевидно, существует, так как уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ имеет $n$ различных корней. Собственный базис матрицы – набор из $n$ собственных векторов. Переходя от стандартного базиса к собственному базису мы получим запись матрицы $A$ в другом базисе, а именно, мы получим диагональную матрицу. Чтобы найти матрицу $B^{-1}$ перехода от собственного базиса к стандартному найдем собственные векторы матрицы $A$. Первый собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = -i$ имеет координаты в стандартном базисе $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, вектор с координатами $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ отвечает собственному значению $\lambda_2 = 2i$. А значит мат-

рица $B$ перехода от стандартного базиса к собственному имеет вид: $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Окончательно имеем: $B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$ – диагональная матрица на диагонали которой стоят собственные значения матрицы $A$.

Как было доказано в [3] для системы (2) подходящей обратимой линейной подстановкой, которая бы упрощала исходную систему является замена вектор-функции $U$ вектор-функцией $B\widetilde{\phi}$, где $\widetilde{\phi} = (\overline{\phi}_1, \phi_2)$. В нашем случае эта подстановка примет вид $U_1 = \overline{\phi}_1 + \phi_2, U_2 = -2\overline{\phi}_1 + \phi_2$. Система (2) преобразуется к

$$B\widetilde{\phi}'_y - AB\widetilde{\phi}'_x + aB\widetilde{\phi} + b\overline{B\widetilde{\phi}} = F. \tag{3}$$

Далее умножим равенство (3) на матрицу $B^{-1}$ слева

$$\widetilde{\phi}'_y - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}\widetilde{\phi}'_x + c\widetilde{\phi} + d\overline{\widetilde{\phi}} = B^{-1}F, \tag{4}$$

где элементы $c_{ij}(z)$ матричного коэффициента $c(x) = B^{-1}a(z)B$ связаны с элементами $a_{ij}(z)$ коэффициента $a(x)$ формулами:

$$c_{11} = \tfrac{1}{3}a_{11} - \tfrac{1}{3}a_{21} - \tfrac{2}{3}a_{12} + \tfrac{2}{3}a_{22}, c_{12} = -\tfrac{1}{3}a_{11} + \tfrac{1}{3}a_{21} - \tfrac{1}{3}a_{12} + \tfrac{1}{3}a_{22}$$

$$c_{21} = -\tfrac{2}{3}a_{11} - \tfrac{1}{3}a_{21} + \tfrac{4}{3}a_{12} + \tfrac{2}{3}a_{22}, c_{22} = \tfrac{2}{3}a_{11} + \tfrac{1}{3}a_{21} + \tfrac{2}{3}a_{12} + \tfrac{2}{3}a_{22}.$$

Элементы $d_{ij}(z)$ матричного коэффициента $d(z) = B^{-1}b(z)\overline{B}$ выражаются через элементы $b_{ij}(z)$ коэффициента $b(x)$ аналогичным образом. Переобозначим вектор-функцию $B^{-1}F(z)$ через $H_0(z) = (\overline{H}_1(z), H_2(z))$ и запишем (4) в виде системы

$$\overline{\phi_1}'_y + i\overline{\phi_1}'_x + c_{11}\overline{\phi}_1 + c_{12}\phi_2 + d_{11}\phi_1 + d_{12}\overline{\phi}_2 = \overline{H}_1,$$
$$\phi_2{}'_y - 2i\phi_2{}'_x + c_{21}\overline{\phi}_1 + c_{22}\phi_2 + d_{21}\phi_1 + d_{22}\overline{\phi}_2 = H_2,$$

Для окончательного преобразования, заменим первое уравнение комплексно сопряженным и тогда получим систему

$$\phi'_y - \widetilde{J}\phi'_x + p\phi + q\overline{\phi} = H, \tag{5}$$

где матричные коэффициенты $p(z) = \begin{pmatrix} \overline{c}_{11}(z) & \overline{d}_{12}(z) \\ d_{21}(z) & c_{22}(z) \end{pmatrix}$,

$q(z) = \begin{pmatrix} \overline{d}_{11}(z) & \overline{c}_{12}(z) \\ c_{21}(z) & d_{22}(z) \end{pmatrix}$, вектор-функция $H(z) = (H_1(z), H_2(z))$, а матрица $\widetilde{J}$ составлена из клеток Жордана с диагональными элементами, лежащими в верхней полуплоскости.

В заключении отметим, что эллиптическим системам первого порядка на плоскости посвящено большое количество работ (см. например, монографии [4] или [5] . Изучением системы (5) при $p(z) = q(z) = (z) = 0$ занимался Avron Douglis (1918 г.–1995 г.) Так в статье [6] он изучал системы уравнений, которые по своей структуре и свойствам , а также по своим формальным связям с общими эллиптическими системами аналогичны уравнениям Бельтрами.

## Список источников


1. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I, СМФН. 2017. Том 63, № 1. С. 1–189.
2. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971. 272 с.
3. Чернова О. В. Эллиптические системы первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами // Современные проблемы физико-математических наук: материалы III между-нар. науч.-практ. конф., Орел, 23-26 нояб. 2017 г. / Орловский гос. ун-т им. И.С. Тургенева ; под общ. ред. Т.Н. Можаровой. – Орел, 2017. – С. 109-112.
4. Боярский Б. В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Математический сборник. 1957. Том 85, № 4. С. 451–503.
5. Wendland W. L. Elliptic systems in the plane. Pitman, London, San Francisco and Melbourne, 1979. 404 p.
6. Douglis A. A function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables // Comm. Pure Appl. Math. 1953. no. 6. P. 259–289.


## References


1. Soldatov A.P. Singular integral operators and elliptic boundary value problems. I, SMFS. 2017. Volume 63, No. 1. P. 1–189.
2. Gelfand I. M. Lectures on linear algebra. M.: Nauka, 1971. 272 p.
3. Chernova O. V. Elliptic systems of the first order on the plane with constant leading coefficients // Modern problems of physical and mathematical sciences: materials of the III International. scientific-practical Conf., Orel, November 23-26. 2017 / Oryol State University named after I.S. Turgenev; under general ed. T.N. Mozharova. – Orel, 2017. – pp. 109-112. (In Russ.).

4. Boyarsky B.V. Generalized solutions of a system of first order differential equations of elliptic type with discontinuous coefficients // Mathematical collection. 1957. Volume 85, No. 4. P. 451–503.(In Russ.).
5. Wendland W. L. Elliptic systems in the plane. Pitman, London, San Francisco and Melbourne, 1979. 404 p.
6. Douglis A. A function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables // Comm. Pure Appl. Math. 1953. no. 6. P. 259–289.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 98-101.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 98-101.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 517.956.6

# ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

***Елена Викторовна Чаплыгина***[1]✉
[1]*Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
[1]*lena260581@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0002-7553-0466*

***Аннотация.*** *Доказана теорема единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения смешанного типа с отражением и смешанным запаздыванием без ограничений на величину запаздывания.*

***Ключевые слова:*** *уравнения смешанного типа, задача Геллерстедта, смешенное запаздывание.*

Conference paper

# ON THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE GELLERSTEDT PROBLEM FOR THE LAVRENTIEV-BITSADZE EQUATION

***Elena V. Chaplygina***[1]✉
[1]*Orel State University, Orel, Russia*
[1]*lena260581@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0002-7553-0466*

***Abstract.*** *The uniqueness theorem of the solution of the Gellerstedt problem for a mixed type equation with reflection and mixed delay without restrictions on the magnitude of the delay is proved.*

***Keywords:*** *mixed type equations, Gellerstedt problem, mixed lag.*

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x,y) + sgny u_{yy}(x,y) = \\ = H\big(|y| - hH(y) - rH(-y)\big)u\big(-x, y - hH(y) + rH(-y)\big), \qquad (1)$$

$0<h,r\equiv const, H(\xi)$- функция Хевисайда, в области $D = D^+ \cup D_1^- \cup D_2^- \cup I$, где

$D^+ = \{(x,y): |x| < +\infty, y > 0\}$, $D_1^- = \{(x,y): x > 0, -x < y < 0\}$,

$D_2^- = \{(x,y): x < 0, x < y < 0\}$, $I = \{(x,y): |x| < +\infty, y = 0\}$.

**Задача.** Найти в области $D$ решение $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D\backslash I)$, удовлетворяющее в $D\backslash I$ уравнению (1), краевым условиям

$$u(x,-x) = \psi_1(x), x \geq 0; \qquad (2)$$

© Чаплыгина Е. В., 2024

$$u(x,x)=\psi_2(x), x\le 0; \qquad (3)$$

условиям сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0)=\omega(x), |x|<+\infty, \qquad (4)$$

$$u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu(x), |x|<+\infty, x\neq 0, \qquad (5)$$

где $\psi_i(x)\ (i=1,2)-$ заданные непрерывные достаточные гладкие функции, причем $\psi_1(0)=\psi_2(0)$, $\psi_1(+\infty)=\psi_2(-\infty)$=0.

**Теорема.** Если $\psi_1(x)\in C[0,+\infty)\cap C^2(0,+\infty)$, $\psi_2(x)\in C(-\infty,0]\cap C^2(-\infty,0)$, абсолютно интегрируемы на $[0,+\infty)$ и $(-\infty,0]$ соответственно; $\psi_1(0)=\psi_2(0)$, $\psi_1(+\infty)=\psi_2(-\infty)$=0; $\psi'_i(x)$ при $x\to 0$ допускает особенность порядка меньше единицы, то существует единственное решение $u(x,y)$ задачи G.

Доказательство теоремы следует из утверждений:

**Лемма 1.** Если $u(x,y)-$ решение уравнения (1) в области $D^+$ из класса $C(\overline{D}^+)\cap C^2(D^+)$, исчезающее на бесконечности, то

$$\beta=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(x)\nu(x)dx\le 0$$

и

$$\beta+\iint_{D^+}\left[u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)+u_1^2(x,y)\right]dxdy=0, \qquad (6)$$

где

$$u_1^2(x,y)=H(y-h)u(x,y)u(-x,y-h)\ge\frac{1}{2}H(y-h)u^2(x,y)\ge 0\,.$$

**Доказательство.** В области $D^+$ справедливо тождество

$$0=u(x,y)\Big(u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)-H(y-h)u(-x,y-h)\Big)=$$

$$=(u(x,y)u_x(x,y))_x+(u(x,y)u_y(x,y))_y-u_x^2(x,y)-u_y^2(x,y)—$$

$$-H(y-h)u(x,y)u(-x,y-h),$$

интегрируя которое по области $D^+_{\varepsilon\delta}=\{(x,y):|x|<\delta,\varepsilon<y<\delta\}$ $(0<\delta,\ \varepsilon\equiv\text{const})$, применяя формулу Грина [1, с.541] и условия леммы, в пределе при $\delta\to+\infty,\varepsilon\to 0$ , получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\omega\,(x)\nu(x)dx+\iint_{D^+}\left[u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)+u_1^2(x,y)\right]dxdy=0,$$

где

$$u_1^2(x,y)=H(y-h)u(x,y)u(-x,y-h)=$$

$$=\frac{1}{2}H(y-h)[u^2(x,y)+u^2(-x,y-h)-$$

$$-(u(x,y)-u(-x,y-h))^2]=$$

$$=\frac{1}{2}H(y-h)[u^2(x,y)+u^2(-x,y-h)-$$

$$-(u(x,y)-u(-x,y)+u(-x,y)-u(-x,y-h))^2]=$$

$$=\frac{1}{2}H(y-h)\left[u^2(x,y)+\left(-\int_{-x}^{+\infty}u_\xi(\xi,y-h)d\xi\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(\int_{-x}^{x}u_\xi(\xi,y)d\xi+\int_{y-h}^{y}u_\eta(-x,\eta)d\eta\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}H(y-h)\left[u^2(x,y)+\left(\int_{-x}^{+\infty}d\xi\int_{y-h}^{+\infty}u_{\xi\eta}(\xi,\eta)d\eta\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(-\int_{-x}^{x}d\xi\int_{y}^{+\infty}u_{\xi\eta}(\xi,\eta)d\eta-\int_{y-h}^{y}d\eta\int_{-x}^{+\infty}u_{\eta\xi}(\xi,\eta)d\,\xi\right)^2\right]\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}H(y-h)\left[u^2(x,y)+\left(-\int_{-x}^{+\infty}d\xi\int_{y-h}^{+\infty}\left|u_{\xi\eta}(\xi,\eta)\right|d\eta\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(\int_{-x}^{x}d\xi\int_{y}^{+\infty}\left|u_{\xi\eta}(\xi,\eta)\right|d\eta+\int_{y-h}^{y}d\eta\int_{-x}^{+\infty}\left|u_{\eta\xi}(\xi,\eta)\right|d\,\xi\right)^2\right]\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}H(y-h)\left[u^2(x,y)+\left(\int_{-x}^{+\infty}d\xi\int_{y-h}^{+\infty}\left|u_{\xi\eta}(\xi,\eta)\right|d\eta\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(\int_{-x}^{+\infty}d\xi\int_{y-h}^{+\infty}\left|u_{\xi\eta}(\xi,\eta)\right|d\eta\right)^2\right]=\frac{1}{2}H(y-h)u^2(x,y)\geq 0,$$

так как, в силу непрерывности вторых производных

$$u_{xy}(x,y)=u_{yx}(x,y) \text{ и } u(+\infty,y)=u_y(+\infty,y)=u_x(x,+\infty)=0,$$

$$\left|\int_a^b d\xi\int_c^d u_{\xi\eta}(\xi,\eta)d\eta\right|\leq\int_a^b d\xi\int_c^d\left|u_{\xi\eta}(\xi,\eta)\right|d\eta,$$

$0<a<b,c<d\equiv const.$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Если $u(x,y)\in C(\overline{D^-})\cap C^2(D^-)$ – решение уравнения (1) в области $D^-={D_1}^-\cup{D_2}^-$, обращающееся в нуль на характеристиках $y=-x$, $x>0; y=x,\ x<0$, то $\beta=0$.

**Доказательство.**

В области ${D_r}^-={D_{1r}}^-\cup{D_{2r}}^-$, где

$$D_{1r}^{-} = \{(x,y): -x < y < 0, -r < y < 0\},$$
$$D_{2r}^{-} = \{(x,y): x < y < 0, -r < y < 0\},$$

уравнение (1) имеет вид

$$u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0. \quad (7)$$

С помощью общего решения

$$u(x,y) = f(x-y) + g(x+y)$$

уравнения (7) ($f(t), g(t)$ −произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции), решением первых задач Дарбу для уравнения (7) в характеристических треугольниках $kr - y < x < (k+1)r + y$, $-\frac{r}{2} < y < 0$, $(k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$ и задач Гурса в характеристических четырехугольниках, ограниченных прямыми $y = x - kr$, $y = x - (k+1)r$, $y = (k-1)r - x$, $y = kr - x$ $(k = \pm1, \pm2, \dots)$, с данными $u(x,y)|_{y=0} = \omega(x)$; $u(x,y)|_{y=-x} = 0$, $x > 0$; $u(x,y)|_{y=x} = 0$, $x < 0$; $\omega(0) = 0$, можно показать, что эти решения имеют форму

$$u(x,y) = \omega(x+y), (x,y) \in D_{1r}^{-};$$
$$u(x,y) = \omega(x-y), (x,y) \in D_{2r}^{-}.$$

Поэтому, $\nu(x) = \omega'(x), x > 0$; $\nu(x) = -\omega'(x), x < 0$.

Значит,

$$\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x)\nu(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} \omega(x)\,\omega'(x)dx + \int_{0}^{+\infty} \omega(x)\,\omega'(x)dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \left(\omega^2(x)\right)'_x dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \left(\omega^2(x)\right)'_x dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\omega^2(x)|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\omega^2(x)|_{0}^{+\infty} = 0.$$

Лемма доказана.

## Список источников


1. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа / Тер-Крикоров, А.М., – М., 1988.

2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко – Минск, 1987.

3. Зарубин А.Н. О регуляризации одной системы полных сингулярных интегральных уравнений. // Дифференциальные уравнения. 1978, Т. 14, № 1, с. 177-180.


## References


1. Ter-Krikorov A.M., Shabunin M.I. Course of mathematical analysis / Ter-Krikorov, A.M., – M., 1988.

2. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications / Samko, S.G. – Minsk, 1987.

3. Zarubin A.N. On the regularization of one system of complete singular integral equations. // Differential equations. 1978, vol. 14, No. 1, pp. 177-180.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 102-107.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 102-107.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 512.816

# ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЛОКАЛЬНО ДВАЖДЫ ПРОСТО ТРАНЗИТИВНЫХ ГРУПП ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

***Камо Камоевич Аванесян***[1]✉***, Владимир Александрович Кыров***[2]
[1,2]*Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия*
[1]*avanesjan.k@gmail.com*✉
[2]*kyrovva@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-5925-7706*

***Аннотация.*** *Вычисляются локально дважды просто транзитивных групп Ли преобразований четырехмерного пространства. В результате получается локально дважды точно транзитивная группа Ли преобразований. В работе задача решается для трех восьмимерных групп Ли преобразований, действующих дважды транзитивно в четырехмерном пространства. Алгебры Ли, по которым находятся группы преобразований, ранее были найдены В.А. Кыровым.*

***Ключевые слова:*** *Группа преобразований, алгебра Ли, однопараметрическая подгруппа, оператор, уравнения Ли*

Conference paper

# COMPUTATION OF SOME LOCALLY DOUBLY SIMPLY TRANSITIVE LIE GROUPS OF TRANSFORMATIONS OF FOUR-DIMENSIONAL SPACE

***Kamo K. Avanesyan***[1]✉***, Vladimir A. Kyrov***[2]
[1,2] *Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russia*
[1]*avanesjan.k@gmail.com*✉
[2]*kyrovva@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-5925-770*

***Abstract.*** *In this paper, locally doubly simply transitive Lie groups of transformations of a four-dimensional space are calculated. The essence of the method for calculating these groups of transformations is as follows.*

© Аванесян К. К., Кыров В. А., 2024

*A Lie algebra of operators is taken. Then, solving the Cauchy problem for each basic operator, we find one-parameter subgroups, after which we calculate the compositions of these subgroups. As a result, a locally doubly sharply transitive Lie group of transformations is obtained. In this paper, the problem is solved for three eight-dimensional Lie groups of transformations acting doubly transitively in a four-dimensional space. The Lie algebras by which the groups of transformations are found were previously found by V.A. Kyrov.*

***Keywords:*** *Transformation group, Lie algebra, one-parameter subgroup, operator, Lie equations.*

## 1. Введение

Основная задача данной статьи – вычисление локально дважды точно транзитивных групп Ли преобразований по базисным операторам их алгебр Ли [1 – 4]. При решении этой задачи интегрированием уравнений Ли по базисным операторам находим однопараметрические подгруппы, после чего вычисляем их композиции [3].

## 2. Основная часть

Рассмотрим оператор произвольного вида в пространстве $R^4$

$$X = X_1\partial_x + X_2\partial_y + X_3\partial_z + X_4\partial_w, X_i = X_i(x, y, z, w), i = 1, 2, 3, 4.$$

Уравнения Ли принимают следующий вид [2, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{da} &= X_1(x', y', z', w'), \\ \frac{dy'}{da} &= X_2(x', y', z', w'), \\ \frac{dz'}{da} &= X_3(x', y', z', w'), \\ \frac{dw'}{da} &= X_4(x', y', z', w') \end{aligned} \tag{1}$$

и дополняются начальными условиями

$$x'_{a=0} = x, y'_{a=0} = y, z'_{a=0} = z, w'_{a=0} = w.$$

Ниже находятся группы преобразований по алгебрам Ли [2, 3, 4]:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_y, X_3 = \partial_z, X_4 = \partial_w \\ Y_1 = \alpha y\partial_x + z\partial_y, Y_2 = z\partial_x, Y_3 = w\partial_w, \\ Y_4 = (x + \beta y)\partial_x + y\partial_y + z\partial_z; \end{gathered} \tag{2}$$

$$X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_y, X_3 = \partial_z, X_4 = \partial_w$$
$$Y_1 = y\partial_x + z\partial_y + \alpha w\partial_w, Y_2 = z\partial_x$$
$$Y_3 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + \beta w\partial_w,$$
$$Y_4 = \gamma y\partial_x + \delta w\partial_w; \tag{3}$$

$$X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_y, X_3 = \partial_z, X_4 = \partial_w$$
$$Y_1 = y\partial_x + (z + \alpha w)\partial_y + w\partial_z, Y_2 = w\partial_x,$$
$$Y_3 = z\partial_x + w\partial_y,$$
$$Y_4 = x\partial_x + (y + \alpha w)\partial_y + z\partial_z + w\partial_w. \tag{4}$$

Для решения поставленной задачи сначала по операторам (2) восстановим группу преобразований. Для этого по каждому из восьми операторов $X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ вычислим сначала однопараметрические подгруппы.

Подробно сначала решим задачу для оператора $X_1$. Уравнения Ли для него принимают следующий вид [3, 4]:

$$\frac{dx'}{da_1} = 1, \frac{dy'}{da_1} = 0, \frac{dz'}{da_1} = 0, \frac{dw'}{da_1} = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$x' = a_1 + C_1, y' = C_2, z' = C_3, w' = C_4$$

Начальные условия, окончательно дают однопараметрическую подгруппу

$$x' = x + a_1, y' = y, z' = z, w' = w. \tag{5}$$

Из (2) видно, что с точностью до обозначений переменных операторы $X_2$, $X_3$ и $X_4$ совпадают с оператором $X_1$, поэтому будем иметь еще три однопараметрические подгруппы:

$$x' = x, y' = y + a_2, z' = z, w' = w; \tag{6}$$

$$x' = x, y' = y, z' = z + a_3, w' = w; \tag{7}$$

$$x' = x, y' = y, z' = z, w' = w + a_4. \tag{8}$$

Затем по оператору $Y_1$ записываем уравнения Ли:

$$\frac{dx'}{da_5} = \alpha y', \frac{dy'}{da_5} = z', \frac{dz'}{da_5} = 0, \frac{dw'}{da_5} = w'.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$x' = \frac{\alpha a_5^2}{2} z + \alpha a_5 y + x,\ y' = z a_5 + y,\ z' = z, w' = w. \tag{9}$$

Аналогично рассуждая относительно операторов $Y_2, Y_3$ получаем однопараметрические подгруппы:

$$x' = za_6 + x, y' = y, z' = z, w' = w; \tag{10}$$

$$x' = x, y' = y, z' = z, w' = we^{a_7}. \tag{11}$$

Запишем уравнения Ли по оператору $Y_4$

$$\frac{dx'}{da_8} = x' + \beta y', \frac{dy'}{da_8} = y', \frac{dz'}{da_8} = z, \frac{dw'}{da_8} = w$$

Применяя метод вариации произвольной постоянной, получаем однопараметрическую подгруппу

$$x' = xe^{a_8} + \beta y a_8 e^{a_8}, y' = ye^{a_8}, z' = ze^{a_8}, w' = w. \tag{12}$$

Далее вычисляем композицию найденных подгрупп (5)-(12), получаем первую искомую группу Ли преобразований:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\alpha a_5^2}{2} ze^{a_8} + \alpha a_5 ye^{a_8} + ze^{a_8} a_6 + xe^{a_8} + \beta y a_8 e^{a_8} + a_1, \\ y' &= ze^{a_8} a_5 + ye^{a_8} + a_2, z' = ze^{a_8} + a_3, w' = we^{a_7} + a_4. \end{aligned} \tag{13}$$

Вычислим теперь группу преобразований по операторам (3). Решая уравнения Ли (1) для операторов $X_1, X_2, X_3, X_4$, получаем однопараметрические подгруппы (5) - (8).

Теперь по оператору $Y_1$ находим однопараметрическую подгруппу , для чего составляем уравнения Ли

$$\frac{dx'}{da_5} = y', \frac{dy'}{da_5} = z', \frac{dz'}{da_5} = 0, \frac{dw'}{da_5} = \alpha w.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$x' = \frac{a_5^2}{2} z + a_5 y + x, y' = za_5 + y, z' = z, w' = we^{\alpha a_5}. \tag{14}$$

Аналогично рассуждая относительно операторов $Y_2, Y_3, Y_4$, получаем однопараметрические подгруппы:

$$x' = za_6 + x, y' = y, z' = z, w' = w; \tag{15}$$

$$x' = xe^{a_7}, y' = ye^{a_7}, z' = ze^{a_7}, w' = we^{\beta a_7}; \tag{16}$$

$$x' = \gamma y a_8 + x, y' = y, z' = z, w' = we^{\delta a_8}. \tag{17}$$

Далее вычисляем композицию однопараметрических подгрупп (14) - (17) и (5)-(8), получаем вторую искомую группу Ли преобразований:

$$\begin{gathered} x' = \frac{a_5^2}{2} z e^{a_7} + a_5 y e^{a_7} + z e^{a_7} a_6 + (\gamma y a_8 + x) e^{a_7} + a_1, \\ y' = z e^{a_7} a_5 + y e^{a_7} + a_2, \\ z' = z e^{a_7}, \\ w' = w e^{\delta a_8 + \beta a_7 + \alpha a_5} \end{gathered} \tag{18}$$

Группа преобразований с алгеброй Ли (4) вычисляется как и выше. В явном виде она задается уравнениями:

$$\begin{gathered} x' = \frac{a_5^3}{6} w e^{a_8} + \frac{a_5^2}{2} z e^{a_8} + \frac{\alpha a_5^2}{2} w e^{a_8} + \\ + (w e^{a_8} a_7 + \alpha w a_8 e^{a_8} + y e^{a_8}) a_5 + w e^{a_8} a_6 + z e^{a_8} a_7 + x e^{a_8} + a_1, \\ y' = \frac{a_5^2}{2} w e^{a_8} + z e^{a_8} a_5 + \alpha w e^{a_8} a_5 + w e^{a_8} a_7 + \alpha w a_8 e^{a_8} + y e^{a_8} + a_2, \\ z' = w e^{a_8} a_5 + z e^{a_8} + a_3, \\ w' = w e^{a_8} + a_4 \end{gathered} \tag{19}$$

Таким образом, нами доказана теорема.

Теорема. Локально дважды просто транзитивные группы Ли преобразований четырехмерного пространства с алгебрами Ли (2) - (4) задаются соответственно уравнениями (13), (18), (19).

**3. Заключение**

Задача вычисления локально дважды точно транзитивных групп Ли преобразований четырехмерного пространства далее будет продолжена, поскольку кроме алгебр Ли (2) - (4) ранее были найдены еще и другие алгебры Ли.

## Список источников


1. Бредон, Г Введение в теорию компактных групп преобразований / Г. Бредон. – М.: Наука, 1980. – 440 с.
2. Михайличенко, Г.Г. Полиметрические геометрии / Г.Г. Михайличенко. – Новосибирск : Новосибирский государственный университет, 2001. – 144 с. ISBN5-94356-003-3
3. Кыров, В.А. Вычисление некоторых дважды транзитивных групп Ли преобразований / В.А. Кыров // Труды семинара по геометрии и матема-тическому моделированию. – 2023. – № 9. – С. 54-56.

4. Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

## References

1. Bredon, I. Introduction to the theory of compact transformation groups / I. Bre-don. – M.: Nauka, 1980. – 440 pp.
2. Mikhailichenko, G.G. Polymetric geometries / G.G. Mikhailichenko. – Novosi-birsk: Novosibirsk State University, 2001. – 144 pp. ISBN5-94356-003-3
3. Kyrov, V.A. Calculation of some doubly transitive Lie transformation groups / V.A. Kyrov // Proceedings of the seminar on geometry and mathematical model-ing. – 2023. – No. 9. – P. 54-56.
4. Ovsyannikov, L.V. Group analysis of differential equations / L.V. Ovsyannikov. – M.: Nauka, 1978. – 400 pp.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 108-113.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 108-113.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 514.1:517.965

# ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НА ГРУППУ ДВИЖЕНИЙ СИМПЛИЦИАЛЬНОЙ II ТИПА ТРЕХМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

***Рада Александровна Богданова***[1✉]***, Игорь Вячеславович Кудачин***[2]***, Михаил Владимирович Нещадим***[3]
[1,2,3]*Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия*
[1]*bog-rada@yandex.ru*[✉]*, https://orcid.org/0000-0002-1306-6426*
[2]*ikudachin@gmail.com*
[3]*m.neshchadim@g.nsu.ru*

***Аннотация.*** *Рассматривается задача о применении аналитического метода для решения функционального уравнения на множество движений симплициальной II типа трехмерной геометрии. Суть этого метода состоит в последовательном дифференцировании функционального уравнения по координатам входящих в него точек и, далее, сведению к системе алгебраических, дифференциальных уравнений и нахождению функций, описывающих множество движений соответствующей группы преобразований трехмерной геометрии. Симплициальная II типа трехмерная геометрия является геометрией максимальной подвижности, впервые была найдена В.Х. Левом при построении классификации трехмерных геометрий, позже воспроизведена Г.Г. Михайличенко и уточнена В.А. Кыровым.*

***Ключевые слова:*** *геометрии максимальной подвижности, функциональные уравнения, множество движений, группа преобразований.*

Conference paper

# A FUNCTIONAL EQUATION FOR A GROUP OF MOVEMENTS OF A SIMPLICIAL 2 TYPE OF THREE-DIMENSIONAL GEOMETRY

***Rada A. Bogdanova***[1]***, Igor V. Kudachin***[2]***, Mikhail V. Neshchadim***[3]
[1,2,3] *Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russia*

© Богданова Р. А., Кудачин И. В., Нещадим М. В., 2024

[1]*bog-rada@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0002-1306-6426*
[2]*ikudachin@gmail.com*
[3]*m.neshchadim@g.nsu.ru*

***Abstract.*** *In this paper, we consider the problem of applying an analytical method to solve a functional equation for a set of movements of simplicial type II three-dimensional geometry. The essence of this method consists in the sequential differen-tiation of a functional equation by the coordinates of the points included in it and, further, the reduction to a system of algebraic, differential equations and the finding of functions describing the set of movements of the corresponding group of transformations of three-dimensional geometry. Simplicial type II three-dimensional geometry is the geometry of maximum mobility, was first found by V.H. Lev when constructing a classification of three-dimensional geometries, later reproduced by G.G. Mikhailichenko and refined by V.A. Kyrov.*

***Keywords:*** *geometries of maximum mobility, functional equations, a set of movements, a group of transformations.*

## 1. Введение

Целью данной статьи является применение аналитического метода решения функциональных уравнений на группу движений симплициальной II типа трехмерной геометрии, являющейся геометрией максимальной подвижности (см. [1] –[5]). Необходимым требованием для записи особого функционального уравнения на множество движений является инвариантность метрической (двухточечной) функции относительно группы преобразований соответствующего трехмерного пространства. Стоит также отметить, что явный вид функций, описывающих множество движений симплициальной II типа трехмерной геометрии, был ранее найден другим экспоненциальным методом, разработанный авторами Р.А. Богдановой и В.А. Кыровым [6].

## 2. Основная часть

Симплициальная II типа трехмерная геометрия задается на трехмерном многообразии $M_3$ метрической (двухточечной) функцией вида [6]:

$$f(i,j) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \exp(w_i + w_j). \qquad (1)$$

Определение. Гладкое локально обратимое преобразование, то есть локальный диффеоморфизм, многообразия $M_3$

$$x' = \lambda(x,y,w),\ y' = \sigma(x,y,w),\ w' = \tau(x,y,w) \qquad (2)$$

удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial(\lambda(x,y,w),\sigma(x,y,w),\tau(x,y,w))}{\partial(x,y,w)} \neq 0, \qquad (3)$$

называется *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию (1):

$$f(\lambda(i),\sigma(i),\tau(i),\lambda(j),\sigma(j),\tau(j)) = f(x_i,y_i,w_i,x_j,y_j,w_j), \qquad (4)$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i,y_i,w_i)$, $\sigma(i) = \sigma(x_i,y_i,w_i)$, $\tau(i) = \tau(x_i,y_i,w_i)$.

Равенство (4) при известном координатном представлении (1) есть *функциональное уравнение* на множество движений. Решая это уравнение, находим все возможные движения, совокупность которых является группой преобразований многообразия.

Запишем явный вид функционального уравнения на множество движений для симплициальной II типа трехмерной геометрии:

$$\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{\lambda(i)-\lambda(j)}\exp(\tau(i)+\tau(j)) = \frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\exp(w_i+w_j),$$

Вследствие предполагаемой локальной обратимости преобразований отличен от нуля якобиан (3) для трех функций $\lambda(x,y,w)$, $\sigma(x,y,w)$, $\tau(x,y,w)$ по трем переменным $x,y,w$.

Уравнение справедливо для любых точек $i$ и $j$, поэтому по их координатам $x_i,y_i,w_i$ и $x_j,y_j,w_j$ оно должно выполняться тождественно. Продифференцировав его по координатам $x_j,y_j,w_j$ точки $j$ получим три равенства:

$$\frac{\lambda_x(j)(\sigma(i)-\sigma(j))}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2}\exp(\tau(i)+\tau(j)) - \frac{\sigma_x(j)}{\lambda(i)-\lambda(j)}\exp(\tau(i)+$$
$$+\tau(j)) + \frac{\tau_x(j)(\sigma(i)-\sigma(j))}{\lambda(i)-\lambda(j)}\exp(\tau(i)+\tau(j)) =$$
$$= \frac{y_i-y_j}{(x_i-x_j)^2}\exp(\omega_i+\omega_j),$$

$$\frac{\lambda_y(j)(\sigma(i)-\sigma(j))}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2}\exp(\tau(i)+\tau(j)) - \frac{\sigma_y(j)}{\lambda(i)-\lambda(j)}\exp(\tau(i)+$$
$$+\tau(j)) + \frac{\tau_y(j)(\sigma(i)-\sigma(j))}{\lambda(i)-\lambda(j)}\exp(\tau(i)+\tau(j)) =$$
$$= -\frac{\exp(\omega_i+\omega_j)}{(x_i-x_j)^2},$$

$$\frac{\lambda_\omega(j)(\sigma(i)-\sigma(j))}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2}\exp(\tau(i)+\tau(j))-\frac{\sigma_\omega(j)}{\lambda(i)-\lambda(j)}\exp(\tau(i)+$$
$$+\tau(j))+\frac{\tau_\omega(j)(\sigma(i)-\sigma(j))}{\lambda(i)-\lambda(j)}\exp(\tau(i)+\tau(j))=$$
$$=\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\exp(\omega_i+\omega_j),$$

которые рассмотрим как систему алгебраических уравнений относительно дробей

$$\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{(\lambda(i)-\lambda(j))^2}\exp(\tau(i)+\tau(j)),\quad \frac{\exp(\tau(i)+\tau(j))}{\lambda(i)-\lambda(j)},$$
$$\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{\lambda(i)-\lambda(j)}\exp(\tau(i)+\tau(j)).$$

Поскольку определитель этой системы алгебраических уравнений

$$\Delta(j)=\begin{vmatrix}\lambda_x(j) & -\sigma_x(j) & \tau_x(j)\\ \lambda_y(j) & -\sigma_y(j) & \tau_y(j)\\ \lambda_\omega(j) & -\sigma_\omega(j) & \tau_\omega(j)\end{vmatrix}$$

совпадает с якобианом для точки $j$ и отличен от нуля, система разрешается методом Крамера.

Функции, описывающие множество движений симплициальной II типа трехмерной геометрии будут иметь вид

$$x'=\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1},\quad y'=\frac{a_2y+b_2}{c_2y+d_2},\quad w'=w+\ln\frac{c_2y+d_2}{c_1x+d_1},$$

в которых $a_1d_1-b_1c_1=1,\ a_2d_2-b_2c_2=1$. Данное множество движений является группой преобразования соответствующего трехмерного многообразия, удовлетворяя аксиомам группы.

Теорема. Множество всех движений симплициальной плоскости II типа трехмерной геометрии есть шестипараметрическая группа ее преобразований

$$x'=\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1},\quad y'=\frac{a_2y+b_2}{c_2y+d_2},\quad w'=w+\ln\frac{c_2y+d_2}{c_1x+d_1},$$

где $a_1d_1-b_1c_1=1,\ a_2d_2-b_2c_2=1$.

**3. Заключение**

Задача о нахождении множества движений как решение особого вида функционального уравнения будет продолжена для других не

рассмотренных так же трехмерных геометрий максимальной подвижности.

## Список источников


1. Михайличенко Г.Г. *Двумерные геометрии* // Докл. АН СССР. — 1981. — Т.260, №4, С. 803 – 805.
2. Михайличенко, Г.Г. *О групповой и феноменологической симметриях в геометрии* / Г.Г. Михайличенко. // Докл. АН СССР. — 1983. — Т.269, № 2. — С. 284 – 288.
3. Михайличенко, Г.Г. *О групповой и феноменологической симметриях в геометрии* / Г.Г. Михайличенко. // Сиб. матем. журнал. — 1984. — XXV, № 5. — С. 99 – 113.
4. Богданова, Р.А. *Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения* / Р.А. Богданова. // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2009. — Т.12, № 4. — С. 12 – 22.
5. Богданова, Р.А. *Группа движений симплициальной плоскости как решение функционального уравнения* / Р.А. Богданова. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2014. — № 4(30). — С. 5 – 13.
6. Кыров, В.А *Группы движений некоторых трехмерных геометрий максимальной подвижности* / В.А. Кыров, Р.А. Богданова // Сибирский математический журнал. — 2018. — Т.59, № 2 (348). — С. 412—421. DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.215


## References


1. Mikhaylichenko G.G. Two-dimensional geometries // Dokl. USSR Academy OF Sciences.- 1981. — Vol.260, No.4, pp. 803 – 805.
2. Mikhaylichenko, G.G. On group and phenomenological symmetries in geometry / G.G. Mikhaylichenko. // Dokl. USSR Academy OF Sciences.— 1983. — Т.269, № 2. — С. 284 – 288
3. Mikhaylichenko, G.G. On group and phenomenological symmetries in geometry / G.G. Mikhaylichenko. // Sib. math. journal. — 1984. — XXV, No. 5. — С. 99 – 113.
4. Bogdanova, R.A. Groups of movements of two-dimensional Helmholtz geometries as a solution to a functional equation /R.A. Bogdanova. // Siberian Journal of Industrial Mathematics. - 2009. — vol. 12, No. 4. — pp. 12-22.

5. Bogdanova, R.A. The group of movements of the simplicial plane as a solution to a functional equation / R.A. Bogdanova. // Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and mechanics. — 2014. — № 4(30). — Pp. 5-13.
6. Kyrov, V.A. Groups of movements of some three–dimensional geometries of maximum mobility / V.A. Kyrov, R.A. Bogdanova // Siberian Mathematical Journal. — 2018. — Vol.59, No. 2 (348). - pp. 412-421. DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.215

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 114-121.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 114-121.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 512.622 + 519.11

# РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ ПО СТЕПЕНЯМ ЛИНЕЙНОГО МНОГОЧЛЕНА И ПО БИНОМИАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ: МАТРИЧНЫЙ И АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ МЕТОДЫ

***Ярослав Васильевич Гамилов[1], Артем Максимович Джабаров[2], Андрей Федорович Сауляк[3], Иван Николаевич Попов[4]✉***
*[1,2,3,4]Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, Архангельск, Россия*
*[1]gamilov.y@edu.narfu.ru, [2]dzhabarov.a@edu.narfu.ru, [3]saulyak.a.f@edu.narfu.ru, [4]i.popov@narfu.ru✉*

***Аннотация.*** *Для решения тех или иных задач, связанных с изучениями самих многочленов и их применениями, многочлены, записанные в стандартном виде, раскладываются через многочлены определённого вида. Под разложением понимается представление многочлена в виде линейной комбинации наперёд заданных многочленов. Ставится задача о нахождении алгоритмов как для нахождения самого разложения, так и для обратного. В общем случае для решения такой задачи используется матричный алгоритм, основанный на применении матрицы перехода и её обратной. Данный способ не всегда является эффективным по объёму вычислений. В работе затрагиваются два разложения: по степеням линейного многочлена и биномиальным многочленам. В каждом случае для решения задачи о разложении рассматриваются матричный и альтернативный алгоритмы.*

***Ключевые слова:*** *многочлен, разложение многочлена по системе многочленов, матрица перехода, разложение по степеням линейного многочлена, биномиальное разложение*

Conference paper

# DECOMPOSITION OF POLYNOMIALS BY DEGREES OF A LINEAR POLYNOMIAL AND BY BINOMIAL POLYNOMIALS: MATRIX AND ALTERNATIVE METHODS

***Yaroslav V. Gamilov [1], Artem M. Dzhabarov [2], Andrej F. Saulyak [3], Ivan N. Popov [4]✉***

© Гамилов Я. В., Джабаров А. М., Сауляк А. Ф., Попов И. Н., 2024

[1,2,3,4]*Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia*
[1]*gamilov.y@edu.narfu.ru,* [2]*dzhabarov.a@edu.narfu.ru,* [3]*saulyak.a.f@edu.narfu.ru,* [4]*i.popov@narfu.ru*✉

***Abstract.*** *To solve certain problems related to the study of the polynomials themselves and their applications, polynomials written in standard form are decomposed through polynomials of a certain type. Decomposition refers to the representation of a polynomial in the form of a linear combination of predetermined polynomials. The task is to find algorithms both for finding the decomposition itself and for the inverse, and in general, a matrix algorithm based on the application of the transition matrix and its inverse is used to solve such a problem. This method is not always efficient in terms of computing volumes. The paper deals with two decompositions: by degrees of a linear polynomial and binomial polynomials. In each case, matrix and alternative algorithms are considered to solve the decomposition problem.*

***Keywords:*** *polynomial, decomposition of a polynomial by a system of polynomials, transition matrix, decomposition by degrees of a linear polynomial, binomial decomposition*

## 1. Введение

При решении задач, связанных как с самими многочленами, так и с их применениями, играет роль представление многочлена в виде линейной комбинации многочленов определённого вида [1].

Под равенством многочленов от одной и той же переменной понимается равенство коэффициентов при соответствующих степенях переменной.

Стандартной записью многочлена является:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Принадлежность коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ и $x$ тому или оному множеству определяется заранее.

Если многочлен $f(x)$ также записывается в виде

$$f(x) = b_n f_n(x) + b_{n-1} f_{n-1}(x) + \cdots + b_1 f_1(x) + b_0 f_0(x),$$

где $f_n(x), f_{n-1}(x), \dots, f_1(x), f_0(x)$ – многочлены от переменной $x$ и коэффициенты $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ принадлежат тому же множеству, что и $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, ставится задача о выражении $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ через $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, и наоборот. В общем случае задача решается тем способом, что многочлены $f_n(x), f_{n-1}(x), \dots, f_1(x), f_0(x)$ записываются через $x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1$:

$$\begin{cases} f_n(x) = t_{nn} x^n + t_{nn-1} x^{n-1} + \cdots + t_{n1} x + t_{n0}, \\ f_{n-1}(x) = t_{n-1n} x^n + t_{n-1n-1} x^{n-1} + \cdots + t_{n-11} x + t_{n-10}, \\ \dots \\ f_1(x) = t_{1n} x^n + t_{1n-1} x^{n-1} + \cdots + t_{11} x + t_{10}, \\ f_0(x) = t_{0n} x^n + t_{0n-1} x^{n-1} + \cdots + t_{01} x + t_{00}, \end{cases}$$

и из полученных коэффициентов составляется матрица $T$:

$$T = \begin{pmatrix} t_{nn} & t_{nn-1} & \dots & t_{n1} & t_{n0} \\ t_{n-1n} & t_{n-1n-1} & \dots & t_{n-11} & t_{n-10} \\ \dots & & & & \\ t_{1n} & t_{1n-1} & \dots & t_{11} & t_{10} \\ t_{0n} & t_{0n-1} & \dots & t_{01} & t_{00} \end{pmatrix},$$

тогда

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0) \cdot (x^n x^{n-1} \dots x1)^{\mathrm{T}} = (b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0) \cdot T \cdot (x^n x^{n-1} \dots x1)^{\mathrm{T}},$$

откуда

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0) = (b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0) \cdot T.$$

Если матрица $T$ обратима, то

$$(b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0) = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0) \cdot T^{-1}.$$

Матрицы $T$ и $T^{-1}$ называются матрицами переходов от системы многочленов $x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1$ к системе многочленов $f_n(x), f_{n-1}(x), \dots, f_1(x), f_0(x)$ и обратно соответственно.

Такой подход решения поставленной задачи называется матричным. При реализации могут возникнуть трудности с нахождением матриц $T$ и $T^{-1}$. В ряде же случаев выражение $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ через $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ может быть найдено альтернативным способом, более эффективным, чем матричный подход.

Классическим примером является разложение многочлена по натуральным степеням линейного приведенного многочлена над произвольным коммутативным кольцом $K$ с единицей (в частности, над кольцом классов вычетов целых чисел по модулю). В этом случае многочлен записывают в виде

$$f(x) = b_n(x-a)^n + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + \dots + b_1(x-a) + b_0,$$

где $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0, a \in K$. Такое представление используется для решения разных задач, таких как о представлении многочлена с отсутствующими слагаемыми (например, отсутствие слагаемого второй степени при решении кубического уравнения методом Кардано), разложении дроби на элементарные (что необходимо, например, при интегрировании дробно-рациональных функций), вычислении приближенных значений, вычислении значения производной многочлена заданного порядка, раскрытии скобок, шифровании сообщений (как пример многочленного шифрования) и так далее.

Другим примером разложения является так называемое биномиальное разложение многочлена.

Рассмотрим вопрос о возможности разложения многочлена $f(x)$, записанного в стандартном виде, через многочлены $C_x^n, C_x^{n-1}, \dots, C_x^1, C_x^0$, где $x \in R$ и

$$\begin{cases} C_x^0 = 1; \\ C_x^k = \dfrac{x(x-1)(x-2)\dots\big(x-(k-1)\big)}{k!}, k \in N. \end{cases}$$

Ясно, что следует рассматривать те множества коэффициентов, в которых существуют элементы $\frac{1}{n!}, \frac{1}{(n-1)!}, \dots, \frac{1}{1!}, \frac{1}{0!}$.

Пусть

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = b_n C_x^n + b_{n-1} C_x^{n-1} + \cdots + b_1 C_x^1 + b_0 C_x^0.$$

Вначале, покажем, что коэффициенты $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ могут быть выражены через коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$. Для этого вместо переменной $x$ будем подставлять неотрицательные целые значения от 0 до $n$. Заметим, что $C_m^k = 0$ при всех $m \in \{0; 1; \dots; k-1\}$.

1) $x = 0$

• $f(0) = a_0$;

• $b_n C_0^n + b_{n-1} C_0^{n-1} + \cdots + b_1 C_0^1 + b_0 C_0^0 = b_0$;

$$b_0 = a_0.$$

2) $x = 1$

• $f(1) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 1^i = \sum_{i=0}^{n} a_i$;

• $b_n C_1^n + b_{n-1} C_1^{n-1} + \cdots + b_1 C_1^1 + b_0 C_1^0 = b_1 C_1^1 + b_0 C_1^0 = b_1 + b_0 C_1^0$;

$$f(1) = b_1 + b_0 C_1^0, \qquad b_1 = f(1) - b_0 C_1^0.$$

3) $x = 2$

• $f(2) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 2^i$;

• $b_n C_2^n + b_{n-1} C_2^{n-1} + \cdots + b_1 C_2^1 + b_0 C_2^0 = b_2 C_2^2 + b_1 C_2^1 + b_0 C_2^0 =$

$$= b_2 + b_1 C_2^1 + b_0 C_2^0;$$

$$f(2) = b_2 + b_1 C_2^1 + b_0 C_2^0, \qquad b_2 = f(2) - (b_0 C_2^0 + b_1 C_2^1).$$

4) $x = 3$

• $f(3) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 3^i$;

• $b_n C_3^n + b_{n-1} C_3^{n-1} + \cdots + b_1 C_3^1 + b_0 C_3^0 = b_3 C_3^3 + b_2 C_3^2 + b_1 C_3^1 + b_0 C_3^0 =$

$$= b_3 + b_2 C_3^2 + b_1 C_3^1 + b_0 C_3^0;$$

$$f(3) = b_3 + b_2 C_3^2 + b_1 C_3^1 + b_0 C_3^0, \qquad b_3 = f(3) - (b_0 C_3^0 + b_1 C_3^1 + b_3 C_3^2).$$

Обобщая, получаем

$$\begin{cases} b_0 = a_0; \\ b_k = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot k^i - \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot C_k^i, k \in \{1; 2; \dots n\}. \end{cases}$$

Итак, $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ выражаются через $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ рекуррентно. Тем самым доказано, что любой многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ может быть представлен в виде $b_n C_x^n + b_{n-1} C_x^{n-1} + \cdots + b_1 C_x^1 + b_0 C_x^0$.

Очевидно, что определять указанным способом $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ через $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ нерационально, так при больших значениях $n$ промежуточная величина $k^i$ принимает большие значения, хотя в результате сами элементы $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ по сравнению со значениями промежуточных результатов принимают небольшие значения.

Запись многочлена в виде $b_n C_x^n + b_{n-1} C_x^{n-1} + \cdots + b_1 C_x^1 + b_0 C_x^0$ называется биномиальным разложением. Такое представление используется для решения задач комбинаторного характера, сводя задачи к комбинаторным элементам с привлечением их свойств, суммирования рядов (например, подсчёт сумм натуральных степеней последовательных натуральных чисел), также закладывается в основу многочленного шифрования.

Нужно отметить, что обоих рассмотренных разложениях играют роль биномиальные коэффициенты и их свойства [2].

## 2. Основной текст статьи

2.1. Разложение многочлена по степеням линейного многочлена

А) Матричный метод

Матричный метод в данном случае реализуется следующим образом.

Используя бином Ньютона

$$(x-a)^k = C_k^0 x^k a^0 - C_k^1 x^{k-1} a^1 + \cdots + (-1)^k C_k^k a^k, \qquad k = 0{,}1 \ldots, n,$$

получаем матрицу $T$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -C_n^1 a^1 & C_n^2 a^2 & \ldots & (-1)^n C_n^n a^n \\ 0 & 1 & -C_{n-1}^1 a^1 & \ldots & (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} a^{n-1} \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0) = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0) \cdot T.$$

Здесь $C_k^i = \frac{k!}{i! \cdot (k-i)!}$ – биномиальные коэффициенты, которые «собраны» в треугольник Паскаля и генерируются по правилу: элемент равен сумме двух ближайших элементов предыдущей строки (рисунок 1).

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \ldots & & & & \end{array}$$

Рисунок 1 — Треугольник Паскаля.

При замене $x = y + a$ справедливо равенство

$$a_n(y+a)^n + a_{n-1}(y+a)^{n-1} + \cdots + a_1(y+a) + a_0 = \\ = b_n y^n + b_{n-1} y^{n-1} + \cdots + b_1 y + b_0,$$

по которому составляем матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 1 & C_n^1 a^1 & C_n^2 a^2 & \ldots & C_n^n a^n \\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 a^1 & \ldots & C_{n-1}^{n-1} a^{n-1} \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$(b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0) = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0) \cdot S.$$

Отметим, что $S = T^{-1}$ и $|T| = |S| = 1$.

Б) Альтернативный метод

В качестве альтернативного определения $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ по известным $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ используется «ступенчатая схема Горнера». Для обратного преобразования используется замена $x = y + a$ и разложение ведётся по степеням многочлена $y - (-a)$, что приводит получения $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, считая $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ известными.

2.2. Биномиальное разложение многочлена

А) Матричный метод

Для построения матрицы $T$ следует найти разложение многочлена $C_x^k$ через многочлены $x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1$.

Матрица $A$ коэффициентов разложений

$$x$$
$$x(x-1)$$
$$x(x-1)(x-2)$$
$$x(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$
$$\dots$$

вычисляется рекуррентно (элементы первого столбца, отделённые чертами справа – вспомогательные элементы и к матрице $A$ не относятся) (рисунок 2).

$$\begin{array}{r|cccccccc}
-1 & 1 & 0 & & & & & & \\
-2 & 1 & -1 & 0 & & & & & \\
-3 & 1 & -3 & 2 & 0 & & & & \\
-4 & 1 & -6 & 11 & -6 & 0 & & & \\
-5 & 1 & -10 & 35 & -50 & 24 & 0 & & \\
-6 & 1 & -15 & 85 & -225 & 274 & -120 & 0 & \\
\dots &
\end{array}$$

Рисунок 2 — Матрица $A$ коэффициентов разложения $x(x-1)(x-2)\dots$

В первом столбце матрицы $A$ элементы равны 1; элемент $a_{k,\ell}$, расположенный в $k$-й строки и $\ell$ столбце, вычисляется по формуле: $a_{k,\ell} = -a a_{k-1,\ell-1} + a_{k-1,\ell}$, где $-a$ – элемент вспомогательного столбца, стоящий напротив $k-1$-й строки (рисунок 3); в конце каждой строки добавляется 0.

$$\begin{array}{r|ccc}
-a & \dots & a_{k-1,\ell-1} & a_{k-1,\ell} \\
 & \dots & & a_{k,\ell} \\
\dots &
\end{array}$$

Рисунок 3 — Рекуррентное вычисление элемента $a_{k,\ell}$ матрицы $A$.

Матрица $T$ получается из матрицы $A$: элементы 1-й строки матрицы $T$ равны элементам $n$-й строки матрицы $A$, умноженные на $1/n!$; элементы 2-й строки матрицы $T$ равны элементам $n-1$-й строки матрице $A$, умноженной на $1/(n-1)!$, и записанные начиная со второго столбца, и так далее; все остальные элементы матрицы $T$ равны 0. Например, для случая $n = 3$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1/3! & -3 \cdot 1/3! & 2 \cdot 1/3! & 0 \\ 0 & 1 \cdot 1/2! & -1 \cdot 1/2! & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 1/1! & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 1/0! \end{pmatrix}.$$

Построив матрицу $T$, получаем равенство

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0) = (b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0) \cdot T.$$

Определитель матрицы $T$ равен $\frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{0!}$. Если в рассматриваемом множестве коэффициентов такой элемент отличен от 0, то матрица $T$ обратима.

Для определения матрицы $T^{-1}$ строится вспомогательная матрица $B$, построение которой основывается на матрице $A$. Пусть $b_{ij}$ – коэффициенты в выражении $b_i/i!$ через элементы $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$. Коэффициенты $b_{ij}$ записываются в матрицу $B$. Рекуррентный способ вычисления элементов $b_{ij}$:

$$b_{ij} = \sum_{k=j}^{i-1} b_{k,j} \cdot a_{n-k+1,i-k+1}, \qquad b_{ii} = 1, \qquad i,j \in \{1;2;\ldots n\}, \qquad i \geq j.$$

Тогда

$$(b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0) = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0) \cdot T^{-1}.$$

Например, в случае $n = 6$ матрица $B$ имеет вид, указанный на рисунке 4.

$$\begin{matrix} 1 & & & & & \\ 15 & 1 & & & & \\ 65 & 10 & 1 & & & \\ 90 & 25 & 6 & 1 & & \\ 31 & 15 & 7 & 3 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Рисунок 4 — Матрица $B$ при $n = 6$.

Матрица $T^{-1}$ в этом случае имеет вид:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 6! & 15 \cdot 5! & 65 \cdot 4! & 90 \cdot 3! & 31 \cdot 2! & 1 \cdot 1! & 0 \\ 0 & 1 \cdot 5! & 10 \cdot 4! & 25 \cdot 3! & 15 \cdot 2! & 1 \cdot 1! & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 4! & 6 \cdot 3! & 7 \cdot 2! & 1 \cdot 1! & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 3! & 3 \cdot 2! & 1 \cdot 1! & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 2! & 1 \cdot 1! & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 1! & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты $b_6, \ldots, b_1, b_0$ выражаются через коэффициенты $a_6, \ldots, a_1, a_0$ следующим образом: $b_0 = a_0$ и

$$b_6 = a_6 \cdot 6!$$
$$b_5 = (15a_6 + a_5) \cdot 5!$$
$$b_4 = (65a_6 + 10\,a_5 + a_4) \cdot 4!$$
$$b_3 = (90a_6 + 25\,a_5 + 6a_4 + a_3) \cdot 3!$$
$$b_2 = (31a_6 + 15a_5 + 7a_4 + 3a_3 + a_2) \cdot 2!$$
$$b_1 = (a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1) \cdot 1!$$

Б) Альтернативный метод

Как видим, что использовать матричный метод для определения значений $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ по значениям $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, сводя к построению матрицы $T^{-1}$, нет необходимости, так как требуемая информация о разложении в данном случае содержится в матрице $B$.

## 3. Заключение

В работе рассмотрены разложения многочлена, записанного в стандартной форме: по степеням линейного многочлена; по биномиальным многочленам. Рассмотрен в каждом случае общий матричный подход и представлен альтернативный, исходя из сложности первого.

## Список источников

1. Прасолов В.В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2003. 336 с.

2. Виленкин И.Я., Виленкин А.И., Виленкин П.А. Комбинаторика. М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. 400 с.

## References

1. Prasolov V.V. Mnogochleni. M.: MCNMO, 2003. 336 s.

2. Vilenkin I.Ya., Vilenkin A.I., Vilenkin P.A. Kombinatorika. M.: FIMA, MCNMO, 2006. 400 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 122-129.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 122-129.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 515.142.5

# ПОСТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКТОРОВ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ *K* ТЕОРИИ

***Виктор Михайлович Дергачев[1], Сергей Никитович Лелявин[2]✉***
*[1]Московский политехнический университет, Россия, Москва*
*[2]Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Россия, Москва*
*[2]e-mail: lel@internets.ru✉*

***Аннотация.*** *Для решения различных задач алгебраической топологии полезно иметь конструкцию универсального объекта в алгебраической К-теории. Такую конструкцию возможно построить симплициальными аналогами многообразий: Грассмана $G_N(A)$ и Штифеля $V_{N,K}(A)$, которые представлены функторами.*

*На языке симплициальных множеств проводится построение функтора из категории нильпотентных подалгебр в категорию условно минимальных флагов.*

*Доказывается теоремы: множество флагов-симплексов удовлетворяет условию полноты и о существовании минимального флага во множестве К-допустимых флагов.*

***Ключевые слова:*** *категория, симплекс, подалгебры, эндоморфизм, эпиморфизм, морфизм, ретракция, К-функтор, флаг.*

Conference paper

# CONSTRUCTION OF INFINITE ALGEBRAIC FUNCTORS IN ALGEBRAIC *K* THEORY

***Victor M. Dergachev[1], Sergey N. Lelyavin[2]✉***
*[1]Moscow Polytechnic University, Russia, Moscow*
*[2]Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Russia, Moscow*
*[2]e-mail: lel@internets.ru✉*

***Abstract.*** *To solve various problems of algebraic topology, it is useful to have the construction of a universal object in algebraic K- theory.*
*Such a construction can be constructed by simplicial analogues manifolds: Grassmann*

© Дергачев В. М., Лелявин С. Н., 2024

$G_N(A)$ *and Stiefel* $V_{N,K}(A)$*, which are represented by functors.*

*In the language of simplicial sets, a functor is constructed from the category of nilpotent subalgebras into the category of conditionally minimal flags.*

*Theorems are proved: the set of simplex flags satisfies the completeness condition and the existence of a minimum flag in the set of K- permissible flags.*

***Keywords:*** *category, simplex, subalgebras, endomorphism, epimorphism, morphism, retraction, K - functor, flag.*

Пусть $\Delta$-категория, объектами которой являются упорядоченные множества: $[n]=\{0,1,2,\dots n\}, n\in\mathbb{N}$, а морфизмами – неубывающие инъективные отображения, морфизмы этой категории: $d_n^i:[n-1]\to[n]$ и $s_n^i:[n+1]\to[n]$ есть возрастающие инъективные отображения.

**Определение 1.** Пусть $C$- произвольная категория, симплициальным объектом категории $C$ называется произвольный контравариантный функтор $X:\Delta\to C,$ морфизмами симплициальных объектов являются соответствующие функторные морфизмы.

Образ объекта $[n]$ категории $\Delta$ при функторе $X$ будем обозначать символом $X_n$- $n$ слоем симплициального объекта $X$. Аналогично морфизмы $X(d_n^i)$ и $X(s_n^i)$ обозначаются, как $d_n^i$ и $s_n^i$ (или $d^i, s^i$ ). Морфизмы: $d^i$- операторы взятия граней, $s^i$-операторы вырождения.

Симплициальной схемой называется произвольное множество вершин вместе с таким семейством его конечных симплексов, что всякое подмножество всякого симплекса есть симплекс и всякое подмножество, состоящее из единственной вершины, есть симплекс.

Пусть $\sigma^n=(a_0,a_1,a_2,\dots a_n)$- $n$ мерный симплекс, состоящий из $n+1$ вершины $a_0,a_1,a_2,\dots a_n$ и $\sigma^n\supset\sigma^k$, тогда $\sigma^k$-под симплекс или грань симплекса $\sigma^n$.

Пусть $\sigma^k$- грань симплекса $\sigma^n$, тогда определено вложение $i:\sigma^k\to\sigma^n$, это вложение транзитивно: ($i_1:\sigma^{k_1}\to\sigma^{k_2}, i_2:\sigma^{k_2}\to\sigma^n\Rightarrow i_2\circ i_1:\sigma^{k_1}\to\sigma^n$).

Определим отображение $\tilde{F}$ из симплициальной схемы $X$ в некоторую категорию множеств $C$: для каждого симплекса $\sigma^n$ из $X$, $\tilde{F}(\sigma^n)$ является объектом в $C$

и для всякого вложения симплексов в $X$: $i:\sigma^k\to\sigma^n$ определен морфизм в $C$: $\tilde{F}(i):\tilde{F}(\sigma^n)\to\tilde{F}(\sigma^k)$ удовлетворяющий условию транзитивности.

Назовем отображение $\tilde{F}$ контравариантным функтором из $X$ в $C$ являющийся ассоциированным с симплициальной схемой $X$. Построим симплициальные множества $\tilde{X}$, ассоциированные с функтором $\tilde{F}$.

**Конструкция 1:** предполагается коммутативность следующих диаграмм:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{F}_1(\sigma^n) & \xrightarrow{\tilde{F}_1(i_2)} & \tilde{F}_1(\sigma^{k_2}) & \xrightarrow{\tilde{F}_1(i_1)} & \tilde{F}_1(\sigma^{k_1}) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \\ \tilde{F}_2(\sigma^n) & \xrightarrow{\tilde{F}_2(i_2)} & \tilde{F}_2(\sigma^{k_2}) & \xrightarrow{\tilde{F}_2(i_1)} & \tilde{F}_2(\sigma^{k_1}) \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccccc} \tilde{\sigma}_1^n & \xrightarrow{\tilde{d}_1(i_2)} & \tilde{\sigma}_1^{k_2} & \xrightarrow{\tilde{d}_1(i_1)} & \tilde{\sigma}_1^{k_1} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \\ \tilde{\sigma}_2^n & \xrightarrow{\tilde{d}_2(i_2)} & \tilde{\sigma}_2^{k_2} & \xrightarrow{\tilde{d}_2(i_1)} & \tilde{\sigma}_2^{k_1} \end{array},$$

где $i_1 : \sigma^{k_1} \to \sigma^{k_2}, i_2 : \sigma^{k_2} \to \sigma^n$ вложения симплексов в $X$.

**Определение 2.** Пусть $Q$-некоторый проективный $A$ модуль, флаг F в модуле $Q$ есть конечная фильтрация свободными $Q$- подмодулями: $Q = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq ....Q_l \supseteq 0,$ что $\forall\ Q_i \equiv Q_{i+1}$, или является прямым слагаемым в $Q_{i+1}$, где $l$- длина флага F.

Пусть $\Phi$ множество всех флагов F свободного A - модуля $\leftrightarrow \mathrm{A}^n$,

$\mathrm{F}^n = \left\{ A^{\mathrm{N}}{}_0 \supseteq \mathrm{F}_1 \ldots \supseteq \mathrm{F}_n \supseteq 0 \right\}$ флаг длины $n$ в модуле $\mathrm{A}^n$, $X_n$ множество флагов длины $n$ в модуле $\mathrm{A}^n$, $d_i : X_n \to X_{n-1}$ операторы вычёркивания $i$-слагаемого $\mathrm{F}_i$ во флагах $X_n$ ,т.е. $\forall \mathrm{F}^n = \left\{ A^{\mathrm{N}}{}_0 \supseteq \mathrm{F}_1 \ldots \supseteq \mathrm{F}_i \supseteq ... \supseteq \mathrm{F}_n \supseteq 0 \right\}$ -флаг, переходит во флаг $\mathrm{F}^{n-1} = \left\{ A^{\mathrm{N}}{}_0 \supseteq \mathrm{F}_1 \ldots \supseteq \widehat{\mathrm{F}_i} \supseteq ... \supseteq \mathrm{F}_n \supseteq 0 \right\}$, $s_i : X_n \to X_{n+1}$-оператор удвоения $i$-модуля $\mathrm{F}_i$, т.е. $\forall \mathrm{F}^n = \left\{ A^{\mathrm{N}} \supseteq \mathrm{F}_1 \supseteq .. \supseteq \mathrm{F}_{i-1} \supseteq \mathrm{F}_i \supseteq \mathrm{F}_{i+1} \supseteq .. \supseteq \mathrm{F}_n \supseteq 0 \right\}$ переходит во флаг $\mathrm{F}^{n+1} = \left\{ A^{\mathrm{N}} \supseteq \mathrm{F}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathrm{F}_{i-1} \supseteq \mathrm{F}_i \supseteq \mathrm{F}_i \supseteq \mathrm{F}_{i+1} \supseteq ... \supseteq \mathrm{F}_n \supseteq 0 \right\}$.

Имеем функтор из категории $\Delta$ в категорию $\Phi$. Этот функтор задает структуру симпиционного множества на $\Phi$. При этом $X_n$- является множеством $n$-мерных симплексов в $\Phi$. Оператор $d_i : X_n \to X_{n-1}$ является взятия $(n-1)$ граней в симплексах размерности $n$.

Пусть $\sigma^n$ являются $n$- мерными флагами из $X_n$, $\sigma^n = \left\{ A^{\mathrm{N}} \supseteq \mathrm{F}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathrm{F}_n \supseteq 0 \right\}$, модули $A^{\mathrm{N}}$, $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, ... \mathrm{F}_n$- вершины симплекса. Грани различной размерности симплекса $\sigma^n$ получаются применением одного или большего числа раз операторов взятия граней $d_i$ к $\sigma^n$.

Пусть $\sigma^{n_1}, ..., \sigma^{n_k}$ подсимплексы-грани симплекса $\sigma^N \in \Phi$ , тогда $\bigcup_{i=1}^{k} \sigma^{n_i}$ этих подсимплексов является симплекс $\sigma^n$, вершинами которого являются все такие модули $\mathrm{F}_j$, которые являются вершинами хотя бы одного симплекса $\sigma^{n_i}, i = 1, ..., k,$ причем кратность вершины $\mathrm{F}_j$ в симплексе $\sigma^n$ равна максимальной кратности $\mathrm{F}_j$ в симплексах $\sigma^{n_i}, i = 1, ..., k.$ Вершины $\mathrm{F}_j$ упорядочены так же, как они упорядочены в симплексе $\sigma^N$.

**Определение 3.** Подмножество $D \subset \Phi$ называется полным, если $\forall \sigma^n \in D$ симплекса и $\forall$ его подсимплексов $\left( \sigma^{n_1}, ..., \sigma^{n_k} \right) \subset D,$ имеем $\bigcup_{i=1}^{k} \sigma^{n_i} \in D$

**Определение 4.** Пусть $\sigma^n \in D \subset \Phi$, тогда подсимплекс $\sigma^n \in \sigma^N, \sigma^n \in D$ является минимальным для $\sigma^N$ в $D$, если $\forall$ грань $\sigma^n \notin D$. Если $\sigma^N \in D \subset \Phi$ и $\sigma^{n_1},...,\sigma^{n_k}$ - всевозможные минимальные симплексы для $\sigma^N \in D$, тогда $\sigma^n = \bigcup_{i=1}^{k} \sigma^{n_i} \subset \sigma^N$ назовем условно минимальным симплексом для $\sigma^N \in D$, т.е. $\forall$ симплексу $\sigma^N \in D$ соответствует некоторый симплекс $\sigma^n$ и если $D$ полное то $\sigma^n \in D$.

**Замечание.** Всякому условно минимальному симплексу $\sigma^n \in D$ соответствует он сам, $\sigma^n = \bigcup_{i=1}^{k} \sigma^{n_i}$, $\sigma^{n_i}$ - $\forall$ минимальные симплексы для $D, i = 1,...,k$.

Пусть $D \subset \Phi$ удовлетворяет условию полноты, тогда все условно минимальные флаги $\tilde{D} \subset D$. Существует отображение: $p : D \to \tilde{D}$ являющееся эпиморфизмом, оно сопоставляет каждому флагу $\sigma^N \in D$ условно минимальный флаг для него $\sigma^n \in D$, таким образом каждому подмножеству $D \subset \Phi$ удовлетворяющему условию полноты, соответствует подмножество его условно минимальных флагов $\tilde{D}$.

Пусть $i : D \to \tilde{D}$ вложение, $\sigma^n \in \tilde{D}$, и в силу замечания: $i\left(\sigma^n\right) = \sigma^n$, $p\left(\sigma^n\right) = \sigma^n$, тогда $p\left(i\left(\sigma^n\right)\right) = \sigma^n$. Композиция $p \circ i$ - тождественное отображение $\leftrightarrow p : D \to \tilde{D}$ - ретракция на подмножество.

Пусть $i_1 : D_1 \to D$ -вложение, тогда коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{i_1} & D \\ p_1 \downarrow & & p \downarrow \\ \tilde{D}_1 & \xrightarrow{\tilde{i}_1} & \tilde{D} \end{array}$$

и если $j_1 : \tilde{D}_1 \to D_1$ - вложение, тогда $p \circ i_1 \circ j_1 = \tilde{i}_1$.

Таким образом, если $\{D\}$ - категория подмножеств с условием полноты из $\Phi$ с морфизмами вложения $i$, $\{D\}$ - категория подмножеств с отображениями $\tilde{i}$, то соответствие $D \to \tilde{D}$ является ковариантным функтором $F_1 : \{D\} \to \{\tilde{D}\}$. Можно показать [1, 165 -166], что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} D_2 & \xrightarrow{i_2} & D_1 & \xrightarrow{i_1} & D \\ p_2 \downarrow & & p_1 \downarrow & & p \downarrow \\ \tilde{D}_2 & \xrightarrow{\tilde{i}_2} & \tilde{D}_1 & \xrightarrow{\tilde{i}_1} & \tilde{D} \end{array},$$

в силу коммутативности левой и правой стороны квадрата диаграммы, имеет

место ее коммутативность, тогда $p \circ i_1 \circ i_2 = \tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2 \circ p_2$ на $D_2$, если $j_2$ обозначает вложение $\tilde{D}_2$ в $D_2$, то на $j_2(D_2)$ справедливо: $p \circ i_1 \circ i_2 \circ j_2 = \tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2 \circ p_2 \circ j_2 = \tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2$, т.к. $p_2 \circ j_2$ - тождественное отображение, тогда коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{i_2}{} & \overset{i_1}{} & \\ D_2 & & \to & & D_1 \to D \\ j_2 \uparrow & & p_1 \uparrow & & p \uparrow \\ & & \overset{\tilde{i}_2}{} & \overset{\tilde{i}_1}{} & \\ \tilde{D}_2 & & \to & & \tilde{D}_1 \to \tilde{D} \end{array}$$

Пусть $END(\mathrm{A}^N)$ алгебра $\mathrm{A}$ - эндоморфизмов свободного модуля $\mathrm{A}^N$.

**Определение 5.** $\Phi \supset D$-допустимое множество для подалгебры $NA \subset END(\mathrm{A}^N)$, если для каждого флага $\mathrm{F} = \{A^{\mathrm{N}} \supseteq \mathrm{F}_1 \ldots \supseteq \mathrm{F}_l \supseteq 0\} \in D$ и для $\forall$ эндоморфизма $b \in NA$ справедливо условие: $b(\mathrm{F}_j) \subset \mathrm{F}_{j+1}, j = 0,1,\ldots,l, \mathrm{F}_0 = A^N, \mathrm{F}_{l+1} \equiv 0$ для всех вершин $\mathrm{F}_j$ флага $\mathrm{F}$. Пусть $D \neq \varnothing$, $END(\mathrm{A}^N) \supset NA$ - нильпотентная подалгебра.

**Теорема 1.** Множество $D$ допустимых флагов – симплексов из $\Phi$ удовлетворяет условию полноты.

**Доказательство**

Пусть $\sigma^N$ флаг из $D$ и $\sigma^{n_1},\ldots,\sigma^{n_k}$ его допустимые подсимплексы.

Рассмотрим симплекс $\sigma^n = \bigcup_{i=1}^{k} \sigma^{n_i} = \{A^{\mathrm{N}} \supseteq \mathrm{F}_1 \ldots \supseteq \mathrm{F}_j \supseteq \mathrm{F}_{j+1} \supseteq 0\}$, каждая вершина $\mathrm{F}_j$ флага $\sigma^n$ содержится во флаге $\sigma^{n_i} = \{A^{\mathrm{N}} \supseteq \mathrm{F}_1^i \ldots \supseteq \mathrm{F}_m^i \supseteq \mathrm{F}_{j+1} \supseteq \ldots \supseteq 0\}, 1 \le i \le k,$ т.е. $\mathrm{F}_j = \mathrm{F}_m^i$ для некоторого $m$. Т.к. флаг $\sigma^{n_i}$ допустимый, то $b(\mathrm{F}_m) \subset \mathrm{F}_{m+1}^i$ для $\forall b \in NA$, а так как по построению флага $\sigma^n$, $\mathrm{F}_{m+1}^i = \mathrm{F}_{j+1}$ или $\mathrm{F}_{m+1}^i \subset \mathrm{F}_{j+1}$, то $b(\mathrm{F}_j) \subseteq \mathrm{F}_{m+1}^i \subseteq \mathrm{F}_{j+1}$, тогда флаг $\sigma^n$ - допустимый. Если $END$ обозначает категорию всех нильпотентных подалгебр алгебры $END(\mathrm{A}^N)$ с морфизмами вложения подалгебр, тогда каждой нильпотентной $NA \subset END(\mathrm{A}^N)$ подалгебре соответствует множество допустимых флагов $D$, удовлетворяющих условию полноты: имеем соответствие $f : NA \to D$.

Имеет место коммутативная диаграмма: $\begin{array}{ccc} NA_1 & \overset{i_1}{\to} & NA \\ f_1 \downarrow & & f \downarrow \\ D_1 & \overset{\tilde{i}_1}{\leftarrow} & D \end{array}$, где вложение $\tilde{i}_1$ определяется: если $\mathrm{F} \in D$ - допустимый флаг для подалгебры $NA$, то он

допустим, очевидно, и для подалгебры $NA_1 \subset NA.$ Пусть $i_2 : NA_2 \to NA_1$ - вложение нильпотентной подалгебры $NA_2$ в $NA_1$, то коммутативна следующая

$$NA_2 \xrightarrow{i_2} NA_1 \xrightarrow{i_1} NA$$

диаграмма: $f_2\downarrow \quad f_1\downarrow \quad f\downarrow$ , т.к. левая и правая сторона квадрата диаграммы

$$D_1 \xleftarrow{\tilde{i}_2} D_1 \xleftarrow{\tilde{i}_1} D$$

коммутативны, то $f_2 = \tilde{i}_2 \circ \tilde{i}_1 \circ f \circ i_1 \circ i_2.$

Таким образом имеем контравариантный функтор: $F_2 : \{NA\} \to \{D\}$ из категории нильпотентных подалгебр алгебры $END\left(\mathrm{A}^N\right)$ с морфизмами вложенными в категорию $\{D\}$ подмножеств множества Ф, удовлетворяющих условию полноты. Если $\tilde{D}$ обозначает множество условно минимальных флагов для $D$, тогда по доказанному выше $p : D \to \tilde{D}$ является ретракцией, а $\tilde{D}$ - ретрактором. Ранее мы доказали существование ковариантного функтора $F_1 : \{D\} \to \{\tilde{D}\}$ из категории полных подмножеств множества Ф в категорию условно минимальных флагов $\tilde{D}$ для множеств $D$. Суперпозиция этих функторов $F_1 \circ F_2$ задает контравариантный функтор $F = F_1 \circ F_2$ из категории нильпотентных подалгебр $\{NA\}$ в категорию ретракторов допустимых флагов, т. е $F : \{NA\} \to \{\tilde{D}\} \leftrightarrow FNA$ - образ подалгебры $NA$. Теорема доказана.

Пусть $A$ - ассоциативное кольцо с единицей, $A^N$ - свободный $A$-модуль над кольцом $A$, тогда вершинами в $G_N(A)$ назовем всевозможные разложения $A^N$ - свободного $N$ - мерного модуля в упорядоченную прямую сумму проективных подмодулей: $A^N = P \oplus Q,$ где $P,Q$ - проективные подмодули модуля $A^N$, $(P,Q) = a$ обозначим как вершины - есть нульмерные симплексы в множествах $G_N(A)$ и $V_{N,K}(A)$ [2,101-107]. Воспользуемся некоторые понятиями и определениями, приведенными в [3, 161-166], которые будут необходимы при доказательстве теоремы.

**Теорема 2.** Множество $D_k^*$ имеет минимальный флаг.

**Доказательство**

Поставим $\forall$ флагу $F \in D_k^*$ в соответствие целочисленную функцию $f(e_1,...,e_k,P_1,...,P_{l+1})$: если $N -$ длина флага $F$ и $e_j \in F_i, e_j \notin F_{i+1},$ тогда $f(e_j) = N - i$ $\left(A^N = F_0\right)$, аналогично, если $P_k \in F_i, P_k \notin F_{i+1},$ то $f(P_k) = N - i.$

Наоборот, по каждой такой функции можно однозначно восстановить флаг $F$ определяющий ее. Пусть $N_1 = \max\limits_{\substack{i=1,...,k \\ j=1,...,l+1}} \{f(e_i), f(P_j)\},$

тогда $F_{N_1-n} = \bigoplus\limits_{i,j} \{e_i, P_j : f(e_i) \le n, f(P_j) \le n\}$ произвольный модуль флага $F$ , $n = 0,1,...,N_1.$

Определим на множестве всех целочисленных функций $\tilde{D}_k^*$ флагов $F \in D_k^*$ целочисленную функцию: $\mathrm{f}_{inf}(e_i) = \underset{\mathrm{f} \in \tilde{D}_k^*}{inf}\, \mathrm{f}(e_i), \mathrm{f}_{inf}(P_j) = \underset{\mathrm{f} \in \tilde{D}_k^*}{inf}\, \mathrm{f}(P_j)$. Обозначим флаг, соответствующий построенной функции $\mathrm{f}_{inf}$ через $F_{inf}$. Покажем, что $F_{inf} \in D_k^*$.

Рассмотрим произвольный вектор $e_j$, возьмем такую целочисленную функцию $\mathrm{f}$, что $\mathrm{f}(e_j) = \mathrm{f}_{inf}(e_j)$ и $F = \{A^N = F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots \supseteq F_m \supseteq 0\}$ - флаг соответствующий функции $\mathrm{f}$. Пусть $\mathrm{f}(e_j) = i$, тогда $e_j \in F_m, e_j \notin F_{m-i+1}$. Если $\{e_k\}$ и $P_n$ произвольные модули из $F_{m-i+1}$, тогда $\mathrm{f}_{inf}(e_k) \le \mathrm{f}(e_k) < i, (P_n) \le \mathrm{f}(e_n)$. Это рассуждение показывает, что $e_j \in F_{N_2-i}, e_j \notin F_{N_2-i+1}$ во флаге $F_{inf} = \{A^N \supseteq \ldots \supseteq F_{N_2-i} \supseteq F_{N_2-i+1} \supseteq \ldots \supseteq F_{N_2} \supseteq 0\}$, аналогичное рассуждение справедливо для произвольного модуля $P_k, k = 1,\ldots,l+1$, тогда $F_{inf} \in D_k^*$. Покажем минимальность флага $F_{inf} \in D_k^*$. Пусть $F_{inf} = \{A^N \supseteq \ldots \supseteq F_i \supseteq F_{i+1} \supseteq \ldots \supseteq 0\}$ флаг не является минимальным, т.е. можно вычеркнуть из него некоторый модуль $F_i \ne i$ так, что полученный флаг $F' = \{A^N \supseteq \ldots \supseteq \hat{F}_i \supseteq F_{i+1} \supseteq \ldots \supseteq 0\}$ будет элементом множества $D_k^*$. Обозначим функцию, соответствующую флагу $F'$ через $\mathrm{f}'$, тогда функция $\mathrm{f}_{inf}$ не является минимальной. В самом деле, на элементах $e_j, P_s \in F_k, e_j, P_s \notin F_{k+1}$ во флаге $F_{inf}, k > i, \mathrm{f}'(e_j) < \mathrm{f}_{inf}(e_j), \quad \mathrm{f}'(P_s) < \mathrm{f}_{inf}(P_s)$. Полученное противоречие доказывает минимальность флага $F_{inf}$.

**Заключение.** Построен контравариантный минимальный функтор: $F_2 : \{NA\} \to \{D\}$ из категории нильпотентных подалгебр алгебры $END\left(\mathrm{A}^N\right)$ с морфизмами вложенными в категорию $\{D\}$ подмножеств множества Ф, удовлетворяющих условию полноты. Эти функторы используются в работе.

## Список источников


1. Дергачев В.М., Лелявин С.Н. К построению алгебраической *K* теории. Международная научная конференция. Фундаментальные и прикладные задачи механики. Москва, 24 -27.11.2017. Тезисы докладов. - С. 165-166.

2. Дергачев В.М., Лелявин С.Н. Стабильные симплициальные комплексы в алгебраической *K* теории. Всероссийская научно-практической конференция с международным участием. СПФМН-2023, г. Орёл, (24 – 25 ноября), 2023 г. – С. 101-107.

3. Дергачев В.М., Лелявин С.Н. Симплиционные вложения в алгебраической *K* теории. Всероссийская научно-практической конференция с международным участием. СПФМН-2022, г. Орёл, (25 – 26 ноября), 2022 г. - С. 161-166.

## References

1. Dergachev V.M., Lelyavin S.N. To the construction of algebraic *K* theory. International Scientific Conference. Fundamental and applied mechanics problems. Moscow, 24 -27.11.2017. Abstracts, pp. 165-166.

2. Dergachev V.M., Lelyavin S.N. Stable simplicial complexes in algebraic *K* theory. All-Russian scientific and practical conference with international participation. SPFMN-2023, Orel, (November 24-25), 2023, pp. 101-107.

3. Dergachev V.M., Lelyavin S.N. Simplicial embeddings in algebraic *K* theory. All-Russian scientific and practical conference with international participation. SPFMN-2022, Orel, (November. 25-26), 2022, pp. 161-166.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 130-133.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 130-133.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 514.772

# ФУНКЦИОНАЛ ЭНЕРГИИ ПОВЕРХНОСТИ СОБСТВЕННО ГЕЛЬМГОЛЬЦЕВОЙ ГРУППЫ

***Владимир Александрович Кыров***[1]✉
[1]*Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия*
[1]*kyrovVA@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0001-5925-7706*

***Аннотация.*** *Данная статья посвящена геометрическому изучению собственно гельмгольцевой группы, которая появляется как группа Ли, действующая движениями в собственно гельмгольцевой геометрии. Приводятся компоненты связности Леви-Чивиты относительно левоинвариантной метрике на собственно гельмгольцевой группе. Записываются уравнения Дирака в спинорном представлении гладкой регулярной поверхности в группе. Доказывается, что функционал энергии для замкнутой ориентированной поверхности в собственно гельмгольцевой группе вещественный, выводится соответствующая формула.*

***Ключевые слова:*** *собственно гельмгольцева группа Ли, уравнения Дирака, функционал энергии.*

Conference paper

# SURFACE ENERGY FUNCTIONAL OF THE HELMHOLTZ GROUP ITSELF

***Vladimir A. Kyrov***[1]✉
[1]*Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russia*
[1]*kyrovVA@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0001-5925-7706*

***Abstract.*** *This paper is devoted to the geometric study of the proper Helmholtz group, which appears as a Lie group acting by motions in the proper Helmholtz geometry. The components of the Levi-Civita connection with respect to the left-invariant metric on the proper Helmholtz group are presented. The Dirac equations are written in the spinor representation of a smooth regular surface in the group. It is proved that the energy functional for a closed oriented*

© Кыров В. А., 2024

*surface in the proper Helmholtz group is real, and the corresponding formula is derived.*

***Keywords:*** *proper Helmholtz Lie group, Dirac equations, energy functional.*

**Введение**

Рассмотрим матричную трехмерную собственно гельмгольцеву группу Ли $G$ [1, 2]:

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma z}\cos z & -e^{-\gamma z}\sin z & x \\ e^{-\gamma z}\sin z & e^{-\gamma z}\cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко выделить базис ее алгебры Ли:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} -\gamma & -1 & 0 \\ 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем выполняются коммутационные соотношения

$$[e_2, e_3] = e_1 + \gamma e_2,\ [e_3, e_1] = e_2 - \gamma e_1.$$

На группе $G$ можно ввести левоинвариантную метрику [1]:

$$ds^2 = e^{2\gamma z}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Связность Леви-Чивиты тогда задается равенствами:

$$\bigtriangledown_{e_1} e_1 = -\gamma e_3,\ \bigtriangledown_{e_1} e_2 = 0,\ \bigtriangledown_{e_1} e_3 = \gamma e_1,$$

$$\bigtriangledown_{e_2} e_1 = 0,\ \bigtriangledown_{e_2} e_2 = -\gamma e_3,\ \bigtriangledown_{e_2} e_3 = \gamma e_2,$$

$$\bigtriangledown_{e_3} e_1 = e_2,\ \bigtriangledown_{e_3} e_2 = -e_1,\ \bigtriangledown_{e_3} e_3 = 0.$$

**Поверхности на группе $G$**

Рассмотрим произвольную гладкую поверхность $M$ в группе $G$, заданную в конформной параметризации. Тогда индуцированную метрику можно задать так:

$$I = e^{2\varphi} dz d\bar{z} = (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2 dz d\bar{z},$$

причем параметры $\psi_1$ и $\psi_2$ называются спинорами поверхности [3].

В точках, где $\psi_1 \bar{\psi}_2 \neq 0$, справедливы уравнения Дирака:

$$D\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\right]\right]\psi = 0,$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$, $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$, $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Для потенциалов поверхности справедливы выражения:

$$U = -\frac{\gamma}{2}|\psi_1|^2 - \frac{i}{2}|\psi_2|^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2),$$
$$V = \frac{\gamma}{2}|\psi_2|^2 + \frac{i}{2}|\psi_1|^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2),$$

где $H$ – средняя кривизна поверхности.

Далее пусть $M$ – замкнутая ориентированная поверхность в $G$.

**Теорема.** Для замкнутой ориентированной поверхности $M$ в $G$ функционал энергии вещественный и равен

$$E(M) = \frac{1}{4}\int_M \left((H^2 - \gamma^2)(|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4) - \gamma^2|\psi_1|^2|\psi_2|^2\right)\frac{idz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

Доказательство. Сначала вычислим выражение [**?**]

$$\bar{\partial}(\psi_1\bar{\psi}_2) = (-ReU|\psi_1|^2 + ReV|\psi_2|^2) + i(ImU|\psi_1|^2 + ImV|\psi_2|^2).$$

Воспользовавшись выражениями для потенциалов поверхности $U$ и $V$, будем иметь

$$\bar{\partial}(\psi_1\bar{\psi}_2) = \frac{H}{2}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) + \frac{\gamma}{2}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4).$$

Согласно формуле Стокса

$$\int_M \left(\frac{H}{2}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) + \frac{\gamma}{2}(|\psi_2|^4 + |\psi_1|^4)\right)\frac{idz \wedge d\bar{z}}{2} = 0.$$

Далее приступаем к непосредственному вычислению интеграла энергии поверхности

$$E(M) = \int_M UV\frac{idz \wedge d\bar{z}}{2} =$$
$$\frac{1}{4}\int_M \left(H^2(|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4) + H\gamma(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) - \gamma^2|\psi_1|^2|\psi_2|^2 - \right.$$
$$\left. i[H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) + \gamma(|\psi_2|^4 + |\psi_1|^4)]\frac{idz \wedge d\bar{z}}{2}\right.$$

применяя формулу Стокса, получим

$$E(M) = \frac{1}{4}\int_M \left((H^2 - \gamma^2)(|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4) - \gamma^2|\psi_1|^2|\psi_2|^2\right)\frac{idz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

Теорема доказана.

**Заключение** В данной работе найден функционал энергии замкнутой поверхности в группе $G$. Далее будут изучаться спектральные свойства оператора Дирака на такой поверхности.

## Список источников

1. Кыров В.А. Левоинвариантные метрики некоторых трехмерных групп Ли // Математические заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 4. С. 24 - 36.

2. Biggs R., Remsing C. C. On the classification of real four-dimensional Lie groups // Journal of Lie Theory. 2016. Vol. 26. P. 1001 - 1035.

3. Бердинский Д.А., Тайманов И.А. Поверхности в трехмерных группах Ли // Сибирский математический журнал. 2006. Т. 46, № 6. С. 1248 - 1264.

## References

1. Kyrov V.A. Left-invariant metrics of some three-dimensional Lie groups // Mathematical notes of NEFU. 2023; (30: 4): 24 - 36. (In Russ.).

2. Biggs R., Remsing C. C. On the classification of real four-dimensional Lie groups // Journal of Lie Theory. 2016. Vol. 26. P. 1001 - 1035.

3. Berdinsky D.A., Taimanov I.A. Surfaces in three-dimensional Lie groups // Siberian Mathematical Journal. 2006; (46: 6): 1248 - 1264. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 134-137.
Modern problems of physical and mathematical sciences. 2024. 134-137.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 514.743.28

# ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ГРАМА ОДНОГО НЕПРИВОДИМОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛИ SL(4, ℂ)

***Игорь Сергеевич Логунов***[1]✉
[1]*Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
[1]*logun57orel@mail.ru*✉

***Аннотация.*** *Статья посвящена вычислению элементов матрицы Грама неприводимого представления группы Ли SL(4, ℂ), которая нужна для продолжения исследований в теории инвариантов.*

***Ключевые слова.*** *Группа Ли, алгебра Ли, неприводимое представление, вес, старший вес, младший вес, невырожденная симметрическая билинейная форма Картана-Киллинга, тензорное произведение представлений.*

Conference paper

# COMPUTING THE GRAM MATRIX OF ONE IRREDUCIBLE REPRESENTATION OF THE LIE GROUP SL(4, ℂ)

***Igor S. Logunov***[1]✉
[1]*Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
[1]*logun57orel@mail.ru*✉

***Abstract.*** *The article is devoted to the calculation of the elements of the Gram matrix of the irreducible representation of the Lie group SL(4, ℂ), which is needed to continue research in the theory of invariants.*

***Keywords.*** *Lie group, Lie algebra, irreducible representation, weight, senior weight, junior weight, nondegenerate symmetric bilinear Cartan-Killing form, tensor product of representations.*

## 1. Введение

В одной из предыдущих работ [2] нами вычислены векторы $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \dots, \mathrm{p}_{35}$ (матрицы $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_{35}$) в пространстве представления $\overset{4}{\circ}\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\circ$ как компоненты разложения тензорного произведения $\psi\otimes\psi = (\overset{1}{\circ}\!\!-\!\!\overset{1}{\circ}\!\!-\!\!\overset{1}{\circ})^{\otimes 2}$. При этом $\psi \sim \bar{\psi}$, но $\psi \not\equiv \bar{\psi}$ – контраградиентное представление для $\psi$. Сделаем это с помощью матрицы Грама. А именно, каждую из вышеуказанных матриц умножим слева на матрицу

© Логунов И. С., 2024

Грама системы базисных векторов пространства представления  . Построим матрицу Грама системы векторов

$$e_1, e_2, \dots, e_{64}. \quad (1)$$

Очевидно, в пространстве L со скалярным произведением $(*,*)$ любой последовательности $a_1, a_2, \dots, a_k$ векторов можно сопоставить квадратную матрицу k-го порядка

$$\Gamma(a_1, a_2, \dots, a_k) = (\!(g_{ij})\!), \quad (2)$$

где i, j = 1, 2, ..., k, элементами которой являются попарные скалярные произведения $g_{ij} = (a_i,\ a_j)$ векторов $a_i$ и $a_j$ пространства L. Эта матрица носит название матрицы Грама системой указанных векторов. В алгебре Ли $G = sl(64, \mathbb{C})$ скалярным произведением является невырожденная симметрическая билинейная форма Картана-Киллинга

$$\Theta(\xi, \eta) = Sp\ (Ad_\xi \eta), \quad (3)$$

где $Ad_\xi \eta = [\xi, \eta],\ \xi, \eta \in G$. При этом $\Theta(\xi, \eta)$ инварианта относительно линейной алгебры Ли $sl(64, \mathbb{C})$, то есть для всех $X \in G$.

$$\Theta(X\xi, \eta) + \Theta(\xi, X\eta) = 0. \quad (4)$$

**2. Основной текст статьи**

Пусть $x$ и $y$ – весовые векторы пространства представления  , принадлежащей соответственно весам $\lambda$ и $\mu$. Согласно [1] скалярное произведение (x, y) отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\lambda + \mu = 0$, и равно нулю в остальных случаях.

Обозначим через $\xi = e_1$ старший вектор, а через $\eta = e_{64} = \beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\beta\alpha$ – соответственно младший вектор в пространстве неприводимого представления $\psi$: . При этом младший вектор соответствует младшему весу, то есть наименьшему весу системы всех весов представления. Поскольку сумма весов  и  даёт нулевой вес , скалярное произведение $(\xi, \eta)$ отлично от нуля, причем можно считать, что $(\xi, \eta) = 1$.

Ясно, что скалярное произведение $(\xi, \beta\gamma\beta\alpha\gamma\beta\alpha\beta\gamma) = 0$ (сумма весов этих векторов не является нулевым весом). Тогда в силу инвариантности скалярного произведения $(*,*)$ относительно алгебры Ли $G = sl(64, \mathbb{C})$ применение оператора $E_{-\alpha}$ даёт:

$$(\alpha, \beta\gamma\beta\alpha\gamma\beta\alpha\beta\gamma) + (\xi, \alpha\beta\gamma\beta\alpha\gamma\beta\alpha\beta\gamma) = 0. \quad (5)$$

Используя равенство

$$\alpha\beta\gamma\beta\alpha\gamma\beta\alpha\beta\gamma = \frac{2}{3}\beta\alpha\gamma\beta\alpha\gamma\beta\alpha\beta\gamma, \quad (6)$$

получаем

$$(\alpha, \beta\gamma\beta\alpha\gamma\beta\alpha\beta\gamma) + \left(\xi, \frac{2}{3}\eta\right) = 0 \quad (7)$$

и окончательно

$$(\alpha, \beta\gamma\beta\alpha\gamma\beta\alpha\beta\gamma) = -\frac{2}{3}. \quad (8)$$

Применяя оператор $E_{-\gamma}$, получаем $(\gamma, \beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\beta\alpha) + (\xi, \gamma\beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\beta\alpha) = 0$ (9); или $(\gamma, \beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\beta\alpha) + \left(\xi, \frac{2}{3}\eta\right) = 0$ (10), откуда $(\gamma, \beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\beta\alpha) = -\frac{2}{3}$ (11).

Аналогичным образом, выполнив все последующие необходимые вычисления, найдём все отличные от нуля скалярные произведения весовых

векторов системы (1), то есть ненулевые элементы искомой матрицы Грама $\Gamma(a_1, a_2, \dots, a_k) = ((g_{ij}))$.

Запишем эти элементы $g_{ij} = g_{ij}$ , $i, j$ =1,2,..,64:

$g_{1,64} = 1$ , $g_{2,63} = -\frac{2}{3}$, $g_{4,61} = -\frac{2}{3}$, $g_{3,62}$ = -1 ,

$g_{5,60} = \frac{8}{9}$, $g_{6,59} = 1$ , $g_{6,58} = 1$ , $g_{7,59} = \frac{4}{3}$,

$g_{7,58} = \frac{2}{9}$, $g_{15,50} = -\frac{2}{9}$, $g_{8,57} = 1$ , $g_{8,56} = 1$ ,

$g_{9,57} = \frac{4}{3}$, $g_{9,56} = \frac{2}{3}$, $g_{16,49} = -\frac{2}{9}$, $g_{14,51} = -\frac{2}{9}$,

$g_{17,48} = -\frac{2}{9}$, $g_{22,43} = \frac{2}{9}$, $g_{27,38} = \frac{2}{9}$, $g_{10,55} = -\frac{2}{3}$,

$g_{10,54} = -\frac{4}{3}$, $g_{10,53}$ = -1 , $g_{10,52} = -\frac{8}{9}$, $g_{11,55} = -\frac{4}{3}$,

$g_{11,54} = -\frac{2}{3}$, $g_{11,53}$ = -1 , $g_{11,52} = -\frac{8}{9}$, $g_{12,55}$ = -1 ,

$g_{12,54}$ = -1 , $g_{12,53} = -\frac{2}{3}$, $g_{12,52} = -\frac{10}{9}$, $g_{13,55} = -\frac{8}{9}$,

$g_{13,54} = -\frac{8}{9}$, $g_{13,53} = -\frac{10}{3}$, $g_{13,52} = -\frac{8}{9}$, $g_{23,42} = \frac{2}{9}$,

$g_{23,41} = \frac{4}{9}$, $g_{24,42} = \frac{4}{9}$, $g_{24,41} = \frac{5}{9}$, $g_{25,40} = \frac{2}{9}$,

$g_{25,39} = \frac{4}{9}$, $g_{26,40} = \frac{4}{9}$, $g_{26,39} = \frac{5}{9}$, $g_{18,47} = \frac{2}{3}$,

$g_{18,46} = \frac{4}{3}$, $g_{18,45} = 1$, $g_{18,44} = \frac{8}{9}$, $g_{19,47} = \frac{4}{3}$,

$g_{19,46} = \frac{4}{3}$, $g_{19,45} = 1$, $g_{19,44} = \frac{8}{9}$, $g_{20,47} = 1$,

$g_{20,46} = 1$, $g_{20,45} = \frac{2}{3}$, $g_{20,44} = \frac{10}{9}$, $g_{21,47} = \frac{8}{9}$,

$g_{21,46} = \frac{8}{9}$, $g_{21,45} = \frac{10}{9}$, $g_{21,44} = \frac{8}{9}$, $g_{29,33} = -\frac{8}{9}$,

$g_{29,36} = -\frac{2}{3}$, $g_{29,35} = -\frac{4}{3}$, $g_{29,34} = -1$, $g_{29,33} = -\frac{8}{9}$,

$$g_{30,36} = -\frac{4}{3}, \quad g_{30,35} = -\frac{2}{3}, \quad g_{30,34} = -1, \quad g_{30,33} = -\frac{8}{9},$$

$$g_{31,36} = -1, \quad g_{31,35} = -1, \quad g_{31,34} = -\frac{2}{3}, \quad g_{31,33} = -\frac{10}{9},$$

$$g_{32,36} = -\frac{8}{9}, \quad g_{32,355} = -\frac{8}{9}, \quad g_{32,34} = -\frac{10}{9}, \quad g_{32,33} = -\frac{8}{9},$$

**3. Заключение.** Итак, нужная нам в дальнейшем исследовании матрица Грама построена.

## Список источников


1. Дынкин Е. Б. Максимальные подгруппы классических групп //Тр. Моск. матем. об-ва. –М., 1952. – Т. I. – С. 39-166.

2. Логунов И. С. Об одной задаче, связанной с принципом включения //Тезисы сообщений девятый Всесоюзной геометрической конференции: Кишинёв, 20-22 сентября 1988 г. /Матем. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, Ин-т матем. с в.ц. АН МССР, КГУ им. В. И. Ленина, Всесоюзн. ин-т научн. и техн. информ. – Кишинёв, 1988. – С. 187-188.

3. Мантуров О. В. Однородные пространства и инвариантные тензоры //Итоги науки и техники: Проблемы геометрии /Науч. ред. проф. Н. М. Остиану. – М.: Изд. ВИНИТИ, 1986. –Т. 18. – С. 105-142.


## References


1. Dynkin E. B. Maximal subgroups of classical groups // Proceedings of Moscow Math. Society. – M., 1952. – Vol. I. – P. 39-166.

2. Logunov I. S. On a problem related to the inclusion principle // Abstracts of the ninth All-Union Geometric Conference: Chisinau, September 20-22, 1988 / Steklov Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences, Institute of Mathematics with Computing Center of the MSSR Academy of Sciences, Lenin Kazan State University, All-Union Institute of Scientific and Technical Information. – Chisinau, 1988. – P. 187-188.

3. Manturov O. V. Homogeneous spaces and invariant tensors // Results of science and technology: Problems of geometry / Scientific. ed. prof. N. M. Ostianu. - M.: VINITI Publishing House, 1986. - V. 18. - P. 105-142.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 138-144.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 138-144.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 512.548, 515.162.8

# КОНСТРУКЦИИ КВАНДЛОВ НАД ГРУППАМИ И КОЛЬЦАМИ

***Михаил Владимирович Нещадим***[1]✉***, Александр Николаевич Бородин***[2]***, Андрей Артемович Симонов***[3]

[1] *Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.*

[2] *Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия.*

[3] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.*

[1] *neshch@math.nsc.ru*

[2] *serajsova@yandex.ru*

[3] *a.simonov@g.nsu.ru*

***Аннотация.*** *В работе приведены конструкции: 1) расширения тривиального квандла при помощи группы с нетривиальной абелевой Подгруппой; 2) квандла над некоммутативной группой при помощи произвольного антиавтоморфизма; 3) квандла, построенного при помощи обобщённого квандла Александера, заменой автоморфизма центральным антиавтоморфизмом; 4) квандла над $n$-мерным модулем, зависящего от $n(n-1)-1$ параметров из коммутативного кольца с единицей, $n \geq 2$.*

***Ключевые слова:*** *Квандл, квандл Госсу, тривиальный квандл, квандл Александера, обобщённый квандл Александера, самодистрибутивность, дистрибутивность, группа, автоморфизм, антиавтоморфизм, модуль, кольцо.*

***Финансирование:*** *работа Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5.(проект FWNF-2022-0009).*

Conference paper

# CONSTRUCTIONS OF QUANDLES OVER GROUPS AND RINGS

***Mikhail V. Neshchadim***[1]***, Aleksandr N. Borodin***[2]***, Andrey A. Simonov***[3]

© Нещадим М. В., 2024

[1] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*
[2] *Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russia*
[3] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
[1] *neshch@math.nsc.ru* ✉
[2] *serajsova@yandex.ru*
[3] *a.simonov@g.nsu.ru*

***Abstract.*** *The following constructions are given: 1) extension of a trivial quandle by means of a group with a nontrivial abelian subgroup; 2) a quandle over a non-commutative group by means of an arbitrary anti-automorphism; 3) a quandle constructed by means of a generalised Alexander quandle by replacing an automorphism by a central antiauto - morphism; 4) a quandle over an n-demensional module depending on n(n-1)-1 parameters from a commutative ring with unit, n2.*

***Keywords:*** *Quandle, Hosszu quandle, trivial quandle, Alexander quandle, a generalised Alexander quandle, distributivity, self-distributivity, group, automorphism, anti-automorphism, module, ring.*

***Funding:*** *The work was supported by the Fundamental Research Program of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (no. I.1.5, Project FWNF(2022-0009).*

## 1. Введение

**Квандлом** называют алгебраическую систему $\langle Q; \circ, / \rangle$, с операциями умножения "$\circ$" и деления "$/$", в которой для произвольных $x, y, z \in Q$ выполняются условия:
1) разрешимости слева, что эквивалентно делению справа $(x \circ y)/y = x$, $(x/y) \circ y = x$,
2) идемпотентности $x \circ x = x$,
3) дистрибутивности $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$.

Исторически, понятие *квандла* или *самодистрибутивного группоида* связывают с именами С.В. Матвеева и Д. Джойса [1, 2]. В 1982 г. С.В. Матвеев ввёл алгебраическую систему, которую назвал *дистрибутивным группоидом*. Он доказал, что с каждым классическим узлом можно естественным образом связать *праводистрибутивную правую квазигруппу*, которая является его алгебраическим инвариантом и определяет узел с точностью до изотопии и зеркального отражения. Таким образом, был получен универсальный алгебраический инвариант классических узлов. В том же году к этому результату независимо пришёл Д. Джойс, давший найденной структуре название "*квандл*".

Одной из центральных задач теории узлов является построение инвариантов узлов, в частности, алгебраических инвариантов и их

производных структур, которые в свою очередь также являются инвариантами. В связи с этим одной из важных задач является построение новых примеров алгебраических систем, по которым можно строить инварианты узлов. В предлагаемой работе приводятся несколько новых алгебраических конструкций, которые позволяют строить квандлы над группой и над модулем.

## 2. Квандлы и групповые автоморфизмы

M. Hosszu [3, 4, 5] показал, что над произвольной группой $<G;\cdot,e>$ при помощи произвольного автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}\,(G)$ можно построить квандл с операцией:

$$x \circ y = \varphi\left(xy^{-1}\right) y, \quad x, y \in G. \tag{1}$$

Если $G$ — абелева группа, то получившийся квандл абелев. Квандл с операцией (1) называют **обобщённым квандлом Александера**. Отметим, что квандл Александера $x \circ y = tx + (1-t)y$ строится над модулем $M = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Если в (1) использовать тождественный автоморфизм $\varphi = id$, то при помощи получающейся операции:

$$x \circ y = \left(xy^{-1}\right) y = x$$

строится **тривиальный квандл**. Тривиальный квандл можно построить не только над группой, но и над произвольным множеством $X$.

**Теорема 1. [6]** Пусть $X$ — непустое множество, $G$ — группа с нетривиальной абелевой подгруппой $H \leq G$ и произвольная функция $f : X \times X \to H$ с условием $f(x, x) = e$ для любого $x \in X$, тогда операция:

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = \left(x_1, f\left(x_1, y_1\right) x_2\right), \ x_1, y_1 \in X, \ x_2, y_2 \in G,$$

определяет структуру квандла на прямом произведении $X \times G$.

Данный пример интересен тем, что похож на тривиальный квандл, но можно сказать, что это **подкрученный тривиальный квандл**.

Для обобщённого квандла Александера с операцией (1) существует конструкция **дуального квандла**, построенного по тому же автоморфизму.

**Теорема 2.** Пусть $G$ — группа и $\varphi$ — произвольный её автоморфизм. Тогда операция

$$x \circ y = y\varphi(y^{-1}x), \quad x, y \in G$$

задаёт структуру квандла на группе $G$.

## 3. Квандлы и групповые антиавтоморфизмы

**Теорема 3. [6]** Пусть $G$ — группа, $\sigma$ — произвольный её антиавтоморфизм. Тогда операция

$$x \circ y = y\sigma\left(yx^{-1}\right), \quad x, y \in G$$

определяет структуру квандла на группе $G$.

Если в качестве антиавтоморфизма взять

$$\sigma(x) = x^{-1}$$

то получим **сопрягающий квандл** с умножением:

$$x \circ y = y\sigma\left(yx^{-1}\right) = y\left(yx^{-1}\right)^{-1} = yxy^{-1},$$

который впервые появился в работе K.S. Stein (1959).

**Теорема 4. [6]** Пусть $G$ — группа и $\sigma$ — её антиавтоморфизм. Тогда операция

$$x \circ y = \sigma\left(xy^{-1}\right) y, \quad x, y \in G$$

определяет структуру квандла на группе $G$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождеству

$$x\sigma(y)x^{-1} = \sigma(xyx^{-1}) \tag{2}$$

для произвольных $x, y \in G$.

Если в качестве антиавтоморфизма взять

$$\sigma(x) = x^{-1},$$

тогда получим квандл с операцией

$$x \circ y = \left(xy^{-1}\right)^{-1} y = yx^{-1}y.$$

В терминологии С.В. Матвеева (1982) такой квандл называется **сердцевинным квандлом** (**core quandle**). Данный квандл является инволютивным и именно он, построенный над абелевой группой, впервые появился в работе M.Takasaki [7].

Далее опишем строение антиавтоморфизмов с условием (2).

**Лемма 1. [6]** Пусть $\iota : G \to G$ отображение инверсии группы $G$, то есть $\iota(x) = x^{-1}$ для любого элемента $x$ из группы $G$. Тогда отображение $\sigma = \iota\varphi$, где $\varphi$ — произвольный автоморфизм группы $G$, является антиавтоморфизмом и любой антиавтоморфизм группы $G$ может быть представлен в таком виде для подходящего автоморфизма $\varphi$.

**Теорема 5. [6]** Антиавтоморфизм $\sigma$ группы $G$ удовлетворяет условию

$$\sigma(xyx^{-1}) = x\sigma(y)x^{-1}$$

для любых $x$, $y \in G$ тогда и только тогда, когда $\sigma = \iota\varphi$, где $\varphi$ — центральный автоморфизм группы $G$.

**Теорема 6. [6]** Пусть $G$ — группа и $\sigma$ — некоторый её антиавтоморфизм. Тогда операция

$$x \circ y = y\sigma(y^{-1}x), \quad x, y \in G$$

задаёт структуру квандла на группе $G$ тогда и только тогда, когда

$$\sigma(xyx^{-1}) = x\sigma(y)x^{-1}$$

для любых $x$, $y \in G$.

В связи с полученными утверждениями сформулируем следующие проблемы.

**Проблема 1.** Пусть $G$ — группа и $\psi$ биективное отображение $G$ на себя такое, что

$$\psi(xyx^{-1}) = x\psi(y)x^{-1} \tag{3}$$

для любых $x$, $y \in G$. Описать все такие отображения $\psi$.

**Проблема 2.** Пусть $G$ — группа и $\psi$ биективное отображение на $G$. Описать все биекции $\psi : G \to G$, для которых операция

$$x \circ y = \psi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G,$$

задаёт структуру квандла на $G$.

## 4. Квандлы над модулями

Пусть $R$ — произвольное коммутативное кольцо с единицей и $R^2$ — свободный модуль ранга 2 над ним. Элементы модуля $R^2$ будем рассматривать как столбцы длины два с элементами из $R$. Для произвольных столбцов $x, y \in R^2$ определим матрицу $(xy) \in R^{2\times 2}$ из этих столбцов в указанном порядке.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 7. [6]** Пусть $R$ — коммутативное кольцо с единицей, $a \in R$. Тогда операции

$$x \circ y = x + a\det(xy)y$$

и её обратная

$$x/y = x - a\det(xy)y$$

для произвольных $x, y \in R^2$ задают квандл $\langle R^2; \circ, / \rangle$.

Приведённая конструкция квандла над свободным модулем ранга 2 обобщается на свободный модуль $R^m$ произвольного ранга $m > 1$.

**Теорема 8. [6]** Пусть $R$ — коммутативное кольцо с единицей, тогда при помощи произвольных $a_0, a_1, \dots a_n \in R$ и произвольных линейно независимых $c_1, \dots, c_n \in R^{n+2}$ определим операции:

$$x \circ y = x + a_0 y \det(xyc_1 \dots c_n) + \sum_{k=1}^{n} a_k c_k \det(xyc_1 \dots c_n)$$

$$x/y = x - a_0 y \det(xyc_1 \dots c_n) - \sum_{k=1}^{n} a_k c_k \det(xyc_1 \dots c_n)$$

для $x, y \in R^{n+2}$, задающие квандл $\langle R^{n+2}; \circ, / \rangle$.

**Вопрос 3.** Можно ли данную конструкцию перенести на свободный модуль $R^m$ над не обязательно коммутативным кольцом $R$?

## Список источников


1. С.В. Матвеев, Дистрибутивные группоиды в теории узлов // Матем. сб., т. 119 (161), № 1(9) (1982) 78–88.
2. D. Joyce, A classifying invariant of knots: the knot quandle // Journal of Pure and Applied Algebra, (1982) 37–65.
3. M. Hosszu, On the functional equation of distributivity // Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae, 4(1–2) (1953) 159–167.
4. М. Госсу, Несимметричные средние // Colloquium Mathematicum, 5 (1957) 32–42.
5. M. Hosszu, Nonsymmetric means // Publ. Math. Debrecen 6 (1959) 1–9.
6. Симонов А.А., Нещадим М.В., Бородин А.Н. Конструкции квандлов над группами и кольцами // Сибирский математический журнал, Т. 65, № 3 (2024) 577–590.
7. M. Takasaki, Abstractions of symmetric functions // Tohoku Math. Journal. 49 (1943) 143–207.


## References


1. Matveev S.V., Distributive groupoids in knot theory // Mat. Sb., Vol. 119, No. 1, (1982) 78–8. (In Russ.).
2. D. Joyce, A classifying invariant of knots: the knot quandle // Journal of Pure and Applied Algebra, (1982) 37–65.
3. M. Hosszu, On the functional equation of distributivity // Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae, 4(1–2) (1953) 159–167.
4. Hosszu M., Nonsymmetric means // Colloq. Math., Vol. 5, (1957) 32–42. (In Russ.).

5. M. Hosszu, Nonsymmetric means // Publ. Math. Debrecen 6 (1959) 1–9.
6. A. A. Simonov, M. V. Neshchadim and A. N. Borodin, Constructions of quandles over groups and rings // Siberian Mathematical Journal, Vol. 65, No. 3 (2024) 627–638. (In Russ.).
7. M. Takasaki, Abstractions of symmetric functions // Tohoku Math. Journal. 49 (1943) 143–207.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 145-156.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 145-156.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91+519.65

# СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ЧЕТЫРЕХ ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ В ПРИМЕСНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА. СИНГЛЕТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

***Саъдулла Мамаражабович Ташпулатов***[1]✉
[1]*Институт ядерной физики академии наук республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан*
[1]*sadullatashpulatovivanov@yandex.com*✉*, https://orcid.org/0000-0002-7744-0085*

***Аннотация.*** *Рассматривается оператор энергии четырехэлектронных систем в примесной модели Хаббарда и исследуется структура существенного спектра и дискретный спектр системы для первого синглетного состояние системы. Исследование показывает, что имеет место нижеследующие ситуации: а). существенный спектр оператора энергии четырехэлектронных систем в примесной модели Хаббарда в первому синглетному состояние состоит из объединений десяти отрезков, а дискретный спектр системы состоит из шести собственных значений; б). существенный спектр системы в первых синглетных состояниях состоит из объединений шестнадцати отрезков, а дискретный спектр системы состоит из десяти собственных значений; в). существенный спектр системы состоит из объединения девятнадцати отрезков, а дискретный спектр системы состоит из шестнадцати собственных значений; с). существенный спектр системы в первых синглетных состояниях состоит из объединения четырех отрезков, а дискретный спектр системы состоит из двух собственных значений.*

***Ключевые слова:*** *Четырехэлектронная система, модель Хаббарда с примесями, синглетные, триплетные состояния, квинтетное состояние, существенный спектр, дискретный спектр*

Conference paper

# STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF FOUR-ELECTRON SYSTEMS IN THE IMPURITY HUBBARD MODEL. SINGLET STATES

***Sadulla M. Tashpulatov***[1]✉

© Ташпулатов С. М., 2024

[1]*Institute of Nuclear Physics of the Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*
[1]*sadullatashpulatovivanov@yandex.com✉, https://orcid.org/0000-0002-7744-0085*

***Abstract.*** *We consider the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model and investigate the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the first singlet state of the system. The investigations show that there are such situation: a) the essential spectrum of the system in the first singlet states is consists of the union of ten segments, and the discrete spectrum of the system consists of six eigenvalues; b) the essential spectrum of the system in the first singlet states is consists of the union of sixteen segments, and the discrete spectrum of the system consists of ten eigenvalues; 3) the essential spectrum of the system in the first singlet states is consists of the union of nineteen segments, and the discrete spectrum of the system consists of sixteen eigenvalues; 4) the essential spectrum of the system in the first singlet states is consists of the union of four segments, and the discrete spectrum of the system consists of two eigenvalues.*

***Keywords:*** *Four-electron system, Impurity Hubbard Model, singlet state, quintet state, triplet state, essential spectra, discrete spectra*

**1. Introduction.** The spectrum and wave functions of the system of four electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [1,2]. In the four-electron systems are exists a six states: quintet state, three type triplet state, and two type singlet states. In the work [1] investigated the spectrum and wave functions of four-electron systems in a Hubbard model in triplet states. In the work [2] considered the spectrum and wave functions of four-electron systems in a Hubbard model in a quintet and singlet states. In the work [2] proved that the essential spectrum of the system in a quintet state purely continuous and consists of the segment $[4A - 8Bv, 4A + 8Bv]$, and the four-electron bound state or four-electron antibound state is absent. Naturally, the question arises, if we consider four-electron system in the Impurity Hubbard model, then how can the spectrum of the system change? And actually this, led us to consider the following task. In addition, the intense development of the physics of the film state and also the use of films in different areas of physics and technology underlie the great interest in studying local impurity states magnets. Therefore, it is important to study the spectral properties of electron systems in the impurity Hubbard model. The spectrum of the energy operator of three-electron systems in the Impurity Hubbard model in the second doublet state were studied [3]. The structure of essential spectra and discrete spectrum of three-electron systems in the impurity Hubbard model in the Quartet state were studied in [4]. The structure of essential spectra and discrete spectrum of two-electron systems in the impurity Hubbard model in the singlet state were studied in the work S. Tashpulatov [5].

**2. Four-electron systems in the Impurity Hubbard Model. First singlet state.** Here, we consider the energy operator of four-electron systems in the Impurity Hubbard model and investigate the structure of the essential spectrum and discrete spectra of the system for first singlet state. The Hamiltonian of the chosen model has the form

$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}\, a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma} a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^+_{m,\uparrow}\, a_{m,\uparrow} a^+_{m,\downarrow} a_{m,\downarrow} + (A_0 - A)\sum_\gamma a^+_{0,\gamma} a_{0,\gamma} + (B_0 - B)\sum_{\tau,\gamma}(\, a^+_{0,\gamma} a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma} a_{0,\gamma}) + (U_0 - U) a^+_{0,\uparrow} a_{0,\uparrow} a^+_{0,\downarrow} a_{0,\downarrow}.$ (1)

Here, $A$ $(A_0)$ is the electron energy at a regular (impurity) lattice site; $B$ $(B_0)$ is the transfer integral between electrons (between electron and impurity) in a neighboring sites (for convenience, we assume that $B > 0$ and $B_0 > 0$), $\tau = \pm e_j$, for $j = 1,2, \dots, \nu$, where $e_j$ are unit mutually orthogonal vectors, i.e. the summation is over the nearest neighbors, $U$ $(U_0)$ is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, correspondingly in the regular (impurity) lattice site; $\gamma$ is the spin index, $\gamma = \uparrow$ or $\gamma = \downarrow, \uparrow$ or $\downarrow$ denote the spin values $1/2$ or $-1/2$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$.

The four-electron first singlet state corresponds four electron bound states (or antibound states) to the basis functions: ${}^1s^0_{p,q,r,t} = a^+_{p,\uparrow} a^+_{q,\downarrow} a^+_{r,\uparrow} a^+_{t,\downarrow} \varphi_0$. The subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^0_s$, corresponding to the four-electron first singlet state is the set of all vector's of the form: ${}^1\psi^0_s = \sum_{p,q,r,t\in Z^\nu} f(p,q,r,t)\ {}^1s^0_{p,q,r,t}$, $f \in l^{as}_2$, where $l^{as}_2$ is the subspace of antisymmetric functions in $l_2((Z^\nu)^4)$.

In the four-electron systems exists quintet state, two type singlet states, and three type triplet states. The energy of the system depends on its total spin $S$. Along with the Hamiltonian, the $N_e$ electron system is characterized by the total spin $S, S = S_{max}, S_{max} - 1, \dots, S_{min}, S_{max} = {}^{N_e}/_2,\ S_{min} = 0, {}^1/_2$. Hamiltonian (1) commutes with all components of the total spin operator $S = (S^+, S^-, S^z)$, and the structure of eigenfunctions and eigenvalues of the system therefore depends on $S$. The Hamiltonian $H$ acts in the antisymmetric Fock space $\widetilde{\mathcal{H}}_{as}$. Let $\varphi_0$ be the vacuum vector in the space $\widetilde{\mathcal{H}}_{as}$. The four-electron first singlet state corresponds to the free motion of four electrons over the lattice, and their interactions. We denote by ${}^1H^0_s$ the restriction of the operator $H$ to the subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^0_s$. We call the operator ${}^1H^0_s$ the four-electron first singlet state operator.

**Theorem 1.** The subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^0_s$ is invariant under the operator $H$, and the operator ${}^1H^0_s$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator ${}^1\bar{H}^0_s$, acting in the space $l^{as}_2$ as

${}^1\bar{H}^0_s\ {}^1\psi^0_s = 4Af(p,q,r,t) + 2B\sum_\tau [f(p+\tau,q,r,t) + f(p,q+\tau,r,t) + f(p,q,r+\tau,t) + f(p,q,r,t+\tau)] + U[\delta_{p,r} + \delta_{p,t} + \delta_{q,r} + \delta_{q,t}] f(p,q,r,t) + (A_0 - A)\big(\delta_{p,0} + \delta_{q,0} + \delta_{r,0} + \delta_{t,0}\big] f(p,q,r,t) + (B_0 - B)\sum_\tau [\delta_{p,0} f(\tau,q,r,t) + \delta_{q,0} \times f(p,\tau,r,t) + \delta_{r,0} f(p,q,\tau,t) + \delta_{t,0} f(p,q,r,\tau) + \delta_{p,\tau} f(0,q,r,t) + \delta_{q,\tau} \times \times f(p,0,r,t) + \delta_{r,\tau} f(p,q,0,t) + \delta_{t,\tau} f(p,q,r,0)] + (U_0 - U)[\delta_{p,r}\delta_{p,0} + \delta_{q,r}\delta_{q,0} + \delta_{p,t}\delta_{p,0} + \delta_{q,t}\delta_{q,0}] f(p,q,r,t),$ (2)

where $\delta_{k,j}$ is the Kronecker symbol. The operator ${}^1H^0_s$, acts on a vector ${}^1\psi^0_s \in {}^1\widetilde{\mathcal{H}}^0_s$ as ${}^1H^0_s\ {}^1\psi^0_s = \sum_{p,q,r,t}({}^1\bar{H}^0_s\, f)(p,q,r,t)\ {}^1s^0_{p,q,r,t}$. (3)

**Lemma 1.** The spectra of the operators ${}^1H^0_s$ and ${}^1\bar{H}^0_s$ coincide. We let $\mathcal{F}$ denote the Fourier transform: $\mathcal{F}\colon l_2((Z^\nu)^4) \to L_2((T^\nu)^4) \equiv {}^1\widetilde{\mathcal{H}}^0_s$, where $T^\nu$ is the $\nu-$dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, $\lambda(T^\nu) = 1$. We

set ${}^1\widetilde{H}_s^0 = \mathcal{F}\ {}^1\overline{H}_s^0\mathcal{F}^{-1}$. In the quasimomentum representation, the operator ${}^1\overline{H}_s^0$ acts in the Hilbert space $L_2^{as}((T^\nu)^4)$, where $L_2^{as}$ is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^4)$.

**Theorem 2.** The Fourier transform of operator ${}^1\overline{H}_s^0$ is an bounded self-adjoint operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$, acting in the space ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}_s^0$ by the formula

$$\left({}^1\widetilde{H}_s^0 f\right)(\lambda,\mu,\gamma,\theta) = 4A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[cos\lambda_i + cos\mu_i + cos\gamma_i + cos\theta_i]\}f(\lambda,\mu,\gamma,\theta) +$$
$$+U\int_{T^\nu} f(s,\mu,\lambda+\gamma-s,\theta)ds + U\int_{T^\nu} f(t,\mu,\gamma,\lambda+\theta)dt + U\int_{T^\nu} f(\lambda,\xi,\mu+\gamma-$$
$$\xi,\theta)d\xi + U\int_{T^\nu} f(\lambda,\eta,\gamma,\mu+\theta-\eta)d\eta + \varepsilon_1\left[\int_{T^\nu} f(s,\mu,\gamma,\theta)ds\ +\right.$$
$$\int_{T^\nu} f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt + \int_{T^\nu} f(\lambda,\mu,\xi,\theta)d\xi + \int_{T^\nu} f(\lambda,\mu,\gamma,\eta)d\eta + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[cos\lambda_i\ +$$
$$coss_i]f(s,\mu,\gamma,\theta)ds + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[cos\mu_i + cost_i]f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt + 2\varepsilon_2\times$$
$$\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[cos\gamma_i + cos\xi_i]f(\lambda,\mu,\xi,\theta)d\xi + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[cos\theta_i +$$
$$cos\eta_i]f(\lambda,\mu,\gamma,\eta)d\eta\ + \varepsilon_3\left[\int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(s,\mu,\xi,\theta)dsd\xi + \int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(\lambda,t,\xi,\theta)dtd\xi +\right.$$
$$\left.\int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(s,\mu,\gamma,\eta)dsd\eta + \int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(\lambda,t,\xi,\theta)dtd\xi\right]. \quad (4)$$

Using tensor products of Hilbert spaces and tensor products of operators in Hilbert spaces, we can verify that the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ can be represented in the form

$${}^1\widetilde{H}_s^0 = \{\widetilde{H}_1\otimes I + I\otimes\widetilde{H}_1 - U\int_{T^\nu} f(s,\lambda+\gamma-s)ds - U\int_{T^\nu} f(\eta,\mu+\theta-$$
$$\eta)d\eta\}\otimes I\otimes I + I\otimes I\otimes\{\widetilde{H}_1\otimes I + I\otimes\widetilde{H}_1 + U\int_{T^\nu} f(t,\lambda+\theta-t)dt +$$
$$Uf(\xi,\mu+\gamma-\xi)\times\quad d\xi + \varepsilon_3\int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(t,\xi)dtd\xi + \varepsilon_3\int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(s,\eta)dsd\eta,\quad \text{where}$$
$$\left(\widetilde{H}_1 f\right)(\lambda) = \{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[cos\lambda_i]\}f(\lambda) + \varepsilon_1\int_{T^\nu} f(s)ds + 2\varepsilon_2\sum_{i=1}^{\nu}\int_{T^\nu}[cos\lambda_i +$$
$coss_i]f(s)ds$ is the energy operator of one-electron systems in the impurity Hubbard model. It is known $\lambda,\mu,\gamma,\theta,s,t,\xi,\eta\in T^\nu$, therefore, the formula (4) it possible write in the next form ${}^1\widetilde{H}_s^0 = \{\widetilde{H}_1\otimes I + I\otimes\widetilde{H}_1 - 2U\int_{T^\nu} f(s,\lambda+\gamma-s)ds\}\otimes I\otimes I +$
$$I\otimes I\otimes\{\widetilde{H}_1\otimes I\ + I\otimes\widetilde{H}_1 + 2U\int_{T^\nu} f(t,\lambda+\theta-t)dt + 2\varepsilon_3\int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(t,\xi)dtd\xi. \quad (5)$$

The spectral properties of four-electron systems in the impurity Hubbard model in the first singlet state are closely related to those of its one-electron subsystems in the impurity Hubbard model. Therefore, we first study the spectrum and localized impurity states of one-electron systems. The use films in various areas of physics and technology arouses great interest in studying a localized impurity state (LIS) of magnet. Therefore, it is important to study the spectral properties of electron systems in the impurity Hubbard model.

**One-electron systems in the Impurity Hubbard Model.**

The Hamiltonian of one-electron systems in the impurity Hubbard model has the form: $H = A\sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + (A_0 - A)\sum_\gamma a_{0,\gamma}^+ a_{0,\gamma} + (B_0 - B)\sum_{\tau,\gamma}(a_{0,\gamma}^+ a_{\tau,\gamma} + a_{\tau,\gamma}^+ a_{0,\gamma})$. (6)

Here, $A$ ($A_0$) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site; $B$ ($B_0$) is the transfer integral between electrons (between electron and impurity) in a neighboring sites (for convenience, we assume that $B > 0$ and $B_0 > 0$), $\tau = \pm e_j$, for

$j = 1,2, \dots, \nu$, where $e_j$ are unit mutually orthogonal vectors, i.e. the summation is over the nearest neighbors, $\gamma$ is the spin index, $\gamma = \uparrow$ or $\gamma = \downarrow, \uparrow$ or $\downarrow$ denote the spin values $1/2$ or $-1/2$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$.

We let $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ denote the Hilbert space spanned by the vectors in the form $\psi = \sum_p a^+_{p,\uparrow}\varphi_0$. It is called the space of one-electron states of the operator $H$. The space $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ is invariant with respect to action of the operator $H$. Denote by $H_1$ the restriction of $H$ to the subspace $\widetilde{\mathcal{H}}_1$.

**Theorem 3.** The subspace $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ is invariant with respect to the action of the operator $H$, and the restriction $H_1$ is a linear bounded self-adjoint operator, acting in $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ as $H_1\psi = \sum_p (\bar{H}_1 f)(p) a^+_{p,\uparrow}\varphi_0, \psi \in \widetilde{\mathcal{H}}_1$, where $\bar{H}_1$ is a linear bounded self-adjoint operator acting in the space $l_2$ as $(\bar{H}_1 f)(p) = Af(p) + B\sum_{i=1}^{\nu} f(p+\tau) + \varepsilon_1 \delta_{p,0} f(p) + \varepsilon_2 \sum_\tau (\delta_{p,\tau} f(0) + \delta_{p,0} f(\tau))$.

**Lemma 2.** The spectra of the operators $\bar{H}_1$ and $H_1$ coincide.

As in section 1 denote by $\mathcal{F}: l_2(Z^\nu) \to L_2(T^\nu) \equiv \widetilde{\mathcal{H}}_1$ the Fourier transform. Setting $\widetilde{H}_1 = \mathcal{F}\bar{H}_1\mathcal{F}^{-1}$ we get that the operator $\bar{H}_1$ acts in the Hilbert space $L_2(T^\nu)$. Using the equality (11) and properties of the Fourier transform we have the following

**Theorem 4.** The operator $\widetilde{H}_1$ acting in the space $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ as $(\widetilde{H}_1 f)(\mu) = [A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} cos\mu_i] f(\mu) + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} f(s)ds + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [cos\mu_i + coss_i] f(s)ds$. It is clear that the continuous spectrum of operator $\widetilde{H}_1$ is independent of the numbers $\varepsilon_1$ and $\varepsilon_2$, and is equal to segment $[m_\nu, M_\nu] = [A - 2B\nu, A + 2B\nu]$,
$m_\nu = \min_{x \in T^\nu} h(x)$, $M_\nu = \max_{x \in T^\nu} h(x)$ (here $h(x) = A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} cos\mu_i$.
Denote via

$$D_\nu(z) = \left(1 + \int_{T^\nu} \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{\nu} coss_i}{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} coss_i - z} ds_1 \dots ds_\nu\right)\left[1 + \nu \int_{T^\nu} \frac{coss_i ds_1 \dots ds_\nu}{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} coss_i - z}\right] - 2\varepsilon_2 \nu \times \int_{T^\nu} \frac{coss_i[\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{\nu} coss_i]}{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} coss_i - z} ds_1 \dots ds_\nu \int_{T^\nu} \frac{ds_1 \dots ds_\nu}{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} coss_i - z}.$$

**Lemma 3.** If a real number $z \in [m_\nu, M_\nu]$ then $z$ is an eigenvalue of the operator $\widetilde{H}_1$ if and only if $D_\nu(z) = 0$.

In the work's [5] well described of the exchange of the spectrum of operator $\widetilde{H}_1$ in the cases $\nu = 1$ and $\nu = 3$. Here we use the results of these theorems. In the three-dimensional case, the integral $\int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 + coss_1 + coss_2 + coss_3} = \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 - coss_1 - coss_2 - coss_3}$ have the finite value, equal to $\frac{W}{3}$. Expressing these integral via Watson integral [6] $W = \frac{1}{\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3dxdydz}{3 - cosx - cosy - cosz} \approx 1{,}516$, and taking into account, what the measure is normalized, we have, that $J(z) = \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 - coss_1 - coss_2 - coss_3} = \frac{W}{6B}$. From obtaining results

is obviously, that the spectrum of operator $\widetilde{H}_1$ is consists from continuous spectrum and no more than two eigenvalues. The spectrum of the operator $A \otimes I + I \otimes B$, where $A$ and $B$ are densely defined bounded linear operators, was studied in [7-8]. Explicit formulas were given there that express the essential spectrum $\sigma_{ess}(A \otimes I + I \otimes B)$ and discrete spectrum $\sigma_{disc}(A \otimes I + I \otimes B)$ of operator $A \otimes I + I \otimes B$ in terms of the spectrum $\sigma(A)$ and the discrete spectrum $\sigma_{disc}(A)$ of $A$ and in terms of the spectrum $\sigma(B)$ and the discrete spectrum $\sigma_{disc}(B)$ of $B$:
$\sigma_{disc}(A \otimes I + I \otimes B) = \{\sigma(A)\backslash\sigma_{ess}(A) + \sigma(B)\backslash\sigma_{ess}(B)\}\{\big(\sigma_{ess}(A) + \sigma(B)\big) \cup (\sigma(A) + \sigma_{ess}(B))\}$, and $\sigma_{ess}(A \otimes I + I \otimes B) = \big(\sigma_{ess}(A) + \sigma(B)\big) \cup \big(\sigma(A) + \sigma_{ess}(B)\big)$. It is clear that $\sigma(A \otimes I + I \otimes B) = \{\lambda + \mu: \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}$.

It can be seen from representation (6) that we must first investigate the spectrum of operators $\widetilde{H}_2 = \widetilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \widetilde{H}_1 - 2U\int_{T^\nu} f(s, \lambda + \mu - s)ds$ and $\widetilde{H}_3 = \widetilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \widetilde{H}_1 + 2U\int_{T^\nu} f(s, \lambda + \mu - s)ds + 2\varepsilon_3 \int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(s,t)dsdt$.

**3. Structure of the essential spectrum and discrete spectrum of operator** ${}^1\widetilde{H}_s^0$. Consequently, the operator represented of the form

$$ {}^1\widetilde{H}_s^0 = \widetilde{H}_2 \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes \widetilde{H}_3. \tag{7}$$

From the beginning, we consider the operator $\widetilde{H}(U) = \widetilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \widetilde{H}_1 - 2U\int_{T^\nu} f(s, \lambda + \mu - s)ds$. Since, the family of the operators $\widetilde{H}(U)$ are the family of bounded operators, that the $\widetilde{H}(U)$ are the family of bounded operator valued analytical functions. Therefore, in these family, one can the apply the Kato-Rellix theorem.

**Theorem 5.** (Kato-Rellix theorem) ([9]) Let $T(\beta)$ is the analytical family in the terms of Kato. Let $E_0$ is a nondegenerate eigenvalue of $T(\beta_0)$. Then as $\beta$, near to $\beta_0$, the exist exactly one point $E(\beta) \in \sigma(T(\beta))$ the near $E_0$ and this point is isolated and nondegenerated. $E(\beta)$ is an analytical function of $\beta$ as $\beta$, the near to $\beta_0$, and exist the analytical eigenvector $\Omega(\beta)$ as $\beta$ the near to $\beta_0$. If the as real $\beta - \beta_0$ the operator $T(\beta)$ is a self-adjoint operator, then $\Omega(\beta)$ can selected thus, that it will be normalized of real $\beta - \beta_0$.

Since, the operator $\widetilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \widetilde{H}_1$ has a nondegenerate eigenvalue, such as, the near of eigenvalue $2z_1$ of the operator $\widetilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \widetilde{H}_1$, the operator $\widetilde{H}(U)$ as $U$, near $U_0 = 0$, has a exactly one eigenvalue $E(U) \in \sigma(\widetilde{H}(U))$ the near $2z_1$ and this point is isolated and nondegenerated. The $E(U)$ is a analytical function of $U$, as the near to $U_0 = 0$. As the large values the existence no more one additional eigenvalue of the operator $\widetilde{H}(U)$ is following from the same, what the perturbation $(K_1 f)(\lambda, \mu) = -2U\int_{T^\nu} f(s, \lambda + \mu - s)ds$ is the one-dimensional operator, for a fixed value of the total quasimomentum of two electrons. This additional eigenvalue of operator $\widetilde{H}_2$ we will denote by $z_3$. A new we consider the family of operators $\widetilde{H}(\varepsilon_3) = \widetilde{H}(U) + 2U\int_{T^\nu} f(s, \lambda + \mu - s)ds + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(s,t)ds\,dt$. As, the operator $\widetilde{H}(U)$ has a nondegenerate eigenvalue, consequently, the near of eigenvalue $E(U)$ the operator $\widetilde{H}(U)$, operator $\widetilde{H}(\varepsilon_3)$ as $\varepsilon_3$, the near of $\varepsilon_3 = 0$ has a exactly one eigenvalue $E(\varepsilon_3) \in \sigma(\widetilde{H}(\varepsilon_3))$ the near $E(U)$ and this point is the isolated and nondegenerated. The $E(\varepsilon_3)$

is a analytical function of $\varepsilon_3$, as $\varepsilon_3$, the near to $\varepsilon_3 = 0$. Later on via $z_4$ and $z_5$ we denote the additional eigenvalues of operator $\widetilde{H}_3$. Now, using the obtained results (Theorem 8 and 9 in the work [5]) and representation (6) and (7), we describe the structure of the essential spectrum and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$. The following Theorem describe of the exchange of the spectrum of operator $\widetilde{H}_1$ in the case $\nu = 1$.

**Theorem 5.** (see. [5]) Let $\nu = 1$. Then

**A).** If $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 2B$ ), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A + \varepsilon_1$, lying the below (above) of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

**B).** If $\varepsilon_1 < 0$ and $\varepsilon_2 = -2B$ or $\varepsilon_2 = 0$ (respectively, $\varepsilon_1 > 0$ and $\varepsilon_2 = -2B$ or $\varepsilon_2 = 0$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A - \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ (respectively, $z = A + \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ ), lying the below (above) of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

**C).** If $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 > 0$ or $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 < -2B$, then the operator $\widetilde{H}_1$ has a two eigenvalues $z_1 = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$ and $z_2 = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$, where $E = \frac{(B+\varepsilon_2^2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, lying the below and above of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

**D).** If $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A + \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$ (respectively, $z = A - \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$), where $E = \frac{(B+\varepsilon_2^2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, lying the above (below) of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

**E).** If $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, where $E = \frac{(B+\varepsilon_2^2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, and the real number $\alpha > 1$, lying the above of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

**F).** If $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A - \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, where $E = \frac{(B+\varepsilon_2^2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, and the real number $\alpha > 1$, lying the below of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

**K).** If $\varepsilon_2 > 0$ and $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a exactly two eigenvalues $z_1 = A + \frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} < m_1$ and $z_2 = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} > M_1$, where $E = \frac{(B+\varepsilon_2^2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, and the real number $0 < \alpha < 1$, lying correspondingly, the below and above of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

**M).** If $\varepsilon_2 > 0$ and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a exactly two eigenvalues $z_1 = A - \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} < m_1$ and $z_2 = A - \frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} > M_1$, where $E = \frac{(B+\varepsilon_2^2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$ and the real number $0 < \alpha < 1$, lying, correspondingly the below and above of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

**N).** If $-2B < \varepsilon_2 < 0$, then the operator $\widetilde{H}_1$ has no eigenvalues lying the outside of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

From obtaining results is obviously, that the spectrum of operator $\widetilde{H}_1$ is consists from continuous spectrum and no more than two eigenvalues. Now, using the obtained results (Theorem 5) and representation (6) and (7), we describe the structure of the essential spectrum and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$.

**Theorem 6.** Let $\nu = 1$. Then

**A).** If $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 2B$ ), then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of the union of ten segments: $\sigma_{ess}\left({}^1\widetilde{H}_s^0\right) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z, 3A+6B+z] \cup [2A-4B+2z, 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z, A+2B+3z] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4] \cup [2A-4B+z_5, 2A+4B+z_5] \cup [2A-4B+z+z_5, 2A+4B+z+z_5]$ and the discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of six eigenvalues: $\sigma_{disc}\left({}^1\widetilde{H}_s^0\right) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4, 2z+z_5, z_3+z_4, z_3+z_5\}$, where $z = A + \varepsilon_1$ and $z_3$ and $z_4$ and $z_5$ are the additional eigenvalues of the operators $\widetilde{H}_2$ and $\widetilde{H}_3$, respectively.

**B).** If $\varepsilon_1 < 0$ and $\varepsilon_2 = -2B$ or $\varepsilon_2 = 0$ (respectively, $\varepsilon_1 > 0$ and $\varepsilon_2 = -2B$ or $\varepsilon_2 = 0$), then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of the union of ten segments: $\sigma_{ess}\left({}^1\widetilde{H}_s^0\right) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z, 3A+6B+z] \cup [2A-4B+2z, 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z, A+2B+3z] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4] \cup [2A-4B+z_5, 2A+4B+z_5] \cup [2A-4B+z+z_5, 2A+4B+z+z_5]$ and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of six eigenvalues: $\sigma_{disc}\left({}^1\widetilde{H}_s^0\right) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4, 2z+z_5, z_3+z_4, z_3+z_5\}$, where $z = A - \sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$ (respectively, $z = A + \sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$ ).

**C).** If $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 > 0$ or $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 < -2B$, then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of the union of sixteen segments: $\sigma_{ess}\left({}^1\widetilde{H}_s^0\right) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z_1, 3A+6B+z_1] \cup [3A-6B+z_2, 3A+6B+z_2] \cup [2A-4B+2z_1, 2A+4B+2z_1] \cup [2A-4B+2z_2, 2A+4B+2z_2] \cup [A-2B+3z_1, A+2B+3z_1] \cup [A-2B+3z_2, A+2B+3z_2] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [2A-4B+z_5, 2A+4B+z_5] \cup [A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4] \cup [A-2B+z_1+z_5, A+2B+z_1+z_5] \cup [A-2B+z_2+z_4, A+2B+z_2+z_4] \cup [A-2B+z_2+z_5, A+2B+z_2+z_5] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3] \cup [A-2B+z_2+z_3, A+2B+z_2+z_3]$, and

discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of ten eigenvalues: $\sigma_{disc}\left({}^1\widetilde{H}_s^0\right) = \{4z_1, 2z_1 + z_4, 2z_1 + z_5, 4z_2, 2z_2 + z_4, 2z_2 + z_5, 2z_1 + z_3, 2z_2 + z_3, z_3 + z_4, z_3 + z_5\}$, where $z_1 = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$ and $z_2 = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$ and $E = \frac{(B+\varepsilon_2^2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$.

**D).** If $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of the union of ten segments: $\sigma_{ess}\left({}^1\widetilde{H}_s^0\right) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z + z_4, A + 2B + z + z_4] \cup [2A - 4B + z_5, 2A + 4B + z_5] \cup [2A - 4B + z + z_5, 2A + 4B + z + z_5]$ and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of six eigenvalues: $\sigma_{disc}\left({}^1\widetilde{H}_s^0\right) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z + z_5, z_3 + z_4, z_3 + z_5\}$, where $z = A + \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$ (respectively, $z = A - \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$), where $E = \frac{(B+\varepsilon_2^2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$.

**E).** If $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of the union of ten segments: $\sigma_{ess}\left({}^1\widetilde{H}_s^0\right) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z + z_4, A + 2B + z + z_4] \cup [2A - 4B + z_5, 2A + 4B + z_5] \cup [2A - 4B + z + z_5, 2A + 4B + z + z_5]$ and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of six eigenvalues: $\sigma_{disc}\left({}^1\widetilde{H}_s^0\right) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z + z_5, z_3 + z_4, z_3 + z_5\}$, where $z = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$ and $E = \frac{(B+\varepsilon_2^2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$ and the real number $\alpha > 1$.

**F).** If $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of the union of ten segments: $\sigma_{ess}\left({}^1\widetilde{H}_s^0\right) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3, A + 2B + z + z_3] \cup [2A - 4B + z_4, 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z + z_4, A + 2B + z + z_4] \cup [2A - 4B + z_5, 2A + 4B + z_5] \cup [2A - 4B + z + z_5, 2A + 4B + z + z_5]$ and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of six eigenvalues: $\sigma_{disc}\left({}^1\widetilde{H}_s^0\right) = \{4z, 2z + z_3, 2z + z_4, 2z + z_5, z_3 + z_4, z_3 + z_5\}$, where $z = A - \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$ and $E = \frac{(B+\varepsilon_2^2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$ and the real number $\alpha > 1$.

**K).** If $\varepsilon_2 > 0$ and $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of the union of nineteen segments: $\sigma_{ess}\left({}^1\widetilde{H}_s^0\right) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1, 3A + 6B +$

$z_1] \cup [3A-6B+z_2, 3A+6B+z_2] \cup [2A-4B+2z_1, 2A-4B+2z_1] \cup [2A-4B+2z_2, 2A+4B+2z_2] \cup [2A-4B+z_1+z_2, 2A+4B+z_1+z_2] \cup [A-2B+3z_1, A+2B+3z_1] \cup [A-2B+3z_2, A+2B+3z_2] \cup [A-2B+2z_1+z_2, A+2B+2z_1+z_2] \cup [A-2B+z_1+2z_2, A+2B+z_1+2z_2] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4] \cup [A-2B+z_2+z_3, A+2B+z_2+z_3] \cup A-2B+z_2+z_4, A+2B+z_2+z_4] \cup [2A-4B+z_5, 2A+4B+z_5] \cup [A-2B+z_1+z_5, A+2B+z_1+z_5] \cup [A-2B+z_2+z_5, A+2B+z_2+z_5]$, and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of sixteen eigenvalues: $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}_s^0) = \{4z_1, 3z_1+z_2, 2z_1+2z_2, z_1+3z_2, 4z_2, 2z_1+z_3, z_1+z_2+z_3, 2z_2+z_3, 2z_1+z_4, 2z_2+z_4, z_1+z_2+z_4, 2z_1+z_5, z_1+z_2+z_5, 2z_2+z_5, z_3+z_4, z_3+z_5\}$, where $z_1 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} < m_1$ and $z_2 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} > M_1$, and $E = \frac{(B+\varepsilon_2^2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, and the real number $0 < \alpha < 1$.

**M).** If $\varepsilon_2 > 0$ and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$), then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of the union of nineteen segments: $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}_s^0) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z_1, 3A+6B+z_1] \cup [3A-6B+z_2, 3A+6B+z_2] \cup [2A-4B+2z_1, 2A-4B+2z_1] \cup [2A-4B+2z_2, 2A+4B+2z_2] \cup [2A-4B+z_1+z_2, 2A+4B+z_1+z_2] \cup [A-2B+3z_1, A+2B+3z_1] \cup [A-2B+3z_2, A+2B+3z_2] \cup [A-2B+2z_1+z_2, A+2B+2z_1+z_2] \cup [A-2B+z_1+2z_2, A+2B+z_1+2z_2] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4] \cup [A-2B+z_2+z_3, A+2B+z_2+z_3] \cup A-2B+z_2+z_4, A+2B+z_2+z_4] \cup [2A-4B+z_5, 2A+4B+z_5] \cup [A-2B+z_1+z_5, A+2B+z_1+z_5] \cup [A-2B+z_2+z_5, A+2B+z_2+z_5]$, and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of sixteen eigenvalues: $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}_s^0) = \{4z_1, 3z_1+z_2, 2z_1+2z_2, z_1+3z_2, 4z_2, 2z_1+z_3, z_1+z_2+z_3, 2z_2+z_3, 2z_1+z_4, 2z_2+z_4, z_1+z_2+z_4, 2z_1+z_5, z_1+z_2+z_5, 2z_2+z_5, z_3+z_4, z_3+z_5\}$, where $z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} < m_1$ and $z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} > M_1$, and $E = \frac{(B+\varepsilon_2^2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$ and the real number $0 < \alpha < 1$.

**N).** If $-2B < \varepsilon_2 < 0$, then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of the union of four segments: $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}_s^0) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [2A-4B+z_5, 2A+4B+z_5]$, and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_s^0$ is consists of two eigenvalues: $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}_s^0) = \{z_3+z_4, z_3+z_5\}$.

**4. Conclusion.** As a result of the study, it is shown that for a essential spectrum and discrete spectrum of the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model in the first singlet state, the following conditions occur: a). The essential spectrum of the system consists of the union of ten segments, and the discrete

spectrum of the system consists of six eigenvalues; b). The essential spectrum of the system consists of the union of sixteen segments, and the discrete spectrum of the system consists of ten eigenvalues; c). The essential spectrum of the system consists of the union of nineteen segments, and the discrete spectrum of the system consists of sixteen eigenvalues; d). The essential spectrum of the system consists of the union of four segments, and the discrete spectrum of the system consists of two eigenvalues; Conditions are found under, when these conditions are realization, takes place every situation.

## Список источников


1. Tashpulatov S.M. Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard Model // Journal of Physics: Conference Series. 2016. 697, 012025. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/697/1/012025.

2. Tashpulatov S.M. The structure of essential spectra and discrete spectrum of fourelectron systems in the Hubbard model in a singlet state // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017. Vol. 38. № 3. P. 530–541.

3. Ташпулатов С.М. Спектр оператора энергии в трехэлектронных систем с примесью в модели Хаббарда. Второе дублетное состояние // Современная математика. Фундаментальные направления.2019, Т. 65, № 1, С. 109-123. DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2019-65-1-109-123.

4. Tashpulatov S.M. The structure of essential spectra and discrete spectrum of three-electron systems in the impurity Hubbard model. Quartet state // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2021. vol. 9. № 6. PP. 1391-1421. DOI: https://doi.org/10.4236/jamp.2021.96094.

5. Tashpulatov S.M Spectra of the Energy Operator of Two-Electron System in the Impurity Hubbard Model// Journal of Applied Mathematics and Physics. 2022. Vol. 10. № 11. PP. 2743-2779. DOI: https://doi.org/10.4236/jamp.2022.109184.

6. Вальков В.В., Овчинников С.Г., Петраковский О.П. Спектр возбуждений двухмагнонных систем в легкоосном квазимерном ферромагнетике // ФТТ. – Ленинград. 1988. Том 30. С. 3044-3047.

7. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators, 1. // Trans. Am. Math. Soc. 1978. Vol. *235*. P. 75–113.

8. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators, 2: The approximate point spectrum and Kato essential spectrum. // Trans. Am. Math. Soc. 1978. Vol. *237*. P. 223–254.

9. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 4. Анализ операторов. М.: Мир. 1982. – 432 С.


## References


1. Tashpulatov S.M. Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard Model // Journal of Physics: Conference Series. 2016. 697, 012025. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/697/1/012025.

2. Tashpulatov S.M. The structure of essential spectra and discrete spectrum of fourelectron systems in the Hubbard model in a singlet state // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017. Vol. *38*. № 3. P. 530–541.

3. Ташпулатов С.М. Спектр оператора энергии в трехэлектронных систем с примесью в модели Хаббарда. Второе дублетное состояние// Современная математика. Фундаментальные направления.2019, Т. 65, № 1, С. 109-123. DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2019-65-1-109-123.

4. Tashpulatov S.M. The structure of essential spectra and discrete spectrum of three-electron systems in the impurity Hubbard model. Quartet state // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2021. vol. 9. № 6. PP. 1391-1421. DOI: https://doi.org/10.4236/jamp.2021.96094.

5. Tashpulatov S.M Spectra of the Energy Operator of Two-Electron System in the Impurity Hubbard Model// Journal of Applied Mathematics and Physics. 2022. Vol. 10. № 11. PP. 2743-2779. DOI: https://doi.org/10.4236/jamp.2022.109184.

6. Val'kov V. V., Ovchinnikov S. G., and Petrakovskii O. P. The excitation spectra of two-magnon systems in easy-axis quasidimensional ferromagnets// Sov. Phys. Solid State. 1988. Vol. 30. P. 3044–3047.

7. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators, 1. // Trans. Am. Math. Soc. 1978. Vol. 235. P. 75–113.

8. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators, 2: The approximate point spectrum and Kato essential spectrum. // Trans. Am. Math. Soc. 1978. Vol. 237. P. 223–254.

9. Reed M., and Simon B. Methods of Modern Mathetical Physics._New York.:Acad. Press, 1978. Vol. 4. Operator Analysis. - 428 P.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 157-162.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 157-162.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 514.75+514.85

# ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОСТОЯННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА

***Владлена Владиславовна Черкасова*** [1]✉, ***Егор Дмитриевич Черкасов*** [2]
[1,2]*Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
[1]*cher_vl@mail.ru*✉, *https://orcid.org/0000-0001-9169-2097*
[2]*cherkasov.shugan@mail.ru*

***Аннотация.*** *В данной статье авторами рассматривается одна из классических задач в геометрии о нахождении матрицы перехода. Для построения решения применяется криволинейный мультипликативный интеграл. Матрицы перехода найдены для случаев движения оснащенной сферы по поверхностям постоянной средней кривизны и минимальным поверхностям.*

***Ключевые слова:*** *поверхности второго порядка, минимальная поверхность, средняя кривизна поверхности, криволинейный мультипликативный интеграл.*

Conference paper

# INVESTIGATION OF THE PROPERTIES OF SURFACES OF CONSTANT MEDIUM CURVATURE USING A MULTIPLICATIVE INTEGRAL

***Vladlena V. Cherkasova*** [1]✉, ***Egor D. Cherkasov*** [2]
[1,2]*Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
[1]*cher_vl@mail.ru*✉, *https://orcid.org/0000-0001-9169-2097*
[2]*cherkasov.shugan@mail.ru*

***Abstract.*** *In this article, the authors consider one of the classical problems in geometry of finding the transition matrix. A curved multiplicative integral is used to construct the solution. Transition matrices are found for the cases of motion of an equipped sphere over surfaces of constant average curvature and minimal surfaces.*

***Keywords:*** *second-order surfaces, minimum surface, average curvature of the surface, curved multiplicative integral.*

© Черкасова В. В., Черкасов Е. Д., 2024

## 1. Введение

Теория поверхностей является одним из разделов дифференциальной геометрии, которая отражает исследование свойств поверхностей, не изменяющихся при движении. Сферой приложения фундаментальных исследований данной области являются геодезия, картография, электродинамика, молекулярная физика, оптика, нанотехнология. Применение мультипликативного интеграла как инструмента исследования позволяет установить новые соотношения между инвариантами поверхностей и характеристиками мультипликативных интегралов.

## 2. Основной текст статьи

Исследование свойств поверхностей постоянной кривизны с применением положений инфинитезимального исчисления Вольтерра носит теоретический характер, однако не исключается возможность практического применения полученных результатов и в прикладных областях. Актуальность данного исследования обусловлена необходимостью поиска новых оптимальных форм поверхностей, обладающих оптимальными характеристиками.

Целью данной работы являлось установление зависимости значения кривизны криволинейного мультипликативного интеграла от средней кривизны поверхности в том случае, когда рассматривается движение оснащенной единичной сферы по поверхности постоянной средней кривизны.

Задача о качении шара по поверхности является одной из классических задач механики неголономных систем. В ней рассматривается движение однородного шара без проскальзывания под действием силы тяжести по неподвижной поверхности. Решение данной задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка, которое не разрешимо в явном виде для произвольных поверхностей. При рассмотрении качения по поверхности единичной сферы, оснащенной в центре ортонормированным репером, можно найти матрицу перехода от начального положения репера к конечному, которая будет зависеть от средней кривизны поверхности качения.

Пусть $M$ – регулярная поверхность пространства $\boldsymbol{E}^3$, заданная параметрическими уравнениями $\boldsymbol{r} = (x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v))$, где $(u, v) \in D \subset \boldsymbol{R}^2$, $u$, $v$ – координаты на поверхности $M$.

По поверхности $M$ движется единичная сфера без проскальзывания вдоль замкнутой кривой $\gamma$: $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. С центром сферы жестко связан ортонормированный базис $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, который в начальный момент времени совпадает осями некоторой неподвижной системы координат $Oxyz$. В конце движения единичной сферы репер примет новое положение. Необходимо определить матрицу перехода от начального положения репера к конечному положению относительно неподвижной системы координат $Oxyz$.

Нахождение матрицы перехода основывается на представлении качения единичной сферы по поверхности как частного случая аффинного преобразования, которое однозначно разлагается на композицию вращения $R$ с заданным центром и параллельного переноса $T$, причем $R \circ T \neq T \circ R$. Данные

пространственные преобразования описываются невырожденными матрицами размерности 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & s_{44} \end{pmatrix}$$

где $r_{ij}$ – коэффициенты, связанные с локальным масштабированием, поворотом, отражением, сдвигом; $t_{ij}$ – сдвиг вдоль координатных осей, $p_{ij}$ – проецирование в однородных координатах, $s_{ij}$ – коэффициент общего масштабирования. Обобщенные координаты используются для описания конфигурации динамических систем относительно некоторой эталонной модели. Будем описывать движение единичной сферы с применением обобщенных координат. В случае качения шара по поверхности из точки $M_0(u_0, v_0)$ в точку $M_1(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)$ вдоль кривой $\gamma$, движение будет представлять собой композицию двух преобразований: параллельного переноса на вектор $\boldsymbol{\xi}$ и вращения относительно неподвижной оси, совпадающей с мгновенной осью вращения. В качестве направляющего вектора мгновенной оси вращения $\boldsymbol{\omega}$ будем рассматривать вектор, проходящий через точку касания сферы и поверхности перпендикулярно вектору $\boldsymbol{\xi}$ и единичному вектору нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности $M$ в точке с координатами $(u_0, v_0)$, $\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{n}]$.

Поскольку касательный вектор представим как линейная комбинация

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{\partial v}\Delta v,$$

вектор нормали $\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]|}$, тогда направляющий вектор мгновенной оси вращения имеет вид:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]\Delta u + [\boldsymbol{r}_v \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]\Delta v}{|[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]|}.$$

В результате линейное преобразование, соответствующее движению единичной сферы по поверхности из точки $M_0(u_0, v_0)$ в точку $M_1(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)$ по поверхности $M$, описывается невырожденной матрицей:

$$Y = E + (B\Delta\varphi + A\Delta l) + O(\Delta l^2), \qquad (1)$$

где $\Delta l$ – величина бесконечно малого перемещения, $\Delta\varphi$ – угол поворота, $E$ – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & 0 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & 0 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z & 1 \end{pmatrix}.$$

Качение сферы вдоль контура $\gamma$ на поверхности $M$ можно представить как композицию $n$ линейных преобразований вида (1), тогда матрица перехода от начального положения репера к конечному положению будет представлять собой криволинейный мультипликативный интеграл [3]:

$$\int_{\gamma}^{\cap} E + P_1(u,v)du + P_2(u,v)dv. \qquad (2)$$

Матрицы $P_i(u,v)$ имеют вид:

$$P_1(u,v) = \frac{1}{\Delta}\,\Phi\big([\boldsymbol{r}_u \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]]\big) + \Lambda_u,$$

$$P_2(u,v) = \frac{1}{\Delta}\,\Phi\big([\boldsymbol{r}_v \times [\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]]\big) + \Lambda_v,$$

где $\Phi$ – кососимметрическая матрица размерности 4×4, в которой для вектора $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ все элементы $\varphi_{ij}$ кроме $\varphi_{12} = z$, $\varphi_{21} = -z$, $\varphi_{13} = -y$, $\varphi_{31} = y$, $\varphi_{23} = x$, $\varphi_{32} = -x$, матрица $\Lambda(u, v)$ – кососимметрическая матрица, элементами которой являются $\lambda_{ij} = 0$ кроме $\lambda_{41} = x(u, v)$, $\lambda_{42} = y(u, v)$, $\lambda_{43} = z(u, v)$, $E, F, G$– коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $\Delta = \sqrt{EG - F^2}$.

Основной характеристикой криволинейного мультипликативного интеграла (2) является кривизна [1], значение которой определяется из соотношения:

$$K = \frac{\partial P_2}{\partial u} + \frac{\partial P_1}{\partial v} - [P_1, P_2]$$

причем $[P_1, P_2] = P_1 P_2 - P_2 P_1$ – коммутатор матриц $P_1$ и $P_2$.

Кривизна криволинейного мультипликативного интеграла качения (2) имеет вид:

$$K = (2H - 1)\Phi(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]) \qquad (3)$$

где $H$– средняя кривизна поверхности заданной параметрическими уравнениями $\boldsymbol{r} = (x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v))$, $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, $(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{n})dt^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$– первая и вторая квадратичные формы поверхности.

Рассмотрим ситуацию, когда движение сферы осуществляется по поверхности постоянной средней кривизны [2]. Данный класс поверхностей часто возникает при рассмотрении задач, в которых поверхность $M$ представляет собой границу раздела двух однородных сред, находящихся в равновесии.

Пусть $\gamma$– бесконечно малый геодезический прямоугольник на поверхности постоянной средней кривизны $M$, тогда основании теоремы Пуассона-Лапласа [2] средняя кривизна поверхности может быть вычислена по формуле: $H = \frac{1}{\lambda}\Delta P$, где $\lambda$ – коэффициент поверхностного натяжения, $\Delta P$ – результирующее давление. В этом случае, матрица перехода от начального положения репера к конечному положению может быть вычислена по формуле:

$$K = \frac{2\Delta P - \lambda}{\lambda}\,\Phi([\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v].$$

Примерами поверхностей с постоянной средней кривизной являются плоскость, цилиндр, сфера, катеноид, ундулоид и нодоид. Большинство из них были получены путем вращения кривых, полученных в результате качения коник. Поверхности постоянной средней кривизны могут быть получены с применением методом склеивания.

Основываясь на свойствах мультипликативного интеграла (2), средняя кривизна поверхности качения может быть найдена по формуле:

$$H = \frac{k_{ij}+\varphi_{ij}}{2\varphi_{ij}},\ i \neq j,\ i,j = \overline{1;3}, \qquad (4)$$

где $k_{ij}$ – элементы матрицы кривизны мультипликативного интеграла $K$, $\varphi_{ij}$ – элементы кососимметрической матрицы $\Phi$.

Например, если ненулевые элементы матрицы кривизны криволинейного мультипликативного интеграла (2), характеризующего качение единичной сферы по поверхности постоянной средней кривизны задаются формулами:

$$k_{12}=(4R - R^2)\cos v\sin v, \quad k_{13}=(R^2 - 4R)\sin u\cos^2 v,$$
$$k_{21}=(R^2 - 4R)\cos v\sin v, \quad k_{23}=(R^2 - 4R)\cos u\cos^2 v,$$
$$k_{31}=(4R - R^2)\sin u\cos^2 v, \quad k_{32}=(4R - R^2)\cos u\cos^2 v,$$

учитывая, что не нулевые элементы кососимметрической матрицы равны:

$$\varphi_{13}=R^2\sin u\cos^2 v,\ \varphi_{21}= R^2\cos v\sin v,\ \varphi_{23}= R^2\cos u\cos^2 v,$$
$$\varphi_{31}= R^2\sin u\cos^2 v\ \ \varphi_{23}= R^2\cos u\cos^2 v,$$

тогда $H = \frac{2}{R}$ – это средняя кривизна сферы радиуса $R$ с центром.

Частным случаем поверхностей постоянной средней кривизны являются минимальные поверхности, для которых $H = 0$. По своей структуре минимальные поверхности похожи на мыльную пленку или мыльные пузыри. Дж. Питсом было доказано, что если на какой-либо фигуре можно сконструировать минимальную поверхность, тогда у исследователей появляется возможность изучения геометрии окружающего его пространства. Задачи такого типа возникают при изучении областей пространства-времени с сильным гравитационным полем (черные дыры), в архитектуре – при разработке форм оптимальных поверхностей воздушных укрытий, в нанотехнологиях.

Одним из примеров минимальной поверхности является минимальная поверхность переноса Шерка, заданная уравнением:

$$f(x,y) = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{\cos ky}{\cos kx}\right).$$

В природе возникновение таких поверхностей связано с пространственными решетками. Для минимальной поверхности Шерка при $k = 1$ матрица кривизны криволинейного мультипликативного интеграла (2) имеет вид:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{\sin y}{\cos y} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{\sin x}{\cos x} & 0 \\ -\frac{\sin y}{\cos y} & -\frac{\sin x}{\cos x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $H = 0$ формула для нахождения матрицы кривизны значительно упрощается:

$$K = -\Phi([\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]. \qquad (5)$$

В частности, для катеноида, заданного параметрическими уравнениями:

$$x(u, v) = \mathrm{ch}u\cos v, \quad y(u, v) = \mathrm{ch}u\sin v, \quad z = v.$$
$$\boldsymbol{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \boldsymbol{r}_v = (-usin\ v, u\cos v, 1).$$
$$[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v] = (\sin v,\ \cos v, u).$$

Запишем ненулевые элементы кососимметрической матрицы кривизны:

$$k_{12}= -u,\ k_{13}= -\cos v,\ k_{21}= u,\ k_{23}=\sin v,\ k_{31}= \cos v,\ k_{32}= -\sin v.$$

Использование инструментария инфинитезимального исчисления Вольтерра при рассмотрении задач, связанных с нахождением матриц перехода, позволяет во многом облегчить процесс нахождения решения.

**3. Заключение**

В заключении необходимо отметить, что в рамках данного исследования были получены формулы, которые отражают влияние свойств внутренней геометрии поверхностей с постоянной средней кривизной на значение криволинейного мультипликативного интеграла (2) при исследовании задачи о качении шара.

## Список источников


1. Мантуров О.В. Мультипликативный интеграл. // Итоги науки и техники Серия «Проблемы геометрии». – 1990. – Выпуск – №22. С. 167–215.
2. Тужилин А.А., Фоменко А.Т. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 2022. 256 с.
3. Черкасова В.В. О связностях, индуцированных качением шара по поверхности. // Известия ВУЗов. Математика. – 2009. – Выпуск. – №11. С. 79 – 84.


## References


1. Manturov O.V. Multiplicative integral. // Results of science and technology Series "Problems of geometry". - 1990. – Issue – No. 22. pp. 167-215. (In Russ.).
2. Tuzhilin A.A., Fomenko A.T. Elements of geometry and topology of minimal surfaces. M.: Nauka, 2022. 256 p. (In Russ.).
3. Cherkasova V.V. On the connections induced by the rolling of the ball along the surface. // Izvestiya VUZov. Mathematics. – 2009. – Issue. – No.11. pp. 79-84. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 163-172.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 163-172.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.2.73

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ИЗОБРАЗИТЕЛЬНОМ ИСКУССТВЕ

***Илья Юрьевич Глухов[1], Ирина Николаевна Зиненко[2]✉***
*[1,2]Гуманитарно-педагогическая академия (филиал) ФГАОУ ВО «КФУ имени В.И. Вернадского» в г. Ялта, Республика Крым, Россия*
*[1]inya2003@yandex.ru*
*[2]iriwe4ka.86@mail.ru✉*

***Аннотация.*** *В данной статье рассматривается уникальное пересечение математических методов и изобразительного искусства. Особое внимание уделяется применению таких понятий, как золотая пропорция, перспектива и симметрия, которые являются неотъемлемой частью художественной гармонии. Кроме того, обсуждаются закономерности в композиции и значимость чисел в эстетике живописи, что подчеркивает глубокую взаимосвязь между математикой и искусством. Эта работа направлена на раскрытие роли математической статистики в анализе и создании художественных произведений, ставя акцент на исследование гармонии форм и цветов через призму чисел и закономерностей.*

***Ключевые слова:*** *математическая статистика, изобразительное искусство, золотая пропорция, перспектива, симметрия, эстетика, закономерность.*

Conference paper

# THE USE OF MATHEMATICAL STATISTICS METHODS IN THE VISUAL ARTS

***Ilya Yu. Glukhov[1], Irina N. Zinenko[2]✉,***
*[1,2]Humanitarian and Pedagogical Academy (branch) of the Federal State Educational Institution of Higher Education «V.I. Vernadsky KFU» in Yalta, Republic of Crimea, Russia*
*[1]inya2003@yandex.ru*
*[2]iriwe4ka.86@mail.ru✉*

© Глухов И. Ю., Зиненко И. Н., 2024

**Annotation.** This article examines the unique intersection of mathematical methods and fine art. Special attention is paid to the application of concepts such as golden proportion, perspective and symmetry, which are an integral part of artistic harmony. It explores how parallel and perpendicular lines, as well as various geometric shapes, help artists create visually appealing works. In addition, patterns in composition and the importance of numbers in the aesthetics of painting are discussed, which emphasizes the deep relationship between mathematics and art. This work is aimed at revealing the role of mathematical statistics in the analysis and creation of works of art, focusing on the study of the harmony of shapes and colors through the prism of numbers and patterns.

**Keywords:** mathematical statistics, fine art, golden proportion, perspective, symmetry, aesthetics, regularity.

**Введение**

В последние десятилетия наблюдается растущий интерес к междисциплинарным исследованиям, которые объединяют, казалось бы, далекие друг от друга области знания. Одним из наиболее ярких примеров такого взаимодействия является пересечение математической статистики и изобразительного искусства. Эта работа направлена на изучение того, как математические методы, в частности, статистические подходы, могут быть использованы для анализа и создания художественных произведений. В рамках данной работы мы будем рассматривать не только теоретические аспекты, но и практические примеры, которые иллюстрируют, как математика и искусство взаимосвязаны и дополняют друг друга.

Актуальность данной темы обусловлена тем, что в современном мире, где наука и искусство все чаще пересекаются, важно понимать, как математические концепции могут влиять на восприятие и создание художественных произведений. Математика, в частности, математическая статистика, предоставляет инструменты для анализа визуальных данных, что позволяет художникам и исследователям глубже понять закономерности, лежащие в основе эстетики. В то время как традиционно искусство воспринимается как область, основанная на интуиции и субъективных ощущениях, использование математических методов открывает новые горизонты для анализа и интерпретации художественных произведений.

**Основной текст статьи**

Математика и изобразительное искусство связаны более тесно, чем традиционно считается. Это объясняется тем, что многие математические концепции служат основой для создания гармоничных и эстетически привлекательных произведений. Математическая статистика предоставляет инструменты для анализа визуальных элементов и их сочетаний, что может помочь в понимании того, как воспринимается искусство. Например, используя данные о восприятии цвета, можно изучать, как различные цветовые комбинации влияют на эмоциональное состояние зрителей [12].

Исторически, мастера искусства, такие как Леонардо да Винчи и Альберт Дюрер, использовали математические принципы, чтобы создать глубину и

перспективу в своих произведениях. Это позволяет говорить о том, что статистические методы могут раскрывать известные и неочевидные связи между художественными техниками и восприятием произведений. Применение статистического анализа в искусстве открывает новые горизонты для исследователей и практиков, создавая возможности для более глубокого осмысления визуальных форм и их влияния [14, с. 7-10].

К числу важных методов анализа, которые могут быть использованы для изучения изобразительного искусства, относятся корреляционный анализ и регрессионные модели. Эти методы могут помочь установить взаимосвязи между художественными элементами и параметрами восприятия. Например, для анализа, как композиционные элементы связаны с эмоциональным откликом зрителей, можно использовать методы регрессионного анализа. Это позволяет количественно оценить, какие характеристики произведения имеют наиболее сильное влияние на восприятие и оценку.

Еще одной важной областью является исследование симметрии и асимметрии визуальных элементов. Симметрия играет ключевую роль в создании впечатления гармонии и порядка, что способствует эстетическому восприятию. На основании статистических данных можно оценить, как симметрия воздействует на эмоциональный отклик зрителей, что может быть полезным для практикующих художников в процессе создания новых произведений [11].

Также стоит подчеркнуть, что количественные методы анализа не только позволят уточнить выбор цветовых и композиционных решений, но и повысят общую осведомленность о том, как различные элементы взаимодействуют друг с другом в контексте художественного произведения. Например, анализ признаков может помочь понять, какие факторы способствуют созданию визуальной иерархии в композиции, что в свою очередь может повлиять на общее восприятие работы зрителем [7].

Золотая пропорция, или золотое сечение, представляет собой одно из самых интересных и широко используемых соотношений в изобразительном искусстве. Это математическое выражение гармонии и красоты, основывающееся на числе 1,618. Художники и архитекторы на протяжении веков применяли это соотношение для достижения визуальной гармонии и устойчивости в своих произведениях.

Принцип золотого сечения можно наблюдать повсюду: от природы до архитектурных шедевров и картин (рисунок 1) Один из ярких примеров использования золотой пропорции можно найти в работах Леонардо да Винчи, который сознательно внедрял это соотношение в композиции своих картин (рисунок 2). Его знаменитые «Витрувианский человек» и «Мона Лиза» демонстрируют идеальные пропорции, соотносимые с золотым сечением. В одном из исследований утверждается, что такие пропорции способствуют созданию удобоваримого и эстетически привлекательного изображения [6].

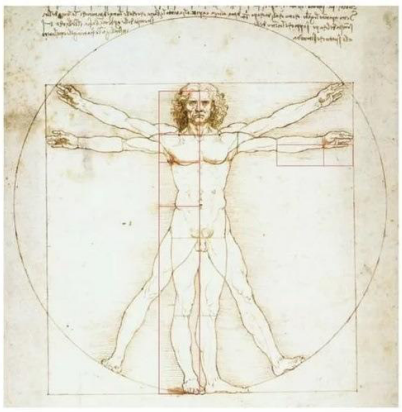
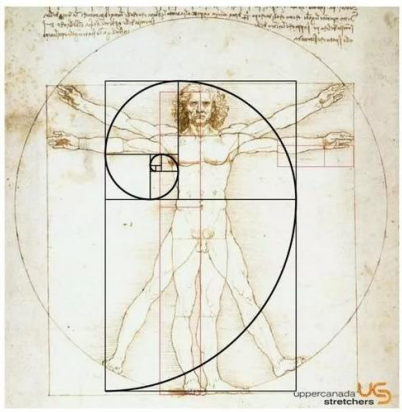
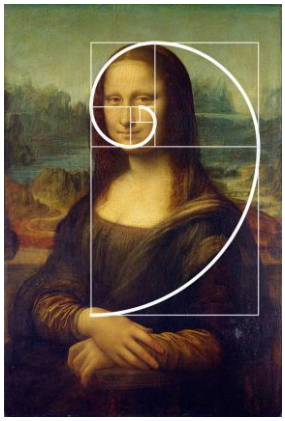




Рис. 1 – Леонардо да Винчи «Витрувианский человек» [6].
Рис. 2 – Леонардо да Винчи «Мона Лиза» [6].

Архитектура также не осталась в стороне. Величественная Пирамида Хеопса, построенная около 2570 года до нашей эры, служит примером применения золотого сечения в архитектурной практике [15]. Статистические исследования показывают, что многие известные здания, такие как Парфенон и работы Ле Корбюзье, также подчиняются этому правилу. Это обосновано тем, что элементы, построенные по данным принципам, неизменно привлекают внимание и вызывают эстетическое наслаждение.

Согласно наблюдениям, натуральные формы тоже имеют своеобразные пропорции, соответствующие золотому сечению. Например, такие природные объекты, как моллюски или раковины, демонстрируют спиральное развитие, соответствующее этим математическим законам. Исследования показывают, что пропорции человеческого тела в своих идеальных формах также близки к золотому сечению. Это ставит вопрос о том, является ли золотая пропорция не только эстетическим, но и биологическим стандартом, определяющим восприятие красоты на инстинктивном уровне.

Важным аспектом является то, что золотая пропорция может помочь художнику при создании произведения. Эстетическое восприятие визуального искусства может быть значительно улучшено, если работать в рамках золотого сечения. Чаще всего это достигается через композиции, отталкиваясь от линий, затмений и других визуальных элементов [15]. Такие методы значительно ультразвуково воздействуют на восприятие картины, создавая ощущение завершенности, гармонии и симметрии.

В мире современного искусства, несмотря на предпочтение экспериментам и новым формам, золотая пропорция все же сохраняет свою значимость. Художники микшируют свои работы, добавляя в творческий процесс элементы этого соотношения, тем самым создавая новую интерпретацию традиционных методов. Информация о том, как правильно применять золотое сечение, зачастую становится центральной на занятиях по искусству, где эта пропорция служит одной из основных тем учебного процесса [8].

Следует отметить, что не только применение, но и сам анализ произведений может быть построенным на статистическом анализе, связываясь с закономерностями, присущими золотому сечению. Сравнение пропорций,

используемых в различных произведениях, может дать художникам дополнительные идеи для их будущих работ. Эта связь между искусством и математикой открывает новые горизонты для изучения не только в построении и композиции, но и в том, как зритель воспринимает визуальную информацию.

Перспектива в изобразительном искусстве служит одним из наиболее значительных средств создания иллюзии глубины и пространства на плоскости. Этот прием был известен еще в античной живописи, но в основном использовался в аспективных изображениях, которые не учитывали окружающее пространство. С развитием живописи возникла необходимость в более сложных техниках, таких как линейная и воздушная перспектива. Линейная перспектива основана на проекциях объемных форм и позволяет достоверно представлять, как объекты одного размера выглядят на различных расстояниях от зрителя, создавая иллюзию трехмерного пространства.

Воздушная перспектива, например, рассматривает влияние атмосферы на восприятие удаленных предметов и может зависеть от плотности и влаги воздуха [13]. Работы художников, таких как И. Шишкин, демонстрируют способность данной техники значительно обогащать визуальный объем картины, так как объекты на переднем плане выглядят ярче и четче, в то время как отдаленные элементы теряют четкость и насыщенность цветовой гаммы. Взгляд на такие картины позволяет зрителю почувствовать пространство по мере перемещения от одного элемента к другому, что углубляет восприятие.

Согласно основным принципам перспективы, существуют различные виды: линейная, воздушная и обратная перспектива. Линейная перспектива часто используется художниками для создания реалистичного изображения, в то время как обратная перспектива, характерная для иконописи и некоторых культовых произведений, переосмысляет стандартное восприятие пространства, зачастую ориентируясь на точку зрения зрителя, которая отражает не просто визуальное, но и эмоциональное состояние [13].

Ключевым элементом линейной перспективы являются линии схода, которые определяют, как перспективные линии объекта могут визуально соединяться в удаленной точке. Приемы построения перспективы включают использование одной, двух или трех точек схода. Правильное выделение этих точек позволяет создавать впечатление глубины и помогает передать пространство более естественно [9]. Например, картина «Дорога в Лувре» Альфреда Сислея является ярким примером того, как перспективное сокращение может усиливать восприятие глубины.

С точки зрения математической статистики, анализ методов художественного представления перспективы демонстрирует, как визуальные эффекты могут быть измерены и количественно описаны. Например, создание алгоритмов, которые моделируют перспективу на компьютерных графиках, предоставляет возможность исследовать пространственные отношения на основе математических моделей. Такие подходы могут значительно расширить понимание художников о том, как различные элементы композиции взаимодействуют друг с другом в пространственной среде.

В свою очередь, использование методов математической статистики в анализе художественных стилей и техник помогает установить закономерности, которые могут использоваться при обучении рисованию и проектировании. Модерн применения перспективы охватывает не только традиционные техники, но и использование новых технологий, включая 3D-моделирование и виртуальную реальность, что позволяет создать еще более насыщенные и вовлекающие пространственные эффекты в искусстве.

Симметрия как принцип в изобразительном искусстве проявляется во множестве форм и направлений. Она обеспечивает организованный и гармоничный облик произведений, так как создает визуальное равновесие и стабильность. Исторически симметрия была важна в архитектуре и живописи, служа символом порядка и красоты. Завораживающие симметрические композиции дают зрителю ощущение завершенности и благополучия, зачастую определяя саму суть произведения.

Симметрия делится на несколько основных типов, включая зеркальную, вращательную и трансляционную. Зеркальная симметрия наиболее распространена в классическом искусстве, где элементы композиции располагаются относительно одной оси. Вращательная симметрия применяется в цветочных орнаментах и различных узорах, создавая динамическое ощущение. Трансляционная симметрия демонстрирует равновесие при перемещении элементов, что может быть замечено в некоторых видах декоративного искусства [4].

Одним из наиболее ярких примеров симметрии в архитектуре можно считать древнегреческие храмы, чьи пропорции и элементы строго соблюдают симметричность. Каждая деталь, будь то колонна или пилястра, настроена так, чтобы создавать целостное и гармоничное восприятие. Это также отмечает важность симметрии в формировании пространственных структур, идеально показанных в таких знаковых сооружениях, как Парфенон [4].

Визуальная симметрия важна не только в статичных объектах, но и в динамичных формах, таких как фигуративная живопись. Существует множество произведений, где симметрия подчеркивает не просто эстетические достоинства, а также эмоциональное содержание картины. Зритель, понимающий законы симметрии, может глубже интерпретировать отношения между изображаемыми элементами, а также контекст произведения [10].

Некоторые художники, такие как Кандинский, использовали симметрию не как простое средство создания равновесия, а как способ выражения внутренних эмоций и философских идей. Их работы созданы с пониманием о том, что симметрия может заставить зрителя ощущать гармонию или, наоборот, диссонанс - в зависимости от расположения и взаимодействия элементов.

Однако важность асимметрии в искусстве также нельзя недооценивать. Асимметричные композиции способны создать впечатление динамики, движения и разнообразия. Нередко асимметрия используется в абстрактной живописи, где элементы располагаются неравномерно, привлекая внимание зрителя и создавая эмоциональное напряжение. Таким образом, асимметрия и симметрия не только

сосуществуют, они тесно переплетаются, создавая богатую палитру художественных выразительных средств.

В современном искусстве подходы к симметрии и асимметрии эволюционируют. Современные художники и архитекторы, порой игнорируя традиционные правила, исследуют новые формы симметрии и асимметрии, чтобы вызвать новые ощущения у зрителя. Это явление приводит к созданию уникальных пространств и объектов, которые бросают вызов классическим представлениям о симметрии как о строгом кодексе гармонии [10].

Взаимодействие симметрии и асимметрии отображает сложность восприятия искусства, его диалектическую природу. Исследование этих элементов в произведениях искусства открывает новые горизонты для понимания эстетики, структуры и философии многих художественных направлений. В итоге, симметрия и асимметрия представляют собой не просто технические элементы композиций, но и важные концепты, позволяющие глубже заглянуть в проблемы восприятия и интерпретации искусства [4].

Числа в изобразительном искусстве представляют собой многослойные символы, которые обогащают произведения смыслом и глубиной. Например, их использование в композиции помогает создавать гармонию и ритм. Применение чисел, таких как 3, 7 и 9, в искусстве подобно их значению в словесности, где каждое число несет не только количественную, но и качественную нагрузку, реализуя свое символическое влияние [5, с. 13-16]. Визуальные произведения, основанные на этих числах, 17195 формируют уникальный эстетический опыт, вызывая у зрителя эмоциональные отклики.

Число 3, как символ единства и завершенности, использовалось многими художниками для создания тройственных композиций, отражая взаимодействие трех основных элементов, таких как пространство, форма и цвет. В творчестве таких мастеров, как Рафаэль и Микеланджело, можно проследить, как эта труднодоступная пропорция оказывала влияние на восприятие изображаемого объекта, создавая визуальную гармонию [3, с. 292-295].

Число 7, во многом рассматриваемое как священное, также находит свое отображение в работах, связанных с религиозной тематикой. Например, в живописи эпохи Ренессанса, где художники акцентируют внимание на семи днях творения, число становится символом божественного порядка. Это число используется не только в содержательном, но и в композиционном аспекте: семиугольные формы и элементы, как правило, легко воспринимаются зрителем и придают произведению дополнительную ауру священности [2, с. 167].

В изобразительном искусстве особое внимание уделяется и числу 9, которое во многих культурах символизирует полноту и завершенность. В композициях часто используют девятиугольные формы, что можно наблюдать в архитектуре, например, в исламском искусстве, где число 9 находит свое выражение в убранствах, подчеркивая изобилие и красоту. Это число устанавливает связь с теми этими концепциями, которые пересекаются с идеями целостности и совершенства, что также может находиться в фокусе анализа математической статистики в искусстве [1, с. 227].

Придавая особое значение числам, художники могут передавать сложные идеи и эмоции, используя нумерологию как одну из основ визуального языка. Например, в графике числа активно применяются для создания симметрии и ритма, что существенно обогащает восприятие зрителя. Элементы, расположенные в определенной последовательности, способствуют эмоциональному воздействию на зрителя, погружая его в атмосферу произведения.

Символика чисел в живописи достигает пиковой точности, если учитывать их историко-культурные контексты. Христианская нумерология, например, усматривает глубину смыслов в каждой численной метафоре, отразившейся в произведениях Средневековой Европы. Каждое произведение не просто отображает визуальные элементы, но и становится носителем культурного и духовного контекста. Такие концепции могут быть изучены через призму математической статистики, позволяя выявить закономерности и связи, которые остались незамеченными.

Одновременно, в области визуального искусства можно наблюдать пересечение чисел и цветовой палитры. Психология цвета играет важную роль в создании эмоциональной атмосферы произведений. Числа оказывают влияние на выбор палитры, их расположение и соотношение. Например, абсолютная симметрия, достигаемая при равномерном распределении цветовых потоков, способствует формированию впечатления гармонии и уравновешенности в глазах зрителя.

**Заключение**

В результате исследования можно отметить, что взаимосвязь между искусством и математикой является многогранной и сложной. Методы математической статистики не только помогают в анализе произведений искусства, но и служат важным инструментом в процессе их создания. Это открывает новые горизонты для исследователей и практиков, позволяя им глубже понять, как математические принципы могут быть применены в художественной практике. Таким образом, работа подчеркивает важность интеграции математических методов в изучение и создание искусства, что может привести к новым открытиям и пониманию в обеих областях. В конечном итоге, искусство и математика, несмотря на их кажущуюся разницу, являются двумя сторонами одной медали, которые вместе создают гармонию и красоту в нашем мире.

## Список источников

1. Бену, Анна Танцующие с волками. Символизм сказок и мифов мира / Анна Бену. - М.: Алгоритм, 2014. - 489 с.

2. Бидерманн Г. «Энциклопедия символов» / Бидерман Г. М., «Просвещение», 2007 – 375 с.

3. Богатырева Ж. В., Зимина Н. Ю. Сказка как феномен культуры. Мир науки, культуры, образования. 2015; 3 (52): с. 293 – 295.

4. Вейль Г. Симметрия. – Изд. 2-е, стер. – М.: Единториал УРСС, 2003.

5. Землевская, В. О. Символика чисел в произведениях русской литературы / В. О. Землевская, С. В. Антонова. — Текст : непосредственный // Юный ученый. — 2021. — № 5 (46). — с. 13-16. — URL: https://moluch.ru/young/archive/46/2503/

6. Золотое сечение в искусстве – формула совершенства [Электронный ресурс] // izokurs.ru — об золотом сечении. Режим доступа к статье: https://izokurs.ru/blog/zolotoe-sechenie-v-iskusstve-formula-sovershenstva/

7. Значение математики в живописи [Электронный ресурс] // school-science.ru — об математической живописи. Режим доступа к статье: https://school-science.ru/4/7/441.

8. Искусство математики: как художники использовали золотое сечение - Дзен [Электронный ресурс] // dzen.ru — об искусстве математики. Режим доступа к статье: https://dzen.ru/a/zk0-ov0wvvha7hpt

9. Как строить перспективу: одна, две и три точки схода [Электронный ресурс] // dtf.ru — об точках схода. Режим доступа к статье: https://dtf.ru/gamedev/1165440-kak-stroit-perspektivu-odna-dve-i-tri-tochki-shoda

10. Згурская М., Лавриненко Н. Архитектурные стили. - М.: «Фолио», 2013.

11. Математики и математические принципы в искусстве: от да Винчи до Кандинского [Электронный ресурс] // www.computerra.ru — об математических принципах. Режим доступа к статье: https://www.computerra.ru/288832/matematiki-i-matematicheskie-printsipy-v-iskusstve-ot-da-vinchi-do-kandinskogo/.

12. Математика и изобразительное искусство — Википедия [Электронный ресурс] // ru.wikipedia.org — об математике. Режим доступа к статье: https://ru.wikipedia.org/wiki/математика_и_изобразительное_искусство.

13. Перспектива. Виды перспективы: где и как их применять. [Электронный ресурс] // jotto8.ru — об перспективе. Режим доступа к статье: https://jotto8.ru/blog/perspektiva-vidy-perspektivy-gde-i-kak-ih-primenjat.

14. Самойлик Г. Леонардо Да Винчи. // Математика. Приложение к газете Первое Сентября. - М., 2003. - с. 7-10.

15. Список работ, выполненных с использованием золотого сечения [Электронный ресурс] // tr-page.yandex.ru — об золотом сечении. Режим доступа к статье: https://tr-page.yandex.ru/translate?lang=en-ru&url

## References

1. Benu, Anna Dancing with wolves. Symbolism of fairy tales and myths of the world / Anna Benu. - M.: Algorithm, 2014. - 489 p.

2. Bidermann G. "Encyclopedia of symbols" / Biderman G. M., "Enlightenment", 2007 – 375 p.

3. Bogatyreva Zh. V., Zimina N. Y. A fairy tale as a cultural phenomenon. The world of science, culture, and education. 2015; 3 (52): pp. 293-295.

4. Weil G. Symmetry. 2nd edition, ster. – M.: The Editorial Office of the URSS, 2003.

5. Zemlevskaya, V. O. Symbolism of numbers in the works of Russian literature / V. O. Zemlevskaya, S. V. Antonova. — Text : direct // Young scientist. — 2021. — № 5 (46). — pp. 13-16. — URL: https://moluch.ru/young/archive/46/2503/.

6. The golden ratio in art – the formula of perfection [Electronic resource] // izokurs.ru — about the golden ratio. Article access mode: https://izokurs.ru/blog/zolotoe-sechenie-v-iskusstve-formula-sovershenstva/.

7. The meaning of mathematics in painting [Electronic resource] // school-science.ru — about mathematical painting. Article access mode: https://school-science.ru/.

8. The art of mathematics: how artists used the golden ratio - Zen [Electronic resource] // dzen.ru — about the art of mathematics. Article access mode: https://dzen.ru/a/zk0-ov0wvvha7hpt.

9. How to build a perspective: one, two and three vanishing points [Electronic resource] // dtf.ru — about the vanishing points. Article access mode: https://dtf.ru/gamedev/1165440-kak-stroit-perspektivu-odna-dve-i-tri-tochki-shoda

10. Zgurskaya M., Lavrinenko N. Architectural styles. M.: "Folio", 2013.

11. Mathematics and mathematical principles in art: from da Vinci to Kandinsky [Electronic resource] // www.computerra.ru — about mathematical principles. Article access mode: https://www.computerra.ru/288832/matematiki-i-matematicheskie-printsipy-v-iskusstve-ot-da-vinchi-do-kandinskogo/.

12. Mathematics and Fine arts — Wikipedia [Electronic resource] // ru.wikipedia.org — about mathematics. Article access mode: https://ru.wikipedia.org/wiki/математика_и_изобразительное_искусство.

13. Perspective. Types of perspective: where and how to apply them. [Electronic resource] // jotto8.ru — about the perspective. Article access mode: https://jotto8.ru/blog/perspektiva-vidy-perspektivy-gde-i-kak-ih-primenjat.

14. The self-image of G. Leonardo Da Vinci. // Mathematics. Appendix to the newspaper The First of September. - M., 2003. - pp. 7-10.

15. List of works performed using the golden section [Electronic resource] // tr-page.yandex.ru — about the golden ratio. Article access mode: https://tr-page.yandex.ru/translate?lang=en-ru&url.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 173-179.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 173-179.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.2

# О ПОДХОДЕ К УПРАВЛЕНИЮ СКОРОСТЬЮ ОБСЛУЖИВАНИЯ В СИСТЕМАХ С РАЗДЕЛЕНИЕМ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ЗАЯВОК

***Анастасия Владимировна Горбунова***[1]✉
[1]*Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия*
[1]*avgorbunova@list.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0002-9183-0426*

***Аннотация.*** *Исследуется система с разделением и параллельным обслуживанием заявок, называемая в литературе также fork-join системой массового обслуживания. Время обслуживания заявок имеет распределение Парето, а входящий поток является пуассоновским. Для рассматриваемой системы построена математическая модель определения оптимальной стоимости ее функционирования, которая базируется на поддержании оптимального баланса между средним временем отклика системы и разумными затратами на необходимые для этого ресурсы. Под ресурсами системы понимается необходимая для поддержания оптимального уровня производительности системы интенсивность или скорость обслуживания на приборах. В модели используется приближенное выражение для оценки математического ожидания случайной величины времени отклика системы, полученное ранее. Стоимость представляет собой функцию, зависящую от коэффициента загрузки системы. Нахождение оптимальной стоимости функционирования фактически сводится к определению минимума полученной функции стоимости. Рассчитанное таким образом значение коэффициента загрузки, в свою очередь, определяет интенсивность или скорость обслуживания, которая и будет являться оптимальной.*

***Ключевые слова:*** *система с разделением и параллельным обслуживанием заявок, оптимальная стоимость, управление.*

Conference paper

# ON THE APPROACH TO SERVICE RATE CONTROL IN FORK-JOIN QUEUEING SYSTEMS

© Горбунова А. В., 2024

***Anastasia Gorbunova***[1]✉
[1] *V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[1]*EmailAuthor1@mail.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0002-9183-0426*

***Abstract.*** *The fork-join queueing system is investigated. The service time of requests has a Pareto distribution, and the input flow is Poisson. For the system under consideration, a mathematical model for determining the optimal cost of its operation is constructed, which is based on maintaining an optimal balance between the average response time of the system and reasonable costs of the resources required for this. The system resources are understood as the intensity or rate of service on servers necessary to maintain the optimal level of system performance. The model uses an approximate expression for estimating the mathematical expectation of the random variable of the system response time, obtained earlier. The cost is a function depending on the system load factor. Finding the optimal cost of operation is actually reduced to determining the minimum of the obtained cost function. The thus calculated value of the load factor, in turn, determines the intensity or rate of service, which will be optimal.*

***Keywords:*** *fork-join queueing system, optimal cost, control.*

## 1. Введение

Рассматривается система с разделением и параллельным обслуживанием заявок, называемая также в англоязычной литературе fork-join системой массового обслуживания (СМО). При поступлении в систему заявка разделяется на фиксированное количество более мелких составляющих, которые также будем называть подзаявками. Каждая из подзаявок попадает в свою подсистему, представляющую собой систему массового обслуживания с бесконечной очередью и единственным прибором. Предполагается, что все приборы системы являются однородными. Заявка считается обслуженной только после обслуживания всех ее подзаявок, поэтому время отклика в такой системе или, что то же самое, время пребывания заявки в системе, определяется максимумом из случайных величин времен пребывания подзаявок в подсистемах.

Анализ описанной системы считается сложным даже для случая экспоненциального распределения времен обслуживания подзаявок, поскольку точное выражение для среднего времени отклика было получено только при разделении заявки ровно на две подзаявки [1]. Для большего количества подзаявок получены аппроксимации с помощью различных методов [1, 2, 3]. Что касается случая, когда распределение

времени обслуживания отлично от экспоненциального, то известны только оценочные выражения различной степени точности [4, 5, 6].

В настоящей работе проводится анализ fork-join СМО с точки зрения управления оптимальным уровнем загрузки системы и, соответственно, скорости обслуживания. Аналогичные постановки задач можно найти в монографии [7], посвященной оптимальному дизайну СМО, в том числе оптимальному выбору скоростей поступления и обслуживания заявок (в предположении, что эти параметры управляемы) для различных систем и сетей массового обслуживания. Подобная модель управления была построена для fork-join системы с экспоненциальным распределением времени обслуживания в [8]. В данной работе исследуется аналогичная система, но с распределением Парето времени обслуживания подзаявок.

## 2. Математическая модель определения оптимальной стоимости функционирования fork-join системы

Анализируется fork-join система с пуассоновским входящим потоком с интенсивностью $\lambda > 0$ и распределением Парето времен обслуживания на $K \geqslant 2$ однородных приборах (в $K$ подсистемах) со скоростью обслуживания $\mu > 0$. Предполагается, что при $\mu = 1$ время обслуживания имеет базовое распределение Парето $F_{Pa}$ случайной величины $\eta$ с $E[\eta] = 1$, а при произвольном $\mu > 0$ распределение случайной величины $\eta/\mu$, т. е. время обслуживания, сокращается в $\mu$ раз по сравнению с базовым случаем. Коэффициент загрузки системы равен $\rho = \lambda/\mu < 1$.

Обозначим стоимость функционирования системы с разделением и параллельным обслуживанием заявок через $S$ и введем функцию $g(\rho)$, которая определяет выражение для среднего времени отклика системы $E[R_K]$ в случае $\mu = 1$, т. е. $g(\rho) = E[R_K]$ при $\mu = 1$. Тогда в общем случае будет справедливо следующее

$$E[R_K] = \frac{1}{\mu} g(\rho).$$

Далее, поскольку стоимость функционирования системы $S$ зависит от среднего времени отклика системы (цену за единицу времени для простоты принимаем за единицу) и стоимости затрат на обслуживание, то можем для нее записать:

$$S = E[R_K] + c \cdot \mu,$$

где $c$ — это цена единицы скорости обслуживания (единицы ресурса). Соответственно, с учетом введенной функции $g(\rho)$ можем переписать

данное выражение следующим образом

$$S = \frac{1}{\mu} g(\rho) + c\frac{\lambda}{\rho} = \frac{1}{\lambda}\left(\rho g(\rho) + \frac{c\lambda^2}{\rho}\right).$$

Пусть $c_1 = c\lambda^2$, тогда

$$S = \frac{1}{\lambda}\left(\rho g(\rho) + \frac{c_1}{\rho}\right). \tag{1}$$

Далее для нахождения оптимального значения уровня загрузки системы определим точку экстремума функции стоимости $S(\rho)$, а именно точку минимума. Для этого находим производную последнего выражения и приравниваем ее к нулю

$$S'_\rho = \frac{1}{\lambda}\left(\rho g'(\rho) + g(\rho) - \frac{c_1}{\rho^2}\right) = 0,$$

откуда получаем уравнение

$$(\rho g'(\rho) + g(\rho))\rho^2 = c_1, \tag{2}$$

решив которое, найдем оптимальное значение загрузки $\rho_0$ и, соответственно, оптимальное значение скорости обслуживания $\mu_0 = \lambda/\rho_0$. Стоит отметить, что поскольку было получено уравнение (2) относительно загрузки $\rho$, то в дальнейшем будем искать только оптимальную загрузку, понимая, что ее можно при необходимости пересчитать в оптимальную скорость обслуживания.

### 3. Анализ fork-join СМО с $K \geqslant 2$ подсистемами типа $M|Pa|1$.

Для решения поставленной задачи необхоимо вывести уравнение для определения оптимального значения коэффициента загрузки системы в общем случае, когда $K \geqslant 2$.

Для математического ожидания времени отклика системы с разделением и параллельным обслуживанием заявок $E[R_K]$ с распределением Парето времени обслуживания в [6] ранее была получена приближенная формула (на области значений параметров $4 \leq \alpha \leq 10$, $2 \leq K \leq 20$)

$$E[R_K] \approx \mu_{Pa} + \sigma_{Pa}(K^{\frac{1}{\alpha}} - 1) \cdot \widetilde{\mu}(\alpha, \rho), \tag{3}$$

где $\mu_{Pa}$ и $\sigma_{Pa}$ — это математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение времени пребывания в подсистемах типа $M|Pa|1$, с явными формулами для которых можно ознакомиться в [6]. Соотношение

для поправочного коэффициента представляет собой следующее выражение:

$$\widetilde{\mu}(\alpha, \rho) = Q_1 + Q_2\alpha + Q_3\rho + Q_4\alpha\rho + Q_5\rho^2 + Q_6\alpha^2, \qquad (4)$$

где коэффициенты $Q_i$, $i = 1, ..., 6$, имеют следующие значения:

$$Q_1 \approx 1.25918, \quad Q_2 \approx 0.36996, \quad Q_3 \approx -1.97400,$$
$$Q_4 \approx -0.28495, \quad Q_5 \approx 1.40841, \quad Q_6 \approx -0.01122.$$

При этом предполагается, что функция распределения времени обслуживания подзаявки имеет вид

$$F_{Pa}(x) = 1 - \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot \frac{1}{x}\right)^{\alpha}, \quad x \geq \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \quad \alpha > 3. \qquad (5)$$

Время обслуживания в этом случае равно единице.

Далее решается задача для данного приближения, в предположении, что формула (3) является точной. Тогда функция $g(\rho)$ из модели (1) будет определяться (3), т. е. $g(\rho) = E[R_K]$. Остается только определить выражение для производной этой функции $g'(\rho)$. В результате получаем уравнение вида

$$\rho^3 g'(\rho) + \rho^2 g(\rho) = c_1, \qquad (6)$$

где выражения для $g(\rho)$ и $g'(\rho)$ определяются уже конкретными формулами, зависящими от параметров $\alpha$, $\rho$ и $K$, а также коэффициентов $Q_i$, $i = 1, ..., 6$.

Полученное уравнение (6) можно решить численно и определить оптимальное значение загрузки $\rho_0$ и, соответственно искомое значение оптимальной интенсивности обслуживания $\mu_0$.

**4. Заключение**

В работе исследуется система с разделением и параллельным обслуживанием заявок с распределением Парето времени обслуживания с точки зрения управления скоростью обслуживания на приборах. Для нахождения оптимального значения скорости обслуживания строится математическая модель для определения стоимости функционирования системы, которая основывается на определении оптимального баланса между средним времени пребывания заявки в системе и стоимостью необходимых для этого ресурсов. В результате получается уравнение, численное решение которого и позволяет определить искомую величину.

## Список источников


1. Nelson R., Tantawi A. N. Approximate analysis of fork/join synchronization in parallel queues // IEEE Transactions on Computers. 1988. Vol. 37. P. 739–743.
2. Varma S., Makowski A. M. Interpolation approximations for symmetric fork-join queues // Performance Evaluation. 1994. Vol. 20. P. 245–265.
3. Thomasian A. Analysis of fork/join and related queueing systems // ACM Computing Surveys (CSUR). 2014. Vol. 47, no 2. P. 17:1–17:71. https://doi.org/10.1145/2628913.
4. Qiu Z., Pérez J. F., Harrison P. G. Beyond the mean in fork-join queues: Efficient approximation for response-time tails // Performance Evaluation. 2015. Vol. 91. P. 99–116. https://doi.org/10.1016/j.peva.2015.06.007.
5. M. Nguyen, S. Alesawi, N. Li, H. Che and H. Jiang, A Black-Box Fork-Join Latency Prediction Model for Data-Intensive Applications, IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. 2020. Vol. 31, No. 9, P. 1983-2000. https://doi.org/10.1109/TPDS.2020.2982137.
6. Gorbunova A. V., Lebedev A. V. Nonlinear Approximation of Characteristics of a Fork-Join Queueing System with Pareto Service as a Model of Parallel Structure of Data Processing // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2023. Vol. 214. P. 409–428. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2023.07.029.
7. *Stidham S.* Optimal design of queueing systems. Boca Raton: CRC Press/Taylor & Francis, 2009. 384 p.
8. Горбунова А.В., Лебедев А.В. Об особенностях управления скоростью обслуживания в системах с разделением и параллельным обслуживанием заявок // Автоматика и телемеханика. 2024, в печати.


## References


1. Nelson R., Tantawi A. N. Approximate analysis of fork/join synchronization in parallel queues // IEEE Transactions on Computers. 1988. Vol. 37. P. 739–743.
2. Varma S., Makowski A. M. Interpolation approximations for symmetric fork-join queues // Performance Evaluation. 1994. Vol. 20. P. 245–265.
3. Thomasian A. Analysis of fork/join and related queueing systems // ACM Computing Surveys (CSUR). 2014. Vol. 47, no 2. P. 17:1–17:71. https://doi.org/10.1145/2628913.

4. Qiu Z., Pérez J. F., Harrison P. G. Beyond the mean in fork-join queues: Efficient approximation for response-time tails // Performance Evaluation. 2015. Vol. 91. P. 99–116. https://doi.org/10.1016/j.peva.2015.06.007.
5. M. Nguyen, S. Alesawi, N. Li, H. Che and H. Jiang, A Black-Box Fork-Join Latency Prediction Model for Data-Intensive Applications, IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. 2020. Vol. 31, No. 9, P. 1983-2000. https://doi.org/10.1109/TPDS.2020.2982137.
6. Gorbunova A. V., Lebedev A. V. Nonlinear Approximation of Characteristics of a Fork-Join Queueing System with Pareto Service as a Model of Parallel Structure of Data Processing // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2023. Vol. 214. P. 409–428. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2023.07.029.
7. *Stidham S.* Optimal design of queueing systems. Boca Raton: CRC Press/Taylor & Francis, 2009. 384 p.
8. Gorbunova A. V., Lebedev A. V. On the Features of Service Rate Control In Fork-Join Queueing System // Automation and Remote Control, in print.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 180-183.
Modern problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 180-183.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.813

# ОБ ИГРЕ «ДО ПЕРВОЙ ОСТАНОВКИ» (ч. 2)

***Сергей Всеволодович Левизов***[1]✉
[1]*Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых, Владимир, Россия*
[1]*levizov@rambler.ru*✉

***Аннотация.*** *Изучается процесс «игры» с подбрасыванием монеты – до момента, когда трижды подряд выпадает одна и та же сторона («герб» или «решётка»).*

***Ключевые слова****: возвратные последовательности, случайная величина, математическое ожидание, дисперсия, дифференцирование функционального ряда.*

Conference paper

# TO THE PROBLEM OF A GAME “UNTIL FIRST STOP” (PART 2)

***Sergey V. Levizov***[1]✉
[1]*Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletov, Vladimir, Russia*
[1]*levizov@rambler.ru*✉

***Abstract.*** *The estimate of a «game» duration with tossing a coin up to tree in a row «landing» on the same edge, is obtained.*

***Keywords:*** *recurrent sequences, mathematical expectation, variance, differentiation of functional series.*

В работе [1] исследовался вопрос о «средней длительности» процесса подбрасывания монеты до момента, пока дважды подряд не «приземлится» на одну ту же сторону. Были получены результаты: математическое ожидание в такой «игре» равно 3, а дисперсия составляет 2.

Теперь рассмотрим ситуацию: монета бросается до тех пор, пока трижды подряд не «приземлится» на одну ту же сторону (назовём этот факт «triple»). Попытаемся рассчитать характеристики дискретной случайной величины X = {количество бросаний, необходимых для завершения такой «игры»}.

Для этого оценим соответствующие вероятности событий:

© Левизов С. В., 2024

$X_n$ = { «triple» впервые возникает после n-го бросания }, n = 1, 2,…

Пусть $P(X_n) = p_n$ , тогда легко вычислить, что $p_1 = p_2 = 0$ , $p_3 = 1/8$ , $p_4 = 1/8$,…

В дальнейшем, обозначая выпадение «герба» или «решётки» соответственно Г и Р, вычислим величину U(n) – количество последовательностей длины n, составленных из этих букв – таких, которые заканчиваются сочетанием «Г, Г, Г» «Р, Р, Р» (до этого не встречавшимся). Тогда $p_n = \frac{U(n)}{2^n}$ (вероятность $p_n$ будет равна величине $\frac{U(n)}{2^n}$ - количество всех «подходящих» последовательностей длины n делится на количество всех возможных последовательностей длины n, составленных из букв «Г» и «Р»).

Легко заметить (выстраивая соответствующие «цепочки» букв «Г» и «Р»), что:

$$U(1)=U(2) = 0,\ U(3) = U(4) = 2,\ U(5)= 4,\ U(6) = 6,\ldots$$

Установим закономерность, которой подчинены величины U(n), связывающую их друг с другом. Для этого заметим, что цепочку длины n, заканчивающуюся (на) «Г,Г,Г» или «Р,Р,Р», можно получить из аналогичной «цепочки» длины (n – 1), дописывая к ней слева букву «Г» или «Р» – так, чтобы слева (т.е. в начале цепочки) не возникала тройка (связка) вида «Г, Г, Г» или «Р, Р, Р». Как это можно сделать? Если цепочка длины n начинается с «Г,Г» или «Р,Р», то к ней дописывается слева соответственно буква «Р» или «Г». Если же цепочка начинается с сочетания «Г, Р» или «Р, Г», то к ней можно дописать слева и «Г», и «Р». Во всех случаях возникает новая подходящая (т.е. заканчивающаяся на три одинаковых буквы) цепочка – уже длины n. Оценим количество таких действий. Обозначим количество подходящих цепочек длины n, начинающихся сочетанием «Г,Г» или «Р,Р», символом $U_2(n)$, а количество подходящих цепочек длины n, начинающихся сочетанием «Г, Р» или «Р,Р» – символом $U_1(n)$ и докажем, что $U_1(n) = U(n– 1)$. Например, при n = 5 имеем:
«Г, Г, Р, Р, Р», «Р, Г, Р, Р, Р», «Г, Р, Г, Г, Г», «Р, Р, Г, Г, Г». Всего U(5) = 4, из этих цепочек две начинаются с двух разных букв, т.е. $U_1(5) = 2 = U(4)$.

Рассчитаем теперь величину $U_1(n)$. Строим цепочку длины n, начинающуюся с разных букв. Для этого необходимо и достаточно дописать слева одну (соответствующую) букву – «Р» или «Г», не совпадающую с начальной к любой цепочке длины (n – 1). Количество таких цепочек равно U(n – 1). Таким образом, действительно, $U_1(n) = U(n– 1)$.

Построим теперь цепочку длины n, начинающуюся с одинаковых букв. Для этого нужно к любой из цепочек длины (n – 1), начинающейся с разных букв, дописать слева букву, совпадающую с первой начальной в цепочке – их количество будет как раз равно $U_1(n – 1)$. Но $U_1(n – 1) = U((n – 1) – 1) = U(n – 2)$ по доказанному выше.. Таким образом, $U_2(k) = U(n – 2)$.

Количество всех подходящих цепочек длины n таково:

$$U(n) = U_1(n) + U_2(n) = U(n – 1) + U(n – 2)$$

Взаимосвязь величин U(n) между собой (для n = 3, 4, 5,…) установлена. Фактически мы имеем возвратную последовательность (типа Фибоначчи), общую формулу для членов которой выведем методом, применявшимся в

[2, с.21-25]. А именно – будем искать U(n) в виде линейной комбинации геометрически прогрессий со знаменателями α и β, которые являются корнями «характеристического» уравнения, соответствующего полученной последовательности :

$(q)^n = (q)^{n-1} + (q)^{n-2} \Rightarrow (q)^2 - q + 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, т.е. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Тогда $U(n) = C_1 (\alpha)^{n-1} + C_2 (\beta)^{n-1}$, где коэффициенты $C_1$ и $C_2$ найдутся из системы

$$\begin{cases} U(2) = C_1\alpha + C_2\beta = 0, \\ U(3) = C_1(\alpha)^2 + C_2(\beta)^2 = 2, \end{cases}$$ ; отсюда $C_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{5}$, $C_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$.

Вычисляем математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = \sum_{n=1}^{\infty}(n \cdot p_n) = \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot \frac{U(n)}{2^n}, \text{ поскольку } p_1 = p_2 = 0.$$

Имеем: $M(X) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(2)^n} \cdot [C_1 \cdot (\alpha)^{n-1} + C_2 \cdot (\beta)^{n-1}] = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n-1}$.

Полученные ряды вида $\sum_{n=2}^{\infty} n(x)^{n-1}$ являются равномерно сходящимися (здесь у нас $|x| = \left|\frac{\alpha}{2}\right| < 1$ или $|x| = \left|\frac{\beta}{2}\right| < 1$), поэтому, применяя операцию дифференцирования ряда, находим сумму

$$\sum_{n=3}^{\infty} n(x)^{n-1} = \left(\sum_{n=3}^{\infty}(x)^n\right)' = \left(\frac{x^3}{1-x}\right)' = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} = \frac{x^2 \cdot (3-2x)}{(1-x)^2}.$$

Соответственно

$$M(X) = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot \frac{(\alpha)^2 \cdot (3-2\alpha)}{(1-\alpha)^2} + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot \frac{(\beta)^2 \cdot (3-2\beta)}{(1-\beta)^2}.$$

Подставляя сюда найденные выше значения $C_1, C_2, \alpha, \beta,$ после упрощений, окончательно получим, что $M(X) = 7.$

Рассчитаем также и дисперсию случайной величины X. Получим следующее:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = M(X^2) - (7)^2 = M(X^2) - 49.$$

При этом $M(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(n)^2 \cdot p_n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 \cdot T(n)}{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{(2^n)} \cdot [C_1 \cdot (\alpha)^{n-1} + C_2 \cdot (\beta)^{n-1}] =$

$$= \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} n^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} n^2 \cdot \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n-1}.$$

Опять получились равномерно сходящиеся ряды типа $\sum_{m=3}^{\infty}(n)^2 \cdot (x)^{n-1}$, где $|x| = \left|\frac{\alpha}{2}\right| < 1$ или $|x| = \left|\frac{\beta}{2}\right| < 1$. Сумму такого ряда вычисляем так :

$$\sum_{m=3}^{\infty}(n)^2 \cdot (x)^{n-1} = \sum_{n=3}^{\infty}((n+1) \cdot n - n) \cdot (x)^{n-1} = \sum_{n=3}^{\infty}(n+1) \cdot n \cdot (x)^{n-1} - \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot (x)^{n-1} =$$

$= (\sum_{n=3}^{\infty}(x)^{n+1})'' - (\sum_{n=3}^{\infty}(x)^{n})' = \left(\frac{x^4}{1-x}\right)'' - \left(\frac{x^3}{1-x}\right)' = (-2+\frac{2}{(1-x)^3}) - (-1+\frac{1}{(1-x)^2}) = \frac{x^3-3x^2+4x}{(1-x)^3}$.

Подставляя сюда поочерёдно значения $x=\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ и $x=\frac{\beta}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$, окончательно имеем, что $M(X^2)=71$.Тогда дисперсия составит величину $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2 = 71-49=22$. Соответственно среднеквадратичное отклонение $\sigma(X)=\sqrt{22}\approx 4{,}69$.

Как видим, по сравнению с [1] – «игра» немного удлиняется.

## Список источников

1. Левизов С.В. Об игре до первого дубля (ч.2). // Современные проблемы физико-матем. наук: материалы IX Всероссийской научно-практ. конференции, г. Орёл : ОГУ им. И.С. Тургенева, 2022.– 901 с. ; С. 215 – 217.

2. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. - М.: Наука. - 1984. - 48 с.

## References

1. Levizov S.V. To the problem of a game until “first double”(part 1) // Modern problems of Physical and Mathematical Sciences. The Materials of IX All-Russia science-pract.conf. Orel : Orel State University named after I.S.Turgenev; 2022. Pp. 215-217. (In Russ.).

2. Markushevich A.I. Recurrent sequencies. – Moscow. : ”Science”. – 1984. - 48 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 184-193.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 184-193.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 532.546

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЁХМЕРНЫХ ЗАДАЧ О ДЕБИТЕ НЕСОВЕРШЕННЫХ СКВАЖИН, РАБОТАЮЩИХ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С НЕСКОЛЬКИМИ ГРАНИЦАМИ СОПРЯЖЕНИЯ

***Алексей Анатольевич Аксюхин*[1]✉**
*[1]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]aksyukhin@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-4778-0716*

***Аннотация.*** *Построена математическая модель трёхмерной фильтрации жидкости к нескольким несовершенным скважинам, работающим в кусочно-однородной среде с несколькими кусочно-гладкими границами смены однородностей грунта. Методом дискретных особенностей проведён численный расчёт характеристик течения, вычислены дебиты скважин.*

***Ключевые слова:*** *математическая модель, трёхмерная фильтрация, метод дискретных особенностей, дебит несовершенной скважины, кусочно-гладкие границы сопряжения.*

Conference paper

# MATHEMATICAL MODELING OF THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS ON THE FLOW RATE OF IMPERFECT WELLS OPERATING IN A PIECEWISE HOMOGENEOUS MEDIUM WITH SEVERAL INTERFACE BOUNDARIES

***Alexey A. Aksyukhin*[1]✉**
*[1]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]aksyukhin@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-4778-0716*

***Abstract.*** *A mathematical model of three-dimensional filtration of liquid to several imperfect wells operating in a piecewise homogeneous medium with several piecewise smooth boundaries of soil homogeneity change is constructed. The flow characteristics are calculated numerically using the discrete singularities method, and well flow rates are found.*

© Аксюхин А. А., 2024

***Keywords:*** *mathematical model, three-dimensional filtration, discrete singularity method, flow rate of an imperfect well, piecewise smooth conjugation boundaries.*

**1. Введение**

Известно, что нефтеносные и водоносные слои грунта являются неоднородными по своей структуре. Их проницаемость может непрерывно меняться от точки к точке, или меняться скачком на границах стыковки пород с различными проницаемостями. Таких границ сопряжения проницаемостей, как правило, несколько. Представляет практический интерес расчёт характеристик фильтрационного течения жидкости к системе скважин, работающих в таких кусочно-однородных слоях, и отыскание их дебитов.

Поставим задачу о работе нескольких несовершенных эксплуатационных скважин (вертикальных, наклонных или горизонтальных), работающих в кусочно-однородной по проницаемости среде, имеющей несколько гладких (или кусочно-гладких) поверхностей скачка проницаемостей, построим численную модель решения задачи для получения картины течения жидкости к системе скважин и рассчитаем дебит каждой скважины.

**1. Постановка задачи**

Рассмотрим стационарную напорную линейную фильтрацию несжимаемой жидкости к несовершенным (по форме вскрытия пласта) скважинам, фильтры которых могут быть наклонены к вертикали под произвольным углом. Область фильтрации $D$ течения жидкости ограничена гладкой (либо кусочно-гладкой) поверхностью питания $\sigma_{\text{П}}$ класса Ляпунова и плоскостью $\sigma_0$. Причём, область $D$ разбивается гладкими (или кусочно-гладкими) поверхностями сопряжения $\sigma_\nu$, $\nu = m-1$ того же класса, что и $\sigma_{\text{П}}$, на $m$ областей, каждая из которых характеризуются коэффициентами проницаемостей $K_\nu(M) = k_\nu K(M)$, $\nu = 1,2,\dots,m$ соответственно ($k_\nu = \text{const}_\nu$, $\nu = 1,2,\dots,m$). Здесь $M(x,y,z)$— точка области $D$. Поверхности $\sigma_\nu$, $\nu = m-1$ и $\sigma_{\text{П}}$ не касаются и не пересекаются между собой, но могут пересекаться с плоскостью $\sigma_0$ (см. рисунок 1).

Течение жидкости в областях $D_\nu$, $\nu = 1,2,\dots,m$ описывают искомые квазипотенциалы скоростей $\varphi_\nu(M)$, которые всюду в областях $D_\nu$, $\nu = 1,2,\dots,m$, за исключением фильтров скважин, удовлетворяют записанным в безразмерных величинах уравнениям:

$$\nabla \cdot [K_\nu(M)\nabla\varphi_\nu(M)] = 0,\ M \in D_\nu,\ \nu = 1,2,\dots,m \qquad (1.1)$$

и условиям сопряжения на границах $\sigma_\nu$ [1, 2]:

$$\varphi_\nu^+(M) = \varphi_{\nu+1}^-(M);\ k_\nu(M)\left(\frac{\partial\varphi_\nu(M)}{\partial n_M}\right)^+ = k_{\nu+1}(M)\left(\frac{\partial\varphi_{\nu+1}(M)}{\partial n_M}\right)^-,\ M \in \sigma_\nu,$$
$$\nu = 1,2,\dots,m-1. \qquad (1.2)$$

Здесь $n_M$ — внешняя нормаль к поверхности $\sigma_\nu$, $\nu = 1,2,\dots,m$-1, а индексы «+» и «–» означают предельные значения соответствующих функций при приближении к $\sigma_\nu$ извне и изнутри соответственно.

На непроницаемой плоскости $\sigma_0$ функции $\varphi_\nu(M)$, $\nu = 1,2,\dots,m$ удовлетворяет условиям непротекания:

$$K_\nu(M)\frac{\partial\varphi_\nu(M)}{\partial n_M}=0,\ M\in\sigma_0,\ \nu=1,2,\dots,m. \qquad (1.3.1)$$

Если же плоскость $\sigma_0$ является границей со свободной жидкостью, то на ней квазипотенциалы $\varphi_\nu(M)$, $\nu=1,2,\dots,m$ будут постоянны (в частности, они могут обращаться в ноль, тогда плоскость $\sigma_0$ можно считать границей области питания скважин). А условия для квазипотенциала на этой границе принимают вид:

$$\varphi_\nu(M)=0,\ \nu=1,2,\dots,m. \qquad (1.3.2)$$

Пусть фильтры всех $s$ скважин целиком расположены в областях $D_\nu$, $\nu=1,2,\dots,m$, а их поверхности $\sigma_{C\eta}$, $\eta=1,2,\dots,s$ не имеют общих точек друг с другом, с поверхностями $\sigma_\nu$, $\nu=1,2,\dots,m$-1 и с плоскостью $\sigma_0$. Модели поверхностей фильтров каждой скважины, условия постоянства давления на них, а также понятия «приведённых дебитов скважин» подробно описаны в исследованиях [2, 3], согласно которым в выбранных точках на фильтрах скважин $\sigma_{C\eta}$, $\eta=1,2,\dots,s$ выполняются условия постоянства давлений:

$$k_\nu\varphi_\nu\left(M_{C\eta}\right)=C_\eta,\ M_{c\eta}\in\sigma_{C\eta},\ \eta=1,2,\dots,s;\ \sigma_{C\eta}\subset D_\nu,\ \nu=1,2,\dots,m. \qquad (1.4)$$

Здесь $C_\eta=\mathrm{const}_\eta$ – известные постоянные, $\eta=1,2,\dots,s$.

На поверхности питания $\sigma_\Pi$ квазипотенциал скорости течения удовлетворяет условию:

$$k_1\varphi_1^-(M)=A(M),\ M\in\sigma_\Pi, \qquad (1.5)$$

где $A(M)$– функция распределения давления на $\sigma_\Pi$.

Декартову систему координат $x,y,z$ выберем так, чтобы плоскость $xOy$ совпадала с плоскостью $\sigma_0$, а ось $Oz$ была направлена в область фильтрации $D$.

Известно также, что в отсутствии границ $\sigma_\nu$, $\nu=1,2,\dots,m$-1 и $\sigma_\Pi$, течение в области $D$ описывает квазипотенциал $\varphi_0(M)$, который является решением уравнения (1.1), удовлетворяет одному из условий (1.3.1), (1.3.2) и содержит искомые дебиты скважин $q_\eta$, $\eta=1,2,\dots,s$:

$$\varphi_0(M)=\sum_{\eta=1}^{s}\varphi_{0\eta}(M)=\sum_{\eta=1}^{s}\frac{q_\eta}{4\pi}\left(\ln\frac{R_{2\eta}+r_{2\eta}}{R_{1\eta}+r_{1\eta}}\pm\ln\frac{\tilde{R}_{2\eta}+\tilde{r}_{2\eta}}{\tilde{R}_{1\eta}+\tilde{r}_{1\eta}}\right),$$

$$\text{где } R_{i\eta}=\sqrt{\rho_{MM_{i\eta}}^2+\left(z_{i\eta}-z_M\right)^2};\ \tilde{R}_{i\eta}=\sqrt{\rho_{MM_{i\eta}}^2+\left(z_{i\eta}+z_M\right)^2}; \qquad (1.6)$$

$$r_{i\eta}=\left(x_{i\eta}-x_M\right)\cos\alpha_\eta+\left(y_{i\eta}-y_M\right)\cos\beta_\eta+\left(z_{i\eta}-z_M\right)\cos\gamma_\eta;$$

$$\tilde{r}_{i\eta}=\left(x_{i\eta}-x_M\right)\cos\alpha_\eta+\left(y_{i\eta}-y_M\right)\cos\beta_\eta+\left(z_{i\eta}+z_M\right)\cos\gamma_\eta;$$

$$\rho_{MM_{i\eta}}=\sqrt{\left(x_{i\eta}-x_M\right)^2+\left(y_{i\eta}-y_M\right)^2};\ i=1,2;\ \eta=1,2,\dots,s,$$

где $q_\eta$ – приведённые дебиты скважин, а через $\cos\alpha_\eta$, $\cos\beta_\eta$, $\cos\gamma_\eta$ обозначены направляющие косинусы отрезков оси фильтров наклонных скважин. В формуле (1.6) для квазипотенциала $\varphi_0(M)$ берётся знак «+», если плоскость $\sigma_0$ непроницаема (функция $\varphi_0(M)$ удовлетворяет условию (1.3.1)), и знак «–», если она является эквипотенциальной поверхностью (функция $\varphi_0(M)$ удовлетворяет условию (1.3.2)).

**2. Сведение задачи о дебитах скважин к системе интегральных уравнений и соотношений**

Поиск решения задачи (1.1)-(1.6) будем вести в виде:

$$\varphi_\nu(M) = \frac{\varphi_0(M) + \Phi_\nu(M)}{k_\nu},$$
$$M \in D_\nu, \nu = 1,2,\dots,m, \qquad (2.1)$$

где $\Phi_\nu(M)$ — квазипотенциалы возмущения, обусловленные наличием границ $\sigma_\nu, \nu = 1,2,\dots,m$-1 и $\sigma_\Pi$. Когда область $D$ содержит бесконечно удалённую точку (например, поверхность $\sigma_\Pi$ области питания отсутствует), квазипотенциалы возмущения $\Phi_\nu(M), \nu = 1,2,\dots,m$, должны затухать в бесконечности [3]:

$$\Phi_\nu(M) \rightrightarrows 0, \text{ при } r_{MN_\nu} \to \infty, \nu = 1,2,\dots,m, \qquad (2.2)$$

где точка $N_\nu \in \sigma_\nu$, а $r_{MN_\nu}$ – расстояние между точками $M$ и $N_\nu$, $\nu = 1,2,\dots,m$-1. Условие (2.2) обеспечивает единственность решения задачи.

Будем моделировать квазипотенциалы возмущения $\Phi_\nu(M)$, $\nu = 1,2,\dots,m$-1 потенциалами двойного слоя, непрерывно распределёнными с плотностями $g_\mu(N)$ и $f(T)$ на поверхностях $\sigma_\mu$, $\mu = 1,2,\dots,m$-1 и $\sigma_\Pi$ соответственно:

$$\Phi_\nu(M) = \sum_{\mu=1}^{m-1} \int_{\sigma_\mu} g_\mu(N)K(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N}d\sigma_\mu + \int_{\sigma_\Pi} f(T)K(T)\frac{\partial F(M,T)}{\partial n_T}d\sigma_\Pi,$$
$$M \in D_\nu, \nu = 1,2,\dots,m;\ N \in \sigma_\mu, \mu = 1,2,\dots,m\text{-}1;\ T \in \sigma_\Pi. \qquad (2.3)$$

Здесь $\vec{n}_N$ и $\vec{n}_T$ — орты положительных нормалей, направленные во внешние к границам $\sigma_\mu$, $\mu = 1,2,\dots,m$-1 и $\sigma_\Pi$ области, $F(M,N)$, $F(M,T)$ — фундаментальные решения уравнения (1.1), имеющие в точках $N$ и $T$ особенности. Функции $F(M,N)$, $F(M,T)$ выбираются таким образом, чтобы на поверхности $\sigma_0$ они удовлетворяли одному из условий (1.3.1), (1.3.2) (т.е. в виде функций Грина).

$$F(M,N) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R_{MN}} \pm \frac{1}{\tilde{R}_{MN}}\right), \qquad N \in \sigma_\mu, \mu = 1,2,\dots m-1,$$
$$\text{где } R_{MN} = \sqrt{\rho_{MN}^2 + (z_M - z_N)^2},\ \tilde{R}_{MN} = \sqrt{\rho_{MN}^2 + (z_M + z_N)^2},$$
$$\rho_{MN} = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}. \qquad (2.4)$$

В выражении (2.4) для функции $F(M,N)$ берётся знак «+», если плоскость $\sigma_0$ непроницаема, а функция $F(M,N)$ удовлетворяет условию (1.3.1)), или знак «–», если $\sigma_0$ является эквипотенциальной поверхностью, а функция $F(M,N)$ удовлетворяет условию (1.3.2)). Вид функции $F(M,T)$, $T \in \sigma_\Pi$ аналогичен (2.4).

В силу свойств потенциалов двойного слоя [4] выбор квазипотенциалов возмущения в виде (2.3) автоматически обеспечивает выполнение условий (2.2).

Известно [4], что предельные значения потенциала двойного слоя на границах $\sigma_\nu, \nu = 1,2,\dots,m$-1 и $\sigma_\Pi$ будут иметь вид:

$$\Phi_\nu^+(M)=\frac{g_\nu(M)}{2}+\sum_{\mu=1}^{m-1}\int\limits_{\sigma_\mu} g_\mu(N)K(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N}d\sigma_\mu+ \tag{2.5.1}$$

$$+\int\limits_{\sigma_\Pi} f(T)K(T)\frac{\partial F(M,T)}{\partial n_T}d\sigma_\Pi,\quad M\in\sigma_\nu,\ \nu=1,2,\dots m-1;$$

$$\Phi_{\nu+1}^-(M)=-\frac{g_{\nu+1}(M)}{2}+\sum_{\mu=1}^{m-1}\int\limits_{\sigma_\mu} g_\mu(N)K(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N}d\sigma_\mu+ \tag{2.5.2}$$

$$+\int\limits_{\sigma_\Pi} f(T)K(T)\frac{\partial F(M,T)}{\partial n_T}d\sigma_\Pi,\quad M\in\sigma_\nu,\ \nu=1,2,\dots m-1;$$

$$\Phi_1^-(M)=-\frac{f(M)}{2}+\sum_{\mu=1}^{m-1}\int\limits_{\sigma_\mu} g_\mu(N)K(N)\frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N}d\sigma_\mu+ \tag{2.5.3}$$

$$+\int\limits_{\sigma_\Pi} f(T)K(T)\frac{\partial F(M,T)}{\partial n_T}d\sigma_\Pi,\quad M\in\sigma_\Pi.$$

Таким образом, для кусочно-однородной среды, $K_1(M)=k_1K(M)$, $K_2(M)=k_2K(M)$, $k_{1,2}=\text{const}_{1,2}$ граничные условия (1.2)-(1.5) с учетом функций (1.6), (2.3)-(2.5.3) приведут к системе $m$ интегральных уравнений и $s$ интегральных соотношений следующего вида:

$$-2\lambda_\nu\sum_{\mu=1}^{m-1}\int\limits_{\sigma_\mu} g_\mu(N)K(N)\frac{\partial\, F(M,N)}{\partial\, n_N}d\sigma_\mu-2\lambda_\nu\int\limits_{\sigma_\Pi} f(T)K(T)\frac{\partial F(M,T)}{\partial n_T}d\sigma_\Pi+$$

$$+g_\nu(M)=2\lambda_\nu\varphi_0(M),\ M\in\sigma_\nu,\lambda_\nu=\frac{k_\nu-k_{\nu+1}}{k_\nu+k_{\nu+1}},\nu=1,2,\dots,m-1; \tag{2.6.1}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m-1}\int\limits_{\sigma_\mu} g_\mu(N)K(N)\frac{\partial\, F(M,N)}{\partial\, n_N}d\sigma_\mu+\int\limits_{\sigma_\Pi} f(T)K(T)\frac{\partial F(M,T)}{\partial n_T}d\sigma_\Pi-$$

$$-\frac{f(M)}{2}=A(M)-\varphi_0(M),\ M\in\sigma_\Pi; \tag{2.6.2}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m-1}\int\limits_{\sigma_\mu} g_\mu(N)K(N)\frac{\partial\, F\left(M_{C_\eta},N\right)}{\partial\, n_N}d\sigma_\mu+\int\limits_{\sigma_\Pi} f(T)K(T)\frac{\partial F\left(M_{C_\eta},T\right)}{\partial n_T}d\sigma_\Pi=$$

$$=C_\eta-\varphi_0\left(M_{C_\eta}\right),\ M_{C_\eta}\in\sigma_{C\eta},\ \eta=1,2,\dots,s. \tag{2.6.3}$$

Здесь $\lambda_\nu=\frac{k_\nu-k_{\nu+1}}{k_\nu+k_{\nu+1}}$ – параметр, характеризующий скачок проницаемостей на границе $\sigma_\nu$, $\nu=1,2,\dots,m-1$, $g_\mu(N)$ и $f(T)$ – искомые плотности распределения потенциалов двойного слоя по поверхностям $\sigma_\mu$ и $\sigma_\Pi$ соответственно, $\mu=1,2,\dots,m-1$. Тогда для нахождения дебитов скважин $q_\eta$, входящих в

функцию $\varphi_0$, необходимо решить систему (2.6.1)-(2.6.3) относительно $g_\mu(N)$, $\mu = 1,2,\dots,m-1$, $f(T)$ и $q_\eta$, $\eta = 1,2,\dots,s$.

**3. Численное решение системы интегральных уравнений и интегральных соотношений**

Систему (2.6.1)-(2.6.3) решим численно, используя метод дискретных особенностей [4]. Для этого, следуя работам [2, 3], уравнения системы (2.6.1)-(2.6.3) перепишем в параметрическом виде. Зададим гладкие поверхности $\sigma_\mu$ и $\sigma_\text{П}$ параметрически: $\vec{r}_{N_\mu} = \vec{r}_{N_\mu}\left(u_{N_\mu}, v_{N_\mu}\right)$, $\vec{r}_T = \vec{r}_T(t_T, \tau_T)$, где $N_\mu \in \sigma_\mu$, $T \in \sigma_\text{П}$, $u_{N_\mu}, v_{N_\mu}, t_T, \tau_T$ – параметры.

Введем обозначения:

$$K(M)\frac{\partial F\left(M, N_\mu\right)}{\partial n_{N_\mu}} d\sigma_{N_\mu} = \Omega\left(u_M, v_M, u_{N_\mu}, v_{N_\mu}\right) du_{N_\mu} dv_{N_\mu},$$

где $\Omega\left(u_M, v_M, u_{N_\mu}, v_{N_\mu}\right)$ — ядро интегральных уравнений (2.6.1)-(2.6.2), имеет вид:

$$\Omega\left(u_M, v_M, u_{N_\mu}, v_{N_\mu}\right) = K(M)\nabla_{N_\mu} F\left(M, N_\mu\right)\cdot \vec{n}_{N_\mu} =$$

$$= K(M)\left(\frac{\partial F\left(M, N_\mu\right)}{\partial x\left(u_{N_\mu}, v_{N_\mu}\right)}\vec{\imath} + \frac{\partial F\left(M, N_\mu\right)}{\partial y\left(u_{N_\mu}, v_{N_\mu}\right)}\vec{\jmath} + \frac{\partial F\left(M, N_\mu\right)}{\partial z\left(u_{N_\mu}, v_{N_\mu}\right)}\vec{k}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\dot{\vec{r}}_{N_\mu,u_\mu}, \dot{\vec{r}}_{N_\mu,v_\mu}\right]\sqrt{\left|\dot{\vec{r}}_{N_\mu,u_\mu}, \dot{\vec{r}}_{N_\mu,v_\mu}\right|^2},$$

где $\dot{\vec{r}}_{N_\mu,u_\mu} = \frac{\partial\, \dot{\vec{r}}_{N_\mu}}{\partial\, u_{N_\mu}}$, $\dot{\vec{r}}_{N_\mu,v_\mu} = \frac{\partial\, \dot{\vec{r}}_{N_\mu}}{\partial\, v_{N_\mu}}$, $d\sigma_{N_\mu} = du_{N_\mu} dv_{N_\mu}$, $\mu = 1,2,\dots,m-1$.

Аналогично, обозначим:

$$K(M)\frac{\partial F(M,T)}{\partial n_T} d\sigma_{\text{П,Т}} = \Omega(t_M, \tau_M, t_T, \tau_T) dt_T d\tau_T.$$

Если поверхности $\sigma_\mu$ и $\sigma_\text{П}$ кусочно-гладкие, то их необходимо параметризовать таким образом, чтобы линии «сшивки» гладких фрагментов этих поверхностей являлись бы координатными линиями (например, для поверхности $\sigma_\mu$ такими линиями будут $u_{N_\mu} = \text{const}$ и $v_{N_\mu} = \text{const}$). Система (2.6.1)-(2.6.3) примет вид:

$$g(u_M, v_M) - 2\lambda_\nu \sum_{\mu=1}^{m-1} \int\limits_{u_{N_\mu}} \int\limits_{v_{N_\mu}} g\left(u_{N_\mu}, v_{N_\mu}\right)\Omega\left(u_M, v_M, u_{N_\mu}, v_{N_\mu}\right) du_{N_\mu} dv_{N_\mu} -$$

$$-2\lambda_\nu \int\limits_{t_T} \int\limits_{\tau_\text{T}} f(t_T, \tau_T)\Omega(u_M, v_M, t_T, \tau_T) dt_T d\tau_T = 2\lambda_\nu \varphi_0(u_M, v_M),$$

$$M(u_M, v_M) \in \sigma_\nu,\ \lambda = \frac{k_\nu - k_{\nu+1}}{k_\nu + k_{\nu+1}},\ \nu = 1,2,\dots,m-1; \qquad (3.1.1)$$

$$f(t_M,\tau_M)-2\sum_{\mu=1}^{m-1}\int\limits_{u_{N_\mu}}\int\limits_{v_{N_\mu}} g\left(u_{N_\mu},v_{N_\mu}\right)\Omega\left(t_M,\tau_M,u_{N_\mu},v_{N_\mu}\right)du_{N_\mu}dv_{N_\mu}-$$

$$-2\int\limits_{t_T}\int\limits_{\tau_T} f(t_T,\tau_T)\Omega(t_M,\tau_M,t_T,\tau_T)dt_Td\tau_T=2\varphi_0(t_M,\tau_M)-2A(t_M,\tau_M),$$

$$M(t_M,\tau_M)\in\sigma_\Pi; \qquad (3.1.2)$$

$$\sum_{\mu=1}^{m-1}\int\limits_{u_{N_\mu}}\int\limits_{v_{N_\mu}} g\left(u_{N_\mu},v_{N_\mu}\right)\Omega\left(M_{C_\eta},u_{N_\mu},v_{N_\mu}\right)du_{N_\mu}dv_{N_\mu}+$$

$$+\int\limits_{t_T}\int\limits_{\tau_T} f(t_T,\tau_T)\Omega\left(M_{C_\eta},t_T,\tau_T\right)dt_Td\tau_T=C_\eta-\varphi_0\left(M_{C_\eta}\right),$$

$$M_{C_\eta}\in\sigma_\eta,\ \eta=1,2,\dots,s. \qquad (3.1.3)$$

Численное решение уравнений системы (3.1.1)-(3.1.3) заключается в замене непрерывных на поверхностях $\sigma_\mu$, $\mu=1,2,\dots,m-1$ и $\sigma_\Pi$ подынтегральных функций совокупностью их значений в дискретных точках этих поверхностей и переходу от интегральных уравнений к системе алгебраических.

Разобьем каждую из поверхностей $\sigma_\mu$ равномерно по параметрам $u_{N_\mu},v_{N_\mu}$ на $n_{1,\mu}\cdot n_{2,\mu}$ точек ($n_{1,\mu}$ – число координатных линий вида $u_{N_\mu}=\text{const}$ с шагом $h_{1,\mu}$, $n_{2,\mu}$ – число линий вида $v_{N_\mu}=\text{const}$ с шагом $h_{2,\mu}$), $\mu=1,2,\dots,m-1$. Аналогично, поверхность $\sigma_\Pi$ представим в виде совокупности $n_3\cdot n_4$ точек с шагом $h_3$ и $h_4$ соответственно. Причем, в случае кусочно-гладких поверхностей $\sigma_\mu$ и $\sigma_\Pi$ их разбиение по параметрам $u_{N_\mu},v_{N_\mu},t_T,\tau_T$ проведём так, чтобы координатные линии $u_{N_\mu}=\text{const}$, $v_{N_\mu}=\text{const}$, $t_T=\text{const}$, $\tau_T=\text{const}$ не совпадали с линиями «сшивки» гладких фрагментов поверхностей, а отстояли от них на половину шага: $h_{1,\mu}/2$, $h_{2,\mu}/2$ и $h_3/2$, $h_4/2$.

Далее, заменив по квадратурным формулам интегралы в системе (3.1.1)-(3.1.3) суммами и положив $du_{N_\mu}\approx h_{1,\mu}$, $dv_{N_\mu}\approx h_{2,\mu}$, $dt_T\approx h_3$, $d\tau_T\approx h_4$, получим систему $(m-1)\cdot n_{1,\mu}\cdot n_{2,\mu}+n_3\cdot n_4+s$ алгебраических уравнений, решение которой будет содержать искомые дебиты скважин $q_\eta$, $\eta=1,\dots,s$.

$$g\left(u_{j_\nu},v_{\ell_\nu}\right)-2\lambda_\nu\sum_{\mu=1}^{m-1}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n_{1,\mu}}\sum_{\substack{i=1\\i\neq\ell}}^{n_{2,\mu}} g\left(u_{k_\mu},v_{i_\mu}\right)\Omega\left(u_{j_\nu},v_{\ell_\nu},u_{k_\mu},v_{i_\mu}\right)h_{1,\mu}h_{2,\mu}-$$

$$-2\lambda_\nu\sum_{p=1}^{n_3}\sum_{q=1}^{n_4} g\left(t_p,\tau_q\right)\Omega\left(u_{j_\nu},v_{\ell_\nu},t_p,\tau_q\right)h_3h_4=2\lambda_\nu\varphi_0\left(u_{j_\nu},v_{\ell_\nu}\right),$$

$$j=1,\dots,n_{1,\nu};\ \ell=1,\dots,n_{2,\nu},\nu=1,2,\dots,m-1\ ; \qquad (3.2.1)$$

$$f(t_j,\tau_\ell)-2\sum_{\mu=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n_{1,\mu}}\sum_{i=1}^{n_{2,\mu}} g\left(u_{k_\mu},v_{i_\mu}\right)\Omega\left(t_j,\tau_\ell,u_{k_\mu},v_{i_\mu}\right)h_{1,\mu}h_{2,\mu}-$$

$$-2\sum_{\substack{p=1\\p\neq j}}^{n_3}\sum_{\substack{q=1\\q\neq \ell}}^{n_4} f(t_p,\tau_q)\Omega(t_j,\tau_\ell,t_p,\tau_q)h_3h_4=2\varphi_0(t_j,\tau_\ell)-2A(t_j,\tau_\ell),$$

$$j=1,\dots,n_3;\ \ell=1,\dots,n_4; \tag{3.2.2}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n_{1,\mu}}\sum_{i=1}^{n_{2,\mu}} g\left(u_{k_\mu},v_{i_\mu}\right)\Omega\left(M_{C_\eta},u_{k_\mu},v_{i_\mu}\right)h_{1,\mu}h_{2,\mu}+$$

$$\sum_{p=1}^{n_3}\sum_{q=1}^{n_4} f(t_p,\tau_q)\Omega\left(M_{C_\eta},t_p,\tau_q\right)h_3h_4=C_\eta-\varphi_0\left(M_{C_\eta}\right),$$

$$M_{c_\eta}\in\sigma_{C_\eta},\eta=1,2,\dots,s. \tag{3.2.3}$$

Решая систему алгебраических уравнений (3.2.1)-(3.2.3), находим неизвестные плотности $g\left(u_{k_\mu},v_{i_\mu}\right)$, $(k=1,\dots,n_{1,\mu},\ \ i=1,\dots,n_{2,\mu},$ $\mu=1,2,\dots,m-1)$, плотность $f(t_j,\tau_\ell)$, $(j=1,\dots,n_3;\ \ell=1,\dots,n_4)$ и искомые дебиты $q_\eta$ $(\eta=1,\dots,s)$.

Скорость течения жидкости $\vec{V}_\nu(M)=k_\nu\nabla_M\varphi_\nu(M)$ к скважине в каждой точке $M\in D_\nu$, $\nu=1,2,\dots,m$ можно рассчитать по формуле:

$$\vec{V}_\nu(M)=\sum_{\mu=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n_{1,\mu}}\sum_{i=1}^{n_{2,\mu}} g\left(u_{k_\mu},v_{i_\mu}\right)\nabla_M\Omega\left(M,u_{k_\mu},v_{i_\mu}\right)h_{1,\mu}h_{2,\mu}+$$

$$+\sum_{p=1}^{n_3}\sum_{q=1}^{n_4} f(t_p,\tau_q)\nabla_M\Omega(M,t_p,\tau_q)h_3h_4+\sum_{\eta=1}^{s}\nabla_M\varphi_{0\eta}(M),\nu=1,\dots,m. \tag{3.3}$$

**4. Заключение**

Таким образом, поставлена задача о работе нескольких несовершенных скважин (в том числе – наклонных), работающих в кусочно-однородной по проницаемости среде, имеющей несколько гладких (кусочно-гладких) поверхностей скачка проницаемостей. Задача сведена к системе интегральных уравнений и соотношений. На основе методы дискретных особенностей построена численная модель решения задачи.

В качестве примера применения построенной модели решения задачи о дебитах несовершенных (вертикальных, наклонных и горизонтальных) скважин, работающих в кусочно-однородных слоях с гладкими (кусочно-гладкими) границами сопряжения и питания, рассмотрим фильтрацию к системе трёх $(s=3)$ скважин, расположенных в различных областях $D_\nu,\nu=1,2,3$ с отличающимися коэффициентами проницаемости $k_1\neq k_2\neq k_3$, фильтры которых имеют одинаковую длину, причём, одна из скважин вертикальная, другая – наклонная, а третья – горизонтальная. Поверхность питания $\sigma_\Pi$ и две поверхности сопряжения $\sigma_\mu$, $\mu=1,2$ будем моделировать сжатыми

эллипсоидами, а плоскую границу $\sigma_0$ будем считать непроницаемой. Расположение границ и фильтров скважин в плоскости $xOz$ показано на рисунке 1.

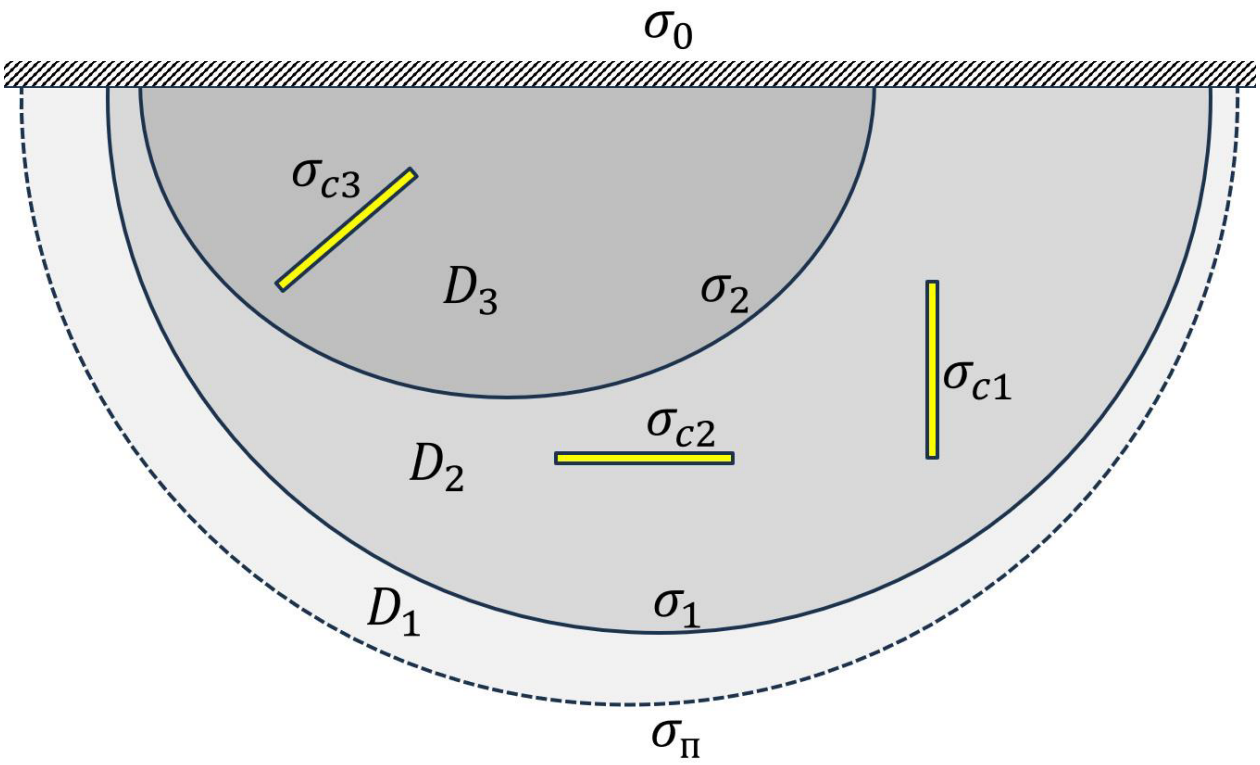



Рисунок 1. – Схема расположения границ сопряжения и питания, а также фильтров скважин в кусочно-однородном фильтрационном слое.

Тогда система выражений (2.6.1)-(2.6.3) будет включать в себя три интегральных уравнения (одно – на границе $\sigma_{\text{П}}$, два – на границах $\sigma_\mu$, $\mu = 1,2$) и три интегральных соотношения на контурах скважин $\sigma_{C_\eta}$, $\eta = 1,2,3$. Этих выражений достаточно для нахождения функций $g_1(N)$, $g_2(N)$, $f(T)$ (плотностей распределения потенциалов двойного слоя по границам сопряжения и питания) и постоянных $q_\eta$, $\eta = 1,2,3$ (дебитов скважин). Отсчёт квазипотенциалов ведётся от поверхности питания (т.е. $A \equiv 0$), а константы на контурах скважин выбираются $C_1 = C_2 = C_3 = 1$. В данной задаче также фигурируют два известных параметра скачка проницаемостей на границах сопряжения:

$$\lambda_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \qquad \lambda_2 = \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3}.$$

Решая поставленную задачу численно по схеме (3.2.1)-(3.2.3), находим таблицы значений функций $g_1(N)$, $g_2(N)$, $f(T)$ и дебиты $q_1$, $q_2$, $q_3$.

Анализ найденного решения показывает, что оно полностью совпадает со своими частными случаями, исследованными в работах [1-3].

## Список источников

1. Аксюхин, А. А. Исследование трехмерной фильтрации жидкости к системе несовершенных наклонных скважин в кусочно-однородной среде с кусочно-гладкой границей сопряжения / А. А. Аксюхин - Современные

проблемы физико-математических наук : материалы IX Всероссийской науч.-практ. конф., (г. Орёл, 24-25 ноября 2023 г.). – Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2023. С. 187-197.

2. Аксюхин, А. А. Решение трёхмерной задачи о дебите скважины в кусочно-однородной среде методом дискретных особенностей / А. А. Аксюхин, В. Ф. Пивень - Труды IX международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» («МДОЗМФ-2000»), посвященного 80-летию со дня рождения профессора С.М. Белоцерковского: 29 мая – 2 июня 2000 г. [Редкол.: Авдеев Ф. С. (отв. ред.) [и др.]. – Орёл: Орловский государственный университет. 2000. С. 19-27.

3. Аксюхин, А. А. Решение трёхмерной фильтрационной задачи о дебите системы наклонных скважин, работающих в неоднородных слоях / А. А. Аксюхин – Праці XII Міждународного симпозіуму «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» («МДОЗМФ-2005»), – Харьків-Херсон: Харьківський національний університет імені. В.Н. Каразіна. 2005. С. 5-8.

4. Лифанов, И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн / И. К. Лифанов. – Москва: ТОО «Янус», 1995. – 519 с.: ил.; 21 см.; ISBN 5-88929-003-7.

## References

1. Aksyukhin A. A. Research on three-dimensional fluid filtration to a system of imperfect inclined wells in a piecewise homogeneous layer with a piecewise smooth conjugate boundary // Proceedings of the IX All-Russian scientific and practical conference “Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences”. Orel: Orel State University named after I.S. Turgenev; 2023. pp. 187-197. (In Russ.).

2. Aksyukhin A. A., Piven V. F. Solution of a three-dimensional problem of well production in a piecewise homogeneous medium using the method of discrete singularities // Proceedings of the IX international symposium “Methods of discrete singularities in problems of mathematical physics”. Orel: Orel State University; 2000. pp. 19-27. (In Russ.).

3. Aksyukhin A. A. Solution of a three-dimensional filtration problem on the flow rate of a system of inclined wells operating in heterogeneous layers // Proceedings of the XII international symposium “Methods of discrete singularities in problems of mathematical physics” (“MDOZMF-2005”). Kherson-Kharkov: V. N. Karazin Kharkiv National University; 2005. pp. 5-8. ISBN 966-623-211-1.

4. Lifanov I. K. Method of singular integral equations and numerical experiment in mathematical physics, aerodynamics, theory of elasticity and wave diffraction. Moscow: Janus LLP, 1995. – 519 p. ISBN 5-88929-003-7. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 194-199.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 194-199.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 532.546

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД В НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ ПРИ НАЛИЧИИ ДРЕНАЖНОЙ СИСТЕМЫ И ПОЛУПРОНИЦАЕМЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

***Виктория Ивановна Дорофеева[1]✉, Дмитрий Юрьевич Дорофеев[2]***
*[1]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[2]НИТУ МИСИС, Москва, Россия*
*[1]vdorofey@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0001-6116-2511*
*[2]mitya.dorofeev@inbox.ru*

***Аннотация.*** *Исследуется процесс оседания уровня грунтовых вод на основе математической модели «поршневого» вытеснения, построенной для случая наличия в неоднородном слое дренажных систем и нескольких полупроницаемых включений произвольной формы с различными коэффициентами проницаемости в области протекания процесса. Приведены примеры процесса оседания грунтовых вод в неоднородном слое при наличии двух стоков и двух включений. Численная реализация выполнена на основе метода дискретных особенностей посредством разработанного программного обеспечения с помощью языка программирования Python и пакетов NumPy, SciPy и SymPy.*

***Ключевые слова:*** *эволюция свободной поверхности, метод дискретных особенностей, неоднородный слой, дренажная система, полупроницаемое включение*

Conference paper

# STUDY OF THE PROCESS OF CHANGING THE GROUNDWATER LEVEL IN HETEROGENEOUS LAYERS IN THE PRESENCE OF A DRAINAGE SYSTEM AND SEMIPERMEABLE INCLUSIONS

***Viktoriya I. Dorofeyeva[1]✉, Dmitrii Yur. Dorofeyev[2]***
*[1]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[2]Research Technological University MISIS, Moskow, Russia,*
*[1]vdorofey@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0001-6116-2511*
*[2]mitya.dorofeev@inbox.ru*

© Дорофеева В. И., Дорофеев Д. Ю., 2024

***Abstract.*** *The process of subsidence of the groundwater level is investigated based on the mathematical model of "piston" displacement, constructed for the case of the presence of drainage systems in a heterogeneous layer and several semi-permeable inclusions of arbitrary shape with different permeability coefficients in the area of the process. Examples of the process of subsidence of groundwater in a heterogeneous layer in the presence of two drains and two inclusions are given. The numerical implementation is based on the discrete singularity method using the developed software using the Python programming language and the NumPy, SciPy and SymPy packages.*

***Keywords:*** *evolution of free surface, method of discrete singularities, heterogeneous layer, drainage system, semipermeable inclusion*

## 1. Введение

В данной работе анализируется задача о совместном движении двух жидкостей в постановке Лейбензона-Маскета (модель “поршневого” вытеснения) в неоднородном слое, причем внешняя жидкость рассматривается как фиктивная; после построения основной системы интегрального и дифференциального уравнений выбирается предельный случай, в котором вязкость и плотность внешней жидкости стремятся к нулю. Данная задача имеет имеет непосредственное прикладной значение [1-3]. Для численного решения основной системы интегрального и дифференциального уравнений применяется метод дискретных особенностей, который дает возможность численно решить задачу с высокой степенью достоверности результата [4-11]. В качестве языка программирования, обеспечивающего высокую скорость и точность решения при работе с большим объемом информации, используется высоко-уровневый язык программирования Python с пакетами NumPy, SciPy и SymPy [12].

## 2. Основной текст статьи

Рассмотрим двумерную задачу об одновременной фильтрации двух жидкостей в пористой среде в постановке Лейбензона-Маскета [6]. В неоднородном изотропном слое грунта проводимости $P(\boldsymbol{x})=K_0(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})$, $K_0(\boldsymbol{x})$-проницаемость грунта, $H(\boldsymbol{x})$ - толщина слоя, рассмотрим область $D$, занятую одной жидкостью с вязкостью и плотностью $\mu_2 = 1$ и $\rho_2 = 1$, окруженную другой с вязкостью и плотностью $\mu_1$ и $\rho_1$. Жидкости разделены резкой гладкой кривой $L_t$. Ее начальное положение $L_0$ известно. Область совместной фильтрации жидкостей может быть ограничена непроницаемой линией $L_I$, разделяющей грунт или непроницаемые породы.

Полагаем, что в области фильтрации имеется два полупроницаемых включения, причем границу, разделяющую среды с различными коэффициентами проницаемости, обозначим через $L_{S_i}, i = 1,2$. Проницаемость пористой среды описывается функцией $K_d(\boldsymbol{x}) = K_d K(\boldsymbol{x}),\ d = 1, 2$, где $K(\boldsymbol{x}) = 1$ во всей области протекания процесса $D$, коэффициент $K_d$ - безразмерная константа, $\boldsymbol{x} = (x, y) \in R^2$. Полагаем, что внутри замкнутого контура $L_{S_1}$проницаемость описывается функцией $K_1(\boldsymbol{x})$, внутри замкнутого контура $L_{S_2}$проницаемость описывается функцией $K_2(\boldsymbol{x})$, вне $L_{S_1} \cup L_{S_2}$ –

функцией $K_0(\boldsymbol{x})$.Границы $L_{S_1}, L_{S_2}$ и $L_t$ входят в область протекания процесса, $L_I$ – непроницаемая граница (Рисунок 1).

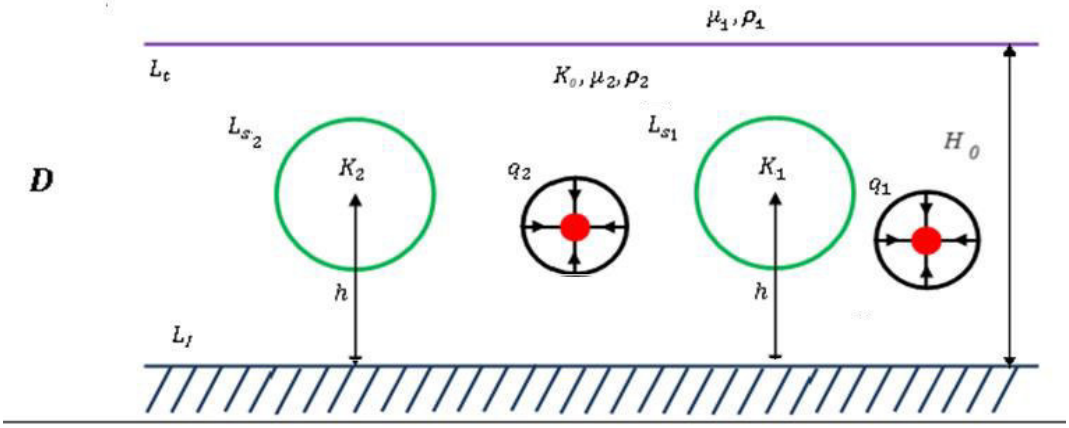



Рисунок 1 – Постановка задачи.

Обозначим $\Omega$ множество всех точек из области $D$, не лежащих на границах $L_{S_i}, i = 1,2$ и $L_t$: $\Omega = D\backslash L_{S_1}\backslash L_{S_2}\backslash L_t$. Каждая из границ $L_i$, где $i = I, S_1, S_2, S_t$ является замкнутой (в том числе и замыкается на бесконечности) и может состоять из нескольких однотипных компонент.

В работах [5-7] показано, что эволюция границы раздела жидкостей с различными вязкостями и плотностями описывается системой интегральных и дифференциального уравнения. Эта система при пренебрежении вязкостью и плотностью внешней жидкости, а именно при $\mu_1 \longrightarrow 0$ и $\rho_1 \longrightarrow 0$, принимает вид:

$$\begin{gathered} g_{S_1}(\boldsymbol{x},t) - 2\lambda_{S_1}\sum_{j=I,S_1,S_2,t} G\left[g_j, L_j\right](\boldsymbol{x},t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in L_{S_1} \\ g_{S_2}(\boldsymbol{x},t) - 2\lambda_{S_2}\sum_{j=I,S_1,S_2,t} G\left[g_j, L_j\right](\boldsymbol{x},t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in L_{S_2} \\ g_t(\boldsymbol{x},t) - 2\lambda_t\sum_{j=I,S_1,S_2,t} G\left[g_j, L_j\right](\boldsymbol{x},t) = 2K_2\alpha\Pi(\boldsymbol{x}) + 2K_1\alpha\Pi(\boldsymbol{x}) + 2\varphi_0 \end{gathered} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \boldsymbol{v_0}(\boldsymbol{x},t) + \sum_{j=S_1,S_2,t,I} \boldsymbol{V}\left[g_j, L_j\right](\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in L_t, \quad (2)$$

где

$\lambda_{S_i} = \frac{K_0 - K_i}{K_0 + K_i}, i = 1,2, x \in L_t, \lambda_t = 1, \alpha = -1, G[g, L] = \int_L g(\boldsymbol{y})\,\Omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dl_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{x} \notin L,$

$\Omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = P(\boldsymbol{y})\frac{\partial \Phi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n_y}}, \quad \boldsymbol{V}[g_i, L_i](\boldsymbol{x}) = \int_{L_i} \frac{\partial g_i(\boldsymbol{y})}{\partial l_{\boldsymbol{y}}} V_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dl_{\boldsymbol{y}}, i = I, S_1, S_2, t,$

$V_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{H(M)}\left(\frac{\partial \Psi_2(M,N)}{\partial y_M}\bar{e}_x - \frac{\partial \Psi_2(M,N)}{\partial x_M}\bar{e}_y\right)$ - скорость вихря с полной циркуляцией, равной -1, $\Psi_2$- функция тока этого вихря, $\bar{e}_x$и $\bar{e}_y$ - единичные орты, таким разом имеем дифференциальное уравнение движения границы $L_t$

Рассмотрим процесс оседания бугра грунтовых вод в неоднородном слое, корень из проводимости которого удовлетворяет метагармоническому уравнению $P(\boldsymbol{x}) = e^{-2\mu x_2}$. Полагаем, что проницаемость грунта $K_0(\boldsymbol{x}) = e^{-2\mu x_2}$ и *H=1*. В основной системе функции $\Phi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ и $\Psi_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ выбираются в виде [8]:

$$\Phi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{K_0(\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)}{2\pi\sqrt{P(\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{y})}} + \frac{K_0(\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)}{2\pi\sqrt{P(\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{y})}},$$

$$\Psi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{\sqrt{P(\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{y})}K_0(\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)}{2\pi} + \frac{\sqrt{P(\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{y})}K_0(\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)}{2\pi},$$

где $K_0(\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)$ есть модифицированная функция Бесселя 2-го рода. В выбранном слое проводимость $P=0$ на оси Oy.

Построим дискретный аналог для основной системы (1) и дифференциального уравнения (2) и получим численной аналог исходной задачи [6,7], а далее проведем вычисления на основе разработанного программного обеспечения с использованием языка программирования Python с пакетами NumPy, SciPy и SymPy [12].

Представим результаты проведенных исследований:

1.Рассмотрим случай когда $H_0 = 1.2$, $q_1 = q_2 = -1.5$, $h=0.4$. На рисунках 2-5 представлены поля скоростей в области протекания процесса в фиксированный момент времени $t$=0 для различных значений $\lambda_{S_1}$, $\lambda_{S_2}$.

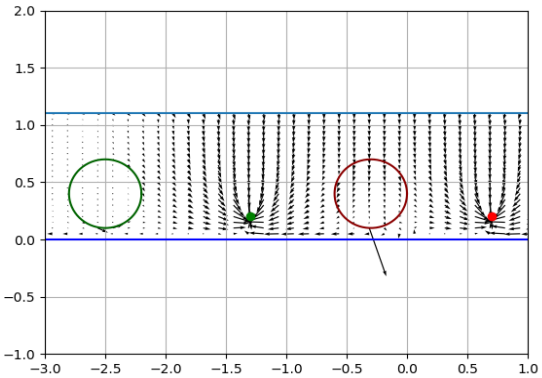


Рисунок 2 – Поле скоростей в неоднородном слое при $t=0$, $n=800$, $\lambda_{S_1} = -0,3$, $\lambda_{S_2} = 0,3$, $q_1 = q_2 = -1.5$, $h=0.4$

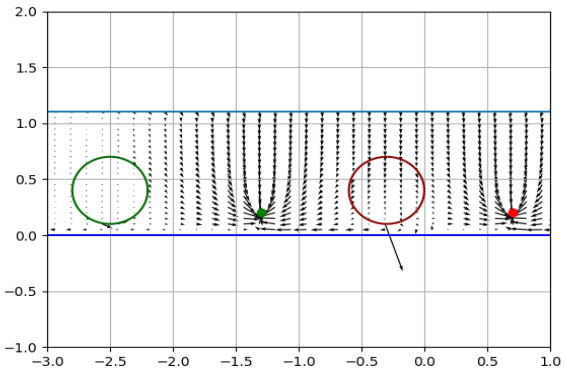


Рисунок 3 – Поле скоростей в неоднородном слое при $t=0$, $n=800$, $\lambda_{S_1} = -0,3$, $\lambda_{S_2} = 0,6$, $q_1 = q_2 = -1.5$, $h=0.4$

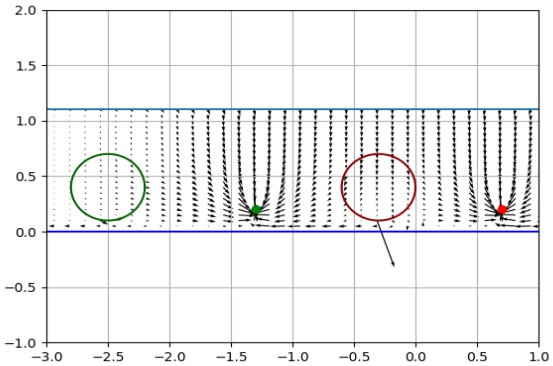


Рисунок 4 – Поле скоростей в неоднородном слое при $t=0$, $n=800$, $\lambda_{S_1} = -0,3$, $\lambda_{S_2} = -0,3$, $q_1 = q_2 = -1.5$, $h=0.4$

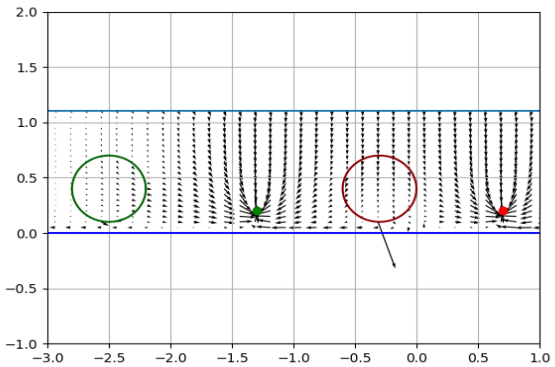


Рисунок 5 – Поле скоростей в неоднородном слое при $t=0$, $n=800$, $\lambda_{S_1} = -0,3$, $\lambda_{S_2} = -0,6$, $q_1 = q_2 = -1.5$, $h=0.4$

Можно заметить, что поле скоростей соответствуют процессу изменения уровня грунтовых вод согласно построенной математической модели.

## 3. Заключение

Можем заметить, что построенная математическая модель достаточно хорошо описывает процесс оседания грунтовых вод под действием силы тяжести в неоднородном слое, нескольких стоков дренажной системы и наличия нескольких полупроницаемых включений. Дальнейшие исследования направлены на анализ поведения линии эволюции.

## Список источников


1. Aysha A., Shoukat A. Modeling of groundwater level changes in an urban area. Sustainable Water Resources Management. 2021.

2. Winter, T.C., J.W. Harvey, O.L. Franke, and W.M. Alley. Ground Water and Surface Water: A Single Resource. USGS Circular 1139. 1998.

3. Ravshanov N., Daliev Sh. J. Phys.: Conf. Ser. 1441 0121634. Shifting paradigms in international investment law : more balanced, less isolated, increasingly diversified / eds. Hindelang S., Krajewski M. Oxford : Oxford University Press, 2015. 432 p.

4. Ivan K. Lifanov Singular Integral Equations and Discrete Vortices. Utrecht, VSP (1996). 475 p.

5. Никольский Д.Н. Вычисление скорости перемещения границы раздела различных жидкостей в неоднородном слое методом дискретных вихревых пар// Математическое моделирование, 2009, 21, №12, с. 122-128.

6. Никольский Д.Н., Дорофеева В.И. Математическое моделирование двумерного процесса изменения уровня грунтовых вод под действием силы тяжести методом дискретных особенностей// Вычислительные методы и программирование, 2011, 12, №1, с. 85-89.

7. Дорофеева, В. И. Исследование процесса оседания бугра грунтовых вод в слоях с различными законами изменения проводимости при наличии дренажной системы / В. И. Дорофеева // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013) : сборник трудов VI международной конференции, Воронеж, 10–16 сентября 2013 года. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2013. – С. 92-94.

8. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. - 644 с.

9. Nikol'skii D.N. Mathematical Simulation of the Evolution of a Liquid-Liquid Interface in Piecewise Inhomogeneous Layers of Complex Geological Structure//Computation Mathemetics and Mathematical Physics, 2013. V.53, No 6. pp. 858-865.

10. Nikol'skii D.N. Three-dimensional evolution of the boundary of a polluted area in a bounded piecewise homogeneous porous material//Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2011, Volume 51, Issue 5, pp. 855-861.

11. Dorofeeva V.I., Nikolsky D.N., Potapova Ek. Ur. "Mathematical Modeling of the Process of Changing the Groundwater Level by the Method of Discrete Features in the Presence of Semi-Permeable Inclusions and a Drainage System," 2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation

and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, Russian Federation, 2022, pp. 152-157, doi: 10.1109/SUMMA57301.2022.9973940.

12. Gaddis, Tony. Starting Out with Python. Pearson Education, 2018.

## References

1. Aysha A., Shoukat A. Modeling of groundwater level changes in an urban area. Sustainable Water Resources Management. 2021.

2. Winter, T.C., J.W. Harvey, O.L. Franke, and W.M. Alley. Ground Water and Surface Water: A Single Resource. USGS Circular 1139. 1998.

3. Ravshanov N., Daliev Sh. J. Phys.: Conf. Ser. 1441 0121634. Shifting paradigms in international investment law : more balanced, less isolated, increasingly diversified / eds. Hindelang S., Krajewski M. Oxford : Oxford University Press, 2015. 432 p.

4. Ivan K. Lifanov Singular Integral Equations and Discrete Vortices. Utrecht, VSP (1996). 475 p.644 c.

5. Nikolsky D.N. Calculation of the velocity of movement of the interface of different liquids in a non-uniform layer using the discrete vortex pair method// Mathematical Modeling, 2009, 21, No. 12, pp. 122-128.

6. D. Nikolskiy and V. Dorofeeva, “Mathematical modeling of the two-dimensional process of changing groundwater levels under gravity by the method of discrete singularities,” Numerical Methods and Programming 12, no. 1 (2011): 85–89

7. Dorofeeva, V. I. Study of the process of subsidence of a groundwater mound in layers with different laws of conductivity change in the presence of a drainage system / V. I. Dorofeeva // Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technologies (PMTUKT-2013): collection of works of the VI international conference, Voronezh, September 10-16, 2013. - Voronezh: Voronezh State University, 2013. - P. 92-94.

8. Polubarinova-Kochina P. Ya. Theory of groundwater movement. Moscow: Science, 1977.-644 p.

9. Nikol'skii D.N. Mathematical Simulation of the Evolution of a Liquid-Liquid Interface in Piecewise Inhomogeneous Layers of Complex Geological Structure//Computation Mathemetics and Mathematical Physics, 2013. V.53, No 6. pp. 858-865.

10. Nikol'skii D.N. Three-dimensional evolution of the boundary of a polluted area in a bounded piecewise homogeneous porous material//Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2011, Volume 51, Issue 5, pp.855-861.

11. Dorofeeva V.I., Nikolsky D.N., Potapova Ek.Ur. "Mathematical Modeling of the Process of Changing the Groundwater Level by the Method of Discrete Features in the Presence of Semi-Permeable Inclusions and a Drainage System," 2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, Russian Federation, 2022, pp. 152-157, doi: 10.1109/SUMMA57301.2022.9973940.

12. Gaddis, Tony. Starting Out with Python. Pearson Education, 2018.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 200-203.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 200-203.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 511

# О СЛУЧАЯХ СОВПАДЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ В ФОРМУЛЕ РИДБЕРГА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

***Пётр Сергеевич Караваев***[1,2]✉
[1]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный, Россия*
[2]*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия*
[1,2]*pskaravaev@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3214-6624*

***Аннотация.*** *Спектральные линии водородоподобных атомов можно вычислить с помощью формулы Ридберга. Однако по длине волны не всегда возможно однозначно определить номера энергетических уровней, между которыми происходит переход электрона. Ранее было получено утверждение об общем виде решений соответствующего уравнения в рациональных числах, в котором возможен один из двух случаев. В статье приводятся аналогичные утверждения об общем виде решений соответствующего уравнения в рациональных числах, в которых случай только один.*

***Ключевые слова:*** *формула Ридберга, спектральные линии, водородоподобный атом.*

Conference paper

# ON THE CASES OF SIMILAR SPECTRAL LINES WITHIN THE RYDBERG FORMULA (CONTINUED)

***Petr S. Karavaev***[1,2]✉
[1]*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*
[2]*National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*
[1,2]*pskaravaev@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3214-6624*

***Abstract.*** *Spectral lines of hydrogen-like chemical elements can be calculated using the Rydberg formula. However, it is not always possible to find certain principal quantum numbers of two energy levels, between which an electron transits. Previously the lemma about the general solution of the corresponding equation in positive rational*

© Караваев П. С., 2024

*numbers was provided. There are two cases in the lemma. In the article there are similar lemmas with only one case.*

***Keywords:*** *Rydberg formula, spectral lines, hydrogen-like atom.*

## 1. Введение

В конце 19 века Йоханнес Ридберг после многолетнего исследования [1] представил формулу, согласующуюся с эмпирическими данными, позволяющую найти спектральные линии водородоподобных атомов:

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

где $R$ — постоянная Ридберга, $Z$ — количество протонов в рассматриваемом атоме, $\lambda$ — длина волны фотона, испускаемого или поглощаемого, при переходе единственного электрона между энергетическими уровнями с номерами $n$ и $m$ (в соответствии с моделью атома Бора-Резерфорда), $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$.

В рамках исследования с математической точки зрения анализируются коллизии спектральных линий: длины волн для переходов электрона с уровня номер $a$ на $b$ и с номер $c$ на $d$ могут в точности совпадать.

Например, подобная коллизия наблюдается в случае

$$a = 6, b = 8, c = 9, d = 72$$

в силу равенства:

$$\frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} = \frac{1}{9^2} - \frac{1}{72^2}.$$

## 2. Основная часть

Изучение случаев совпадения спектральных линий в формуле Ридберга сводится к нахождению нетривиальных ($a \neq c$ и $b \neq d$) решений следующего уравнения в натуральных числах (будем называть это уравнение основным для удобства):

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}.$$

Первоначальные результаты были представлены на IX конференции «Современные проблемы физико-математических наук» [2], где было показано, что количество решений основного уравнения в натуральных числах бесконечно. Позже, в рамках 66-й конференции МФТИ [3] было представлено утверждение об общем виде решений основного уравнения в положительных рациональных числах (утверждение 1).

**Утверждение 1.** Пусть $a, b, c, d$ — положительные рациональные числа, являющиеся решением основного уравнения:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}.$$

Тогда найдутся целые числа $u$ и $v$ такие, что выполняются соотношения в одном из двух случаев:

<u>1 случай:</u> $b = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{d \cdot 2uv - a \cdot (u^2 - v^2)}$ и $c = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{a \cdot 2uv + d \cdot (u^2 - v^2)}$,

<u>2 случай:</u> $b = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{d \cdot (u^2 - v^2) - a \cdot 2uv}$ и $c = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{a \cdot (u^2 - v^2) + d \cdot 2uv}$.

При этом верно и обратное: если эти соотношения (любой из двух случаев) выполнены для некоторых целых чисел $u$ и $v$, то четвёрка рациональных чисел $(a, b, c, d)$ является решением основного уравнения.

**3. Новые результаты**

Было сделано новое продвижение в исследовании решений основного уравнения в рациональных числах. Оказывается, что наличие двух случаев соотношений в утверждении избыточно, на самом деле утверждение верно для одного (любого) случая. Полученный результат можно сформулировать в виде следующих утверждений.

**Утверждение 2.** Пусть $a, b, c, d$ — положительные рациональные числа, являющиеся решением основного уравнения:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}.$$

Тогда найдутся целые числа $u$ и $v$ такие, что выполняются соотношения:

$$b = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{d \cdot 2uv - a \cdot (u^2 - v^2)} \text{ и } c = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{a \cdot 2uv + d \cdot (u^2 - v^2)}.$$

**Доказательство.**

В силу утверждения 1 выполняются соотношения в одном из двух случаев. Если для $a, b, c, d$ выполняется 1 случай соотношений, то утверждение 2 верно. Если для $a, b, c, d$ выполняется 2 случай соотношений, то для некоторых целых чисел $u$ и $v$:

$$b = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{d \cdot (u^2 - v^2) - a \cdot 2uv} \text{ и } c = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{a \cdot (u^2 - v^2) + d \cdot 2uv}.$$

Рассмотрим $\tilde{u} = u + v$ и $\tilde{v} = u - v$. Заметим, что $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ — искомые целые числа, поскольку

$$b = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{d \cdot (u^2 - v^2) - a \cdot 2uv} = (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \cdot \frac{ad}{d \cdot 2\tilde{u}\tilde{v} - a \cdot (\tilde{u}^2 - \tilde{v}^2)}$$

$$c = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{a \cdot (u^2 - v^2) + d \cdot 2uv} = (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \cdot \frac{ad}{a \cdot 2\tilde{u}\tilde{v} + d \cdot (\tilde{u}^2 - \tilde{v}^2)}$$

Что и требовалось доказать. □

**Утверждение 3.** Пусть $a, b, c, d$ — положительные рациональные числа, являющиеся решением основного уравнения:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}.$$

Тогда найдутся целые числа $u$ и $v$ такие, что выполняются соотношения:

$$b = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{d \cdot (u^2 - v^2) - a \cdot 2uv} \text{ и } c = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{a \cdot (u^2 - v^2) + d \cdot 2uv}.$$

**Доказательство.**

В силу утверждения 1 выполняются соотношения в одном из двух случаев. Если для $a, b, c, d$ выполняется 2 случай соотношений, то утверждение 3 верно. Если для $a, b, c, d$ выполняется 1 случай соотношений, то для некоторых целых чисел $u$ и $v$:

$$b = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{d \cdot 2uv - a \cdot (u^2 - v^2)} \text{ и } c = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{a \cdot 2uv + d \cdot (u^2 - v^2)}.$$

Рассмотрим $\tilde{u} = u + v$ и $\tilde{v} = u - v$. Заметим, что $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ — искомые целые числа, поскольку

$$b = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{d \cdot 2uv - a \cdot (u^2 - v^2)} = (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \cdot \frac{ad}{d \cdot (\tilde{u}^2 - \tilde{v}^2) - a \cdot 2\tilde{u}\tilde{v}}$$

$$c = (u^2 + v^2) \cdot \frac{ad}{a \cdot 2uv + d \cdot (u^2 - v^2)} = (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \cdot \frac{ad}{a \cdot (\tilde{u}^2 - \tilde{v}^2) + d \cdot 2\tilde{u}\tilde{v}}$$

Что и требовалось доказать. □

## Список источников


1. Ельяшевич М. А., Кембровская Н. Г., Томильчик Л. М. Ридберг и развитие атомной спектроскопии (К столетию работы Й. Р. Ридберга о закономерностях в атомных спектрах) // Успехи физических наук. 1990. Т. 160. № 12. С. 141–165. DOI: 10.3367/UFNr.0160.199012f.0141

2. Караваев П. С. О случаях совпадения спектральных линий в формуле Ридберга // IX Всероссийская научно-практическая конференция «Современные проблемы физико-математических наук» (г. Орел, 24–25 ноября 2023 г.). — Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2023. С. 205–209.

3. Караваев П. С. Случаи совпадения спектральных линий в формуле Ридберга: решение соответствующего уравнения в рациональных числах // Труды 66-й Всероссийской научной конференции МФТИ, 1–6 апреля 2024 г. Прикладная математика и информатика. — М: Физматкнига, 2024. С. 227–228.


## References


1. El’yashevich M. A., Kembrovskaya N. G., Tomil’chik L. M. Rydberg and the development of atomic spectroscopy (Centennial of J. R. Rydberg’s paper on the laws governing atomic spectra) // Uspekhi Fizicheskikh Nauk. 1990. Vol. 160, no. 12. P. 141–165. https://doi.org/10.3367/UFNr.0160.199012f.0141.

2. Karavaev P. S. On the cases of similar spectral lines within the Rydberg formula // Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences 2023 / materials of the IX All-Russian scientific and practical conference (November 24–25. 2023. Orel). P. 205–209.

3. Cases of similar spectral lines within the Rydberg formula: solving the corresponding equation in rational numbers // 66th MIPT All-Russian Scientific Conference. Applied Mathematics and Informatics. / materials of the 66th All-Russian scientific conference (Dolgoprudny, April 1–6, 2024). P. 227–228.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 204-209.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 204-209.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 561

# ИЗМЕНЕНИЕ 1-НОРМЫ МАТРИЦЫ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РАБОТЫ СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

***Денис Геннадьевич Лекомцев***[1]✉

[1]*Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, Орёл, Россия*

[1]*lekomtcevdg@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/000-0002-5936-3119*

***Аннотация.*** *Добыча нефти и газа из месторождений, расположенных в сложных геологических структурах постоянно увеличивается. Это обусловливает необходимость создания математических моделей, хорошо предсказывающих фильтрацию в таких пористых средах. Проницаемость грунта как пористой среды характеризуется тензором второго ранга, компоненты которого не симметричны. В статье рассмотрена задача о работе скважины в анизотропном пласте грунта в случае произвольного гладкого (кусочно-гладкого) контура питания. Трудность решения поставленной задачи обусловлена сложным видом основного уравнения. Исследование существенно упрощается, если преобразовать уравнение к каноническому виду (уравнению Лапласа). Для этого осуществляется переход на вспомогательную плоскость с использованием гомеоморфных (аффинных) преобразований. В случае произвольного контура питания задача о дебите скважины редуцирована к системе сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши и интегрального соотношения, которая решается численным методом дискретных особенностей. Для решения этой задачи необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений. В работе исследована обусловленность этой системы уравнений. Показано, что для большенства конкретных значений компонентов тензора проницаемости система обусловлена удовлетворительно.*

***Ключевые слова:*** *фильтрация, пласт, скважина, тензор проницаемости, закон Дарси, интегральное уравнение, дебит, математическое моделирование, пористая среда.*

© Лекомцев Д. Г., 2024

Conference paper

# CHANGE IN THE 1-NORM OF THE MATRIX IN THE STUDY OF THE OPERATION OF A PERFECT WELL IN AN ANISOTROPIC MEDIUM BY THE METHOD OF DISCRETE SINGULARITIES

***Denis G. Lekomtcev***[1]✉

[1] *Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*

[1] *lekomtcevdg@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/000-0002-5936-3119*

***Abstract.*** *The extraction of oil and gas reservoirs in complex geological structures is constantly increasing. Thus it is obvious that reliable mathematical models governing such porous media must be of interest. The permeability of the soil is described by asymmetric second-rank tensor. The problem is to work the well in an anisotropic formation of soil in the case of a random smooth (piecewise-smooth) external boundary of reservoir. The solution of the problem is difficult because of the complicated form of the basic equation. The research will be simplified if the equation transforms into the Laplace equation. To do this, turn on the auxiliary plane using homeomorphic (affine) transformation. In the general case, the problem is reduced to a system of integral equations with Cauchy kernel and the integral relation. The results in the general case obtained using the discrete singularities method. To solve this problem, it is necessary to solve a system of linear algebraic equations. The paper investigates the conditionality of this system of equations. It is shown that for most specific values of the permeability tensor components the system is conditioned satisfactorily.*

***Keywords:*** *filtration theory, reservoir, well, permeability tensor, Darcy's law, integral equation, production, mathematical modeling, porous medium.*

## Введение

Задача о фильтрационном течении жидкости к эксплуатационной скважине в анизотропном грунте может быть решена с использованием метода дискретных особенностей. Такой подход требует решения системы алгебраических линейных уравнений (СЛАУ) [1]. Как известно, в общем случае СЛАУ может быть плохо обусловленна. Это обстоятельство формирует дополнительные проблемы при модельном решении задач подобного типа. При изменении компонентов тензора проницаемости число обусловленности $k(A)$ сильно изменяется, что требует учета данного фактора при верификации найденного решения. В работе производится определение числа обусловленности для различных значений компонентов тензора проницаемости и делаются выводы о том, в каких случаях полученное решение может стать неустойчивым.

## 1. Постановка задачи

Для моделирования течения флюида в пористой среде воспользуемся обобщённым потенциалом $\varphi$, он является функцией декартовых координат $(x, y)$. В статье исследуется анизотропная среда с тензором проницаемости $K = (K_{ij})$ $(i, j = 1, 2)$. Рассматривается случай совершенной скважины, т.е. скважины, фильтр которой вскрывает водоносный (нефтеносный) пласт на всю толщину. В литературе показано [1], что в этом случае стационарное двумерное фильтрационное течение к скважине всюду (исключая изолированные особые точки течения) в области фильтрации $D$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot (K \cdot \nabla\varphi) = 0. \tag{1}$$

Данное уравнение относится к эллиптическому типу [1] при условии, что на тензор проницаемости $K$ наложены следующие ограничения

$$K_{11} > 0 \quad (K_{22} > 0), \quad D(K_s) = K_{11}K_{22} - (K_{12} + K_{21})^2/4 > 0,$$

где $D(K_s)$ – определитель симметричной части $K_s = (P + P^T)/2$ тензора $K$, $K^T = (K_{ji})$ – транспонированный тензор. Все рассматриваемые уравнения приведены в безразмерных величинах [0]. Для оценки воздействия компонентов тензора проницаемости $K$ используем коэффициенты $\alpha = K_{22}/K_{11}$, $\beta = K_s/K_{11}$ $(K_s = (K_{12} + K_{21})/2)$.

Нахождение решения уравнения (1) встречает серьезные трудности, для упрощения задачи возможно преобразовать (1) к каноническому виду. Для этого необходимо выполнить переход с физической комплексной плоскости $z = x + iy$ на вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, данные плоскости связаны гомеоморфным (взаимно однозначным и непрерывным) преобразованием [1]

$$\zeta = \zeta(z) \quad \big(\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)\big), \tag{2}$$

Преобразование (2) удовлетворяет уравнению типа Бельтрами [1]. Решение этого уравнения имеет вид $\zeta = z + \mu\overline{z}$ (в данном случае $\mu(z)$ - комплексная постоянная). Плоскости $z$ и $\zeta$ связаны преобразованием [1]

$$x = \frac{(1-a)\xi - b\eta}{1 - |\mu|^2}, \quad x = \frac{(1+a)\eta - b\xi}{1 - |\mu|^2},$$

где $a = \frac{\alpha-1}{\alpha+1+2\sqrt{\alpha-\beta^2}}$, $b = -\frac{2\beta}{\alpha+1+2\sqrt{\alpha-\beta^2}}$, $|\mu|^2 = a^2 + b^2$.

На плоскости $\zeta$ уравнение (1) примет вид

$$\Delta\varphi = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ - оператор Лапласа.

## 2. Исследование устойчивости СЛАУ

Хорошо известно [1, 2], что решая задачу о дебите скажины с гладким или кусочно-гладким контуром питания можно перейти к решению системы интегрального уравнения и интегрального соотношения [1, 2, 3]. Что в свою очередь позволяет свести задачу к решению СЛАУ, состоящей из $n+1$ уравнений:

$$f_j + 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_j \Omega_{ji} \Delta l_j = 2[\alpha'_{\Pi i} - Q\Phi_{Ci}],\ i = \overline{1,n}.$$

Здесь $\Omega_{ij} = -\frac{1}{2\pi}\left[\left(V_\xi \frac{\sqrt{D(K_A)}}{\sqrt{D(K_S)}} - V_\eta\right)\xi'_j(\theta_j) + \left(V_\eta \frac{\sqrt{D(K_A)}}{\sqrt{D(K_S)}} + V_\xi\right)\eta'_j(\theta_j)\right]$,

$V_\xi = \dfrac{\xi_i - \xi_{1j}}{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2}$, $V_\eta = \dfrac{\eta_i - \eta_j}{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2}$,

$D(K_A) = (K_{12} - K_{21})^2/4$.

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \Omega_{*j} \Delta l_j = C + \frac{Q}{2\pi\sqrt{D(K_S)}} \ln\left(R_C\sqrt{1-|\mu_0|^2}\right).$$

Здесь $\Omega_{*j} = -\frac{1}{2\pi}\left[\left(V_\xi \frac{\sqrt{D(K_A)}}{\sqrt{D(K_S)}} - V_\eta\right)\xi'_j(\theta_j) + \left(V_\eta \frac{\sqrt{D(K_A)}}{\sqrt{D(K_S)}} + V_\xi\right)\eta'_j(\theta_j)\right]$,

$V_\xi = \dfrac{\xi_0 - \xi_j}{(\xi_0 - \xi_j)^2 + (\eta_0 - \eta_j)^2}$, $V_\eta = \dfrac{\eta_0 - \eta_j}{(\xi_0 - \xi_j)^2 + (\eta_0 - \eta_j)^2}$.

Конкретная реализация этого численного метода при моделирование частных задач данного типа [4, 5, 6] иногда может встретиться с рядом трудностей. Неустойчивость полученного решения может быть вызвана плохой обусловленостью СЛАУ.

Проверить обусловленность системы можно рассчитав число обусловленности $k(A)$ для квадратной матрицы $A$, состоящей из коэффициентов данной СЛАУ. На рисунке 1 представлена зависимость числа обусловленности матрицы от коэффициентов $\alpha$ и $\beta$. При расчете использовалась 1-норма.

Рисунок 1 наглядно иллюстрирует, что для основной части изученного диапазона коэффициентов $\alpha$ и $\beta$ число обусловленности $k(A) < 100$. Опираясь на данный факт можно предположить, что изучаемая СЛАУ в большей части случаев хорошо обусловлена. Это значит, что полученные решения при большенстве значений $\alpha$ и $\beta$ устойчивы. Также на графике видны асимптоты, которые соответствуют условию $\beta^2 = \alpha$, вытекающему из условия эллиптичности $D(K_S) > 0$ [1] уравнения (1).

**Заключение** В работе исследован вопрос об обусловленности СЛАУ, возникающий при нахождении дебита скважины методом дискредных особенностей. Показано, что для случая анизотропной однородной среды чис-

ло обусловленности матрицы свидетельствует о том, что для большей части рассмотренных [4] значений компонентов тензора проницаемости СЛАУ обусловлена удовлетворительно.

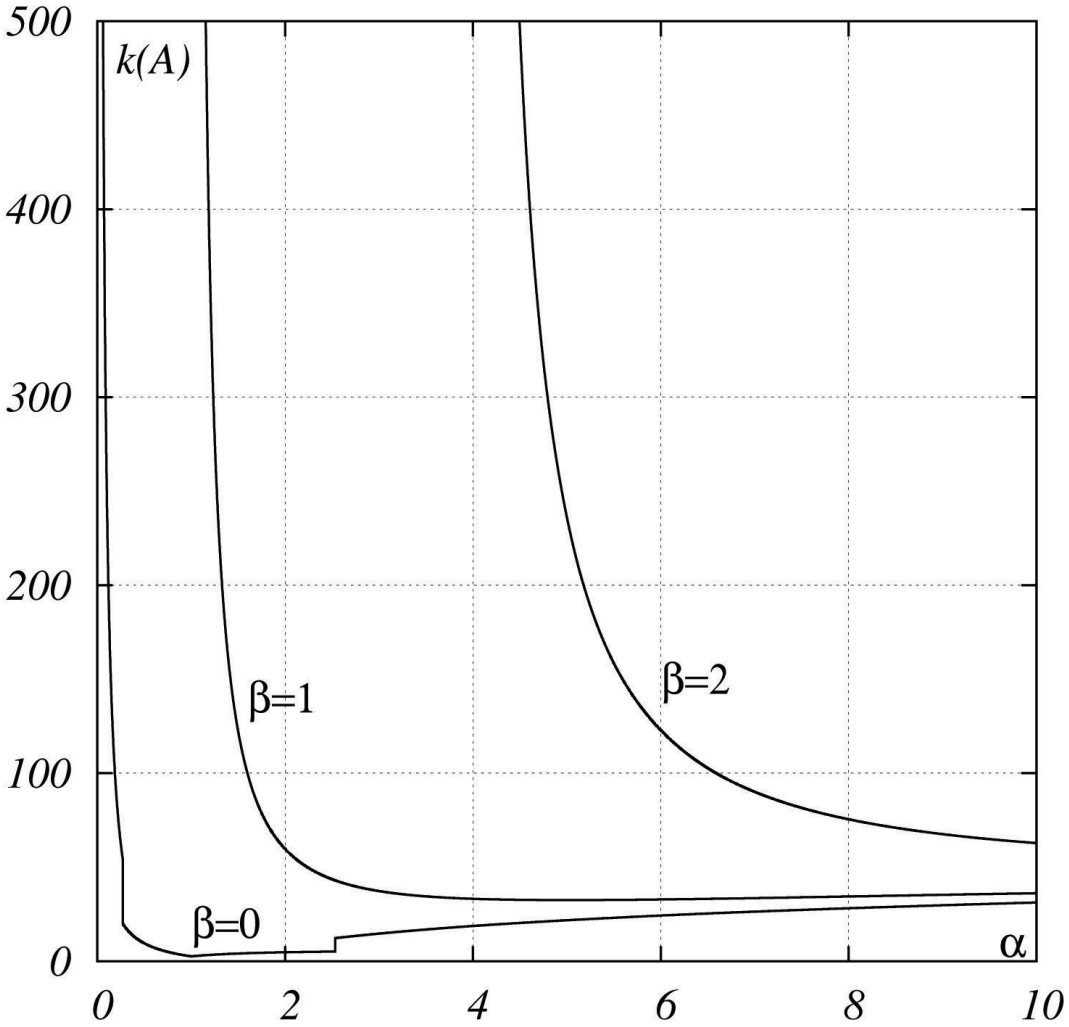



Рисунок 1 — Влияние коэффициентов $\alpha$ и $\beta$ на число обусловленности $k(A)$ матрицы $A$.

## Список источников

1. Математические модели фильтрации жидкости / Пивень В. Ф. Орел: Издательство ФГБОУ ВПО «Орловский гос. университет», 2015. 408 с.

2. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / Лифанов И. К. М.: ТОО Янус, 1995. 520 с.

3. Федяев Ю. С. Математическое моделирование эволюции двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. / Орловский государственный университет. Орел, 2005. 191 с.

4. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г. Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. № 4. С. 389-399. https://journal.permsc.ru/index.php/ccm/article/view/CCMv9n4a32.

5. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г. Математическое моделирование работы скважины в случае двумерной фильтрации в анизотропном и неоднородном пласте // Вычислительные методы и программирование. 2020. № 1. С. 87-95. https://num-meth.ru/index.php/journal/article/view/1056.

6. Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г. Численное исследование работы скважины с произвольным кусочно-гладким контуром питания в анизотропном неоднородном пласте // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. № 2. С. 223-233.
https://journal.permsc.ru/index.php/ccm/article/view/CCMv15n2a8.

## References

1. Matematicheskiye modeli fil'tratsii zhidkosti [Mathematical models of fluid filtration] / Piven V. F. Orel : Orel State University, 2015. 408 p. (In Russ.).

2. Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislennyy eksperiment (v matematicheskoy fizike, aerodinamike, teorii uprugosti i difraktsii voln) [Method of singular integral equations and numerical experiment (in mathematical physics, aerodynamics, theory of elasticity and wave diffraction)] / Lifanov I. K. Moscow : Yanus, 1995. 520 p. (In Russ.).

3. Fedyaev Y. S. Mathematical modeling of the evolution of a two-dimensional interface between liquids of different viscosity in piecewise homogeneous and piecewise inhomogeneous soil layers: Ph.D. in Physics and Mathematic: 05.13.18. – mathematical modeling, numerical methods and software packages. / Orel State University. Orel, 2005. 191 p. (In Russ.).

4. Piven V. F., Lekomtsev D. G. Analytical and numerical modeling of the work of a perfect well in anisotropic homogeneous soil formation. Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred = Computational continuum mechanics. 2016;(3): pp. 389-399.
https://journal.permsc.ru/index.php/ccm/article/view/CCMv9n4a32. (In Russ.).

5. Piven V. F., Lekomtsev D. G. Mathematical Modeling of Well Operation in the Case of Two-Dimensional Filtrationin an Anisotropic Heterogeneous Layer. Vychislitel'nye metody i programmirovanie = Numerical Methods and Programming. 2020;(1): pp. 87-95.
https://num-meth.ru/index.php/journal/article/view/1056. (In Russ.).

6. Piven V. F., Lekomtsev D. G. Numerical modeling of the performance of a well with an arbitrary piecewise-smooth external boundary in an anisotropic heterogeneous reservoir. Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred = Computational continuum mechanics. 2022;(2): pp. 223-233.
https://journal.permsc.ru/index.php/ccm/article/view/CCMv15n2a8 (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 210-212.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 210-212.

Научная статья
УДК 518.9

# ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С СУММАРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

***Бахром Таджиахматович Саматов[1], Наргиза Ташкинбаевна Умаралиева[2]✉***
*[1]Институт математики имени В. И. Романовского, Академии наук Республики Узбекистан*
*[2]Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан*
*[1]samatov57@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-0734-8507*
*[2]umaraliyeva80@gmail.com✉, https://orcid.org/0009-0003-1855-364X*

***Аннотация.*** *В данном исследовании рассматривается дискретная задача преследования с одним преследователем и одним убегающим [1-2]. Два объекта выполняют пошаговые движения с управлениями при суммарных ограничениях. Дискретная задача преследования впервые была изучена Б.Н. Пшеничным [3]. В статье рассматривается задача группового преследования в пространстве* $\mathbb{R}^d$. *Основным инструментом для решения задачи преследования остается стратегия параллельного сближения, или, кратко, П-стратегия [4-5]. Предложена дискретная форма П-стратегии. Согласно предложенному методу, игроки сначала сближаются друг с другом, а затем в конечном итоге совпадают точно.*

***Ключевые слова:*** *дифференциальные игры, суммарное ограничение, преследователь, убегающий, стратегия, преследования, гарантированный шаг поимки*

Conference paper

# A DISCRETE PURSUIT PROBLEM WITH TOTAL CONSTRAINTS ON CONTROLS

***Bahrom T. Samatov[1], Nargiza T. Umaraliyeva[2]✉***
*[1]V.I. Romanovsky Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*
*[2]Namangan state university, Namangan, Uzbekistan*
*[1]samatov57@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-0734-8507*
*[2]umaraliyeva80@gmail.com✉, https://orcid.org/0009-0003-1855-364X*

© Саматов Б. Т., Умаралиева Н. Т., 2024

***Abstract.*** *In this study we consider the discrete pursuit problem with one pursuer and one evader moving step-by-step by controls with total constraints [1-2]. The discrete pursuit problem was first studied by B.N. Pshenichnii [3]. The paper studies the problem of group pursuit in $\mathbb{R}^d$ space. The main tool for solving the pursuit problem remains the parallel approach strategy, or, briefly, the П -strategy [4-5]. A discrete form of the П -strategy is proposed. According to the proposed method, the players first converge toward each other and ultimately coincide exactly.*

***Keywords:*** *differential game, total constraint, pursuer, evader, strategy, pursuit, guaranteed capture step*

## 1. Introduction

In space $\mathbb{R}^d$, two objects perform stepwise movements. Let their movements be described by the following recurrent equations

$$\text{P: } x_n = x_{n-1} + u, \tag{1}$$

$$\text{E: } y_n = y_{n-1} + v, \tag{2}$$

respectively. Here: $x_n$ is the location of position P in space $\mathbb{R}^d$ at step n, n = 1.2 ... ; $y_n$ is the location of position E in space $\mathbb{R}^d$ at step n, n = 1.2 ...; $x_0$ is the initial position of P; $y_0$ is the initial position of E and $y_0 \neq x_0$; $u$ and $v$ are control parameters of the players, which are selected as sequences of constant vectors $u_1, u_2, \dots, u_n$ in $\mathbb{R}^d$, $v_1, v_2, \dots, v_n$ in $\mathbb{R}^d$ and are subjected to the following total constraints

$$\|u\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |u_i|^2} \leq \rho_0, \qquad \rho_0 > 0,$$

$$\|v\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |v_i|^2} \leq \sigma_0, \qquad \sigma_0 > 0.$$

To simplify the solution of the discrete pursuit problem, we introduce new variables $z_n = x_n - y_n$, $z_0 = x_0 - y_0$ for all n = 1,2, ... .

## 2. Solving Discrete Pursuit Problem

**Definition**. We will call the sequence

$$\boldsymbol{U}_n^* = \begin{cases} \boldsymbol{u}_n^* & if \ \ |z_{n-1}| > \eta(v_n), \\ \boldsymbol{u}_n^{**} & if \ \ |z_{n-1}| \leq \eta(v_n), \end{cases}$$

*П* - strategy in the Discrete Pursuit Problem, where

$$\boldsymbol{u}_n^* = v_n - \eta(v_n)\xi_0,$$

$$\boldsymbol{u}_n^{**} = v_n - z_{n-1},$$

$$\eta(v_n) = \max\{0, \delta_0^2/|z_0| + 2\langle v_n, \xi_0 \rangle\},$$

$\xi_0 = z_0/|z_0|$, $\delta_0^2 = \rho_0^2 - \sigma_0^2$, and $\langle v_n, \xi_0 \rangle$ means the inner product of the vectors $v_n$ and $\xi_0$ in $\mathbb{R}^d$, n = 1,2, ... . Further, we will call sequence $\boldsymbol{u}_n^*$ the approach strategy, and sequence $\boldsymbol{u}_n^{**}$the final or finishing strategy.

**Theorem.** Let $\rho_0 > \sigma_0$. Then the pursuer, implementing the *П* - strategy, completes the pursuit no later than in step $N = \left[\left(\frac{|z_0|}{\rho_0 - \sigma_0}\right)^2\right] + 1$.

## 3. Conclusion

As a result of the study, with the following values, $\boldsymbol{v}_n = \left(-\frac{2}{2+n^2}, -1\right)$, $n := 1,2, ...$, solutions were obtained and presented in the form of a table (see. table

1). According to the data in the table, it can be seen that the capture was achieved before the guaranteed capture step at $N = 16$.

Table 1 — The Discrete Pursuit Problem Data Table.

| n | $\|v_n\|$ | $y_{1n}$ | $y_{2n}$ | $\|u_n\|$ | $x_{1n}$ | $x_{2n}$ | $\|z_n\|$ | $\eta(v_n)$ | $\rho_n$ | $\sigma_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 3,000 | 1,000 | | 8,000 | 6,000 | 7,071 | | 3,800 | 2,000 |
| 1 | 1,414 | 2,000 | 0,000 | 1,414 | 7,000 | 5,000 | 7,071 | 0,000 | 3,527 | 1,414 |
| 2 | 0,850 | 1,529 | -0,707 | 0,850 | 6,529 | 4,293 | 7,071 | 0,000 | 3,423 | 1,130 |
| 3 | 0,596 | 1,340 | -1,272 | 0,980 | 6,050 | 3,437 | 6,6603 | 0,411 | 3,280 | 0,961 |
| 4 | 0,488 | 1,253 | -1,753 | 1,110 | 5,486 | 2,481 | 5,987 | 0,674 | 3,086 | 0,827 |
| 5 | 0,416 | 1,207 | -2,166 | 1,180 | 4,856 | 1,483 | 5,160 | 0,826 | 2,851 | 0,715 |
| 6 | 0,359 | 1,180 | -2,524 | 1,227 | 4,169 | 0,465 | 4,227 | 0,933 | 2,574 | 0,619 |
| 7 | 0,310 | 1,164 | -2,833 | 1,263 | 3,435 | -0,563 | 3,211 | 1,016 | 2,242 | 0,536 |
| 8 | 0,268 | 1,154 | -3,101 | 1,293 | 2,658 | -1,596 | 2,128 | 1,083 | 1,832 | 0,464 |
| 9 | 0,232 | 1,147 | -3,333 | 1,317 | 1,846 | -2,633 | 0,989 | 1,139 | 1,274 | 0,402 |
| 10 | 0,201 | 1,142 | -3,534 | 1,338 | 1,142 | -3,534 | 0,000 | 1,186 | 3,800 | 2,000 |

## Список источников


1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. Мир. Москва, 1967.
2. Азамов А.А. Основания теории дискретных игр. Ташкент: Niso Poligraf, 2011.
3. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами, Киберненика,1976. вып. 3, С. 145–146. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01070036.
4. Саматов Б.Т. Задача преследования–убегания при интегрально-геометрических ограничениях на управления преследователя // Автомат. и телемех., 2013, вып. 7, С. 17–28. https://doi.org/10.1134/S0005117913070023.
5. Саматов Б.Т. О задаче преследования-убегания при линейном изменении ресурса преследователя // Матем. тр., 2012, том 15, вып. 2, С. 159–171. https://doi.org/10.3103/S1055134413040056.


## References


1. Isaacs R. Differential games, New York: John Wiley and Sons, 1965.
2. Azamov, A.A. Osnovaniya teorii diskretnikh igr [ Fundamentals of Theory of Discrete Games], Tashkent: Niso Poligraf, 2011, (In Russian).
3. Pshenichnii B.N. Simple pursuit by several objects, Cybernetics and System Analysis, 1976, vol. 12, no. 5, pp. 484–485. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01070036.
4. Samatov B.T. The pursuit-evasion problem under integral-geometric constraints on pursuer controls, Automation and Remote Control, 2013, vol. 74, no. 7, pp. 1072–1081. https://doi.org/10.1134/S0005117913070023.
5. Samatov B.T. On a pursuit-evasion problem under a linear change of the pursuer resource, Siberian Advances in Mathematics, 2012, vol. 15, no. 2, pp. 159–171. https://doi.org/10.3103/S1055134413040056.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 213-218.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 213-218.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91+519.65

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОГНОЗА ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ПУТЁМ РАСЧЁТА ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ПРЕДЕЛА ПРОЧНОСТИ

***Светлана Ивановна Якушина[1]✉, Николай Анатольевич Загородних[2], Виктория Юрьевна Преснецова[3]***
*[1]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[2,3]ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет», Москва, Россия*
*[1]jakushina@rambler.ru✉*
*[2]zagorodnikh@mirea.ru*
*[3]presnetsova@mirea.ru*

***Аннотация:*** *В статье рассматривается математическая модель прогноза прочности композиционного материала с использованием расчета теоретического предела прочности. Композиционные материалы, за счет собственных уникальных механических свойств, применяются в различных сферах промышленности. Для эффективного их использования на практике необходимо заранее прогнозировать поведение данного материала при различных нагрузках. Основной акцент в данной статье уделяется этапам моделирования, а именно: определению исходных параметров компонентов, выбору подходящего критерия разрушения, формулировке системы уравнений, которая описывает механическое поведение материала, а также численному решению задачи с применением методов конечных элементов и Монте-Карло. Приведенная модель дает возможность оценить прочностные характеристики композиционного материала на основе известных параметров матрицы и армирующего элемента, делая потенциальную возможность предсказать поведение данного материала в условиях эксплуатации, а также оптимизировать его состав еще на этапе проектирования.*

***Ключевые слова:*** *композиционный материал, теоретический предел прочности, математическая модель, критерий разрушения, методика конечных элементов, метод Монте-Карло, прогнозирование прочности, процесс армирования.*

© Якушина С. И., Загородних Н. А., Преснецова В. Ю., 2024

Conference paper

# A MATHEMATICAL MODEL FOR PREDICTING THE STRENGTH OF A COMPOSITE MATERIAL BY CALCULATING THE THEORETICAL STRENGTH LIMIT

***Svetlana I. Yakushina[1]✉, Nikolai A. Zagorodnykh[2], Victoria Yu. Presnetsova[3]***
*[1]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[2,3]MIREA-Russian University of Technology, Moscow, Russia*
*[1]jakushina@rambler.ru✉*
*[2]zagorodnikh@mirea.ru*
*[3]presnetsova@mirea.ru*

***Abstract:*** *The article considers a mathematical model for predicting the strength of a composite material using the calculation of the theoretical tensile strength. Composite materials, due to their own unique mechanical properties, are used in various industries. To use them effectively in practice, it is necessary to predict in advance the behavior of this material under various loads. The main focus in this article is on the stages of modeling, namely: determining the initial parameters of the components, choosing a suitable fracture criterion, formulating a system of equations that describes the mechanical behavior of the material, as well as numerically solving the problem using finite element and Monte Carlo methods. The above model makes it possible to evaluate the strength characteristics of a composite material based on the known parameters of the matrix and the reinforcing element, making it possible to predict the behavior of this material under operating conditions, as well as optimize its composition at the design stage.*

***Keywords:*** *composite material, theoretical tensile strength, mathematical model, fracture criterion, finite element method, Monte Carlo method, strength prediction, reinforcement process.*

## Введение

Современное общество в последнее время постоянно сталкивается с необходимостью применения новых материалов, которые бы обладали улучшенными механическими свойствами и легкостью. Композитные материалы обладают высокой прочностью, имея низкую массу, что является приоритетным направлением в следующих областях: авиация, автомобилестроение, строительство. Однако для того, чтобы их наиболее эффективно использовать необходимо обеспечить надежные прогнозы, включающие достоверную информацию об их прочности и долговечности, что является весьма актуальным.

Математические модели позволяют детально производить анализ поведения композитных материалов под влиянием различных нагрузок, в том числе предсказывать их пределы прочности в различных эксплуатационных условиях. В статье будет предпринята разработка математической модели,

позволяющей провести оценку прочностных характеристик композитов, базируясь на теоретическом подходе к расчету предела прочности [2].

Целью данного исследования является создание и верификация модели, которая могла бы учитывать мультифизические свойства композитов, при этом, позволяя оптимизировать их конструкцию и применение.

Актуальность исследования подтверждается существующей необходимостью повышения безопасности, надежности изделий, состоящих из композитных материалов, особенно в критичных промышленных отраслях, где потенциальные неисправности способны привести к серьезным и сложным последствиям.

**Основная часть**

Композиционные материалы (КМ) в последнее время активно используются в разных отраслях промышленности за счет своих уникальных свойств, которые включают: высокую прочность при низкой плотности, устойчивость к процессу коррозии, и в том числе, к механическим нагрузкам. Однако их широкое применение постоянно требует разработки методов оценки прочностных характеристик, которые позволяли бы прогнозировать поведение материала в разных эксплуатационных условиях. К одному из эффективных подходов относится применение математических моделей для расчёта теоретического предела прочности [3].

Теоретический предел прочности (ТПП) определяется как максимальное напряжение, которое материал может выдержать до момента разрушения. Для композиционных материалов теоретический предел прочности может зависеть от свойств как матрицы, так и армирующего элемента, а также от их взаиморасположения, в том числе, ориентации, качества межфазного взаимодействия.

Для расчёта теоретического предела прочности композиционного материала необходимо учитывать [1]:

1. Механические свойства компонентов, а именно: модуль упругости, предел текучести, прочность на разрыв.
2. Объемное содержание компонентов, в том числе, объемная доля армирующего элемента, с матрицей.
3. Направление армирования, наряду с ориентацией волокон.
4. Качество сцепления на границе раздела фаз: матрица - армирующий элемент.

Целью разработки математической модели прогноза прочностных характеристик композиционного материала является возможность предсказания поведения композиционного материала под влиянием и воздействием разных нагрузок, которые могут возникнуть на основе известных свойств его компонентов. В процессе моделирования требуется учитывать физико-механические характеристики как армирующего элемента, также, соответственно и матрицы, в том числе и их объемные доли с геометрическими параметрами.

Основой для математического описания являются уравнения равновесия, совместности деформаций и физические соотношения, к которым относится

также закон Гука для линейно-упругих материалов. Если существуют сложные структуры композиционного материала уравнения можно их дополнить соответствующими соотношениями, которые учитывают анизотропные свойства композита, к примеру, теория слоистых сред. В результате, можно использовать метод микромеханики в целях расчета эффективных модулей упругости композиционного материала. Данный метод базируется на рассмотрении микроструктуры материала, а также расчете его свойств на базе характеристик матрицы с армирующими волокнами. Для наиболее сложных моделей применяется метод гомогенизации, учитывающий неоднородную структуру композита, который позволяет оценить его средние свойства.

Заключительным этапом является численное решение поставленной задачи. Численные методы дают возможность решать сложные уравнения, которые, как правило, описывают поведение композиционных материалов в случае различных нагрузок. К одному из наиболее распространенных методов относится метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий разбить сложную геометрическую структуру материала на небольшие элементы, в пределах которых должны выполняться уравнения механики. Метод конечных элементов позволяет учитывать анизотропию, неоднородность, а также - сложные формы композиционных материалов. Также применяется и метод Монте-Карло, используемый в целях моделирования случайных процессов, а также оценки влияния различных факторов: дефектов или неравномерности распределения армирующих волокон, соответственно на прочностные характеристики материала. Метод ориентирован на многократном случайном выборе параметров и последующем статистическом анализе результатов, и учитывает вероятностные характеристики разрушения материалов. Численные методы дают возможность оценить не только теоретический предел прочности, но, также, и его распределение в процессе варьирования параметров компонентов, что актуально для анализа надежности, а также безопасности конструкций из композитов [3].

Математическая модель расчёта ТПП включает следующее:

Для разработки модели применяется классический подход теории упругости и механики разрушения.

Пусть $\sigma_m$ и $\sigma_f$ - прочностные характеристики матрицы и армирующего элемента соответственно,

$V_m$ и $V_f$ – их объемные доли. Тогда теоретический предел прочности композиционного материала $\sigma_c$ можно выразить:

$$\sigma_c = V_f * \sigma_f + V_m * \sigma_m * \phi \quad (1)$$

где $\phi$ - коэффициент взаимодействия фаз, который учитывает качество сцепления компонентов и определяется эмпирически.

Рассмотрим уравнения для различных типов армирования

1. Для одноосного армирования (волокнистый композит)

$$\sigma_c = \eta_f * V_f * \sigma_f + \eta_m * V_m * \sigma_m \quad (2)$$

где $\eta_f$ $и$ $\eta_m$ - коэффициенты усилений для армирующего элемента и матрицы соответственно.

2. Двуосное армирование

$$\sigma_c = \left( \frac{1}{\eta f * \sigma f} + \frac{1}{\eta m * \sigma m} \right)^{-1} \quad (3)$$

3. Многоосное армирование в случае изотропного армирования

$$\sigma_c = \sigma_m * (1 + \lambda * V_f) \quad (4)$$

где $\lambda$ - эмпирический коэффициент усиления, который зависит от типа армирования и соотношения прочностных характеристик матрицы и армирующего элемента.

Рассмотрим пример расчета теоретического предела прочности для углепластика на основе эпоксидной матрицы, которая армирована углеродными волокнами:

$\sigma_f$ = 4000 МПа – прочность волокна;

$\sigma_m$ = 70 МПа – прочность матрицы;

$V_f$ = 0,6 – объемная доля волокна;

$V_m$ = 0,4 – объемная доля матрицы;

$\eta_f$ = 0,9; $\eta_m$ = 0,8.

Подставим значения в формулу для одноосного армирования

$$\sigma_c = 0{,}9*0{,}6*4000+0{,}8*0{,}4*70=2160 + 22{,}4 = 2182{,}4 \text{ МПа} \quad (5)$$

Полученное значение теоретического предела прочности можно использовать в перспективе для дальнейшего анализа и проверки экспериментальными методами.

**Выводы**

Разработанная математическая модель дает возможность прогнозировать прочностные характеристики композиционного материала, с учетом свойств его компонентов, а также условий армирования. Модель может применяться при проектировании и оптимизации, в том числе для анализа, в процессе поведения в различных условиях эксплуатации.

Возможные направления дальнейших исследований могут включать следующие направления:

- Разработку наиболее точных эмпирических зависимостей для различных типов армирования.

- С учетом влияния температурных и влажностных факторов и их влияние на прочностные характеристики.

- Моделирование нелинейного поведения, а также разрушения композиционных материалов с применением методов машинного обучения и искусственного интеллекта.

Математическая модель прогноза прочности композиционного материала – это важный инструмент для инженеров и исследователей, позволяющий проводить быстрый и детально точный анализ материалов без необходимости проведения значительного количества экспериментальных испытаний, что, в свою очередь, может существенно снизить затраты, и ускорить процесс разработки новых высокопрочных материалов.

**Заключение**

В результате исследования была разработана математическая модель для

прогноза прочностных характеристик композиционных материалов на базе расчета теоретического предела прочности. Проведенное исследование дало понять, что использование математического моделирования позволяет наиболее эффективно оценивать прочностные характеристики композиционных материалов без необходимости проведения дорогостоящих, трудоемких экспериментальных испытаний на каждом этапе разработки. Использование на практике предложенного подхода может значительно сократить время и ресурсы, затрачиваемые на проектирование и оптимизацию состава композита.

Результаты численного моделирования показали, что теоретический предел прочности композиционного материала можно наиболее точно предсказать на основе уже известных свойств компонентов, а также, их объемного содержания. При этом значительное влияние на прочностные характеристики оказывает качество сцепления матрицы с армирующим элементом, что, в свою очередь, необходимо учитывать при разработке и производстве композитов. Улучшение адгезионных свойств на границе раздела фаз, также может существенно повысить прочностные характеристики материала.

Таким образом, предложенная математическая модель представляет собой мощный инструмент для прогнозирования прочности композиционных материалов. Данную математическую модель можно использовать как на этапе разработки новых композитов, так и при их оптимизации для конкретных условий эксплуатации. Перспективы дальнейших исследований заключаются в расширении модели для учета нелинейных и пластических деформаций, а также в разработке более точных критериев разрушения, учитывающих особенности микроструктуры композиционных материалов, что обеспечит наиболее точное и надежное прогнозирование поведения композиционных материалов в широком диапазоне эксплуатационных условий, повышая их надежность и безопасность при использовании в разных конструкциях.

## Список источников

1. Климов, В.В. Композитные материалы: Учебное пособие. М.: Машиностроение, 2002.

2. Пономарев, А.Л. Математическое моделирование механических свойств композиционных материалов. Журнал прикладной механики, 2019.

3. Jones, R.M. Mechanics of Composite Materials. McGraw-Hill, 1975.

## References

1. Klimov, V.V. Composite materials: Textbook. M.: Mechanical Engineering, 2002.

2. Ponomarev, A.L. Mathematical modeling of mechanical properties of composite materials. Journal of Applied Mechanics, 2019.

3. Jones, R.M. Mechanics of Composite Materials. McGraw-Hill, 1975.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 219-223.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 219-223.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 53:37.016

# ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СПЛАВОВ СИСТЕМ $Er_xSn_{1-x}Se$

***Джахангир Ислам оглы Гусейнов[1], Хатыря Агакарим кызы Адгезалова[2], Октай Маил оглы Гасанов[3]✉***
*[1,2,3]Азербайджанский государственный педагогический университет, Баку, Азербайджан*
*[1]cahangir.adpu@mail.ru, [2]xatirafizik@mail.ru*
*[3]1959oktay@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-4888-7686*

***Аннотация.*** *Исследование электрофизические свойства и теплопроводность твердых растворов $Er_xSn_{1-x}Se$ 0,0≤x≤2,5ат%. Установлено, что при замещении олова на эрбий часть двукратно-заряженных центров вакансии олова комбинируются эрбиями и при концентрации ≈0,4ат% Er изменяется знак р на n-типа проводимость. Оценены энергии активации носителей заряда и определено ширина запрещенных зон в сплаве систем $Er_xSn_{1-x}Se$. Выявлен механизм рассеяния, который в T=77-350K преимущественно происходит на ионах заряженных центров и с повышением температуры заметно усиливается механизм рассеяния на акустических фононах.*

***Ключевые слова:*** *электропроводность, термо э.д.с., теплопроводность, олово, эрбий, редкоземельные металлы.*

Conference paper

# ELECTROPHYSICAL PROPERTIES AND THERMAL CONDUCTIVITY OF ALLOYS OF $Er_xSn_{1-x}Se$ SYSTEMS

***Jahangir Is. Huseynov[1], Khatyrya A. Adgezalova[2], Oktay M. Hasanov[3]✉***
*[1,2,3]Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan*
*[1]cahangir.adpu@mail.ru, [2]xatirafizik@mail.ru*
*[3]1959oktay@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-4888-7686*

© Гусейнов Д. И. о., Адгезалова Х. А. к., Гасанов О. М. о., 2024

***Abstract.*** *Study of the electrical properties and thermal conductivity of solid solutions $Er_xSn_{1-x}Se$ 0.0≤x≤2.5 at%. It has been established that when tin is replaced by erbium, part of the doubly charged tin vacancy centers are combined with erbium and at a concentration of ≈0.4 at% Er the sign of p changes to n-type conductivity. The activation energies of charge carriers are estimated and the band gaps in the alloy of $Er_xSn_{1-x}Se$ systems are determined. A scattering mechanism has been identified, which at T = 77-350K predominantly occurs on ions of charged centers and with increasing temperature the scattering mechanism on acoustic phonons noticeably increases.*

***Keywords:*** *electrical conductivity, thermal emf, thermal conductivity, tin, erbium, rare earth metals.*

Имеется много литературных данных о синтезе и физико-химических свойствах твердых растворов и соединений на основе монохалькогенидов с участием редкоземельных элементов, особенно на основе *SnSe*. Селенид олова *SnSe* представляет собой одностороннюю фазу с избытком халькогена (селена) против стехиометрии, а потому обладает *p*-типом проводимости. В то же время сообщается о том, что преобладающими дефектами в кристаллах *SnSe* служат дважды ионизированные вакансии олова. Представляет интерес нашей работы, изучение влияния на дефекты и электрофизические свойства твердых растворов $Er_xSn_{1-x}Se$ при замещении олова на трехвалентный редкоземельный металл (*Er*). Ведь редкоземельные металлы, в частности трехвалентный эрбий, по своим специфическим свойствам электрически активен и можно предположить, что с помощью этого металл возможно регулировать концентрацию дефектов, а также выявить природу и механизм преобразования дефектности.

В настоящей работе исследована электропроводность, термо э.д.с., коэффициент Холла, теплопроводность и вычислена концентрация и подвижность носителей заряда в зависимости от содержания эрбия в твердом растворе $Er_xSn_{1-x}Se$ (0,0≤x≤2,5ат%). Исследования проведены и проанализированы в интервале температур Т=77÷750К. Образцы получали прямым сплавлением исходных компонентов в вакуумированных кварцевых ампулах. Исходными компонентами служили особо чистые составляющие сплавов. Гомогенизирующий отжиг полученных однофазных образцов проводили в среде спектрально чистого аргона при 800К в течении пяти суток. Составы синтезированных образцов отвечали значениям x=0,00; 0,10; 0,05; 1,00; 1,50; 2,5ат% *Er*. Исследованные образцы имели *p* и *n*-тип проводимости. Из слитков кристалла на электроискровой установке вырезали образцы размерами 2x4x16 мм$^3$. Термо э.д.с. и теплопроводность измеряли стационарным методом по методике, описанной в [1], электропроводность и коэффициент Холла измеряли при постоянном токе и постоянном магнитном поле электромагнита [2].

Погрешность измерения термо э.д.с. и теплопроводность составляла менее 6,5%, а коэффициент Холла и электропроводности 2,7%.

Замена атомов олова атомами эрбия в различных концентрациях изменяет энергетический спектр электронов в *SnSe*, создавая глубокие и резонансные состояния [3] и искажают кристаллическую решетку твердых растворов. В

твердом растворе $Er_xSn_{1-x}Se$ с ростом концентрации *Er* параметры кристаллической решетки, сохраняя орторомбическую структуру постепенно возрастает. Наблюдаемые изменения параметров кристаллической решетки исследуемых образцов $Er_xSn_{1-x}Se$ можно связать с различными ионными замещаемых ($Er^{3+}$- 1,18Å) и замещающих ($Sn^{2+}$- *1,02Å)* атомов, распределяющихся статически в октаэдрических пустотах в подрешётку, то есть в твердых растворах происходит не только замещение атома *Sn* атомами *Er*, а также частичное заполнение двухкратно заряженных вакантных центров оловом.

С ростом концентрации эрбия значение коэффициента термо э.д.с., электропроводность и концентрация носителей заряда резко уменьшается и при x≥0,4ат% меняет знак с *p* на *n*-типа проводимости. При дальнейшем росте содержания *Er,* в твердых растворах $Er_xSn_{1-x}Se$ у *n*-тип проводимости наблюдается постепенное возрастание электропроводимости и концентрации носителей заряда.

Экспериментальные данные теплопроводности и энергии активации носителей заряда вычислены по температурной зависимости электропроводности для исследуемых образцов. С ростом *Er* энергия активации носителей заряда постепенно уменьшается от 0,28 эВ до 0,051 эВ. Теплопроводность в твердых растворах с ростом эрбия сначала при малых концентрациях (0,0≤x≤0,05) уменьшается на 23%, при дальнейшем увеличении содержания *Er*, значения теплопроводности возрастает до $16{,}0\cdot10^{-3}$ *Вт/см•К* (на 12,5%). В исследованных образцах электронная часть теплопроводность очень мала и не превышает 0,067% от общей теплопроводности образцов. Изменение теплопроводности с ростом эрбия в твердых растворах, и изменения знака с *p* на *n*-типа проводимости, также изменения термо э.д.с и электропроводности дают основания считать, что исследуемые составы имеют компенсированные полупроводниковые материалы.

Анализ показывает, что ростом процентного содержания *Er* в составе ширина запрещенной зоны уменьшается, а теплопроводность увеличивается. При малых концентрациях *Er* (до 0,5ат%) уменьшение теплопроводности связано с энгармонизмом фононных потоков, которые возникают между дополнительно рассеивающим центром и дефектами. С ростом концентрации эрбия за счет рекомбинации части вакантных мест энгармонизм фононных потоков ослабляется и теплопроводность образцов увеличивается.

Из температурных зависимостей электропроводности и коэффициента Холла определены холловская подвижность носителей заряда образцов и установлено, что в интервале температур T=77-350K холловская подвижность изменяется по закону $T^{1,27}$, а T>350K по $T^{0,75}$. Такое изменение холловской подвижности даёт основание предположить, что до температур T≤350K механизм рассеяния носителей заряда происходит в основном на заряженных ионных центрах, а выше (T>350K) заметно усиливается механизм рассеяния и на акустических фононах.

**Выводы**

1. Выявлено, что полученные твердые растворы на основе $Er_xSn_{1-x}Se$ являются компенсированными полупроводниковыми материалами со

смешанными типами проводимости. При x=0,4ат% *Er* изменяет знак *p* на *n*-типа проводимости.

2. В твердых растворах $Er_xSn_{1-x}Se$ при замещении атома *Sn* атомов *Er* происходит частичное рекомбинация двухкратно заряженных вакантных центров олова и одновременно атомы эрбия играют роль очистителей.

## Список источников


1. Френы Д.М., Бойрук В.К., Межиловская Л.И., Неорганические материалы, 2004, т. 40, №10, – С. 1171-1176.

2. Павлов Л.П., Методы измерения параметров полупроводниковых материалов, М., Высшая школа, 1987.

3. Алиев О. Новые неорганические материалы, Азерб. РП. Баку, 1992.

4. Гасанов О.М., Алиев А.А., Мамедова Р.Ф., Джафаров Т.А. Электрофизические свойства твердых растворов $(SnSe)_{1-x}(ErSe)_x$ / IV Всероссийская научно-практическая конференция «Современные проблемы физико-математических наук», 22-25 ноября, 2018, г. Орёл, Россия. – С. 151-157.

5. Гасанов О.М., Дашдемиров А.О., Гусейнов Дж.И., Аскеров Д.Ж. Компенсирующие действия примеси празедиума на проводимости твердых растворов на основе SnSe. Сборник трудов международной конференции «Аморфные и микрокристаллические полупроводники» 19-21 ноября 2018, г. Санкт-Петербург, Россия. – С. 118-119.

6. Гасанов О.М., Адгезалова Х.А., Гусейнов Дж.И. Перспективные материалы для изготовления приемников теплового излучения на основе твердых растворов $(SnSe)_{1-x}(Er_2Se_3)_x$, Международная научно-практическая конференция «Экологическая, промышленная и энергетическая безопасность – 2018», 23–26 сентября 2019 года, г. Севастополь, Россия. – С. 429-433.

7. Гасанов О.М., Адгезалова Х.А., Гусейнов Д.И. Процессы теплопереноса в твердых растворах $(SnSe)_{1-x}$-$(LnSe)_x$. Журнал «Инновационные научные исследования», выпуск №1-2(3), январь 2021, г. Уфа. – С. 14-24.

8. Гасанов О.М., Адгезалова Х.А., Гусейнов Д.И. Коэффициент холла и электропроводность в монокристаллах $(SnS)_{1-x}(LnS)_x$ / Innovative scientific research Proceedings of the XIII International Scientific and Practical Conference 26-27 September 2024 Toronto. Canada, 2024. – С. 505-509.


## References


1. Freny D.M., Boyruk V.K., Mezhilovskaya L.I., Inorganic materials, 2004, v. 40, no. 10, pp. 1171-1176.

2. Pavlov L.P., Methods for measuring parameters of semiconductor materials, M., Higher School, 1987.

3. Aliyev O. New inorganic materials, Azerbaijan. RP. Baku, 1992.

4. Gasanov O.M., Aliev A.A., Mamedova R.F., Jafarov T.A. Electrophysical properties of solid solutions $(SnSe)_{1-x}(ErSe)_x$ / IV All-Russian scientific and practical

conference “Modern problems of physical and mathematical sciences”, November 22-25, 2018, Orel, Russia. pp. 151-157.

5. Gasanov O.M., Dashdemirov A.O., Guseinov J.I., Askerov D.Zh. Compensating effects of prazedium impurities on the conductivity of SnSe-based solid solutions Collection of proceedings of the international conference “Amorphous and microcrystalline semiconductors” November 19-21, 2018, St. Petersburg, Russia. pp. 118-119.

6. Gasanov O.M., Adgezalova Kh.A., Guseinov J.I. Promising materials for the manufacture of thermal radiation detectors based on solid solutions $(SnSe)_{1-x}(Er_2Se_3)_x$, / International scientific and practical conference “Ecological, industrial and energy safety – 2018” September 23 – 26, 2019, Sevastopol, Russia. pp. 429-433.

7. Gasanov O.M., Adgezalova Kh.A., Guseinov D.I. Heat transfer processes in solid solutions $(SnSe)_{1-x}$-$(LnSe)_x$ / Journal “Innovative Scientific Research”, issue No. 1-2(3), January 2021, Ufa. pp. 14-24.

8. Gasanov O.M., Adgezalova Kh.A., Guseinov D.I. Hall coefficient and electrical conductivity in $(SnS)_{1-x}(LnS)_x$ / Single crystals. Innovative scientific research Proceedings of the XIII International Scientific and Practical Conference 26-27 September 2024 Toronto. Canada 2024. pp. 505-509.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 224-228.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 224-228.

Статья в сборнике трудов конференции

# КАМЕРЫ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ С РАЗНОЙ УГЛОВОЙ АПЕРТУРОЙ ДЛЯ НЕЙТРОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ФИЗИКЕ КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

***Владимир Игоревич Ермаков[1]✉, Евгений Станиславович Клементьев[2]***
*[1]Ковровская государственная технологическая академия имени В. А. Дегтярёва, Ковров, Россия*
*[2]БФУ им. И. Канта, Калининград, Россия*
*[1]v.ermakov@dksta.ru✉*
*[2]EKlementev@kantiana.ru*

***Аннотация.*** *Представлены результаты разработки камер высокого давления для исследований конденсированных сред при помощи методик нейтронного рассеяния. Ключевую роль для эффективного нейтронного эксперимента играет уменьшение эффекта самоэкранировки материалами камеры при обеспечении заданного давления и объема образца. Проведена оптимизация геометрии камер высокого давления с разной угловой апертурой выходящего нейтронного пучка, выявлена зависимость критического давления в зависимости от угла раствора конуса рассеянного нейтронного пучка.*

***Ключевые слова:*** *физика высоких давлений, камеры давления, нейтронное рассеяние.*

Conference paper

# HIGH PRESSURE CELLC WITH DIFFERENT ANGULAR APERTURES FOR NEUTRON RESEARCH IN CONDENSED MATTER PHYSICS

***Vladimir Ig. Ermakov[1]✉, Evgeny S. Clementyev[2]***
*[1]Kovrov State Technological Academy of Degtyarev, Kovrov, Russia*
*[2]I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia*
*[1]v.ermakov@dksta.ru✉*
*[2]EKlementev@kantiana.ru*

***Abstract.*** *The results of the development of high-pressure cells for studies of condensed media using neutron scattering techniques are presented. A key role for an effective neutron experiment is played by reducing the effect of self-shielding by chamber materials while ensuring a given pressure and sample volume. The geometry*

© Ермаков В. И., Клементьев Е. С., 2024

*of high-pressure chambers with different angular apertures of the outgoing neutron beam has been optimized, and the dependence of the critical pressure on the angle of solution of the cone of the scattered neutron beam has been revealed.*

***Keywords:*** *high pressure physics, pressure cells, neutron scattering.*

## 1. Введение

В физике конденсированного состояния очень важную роль играет возможность использования такого внешнего параметра, как давление, для измерения физических свойств материалов. Одним из самых информативных экспериментальных методов является рассеяние нейтронов, которое дает возможность исследовать структуру и динамику материалов, изучать фазовые переходы и прочие сложные явления. Совмещение столь сложной методики, как нейтронное рассеяние с необходимостью создания высокого давления на образце достаточно большого объема является нетривиальной задачей. Ключевой проблемой является сильное экранирование образца стенками камеры высокого давления, материалы которой поглощают и рассеивают нейтроны входящего и выходящего пучков. Создание высокого давление неизбежно требует достаточно больших толщин стенок камеры. Поскольку нейтронное рассеяние включает в себя несколько методик с разными требованиями к параметрам пучка (дифракция, спектроскопия, рефлектометрия, малоугловое рассеяние нейтронов), камеры высокого давления должны обладать разными угловыми апертурами для выходящего пучка, соответствующими той или иной нейтронной методике. Универсальная камера с широкой угловой апертурой будет заведомо проигрывать специализированным камерам, у которой толщины стенок могут быть значительно меньшими, то есть ослабление нейтронного пучка за счет поглощения, эффектов когерентного и некогерентного рассеяния нейтронов, будет существенно меньшим.

Оптимизация геометрии камер при условии обеспечения, заданного значение давления для заданного объема образца и выявление зависимости критического давления, соответствующего потере механической устойчивости камер, от угла раствора конуса выходящего нейтронного пучка были главными целями данной работы.

## 2. Основной текст статьи

Камеры высокого давления, рассматриваемые в настоящей работе, должны обеспечивать значение внешнего давления до 2.5 ГПа при объеме образца в несколько десятков $см^3$. Они состоят из основного корпуса и вставки, выполненных из немагнитных материалов. В качестве основных материалов используются: $CuBe_2$, TiZr, NiCrAl (40ХНЮ-ВИ).

На рисунке 1 показана конструкция камеры, обеспечивающей работу при давлении до 3,5 ГПа при угле раствора выходящего пучка 10˚.

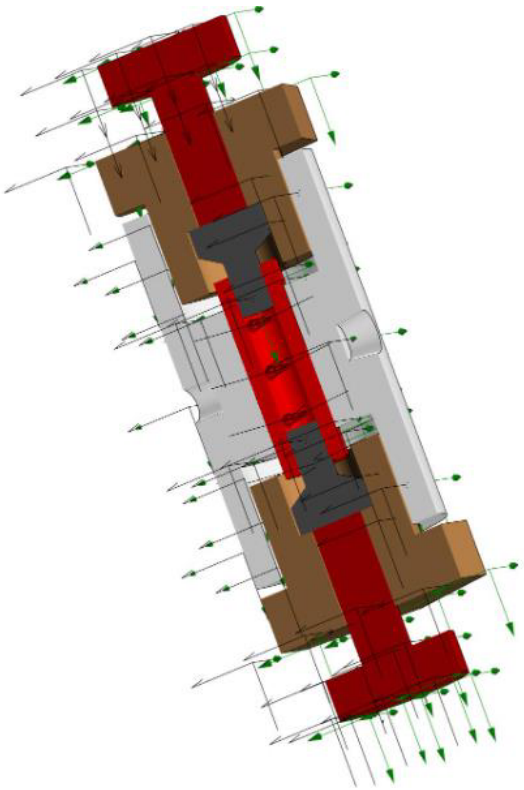


Рис. 1 – Модель разрабатываемой камеры высокого давления (КВД).

Оптимизация камер должна учитывать использование немагнитных материалов с учетом их прочностных характеристик для достижения максимальной эффективности экспериментов без значительного ослабления нейтронного пучка и влияния фонового сигнала от конструкции самой камеры.

Для выполнения прочностного анализа была выбрана отечественная CAE-система от научно-технического центра «АРМ», а расчёты производились с использованием библиотеки APM FEM для КОМПАС-3D. При максимальном рабочем давлении 2,5 ГПа проведён анализ методом конечных элементов с акцентом на концентрацию напряжений в местах соединения деталей конструкции.

Анализировалось распределение напряжений в расчетной схеме камер давления разных геометрий при сжатии поршня, при этом на образце создается квази-гидростатическое давление. Произведен прочностной анализ методом конечных элементов с максимально возможными параметрами конечно-элементной сетки. Диапазон давления был от 1 до 3.5 ГПа. Были рассчитаны: максимальное напряжение по Мизесу, коэффициенты запаса по прочности и текучести, оценено максимальное суммарное линейное перемещение.

Зависимость критического давления от угла раствора конуса выходящего нейтронного пучка показана на рисунке 2.

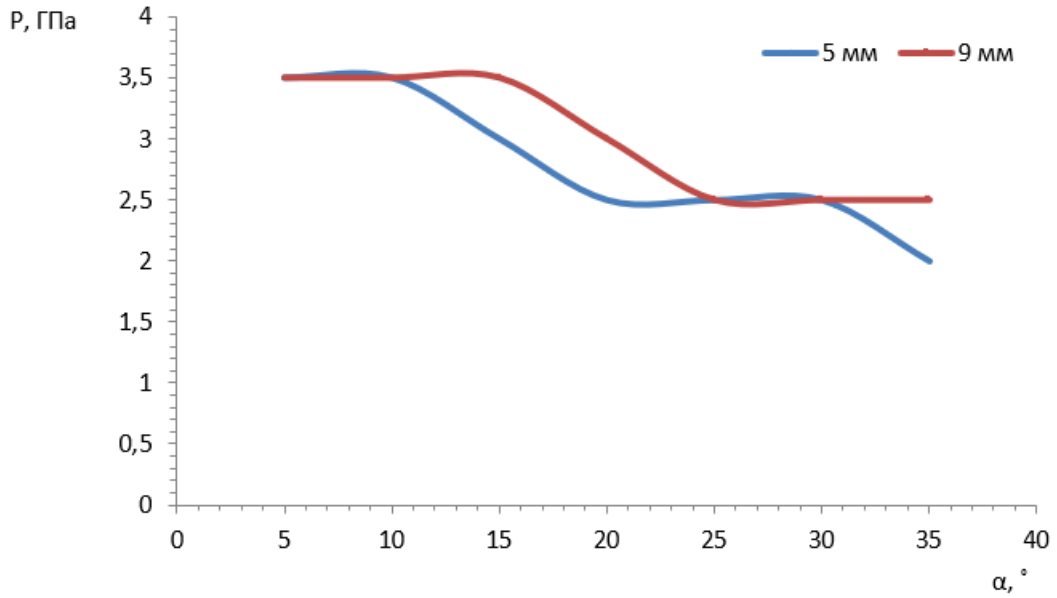



Рисунок 2 — Зависимость предельного значения приложенного давления от угла конуса раствора и толщины внешнего цилиндра КВД в области прохождения пучка нейтронов (две толщины: 5 мм и 9 мм).

На основании прочностного анализа удалось выявить, как необходимо откорректировать внешний диаметр камеры в зависимости от угла конуса раствора выхода пучка нейтронов.

### 3. Заключение

В результате проведенных исследований был разработан новый подход к разработке камер высокого давления для нейтронных методик, что позволяет минимизировать толщину материала на пути прохождения нейтронного пучка и повысить его пропускание. Кроме того, удалось выявить зависимость критического давления от угла раствора конуса выходящего нейтронного пучка. Полученные результаты открывают новые возможности для применения камер давления до 3,5 ГПа на образцах большого объема в нейтронных экспериментах и повышения эффективности исследований материалов нейтронными методиками с очень широким диапазоном угловых апертур, от широкоугольной дифракции до малоуглового рассеяния нейтронов.

## Список источников

1. Eremets M.I. High pressure experimental methods. Oxford: Oxford University Press; 1996.

2. Klotz S. Techniques in high pressure neutron scattering. Boca Raton (FL): CRC Press/Taylor and Francis; 2013.

3. Sadykov R.A., Strassle T., Podlesnyak A., Keller L., Fak B. and Mesot J., High-pressure cells for study of condensed matter by diffraction and inelastic neutron scattering at low temperatures and in strong magnetic fields, Journal of Physics: Conference Series 941(1) (2017), 012082, ISBN 1742-6596, URL: http://stacks.iop.org/1742-6596/941/i=1/a=012082.

4. Sadykov R., Pappas C., Banneberg L.J., et al. 1.5 GPa compact double-wall clamp cell for SANS and NSE studies at low temperatures and high magnetic fields. J Neutr Res. 2018; 20: 25–33.

## References

1. Eremets M.I. High pressure experimental methods. Oxford: Oxford University Press; 1996.

2. Klotz S. Techniques in high pressure neutron scattering. Boca Raton (FL): CRC Press/Taylor and Francis; 2013.

3. Sadykov R.A., Strassle T., Podlesnyak A., Keller L., Fak B. and Mesot J., High-pressure cells for study of condensed matter by diffraction and inelastic neutron scattering at low temperatures and in strong magnetic fields, Journal of Physics: Conference Series 941(1) (2017), 012082, ISBN 1742-6596, URL: http://stacks.iop.org/1742-6596/941/i=1/a=012082.

4. Sadykov R., Pappas C., Banneberg L.J., et al. 1.5 GPa compact double-wall clamp cell for SANS and NSE studies at low temperatures and high magnetic fields. J Neutr Res. 2018; 20: 25–33.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 229-234.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 229-234.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 53.043 + 53.083.4

# ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ОБРАБОТКИ НА КОМПЛЕКСНУЮ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ПРОНИЦАЕМОСТЬ КОМПОЗИТА С МНОГОСТЕННЫМИ УГЛЕРОДНЫМИ НАНОТРУБКАМИ

***Инна Сергеевна Кеда[1]✉, Ольга Александровна Доценко[1,2]***
*[1]Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*
*[2]Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, Россия*
*[1]kedainna@mail.ru✉*
*[1,2]dol@mail.tsu.ru*

***Аннотация.*** *Представлены результаты исследования частотной зависимости диэлектрической проницаемости композиционных материалов на основе углеродных нанотрубок. Измерения проводились конденсаторным методом. Проведено сравнение действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости исследуемых образцов, изготовленных при различной длительности ультразвуковой обработки, на разных частотах. Показано, что ультразвуковая обработка исходной суспензии увеличивает действительную и мнимую части диэлектрической проницаемости образцов.*

***Ключевые слова:*** *многостенные углеродные нанотрубки, композит, ультразвуковая обработка, диэлектрическая проницаемость, конденсаторный метод.*

Conference paper

# THE EFFECT OF ULTRASONIC TREATMENT PARAMETERS ON THE COMPLEX PERMITTIVITY OF A COMPOSITE BASED ON MULTI-WALL CARBON NANOTUBES

***Inna S. Keda[1]✉, Olga A. Dotsenko[1,2]***
*[1]National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia*
*[2] Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russia*
*[1]kedainna@mail.ru✉*
*[1,2]dol@mail.tsu.ru*

© Кеда И.С., Доценко О.А., 2024

***Abstract.*** *The results of a study of the frequency dependence of the dielectric constant of composite materials based on carbon nanotubes are presented. The capacitor method was used to study of samples. The samples were prepared with different ultrasonic treatment times. A comparison of the real and imaginary parts of the permittivity at various frequencies was made. It has been shown that ultrasonic treatment of the initial suspension increases the real and imaginary parts of the permittivity.*

***Keywords:*** *multi-walled carbon nanotubes, composite, ultrasonic treatment, permittivity, capacitor method*

## 1. Введение

В последнее десятилетие разработка наноструктурированных покрытий вызывает большой интерес исследователей. В настоящее время использование наноматериалов является реальностью в электронике, а полимерные композитные материалы, исследованию которых посвящено много научных и технологических работ, являются перспективными для широкого использования [1, 2]. Углеродные нанотрубки (УНТ) обладают уникальными физико-химическими свойствами, которые определяют их дальнейшее использование для научного и практического применения. УНТ обладают высокой механической прочностью, развитой поверхностью и низкой плотностью, также они обладают широким диапазоном величин электропроводности [3]. В зависимости от количества структурообразующих слоев, углеродные нанотрубки подразделяют на одностенные и многостенные. Многостенные углеродные нанотрубки (МУНТ) представляют собой несколько свернутых один в другой графеновых слоёв. МУНТ обладают более стабильными характеристиками по отношению к одностенным углеродным нанотрубкам (ОУНТ), что связано с наличием большого количества слоев [4]. Проводимость МУНТ лежит в широких диапазонах значений и зависит от диаметра, количества слоев, метода синтеза, типа структуры и дефектности [5, 6]. Спектр возможного применения МУНТ включает в себя области электроники, машиностроения, медицины [7]. Электропроводность МУНТ является важным параметром, от которого зависит дальнейшая возможность их использования в различных целях. В работах [8, 9, 10] показано, что наибольшее влияние на электрические свойства изготовленных материалов, содержащих нанотрубки, оказывает ультразвуковая обработка (УЗО). В связи с этим, в данной работе будут исследованы электрические свойства композиционных материалов с включениями углеродных нанотрубок.

## 2. Основной текст статьи

В работе использовались образцы, изготовленные из углеродных нанотрубок института катализа СО РАН (г. Новосибирск) и акриловой краски ООО «НПП «Рогнеда» (ст. Купавна, Московская область). МУНТ представляют собой сыпучий порошок черного цвета со средним диаметром трубок в нем 9,4 нм. Длина трубок и чистота более 15 мкм и более 97,5%, соответственно. Для исследования были изготовлены композиты с концентрацией многостенных углеродных нанотрубок 1 масс. %.

Первым этапом было взвешивание на аналитических весах SHIMADZU AUX320 исходных компонентов: МУНТ и дисперсионной среды (краски) по отдельности. После все компоненты смеси помешались в стеклянную емкость и перемешивались вручную. Далее МУНТ диспергировались ультразвуком на аппарате Алена УЗТА0.1\28-О с излучателем погружного типа до образования однородной суспензии. Время диспергирования составляло от 1 минуты до 5 минут. При диспергировании использовали разную мощность ультразвукового излучателя. Первая партия образцов изготовлена при мощности ультразвука 25 Вт (рисунки 1, 2), вторая партия – при мощности 40 Вт (рисунки 3, 4). После обработки ультразвуком, полученную суспензию наносили на плоскую поверхность в несколько слоев до засыхания.

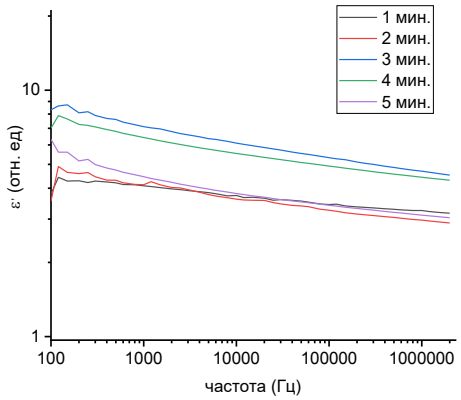



Рисунок 1 — Частотные зависимости действительной части диэлектрической проницаемости образцов, диспергированных при мощности УЗО 25 Вт

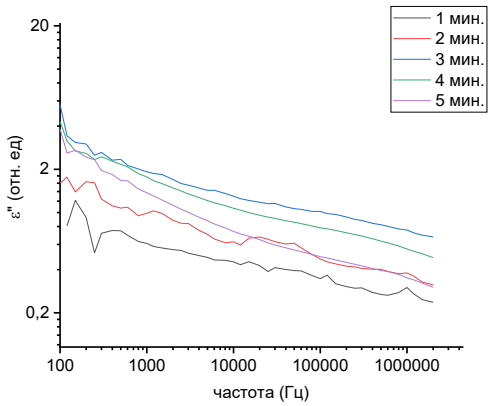



Рисунок 2 — Частотные зависимости мнимой части диэлектрической проницаемости образцов, диспергированных при мощности УЗО 25 Вт

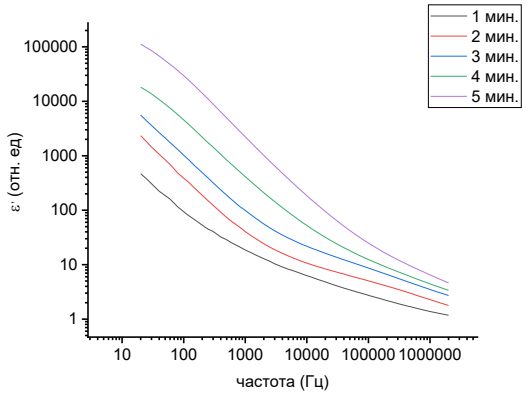



Рисунок 3 — Частотные зависимости действительной части диэлектрической проницаемости образцов, диспергированных при мощности УЗО 40 Вт

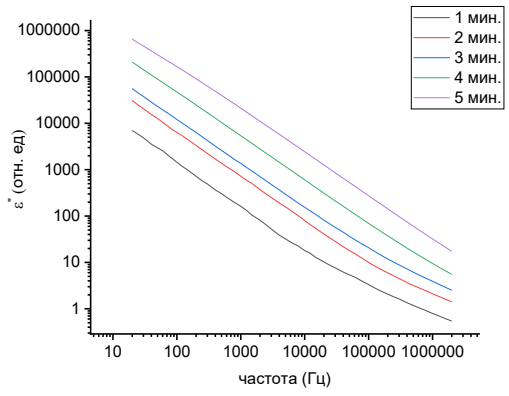



Рисунок 4 — Частотные зависимости мнимой части диэлектрической проницаемости образцов, диспергированных при мощности УЗО 40 Вт

Измерение электромагнитных параметров образцов проводилось конденсаторным методом на установке E8363B фирмы Agilent Technologies.

Частотные зависимости действительной (рис. 1, 2) и мнимой (рис. 3, 4) частей диэлектрической проницаемости при пяти временных режимах обработки ультразвуком показывают, что наиболее оптимальным временем обработки является 4 минуты. При обработке ультразвуком в течение 1 минуты и 2 минут значения диэлектрической проницаемости являются минимальными и почти не зависят от частоты, не зависимо от мощности ультразвукового излучателя. Но при дальнейшем повышении времени обработки резко увеличиваются значения действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости: чем больше мощность, тем больше увеличиваются значения диэлектрической проницаемости, а зависимость от частоты становится более явной.

Из рисунков видно, что значения диэлектрической проницаемости уменьшаются с ростом частоты. Это указывает на присутствие в диэлектрике заряженных частиц, обладающих несколькими типами поляризации: ионной, электронной и дипольной. Авторы работы [11] связывают такое поведение диэлектрической проницаемости с появлением в структуре исследуемого материала полярных молекул, в роли которых могут выступать протяженные волокна из нанотрубок после их дезагломерирования.

**3. Заключение**

В результате проведенного исследования были получены и проанализированы частотные зависимости действительной и мнимой частей комплексной диэлектрической проницаемости композиционных материалов с включениями многослойных углеродных нанотрубок при разном времени обработки ультразвуком и при разных мощностях. Показано, что длительность и заданная мощность ультразвуковой обработки композита, содержащего 1 масс. % МУНТ, увеличивает значение диэлектрической проницаемости. Причём с увеличением мощности УЗО кратно увеличиваются значения действительной и мнимой частей комплексной диэлектрической проницаемости.

## Список источников

1. Friedrich K. Polymer Composites. From Nano- to Macro-Scale / K. Friedrich, S. Fakirov, Zh. Zhang. – New York : Springer, 2005. 367 p.

2. Yedra A., Gutierrez-Somavilla G., Manteca-Martinez C., Gonzalez-Barriuso M., Soriano L. Conductive paints development through nanotechnology // Progress in Organic Coatings. 2016. Vol. 95. P. 85–90. https://doi.org/10.1016/j.porgcoat.2016.03.001.

3. Климов Е.С. Изменение структуры многостенных углеродных нанотрубок при физико-химической обработке / Е.С. Климов, А.В. Исаев, К.Н. Нищев, А.А. Пыненков, Д.А. Горин, Д.Н. Браташов, О.А. Давыдова, М.В. Бузаева, Е.С. Ваганова // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2014. Т. 16, №4(3). С. 568–571.

4. Мищенко, С.В. Углеродные наноматериалы. Производство, свойства, применение / С.В. Мищенко, А.Г. Ткачев. – М.: Машиностроение, 2008. – 320 с.

5. Lan C. Measurement of metal/carbon nanotube contact resistance by adjusting contact length using laser ablation / C. Lan, P. Srisungsitthisunti, P. B. Amama, T. S. Fisher, X. Xu, R. G. Reifenberger // Nanotechnology. 2008. Vol. 19. P. 125703–1–7. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0957-4484/19/12/125703.

6. Елецкий А.В. Транспортные свойства углеродных нанотрубок // Успехи физических наук. 2009. Т. 179. С. 225–242.

7. Томишко М.М. Многослойные углеродные нанотрубки и их применение / М.М. Томишко, О.В. Демичева, А.М. Алексеев, А.Г. Томишко, Л.Л. Клинова, О.Е. Фетисова // Рос. хим. ж. 2008. Т. LII, № 5. С. 39–43.

8. Fromyr T.R., Hansen F.K., Olsen T. The optimum dispersion of carbon nanotubes for epoxy nanocomposites: evolution of the particle size distribution by ultrasonic treatment // Journal of Nanotechnology. 2012. Vol. 2012. Article ID 545930. 14 p. https://doi.org/10.1155/2012/545930.

9. Caneba G.T. Novel ultrasonic dispersion of carbon nanotubes / G.T. Caneba, C. Dutta, V. Agrawal, M. Rao // JMMCE. 2010. Vol. 9, No. 3. P. 165–181. https://doi.org/10.4236/jmmce.2010.93015.

10. Мурадян В.Е., Соколов Е.А., Бабенко С.Д., Моравский А.П. Диэлектрические свойства композитов, модифицированных углеродными наноструктурами, в микроволновом диапазоне // Журнал технической физики. 2010. Т. 80, Вып. 2. С. 83–87.

11. Yadav V.S., Sahu D.K., Singh Y., Dhubkarya D.C. The Effect of Frequency and Temperature on Dielectric Properties of Pure Poly Vinylidene Fluoride (PVDF) Thin Films // Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists. 2010. Vol. 3, P.1–4. ISBN: 978-988-18210-5-8.

## References

1. Friedrich K. Polymer Composites. From Nano- to Macro-Scale / K. Friedrich, S. Fakirov, Zh. Zhang. – New York : Springer, 2005. 367 p.

2. Yedra A., Gutierrez-Somavilla G., Manteca-Martinez C., Gonzalez-Barriuso M., Soriano L. Conductive paints development through nanotechnology // Progress in Organic Coatings. 2016. Vol. 95. P. 85–90. https://doi.org/10.1016/j.porgcoat.2016.03.001.

3. Klimov E.S., Isaev A.V., Nishchev K.N., Pynenkov A.A., Gorin D.A., Bratashov D.N., Davydova O.A., Buzaeva M.V., Vaganova E.S. Changes in the structure of multi-walled carbon nanotubes during physicochemical treatment. News of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. Taxes. Law. 2014;(4 (3)):568-571. (In Russ.).

4. Mishchenko S.V., Tkachev A.G. Carbon nanomaterials. Production, properties, application. M.: Mechanical Engineering. Taxes. Law. 2008; 320. (In Russ.).

5. Lan C. Measurement of metal/carbon nanotube contact resistance by adjusting contact length using laser ablation / C. Lan, P. Srisungsitthisunti, P. B. Amama, T. S. Fisher, X. Xu, R. G. Reifenberger // Nanotechnology. 2008. Vol. 19. P. 125703–1–7. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0957-4484/19/12/125703.

6. Eletsky A.B. Transport properties of carbon nanotubes. Advances in physical sciences. Taxes. Law. 2009;(179):225-242. (In Russ.).

7. Tomishko M.M., Demicheva O.V., Alekseev A.M., Tomishko A.G., Kliniva L.L., Fetisova O.E. Multiwalled carbon nanotubes and their applications. Russian Chemical Journal named after D.I. Mendeleev. Taxes. Law. 2008;(52(2)). (In Russ.).

8. Fromyr T.R., Hansen F.K., Olsen T. The optimum dispersion of carbon nanotubes for epoxy nanocomposites: evolution of the particle size distribution by ultrasonic treatment // Journal of Nanotechnology. 2012. Vol. 2012. Article ID 545930. 14 p. https://doi.org/10.1155/2012/545930.

9. Caneba G.T. Novel ultrasonic dispersion of carbon nanotubes / G.T. Caneba, C. Dutta, V. Agrawal, M. Rao // JMMCE. 2010. Vol. 9, No. 3. P.165–181. https://doi.org/10.4236/jmmce.2010.93015.

10. Muradyan V.E., Sokolov E.A., Babenko S.D., Moravsky A.P. Dielectric properties of composites modified with carbon nanostructures in the microwave range. Journal of Technical Physics. Taxes. Law. 2010;(2):83-87. (In Russ.).

11. Yadav V.S., Sahu D.K., Singh Y., Dhubkarya D.C. The Effect of Frequency and Temperature on Dielectric Properties of Pure Poly Vinylidene Fluoride (PVDF) Thin Films // Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists. 2010. Vol. 3, P.1–4. ISBN: 978-988-18210-5-8.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 235-243.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 235-243.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.975

# ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МАГНЕТРОННЫХ СТРУКТУР ТЕЛЛУРИДА ВИСМУТА *n*-ТИПА ПРОВОДИМОСТИ, СОЗДАННЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ МАГНЕТРОННЫМ РАСПЫЛЕНИЕМ

***Артём Игоревич Колпаков[1]✉, Александр Павлович Кузьменко[2], Константин Александрович Матарыкин[3]***
*[1,2,3]Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия*
*[1]artem.kolpakov.96@mail.ru✉, https://orcid.org/0009-0004-8571-8544*
*[2]apk3527@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-7089-0692*
*[3]icego132@gmail.ru*

***Аннотация.*** *В статье описаны результаты исследований магнетронных пленочных структур (МНП) из теллурида висмута – $Bi_2Te_3Se_{0.3}$ (n-проводимость), формируемые на подложке из монокристаллического кремния (100). Синтез МНП, осуществлялся высокочастотным магнетронным распылением (ВЧ МР) с изменением управляющего параметра – мощности распыления ($P_{ВЧ\ МР}$). С помощью атомно-силовой (АСМ) и голографической микроскопии исследованы особенности поверхности пленочных структур. Методом «ступеньки» определена толщина создаваемых структур. По результатам АСМ установлена шероховатость МНП ($R_a$ и $R_q$) и проведен гранулометрический анализ. Способом подсчетов кубов определена фрактальная размерность (D), которая составила D = 2,5, указывающая на трехмерность пленочных структур. В соответствии с результатами АСМ показано, что с увеличением мощности распыления размеры наночастиц изменялись по высоте в интервале 4 – 16 нм и латерально от 54 до 65 нм.*

***Ключевые слова:*** *высокочастотное магнетронное распыление; магнетронные наноплёнки $Bi_2Te_3$ n-типа проводимости, автокорреляционный анализ, фрактальная размерность, атомно-силовая микроскопия.*

***Благодарности****: Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (г/з 2020 № 0851–2020–0035), в рамках реализации программы стратегического академического лидерства "Приоритет–2030" (Соглашение № 075–15–2021–1213).*

© Колпаков А.И., Кузьменко А.П., Матарыкин К.А., 2024

Conference paper

# CHARACTERIZATION OF MAGNETRON STRUCTURES OF *n*–TYPE BISMUTH TELLURIDE CREATED BY RF MAGNETRON SPUTTERING

**Artem I. Kolpakov[1]✉, Alexander P. Kuzmenko[2], Konstantin A. Matarykin[3]**
*[1, 2, 3]Southwest State University, Kursk, Russia*
*[1]artem.kolpakov.96@mail.ru✉, https://orcid.org/0009-0004-8571-8544*
*[2]apk3527@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-7089-0692*
*[3]icego132@gmail.ru*

***Abstract.*** *The article describes the results of studying magnetron film structures (MNF) from bismuth telluride – $Bi_2Te_3Se_{0.3}$ (n-conductivity), formed on a substrate of monocrystalline silicon (100). The MNF was synthesized by high-frequency magnetron sputtering (RF MS) with a change in the control parameter – sputtering power ($P_{RF\ MS}$). Using atomic force (AFM) and holographic microscopy, the surface features of the film structures were studied. The thickness of the created structures was determined by the "step" method. Based on the AFM results, the MNF roughness ($R_a$ and $R_q$) was determined and granulometric analysis was carried out. Using the cube counting method, the fractal dimension (D) was determined, which was D = 2.5, indicating the three-dimensionality of the film structures. According to the AFM results, it was shown that with an increase in the spray power, the sizes of the nanoparticles changed in height in the range of 3.5 – 18 nm and laterally from 40 to 64 nm.*

***Keywords:*** *high-frequency magnetron sputtering, magnetron nanofilms of $Bi_2Te_3$ n-type conductivity, autocorrelation analysis, fractal dimension, atomic force microscopy.*

***Acknowledgements:*** *The study was carried out with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (g/z 2020 No. 0851–2020–0035), as part of the implementation of the strategic academic leadership program "Priority 2030" (Agreement No. 075–15–2021–1213).*

## Введение

Работы по исследованиям термоэлектрических явлений активно развиваются и вполне обоснованно относятся к самым приоритетным, так как направлены на решение глобальной проблемы – получение электроэнергии. Непосредственное преобразование тепла в электроэнергию приобретает актуальность с учетом необходимости снижения углеродных выбросов, то есть способствует обеспечению экологической безопасности [1].

Серьезные ожидания в получении электроэнергии и охлаждении связаны с термоэлектрическими (ТЕ) технологиями [2], основанными на эффекте Зеебека и производимыми генераторами и создании новых материалов [3], обладающих повышенными ТЕ параметрами [4].

Производительность ТЕ оценивается безразмерным фактором – термоэлектрической добротностью ($ZT$):

$$ZT = S^2\sigma T / k, \quad (1)$$

где $S$ – коэффициент Зеебека (мВ/К), σ – электропроводность (См/м), $k$ – теплопроводность (Вт/м×К)). Размерной характеристикой ТЕ является коэффициент мощности – $PF = S^2\sigma$. Он характеризует способность ТЕ материала генерировать электрическую энергию в зависимости от площади контактирующих поверхностей.

Наиболее активно в качестве ТЕ материалов, используются силициды, теллуриды свинца [5], сплавы полу-Гейслеры [6]. Полупроводниковый ТЕ материал теллурид висмута ($Bi_2Te_3$) также находит широкое применения в: ТЕ системах [7–8], трехмерных (3$D$) топологических изоляторах [9] и фотоэлектрических материалах [10]. $ZT$ объемного $Bi_2Te_3$ – около 1 [11], что считается большим достижением для практического применения. В этой связи, наноразмерные полупроводниковые материалы $Bi_2Te_3$ демонстрируют еще более высокие ТЕ характеристики. Отчасти, это обусловлено снижением решеточной теплопроводности из-за наноразмерности центров рассеивания фотонов [12]. На основе $Bi_2Te_3$-$Sb_2Te_3$ ($p$–типа) и $Bi_2Te_3$-$Bi_2Se_3$ ($n$–типа) методом трафаретной печати из суспензий изготовлен гибкий ТЕ генератор, вырабатывающий при комнатной температуре напряжение от 0,8 до 14,8 мВ [13]. В пленках $Bi_2Te_3$, полученных MR, зарегистрировано увеличение $PF$ (до $5{,}65\times10^{-4}$ Вт/м×К$^2$ при 470 К), обусловленное высокой σ даже при уменьшении $S$ (105 мкВ/К). Здесь же отмечена взаимосвязь между снижением кристалличности и теплопроводности, согласно (1), улучшает ТЕ характеристики [14].

**Материалы и методы**

В работе использовалась мишень $Bi_2Te_{2,7}Se_{0,3}$ ($n$–проводимость), изготовленная методом горячего прессования в центре коллективного пользования научно-исследовательского университета «БелГУ» д.ф.-м.н., в.н.с. Ивановым О.Н. и к.ф.-м.н., с.н.с. Япрынцевым М.Н. Мишень имела цилиндрическую форму диаметром 100 мм и высотой 6 мм. Подложками для формирования нанопленок служили поверхности из кремния (100) с размерами 10×15 мм$^2$. Указанные размеры диаметра мишени и подложек повышало однородность, как по толщине, так по морфологии наносимых MNF. Подложки очищались от органических соединений при нагревании в течение 10 минут в смеси 1:6 дихромата калия и серной кислоты, а от механических загрязнений – плазменной очисткой поверхности в установке «Pico». Нанесение нанопленочных структур при RF MS осуществлялось на малогабаритной вакуумной установке МВУ ТМ-МАГНА Т (НИИТМ, г. Зеленоград), дооснащенной радиочастотным магнетроном (13,56 МГц). Перед нанесением MNF рабочая камера вакуумировалась до $5\times10^{-4}$ Па, ИК-нагрев подложки галогеновыми лампами и ионная чистка их поверхности в течение 60 с. Затем создавалось давление атмосферы рабочего газа Ar – 1,0 Па.

Морфология поверхности, полученных MNF, характеризовалась методами AFM (AistNT SmartSPM), а их толщина измерялась на цифровом голографическом микроскопе (Lyncee Tec R2203). Пространственное разрешение этих приборов составляло 30 пм.

**Результаты и их обсуждение**

Качество полученных MNF определялось критерием [15], который определялся из условия минимума массива $\min\{R_{ai}\}$ и $\min\{R_{qi}\}$, где $i$ – количество измеряемых MNF. Средние значения $R_a$ и среднеквадратичные $R_q$ шероховатости рассчитывались из формул: $R_a = (1/N)\Sigma|R_j|$ и $R_q = ((1/N^2)(\Sigma(R_a - |R_j|)^2)^{1/2}$. Управляющим параметром MS являлась мощность $P_{RF\ MS}$, которая варьировалась в интервале от 50 до 80 Вт через 10 Вт при постоянном времени распыления $t_{RF\ MS}$ = 1800 с.

Измерения толщины ($h$) наносимых MNF, осуществлялось с помощью голографического микроскопа по методу «ступеньки» описанному в [16]. С этой целью на поверхность наносилась маска, граница которой после окончания процесса распыления удалялась, образуя на поверхности образца четко выраженную «ступеньку». В цифровом голографическом микроскопе на указанных отрезках $l$, показанных на вставках к рисунку 1 а и б (в мкм) ступенька фиксируется в виде резкого перепада по высоте, соответствующей с точностью до 30 пм, толщине MNF. К примеру, толщины для MNF из $Bi_2Te_{2,7}Se_{0,3}$ составили $h \approx 809{,}33$ нм при $P_{RF\ MR} = 50$ Вт (рисунок 1 а) и $h \approx 1401{,}41$ нм – при $P_{RF\ MR} = 80$ Вт (рисунок 1 б).

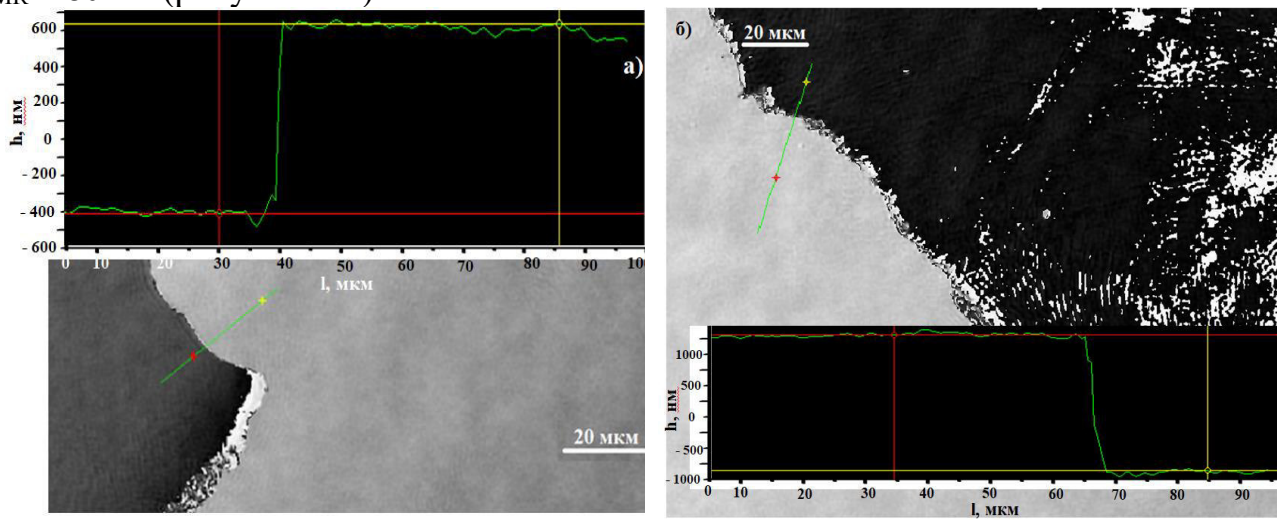



Рисунок 1 – Изображение «ступеньки» MNF на цифровом голографическом микроскопе Lyncee Tec R2203 на вставке показан ее профиль толщиной при мощности распыления $P_{RF\ MS}$: а) 50 Вт – 809,33 нм; б) 80 Вт – 1401,41 нм.

Морфология поверхностей MNF, была изучена с использованием AFM. Поверхности MNF имели достаточно высокую гомогенность, что хорошо видно на примерах типичных AFM изображений в области 5×5 мкм$^2$ с профилями изменений по высоте (вдоль z координаты в нм) на приведенных вставках к рисунку 2 а и б. С ростом $P_{RF\ MS}$ заметно увеличение z у наблюдаемых наноструктур. Так для $P_{RF\ MS}$ = 60 Вт z возрастали с 8 нм до 12 нм при $P_{RF\ MS}$ = 70 Вт (вставки профилей на рисунках 2 а и б). Сводные результаты, проведенных гранулометрических анализов по зависимости числа наноструктур $N$ с размерами $d$ – $N(d)$ для всех исследованных MNF представлены в таблице 1 в виде доверительных интервалов $d_{cp} \pm \Delta d$, нм, где $d_{cp}$ – обозначено наибольшее число наноструктур с латеральным размером $d$, а $\Delta d$ – интервал изменений

латеральных размеров $d$, определенный по уровню FHWM. По измеренным $h$ при соответствующих $P_{RF\ MS}$ и фиксированном времени $t_{RF\ MS} = 30$ минут была построена зависимость скорости роста MNF – V($P_{RF\ MS}$). Она оказалась линейной (согласуясь с [17]), что позволило рассчитать ее величину: V($P_{RF\ MS}$) = 0,57 (нм×мин)/Вт.

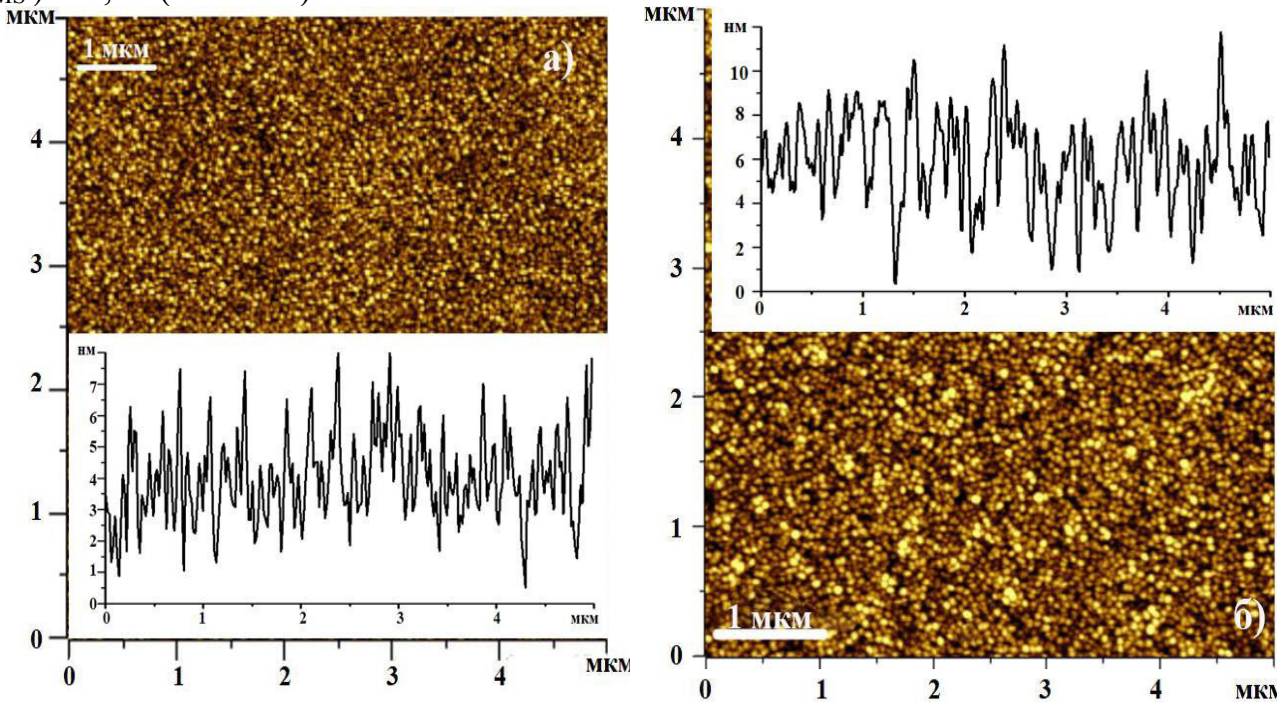



Рисунок 2 – AFM изображения MNF структур $Bi_2Te_{2,7}Se_{0,3}$ (5×5 мкм$^2$), полученных методом RF MS при $P_{RF\ MS}$: а) 60 Вт и б) 70 Вт. На вставках приведены профили

Методом подсчета кубов (ПО Gwyddion) бала рассчитана фрактальная размерность ($D$) по AFM изображениям. Все значения $D$ удовлетворяли условию $D > 2$, что указывало об их 3D-мерности, как это видно из формируемых профилей MNF рисунки 2 а и б вдоль одного из 256 сканов. В таком случае полное изображение AFM поверхности пленки будет иметь 3D-мерность.

Таблица 1 – Расчетные значения исследуемых нанопленок от мощности RF MS.

| $t_{RF\ MS}$, с / $P_{RF\ MS}$, Вт | 1800 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $R_a$, нм | $R_q$, нм | $d_{cp} \pm \Delta d$, нм | $h$, нм |
| 50 | 0,5 | 0,6 | 54 ± 10 | 809,33 |
| 60 | 1,35 | 1,65 | 57 ± 11 | 1080,4 |
| 70 | 1,5 | 1,89 | 60 ± 13 | 1200,55 |
| 80 | 4,12 | 4,79 | 65 ± 14 | 1401,41 |

Сводные данные результатов полученных с AFM ($R_a$, $R_q$, $d_{cp} \pm \Delta d$) и голографического микроскопа ($h$) представлены в таблице 1. Проведенные измерения для всех исследуемых MNF. Диапазон изменений латеральных размеров $d$ от $P_{RF\ MS}$ отвечал достаточно высокому уровню гомогенности. Рост $R_a$ и $R_q$ для MNF с увеличением $P_{RF\ MS}$ как это следует из [18] соответствует кристалличности, образующих элементов, а значит снижению $k$. Аналогичные выводы о проводимости σ говорят, о ее росте в таких же условиях [14], с

некоторым уменьшением *S*. Сопоставительный анализ всех переменных по уровню их изменений ($\sigma \sim 10^2$, $k \sim 10^3$, при $S \sim 1$ [14, 18]) с учетом их мультипликативности в формуле (1) позволяет заключить, что величина *ZT* в образуемой MNF должна приближаться к единице.

**Заключение**

Методом высокочастотного магнетронного распыления в инертной среде (аргон) получены и охарактеризованы наноплёнки из $Bi_2Te_{2,7}Se_{0,3}$ (*n*– проводимость) и были установлены режимы и параметры RF MS для получения MNF с минимальной шероховатостью, когда снижается теплопроводность и растет проводимость. Измерена скорость роста MNF от мощности: $V(P_{RF\ MS}) = 0{,}57$ (нм×мин)/Вт. На этой основе может выстроена стратегия дальнейших исследований с целью повышения ТЕ добротности, в том числе за счет использования ТЕ с разными типами проводимости.

## Список источников


1. Dongli Q., Feng P., Jie Zh., Zibo X., Yuan D. High ZT and performance controllable thermoelectric devices based on electrically gated bismuth telluride thin films // Nano Energy. 2021. Vol. 89. P. 1–8. https://doi.org/10.1016/j.nanoen.2021.106472.

2. Ding L.C., Akbarzadeh A., Tan L. A review of power generation with thermoelectric system and its alternative with solar ponds // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2018. Vol. 81. P. 799–812. https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.08.010.

3. Tianyi C., Xiao-Lei Sh., Zhi-Gang Ch. Advances in the design and assembly of flexible thermoelectric device // Progress in Materials Science. 2023. Vol. 131. P. 101003. https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2022.101003.

4. Shterm M., Rogachev M., Shtern Yu., Sherchenkov A., Babich A., Korchagin E., Nikulin D. Thermoelectric properties of efficient thermoelectric materials on the basis of bismuth and antimony chalcogenides for multisection thermoelements // Journal of Alloys and Compounds. 2021. Vol. 877. P. 160328. https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2021.160328.

5. Rawther A.N., Rout U., Kumar P., Ramanathan R., Mallik R.C. Thermoelectric properties of sputter deposited $Bi_2Te_3$–PbTe multilayer thin films // Physica B: Condensed Matter. 2024. Vol. 673. P. 415467. https://doi.org/10.1016/j.physb.2023.415467.

6. Xing Y., Liu R., Jinchen Liao, Zhang Q., Xia X., Wang C., Huang H., Chu J., Ming G., Zhu T., Zhu C., Xu F., Yao D., Zeng Y., Bai S., Uher C., Chen L. High-efficiency half-Heusler thermoelectric modules enabled by self-propagating synthesis and topologic structure optimization // Energy and Environmental Science. 2019. Vol. 12. P. 3390–3399. https://doi.org/10.1039/C9EE02228G.

7. Witting I.T., Chasapis T.C., Ricci F., Peters M., Heinz N.A., Hautier G., Snyder G.J. The thermoelectric properties of Bismuth Telluride // Advanced Electronic Materials. 2019. Vol. 5, no. 6. P. 1800904. https://doi.org/10.1002/aelm.201800904.

8. Saberi Y., Sajjadi S.A. The effect of thermal evaporation parameters on thermoelectric properties of $Bi_2Te_{2.7}Se_{0.3}$ thin films produced from ball milled powder // Journal of Materials Science: Materials in Electronics. 2023. Vol. 34. P. 392. https://doi.org/10.1007/s10854-022-09804-3.

9. Lukyanova L.N., Usov O.A., Volkov M.P., Makarenko I.V. Topological thermoelectric materials materials based on Bismuth Telluride // Nanobiotechnology Reports. 2021. Vol. 16. P. 282–293. https://doi.org/10.1134/S2635167621030125.

10. Liu Y., Chen J., Wang C., Deng H., Zhu D.M., Hu G., Chen X., Dai N. Bulk photovoltaic effect at infrared wavelength in strained $Bi_2Te_3$ // APL Materials. 2016. Vol. 4. P. 126104. https://doi.org/10.1063/1.497179.

11. Ivanov O.N., Yapryntsev M.N., Vasil'ev A.E., Zhezhu M.V., Khovaylo V.V. Metal-ceramic composite $Bi_2Te_3$-Gd: thermoelectric properties // Glass and Ceramics. 2022. Vol. 79, no. 5-6. P.180–184. https://doi/org/10.1007/s10717-022-00480-7.

12. Hosokawa Y., Tomita K., Takashiri M. Growth of single-crystalline $Bi_2Te_3$ hexagonal nanoplates with and without single nanopores during temperature-controlled solvothermal synthesis // Scientific reports. 2019. Vol. 9. P. 10790. https://doi.org/10.1038/s41598-019-47356-5.

13. Voloshchuk I., Babich A., Pereverzeva S., Terekhov D., Sherchenkov A. Flexible thermoelectric generator fabricated by screen printing method from suspensions based on $Bi_2Te_{2.8}Se_{0.2}$ and $Bi_{0.5}Sb_{1.5}Te_3$ // Journal of Central South University. 2023. Vol. 30. P. 2906–2918. https://doi.org/10.1007/s11771-023-5257-0.

14. Zang K.Y., Hu E.T., Wang Z.Y., Tu H.T., Zheng Y.X., Wang S.Y., Zhao H.B., Yang Y.M., Lee Y.P., Chen L.Y. Effect of deposition power on the thermoelectric performance of bismuth telluride prepared by RF sputtering // Cristals. 2020. Vol. 10, no. 7. P. 552. https://doi.org/10.3390/cryst10070552.

15. Кузьменко А.П., Колпаков А.И., Сизов А.С., Емельянов В.М., Неручев Ю.А. Магнетронные углеродные структуры, полученные высокочастотным магнетронным распылением в среде аргона и азота // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2024. Т. 14, no 2. С. 71–87. https://doi.org/10.21869/2223-1528-2024-14-2-71-87.

16. Кузьменко А.П., Кашкин И.С., Колпаков А.И., Жакин А.И., Емельянов В.М. Структурные и морфологические особенности магнетронных наноплёнок TaN с разной толщиной // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2024. Т. 14, no 3. С. 147–164. https://doi.org/10.21869/2223-1528-2024-14-3-147-164.

17. Жуков В.В., Кривобоков В.П., Янин С.Н. Распыление мишени при ассистировании магнетронного разряда ионным пучком // Известия Томского политехнического университета. 2004. Т. 307, no. 7. С. 40–45.

18. Amirghasemi F., Kassegne S. Effects of RF magnetron sputtering deposition power on crystallinity and thermoelectric properties of antimony telluride and bismuth telluride thin films on flexible substrates // Journal of Electronic Materials. 2021. Vol. 50. P. 2190–2198. https://doi.org/10.1007/s11664-020-08681-y.

## References


1. Dongli Q., Feng P., Jie Zh., Zibo X., Yuan D. High ZT and performance controllable thermoelectric devices based on electrically gated bismuth telluride thin films. Nano Energy. 2021;89:1–8. https://doi.org/10.1016/j.nanoen.2021.106472.

2. Ding L.C., Akbarzadeh A., Tan L. A review of power generation with thermoelectric system and its alternative with solar ponds. Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2018;81:799–812. https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.08.010.

3. Tianyi C., Xiao-Lei Sh., Zhi-Gang Ch. Advances in the design and assembly of flexible thermoelectric device. Progress in Materials Science. 2023;131:101003. https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2022.101003.

4. Shterm M., Rogachev M., Shtern Yu., Sherchenkov A., Babich A., Korchagin E., Nikulin D. Thermoelectric properties of efficient thermoelectric materials on the basis of bismuth and antimony chalcogenides for multisection thermoelements. Journal of Alloys and Compounds. 2021;877:160328. https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2021.160328.

5. Rawther A.N., Rout U., Kumar P., Ramanathan R., Mallik R.C. Thermoelectric properties of sputter deposited $Bi_2Te_3$–PbTe multilayer thin films. Physica B: Condensed Matter. 2024;673:415467. https://doi.org/10.1016/j.physb.2023.415467.

6. Xing Y., Liu R., Jinchen Liao, Zhang Q., Xia X., Wang C., Huang H., Chu J., Ming G., Zhu T., Zhu C., Xu F., Yao D., Zeng Y., Bai S., Uher C., Chen L. High-efficiency half-Heusler thermoelectric modules enabled by self-propagating synthesis and topologic structure optimization. Energy and Environmental Science. 2019;12:3390–3399. https://doi.org/10.1039/C9EE02228G.

7. Witting I.T., Chasapis T.C., Ricci F., Peters M., Heinz N.A., Hautier G., Snyder G.J. The thermoelectric properties of Bismuth Telluride. Advanced Electronic Materials. 2019;5(6):1800904. https://doi.org/10.1002/aelm.201800904.

8. Saberi Y., Sajjadi S.A. The effect of thermal evaporation parameters on thermoelectric properties of $Bi_2Te_{2.7}Se_{0.3}$ thin films produced from ball milled powder. Journal of Materials Science: Materials in Electronics. 2023;34:392. https://doi.org/10.1007/s10854-022-09804-3.

9. Lukyanova L.N., Usov O.A., Volkov M.P., Makarenko I.V. Topological thermoelectric materials materials based on Bismuth Telluride. Nanobiotechnology Reports. 2021;16:282–293. https://doi.org/10.1134/S2635167621030125.

10. Liu Y., Chen J., Wang C., Deng H., Zhu D.M., Hu G., Chen X., Dai N. Bulk photovoltaic effect at infrared wavelength in strained $Bi_2Te_3$. APL Materials. 2016;4:126104. https://doi.org/10.1063/1.497179.

11. Ivanov O.N., Yapryntsev M.N., Vasil'ev A.E., Zhezhu M.V., Khovaylo V.V. Metal-ceramic composite $Bi_2Te_3$-Gd: thermoelectric properties. Glass and Ceramics. 2022;79(5-6):180–184. https://doi/org/10.1007/s10717-022-00480-7.

12. Hosokawa Y., Tomita K., Takashiri M. Growth of single-crystalline $Bi_2Te_3$ hexagonal nanoplates with and without single nanopores during temperature-controlled solvothermal synthesis. Scientific reports. 2019;9:10790. https://doi.org/10.1038/s41598-019-47356-5.

13. Voloshchuk I., Babich A., Pereverzeva S., Terekhov D., Sherchenkov A. Flexible thermoelectric generator fabricated by screen printing method from suspensions based on $Bi_2Te_{2.8}Se_{0.2}$ and $Bi_{0.5}Sb_{1.5}Te_3$. Journal of Central South University. 2023;30:2906–2918. https://doi.org/10.1007/s11771-023-5257-0.

14. Zang K.Y., Hu E.T., Wang Z.Y., Tu H.T., Zheng Y.X., Wang S.Y., Zhao H.B., Yang Y.M., Lee Y.P., Chen L.Y. Effect of deposition power on the thermoelectric performance of bismuth telluride prepared by RF sputtering. Cristals. 2020;10(7):552. https://doi.org/10.3390/cryst10070552.

15. Kuzmenko A.P., Kolpakov A.I., Sizov A.S., Emelyanov V.M., Neruchev Yu.A. Magnetron carbon strucrtures obtained by high-frequency magnetron sputtering in Argon and Nitrogen. Proceedings of the Southwest State University. Series: Engineering and Technology. 2024;14(2):71–87 (In Russ.). https://doi.org/10.21869/2223-1528-2024-14-2-71-87.

16. Kuzmenko A.P., Kashkin I.S., Kolpakov A.I., Zhakin A.I., Emelyanov V.M. Structural and morphological features of magnetron nanofilms of TaN with different thicknesses. Proceedings of the Southwest State University. Series: Engineering and Technology. 2024;14(3):147–164 (In Russ.). https://doi.org/10.21869/2223-1528-2024-14-3-147-164.

17. Zhukov V.V., Krivobokov V.P., Yanin S.N. Target sputtering with ion beam assistance to magnetron discharge. Bulletin of Tomsk Polytechnic University. 2004;307(7):40–45 (In Russ.).

18. Amirghasemi F., Kassegne S. Effects of RF magnetron sputtering deposition power on crystallinity and thermoelectric properties of antimony telluride and bismuth telluride thin films on flexible substrates. Journal of Electronic Materials. 2021;50:2190–2198. https://doi.org/10.1007/s11664-020-08681-y.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 244-249.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 244-249.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 537.312.6+537.312.7

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ $FeGa_2Se_4$

***Намиг Надирович Нифтиев***✉
*Азербайджанский Государственный Педагогический Университет, Баку, Азербайджан*
*namiq7@bk.ru*✉

***Аннотация.*** *При разных температурах в кристалле $FeGa_2Se_4$ в результате исследований VAX наблюдаемая зависимость $I \sim U^{3/2}$ возникает в результате инжекции носителей тока из точечных контактов. В этом кристалле из зависимости σ(T) постоянным электрическом поле были определены локальные уровни энергии активации и найдено значение $E_1 = 0,20$ эВ, $E_2 = 0,38$ эВ и $E_3 = 0,47$ эВ. В результате исследования ТСД вычислена энергии залегания уровней, концентрация и сечение захвата ловушек, значение которых соответственно равно: $E_t = 0,18 \pm 0,02$ эВ, $N_t = 3,3 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$, $S_t = 2 \cdot 10^{-18}$ см$^2$.*

***Ключевые слова:*** *$FeGa_2Se_4$, кристалл, вольт-амперная характеристика, температура, инжекция, электропроводность, термостимулированная деполяризация, энергия активации.*

Conference paper

# ELECTRICAL PROPERTIES OF $FeGa_2Se_4$ CRYSTALS

***Namiq N. Niftiyev***✉
*Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan*
*namiq7@bk.ru*✉

***Abstract.*** *At different temperatures in the $FeGa_2Se_4$ crystal, as a result of VAX studies, the observed dependence $I \sim U^{3/2}$ arises as a result of injection of current carriers from point contacts. In this crystal, local activation energy levels were determined from the dependence σ (T) by a constant electric field and $E_1 = 0,20$eV, $E_2 = 0,38$eV və $E_3 = 0,47$eV were found. As a result of the TCD study, the bedding energies, the concentration and the capture cross section of the traps, whose values are respectively equal to: $E_t = 0,18 \pm 0,02$ eV, $N_t = 3,3 \cdot 10^{17}$ cm$^{-3}$, $S_t = 2 \cdot 10^{-18}$ cm$^2$.*

© Нифтиев Н. Н., 2024

***Keywords:*** *$FeGa_2Se_4$, crystal, volt-ampere characteristic, temperature, injection, electrical conductivity, thermally stimulated depolarization, activation energy.*

**1. Введение**

В последние годы тройные халькогенитные соединения, относящиеся к классу многокомпонентных полупроводников, стали объектом интенсивных исследований в связи с их необычными физическими и практическими применениями. Среди этих соединений особый интерес представляют магнитные полупроводники типа $AB_2X_4$ (где A - Mn, Fe, Co, Ni; B - Ga, In; X - S, Se, Te), физические процессы в которых мало изучены и имеют большой потенциал для расширения функционального диапазона фотоэлектронных устройств нового поколения [1-8]. На основе этих соединений могут быть созданы лазеры, модуляторы света, фотодетекторы, терморезисторы, выпрямители и другие функциональные устройства. В настоящей работе в кристалле $FeGa_2Se_4$, принадлежащем к указанному классу соединений, исследованы вольт-амперная характеристика (VAX), температурная зависимость электропроводности σ(T) и тока термостимулированной деполяризации (TDC)..

**2. Основной текст статьи**

Кристалл $FeGa_2Se_4$ получен из стехиометрических количеств элементов высокой чистоты (99,999%). В результате рентгеноструктурного анализа установлено, что $FeGa_2Se_4$ имеет кубическую структуру с параметром кристаллической решетки c=5,54 Å [9].

На рис. 1 представлена вольт-амперная характеристика кристалла $FeGa_2Se_4$ при различных температурах. Отсюда выявляются две области: 1) область, подчиняющаяся закону Ома (I~U) и 2) область $I \sim U^{3/2}$. Известно, что зависимость тока от напряжения в линейной области VAX при малых напряжениях выражается следующим образом:

$$I = \frac{e\mu n_o US}{L}. \qquad (1)$$

Здесь U — приложенное к образцу напряжение, $n_o$ — концентрация носителей заряда в равновесии, μ — подвижность носителей заряда, *e* —носителей тока, *L* — расстояние между контактами, S — площадь контакты. Закон двух третей ($I \sim U^{3/2}$), наблюдаемый после закона Ома в VAX для кристалла, может возникнуть в результате инжекции носителей заряда из точечного контакта или каких-то специально сконфигурированных электродов [10]. Универсальный закон двух третей выражается следующим образом:

$$I = 4\pi e\mu n_o \left(\frac{3\varepsilon}{c_2 e(n_o + n_{to})}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{V}{1+c_1}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (2)$$

Хотим отметить, что уравнение (2) применимо к полностью сферическому случаю. $c_1$ и $c_2$ являются константами и принимают значения в интервале $\frac{1}{2} \le c_1 \le 2$ и $1 \le c_2 \le 2$. Здесь нижние границы соответствуют глубоким

ловушкам. Верхние границы соответствуют случаю захвата или отсутствия захвата на мелких уровнях. Возникновение закона двух третей зависит от соотношения радиусов контактов анода и катода:

$$r_k << r_x << r_a \quad (3)$$

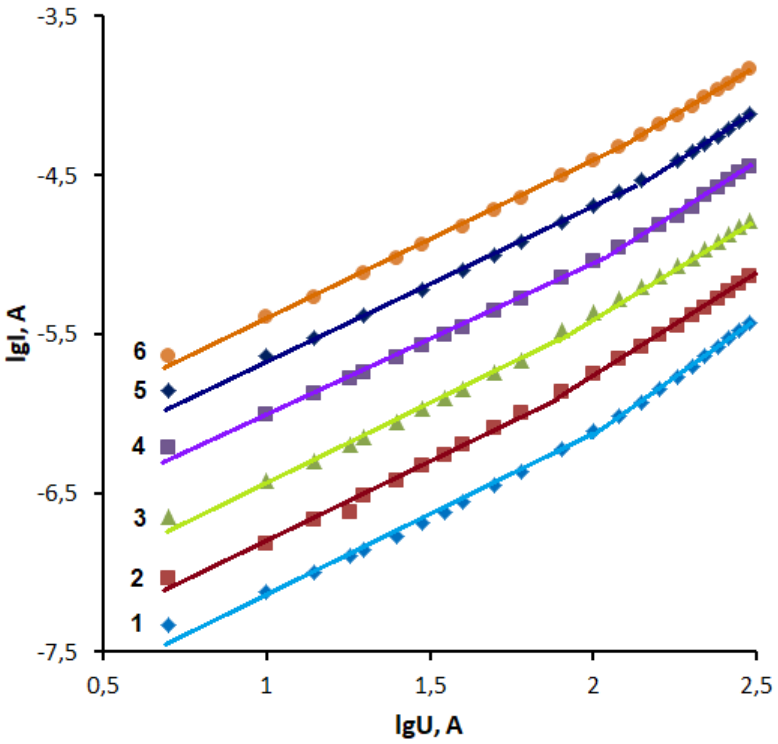



Рисунок 1 — VAX при разных температурах в темноте на кристалле $FeGa_2Se_4$ - T, K: 1- 292, 2-317, 3-342, 4-367, 5-392, 6-417.

Закон двух третей возникает при особом условии, что по мере увеличения приложенного напряжения инжектированные объемные заряды распространяются глубже в объем твердого тела на определенном расстоянии от инжектируемых контактов [10]. При напряжениях, при которых выполняется закон Ома, инжектированные объемные заряды большей частью остаются внутри сферы радиусом $r_x < 2r_s$. При отклонении от закона Ома инжектируемые объемные заряды внутри сферы радиуса увеличиваются по закону $I \sim U^{1/2}$, что приводит к возникновению закона двух третей ($I \sim U^{3/2}$).

На рис. 2 представлена температурная зависимость электропроводности при напряжении 80 В для кристалла $FeGa_2Se_4$. Отсюда видно, что зависимость состоит из трех прямых с разным наклоном. С понижением температуры склонность низкотемпературной части снижается более заметно, чем высокотемпературной. По этому наклону была определена энергия активации примесных уровней в этом кристалле и получены значения $E_1 = 0{,}20$ эВ, $E_2 = 0{,}38$ эВ и $E_3 = 0{,}47$ эВ.

На рис. 3 представлена кривая температурной зависимости ($I \sim 10^3/T$) начальной части пика тока термостимулированной деполяризации, соответствующего температуре 330 К, при напряжении поляризации 80 В для кристалла $FeGa_2Se_4$.

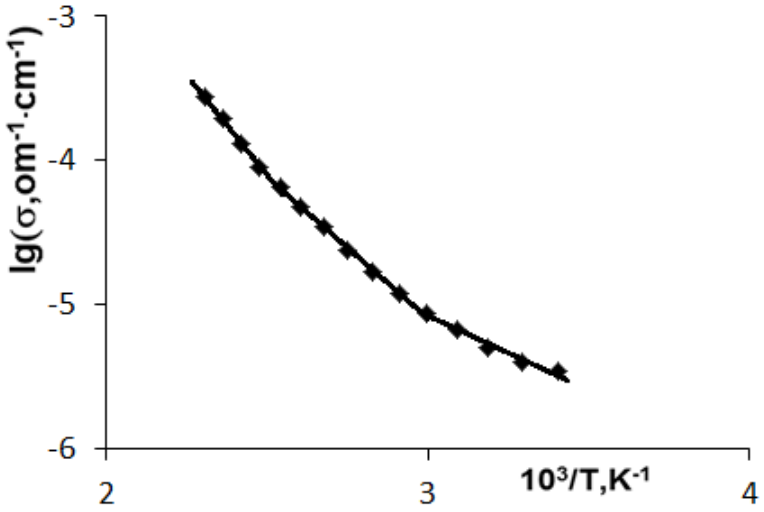



Рисунок 2 — Температурная зависимость электропроводности кристалла $FeGa_2Se_4$.

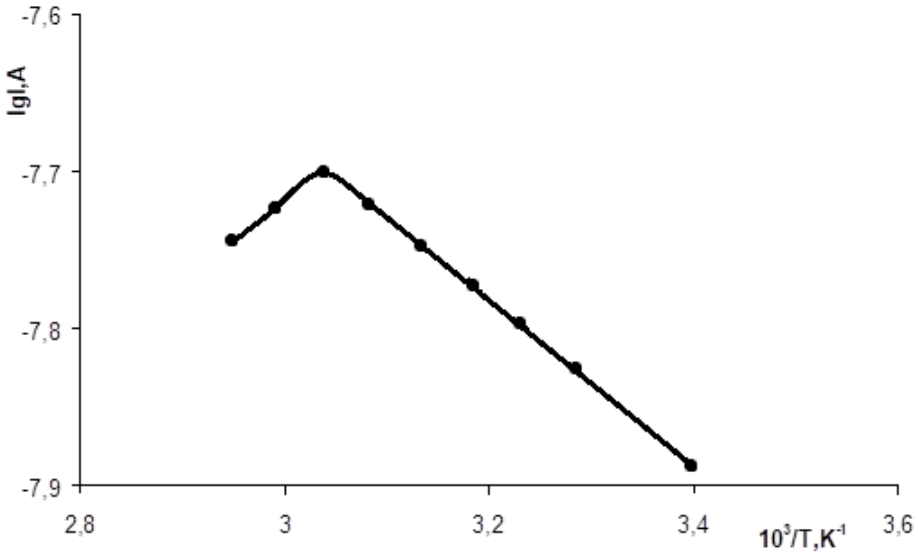



Рисунок 3 – Кривая температурной зависимости ($I \sim 10^3/T$) для кристалла $FeGa_2Se_4$.

Глубину ловушек для исследуемого кристалла определяли по температурной зависимости начального возрастания тока в ТСД (метод Гарлика-Гибсона) [11]. Концентрация и сечения захвата ловушек определяются по следующим формулам [12]:

$$N_t = \frac{e\mu N_c n_{to} E_t}{\alpha} \tag{4}$$

$$S_t = \frac{\beta J_M E_t^2}{2\alpha N_c \upsilon_t k^2 T_M^3} \exp(2E_t / kT_M) \tag{5}$$

Здесь $J_M$ – плотность тока, соответствующая максимуму ТСД, β – скорость нагрева, $N_c$ – плотность состояний в зоне проводимости, $\vartheta_t$ – тепловая скорость свободных носителей заряда, $k$ – константа Больсмана. В результате экстраполяции прямолинейного участка кривой j по координате $\ell nj \sim 1/T$ в область высоких температур она отделяет отрезок α от оси ординат.

В результате расчетов вышеуказанными методами средние значения, полученные из расчета параметров локальных уровней для кристалла $FeGa_2Se_4$, таковы:

$$E_t = 0{,}18 \pm 0{,}02 \text{ эВ}, N_t = 3{,}3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}, S_t = 2 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2.$$

**Заключение**

Таким образом, зависимость $I \sim U^{3/2}$, наблюдаемая в результате VAX-исследования кристалла $FeGa_2Se_4$ при различных температурах, возникает в результате инжекции носителей заряда из точечных контактов или электродов специальной конфигурации. В этом кристалле энергия активации локальных уровней определялась по зависимости σ(T) в постоянном электрическом поле. В результате исследования ТСД в соединении $FeGa_2Se_4$ рассчитаны энергетическая глубина, концентрация и сечение захвата локального уровня.

## Список источников


1. Guratinder K., Schmidt M., Walker H. C., et al. Magnetic correlations in the triangular antiferromagnet $FeGa_2S_4$ // Physical Review B. 2021. Vol. 104. 064412. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.104.064412

2. Zeng C. and Hu Y. Hydrothermal synthesis of a $CoIn_2S_4$/g-$C_3N_4$ heterojunctional photocatalyst with enhanced photocatalytic $H_2$ evolution activity under visible light illumination // Nanotechnology. 2020. Vol. 31. DOI: 10.1088/1361-6528/abb72c.

3. Yang. J., Zhou. Z., Fang J., Wen H., et al. Magnetic and transport properties of a ferromagnetic layered semiconductor $MnIn_2Se_4$ // Appl. Phys. Lett., 2019. Vol. 115, 222101. https://doi.org/10.1063/1.5126233

4. Niftiyev N. N. Photoelectric properties of $MnIn_2S_4$ crystals. Journal of Applied Spectroscopy // 2022. Vol. 88. p.1234–1236. https://link.springer.com/article/10.1007/s10812-022-01304-w.

5. Myoung B. R., Lim J. T., Kim C. S. Investigation of magnetic properties on spin-ordering effects of $FeGa_2S_4$ and $FeIn_2S_4$ // J. Magn. Magn. Mater., 2017. Vol. 438. No. 15. P. 121-125. https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2017.04.056.

6. Kim H., Tiwari A., Hwang E., Cho Y., Hwang H., Bak S., Hong Y., Lee H. $FeIn_2S_4$ Nanocrystals: A Ternary Metal Chalcogenide Material for Ambipolar Field-Effect Transistors //Adv. Sci. 2018. 1800068. www.advancedsciencenews.com.

7. Hou W., Xiao Y., Han G. An interconnected ternary $MIn_2S_4$ (M=Fe, Co, Ni) thiospinel nanosheet array: a type of efficient platinum-free counter electrode for dye-sensitized solar cells // Angewandte Chemie. 2017. Vol. 129, P. 9274. https://doi.org/10.1002/ange.201705399.

8. Niftiev N. N., Tagiev O. B., Muradov M. B., Mamedov F. M. Electrical properties of layered $FeGaInS_4$ single crystals with an alternating current // Semiconductors. 2009. Vol. 43. P. 1407–1409. https://link.springer.com/article/10.1134/S1063782609110025.

9. Bodnar I., Pauliukavets S., Thukhanov S. Structural, mössbauer and magnetic investigations of the $FeGa_2Se_4$ single crystals // Physics, chemistry and application of nanostructures, 2015. 148-151. https://doi.org/10.1142/9789814696524_0038.

10. Инжекционные токи в твердых телах / Ламперт М., Марк П. Москва: Мир, 1973. 473 с.

11. Garlik G.F., Gibson A.F. The elektron trap mechanism of luminescence in sulfide and silicate phosphores // Proc. Phys. Soc. 1948. P. 60 P. 574-590.

12. Термоактивационная токовая спектроскопия высокоомных полупроводников и диэлектриков / Гороховатский Ю.А., Бордовский Г.А. Москва: Наука, 1991. 245 с.

## References

1. Guratinder K., Schmidt M., Walker H. C., et al. Magnetic correlations in the triangular antiferromagnet $FeGa_2S_4$ // Physical Review B. 2021. Vol. 104. 064412. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.104.064412

2. Zeng C. and Hu Y. Hydrothermal synthesis of a $CoIn_2S_4$/g-$C_3N_4$ heterojunctional photocatalyst with enhanced photocatalytic $H_2$ evolution activity under visible light illumination // Nanotechnology. 2020. Vol. 31. DOI: 10.1088/1361-6528/abb72c.

3. Yang J., Zhou Z., Fang J., Wen H., et al. Magnetic and transport properties of a ferromagnetic layered semiconductor $MnIn_2Se_4$ // Appl. Phys. Lett., 2019. Vol. 115, 222101. https://doi.org/10.1063/1.5126233

4. Niftiyev N. N. Photoelectric properties of $MnIn_2S_4$ crystals. Journal of Applied Spectroscopy // 2022. Vol. 88. p.1234–1236. https://link.springer.com/article/10.1007/s10812-022-01304-w.

5. Myoung B. R., Lim J. T., Kim C. S. Investigation of magnetic properties on spin-ordering effects of $FeGa_2S_4$ and $FeIn_2S_4$ // *J.* Magn. Magn. Mater., 2017. Vol. 438. No. 15. P. 121-125. https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2017.04.056

6. Kim H., Tiwari A., Hwang E., Cho Y., Hwang H., Bak S., Hong Y., Lee H. $FeIn_2S_4$ Nanocrystals: A Ternary Metal Chalcogenide Material for Ambipolar Field-Effect Transistors //Adv. Sci. 2018. 1800068. www.advancedsciencenews.com.

7. Hou W., Xiao Y., Han G. An interconnected ternary $MIn_2S_4$ (M=Fe, Co, Ni) thiospinel nanosheet array: a type of efficient platinum-free counter electrode for dye-sensitized solar cells // Angewandte Chemie. 2017. Vol. 129, P. 9274. https://doi.org/10.1002/ange.201705399.

8. Niftiev N. N., Tagiev O. B., Muradov M. B., Mamedov F. M. Electrical properties of layered $FeGaInS_4$ single crystals with an alternating current // Semiconductors. 2009. Vol. 43. P. 1407–1409. https://link.springer.com/article/10.1134/S1063782609110025.

9. Bodnar I., Pauliukavets S., Thukhanov S. Structural, mössbauer and magnetic investigations of the $FeGa_2Se_4$ single crystals // Physics, chemistry and application of nanostructures, 2015. 148-151. https://doi.org/10.1142/9789814696524_0038.

10. Current Injection in Solids / Lampert M., Mark P. Academic Press, 1970. 351p.

11. Garlik G.F., Gibson A.F. The elektron trap mechanism of luminescence in sulfide and silicate phosphores // Proc. Phys. Soc. 1948. P. 60 P. 574-590.

12. Thermally activated current spectroscopy of high-resistance semiconductors and dielectrics / Gorokhovatsky Yu.A., Bordovsky G.A. Moscow: Nauka, 1991. 245 p. (in Russian).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 250-255.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 250-255.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91

# ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРНОГО ЭФФЕКТА НА ЭЛЕКТРОННЫЕ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БОРОНИТРИДНЫХ НАНОКЛАСТЕРОВ ТИПА «КОЛЬЦО»

***Евгений Юрьевич Орлов[1]✉, Александр Павлович Кузьменко[2]***
*[1, 2]Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия*
*[1]orlov.eugene@bk.ru✉, https://orcid.org/0009-0004-7401-7099*
*[2]apk3527@mail.ru*

***Аннотация.*** *Методом псевдопотенциалов в рамках теории функционала плотности исследованы энергетическая и электронная структура фрагментов (колец) нанотрубок нитрида бора. Обнаружено, что энергия связи, приходящаяся на один атом, изменяется монотонно, без минимума, в исследованном диапазоне изменения диаметра 0.285 – 1.382 nm. Ширина энергетической щели увеличивается с увеличением диаметра также монотонно: максимальная ее величина равна 4.62 eV для кольца типа зигзаг (D = 1.23 nm), минимальная 2.5 eV у кольца того же типа (D = 0.414 nm). Исследованы также системы из двух колец, вложенных одно в другое. Оказалось, что в системе, состоящий из колец типа кресло с диаметрами 0.831 и 0.285 nm формируется энергетическая щель шириной 2.7 eV. Проведены расчеты для фрагментов нанотрубок увеличенной длины (два гексагона) типа «седло», обнаружена минимальная ширина энергетической щели 3.8 eV при диаметре 0.27 nm. Исследование проведено в двух различных программных средах с использованием разных подходов к моделированию псевдопотенциалов, результаты моделирования дают хорошее согласие между собой. Предсказана возможность создания квантовых точек на основе фрагментов BN трубок с излучением в видимом диапазоне.*

***Ключевые слова:*** *нанотрубки нитрида бора; ТФП расчеты; энергетическая щель; видимое излучение.*

Conference paper

# INFLUENCE OF SIZE EFFECT ON ELECTRONIC AND OPTICAL PROPERTIES OF BORONITRIDE NANORINGS: DFT STUDY

***Evgeny Yu. Orlov[1]✉, Alexander P. Kuz'menko[2]***

© Орлов Е. Ю., Кузьменко А. П., 2024

[1, 2]South-West State University, Kursk, Russia
[1]orlov.eugene@bk.ru✉, https://orcid.org/0009-0004-7401-7099
[2]apk3527@mail.ru

***Abstract.*** *The energy and electronic structure of boron nitride nanotube fragments (rings) was studied using the pseudopotential method within the density functional theory. It was found that the binding energy per atom varied monotonically, without a minimum, in the studied diameter range of 0.285 – 1.382 nm. The energy gap width also increased monotonically with increasing diameter: its maximum value was 4.62 eV for a zigzag ring (D = 1.23 nm), and the minimum was 2.5 eV for the same type of ring (D = 0.414 nm). Systems of two rings nested one inside the other were also studied. It turned out that an energy gap of 2.7 eV was formed in a system consisting of armchair rings with diameters of 0.831 and 0.285 nm. Calculations were performed for fragments of nanotubes of increased length (two hexagons) of the "armchair" type, a minimum energy gap width of 3.8 eV was found with a diameter of 0.27 nm. The study was carried out in two different software environments using different approaches to modeling pseudopotentials, the modeling results give good agreement with each other. The possibility of creating quantum dots based on fragments of BN tubes with radiation in the visible range was predicted.*

***Keywords:*** *boron nitride nanotubes; DFT study; energy gap; visible radiation.*

## 1. Введение

В последние годы стали актуальны исследования двумерных материалов (2D), создаваемых из элементов с III по IV групп, демонстрирующих целый ряд уникальных свойств и применений [1]. К настоящему времени они стремительно заняли топовые публикационные позиции. В этом ряду в число лидеров выдвинулся гексагональный нитрид бора BN [2]. В немалой степени интерес к нему сопряжен с развитым полиморфизмом [3] из-за особенностей структуры [4], когда связи между атомами B и N реализуются как $sp^2$, так и $sp^3$ гибридизацией электронов. Для $sp^2$ в BN характерны ромбическое ($r$ – BN) и вюрцитное ($w$ – BN), тогда как для $sp^3$ – гексагональное ($h$ – BN) и кубическое ($c$ – BN) метастабильные и стабильные упорядочения, соответственно. Послойная структура в $h$ – BN и $r$ – BN (через 0.333 нм) вызвана слабым Ван-дер-Ваальсовым взаимодействием, а в $c$ – BN и $w$ – BN доминирующим выступают ковалентные взаимодействия на расстояниях как между атомами B и N – 0.146 nm, так и между атомами N и N – 0.25 nm [4]. Помимо отмеченных структур из белого графена BN после гидроксильной функционализации создаются нанополоски (типа зигзага и кресла BN), нанотрубки, фуллерены, клетки и даже квантовые точки по аналогии с углеродными структурами, то есть фактически – 0$D$, 1$D$, 2$D$ и 3$D$ наноматериалы [5-8]. Такие материалы успешно используются в качестве модельных двумерных наноструктур при их расчетах с применением теории функционала плотности. В практическом отношении интерес к исследуемому объекту обусловлен стабильностью, вплоть до высоких температур, что в сочетании с двойными тубулярными боронитридными и углеродными структурами

рассматриваются, как перспективные материалы водородной энергетики [8]. Ввиду технических ограничений по вычислениям нами исследовались и проанализированы электронные свойства нанокластеров нитрида бора в виде фрагментов (колец) из нанотрубок с разными диаметрами. Для указанных выше межатомных размерах и в диапазоне изменений диаметра от 2.85 до 13.82 Å объект исследования по аспектному числу обоснованно может быть отнесен к 2*D* – материалам.

**2. Основная часть**

Расчеты проведены с использованием пакета FHI96md [10], действующего на основе теории функционала плотности [11] и метода псевдопотенциалов. Псевдопотенциалы конструировались с помощью пакета FHI96pp [12]. Энергия обменно-корреляционного взаимодействия вычислялась в рамках приближения GGA [13]. Энергия обрезания набора плоских волн составляла 30 Ry, размеры суперъячейки варьировались в зависимости от размеров моделируемой системы с целью избежать взаимодействие системы с ее виртуальными двойниками. Изучаемые кольца типа «кресло» и «зигзаг» генерировались с помощью специальной программы, разработанной нами. Плотности электронных состояний строились путем размытия электронных уровней кривыми Гаусса. Плотности локальных состояний рассчитывались с помощью специальной программы, разработанной нами.

Расчет энергии связи, приходящейся на один атом, проводился по формуле:

$$E_{\mathrm{b}} = \frac{E(\mathrm{BN}) - E(\mathrm{N}) - E(\mathrm{B})}{n}, \qquad (1)$$

где $E_{\mathrm{b}}$ – удельная энергия связи (на атом); $E(\mathrm{BN})$, $E(\mathrm{B})$, $E(\mathrm{N})$ – энергия связи наноструктуры BN, изолированного атома B, изолированного атома N соответственно; $n$ – число атомов в суперъячейке [8].

Мы повторили эти расчеты и еще раз убедились, что $E_{\mathrm{b}}$ для BNNT с различными индексами хиральности («кресло» и «зигзаг») понижается монотонным образом, не демонстрируя минимума. Это согласуется с опубликованными данными [6]. Далее мы исследовали фрагменты нанотрубок нитрида бора, при этом в качестве фрагментов мы взяли кольца. На рисунке 1 представлена атомная схема такого кольца из углерода и приведена зависимость $E_{\mathrm{b}}$ от диаметра кольца $D$, а на рисунке 2 представлена аналогичная зависимость для колец, составленных из атомов B и N.

На рисунке 3а мы построили зависимость ширины энергетической щели $E_{\mathrm{g}}(D)$; она монотонная, $E_{\mathrm{g}}$ увеличивается с ростом $D$, однако для колец типа «зигзаг» зависимость эта более ярко выражена, чем для колец типа «кресло». Этот результат коррелирует с данными, приведенными в работе [8], где проведены аналогичные расчеты для бесконечных нанотрубок. Для более убедительного сопоставления наших результатов с результатами этой работы мы также провели расчеты для бесконечных нанотрубок. Результаты представлены на рисунке 3б.

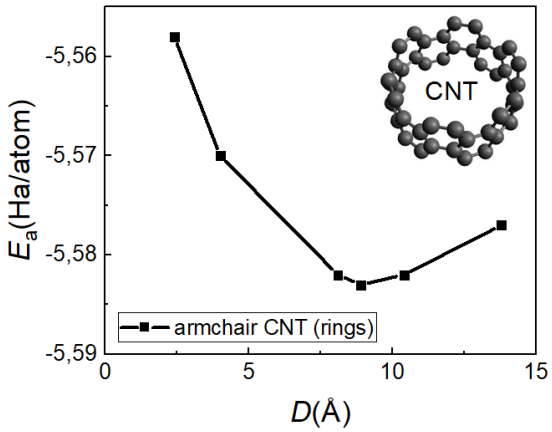



Рисунок 1 – Энергия связи (на атом) для колец CNT.

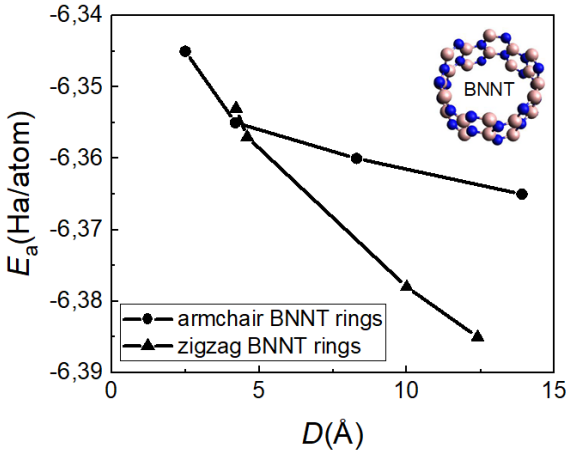



Рисунок 2 – Энергия связи (на атом) для колец BNNT.

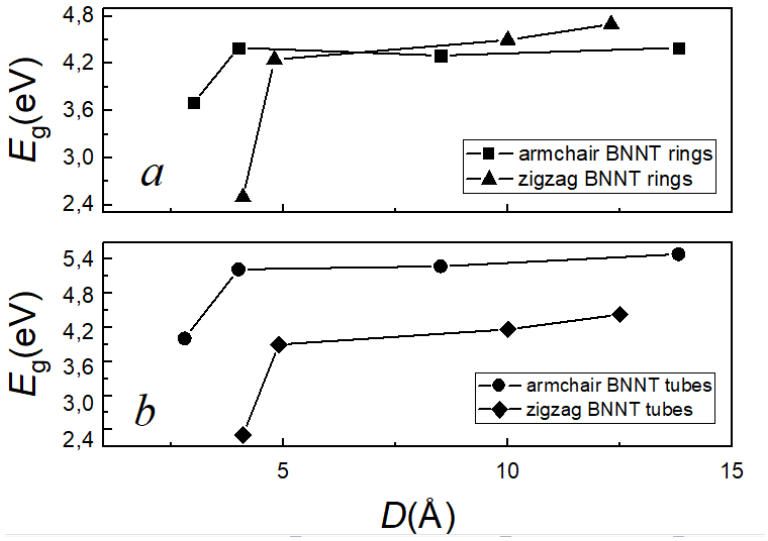



Рисунок 3 – Ширина энергетической щели для колец BNNT (*a*) и нанотрубок BNNT (*b*).

Двойной нанокластер, образованный путем помещения фрагмента нанотрубки типа «кресло» с диаметром $D_{in}$ = 0.414 nm внутрь фрагмента нанотрубки такого же типа с диаметром $D_{out}$ = 0.831 nm, по аналогии с [8], исследовался путем построения плотности электронных состояний (DOS) данной системы, а также локальной плотности электронных состояний (LDOS), отнесенных к составляющим его фрагментам. Сравнительный анализ данных табл. 1 показал, что для двойного нанокластера $E_g$ оказывается меньше, чем у составляющих ее фрагментов, и этот эффект обусловлен сужением энергетической щели из-за взаимодействия составляющих фрагментов и появлением новых энергетических уровней в запрещенной зоне, а также изменением DOS в радиальном направлении. В совокупности эти преобразования электронной структуры фрагментов, составляющих нанокластер, приводят к сокращению $E_g$. Из представленных в таблице 1 расчетных данных следует, что подобному двойному нанокластеру может быть характерно видимое излучение с $\lambda_{max}$ = 450 nm (1) при $E_g$ = 2.7 eV [9].

Таблица 1. Ширина энергетической щели $\Delta E_g$ (в eV), измеренная путем построения DOS и LDOS для наноструктуры в виде двух вложенных друг в друга фрагментов нанотрубок типа «кресло».

| $\Delta E_g$, измеренная из DOS, eV | | | $\Delta E_g$, измеренная из LDOS, eV | |
|---|---|---|---|---|
| полная | для внутреннего кольца | для внешнего кольца | для внутреннего кольца | для внешнего кольца |
| 2.7 | 3.2 | 4.7 | 2.7 | 2.7 |

## 3. Заключение

Электронные и энергетические характеристики боронитридных нанокластеров в виде фрагментов нанотрубок (колец), по аспектному соотношению отнесенные к двумерным, существенно отличаются по сравнению с тубулярными BNNT от CNT. Нанокластеры нитрида бора характеризуются усилением размерной зависимости $E_b(D)$ и $E_g(D)$ для структур с разными типами хиральности «зигзаг» и «кресло». Установлено, что с уменьшением $D$ и приближением его к высоте нанокластера (два гексагона) $E_b$ и $E_g$ снижаются по абсолютной величине. Для модели нанокластера с вложенными друг в друга фрагментами нанотрубок BNNT типа «кресло» ширина энергетической щели оказалась наименьшей. По изменениям $E_g$ получены оценки для длины волны $\lambda_{max}$. Для нанокластера типа «зигзаг» минимального размера $D$ = 2.85 Å, $H$ = 2.77 Å расчетная величина оптического отклика с излучением $\lambda_{max}$ = 500 nm, а для нанокластера типа «кресло» с размерами $D$ = 2.80 Å, $H$ = 6.40 Å – 630 nm, а у двойного нанокластера, состоящего из фрагментов нанотрубок типа «кресло», с диаметрами $D_{out}$ = 8.31 Å и $D_{in}$ = 4.14 Å вплоть до – 450 nm.

## Список источников


1. Dmitry V. Shtansky, Andrei T. Matveev, Elizaveta S. Permyakova, Denis V. Leybo, Anton S. Konopatsky and Pavel B. Sorokin // Nanomaterials 12, 2810 (2022).

2. Yufei Yang, Yi Peng, Muhammad Farooq Saleem, Ziqian Chen, Wenhong // Sun. Materials, 15 (24), 4396 (2022).

3. Mengna Li, Gordon Huang, Xiujuan Chenb, Jianan Yin, Peng Zhang, Yao Yao, Jian Shen, Yuwei Wu, Jing Huang // Nano Today, 44 (21), 101486 (2022).

4. Duc-Quang Hoang, Ngoc-Hai Vu, Thanh-Qui Nguyen, Thanh-Dung Hoang, Xuan-Huu Cao, Dinh-Khang // Pham. Phys. Scr., 98, 042001 (2023).

5. Václav Šteng, Jiˇrí Henych, and Martin Kormunda // Science of Advanced Materials, 6, 1 (2014).

6. Junkai Ren, Luigi Stagi and Plinio Innocenzi // J Mater Sci, 56, 4053 (2021)

7. Yongjia Liu, Weiheng Gong, Xingjian Liu, Yicheng Fan, Aihua He and Huarong Nie // Polymers, 16, 1169 (2024).

8. Mahmoud A. S. Sakr, Hazem Abdelsalam, Nahed H. Teleb, Omar H. Abd-Elkader & Qinfang Zhang // Scientific Reports, 14, 4970 (2024).

9. Заводинский В.Г., Кузьменко А.П. // ФТП, 53(10), 1419 (2019).

10. Beckstedte M., Kley A., Neugebauer J., Scheffler M // Computational Physics Communications, 107, 187 (1997).
11. Hohenberg H., Kohn W. // Phys. Rev., 136, B864 (1964)
12. Fuchs M., Scheffler M. // Computational Physics Communications, 119, 67 (1999).
13. Perdew J.P., Wang Y. // Phys. Rev. B, 33, 8800 (1986).

## References

1. Dmitry V. Shtansky, Andrei T. Matveev, Elizaveta S. Permyakova, Denis V. Leybo, Anton S. Konopatsky and Pavel B. Sorokin // Nanomaterials 12, 2810 (2022).
2. Yufei Yang, Yi Peng, Muhammad Farooq Saleem, Ziqian Chen, Wenhong // Sun. Materials, 15 (24), 4396 (2022).
3. Mengna Li, Gordon Huang, Xiujuan Chenb, Jianan Yin, Peng Zhang, Yao Yao, Jian Shen, Yuwei Wu, Jing Huang // Nano Today, 44 (21), 101486 (2022).
4. Duc-Quang Hoang, Ngoc-Hai Vu, Thanh-Qui Nguyen, Thanh-Dung Hoang, Xuan-Huu Cao, Dinh-Khang // Pham. Phys. Scr., 98, 042001 (2023).
5. Václav Šteng, Jiˇrí Henych, and Martin Kormunda // Science of Advanced Materials, 6, 1 (2014).
6. Junkai Ren, Luigi Stagi and Plinio Innocenzi // J Mater Sci, 56, 4053 (2021).
7. Yongjia Liu, Weiheng Gong, Xingjian Liu, Yicheng Fan, Aihua He and Huarong Nie // Polymers, 16, 1169 (2024).
8. Mahmoud A. S. Sakr, Hazem Abdelsalam, Nahed H. Teleb, Omar H. Abd-Elkader & Qinfang Zhang // Scientific Reports, 14, 4970 (2024).
9. V.G. Zavodinsky, A.P. Kuz'menko // Semiconductors, 53(10), 1419 (2019).
10. Beckstedte M., Kley A., Neugebauer J., Scheffler M // Computational Physics Communications, 107, 187 (1997).
11. Hohenberg H., Kohn W. // Phys. Rev., 136, B864 (1964).
12. Fuchs M., Scheffler M. // Computational Physics Communications, 119, 67 (1999).
13. Perdew J.P., Wang Y. // Phys. Rev. B, 33, 8800 (1986).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 256-263.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 256-263.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91+519.65

# СПЕКТРАЛЬНО-СЕЛЕКТИВНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОЧЕЙ СХЕМЫ КВАНТОВОГО ВЕНТИЛЯ CNOT НА КРИСТАЛЛЕ $CaF_2$: $Er^{3+}$

***Елена Эдуардовна Тимофеева[1]✉, Александр Владимирович Попов[2], Юрий Владимирович Орловский[3]***
*[1,2,3]Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия*
*[1]elena16051997@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-2767-9036*
*[2]alikpop@mail.ru*
*[3] yurii.orlovskii@yandex.ru*

***Аннотация.*** *Тетрагональные оптические центры иона $Er^{3+}$ в легированных кристаллах $CaF_2$ исследовались в условиях низких температур при возбуждении перестраиваемым лазером с узкой линией генерации. Установлено сильное неоднородное уширение спектра поглощения и неселективного спектра возбуждения люминесценции на управляющем переходе квантового вентиля CNOT $^4I_{15/2}(1) \rightarrow {}^4I_{9/2}(1)$ иона $Er^{3+}$, связанное с локальными дефектами кристаллической структуры, что вместе с сильным диполь-дипольным взаимодействием между соседними редкоземельными ионами позволяет надеяться на реализацию квантового вентиля CNOT для сверхбыстрых квантовых компьютеров. Также был определен верхний предел времени декогеренции рабочей схемы квантового вентиля CNOT на основе выбранных уровней иона $Er^{3+}$.*

***Ключевые слова:*** *фторид кальция, ион эрбия, тетрагональный оптический центр, люминесценция, селективная лазерная спектроскопия, время жизни, многофоннонная релаксация, штарковская блокада, квантовый вентиль CNOT.*

***Благодарности:*** *авторы выражают благодарность к.ф.-м.н. Долгову Л. за помощь в проведении исследования.*

Conference paper

# SITE-SELECTIVE SPECTRAL STUDY OF THE OPERATING SCHEME OF THE CNOT QUANTUM GATE ON AN $Er^{3+}$: $CaF_2$ CRYSTAL

***Elena Ed. Timofeeva[1]✉, Alexander V. Popov[2], Yurii V. Orlovskii[3]***

© Тимофеева Е. Э., Попов А. В., Орловский Ю. В., 2024

[1,2,3]*Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[1] *elena16051997@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-2767-9036*
[2]*alikpop@mail.ru*
[3]*yurii.orlovskii@yandex.ru*

***Abstract.*** *Tetragonal optical centers of the $Er^{3+}$ ion in $CaF_2$ doped crystals were studied under low-temperature conditions under tunable laser excitation with narrow laser line. A strong inhomogeneous broadening of the absorption spectrum and non-selective luminescence excitation spectrum on the $^4I_{15/2}(1) \rightarrow {}^4I_{9/2}(1)$ control transition of a CNOT quantum gate associated with local defects of the crystal structure has been established, which, together with a strong dipole-dipole interaction between neighboring rare-earth ions, allows us to hope for the implementation of a CNOT quantum gate for ultrafast quantum computers. An upper limit of the decoherence time of the operating scheme of the CNOT quantum gate was also determined based on selected levels of $Er^{3+}$ ion.*

***Keywords:*** *calcium fluoride, erbium ion, tetragonal optical center, luminescence, selective laser spectroscopy, lifetime, multiphonon relaxation, Stark blockade, CNOT quantum gate*

***Acknowledgments:*** *The authors express their gratitude to PhD in Physics and Mathematics L. Dolgov for assistance in conducting the study.*

## 1. Введение

Фундаментальные исследования люминесценции на переходе $^4I_{9/2} \rightarrow {}^4I_{15/2}$ иона $Er^{3+}$ важны в связи с перспективой его применения для управления штарковской блокадой в квантовом вентили CNOT для сверхбыстрых квантовых компьютеров, основанных на примесных редкоземельных ионах в легированных кристаллах [1]. Штарковский уровень $^4I_{9/2}(1)$ является состоянием |0> кубита, где состоянием |1> является метастабильный штарковский уровень $^4S_{3/2}(1)$, а управляющим состоянием |1'> – нижнее штарковское состояние основного мультиплета $^4I_{15/2}(1)$.

Экспериментальные значения энергий переходов с нижнего штарковского уровня $^4I_{15/2}(1)$ на возбужденный штарковский уровень $^4I_{9/2}(1)$, а также переходы с метастабильного штарковского уровня $^4S_{3/2}(1)$ на штарковский уровень мультиплета $^4I_{15/2}$ и переходы с возбужденного штарковского уровня $^4I_{9/2}(1)$ на штарковские уровни основного состояния $^4I_{15/2}$ для тетрагонального оптического центра (ОЦ) взяты из [2, 3] (рисунок 1). Так как в данной работе все исследования проводились при низких температурах (до 77 К), то при рассмотрении учитывались переходы только с нижних штарковских уровней мультиплетов, так как населенность остальных штарковских уровней пренебрежимо мала. При замещении двухвалентного иона кальция в кристалле $CaF_2$ трехвалентными ионами эрбия образуется избыточный положительный заряд, который компенсируется отрицательно заряженным ионом фтора, расположенном в ближайшем междоузлии. В результате тетрагональные ОЦ в кристалле $CaF_2$: $Er^{3+}$

имеют большой статический дипольный момент. За счет сильного диполь-дипольного взаимодействия между двумя РЗ ионами соседних тетрагональных ОЦ при импульсном лазерном возбуждении первого иона меняется локальное кристаллическое поле во втором соседнем ионе и может происходить смещение его электронных уровней. Также за счет ближайших дефектов кристаллической решетки происходит неоднородное уширение линий спектров поглощения и спектров возбуждения люминесценции. Все вышеперечисленное может приводить к штарковской блокаде, которая может быть использована для реализации ультрабыстрых наносекундных квантовых вентилей CNOT для квантовых компьютеров (КК) [1].

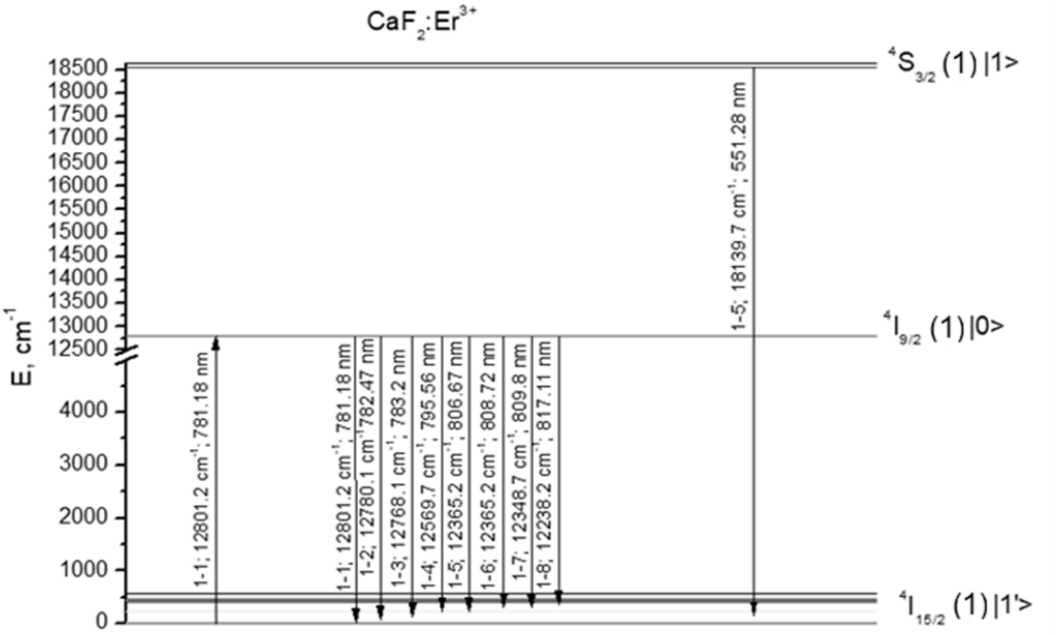



Рисунок 1 – Экспериментальные энергии (длины волн переходов) межштарковских переходов между различными мультиплетами тетрагонального центра симметрии $C_{4v}$ иона $Er^{3+}$ в кристалле $Er^{3+}$: $CaF_2$ [2].

Целью работы было исследование операционной схемы квантового вентиля CNOT, состоящей из набора электронных уровней $^4S_{3/2}(1)$, $^4I_{9/2}(1)$ и $^4I_{15/2}(1)$ тетрагонального ОЦ симметрии $C_{4v}$ иона $Er^{3+}$, а именно, измерение низкотемпературных спектров поглощения, спектров возбуждения и испускания, а также кинетики люминесценции кристаллов $CaF_2$: $Er^{3+}$ при селективном лазерном возбуждении.

## 2. Основной текст статьи

### 2.1. Описание экспериментальной установки

Спектры поглощения были сняты с помощью спектрофотометра Cary 5000 uv-vis-nir, спектральный диапазон 190–3300 нм, спектральная ширина щели (SBW) от 0.04 нм.

Предварительные измерения спектров апконверсионной люминесценции и кинетики затухания люминесценции $CaF_2$: 0.03% $Er^{3+}$ при T = 77 K при лазерном возбуждении на длине волны 781.1 нм проводились с использованием импульсного перестраиваемого лазера на $Al_2O_3$-Ti (LOTIS-TII, Минск, Беларусь)

без эталона Фабри-Перо с использованием монохроматора МДР-23 (LOMO, Россия), фотоумножителя Hamamatsu R13456P и многоканального счетчика Timeharp 260 (PicoQuant GmbH, Берлин, Германия), работающего в режиме одиночного счета фотонов. Для селективной спектроскопии с высоким разрешением накачка осуществлялась модифицированным Estla Ltd, (Тарту, Эстония) перестраиваемым импульсным Ti:Sa лазером (LOTIS-TII-LS-2134-LT40, Минск, Беларусь) с диапазоном перестройки 690-1000 и 350-500 нм с интерферометром внутри резонатора, что позволяло получать лазерную линию шириной $\Delta\lambda$ = 0.003 нм при плавной перестройке. Длина волны возбуждения контролировалась лазерным измерителем длины волны WS5 (HighFinesse, Graefelfing/Munich, Германия/Angstrom, Новосибирск, Россия) с точностью 0.001 нм. Измеренная длина волны лазерной линии передавалась в компьютер на каждом шаге лазерного сканирования и таким образом компенсировалась нелинейность шага шагового двигателя. Люминесценция образца собиралась конденсорной линзой и диспергировалась спектрометрической системой Andor Shamrock 750 (Andor, Oxford Instruments, Абингдон-он-Темз, Великобритания) с решетками 300, 1200 или 1800 штрихов на мм и линейной обратной дисперсией до 0.66 нм/мм. Флуоресценция детектировалась стробируемой камерой Andor Technology iCCD iStar DH320T-18H-13 с размером пикселя 26 мкм и системой охлаждения Пельтье. Вся система синхронизировалась цифровым генератором задержки/импульса DG645/1 (Stanford Research Systems, Саннивейл, Калифорния, США) с точностью 1.5 нс, определяемой временной нестабильностью внутренних генераторов импульсов лазера Nd: YAG. Образец помещался в криостат Janis CSS-300S/204 N (США) и поддерживался при температуре 6.6 К. Лазерный луч фокусировался линзой (f = 500 мм) на образец.

### 2.2. Селективная лазерная спектроскопия тетрагонального ОЦ симметрии $C_{4v}$ в кристаллах $CaF_2$: x% $Er^{3+}$

Для тетрагональных ОЦ иона $Er^{3+}$ были измерены, в частности, спектр поглощения, спектры возбуждения и испускания люминесценции. Спектр поглощения на переходе $^4I_{15/2}(1) \rightarrow {}^4I_{9/2}(1)$ в кристалле $CaF_2$: 0.1% $Er^{3+}$ при T = 77 К оказался неоднородно уширен с шириной линии на полувысоте 5.1 $см^{-1}$ (рисунок 2). Также, было установлено значительное неоднородное уширение (4.6 $см^{-1}$) неселективного спектра возбуждения люминесценции иона $Er^{3+}$ тетрагональных ОЦ в кристалле $CaF_2$: 0.03% $Er^{3+}$ при T = 6.6 К на управляющем переходе CNOT $^4I_{15/2}(1) \rightarrow {}^4I_{9/2}(1)$ (рисунок 3), что позволяет надеяться на реализацию многокубитного КК в несколько десятков кубитов [1]. Селективный спектр люминесценции, полученный при возбуждении лазером на красителе с узкой спектральной линией 0.003 нм (0.05 $см^{-1}$) со спектральным разрешением 0.018 нм (0.27 $см^{-1}$), имеет ширину на полувысоте 0.32 $см^{-1}$ (рисунок 4). На спектре люминесценции при температуре 70 К наблюдается двукратное уширение линии и сдвиг максимума на 0.01 нм (0.15 $cm^{-1}$) в длинноволновую область, которые связаны с увеличением электрон-фононного взаимодействия в результате нагрева кристалла.

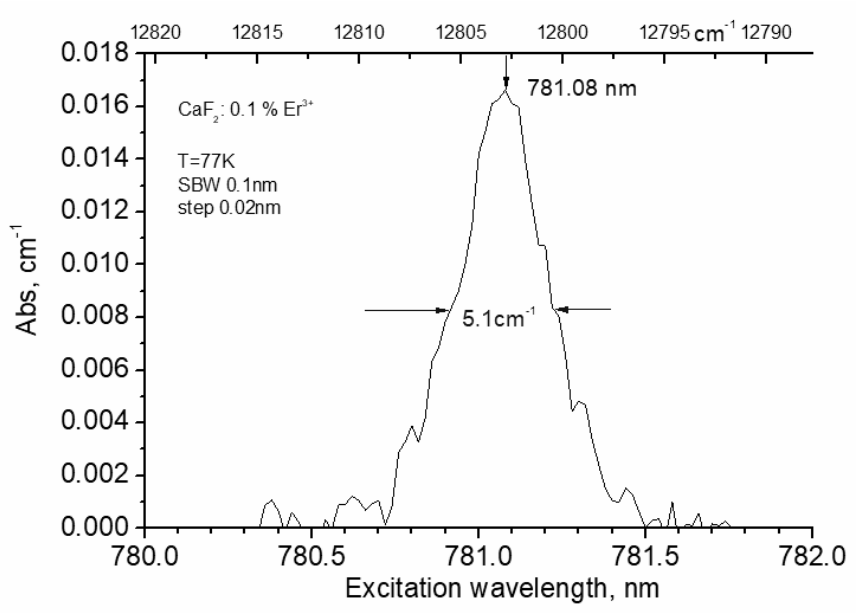



Рисунок 2 – Спектр поглощения на переходе $^4I_{15/2}(1) \rightarrow {}^4I_{9/2}(1)$ в кристалле $CaF_2$: 0.1% $Er^{3+}$ при T = 77 K.

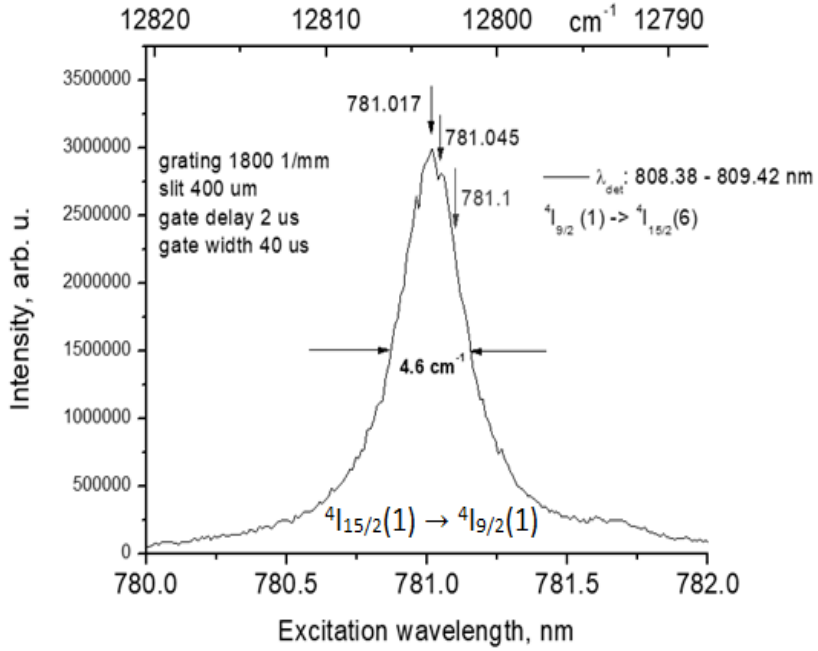



Рисунок 3 – а) Неселективный спектр возбуждения люминесценции тетрагонального ОЦ на переходе $^4I_{15/2}(1) \rightarrow {}^4I_{9/2}(1)$ в кристалле $CaF_2$: 0.03% $Er^{3+}$ при T = 6.6 K. Стрелками указаны длины волн возбуждения уровня $^4I_{9/2}(1)$ при регистрации кинетики затухания люминесценции на переходе $^4I_{9/2}(1) \rightarrow {}^4I_{15/2}(6)$ (рисунок 5).

Также были измерены кривые затухания люминесценции со штарковского уровня $^4I_{9/2}(1)$ для концентрационной серии кристаллов $CaF_2$: x% $Er^{3+}$ (x = 0.03–0.3% $Er^{3+}$) при T = 6.6 K и определено его время жизни $\tau = 7.4 \pm 0.1$ мкс (рисунок 5). Оно оказалось в 2 раза короче, измеренного в работе [4] для кристалла $CaF_2$: 0.5% $Er^{3+}$ при T = 77 K без спектральной селекции по люминесценции ($\tau$ = 14.0 мкс), что говорит о том, в [4] было измерено время жизни другого ОЦ. Это время определяется скоростью многофононной релаксации. Фактически

полученное время жизни — это предел сверху значения времени декогеренции $T_2$, определяющее максимальную продолжительность времени в течение которого можно проводить последовательные вычисления для заданного квантового алгоритма.

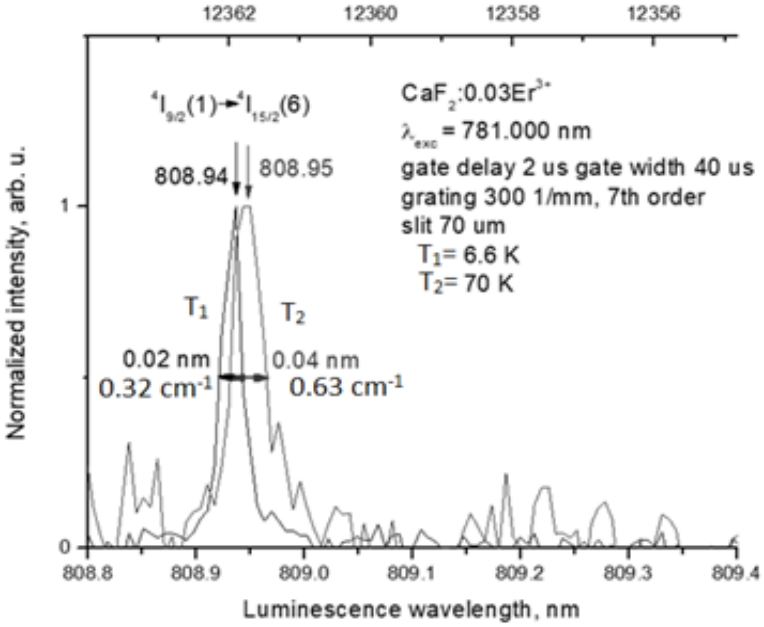



Рисунок 4 – Селективные спектры люминесценции на переходе $^4I_{9/2}(1) \rightarrow {}^4I_{15/2}(6)$ тетрагонального ОЦ в кристалле $CaF_2$: 0.03% $Er^{3+}$, измеренные при разных температурах.

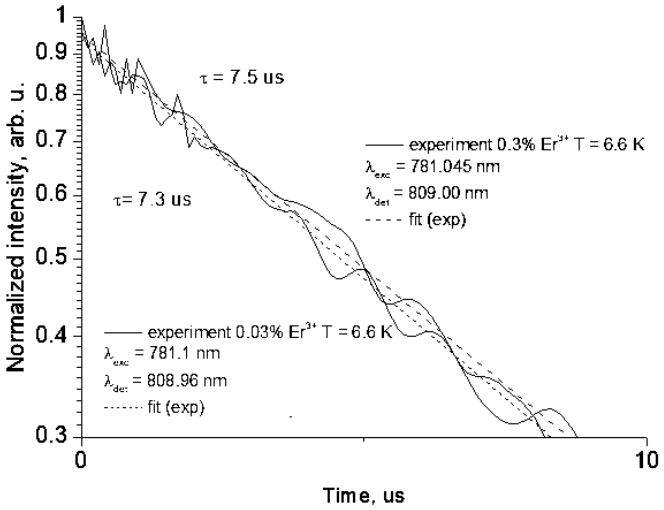
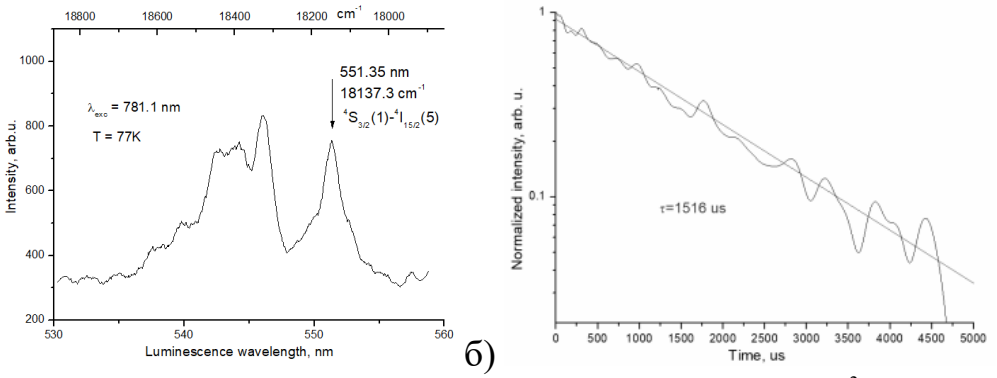



Рисунок 5 – Кривые затухания люминесценции кристаллов $CaF_2$: 0.03% $Er^{3+}$ и $CaF_2$: 0.3% $Er^{3+}$ при T = 6.6 К. Параметры измерения представлены в легенде на рисунке.

Для подтверждения спектральной селекции в предыдущих измерениях именно тетрагонального ОЦ был снят спектр апконверсионной люминесценции (рисунок 6а) на его идентифицированных в работе [5] переходах с уровня $^4S_{3/2}(1)$ в результате его двухступенчатого возбуждения на переходах $^4I_{15/2}(1) \rightarrow {}^4I_{9/2}(1)$; $^4I_{9/2}(1) \rightarrow {}^4F_{9/2}$ с поглощением второго фотона из возбужденного состояния с последующей многофононной релаксацией на метастабильный уровень $^4S_{3/2}(1)$. В максимуме спектра люминесценции на переходе $^4S_{3/2}(1) \rightarrow {}^4I_{15/2}(5)$ была измерена кинетика затухания люминесценции штарковского уровня $^4S_{3/2}(1)$ в

кристалле $CaF_2$: 0.03% $Er^{3+}$ при T = 77 К (рисунок 6б). Полученное время жизни 1516 мкс совпадает со значением, измеренным при концентрации иона эрбия равной 0.01 мол. % (τ = 1524 мкс) [5].




а) б)

Рисунок 6 – Апконверсионная люминесценция тетрагонального ОЦ иона $Er^{3+}$ в кристалле $CaF_2$: 0.03% $Er^{3+}$ при T = 77 К при лазерном возбуждении на длине волны 781.1 нм: а) селективный спектр люминесценции, измеренный на переходе $^4S_{3/2}(1) \rightarrow {}^4I_{15/2}(5)$; б) кинетика затухания люминесценции уровня $^4S_{3/2}$ иона $Er^{3+}$, зарегистрированная на длине волны 551.3 нм на переходе $^4S_{3/2}(1) \rightarrow {}^4I_{15/2}(5)$.

## 3. Заключение

Для квантового вентиля CNOT была выбрана схема электронных уровней $^4I_{15/2}(1)$, $^4I_{9/2}(1)$, $^4S_{3/2}(1)$ тетрагонального оптического центра иона $Er^{3+}$ в кристалле $CaF_2$: $Er^{3+}$. В результате были исследованы его спектры поглощения, спектры возбуждения люминесценции, спектры люминесценции и кинетика люминесценции при низких температурах при селективном лазерном возбуждении и селективной регистрации люминесценции. Было получено значительное неоднородное уширение спектра поглощения и неселективного спектра возбуждения люминесценции ионов $Er^{3+}$ в кристаллах $CaF_2$: $Er^{3+}$ на управляющем переходе сверхбыстрого квантового вентиля CNOT, позволяющее надеется на реализацию многокубитного квантового компьютера. Также был измерен верхний предел времени декогеренции выбранной квантовой системы (возможное время для алгоритмов квантового расчета) $T_2$ = 7.5 мкс при T = 6.6 К.

Данные результаты позволяют сделать предварительный вывод о возможности использования данного кристалла (а в дальнейшем и нанокристаллов) для реализации сверхбыстрого квантового вентиля CNOT.

## Список источников

1. Hizhnyakov V., Boltrushko V., Kaasik H., Orlovskii Yu. Rare earth ions doped mixed crystals for fast quantum computers with optical frequency qubits // Optics Communications. 2021. Vol. 485/126693. https://doi.org/10.1016/j.optcom.2020.126693.

2. Freeth C.A., Jones G.D., Syme R.W.G. The transverse Zeeman effect in calcium fluoride crystals containing erbium // Journal of Physics C Solid State Physics. 1982. Vol.15. P. 5667-5690. https://doi.org/10.1088/0022-3719/15/27/023.

3. Rector C.W., Pandey B.C., Moo H.W. Electron Paramagnetic Resonance and Optical Zeeman Spectra of Type II $CaF_2$:$Er^{3+}$ // Journal of Chemical Physics. 1966. Vol. 45. P. 171–179. https://doi.org/10.1063/1.1727303.

4. Orlovskii Yu.V., Basiev T.T., Pukhov K.K. et. al. Multiphonon relaxation of mid-IR transitions of rare-earth ions in the crystals with fluorite // Journal of Luminescence. 2001. Vol. 94/95. P. 791-795. https://doi.org/10.1016/S0022-2313(01)00372-6.

5. Tallant D.R., Moore D.S., Wright J.C. Defect equilibria in fluorite structure crystals // Journal of Chemical Physics. 1977. Vol. 67. P. 2897-2097. https://doi.org/10.1063/1.435159.

## References

1. Hizhnyakov V., Boltrushko V., Kaasik H., Orlovskii Yu. Rare earth ions doped mixed crystals for fast quantum computers with optical frequency qubits // Optics Communications. 2021. Vol. 485/126693. https://doi.org/10.1016/j.optcom.2020.126693.

2. Freeth C.A., Jones G.D., Syme R.W.G. The transverse Zeeman effect in calcium fluoride crystals containing erbium // Journal of Physics C Solid State Physics. 1982. Vol.15. P. 5667-5690. https://doi.org/10.1088/0022-3719/15/27/023.

3. Rector C.W., Pandey B.C., Moo H.W. Electron Paramagnetic Resonance and Optical Zeeman Spectra of Type II $CaF_2$:$Er^{3+}$ // Journal of Chemical Physics. 1966. Vol. 45. P. 171–179. https://doi.org/10.1063/1.1727303.

4. Orlovskii Yu.V., Basiev T.T., Pukhov K.K. et. al. Multiphonon relaxation of mid-IR transitions of rare-earth ions in the crystals with fluorite // Journal of Luminescence. 2001. Vol. 94/95. P. 791-795. https://doi.org/10.1016/S0022-2313(01)00372-6.

5. Tallant D.R., Moore D.S., Wright J.C. Defect equilibria in fluorite structure crystals // Journal of Chemical Physics. 1977. Vol. 67. P. 2897-2097. https://doi.org/10.1063/1.435159.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 264-268.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 264-268.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.93

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В КОЛЛОИДНЫХ РАСТВОРАХ

***Никита Игоревич Тиньков***[1]✉
[1]*Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина, Липецкая область, г. Елец, Россия*
[1]*tinkov2015@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0009-0002-0666-2673*

***Аннотация.*** *Представлены общая схема и конструкция экспериментальной установки для изучения термоэлектрических явлений в коллоидных растворах, с различной концентрацией ионов(анионов). Проведено моделирование молекулярно-кинетических процессов обмена веществ в биологических системах. В качестве результатов исследования предоставляются экспериментальные данные о термоэлектрической ЭДС коллоидных растворов.*

***Ключевые слова:*** *коллоидный раствор, экспериментальная установка, термо-ЭДС, диагностика.*

Conference paper

# EXPERIMENTAL INSTALLATION FOR THE STUDY OF THERMOELECTRIC PHENOMENA IN COLLOIDAL SOLUTIONS

***Nikita Ig. Tinkov***[1]✉
[1]*Yelets State University named after I. A. Bunin, Yelets, Russia*
[1]*tinkov2015@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0009-0002-0666-2673*

***Abstract.*** *The general scheme and design of an experimental setup for studying thermoelectric phenomena in colloidal solutions with different concentrations of ions (anions) are presented. The modeling of molecular kinetic metabolic processes in biological systems has been carried out. As the results of the study, experimental data on the thermoelectric EMF of colloidal solutions are provided.*

***Keywords:*** *colloidal solution, experimental setup, thermo-EMF, diagnostics*

© Тиньков Н. И., 2024

**Введение**

Термоэлектрические явления, наблюдаемые в различных материалах, являются предметом интенсивных исследований в течение многих десятилетий. Особый интерес представляют коллоидные растворы, к числу которых относится и кровь, являющаяся коллоидно-полимерным раствором, в котором вода с растворенными в ней солями и низкомолекулярными органическими веществами представляют собой дисперсионною среду, а белки и их комплексы — дисперсную фазу [1].

Термоэлектрические явления в коллоидных растворах проявляются в виде возникновения термоэлектродвижущей силы (термоЭДС) при наличии градиента температуры в системе. ТермоЭДС возникает из-за разности концентраций заряженных частиц в горячей и холодной областях коллоидного раствора [2].

Изучение термоэлектрических явлений в коллоидных растворах имеет большое значение как для фундаментальных исследований, так и для разработки новых технологий. В частности, используемая нами установка может лечь в основу новых методов диагностики, а также позволит более глубоко понять процессы переноса тепла и заряда в коллоидных системах.

**Цель и актуальность**

Исследование направлено на изучение взаимосвязи между ионным балансом крови, как коллоидного раствора и термоэлектрическими свойствами, играющими ключевую роль в процессе тепло- и энерго- обмена в организме. Так, например, измерение уровня концентрации калия, являющегося основным катионом внутриклеточной жидкости, представляет собой важную задачу диагностики и решается различными методами.

**Методы и принципы**

Разработанная методика диагностики позволяет выявить отклонения за период не более 10 минут и состоит в измерении термоЭДС в образцах сыворотки крови в диапазоне до 1,5 мВ от создаваемой разности температур 5 - 10 градусов Цельсия [3].

Для обнаружения влияния концентрации ионов калия на значение коэффициента термоЭДС была проведена серия экспериментов на модельных крови коллоидных растворах изотоничного плазме состава с различным процентным содержанием K, имитирующего дисбаланс. Помимо этого, проводилось исследование термоэлектрического эффекта на образцах плазмы свиной крови с модифицированным ионным составом. Выбор свиной крови в качестве объекта исследования обусловлен схожестью ионного состава её плазмы с плазмой крови человека [4].

Установка для проведения эксперимента представлена на рисунке 1.

Установка для проведения эксперимента представляет собой U-образную трубку ***1***, наполненную исследуемым раствором. Вокруг «горячего» колена трубки намотана нихромовая спираль ***2*** (выступающая в роли нагревателя), подключенная к лабораторному блоку питания ***3***.

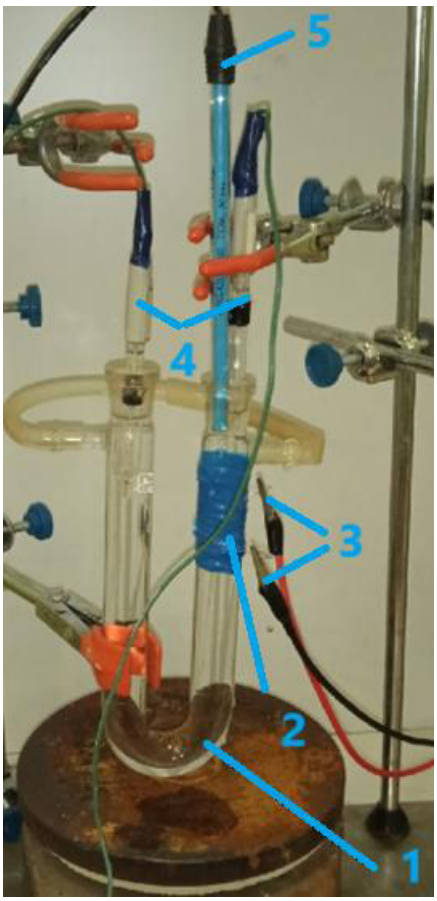


Рисунок 1 – Экспериментальна установка для измерения коэффициента термо-ЭДС.

В «горячее» колено трубки помещались один из двух химических электродов сравнения ЭВЛ-1М4 ***4*** и полупроводниковый термодатчик ДТУ-301 ***5***. В «холодном» колене находился второй электрод. Перечисленные датчики подключались к лабораторному pH-метру Мультитест, который в свою очередь был подключен к ПЭВМ посредством интерфейса. Использование такой конфигурации оборудования позволило автоматизировать сбор и обработку получаемых в ходе эксперимента данных, а также дало возможность получать значения величины термоэлектрической ЭДС и температуры с частотой опроса 0.5с. [5].

**Результаты**

В ходе исследования было проведено 12 итераций эксперимента для каждой группы растворов, а именно, гипокалиемийная (недостаток ионов), нормальная, гиперкалиемийная (избыток ионов). Разница в коэффициенте термо-ЭДС внутри каждой группы находилась в зоне допустимой погрешности ±0, 0067 мВ/К. Значения коэффициента термо-ЭДС полученные путем линейной аппроксимации функции, показывающей зависимость термоэлектрической разности потенциалов от градиента температуры составили:

- *Гипокалиемийная группа 0.168*
- *Нормальная группа 0.176*
- *Гиперкалиемийная группа 0.187*

Результаты эксперимента подтверждают классическую термоэлектрическую теорию и демонстрируют прямую зависимость коэффициента термо-ЭДС от разницы в подвижности ионов. Серия экспериментов, проведенная на трех группах образцов, состав которых точно имитировал ионный состав крови при различных отклонениях, подтвердила эффективность данного метода для диагностики.

**Заключение**

Изменение ионного состава коллоидных растворов оказывает ощутимое влияние на протекание термоэлектрических процессов. Поэтому их количественная аналитика может быть использована как средство диагностики заболеваний, связанных с изменением ионного баланса крови.

Исследования термоэлектрических явлений помогают более точно предсказывать поведение коллоидных систем и способствуют пониманию сложных процессов в биологических системах.

## Список источников

1. Würger A Transport in Charged Colloids Driven by Thermoelectricity. Phys. Rev. Lett. 2008, 101 (10), 108302.

2. Грабов В.М. Термоэлектрокинетический эффект в слабых водных растворах электролитов / В.М. Грабов, А.А. Зайцев, Д.В. Кузнецов, А.В. Сидоров, В.И. Новиков // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». — 2008. — 3. — с. 112-122. (дата обращения: 29.05.2023).

3. Зайцев А.А., Грабов В.М., Кузнецов Д.В., Сидоров А.В., Тиньков Н.И. Исследование термоэлектрокинетического эффекта в крови животных // Журнал технической физики. - 2024. - №9. - С. 1546-1550.

4. Фролов Ю.Г. Курс коллоидной химии. Поверхностные явления и дисперсные системы: учебник / Ю.Г. Фролов. – Изд. 3-е, испр., пе-репеч. с изд. 1989 г. – М.: Альянс, 2009. – 464 с.

5. Тиньков Н.И. Исследование влияния ионного баланса крови на термоэлектрические свойства / Н.И. Тиньков, К.В. Чернухин // Международный научно-исследовательский журнал. — 2023. — №11 (137). — URL: https://research-journal.org/archive/11-137-2023-november/10.23670/IRJ.2023.137.10 (дата обращения: 15.11.2024). — DOI: 10.23670/IRJ.2023.137.10.

## References

1. Würger A Transport in Charged Colloids Driven by Thermoelectricity. Phys. Rev. Lett. 2008, 101 (10), 108302.

2. Grabov V.M. Thermoelectrokinetic effect in weak aqueous solutions of electrolytes / V.M. Grabov, A.A. Zaitsev, D.V. Kuznetsov, A.V. Sidorov, V.I. Novikov // Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Series "Natural Sciences". - 2008. - 3. - p. 112-122. (date of access: 29.05.2023)

3. Zaitsev A.A., Grabov V.M., Kuznetsov D.V., Sidorov A.V., Tinkov N.I. Study of the thermoelectrokinetic effect in animal blood // Journal of Technical Physics. - 2024. - No. 9. - S. 1546-1550.

4. Frolov Yu.G. Colloid chemistry course. Surface phenomena and disperse systems: textbook / Yu.G. Frolov. – Ed. 3rd, corrected, re-written. with ed. 1989 - M.: Alliance, 2009. - 464 p.

5. Tinkov N.I. Study of the influence of blood ion balance on thermoelectric properties / N.I. Tinkov, K.V. Chernukhin // International scientific research journal. - 2023. - No. 11 (137). — URL: https://research-journal.org/archive/11-137-2023-november/10.23670/IRJ.2023.137.10 (accessed: 15.11.2024). — DOI: 10.23670/IRJ.2023.137.10.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 269-275.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 269-275.

Статья в сборнике трудов конференции

# МАГНИТОКРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ И ОДНОУЗЕЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СЛОЖНЫХ ОКСИДАХ

***Никита Сергеевич Товстоган[1]✉, Евгений Станиславович Клементьев[2]***
*[1,2] НОЦ «Функциональные наноматериалы», БФУ им. И. Канта, Калининград, Россия*
*[1]NTovstogan@stud.kantiana.ru✉*
*[2]EKlementev@kantiana.ru*

***Аннотация.*** *Сложные оксиды со структурой перовскита и решетки Кагоме представляют особый интерес в связи наличием в них геометрических фрустраций спинового магнитного момента. Для получения собственных значений энергии 4f электронов редкоземельного иона Yb3+ сложного оксида Yb2Ti2O7 был использован формализм Стивенса и параметризация Вальтера. Полученный полный набор решений обратной задачи для 6 параметров Стивенса позволил установить неполноту существующих решений в параметризации Стивенса для этой системы. Установлено предполагаемое число необходимых экспериментальных параметров.*

***Ключевые слова:*** *Потенциал кристаллического электрического поля, параметры Стивенса, сложные оксиды, нейтронное рассеяние.*

Conference paper

# MAGNETOCRYSTALLINE ANISOTROPY AND SINGLE-SITE EFFECTS IN COMPLEX OXIDES

***Nikita S. Tovstogan[1]✉, Evgeny S. Clementyev[2]***
*[1, 2]REC "Functional nanomaterials", I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia*
*[1]NTovstogan@stud.kantiana.ru✉*
*[2]EKlementev@kantiana.ru*

***Abstract.*** *Complex oxides with perovskite and Kagome lattice structures are of special interest due to the presence of geometrical frustrations of the spin magnetic moment in them. The Stevens formalism and Walter parameterization were used to obtain the eigenvalues of the energy 4f of the electrons of the rare-earth ion Yb3+ of the complex oxide Yb2Ti2O7. The obtained complete set of solutions to the inverse problem for 6 Stevens parameters allowed to establish the incompleteness of the*

*existing solutions in the Stevens parameterization for this system. The expected number of necessary experimental parameters was estimated.*

***Keywords:*** *Crystal electric field potential, Stevens parameters, complex oxides, neutron scattering.*

## 1. Introduction

In the course of this study a method for calculating the parameters of the Hamiltonian of the crystal field (CF) in systems with low local symmetry based on inelastic neutron scattering spectra is proposed. The method in mind allows to eliminate "start value" problematics and performs global search in the CF parameters space. It is even more efficient, as there is no need to calculate spectral function of neutron scattering.

In the case of trigonal symmetry, the number of nonzero calculation parameters in the Stevens formalism is 6, which allows calculations to be performed on the home-available equipment. However, 11 parameters already present a significant difficulty, due to the nonlinear increase in computational complexity.

The existing solutions, found by some of the scientific groups, are most of the time, a in fact, local solutions to this problem, and require critical consideration in the light of a global enumeration of all existing parameters. It becomes possible to evaluate the completeness of the available solutions and make adjustments to our ideas about the development of properties of spin ices, liquids and frustrated systems in general.

To achieve these results, known data on the structure of the crystal under study, its symmetry group and potential interaction effects were analyzed, a program for numerical calculations of energy levels and wave functions of 4f shell electrons was developed and tested, taking into account the parameters known for this material.

Optimization was carried out by the method of transition to the Walter formalism, which allowed to reduce the number of truly independent variables from 6 to 5 and 6-dimensional maps of the true parameter values with a given accuracy criterion were obtained.

As a testbed for this study a complex oxide $Yb_2Ti_2O_7$ was used, as it represents a significant but reasonable number of independent parameters for test calculations. It is also an interesting and important object to study which may provide useful data for the future work.

Interest in structures of this type can also be associated with the presence of magnetic frustrations arising from a non-trivial combination of direct and indirect exchange interactions between trivalent and tetravalent manganese ions. The competition of interactions here leads to the removal of degenerations and the manifestation of long-range magnetic ordering, which differs in different directions.

The visualization of the $Yb_2Ti_2O_7$ structure [6] is depicted below (figure 1 a,b), clarifying the reasons for some of the observed behaviors as it indicates similarities with Kagome lattice type structures, which are classical structures with geometric spins frustrations.

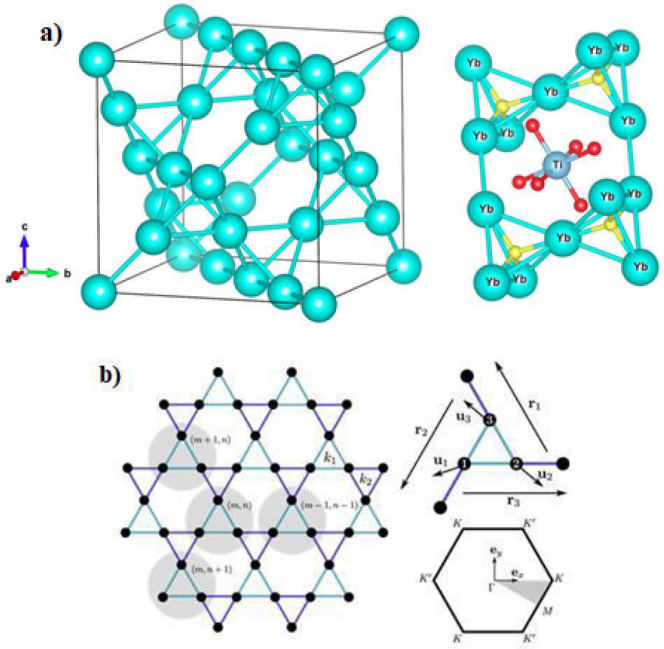



Figure 1 – "a) Yb2Ti2O7 pyrochlore structure, b) Kagome lattice pattern".

## 2. Methods and results

Based on the information obtained about the symmetry of the $Yb_2Ti_2O_7$ crystal, the total angular momentum of $Yb^{3+}$ and the peak intensities of neutron scattering, we can next define the form of the Hamiltonian of the crystal field. Thus, based on the definition of the phenomenological Hamiltonian of the crystal field in the Stevens formalism (1):

$$\widehat{H_{CF}} = \sum_{n=0}^{6} \sum_{m=-n}^{n} B_n^m \, \widehat{O_n^m}(J) \tag{1}$$

We get the form of the Hamiltonian:

$$\hat{H}_{CF} = B_2^0 \, \hat{O}_2^0 + B_4^0 \, \hat{O}_4^0 + B_6^0 \, \hat{O}_6^0 + B_4^3 \, \hat{O}_4^3 + B_6^3 \, \hat{O}_6^3 + B_6^6 \, \hat{O}_6^6 \tag{2}$$

To ensure the completeness of the enumeration of the 6 dimensions of the Stevens parameter space, the Walter formalism is introduced, which reduces the Stevens parameters to a general "norm" described by the relations below (3):

$$\begin{cases} \hat{H}_{CF} = W \sum_{nm} x_{nm} \tilde{O}_n^m \\ \tilde{O}_n^m = \dfrac{\widehat{O_n^m}}{F_n^m} \\ x_{nm} = \dfrac{b_n^m}{\sum b_{n'}^{m'}} \\ \sum_{nm} |x_{nm}| = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Thus, the last parameter of the nested loop can be found based on the ratios (3.1), which significantly reduces the computational complexity.

$$x_{last} = \pm\left(1 - \sum |x_{nm}|\right) \tag{3.1}$$

The scale factor W of the energy dimension is found using the operation (3.2):

$$W = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(E_i^{experimental}\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(E_i^{theoretical}\right)} \tag{3.2}$$

Further clarification of the proximity of the solution found at each iteration of the cycle is carried out by minimizing the statistical parameter $\chi^2$ (4) and subsequent (5).

$$\chi^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(E_i^{theory} - E_i^{experiment}\right)^2}{\delta(E_i)^2} \tag{4}$$

$$\chi^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(\left(\frac{I_i}{I_{i+1}}\right)^{theory} - \left(\frac{I_i}{I_{i+1}}\right)^{experiment}\right)^2}{\delta(I_i)^2} \tag{5}$$

Based on the neutron scattering experiments already performed for this crystal structure [5] (see figure 2), it is possible to obtain the desired set of target values for the energy of transitions from the base level and information on transition intensities (see Table 1 and 2).

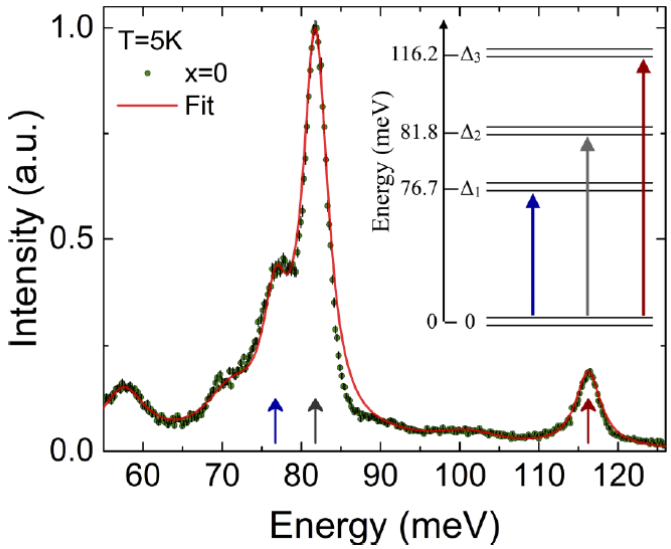



Figure 2 – “Neutron scattering data”.

Table 1 – «Experimental values of transition energies from the base level».

| $E_n$ | Value (meV) |
|---|---|
| $E_1$ | 76.6 |
| $E_2$ | 81.8 |
| $E_3$ | 116.2 |

Table 2 – «Experimental significant intensity area».

| $S_n$ | Value (meV·a.u.) |
|---|---|
| $S_1$ | 45 |
| $S_2$ | 84 |
| $S_3$ | 24 |

Based on this information, 5 experimental target parameters were set to calculate the proximity of the solution at each iteration, namely: 3 transition energies and 2 intensity ratios, $I_1/I_2$ и $I_2/I_3$. Information about these parameters is provided in the above-mentioned work.

As a result of the calculations conducted, a percentage of the Walter parameter space was obtained that satisfies the observed experimental data with accuracy $\chi^2 < 2$, equal 15.43%. Taking into account some fluctuations of the percentage obtained, depending on the step used, we can conclude about the range [15.43%;16.00%] the real percentage of solutions with $\chi^2$ accuracy.

A topologically nontrivial picture of the distribution of solutions to the inverse problem is obtained, the possibility of multiple solutions is reliably shown, and the need to introduce additional experimental parameters that complement the mathematically incomplete model of the phenomenological parameters of the CF.

Maximum cluster spread of the CF parameter space, satisfying the experimental data with accuracy $\chi^2 < 2$, equals, based on the received data (figure 3), about 1.7 units in the Walter's parameterization.

As can be seen with consequent alteration of the experimental parameters set, the addition of parameters during this experiment led to the consolidation of solutions clusters in most cases to simply connected areas. The cases of the formation of multi–connected regions are due to the demonstrative nature of the embedded parameters – they were not obtained during the experiment and were assigned speculatively, as a demonstration. The general behavior of forementioned clusters and the "noise" surrounding them can be demonstrated by artificially increasing the accuracy of the parameters, thus tightening the selection of solutions for the parameter $\chi^2$. (Figure 3 and figure 3.1)

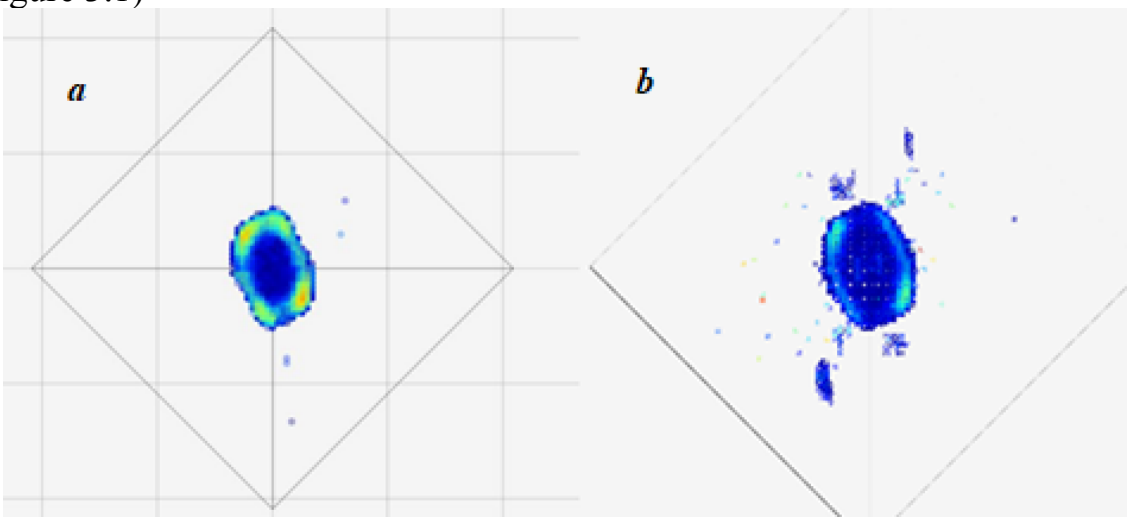



Figure 3 – « Cluster behavior when the accuracy criterion is tightened».

From the data obtained, information on the convergence of solutions, the nature of their connectivity and the degree of consolidation of solutions in the case of an increase in parameters, it can be said that experimental data in this case are insufficient, and at least 5 or more significant peaks of neutron scattering intensity are required to obtain an unambiguous picture of true solutions for this frustrated system.

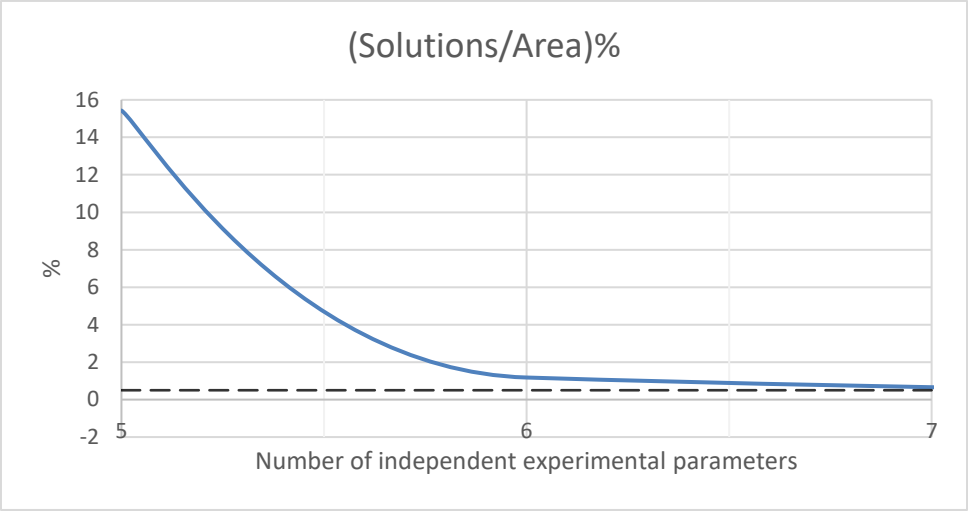



Figure 3.1– « Cluster behavior when the accuracy criterion is tightened».

Based on the picture of the behavior for the number of acquired solutions with parameters alteration, we can conclude on the rapid decrease of the resulting number of solutions. However, with some probability, with excessive tightening of the requirements for accuracy or the number of parameters, it is possible to obtain, an empty set of solutions to the inverse problem. So, it is necessary to carefully evaluate the errors before starting calculations.

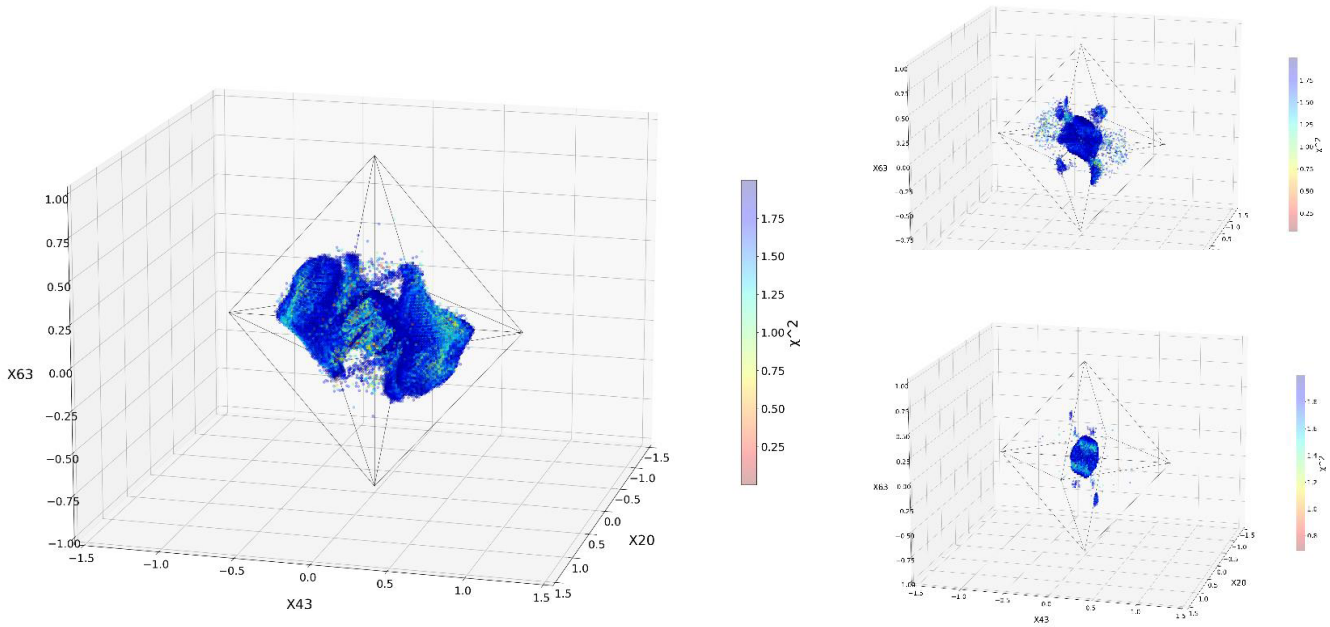



Figure 4 – «X20-X43-X63 projection graph with $\chi^2$ color values, rotation angles [15;15]».

## 3. Conclusion

Provided that the experimental data is complete, that is, the number of values observed in the experiment (energies and transition intensities) exceeds the number of independent parameters of the CF, a global search in the space of CF parameters is a reliable way to determine the true set of CF parameters for the compound under study. In this study, the parameterization of the CF was modified and a search method was proposed that does not involve calculating the spectral neutron scattering function for each point from the multidimensional space of CF parameters. The effectiveness of global parameter enumeration was demonstrated by solving the problem of determining the true set of CF parameters for the $Yb_2Ti_2O_7$ trigonal symmetry system with 6 independent parameters with the reduction to 5 independent parameters during Walter's parametrization procedure.

Thus, in the course of this work:

1. The inverse problem of finding the CF parameters from the available set of experimental data for $Yb_2Ti_2O_7$ was solved.

2. Quantitative analysis of the completeness of experimental information and obtaining a geometric representation of the multidimensional space of CF parameters satisfying experimental data with a given accuracy approach has been developed and tested on $Yb_2Ti_2O_7$ compound.

3. The ambiguity of the data obtained in the work [5] on solutions for the CF parameters of the $Yb_2Ti_2O_7$ frustrated system was established with estimated number of experimental parameters needed for singular solution not less than 7.

## References


1. Rare earth ions in magnetically ordered crystals / A.K Zvezdin, V.M. Matveyev, A.A. Muhin, A.I. Popov / Nauka / 1985. – 296 p.

2. Point-Charge Calculations of Energy levels of Magnetic Ions in Crystallin Electric Fields / M. T. Hutchings / The Clarendon Laboratory / Oxford, England and Yale University, New Haven, Connecticutt.

3. Features of magnetic ordering of multiferroics based on manganese oxide / Matveeva Anna Nikolaevna / Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences / Gatchina 2023.

4. Unusual magnetism in rare-earth intermetallic compounds with strong electronic correlations / Pavel Sergeevich Savchenkov / Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences / Moscow 2023.

5. Neutron spectroscopic study of crystalline electric field excitations in stoichiometric and lightly stuffed $Yb_2Ti_2O_7$ / Phys. Rev. B 92, 134420 / DOI: 10.1103/PhysRevB.92.134420.

6. Multiphase magnetism in Yb2Ti2O7 / DOI: 10.1073/pnas.2008791117.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 276-281.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 276-281.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91+519.65

# ОПТИЧЕСКИЕ И ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТРУКТУР С КВАНТОВЫМИ ТОЧКАМИ InAs/GaAs

***Полина Борисовна Дёмина[1]✉, Ольга Викторовна Вихрова[2], Михаил Владимирович Дорохин[3], Валерий Павлович Лесников[4], Юрий Михайлович Кузнецов[5], Николай Владимирович Байдусь[6], Денис Максимович Балясников[7], Антон Владимирович Здоровейщев[8], Алексей Александрович Подогов[9]***
*[1,2,3,4,5,6,7,8,9] Научно-исследовательский физико-технический институт Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*
*[1]demina@phys.unn.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-3134-2268*
*[2]vikhrova@nifti.unn.ru, https://orcid.org/0000-0002-4804-3216*
*[3]dorokhin@nifti.unn.ru, https://orcid.org/0000-0001-5238-0090*
*[5]y.m.kuznetsov@unn.ru, https://orcid.org/0000-0001-9450-8953*
*[6]bnv@nifti.unn.ru*
*[7]kuznechiha4@gmail.com*
*[8]zdorovei@nifti.unn.ru, https://orcid.org/0000-0002-8379-2263*

***Аннотация.*** *В работе представлены результаты исследования применимости многослойных массивов квантовых точекInAs/GaAs в качестве элементов плёночных термоэлектриков. Исследованы их оптические и термоэлектрические свойства. Показано, что увеличение числа слоёв квантовых точек приводит к уменьшению энергии основного перехода и уширению спектров люминесценции. Продемонстрировано улучшение термоэлектрических характеристик полупроводникового материала при встраивании 10 слоёв квантовых точек за счет усиления локализации носителей заряда в трёхмерно-ограниченных объектах.*

***Ключевые слова:*** *самоорганизованные квантовые точки, тонкопленочные термоэлектрики, фактор мощности, МОС-гидридная эпитаксия.*

***Финансирование:*** *работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания (проект FSWR-2023-0037).*

© Дёмина П. Б., 2024

Conference paper

# OPTICAL AND THERMOELECTRIC PROPERTIES OF STRUCTURES WITH InAs/GaAs QUANTUM DOTS

***Polina B. Demina[1]✉, Olga V. Vikhrova[2], Mikhail V. Dorokhin[3], Valeriy P. Lesnikov[4], Yuriy M. Kuznetsov[5], Nikolay V. Baidus[6], Denis M. Balyasnikov[7], Anton V. Zdoroveyshchev[8], Aleksey A. Podogov[9]***

*[1,2,3,4,5,6,7,8,9] Scientific Research Institute of Physics and Technology of Nizhny Novgorod State University. N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, Russia*

*[1]demina@phys.unn.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-3134-2268*

*[2]vikhrova@nifti.unn.ru, https://orcid.org/0000-0002-4804-3216*

*[3]dorokhin@nifti.unn.ru, https://orcid.org/0000-0001-5238-0090*

*[5]y.m.kuznetsov@unn.ru, https://orcid.org/0000-0001-9450-8953*

*[6]bnv@nifti.unn.ru*

*[7]kuznechiha4@gmail.com*

*[8]zdorovei@nifti.unn.ru, https://orcid.org/0000-0002-8379-2263*

***Abstract.*** *The paper presents the results of a study of the applicability of multilayer arrays of InAs/GaAs quantum dots as elements of film thermoelectrics. Their optical and thermoelectric properties have been studied. It has been shown that an increase in the number of layers of quantum dots leads to a decrease in the energy of the main transition and a broadening of the luminescence spectra. An improvement in the thermoelectric characteristics of a semiconductor material has been demonstrated when 10 layers of quantum dots are embedded due to increased localization of charge carriers in three-dimensionally limited objects.*

***Keywords:*** *self-organized quantum dots, thin-film thermoelectrics, power factor, metal-organic epitaxy*

***Funding:*** *the work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of a state assignment (project FSWR-2023-0037).*

## 1. Введение

Массивы самоорганизованных квантовых точек (КТ) являются высокоэффективными функциональными слоями для целого ряда приборов, таких как солнечные элементы, фотоприёмники, лазеры. В последнее время такие массивы КТ (например, InAs/GaAs) рассматриваются как встраиваемый элемент в плёночные термоэлектрические преобразователи, в которых квантово-размерные нанокластеры (квантовые точки) выполняют функцию усиления термоэлектрического эффекта [1]. Современные технологии обеспечивают воспроизводимое формирование структур с КТ. Наиболее простыми способами изучения свойств таких объектов являются оптические методы (например, фотолюминесценция) способные показать степень локализации в квантовых точках носителей заряда, ответственных за термоэлектрический эффект.

Для интеграции гетероструктур с КТ в полупроводниковые приборы требуется привлечение дополнительных постростовых методов обработки, которые обеспечили бы формирование контактного слоя для подведения/отведения зарядов, защиту поверхности от воздействия атмосферы [2]. В настоящей работе исследованы образцы массивов термоэлектрических КТ InAs/GaAs.

**2. Получение образцов и исследование их характеристик**

Образцы для исследования были выращены методом МОС-гидридной эпитаксии. На подложках $n^+$-GaAs (100) были изготовлены структуры, содержащие 10 слоёв самоорганизованных квантовых точек InAs/GaAs, слои были разделены прослойками GaAs толщиной 40 nm. Температура роста слоёв точек варьировалась от 520 до 550 °C. В качестве реперных структур были выращены образец с 10-слоями квантовых ям InGaAs/GaAs, а также образец, содержащий один слой квантовых точек InAs/GaAs. По завершении процесса МОС-гидридной эпитаксии на поверхность сформированных гетероструктур наносился наноразмерный углеродный слой методом импульсного лазерного распыления пирографита в вакууме. Наличие на поверхности структуры с квантовыми точками слоя углерода, сформированного импульсным лазерным распылением, приводит к формированию химически и механически стойкого проводящего контакта [2], что облегчает дальнейшую интеграцию подобных гетеростуктур в приборы.

На готовых структурах были проведены оптические исследования методами спектроскопии фото- и электролюминесценции, а также измерения термоэлектрических характеристик, а именно: коэффициента Зеебека ($\alpha^2$), удельного сопротивления ($\rho$) и коэффициента теплопроводности ($\lambda$) на базе разработанных авторами методик [2-3]. Также рассчитывались значения фактора мощности по формуле:

$$W = \alpha^2/\rho \qquad (1)$$

Исследования фотолюминесценции (ФЛ) проводились при возбуждении He-Ne лазером мощностью 30 мВт. Электролюминесценция (ЭЛ) измерялась при прямом смещении диодов на основе гетероструктур с КТ. Измерения проводились при комнатной температуре.

На рисунке 1 показаны спектры ФЛ исходного образца с одним слоем КТ до (кривая 1) и после нанесения углеродной плёнки (кривая 2). Видно, что углеродная плёнка не только не препятствует выходу излучения, но и способствует увеличению интенсивности фотолюминесценции как в области основного, так и возбужденного перехода в квантовых точках в 1,5 раза. Наличие электролюминесцентного излучения (кривая 3) свидетельствует о том, что нанесенный лазерным распылением углеродный слой формирует на поверхности структуры проводящий полупрозрачный контакт. Низкая рабочая плотность тока получаемых диодов не превышает 0,05 mA/mm$^2$, что свидетельствует о низком сопротивлении контактного слоя.

Увеличение числа слоёв квантовых точек приводит к изменению спектральных характеристик, что можно наблюдать на рисунке 2. Увеличение числа слоёв приводит к уширению линии люминесценции, её сдвигу в область

высоких энергий, увеличению интегральной интенсивности, что свидетельствует об увеличении числа квантовых точек с одной стороны и ухудшению их однородности как по размеру, так и по составу. Причиной подобного поведения служит повышение температуры роста разделительных слоёв GaAs между соседними слоями квантовых точек. Кривые 2 и 3 соответствуют многослойным массивам квантовых точек, выращенных при разных температурах – 520 и 550 °С соответственно.

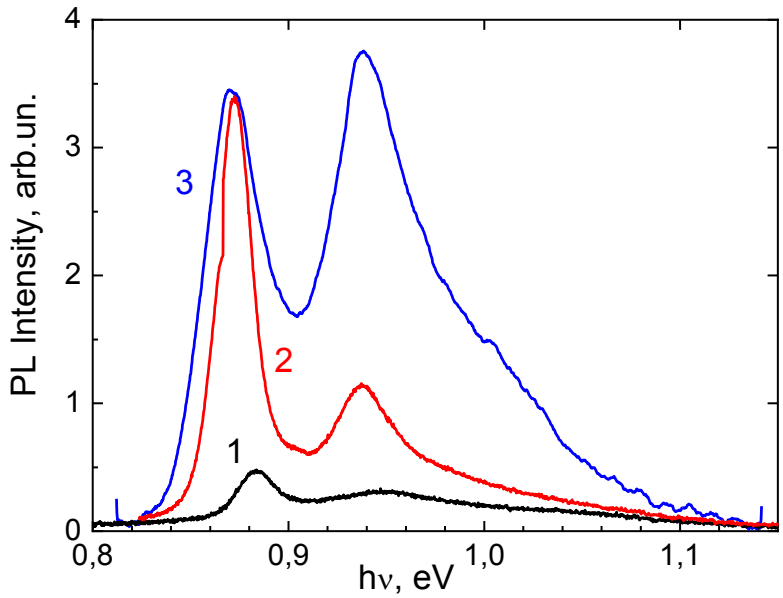



Рисунок 1 — Спектры фотолюминесценции исходной структуры с одним слоем квантовых точек до (кривая 1) и после нанесения углеродной пленки (кривая 2) и электролюминесценции сформированного диода – кривая 3. Температура измерения – 300 К, плотность тока диода в режиме электролюминесценции – 0,05 mA/mm$^2$.

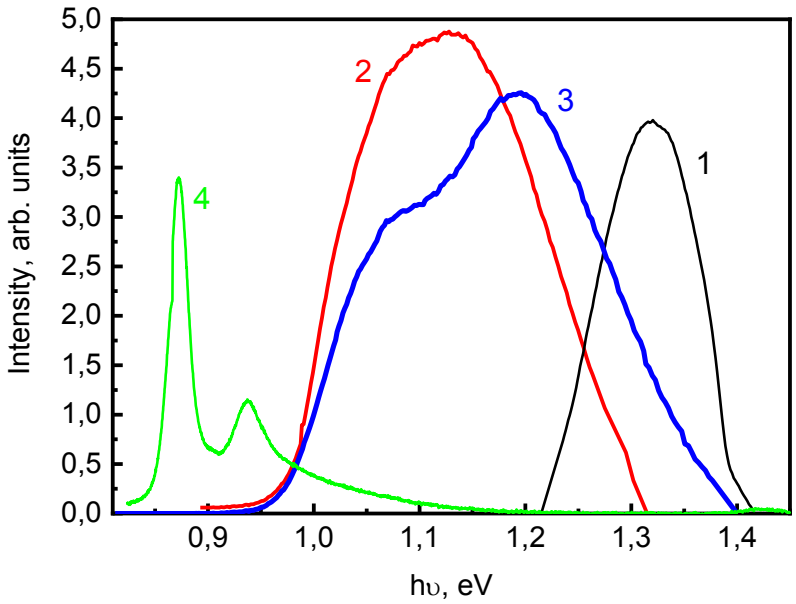



Рисунок 2 — Спектры фотолюминесценции структур с 10 слоями квантовых точек (кривые 2,3) и 10 слоями квантовых ям (кривая 1). Для сравнения приведен спектр фотолюминесценции одного слоя КТ (кривая 4).

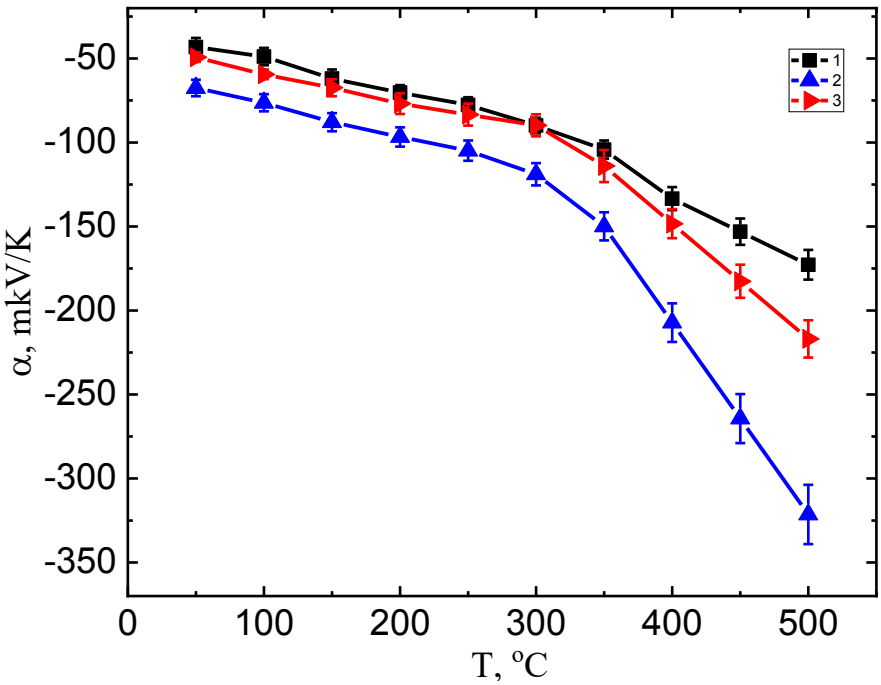



Рисунок 3 — Коэффициент Зеебека, измеренный для образцов с 10 слоями квантовых точек (кривые 2,3) и 10 слоями квантовых ям (кривая 1).

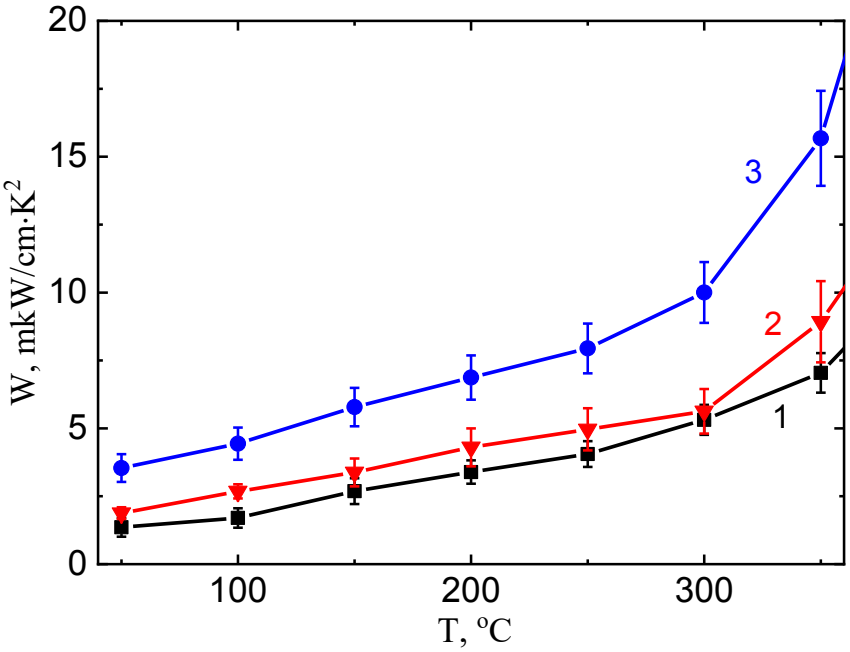



Рисунок 4 — Фактор мощности образцов с 10 слоями квантовых точек (кривые 2,3) и 10 слоями квантовых ям (кривая 1)

На рисунках 3 и 4 показаны экспериментальные температурные зависимости коэффициента Зеебека и фактора мощности исследуемых многослойных образцов. Образцы демонстрируют схожие термоэлектрические свойства в диапазоне температур (50-300) °C, удельное сопротивление растет от 13 до 15 $\mu$Ohm·m с ростом температуры. Резкое возрастание по модулю коэффициента Зеебека после 300 °C, наблюдаемое на рисунке 3 для всех образцов, объясняется шунтированием слоя подложкой арсенида галлия. Данный факт подтверждается и поведением температурной зависимости удельного сопротивления, на которой в области 350-400 °C наблюдается максимум.

Поэтому зависимость фактора мощности от температуры на рисунке 4 приведена до значения, когда вклад подложки становится определяющим. Наибольшим значением фактора мощности обладает образец с 10 слоями квантовых точек, выращенных при температуре 550 ºС во всём приведённом температурном интервале.

Полученные значения *W* сопоставимы со значениями, полученными для тонких плёнок подобного состава и опубликованными в [4].

### 3. Заключение

В результате исследования были получены образцы с многослойными массивами квантовых точек InAs/GaAs, демонстрирующие увеличение термоэлектрических характеристик полупроводникового материала за счет усиления локализации носителей заряда в трёхмерно-ограниченных объектах – квантовых точках. Данные структуры в дальнейшем могут стать основой пленочных термоэлектрических генераторов.

## Список источников

1. Mao J., Liu Z., Ren Z. // npj Quantum Materials. – 2016. – V.1. – P. 16028.

2. Dorokhin, M. V. High-efficiency spark plasma sintered Ge0.3Si0.7: P thermoelectric energy converters with silicone phosphide as a source of phosphorus doping / M. V. Dorokhin, Yu. M. Kuznetsov, P. B. Demina, et.al. // Nanoscale and microscale thermophysical engineering. – 2023. – V. 27 – Iss. 2. – P. 125-134.

3. Dorokhin, M. V. Application of the Bridgman method to obtain thermoelectric silicon doped with germanium and phosphorus / M. V. Dorokhin, Yu. M. Kuznetsov, P. B. Demina, et.al. // Inorganic Materials: Applied Research. – 2024. – V. 15. – P. 289-295. DOI: 10.1134/S207511332402014X.

4. Meng T. Quantum confinement and energy filtering effect enhancing the thermoelectric power factor of InGaAs with buried ErAs nanoparticles / T. Meng, X. Zhang, J. Yao, et.al. // Applied Physics Letters. – 2024. – V. 125. – P. 044003.

## References

1. Mao J., Liu Z., Ren Z. // npj Quantum Materials. – 2016. – V.1. – P. 16028.

2. Dorokhin, M. V. High-efficiency spark plasma sintered Ge0.3Si0.7: P thermoelectric energy converters with silicone phosphide as a source of phosphorus doping / M. V. Dorokhin, Yu. M. Kuznetsov, P. B. Demina, et.al. // Nanoscale and microscale thermophysical engineering. – 2023. – V. 27 – Iss. 2. – P. 125-134.

3. Dorokhin, M. V. Application of the Bridgman method to obtain thermoelectric silicon doped with germanium and phosphorus / M. V. Dorokhin, Yu. M. Kuznetsov, P. B. Demina, et.al. // Inorganic Materials: Applied Research. – 2024. – V. 15. – P. 289-295. DOI: 10.1134/S207511332402014X.

4. Meng T. Quantum confinement and energy filtering effect enhancing the thermoelectric power factor of InGaAs with buried ErAs nanoparticles / T. Meng, X. Zhang, J. Yao, et.al. // Applied Physics Letters. – 2024. – V. 125. – P. 044003.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 282-288.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 282-288.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91+519.65

# ВЛИЯНИЕ СТАРЕНИЯ НА МИКРОТВЁРДОСТЬ И СТРУКТУРУ AL-MG-SI-CU СПЛАВА

***Иван Сергеевич Зуйко[1]✉, Анна Игоревна Бодякова[2], Александр Андреевич Калиненко[3], Диана Юнусовна Юзбекова[4], Рустам Оскарович Кайбышев[5]***
*[1, 2, 3, 4, 5]Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия*
*[1]zuiko_ivan@bsu.edu.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-2752-0877*
*[2]morozova_ai@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9378-0338*
*[3]kalinenko@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0001-7534-0542*
*[4]yuzbekova@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0001-9940-6884*
*[5]rustam_kaibyshev@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0003-1474-6084*

***Аннотация.*** *В работе рассмотрено влияние термической (Т6) и термомеханических обработок (Т8), включающих закалку, холодную прокатку и искусственное старение при Т=190 °С на микротвердость среднепрочного алюминиевого сплава системы Al-Mg-Si-Cu. По сравнению со стандартной термической обработкой (Т6), применение обработок Т8, в значительной мере повышает твёрдость материала. Последующее искусственное старение приводит лишь к ограниченному росту свойств. Возможные причины такого поведения обсуждаются.*

***Ключевые слова*****:** *алюминиевый сплав, термомеханическая обработка, старение, микроструктура, механические свойства*

***Благодарности:*** *Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, код научной темы FZWG-2023-0005 «Природа влияния холодной пластической деформации на фазовые превращения и свойства алюминиевых сплавов». Исследование выполнено с использованием оборудования Центра коллективного пользования «Технологии и Материалы НИУ «БелГУ».*

Conference paper

# EFFECT OF AGING ON MICROHARDNESS AND STRUCTURE OF AL-MG-SI-CU ALLOY

© Зуйко И.С., Бодякова А.И., Калиненко А.А., Юзбекова Д.Ю., Кайбышев Р.О., 2024

***Ivan S. Zuiko[1]✉, Anna I. Bodyakova[2], Alexander A. Kalinenko[3], Diana Yu. Yuzbekova, Rustam O. Kaibyshev[5]***
*[1, 2, 3, 4, 5]Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia*
*[1]zuiko_ivan@bsu.edu.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-2752-0877*
*[2]morozova_ai@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9378-0338*
*[3]kalinenko@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0001-7534-0542*
*[4]yuzbekova@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0001-9940-6884*
*[5]rustam_kaibyshev@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0003-1474-6084*

***Abstract.*** *The paper examines the effect of thermal (T6) and thermomechanical tempers (T8), including solid solution treatment, cold rolling and artificial ageing at T=190°C on the microhardness of a medium-strength aluminium Al-Mg-Si-Cu alloy. Compared with single treatment (i.e., T6 treatment), the use of T8 significantly increases the hardness of alloy. Subsequent artificial aging leads to only a limited increase in properties. The reason for this behaviour is discussed.*

***Keywords:*** *aluminium alloy, thermomechanical treatment, ageing, microstructure, mechanical properties.*

***Acknowledgments:*** *The work was supported by the state task FZWG-2023-0005 "The nature of cold plastic deformation effect on phase transformations and properties in aluminum alloys", Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. This study was performed using the equipment of the Research Equipment Sharing Center "Technology and Materials" at Belgorod National Research University.*

## 1. Введение

Алюминиевые термоупрочняемые сплавы системы Al-Mg-Si с добавками Cu применяются в качестве конструкционных материалов в многих отраслях промышленности благодаря выдающимся эксплуатационным характеристикам, прежде коррозионным свойствам [1, 2]. Прочностные свойства сплавов данной группы регламентируются в диапазоне 250–400 МПа в зависимости от химического состава и условий обработки [1].

Свои свойства сплав приобретает в процессе окончательной обработки – старения. В этом процессе происходит распад пересыщенного твердого раствора (ПТР), который идет в следующей последовательности [2]:

ПТР → Mg, Si кластеры → зоны Гинье–Престона (ГП) → β″ →β′ → β, Si.

При этом максимальные величины прочности/твердости данной группы сплавов наблюдаются в структуре в присутствии β″-частиц, которые представляют собой иглообразные выделения, вытянутые вдоль матричных направлений <100> длиной до 50 нм. Стехиометрический состав частиц β″ близок к $Mg_5Si_6$ [3] и характеризуется моноклинной решеткой с параметрами a=15,16 Å, b=4,05 Å, c=6,74 Å и α=105,3°. Межфазные границы β″ частицы являются полностью когерентными, а поэтому создают довольно сильное поле упругих напряжений в матрице, являясь, таким образом, эффективным препятствием для скольжения дислокаций во время деформации [4, 5]. Рост

частиц приводит в трансформации β″ в частицы β′, что сопровождается падением прочностных свойств [6, 7]. Частицы новой фазы имеют вид стержней направленных вдоль <100>Al. Их химический состав близок к $Mg_{1,8}Si$. Из-за роста частиц происходит частичный срыв когерентности на межфазных границах, в результате чего последние становятся полукогерентными [4, 5].

Даже небольшие добавки Cu в Al-Mg-Si приводят к падению усталостных и пластических свойств сплавов, поэтому содержание Cu строго регламентируется таким образом, чтобы после закалки и старения (обработки Т6) величина удлинения была более 10 % [6]. Однако легирование медью значительно повышает прочность сплавов. В работах [7] и [8] показано, что 0,3 и 0,6 масс. % Cu обеспечивает оптимальную прочность без значительной потери пластичности сплава. Кроме того, было обнаружено, что прочность сплавов не монотонно увеличивается с повышением содержания Cu. В связи с этим, представляется перспективным Al-Mg-Si сплавы с добавками меди до 1 %, которые по химическому составу близки к зарубежному AA6013, который содержит 0,80–1,2 % Mg, 0,6–1,0 % Si и 0,60–1,1% Cu [9].

Таким образом, целью настоящей работы являлось исследование влияния старения на твёрдость современного сплава системы Al-Mg-Si-Cu и установление взаимосвязи между фазовыми превращениями и свойствами (микротвёрдость) данного материала.

## 2. Материал и методы исследования

Сплав AA6013 был получен методом полунепрерывного литья с высокой скоростью кристаллизации [1]. Слиток цилиндрической формы (D=150 мм, L= 2000 мм) был получен на базе НИУ «БелГУ» полунепрерывным литьем с высокой скоростью кристаллизации. Затем слиток был осажен и прокатан в горячую (Т=450 °С) до суммарной истинной степени деформации ~ 1,5. Температура обработки давлением при повышенных температурах была выбрана таким образом, чтобы избежать явления пережога (оплавления границ зёрен и структурных составляющих). После высокотемпературной деформации микроструктура состояла из равноосных зёрен с размером 12–15 мкм. Из горячекатаных плит были вырезаны пластины различной толщины (3,0, 3,33, 3,75, 5,0, 7,5, 15 мм), которые были закалены с температуры 550 °С в воду и прокатаны при комнатной температуре на 10, 20, 40, 60 и 80 %. Далее пластины старили при 190 °С. Время выдержки при этом варьировалось от 0,25 ч до 24 ч. Для измерения величины микротвёрдости поверхность образцов шлифовали на абразивной бумаге возрастающей зернистости, а затем полировали при напряжении 19,5 В, в электролите: 25 % $HNO_3$ и 75 % $CH_3OH$. Микротвёрдость сплава определяли в соответствии с ГОСТ 9450-76 на твердомере Wolpert 402-MVD оснащенном четырехгранной алмазной пирамидкой. Время выдержки образца под нагрузкой 2 Н составляло 15 секунд. Для каждого состояния проводилось не менее 12 уколов: максимальное и минимальные значения не учитывались, а оставшиеся десять усредняли.

### 3. Результаты и обсуждение

Для исследования структурного состояния алюминиевых термоупрочняемых сплавов принято строить зависимости величины микротвердости от продолжительности старения (так называемые кривые старения). Кривые старения при 190 °С для всех состояний сплава АА6013 представлены на рисунке 1.

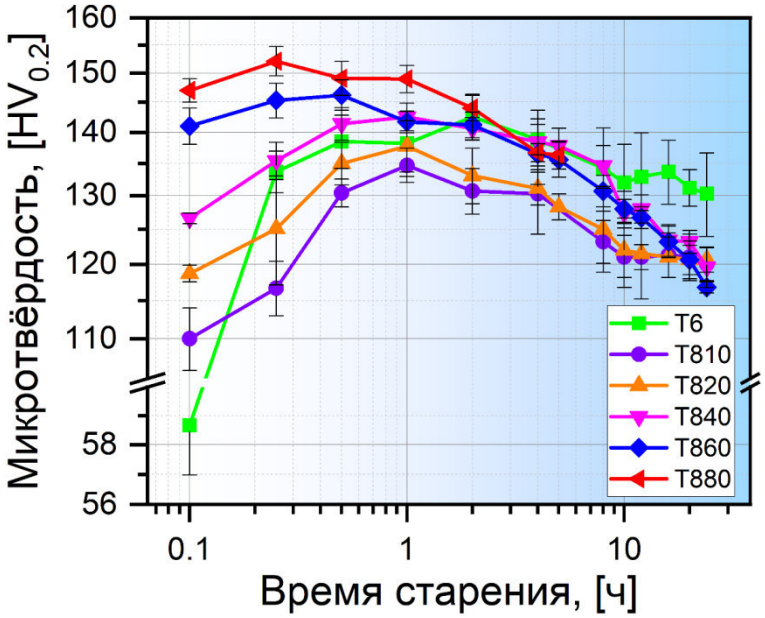



Рисунок 1 — Влияние времени старения на твердость сплава АА6013 после термической (Т6) и низкотемпературных термомеханических обработок (Т8Х, где Х – величина обжатия при холодной прокатке). Старение осуществлялось при 190°С. Первые точки кривых (0,1) - состояния после закалки (Т6) и деформации.

Вне зависимости от предварительной деформации и её степени кривые старения имеют куполообразную форму. Для всех режимов обработки на кривых старения можно выделить три характерные стадии: недостаривание (under-ageing), старение с достижением максимальной твёрдости (peak ageing) и перестаривание (over-ageing). В российской литературе для определения фазового состояния принято рассматривать отношение $\sigma_{0,2}/\sigma_B$. Бер Л.Б. в работе [10] описывает три стадии старения алюминиевых сплавов: стадия когерентных выделений ($\sigma_{0,2}/\sigma_B$=0,5–0,7), стадия частично когерентных выделений ($\sigma_{0,2}/\sigma_B$=0,75–0,95), стадия некогерентных выделений.

С ростом величины промежуточной деформации наблюдается характерная тенденция – увеличения максимальной величины твердости образцов, которая достигается при меньших временах выдержки. Это обусловлено ускорением кинетики распада пересыщенного твёрдого раствора (старения) как результата предварительной пластической деформации. После закалки прочность низкая и составляет 58±1$HV_{0,2}$. Это обусловлено работой твердорастворного и структурного (за счёт границ зёрен) механизмов упрочнения. Дальнейшая прокатка повышает её значительно: после 80 % обжатия величина твёрдости растёт в 2,5 раза. Старение холоднодеформированного на 80 % сплава приводит лишь к ограниченному росту твёрдости (до 152±1$HV_{0,2}$). Это связано с падением плотности дислокаций, как результата возврата. То есть включение и работа

дисперсионного механизма упрочнения (за счёт выделение частиц) не может компенсировать потерю дислокаций. Ранее было обнаружено, что интенсивная пластическая деформация может приводить к выделению стабильной фазы по границам деформационного происхождения, что также негативно влияет на прочностных свойства сплавов. Это связано с тем, что доступный твёрдый раствор легирующих элементов расходуется не на упрочняющие частицы, а на стабильную фазу. Стоит отметить, что величина твёрдости в режиме перестаривания (т.е. >10 ч) выше, чем после всех обработок, включающих деформацию. Возможным объяснением этого явления может быть различное поведение упрочняющих частиц при укрупнении в присутствии повышенного количества кристаллических дефектов. Выделение в сплавах с более высокой концентрацией дефектов происходит быстрее, поскольку расстояние диффузии, которое должны преодолеть растворенные вещества в процессе роста, меньше. Другим объяснением низкой твёрдости после обработки Т8 может быть активация диффузии по дислокационным трубкам (дислокации могут переносить атомы со скоростью, на порядки большей, чем объемная диффузия в кристалле).

Известно, что пластическая деформация (наклёп) связана с движением дислокаций. После снятия нагрузки часть дислокаций не исчезает из структуры, а остаётся внутри неё. В дальнейшем новые движущиеся дислокации не могут не взаимодействовать с уже имеющимися в структуре. Как правило, дислокационное упрочнение описывают уравнением Тейлора (иногда называемого уравнением Бейли-Хирша):

$$\Delta\tau_{DS} = \alpha G b\sqrt{\rho_d} \quad (1)$$

где $\Delta\tau_{DS}$ – прирост в критическом сдвиговом напряжение (critical resolved shear stress), $\alpha$ – эмпирическая константа, которая лежит в диапазоне 0,1–0,5, $G$ – модуль сдвига алюминия (25400 МПа), $b$ – модуль вектора Бюргерса (0,286 нм), $\rho_d$ – плотность дислокаций.

Таким образом, в результате исследования был сделан вывод, что предварительная пластическая деформация методом прокатки приводит к значительному увеличению твёрдости сплава АА6013 даже без применения искусственного старения. Это обеспечивается структурным упрочнением, а также повышенной плотностью дислокаций, накопленных в результате взаимодействия растворенных атомов и скользящих дислокаций. Последующее высокотемпературное старение приводит лишь к ограниченному росту твёрдости, что может быть связано с значительным ускорением процесса старения и выделением стабильной фазы по границам.

В дальнейшем для учёта вклада от дислокаций и частиц в общую прочность сплава запланировано провести изучение влияния старения на прочность в зависимости от типа и размера выделений. Так же для численной оценки выделений предполагается провести исследования микроструктуры сплава методами рентгенофазового анализа, просвечивающей микроскопии, в том числе высокого разрешения. Это позволить охарактеризовать упрочняющие частицы и дислокации.

## 4. Заключение

В результате проведенного исследования были сделаны следующие выводы:

1) Низкотемпературная термомеханическая обработка сплава AA6013, включающая закалку, прокатку и высокотемпературное старение является эффективным методом улучшения твердости.

2) Промежуточная пластическая деформация прокаткой оказывает значительное влияние на микроструктуру, фазовый состав и, как следствие, на твёрдость сплава AA6013. После 80 % обжатия величина твёрдости растёт в 2,5 раза по сравнению с состоянием сразу после закалки.

3) Необходимо проведение дополнительных исследований механических свойств, микроструктуры и фазового состава для установления корреляции между ними.

## Список источников


1. Колачев Б.А. Металловедение и термическая обработка цветных металлов и сплавов. М. МИСиС, 2005. 432 с.
2. Polmear I.J., Light Alloys. From traditional alloys to nanocrystals, third ed., Butterworth-Heinemann. Elsevier, UK, 2006. 421 p.
3. Chen J.H., Costan E., Van Huis M.A., Xu Q., Zandbergen H.W. Atomic pillar-based nanoprecipitates strengthen AlMgSi alloys // Science. 2006. V. 312. № 5772. P. 416–419.
4. Cabibbo M., Evangelista E., Vedani M. Influence of severe plastic deformations on secondary phase precipitation in a 6082 Al-Mg-Si alloy // Metall. Mater. Trans. A. 2005. V. 36. P. 1353–1364.
5. Marioara C.D., Andersen S.J., Zandbergen H.W., Holmestad R. The influence of alloy composition on precipitates of the Al-Mg-Si system // Metall. Mater. Trans. A. 2005. V. 36. P. 691–702.
6. Chen Y., Hu Q., Pan S., Zhang H., Liu H., Zhu B., Liu H., Liu W. Influences of Cu Content on the Microstructure and Strengthening Mechanisms of Al-Mg-Si-x Cu Alloys // Metals. 2019. V. 9. №. 5. P. 524.
7. Jin M., Li J., Shao G.J. Study of Cu addition on precipitation behaviors and mechanical properties in AA6082 Al-Mg-Si alloy // Mater. Sci. Forum. 2007. V. 546–549. P. 825–828.
8. Zhong H., Rometsh P., Estrin Y. Effect of alloy composition and heat treatment on mechanical performance of 6xxx aluminum alloys // Trans. Nonferrous Met. Soc. China. 2014. V. 24. №. 7 – P. 2174–2178.
9. Chakrabarti D.J., Laughlin D.E. Phase relations and precipitation in Al–Mg–Si alloys with Cu additions // Prog. Mater. Sci. 2004. V. 49. № 3–4. P. 389–410.
10. Бер Л.Б. О стадиях старения алюминиевых сплавов // ТЛС. 2013. №4. С. 66–76.

## References


1. Kolachev B.A. Metallurgy and heat treatment of non-ferrous metals and alloys. M. MISiS, 2005. 432 p.

2. Polmear I.J., Light Alloys. From traditional alloys to nanocrystals, third ed., Butterworth-Heinemann. Elsevier, UK, 2006. 421 p.

3. Chen J.H., Costan E., Van Huis M.A., Xu Q., Zandbergen H.W. Atomic pillar-based nanoprecipitates strengthen AlMgSi alloys // Science. 2006. V. 312. № 5772. P. 416–419.

4. Cabibbo M., Evangelista E., Vedani M. Influence of severe plastic deformations on secondary phase precipitation in a 6082 Al-Mg-Si alloy // Metall. Mater. Trans. A. 2005. V. 36. P. 1353–1364.

5. Marioara C.D., Andersen S.J., Zandbergen H.W., Holmestad R. The influence of alloy composition on precipitates of the Al-Mg-Si system // Metall. Mater. Trans. A. 2005. V. 36. P. 691–702.

6. Chen Y., Hu Q., Pan S., Zhang H., Liu H., Zhu B., Liu H., Liu W. Influences of Cu Content on the Microstructure and Strengthening Mechanisms of Al-Mg-Si-x Cu Alloys // Metals. 2019. V. 9. №. 5. P. 524.

7. Jin M., Li J., Shao G.J. Study of Cu addition on precipitation behaviors and mechanical properties in AA6082 Al-Mg-Si alloy // Mater. Sci. Forum. 2007. V. 546–549. P. 825–828.

8. Zhong H., Rometsh P., Estrin Y. Effect of alloy composition and heat treatment on mechanical performance of 6xxx aluminum alloys // Trans. Nonferrous Met. Soc. China. 2014. V. 24. №. 7 – P. 2174–2178.

9. Chakrabarti D.J., Laughlin D.E. Phase relations and precipitation in Al–Mg–Si alloys with Cu additions // Prog. Mater. Sci. 2004. V. 49. № 3–4. P. 389–410.

10. Ber L.B. On the stages of aging of aluminum alloys // TLS. 2013. №4. P. 66–76.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 289-315.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 289-315.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 534.2+530.145.6+539.124

# ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ВОЛН В ЦЕПОЧКАХ МАССА-В-МАССЕ И МАССА-В-МАССЕ-В-МАССЕ

***Валентин Олегович Турин[1]✉, Егор Игоревич Бурцев[2], Данил Дмитриевич Киреев[3], Ангелина Валентиновна Турина[4], Илья Владимирович Щеглов[5], Юлия Викторовна Илюшина[6]***

*[1,2,3]Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, Орёл, Россия*

*[4,5]МБОУ — школа №51, Орёл, Россия*

*[6]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

*[1]voturin@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-0450-2481*

***Аннотация.*** *В работе рассматривается классическая (dual-resonator model) и модифицированная (с дополнительным гармоническим взаимодействием между соседними одинаковыми внутренними массами и с попарным гармоническим взаимодействием всех масс одной элементарной ячейки) одномерная бесконечная цепочка масса-в-массе-в-массе или (масса(-в-массе)$^2$). Такие цепочки могут рассматриваться как один из классов акустических метаматериалов. Для сравнения, рассматриваются и цепочки масса-в-массе. Для модифицированной цепочки проанализирован случай равенства характерных частот отдельных цепочек из одинаковых масс. Получены уравнения для акустической и двух оптических ветвей дисперсии. Цепочки промоделированы при различных соотношениях масс и жёсткостей пружинок. Обсуждается связь модифицированной цепочки масса(-в-массе)$^2$ с возможностью дальнейшего обобщения уравнений релятивистской квантовой механики и с проблемой поколений лептонов.*

***Ключевые слова:*** *цепочка одинаковых масс, цепочка идентичных связанных осцилляторов, классическая и модифицированная цепочки масса-в-массе и масса(-в-массе)$^2$, акустическая и оптические ветви дисперсии, запрещённая зона, акустический метаматериал, проблема поколений лептонов.*

***Финансирование:*** *работа выполнена в инициативном порядке.*

Conference paper

© Турин В. О., Бурцев Е. И., Киреев Д. Д., Турина А. В., Щеглов И. В., Илюшина Ю. В., 2024

# DISPERSION RELATIONS FOR WAVES IN MASS-IN-MASS AND MASS-IN-MASS-IN-MASS CHAINS

***Valentin O. Turin[1]✉, Egor I. Burtsev[2], Daniil D. Kireev[3], Angelina V. Turina[4], Ilya V. Shcheglov[5], Yulia V. Ilyushina[6]***

*[1,2,3]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*

*[4,5]School No.51, Orel, Russia*

*[6]Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

*[1]voturin@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-0450-2481*

***Abstract.*** *The paper considers the classical (dual-resonator model) and modified (with additional harmonic interaction between neighboring identical internal masses and with pairwise harmonic interaction of all masses of one elementary unit cell) one-dimensional infinite chain mass-in-mass-in-mass or (mass (-in-mass)$^2$). Such chains can be considered as one of the classes of acoustic metamaterials. For comparison, mass-in-mass chains are also considered. For the modified chain, the case of equality of the characteristic frequencies of individual chains of identical masses is analyzed. The equations for the acoustic and two optical branches of dispersion are obtained. The chains are modeled at different ratios of weights and spring stiffness. The connection of the modified mass(-in-mass)$^2$ chain is discussed with the possibility of further generalization of the equations of relativistic quantum mechanics and with the problem of generations of leptons.*

***Keywords:*** *a chain of identical masses, a chain of identical coupled oscillators, classical and modified chains of mass-in-mass and mass(-in-mass)$^2$, acoustic and optical branches of dispersion, band gap, acoustic metamaterial, the problem of lepton generation.*

***Funding:*** *the work was done on an initiative basis.*

## 1. Введение

В 1967 г. Виктор Веселаго теоретически предсказал возможность обратного эффекта Доплера в оптической среде с отрицательным коэффициентом преломления [1] и через тридцать лет эти предсказания были реализованы экспериментально [2, 3]. С этого момента началось бурное развитие физики искусственных структур, в настоящее время обычно называемых метаматериалами. После открытия оптических метаматериалов активизировались и исследования в области акустических метаматериалов. Изучение акустических метаматериалов представляет интерес как с точки зрения фундаментальной значимости, так и с точки зрения практических приложений в акустике и акустоэлектронике [4]. Одним из перспективных приложений является возможность создания суперпоглотителя звука [5]. В 1898 году была исследована механическая система, представляющая из себя одномерную бесконечную цепочку масса-в-массе [6]. Эта система, из-за наличия запрещённой зоны, является простейшим механическим фильтром, реализует концепцию эффективной массы и продолжает вызывать интерес на современном этапе как один из классов акустических метаматериалов. Например, в работах [7-

9] цепочка масса-в-массе подробно исследуется, а в работе [10] рассматривается обобщение цепочки масса-в-массе в виде одномерного иерархического метакомпозита в виде одномерной цепочки масса(-в-массе)$^N$.

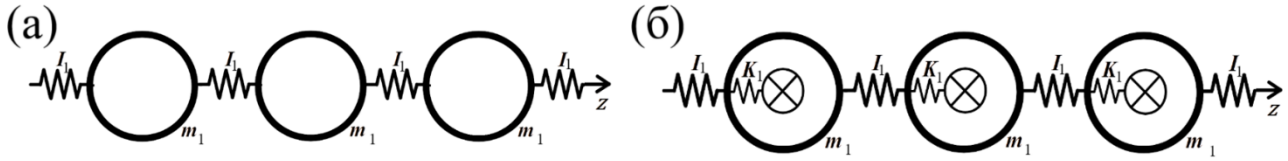



Рисунок 1 – Одномерная бесконечная цепочка из масс $m$, соединённых пружинками с жёсткостью $I_1$ (а); то же с добавлением пружинок с жёсткостью $K_1$, соединяющих каждую массу $m_1$ с её неподвижным положением равновесия, обозначенным кружочком с крестиком (может рассматриваться как цепочка масса-в-массе (рис. 3 (а)) в случае $m_2 \to \infty$) (б).

Кроме того, на основе модифицированной цепочки масса-в-массе (с дополнительным гармоническим взаимодействием между соседними внутренними массами) удалось получить обобщение комплекснозначного уравнения Клейна-Гордона-Фока релятивистской квантовой механики и, далее, обобщение уравнения Дирака с восьмикомпонентной волновой функцией, которое имеет оптическую и акустическую ветви дисперсии, каждая как с положительной так и с отрицательной энергией [11, 12].

**2. Цепочка одинаковых масс**

На рисунке 1(а) представлена классическая одномерная бесконечная цепочка из одинаковых масс $m_1$, соединённых пружинками с жёсткостью $I_1$ с периодом $a$ [13-15] (цепочка из одинаковых масс). Закон дисперсии для этой цепочки (нижняя кривая (чёрный пунктир) на рисунке 2):

$$\omega^2 = 4\frac{I_1}{m_1}\sin^2\frac{ka}{2} = 4\omega_1^2\sin^2\frac{ka}{2}\,. \qquad (1)$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, $\lambda$ – длина волны и $\omega_1$ - характерная частота:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{I_1}{m_1}}\,. \qquad (2)$$

Важным свойством закона дисперсии (1) является то, что частота волн, распространяющихся по цепочке, ограничена частотой $2\omega_1$. Отметим, что в длинноволновом приближении распространение волн в такой цепочке описывается волновым уравнением [15].

**3. Цепочка идентичных связанных осцилляторов**

На рисунке 1(б) представлена цепочка идентичных связанных осцилляторов. Это одномерная бесконечная цепочка из масс $m_1$, соединённых пружинками с жёсткостью $I_1$ с периодом $a$ с добавлением пружинок жёсткостью $K_1$, соединяющих каждую массу $m_1$ с её неподвижным положением равновесия, обозначенным кружочком с крестиком. Закон дисперсии для этой цепочки [14]:

$$\omega^2 = 4\omega_1^2\sin^2\frac{ka}{2} + \omega_{121}^2\,. \qquad (3)$$

Здесь $\omega_{121}$ – частота осциллятора (пружинка $K_1$ связывает массы $m_1$ и $m_2$):

$$\omega_{121} = \sqrt{\frac{K_1}{m_1}}\,. \qquad (4)$$

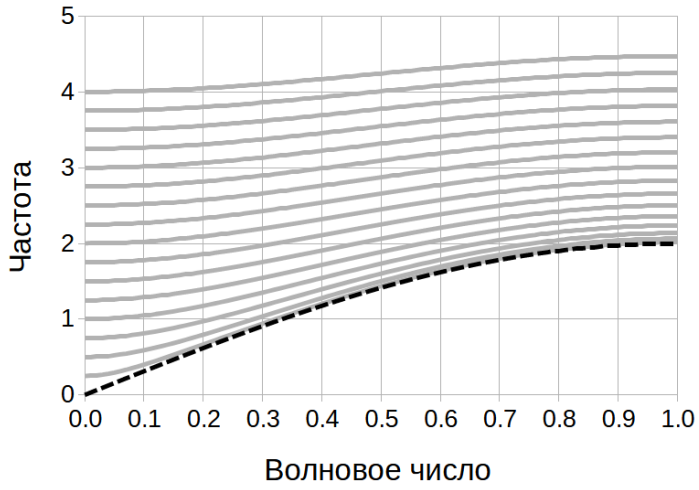



Рисунок 2 — Дисперсия для цепочки идентичных связанных осцилляторов (рис. 1(б)). Для нижней кривой (чёрный пунктир) $\omega_{121}/\omega_1 = \sqrt{K_1/I_1} = 0$, что соответствует классической цепочке из одинаковых масс $m_1$, соединённых пружинками с жёсткостью $I_1$ (рис. 1(а)). Далее вверх (серые линии) $\omega_{121}/\omega_1 = \sqrt{K_1/I_1} = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1;\ 1{,}25;\ \ldots;\ 4$. Частота по вертикальной оси отложена в единицах $\omega_1 = \sqrt{I_1/m_1}$, а волновое число по горизонтальной оси отложено в единицах $k_{\max} = \pi/a$.

На рисунке 2 серыми линиями изображена серия дисперсионных кривых для различных значений $\omega_{121}/\omega_1 = \sqrt{K_1/I_1}$. Отметим, что в длинноволновом приближении распространение волн в такой цепочке описывается вещественным уравнением Клейна-Гордона-Фока (КГФ) [14]. Но уравнение КГФ является и уравнением релятивистской квантовой механики [16]. При этом внутренняя частота $\omega_{121}$ в уравнении КГФ, по гипотезе де Бройля, соответствует частице с массой покоя $m_0$:

$$m_0 = \frac{\hbar\omega_{121}}{c^2} = \frac{\hbar}{c^2}\sqrt{\frac{K_1}{m_1}}\,. \qquad (5)$$

**4. Цепочка масса-в-массе**

В работе [6] впервые была исследована механическая система, представляющая собой одномерную бесконечную цепочку масса-в-массе ($m_2$ внутри $m_1$) (рисунок 3(а)). Это одномерная бесконечная цепочка из масс $m_1$, соединённых пружинками с жёсткостью $I_1$ с периодом $a$ с добавлением пружинок жёсткостью $K_1$, соединяющих каждую массу $m_1$ с расположенной внутри неё массой $m_2$. Эта система имеет акустическую и оптическую ветви дисперсии, которые всегда разделены запрещённой зоной. Отметим, что при $m_2 = 0$ эта цепочка переходит в цепочку из одинаковых масс (рисунок 1(а)), у которой есть только акустическая ветвь дисперсии (1).

При $m_2 \to \infty$ классическая цепочка масса-в-массе переходит в цепочку связанных идентичных осцилляторов (рисунок 1(б)), имеющую только оптическую ветвь дисперсии (3).

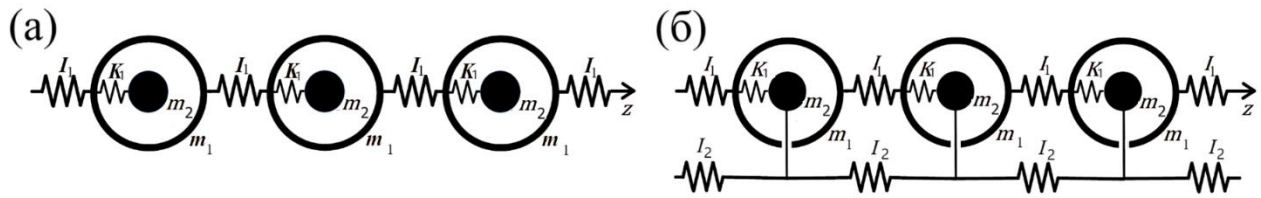



Рисунок 3 — Одномерная бесконечная цепочка масса-в-массе (а); модифицированная цепочка масса-в-массе с добавлением гармонического взаимодействия между соседними внутренними грузами массы $m_2$, которые соединены пружинками с жёсткостью $I_2$ (б)

Закон дисперсии для этой цепочки представляет из себя акустическую (–) и оптическую (+) ветви дисперсии [8] (см. рисунок 4 чёрные и серые линии, соответственно):

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_{121}^2+\omega_{122}^2}{2} + 2\omega_1^2 \sin^2\frac{ka}{2} \pm \pm\sqrt{\left(\frac{\omega_{121}^2+\omega_{122}^2}{2} + 2\omega_1^2 \sin^2\frac{ka}{2}\right)^2 - 4\omega_1^2\omega_{122}^2 \sin^2\frac{ka}{2}}\,. \quad (6)$$

Здесь $\omega_{122}$ – ещё одна характерная частота:

$$\omega_{122} = \sqrt{\frac{K_1}{m_2}}\,. \quad (7)$$

**5. Модифицированная цепочка масса-в-массе**

На рисунке 3(б) представлена модифицированная цепочка масса-в-массе с дополнительным гармоническим взаимодействием между соседними внутренними массами $m_2$, которые соединены пружинками с жёсткостью $I_2$. В итоге модифицированная цепочка масса-в-массе имеет акустическую ($\omega_-$) и оптическую ($\omega_+$) ветви дисперсии (см. рисунки 5, 6 и 7 чёрные и серые линии, соответственно) [17]:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_{121}^2+\omega_{122}^2}{2} + 2(\omega_1^2+\omega_2^2) \sin^2\frac{ka}{2} \pm \pm\sqrt{\left[\frac{\omega_{121}^2+\omega_{122}^2}{2} + 2(\omega_1^2+\omega_2^2) \sin^2\frac{ka}{2}\right]^2 - 4\left(\omega_1^2\omega_{122}^2 + \omega_2^2\omega_{121}^2 + 4\omega_1^2\omega_2^2 \sin^2\frac{ka}{2}\right)\sin^2\frac{ka}{2}}\,. \quad (8)$$

Здесь $\omega_2$ - ещё одна характерная частота (характерная частота цепочки из масс $m_2$, которые соединены пружинками с жёсткостью $I_2$):

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{I_2}{m_2}}\,. \quad (9)$$

Отметим, что для получения уравнений для классической цепочки масса-в-массе (без дополнительного гармонического взаимодействия между соседними внутренними массами $m_2$, которые соединены пружинками с жёсткостью $I_2$) в уравнениях для модифицированной цепочки масса-в-массе нужно устремить $\omega_2$ к нулю.

В работах [11, 12], на основе анализа модифицированной цепочки масса-в-массе для случая $\omega_1 = \omega_2$ при переходе к длинноволновому приближению, удалось получить формальное обобщение комплекснозначных уравнений релятивистской квантовой механики: Клейна-Гордона-Фока и Дирака.

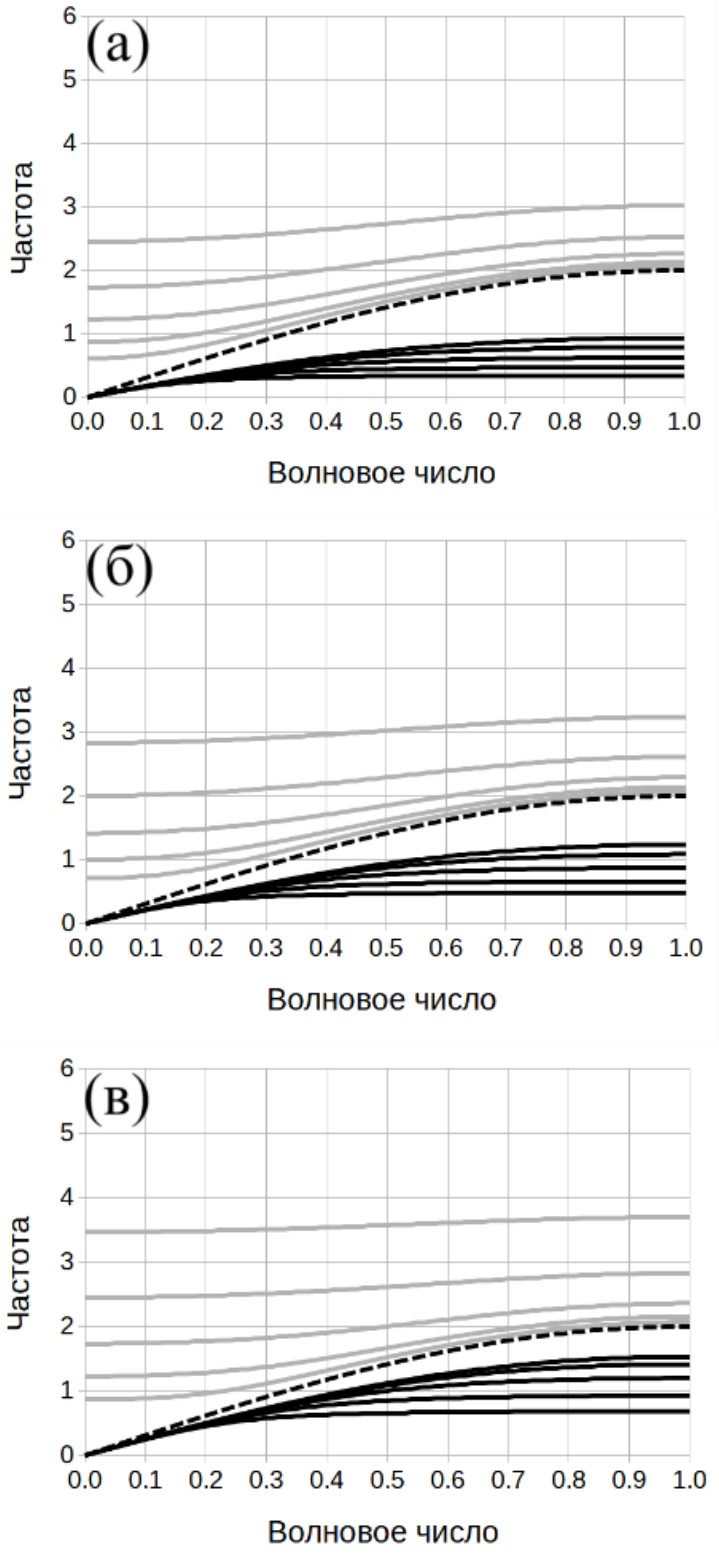



Рисунок 4 — Акустическая (чёрные линии) и оптическая (серые линии) ветви дисперсии для классической цепочки масса-в-массе (рис. 3(а)). $m_1/m_2 = 0$, 5 (а), 1 (б) и 2 (в). Для нижних кривых $I_1/K_1 = 4$, далее вверх 2, 1, 0,5, 0,25. Пунктирной чёрной линией показана дисперсия для цепочки из одинаковых масс (рис. 1(а)). Частота по вертикальной оси в единицах $\omega_1 = \sqrt{I_1/m_1}$, а волновое число по горизонтальной оси в единицах $k_{max} = \pi/a$.

Оказалось, что обобщённое уравнение Дирака с восьмикомпонентной волновой функцией имеет оптическую и акустическую ветви дисперсии, каждая

с положительной и с отрицательной энергией. Введём обозначение $\omega_{ch}$ (chain-цепочка) для частот $\omega_1$ и $\omega_1$ при их равенстве. Соответственно, рассмотрим интересный случай

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_{ch}. \tag{10}$$

При этом

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{m_1}{m_2}. \tag{11}$$

Введём обозначение:

$$\omega_{rd} = \sqrt{\omega_{121}^2 + \omega_{122}^2} = \sqrt{\frac{K_1}{\mu}}. \tag{12}$$

Здесь $\mu$ – приведённая масса (reduced mass):

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{13}$$

Из уравнения (8) и условия (10) получается уравнение для акустической ветви дисперсии:

$$\omega_-^2 = 4\omega_{ch}^2 \sin^2 \frac{ka}{2}. \tag{14}$$

Отметим, что для акустической ветви дисперсии эффективная масса не зависит от частоты.

Для оптической ветви дисперсии получаем:

$$\omega_+^2 = 4\omega_{ch}^2 \sin^2 \frac{ka}{2} + \omega_{rd}^2. \tag{15}$$

Случаю $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{ch}$ соответствуют рисунки 5 (а), 6(б) и 7(в).

Можно дать качественное объяснение полученным результатам для случая $\omega_1 = \omega_2$. Акустическая ветвь колебаний соответствует случаю, когда массы $m_1$ и $m_2$ неподвижны относительно друг друга (движутся синфазно). При этом в двух классических цепочках $(m_1, I_1)$ и $(m_2, I_2)$ (рисунок 1(а)) распространяются синфазные акустические волны одинаковой амплитуды, фазы и частоты с законом дисперсии, совпадающим с акустическим законом дисперсии (1) для каждой цепочки по отдельности. Оптическая ветвь колебаний соответствует случаю, когда массы $m_1$ и $m_2$ относительно друг друга колеблются в противофазе вокруг центра масс, с частотой $\omega_{rd}$, соответствующей колебаниям приведённой массы $\mu$ на пружине жёсткости $K_1$. При этом вид итогового закона дисперсии совпадает с законом дисперсии (3) для цепочки идентичных связанных осцилляторов.

Отметим, что внутренней частоте $\omega_{rd} = \sqrt{\omega_{121}^2 + \omega_{122}^2}$, по гипотезе де Бройля, соответствует частица с массой покоя

$$m_{0\,rd} = \frac{\hbar\,\omega_{rd}}{c^2} = \frac{\hbar}{c^2}\sqrt{\frac{K_1}{\mu}}. \tag{16}$$

Введём безразмерные величины:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\omega_{122}}{\omega_{121}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \tag{17}$$

и

$$\beta_1 = \left(\frac{\omega_{ch}}{\omega_{121}}\right)^2 = \frac{I_1}{K_1}. \tag{18}$$

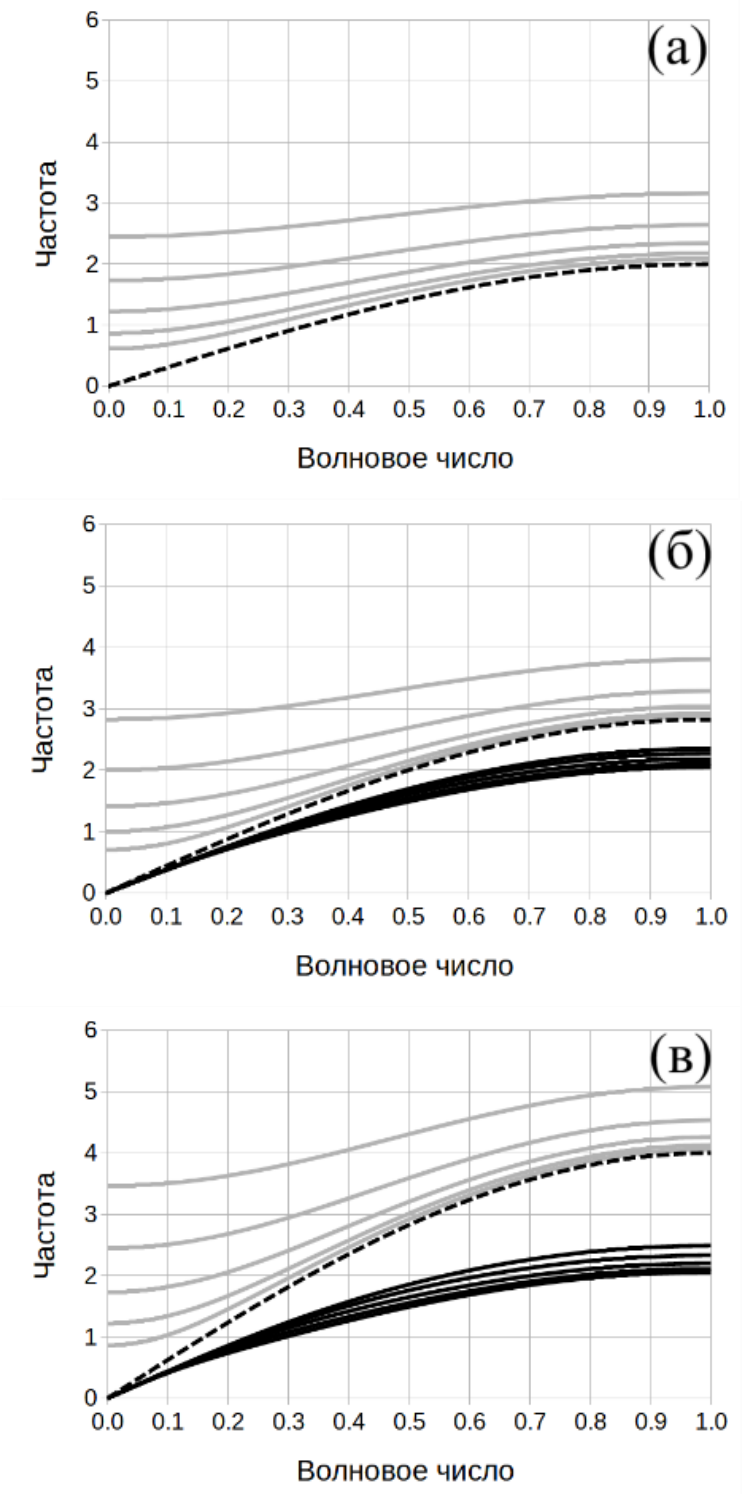



Рисунок 5 — Акустическая (чёрные линии) и оптическая (серые линии) ветви дисперсии для модифицированной цепочки масса-в-массе (рис. 3(б)) при $I_1/I_2 = 0{,}5$. На (а) $m_1/m_2 = 0{,}5$, (б) 1 и (в) 2. Для нижних кривых $I_1/K_1 = 4$, далее вверх 2, 1, 0,5, 0,25. Пунктирной чёрной линией показана дисперсия для цепочки из одинаковых масс ($K_1 \to 0$). Частота по вертикальной оси отложена в единицах $\omega_1 = \sqrt{I_1/m_1}$, а волновое число по горизонтальной оси отложено в единицах $k_{\max} = \pi/a$. На (а) все акустические ветви дисперсии вырождаются в одну ветвь дисперсии для цепочки из одинаковых масс (чёрный пунктир)

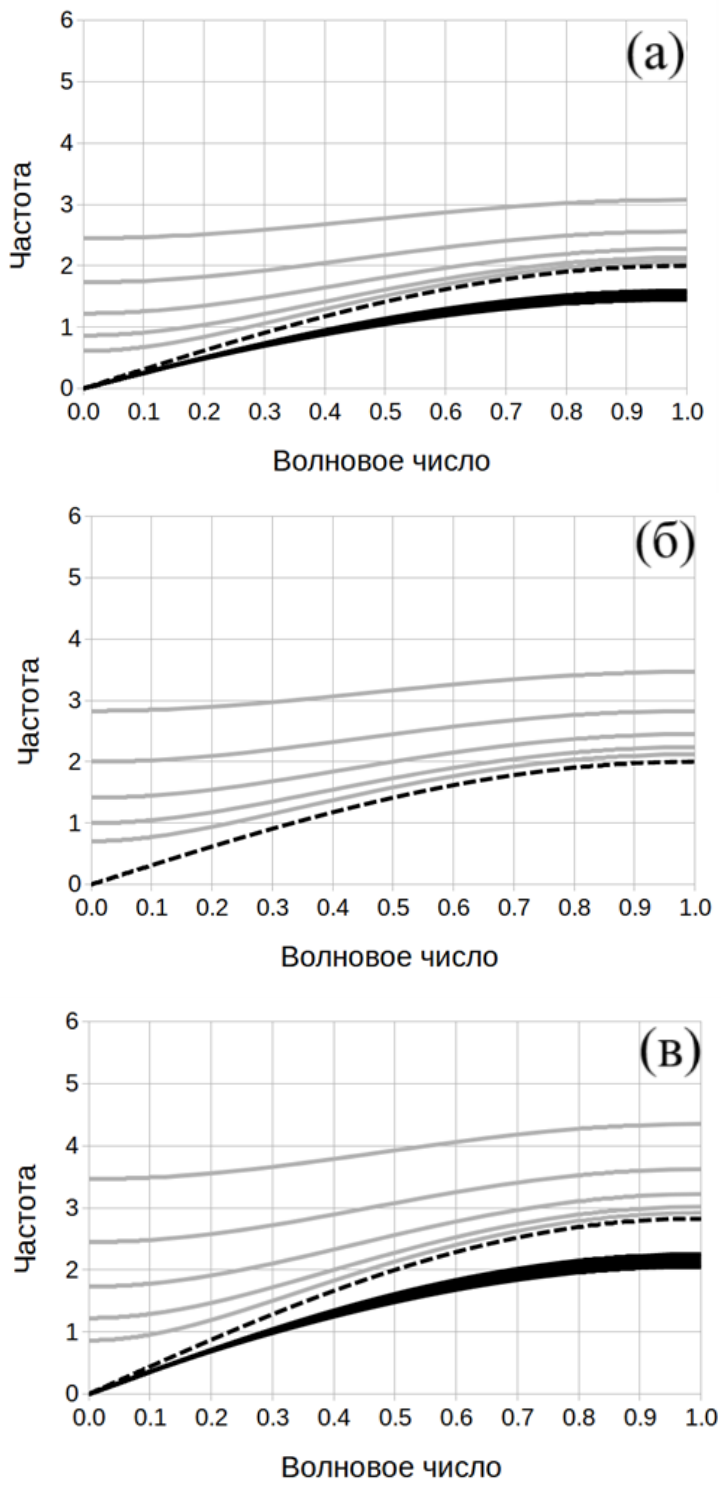



Рисунок 6 — Акустическая (чёрные линии) и оптическая (серые линии) ветви дисперсии для модифицированной цепочки масса-в-массе (рис. 3(б)) при $I_1/I_2 = 1$. На (а) $m_1/m_2 = 0{,}5$, (б) 1 и (в) 2. Для нижних кривых $I_1/K_1 = 4$, далее вверх 2, 1, 0,5, 0,25. Пунктирной чёрной линией показана дисперсия для цепочки из одинаковых масс ($K \to 0$). Частота по вертикальной оси отложена в единицах $\omega_1 = \sqrt{I_1/m_1}$, а волновое число по горизонтальной оси отложено в единицах $k_{\max} = \pi/a$. На (в) все акустические ветви дисперсии вырождаются в одну ветвь дисперсии для цепочки из одинаковых масс (чёрный пунктир)

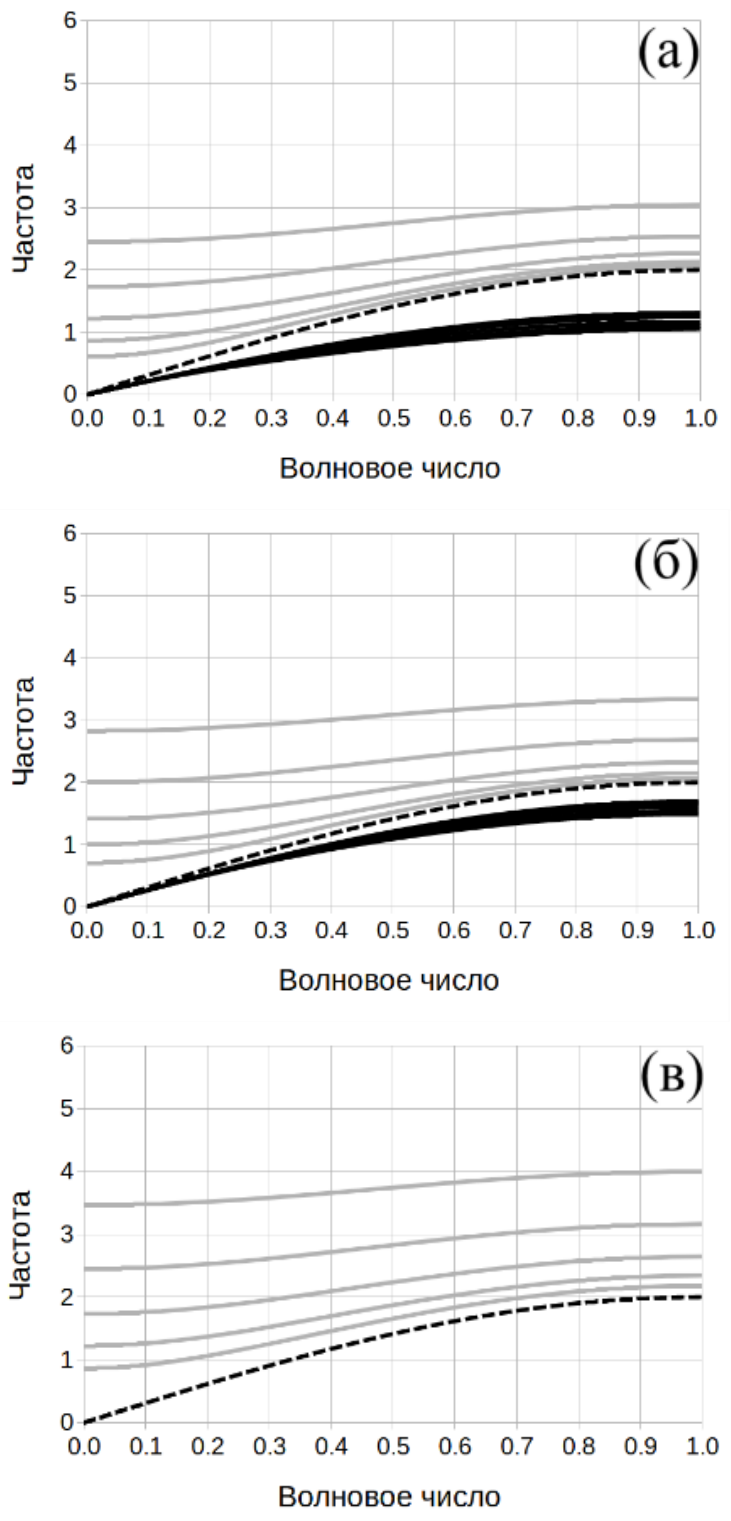



Рисунок 7 — Акустическая (чёрные линии) и оптическая (серые линии) ветви дисперсии для модифицированной цепочки масса-в-массе (рис. 3(б)) при $I_1/I_2 = 2$. На (а) $m_1/m_2 = 0{,}5$, (б) 1 и (в) 2. Для нижних кривых $I_1/K_1 = 4$, далее вверх 2, 1, 0,5, 0,25. Пунктирной чёрной линией показана дисперсия для цепочки из одинаковых масс ($K \to 0$). Частота по вертикальной оси отложена в единицах $\omega_1 = \sqrt{I_1/m_1}$, а волновое число по горизонтальной оси отложено в единицах $k_{\max} = \pi/a$. На (в) все акустические ветви дисперсии вырождаются в одну ветвь дисперсии для цепочки из одинаковых масс (чёрный пунктир)

Закон дисперсии для акустической ветви дисперсии в безразмерном виде:

$$w_{-}^2 = 4\sin^2\frac{\pi x}{2}\ . \tag{19}$$

Для оптической ветви:

$$w_{+}^2 = 4\sin^2\frac{\pi x}{2} + \frac{1+\varepsilon_{12}^2}{\beta_1}\ . \tag{20}$$

**6. Модифицированная цепочка масса(-в-массе)$^2$**

Запишем второй закон Ньютона для $n$-ых грузов массы $m_1$, $m_2$ и $m_3$ для цепочки масса(-в-массе)$^2$, изображённой на рисунке 8. Получаем систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} m_1\frac{d^2u_n}{dt^2} = K_1(v_n - u_n) + K_3(w_n - u_n) + I_1(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n) \\ m_2\frac{d^2v_n}{dt^2} = K_2(w_n - v_n) + K_1(u_n - v_n) + I_2(v_{n-1} + v_{n+1} - 2v_n)\ . \\ m_3\frac{d^2w_n}{dt^2} = K_3(u_n - w_n) + K_2(v_n - w_n) + I_3(w_{n-1} + w_{n+1} - 2w_n) \end{cases} \tag{21}$$

Ищем решение системы уравнений (21) в виде волн с комплексными амплитудами $\tilde{u}$ , $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$:

$$u_n = \tilde{u}e^{i(kz_n - \omega t)}\ ,\quad v_n = \tilde{v}e^{i(kz_n - \omega t)}\ ,\quad w_n = \tilde{w}e^{i(kz_n - \omega t)}. \tag{22}$$

После получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - 4\omega_1^2\sin^2\frac{ka}{2} - \omega_{121}^2 - \omega_{131}^2\right)\tilde{u} + \omega_{121}^2\tilde{v} + \omega_{131}^2\tilde{w} = 0 \\ \omega_{122}^2\tilde{u} + \left(\omega^2 - 4\omega_2^2\sin^2\frac{ka}{2} - \omega_{232}^2 - \omega_{122}^2\right)\tilde{v} + \omega_{232}^2\tilde{w} = 0\ . \\ \omega_{133}^2\tilde{u} + \omega_{233}^2\tilde{v} + \left(\omega^2 - 4\omega_3^2\sin^2\frac{ka}{2} - \omega_{133}^2 - \omega_{233}^2\right)\tilde{w} = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \omega_{121} = \sqrt{\frac{K_1}{m_1}}\ ,\ \omega_{232} = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}}\ ,\ \omega_{133} = \sqrt{\frac{K_3}{m_3}}\ , \\ \omega_{122} = \sqrt{\frac{K_1}{m_2}},\ \omega_{233} = \sqrt{\frac{K_2}{m_3}}\ ,\ \omega_{131} = \sqrt{\frac{K_3}{m_1}}\ , \\ \omega_1 = \sqrt{\frac{I_1}{m_1}}\ ,\ \omega_2 = \sqrt{\frac{I_2}{m_2}}\ ,\ \omega_3 = \sqrt{\frac{I_3}{m_3}}\ . \end{gathered} \tag{24}$$

Система имеют нетривиальное решение, если детерминант соответствующей матрицы (обозначим её как $M_3$) равен нулю. Применим правило Саррюса:

$$\begin{gathered} \det M_3 = \left(\omega^2 - 4\omega_1^2\sin^2\frac{ka}{2} - \omega_{121}^2 - \omega_{131}^2\right)\cdot\left(\omega^2 - 4\omega_2^2\sin^2\frac{ka}{2} - \omega_{232}^2 - \omega_{122}^2\right)\cdot \\ \cdot\left(\omega^2 - 4\omega_3^2\sin^2\frac{ka}{2} - \omega_{133}^2 - \omega_{233}^2\right) + \omega_{121}^2\omega_{232}^2\omega_{133}^2 + \omega_{131}^2\omega_{122}^2\omega_{233}^2 - \\ -\omega_{232}^2\omega_{233}^2\left(\omega^2 - 4\omega_1^2\sin^2\frac{ka}{2} - \omega_{121}^2 - \omega_{131}^2\right) - \\ -\omega_{131}^2\omega_{133}^2\left(\omega^2 - 4\omega_2^2\sin^2\frac{ka}{2} - \omega_{232}^2 - \omega_{122}^2\right) - \\ -\omega_{121}^2\omega_{122}^2\left(\omega^2 - 4\omega_3^2\sin^2\frac{ka}{2} - \omega_{133}^2 - \omega_{233}^2\right)\ . \end{gathered} \tag{25}$$

Введём обозначения:

$$s_1 = 2\omega_1\sin\frac{ka}{2}\ , \tag{26}$$

$$s_2 = 2\omega_2\sin\frac{ka}{2}\ , \tag{27}$$

$$s_3 = 2\omega_3\sin\frac{ka}{2}\ , \tag{28}$$

$$z_1 = \omega^2 - s_1^2 \,, \tag{29}$$
$$z_2 = \omega^2 - s_2^2 \,, \tag{30}$$
$$z_3 = \omega^2 - s_3^2 \,. \tag{31}$$

Перепишем уравнение (25):

$$\begin{aligned}\det M_3 = (z_1 - \omega_{121}^2 - \omega_{131}^2)(z_2 - \omega_{232}^2 - \omega_{122}^2)(z_3 - \omega_{133}^2 - \omega_{233}^2) + \\ +\omega_{121}^2\omega_{232}^2\omega_{133}^2 + \omega_{131}^2\omega_{122}^2\omega_{233}^2 - \\ -\omega_{232}^2\omega_{233}^2(z_1 - \omega_{121}^2 - \omega_{131}^2) - \\ -\omega_{131}^2\omega_{133}^2(z_2 - \omega_{232}^2 - \omega_{122}^2) - \\ -\omega_{121}^2\omega_{122}^2(z_3 - \omega_{133}^2 - \omega_{233}^2) \,.\end{aligned} \tag{32}$$

После некоторых преобразований, получаем:

$$\det M_3 = z_1z_2z_3 - a_1z_2z_3 - z_1a_2z_3 - z_1z_2a_3 + b_1^2z_1 + b_2^2z_2 + b_3^2z_3. \tag{33}$$

Здесь мы ввели для краткости обозначения:

$$a_1 = \omega_{121}^2 + \omega_{131}^2 \,, \tag{34}$$
$$a_2 = \omega_{122}^2 + \omega_{232}^2 \,, \tag{35}$$
$$a_3 = \omega_{133}^2 + \omega_{233}^2 \,, \tag{36}$$
$$b_1^2 = \omega_{122}^2\omega_{133}^2 + \omega_{122}^2\omega_{233}^2 + \omega_{133}^2\omega_{232}^2 \,, \tag{37}$$
$$b_2^2 = \omega_{121}^2\omega_{133}^2 + \omega_{121}^2\omega_{233}^2 + \omega_{131}^2\omega_{233}^2 \,, \tag{38}$$
$$b_3^2 = \omega_{121}^2\omega_{232}^2 + \omega_{122}^2\omega_{131}^2 + \omega_{131}^2\omega_{232}^2 \,. \tag{39}$$

Равенство нулю детерминант матрицы $M_3$ приводит нас к уравнению:

$$z_1z_2z_3 - a_1z_2z_3 - z_1a_2z_3 - z_1z_2a_3 + b_1^2z_1 + b_2^2z_2 + b_3^2z_3 = 0. \tag{40}$$

Это бикубическое уравнение:

$$\omega^6 - c_2\omega^4 + c_1\omega^2 - c_0 = 0. \tag{41}$$

Здесь

$$c_2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + a_1 + a_2 + a_3, \tag{42}$$

$$\begin{aligned}c_1 = s_1^2s_2^2 + s_1^2s_3^2 + s_2^2s_3^2 + (a_2 + a_3)s_1^2 + (a_1 + a_3)s_2^2 + (a_1 + a_2)s_3^2 + \\ +b_1^2 + b_2^2 + b_3^2,\end{aligned} \tag{43}$$

$$c_0 = s_1^2s_2^2s_3^2 + a_1s_2^2s_3^2 + s_1^2a_2s_3^2 + s_1^2s_2^2a_3 + b_1^2s_1^2 + b_2^2s_2^2 + b_3^2s_3^2. \tag{44}$$

Ещё раз отметим, что в работах [11, 12], на основе анализа модифицированной цепочки масса-в-массе для случая $\omega_1 = \omega_2$ при переходе к длинноволновому приближению, удалось получить формальное обобщение комплекснозначных уравнений релятивистской квантовой механики. Соответственно, рассмотрим интересный случай равенства характерных частот всех трёх цепочек:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_{ch}. \tag{45}$$

При этом

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{m_1}{m_2} \,, \tag{46}$$
$$\frac{I_2}{I_3} = \frac{m_2}{m_3} \,. \tag{47}$$

Кроме того

$$z_1 = z_2 = z_3 = z. \tag{48}$$

И выражение для детерминанта $\det M_3$ перепишется так:

$$\det M_3 = z^3 - (a_1 + a_2 + a_3)z^2 + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)z \,. \tag{49}$$

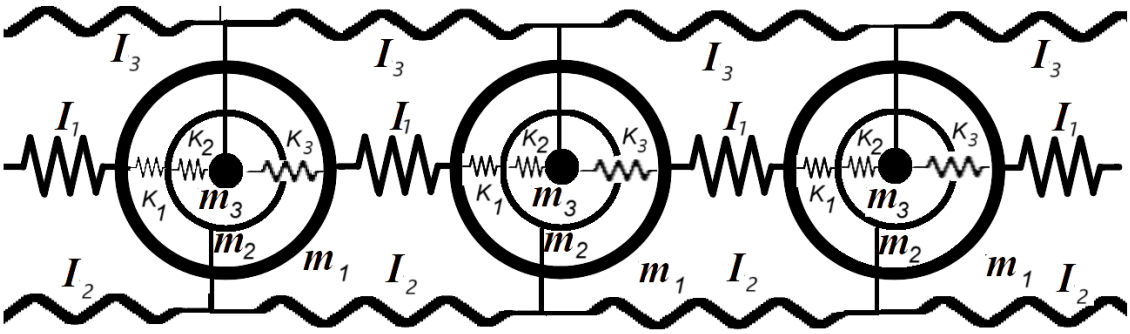



Рисунок 8 — Одномерная бесконечная модифицированная цепочка масса(-в-массе)[2] с добавлением гармонического взаимодействия между соседними внутренними грузами массы $m_2$, которые соединены пружинками с жёсткостью $I_2$ и массы $m_3$, которые соединены пружинками с жёсткостью $I_3$, при том, что грузы $m_1$ соединены пружинками с жёсткостью $I_1$

Равенство нулю детерминант матрицы $M_3$ приводит нас к двум уравнениям:

$$z = 0 \tag{50}$$

и

$$z^2 - (a_1 + a_2 + a_3)z + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 0. \tag{51}$$

Вводя обозначения

$$|p| = a_1 + a_2 + a_3 \tag{52}$$

и

$$q = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, \tag{53}$$

перепишем квадратное уравнение (51) в виде:

$$z^2 - |p|z + q = 0. \tag{54}$$

Уравнение (50) можно переписать в виде закона дисперсии (1) для цепочки из одинаковых масс - классической одномерной бесконечной цепочкой из масс $m$, расположенных с периодом $a$ и соединённых пружинками с жёсткостью $I$:

$$\omega^2 = 4\omega_{ch}^2 \sin^2 \frac{ka}{2}. \tag{55}$$

Решение квадратного уравнения (54):

$$\omega_{1,2}^2 = 4\,\omega_{ch}^2 \sin^2 \frac{ka}{2} + \frac{|p| \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{56}$$

Здесь

$$|p| = \omega_{121}^2 + \omega_{131}^2 + \omega_{122}^2 + \omega_{232}^2 + \omega_{133}^2 + \omega_{233}^2 \tag{57}$$

и

$$\begin{gathered} q = \omega_{122}^2\omega_{133}^2 + \omega_{122}^2\omega_{233}^2 + \omega_{133}^2\omega_{232}^2 + \\ +\omega_{121}^2\omega_{133}^2 + \omega_{121}^2\omega_{233}^2 + \omega_{131}^2\omega_{233}^2 + \\ +\omega_{121}^2\omega_{232}^2 + \omega_{122}^2\omega_{131}^2 + \omega_{131}^2\omega_{232}^2. \end{gathered} \tag{58}$$

Можно показать, что

$$\begin{gathered} p^2 - 4q = \omega_{121}^4 + \omega_{131}^4 + \omega_{122}^4 + \omega_{232}^4 + \omega_{133}^4 + \omega_{233}^4 + \\ +2\omega_{121}^2\omega_{131}^2 + 2\omega_{121}^2\omega_{122}^2 - 2\omega_{121}^2\omega_{232}^2 - 2\omega_{121}^2\omega_{133}^2 - 2\omega_{121}^2\omega_{233}^2 \\ -2\omega_{131}^2\omega_{122}^2 - 2\omega_{131}^2\omega_{232}^2 + 2\omega_{131}^2\omega_{133}^2 - 2\omega_{131}^2\omega_{233}^2 \\ +2\omega_{122}^2\omega_{232}^2 - 2\omega_{122}^2\omega_{133}^2 - 2\omega_{122}^2\omega_{233}^2 \\ -2\omega_{232}^2\omega_{133}^2 + 2\omega_{232}^2\omega_{233}^2 \\ +2\omega_{133}^2\omega_{233}^2. \end{gathered} \tag{59}$$

При этом должно быть:

$$p^2 - 4q > 0\ . \tag{60}$$

В безразмерном виде (поделив частоты на $\omega_{ch}$) вместо (56) получаем:

$$w_{1,2}^2 = 4\ \sin^2\frac{\pi x}{2} + \frac{|\tilde{p}| \pm \sqrt{\tilde{p}^2 - 4\tilde{q}}}{2}\ . \tag{61}$$

Здесь

$$|\tilde{p}| = w_{121}^2 + w_{131}^2 + w_{122}^2 + w_{232}^2 + w_{133}^2 + w_{233}^2\ , \tag{62}$$

и

$$\begin{aligned}\tilde{q} = {} & w_{232}^2 w_{133}^2 + w_{122}^2 w_{133}^2 + w_{122}^2 w_{233}^2 + \\ & + w_{133}^2 w_{121}^2 + w_{233}^2 w_{121}^2 + w_{233}^2 w_{131}^2 + \\ & + w_{232}^2 w_{121}^2 + w_{232}^2 w_{131}^2 + w_{122}^2 w_{131}^2\ .\end{aligned} \tag{63}$$

Отметим, что

$$\overline{w^2} = \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} = 4\ \sin^2\frac{\pi x}{2} + \frac{|\tilde{p}|}{2}\ .$$

Кроме того, отметим, что при

$$|\tilde{p}| = 2\sqrt{\tilde{q}}. \tag{64}$$

дискриминант квадратного уравнения (54) (подкоренное выражение в (61)) обнуляется и два решения вырождаются в одно

$$w^2 = 4\ \sin^2\frac{\pi x}{2} + \sqrt{\tilde{q}}. \tag{65}$$

Отметим, что каждый из двух законов дисперсии (61) совпадает с законом дисперсии для цепочки идентичных связанных осцилляторов (3). При этом

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{|p| - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}\ , \tag{66}$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{|p| + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}\ . \tag{67}$$

Отметим, что внутренние частоты $\omega_{01}$ и $\omega_{02}$, по гипотезе де Бройля, соответствуют частицам с массами покоя $m_{01}$ и $m_{02}$:

$$m_{01} = \frac{\hbar\omega_{01}}{c^2} = \frac{\hbar}{c^2}\sqrt{\frac{|p| - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}\ , \tag{68}$$

$$m_{02} = \frac{\hbar\omega_{02}}{c^2} = \frac{\hbar}{c^2}\sqrt{\frac{|p| + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}\ . \tag{69}$$

Таким образом, если на основе анализа модифицированной цепочки масса(-в-массе)$^2$ для случая $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ при переходе к длинноволновому приближению, удастся получить формальное обобщение комплекснозначного уравнения релятивистской квантовой механики Клейна-Гордона-Фока, то оно будет иметь одну акустическую и две оптических ветвей дисперсии. Наличие двух оптических ветвей дисперсии говорит о возможном существовании двух массивных частиц, в рамках одной математической модели, что отсылает нас к проблеме существования поколений лептонов. Возможно, что удастся получить и обобщение уравнения Дирака для рассматриваемого случая цепочки масса(-в-массе)$^2$.

Введём безразмерные величины:

$$\beta_1 = \left(\frac{\omega_{ch}}{\omega_{121}}\right)^2 = \frac{I_1}{K_1}, \tag{70}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\omega_{122}}{\omega_{121}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}, \tag{71}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\omega_{233}}{\omega_{232}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_3}}, \tag{72}$$

$$\kappa_{12} = \frac{K_1}{K_2}, \tag{73}$$

$$\kappa_{23} = \frac{K_2}{K_3}. \tag{74}$$

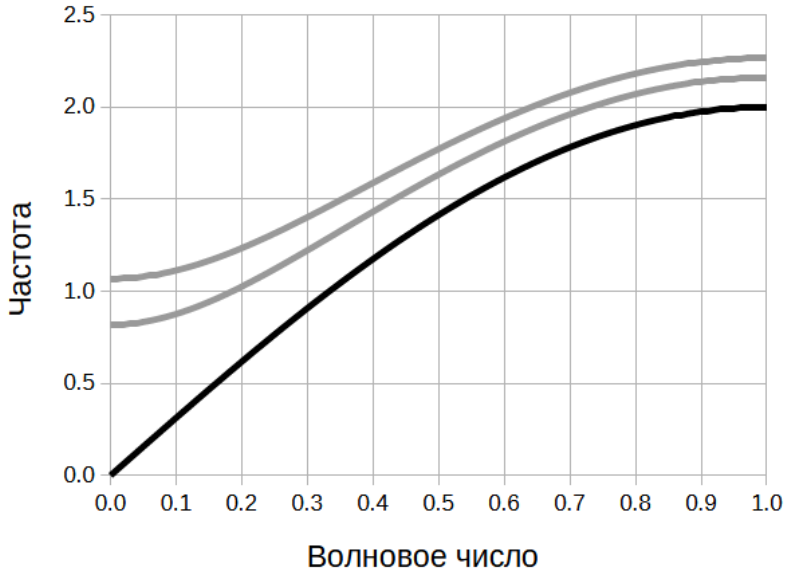



Рисунок 9 — Акустическая (чёрные линии) и оптические (серые линии) ветви дисперсии для модифицированной цепочки масса(-в-массе)$^2$ (рис. 8) при $\beta_1 = I_1/K_1 = 4$, $\varepsilon_{12}^2 = m_1/m_2 = \varepsilon_{23}^2 = m_2/m_3 = 2$, $\kappa_{12} = K_1/K_2 = \kappa_{23} = K_2/K_3 = 2$. При этом $I_1/I_2 = \varepsilon_{12}^2 = I_2/I_3 = \varepsilon_{23}^2 = 2$, $\beta_2 = I_1/K_1 = \beta_3 = I_3/K_3 = 4$. Частота по вертикальной оси отложена в единицах $\omega_{\text{ch}}$, а волновое число по горизонтальной оси отложено в единицах $k_{\max} = \pi/a$

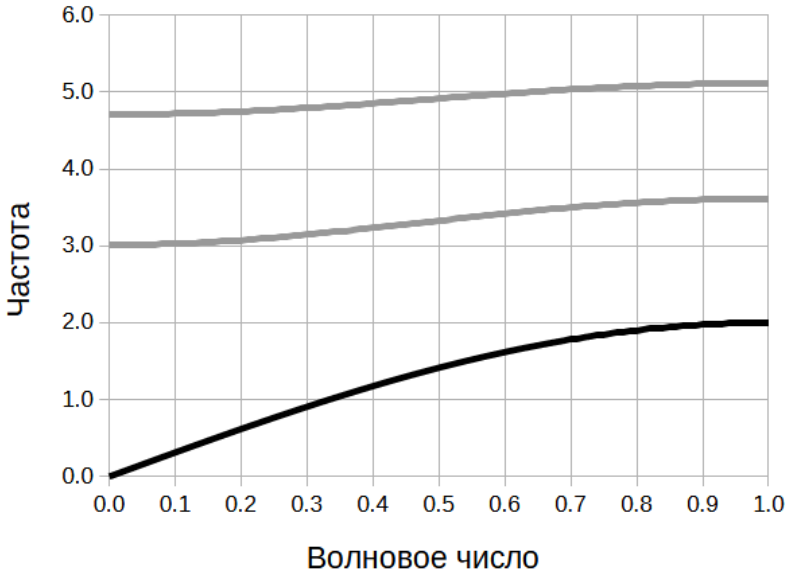



Рисунок 10 — Акустическая (чёрные линии) и оптические (серые линии) ветви дисперсии для модифицированной цепочки масса(-в-массе)$^2$ (рис. 8) при $\beta_1 = I_1/K_1 = 1$, $\varepsilon_{12}^2 = m_1/m_2 = 10$, $\varepsilon_{23}^2 = m_2/m_3 = 2$, $\kappa_{12} = K_1/K_2 = \kappa_{23} = K_2/K_3 = 2$. При этом $I_1/I_2 = \varepsilon_{12}^2 = 10$, $I_2/I_3 = \varepsilon_{23}^2 = 2$, $\beta_2 = I_2/K_2 = \beta_3 = I_3/K_3 = 0{,}2$. Частота по вертикальной оси отложена в единицах $\omega_{\text{ch}}$, а волновое число по горизонтальной оси отложено в единицах $k_{\max} = \pi/a$.

Задав $m_1$ и $I_1$ и зная перечисленные коэффициенты, можно выразить $m_2$, $m_3$, $I_2$, $I_3$, $K_1$, $K_2$, $K_3$ и можно получить все характерные частоты в безразмерном виде:

$$w_{121} = \frac{\omega_{121}}{\omega_{ch}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}}, \tag{75}$$

$$w_{122} = \frac{\omega_{122}}{\omega_{ch}} = \frac{\varepsilon_{12}}{\sqrt{\beta_1}}, \tag{76}$$

$$w_{131} = \frac{\omega_{131}}{\omega_{ch}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_1\,\kappa_{12}\,\kappa_{23}}}, \tag{77}$$

$$w_{133} = \frac{\omega_{133}}{\omega_{ch}} = \frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}}{\sqrt{\beta_1\kappa_{12}\kappa_{23}}}, \tag{78}$$

$$w_{232} = \frac{\omega_{232}}{\omega_{ch}} = \frac{\varepsilon_{12}}{\sqrt{\beta_1\kappa_{12}}}, \tag{79}$$

$$w_{233} = \frac{\omega_{233}}{\omega_{ch}} = \frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}}{\sqrt{\beta_1\kappa_{12}}}. \tag{80}$$

Кроме того

$$\beta_2 = \left(\frac{\omega_{ch}}{\omega_{232}}\right)^2 = \frac{I_2}{K_2} = \frac{\beta_1\kappa_{12}}{\varepsilon_{12}^2}, \tag{81}$$

$$\beta_3 = \left(\frac{\omega_{ch}}{\omega_{133}}\right)^2 = \frac{I_3}{K_3} = \frac{\beta_1\kappa_{12}\kappa_{23}}{\varepsilon_{12}^2\varepsilon_{23}^2}. \tag{82}$$

Из условия равенства частот $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_{ch}$, получается:

$$\frac{I_1}{I_2} = \varepsilon_{12}^2, \tag{83}$$

$$\frac{I_2}{I_3} = \varepsilon_{23}^2. \tag{84}$$

Из (62) получаем уравнение для безразмерного параметра $\tilde{p}$:

$$|\tilde{p}| = \frac{1}{\beta_1}\left(1 + \varepsilon_{12}^2\,\frac{1+\kappa_{12}+\varepsilon_{23}^2}{\kappa_{12}} + \frac{1+\varepsilon_{12}^2\varepsilon_{23}^2}{\kappa_{12}\,\kappa_{23}}\right). \tag{85}$$

Из (63) получаем уравнение для безразмерного параметра $\tilde{q}$:

$$\tilde{q} = \frac{\varepsilon_{12}^2}{\beta_1^2\kappa_{12}}\left((\varepsilon_{12}^2+1)\varepsilon_{23}^2+1\right)\left(\left(\frac{1}{\kappa_{12}}+1\right)\frac{1}{\kappa_{23}}+1\right). \tag{86}$$

Случаю $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_{ch}$ для модифицированной цепочки масса(-в-массе)$^2$ для различных наборов параметров, соответствуют рисунки 9 и 10 на которых изображены по одной акустической (чёрные линии) и по две оптические (серые линии) ветви дисперсии. Видно, что на рисунке 9 нет запрещённых зон, а на рисунке 10 все ветви дисперсии разделены запрещёнными зонами. Отметим, что наличие одной акустической и двух оптических ветвей дисперсии в цепочке масса(-в-массе)$^2$ (без модификации в виде пружинок, соединяющих одинаковые соседние внутренние массы и только с последовательным соединением всех масс одной ячейки) отмечается в работе [10].

**7. Модифицированная цепочка масса(-в-массе)$^2$ при одной из масс устремлённой к бесконечности**

Запишем второй закон Ньютона для $n$-ых грузов массы $m_1$ и $m_2$ для цепочки масса(-в-массе)$^2$ при устремлении к бесконечности массы $m_3$, что изображено на рисунке 11. Получаем систему теперь уже из двух уравнений:

$$\begin{cases} m_1\frac{d^2u_n}{dt^2} = K_1(v_n - u_n) - K_3u_n + I_1(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n) \\ m_2\frac{d^2v_n}{dt^2} = -K_2v_n + K_1(u_n - v_n) + I_2(v_{n-1} + v_{n+1} - 2v_n) \end{cases}. \tag{87}$$

Ищем решение системы уравнений (87) в виде волн с комплексными амплитудами $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$:

$$u_n = \tilde{u}e^{i(kz_n - \omega t)}, \quad v_n = \tilde{v}e^{i(kz_n - \omega t)}. \tag{88}$$

После получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - 4\omega_1^2 \sin^2\frac{ka}{2} - \omega_{121}^2 - \omega_{131}^2\right)\tilde{u} + \omega_{121}^2\tilde{v} = 0 \\ \omega_{122}^2\tilde{u} + \left(\omega^2 - 4\omega_2^2 \sin^2\frac{ka}{2} - \omega_{232}^2 - \omega_{122}^2\right)\tilde{v} = 0 \end{cases}. \tag{89}$$

Система имеют нетривиальное решение, если детерминант соответствующей матрицы (обозначим её как $M_2$) равен нулю:

$$\det M_2 = \left(\omega^2 - 4\omega_1^2 \sin^2\frac{ka}{2} - \omega_{121}^2 - \omega_{131}^2\right) \cdot \left(\omega^2 - 4\omega_2^2 \sin^2\frac{ka}{2} - \omega_{232}^2 - \omega_{122}^2\right) - \omega_{121}^2\omega_{122}^2 . \tag{90}$$

Будем использовать ранее введённые обозначения (26), (27), (29) и (30):

$$s_1 = 2\omega_1 \sin\frac{ka}{2},$$
$$s_2 = 2\omega_2 \sin\frac{ka}{2},$$
$$z_1 = \omega^2 - s_1^2,$$
$$z_2 = \omega^2 - s_2^2.$$

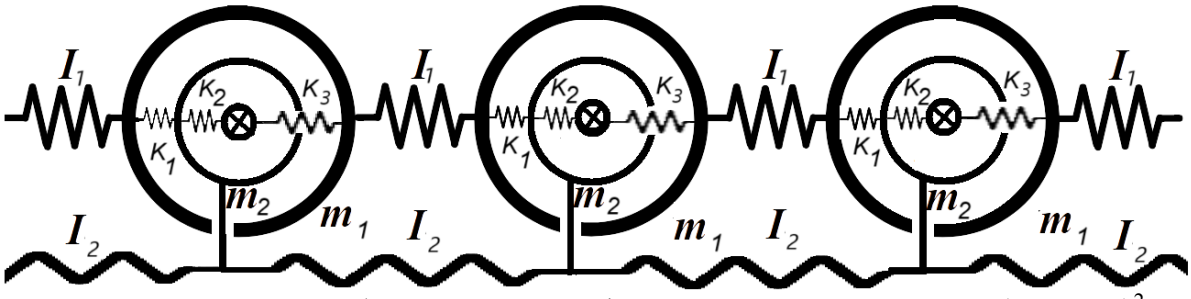



Рисунок 11 — Одномерная бесконечная модифицированная цепочка масса(-в-массе)$^2$ при устремлении к бесконечности массы $m_3$

Перепишем уравнение (90):

$$\det M_2 = (z_1 - \omega_{121}^2 - \omega_{131}^2)(z_2 - \omega_{232}^2 - \omega_{122}^2) - \omega_{121}^2\omega_{122}^2 . \tag{91}$$

После некоторых преобразований, получаем:

$$\det M_2 = z_1z_2 - z_1d_2 - d_1z_2 + f^2. \tag{92}$$

Здесь мы ввели для краткости обозначения:

$$d_1 = \omega_{121}^2 + \omega_{131}^2, \tag{93}$$
$$d_2 = \omega_{122}^2 + \omega_{232}^2, \tag{94}$$
$$f^2 = \omega_{121}^2\omega_{232}^2 + \omega_{122}^2\omega_{131}^2 + \omega_{131}^2\omega_{232}^2. \tag{95}$$

Равенство нулю детерминант матрицы $M_2$ приводит нас к уравнению:

$$z_1z_2 - z_1d_2 - d_1z_2 + f^2 = 0. \tag{96}$$

Это биквадратное уравнение:

$$\omega^4 - e_1\omega^2 + e_0 = 0. \tag{97}$$

Здесь

$$e_1 = s_1^2 + s_2^2 + d_1 + d_2, \tag{98}$$

$$e_0 = s_1^2 s_2^2 + d_1 s_2^2 + d_2 s_1^2 + f^2. \quad (99)$$

Рассмотрим интересный случай равенства характерных частот всех трёх цепочек:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_{ch}. \quad (100)$$

При этом

$$z_1 = z_2 = z. \quad (101)$$

И выражение для детерминанта $\det M_2$ перепишется так:

$$\det M_2 = z^2 - (d_1 + d_2)z + f^2 \ . \quad (102)$$

Равенство нулю детерминант матрицы $M_2$ приводит нас к квадратному уравнению:

$$z^2 - (d_1 + d_2)z + f^2 = 0. \quad (103)$$

Отметим, что, в отличие от цепочки масса(-в-массе)$^2$ со всеми конечными массами, в рассматриваемой цепочке масса(-в-массе)$^2$, при устремлении к бесконечности массы $m_3$, отсутствует корень $z = 0$, что соответствует отсутствию акустической ветви дисперсии в общем случае. Вводя обозначения

$$|p_1| = d_1 + d_2 \quad (104)$$

и

$$q_1 = f^2 \ . \quad (105)$$

Перепишем квадратное уравнение (103) в виде:

$$z^2 - |p_1|z + q_1 = 0. \quad (106)$$

Решение квадратного уравнения (106):

$$\omega_{1,2}^2 = 4\,\omega_{ch}^2 \sin^2 \frac{ka}{2} + \frac{|p_1| \pm \sqrt{p_1^2 - 4q_1}}{2} \ . \quad (107)$$

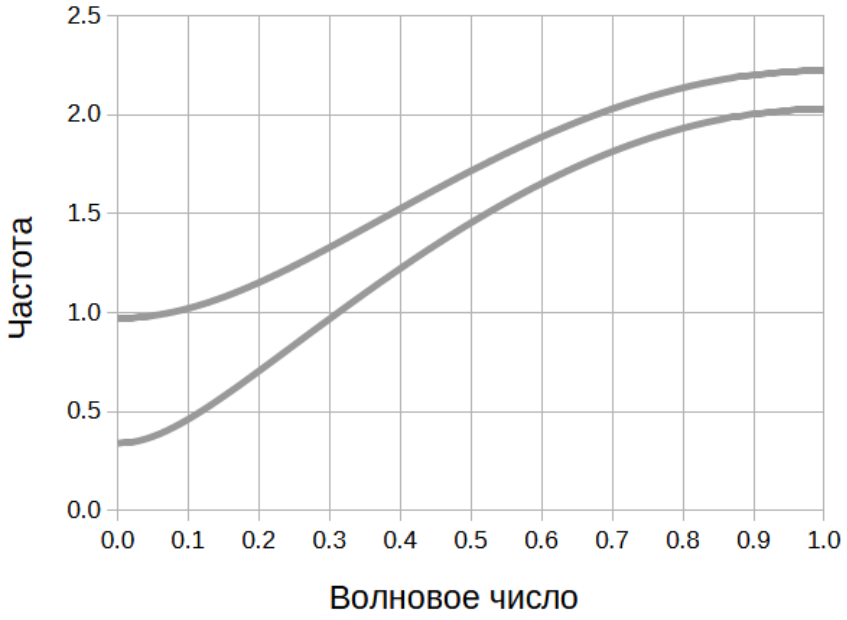



Рисунок 12 — Оптические (серые линии) ветви дисперсии для модифицированной цепочки масса(-в-массе)$^2$ при устремлении к бесконечности массы $m_3$ (рис. 11) при $\beta_1 = I_1/K_1 = 4$, $\varepsilon_{12}^2 = m_1/m_2 = 2$, $\kappa_{12} = K_1/K_2 = \kappa_{23} = K_2/K_3 = 2$. При этом $I_1/I_2 = \varepsilon_{12}^2 = 2$, $\beta_2 = I_1/K_1 = 4$. Частота по вертикальной оси отложена в единицах $\omega_{\mathrm{ch}}$, а волновое число по горизонтальной оси отложено в единицах $k_{\max} = \pi/a$.

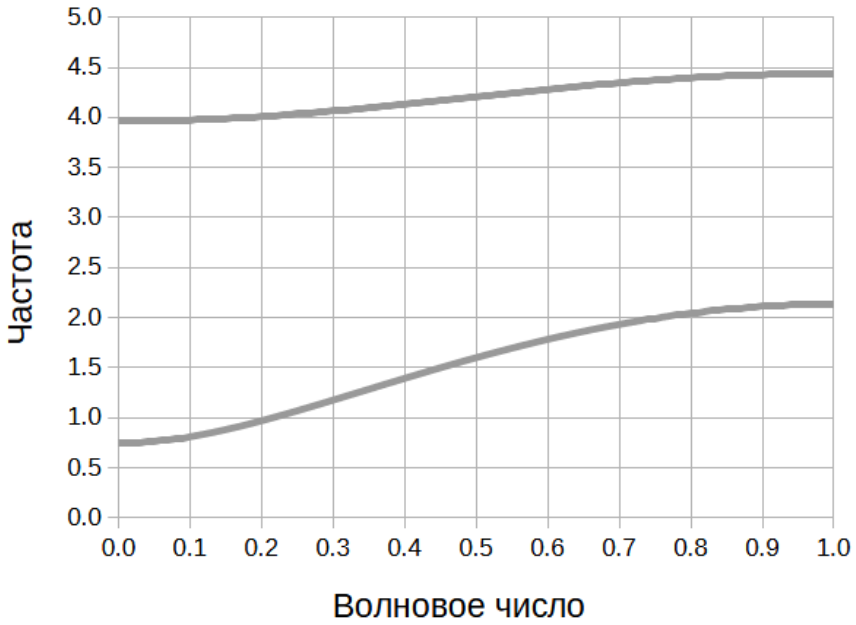



Рисунок 13 — Оптические (серые линии) ветви дисперсии для модифицированной цепочки масса(-в-массе)$^2$ при устремлении к бесконечности массы $m_3$ (рис. 11) при $\beta_1 = I_1/K_1 = 1$, $\varepsilon_{12}^2 = m_1/m_2 = 10$, $\kappa_{12} = K_1/K_2 = \kappa_{23} = K_2/K_3 = 2$. При этом $I_1/I_2 = \varepsilon_{12}^2 = 10$, $\beta_2 = I_2/K_2 = 0{,}2$. Частота по вертикальной оси отложена в единицах $\omega_{\text{ch}}$, а волновое число по горизонтальной оси отложено в единицах $k_{\max} = \pi/a$.

Здесь

$$|p_1| = \omega_{121}^2 + \omega_{131}^2 + \omega_{122}^2 + \omega_{232}^2 \,. \tag{108}$$

и

$$q_1 = \omega_{121}^2\omega_{232}^2 + \omega_{122}^2\omega_{131}^2 + \omega_{131}^2\omega_{232}^2 \,. \tag{109}$$

Можно показать, что

$$\begin{gathered} p_1^2 - 4q_1 = \omega_{121}^4 + \omega_{131}^4 + \omega_{122}^4 + \omega_{232}^4 \\ +2\omega_{121}^2\omega_{131}^2 + 2\omega_{121}^2\omega_{122}^2 + 2\omega_{122}^2\omega_{232}^2 + \\ -2\omega_{121}^2\omega_{232}^2 - 2\omega_{131}^2\omega_{122}^2 - 2\omega_{131}^2\omega_{232}^2. \end{gathered} \tag{110}$$

При этом должно быть:

$$p_1^2 - 4q_1 > 0 \,. \tag{111}$$

В безразмерном виде (поделив частоты на $\omega_{ch}$) вместо (107) получаем:

$$w_{1,2}^2 = 4\,\sin^2\frac{\pi x}{2} + \frac{|\tilde{p}_1| \pm \sqrt{\tilde{p}_1^2 - 4\tilde{q}}}{2} \,. \tag{112}$$

Здесь

$$|\tilde{p}_1| = w_{121}^2 + w_{131}^2 + w_{122}^2 + w_{232}^2 \,, \tag{113}$$

и

$$\tilde{q}_1 = w_{121}^2 w_{232}^2 + w_{122}^2 w_{131}^2 + w_{131}^2 w_{232}^2 \,. \tag{114}$$

Кроме того, отметим, что при

$$|\tilde{p}_1| = 2\sqrt{\tilde{q}_1}. \tag{115}$$

дискриминант квадратного уравнения (106) (подкоренное выражение в (112)) обнуляется и два решения вырождаются в одно

$$w^2 = 4\,\sin^2\frac{\pi x}{2} + \sqrt{\tilde{q}_1}. \tag{116}$$

Отметим, что каждый из двух законов дисперсии (112) совпадает с законом дисперсии для цепочки идентичных связанных осцилляторов (3). При этом

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{|p_1| - \sqrt{p_1^2 - 4q_1}}{2}}, \tag{117}$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{|p_1| + \sqrt{p_1^2 - 4q_1}}{2}}. \tag{118}$$

Отметим, что внутренние частоты $\omega_{01}$ и $\omega_{02}$, по гипотезе де Бройля, соответствуют частицам с массами покоя $m_{01}$ и $m_{02}$:

$$m_{01} = \frac{\hbar\omega_{01}}{c^2} = \frac{\hbar}{c^2}\sqrt{\frac{|p_1| - \sqrt{p_1^2 - 4q_1}}{2}}, \tag{119}$$

$$m_{02} = \frac{\hbar\omega_{02}}{c^2} = \frac{\hbar}{c^2}\sqrt{\frac{|p_1| + \sqrt{p_1^2 - 4q_1}}{2}}. \tag{120}$$

Будем использовать ранее введённые обозначения (70), (71), (73) и (74):

$$\beta_1 = \left(\frac{\omega_{ch}}{\omega_{121}}\right)^2 = \frac{I_1}{K_1},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\omega_{122}}{\omega_{121}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}},$$

$$\kappa_{12} = \frac{K_1}{K_2},$$

$$\kappa_{23} = \frac{K_2}{K_3}.$$

Задав $m_1$ и $I_1$ и зная перечисленные коэффициенты, можно выразить $m_2$, $I_2, K_1$, $K_2$, $K_3$ и можно получить все характерные частоты в безразмерном виде:

$$w_{121} = \frac{\omega_{121}}{\omega_{ch}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}}, \tag{121}$$

$$w_{122} = \frac{\omega_{122}}{\omega_{ch}} = \frac{\varepsilon_{12}}{\sqrt{\beta_1}}, \tag{122}$$

$$w_{131} = \frac{\omega_{131}}{\omega_{ch}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_1\,\kappa_{12}\,\kappa_{23}}}, \tag{123}$$

$$w_{232} = \frac{\omega_{232}}{\omega_{ch}} = \frac{\varepsilon_{12}}{\sqrt{\beta_1\kappa_{12}}}. \tag{124}$$

Кроме того

$$\beta_2 = \left(\frac{\omega_{ch}}{\omega_{232}}\right)^2 = \frac{I_2}{K_2} = \frac{\beta_1\kappa_{12}}{\varepsilon_{12}^2}, \tag{125}$$

Из условия равенства частот $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_{ch}$, получается:

$$\frac{I_1}{I_2} = \varepsilon_{12}^2\ . \tag{126}$$

Из (113) получаем уравнение для безразмерного параметра $\tilde{p}_1$:

$$|\tilde{p}_1| = \frac{1}{\beta_1}\left(1 + \varepsilon_{12}^2 + \frac{1}{\kappa_{12}}\left(\frac{1}{\kappa_{23}} + \varepsilon_{12}^2\right)\right). \tag{127}$$

Из (114) получаем уравнение для безразмерного параметра $\tilde{q}_1$:

$$\tilde{q}_1 = \frac{\varepsilon_{12}^2}{\beta_1^2\kappa_{12}}\left(1 + \frac{1}{\kappa_{23}}\left(1 + \frac{1}{\kappa_{12}}\right)\right). \tag{128}$$

Случаю $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{ch}$ для модифицированной цепочки масса(-в-массе)$^2$, при устремлении к бесконечности массы $m_3$, для различных наборов параметров, соответствуют рисунки 12 и 13 на которых изображены по две оптические (серые линии) ветви дисперсии. Акустические ветви отсутствуют. Видно, что на рисунке 12 нет запрещённых зон, а на рисунке 13 все ветви дисперсии разделены запрещёнными зонами.

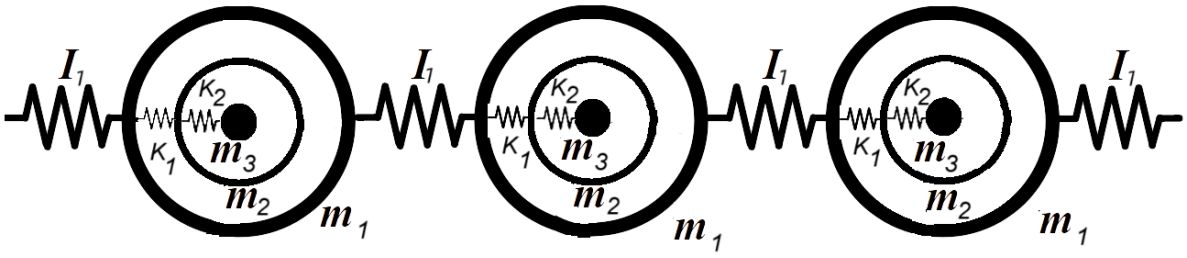



Рисунок 14 — Одномерная бесконечная цепочка масса(-в-массе)$^2$ [10] (dual-resonator model)

**8. Цепочка масса(-в-массе)$^2$**

Запишем второй закон Ньютона для $n$-ых грузов массы $m_1$, $m_2$ и $m_3$ для классической цепочки масса(-в-массе)$^2$ (только с пружинкой $I_1$, соединяющей одинаковые соседние внешние массы $m_1$ и только с последовательным соединением масс $m_1$, $m_2$ и $m_3$ пружинками $K_1$ и $K_2$), изображённой на рисунке 14. Такая цепочка рассмотрена в работе [10] (dual-resonator model). Получаем систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 u_n}{dt^2} = K_1(v_n - u_n) + I_1(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n) \\ m_2 \frac{d^2 v_n}{dt^2} = K_2(w_n - v_n) + K_1(u_n - v_n) \\ m_3 \frac{d^2 w_n}{dt^2} = K_2(v_n - w_n) \end{cases} . \quad (129)$$

Ищем решение системы уравнений (129) в виде волн (22) с комплексными амплитудами $\tilde{u}$ , $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$. После получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - 4\omega_1^2 \sin^2 \frac{ka}{2} - \omega_{121}^2\right)\tilde{u} + \omega_{121}^2 \tilde{v} = 0 \\ \omega_{122}^2 \tilde{u} + (\omega^2 - \omega_{232}^2 - \omega_{122}^2)\tilde{v} + \omega_{232}^2 \tilde{w} = 0 \\ \omega_{233}^2 \tilde{v} + (\omega^2 - \omega_{233}^2)\tilde{w} = 0 \end{cases} . \quad (130)$$

Система имеют нетривиальное решение, если детерминант соответствующей матрицы (обозначим её как $M'_3$) равен нулю. Применим правило Саррюса:

$$\det M'_3 = \left(\omega^2 - 4\omega_1^2 \sin^2 \frac{ka}{2} - \omega_{121}^2\right) \cdot (\omega^2 - \omega_{232}^2 - \omega_{122}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{233}^2) - \\ - \omega_{232}^2 \omega_{233}^2 \left(\omega^2 - 4\omega_1^2 \sin^2 \frac{ka}{2} - \omega_{121}^2\right) - \omega_{121}^2 \omega_{122}^2 (\omega^2 - \omega_{233}^2). \quad (131)$$

Используем обозначения $s_1$ (26) и $z_1$ (29) и перепишем уравнение (131):

$$\det M'_3 = (z_1 - \omega_{121}^2)(\omega^2 - \omega_{232}^2 - \omega_{122}^2)(\omega^2 - \omega_{233}^2) - \\ - \omega_{232}^2 \omega_{233}^2 (z_1 - \omega_{121}^2) - \omega_{121}^2 \omega_{122}^2 (\omega^2 - \omega_{233}^2) . \quad (132)$$

После некоторых преобразований, получаем:

$$\det M'_3 = z_1\omega^4 - a_1\omega^4 - z_1a_2\omega^2 - z_1\omega^2a_3 + b_1^2z_1 + b_2^2\omega^2 + b_3^2\omega^2. \quad (133)$$

Здесь мы ввели для краткости обозначения:

$$a_1 = \omega_{121}^2\,, \quad (134)$$
$$a_2 = \omega_{122}^2 + \omega_{232}^2\,, \quad (135)$$
$$a_3 = \omega_{233}^2\,, \quad (136)$$
$$b_1^2 = \omega_{122}^2\omega_{233}^2\,, \quad (137)$$
$$b_2^2 = \omega_{121}^2\omega_{233}^2\,, \quad (138)$$
$$b_3^2 = \omega_{121}^2\omega_{232}^2\,. \quad (139)$$

Равенство нулю детерминант матрицы $M'_3$ приводит нас к уравнению:

$$z_1\omega^4 - a_1\omega^4 - z_1a_2\omega^2 - z_1\omega^2a_3 + b_1^2z_1 + b_2^2\omega^2 + b_3^2\omega^2 = 0. \quad (140)$$

Это бикубическое уравнение:

$$\omega^6 - c_2\omega^4 + c_1\omega^2 - c_0 = 0. \quad (141)$$

Здесь

$$c_2 = s_1^2 + a_1 + a_2 + a_3, \quad (142)$$
$$c_1 = (a_2 + a_3)s_1^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, \quad (143)$$
$$c_0 = b_1^2s_1^2. \quad (144)$$

Введём безразмерные величины:

$$\beta_1 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_{121}}\right)^2 = \frac{I_1}{K_1}, \quad (145)$$
$$\varepsilon_{12} = \frac{\omega_{122}}{\omega_{121}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}, \quad (146)$$
$$\varepsilon_{23} = \frac{\omega_{233}}{\omega_{232}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_3}}, \quad (147)$$
$$\kappa_{12} = \frac{K_1}{K_2}. \quad (148)$$

Задав $m_1$ и $I_1$ и зная перечисленные коэффициенты, можно выразить $m_2$, $m_3$, $K_1$, $K_2$ и можно получить все характерные частоты в безразмерном виде:

$$w_{121} = \frac{\omega_{121}}{\omega_1} = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}}, \quad (149)$$
$$w_{122} = \frac{\omega_{122}}{\omega_1} = \frac{\varepsilon_{12}}{\sqrt{\beta_1}}, \quad (150)$$
$$w_{232} = \frac{\omega_{232}}{\omega_1} = \frac{\varepsilon_{12}}{\sqrt{\beta_1\kappa_{12}}}, \quad (151)$$
$$w_{233} = \frac{\omega_{233}}{\omega_1} = \frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}}{\sqrt{\beta_1\kappa_{12}}}. \quad (152)$$

Перепишем бикубическое уравнение (141):

$$w^6 - \left(4\sin^2\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{\beta_1}\left(1 + \varepsilon_{12}^2 + \frac{\varepsilon_{12}^2}{\kappa_{12}}(1 + \varepsilon_{23}^2)\right)\right)w^4 +$$
$$+\frac{\varepsilon_{12}^2}{\beta_1}\left(\left(1 + \frac{1+\varepsilon_{23}^2}{\kappa_{12}}\right)4\sin^2\frac{\pi x}{2} + \frac{(\varepsilon_{12}^2+1)\varepsilon_{23}^2+1}{\beta_1\kappa_{12}}\right)w^2 - \frac{\varepsilon_{12}^4\varepsilon_{23}^2}{\beta_1^2\kappa_{12}}4\sin^2\frac{\pi x}{2} = 0\,. \quad (153)$$

Полагая $x = w^2$, мы можем переписать это как кубическое уравнение:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,, \quad (154)$$

где

$$a = 1, \quad (155)$$

$$b = -(s_1^2 + a_1 + a_2 + a_3) = -\left(4\sin^2\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{\beta_1}\left(1 + \varepsilon_{12}^2 + \frac{\varepsilon_{12}^2}{\kappa_{12}}(1 + \varepsilon_{23}^2)\right)\right), \quad (156)$$

$$c = (a_2 + a_3)s_1^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \frac{\varepsilon_{12}^2}{\beta_1}\left(\left(1 + \frac{1+\varepsilon_{23}^2}{\kappa_{12}}\right)4\sin^2\frac{\pi x}{2} + \frac{(\varepsilon_{12}^2+1)\varepsilon_{23}^2+1}{\beta_1\kappa_{12}}\right), \quad (157)$$

$$d = -b_1^2 s_1^2 = -\frac{\varepsilon_{12}^4\varepsilon_{23}^2}{\beta_1^2\kappa_{12}}4\sin^2\frac{\pi x}{2}\,. \quad (158)$$

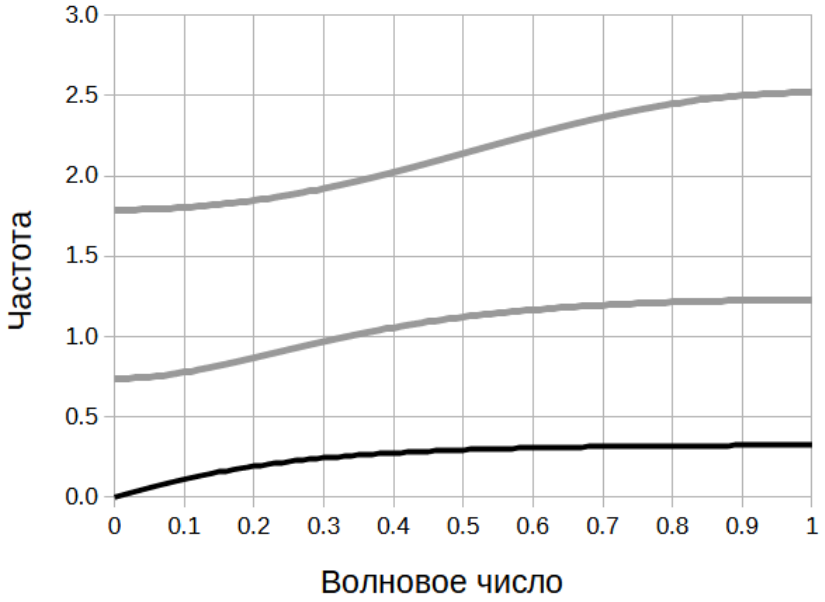



Рисунок 15 – Оптические (серые линии) ветви дисперсии для цепочки масса(-в-массе)$^2$ (рис. 14) при $\beta_1 = I_1/K_1 = 0{,}5$, $\varepsilon_{12}^2 = m_1/m_2 = 2$, $\kappa_{12} = K_1/K_2 = 2$. Частота по вертикальной оси отложена в единицах $\omega_1$, а волновое число по горизонтальной оси отложено в единицах $k_{\max} = \pi/a$.

Все корни кубического уравнения можно найти с помощью метода Кардано. Число вещественных и комплексных корней определяется дискриминантом кубического уравнения:

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2. \quad (159)$$

Если $\Delta > 0$, то уравнение имеет три различных вещественных корня. Если $\Delta = 0$, то уравнение имеет множественный действительный корень.

Если $\Delta < 0$, то уравнение имеет один действительный корень и два комплексных сопряжённых корня. Делением кубического уравнения на $a$ и подстановкой $t - b/3a$ вместо $x$ мы получаем приведённое кубическое уравнение

$$t^3 + pt + q = 0\,, \quad (160)$$

где

$$p = \frac{c}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2\,, \quad (161)$$

$$q = \frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}\,. \quad (162)$$

Для нахождения действительных корней этого уравнения можно использовать тригонометрические и гиперболические решения. Гиперболическое решение для одного действительного корня:

$$t_0 = -2\frac{|q|}{q}\sqrt{-\frac{p}{3}}\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcosh}\left(-\frac{3|q|}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right)\right) \quad (163)$$

если $4p^3 + 27q^2 > 0$ и $p < 0$.

$$t_0 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\sinh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right)\right) \quad (164)$$

если $p > 0$.

Тригонометрическое решение для трёх действительных корней

$$t_{\mathrm{k}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right) - \frac{2\pi k}{3}\right) \quad (165)$$

для $k = 0, 1, 2$. Эта формула включает только действительные члены, если $p < 0$ и аргумент функции arccos находится между -1 и 1. Последнее условие эквивалентно условию $4p^3 + 27q^2 \leq 0$, что само по себе подразумевает $p < 0$. Таким образом, приведенная выше формула для корней включает только действительные величины, если и только если три корня действительные. И наши расчёты показывают, что только случай $k = 0$ даёт продолжение гиперболических решений. Случаи $k = 1, 2$ дают отрицательные значения корней $V_{\mathrm{GT}}$ исходного кубического уравнения. Наконец, выбрав подходящий корень, получаем:

$$w^2 = x = t - b/3a\ . \quad (166)$$

Акустическая и две оптические ветви дисперсии представлены на рисунке 15 для цепочки масса(-в-массе)$^2$ (без модификации в виде пружинок, соединяющих одинаковые соседние внутренние массы и только с последовательным соединением всех масс одной ячейки), что соответствует результатам работы [10].

**9. Заключение**

Получены уравнения для акустической и двух оптических ветвей дисперсии модифицированной цепочки масса(-в-массе)$^2$. В отличие от цепочки масса-в-массе, эта цепочка имеет две оптических ветвей дисперсии. Для цепочки масса(-в-массе)$^2$ при устремлении к бесконечности массы $m_3$ акустическая ветвь дисперсии отсутствует, подобно тому, как она отсутствует в цепочке масса-в-массе при устремлении к бесконечности массы $m_2$. Изучен частный случай $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ для цепочки масса(-в-массе)$^2$ и частный случай $\omega_1 = \omega_2$ для цепочки масса(-в-массе)$^2$ при устремлении к бесконечности массы $m_3$. С использованием полученных уравнений цепочки промоделированы при разных соотношениях масс и упругостей пружин. Отметим, что, на основе случая $\omega_1 = \omega_2$ для цепочки масса-в-массе, с использованием длинноволнового приближения, в работах [11, 12] получено формальное обобщение уравнений релятивистской квантовой механики. В дальнейшей работе мы планируем изучить длинноволновое приближение для цепочки масса(-в-массе)$^2$, что соответствует непрерывным материалам. Для случая $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ мы планируем изучить возможность дальнейшего обобщения уравнений релятивистской квантовой механики. Отметим, что количество поколений лептонов пока не объяснено в рамках существующих теорий. В дальнейшем мы планируем рассмотреть модифицированную цепочку масса(-в-массе)$^3$, в которой, предположительно,

может возникнуть три оптические ветви дисперсии, что может соответствовать трём массивным частицам, в рамках одной математической модели, что может соответствовать трём поколениям лептонов. Отметим, что наличие одной акустической и трёх оптических ветвей дисперсии в цепочке масса(-в-массе)$^3$ (без модификации в виде пружинок, соединяющих одинаковые соседние внутренние массы и только с последовательным соединением всех масс одной ячейки) отмечается в работе [10]. Напомним, что на данный момент существует три поколения лептонов. Первое поколение: электрон, электронное нейтрино. Второе поколение: мюон, мюонное нейтрино. Третье поколение: тау-лептон, тау-нейтрино. Было бы интересно рассмотреть и модифицированную цепочку масса(-в-массе)$^N$, что может привести нас к предсказанию существования и дальнейших поколений лептонов. Часть задач решена в рамках программы «Сириус. Лето: начни свой проект», проектная задача «Распространение волн в акустическом метаматериале на основе классической и модифицированной одномерной цепочки масса-в-массе», научный руководитель В. О. Турин, наставник Д. Д. Киреев.

## Список источников

1. Веселаго, В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ / В. Г. Веселаго // Успехи физических наук. – 1967. – Т. 92, № 3. – С. 517–526.

2. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena / J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, W. J. Stewart // EEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1999. – Т. 47, № 11. – С. 2075 - 2084.

3. Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity / D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier [и др.] // Physical Review Letters. – 2000. – Т. 84, № 18. – С. 4184-4187.

4. Zhang, J. Review and perspective on acoustic metamaterials: From fundamentals to applications / J. Zhang, B. Hu, S. Wang // Applied Physics Letters. – 2023. – Т. 123, № 1. – С. 010502-1-11.

5. Бобровницкий, Ю. И. Поглощение звука и метаматериалы (обзор) / Ю. И. Бобровницкий, Т. М. Томилина // Акустический журнал. – 2018. – Т. 64, № 5. – С. 517–525.

6. Vincent, J. H. On the Construction of a Mechanical Model to Illustrate Helmholtz's Theory of Dispersion / J.H. Vincent // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. – 1898. – Т. 46, № 283. – С. 557-563.

7. Chan, C. T. On extending the concept of double negativity to acoustic waves / C.T. Chan, L.I. Jensen, K.H. Fung // Journal of Zhejiang University SCIENCE A. – 2006. – Т. 7, № 1. – С. 24-28.

8. Huang, H. H. On the Negative Effective Mass Density in Acoustic Metamaterials / H. H. Huang, C.T. Sun, G.L. Huang // International Journal of Engineering Science. – 2009. – Т. 47, № 4. – С. 610-617.

9. Ерофеев, В. И. Нелинейные локализованные продольные волны В метаматериале, задаваемом как цепочка «масса-в-массе» / В. И. Ерофеев, Д. А. Колесов, А. О. Мальханов // Акустический журнал. – 2022. – Т. 68, № 5. – С. 475–478.

10. Negative Effective Mass Density of One-Dimensional Hierarchical Metacomposite / X. An, F. Sun, P. Yu [и др.] // Journal of Applied Mechanics. – 2015. – Т. 82, № 3. – С. 031002-1-8.

11. Одномерная цепочка «масса в массе» и обобщение уравнений Клейна-Гордона-Фока и Дирака, как с «оптической», так и с «акустической» ветвями дисперсии / В. О. Турин, Ю. В. Илюшина, П. А. Андреев [и др.] // Естественные и гуманитарные науки в современном мире : материалы VI Международной научно-практической конференции, посвящённая 115-летию Лакина Г.Ф., Орёл, 15–17 мая 2023 года. – Орёл: Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, 2023. – С. 220-235.

12. A Mass-in-Mass Chain and the Generalization of the Dirac Equation with an Eight-Component Wave Function and with Optical and Acoustic Branches of the Dispersion Relation / V. O. Turin, Y. V. Ilyushina, P. A. Andreev [et al.] // Russian Microelectronics. – 2023. – Vol. 52, No. S1. – P. S299-S305. – DOI 10.1134/s1063739723600693.

13. Brillouin, L. Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices / L. Brillouin. – New York: McGraw-Hill, 1946. – 247 с.

14. Crawford, F.S. Waves. Berkeley Physics Course. В 5 т. Т. 3 / F.S. Crawford. – New York : McGraw-Hill, 1968. – 625 с.

15. Зегря, Г. Г. Основы физики полупроводников / Г. Г. Зегря, В. И. Перель. - Москва : Физматлит, 2009.

16. Матвеев, А. Н. Атомная физика : учебное пособие для студентов вузов / А. Н. Матвеев. - 2-е изд. - Москва : ОНИКС : Мир и Образование, 2007.

17. Модифицированная цепочка масса-в-массе / В. О. Турин, И. В. Назрицкий, Д. Д. Киреев [и др.] // Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники. – 2024. – № 4. – С. 1-20. (Принята в печать).

## References

1. Veselago V. G. The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of ε and μ. Soviet Physics Uspekhi. 1967; 10(4): 509-514. https://doi.org/10.1070/PU1968v010n04ABEH003699.

2. Pendry J. B., Holden A. J., Robbins D. J., Stewart W. J. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. EEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1999. 47(11): 2075 - 2084. doi: 10.1109/22.798002.

3. Smith D. R., Padilla W. J., Vier D. C., Nemat-Nasser S. C., and Schultz S. Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity. Physical Review Letters. 2000; 84(18): 4184-4187. https://doi.org/10.1103/ PhysRevLett.84.4184.

4. Zhang J., Hu B., Wang S. Review and perspective on acoustic metamaterials: From fundamentals to applications. Applied Physics Letters. 2023. 123(1): 010502-1-11. https://doi.org/10.1063/5.0152099.

5. Bobrovnitskii Y. I., Tomilina T. M. Sound absorption and metamaterials: A review. Acoustical Physics. 2018. 64(5): 519-526. doi: 10.1134/S1063771018040024

6. Vincent, J.H. On the Construction of a Mechanical Model to Illustrate Helmholtz's Theory of Dispersion. The London, Edinburgh, and Dublin Philo-sophical Magazine and Journal of Science. 1898. 46(283): 557-563. https://doi.org/10.1080/14786449808621232.

7. Chan C. T., Jensen L. I., Fung K. H. On extending the concept of double negativity to acoustic waves. Journal of Zhejiang University SCIENCE A. 2006. 7(1): 24-28. https://doi.org/10.1631/jzus.2006.A0024.

8. Huang H. H., Sun C. T., Huang G.L. On the Negative Effective Mass Density in Acoustic Metamaterials. International Journal of Engineering Science. 2009; 47(4): 610-617. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2008.12.007.

9. Erofeev V.I., Kolesov D.A., Malkhanov A.O. Nonlinear localized longitudinal waves in a metamaterial designed as a "mass-in-mass" chain. Acoustical Physics. 2022. 68(5): 423–426. https://doi.org/10.1134/S1063771022040030.

10. An X., Sun F., Yu P., Fan H., He S., Fang D. Negative effective mass density of one-dimensional hierarchical metacomposite. Journal of Applied Mechanics. 2015. 82(3): 031002-1-8. https://doi.org/10.1115/1.4029488.

11. Turin V. O., Ilyushina Yu. V., Andreev P. A., Cherepkova A. Yu., Kireev D. D., Nazritsky I. V. One-dimensional chain "mass in mass" and generalization of the Klein-Gordon-Fock and Dirac equations, both with "optical" and "acoustic" branches of dispersion. Proceedings of the VI International Scientific and Practical Conference: Natural and Humanitarian Sciences in the modern world. Orel State University named after I. S. Turgenev. 2023. 220-235.

12. Turin V. O., Ilyushina Yu. V., Andreev P. A., Cherepkova A. Yu., Kireev D. D., Nazritsky I. V. A mass-in-mass chain and the generalization of the Dirac equation with an eight-component wave function and with optical and acoustic branches of the dispersion relation. Russian Microelectronics. 2023. 52(S1): S299-S305. DOI 10.1134/s1063739723600693.

13. Brillouin L. Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices. New York: McGraw-Hill; 1946. 247 p.

14. Crawford F.S. Waves. Berkeley Physics Course. New York: McGraw-Hill; 1968. 625 p.

15. Zegrya G. G., Perel V. I. Fundamentals of Semiconductor Physics. Textbook recommended by the Ministry of Education and Science to physics students. Moscow: Fizmatlit; 2009. 336 p. (in Russian).

16. Matveev A. N. Atomic Physics. Moscow: High School. 1989. 439 p. (in Russian).

17. Turin V. O., Nazritsky I. V., Kireev D. D., Andreev P. A., Ilyushina Yu. V., Modified mass-in-mass chain. Materials of Electronics Engineering. 2024. 4: 1-20. (Will be published).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 316-323.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 316-323.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 537. 32

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА НА ОСНОВЕ ТЕЛЛУРИДА ВИСМУТА

***Олег Иванович Марков***[1]✉
[1]*Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
[1]*O.I.Markov@mail.ru*✉

***Аннотация.*** *Проведен расчет модуля термоэлектрического генератора с учетом температурных зависимостей кинетических коэффициентов и сделан качественный анализ результатов исследований.*

***Ключевые слова:*** *термоэлектрический генератор, теллурид висмута, удельное сопротивление, удельная теплопроводность, дифференциальная термоэдс, температурная зависимость, мощность, КПД.*

Conference paper

# SIMULATION OF THE OPERATION OF A THERMOELECTRIC GENERATOR BASED ON BISMUTH TELLURIDE

***Oleg I. Markov***[1]✉
[1]*Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
[1]*O.I.Markov@mail.ru*✉

***Abstract.*** *The calculation of the thermoelectric generator module is carried out taking into account the temperature dependences of the kinetic coefficients and a qualitative analysis of the research results is made.*

***Keywords:*** *thermoelectric generator, bismuth telluride, resistivity, specific thermal conductivity, differential thermal EMF, temperature dependence, power, efficiency.*

## 1. Введение

Поскольку спрос на энергию во всем мире только растет, возникает необходимость в создании альтернативных источников электрической энергии, что в свете мирового энергетического кризиса становится особенно

© Марков О. И., 2024

актуальным. Тепловые двигатели могут преобразовывать только около 35% доступной энергии, все остальное - отработанное тепло, которое выбрасывается в атмосферу. Но это отработанное тепло может быть преобразовано в полезную энергию, в частности, с помощью методов прямого преобразования тепловой энергии в электрическую, основным, из которых является термоэлектрический. Экологичность термоэлектрических генераторов сочетается с такими преимуществами как простота устройств, отсутствие движущихся частей, технологичность изготовления, долговечность, минимальное техобслуживание, бесшумность работы. К сожалению, КПД термоэлектрических генераторов значительно меньше термодинамического и, как правило, не превышает ~8%. Обычно надежды на повышение эффективности термоэлектрического генератора возлагаются на улучшение качества материалов и конструкции. С нашей точки зрения, еще одним методом повышения эффективности является более точное моделирование термогенератора, учитывающее температурные зависимости кинетических коэффициентов, полученные экспериментально.

Проектирование и расчет термоэлектрического генератора являются стандартными задачами практики термоэлектричества. Методы проектирования термоэлектрических генераторов основаны на использовании модели термопары. При разработке термоэлектрического генератора основной упор делается на выходную мощность модуля. В методе «средних параметров» мощность термогенератора определяется по формуле

$$N = U \cdot I = (\Delta\alpha \cdot \Delta T)^2 / (2 \cdot R) \qquad (1)$$

Как видно из формулы 1, основным фактором, влияющим на выходную мощность, являются изменение коэффициента Зеебека, перепад температуры и внутреннее сопротивление модуля. Перепадом температуры можно управлять, однако физические свойства материалов необходимо подбирать заранее по выбранному интервалу температур, поскольку они являются функциями температуры.

Модель включает температурные зависимости характеристик материалов генератора в диапазоне рабочих температур. Обычно используется метод «средних параметров», состоящий в усреднении кинетических коэффициентов по температурному интервалу [1, 2]. Расчет с использованием модели, основанной на решении одномерных дифференциальных уравнений второго порядка с коэффициентами, имеющими зависимость от температуры, считается сложным и используется крайне редко. В связи с этим перед исследователями обычно возникает дилемма, какой метод выбрать - более простой или более точный.

Авторы [3], используя экспериментальные данные термоэлектрика PbTe, провели точный расчет мощности и КПД термогенераторов с учетом температурной зависимости кинетических коэффициентов, сравнили результаты с расчетом по методу «средних параметров» и сделали вывод, что точные расчеты вряд ли являются целесообразными, т.к. приводят к поправкам, не превышающим погрешности расчета. Но, следует отметить, что температурная зависимость модуля дифференциальной термоэдс термоэлектрика PbTe монотонна и тогда возникает вопрос о справедливости

данного вывода для случая, когда температурная зависимость модуля дифференциальной термоэдс не является монотонной и как это может повлиять на точность расчета мощности и КПД генератора.

Целью наших исследований являлась разработка математической модели и метода расчета термоэлектрического генератора на ее основе, которые позволяют на стадии проектирования рассчитать как электрические параметры термогенератора, так и количество теплоты отдаваемой холодному теплоносителю воде и его температуру. Низкотемпературный режим работы генератора был выбран с учетом нескольких факторов:

1. Наиболее часто встречающийся температурный интервал;
2. Наиболее изученные термоэлектрические материалы (теллуриды висмута и сурьмы);
3. Низкотемпературные термоэлектрические генераторы нашли свое применение в качестве автономных источников энергии для маломощных применений.

В качестве низкотемпературного термоэлектрика были выбраны теллуриды висмута и сурьмы.

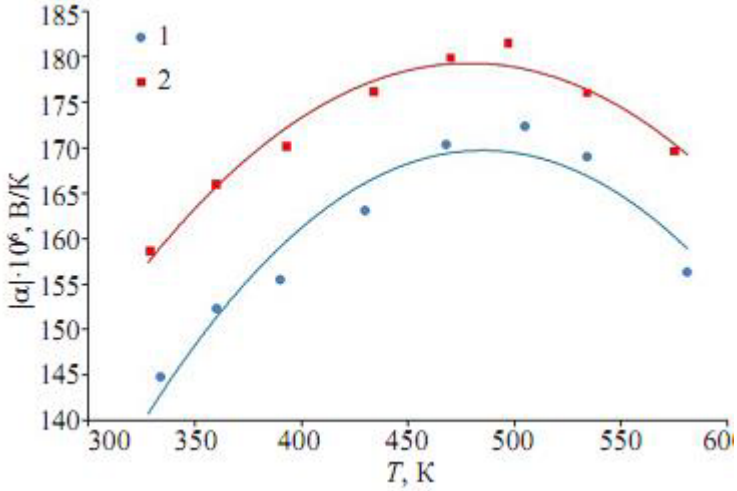



Рисунок 1 – Дифференциальная термоэдс образцов теллурида висмута и сурьмы n (1) и p (2) -типов ( из [4]).

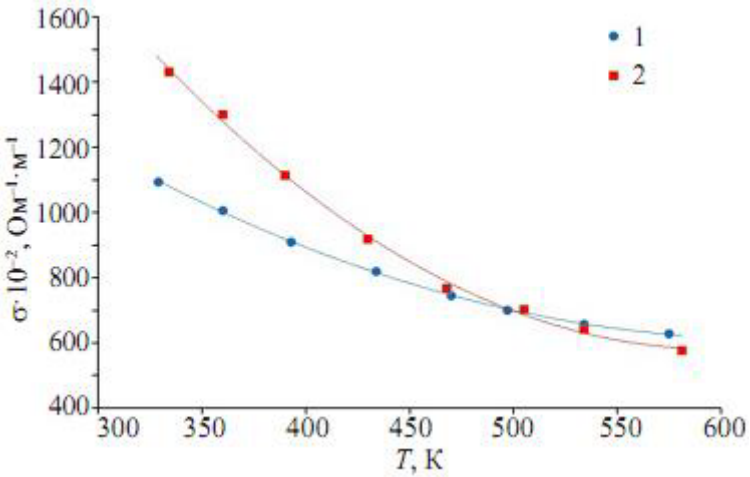



Рисунок 2 – Удельная электропроводность образцов теллурида висмута и сурьмы n (1) и p (2) -типов ( из [4]).

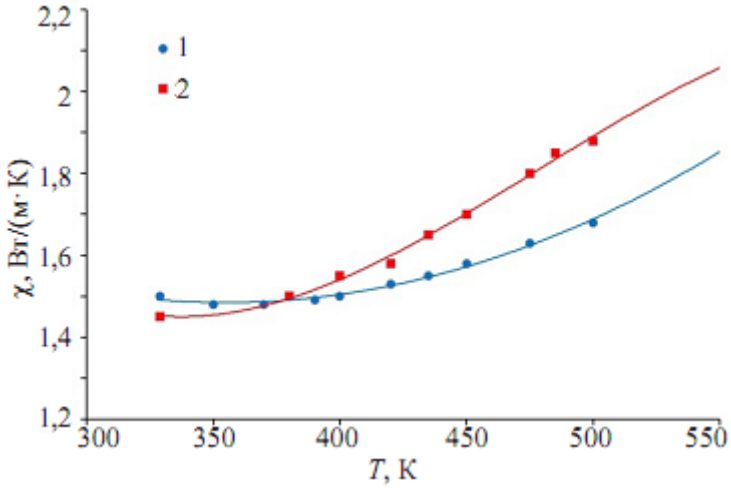


Рисунок 3 – Удельная теплопроводность образцов теллурида висмута и сурьмы n (1) и p (2) -типов ( из [4]).

Температурные зависимости дифференциальной термоэдс, удельной электропроводности и удельной теплопроводности в интервале от комнатной температуры до 523 К, взятые из работы [4], показаны на рисунке 1, 2 и 3 соответственно.

**2. Основной текст статьи**

Метод исследования работы генератора в режиме максимальной мощности состоял в решении граничной задачи, так же, как и в [10], в основе которой уравнение, моделирующее теплофизические процессы в одномерном стержне с учётом теплот Джоуля и Томсона имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(\chi\cdot\frac{dT}{dx}\right)+j^2\cdot\rho-j\cdot T\cdot\frac{d\alpha}{dT}\cdot\frac{dT}{dx}=0 \qquad (2)$$

с фиксированными температурами на концах стержня

$$T\big|_{x=0}=T_h, T\big|_{x=l}=T_c\ . \qquad (3)$$

где $l$ – длина ветви, $j$ – плотность тока, $\alpha$, $\rho$, $\chi$ - дифференциальная термоэдс, удельное сопротивление и удельная теплопроводность. Тепловые балансы на горячем и холодном концах ветвей генератора

$$Q_h^i=\alpha_i(T_h)\cdot I\cdot T_h-\chi_i(T_h)\cdot S_i\cdot\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}, \qquad (4)$$

$$Q_c^i=\alpha_i(T_c)\cdot I\cdot T_c-\chi_i(T_c)\cdot S_i\cdot\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=l}, \qquad (5)$$

где i=n, p. Теплота, подводимая к горячему спаю генератора $Q_{\text{h}}=Q_h^n+Q_h^p$, а с холодного спая снимается $Q_{\text{c}}=Q_c^n+Q_c^p$. Мощность термопары $N=Q_h-Q_c$, КПД $\eta=N/Q_h$. Расчетное отношение сечений ветвей $S$n/$S$p= $Q$p/$Q$n меняется от 0.97 при 313 К до 1.08 при 593 К, что очень близко к найденному в [4].

Расчёт максимальной электрической мощности и КПД проводился с интервалом 50К. На рисунке 1 приведены графики мощности одной генераторной термопары в зависимости от температуры горячего спая в интервале 353-593 К.

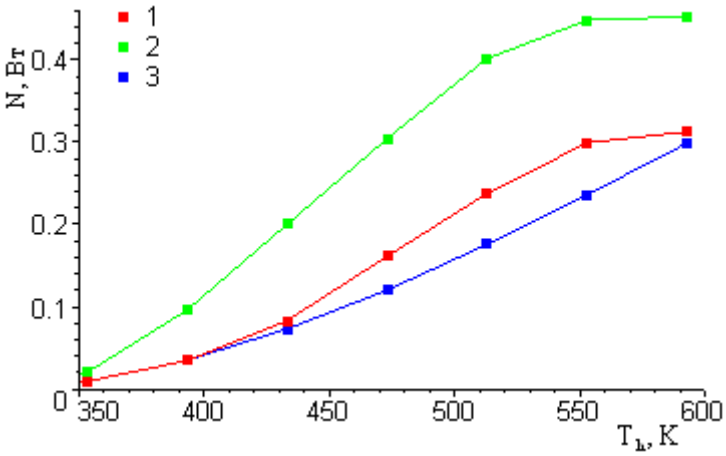



Рисунок 4 – Зависимость мощности модуля термогенератора от температуры горячего спая при температуре холодного 303К. 1 - данные расчета граничной задачи с учетом эффекта Томсона, 2 - расчет без учета эффекта Томсона, 3 - данные расчета [4].

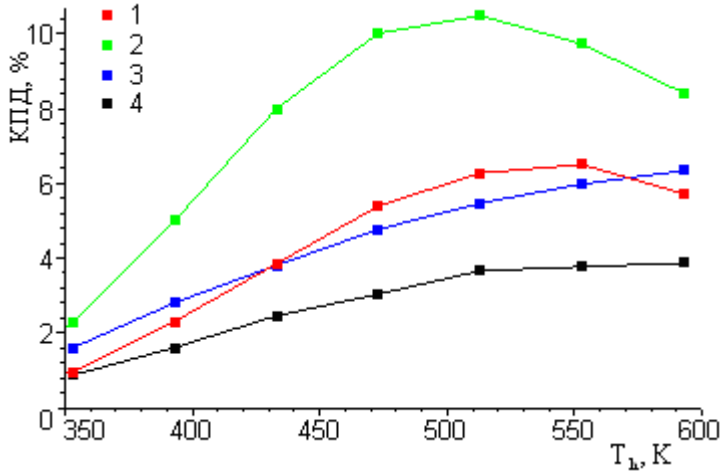



Рисунок 5 – Зависимость КПД термогенератора от температуры горячего спая при температуре холодного 303К. 1 - данные расчета граничной задачи с учетом эффекта Томсона, 2 - расчет без учета эффекта Томсона , 3 - данные расчета [4], 4 - данные эксперимента [4].

Температура холодных спаев термогенератора составляла, как и в работе [4] 303 К. Кривая 1 получена с учетом эффекта Томсона, кривая 2 без его учета. Кривая 3 –результат расчета автора [4] по методу «средних параметров». Как видно из графика неучет эффекта Томсона приводит к значительному отличию как от результатов работы [4] (кривая 3), так и от нашего расчета. Корреляция между кривыми 1 и 3 значительно лучше. Наибольшее расхождение между ними наблюдается в области, где происходит нарушение монотонной зависимости модуля дифференциальной термоэдс от температуры, что можно объяснить тем, что в методе «средних параметров» значение модуля дифференциальной термоэдс на горячем конце в среднем ниже максимального значения. Находит простое объяснение и то, почему в области температур >550К мощность (кривая 1) практически не увеличивается. Это связано с тем, что модуль дифференциальной термоэдс ветвей уменьшается, хотя перепад температур и растет.

На рисунке 2 приведены графики КПД генераторной термопары в зависимости от температуры горячего спая. Как и в предыдущем случае, кривая 1 получена с учетом эффекта Томсона, кривая 2 без его учета, кривая 3 – результат расчета автора [4] по методу «средних параметров». Наличие максимума на кривой 1 связано с тем, что снижение модуля дифференциальной термоэдс, начинающееся после достижения максимума при 500К приводит к замедлению роста мощности (рис.1, кривая 1) и при непрерывном росте $Q_h$ приводит к снижению КПД. Как отмечается в работе [4], разница в количественных показателях максимального теоретического КПД (кривая 3) от полученного при испытаниях [4] (кривая 4) обусловлено потерями, в частности связанными с действием эффекта Томсона, который становится значительным при больших значениях разности температур между спаями термоэлемента. Однако из рис.2 видно, что это не так и метод «средних параметров» учитывает эффект Томсона, но лишь в среднем. Из наших расчетов следует, что повышение температуры горячего спая термопары выше 550К вообще нецелесообразно, т.к. не ведет ни к росту мощности, ни к росту КПД.

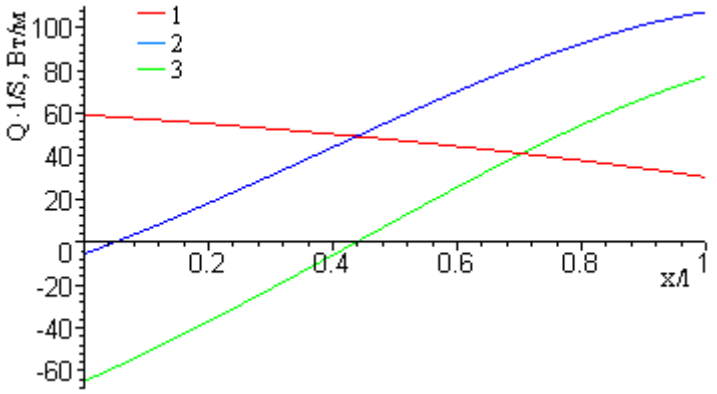



Рисунок 6 – Тепловыделение Джоуля 1, Томсона 2 и их суммы 3 n-ветви.

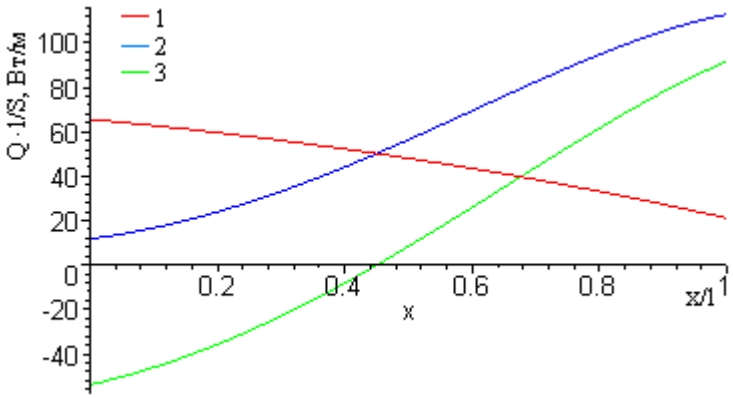



Рисунок 7 – Тепловыделение Джоуля 1, Томсона 2 и их суммы 3 в p – ветви.

Итак, в результате проведенных исследований, очевидно, что при расчете термогенератора при больших перепадах температур эффектом Томсона пренебрегать нельзя. Так, в нашем погрешность расчета мощности с учетом и без учета эффекта Томсона доходила до 60%, а КПД до 67%. Метод средних параметров в случае немонотонных температурных зависимостей модуля дифференциальной термоэдс позволяет рассчитать мощность с погрешностью,

не превышающей 20%, а КПД 13%, т.е. метод «средних параметров» позволяет рассчитать мощность и КПД термоэлектрического модуля генераторного типа с учетом температурной зависимости кинетических коэффициентов лишь удовлетворительно.

На рисунках 6 и 7 приводятся рассчитанные распределения тепловыделений Джоуля, Томсона и их суммы от горячего (593 К) конца к холодному (303 К).

Как показывает кривые 2 на рисунках 6 и 7, что в n- и p - ветвях за счет эффекта Томсона со стороны горячей половины ветви на холодную половину происходит перекачка теплоты. Однако это происходит за счет генерируемой электрической энергии, что приводит к уменьшению мощности и КПД генератора.

**Заключение**

Проведено моделирование термогенератора, с учетом температурной зависимости всех явлений, определяющих его работу (эффект Зеебека, эффект Джоуля, эффект Томсона, теплопроводность). На основе решения граничной задачи разработана математическая модель расчёта характеристик термоэлектрического генератора. Такой подход позволяет точно рассчитать температурное поле ветвей термоэлемента и на основе этого найти распределение теплот Джоуля и Томсона, подсчитать мощность и КПД генератора. Это позволяет провести точный анализ возможностей использования эффективности на основе реальных термоэлектрических материалов и прогнозировать изменения параметров в нужном направлении при выборе рабочего температурного интервала термогенератора.

Проведенные расчеты с учетом и без учета эффекта Томсона, позволяют сделать вывод, что влиянием эффекта Томсона при расчете термогенератора пренебрегать нельзя, что обусловлено значительными температурными перепадами. Сравнение результатов расчета мощности и КПД с вычислениями по методу «средних параметров» показывает, что точный эффекта Томсона можно провести только в рамках решения граничной задачи (2,3). Метод «средних параметров» позволяет лишь в среднем учесть эффект Томсона, однако может допускать ошибки, в частности, он прогнозирует рост мощности и КПД генератора даже в области температур, где модули дифференциальных термоэдс уменьшаются с ростом температуры, чего не может быть. Эффект Томсона, также как и Джоуля в термогенераторе выполняет отрицательную роль, уменьшая как его мощность, так и КПД, поскольку оба эффекта совершаются за счет работы генератора, различие состоит только в том, что в эффекте Томсона происходит перераспределение теплоты.

Предлагаемый метод расчета более информативен, чем метод «средних параметров», т.к. дает более точное описание процесса преобразования тепловой энергии в электрическую в термогенераторе, что способствует более полному и детальному пониманию работы генератора с целью прогнозирования его максимальных значений мощности и КПД.

## Список источников

1. Иоффе А.Ф. Полупроводниковые термоэлементы. М.-Л., АН СССР. 1956. 104 с.

2. Бурштейн А.И. Физические основы расчета полупроводниковых термоэлектрических устройств. М.: ГИФМЛ, 1962. 135 с.

3. Булат Л.П., Ерофеева И. А., Возисов А.В. К расчету эффективности термоэлектрических преобразователей энергии. // Доклады X Межгосударственного семинара «Термоэлектрики и их применение». – СПб.: ФТИ РАН, 2006. – С. 372 – 377.

4. Симкин А.В. Технологические и конструкционные способы повышения надежности работы термоэлектрической генераторной батареи. Автореф. канд. тех. наук. М.: 2014. НИТУ «МИСиС».

5. Markov O.I. Calculating a solar thermoelectric generator branch with consideration of the temperature behavior of kinetic coefficients/. Applied Solar Energy. 2004. V. 40. № 2. C. 9-12.

## References

1. Ioffe A.F. Semiconductor thermoelements. M.-L., USSR Academy of Sciences. 1956.104 p.

2. Burshtein A.I. Physical bases of calculation of semiconductor thermoelectric devices. M., GIFML, 1962. 135 p.

3. Bulat L.P., Yerofeeva I. A., Vozisov A.V. On calculating the efficiency of thermoelectric energy converters. // Reports of the X Interstate Seminar "Thermoelectrics and their application". – St. Petersburg: PHTI RAS, 2006. – pp. 372-377.

4. Simkin A.V. Technological and structural ways to improve the reliability of a thermoelectric generator battery. Abstract of the Candidate of Technical Sciences, M., 2014. NUST MISIS.

5. Markov O.I. Calculating a solar thermoelectric generator branch with consideration of the temperature behavior of kinetic coefficients/ Applied Solar Energy. 2004. V. 40. № 2. C. 9-12.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 324-330.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 324-330.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 537.8

# ГАУССОВСКОЕ ПОЛЕ ФЛУКТУАЦИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ В СИЛЬНО РАЗОГРЕТЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

***Лариса Викторовна Мышеловка*[1]✉, *Юрий Петрович Вирченко*[2]**
[1]*Белгородский государственный университет НИУ БелГУ, Белгород, Россия*
[2]*Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, Белгород, Россия*
[1]*lareczn@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0000-0002-3231-8609*
[2]*virch@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0002-5413-6179*

***Аннотация.*** *Построено пространственно-неоднородное гауссовское случайное поле, описывающее флуктуации вектора электрической поляризации в диэлектрической среде при наличии пространственного распределения температуры. Это поле является источником теплового электромагнитного поля, посредством которого осуществляется радиационно-кондуктивный теплообмен.*

***Ключевые слова:*** *закон Стефана-Больцмана, тепловые флуктуации, плотность потока энергии, полупрозрачная среда, уравнения Максвелла, флуктуационно-диссипационная теорема.*

Conference paper

# GAUSSIAN FIELD OF FLUCTUATIONS OF ELECTRIC POLARIZATION IN HIGHLY HEATED DIELECTRIC MEDIA

***Larisa V. Myshelovka*[1]✉, *Yuri P. Virchenko*[2]**
[1] *Belgorod State University, Belgorod, Russia*
[2] *Belgorod State Technological University, Belgorod, Russia*
[1]*lareczn@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0009-0003-6668-9621*
[2]*virch@bsu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0002-5413-6179*

***Abstract.*** *A spatially inhomogeneous Gaussian random field is constructed which describes fluctuations of the electric polarization vector in a dielectric medium in the presence of a spatial temperature distribution.*

© Мышеловка Л. В., 2024

*This field is the source of the thermal electromagnetic field, through which the radiation conductive heat exchange is carried out.*

***Keywords:*** *Stefan-Boltzmann law, thermal fluctuations, energy flux density, translucent medium, Maxwell's equations, fluctuation-dissipation theorem.*

## 1. Введение

Теоретическое описание радиационно-кондуктивного теплообмена в твердотельных средах традиционно строилось из феноменологических соображений на основе представлений геометрической оптики (т.н. теория переноса излучения). Микроскопическая же теория этого явления отсутствует вплоть до настоящего времени. Причиной такого положения является то, что радиационно-кондуктивный теплообмен в твердотельных средах существенно отличается, с качественной точки зрения, от аналогичного явления в газах и, вообще говоря, в жидкостях. Наличие сильной связи между молекулами (ионами) в твердотельной среде приводит к тому, что такой механизм переноса тепла влияет на распределение температуры в самой среде. Перенос тепла в твёрдом теле на микроскопическом уровне осуществляется посредством перехода фотонов теплового электромагнитного поля в тепловые фононы и наоборот. В то же время в микроскопическом гамильтониане, описывающем взаимодействие молекул (ионов) твёрдого основа среды с электромагнитным полем, слагаемые, непосредственно ответственные за переходы такого рода, отсутствуют. Переходы указанного типа должны появляться, за счёт сильной связи между молекулами (ионами) в «эффективном гамильтониане» для системы квантов возбуждений твёрдого остова. В отсутствии микроскопической теории, при построении более детальной теории, радиационно-кондуктивного теплообмена в том случае, когда проявляются заметные отклонения от традиционного подхода на основе геометрической оптики, необходимо явно вводить в теорию электромагнитное поле, имеющее тепловое происхождение, то есть порождаемое, в конце концов, флуктуациями электромагнитных термодинамических характеристик.

Основы теоретического исследования радиационно-кондуктивного теплообмена в твердотельных средах на основе теории термодинамических флуктуаций были заложены в работе [1] (см. также [2]). В ней было введено представление о флуктуационном тепловом электромагнитном излучении и развит полуфеноменологический подход описания этого излучения на основе флуктуационно-диссипационной теоремы в рамках неравновесной термодинамики. Вместе с тем, в цитируемой работе эта теория была сформулирована с излишле большой

общностью, что не позволило авторам вычислить явно для конкретных типов твердотельных сред, усреднённую по флуктуациям дивергенцию плотности потока энергии теплового электромагнитного поля в виде функционала от распределения температуры. Именно эта величина входит в эволюционное уравнение, описывающее перенос тепла в среде. Оказалось, что последовательное применение представлений и положений работ [1, 2], с необходимостью, требует более детальной информации о её физической природе. Идея построения такой теории в частном случае, когда среда представляет собой диэлектрик (или высокоомный полупроводник с ковалентной химической связью) предпринята в [3] (см. также [4]). Существенным элементом этой теории является стохастическая модель поля пространственно распределённых тепловых флуктуаций электрической поляризации в среде, точной математической конструкции которого посвящена настоящая работа.

## 2. Стохастическая модель радиационно-кондуктивного теплообмена

Основная идея построения флуктуационной теории радиационно-кондуктивного теплообмена состоит в том, чтобы явно ввести в теорию тепловое электромагнитное поле, подчиняющееся уравнения Максвелла в среде рассматриваемого типа. При этом поле порождается источниками, которые имеет тепловое происхождение, то есть оно должно быть связанным со случайными (тепловыми) флуктуациями электродинамических характеристик среды. По этой причине, уравнения движения поля становятся стохастическими, что приводит к необходимости, согласно флуктуационно-диссипационной теореме [2], введения эффективного затухания, компенсирующего раскачку величины поля флуктуациями и, тем самым, жёстко связанного со статистической дисперсией флуктуаций.

Будем рассматривать флуктуационное электромагнитное поле в средах указанного во введении типа. В таких средах отсутствуют какие-либо заметные флуктуации заряда (и электрического тока) в не очень малых объёмах среды, для которых уже применимо термодинамическое описание. Кроме того, наличие ковалентной химической связи гарантирует отсутствие заметных флуктуаций намагниченности в указанных объёмах. Таким образом, главным источником теплового электромагнитного излучения в среде рассматриваемого типа являются тепловые флуктуации электрической поляризации. Таким образом, тепловое электромагнитное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор пространственной точки, должно подчиняться системе уравнений Макс-

велла

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -[\nabla, \mathbf{E}]\,, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = [\nabla, \mathbf{H}]\,, \tag{1}$$

$$(\nabla, \mathbf{B}) = 0\,, \quad (\nabla, \mathbf{D}) = 0\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ с постоянной магнитной проницаемостью $\mu$ и $\mathbf{D} = \mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$. Здесь мы предполагаем, что рассматриваемая среда изотропна и такова, что возможно пренебрежение дисперсией магнитной составляющей электромагнитного излучения в красной и инфра-красной областях спектра волн, ответственных за перенос тепла. Стохастический источник в системе уравнений (1), (2), равно как и слагаемое, ответственное, согласно флуктуационно-диссипационной теореме, за затухание, входят в состав вектора поляризации $\mathbf{P}$. Этот вектор согласно принимаемой нами модели состоит из двух частей

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \chi(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)\,, \tag{3}$$

где $\chi(\omega)$ – обычная высокочастотная электрическая восприимчивость среды (пространственная дисперсия теплового излучения пренебрежимо мала),

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)dt\,,$$

соответственно, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ – фурье-образ по времени $t$, а $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ – стохастический источник, описывающий флуктуации электрической поляризации. При этом затухание теплового электромагнитного поля связано с отрицательностью мнимой части восприимчивости $\chi(\omega)$.

### 3. Гауссовское поле тепловых флуктуаций

Нами принимается следующая модель случайного поля

$$\tilde{P}_k(\mathbf{r}, \omega) = U(\hbar\omega/\kappa T)\varphi_k(\mathbf{r}, \omega)\,,$$

где $U(\cdot)$ – феноменологическая амплитуда поля, несущая информацию о квантовом происхождении теплового электромагнитного излучения. На неё накладывается только условие о достаточно быстром убывании к нулю в области больших частот, которую мы здесь не будем конкретизировать. Второй множитель представляет собой некоторое «стандартное» короткодействующее комплекснозначное векторное гауссовское случайное поле с нулевым средним. Его гауссовость связана с малостью флуктуаций, которые оно должно описывать, а радиус корреляций, по порядку величины, должен быть равен среднему расстоянию между молекулами среды. В нашей теории это гауссовское поле

характеризуется корреляционной функцией

$$\langle \varphi_k(\mathbf{r},\omega)\varphi^*_{k'}(\mathbf{r}',\omega')\rangle = (2\pi)^{-1}\delta(\omega-\omega')g_{kk'}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,, \qquad (4)$$

где $\delta$-функция указывает на то, что зависимость поля от времени $t$ представляет собой «белый шум» зависимость от разности корреляционной функции $g_{kk'}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ отображает стохастическую пространственную однородность поля $\varphi_k(\mathbf{r},\omega)$, и сама эта функция должна быть выбрана таким образом, чтобы обеспечить стохастическую изотропию поля $\varphi_k(\mathbf{r},\omega)$. Поле $P_k(\mathbf{r},\omega)$ не является пространственно однородным, так как в амплитуду $U$ аргументом входит значение температуры $T(\mathbf{r},t)$ в точке $\mathbf{r}$ и в момент времени $t$. Таким образом, это поле дополнительно зависит от «медленного» времени $t$ как от параметра.

Ввиду уравнения $(\nabla,\mathbf{D})=0$, то есть

$$\varepsilon(\omega)(\nabla,\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega))+4\pi\nabla_k U(\hbar\omega/\kappa T(\mathbf{r},t))\varphi_k(\mathbf{r},\omega)=0\,,$$

поле $\varphi_k(\mathbf{r},\omega)$ должно удовлетворять условию, которое проще всего и естественнее физически выбрать так, чтобы имело место $\nabla_k\varphi_k(\mathbf{r},\omega)=0$. Заметим, что в теории Рытова [2], даже не поднимался вопрос о таком выборе модели флуктуационного поля, чтобы удовлетворить условию бездивергентности, так как в его теории, где вводились эффективные флуктуационные токи, не требовалась выполнимость условия их непрерывности.

Поставим вопрос о существовании гауссовского поля $\varphi_k(\mathbf{r},\omega)$, которое точно (не в среднем) удовлетворяет условию бездивергентности $\nabla_l\varphi_l(\mathbf{r})=0$. Пусть $g_{l,l'}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\langle\varphi_l(\mathbf{r})\varphi^*_{l'}(\mathbf{r}')\rangle$ – корреляционная функция поля и

$$h_{l,l'}(\mathbf{q})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbf{R}^3} g_{l,l'}(\mathbf{r})e^{-i(\mathbf{q},\mathbf{r})}d\mathbf{r}$$

– её Фурье-образ. Матриц-функция $g_{l,l'}(\mathbf{r})$ должна быть положительно определённой, то есть значения соответствующей ей матриц-функция $h_{l,l'}(\mathbf{q})$ должны представлять в каждой точке $\mathbf{q}$ положительную матрицу – для любого вектора $\xi_m; m=1,2,3$ должно иметь место $\xi_l\xi_{l'}h_{l,l'}(\mathbf{q})\geq 0$. Для выполнимости условия бездивергентности гауссовского поля $\varphi_l(\mathbf{r})$ необходимо и достаточно, чтобы $q_lq_{l'}h_{l,l'}(\mathbf{q})=0$. Это указывает на то, что матрица $h_{l,l'}(\mathbf{q})$ вырождена в каждой точке $\mathbf{q}$. Поэтому она, в частности, не может быть пропорциональна символу Кронекера и, следовательно, у корреляционной функции $g_{l,l'}(\mathbf{r})$ отсутствуют корреляции вдоль какого-то направления и она не может быть пропорциональна $\delta_{l,l'}\delta(\mathbf{r})$. Опишем асимптотическую структуру корреляционной функции в силу малости некоторого параметра $r_*$ размерности длины.

Условие стохастической изотропии случайного поля $\varphi_l(\mathbf{r})$ приводит к тому, функция $h_{l,l'}(\mathbf{q})$ в отсутствие сторонних векторов в общем виде представляется как

$$h_{l,l'}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^2 a((r_*\mathbf{q})^2)\delta_{l,l'} - q_l q_{l'} b((r_*\mathbf{q})^2)\,,$$

где функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ определены для скалярного физически безразмерного положительного аргумента. Условие же бездивергентности приводит к $a \equiv b$. Тогда неотрицательность матрицы $h_{l,l'}(\mathbf{q})$ требует $a(\mathbf{q}) \geq 0$, так как только в этом случае $\xi_l\xi_{l'}h_{l,l'}(\mathbf{q}) = a \cdot (q^2\xi^2 - (\xi_l q_l)^2) \geq 0$.

Выразим теперь корреляционную функцию $g_{l,l'}(\mathbf{r})$ в терминах функции $a(\cdot)$,

$$g_{l,l'}(\mathbf{r}) = \int\limits_{\mathbf{R}^3} e^{i(\mathbf{q},\mathbf{r})} a((r_*\mathbf{q})^2)\left(\mathbf{q}^2\delta_{l,l'} - q_l q_{l'}\right) d\mathbf{q} = A\delta_{l,l'} + B\frac{r_l r_{l'}}{\mathbf{r}^2}\,,$$

где $A$ и $B$ – функции от скалярного положительного аргумента – отношения $r^2/r_*^2 \equiv \lambda^2$. Найдём интегральные представления для этих функций. Вычисляя след в обеих частях этой формулы, находим

$$3A + B = \frac{4\pi}{r_*^5}\int\limits_0^\infty q^4 a(q^2)\left(\int\limits_{-1}^{1} e^{iq\lambda\theta}d\theta\right)dq\,.$$

Точно также находим, сворачивая обе части формулы с $r_l r_{l'}$,

$$A + B = \frac{2\pi}{r_*^5}\int\limits_0^\infty q^4 a(q^2)\left(\int\limits_{-1}^{1} e^{iq\lambda\theta}(1-\theta^2)d\theta\right)dq\,.$$

Из полученной системы уравнений для функций $A$ и $B$, вычисляя внутренние интегралы и предполагая бесконечную дифференцируемость функции $a(\cdot)$, получаем, вдали от точки $\mathbf{r} = 0$, $A = -B(1 + O(\lambda^{-1}))$ и устанавливаем, что обе эти функции быстроубывающие по $r/r_*$. При $\mathbf{r} = 0$ их значения равны

$$A = -B(1 + O(\lambda^{-1})) = \frac{8\pi}{3r_*^5}\,C\,, \qquad C = \int\limits_0^\infty q^4 a(q^2)dq\,.$$

Таким образом, в силу малости параметра $r_*$, имеем

$$g_{l,l'}(\mathbf{r}) = \mathrm{const}\,\delta(\mathbf{r})\left(\delta_{l,l'} - \frac{r_l r_{l'}}{r^2}\right)(1 + O(\lambda^{-1}))\,. \qquad (5)$$

## 4. Заключение

Нами установлен факт того, что, при учёте условия бездивергентности стохастической электрической индукции в поле флуктуационного теплового электромагнитного излучения, должен быть существенно изменён вид корреляционной функции источников излучения. Это указывает на то, что для развития последовательной теории радиационно-кондуктивного теплообмена в диэлектрике, на основе представлений о флуктуационном электромагнитном поле, подход, предложенный в [1, 2], должен быть существенно модифицирован.

## Список источников


1. Рытов С.М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения / М.: Изд. АН СССР, 1953.
2. Рытов С.М., Кляцкин Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику, т.2, Случайные поля / Москва : Наука, 1978. 464 с.
3. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Флуктуационный подход в теории радиационно-кондуктивного теплообмена // Доповіді НАНУ. 2010. №12. С. 63-69.
4. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена. Флуктуационный подход // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика, Математика. 2009. 5(60);16. С. 47-67.


## References


1. Rytov S.M. Theory of electromagnetic fluctuations and thermal irradiation / M.: Изд. АН СССР, 1953. (In Rissuan).
2. Rytov S.M., Klyatskin Yu.A., Tatarskii V.I. Introduction in statistical radiophysics, Vol. 2, Random fields / Moscow : Nauka, 1978. 464 p. (In Rissuan).
3. Virchenko Yu.P., Saprykin M.A. Флуктуационный подход в теории радиационно-кондуктивного теплообмена // Dopovidi NANU. 2010. No 12. P. 63-69. (In Rissuan).
4. Virchenko Yu.P., Saprykin M.A. One-dimensional radiation conduction теплообмена. Fluctuation approach // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. 2009. 5(60);16. P. 47-67. (In Rissuan).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 331-337.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 331-337.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 621.3.049.77+658.562+004.032.26

# КОНТРОЛЬ И ИСПЫТАНИЯ ПРИ КОРПУСИРОВАНИИ МИКРОСХЕМ

***Оксана Александровна Воронина[1]✉, Венедикт Михайлович Донцов[2], Алексей Святославович Тугарев[3]***
*[1,2,3]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]Voronina_o_a@mail.ru✉, [2]dwm257@yandex.ru, [3]tugarev@yandex.ru*

***Аннотация.*** *В работе проанализированы виды контроля и испытаний при производстве изделий микроэлектроники на примере технологического процесса корпусирования микросхем. Рассмотрены наиболее вероятные причины возникновения брака на различных операциях и предложены способы их предотвращения. Показана возможность использования нейросетей для распознавания дефектов. Оценена эффективность применения контрольно-проверочной аппаратуры при проведении технологических испытаний.*

***Ключевые слова:*** *микросхемы, приклейка кристаллов, разварка микропроволочных соединений, герметизация, контроль и испытания, нейросети.*

Conference paper

# CONTROL AND TESTING IN THE PACKAGING OF INTEGRATED CIRCUITS

***Oksana A. Voronina[1]✉, Venedikt M. Dontsov[2], Alexey S. Tugarev[3]***
*[1,2,3]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]Voronina_o_a@mail.ru✉, [2]dwm257@yandex.ru, [3]tugarev@yandex.ru*

***Abstract.*** *The article analyzes the types of control and testing in the production of microelectronics products using the example of the technological process of chip packaging. The most probable causes of the occurrence of defects in various operations are considered and methods of their prevention are proposed. The possibility of using neural networks for defect recognition is shown. The effectiveness of the use of control and verification equipment during technological tests is evaluated.*

© Воронина О.А.., Донцов В.М., Тугарев А.С., 2024

***Keywords:*** *integrated circuits, crystal gluing, welding of micro-wire connections, sealing, control and testing, neural networks.*

## 1. Введение

Обеспечение качества при производстве изделий микроэлектроники (микросхем и полупроводниковых приборов) во многом определяется построением контрольных операций и приёмочных испытаний. При производстве изделий микроэлектроники можно выделить процессы изготовления кристаллов и корпусов, монтажно-сборочные процессы и технологические испытания. Именно от организации контроля и испытаний в большей степени зависит процент выхода годных изделий.

## 2. Основной текст статьи

На рисунке 1 представлен процесс изготовления микросхем с указанием основных, а также вспомогательных (ВО) и контрольных (КО) операций.

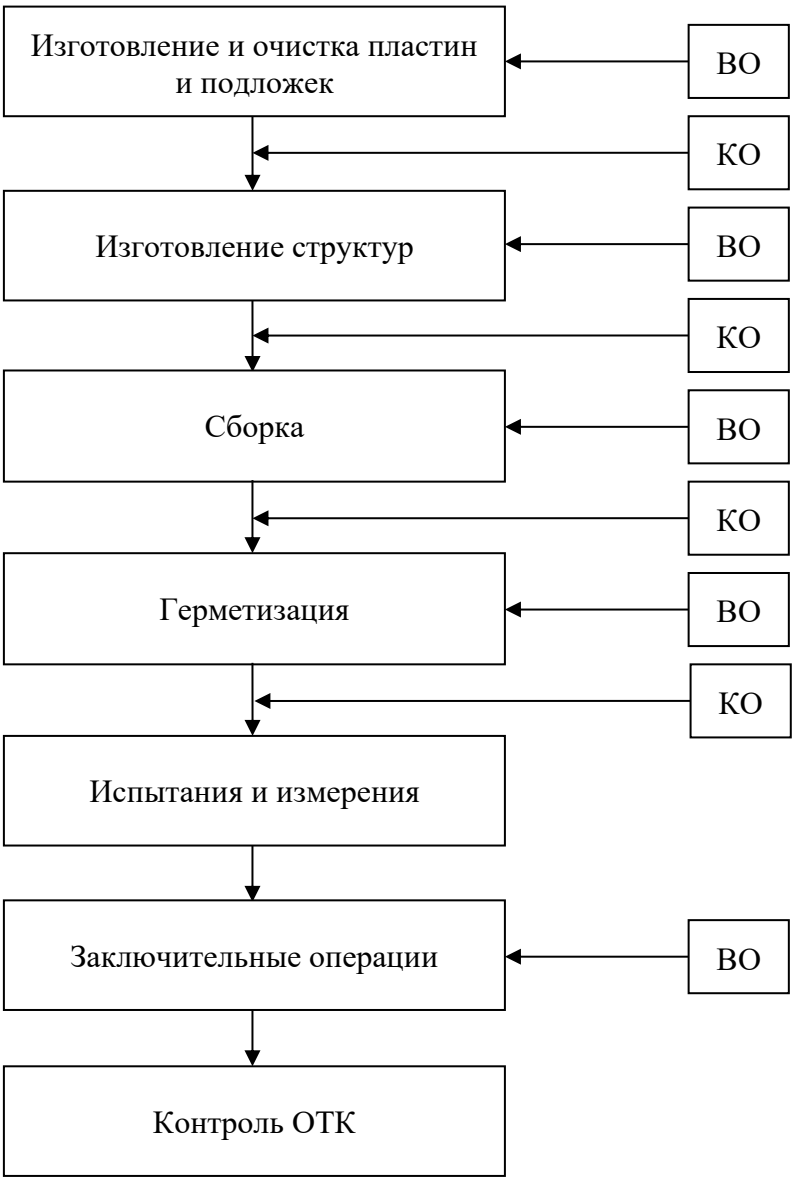



Рисунок 1 – Процесс изготовления микросхем.

Рассмотрим более подробно контрольные операции при сборке и герметизации, проведение испытаний и измерений параметров микросхем.

Важными составляющими технологического процесса (ТП) корпусирования микросхем являются операции контроля, которые классифицируются:

– в зависимости от места в ТП: входного (например, входной контроль корпусов), операционного (визуальный контроль качества монтажа) и выходного (контроль ОТК);
– по нарушению пригодности микросхемы к применению: разрушающий (тесты «на отрыв» и «на сдвиг») и неразрушающий (контроль герметичности);
– по применению средств измерения (рисунок 2): визуальный и инструментальный.




Рисунок 2 — Виды контроля в процессе изготовления микросхем.




Рисунок 3 — Виды контроля в процессе монтажа кристалла в корпус.

На рисунке 3 показаны виды контроля в процессе монтажа кристалла в корпус.

Анализируя первую операцию сборки (монтаж кристалла в корпус), можно выделить необходимость входного визуального контроля оснований корпусов и крышек, поступающих от первого производителя и визуальный контроль кристаллов, полученных от второго производителя [1]. В процессе операции контролируются параметры клея (например, вязкость по методу круга) и настройки используемого оборудования. По завершении операции монтажа проводится визуальный контроль качества монтажа и инструментальный контроль прочности крепления кристалла.

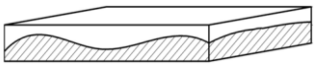
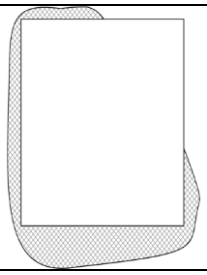
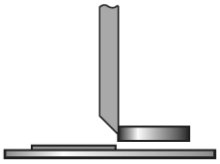
Монтаж кристалла осуществляется методом наклейки на токопроводящий клей. Показателем качества клеевого соединения является предел прочности при сдвиге (1):

$$\tau = P/F, \quad (1)$$

где P – разрушающая сила;
F – площадь склеивания.

На данной операции к несоответствию могут привести недостаток клея, избыток клея или ухудшение характеристик клея вследствие нарушения режимов хранения или сушки. В таблице 1 показаны возможные причины дефектов при приклейке кристалла и предлагаемые способы их предотвращения.

Таблица 1 — Виды дефектов монтажа кристалла в корпус при приклейке штемпелеванием.

| Пример дефекта | Описание дефекта [2] | Возможные причины | Способы предотвращения (при приклейке методом штемпелевания) |
|---|---|---|---|
|  | Наличие клея более чем 1/2 по высоте кристалла | Избыточное количество клея | Уменьшить высоту клеевого валика в растирочной чаше установки |
|  | Наличие клея менее 3/4 периметра кристалла | Недостаточное количество клея | Увеличить высоту клеевого валика в растирочной чаше установки |
|  | Кристалл не выдержал испытание на сдвиг (типовое значение – 125 дН) | Деградация параметров клея.<br><br>Нарушение режимов сушки | Заменить клей.<br><br>Выставить режимы сушки, соответствующие ТУ на клей |

Второй основной операцией сборки является ультразвуковая (разварка микропроволочных соединений). После разварки межсоединений проводят визуальный контроль качества разварки и инструментальный контроль

свариваемости (за счёт проверки силы, необходимой для разрушения перемычки при отрываемой вверх крючком; типовой порог 30 мН) – рисунок 4.

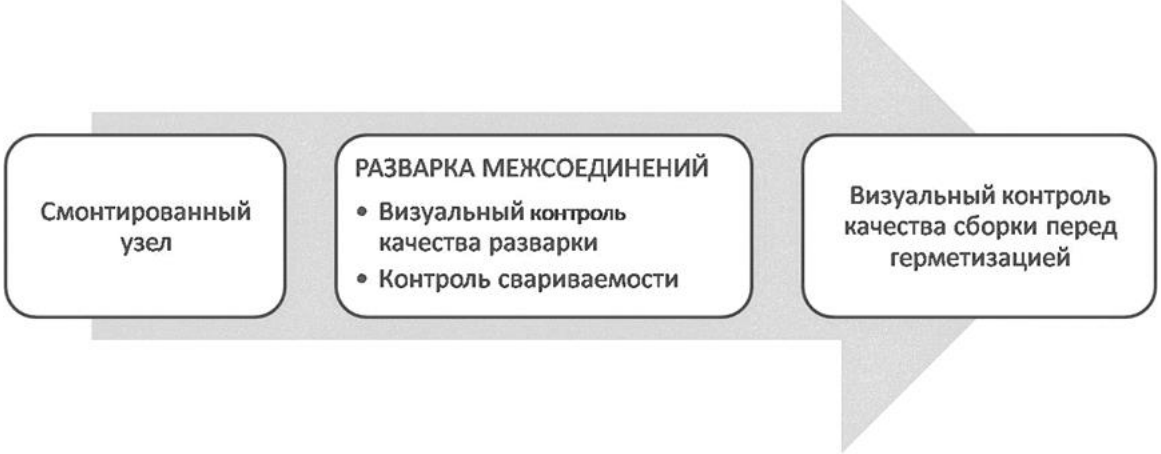
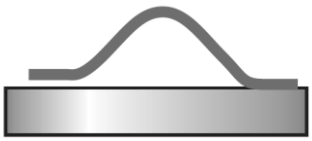
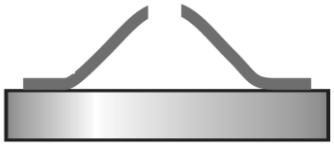



Рисунок 4 — Виды контроля в процессе изготовления микросхем.

Выявляемые в процессе разварки дефекты и предлагаемые методы их предотвращения приведены в таблице 2.

Таблица 2 — Виды дефектов разварки межсоединений.

| Пример дефекта | Описание дефекта | Методы предотвращения |
|---|---|---|
|  | Обрыв вывода на КП кристалла | Увеличить или уменьшить мощность и/или перебег (дополнительный ход сварочного инструмента для прижатия проволоки) – как правило, на 3-5% до устранения проблемы |
|  | Обрыв вывода на траверсе | Увеличить длину перемычки |
|  | Обрыв по выводу | Параметры в норме |

Третьей, финальной, операцией корпусирования является герметизация. При малых объёмах выпуска и жёстких условиях эксплуатации нет альтернатив герметизации в металлокерамические корпуса. Операция приварки крышки также может быть произведена с дефектами, среди которых могут быть трещины, полости и поры, непровары, натёки, прожоги, расширение и сужение шва и т.д. [3]. Некоторые дефекты могут привести к нарушению герметичности корпуса. Это нарушение в ряде очевидных случаев может быть выявлено визуальным осмотром, а при наличии скрытых пор и трещин – при помощи течеискателя.

Важными операциями контроля качества выполнения корпусирования являются операции визуального контроля. Традиционно такие операции

выполняет человек, обученный обнаруживать заданные дефекты по внешнему виду. Сегодня процессы визуального контроля возможно автоматизировать путём применения методов компьютерного зрения.

Для обнаружения дефектов применяется заранее обученная нейросеть. Автоматизированная установка визуального обнаружения дефектов включает в себя предметный столик, видеокамеру высокого разрешения, вычислительную систему с соответствующим программным обеспечением. Оператору остаётся только правильно разместить контролируемый образец в поле зрения камеры.

Разработка программного обеспечения нейросети включает рад этапов:

1) Подготавливается набора данных для обучения. В набор данных в данном случае должны входить неподвижные изображения с дефектными и исправными образцами, желательно полученные при помощи аналогичной видеосистемы.

2) Набор данных разбивается на обучающую и тестовую выборку.

3) Набор данных расширяется путём применения к изображениям операций поворота, зеркалирования и, возможно, масштабирования.

4) Производится «обучение» нейросети с тем, чтобы она наилучшим образом выполняла классификацию изображений по отсутствию, наличию и виду дефектов.

Проблемным моментом является получение достаточно большого набора изображений с дефектами. Если человеку можно объяснить, как должна выглядеть микросхема, чтобы констатировать отсутствие дефекта то для обучения нейросетевого классификатора требуется достаточно большое (порядка сотен) изображений с ожидаемыми дефектами [4]. Во время подготовки технологического процесса может оказаться экономически нецелесообразным формирование такого количества бракованных образцов.

Контроль электрических параметров выполняется, как правило, при помощи специализированной контрольно-проверочной аппаратуры. Комплекс измерительных средств в большинстве случаев включает в себя модули электропитания изготавливаемых микросхем. Модули электропитания обычно обладают возможностями контроля тока потребления и используются как в процессе контроля параметров микросхем, так и в процессе электротермотренировки.

Определение электрических характеристик микросхем связано с необходимостью фильтрации «сырых» измерений от внешних и внутренних помех. К внешним помехам обычно относят электромагнитные наводки с частотой питающей сети и наводки, генерируемые соседним работающим оборудованием в цехах. Использование в составе контрольно-проверочной аппаратуры быстродействующих микроконтроллеров часто приводит к возникновению внутренних помех, связанных с импульсным характером тока, потребляемого цифровыми приборами. Для фильтрации традиционно применяются методы временного усреднения и спектральной обработки, которые достаточно легко реализуются программно. Однако, нам представляется, что и здесь возможно эффективное применение нейросетей.

Коллективом авторов ведётся работа по созданию нейросети, позволяющей выделять полезный сигнал на фоне различного рода помех. Для создания обучающего (и тестового) набора данных используется имитационное моделирование измерительных сигналов и различного рода помех. Ожидаемым результатом работы является создание универсального программного обеспечение, позволяющего обучать нейросети для различной помеховой обстановки и формировать программное обеспечение микроконтроллеров контрольно-проверочной аппаратуры.

**3. Заключение**

В результате исследования выявлены возможные причины дефектов при корпусировании микросхем на примере трёх операций сборки и предложены пути их предотвращения. Определены функции контрольно-проверочной аппаратуры при проведении технологических испытаний после корпусирования микросхем.

## Список источников

1. Анализ методов контроля микропроволочных соединений / О.А. Воронина, В.В. Мишин, А.С. Тугарев, К.С. Харланова // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2023. – № 6 (362). – С. 153-159.

2. РД 11 0274-90 Микросхемы интегральные. Технические требования к техническому процессу сборки. ОКП.

3. ГОСТ Р ИСО 6520-1-2012 Классификация дефектов геометрии и сплошности в металлических материалах. Часть 1. Сварка плавлением.

4. Николенко С., Кадурин А., Архангельская Е. Глубокое обучение. Погружение в мир нейронных сетей. – СПб. : Питер, 2018. – 480 с.: ил. – ISBN 978-5-496-02536-2.

## References

1. Analysis of methods for testing microwire connections / O.A. Voronina, V.V. Mishin, A.S. Tugarev, K.S. Kharlanova // Fundamental and applied problems of engineering and technology. – 2023. – No. 6 (362). – P.153-159 (In Russ.).

2. RD 11 0274-90 Integrated circuits. Technical requirements for the technical assembly process. (In Russ.).

3. GOST R ISO 6520-1-2012 Classification of defects in geometry and continuity in metallic materials. Part 1. Fusion welding (In Russ.).

4. Nikolenko S., Kadurin A., Arkhangelskaya E. Deep learning. Entering the world of neural networks. – St. Petersburg : Piter, 2018. – 480 p. – ISBN 978-5-496-02536-2 (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 338-344.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 338-344.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.7

# СИММЕТРИЧНАЯ 2-АДИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ПЕРИОДОМ $4PQ$

***Владимир Анатольевич Едемский***[1]✉***, Чжан Кайлинь***[2]
[1,2]*Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия*
[1]*vladimir.edemsky@novsu.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0003-1368-3827*
[2]*zhangkailin1247@163.com*

***Аннотация.*** *Для оценки непредсказуемости бинарных последовательностей симметричная 2-адическая сложность предпочтительнее 2-адической сложности. Она является важной характеристикой псевдослучайных последовательностей, значимой для их практических приложений. Настоящая статья посвящена исследованию симметричной 2-адической сложности бинарных последовательностей, полученных чередованием циклических сдвигов последовательностей простых чисел-близнецов и их дополнений. Показано, что симметричная 2-адическая сложность этих последовательностей близка к максимально возможной.*

***Ключевые слова:*** *симметричная 2-адическая сложность, чередующиеся последовательности, последовательности простых чисел-близнецов.*

***Финансирование:*** *работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24–21–00442.*

Conference paper

# SYMMETRIC 2-ADIC COMPLEXITY OF INTERLEAVING SEQUENCES WITH PERIOD $4PQ$

***Vladimir A. Edemskiy***[1]✉***, Zhang Kailin***[2]
[1,2]*Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russia*
[1]*vladimir.edemsky@novsu.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0003-1368-3827*
[2]*zhangkailin1247@163.com*

© Едемский В. А., 2024

***Abstract.*** *To estimate the unpredictability of binary sequences, symmetric 2-adic complexity is preferable to 2-adic complexity. It is an important characteristic of pseudorandom sequences, significant for their practical applications. This article is devoted to the study of symmetric 2-adic complexity of binary sequences obtained by interleaving cyclic shifts of sequences of twin primes and their complements. It is shown that the symmetric 2-adic complexity of these sequences is close to the maximum possible.*

***Keywords:*** *symmetric 2-adic complexity, interleaving sequences, twin-prime sequences.*

***Funding:*** *the work was supported by the Russian Science Foundation, Project № 24–21–00442.*

## 1. Введение

Горески и Клаппер предложили новую архитектуру регистра сдвига, который они назвали регистром сдвига с обратной связью по переносу [1]. Для описания свойств последовательностей, формируемых этим регистром, были введены две новые характеристики: 2-адическая сложность и арифметическая корреляция. Различные виды сложностей применяются для оценки непредсказуемости бинарных псевдослучайных последовательностей. В [3] показано, что симметричная 2-адическая сложность предпочтительнее 2-адической при исследовании непредсказуемости бинарных последовательностей. Следовательно её изучение для последовательностей с известной 2-адической сложностью представляет интерес. Настоящая статья посвящена исследованию симметричной 2-адической сложности бинарных последовательностей, которые получаются чередованием циклических сдвигов последовательностей простых чисел-близнецов и их дополнений. 2-адическая сложность этих последовательностей изучена в [4].

В заключение введения напомним, что, по определению, 2-адическая сложность $\Phi_2(s)$ последовательности $s$ с периодом $N$ равна наименьшей длине регистра сдвига с обратной связью по переносу, который её генерирует, а симметричная 2-адическая сложность определяется как

$$\overline{\Phi_2}(s) = \min\left(\Phi_2(s), \Phi_2(\tilde{s})\right),$$

где $\Phi_2(\tilde{s})$ -2-адическая сложность последовательности $\tilde{s} = (s(N-1), s(N-2), ..., s(0))$ [1, 3].

Согласно [2], $\Phi_2(s)$ можно найти по следующей формуле

$$\Phi_2(s) = \log_2\left(\frac{2^N - 1}{\text{НОД}(S(2),\ 2^N - 1)}\right),$$

где, как обычно, $S(x) = \sum_{t=0}^{N-1} s(t)x^t$, – многочлен последовательно-

сти и НОД$(m,n)$ – наибольший общий делитель двух чисел $m,n$ [1]. Следовательно, если $\tilde{S}(x)$ – порождающий многочлен последовательности $\tilde{s}=(s(N-1),s(N-2),...,s(0))$, то её 2-адическая сложность вычисляется по следующей формуле:

$$\Phi_2(\tilde{s})=\log_2\left(\frac{2^N-1}{\text{НОД}(\tilde{S}(2),\ 2^N-1)}\right).$$

Таким образом, для вычисления симметричной 2-адической сложности последовательности, 2-адическая сложность которой известна, достаточно найти $\left(\tilde{S}(2),\ 2^N-1\right)$.

**2. Определение последовательности**

Пусть $p$ и $q=p+2$ - простые числа и $e=(p-1)(q-1)/2$. Обозначим через $\mathbb{Z}_{pq}^*$ мультипликативную группу кольца классов вычетов $\mathbb{Z}_{pq}$ по модулю $pq$ и через $g$ общий примитивный корень по модулям $p$ и $q$. Он всегда существует и его порядок по модулю $pq$ равен $e$ [6]. Также, согласно [6], здесь существует целое число $h$, удовлетворяющее сравнениям

$$h\equiv g \pmod p,\ \ h\equiv 1 \pmod q.$$

Определим обобщенные циклотомические классы Уитмена второго порядка по модулю $pq$ как

$$D_i=\{g^s h^i \pmod{pq} : s=0,1,\ldots,e-1\},\ \ i=0,1.$$

Тогда

$$\mathbb{Z}_{pq}^*=D_0\cup D_1.$$

Заметим, что $|D_i|=e$. Также определим

$$P=\{p,2p,\ldots,(q-1)p\},\ Q=\{q,2q,\ldots,(p-1)q\},\ R=\{0\}.$$

Пара последовательностей простых чисел-близнецов $t$ и $t'$ длины $pq$ определяется как

$$t(i)=\begin{cases}1, & \text{если } i \pmod{pq}\in D_1\cup P,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

и

$$t'(i)=\begin{cases}1, & \text{если } i \pmod{pq}\in D_1\cup P\cup Q\cup R,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Рассмотрим бинарную последовательность $s$ с периодом $pq$, получаемую посредством формулы (1) из пары $t$ и $t'$

$$s=I\left(t',\ L^d\left(t'\right)+b(1),L^{2d}(t)+b(2),\ L^{3d}(3)+b(3)\right),\quad (1)$$

где $I$- оператор чередования, $L$- оператор циклического сдвига на единицу влево, $d = (pq+1)/4$. В [4] рассмотрено четыре варианта, когда $(b(1), b(2), b(3)) = (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1)$ . Для последовательности $s$ в этих случаях будем применять обозначение $s_k,\ k = 1,2,3,4$, как и в [4]. Многочлены этих последовательностей обозначим через $S_k(x)\ ,\ k = 1,2,3,4$, соответственно.

2-адическая сложность последовательностей, получающихся из последовательностей $t$ и $t'$ по формуле (1) исследована в [4], но вопрос об их симметричной 2-адической сложности остался открытым.

**3. Вспомогательные леммы**

Напомним свойства многочлена чередующейся последовательности, необходимые для дальнейшего. Они доказаны в [5].

**Лемма 1.** *Для многочленов бинарных последовательностей* $c,\ e,\ f, h$ *с периодом* $T$ *справедливы следующие соотношения:*

1. $S_e(x) \equiv x^{T-d} S_c(x) (\mathrm{mod}\ x^T - 1)$, *если* $e = L^d(c)$;
2. $S_e(x) = S_c(x) + \frac{x^T-1}{x-1}$, *если* $e$ *- дополнение последовательности* c;
3. $S_u(x) = S_c(x^4) + xS_e(x^4) + x^2 S_f(x^4) + x^3 S_h(x^4)$, *если* $u$ =*I(c, e, f, h).*

**Лемма 2.** *Пусть* $s$ *– двоичная последовательность, определенная по формуле* (1)*. Тогда*

$$\tilde{s} = I\left(L^{pq-3d}\left(\widetilde{t}\right) + b(3), L^{pq-2d}\left(\tilde{t}\right) + b(2), L^{pq-d}\left(\tilde{t'}\right) + b(1), \tilde{t'}\right).$$

Утверждение этой леммы следует из определения обратной последовательности и леммы 1.

**Лемма 3.** *Пусть* $S_k(x)$ *- многочлен последовательности* $s_k,\ k$ =1,2,3,4 *и* $p > 3$*. Тогда*

$$НОД(\tilde{S}_k(2),\ 15) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 1,4, \\ 5, & \text{если } k = 2,3 \text{ и } p \equiv 1 \pmod 5. \end{cases}$$

*Доказательство.* Положим $c = L^{pq-3d}(\widetilde{t}) + b(3), e = L^{pq-2d}\left(\tilde{t}\right) + b(2), f = L^{pq-d}\left(\tilde{t'}\right) + b(1), h = \tilde{t'}$. Тогда, по леммам 1 и 2 получаем, что

$$\tilde{S}_k(2) = S_c\left(2^4\right) + 2S_e\left(2^4\right) + 2^2 S_f\left(2^4\right) + 2^3 S_h(2^4).$$

Следовательно, справедливо сравнение

$$\tilde{S}_k(2) \equiv S_c(1) + 2S_e(1) + 2^2 S_f(1) + 2^3 S_h(1) (\mathrm{mod}\ 15). \qquad (2)$$

Так как коэффициенты используемых многочленов равны 0 или 1, то значения многочленов в (2) равны числу ненулевых членов в соответствующих последовательностях.

По определению, последовательность $t$ имеет $(p-1)(p+1)/2+p+1$ ненулевых элементов, а последовательность $t'$ соответственно $(p-1)(p+1)/2+2p+1$.

Пусть $k=1$. Здесь, $b(3)=1$ и $S_c(1)=p(p+2)-(p+1)^2/2=(p^2+2p-1)/2$, $b(2)=0$ и $S_e(1)=(p+1)^2/2$, $b(1)=0$ и $S_f(1)=(p^2+4p+1)/2$, а также $S_h(1)=(p^2+4p+1)/2$ В итоге, применяя сравнение (2), получаем, что $\tilde{S}_1(2)\equiv 9p+13(\mathrm{mod}\ 15)$. Значит, 3 не делит $\tilde{S}_1(2)$. Далее, если 5 делит $\tilde{S}_1(2)$, тогда $p\equiv 3\pmod 5$ и $p+2\equiv 5\pmod 5$, что противоречит условию. Следовательно, НОД$(\tilde{S}_1(2),\ 15)=1$ Утверждение этой леммы для других трех оставшихся случаев может быть показано тем же самым образом.

**Лемма 4.** *Пусть* $G(x^{-1})=\sum_{t=0}^{4p-1}(-1)^{s(t)}x^t$. *Тогда*

$$2^{4p}G(2^{-1})\equiv -4\tilde{S}(2)\left(\mathrm{mod}\ 2^{4pq}-1\right).$$

Доказательство. По определению, имеем

$$2^{4p}G(2^{-1})=\sum_{t=0}^{4p-1}(-1)^{s(t)}2^{4p-t}.$$

Ясно, что $(-1)^{s(t)}=1-2s(t)$. Следовательно,

$$2^{4p}G(2^{-1})=\sum_{t=0}^{4p-1}(1-2s(t))\,2^{4p-t}=2^{4p}-1-2\sum_{t=0}^{4p-1}s(t)\,2^{4p-t}.$$

Далее, $\tilde{S}(2)=s(4p-1)+s(4p-2)\,2+\cdots+s(0)\,2^{4p-1}$. Значит, $\widetilde{2S}(2)=\sum_{t=0}^{4p-1}s(t)\,2^{4p-t}$. Из последнего равенства следует утверждение этой леммы.

## 4. Симметричная 2-адическая сложность последовательности

Следующее утверждение является основным результатом работы.

**Теорема 1.** *Пусть* $p>3$. *Тогда*

$$\overline{\Phi_2}(s)=\begin{cases}\log_2(2^{pq}-1), & \text{если } p\not\equiv 1 \pmod 5,\\ \log_2\left(\frac{2^{pq}-1}{5}\right), & \text{если } p\equiv 1 \pmod 5.\end{cases}$$

Доказательство. Воспользовавшись леммой 4 и леммой 5 из [4] получаем, что

$$-4S(2)\tilde{S}(2) \equiv -2\left(pq+1+\frac{2^{4pq}-1}{15}E-(1+E)\frac{2^{4pq}-1}{2^{4q}-1}\right) \pmod{2^{4pq}-1},$$

где $E = 1+(-1)^{b(1)}(2^{pq}+2^{3pq})$. Следовательно, если $r$ - простое число, делящее $\tilde{S}(2)$, тогда $r$ делит правую часть последнего сравнения. Применяя леммы 6-9 из [4] получаем, что в этом случае $r$ делит 15. Использование леммы 3 и теоремы 1 из [4] завершает доказательство теоремы.

**5. Заключение**

В результате исследования показано, что последовательности, получающиеся чередованием пары последовательностей простых чисел-близнецов, обладают высокой симметричной 2-адическая сложностью, достаточной для отражения атак посредством алгоритма рациональной аппроксимации.

## Список источников


1. Klapper A., Goresky M. Feedback shift registers, 2-adic span, and combiners with memory // Cryptology. 1997.10(2). 111-147.
2. Goresky M., Klapper A. Algebraic Shift Register Sequences. Cambridge University Press. 2012.
3. Hu H., Feng D. On the 2-adic complexity and the k-error 2-adic complexity of periodic binary sequences // IEEE Trans. Inf. Theory. 2008. 54 (2). 874-883.
4. Xiao Z., Zeng X. 2-Adic complexity of two constructions of binary sequences with period 4N and optimal autocorrelation magnitude // Cryptography and Communications. 2021. 13 (5). 865-885. DOI: 10.1007/s12095-021-00498-8
5. Wang Q., Du X. N. The linear complexity of binary sequences with optimal autocorrelation // IEEE Trans. Inf. Theory. 2010. 56. 6388-6397.
6. Whiteman A. The cyclotomic numbers of order twelve // Acta Arithmetica. 1960. 6.1. 53-76.


## References


1. Klapper A., Goresky M. Feedback shift registers, 2-adic span, and combiners with memory // Cryptology. 1997.10(2). 111-147.

2. Goresky M., Klapper A. Algebraic Shift Register Sequences. Cambridge University Press. 2012.
3. Hu H., Feng D. On the 2-adic complexity and the k-error 2-adic complexity of periodic binary sequences // IEEE Trans. Inf. Theory. 2008. 54 (2). 874-883.
4. Xiao Z., Zeng X. 2-Adic complexity of two constructions of binary sequences with period 4N and optimal autocorrelation magnitude // Cryptography and Communications. 2021. 13 (5). 865-885. DOI: 10.1007/s12095-021-00498-8
5. Wang Q., Du X. N. The linear complexity of binary sequences with optimal autocorrelation // IEEE Trans. Inf. Theory. 2010. 56. 6388-6397.
6. Whiteman A. The cyclotomic numbers of order twelve // Acta Arithmetica. 1960. 6.1. 53-76.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 345-348.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 345-348.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 534.11

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА-ГАЛЕРКИНА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ СИСТЕМ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ

***Владислав Львович Литвинов[1]✉, Кристина Владиславовна Литвинова[2]***
*[1,2]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
*[1,2]Самарский государственный технический университет, Самара, Россия*
*[1]vladlitvinov@rambler.ru✉, https://orcid.org/ 0000-0002-6108-803X*
*[2]kristinalitvinova900@rambler.ru, https://orcid.org/ 0000-0002-1711-9273*

***Аннотация.*** *Метод Канторовича – Галёркина распространен на более широкий класс задач о колебаниях механических систем с движущимися границами, учитывающих изгибную жесткость, сопротивление среды и жесткость основания. Особое внимание уделено анализу получаемых решений на резонансные свойства. Получены квадратурные формулы для амплитуд динамических мод различного порядка. В качестве примера рассмотрена задача о вынужденных колебаниях струны с равномерно движущейся границей. Произведена оценка погрешности метода Канторовича – Галёркина в зависимости от скорости движения границ.*

***Ключевые слова:*** *колебания систем с движущимися границами, резонансные свойства, законы движения границ, изгибная жесткость, упругое основание, сопротивление среды.*

Conference paper

# APPLICATION OF METHOD KANTOROVICH-GALERKIN IN STUDYING RESONANCE PROPER-TIES OF SYSTEMS WITH DAMPING

***Vladislav L. Litvinov [1]✉, Kristina V. Litvinova[2]***
*[1,2]Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
*[1,2]Samara State Technical University, Samara, Russia*
*[1]vladlitvinov@rambler.ru✉, https://orcid.org/ 0000-0002-6108-803X*
*[2]kristinalitvinova900@rambler.ru, https://orcid.org/ 0000-0002-1711-9273*

© Литвинов В. Л., Литвинова К. В., 2024

***Abstract.*** *Kantorovich - Galerkin method extended to a wider class of problems, taking into account the bending stiffness, environmental resistance and elastic base. Particular attention is paid to the analysis of the solutions obtained at the resonance properties. We obtain quadrature formulas for the amplitudes of the dynamic modes of different orders. As an example, consider the problem of forced vibrations of a string with a uniformly moving boundaries. The estimation error of Kantorovich - Galerkin method in depending on the speed of motion of the boundaries.*

***Keywords:*** *fluctuations in systems with moving boundaries, resonance properties, the laws of moving boundaries, the flexural rigidity, elastic base, environmental resistance.*

## 1. Introduction

Exact methods for solving boundary value problems on vibrations of mechanical objects with moving boundaries are limited by the wave equation [1, 4, 5]. Of the approximate methods, the most effective is the Kantorovich-Galerkin method [2, 6]. In the works of A.A. Lezhneva [6], it is proposed to use the Kantorovich method in combination with the Galerkin method to solve problems on vibrations of systems with moving boundaries. This approach is very convenient, since the initial problem is reduced to solving an ordinary differential equation. A.A. Lezhneva uses this method to obtain solutions to the wave equation and the equation of bending vibrations of a beam under simple homogeneous boundary conditions specified on one moving and one fixed boundaries. In this paper, the method is extended to a wider class of model boundary value problems that take into account the bending rigidity of an oscillating object [3, 10], the resistance of the external environment [7, 10–17], and the rigidity of the substrate [3, 11, 12]. Particular attention is paid to the consideration of the most common case in practice, when external disturbances act on the boundaries.

## 2. Main text of the article

Let it be required to obtain a solution to the partial differential equation:

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)+L[U(\xi,\tau)]+\varepsilon_1 U(\xi,\tau)=\varphi(\xi,\tau) \qquad (1)$$

under the boundary conditions:

$$Y_{ji}[U(1_j(\varepsilon\tau),\tau)]=F_{ji}(\tau);\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,2}, \qquad (2)$$

Where $U(\xi,\tau)$ is the displacement function, $L$ – is a linear homogeneous differential operator in $\xi$; $Y_{ji}$ – linear homogeneous differential operators in $\xi$; $\varphi(\xi,\tau), F_{ji}(\tau)$ – are given functions of the class $C$ and $C^2$; $\varepsilon$ – is a small parameter.

Note that the Kantorovich-Galerkin method allows one to take into account the initial conditions. When analyzing the resonance properties, the initial conditions are taken as

$$U(\xi,0)=U_\tau(\xi,0)=0.$$

Skipping some mathematical calculations, we obtain the following expression for the amplitude of oscillations:

$$A_n^2(\tau)=\frac{1}{4}A_{0n}^2(\varepsilon\tau)a_n^2(\varepsilon\tau)\{[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_{n1}(\zeta)d\zeta]^2+[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_{n1}(\zeta)d\zeta]^2\}, \qquad (3)$$

where

$$F_n(\varepsilon\zeta) = \frac{M_n(\varepsilon\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta)w_n'(\zeta)};\ \Phi_{n1}(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta);\ \Phi_{n2}(\zeta) = w_n(\zeta) + W_n(\zeta).$$

### 3. Conclusion

The obtained expression is convenient for analyzing the resonance properties of systems with moving boundaries. In such systems, two types of resonance phenomena are distinguished: steady-state resonance and passing through resonance.

Steady-state resonance is a phenomenon of a sharp increase in the amplitude of oscillations in the case when the change in the frequency of the external force and one of the natural frequencies are coordinated in such a way that the best conditions for increasing the amplitude are created.

Passing through resonance is a phenomenon of a sharp increase in amplitude during a finite period of time, when the instantaneous frequency of one of the natural oscillations passes through the value of the disturbing frequency.

Note that when the velocity of the boundary movement tends to zero, the phenomenon of steady-state resonance and the phenomenon of passing through resonance degenerate into phenomena of ordinary resonance for a system with fixed boundaries.

## References


1. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Resonance properties of mechanical objects with moving boundaries: monograph // – Samara: Samara state tech. univ, 2009. – 131 p.

2. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Study of resonance properties of mechanical objects using the Kantorovich-Galerkin method // Bulletin of Samara State Technical University. Series. "Physical and mathematical sciences". No. 1(18). – 2009. – P. 149–158.

3. Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen I.V. Statement of the problem of oscillations of a beam with a moving spring-loaded support // Bulletin of Samara State Technical University. Series "Engineering sciences". № 1 (37) – 2013. – P. 93–98.

4. Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries and loads. – Moscow: Fizmatlit, 2001. – 320 p.

5. Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen I.V. On one method for obtaining an analytical solution to the wave equation describing oscillations of systems with moving boundaries // Bulletin of Samara State Technical University. Series "Physical and Mathematical Sciences". № 3 (28) – 2012. – P. 145–151.

6. Lezhneva A.A. Bending vibrations of a beam of variable length // Izvestiya. AN SSSR. Mechanics of solids. – 1970. – № 1. – P. 159–161.

7. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Analysis of the influence of boundary movement in the study of resonance properties of systems with damping // Bulletin of the Samara State Technical University. Series. "Physical and Mathematical Sciences". No. 2 (19). - 2009. - P. 147-152.

8. Litvinov V.L. Longitudinal oscillations of a rope of variable length with a load at the end // Bulletin of scientific and technical development. No. 1 (101), 2016. - P. 19-24.

9. Goroshko O. A., Savin G. N. Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kyiv: Naukova Dumka, 1971. 270 p.

10. Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen I.V. Resonance properties of a variable-length rope with bending rigidity taking into account the action of damping forces // Mathematical modeling and boundary value problems: Proceedings of the Eighth All-Russian scientific conference with international participation. Part 1: Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements. - Samara: SamGTU, 2011. - P. 15-20.

11. Litvinov V.L. Transverse vibrations of a viscoelastic rope lying on an elastic foundation, taking into account the influence of environmental resistance forces // Bulletin of scientific and technical development. No. 4 (92), 2015. - P. 29-33.

12. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Study of resonant properties of a variable-length string lying on an elastic foundation, taking into account the influence of environmental resistance forces // Bulletin of scientific and technical development. № 11 (99), 2015. – P. 38–43.

13. Litvinov V.L. Study of free oscillations of mechanical objects with moving boundaries using the asymptotic method // Journal of the Middle Volga Mathematical Society. V. 16, № 1. 2014. – P. 83–88.

14. Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020.Vol. 26, No. 2. P. 188-199.

15. Litvinov V.L., Litvinova K.V. An approximate method for solving boundary value problems with moving boundaries by reduction to integro–differential equations// Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2022, vol. 62, no. 6, pp. 945–954.

16. Litvinov V.L. Variational statement of the problem of oscillations of a beam with a movable spring support // Zh. TMF. 2023. Vol. 215. No. 2. Pp. 289–296.

17. Litvinov V. L., Litvinova K. V. On one inverse method for solving problems of oscillations of mechanical systems with moving boundaries // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 2024. No. 3. Pp. 53–59.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 349-365.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 349-365.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 621.315.592

# УЛУЧШЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ ПОЛЕВОЙ ЗАВИСИМОСТИ ДРЕЙФОВОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ В НИТРИДЕ ГАЛЛИЯ

***Валентин Олегович Турин[1]✉, Александр Павлович Рогов[2], Анастасия Павловна Аникина[3], Бадурдин Амируллоевич Рахматов[4]***
*[1]Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[2,3]АО «Протон», Орёл, Россия*
*[4]Таджикский национальный университет, Душанбе, Республика Таджикистан*
*[1]voturin@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-0450-2481*

***Аннотация.*** *Благодаря большой, в сравнении с кремнием и арсенидом галлия, ширине запрещённой зоны применение транзисторов на основе нитрида галлия – это очень перспективное направление в электронике. Для развития этого направления необходимо в числе прочего создание специфических моделей для приборно-технологического моделирования приборов на основе нитрида галлия. Например, полевая зависимость дрейфовой скорости электронов в нитриде галлия имеет более сложный вид чем у кремния и арсенида галлия. В отличие от них, в нитриде галлия, при достижении полем некоторого значения, меняется доминирующий механизм рассеяния электронов, что приводит к заметному уменьшению дифференциальной подвижности в сравнении с низкополевой подвижностью. При дальнейшем росте поля, подобно тому, как это происходит в арсениде галлия, дрейфовая скорость в нитриде галлия сначала достигает пикового значения, а потом начинает убывать, постепенно выходя на насыщение. Ранее в работе [1] уже была предложена специфическая для нитрида галлия аппроксимация полевой зависимости дрейфовой скорости электронов. Данная работа посвящена дальнейшему улучшению этой модели.*

***Ключевые слова:*** *нитрид галлия, полевая зависимость дрейфовой скорости электронов, низкополевая подвижность, изменение доминирующего механизм рассеяния электронов, отрицательная дифференциальная подвижность*

Conference paper

# IMPROVED APPROXIMATION FOR THE FIELD DEPENDENCE OF THE ELECTRON DRIFT VELOCITY IN GALLIUM NITRIDE

© Турин В. О., Рогов А. П., Аникина А. П., Рахматов Б. А., 2024

***Valentin O. Turin[1]✉, Alexander P. Rogov[2], Anastasia P. Anikina[2], Badurdin A. Rakhmatov[3]***
*[1]Orel State University, Orel, Russia*
*[2]JSC Proton, Orel, Russia*
*[3]Tajik National University, Dushanbe, Tajikistan*
*[1]voturin@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-0450-2481*

***Abstract.*** *Due to the large band gap in comparison with Silicon and Gallium Arsenide, the use of transistors based on Gallium Nitride is a very promising direction in electronics. For the development of this direction, it is necessary, among other things, to create specific models for the simulation of devices based on Gallium Nitride using Technology Computer-Aided Design software. For example, the field dependence of the electron drift velocity in Gallium Nitride has a more complex form than that in Silicon and Gallium Arsenide. In contrast, in Gallium Nitride, when the field reaches a certain value, the dominant electron scattering mechanism is changed, which leads to a noticeable decrease in differential mobility in comparison with low-field mobility. With further growth of the field, just as it occurs in Gallium Arsenide, the drift velocity in Gallium Nitride first reaches a peak value, and then begins to decrease, gradually reaching saturation. Earlier in [1], a model of the field dependence of the electron drift velocity, specific for Gallium Nitride, was already proposed. This work is devoted to further improvement of this model.*

***Keywords:*** *Gallium Nitride, field dependence of the electron drift velocity, low-field mobility, change in the dominant electron scattering mechanism, negative differential mobility*

## 1. Введение

Применение транзисторов на основе нитрида галлия (GaN) – это перспективное направление во многих отраслях промышленности. Благодаря большей ширине запрещённой зоны (GaN 3,2 эВ), чем у кремния (Si 1,1 эВ) и арсенида галлия (GaAs 1,4 эВ), GaN транзисторы способны сохранять работоспособность при более высоких температурах и/или плотностях тока, чем транзисторы на основе традиционных полупроводников. В приложении к микросхемам гальванической развязки, такие свойства могут быть весьма полезны. Полевые GaN транзисторы в перспективе могут заменить кремниевые МОП-транзисторы в выходных цепях оптоэлектронных и трансформаторных реле, выпускаемых АО «Протон». За счёт своей способности коммутировать высокие плотности тока, возможно воспроизвести параметры кремниевого МОП-транзистора, такие как выходное сопротивление, напряжение пробоя сток-исток, предельный коммутируемый ток, на GaN транзисторах меньшей площади. Уменьшение размера кристаллов открывает дорогу к миниатюризации выпускаемых микросхем. Для развития направления разработок и производства GaN кристаллов необходимо в числе прочего создание и исследование приборно-технологических моделей GaN транзисторов. Ранее, в работе [1] была предложена специфическая для нитрида галлия аппроксимация полевой зависимости дрейфовой скорости электронов для использования в программах

приборно-технологического моделирования типа TCAD. Данная работа посвящена дальнейшему улучшению этой модели.

**2. Сглаживающая функция для низкополевой части полевой зависимости дрейфовой скорости электронов в нитриде галлия**

При малых электрических полях дрейфовая скорость носителей пропорциональна напряжённости электрического поля:

$$v_{LIN1} = \mu_{low} E \tag{1}$$

и имеет функциональный вид:

$$y_1 = kx. \tag{2}$$

Коэффициент пропорциональности есть низкополевая подвижность $\mu_{low}$. Мы полагали $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с в собственном нитриде галлия. При увеличении напряжённости электрического поля зависимость дрейфовой скорости отклоняется от линейной зависимости и в некоторых случаях плавно происходит насыщение дрейфовой скорости [2], как, например, в кремнии. Для описания зависимости скорости дрейфа электронов от электрического поля в кремнии широко используется модель Canali [2, 3]:

$$v_C = \frac{\mu_{low} E}{\left(1+(E/E_C)^{\beta_C}\right)^{1/\beta_C}}. \tag{3}$$

Здесь скорость насыщения $v_{sat}$ связана с характерным полем $E_C$:

$$v_{sat} = \mu_{low} E_C . \tag{4}$$

Это уравнение имеет функциональный вид:

$$s = k\, x_C . \tag{5}$$

Здесь используется соответствие $s \leftrightarrow v_{sat}$ и $x_C \leftrightarrow E_C$. Уравнение (3) можно переписать в виде:

$$v_C = \frac{v_{LIN1} v_{sat}}{\left(v_{LIN1}^{\beta_C} + v_{sat}^{\beta_C}\right)^{1/\beta_C}}. \tag{6}$$

Это уравнение имеет функциональный вид:

$$f_c = \frac{y_1\ s}{(y_1^m + s^m)^{\frac{1}{m}}}. \tag{7}$$

Здесь используется соответствие $f_c \leftrightarrow v_C$, $y_1 \leftrightarrow v_{LIN1}$ и $\beta_C \leftrightarrow m$. Отметим, что производная функции $f_c$ имеет вид:

$$f_c' = k \left(\frac{f_c}{y_1}\right)^{m+1}. \tag{8}$$

У арсенида галлия (GaAs) наблюдается отрицательная дифференциальная подвижность электронов. Это явление связывают с переходом электронов, стимулированных достаточно сильным электрическим полем, из низкоэнергетической долины, в которой их подвижность относительно велика, в высокоэнергетические долины с меньшими значениями подвижностей носителей [4]. Вследствие этого средняя подвижность электронов уменьшается, что приводит к отрицательной дифференциальной подвижности электронов. Для учёта этого эффекта в арсениде галлия используется следующая аппроксимация для полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (модель Transferred Electron) [5]:

$$v_T = \frac{\mu_{low} E + v_{sat} (E/E_T)^{\beta_T}}{1 + (E/E_T)^{\beta_T}}. \tag{9}$$

Уравнение (9) можно переписать в виде:

$$v_T = \frac{v_{LIN1}\, v_T^{\beta_T} + v_{LIN1}^{\beta_T} v_{sat}}{v_{LIN1}^{\beta_T} + v_T^{\beta_T}}. \quad (10)$$

Здесь характерная скорость $v_T$ связана с характерным полем $E_T$:

$$v_T = \mu_{low} E_T. \quad (11)$$

Это уравнение имеет функциональный вид:

$$f_t = \frac{y_1\, t^n + y_1^n\, s}{y_1^n + t^n}. \quad (12)$$

Здесь используется соответствие $f_t \leftrightarrow v_{TE}$, $y_1 \leftrightarrow v_{LIN1}$, $t \leftrightarrow v_T$ и $n \leftrightarrow \beta_T$.

У нитрида галлия тоже наблюдается отрицательная дифференциальная подвижность электронов. Это явление тоже связывают с переходом электронов, стимулированных достаточно сильным электрическим полем зоны проводимости, из низкоэнергетической долины, в которой их подвижность относительно велика, в высокоэнергетические долины с меньшими значениями подвижностей носителей (см. рисунок 4). Но в нитриде галлия зависимость дрейфовой скорости электронов от напряжённости электрического поля при достаточно слабых полях, до появления эффекта отрицательной дифференциальной подвижности, имеет более сложный вид в сравнении с арсенидом галлия. При достижении полем напряжённости около $E_K$ (kink – излом) в нитриде галлия меняется доминирующий механизм рассеяния электронов, что приводит к заметному изменению дифференциальной подвижности [6]. Характерное поле излома $E_K$ определяется, как правило, экспериментально. Мы полагали $E_K = 14$ кВ/см. Соответственно, у нитрида галлия при поле $E \ll E_K$ имеем линейную зависимость (1) с подвижностью $\mu_{low}$. Определяем $v_k$ так:

$$v_k = \mu_{low} E_K. \quad (13)$$

Получается $v_k = 1{,}4 \times 10^7$ см/с. Уравнение (13) имеет функциональный вид:

$$s_K = k\, x_K. \quad (14)$$

Здесь используется соответствие $s_K \leftrightarrow v_k$, $k \leftrightarrow \mu_{low}$ и $x_K \leftrightarrow E_K$. При поле $E \sim E_K$ происходит переход дрейфовой скорости на линейную зависимость с другим наклоном $\mu_{high}$, описываемую асимптотой:

$$v_{LIN2} = v_k + \mu_{high} \cdot (E - E_K) = v_k \cdot \big(1 + \lambda \cdot (E - E_K)\big). \quad (15)$$

Здесь

$$\lambda = \mu_{high} / v_k. \quad (16)$$

Мы полагали $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с в собственном нитриде галлия. Уравнение (15) имеет функциональный вид:

$$y_2 = s_K + a \cdot (x - x_K) = s_K \cdot \big(1 + \lambda (x - x_K)\big). \quad (17)$$

Здесь используется соответствие $a \leftrightarrow \mu_{high}$. Кроме того

$$\lambda = a / s_K. \quad (18)$$

Уравнение (17) можно переписать более компактно:

$$y_2 = b + ax. \quad (19)$$

Здесь

$$b = s_K - a x_K. \quad (20)$$

Соответственно, для нитрида галлия возникает проблема выбора сглаживающей функции, которая обеспечивает плавное переключение с асимптотики (1) на (15).

Сначала введём сглаживающую функцию, совпадающую по виду с моделью Canali:

$$v_{low\,0} = \frac{v_{LIN1} v_k}{\left(v_{LIN1}^{\beta_k} + v_k^{\beta_k}\right)^{\frac{1}{\beta_k}}}. \quad (21)$$

Мы полагали $\beta_k = 1{,}7$. Это уравнение имеет функциональный вид:

$$f_0 = \frac{y_1\ s_K}{\left(y_1^m + s_K^m\right)^{\frac{1}{m}}}. \quad (22)$$

Здесь используется соответствие $f_0 \leftrightarrow v_{low\,0}$, $y_1 \leftrightarrow v_{LIN1}$, $s_K \leftrightarrow v_k$ и $m \leftrightarrow \beta_k$. Производная $f_0'$, подобно $f_c'$, определяется следующим уравнением:

$$f_0' = k\ \left(\frac{f_0}{y_1}\right)^{m+1}. \quad (23)$$

Здесь используется соответствие $a \leftrightarrow \mu_{high}$.

На Рисунке 1 (а) представлена низкополевая часть $v_{low\,0}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с. На Рисунке 1 (б) представлена полевая зависимость дифференциальной подвижности $dv_{low\,0}/dE$. Видно, что в области полей, превышающих поле излома $E_K$, эта модель выходит на асимптотику с нулевым значением дифференциальной подвижности.

Традиционным решением является использование функции

$$v_{low\,1} = \frac{v_{LIN1} v_{LIN2}}{\left(v_{LIN1}^{\beta_k} + v_k^{\beta_k}\right)^{\frac{1}{\beta_k}}} = v_{low\,0} \cdot \left(1 + \lambda \cdot (E - E_K)\right). \quad (24)$$

Это уравнение имеет функциональный вид:

$$f_1 = \frac{y_1\, y_2}{\left(y_1^m + s_K^m\right)^{\frac{1}{m}}} = f_0 \cdot \left(1 + \lambda \cdot (x - x_K)\right). \quad (25)$$

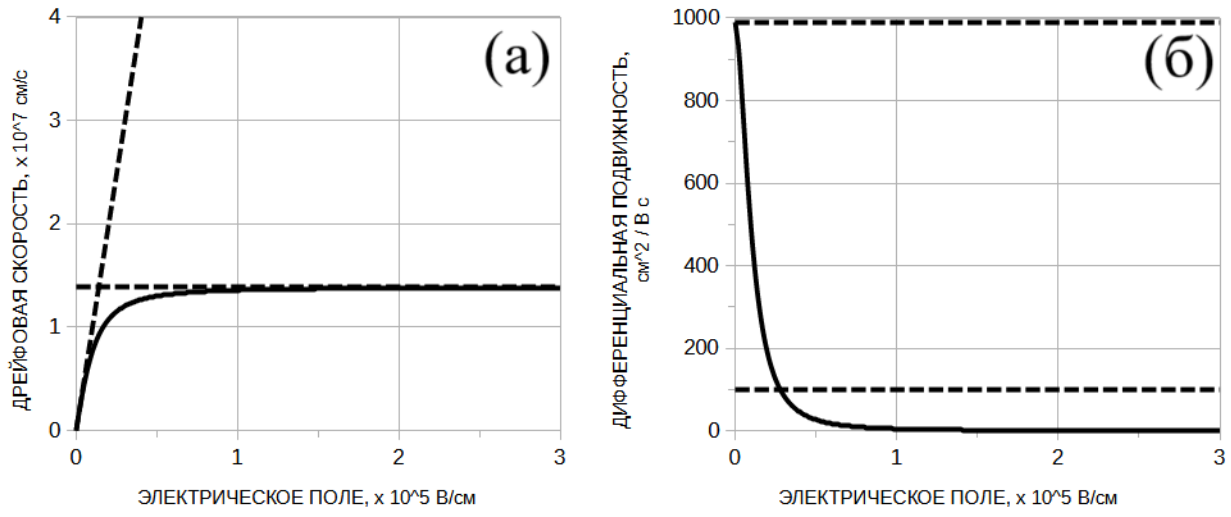



Рисунок 1 — (а) низкополевая часть $v_{low\,0}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с. Наклонный пунктир представляет асимптоту $v_{LIN1}$. Горизонтальная пунктирная линия соответствует характерной скорости излома $v_k = 1{,}4 \times 10^7$ см/с; (б) соответствующая полевая зависимость дифференциальной подвижности. Верхний пунктир - уровень $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с, нижний пунктир – уровень $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с

Здесь используется соответствие $f_1 \leftrightarrow v_{low\,1}$, $y_1 \leftrightarrow v_{LIN1}$, $y_2 \leftrightarrow v_{LIN2}$, $s_K \leftrightarrow v_k$ и $m \leftrightarrow \beta_k$. Отметим, что при $\lambda = 0$ (или $\mu_{high} = 0$) функции $v_{low\,1}$ и $v_{low\,0}$ совпадают. Производная функции $f_1$ имеет вид:

$$f_1' = f_0' \cdot \left(1 + \lambda \cdot (x - x_K)\right) + \lambda\, f_0. \qquad (26)$$

Уравнение (26) с учётом (23) можно переписать так:

$$f_1' = f_1^{m+1} \cdot \left( k\, y_1^{-(m+1)} \left(\frac{s_K}{y_2}\right)^m + a\, y_2^{-(m+1)} \left(1 + \left(\frac{s_K}{y_1}\right)^m\right)\right). \qquad (27)$$

На Рисунке 2 (а) представлена низкополевая часть $v_{low\,1}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (традиционная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с, что соответствует собственному нитриду галлия. На Рисунке 2 (б) представлена полевая зависимость дифференциальной подвижности $dv_{low\,1}/dE$. Видно, что традиционная модель даёт заниженное значение дифференциальной подвижности в слабых полях и корректно описывает ситуацию в сильных полях.

На Рисунке 3 (а) представлена низкополевая часть $v_{low\,1}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (традиционная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и с завышенным значением $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с, что соответствует гипотетическому проводнику, на примере которого более остро проявляются достоинства и недостатки исследуемых моделей. На Рисунке 3 (б) представлена полевая зависимость дифференциальной подвижности $dv_{low\,1}/dE$ для рассматриваемых параметров. Ещё лучше видно, что традиционная модель даёт заниженное значение дифференциальной подвижности в слабых полях.

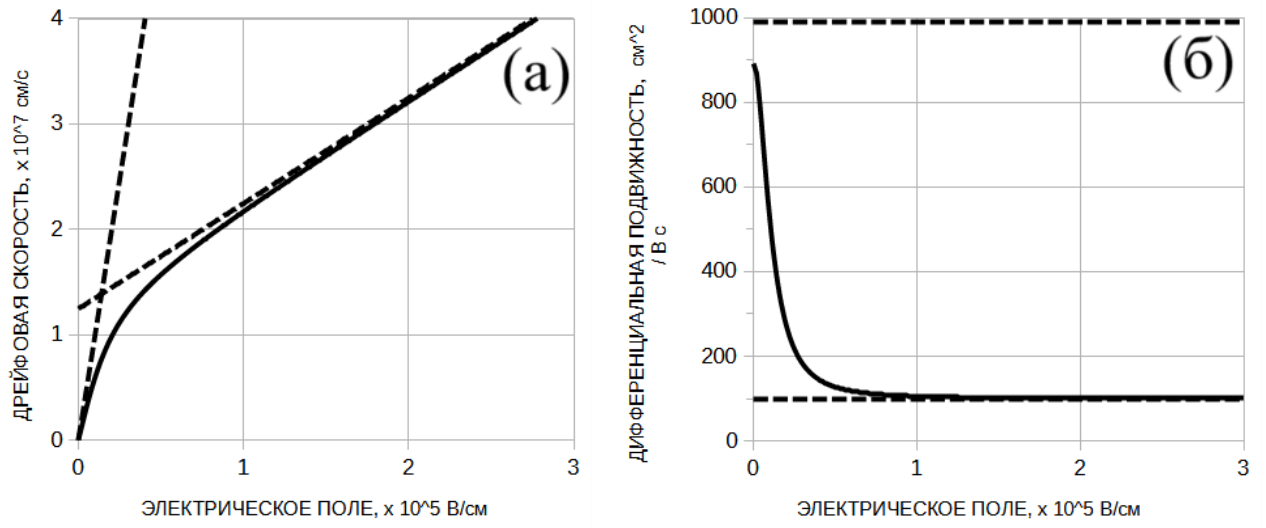



Рисунок 2 — (а) низкополевая часть $v_{low\,1}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (традиционная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с, что соответствует собственному нитриду галлия. Наклонные пунктиры представляют асимптоты $v_{LIN1}$ и $v_{LIN2}$. (б) соответствующая полевая зависимость дифференциальной подвижности. Нижний пунктир - уровень $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и верхний пунктир – уровень $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с

В работе [1] предложено использовать модифицированную сглаживающую функцию

$$v_{low\,2} = \frac{v_{LIN1} v_{LIN2}}{\left(v_{LIN1}^{\beta_k} + v_{LIN2}^{\beta_k}\right)^{\frac{1}{\beta_k}}}. \quad (28)$$

Это уравнение имеет функциональный вид:

$$f_2 = \frac{y_1\, y_2}{(y_1^m + y_2^m)^{\frac{1}{m}}}. \quad (29)$$

Здесь используется соответствие $f_2 \leftrightarrow v_{low\,2}$, $y_1 \leftrightarrow v_{LIN1}$, $y_2 \leftrightarrow v_{LIN2}$ и $m \leftrightarrow \beta_k$. Производная функции $f_2$ имеет вид:

$$f_2' = k\left(\frac{f_2}{y_1}\right)^{m+1} + a\left(\frac{f_2}{y_2}\right)^{m+1}. \quad (30)$$

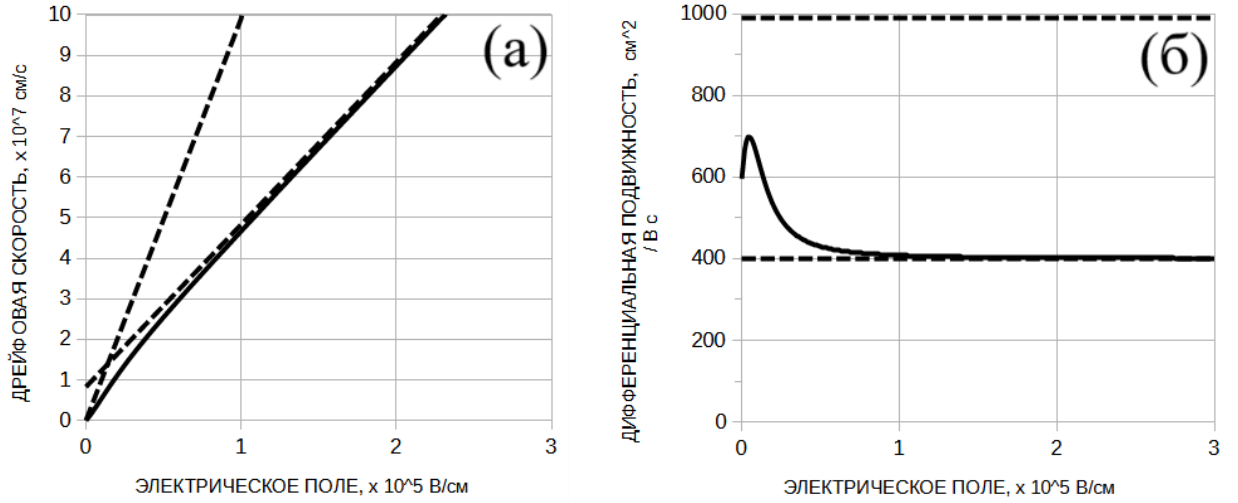



Рисунок 3 — (а) низкополевая часть $v_{low\,1}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (традиционная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с (завышенное значение). Наклонные пунктиры представляют асимптоты $v_{LIN1}$ и $v_{LIN2}$. (б) соответствующая полевая зависимость дифференциальной подвижности. Верхний пунктир – уровень $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и нижний пунктир – уровень $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с (завышенное значение).

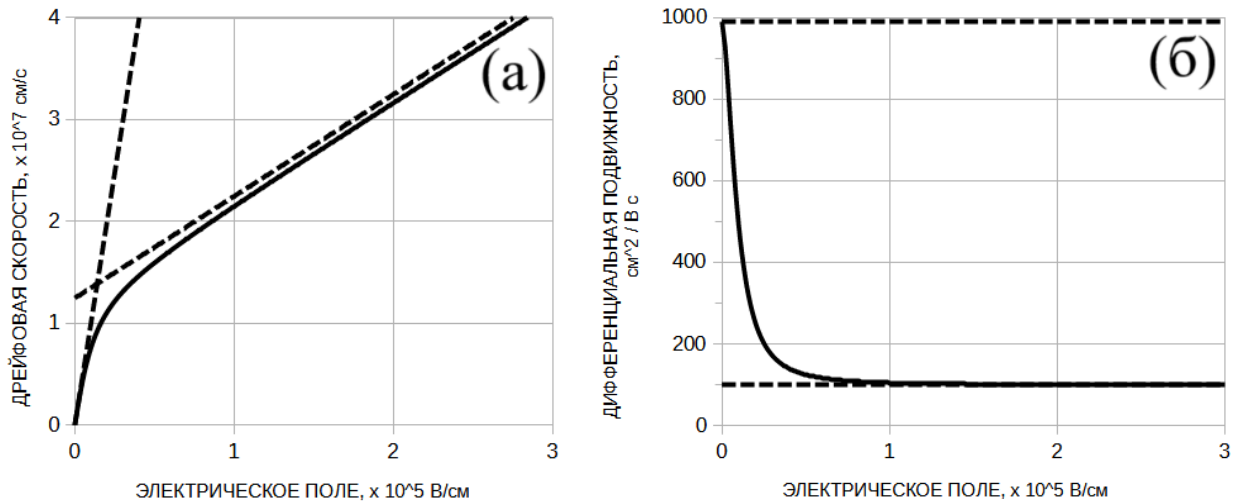



Рисунок 4 — (а) низкополевая часть $v_{low\,2}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с, что соответствует собственному нитриду галлия. Наклонные пунктиры представляют асимптоты $v_{LIN1}$ и $v_{LIN2}$. (б) соответствующая полевая зависимость дифференциальной подвижности. Верхний пунктир - уровень $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и нижний пунктир – уровень $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с.

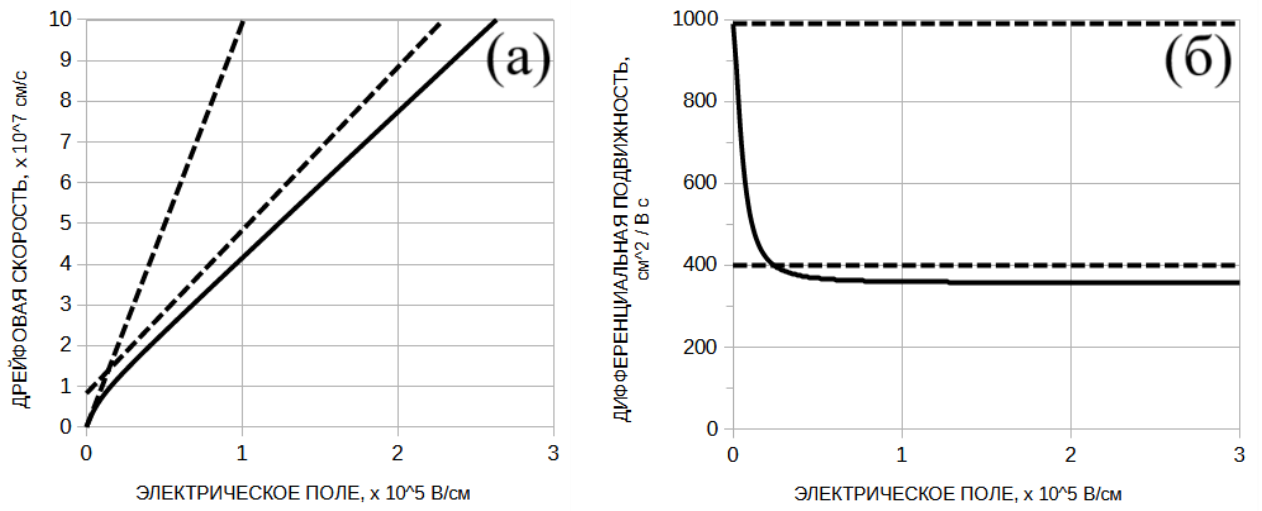



Рисунок 5 — (а) низкополевая часть $v_{low\,2}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с (завышенное значение). Наклонные пунктиры представляют асимптоты $v_{LIN1}$ и $v_{LIN2}$. (б) соответствующая полевая зависимость дифференциальной подвижности. Верхний пунктир - уровень $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и нижний пунктир – уровень $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с (завышенное значение).

На Рисунке 4(а) представлена низкополевая часть $v_{low\,2}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с, что соответствует собственному нитриду галлия. На Рисунке 4 (б) представлена полевая зависимость дифференциальной подвижности $dv_{low\,2}/dE$. Видно, что модифицированная модель корректно описывает нитрид галлия при используемых типовых параметрах.

На Рисунке 5(а) представлена низкополевая часть $v_{low\,2}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и с завышенным значением $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с, что соответствует гипотетическому проводнику, на примере которого более остро проявляются достоинства и недостатки исследуемых моделей. На Рисунке 5 (б) представлена полевая зависимость дифференциальной подвижности $dv_{low\,2}/dE$. Видно, что модифицированная модель даёт правильное значение дифференциальной подвижности в слабых полях. Но, при завышенном значении $\mu_{high}$, видно, что в области полей, превышающих поле излома $E_K$, модифицированная модель низкополевой части полевой зависимости дрейфовой скорости электронов выходит на асимптотику с заниженным значением дифференциальной подвижности.

Соответственно, модифицированная модель вполне приемлема для моделирования нитрида галлия, но при использовании для моделирования других полупроводников с изломом на полевой зависимости дрейфовой скорости электронов и с относительно высокой дифференциальной подвижностью при таких полях, может выходит на асимптотику с заниженным значением дифференциальной подвижности.

В нашей работе мы предлагаем улучшенную модифицированную функцию сглаживания

$$v_{low\,3} = \frac{v_{LIN1} v^*_{LIN2}}{\left(v^{\beta_k}_{LIN1} + v^{*\,\beta_k}_{LIN2}\right)^{\frac{1}{\beta_k}}}. \quad (31)$$

Здесь

$$v^*_{LIN2} = k^* v_{LIN2}. \quad (32)$$

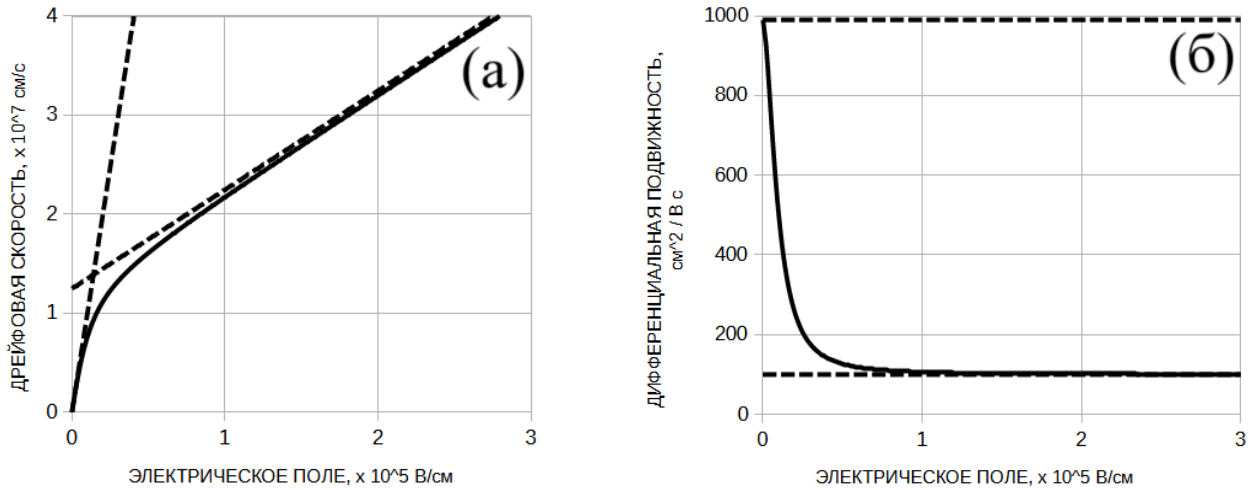



Рисунок 6 — (а) низкополевая часть $v_{low\,3}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (улучшенная модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с, что соответствует собственному нитриду галлия. Наклонные пунктиры представляют асимптоты $v_{LIN1}$ и $v_{LIN2}$. (б) соответствующая полевая зависимость дифференциальной подвижности. Нижний пунктир - уровень $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и верхний пунктир – уровень $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с.

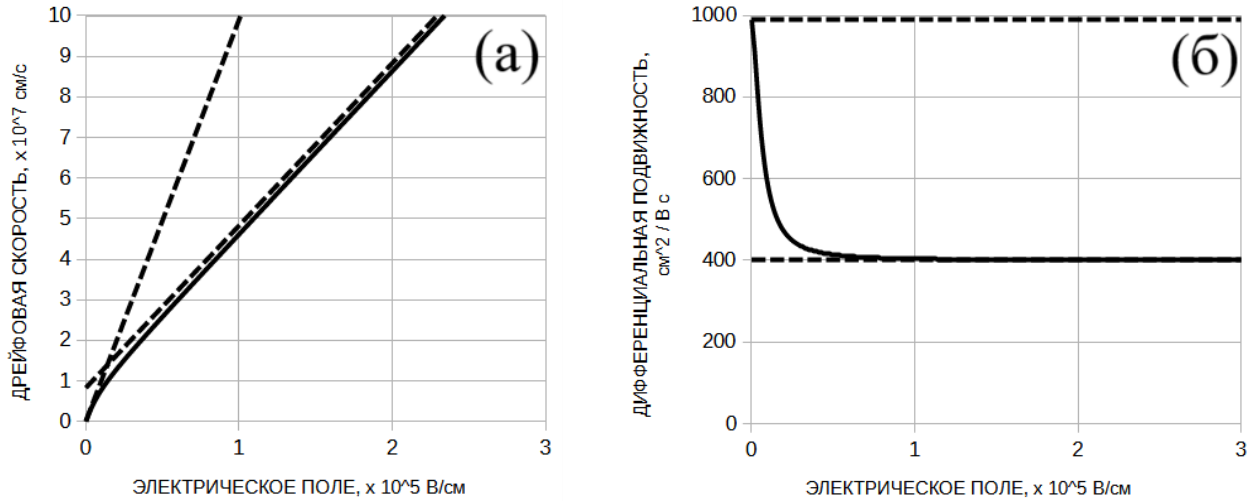



Рисунок 7 — (а) низкополевая часть $v_{low\,3}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (улучшенная модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с (завышенное значение). Наклонные пунктиры представляют асимптоты $v_{LIN1}$ и $v_{LIN2}$. (б) соответствующая полевая зависимость дифференциальной подвижности. Верхний пунктир - уровень $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и нижний пунктир – уровень $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с (завышенное значение)

и

$$k^* = \frac{\mu_{low}}{\left(\mu_{low}^{\beta_k} - \mu_{high}^{\beta_k}\right)^{\frac{1}{\beta_k}}}. \quad (33)$$

Это уравнение имеет функциональный вид:

$$f_3 = \frac{y_1\, y_2^*}{(y_1^m + y_2^{*\,m})^{\frac{1}{m}}}. \quad (34)$$

Здесь используется соответствие $f_3 \leftrightarrow v_{low\,3}$, $y_1 \leftrightarrow v_{LIN1}$, $y_2^* \leftrightarrow v_{LIN2}^*$ и $m \leftrightarrow \beta_k$. Здесь

$$y_2^* = cy_2 = b^* + a^* x\,, \quad (35)$$

$$b^* = cb\,, \quad (36)$$

$$a^* = ca\,, \quad (37)$$

$$c = \frac{k}{(k^m - a^m)^{\frac{1}{m}}}. \quad (38)$$

Производная функции $f_3$ имеет вид:

$$f_3' = k\left(\frac{f_3}{y_1}\right)^{m+1} + a^*\left(\frac{f_3}{y_2^*}\right)^{m+1}. \quad (39)$$

На Рисунке 6 (а) представлена низкополевая часть $v_{low\,3}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (улучшенная модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с, что соответствует собственному нитриду галлия. На Рисунке 6 (б) представлена полевая зависимость дифференциальной подвижности $dv_{low\,3}/dE$. Видно, что улучшенная модифицированная модель корректно описывает нитрид галлия при используемых типовых параметрах.

На Рисунке 7 (а) представлена низкополевая часть $v_{low\,3}$ полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (улучшенная модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и с завышенным значением $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с, что соответствует гипотетическому проводнику, на примере которого более остро проявляются достоинства и недостатки исследуемых моделей. На Рисунке 7 (б) представлена полевая зависимость дифференциальной подвижности $dv_{low\,3}/dE$. Видно, что улучшенная модифицированная модель даёт правильное значение дифференциальной подвижности во всех диапазонах полей и при завышенном значении параметра $\mu_{high}$.

Подтвердим недостатки традиционной и модифицированной моделей и отсутствие таковых у улучшенной модифицированной модели математически. Для вторых производных, имеем:

$$f_1'' = k\left(\frac{f_1}{y_1}\right)^{m+1}. \quad (40)$$

$$f_2'' = (m+1)\,{f_2}^m \cdot \left(f_2'\left(\frac{k}{{y_1}^{m+1}} + \frac{a}{{y_2}^{m+1}}\right)^2 - f_2\left(\frac{k^2}{{y_1}^{m+2}} + \frac{a^2}{{y_2}^{m+2}}\right)\right). \quad (41)$$

$$f_3'' = (m+1)\,{f_3}^m \cdot \left(f_3'\left(\frac{k}{{y_1}^{m+1}} + \frac{a^*}{{y_2^*}^{m+1}}\right)^2 - f_3\left(\frac{k^2}{{y_1}^{m+2}} + \frac{{a^*}^2}{{y_2^*}^{m+2}}\right)\right). \quad (42)$$

При $x \to 0$ должно быть

$$f' = k \quad (43)$$

$$f'' = 0. \quad (44)$$

При $x \to \infty$ должно быть

$$f' \to a, \quad (45)$$

$$f'' \to 0. \quad (46)$$

1. Для традиционной сглаживающей функции при $x \to 0$:

$$f_1' \sim k - a + \frac{ak}{s_K} x \to k - a \neq k, \quad (47)$$

$$f_1'' \sim 2k\lambda - (m+1)(k-a)\left(\frac{k}{s_K}\right)^m x^{m-1} \to 2k\lambda = 2\frac{ka}{s_K} > 0. \quad (48)$$

Т. е. первая производная $f_1'$ функции $f_1$ меньше $k$, а вторая производная $f_1''$ больше нуля. Это значит, что соответсвенным образом определённая подвижность не равна в нуле требуемому значению и не убывает монотонно с ростом поля. Это является недостатком традиционной сглаживающей функции.

При $x \to \infty$:

$$f_1' \sim \frac{\lambda s_K^{m+1}}{(kx)^m} \to a, \quad (49)$$

$$f_1'' \sim (1-m)\frac{a s_K^m}{k^m x^{m+1}} \to 0, \quad (50)$$

как и должно быть.

2. Для модифицированной сглаживающей функции при $x \to 0$:

$$f_2' \sim k + a\left(\frac{k}{b}\right)^{m+1} x^{m+1} \to k. \quad (51)$$

$$f_2'' \sim 2a(m+1)\frac{k^{m+1}}{b^{m+1}} x^m \to 0, \quad (52)$$

как и должно быть.

При $x \to \infty$:

$$f_2' \to \frac{k}{(k^m + a^m)^{\frac{1}{m}}} a < a. \quad (53)$$

$$f_2'' \to 0. \quad (54)$$

Т. е. первая производная $f_2'$ функции $f_2$ меньше $a$. Это является недостатком модифицированной сглаживающей функции. Хотя вторая производная $f_2''$ ведёт себя правильно.

3. Для улучшенной модифицированной сглаживающей функции при $x \to 0$:

$$f_3' \sim k + a\left(\frac{1}{a^m} - \frac{1}{k^m}\right)\left(\frac{k}{b}\right)^{m+1} x^{m+1} \to k. \quad (55)$$

$$f_3'' \sim \frac{2}{c^m} a(m+1)\frac{k^{m+1}}{b^{m+1}} x^m \to 0, \quad (56)$$

как и должно быть.

При $x \to \infty$

$$f_3' \sim a + (m+1)\, b\left(\frac{a}{k}\right)^m \frac{1}{x} \to a. \quad (57)$$

$$f_3'' \to 0, \quad (58)$$

как и должно быть.

Отметим, что проблема сглаживающих функций актуальна и при компактном моделировании МОП-транзисторов. В МОП-транзисторах в надпороговом режиме при малых напряжениях на стоке реализуется линейный

режим, когда связь между током стока и напряжением на стоке имеет вид закона Ома. При увеличении напряжения на стоке происходит плавный выход тока стока на насыщение. Но в современных короткоканальных транзисторах даже в режиме насыщения канал транзистора обладает конечным сопротивлением. Соответственно при компактном моделировании МОП-транзисторов используются сглаживающие функции для перехода с одного линейного участка выходной вольт-амперной характеристики на другой линейный участок [7].

**3. Учёт эффекта отрицательной дифференциальной подвижности электронов**

Для учёта эффекта отрицательной дифференциальной подвижности электронов в нитриде галлия используется следующая аппроксимация для полевой зависимости дрейфовой скорости электронов (совпадающая по виду с уравнением (9) для полевой зависимости дрейфовой скорости электронов в GaAs):

$$v_{KT} = \frac{v_{low} + v_{sat}\left(\frac{E}{E_T}\right)^{\beta_T}}{1 + \left(\frac{E}{E_T}\right)^{\beta_T}}. \quad (59)$$

Здесь функция $v_{low}$ соответствует низкополевой части полевой зависимости дрейфовой скорости электронов и может принимать значения $v_{low\,1}$, $v_{low\,2}$, $v_{low\,3}$. Мы полагали $\beta_T = 5{,}7$, $E_T = 257$ кВ/см и $v_{sat} = 1{,}9 \times 10^7$ см/с в собственном нитриде галлия. Уравнение (59) можно переписать в виде:

$$v_{KT} = \frac{v_{low}\, v_T^{\beta_T} + v_{sat}\, v_{LIN1}^{\beta_T}}{v_T^{\beta_T} + v_{LIN1}^{\beta_T}}. \quad (60)$$

Здесь мы для удобства ввели обозначение $v_T = \mu_{low} E_T = 25{,}4 \times 10^7$ см/с. Уравнение (60) имеет функциональный вид:

$$f_{kt} = \frac{f\, t^n + s\, y_1^n}{t^n + y_1^n}. \quad (61)$$

Здесь используется соответствие $f_{kt} \leftrightarrow v_{KT}$, $f \leftrightarrow v_{low}$, $s \leftrightarrow v_{sat}$ и $n \leftrightarrow \beta_T$. Производная функции $f_{kt}$ имеет вид:

$$f'_{kt} = \left(f' + \frac{(s - f)kn\, y_1^{n-1}}{y_1^n + t^n}\right)\frac{t^n}{y_1^n + t^n}. \quad (62)$$

Здесь $f$ соответствует низкополевой части полевой зависимости дрейфовой скорости электронов и может принимать значения $f_1$, $f_2$ и $f_3$.

На Рисунке 8 (а) представлена полевая зависимость дрейфовой скорости электронов с низкополевой частью $v_{low\,1}$ (традиционная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с, что соответствует собственному нитриду галлия. На Рисунке 8 (б) представлена полевая зависимость дифференциальной подвижности $dv_{KT}/dE$ с $v_{low\,1}$.

Видно, что традиционная модель даёт заниженное значение дифференциальной подвижности в слабых полях.

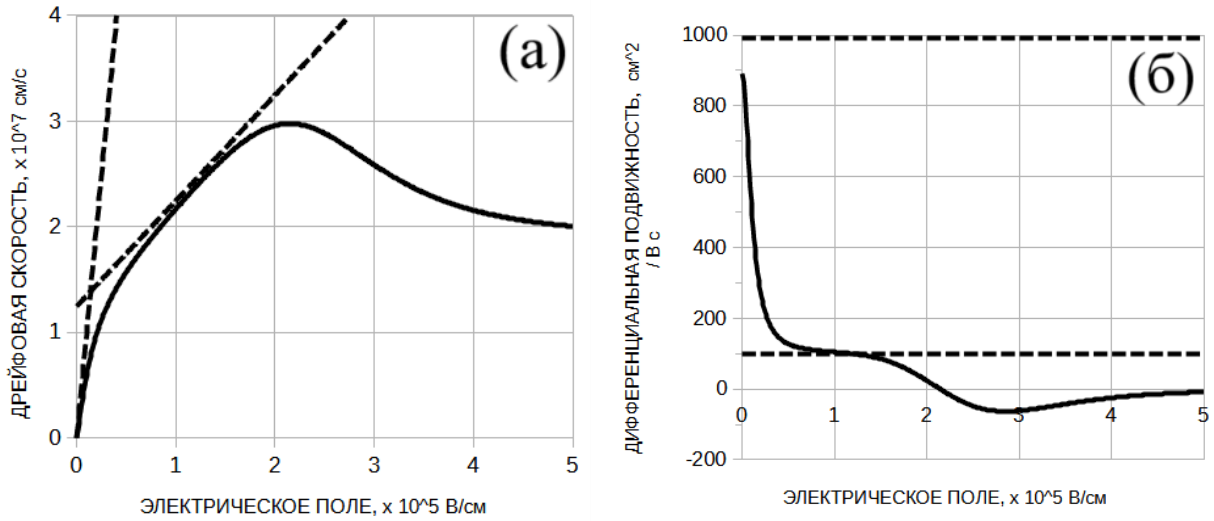



Рисунок 8 — (а) полевая зависимость дрейфовой скорости электронов (традиционная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с, что соответствует собственному нитриду галлия. Наклонные пунктиры представляют асимптоты $v_{LIN1}$ и $v_{LIN2}$. (б) соответствующая полевая зависимость дифференциальной подвижности. Верхний пунктир - уровень $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и нижний пунктир – уровень $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с

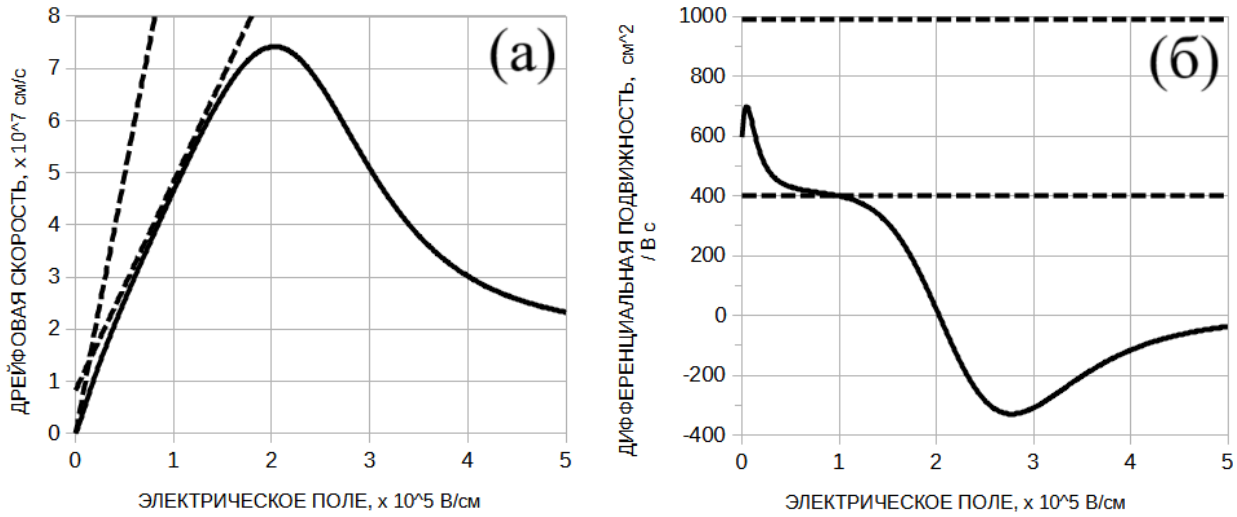



Рисунок 9 — (а) полевая зависимость дрейфовой скорости электронов (традиционная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с (завышенное значение). Наклонные пунктиры представляют асимптоты $v_{LIN1}$ и $v_{LIN2}$. (б) соответствующая полевая зависимость дифференциальной подвижности. Верхний пунктир - уровень $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и нижний пунктир – уровень $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с (завышенное значение).

На Рисунке 9 (а) представлена полевая зависимость дрейфовой скорости электронов с низкополевой частью $v_{low\,1}$ (традиционная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и с завышенным значением $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с, что соответствует гипотетическому проводнику, на примере которого более остро проявляются достоинства и недостатки исследуемых моделей.

На Рисунке 9 (б) представлена полевая зависимость дифференциальной подвижности $dv_{KT}/dE$ с $v_{low\,1}$. При $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с ещё лучше видно, что

традиционная модель даёт заниженное значение дифференциальной подвижности в слабых полях.

На Рисунке 10 (а) представлена полевая зависимость дрейфовой скорости электронов с низкополевой частью $v_{low\,2}$ (модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с, что соответствует собственному нитриду галлия. На Рисунке 10 (б) представлена полевая зависимость дифференциальной подвижности $dv_{KT}/dE$ с $v_{low\,2}$. Видно, что модифицированная модель корректно описывает нитрид галлия при используемых типовых параметрах.

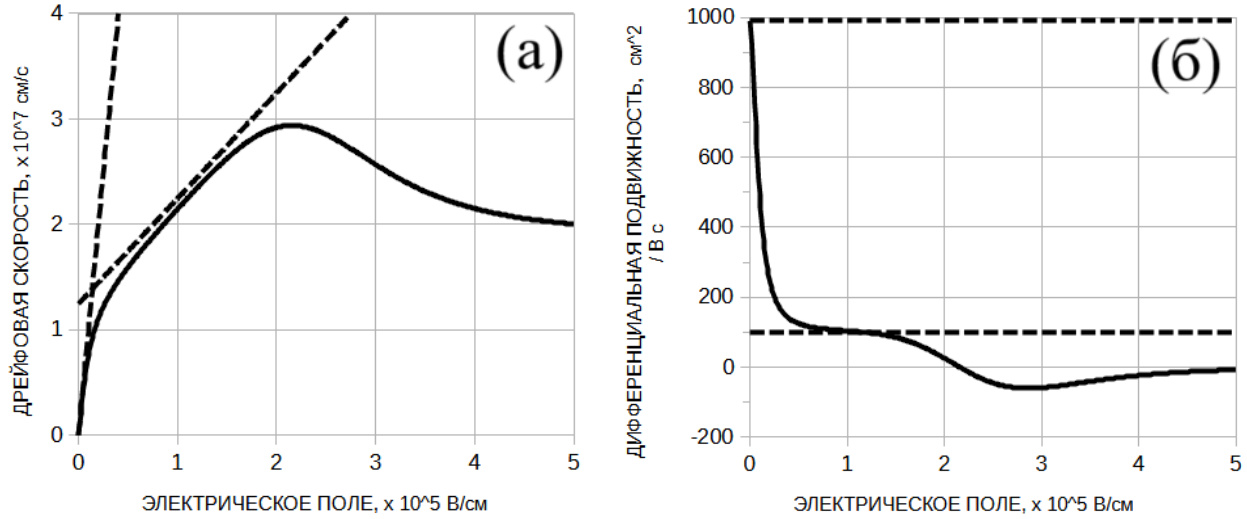



Рисунок 10 — (а) полевая зависимость дрейфовой скорости электронов (модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с, что соответствует собственному нитриду галлия. Наклонные пунктиры представляют асимптоты $v_{LIN1}$ и $v_{LIN2}$. (б) соответствующая полевая зависимость дифференциальной подвижности. Верхний пунктир - уровень $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и нижний пунктир – уровень $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с.

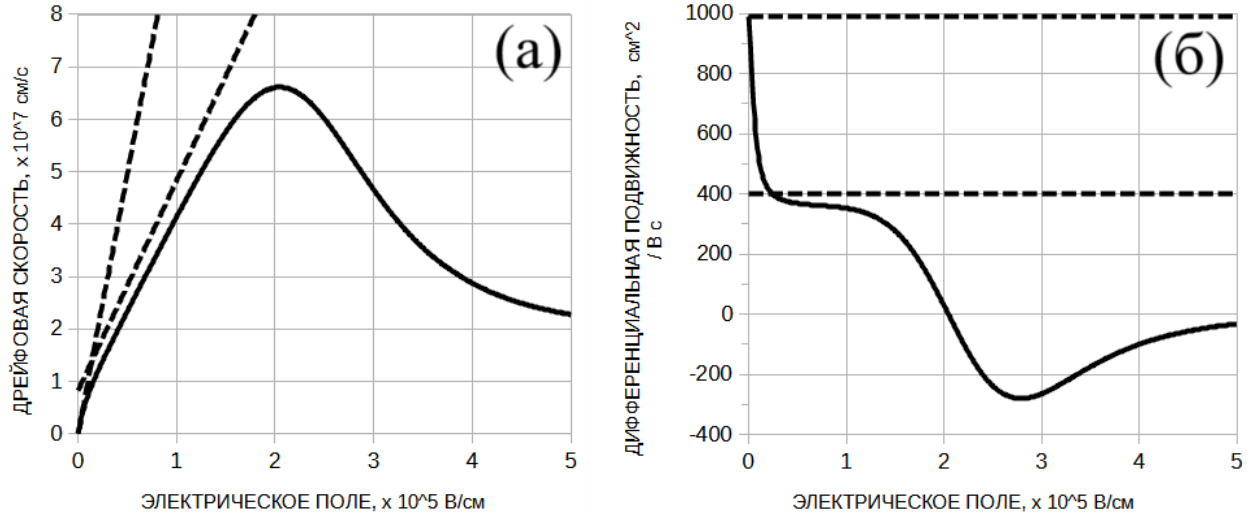



Рисунок 11 — (а) полевая зависимость дрейфовой скорости электронов (модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с (завышенное значение). Наклонные пунктиры представляют асимптоты $v_{LIN1}$ и $v_{LIN2}$. (б) соответствующая полевая зависимость дифференциальной подвижности. Верхний пунктир - уровень $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и нижний пунктир – уровень $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с (завышенное значение).

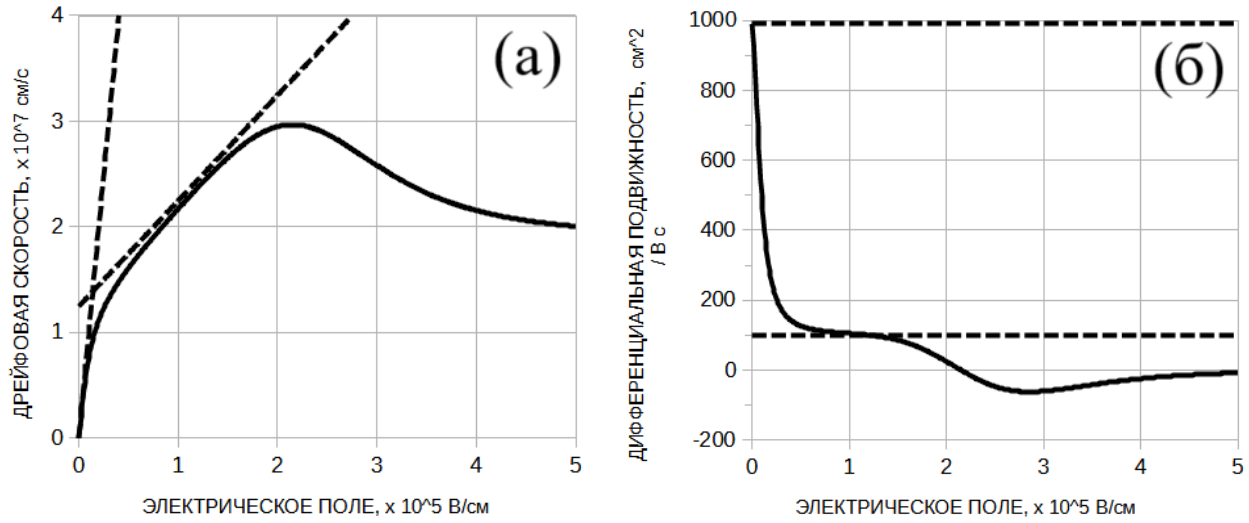



Рисунок 12 — (а) полевая зависимость дрейфовой скорости электронов (улучшенная модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с, что соответствует собственному нитриду галлия. Наклонные пунктиры представляют асимптоты $v_{LIN1}$ и $v_{LIN2}$. (б) соответствующая полевая зависимость дифференциальной подвижности. Верхний пунктир - уровень $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и нижний пунктир – уровень $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с.

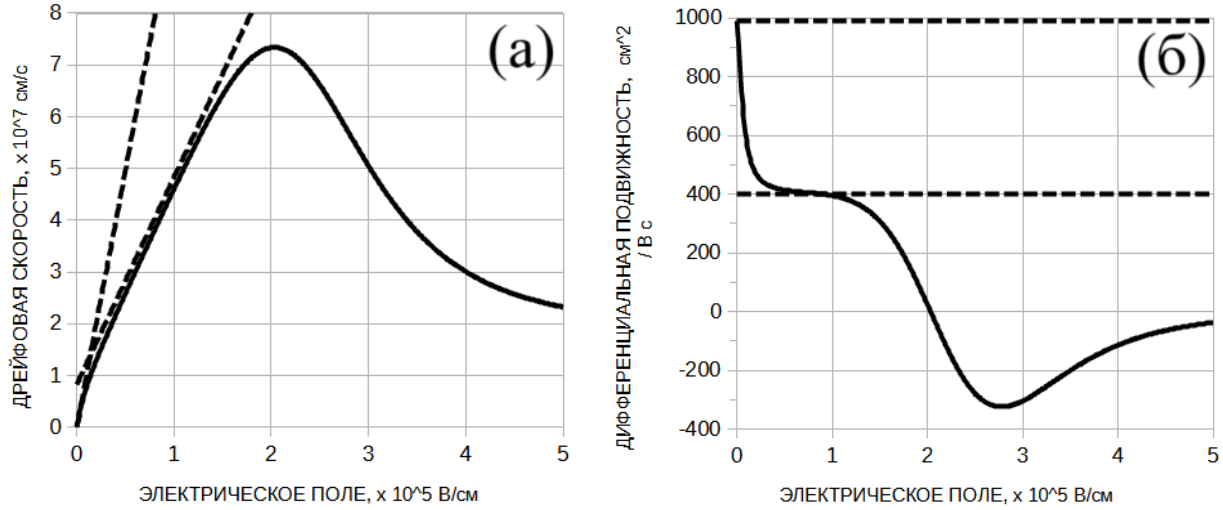



Рисунок 13 — (а) полевая зависимость дрейфовой скорости электронов (улучшенная модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с (завышенное значение). Наклонные пунктиры представляют асимптоты $v_{LIN1}$ и $v_{LIN2}$. (б) соответствующая полевая зависимость дифференциальной подвижности. Верхний пунктир - уровень $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и нижний пунктир – уровень $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с (завышенное значение).

На Рисунке 11 (а) представлена полевая зависимость дрейфовой скорости электронов с низкополевой частью $v_{low\,2}$ (модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и с завышенным значением $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с, что соответствует гипотетическому проводнику, на примере которого более остро проявляются достоинства и недостатки исследуемых моделей. На Рисунке 11 (б) представлена полевая зависимость дифференциальной подвижности $dv_{KT}/dE$ с $v_{low\,2}$. Видно, что модифицированная модель даёт правильное значение дифференциальной подвижности в слабых полях. Но, при завышенном значении $\mu_{high}$, видно, что в области полей, превышающих поле излома $E_K$, модифицированная модель выходит на асимптотику с заниженным значением дифференциальной подвижности.

На Рисунке 12 (а) представлена полевая зависимость дрейфовой скорости электронов с низкополевой частью $v_{low\,3}$ (улучшенная модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и $\mu_{high} = 100$ см$^2$/В·с, что соответствует собственному нитриду галлия. На Рисунке 12 (б) представлена полевая зависимость дифференциальной подвижности $dv_{KT}/dE$ с $v_{low\,3}$. Видно, что улучшенная модифицированная модель корректно описывает нитрид галлия при используемых типовых параметрах.

На Рисунке 13 (а) представлена полевая зависимость дрейфовой скорости электронов с низкополевой частью $v_{low\,3}$ (улучшенная модифицированная модель) с $\mu_{low} = 990$ см$^2$/В·с и с завышенным значением $\mu_{high} = 400$ см$^2$/В·с, что соответствует гипотетическому проводнику, на примере которого более остро проявляются достоинства и недостатки исследуемых моделей. На Рисунке 13 (б) представлена полевая зависимость дифференциальной подвижности $dv_{KT}/dE$ с $v_{low\,3}$. Видно, что улучшенная модифицированная модель даёт правильное значение дифференциальной подвижности во всех диапазонах полей и при завышенном значении параметра $\mu_{high}$.

**4. Заключение**

Разработана и проанализирована улучшенная аппроксимация для полевой зависимости дрейфовой скорости электронов в нитриде галлия, предназначенная для использования в программах приборно-технологического моделирования типа TCAD. Предложенная модель учитывает изменение доминирующего механизма рассеяния электронов в относительно слабых полях, что приводит к понижению дифференциальной подвижности со значения $\mu_{low}$ до значения $\mu_{high}$. Модель учитывает переход электронов, стимулированных достаточно сильным электрическим полем, из низкоэнергетической долины, в которой их подвижность относительно велика, в высокоэнергетические долины с меньшими значениями подвижностей носителей, что приводит к появлению на полевой зависимости дрейфовой скорости электронов участка с отрицательной дифференциальной подвижностью. Предложенная улучшенная модель базируется на ранее предложенной в [1] модифицированной модели для полевой зависимости дрейфовой скорости электронов в нитриде галлия. Модифицированная модель вполне приемлема для моделирования нитрида галлия, но, анализ показывает, что при использовании для моделирования других полупроводников с изломом на полевой зависимости дрейфовой скорости электронов и с относительно высокой дифференциальной подвижностью $\mu_{high}$ при таких полях, модифицированная модель может выходит на асимптотику с заниженным, в сравнении с $\mu_{high}$, значением дифференциальной подвижности. Нами показано, что улучшенная модифицированная модель даёт правильное значение дифференциальной подвижности во всех диапазонах полей и при всех значениях параметра $\mu_{high}$. Предложенная улучшенная модифицированная модель может быть использована как основа для построения аппроксимационных формул, описывающих полевую зависимость дрейфовой скорости электронов и в других полупроводниках с изменением доминирующего механизма рассеяния электронов в относительно слабых полях и с эффектом переноса электронов в высокоэнергетические долины с меньшими значениями подвижностей носителей (например, $Al_x Ga_{1-x} N$ и $In_x Ga_{1-x} N$).

## Список источников

1. Turin, V. O. A modified transferred-electron high-field mobility model for GaN devices simulation / V. O. Turin // Solid-State Electronics. – 2005. – Т. 49, № 10. – С. 1678–1682.

2. Зи С. Физика полупроводниковых приборов / С. Зи. – Москва : Мир, 1984. - Т.1. - 456 с.; Т.2. - 456 с.

3. Electron and hole drift velocity measurements in silicon and their empirical relation to electric field and temperature / C. Canali, G. Majni, R. Minder, G. Ottaviani // IEEE Transactions on Electron Devices. – 1975. – Т. 22, № 11. – С. 1045-1047.

4. Ridley, B. K. The possibility of negative resistance effect in semiconductors / B. K. Ridley, T. B. Watkins // Proceedings of the Physical Society. – 1961. – № 78. – С. 293–304.

5. Selberherr, S. Analysis and simulation of semiconductor devices / S. Selberherr. – Wien, New York: Springer Verlag, 1984. – 310 с.

6. Mansour, N. S. Theoretical study of electron transport in gallium nitride / N. S. Mansour, K. W. Kim, M. A. Littlejohn // Journal of Applied Physics. – 1995. – Т. 77, № 6. – С. 2834–2836.

7. The correct account of nonzero differential conductance in the saturation regime in the MOSFET compact model / V. Turin, G. Zebrev, S. Makarov [и др.] // The International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. – 2014. – № 27. – С. 863-874.

## References

1. Turin V. O. A modified transferred-electron high-field mobility model for GaN devices simulation, Solid-State Electronics. 2005; 49(10): 1678-1682. https://doi.org/10.1016/j.sse.2005.09.002.

2. Sze S. M. Physics of Semiconductor Devices. New York: John Wiley and Sons; 1981. 868 p.

3. Canali C., Majni G., Minder R., and Ottaviani G. Electron and hole drift velocity measurements in silicon and their empirical relation to electric field and temperature. IEEE Transactions on Electron Devices. 1975; 22(11): 1045-1047. doi: 10.1109/T-ED.1975.18267.

4. Ridley B. K., Watkins T. B. The Possibility of Negative Resistance Effects in Semiconductors. Proceedings of the Physical Society. 1961; 78: 293–304. DOI 10.1088/0370-1328/78/2/315

5. Selberherr S. Analysis and Simulations of Semiconductor Devices. Wien, New York: Springer; 1984. 310 p.

6. Mansour N. S., Kim K. W., Littlejohn M. A. Theoretical study of electron transport in gallium nitride. Journal of Applied Physics. 1995; 77(6): 2834–2836. https://doi.org/10.1063/1.358696

7. Turin V., Zebrev G., Makarov S., Iñiguez B., and Shur, M. The correct account of nonzero differential conductance in the saturation regime in the MOSFET compact model. The International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. 2014; 27: 863-874. https://doi.org/10.1002/jnm.1969.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 366-374.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 366-374.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 519.22

# ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОБЪЁМОВ ОБОРОТА РОЗНИЧНОЙ ТОРГОВЛИ, ПОДВЕРЖЕННЫХ СЕЗОННЫМ КОЛЕБАНИЯМ

***Инна Фёдоровна Курбыко***[1]✉
[1]*Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых, Владимир, Россия,*
[1]*levizov@rambler.ru*✉

***Аннотация.*** *В настоящей работе изучается динамика объёмов оборота розничной торговли, представленная временным рядом. Установлено наличие сезонных колебаний уровней ряда. Построены тренд-сезонные аддитивные модели с участием различных трендов. Дана оценка точности моделей прогнозирования.*

***Ключевые слова****: временной ряд, тренд, сезонная компонента, модель прогнозирования, оборот розничной торговли.*

Conference paper

# FORECASTING OF RETAIL TRADE TURN-OVER VOLUMES SUBJECT TO SEASONAL FLUCTUATIONS

***Inna F. Kurbyko***[1]✉
[1]*Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletov, Vladimir, Russia*
[1]*levizov@rambler.ru*✉

***Abstract.*** *In this paper we study the retail trade turn-over volumes dynamics represented by time series. The presence of seasonality in the dynamics of the series levels is proved. Trend-seasonal additive models with different trends are constructed. The accuracy estimation of the forecasting models is made.*

***Keywords:*** *time series, trend, seasonal component, forecasting model, retail trade turn-over.*

© Курбыко И. Ф., 2024

## 1. Введение

В современных условиях цифровизации экономики для её успешного развития необходимо принятие управленческих решений на основе научного анализа обширного потока информации.

Эффективное функционирование предприятий, банков, туристского бизнеса, страховых компаний и других организаций нуждается в надёжности и достоверности прогнозов. Какие тенденции прослеживаются в динамике макроэкономических показателей? Какие ценные бумаги принесут наибольший доход? Как оценить возможные риски при вложении инвестиций? Какой наиболее вероятный прогноз состояния отечественных рынков? Ответы на эти и аналогичные вопросы могут быть получены с помощью методов прикладной математической статистики.

Отечественная научная литература располагает большим количеством работ, посвящённых математическому моделированию динамики показателей экономического развития страны и регионов, представленных временными рядами (в частности, см. [1]-[3] и имеющийся там список источников). Принято выделять следующие основные этапы исследования одномерных временных рядов: графическая иллюстрация и описание поведения ряда; исследование структуры временного ряда и выделение его закономерных составляющих (тренда, сезонных или циклических компонент); преобразование временного ряда средствами сглаживания; построение и оценка качества математической модели процесса, представленного временным рядом; прогнозирование будущего развития случайного процесса в случае, если получены удовлетворительные оценки точности и статистической достоверности модели. В настоящей работе проиллюстрирована основными формулами реализация этих этапов на фоне решения задачи статистического анализа показателя динамики оборота розничной торговли во Владимирской области. С целью построения сценариев точечного и интервального прогноза показателя на ближайшие годы были отобраны тренд-сезонные модели, лучшие по качеству и точности аппроксимации исходных данных. Расчеты выполнены с помощью инструментов пакета прикладных программ по математической статистике в среде Microsoft Excel**.**

## 2. Основной текст статьи

На основе данных Федеральной службы государственной статистики [4] был сформирован временной ряд $\{Y(t), t = 1,...,96\}$ показателя ежемесячных объёмов оборота розничной торговли, в млн. рублей, по Владимирской области за 8 лет с 2015 года по 2022 год. График данного временного ряда представлен на рисунке 1 ниже. Здесь переменная *t* обозначает условный показатель времени. В частности, при $t = 1$ получаем $Y(1)$ – значение показателя за январь 2015 года, при $t = 2$ имеем $Y(2)$ – показатель за февраль 2015 года, при $t = 12$ имеем $Y(12)$ – показатель за декабрь 2015 года и т.д., наконец, $Y(96)$ – значение показателя за декабрь 2022 года. Визуальный анализ рисунка 1 позволяет сказать, что ряд $\{Y(t), t = 1,...,96\}$ содержит трендовую составляющую, определяющую

возрастающую тенденцию изменения объёмов оборота розничной торговли, и регулярные сезонные колебания, не позволяющие выстраиваться уровням ряда вдоль определённой гладкой траектории. Причём, амплитуда колебаний практически не изменяется на протяжении всего участка измерений исследуемого показателя.

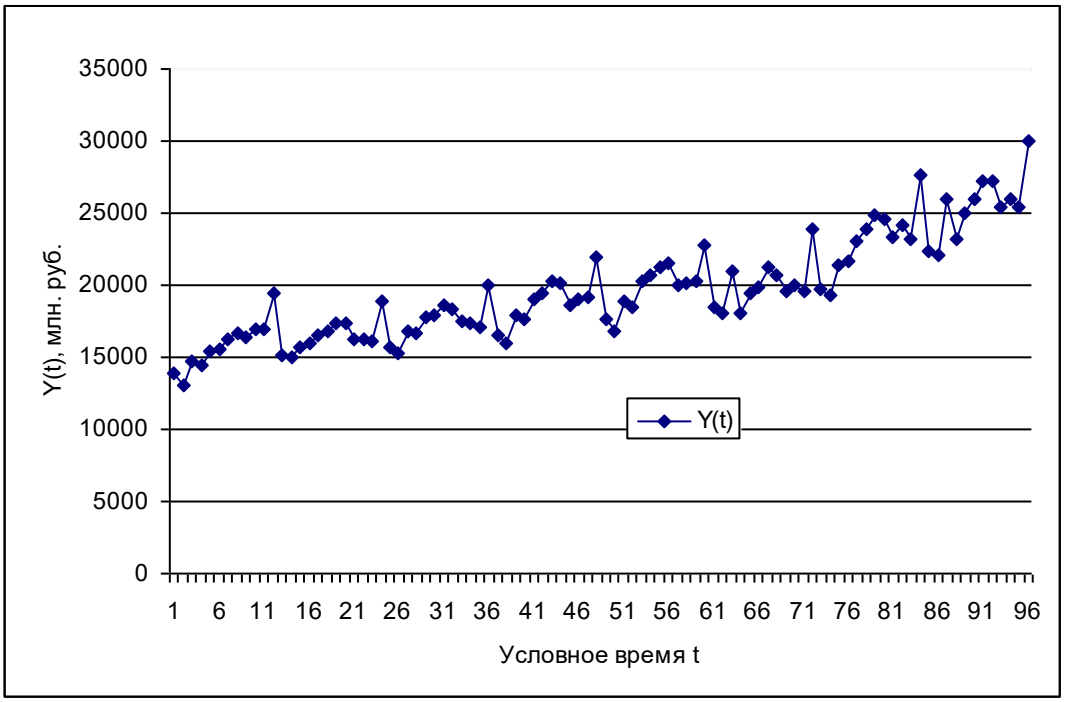



Рисунок 1 – График временного ряда оборота розничной торговли Y(t).

На рисунке 2 показан график автокорреляционной функции (АКФ) изучаемого временного ряда. На графике (АКФ) выделяется высокая статистически значимая величина коэффициента автокорреляции 12-го порядка: $r_{авт}(12) = 0{,}938$, что подтверждает наличие сезонных колебаний с периодом в 12 месяцев.

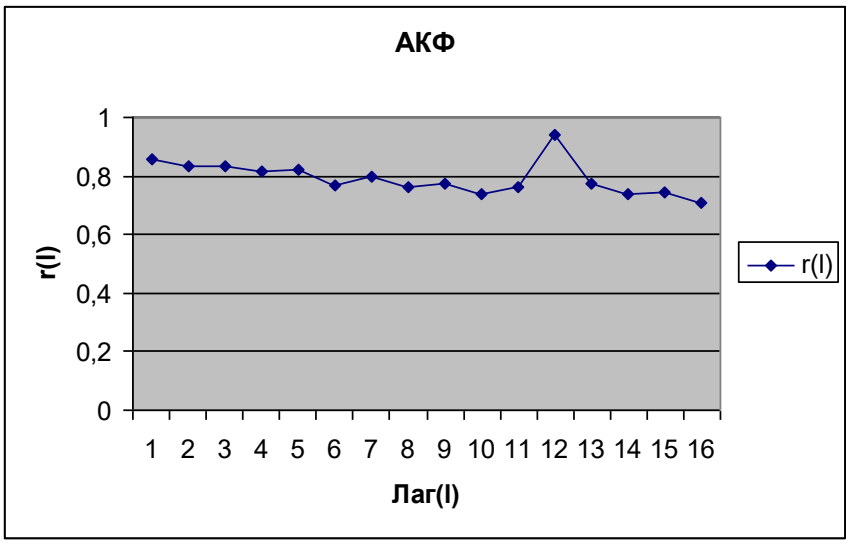



Рисунок 2 – График автокорреляционной функции.

Исходя из графического анализа и расчёта (АКФ), автором принята гипотеза о следующей структуре временного ряда:

$\{Y(t) = T(t) + S(t) + E(t), t = 1,2,...,96\}$, где $\{T(t), t = 1,2,...,96\}$ – трендовая компонента, то есть тренд; $\{S(t), t = 1,2,...,96\}$ – сезонная составляющая; $\{E(t), t = 1,2,...,96\}$ – случайная компонента. Далее задача состояла в построении тренд-сезонных моделей прогнозирования уровней исходного ряда с аддитивным участием сезонной компоненты и тренда. Автором разработан и реализован алгоритм расчёта данных моделей, содержащий следующие этапы обработки данных.

**I.** Сглаживание временного ряда $\{Y(t), t = 1,2,...,96\}$ процедурой вычисления центрированной скользящей средней с длиной интервала сглаживания $l = 12$, с числом лет $m = 8$, количеством уровней ряда $n = 96$ и периодом колебаний $T_0 = 12$ на основании формулы:

$$Y_{ск.ср.12}(t) = \frac{\frac{1}{2}Y(t-6) + Y(t-5) + ... + Y(t-1) + Y(t) + Y(t+1) + ... + Y(t+5) + \frac{1}{2}Y(t+6)}{12},$$

где условное время принимает значения: $[t = 7,8,...,90]$.

**II.** Вычисление уровней временного ряда остатков в виде: $e(t) = Y(t) - Y_{ск.ср.}(t)$ с учётом присутствия аддитивной сезонности, ограничиваясь значениями центрированной скользящей средней за целое число лет, то есть для $[t = 13,14,...,84]$.

**III.** Обоснование наличия в ряду периодических колебаний на основе дисперсионного анализа с использованием F-критерия.

**IV.** Усреднение уровней $e(t)$ для одноимённых месяцев с целью элиминирования влияния случайной составляющей: $[\bar{e}_\tau, \tau = 1,2,...,12]$.

**V.** Расчёт сезонной волны, то есть корректировка помесячных средних значений: $[S\tau = \bar{e}_\tau - \bar{e}, \tau = 1,2,...,12]$, где $\bar{e}$ есть общая средняя ряда $\{e(t)\}$.

**VI.** На основе сезонной волны выстраивание уровней сезонной компоненты: $\{S(t), t = 1,2,...,96\}$, повторяющихся через каждые 12 моментов условного времени.

**VII.** Десезонализация уровней исходного ряда $Y(t)$, то есть удаление из начальных уровней исходных данных соответствующих значений сезонной компоненты: $\{T(t) = Y(t) - S(t), t = 1,....,96\}$.

**VIII.** Построение трендовых моделей $\widetilde{T}(t)$ (линейной, экспоненциальной, полиномиальных степени 2 и степени 3) временного ряда $\{T(t), t = 1,....,96\}$ и оценка качества моделей с помощью инструментов статистического пакета программ MS Excel.

**IX.** Представление исходного ряда тренд-сезонными аддитивными моделями: $Y(t) = \widetilde{T}(t) + S(t) + E(t)$ и расчёт моделируемых значений $[\widetilde{Y}(96+k) = \widetilde{T}(96+k) + S(96+k); k = 1,2,...,36]$, представляющих сценарии точечного прогноза показателя на ближайшие 3 года.

**X.** Вычисление средней по модулю относительной ошибки моделирования, исходя из фактических данных $[Y(96+\tau), \tau = 1,2,...,12]$ за 12 месяцев 2023 года: $Eотн. = \frac{1}{12}\sum_{\tau=1}^{12}\frac{\left|(\widetilde{Y}(96+\tau) - Y(96+\tau))\right|}{Y(96+\tau)} \cdot 100(\%)$. Далее, в целях прогнозирования, выбор наилучшей по точности модели, то есть модели с наименьшей ошибкой $Eотн.$

**XI.** Построение по наилучшей модели точечного и с доверительной вероятностью 0,95 интервального прогноза ежемесячных объёмов оборота розничной торговли на 2024-2025 годы.

**XII.** Анализ и иллюстрация результатов моделирования.

Таким образом, следуя алгоритму, приведённому выше, был выполнен расчёт следующих моделей динамики временного ряда $\{Y(t)\}$:

$$\widetilde{Y}(t) = 14860,0 \cdot e^{0,0055t} + S(t) \quad (1)$$

$$\widetilde{Y}(t) = 108,99t + 14330 + S(t) \quad (2)$$

$$\widetilde{Y}(t) = 0,938t^2 + 18,007t + 15816 + S(t) \quad (3)$$

$$\widetilde{Y}(t) = 0,0204t^3 - 2,023t^2 + 133,49t + 14859 + S(t) \quad (4)$$

Статистическая достоверность (адекватность) моделей трендовых компонент $\widetilde{T}(t)$, участвующих в уравнениях (1)-(4) и описывающих возможную тенденцию динамики показателя, проверена по статистике Фишера [1, с. 268] на весьма близком к нулю уровне значимости нулевой гипотезы «$R^2 = 0$», при этом для всех моделей тренда, коэффициент детерминации $R^2 > 0,9$.

Сезонную компоненту в течение одного года иллюстрирует рисунок 3.

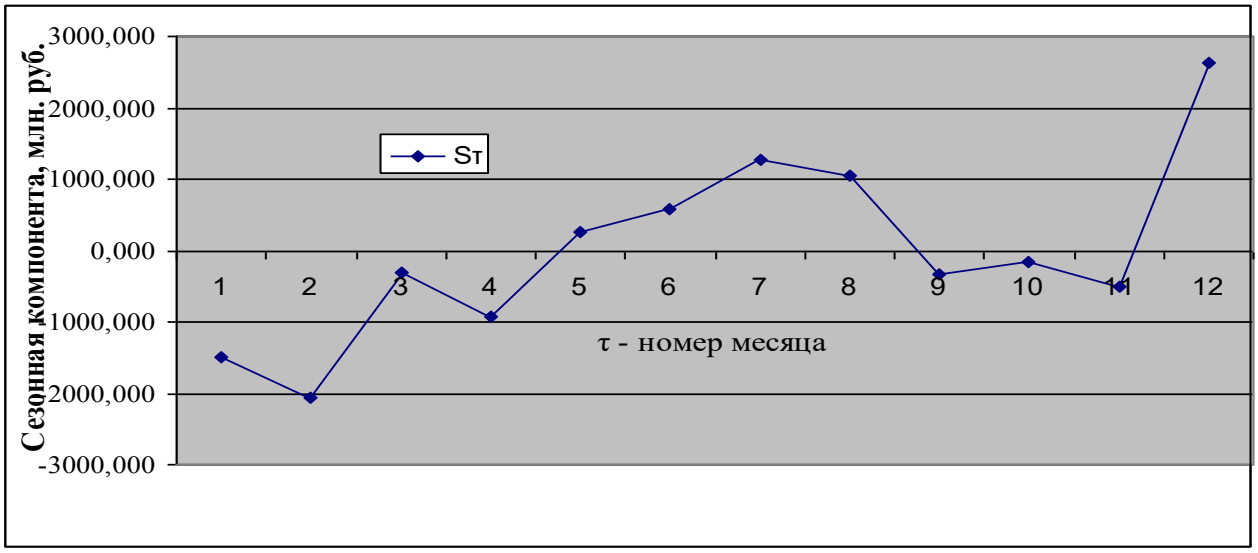



Рисунок 3 – График сезонной волны.

Отметим, что фактические значения показателя за 2023 год не входили в обработку данных на этапах работы I-IX. В качестве критерия точности прогнозирования выбрана средняя по модулю ошибка $Eотн.$, по отношению к 12 известным на тот момент времени, уровням ряда 2023 года. Расчётные значения ошибки по моделям (1)-(4) указаны в таблице 1.

Таблица 1 – Оценка точности прогнозирования.

| $Eотн.(1)$ | $Eотн.(2)$ | $Eотн.(3)$ | $Eотн.(4)$ |
|---|---|---|---|
| 2,550 % | 4,573 % | 2,210 % | 7,522 % |

Таким образом, прогноз на 2023 год оказался точнее всего по модели (3) с трендовой составляющей в виде полинома второй степени. На основе уравнений (1)-(4) вычислены моделируемые значения $\{\widetilde{Y}(t), t = 97,98,...,120)$, представленные

в таблице 2 ниже, которые демонстрируют 4 варианта прогноза объёмов оборота розничной торговли в 2023-2025 году.

Таблица 2 – Прогноз объёмов оборота розничной торговли на 2023-2025 годы.

| Год | Месяц | Расчёт по тренд-сезонным моделям, млн. руб. | | | | Факт. знач. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | (1) | (2) | (3) | (4) | |
| 2023 | Январь | 23846,4 | 23413,7 | 24900,0 | 25903,4 | 24665,7 |
| | Февраль | 23411,9 | 22948,6 | 24526,8 | 25650,0 | 23576,2 |
| | Март | 25305,9 | 24811,0 | 26483,1 | 27732,2 | 25601,6 |
| | Апрель | 24832,0 | 24304,9 | 26072,6 | 27453,9 | 25816,2 |
| | Май | 26147,2 | 25587,0 | 27452,2 | 28972,0 | 26857,8 |
| | Июнь | 26626,3 | 26032,3 | 27997,0 | 29661,6 | 27371,8 |
| | Июль | 27460,0 | 26831,3 | 28897,3 | 30713,4 | 28454,1 |
| | Август | 27368,8 | 26704,7 | 28873,9 | 30848,1 | 28932,5 |
| | Сентябрь | 26149,4 | 25449,1 | 27723,4 | 29862,6 | 28126,1 |
| | Октябрь | 26457,4 | 25720,1 | 28101,3 | 30412,4 | 28470,5 |
| | Ноябрь | 26248,7 | 25473,5 | 27963,5 | 30453,6 | 27842,7 |
| | Декабрь | 29555,2 | 28741,4 | 31342,1 | 34018,3 | 32239,1 |
| 2024 | Январь | 25574,9 | 24721,6 | 27434,8 | 30304,4 | - |
| | Февраль | 25150,0 | 24256,5 | 27084,1 | 30154,6 | - |
| | Март | 27053,5 | 26118,9 | 29062,9 | 32341,7 | - |
| | Апрель | 26589,3 | 25612,8 | 28675,0 | 32169,8 | - |
| | Май | 27914,1 | 26894,8 | 30077,1 | 33795,8 | - |
| | Июнь | 28403,0 | 27340,2 | 30644,4 | 34594,8 | - |
| | Июль | 29246,4 | 28139,2 | 31567,2 | 35757,3 | - |
| | Август | 29165,1 | 28012,6 | 31566,3 | 36004,4 | - |
| | Сентябрь | 27955,7 | 26757,0 | 30438,3 | 35132,6 | - |
| | Октябрь | 28273,7 | 27028,0 | 30838,7 | 35797,6 | - |
| | Ноябрь | 28074,9 | 26781,4 | 30723,5 | 35955,5 | - |
| | Декабрь | 31391,5 | 30049,3 | 34124,6 | 39638,3 | - |
| 2025 | Январь | 27421,3 | 26029,5 | 30239,8 | 36044,1 | - |
| | Февраль | 27006,6 | 25564,3 | 29911,6 | 36015,3 | - |
| | Март | 28920,4 | 27426,8 | 31912,9 | 38325,0 | - |
| | Апрель | 28466,4 | 26920,7 | 31547,5 | 38277,1 | - |
| | Май | 29801,6 | 28202,7 | 32972,1 | 40028,6 | - |
| | Июнь | 30300,9 | 28648,1 | 33561,9 | 40954,6 | - |
| | Июль | 31154,8 | 29447,0 | 34507,2 | 42245,6 | - |
| | Август | 31084,0 | 29320,4 | 34528,8 | 42622,5 | - |
| | Сентябрь | 29885,2 | 28064,9 | 33423,3 | 41882,1 | - |
| | Октябрь | 30213,8 | 28335,9 | 33846,3 | 42680,0 | - |
| | Ноябрь | 30025,8 | 28089,3 | 33753,5 | 42972,2 | - |
| | Декабрь | 33353,1 | 31357,2 | 37177,2 | 46790,8 | - |

Исходя из столбцов расчётных значений таблицы 2, можно назвать оптимистическими сценарии прогноза по моделям (1)-(4) с участием трендов, экспоненциального и полиномиального степени 3, соответственно. Прогноз по модели с компонентой параболического тренда (3) назовём умеренным, прогноз по модели (2) с линейным трендом – пессимистическим.

По уравнению модели $\widetilde{Y}(t) = 0{,}938t^2 + 18{,}007t + 15816 + S(t)$ построен интервальный прогноз на ближайшие годы с доверительной вероятностью 0,95, представленный в таблице 3 и проиллюстрированный ниже на рисунке 4.

Таблица 3 – Интервальный прогноз на 2023-2025 годы.

| Год | Месяц | 95%-ный доверительный интервал прогноза | |
|---|---|---|---|
| | | Нижняя граница $Y_{прогн} - \Delta$, млн.руб. | Верхняя граница $Y_{прогн} + \Delta$, млн.руб. |
| 2023 | Январь | 23391,4 | 26408,6 |
| | Февраль | 23017,2 | 26036,3 |
| | Март | 24972,5 | 27993,6 |
| | Апрель | 24561,1 | 27584,1 |
| | Май | 25939,7 | 28964,8 |
| | Июнь | 26483,4 | 29510,6 |
| | Июль | 27382,6 | 30411,9 |
| | Август | 27358,1 | 30389,6 |
| | Сентябрь | 26206,6 | 29240,2 |
| | Октябрь | 26583,4 | 29619,2 |
| | Ноябрь | 26444,5 | 29482,6 |
| | Декабрь | 29821,9 | 32862,3 |
| 2024 | Январь | 25913,5 | 28956,2 |
| | Февраль | 25561,6 | 28606,7 |
| | Март | 27539,1 | 30586,7 |
| | Апрель | 27150,0 | 30199,9 |
| | Май | 28550,9 | 31603,3 |
| | Июнь | 29116,9 | 32171,9 |
| | Июль | 30038,4 | 33095,9 |
| | Август | 30036,2 | 33096,3 |
| | Сентябрь | 28906,9 | 31969,7 |
| | Октябрь | 29306,0 | 32371,4 |
| | Ноябрь | 29189,4 | 32257,5 |
| | Декабрь | 32589,1 | 35660,0 |
| 2025 | Январь | 28703,0 | 31776,6 |
| | Февраль | 28373,4 | 31449,8 |
| | Март | 30373,2 | 33452,6 |
| | Апрель | 30006,4 | 33088,6 |
| | Май | 31429,5 | 34514,7 |
| | Июнь | 32017,8 | 35105,9 |
| | Июль | 32961,7 | 36052,7 |
| | Август | 32981,8 | 36075,9 |
| | Сентябрь | 31874,8 | 34971,9 |
| | Октябрь | 32296,2 | 35396,4 |
| | Ноябрь | 32201,9 | 35305,2 |
| | Декабрь | 35623,9 | 38730,4 |

При вычислении верхней и нижней границ доверительного интервала размах прогноза $\Delta$ находился в моменты времени $t_{прогн} = 97,98,...,132$ согласно формуле:

$$\Delta(t_{прогн}) = S_e t_\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(t_{прогн} - \bar{t})^2}{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}}, \quad \text{где} \quad S_e = \sqrt{\frac{1}{n-3}\sum_{t=1}^{n}(Y(t) - \widetilde{Y}(t))^2} = 1679{,}36 \quad -$$

стандартная ошибка моделирования; $n = 96$ – число уровней исходного ряда; $\bar{t}$ – среднее значение диапазона параметра времени; $t_\alpha = 1{,}987$ – табличное значение t-критерия на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

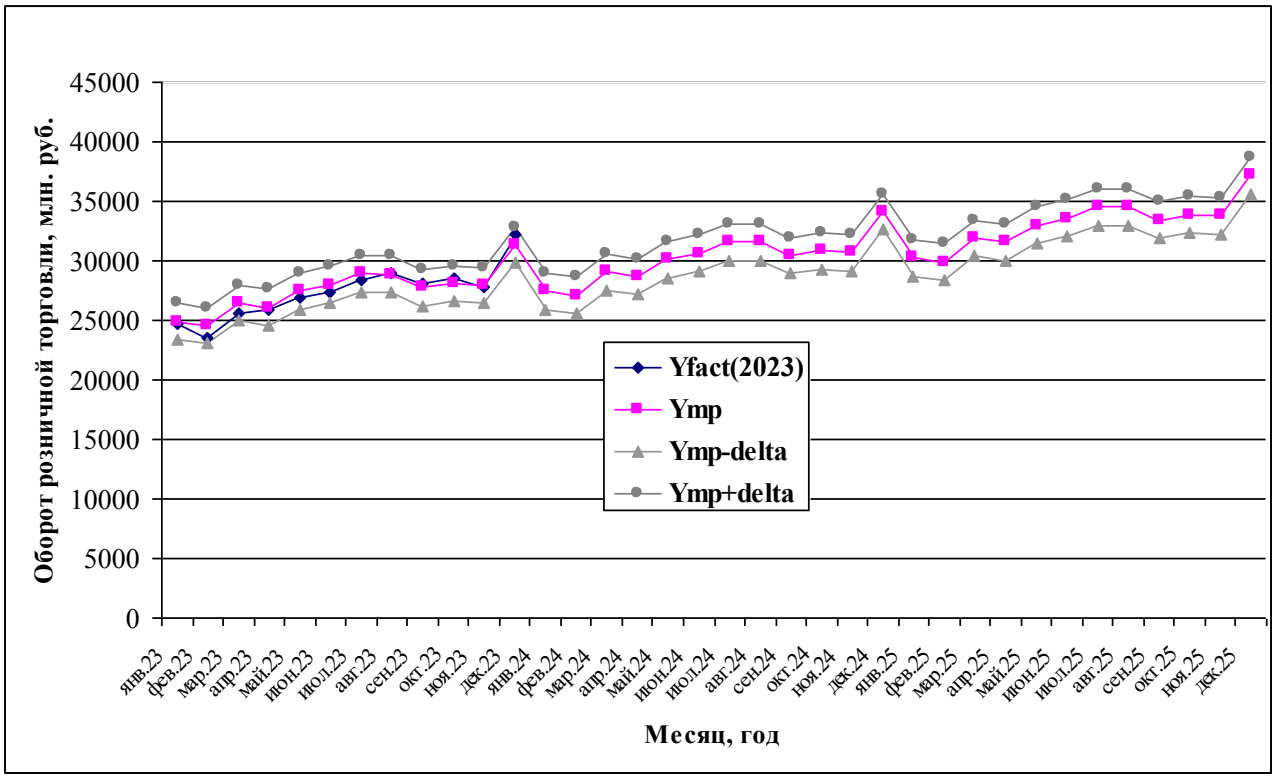



Рисунок 4 – Результаты прогнозирования.

## 3. Заключение

Результаты моделирования показали, что в целях прогнозирования объемов оборота розничной торговли целесообразно использовать тренд-сезонную аддитивную модель (3) с участием параболического тренда и сезонной компоненты с периодом в 12 месяцев. Трендовая составляющая такой модели демонстрирует тенденцию роста показателя с линейной скоростью и постоянным ускорением, которые корректируются с каждым месяцем сезонными коэффициентами. Расчет прогноза по данной модели предполагает рост общего объёма оборота розничной торговли в 2024 году на 18,51% по сравнению с фактическими данными за 2023 год, а в 2025 году – на 9,70% по отношению к моделируемым значениям за 2024 год.

На следующем этапе работы автором предполагается построение моделей прогнозирования некоторых экономических показателей на основе алгоритма адаптивной методики [2, с. 150], позволяющей учитывать с большим весом свежие уровни ряда и пересчитывать параметры тренда и сезонной составляющей модели по мере продвижения к последнему участку наблюдений, в соответствии с фактически измеренными данными.

## Список источников

1. Кулаичев А.П. Методы и средства комплексного статистического анализа данных: учеб. пособие. М.: ИНФРА-М. 2022. – 484 с.

2. Курбыко И.Ф. Прогнозирование динамики социально-экономического развития Владимирской области // Современные проблемы физико-математических наук / материалы VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией Т. Н. Можаровой. – Орёл: ОГУ имени И. С. Тургенева, 2020. – С. 148-153. Режим доступа: – https://phys-math.ru/_media/conf2020/spfmn-2020-sbornik.pdf (дата обращения 30.01.2024).

3. Курбыко И.Ф., Зотикова А.И. К вопросу адекватности математических моделей прогнозирования показателей региональной экономики // Современные проблемы физико-математических наук / материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией Т. Н. Можаровой. – Орёл: ОГУ имени И. С. Тургенева, 2021. – С. 200-205. Режим доступа: – https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49082711&pff=1 (дата обращения 30.01.2024).

4. Краткосрочные экономические показатели Владимирской области / Федеральная служба государственной статистики. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: – https://rosstat.gov.ru/region/ind1117/Main.htm (дата обращения 25.01.2024).

## References

1. Kulaichev A.P. Methods and Means of Complex Statistical Analysis. M.: INFRA-M, 2022. 484 p.

2. Kurbyko I.F. Forecasting of Socio-Economic Development Dynamics of Vladimir Region. Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. The Materials of VI All-Russia Science-Pract.Conf. Orel: Orel State University named after I.S. Turgenev; 2020. Pp. 148-153. URL: https://phys-math.ru/_media/conf2020/spfmn-2020-sbornik.pdf (date of visit 30.01.2024).

3. Kurbyko I.F., Zotikova A.I. To the Problem of Adequacy of Mathematical Forecasting Models of Regional Economy Indicators. Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. The Materials of VII All-Russia Science-Pract. Conf. Orel: Orel State University named after I.S. Turgenev; 2021. Pp. 200-205. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49082711&pff=1 (date of visit 30.01.2024).

4. Short-Term Economic Indicators of Vladimir Region. Federal Service of State Statistics. Electronic Resource. URL: https://rosstat.gov.ru/region/ind1117/Main.htm (date of visit 25.01.2024).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 375-380.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 375-380.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.89

# ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ АНАЛИЗА ЭМОЦИОНАЛЬНОЙ ТОНАЛЬНОСТИ ТЕКСТА ДЛЯ ОЦЕНКИ КОНТЕНТА СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

***Павел Эдуардович Воронков[1]✉, Лариса Николаевна Зубкова[2]***
*[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]iner7@yandex.com✉, [2]zubkovaln@yandex.ru*

***Аннотация.*** *В статье рассматриваются возможности применения технологий автоматизированного анализа данных в задаче модерации контента социальных сетей, описываются результаты исследования возможности применения модели «Dostoevsky» для сентимент-анализа комментариев пользователей в социальной сети «Вконтакте».*

***Ключевые слова:*** *сентимент-анализ, интеллектуальная обработка текста, контент социальных сетей, выявление деструктивного поведения.*

Conference paper

# THE USE OF INTELLIGENT TECHNOLOGIES FOR ANALYZING THE EMOTIONAL TONALITY OF TEXT TO EVALUATE THE CONTENT OF SOCIAL NETWORKS

***Pavel E. Voronkov[1]✉, Larisa N. Zubkova[2]***
*[1,2]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]iner7@yandex.com✉, [2]zubkovaln@yandex.ru*

***Abstract.*** *The article discusses the possibilities of using automated data analysis technologies in the task of moderation of social network content, describes the results of a study on the possibility of using the Dostoevsky model for sentimental analysis of user comments on the Vkontakte social network.*

***Keywords:*** *sentiment analysis, intelligent text processing, social media content, identifying destructive behavior.*

© Воронков П. Э., Зубкова Л. Н., 2024

## 1. Введение

Развитие глобальной сети «Интернет», социальных сетей и мессенджеров повлекло большой объём распространяемых текстовых, графических и звуковых данных разнородного характера, в связи с чем разработка технологий автоматизированного анализа данных стала одним из ключевых направлений в области искусственного интеллекта. Информационные системы, способные анализировать и обрабатывать большой объём разнородных данных с максимальной эффективностью, становятся все более востребованными [1].

Благодаря таким технологиям, в частности, появляется возможность получать ценную информацию для различных областей исследования и практического применения, таких как продвижение товаров, изучение общественного мнения, выявление и профилактика деструктивного поведения и др. Понимание потребностей и предпочтений целевой сетевой аудитории позволяет производителям и продавцам создавать эффективные маркетинговые стратегии, оптимизировать ассортимент товаров и услуг [2]. Анализ мнения пользователей о тех или иных социальных проблемах в обществе, представленного в виртуальном пространстве, даёт информацию о том, на что необходимо обратить внимание властям для совершенствования политики [3]. Также непрерывный анализ потоков данных в сети «Интернет» может применяться для расследования и профилактики правонарушений, анализа мотивов противоправных действий, предупреждения деструктивного поведения [4].

В условиях ограниченности ресурсов, таких как пропускная способность телекоммуникационных каналов, скорость обработки данных и др., для анализа данных возникает потребность в целевом выявлении контента определённого характера. Сегодня для решения этой задачи применяют технологии оценки эмоциональной тональности содержимого, которые позволяют целенаправленно искать контент, имеющий ту или иную окраску, для оптимизации объёма данных, подлежащих дальнейшему детальному анализу, например, с применением больших языковых моделей (LLM) для обработки текстовой информации [5].

На сегодняшний день технологии сентимент-анализа (анализа тональности) включают в себя процесс определения эмоциональной окраски текстовых данных путём присвоения оценки текстовому контенту по различным категориям: положительной (радость, одобрение, ликование), нейтральной (отчётность, формальность), негативной (грусть, обида, разочарование, агрессия). Провести оценку текста можно с помощью лексиконных методов (на основе словарей), методов машинного обучения с применением нейронных сетей, с использованием группы математических алгоритмов (наивный Байесовский классификатор, метод опорных векторов, случайные леса и др.), а также применяя те или иные комбинации перечисленных инструментов и алгоритмов. Выбор той или иной технологии оценки эмоциональной тональности текста зависит от целей, ресурсов и самих данных [6].

## 2. Основной текст статьи

Опишем результаты исследования, в рамках которого был произведён сбор комментариев из социальной сети «ВКонтакте», выполнен анализ

эмоциональной тональности текстового контента с помощью библиотеки «Dostoevsky» и дана оценка комментариев на предмет наличия в них элементов деструктивного поведения (троллинга и флейминга).

Библиотека для анализа эмоциональной тональности текста на русском языке «Dostoevsky» представляет собой интерфейс модели для библиотеки «FastText», обученной на датасете «RuSentiment», подготовленном компанией «Text Machine Lab for NLP» в рамках проекта «RuSentiment». Она представляет собой примеры текстов, собранных из социальной сети «ВКонтакте», разделённые на следующие классы [7]:

1. позитивный («positive»);
2. нейтральный («neutral»);
3. негативный («negative»);
4. речевые акты («speech»);
5. неясные случаи («skip»).

Под речевыми актами подразумеваются шаблонные приветствия, благодарности и поздравления. Классы негативных и позитивных настроений охватывают как неявные, так и явные настроения, как для выражения эмоций, так и для отношения. Ключевые слова («хэштеги») и «эмодзи» (смайлики) не рассматриваются как маркеры настроения [8].

Преимущество библиотеки «FastText», на базе которой основывается «Dostoevsky», заключается в более быстрой работе по сравнению с другими пакетами и моделями. Для векторного представления слов используется модель «skipgram» с негативным семплированием: созданием негативных примеров для обучения модели, или созданием пар слов, которые не являются схожими по контексту [9].

В качестве исходных данных были взяты комментарии под постами городского сообщества «Город Орел! Орловчане ВКонтакте» в социальной сети «Вконтакте», посвящённые следующим тематикам: благоустройство городского пространства, история города и культурные мероприятия, бродячие животные. Вокруг публикаций, посвящённых данным темам, «разворачивались» различные дискуссии, в ходе которых высказывались весьма разные по эмоциональной окрасе мнения, от позитивных и восторженных до крайне негативных.

Было собрано 987 комментариев с применением технологий и методов сбора и систематизации информации из социальной сети «ВКонтакте» с помощью предоставляемого API.

Далее текстовый контент собранных данных был подвергнут оценке эмоциональной тональности с помощью библиотеки «Dostoevsky», которая позволяет классифицировать текст по пяти категориям эмоциональной окраски: позитивная, негативная, нейтральная, «речевая» (поздравление, приветствие и т. д.) и неопределённая [7]. Каждый комментарий получает векторную оценку, в которой каждая компонента вектора – это число из интервала от 0 до 1, характеризующее степень проявления эмоциональной окраски той или иной категории. Комментарии были классифицированы по пяти категориям, обозначенным выше. В результате было получено следующее распределение комментариев по эмоциональной тональности, представленное в таблице 1. Для

дальнейшего исследования множество комментариев с «речевой» и неопределённой эмоциональной тональностью было объединено с множеством комментариев с нейтральной тональностью, поскольку стояла задача модерирования негативного контента.

Таблица 1 — Распределение комментариев по эмоциональной тональности текстов.

| **Тематика** | **Всего** | **Позитивных** | | **Негативных** | | **Нейтральных** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **Всего** | **Доля** | **Всего** | **Доля** | **Всего** | **Доля** |
| Благоустройство города | 207 | 19 | 9,2% | 32 | 15,5% | 156 | 75,4% |
| История и культура | 206 | 10 | 4,9% | 28 | 13,6% | 168 | 81,6% |
| Бродячие животные | 574 | 12 | 2,1% | 83 | 14,5% | 479 | 83,4% |
| **Сумма** | **987** | **41** | **4,2%** | **143** | **14,5%** | **803** | **81,4%** |

Исследование показало, что большая часть комментариев носит нейтральный характер эмоциональной окраски (81%) по всем темам. При этом во всех трёх тематиках нейтральные комментарии составляют больше 75% от выборки комментариев по соответствующим тематикам. Небольшую долю составляют комментарии с позитивной эмоциональной окраской (в среднем 4%). Несколько большую долю (в среднем 14%) составляют комментарии с негативной эмоциональной тональностью. В контексте задачи выявления деструктивного поведения в комментариях к постам сообщества и его пресечения (выявления нарушающих нормы сетевого поведения пользователей и применения к ним мер воздействия) интерес вызывает категория негативных комментариев. Поскольку часть таких комментариев невелика, автоматизированное выявление и дальнейший их анализ и модерация не составляют большой технической сложности и не потребуют большого количества ресурсов в связи с малым количеством контента, подлежащего дальнейшей обработке.

Рассмотрение отдельных комментариев с текстом негативной эмоциональной тональности показало наличие флейминга – обмена агрессивными репликами, направленному на выплеск эмоций участников, и троллинга – речевой провокации с целью инициации коммуникативного конфликта. Оба вида коммуникации можно отнести к деструктивному взаимодействию, которое может привести к негативным последствиям как для агрессоров, так и для оппонентов: низкая самооценка, агрессивность, социальная изоляция, депрессия и др [10, 11]. Модератор сообщества получает возможность оперативно реагировать на такое сетевое поведение, используя технологии анализа данных.

## 3. Заключение

Проведённое исследование показывает, что применение интеллектуальных инструментов анализа текста (в частности, оценка эмоциональной тональности) позволяет проводить эффективный поиск контента определённого типа и его детальный целенаправленный анализ, сокращая при этом объём затрачиваемых вычислительных ресурсов. Тем самым обеспечивается решение задачи

выявления негативного контента в условиях ограниченности ресурсов, выделяемых для её решения. Автоматизированный поиск такого контента позволит упростить его дальнейший анализ и ускорит применение мер реагирования на такой контент: скрытие, удаление или блокировка автора или источника распространения.

Результаты проведённого исследования показывают, что среди собранных комментариев достаточно много таких, которые по эмоциональной тональности можно отнести к «спорным»: с одной стороны они не несут ярко выраженной негативной эмоциональной окраски (либо не содержат её, либо она представлено незначительно) и поэтому их можно классифицировать как нейтральные, с другой – они могут нести в себе деструктивный контент, на который необходимо реагировать. Например, это может быть пассивная агрессия, реклама запрещённых товаров и услуг и др.

Отметим, что комментарии в социальных сетях могут содержать не только текстовый контент, но и мультимедийный: изображения, эмодзи, видео, файлы и пр. При решении задачи поиска деструктивного контента в исследовании данный факт не учитывался, т. к. модель «Dostoevsky» является лингвистической и анализирует только текстовый контент. В условиях распространения контента различного типа необходимо анализировать не только текстовый, но и мультимедийный контент. Тем самым возникает задача совместного использования различных моделей, которые могут параллельно оценивать определённые части содержимого публикаций, комментариев и иных сообщений, и разработки универсальной модели, способной принимать на вход разнородный контент и формировать его общую оценку.

## Список источников

1. Big Data: как применять и анализировать большие данные? // Комсомольская правда URL: https://www.kp.ru/guide/analiz-bol-shikh-dannykh.html (дата обращения: 12.11.2024).

2. Петрова Н.С. Использование целевого маркетинга для привлечения и удержания клиентов // Вестник науки. - 2023. - №10 (67). - С. 77-82.

3. Киселева А.М., Шпак Е.А. Социальные сети в процессе коммуникации между властью и обществом // Вопросы управления. - 2015. - №6 (18). - С. 66-75.

4. Лазарева И.Ю. Профилактика деструктивного информационно-психологического воздействия на молодежь в сети Интернет // Психопедагогика в правоохранительных органах. - 2021. - №4 (87). - С. 416-422.

5. Карабулатова И.С., Копнина Г.А. Специфика лингвистической параметризации деструктивного массмедийного текста с обесцениванием исторической памяти // Медиалингвистика. - 2023. - №10 (3). - С. 319-335.

6. Белоцерковец А.П. Современные методы сентимент-анализа: перспективы, тенденции, практическое применение // Вестник науки. - 2024. - №3 (72). - С. 425-434.

7. bureaucratic-labs/dostoevsky: Sentiment analysis library for russian language // GitHub URL: https://github.com/bureaucratic-labs/dostoevsky (дата обращения: 12.11.2024).

8. text-machine-lab/rusentiment // GitHub URL: https://github.com/text-machine-lab/rusentiment (дата обращения: 12.11.2024).

9. fastText // fastText URL: https://fasttext.cc/ (дата обращения: 12.11.2024).

10. Воронцова Т.А. Троллинг и флейминг: речевая агрессия в интернет-коммуникации // Вестник Удмуртского университета. Серия «История и филология». - 2016. - №2. - С. 109-116.

11. Людкевич Ю.Н., Гришай Е.В., Люев Т.Х. Деструктивное поведение в онлайн-общения: проблемы и пути решения // Гуманитарные, социально-экономические и общественные науки. - 2021. - №8. - С. 47-52.

## References

1. Big Data: how to apply and analyze big data? // Komsomolskaya Pravda URL: https://www.kp.ru/guide/analiz-bol-shikh-dannykh.html (date of application: 12.11.2024).

2. Petrova N.S. The use of targeted marketing to attract and retain customers // Bulletin of Science. - 2023. - №10 (67). - Pp. 77-82.

3. Kiseleva A.M., Shpak E.A. Social networks in the process of communication between government and society // Issues of management. - 2015. - №6 (18). - Pp. 66-75.

4. Lazareva I.Y. Prevention of destructive informational and psychological impact on youth on the Internet // Psychopedagogy in law enforcement agencies. - 2021. - №4 (87). - Pp. 416-422.

5. Karabulatova I.S., Kopnina G.A. Specificity of linguistic parameterization of destructive mass media text with devaluation of historical memory // Media linguistics. - 2023. - №10 (3). - Pp. 319-335.

6. Belotserkovets A.P. Modern methods of sentiment analysis: prospects, trends, practical application // Bulletin of Science. - 2024. - №3 (72). - Pp. 425-434.

7. bureaucratic-labs/dostoevsky: Sentiment analysis library for Russian language // GitHub URL: https://github.com/bureaucratic-labs/dostoevsky (date of application: 11/12/2024).

8. text-machine-lab/rusentiment // GitHub URL: https://github.com/text-machine-lab/rusentiment (date of application: 12.11.2024).

9. FastText // FastText URL: https://fasttext.cc / (date of request: 12.11.2024).

10. Vorontsova T.A. Trolling and flaming: speech aggression in Internet communication // Bulletin of the Udmurt University. The series "History and Philology". - 2016. - No. 2. - pp. 109-116.

11. Lyudkevich Yu.N., Grishai E.V., Lyuyev T.H. Destructive behavior in online communication: problems and solutions // Humanities, socio-economic and social sciences. - 2021. - No.8. - pp. 47-52.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 381-385.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 381-385.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 685.518.5

# ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МУЛЬТИАГЕНТНОГО ПОДХОДА

***Камилла Айратовна Гафарова***[1]✉
[1]*ФГБОУ ВО «Уфимский государственный нефтяной технический университет», г. Уфа, Россия*
[1]*kamilla.gafarova102@yandex.ru*✉

***Аннотация.*** *Статья посвящена исследованию возможностей использования мультиагентных систем для создания цифровых моделей сложных технических объектов. В ней рассматриваются основные принципы мультиагентного моделирования, а также алгоритм, позволяющий реализовать этот подход на практике. Особое внимание уделяется анализу преимуществ мультиагентных моделей по сравнению с другими методами моделирования. Обсуждаются их возможности в решении задач проектирования, оптимизации, прогнозирования и управления сложными техническими системами.*

***Ключевые слова:*** *цифровое моделирование, мультиагентное моделирование, сложные технические системы, идентификация агентов, математическая модель.*

Conference paper

# APPLICATION OF AN ALGORITHM FOR DIGITAL MODELING OF COMPLEX TECHNICAL SYSTEMS BASED ON A MULTI-AGENT APPROACH

***Kamilla A. Gafarova***[1]✉
[1]*Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, Russia*
[1]*kamilla.gafarova102@yandex.ru*✉

***Annotation.*** *The article is devoted to the study of the possibilities of using multi-agent systems to create digital models of complex technical objects. It discusses the basic principles of multi-agent modeling, as well as an algorithm that allows you to implement this approach in practice. Special attention is paid to the analysis of the*

© Гафарова К. А., 2024

*advantages of multi-agent models in comparison with other modeling methods. Their capabilities in solving problems of design, optimization, forecasting and management of complex technical systems are discussed.*

***Keywords:*** *digital modeling, multi-agent modeling, complex technical systems, identification of agents, mathematical model.*

## 1. Введение

В современном мире, где технологии развиваются стремительными темпами, цифровое моделирование становится ключевым инструментом для проектирования, анализа и оптимизации сложных технических систем. Одним из подходов, который находит всё большее применение в этой области, является мультиагентное моделирование.

Цель данной статьи заключается в подробном описание этапов разработки алгоритмов цифрового моделирования сложных технических систем с использованием мультиагентного подхода, а также обсуждение преимуществ этого подхода для исследования и разработки различных типов технических систем. Кроме того, были выявлены основные принципы и области применения данного метода.

## 2. Основной текст статьи

Мультиагентное моделирование – это метод моделирования и анализа сложных систем, в которых поведение системы рассматривается как результат взаимодействия множества автономных агентов [3]. Каждый агент — это отдельный элемент системы, который имеет свои цели, возможности и правила поведения. Данный подход позволяет создавать сложные системы, состоящие из множества взаимодействующих агентов (объектов, компонентов, элементов), что позволяет более точно и реалистично моделировать реальные процессы и поведение систем.

На рисунке 1 показана блок-схема принципов мультиагентного подхода (рисунок 1).




Рисунок 1— Блок-схема принципы мультиагентного подхода.

Рассмотрим более подробно каждый из них: а) автономность - агенты действуют независимо от других элементов системы, имеют собственные цели и стратегии поведения; б) взаимодействие - агенты обмениваются информацией, влияют на поведение друг друга; в) децентрализация - система не имеет центрального элемента управления, каждый агент самостоятельно принимает решения; г) эмерджентность - поведение системы в целом не всегда может быть предсказано на основе поведения отдельных агентов, иногда возникают неожиданные результаты.

Основными этапами разработки алгоритмов являются:

1. Постановка целей и задач. На первом этапе необходимо чётко определить цели и задачи моделирования. Нужно сформулировать, какой объект будет моделироваться и какие параметры либо характеристики системы при этом будут учитываться;

2. Идентификация агентов. Второй этап включает в себя определение агентов, которые будут участвовать в моделировании. Это могут быть объекты системы, элементы конструкции, компоненты и другие элементы, взаимодействующие друг с другом;

3. Разработка математической модели. На этом этапе создаётся математическая модель, описывающая поведение агентов и их взаимодействие. Модель может быть представлена в виде системы дифференциальных уравнений, логических правил, матриц переходов и другие;

4. Алгоритмизация. Четвёртый этап предполагает разработку алгоритма, основанного на математической модели. Алгоритм должен позволять имитировать поведение системы и взаимодействие агентов;

5. Программирование. На этом шаге алгоритм реализуется в программном коде с использованием одного из языков программирования (Java, Python, C#), библиотек и фреймворков, поддерживающих мультиагентное моделирование;

6. Калибровка модели. Шестой этап заключается в настройке параметров модели для достижения максимальной точности и реалистичности результатов. Это может включать в себя подбор значений параметров, проверку на соответствие реальным данным и другие методы.

7. Валидация модели. После калибровки модель подвергается валидации, то есть проверке на соответствие реальным процессам и явлениям, которые она должна моделировать. Это позволяет убедиться в точности и достоверности результатов.

8. Анализ результатов. Полученные результаты анализируются с целью выявления закономерностей, тенденций и других особенностей поведения системы. Это позволяет понять, как система реагирует на различные воздействия и изменения параметров.

9. Оптимизация модели. Если анализ показывает, что модель не полностью соответствует ожиданиям или требованиям, её можно оптимизировать. Это может включать изменение параметров, добавление новых агентов или других улучшений.

10. Публикация результатов. После завершения разработки и валидации модели результаты могут быть опубликованы в научных журналах, представлены на конференциях или использованы в практических целях.

11. Документирование. В этом этапе идет процесс описания самого моделирования, а также составление отчётов и технической документации.

Этот алгоритм предоставляет общий план действий для цифрового моделирования сложных технических систем с использованием мультиагентного подхода. Он может быть адаптирован и дополнен в зависимости от специфики задачи и выбранных инструментов.

Цифровое моделирование сложных технических систем с использованием мультиагентного подхода предоставляет исследователям и инженерам ряд значительных преимуществ. Во-первых, мультиагентные системы позволяют создавать виртуальные модели сложных технических систем, которые воспроизводят поведение реальных объектов и их взаимодействие [2]. Это даёт возможность изучить систему в контролируемой среде и провести эксперименты, которые были бы невозможны или слишком рискованны в реальности.

Во-вторых, применение мультиагентных моделей позволяет анализировать системы, состоящие из множества элементов, взаимодействующих между собой сложным образом. Это особенно актуально для технических систем, таких как транспортные сети, производственные процессы или биологические системы.

В-третьих, моделирование позволяет проводить анализ и оптимизацию параметров системы, что может привести к улучшению её эффективности, снижению затрат или повышению безопасности. Также мультиагентные модели могут быть использованы для разработки стратегий управления сложными системами. Преимущества применения алгоритма в двух аспектах. Рассмотрим преимущества алгоритма цифрового моделирования в двух ключевых аспектах: научном исследовании и разработке технических систем.

В области науки мультиагентный подход позволяет исследователям изучать сложные системы, имитируя их поведение в виртуальной среде. Это способствует более глубокому пониманию механизмов функционирования систем и выявлению закономерностей, которые могут быть невидимы при простом наблюдении. Такое понимание может привести к новым открытиям и инновациям в различных областях науки.

Мультиагентное моделирование применяется в различных областях, таких как логистика, экономика, социология, экология, транспорт и другие. Оно позволяет анализировать сложные системы, предсказывать их поведение, оптимизировать процессы и принимать обоснованные решения [1].

## 3. Заключение

Таким образом, мультиагентный подход является мощным инструментом для исследования и разработки сложных технических систем. Он позволяет более глубоко понимать поведение систем, оптимизировать их параметры и разрабатывать эффективные стратегии управления. Алгоритм цифрового моделирования на основе этого подхода открывает новые возможности для

научных исследований и практических применений в различных областях техники и науки.

При разработке технических систем мультиагентное моделирование сокращается время и затраты на разработку, а также снижаются риски, связанные с возможными ошибками или нежелательными последствиями. Кроме того, моделирование позволяет тестировать различные сценарии и стратегии, выбирая наиболее эффективные и безопасные решения.

## Список источников

1. Антонова, А. С., Аксёнов, К. А. Применение мультиагентного и эволюционного моделирования при планировании работ // Информатика, телекоммуникации и управление. – 2013. – №6 (186). – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-multiagentnogo-i-evolyutsionnogo-modelirovaniya-pri-planirovanii-rabot (дата обращения: 06.10.2024).

2. Тырин, Г. Н. Разработка и исследование мультиагентных моделей / Г. Н. Тырин. — Текст : непосредственный // Молодой ученый. — 2017. – № 23 (157). – С. 166-173. – URL: https://moluch.ru/archive/157/44381/ (дата обращения: 06.10.2024).

3. Крылов, И. Б. Математические методы и мультиагентный подход, применяемые при разработке интеллектуальной обучающей системы технической дисциплины//Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры. – 2014. – С. 333-336.

## References

1. Antonova, A. S., Aksenov, K. A. Application of multi-agent and evolutionary modeling in work planning // Informatics, telecommunications and management. – 2013. – №6 (186). – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-multiagentnogo-i-evolyutsionnogo-modelirovaniya-pri-planirovanii-rabot (date of reference: 06.10.2024).

2. Tyrin, G. N. Development and research of multi-agent models / G. N. Tyrin. — Text : direct // Young scientist. – 2017. – № 23 (157). – Pp. 166-173. – URL: https://moluch.ru/archive/157/44381 / (date of access: 06.10.2024).

3. Krylov, I. B. Mathematical methods and a multi-agent approach used in the development of an intelligent learning system of a technical discipline//The university complex as a regional center of education, science and culture. - 2014. – pp. 333-336.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 386-390.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 386-390.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.8

# ПОСТРОЕНИЕ НЕЙРОСЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ КЛАССИФИКАЦИИ МЕДИЦИНСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

***Татьяна Николаевна Русских[1]✉, Антон Александрович Желтиков[2]***
*[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]trusskih@rambler.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8514-7508*
*[2]jeltiy-glaz@list.ru*

***Аннотация.*** *В статье затрагивается проблема анализа медицинских изображений. Приводятся результаты построения моделей классификации флюорографических снимков с целью диагностики пневмонии у детей. В качестве математического инструментария используются модели и технологии глубокого обучения.*

***Ключевые слова:*** *изображения, классификация, нейронная сеть, глубокое обучение, метрики.*

Conference paper

# CONSTRUCTION OF NEURAL NETWORK MODELS FOR CLASSIFICATION OF MEDICAL IMAGES

***Tatyana N. Russkikh [1]✉, Anton A. Zheltikov[2]***
*[1,2]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]trusskih@rambler.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8514-7508*
*[2]jeltiy-glaz@list.ru*

***Abstract.*** *The paper is devoted to the problem of medical image analysis. The results of constructing models for classifying fluorographic images for the purpose of diagnosing pneumonia in children are presented. Deep learning models and technologies are used as mathematical tools.*

***Keywords:*** *images, classification, neural network, deep learning, metrics.*

## 1. Введение

Одним из источников информации в медицинской диагностике являются рентгеновские снимки. На практике требуется быстрая и качественная обработка

© Русских Т. Н., Желтиков А. А., 2024

медицинских изображений для обеспечения принятия эффективных врачебных решений. Классификация медицинских изображений в большинстве случаев реализуется с использованием технологий искусственного интеллекта. Высокую эффективность в решении задач распознавания медицинских изображений на практике демонстрируют методы глубокого обучения [1-4].

**2. Основной текст статьи**

В настоящее время рентгеноскопия широко применяется для диагностики широкого спектра повреждений и заболеваний: патологии легких, переломы и иные повреждения костей и другое. В диагностике заболеваний интерпретация рентгеновского снимка является ключевым инструментом в постановке врачом правильного диагноза.

В рамках исследования авторами решена задачи классификации флюорографических снимков для диагностики пневмонии у детей, проведена оценка качества построенных моделей.

Приведем отдельные результаты исследования.

Имеется набор рентгеновских снимков – изображения пневмонии (бактериальной и вирусной) и нормальные снимки. Выборка включает 5856 изображения: 4273 с пневмонией, 1583 изображений нормы. На рисунках 1-3 приведены примеры рентгеновских снимков.

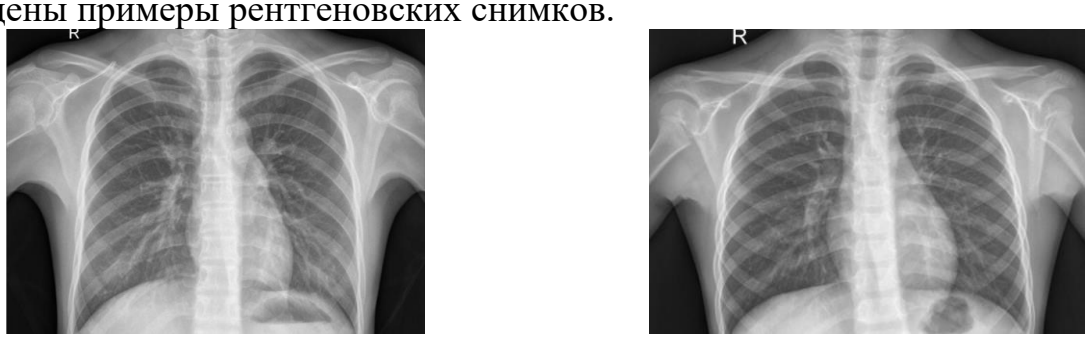


Рисунок 1 — Рентгеновский снимок (норма).



Рисунок 2 — Рентгеновский снимок (бактериальная пневмония).



Рисунок 3 — Рентгеновский снимок (вирусная пневмония).

Для анализа изображений использовались Google Colab – бесплатная среда для работы с языком Python, библиотеки Pandas, Numpy, Matplotlib, Seaborn, Imageio, Pathlib, Sklearn, Keras языка программирования Python.

После предобработки данных выборка была разделена на обучающую, валидационную и тестовую в соотношении 80%, 15%, 5%.

В качестве инструментария моделирования была выбрана нейронная сеть с архитектурой MobileNet. На первом этапе была задана функция активации Sigmoid, модель обучена за 25 эпох.

На рисунке 4 приведены графики функции потерь.

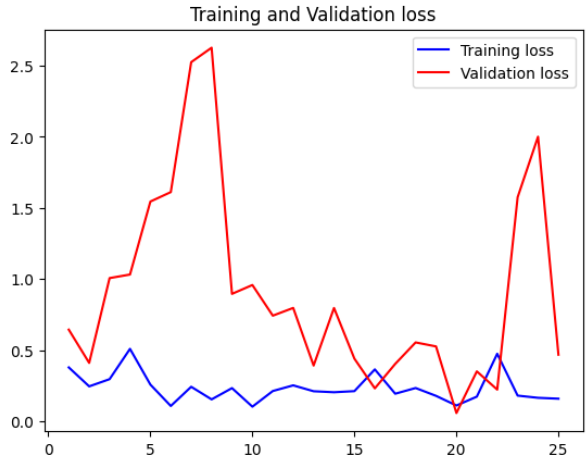



Рисунок 4 — Графики функции потерь при обучении и валидации.

Можно сделать вывод, что функция потерь на обучающей выборке немного снижается с ростом числа эпох. На валидационной выборке функция сначала демонстрирует рост, далее резкое снижение, затем стремительный рост и такое же стремительное падение.

На рисунке 5 приведены графики метрики accuracy на двух выборках.

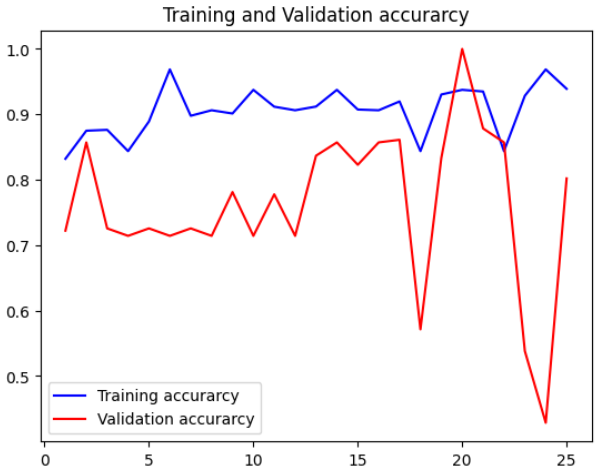



Рисунок 5 — Графики метрики accuracy на обучающей и валидационной выборках.

Метрика на обучающей выборке увеличивается с ростом числа эпох, демонстрируя некоторую устойчивость в диапазоне значений. Для валидационной выборки наблюдается значительные колебания в динамике метрики с ростом числа эпох. На обучающей выборке точность классификации составила 93.9%.

Для оценки качества моделей на тестовой выборке были вычислены различные метрики. На рисунке 6 приведена матрица ошибок.

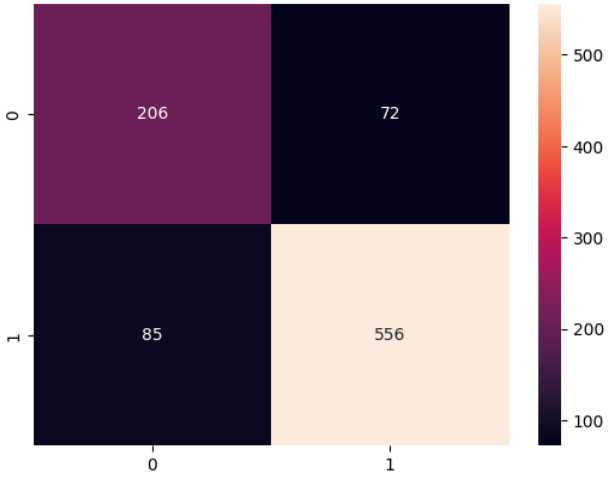



Рисунок 6 — Тепловая карта матрицы ошибок.

Модель достаточно хорошо распознала самый представительный класс «1» (рентгеновские снимки с патологией).

В таблице 1 приведены метрики качества классификации на тестовой выборке.

Таблица 1 — Метрики классификации на тестовой выборке.

| Класс | Метрика | | | |
|---|---|---|---|---|
| | precision | recall | f1-score | support |
| 0 | 0.71 | 0.74 | 0.72 | 278 |
| 1 | 0.89 | 0.87 | 0.88 | 641 |
| | | | | |
| accuracy | | | 0.83 | 919 |
| macro avg | 0.80 | 0.80 | 0.80 | 919 |
| weighted avg | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 919 |

Анализируя полученные значения метрик заключаем, что модель лучше предсказывает класс «1». Для этого класса значения метрик заключены в диапазоне 0.87-0.89. Для рентгеновских снимков класса «0» модель демонстрирует меньшую точность распознавания. Метрики варьируются в диапазоне 0.71-0.74.

Далее с целью улучшения прогностических свойств были построены модели с другими параметрами (число эпох, функция активации). Итоговые результаты исследований приведены в таблице 2.

Таблица 2 — Сравнительный анализ точности моделей на тестовой выборке.

| | Функция активации, число эпох | Метрика accuracy |
|---|---|---|
| 1 | Sigmoid, 25 эпох | 0.83 |
| 2 | Sigmoid, 40 эпох | 0.88 |
| 3 | Sigmoid, 64 эпохи | 0.83 |
| 4 | Relu, 25 эпох | 0.7 |
| 5 | Relu, 40 эпох | 0,74 |
| 6 | Mish, 25 эпох | 0.82 |
| 7 | Mish, 40 эпох | 0.90 |

Наибольшую точность классификации имеет нейросетевая модель с функцией активации Mish, которая обучалась за 40 эпох.

**3. Заключение**

В рамках исследования построены модели классификации флюорографических снимков для решения задачи диагностики пневмонии у детей, проведен анализ качества моделей на основе метрик классификации. Сравнительный анализ нейросетевых моделей с различными функциями активации на скрытых слоях, различным числом эпох обучения, позволил выбрать оптимальную модель. Разработанные модели могут быть использованы в качестве математического обеспечения сервиса медицинской диагностики.

## Список источников


1. Куликов А.Н., Малахова Е.Ю., Мальцев Д.С. Искусственный интеллект и машинное обучение в диагностике центральной серозной хориоретинопатии на основании оптической когерентной томографии // Офтальмологические ведомости. 2019. Т. 12. № 1. С. 13-20.
2. Минязев Р.Ш., Румянцев А.А., Баев А.А., Баева Т.Д. Подходы к построению нейросети для бинарной классификации рентгенограмм // ИЗВЕСТИЯ РАН. Серия физическая. 2020. Том 84. № 12. С. 1758-1762.
3. Рожкова Н.И. и [др.]. Модель сегментации на основе нейросети для рентгенологического скрининга рака молочной железы. URL: https://doi.org/10.47093/2218-7332.2020.11.3.4-14.
4. Щукина Н.А. Нейросетевые модели в задаче классификации медицинских изображений // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2021. №9(4). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1028


## References


1. Kulikov A.N., Malakhova E.Yu., Maltsev D.S. Artificial intelligence and machine learning in the diagnosis of central serous chorioretinopathy based on optical coherence tomography // Oftalmologicheskie vedomosti. 2019. Vol. 12. No. 1. Pp. 13-20 (In Russ.).
2. Minyazev R.Sh., Rumyantsev A.A., Baev A.A., Baeva T.D. Approaches to constructing a neural network for binary classification of radiographs // BULLETIN OF THE RAS. Physical Series. 2020. Vol. 84. No. 12. Pp. 1758-1762 (In Russ.).
3. Rozhkova N.I. et al. Segmentation model based on a neural network for X-ray screening of breast cancer. URL: https://doi.org/10.47093/2218-7332.2020.11.3.4-14 (In Russ.).
4. Shchukina N.A. Neural network models in the problem of medical image classification // Modeling, optimization and information technology. 2021. No. 9 (4). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1028 (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 391-396.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 391-396.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.8

# СЕГМЕНТАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ С НЕЧЕТКИМИ КОНТУРАМИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ

***Татьяна Николаевна Русских[1]✉, Вячеслав Сергеевич Шаламов[2]***
*[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]trusskih@rambler.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8514-7508*
*[2]shalamovvs@gmail.com*

***Аннотация.*** *В статье затрагивается проблема анализа изображений с нечеткими контурами. Приводятся результаты построения моделей сегментации изображений на примере выборки пяти классов растений с использованием моделей и технологий глубокого обучения.*

***Ключевые слова:*** *изображения, сегментация, классификация, нейронная сеть, глубокое обучение, метрики.*

Conference paper

# IMAGE SEGMENTATION WITH FUZZY CONTOURS BASED ON DEEP LEARNING METHODS

***Tatyana N. Russkikh[1]✉, Vyacheslav S. Shalamov[2]***
*[1,2]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]trusskih@rambler.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8514-7508*
*[2]shalamovvs@gmail.com*

***Abstract.*** *The paper is devoted to the problem of analyzing images with fuzzy edges. The results of constructing image segmentation models are presented using a sample of five classes of plants using deep learning models and technologies.*

***Keywords:*** *images, segmentation, classification, neural network, deep learning, metrics.*

## 1. Введение

В настоящее время методы сегментации изображений с нечеткими контурами широко применяются в медицинской диагностике, в автономном вождении, в системах видеоаналитики, в робототехнике и других сферах. Технологии распознавания изображений находятся в непрерывном развитии и с

© Русских Т. Н., Шаламов В. С., 2024

каждым годом становятся все эффективнее. Для решения задач сегментации изображений широко используются методы глубокого обучения.

## 2. Основной текст статьи

Задача сегментации изображений относится к одному из классов задач компьютерного зрения. Сегментация изображений, как правило, используется для выделения объектов и их границ на изображениях [1-4].

Методы сегментации можно разделить на три группы в зависимости от типа информации, которую они передают: семантическая сегментация, сегментация экземпляра, паноптическая сегментация.

В настоящее время разработано множество архитектур нейронных сетей, успешно решающих задачи классификации и сегментации изображений, например, AlexNet, VGG, ResNet, DenseNet, Inception и другие.

В рамках практического исследования авторами построены нейросетевые модели сегментации изображений растений. Рассмотрим результаты моделирования.

Имеется набор данных – выборка пяти видов цветов: ромашки (769 изображений), одуванчики (1055), розы (784), подсолнухи (734), тюльпаны (984).

При обработке изображений цветов представленная информация может быть неоднозначной из-за разного освещения, тени, отражений и других факторов, что делает контуры объектов нечеткими. Таким образом, распознавание цветов требует учета этой неопределенности и использование методов работы с нечеткими данными для более точного анализа и классификации цветов.

На рисунке 1 представлены образцы цветов классов «ромашки», «тюльпаны» из имеющегося набора данных.



Рисунок 1 — Образцы изображений класса «ромашки».



Рисунок 2 — Образцы изображений класса «тюльпаны».

Анализ представленных изображений позволяет сделать вывод об отсутствии четких границ изображений, на отдельных снимках представлены одиночные представители классов, на других – множество экземпляров класса с

объектами, не относящимися ни к одному из классов растений. Таким образом, имеется задача сегментации изображений с нечеткими контурами. Неоднозначность изображений может значительно снизить качество результатов классификации.

Для работы с данными выбрана среда Google Collaboratory. Выборка изображений была разделена на обучающую и тестовую (25% изображений в тестовой выборке). Нейронную сеть с несколькими классами изображений целесообразно создать с последовательными слоями. Для этих целей подходит модель Sequental из фреймворка Keras. Архитектура нейронной сети представлена на рисунке 3.

Model: "sequential"

| Layer (type) | Output Shape | Param # |
|---|---|---|
| conv2d (Conv2D) | (None, 150, 150, 32) | 2,432 |
| max_pooling2d (MaxPooling2D) | (None, 75, 75, 32) | 0 |
| conv2d_1 (Conv2D) | (None, 75, 75, 64) | 18,496 |
| max_pooling2d_1 (MaxPooling2D) | (None, 37, 37, 64) | 0 |
| conv2d_2 (Conv2D) | (None, 37, 37, 96) | 55,392 |
| max_pooling2d_2 (MaxPooling2D) | (None, 18, 18, 96) | 0 |
| conv2d_3 (Conv2D) | (None, 18, 18, 96) | 83,040 |
| max_pooling2d_3 (MaxPooling2D) | (None, 9, 9, 96) | 0 |
| flatten (Flatten) | (None, 7776) | 0 |
| dense (Dense) | (None, 512) | 3,981,824 |
| activation (Activation) | (None, 512) | 0 |
| dense_1 (Dense) | (None, 5) | 2,565 |

Рисунок 3 — Архитектура модели.

В рамках исследования было проведено обучение модели на 35 эпохах. На рисунках 4-5 представлены графики функции потерь и метрики в зависимости от числа эпох.

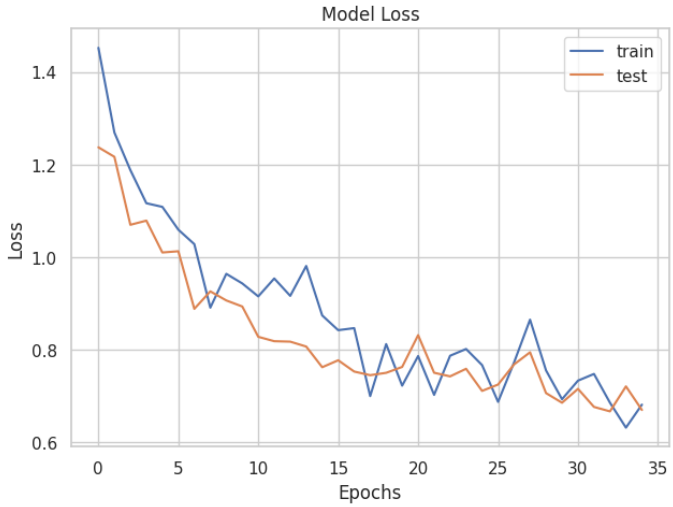



Рисунок 4 — Графики функции потерь при обучении и тестировании.

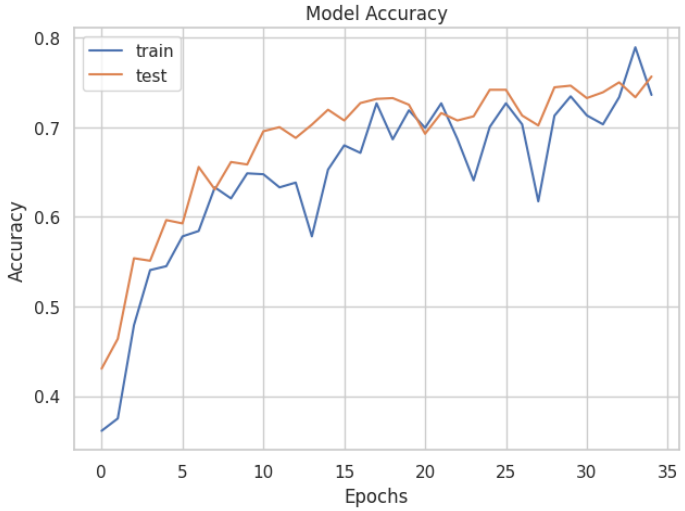



Рисунок 5 – Графики метрики при обучении и тестировании.

Анализируя графики функции потерь, можно сделать вывод, что значения функции на обучающей и тестовой выборки снижается. При этом функция на тестовой выборке по своим значениям приближается к значениям на обучающей выборке по мере увеличения числа эпох.

На рисунках 6-7 приведены матрицы ошибок для классов «0», «1».

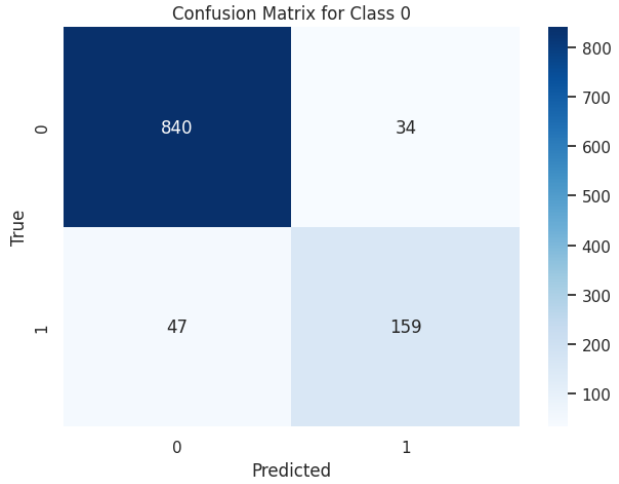



Рисунок 6 – Тепловая карта матрицы ошибок для изображений класса «0».

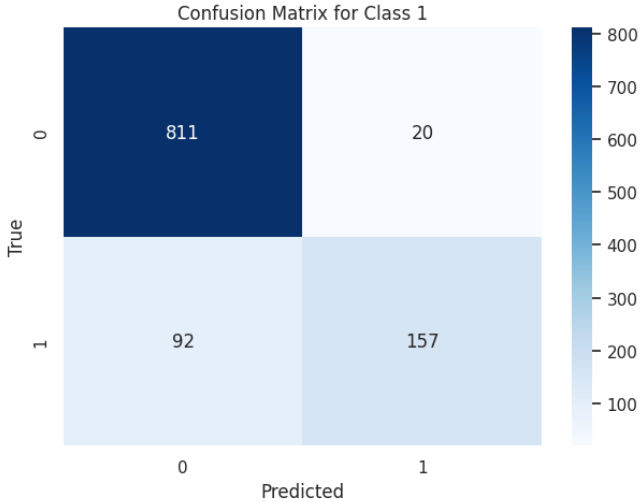



Рисунок 7 — Тепловая карта матрицы ошибок для изображений класса «1».

Анализируя матрицы можно сделать вывод, что модель достаточно точно предсказала классы.

На рисунке 8 приведены примеры некорректно предсказанных изображений.

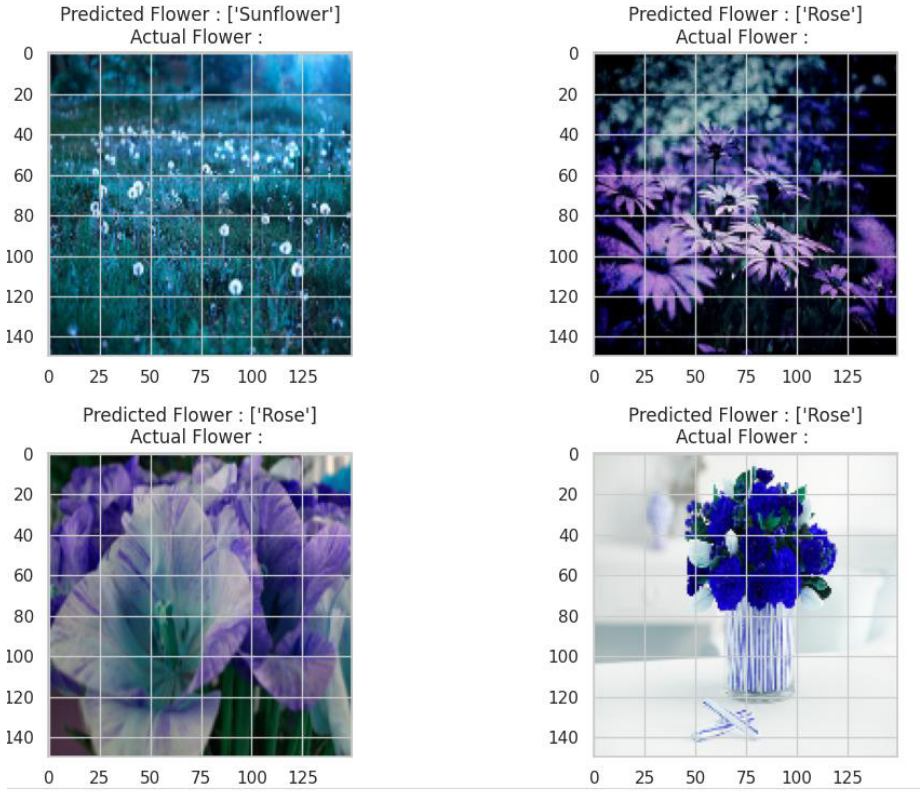



Рисунок 8 — Примеры некорректно предсказанных изображений.

Для построенной модели были вычислены и другие метрики классификации. Так, метрика accuracy изменяется в диапазоне от 88.33% до 93.7%, precision – от 66.49% до 88.7%, recall – 60.49% до 86.7%.

На следующем этапе была обучена модель на 70 эпохах, а также построена модель архитектуры ResNet. Для модели, обученной за 70 эпох, метрика accuracy изменяется в диапазоне от 88.98% до 95.28%, precision – от 71.59% до 93.3%, recall – 65.43% до 90.05%. Ввиду этого можно заключить, что качество модели выше, чем для модели, обученной за 35 эпох. Модель архитектуры ResNet показала более низкую точность предсказаний по всем 5 классам растений.

**3. Заключение**

В рамках исследования построены нейросетевые модели для классификации изображений с нечеткими контурами. Разработанный алгоритм подходит для распознавания любых изображений с низкой контрастностью. Результаты работы алгоритма можно улучшить, используя ансамбли моделей.

## Список источников

1. Bovolo F., Bruzzone L. Fuzzy image processing for remote sensing applications: a review // International Journal of Remote Sensing. 2018. Vol. 39. no. 21. P. 7431-7478.

2. Hoheisel A. et al. Fuzzy Morphological Filters for Image Analysis with Uncertain Boundaries // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2019. Vol. 27. no.10. P. 1863-1876.

3. Sunder R. et al. Fuzzy image processing techniques for edge detection and boundary extraction // International Journal of Fuzzy Systems. 2018. Vol. 20. no. 2. P. 621-633.

4. Vlachos T., Zervakis M. Fuzzy clustering methods for image segmentation with uncertain edge contours // Fuzzy Sets and Systems. 2016. Vol. 299. P. 187-208.

## References

1. Bovolo F., Bruzzone L. Fuzzy image processing for remote sensing applications: a review // International Journal of Remote Sensing. 2018. Vol. 39. no. 21. P. 7431-7478.

2. Hoheisel A. et al. Fuzzy Morphological Filters for Image Analysis with Uncertain Boundaries // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2019. Vol. 27. no.10. P. 1863-1876.

3. Sunder R. et al. Fuzzy image processing techniques for edge detection and boundary extraction // International Journal of Fuzzy Systems. 2018. Vol. 20. no. 2. P. 621-633.

4. Vlachos T., Zervakis M. Fuzzy clustering methods for image segmentation with uncertain edge contours // Fuzzy Sets and Systems. 2016. Vol. 299. P. 187-208.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 397-402.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 397-402.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 378:811.1

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ПРИ НАПИСАНИИ НАУЧНЫХ СТАТЕЙ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ (ПРИМЕНИТЕЛЬНО К СПЕЦИАЛИСТАМ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХ ДИСЦИПЛИН)

***Разия Зейдулаховна Амиралиева***[1]✉
[1]*МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия*
[1]*ramiralieva@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0008-8641-4947*

***Аннотация.*** *В данной статье рассматриваются стратегии создания научного текста с опорой на технологии искусственного интеллекта, которые помогут научным работникам, имеющим уровень владения английским языком B1 и выше писать научные статьи и аннотации к ним. Стратегии представляют собой набор органайзеров-таблиц, которые позволят писать небольшими предложениями, объединять их в абзацы, писать аннотацию и далее статью. Перечислены технологии искусственного интеллекта, которые дают возможность поддержки орфографии, пунктуации, стилистики и грамматики с пояснением ошибок. Рассматриваемые стратегии имеют текстоцентричный подход, где основными элементами являются структура текста и общие рекомендации по лексике, грамматике и стилистике. По мнению автора использование данных стратегий поможет снять неуверенность и тревожность перед написанием научных текстов.*

***Ключевые слова:*** *стратегии написания научных текстов, технологии искусственного интеллекта*

Conference paper

# THE USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE TECHNOLOGIES IN WRITING SCIENTIFIC ARTICLES IN ENGLISH (FOR SPECIALISTS IN THE FIELD OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES)

***Raziya Z. Amiralieva***[1]✉

© Амиралиева Р. З., 2024

[1]*Moscow State University named after M.V. Lomonosov, faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, Russia*
[1]*ramiralieva@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0008-8641-4947*

***Abstract.*** *This paper focuses on academic writing strategies using artificial intelligence technology to help researchers with English proficiency level B1 and above to write scientific articles and abstracts. The strategies are a set of organizational tables that allow academics to write in small sentences, combine them into paragraphs, write an abstract and then an article. Artificial intelligence technologies that provide support for spelling, punctuation, style and grammar, with explanations of errors are listed. The strategies considered have a text-centered approach where the main elements are text structures, general guidelines for vocabulary, grammar and stylistics. The author believes that the use of these strategies will help to reduce uncertainty in academic writing.*

***Key words:*** *scientific writing strategies, artificial intelligence technologies*

**Введение**

Глобальные тенденции к интернационализации исследований, протекавшие в течение продолжительного времени, привели к тому, что английский язык стал лингвистическим кодом науки. Стремление поделиться ценными результатами исследований с мировым научным сообществом заставило ученых приложить дополнительные усилия для овладения английским языком для создания письменных научных трудов. Специалисты в области математических и естественно-научных дисциплин не всегда владеют английским языком на достаточном уровне, чтобы писать статьи на иностранном для них языке без дополнительной помощи со стороны лингвистов. В эру цифровизации и информатизации с появлением технологий искусственного интеллекта (ИИ) процесс создания письменных научных работ значительно упрощается. Появление многочисленных инструментов проверки орфографии, пунктуации и стилистики, профессиональных онлайн переводчиков, технологий редактирования и перефразирования текста позволяют быстрее развивать навыки письма и углублять знание английского языка. Возможность обучения письму на основе нейросети рассматривается многими учёными-педагогами как в российских, так и в зарубежных вузах [1,2,3,4,5].

В данной статье рассматриваются стратегии создания научных письменных текстов с опорой на технологии ИИ, которые позволят создавать тексты (аннотацию и статью) научным работникам с уровнем владения английским языком от B1 и выше. Так как автор данной статьи не является специалистом в области математических и естественно-научных дисциплин, то социальный контекст коммуникации между автором и тем научным сообществом, которому он адресован, не представлен. Предполагается, что научные работники уже владеют социокультурными практиками научной коммуникации: постановка проблемы, выработка аргументативных стратегий, осуществление диалога в рамках научного дискурса и т.д. Акцент в данном случае сделан на традиционный подход обучения научному письму, который

подразумевает знание основных характеристик текста – макроструктуры, т.е. логическую организацию, и микроструктуры, выраженную на лексическом и синтаксическом уровне [6].

По мнению автора такой текстоцентричный подход к созданию текста поможет снять неуверенность, которую испытывают научные работники при написании аннотации и статьи, и позволит приступить к созданию текста на начальном этапе. Данная методика создания текста ориентирована на упорядочивание существующих идей с помощью органайзеров-таблиц (структура предложения, структура абзаца, структура аннотации) и их реализацию с помощью лингвистических механизмов (оборотов научной речи) и общих рекомендаций по грамматике и стилистике. Более того существуют разнообразные технологии искусственного интеллекта, такие как Deepl Write, Language tool.org, Paperpal.com, Reverso, Chat GPT, которые дают возможность поддержки при написании текстов, а именно коррекции грамматических ошибок, например, выявлять и исправлять грамматические ошибки в тексте, такие как неправильное согласование слов, неправильное использование временных форм, неправильный порядок слов, отсутствие артикля и др. С помощью технологий редактирования текста можно также проверить правильность построения предложений, включая синтаксическую структуру и пунктуацию, расширить словарный запас, используя предложенные синонимы, антонимы и различные варианты выражений для улучшения выразительности. Чат-боты могут объяснить значение непонятных слов, идиом и фразеологизмов, а некоторые имеют при себе и систему редактирования. Создавать научные тексты возможно, опираясь на бесплатные сервисы, которые имеются в свободном доступе, например, Deepl Write, Language tool.org и др. или пользуясь бесплатными версиями доступными для базовых функций.

**Стратегии создания научного текста**

Писать статью и аннотацию принято в настоящем времени, так как не существует пределов научного познания - научное познание вечно. На начальном этапе писать нужно простыми предложениями, имеющими одно подлежащее, одно сказуемое и несколько второстепенных членов: дополнение, определение, обстоятельство.

Таблица 1 - Структура предложения.

| **Подлежащее** | **Сказуемое** | **Дополнение** прямое/косвенное | **Обстоятельство** |
|---|---|---|---|
| Начинайте предложения с подлежащего. Следите за тем, чтобы читатели не потеряли подлежащее, не дойдя до глагола. | Убедитесь, что глагол согласуется с подлежащим в числе и лице (имеет форму настоящего времени). | Дополнение может быть после связующих глаголов, таких как: **to be, to seem, to become, to appear to** и т. д. | Убедитесь, что вы поставили все обстоятельства в наиболее подходящее место в предложении. Часто это место находится рядом с глаголом, но иногда необходимо поставить их так, чтобы прояснить их точное значение. Наиболее распространённый порядок: обстоятельство образа действия – места – времени. |

Порядок слов в английском предложении жестко фиксирован и нарушение его может привести к искажению смысла и грамматической ошибке. Если вы не уверены в том, как вы строите свои предложения, придерживайтесь следующей структуры предложения (таблица 1). Далее пишем абзац по академическому канону - типовая структура, которого помогает навести порядок в любом абзаце (таблица 2). Структурируем статью в соответствии с общепринятыми нормами (рисунок 1) и пишем к ней аннотацию (таблица 3).

Большее количество органайзеров-таблиц для написания научных текстов различных жанров можно найти в учебном пособии Basics of Academic and Research writing [7].

Таблица 2 - Структура абзаца.

| № | Структура | Пример |
|---|---|---|
| **I** | Вводное предложение (основная мысль, которая вводит или резюмирует тему в пределах одного абзаца). | The theory of Riemann surfaces lies at the intersection of many important branches of mathematics. |
| **II** | Предложения, поддерживающие вводное предложение (приведите примеры, детали/оформите внутритекстовые ссылки, развивающие *или отрицающие* основное предложение). | These include complex manifolds, Lie groups, algebraic number theory, harmonic analysis, algebraic topology, etc. Historically, the theory of Riemann surfaces has been divided into two parts: compact Riemann surfaces and non-compact Riemann surfaces. |
| **III** | Заключительное предложение (резюмирует основную мысль абзаца и естественным образом ведет к началу следующего). | Methods for working with the non-compact Riemann surfaces are beyond the scope of this article. Therefore, all the results mentioned below refer only to the compact Riemann surfaces. |

Таблица 3 - Структура аннотации.

| Элементы структуры | Цель | Обороты научной речи |
|---|---|---|
| **Введение** | Общие сведения/ историческая информация, введение в суть вопроса | The paper argues some new approaches ...; ... the author ponders on the role of ...; the ... is being discussed; the article addresses the issue of ...; the paper presents ...; the article deals with/focuses on ...; analyzed in the article is ...; the present study investigates ...; etc. |
| **Цель** | Цель исследования и область применения | The researchers tested ... if it would be ...; we decided to explore ...; the objectives of the study is to explore ...; we expected that ...; the core intention behind this paper is ...; the paper attempts to ...; etc. |

| | | |
|---|---|---|
| **Методология** | Методы исследования | The research project/experiments conducted (showed) ...; the method we applied/involved ...; to measure/to compare ...was/were used ...; etc. |
| **Результаты** | Наиболее важные выводы/результаты | To meet the requirements of ...; data was collected ...; the benefits of this study are ...; the results obtained show that ...; etc. |
| **Заключение** | Заключение или рекомендации для дальнейшего исследования | These results suggest that ...; based on the findings is ...; implications will be discussed ...; this article is an attempt to evaluate ...; the study provides evidence that ...; conclusions drawn from this research show ...; etc. |



Рисунок 1- Традиции европейской и российской школы научного письма.

**Заключение**

Когда вы начнете развивать навыки научного письма, вы обнаружите, что современный научный текст легче создать на английском языке, так как он должен иметь общепринятую структуру – алгоритм, в соответствии с которым необходимо писать, в отличие от русскоязычных статей, часто напоминающих научную прозу с замысловатыми формулировками. Хочу предостеречь от стратегии, которую часто используют неспециалисты в области языка, – дословный перевод русскоязычной статьи или перевод через онлайн переводчик. Онлайн переводчик не всегда может точно улавливать смысл слов и фразеологизмов, быть недостаточно точным в понимании сложных лексико-семантических нюансов русского языка. Это может привести к тому, что будут предлагаться неправильные варианты перевода или смыслового понимания фразы либо текста. Помимо этого, машина часто может не учитывать контекст использования многозначного слова, особенно в научных текстах. В связи с этим, рекомендуется писать тексты самостоятельно, строя простые предложения, формируя из них абзацы, соединяя их вводными словами и оборотами научной речи. Полученный текст необходимо проводить через технологии

редактирования и проверки орфографии, пунктуации и стилистики, перечисленные выше. Именно эти сервисы укажут вам на ошибки и предложат варианты их исправления. При этом обязательно анализировать ошибки, распознанные ИИ. Анализ ошибок формирует навык самоконтроля, который в дальнейшем позволит самостоятельно создавать письменный текст с меньшим количеством ошибок.

## Список источников


1. Костюнина С.А. Роль искусственного интеллекта в изучении иностранных языков. Вестник науки. 2022; № 2 (47): 38–42
2. Кондрахина Н.Г., Петрова О.Н. Использование возможностей искусственного интеллекта для преподавания иностранных языков: новая реальность. Мир науки, культуры, образования. 2024; №1. С. 360-363.
3. Пичуева А.В. Обучение иноязычной письменной речи в формате смешанного обучения в условиях развития технологий искусственного интеллекта. Мир науки, культуры, образования. 2024. № 4 (107). С. 122-126.
4. Shiri A. ChatGPT and Academic Integrity. Information Matters. 2023; Vol. 3, №2. Available at: https://informationmatters.org/2023/02/chatgpt-and-academic-integrity.
5. Ming Yang Liu. Exploring the Application of Artificial Intelligence in Foreign Language Teaching: Challenges and Future Development. SHS Web of Conferences. 2023; Vol. 168. Available at: https://doi.org/10.1051/shsconf/202316803025.
6. Короткина И.Б. Академическое письмо: на пути к концептуальному единству // Высшее образование в России. 2013. № 3. С. 136–142.
7. Amiralieva, R.Z. Basics of Academic and Research Writing: учебно-методическое пособие. – Москва: МАКС Пресс, 2024. – 100 p.


## References


1. Kostiunina S.A. The role of artificial intelligence in learning foreign languages. Herald of Science. 2022; № 2 (47): 38–42.
2. Kondrakhina N.G., Petrova O.N. The use of artificial intelligence power to teach foreign languages: a new reality in education. The world of science, culture, education. 2024; №1. С. 360-363.
3. Pichueva A.V. Teaching foreign language writing in a blended learning format in the context of artificial intelligence technology development. The world of science, culture, education. 2024. № 4 (107). С. 122-126.
4. Shiri A. ChatGPT and Academic Integrity. Information Matters. 2023; Vol. 3, № 2. Available at: https://informationmatters.org/2023/02/chatgpt-and-academic-integrity.
5. Ming Yang Liu. Exploring the Application of Artificial Intelligence in Foreign Language Teaching: Challenges and Future Development. SHS Web of Conferences. 2023; Vol. 168. Available at: https://doi.org/10.1051/shsconf/202316803025.
6. Korotkina I.B. Academic writing: on the way to interdisciplinary unity//Higher education in Russia.2013. № 3. С. 136–142.
7. Amiralieva, R.Z. Basics of Academic and Research Writing: guidance manual. – Moscow: MAKS Press, 2024. – 100 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 403-408.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 403-408.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.414.2

# РАЗРАБОТКА АРХИТЕКТУРЫ ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ МОНИТОРИНГА ЦЕН НА ПРОДУКТЫ ПИТАНИЯ

***Максим Сергеевич Веденикov[1]✉, Юрий Сергеевич Федяев[2]***
*[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]vedenikov.maksimka@mail.ru✉*
*[2]fedyaevys@oreluniver.ru, https://orcid.org/0000-0001-5241-8327*

***Аннотация.*** *Работа посвящена разработке архитектуры веб-приложения для мониторинга цен на продукты питания. Выполнен анализ популярных архитектур приложений и сделаны выводы об их преимуществах и недостатках. Предложена архитектура веб-приложения для мониторинга цен на продукты питания.*

***Ключевые слова:*** *архитектура, разработка, сервис, монолит, микросервис, веб-приложение, REST*

Conference paper

# DEVELOPMENT OF WEB APPLICATION ARCHITECTURE FOR MONITORING FOOD PRICES

***Maksim S. Vedenikov[1], Yuri S. Fedyaev[2]✉***
*[1,2]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]vedenikov.maksimka@mail.ru,*
*[2]fedyaevys@oreluniver.ru✉, https://orcid.org/0000-0001-5241-8327*

***Abstract.*** *The work is devoted to the development of web application architecture for monitoring food prices. The analysis of popular application architectures is performed and conclusions are made about their advantages and disadvantages. The architecture of web application for monitoring food prices is proposed.*

***Keywords:*** *architecture, development, service, monolith, micro service, web application, REST*

© Веденикov М. С., Федяев Ю. С., 2024

## 1. Введение

Работа посвящена разработке архитектуры веб-приложения для мониторинга цен на продукты питания. На сегодняшний день наиболее популярными являются монолитная архитектура и микросервисная архитектура. В статье анализируются эти подходы к разработке веб-приложения и выбирается наиболее подходящий для решения поставленной задачи.

Веб-приложение для мониторинга цен на продукты питания представляет из себя RESTfull веб-сервис [1]. Он позволяет отслеживать цены в разных магазинах, сравнивать их и отслеживать динамику цен на интересующие людей продукты. Приложение разрабатывается на языке программирования Java с использованием фреймворка Spring. Для упрощения разработки используется такое развитие этой технологии как Spring Boot. Данные сервиса будут храниться в реляционной базе данных. Для управления базой данных используется СУБД PostgreSQL. Для ускорения работы сервиса часть данных, связанных с отслеживанием динамики цен на продукты питания, будут храниться в NoSQL базе данных MongoDB. Также для связывания отдельных компонентов будет использоваться распределённый программный брокер сообщений Kafka.

## 2. Анализ популярных архитектур

Выбор правильной архитектуры приложения — залог его успеха в будущем, поэтому нужно определиться с этим заранее. Сравним два популярных и крайне действенных подхода — монолитную и микросервисную архитектуру [2]. Обсудим сильные и слабые стороны каждой из архитектур, после чего будет понятно, что использовать.

Начнем с традиционной монолитной архитектуры. Структурная схема веб-приложения в этом случае показана на рисунке 1. В этом случае все компоненты приложения крепко связаны между собой. В контексте веб-приложений это значит, что клиентский и серверный код находятся внутри одного проекта.

Главный плюс монолитов — их простота и лёгкость разработки. Компоненты монолитной системы тесно связаны, поэтому писать и тестировать такой код сравнительно легко. Поддерживается единая база кода, что упрощает понимание общей логики приложения.

К явным достоинствам монолитной архитектуры относятся производительность и эффективность. Поскольку все компоненты выполняются в рамках одного процесса, то отпадает нужда в межпроцессном взаимодействии.

Ещё один плюс монолитов — среда совместно используемых данных. У всех компонентов есть прямой доступ к той же базе данных, что позволяет беспрепятственно обмениваться этими данными. Тем самым устраняется необходимость в сложных механизмах синхронизации.

Монолиты кажутся достойным решением, но у них есть свои недочеты. В монолитной архитектуре хватает изъянов. Один из них — масштабирование. Масштабировать монолиты не так уж просто, ведь всё приложение масштабируется как единое целое. В итоге, если дополнительные ресурсы нужны только для определенных компонентов, то это может вылиться в их нерациональное использование.

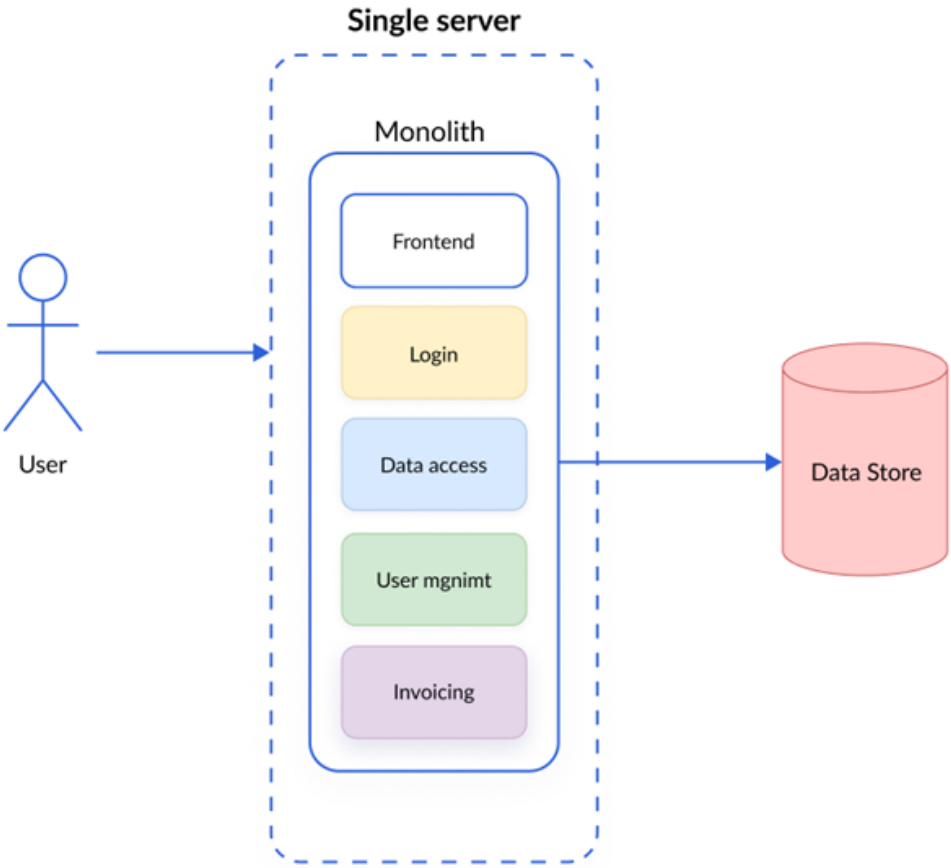



Рисунок 1 – Монолитная архитектура.

Один из плюсов монолитов — их внутренняя производительность. В этом же заключается и проблема. Весь монолит потребляет ресурсы сервера, на котором работает (будь то выделенный сервер или виртуальная машина). Если у вас есть сложный продукт с множеством опций, то вся система начнёт «зависать», когда для работы одной из таких функций потребуются дополнительные ресурсы. Представьте себе ситуацию: пользователь загрузил большой файл, который нужно обработать, и это сказалось на процессе входа в приложение. Пользовательский опыт в данном случае будет негативным.

Монолиты часто «завязаны» на определенном стеке технологий. Добавление новых технологий или фреймворков грозит перепроектированием всего приложения. Такое скудное технологическое разнообразие ограничивает ваши возможности разработки и замедляет дальнейшее развитие приложения.

Что до развёртывания и обслуживания, то монолитные архитектуры очень громоздкие. Любые изменения или обновления требуют повторного развертывания всего приложения, и это ведёт к увеличению времени простоя и возможным сбоям.

Итого: монолитная архитектура предлагает простоту и эффективность; в ней используется единая база кода и общие данных. Но в монолитах отмечаются явные проблемы с масштабируемостью, развертыванием/обслуживанием, а также ограниченное технологическое разнообразие.

Проведём анализ микросервисной архитектуры. Схематичное изображение архитектуры приложения в этом случае показано на рисунке 2.

Суть микросервисов заключается в том, что они разбивают приложения на более мелкие автономные сервисы, которые взаимодействуют друг с другом.

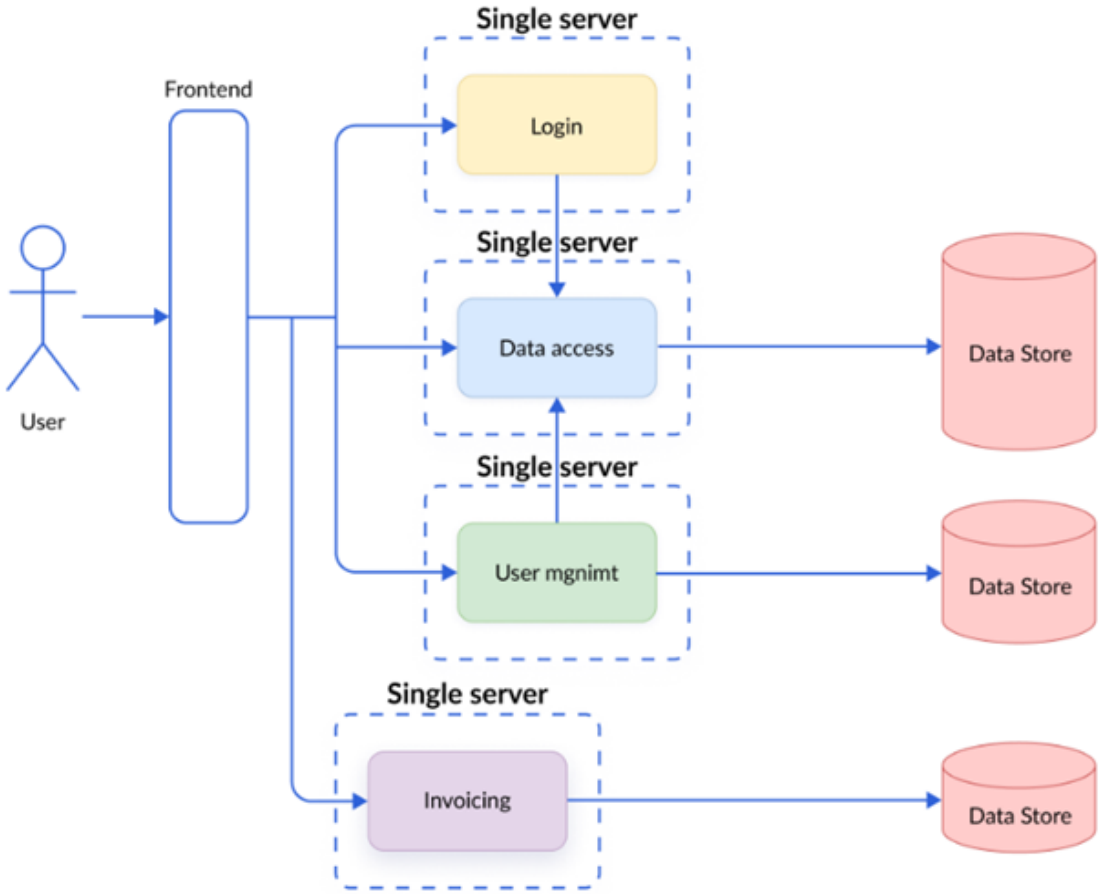



Рисунок 2 – Микросервисная архитектура.

Одним из главных преимуществ данной архитектуры служит масштабируемость и гибкость. Каждый микросервис можно масштабировать независимо от других, исходя от его конкретных потребностей. Это позволяет эффективно распределять ресурсы и обеспечивает оптимальную производительность, особенно при работе с меняющимися требованиями к рабочей нагрузке.

Для микросервисной архитектуры характерно технологическое разнообразие и автономность. Каждый сервис работает обособленно, так что можно подобрать для него свои технологии и фреймворки, если только их интерфейсы не зависят от технологий (например, используют HTTP API или веб-сокеты). Это позволяет выбирать лучшие инструменты для реализации конкретных задач. Микросервисы похожи на динамичную экосистему, в которой каждый сервис может эволюционировать и улучшаться по мере необходимости.

Непрерывная доставка и развертывание — ещё одни важный плюс микросервисной архитектуры. Сервисы не имеют привязки друг к другу, благодаря чему их можно разрабатывать, тестировать и развёртывать обособленно. Это сокращает срок вывода на рынок, ведь новые функции и обновления можно развёртывать без изменения всего приложения. У вас есть гибкий набор сервисов, готовых адаптироваться и улучшаться в любое время.

Это позволяет работать над каждым микросервисом сразу нескольким командам, благодаря чему существенно ускоряется время разработки.

В целом, микросервисная архитектура кажется довольно удобной и продуманной. Но, в микросервисах есть ряд существенных недостатков, о которых необходимо знать.

Одним из недочётов микросервисной архитектуры являются сложности с управлением распределённой системой. Для координации взаимодействия между сервисами, обеспечения согласованности данных и обработки сбоев необходимо скрупулезное проектирование и внедрение. Ведь, по сути, если у вас есть множество микросервисов, то им нужно как-то общаться между собой, обмениваться данными. А как быть, если один из них вдруг выйдет из строя? Как восстановить после этого другие сервисы? Где каждый сервис будет хранить свои данные? Все эти вопросы необходимо решить до запуска продукта.

Также следует учитывать издержки на координацию и взаимодействие процессов. Чем больше сервисов становится, тем сложнее поддерживать их взаимодействие и согласованность данных. Получается, что для реализации эффективных процессов взаимодействия нужны дополнительные средства (например, API или очереди сообщений).

Итого: микросервисная архитектура может похвастаться масштабируемостью, технологическим разнообразием и непрерывной доставкой. Однако всё это сопряжено с рядом трудностей, связанных со сложностью этой архитектуры, распределёнными системами и взаимодействием между сервисами. Обобщим всё выше сказанное в таблице, приведённой ниже.

Таблица – Сравнение монолитной и микросервисной архитектуры.

| **Аспект** | **Монолитная архитектура** | **Микросервисная архитектура** |
|---|---|---|
| Микросервисная архитектура | Одна база кода; простые процессы разработки и развёртывания | Децентрализованная разработка; каждый сервис разрабатывается и развёртывается по отдельности |
| Масштабируемость и производительность | Масштабируемость всего приложения; возможно нерациональное использование ресурсов | Детализированная масштабируемость; оптимальное распределение ресурсов, исходя из потребностей различных сервисов |
| Обслуживание и расширяемость | Единая база кода; проще понять и легче обслуживать | Независимые сервисы; проще добавлять новые функции, не изменяя все приложение |
| Технологическое разнообразие и автономность | Ограниченный стек технологий; привязка к определённому набору технологий | Разнообразие технологий, доступных для каждого сервиса: можно выбрать, какие технологии подойдут лучше |
| Отказоустойчивость | Единая точка отказа. Отказы влияют на всё приложение | Изолированные отказы. Отказоустойчивость лучше |

| Аспект | Монолитная архитектура | Микросервисная архитектура |
|---|---|---|
| Координация и взаимодействие | Прямые вызовы функций; более простая коммуникация и обмен данными | Взаимодействие между сервисами; дополнительные средства для координации и согласованности данных |

## 3. Заключение

Разрабатываемый проект является достаточно сложным. В нём можно выделите отдельные модули, которые занимаются только своей задачей. Также стоит отметить, что разрабатывается веб-приложение, а это значит, что возможна большая нагрузка на отдельные компоненты системы.

Для данного проекта наиболее подходящим выбором будет микросервисная архитектура. Она позволит выделить компоненты системы в отдельные микросервисы. Данные микросервисы будут связываться между собой по REST. Микросервисы, связанные с отслеживанием и сбором статистики цен на продукты питания могут общаться с помощью Kafka.

При микросервисной архитектуре также упрощается процесс развёртывания приложения. Его можно развернуть, используя контейнеры Docker, а для управления контейнерами можно использовать оркестратор Kubernetes, который решает задачу контроля за контейнерами. Оркестратор даёт возможность автоматизировать программное горизонтальное масштабирование системы, что позволит вовремя подстраивать систему под нагрузку.

## Список источников

1. Введение в REST API — RESTful веб-сервисы // Хабр URL: https://habr.com/ru/articles/483202/ (дата обращения: 18.11.2024).

2. Монолитная и микросервисная архитектура. Сравнение // Хабр URL: https://habr.com/ru/companies/haulmont/articles/758780/ (дата обращения: 18.11.2024).

## References

1. Introduction to REST API - RESTful Web Services // Spring Boot Tutorial URL: https://www.springboottutorial.com/introduction-to-rest-api (date accessed: 18.11.2024).

2. Monolith vs Microservice Architecture: A Comparison // Camunda URL: https://camunda.com/blog/2023/08/monolith-vs-microservice-architecture-comparison/ (date accessed: 18.11.2024).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 409-416.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 409-416.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.048

# ВОЗМОЖНОСТИ ИНТЕГРАЦИИ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ПЕДИАТРИЧЕСКУЮ ПРАКТИКУ

***Наталья Александровна Гончарова[1]✉, Валерия Михайловна Кащевская[2]***
*[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]n.a.goncharowa@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-1404-2685*
*[2]lera.kashevskaya@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0004-8936-7665*

***Аннотация.*** *В статье рассмотрены основные направления использования технологий искусственного интеллекта (ИИ) в педиатрической практике, выделены вызовы и ограничения, дана оценка его текущего состояния. Особое внимание, по мнению авторов, должно быть уделено не только исключительно технологическим, но и этическим и правовым аспектам внедрения ИИ, в частности, в педиатрию, а также повышению уровня доверия пациентов к ИИ-технологиям в медицине. На основе проведённого анализа выявлены потенциальные возможности применения технологий ИИ в педиатрической практике. Сделан вывод, что интеграция ИИ в современную медицину открывает качественно новые возможности для трансформации педиатрической практики в нашей стране и за рубежом.*

***Ключевые слова:*** *технологии искусственного интеллекта (ИИ), цифровая трансформация здравоохранения, педиатрия.*

Conference paper

# THE POSSIBILITIES OF INTEGRATING ARTIFICIAL INTELLIGENCE TECHNOLOGIES INTO PEDIATRIC PRACTICE

***Natalia Al. Goncharova[1]✉, Valeria M. Kashchevskay[2]***
*[1,2]Orel State University named after I.S.Turgenev, Orel, Russia*
*[1]n.a.goncharowa@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-1404-2685*
*[2]lera.kashevskaya@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0004-8936-7665*

***Annotation****. The article considers the main directions of using artificial intelligence (AI) technologies in pediatric practice, identifies challenges and limitations, and assesses its current state. According to the authors, special attention*

© Гончарова Н. А., Кащевская В. М., 2024

*should be paid not only exclusively to technological, but also to ethical and legal aspects of the introduction of AI, in particular in pediatrics, as well as to increasing the level of patient confidence in AI technologies in medicine. Based on the analysis, the potential application of AI technologies in pediatric practice has been identified. It is concluded that the integration of AI into modern medicine opens up qualitatively new opportunities for the transformation of pediatric practice in our country and abroad.*

***Keywords:*** *artificial intelligence (AI) technologies, digital transformation of healthcare, pediatrics.*

## 1. Введение

Происходящая в мире цифровая трансформация здравоохранения, ставшая одним из определяющих трендов последних полутора десятилетий, продолжает стремительно набирать обороты. Внедрение инновационных технологий, таких как медицинские информационные системы (МИС), электронные медицинские карты (ЭМК), системы поддержки принятия врачебных решений (СППВР), мобильное здравоохранение (mHealth) и телемедицина, кардинальным образом преобразует ландшафт медицинской отрасли. Благодаря этим нововведениям происходит ряд фундаментальных положительных сдвигов: повышается доступность и качество медицинской помощи, оптимизируются процессы диагностики и лечения, улучшается коммуникация между врачами и пациентами, а также обеспечивается более эффективное управление ресурсами здравоохранения.

Вместе с тем, потенциал модернизации здравоохранения отнюдь не исчерпывается уже реализованными проектами цифровизации. На горизонте возникают ещё более амбициозные и многообещающие перспективы, в том числе связанные с изучением и внедрением технологий искусственного интеллекта (ИИ). Так, согласно статистическим данным, с 2018 по 2022 год выручка от применения ИИ в сфере здравоохранения по всему миру уже составила 6,16 миллиарда долларов [2].

## 2. Основной текст статьи

ИИ, представляющий собой совокупность методов и инструментов создания интеллектуальных компьютерных систем, способных обучаться, рассуждать и действовать подобно человеку, как показывает практический опыт, обладает колоссальным потенциалом для трансформации различных областей медицины, в том числе и педиатрии. Мы разделяем точку зрения специалистов, что именно она, будучи одной из центральных сфер здравоохранения, призванной обеспечивать здоровье и благополучие подрастающего поколения, выступает приоритетным направлением для внедрения ИИ-решений. Это обусловлено рядом специфических особенностей педиатрической практики. Во-первых, дети, в силу анатомо-физиологических и психологических особенностей, зачастую не способны четко артикулировать свои жалобы и симптомы, что затрудняет диагностический процесс. ИИ-системы, анализирующие разнородные данные (включая результаты лабораторных и инструментальных исследований, генетическую информацию, сведения из

электронных медкарт), могут помочь врачам более точно и оперативно ставить диагнозы. Во-вторых, педиатрия характеризуется высокой вариабельностью клинических состояний и реакций на лечение в зависимости от возраста ребенка, что требует персонализированного подхода. ИИ-алгоритмы способны учитывать индивидуальные особенности маленьких пациентов и предлагать оптимальные терапевтические стратегии. В-третьих, обеспечение преемственности и непрерывности медицинского наблюдения имеет критическое значение для гармоничного роста и развития детей. ИИ может помочь в создании интегрированных систем мониторинга здоровья, охватывающих все этапы взросления ребенка. Основные направления применения ИИ в педиатрии представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Основные направления применения ИИ в педиатрии.

| **Сфера применения** | **Клинические эффекты** |
|---|---|
| Диагностика заболеваний | Повышение точности и скорости диагностики |
| Прогнозирование течения и исходов | Оптимизация тактики лечения, снижение частоты осложнений |
| Персонализированная терапия | Повышение эффективности и безопасности лечения |
| Мониторинг здоровья | Улучшение контроля над хроническими заболеваниями, снижение частоты госпитализаций |
| Поддержка принятия клинических решений | Повышение качества медицинской помощи, снижение риска врачебных ошибок |

Следует отметить, что потенциал ИИ в педиатрии выходит далеко за рамки совершенствования отдельных аспектов медицинской практики. Речь идёт о фундаментальном сдвиге парадигмы – от традиционных методов, основанных на широких категориях и обобщениях, к персонализированному подходу, учитывающему индивидуальные особенности каждого «маленького» пациента [4]. ИИ, благодаря способности анализировать огромные массивы разнородных данных (клинических, генетических, инструментальных и др.), позволяет выявлять сложные закономерности и взаимосвязи, недоступные человеческому восприятию, открывая путь к медицине высокой точности и индивидуализации [14].

Вместе с тем, реализация потенциала ИИ в педиатрии сопряжена с целым рядом вызовов и ограничений, требующих тщательного рассмотрения и преодоления. Перечислим некоторые из них. Так, технологические барьеры включают в себя проблемы качества и репрезентативности данных, на которых обучаются ИИ-алгоритмы [5]. Медицинские данные, особенно в педиатрическом контексте, часто характеризуются неполнотой, неточностью и неоднородностью, что может негативно сказываться на эффективности ИИ-моделей [10]. Кроме того, интерпретируемость и объяснимость ИИ-решений остается серьезным вызовом, поскольку многие алгоритмы представляют собой "чёрный ящик", затрудняющий понимание логики их работы [12], что, в свою очередь, порождает вопросы доверия и ответственности при использовании ИИ в клинической практике.

Отдельного внимания заслуживают этические и правовые аспекты применения ИИ в педиатрии. Работа с уязвимой категорией пациентов, какими и являются дети, налагает особые требования к обеспечению конфиденциальности, информированного согласия и защиты персональных данных. В связи с чем необходима разработка чётких этических принципов и регуляторных норм, регламентирующих использование ИИ в педиатрической практике и распределяющих зоны ответственности между врачами и ИИ-системами.

Несмотря на существующие ограничения, уже сегодня мы наблюдаем многообещающие примеры применения ИИ в различных областях педиатрии. Одним из наиболее перспективных направлений является использование ИИ для оптимизации процессов триажа в отделениях неотложной помощи. В данном случае ИИ-алгоритмы, анализируя широкий спектр данных (демографические, клинические, лабораторные и др.), способны быстро и точно выявлять пациентов, нуждающихся в неотложной помощи, обеспечивая своевременное распределение ресурсов и улучшая клинические исходы [8]. Например, исследование Sarty J., Fitzpatrick E.A., Taghavi M. [13] продемонстрировало эффективность модели машинного обучения XGBoost в предсказании случаев, когда пациенты покидают отделение неотложной помощи, не дождавшись осмотра врача. Раннее выявление таких ситуаций позволяет разрабатывать стратегии, направленные на удержание пациентов и обеспечение им необходимой помощи.

Другим многообещающим направлением является использование ИИ для мониторинга и прогнозирования течения заболеваний у детей. В данном случае ИИ-системы, интегрированные с носимыми медицинскими устройствами и датчиками, способны в режиме реального времени отслеживать физиологические параметры ребенка и выявлять тревожные симптомы на ранних стадиях, что позволяет своевременно принимать профилактические меры [5].

ИИ находит применение и в диагностике заболеваний у детей, в том числе в интерпретации медицинских изображений. Глубокие свёрточные нейронные сети, обученные на больших массивах радиологических данных, демонстрируют впечатляющие результаты в выявлении патологий на рентгенограммах, КТ и МРТ-изображениях [9]. Например, ИИ-система, разработанная Hale A.T. [7], обученная на клинических и радиологических данных, показала чувствительность 99,73% и точность 98,19% в выявлении клинически значимых травматических повреждений мозга у детей. Такие системы могут стать ценным инструментом поддержки принятия решений для врачей-педиатров, особенно в условиях ограниченной доступности квалифицированных специалистов-радиологов.

Отметим также возможности применения ИИ для управления стрессом и болью у детей при проведении медицинских процедур. Инновационные решения – например, ИИ-усиленные социально-ассистивные роботы (CAP) (от англ. sociallyassistiverobot – SAR), создают персонализированную поддерживающую среду, направленную на снижение дискомфорта ребенка во время болезненных

манипуляций, таких как постановка периферического венозного катетера или наложение хирургических швов [5]. CAP устанавливают контакт с ребенком через диалог, выражение эмоций, юмор и элементы когнитивно-поведенческой терапии, дополняя усилия медицинского персонала и родителей по созданию комфортной атмосферы.

Однако, несмотря на впечатляющие достижения в области применения ИИ в педиатрии, многие необходимые пациентам проекты всё ещё находятся на стадии исследований и клинических испытаний, и их широкомасштабное внедрение в реальную клиническую практику сопряжено с рядом проблем и ограничений. Помимо уже упомянутых технологических и этических вызовов, серьёзным препятствием является недостаток качественных и репрезентативных наборов данных в педиатрии [11]. Ведь дети составляют лишь незначительную долю популяции, и сбор больших объёмов педиатрических данных затруднён. Не менее важным аспектом выступает обеспечение внешней валидации ИИ-моделей. Алгоритмы, показавшие высокую эффективность на одном наборе данных, могут демонстрировать существенно худшие результаты при применении к другим популяциям. Это актуализирует необходимость тщательного всестороннего тестирования и валидации ИИ-систем на различных наборах данных, прежде чем они могут быть рекомендованы для широкого клинического использования. Наконец, успешная интеграция ИИ в педиатрическую практику требует не только технологических решений, но и подготовки квалифицированных кадров, способных эффективно взаимодействовать с предлагаемыми интеллектуальными системами. Врачи-педиатры должны обладать знаниями и навыками для понимания возможностей и ограничений ИИ, интерпретации результатов его работы и включения этой информации в процесс принятия клинических решений.

Анализируя состояние исследований ИИ в педиатрии, нельзя не отметить разницу в нормативно-правовом закреплении роли ИИ-систем или ИИ в медицине между США, странами Европейского Союза (ЕС) и Россией. В то время как Управление по санитарному надзору за качеством пищевых продуктов и медикаментов США (FDA) рассматривает ИИ-системы в медицине как "программное обеспечение медицинского назначения" и предлагает рекомендации по их разработке и внедрению [5], Евросоюз в своем недавно принятом Законе об искусственном интеллекте (AIAct) относит применение ИИ в здравоохранении к категории «высокого риска» [5]. В России же внедрение ИИ в медицину происходит достаточно медленно, что выражается даже в отсутствии системной нормативной базы. Несмотря на то, что в стране разрабатываются стандарты ИИ в медицине, и на начало 2023 года вступил в силу ряд национальных государственных стандартов (ГОСТ Р 59921.0-2022 «Системы искусственного интеллекта в клинической медицине» и другие), вопросы применения ИИ конкретно в педиатрии пока не регламентированы [1]. Более того, согласно исследованиям, в России наблюдается низкий уровень доверия к ИИ в медицине – в 2023 году лишь 5% россиян выразили готовность полностью полагаться на технологию искусственного интеллекта при постановке диагнозов и назначении лечения. При этом среди молодого поколения (до 34 лет) уровень

доверия выше – 60% респондентов этой возрастной группы в той или иной степени доверяют ИИ в здравоохранении [6].

Однако, несмотря на существующее недоверие к технологиям ИИ, их разработка и внедрение в отечественную медицину, включая педиатрию, продолжается. Согласно перечню одобренных Росздравнадзором отечественных медицинских изделий на основе технологий искусственного интеллекта (по состоянию на 2023 год), можно выделить ряд разработок, которые, хотя и не созданы специально для педиатрической практики, но могут быть адаптированы для применения в детской медицине (таблица 2) [1].

Таблица 2 – Медицинские системы с ИИ-решениями в российском сегменте здравоохранения.

| **Категория ИИ-систем** | **Примеры разработок** | **Потенциал применения в педиатрии** |
|---|---|---|
| Системы анализа медицинской визуализации | – Botkin.AI (ИнтеллоДжик).<br>– ЦЕЛЬС (Медицинские скрининг системы).<br>– ПТМ (модули для анализа флюорограмм). | – Анализ рентгенограмм органов грудной клетки у детей.<br>– Диагностика патологий головного мозга по КТ.<br>– Скрининговая диагностика легочных заболеваний. |
| Системы поддержки принятия врачебных решений | – WEBBIOMED (К-ЛАБ).<br>– СберМедИИ.<br>– JEMYS. | – Помощь в диагностике детских заболеваний.<br>– Прогнозирование вероятных диагнозов.<br>– Поддержка телемедицинских консультаций в педиатрии. |
| Специализированные диагностические системы | – CareMentorAI (различныемодули).<br>– SiberiaLungs.<br>– DENTOMO. | – Диагностика COVID-19 у детей по КТ.<br>– Мониторинг патологий легких.<br>– Стоматологическая диагностика в детском возрасте. |
| Системы анализа и обработки медицинских данных | – CareMentor AI (нейросетевые решения).<br>– ЦЕЛЬС (автоматический анализ). | – Автоматизация анализа медицинских изображений.<br>– Создание структурированных педиатрических баз данных. |

## 3. Заключение

Подводя итог, можно констатировать, что ИИ открывает качественно новые возможности для трансформации педиатрической практики как в нашей стране, так и за рубежом. От оптимизации процессов триажа и мониторинга состояния до ранней диагностики жизнеугрожающих состояний и персонализации терапии – спектр потенциальных приложений ИИ охватывает практически все аспекты педиатрии. Учитывая стремительный прогресс в развитии интеллектуальных технологий и накопление больших данных в здравоохранении, можно предположить, что в обозримом будущем ИИ станет одним из востребованных инструментов в арсенале врачей-педиатров. Способность ИИ анализировать огромные массивы разнородной информации, выявлять скрытые закономерности и предлагать персонализированные решения может привести к настоящей революции в педиатрической практике, знаменуя начало технологически новой эры в медицине детского возраста.

## Список источников


1. Система государственного стимулирования использования сервисов искусственного интеллекта в здравоохранении на основе анализа российского и зарубежного опыта. Аналитический отчет 2023 // NtechLAB. – URL: https://clck.ru/3EHq5D.
2. Artificial intelligence (AI) revenues for healthcare applications in 2018 and 2022* // Statista. – URL: https://www.statista.com/statistics/743877/worldwide-artificial-intelligence-market-healthcare-application/.
3. Char D.S., Shah N.H., Magnus D. Implementing Machine Learning in Health Care – Addressing Ethical Challenges. N Engl J Med 2018;378:981 – 3. doi:10.1056/NEJMp1714229.
4. Cirillo D., Valencia A.. Big data analytics for personalized medicine. CurrOpinBiotechnol2019;58:161–7. doi:10.1016/j.copbio.2019.03.004.
5. Di Sarno L., Caroselli A., Tonin G., et al. Artificial Intelligence in Pediatric Emergency Medicine: Applications, Challenges, and Future Perspectives. Preprints 2024; doi:10.20944/preprints202404.1642.v1.
6. Do you think it is possible to trust Artificial Intelligence (AI) algorithms in making diagnoses, prescribing treatment, and research and monitoring of patients' diseases? // Statista. – URL: https://www.statista.com/statistics/1269312/trust-in-ai-healthcare-by-age-russia/.
7. Hale A.T., Stonko D.P., Lim J., et al. Using an artificial neural network to predict traumatic brain injury. J NeurosurgPediatr2019;23:219–26. doi:10.3171/2018.8.PEDS18370.
8. Kwon J., Jeon K.-H., Lee M., et al. Deep Learning Algorithm to Predict Need for Critical Care in Pediatric Emergency Departments. PediatrEmerg Care 2021;37:e988–94. doi:10.1097/PEC.0000000000001858.
9. Miyagawa T., Saga M., Sasaki M., et al. Statistical and machine learning approaches to predict the necessity for computed tomography in children with mild traumatic brain injury. PLoS One 2023;18:e0278562. doi:10.1371/journal.pone.0278562.
10. Mueller B., Kinoshita T., Peebles A., et al. Artificial intelligence and machine learning in emergency medicine: a narrative review. Acute Med Surg2022;9:1–10. doi:10.1002/ams2.740.
11. Ramgopal S., Sanchez-Pinto L.N., Horvat C.M., et al. Artificial intelligence-based clinical decision support in pediatrics. Pediatr Res 2023;93:334–41. doi:10.1038/s41390-022-02226-1.
12. Rudin C. Stop explaining black box machine learning models for high stakes decisions and use interpretable models instead. Nat Mach Intell2019;1:206–15. doi:10.1038/s42256-019-0048-x.
13. Sarty J, Fitzpatrick E.A., Taghavi M., et al. Machine learning to identify attributes that predict patients who leave without being seen in a pediatric emergency department. CJEM 2023;25:689–94. doi:10.1007/s43678-023-00545-8.
14. Sidey-Gibbons JAM, Sidey-Gibbons CJ. Machine learning in medicine: a practical introduction to natural language processing. BMC MedResMethodol2021;21:158. doi:10.1186/s12874-021-01347-1.

## References


1. The system of state incentives for the use of artificial intelligence services in healthcare based on the analysis of Russian and foreign experience. Analytical report 2023 // NtechLab. – URL: https://clck.ru/3EHq5D

2. Artificial intelligence (AI) revenues for healthcare applications in 2018 and 2022* // Statista. – URL: https://www.statista.com/statistics/743877/worldwide-artificial-intelligence-market-healthcare-application/

3. Char D.S., Shah N.H., Magnus D. Implementing Machine Learning in Health Care – Addressing Ethical Challenges. N Engl J Med 2018;378:981 – 3. doi:10.1056/NEJMp1714229.

4. Cirillo D., Valencia A.. Big data analytics for personalized medicine. CurrOpinBiotechnol2019;58:161–7. doi:10.1016/j.copbio.2019.03.004.

5. Di Sarno L., Caroselli A., Tonin G., et al. Artificial Intelligence in Pediatric Emergency Medicine: Applications, Challenges, and Future Perspectives. Preprints 2024; doi:10.20944/preprints202404.1642.v1.

6. Do you think it is possible to trust Artificial Intelligence (AI) algorithms in making diagnoses, prescribing treatment, and research and monitoring of patients' diseases? // Statista. – URL: https://www.statista.com/statistics/1269312/trust-in-ai-healthcare-by-age-russia/.

7. Hale A.T., Stonko D.P., Lim J., et al. Using an artificial neural network to predict traumatic brain injury. J NeurosurgPediatr2019;23:219–26. doi:10.3171/2018.8.PEDS18370.

8. Kwon J., Jeon K.-H., Lee M., et al. Deep Learning Algorithm to Predict Need for Critical Care in Pediatric Emergency Departments. PediatrEmerg Care 2021;37:e988–94. doi:10.1097/PEC.0000000000001858.

9. Miyagawa T., Saga M., Sasaki M., et al. Statistical and machine learning approaches to predict the necessity for computed tomography in children with mild traumatic brain injury. PLoS One 2023;18:e0278562. doi:10.1371/journal.pone.0278562.

10. Mueller B., Kinoshita T., Peebles A., et al. Artificial intelligence and machine learning in emergency medicine: a narrative review. Acute Med Surg2022;9:1–10. doi:10.1002/ams2.740.

11. Ramgopal S., Sanchez-Pinto L.N., Horvat C.M., et al. Artificial intelligence-based clinical decision support in pediatrics. Pediatr Res 2023;93:334–41. doi:10.1038/s41390-022-02226-1.

12. Rudin C. Stop explaining black box machine learning models for high stakes decisions and use interpretable models instead. Nat Mach Intell2019;1:206–15. doi:10.1038/s42256-019-0048-x.

13. Sarty J, Fitzpatrick E.A., Taghavi M., et al. Machine learning to identify attributes that predict patients who leave without being seen in a pediatric emergency department. CJEM 2023;25:689–94. doi:10.1007/s43678-023-00545-8.

14. Sidey-Gibbons JAM, Sidey-Gibbons CJ. Machine learning in medicine: a practical introduction to natural language processing. BMC MedResMethodol2021;21:158. doi:10.1186/s12874-021-01347-1.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 417-421.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 417-421.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.056 + 621.391 + 535.3

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ В КВАНТОВЫХ И ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СВЯЗИ

***Антон Федорович Ермаков[1]✉, Иван Сергеевич Зимин[2]***
*[1,2]Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*
*[1]a.f.ermakov@yandex.ru✉, [2]i.s.zimin@mtuci.ru*

***Аннотация.*** *В данной статье рассматриваются квантовые и оптические системы связи с точки зрения обеспечения информационной безопасности. Анализируются основные отличительные особенности данных технологий, включая методы защиты и уязвимости. Особое внимание уделено квантовому распределению ключей (QKD) как высокоэффективному средству защиты от перехвата. Представлены сравнительные характеристики и методы защиты для квантовых и оптических систем, подчеркивающие их потенциал для создания безопасных телекоммуникационных сетей.*

***Ключевые слова:*** *квантовая криптография, квантовое распределение ключей, оптические системы связи, информационная безопасность, устойчивость к перехвату.*

Conference paper

# COMPARATIVE ANALYSIS OF INFORMATION SECURITY IN QUANTUM AND OPTICAL COMMUNICATION SYSTEMS

***Anton F. Ermakov[1]✉, Ivan S. Zimin[2]***
*[1,2]Moscow technical university of communications and informatics, Moscow, Russia*
*[1]a.f.ermakov@yandex.ru✉, [2]i.s.zimin@mtuci.ru*

***Abstract.*** *This article examines quantum and optical communication systems from the perspective of information security. The primary distinctive features of these technologies are analyzed, including protection methods and vulnerabilities. Special attention is given to Quantum Key Distribution (QKD) as a highly effective means of interception protection. Comparative characteristics and protection methods for quantum and optical systems are presented, highlighting their potential for creating secure telecommunications networks.*

© Ермаков А. Ф., Зимин И. С., 2024

***Keywords:*** *quantum cryptography, quantum key distribution, optical communication systems, information security, interception resistance.*

## 1. Введение

Современные телекоммуникационные технологии активно развиваются в направлении повышения скорости и надежности передачи данных. Квантовые и оптические системы связи играют значительную роль в этом процессе, обеспечивая высокую пропускную способность и минимальные задержки. В отличие от традиционных сетей, которые сталкиваются с ограничениями по устойчивости к угрозам, эти передовые системы позволяют решать задачи, связанные с безопасностью и производительностью, за счет уникальных физических свойств квантовых и оптических каналов. Такой подход особенно востребован в условиях быстро растущего объема данных и потребности в обеспечении их конфиденциальности и целостности.

С развитием методов атак на классические криптографические системы усиливается необходимость применения новых защитных механизмов, способных противостоять угрозам будущего. Квантовая криптография, в частности, квантовое распределение ключей (QKD), предоставляет качественно новый уровень защиты, основанный на фундаментальных законах квантовой механики. В отличие от традиционных методов, квантовые системы обладают способностью обнаруживать вмешательства при передаче данных, что делает их практически непреодолимыми для перехвата. Таким образом, квантовые и оптические системы связи не только расширяют возможности современной телекоммуникационной инфраструктуры, но и закладывают основу для будущих стандартов информационной безопасности.

## 2. Отличительные особенности информационной безопасности квантовых и оптических систем

В условиях стремительного развития телекоммуникаций и увеличения объемов передаваемых данных вопрос информационной безопасности выходит на первый план. Квантовые и оптические системы связи предлагают инновационные подходы к защите информации, обеспечивая высокий уровень устойчивости к угрозам благодаря уникальным физическим принципам и технологиям.

Квантовые и оптические системы связи представляют собой передовые технологии передачи информации, обеспечивающие новые возможности для повышения уровня информационной безопасности. Квантовые системы связи используют фундаментальные принципы квантовой механики, такие как запутанность и суперпозиция, для защиты данных. Основной метод, применяемый в таких системах – квантовое распределение ключей (Quantum Key Distribution, QKD), позволяющее выявлять попытки несанкционированного доступа. Любое вмешательство в квантовый канал мгновенно изменяет состояние квантовых частиц, делая перехват информации обнаружимым и обеспечивая защиту от потенциальных атак. Такая способность к самопроверке

делает квантовые системы связи исключительно надежными для передачи критически важной информации.

Оптические системы связи используют свет в качестве среды передачи данных, обеспечивая высокую скорость и пропускную способность. Основным недостатком оптических систем является их подверженность перехвату из-за отсутствия встроенного механизма самоконтроля, характерного для квантовых систем. Чтобы компенсировать эту уязвимость, оптические системы требуют внедрения дополнительных мер безопасности, таких как шифрование данных и спектральное кодирование. Несмотря на высокую пропускную способность, оптические системы менее устойчивы к атакам и нуждаются в более развитой инфраструктуре безопасности по сравнению с квантовыми аналогами.

Таблица 1 – Сравнительные характеристики квантовых и оптических систем связи с точки зрения информационной безопасности.

| Характеристика | Квантовые системы связи | Оптические системы связи |
|---|---|---|
| Принцип работы | Квантовая механика | Световые волны |
| Метод защиты | Квантовое распределение ключей (QKD) | Шифрование, спектральное кодирование |
| Устойчивость к перехвату | Высокая (обнаружение при вмешательстве) | Средняя (требует дополнительных мер) |
| Пропускная способность | Средняя | Высокая |
| Основная уязвимость | Влияние внешних факторов на квантовые состояния | Подверженность перехвату сигналов |

Представленные данные показывают, что квантовые системы связи обладают высокой устойчивостью к попыткам перехвата за счет применения уникальных квантово-механических принципов. Оптические системы связи, несмотря на преимущество в пропускной способности, требуют дополнительных мер для обеспечения безопасности, поскольку уязвимы к внешним воздействиям. В совокупности, квантовые и оптические технологии могут дополнять друг друга, формируя более защищенные телекоммуникационные сети.

## 3. Методы защиты информации

Современные методы защиты информации в квантовых и оптических системах связи направлены на обеспечение высокой степени безопасности при передаче данных. Наиболее известный протокол QKD – BB84, который позволяет обмениваться секретными ключами, используя квантовые состояния фотонов для кодирования информации. Принципиальное преимущество QKD заключается в возможности обнаружения любого несанкционированного вмешательства, поскольку при попытке перехвата квантовые состояния неизбежно изменяются, что делает невозможным скрытное получение данных.

Для защиты информации в оптических системах связи широко используются усовершенствованные криптографические алгоритмы, такие как AES и RSA. Эти методы обеспечивают высокий уровень шифрования и стойкость к атакам, основанным на вычислительных методах. Вдобавок, в

оптических системах применяются методы модуляции сигнала и спектрального кодирования, что усложняет перехват данных. Комплексный подход, включающий как шифрование, так и спектральные методы защиты, позволяет значительно повысить надежность передачи информации, хотя и не обеспечивает такую степень защиты от перехвата, как в случае квантовых систем.

Таблица 2. Сравнительный анализ методов защиты информации в квантовых и оптических системах связи.

| Параметр | Квантовые системы связи | Оптические системы связи |
|---|---|---|
| Основной метод защиты | Квантовые принципы (неопределенность, невозможность клонирования) | Криптографические алгоритмы (AES, RSA), спектральное кодирование |
| Защита от атак на уровне канала | Высокая, обнаружение любого вмешательства | Умеренная, требует дополнительных защитных протоколов |
| Защита от квантовых вычислений | Прямая стойкость, не требует шифрования | Требуется усиление шифрования для защиты от квантовых атак |
| Масштабируемость | Ограниченная, высокая сложность реализации | Высокая, широко применима для телекоммуникационных сетей |
| Энергопотребление | Высокое, требует сложного оборудования | Низкое, позволяет более экономичную эксплуатацию |
| Пропускная способность | Средняя | Высокая, за счет световой передачи данных |
| Стоимость реализации | Высокая, требует специализированного оборудования | Умеренная, возможно использование существующей инфраструктуры |

Таблица 2 демонстрирует, что квантовые системы связи обладают уникальными защитными свойствами, обеспечивая высокий уровень устойчивости к перехвату благодаря принципам квантовой механики. В то же время оптические системы, хотя и поддерживают высокую пропускную способность и меньше зависят от среды передачи, нуждаются в дополнительных мерах безопасности для защиты от современных угроз. Таким образом, квантовые системы наиболее эффективны для передачи высокочувствительной информации, тогда как оптические системы обеспечивают надежную защиту при массовом применении в условиях современных телекоммуникационных сетей.

**Заключение**

Квантовые и оптические системы связи предлагают перспективные решения для обеспечения информационной безопасности в условиях роста объема данных и развития методов атаки на традиционные криптографические системы. Квантовые системы, благодаря уникальным квантово-механическим

принципам, обладают высокой устойчивостью к перехвату и способны обнаруживать попытки несанкционированного вмешательства. Это делает их особенно подходящими для передачи критически важной информации. Оптические системы, в свою очередь, обеспечивают высокую пропускную способность и легко интегрируются в существующую телекоммуникационную инфраструктуру, хотя и требуют дополнительных мер безопасности. В целом, квантовые и оптические технологии могут эффективно дополнять друг друга, создавая основу для защищенных телекоммуникационных сетей будущего, устойчивых к новым угрозам и соответствующих требованиям информационной безопасности.

## Список источников

1. Брэгг, Р. Безопасность сетей: полное руководство / Р. Брэгг, М. Родс-Оусли, К. Страссберг. - М.: Эком, 2017. - 912 с.

2. Волоконно-оптическая связь: Приборы, схемы и системы. - М.: Радио и связь, 2018. - 272 с.

3. Волоконно-оптические датчики / Под редакцией Э. Удда. - М.: Техносфера, 2017. - 520 с.

4. Бадеева Е.А., Усачев Д.А., Чернов И.А., Бадеев В.А, Соломанидин М.В. Оптоволоконные технологии в системах передачи данных // Вестник ПензГУ. 2022. №2 (38). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/optovolokonnye-tehnologii-v-sistemah-peredachi-dannyh (дата обращения: 14.11.2024).

## References

1. Bragg, R. Network Security: The Complete Guide / R. Bragg, M. Rhodes-Ousley, K. Strassberg. - Moscow: Ecom, 2017. - 912 p.

2. Fiber-Optic Communication: Devices, Circuits, and Systems. - Moscow: Radio and Communications, 2018. - 272 p.

3. Fiber-Optic Sensors / Edited by E. Udd. - Moscow: Technosphere, 2017. – 520 p.

4. Badeeva E.A., Usachev D.A., Chernov I.A., Badeev V.A., Solomanidin M.V. Fiber-Optic Technologies in Data Transmission Systems // Bulletin of PSU. 2022. No.2 (38). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/optovolokonnye-tehnologii-v-sistemah-peredachi-dannyh (accessed: 11/14/2024).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 422-427.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 422-427.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 621.391 + 535.3

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК И ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ ЛИНИЙ СВЯЗИ

***Антон Федорович Ермаков[1]✉, Иван Сергеевич Зимин[2]***
*[1,2]Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*
*[1]a.f.ermakov@yandex.ru✉, [2]i.s.zimin@mtuci.ru*

***Аннотация.*** *В статье рассматриваются основные характеристики и различия оптических и квантовых линий связи, их текущее применение и перспективы развития. Проведен сравнительный анализ по таким параметрам, как скорость передачи данных, уровень безопасности, стоимость и инфраструктурные затраты. Сделан вывод о целесообразности использования оптической связи для массовых применений, в то время как квантовые технологии показаны для высокозащищённых каналов передачи данных.*

***Ключевые слова:*** *оптическая линия связи, квантовая линия связи, телекоммуникации, безопасность, пропускная способность, критические коммуникации.*

Conference paper

# COMPARATIVE ANALYSIS OF THE CHARACTERISTICS AND PROSPECTS OF USING OPTICAL AND QUANTUM COMMUNICATION LINES

***Anton F. Ermakov[1]✉, Ivan S. Zimin[2]***
*[1,2]Moscow technical university of communications and informatics, Moscow, Russia*
*[1]a.f.ermakov@yandex.ru✉, [2]i.s.zimin@mtuci.ru*

***Abstract.*** *The article examines the main characteristics and differences between optical and quantum communication lines, their current applications, and development prospects. A comparative analysis is conducted on parameters such as data transmission speed, security level, cost, and infrastructure expenses. The conclusion suggests the appropriateness of optical communication for mass applications, while quantum technology is highlighted for highly secure data transmission channels.*

***Keywords:*** *optical communication line, quantum communication line, telecommunications, security, bandwidth, critical communications*

© Ермаков А. Ф., Зимин И. С., 2024

## 1. Введение

В условиях стремительного роста объёмов передаваемой информации и усложнения структур данных проблема обеспечения безопасности и надёжности линий связи становится всё более актуальной. Современные инфокоммуникационные системы, обслуживающие как государственные, так и коммерческие нужды, требуют высокоскоростной и защищённой передачи данных, что вызывает интерес к новейшим технологиям, таким как квантовая и оптическая линии связи. Эти две технологии представляют собой перспективные направления в развитии телекоммуникаций, предлагая различные подходы к обеспечению безопасности и пропускной способности каналов связи.

Оптические линии связи на основе волоконно-оптической технологии предоставляют высокую скорость и устойчивость к внешним помехам, что делает их оптимальным выбором для массовых применений и построения глобальных сетей. С другой стороны, квантовые линии связи, использующие принципы квантовой механики, обеспечивают высокий уровень защиты за счёт устойчивости к перехватам, что особенно важно для критичных приложений, связанных с безопасностью данных. Преимущества обеих технологий позволяют интегрировать их в единую систему связи, удовлетворяя различные потребности и стандарты в современных инфокоммуникационных сетях.

## 2. Принцип работы линий связи

Современные инфокоммуникационные сети предъявляют высокие требования к надежности и безопасности передачи данных. С развитием технологий возрастает потребность в новых методах защиты информации и обеспечении ее конфиденциальности, что делает актуальным изучение принципов работы различных линий связи. Оптические и квантовые каналы представляют собой два перспективных подхода, основанных на различных физических принципах, обеспечивающих высокую скорость передачи и устойчивость к внешним воздействиям. Изучение их особенностей и механизмов позволяет не только понять основные принципы передачи данных, но и выявить их преимущества и недостатки для дальнейшего применения в системах связи нового поколения.

Оптическая линия связи представляет собой технологию передачи данных, основанную на распространении световых сигналов через волоконно-оптические кабели. Основной принцип работы оптической линии связи заключается в преобразовании электрического сигнала в световой, который далее передается через оптическое волокно. Свет распространяется благодаря принципу полного внутреннего отражения в пределах тонкого ядра из кварцевого или пластикового стекла, что минимизирует потери сигнала и обеспечивает его передачу на большие расстояния. Данные кодируются в импульсы света, что позволяет передавать информацию с высокой скоростью и низкими задержками, делая оптические линии связи незаменимыми в телекоммуникационных сетях и интернете.

Квантовая линия связи основана на применении квантово-механических принципов, таких как квантовая запутанность и квантовое распределение

ключей (QKD), что обеспечивает высокий уровень безопасности данных. Квантовое распределение ключей позволяет двум сторонам генерировать и обмениваться секретными ключами для шифрования данных, при этом любое вмешательство третьей стороны сразу обнаруживается благодаря нарушению квантового состояния фотонов. Основное преимущество квантовой линии связи заключается в её принципиальной устойчивости к перехвату данных, так как измерение квантового состояния фотона изменяет его, что моментально фиксируется получателем, создавая систему безопасной передачи данных для критичных приложений.

Таблица 1 – Сравнительные характеристики оптической и квантовой линий связи.

| **Характеристика** | **Оптическая линия связи** | **Квантовая линия связи** |
|---|---|---|
| Принцип передачи данных | Преобразование электрического сигнала в световой и передача через волокно | Передача информации с использованием квантовой запутанности и распределения ключей |
| Скорость передачи | Высокая | Ограничена технологией QKD |
| Дальность передачи | Длительная, до 80-100 км без усилителей | Короткие расстояния, требуют ретрансляторов |
| Уровень безопасности | Высокий, но подвержен потенциальным угрозам перехвата | Очень высокий, не позволяет скрытый перехват |
| Применение | Телекоммуникации, интернет | Банковская и государственная безопасность |

Из таблицы 1 видно, что оптическая линия связи обладает значительными преимуществами в плане скорости передачи данных и дальности, делая её незаменимой в масштабных телекоммуникационных сетях. Однако квантовая линия связи обеспечивает беспрецедентный уровень безопасности, что делает её предпочтительным выбором для критичных приложений, несмотря на ограничения по скорости и дальности.

### 3. Основные характеристики и отличия

В условиях развития информационных технологий и роста объемов данных, передаваемых в телекоммуникационных сетях, становятся критически важными ключевые характеристики линий связи, такие как пропускная способность, уровень безопасности и экономическая целесообразность внедрения. Оптические и квантовые линии связи представляют собой два подхода, обеспечивающих различные уровни скорости и защиты информации, что требует их детального сравнения для оптимального выбора в зависимости от задач. Анализ характеристик и отличий оптических и квантовых линий связи позволяет выявить их сильные и слабые стороны с учетом современных требований инфокоммуникационной инфраструктуры.

Пропускная способность оптической линии связи значительно превышает возможности квантовых каналов, что объясняется зрелостью технологий и высокими показателями скорости в современных волоконно-оптических сетях.

Современные оптические линии могут обеспечивать скорость передачи данных в несколько терабит в секунду, что позволяет поддерживать глобальные сети с большим объемом информации. Квантовые каналы, несмотря на инновационность, пока ограничены в пропускной способности, так как текущие методы квантового распределения ключей (QKD) способны обеспечивать лишь мегабитный уровень скорости. Это делает квантовые каналы менее подходящими для передачи больших объемов данных.

В отличие от оптической линии, которая, несмотря на защиту, может подвергаться перехвату данных, квантовые каналы обеспечивают высокий уровень безопасности. Квантовая линия связи базируется на квантовых принципах, таких как запутанность и случайное распределение ключей, что делает ее устойчивой к попыткам перехвата: любое вмешательство или измерение квантового состояния сразу фиксируется. Это свойство делает квантовые каналы идеальным выбором для передачи критически важных данных, где конфиденциальность является приоритетом.

Внедрение и обслуживание оптических линий связи, хотя и требуют определённых затрат на прокладку кабелей и установку оборудования, являются относительно экономически эффективными в массовом применении. Инфраструктура для квантовых линий связи, напротив, значительно дороже и сложнее в поддержке. Высокая стоимость оборудования для генерации, передачи и ретрансляции квантовых сигналов, а также необходимость частых ретрансляторов для увеличения дальности, делают квантовую связь экономически затратной. Таким образом, квантовые линии пока более уместны для специальных, ограниченных применений.

Таблица 2 – Сравнительные параметры оптической и квантовой линий связи.

| Параметр | Оптическая линия связи | Квантовая линия связи |
|---|---|---|
| Пропускная способность | До нескольких терабит в секунду | Ограничена, до нескольких мегабит в секунду |
| Уровень безопасности | Высокий, но возможен перехват | Максимальный, устойчивость к перехватам |
| Стоимость оборудования | Средняя, доступная для массового использования | Высокая, требует специализированного оборудования |
| Сложность инфраструктуры | Умеренная, доступная для глобальных сетей | Высокая, требует специальных условий и ретрансляторов |

Сравнение параметров демонстрирует, что оптическая линия связи является более экономически эффективной и подходит для построения массовых телекоммуникационных систем с высокой пропускной способностью. Квантовая линия связи, хотя и менее эффективна по скорости, обеспечивает высочайший уровень безопасности и предпочтительна для защищенных коммуникаций в ограниченных и специализированных сферах.

## 4. Применения и перспективы

На сегодняшний день оптические линии связи широко используются в

глобальных телекоммуникациях для передачи данных на большие расстояния с высокой скоростью и минимальными задержками. Их применение охватывает области от интернет-сервисов до передачи данных между государственными и коммерческими центрами обработки информации. Оптические каналы стали основой для построения магистральных сетей и предоставляют надёжное и экономически эффективное решение для широкого спектра пользователей.

Квантовая линия связи, хотя и имеет более ограниченное применение из-за стоимости и сложности технологии, внедряется в областях, требующих высокой защиты информации. Например, в банковском секторе, где критически важна защита финансовых данных, квантовая линия используется для безопасного обмена ключами и данных между финансовыми учреждениями. Первые успешные коммерческие проекты по квантовой связи наблюдаются также в государственном секторе, где конфиденциальность и безопасность имеют наивысший приоритет.

В будущем квантовая линия связи может занять важное место в критически защищённых коммуникациях, таких как государственные и финансовые сети. Прогресс в разработке квантового оборудования и технологий ретрансляции может со временем снизить затраты и расширить возможности передачи данных на большие расстояния. Тем не менее, оптические линии связи, обладающие высокой пропускной способностью и доступной инфраструктурой, останутся основным решением для массового и глобального использования, поддерживая широкие телекоммуникационные потребности.

Таблица 3 – Текущие области применения и перспективы развития оптической и квантовой линий связи.

| **Применение** | **Оптическая линия связи** | **Квантовая линия связи** |
|---|---|---|
| Глобальные телекоммуникации | Широко используется для магистральных сетей | Ограничено из-за высокой стоимости |
| Банковский сектор | Используется для передачи больших объемов данных | Применяется для защищённого обмена ключами |
| Государственные сети | Основа сетевой инфраструктуры | Используется для высокозащищённых каналов |
| Перспективы | Будет основной технологией массового применения | Потенциально займет место в защищённых коммуникациях |

Анализ текущих областей применения и перспектив обеих технологий показывает, что оптические линии связи будут оставаться основой для массовых коммуникаций, в то время как квантовые линии связи найдут применение в областях, требующих повышенного уровня безопасности, постепенно занимая свою нишу в критически важных системах связи.

## Заключение

В результате исследования можно отметить, что оптические и квантовые линии связи, обладая различными характеристиками и областями применения, дополняют друг друга в современных телекоммуникациях. Оптические линии

связи остаются основным решением для массовой передачи данных благодаря высокой пропускной способности и доступной инфраструктуре, тогда как квантовые каналы, обеспечивая максимальную безопасность, становятся перспективными для защищённых коммуникаций в критически важных сферах. Развитие технологий позволит расширить применение квантовой связи, однако оптические линии, вероятно, сохранят свое доминирующее положение в массовом сегменте.

## Список источников

1. Брэгг, Р. Безопасность сетей: полное руководство / Р. Брэгг, М. Родс-Оусли, К. Страссберг. - М.: Эком, 2017. - 912 с.

2. Волоконно-оптическая связь: Приборы, схемы и системы. - М.: Радио и связь, 2018. - 272 с.

3. Волоконно-оптические датчики / Под редакцией Э. Удда. - М.: Техносфера, 2017. - 520 с.

4. Бадеева Е. А., Усачев Д. А., Чернов И. А., Бадеев В. А., Соломанидин М. В. Оптоволоконные технологии в системах передачи данных // Вестник ПензГУ. 2022. №2 (38). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/optovolokonnye-tehnologii-v-sistemah-peredachi-dannyh (дата обращения: 14.11.2024).

## References

1. Bragg, R. Network Security: The Complete Guide / R. Bragg, M. Rhodes-Ousley, K. Strassberg. - Moscow: Ecom, 2017. – 912 p.

2. Fiber-Optic Communication: Devices, Circuits, and Systems. - Moscow: Radio and Communications, 2018. – 272 p.

3. Fiber-Optic Sensors / Edited by E. Udd. - Moscow: Technosphere, 2017. – 520 p.

4. Badeeva E. A., Usachev D. A., Chernov I. A., Badeev V. A., Solomanidin M. V. Fiber-Optic Technologies in Data Transmission Systems // Bulletin of PSU. 2022. No.2 (38). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/optovolokonnye-tehnologii-v-sistemah-peredachi-dannyh (accessed: 11/14/2024).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 428-431.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 428-431.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 378.147:004.9

# МУЛЬТИМЕДИЙНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ИНТЕРАКТИВНОМ ОБУЧЕНИИ

***Елена Вячеславовна Закалкина[1]✉, Елена Александровна Рогозянская[2], Наталья Петровна Еремеева[3]***
*[1,2,3]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]zakalkin@mail.ru✉, [2]e_a_roggy@mail.ru, [3]erenata0901@mail.ru*

***Аннотация.*** *В настоящее время образовательный процесс становится всё более интенсивным и студенту приходится, адаптируясь к реалиям обучения, усваивать всё большее количество материала за ограниченный учебными рамками период времени. В этой связи применение в обучении мультимедийных интерактивных технологий становится наиболее востребованным и оправданным. Преподавание дисциплин с использованием методик мультимедиа позволят обучающемуся без потери концентрации усваивать существенные объемы знаний и навыков. Преподаватель же имеет возможность использования различных методик мультимедийного обучения, в том числе, разделяя студентов в группы для использования дистанционных и интерактивных занятий.*

***Ключевые слова:*** *мультимедийные технологии, интерактивное обучение, учебный контент.*

Conference paper

# MULTIMEDIA TECHNOLOGIES IN INTERACTIVE LEARNING

***Elena V. Zakalkina[1]✉, Elena A. Rogozyanskaya[2], Nataliya P. Eremeeva[3]***
*[1,2,3]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]zakalkin@mail.ru✉, [2]e_a_roggy@mail.ru, [3]erenata0901@mail.ru*

***Abstract.*** *Nowadays, the educational process is becoming more and more intensive and the student has to adapt to the realities of learning and learn more and more material in a limited period of time. In this regard, the use of multimedia interactive technologies in learning is becoming the most popular and justified. Teaching subjects using multimedia methods will allow the student to acquire*

© Закалкина Е. В., Рогозянская Е. А., Еремеева Н. П., 2024

*significant amounts of knowledge and skills without losing concentration. The teacher has the opportunity to use various multimedia teaching methods, including dividing students into groups for the use of distance and interactive classes.*

***Keywords:*** Multimedia technologies, interactive learning, educational content.

## 1. Введение

Применение мультимедийных технологий в настоящее время является одним из наиболее стратегически оправданных векторов цифровизации образовательного процесса. Успешное использование современных информационных технологий в образовании безусловно должно быть обеспечено за счет совершенствования программно-методического обеспечения, материальной базы, обязательного повышения квалификации преподавателей.

## 2. Основной текст статьи

За счет того, что технологии мультимедиа позволяют задействовать в ходе восприятия учебного контента весь спектр чувственных сенсоров обучающегося, и сам процесс обучения переходит на более качественный уровень. Следует отметить и тот факт, что мультимедиа контент является очень гибким инструментом, а значит имеет возможность постоянного обновления.

Мультимедийные технологии позволяют выстраивать обучающемуся индивидуальную траекторию движения по изучаемому курсу, не ограничивая его тем самым временными рамками аудиторных занятий.

Именно мультимедийные технологии как особый вид дидактического ресурса преподавателя могут сыграть существенную роль в становлении подхода, нацеленного на личностно-ориентированные стратегии обучения.

Для успешной интеграции в учебное поле мультимедийных технологий следует придерживаться определенных принципов. Представленная в различных форматах информация, как показывают исследования, более качественно усваивается, графическая или анимированная информация успешнее воспринимается, когда она сопровождается пояснениями преподавателя, очень важно выстраивать четкую структуру представления материала с акцентированием внимания обучающегося на особенно важных или ключевых моментах.

С расширением использования информационных технологий все более востребованными становятся интерактивные возможности учебных материалов. Существует множество платформ и приложений для создания интерактивных учебных ресурсов, позволяющих студентам взаимодействовать с контентом. Интерактивные видео – это видео, содержащие различные типы вопросов, тесты, голосовые комментарии и другие элементы, позволяющие активно взаимодействовать с контентом. Например, в учебные видеоматериалы можно встраивать тестовые задания, которые система будет автоматически оценивать. Можно выбирать подходящие настройки, исходя из поставленных целей. Например, сделать тестовые задания обязательными, и тогда продолжить просмотр видео студент сможет только после ответа на вопросы теста. Интерактивные функции к видео можно добавить в Power Point. Эти

возможности доступны в версиях пакета Microsoft Office 2013 года и выше. Кроме того, возможно создание комментируемого видео из презентации Power Point. Комментируемое видео – это видеоролик с автоматизированной голосовой озвучкой. Комментируемое видео позволяет создавать из презентаций видеолекции или образовательные видеоматериалы без необходимости их самостоятельно начитывать или озвучивать. Достаточно загрузить предварительно подготовленную презентацию, установить настройки, и можно получить видеоролик с голосовым сопровождением, созданным автоматически.

Возможности для создания комментируемого видео так же предоставляет сервис Narakeet. В нем можно создавать образовательные видео, видеоуроки иностранных языков, YouTube контент, видео для TikToka, генерировать приветствия голосовой почты. В сервисе есть для этого готовые шаблоны. Можно также просто озвучить текстовый документ или создать из текстового сценария аудиофайл. Основным достоинством Narakeet является хорошее качество автоматизированной озвучки. Сервис предлагает большой выбор русскоязычных голосов, звучание которых приближено к естественному человеческому голосу. Narakeet позволяет в считаные минуты получить из презентации видеолекцию, избавляя от необходимости озвучивать ее своим голосом и синхронизировать видеоряд с аудио сопровождением. В Narakeet возможно конвертировать в видео презентации, созданные не только Power Point, но и в сервисе Google Slides – облачном аналоге Power Point на платформе Google. Так же возможно записать презентацию в виде слайд-шоу и наложить музыкальный фон. Существует возможность автоматически включать субтитры. В настоящее время Narakeet содержит более 30-ти русскоязычных голосов с естественным звучанием.

Сервис Visper позволяет использовать виртуальных персонажей для обучающих видео. Это разработка компании Сбер. В Visper можно автоматически озвучить текст, добавляя к видео «говорящую голову» - виртуального персонажа. Предлагается два способа создания видео – из текста или аудиофайла и из презентации. Visper предлагает библиотеку образов, которые делятся на мужские и женские, реалистичные и анимационные.

## 3. Заключение

Мультимедийные технологии являются неотъемлемой частью интерактивного обучения, современного и практико-ориентированного подхода к образованию, нацеленного на непосредственное участие обучающегося в учебном процессе. Их применение и принципы организации полностью мультимедиа обучения содействуют достижению целей образования в целом, а также индивидуальному росту и мотивации обучающихся, за счет нелинейности образовательного пути.

## Список источников

1. Зинурова, Р. И. Мультимедийные технологии в образовании : учебное пособие / Р. И. Зинурова. — Казань : КНИТУ, 2019.

2. Кацко, С. Ю. Мультимедийные технологии : учебное пособие / С. Ю. Кацко. — Новосибирск : СГУГиТ, 2015. — 139 с.

3. Рогозянская Е. А., Еремеева Н. П., Закалкина Е. В. Влияние различных видеопроизводственных решений на вовлеченность студентов в онлайн-обучение: материалы VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (4 – 5 декабря 2020 г., г. Орёл): научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией кандидата физико-математических наук, профессора Т. Н. Можаровой. – Орёл: ОГУ имени И. С. Тургенева, 2020. – С.527-531.

4. Иванова, Н. Ю. Дистанционное образование в условиях цифровой трансформации современного вуза : монография / Н. Ю. Иванова, А. А. Кошелев. — Саратов : Вузовское образование, 2022. — 87 с.

## References

1. Zinurova, R. I. Multimedia technologies in education: a tutorial / R. I. Zinurova. - Kazan: KNITU, 2019.

2. Katsko, S. Yu. Multimedia technologies: a tutorial / S. Yu. Katsko. - Novosibirsk: SGUGiT, 2015. - 139 p.

3. Rogozyanskaya E. A., Eremeeva N. P., Zakalkina E. V. The influence of various video production solutions on the involvement of students in online learning: materials of the VI All-Russian scientific and practical conference with international participation (December 4-5, 2020, Orel): scientific electronic publication [Electronic resource] // edited by the candidate of physico -Mathematical Sciences, Professor T. N. Mozharova. - Eagle: OSU named after I. S. Turgenev, 2020. - P. 527-531.

4. Ivanova, N. Yu. Distance education in the conditions of digital transformation of a modern university: monograph / N. Yu. Ivanova, A. A. Koshelev. - Saratov: Higher education, 2022. - 87 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 432-439.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 432-439.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.4

# ИМПОРТОЗАМЕЩЕНИЕ СИСТЕМ ВИРТУАЛИЗАЦИИ: ОБЗОР РЫНКА РОССИЙСКИХ РАЗРАБОТОК

***Дмитрий Владимирович Игнатов***[1]✉
[1]*Тольяттинский Государственный Университет, Тольятти, Россия*
[1]*focused@inbox.ru*✉

***Аннотация.*** *В статье проведен сравнительный анализ существующих сегодня на российском рынке систем виртуализации. В условиях санкционного давления перед крупными российскими компаниями встает проблема импортозамещения зарубежных платформ виртуализации, среди которых лидером является VMware. Опираясь на разработанные критерии, автор показывает, что VMWare является наиболее эффективной системой виртуализации с точки зрения ключевых технических характеристик. Среди современных российских систем можно выделить РУСТЭК, платформу виртуализации, разработанную российской одноименной компанией, как имеющую наибольший потенциал для использования в крупных организациях, управляющих большим объемом вычислительных ресурсов. Автор показывает, что, в отличие от конкурентов, у этой системы более высокая отказоустойчивость, большее возможное количество хостов на одном кластере, а в сравнении с VMware у нее даже выше максимально допустимое количество виртуальных машин, приходящихся на один узел. При развитии системы технической поддержки и доработки руководства пользователя РУСТЭК может стать приоритетным выбором для крупных организаций.*

***Ключевые слова:*** *виртуализация, виртуальные машины, хост, управление виртуальной инфраструктурой.*

Conference paper

# IMPORT SUBSTITUTION OF VIRTUALIZATION SYSTEMS: AN OVERVIEW OF THE RUSSIAN DEVELOPMENTS MARKET

***Dmitrii V. Ignatov***[1]✉
[1]*Togliatti State University, Togliatti, Russia*
[1]*focused@inbox.ru*✉

© Игнатов Д. В., 2024

***Abstract.*** *The article provides a comparative analysis of the virtualization systems currently available on the Russian market. Under the pressure of sanctions, large Russian companies are faced with the problem of import substitution of foreign virtualization platforms, with VMware being the leader. Based on the developed criteria, the author shows that VMWare is the most effective virtualization system in terms of key technical characteristics. Among modern Russian systems, RUSTEK, a virtualization platform developed by a Russian company of the same name, can be singled out as having the greatest potential for use in large organizations managing large volumes of computing resources. The author shows that, unlike its competitors, this system has higher fault tolerance, a greater possible number of hosts on a single cluster, and in comparison with VMware, it even has a higher maximum permissible number of virtual machines per node. With the development of the technical support system and revision of the user manual, RUSTEK may become a priority choice for large organizations.*

***Keywords:*** *virtualization, virtual machines, host, virtual infrastructure management.*

## 1. Введение

Любая крупная организация сегодня вынуждена управлять большим объемом вычислительных ресурсов, которые включают в себя физические и виртуальные серверы, системы хранения данных, различные сетевые устройства и другие составляющие, необходимые для эффективного хранения, обработки и передачи информации. Для управления вычислительными ресурсами организации используется виртуальная инфраструктура, которая включает в себя такие компоненты, как виртуальные машины, гипервизоры, сетевые устройства, системы хранения данных, управляющие инструменты, безопасностные решения и др. Система виртуализации может быть выстроена по-разному, в зависимости от используемых платформ и технологий. В научной литературе обзоры существующих платформ виртуализации, в основном, фокусируются на таких инструментах, как VMware Workstation, Microsoft Virtual PC, Oracle VM Virtualbox [1, 2, 3]. Так, в статье Гордеева А.В. «Виртуальные машины и сети» рассматривается два наиболее известных программных продукта, которые позволяют «получить на обычных персональных компьютерах полноценные виртуальные вычислительные машины» [4, С. 21]: VMware Workstation и Microsoft Virtual PC. В результате сравнения двух платформ автор приходит к выводу, что использование VMware является предпочтительным. В статье Карповой Н. Е., Волкова Н.А. «Сравнительный анализ характеристик виртуальных машин» сравниваются наиболее часто используемые VMware Workstation, Oracle VirtualBox и Windows Virtual PC [5]. Авторы приходят к выводу, что наибольший функционал имеет VirtualBox.

## 2. Основной текст статьи

Как видно, на сегодняшний день не существует консенсуса относительно предпочтительных платформ виртуализации. Во многом это связано с тем, разные платформы подходят для разных задач. В ходе исследования и

практической работы в организации автором был собран материал, позволяющий оценить возможности и недостатки различных систем виртуализации.

Для эффективного управления такой сложной и разветвленной виртуальной инфраструктурой требуется грамотный выбора системы виртуализации. Рассмотрим и сравним пять систем виртуализации с наиболее широкими функциональными способностями:

1. VMware – американское ПО, разработанное компанией-лидером на рынке виртуализации.
2. РУСТЭК – платформа виртуализации, разработанная российской одноименной компанией.
3. zVirt – российская система виртуализации от компании «ОРИОН софт».
4. Программный комплекс средства виртуализации "Брест" – российская облачная платформа виртуализации.,
5. VMmanager – инструмент управления виртуальной средой, разработанный российской ИТ-компанией ISPsystem.

При сравнении будут использованы следующие критерии.

1. Производитель. В условиях санкционного давления возрастают риски выбора зарубежных производителей ПО.
2. Сертификат ФСТЭК (Федеральная служба по техническому и экспортному контролю). Наличие сертификата гарантирует безопасность продукции, что критически важно для IT-отделов нефтяных компаний, работающих с большими объемами данных, от которых зависят многочисленные бизнес-процессы компании.
3. ОС общего или специального назначения. Преимущество ОС общего назначения состоит в том, что после установки системы виртуализации она сразу готова к использованию. Системы виртуализации с ОС специального назначения более сложные в установке.
4. Тип архитектуры: классический или гиперконвергентный. Под архитектурой понимается структурированный набор компонентов и принципов, обеспечивающий создание, управление и взаимодействие виртуальных сред на физическом оборудовании. Она определяет, как различные элементы системы работают вместе для эффективного использования вычислительных ресурсов, обеспечения изоляции, безопасности и масштабируемости.

Классический тип архитектуры представляет собой наличие хостовой операционной системы, поверх которой запускается платформа виртуализации, эмулирующая работу аппаратных компонентов и управляющая аппаратными ресурсами в отношении гостевой операционной системы. Реализация такой платформы достаточно сложна и трудоемка, присутствуют потери производительности, в связи с тем, что виртуализация производится поверх хостовой системы. Безопасность виртуальных машин также находится под угрозой, поскольку получение контроля на хостовой операционной системой автоматически означает получение контроля над всеми гостевыми системами.

Гиперконвергентный тип архитектуры представляет собой программное обеспечение, которое позволяет отказаться от виртуальной системы хранения

[24, 30]. Вместо нее используются локальные жесткие диски самих серверов. Программные средства работают согласно основным принципам современных систем хранения – отказоустойчивость, объединение в массивы независимых дисков и другие. Кроме того, они обеспечивают равномерное распределение на доступные внутренние накопители. Например, если в гиперконвергентную инфраструктуру объединены три сервера, то и зеркалированных копий данных тоже будет три.

5. Платформа. Платформа виртуализации – это программное или аппаратное решение, которое позволяет создавать, управлять и запускать виртуальные машины на физическом оборудовании.

VMware ESXi – это ПО для виртуализации на уровне предприятия, которое разработано компанией VMware. Это гипервизор первого типа, который устанавливается непосредственно на физический сервер.

OpenStack – это набор компонентов, которые используются для создания и управления облачными платформами. Решение OpenStack основано на модульном принципе: администраторы самостоятельно выбирают компоненты (например, Nova, Swift, Keystone и других) для текущей задачи. Модули легко интегрируются между собой, что обеспечивает стабильную работу продукта.

KVM (Kernel-based Virtual Machine) — это программное обеспечение для виртуализации на платформе Linux, работающее на разных операционных системах. Программа управляет и распределяет ресурсы между всеми подключенными компьютерами, на которых могут стоять разные ОС, что позволяет запускать их одновременно.

OpenNebula – это платформа облачных вычислений для управления разнородными инфраструктурами распределенных центров обработки данных. Двумя основными вариантами использования платформы OpenNebula являются виртуализация центров обработки данных и развертывание облаков на основе гипервизора.

6. Поддержка CPU. Чем шире диапазон линейки процессоров, тем больше возможностей для работы с нестандартными конфигурациями серверного оборудования при проектировании и создании информационных систем для компании.

7. Отказоустойчивость. Важная и основополагающая функция виртуализации. Необходима при выходе из строя одного из хостов кластера. Виртуальные машины без перерыва служб мигрируют на соседний рабочий хост, что не оказывает влияния на работу систем. Отказоустойчивость включает в себя несколько технологий, которые обеспечивают непрерывную доступность виртуальных машин. К таким технологиям относятся: Fault Tolerance, Site Failover, Site Replication. Наличие всех трех технологий обеспечивает высокую отказоустойчивость, двух – среднюю, одной – низкую, как и полное отсутствие этих технологий.

8. Создание снимков виртуальной машины. Снимок виртуальной машины (снапшот) создает контрольную точку восстановления вместе с состоянием памяти виртуальной машины или без него в зависимости от того, в каком состоянии была виртуальная машина при снятии снимка. Снимок виртуальной

машины позволяет быстро выполнить откат к первоначальному состоянию в случае неудачных профилактических работ или сбоя виртуальной машины.

9. Количество хостов в одном кластере. Под кластером понимается объединение двух или более серверов (хостов) в единую систему, которая позволяет им совместно использовать свои вычислительные мощности, память и хранилище. Большее количество хостов в одном кластере позволяет использовать меньшее количество самих кластеров, что облегчает управление виртуальной инфраструктурой.

10. Максимальное количество ВМ на одном хосте. Большее количество ВМ на одном хосте позволяет меньше использовать физических серверов, что снижает затраты компании.

11. Поддерживаемые гостевые ОС. Разнообразие гостевых операционных систем положительно сказывается на гибкости выбора системы для использования. Необходимость выбора различных гостевых операционных систем на разных виртуальных машинах связана с разнообразием бизнес-процессов крупной компании и связанных с ними ИТ-задач.

12. Техническая поддержка. Высокий уровень техподдержки включает в себя консультацию по возможным ошибкам в системе, в случае более серьёзного сбоя предусматривает выезд специалиста высокой квалификации для устранения проблемы. Слабая техподдержка связана с низким уровнем подготовки специалистов, оказывающих услуги по выявлению и устранению неисправностей.

13. Руководство пользователя. Позволяет самостоятельно выявлять, устранять ошибки, настраивать программное обеспечение без обращения в техническую поддержку. В отличие от базового, подробное руководство пользователя позволяет выполнять, согласно инструкциям, описанным в нем, все операции, необходимые для полного функционирования программного обеспечения системы.

14. Схема лицензирования. Можно выделить следующие схемы лицензирования:

– Лицензирование на один физический сервер. Преимущества данной схемы состоит в том, что она не привязана к модели процессора и к его ядрам, установленным на оборудовании хоста.

– Лицензирование на сокет процессора. Такая схема покрывает любую модель хоста, но при большом количестве серверов усложняет управление лицензированием из-за необходимости покупки большого количества разных лицензий в зависимости от архитектуры серверов.

– Лицензирование только на ядра процессора. Такая схема покрывает любую модель хоста, но накладывает ограничения на использование мощности процессора.

Схема лицензирования по серверам обладает преимуществом перед лицензированием на ядра процессора по следующим причинам:

– При большом количестве виртуальных машин упрощается управление лицензиями.

– При большом количестве виртуальных машин серверное лицензирование выгоднее, так как позволяет разметить несколько виртуальных машин на одном лицензированном сервере.
– Обеспечивает большую гибкость в использовании ресурсов, так как для изменения ресурсов может потребоваться изменение в конфигурации оборудования, что приведет к необходимости покупки дополнительных лицензий.

Результаты сравнения выбранных систем виртуализации представлены в таблице 1.

## 3. Заключение

Проанализировав несколько основных параметров систем виртуализации, можно сделать вывод, что ни одна из них не является оптимальной для управления единым информационным пространством крупной нефтяной компании. С точки зрения ключевых технических характеристик наиболее эффективной является VMWare. Так, эта система обладает ОС общего назначения, высокой отказоустойчивостью, максимальным количеством хостов на одном кластере, а также обладает наиболее полным руководством пользователя, которое включает всю необходимую техническую документацию и позволяет сотрудникам, отвечающим за управление корпоративной инфраструктурой компании самостоятельно устанавливать ПО, пользоваться всеми его возможностями, самостоятельно устранять неисправности. Однако в условиях санкционного давления VMWare более не может быть использована в крупных корпорациях, так как компания прекратила техническую поддержку пользователей, которая ранее была одним из главных достоинств системы, и продажу лицензий.

Среди остальных систем можно выделить РУСТЭК как имеющий наибольший потенциал для использования в больших организациях. В отличие от конкурентов, у этой системы более высокая отказоустойчивость, выше возможное количество хостов на одном кластере, а в сравнении с VMWare у нее даже выше максимальное количество виртуальных машин на один узел. При развитии системы технической поддержки и доработки руководства пользователя РУСТЭК может стать приоритетным выбором для крупных организаций.

Таблица 1 – Сравнительные характеристики систем виртуализации

| **Производитель** | **VMware ESXi 7.0u3** | **РУСТЭК (ООО РУСТЭК)** | **"zVirt (ORIONsoft)"** | **"ПК СВ БРЕСТ (ГК Astra Linux)"** | **"VMmanager (ISPsystem)"** |
|---|---|---|---|---|---|
| Сертификат ФСТЭК | Нет | Нет | Нет | Да | Да |
| Операционная система общего назначения | ОС общего назначения | ОС общего назначения | ОС спец. назначения | ОС спец. назначения | ОС спец. назначения |
| Тип архитектуры | 1) Классическая 2) Гиперконвергентная | 1) Классическая 2) Гиперконвергентная | 1) Классическая 2) Гиперконвергентная | 1) Классическая 2) Гиперконвергентная | Гиперконвергентная |
| Платформа | ESXi | OpenStack | KVM | OpenNebula | KVM |
| Поддержка CPU | x86_64 | x86_64 | x86_64 | x86_64 | x86_64 |
| Отказоустойчивость | Высокая (при выборе лицензии Enterprise Plus) | Средняя | Низкая | Низкая | Средняя |
| Снимки виртуальной машины | Да | Да | Да | Нет | Да |
| Кол-во хостов на одном кластере | 1024 | 700 | 250 | 500 | 350 |
| Максимальное количество ВМ на одном хосте | 1024 | 16384 | 600 | 10000 | 22000 |
| Поддерживаемые гостевые ОС | Windows, Linux, FreeBSD, macOS | Windows, Linux, FreeBSD | Windows, Linux | Windows, Linux | Windows, Linux |
| Техническая поддержка | Прекращена | Низкая | Средняя | Средняя | Средняя |
| Руководство пользователя | Подробное | Базовое | Базовое | Базовое | Базовое |
| Схема лицензирования | По сокетам: 1 лицензия покрывает 1 CPU с 32 ядрами | По физическим серверам независимо от комплектации | По физическим серверам | По сокетам: на каждый сервер - минимум одна лицензия в зависимости от кол-ва процессоров (1 лицензия на 2 CPU) | По сокетам: 1 лицензия на 1 CPU |

## Список источников

1. Абунагимов А. А. Сравнение программных продуктов виртуализации операционных систем Virtualbox, vmWare, Parallels desktop // Современная школа России. Вопросы модернизации. 2021. № 9-1 (38). С. 56-57.

2. Водолазкина Н. А. Работа с виртуальной машиной на основе Oracle VM Virtualbox / Н. А. Водолазкина // Интеллектуальный и научный потенциал XXI века: сборник статей международной научно-практической конференции: в 6 частях, Казань, 20 декабря 2016 года. Том Часть 4. – Казань: Общество с ограниченной ответственностью «Аэтерна», 2016. С. 53-54.

3. Системы виртуализации. Сравнительный анализ гипервизоров VMware, Hyper-V, KVM, Xen [Электронный ресурс]: Data House. – Режим доступа: https://datahouse.ru/articles/sistemy-virtualizacii/ (дата обращения: 09.11.2024).

4. Гордеев А. В. Виртуальные машины и сети / А. В. Гордеев // Информационно-управляющие системы. 2006. № 2(21). С. 21-26.

5. Карпова Н. Е. Сравнительный анализ характеристик виртуальных машин / Н. Е. Карпова, Н. А. Волков // Информационно-измерительные и управляющие системы: Межвузовский сборник научных статей. Том 1(17). – Самара: Самарский государственный технический университет, 2019. С. 87-91.

## References

1. Abunagimov A. A. Comparison of software products for virtualization of operating systems Virtualbox, vmWare, Parallels desktop // Sovremennaja shkola Rossii. Voprosy modernizacii = Modern school of Russia. Modernization issues. 2021;(38): 56-57. (In Russ.).

2. Vodolazkina N. A. Working with a virtual machine based on Oracle VM Virtualbox // Intellectual and scientific potential of the XXI century: collection of articles of the international scientific and practical conference: in 6 parts, Kazan, December 20, 2016. Volume Part 4. Kazan: Limited Liability Company "Aeterna"; 2016. P. 53-54.

3. Virtualization systems. Comparative analysis of VMware, Hyper-V, KVM, Xen hypervisors. Data House. URL: https://datahouse.ru/articles/sistemy-virtualizacii/

4. Gordeev A. V. Virtual machines and networks // Informacionno-upravljajushhie sistemy = Information and control systems. 2006; (21): 21-26.

5. Karpova N. E., Volkov N. A. Comparative analysis of the characteristics of virtual machines // Information, measuring and control systems: Interuniversity collection of scientific articles. Volume 1 (17). Samara: Samara State Technical University; 2019. P. 87-91.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 440-449.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 440-449.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.057.2+ 004.057.3+ 004.057.4

# РАБОТА С ДАТОЙ И ВРЕМЕНЕМ В МИКРОСЕРВИСНОЙ АРХИТЕКТУРЕ. МЕТОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

***Александр Валерьевич Никулин***[1]✉
[1]*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Елец, Россия*
[1]*avnikulin.niiaa@gmail.com*✉*, https://orcid.org/0009-0005-8426-3629*

***Аннотация.*** *В данной работе автор рассматривает проблему, связанную с обработкой даты и времени в условиях микросервисной архитектуры. Основное внимание уделяется анализу типичных ошибок и трудностей, с которыми сталкиваются разработчики и аналитики при реализации функциональности, где используется дата и время. Автор выделяет основные причины возникновения этих ошибок, такие как различия во временных зонах и форматирование даты и времени. На основе полученных данных и анализа, по результатам исследования проблемы, предложены конкретные рекомендации по оптимизации работы с датой и временем. Эти рекомендации включают в себя как технические, так и административные аспекты управления проектом. Среди технических решений особое место занимают методы стандартизации форматов, а также практики программирования, направленные на учет временных зон. Административные рекомендации касаются улучшения коммуникации между командами разработчиков и аналитиков, а также утверждения единых стандартов документирования работы с датой и временем в проекте. Автор демонстрирует реальные примеры из практики внедрения рекомендуемых методик в микросервисные архитектуры. Эти примеры показывают, как правильный подход к работе с датой и временем может значительно снизить количество ошибок, упростить разработку и поддержку проектов, а также улучшить качество данных для аналитики и принятия управленческих решений.*

***Ключевые слова:*** *микросервисы, архитектура, стандарт ISO 8601, JSON, PostgreSQL, дата и время, временные зоны.*

Conference paper

# STUDY OF GOLD CRYSTALS BY AFM METHOD

***Alexander V. Nikulin***[1]✉

© Никулин А. В., 2024

[1]*Bunin Yelets State University, Yelets, Russia*
[1]*avnikulin.niiaa@gmail.com✉, https://orcid.org/0009-0005-8426-3629*

***Abstract.*** *In this paper, the author considers the problem associated with processing date and time in a microservice architecture. The main attention is paid to the analysis of typical errors and difficulties faced by developers and analysts when implementing functionality that uses date and time. The author highlights the main causes of these errors, such as differences in time zones and date and time formatting. Based on the data and analysis obtained, specific recommendations for optimizing work with date and time are proposed based on the results of the problem study. These recommendations include both technical and administrative aspects of project management. Among the technical solutions, a special place is occupied by methods of standardizing formats, as well as programming practices aimed at taking into account time zones. Administrative recommendations concern improving communication between teams of developers and analysts, as well as approving uniform standards for documenting work with date and time in the project. The author demonstrates real examples from the practice of implementing the recommended methods in microservice architectures. These examples show how the right approach to working with dates and times can significantly reduce errors, simplify project development and support, and improve the quality of data for analytics and management decision-making.*

***Keywords:*** *microservices, architecture, ISO 8601 standard, JSON, PostgreSQL, date and time, time zones.*

## 1. Введение

Современные тенденции в разработке программного обеспечения демонстрируют широкое распространение микросервисной архитектуры, отличающейся гибкостью, масштабируемостью и возможностью эффективного распределения ресурсов [1]. Тем не менее в процессе интеграции и взаимодействия микросервисов возникают специфические вызовы, среди которых одним из них является согласованность временных данных. Точный обмен датой и временем между микросервисами - основополагающий аспект для поддержания целостности данных, минимизации ошибок и обеспечения стабильной работы системы. В статье анализируются основные проблемы и предлагаются подходы к управлению временными данными в микросервисных архитектурах. Особое внимание уделяется внедрению стандартизированных форматов передачи даты и времени. Предложенные рекомендации направлены на устранение распространенных ошибок при работе с датой и временем и предоставляют руководство по созданию надёжных и эффективных микросервисных решений.

В рамках развития и поддержки микросервисных систем разработчики сталкиваются с проблемой взаимодействия между компонентами, в которых используются временные данные. Основным испытанием является гарантирование правильной работы компонентов системы с временными зонами, чьё несоблюдение ведёт к ошибкам в согласованности данных. Проблема усугубляется в ситуациях с компонентами, расположенными в

различных временных поясах. Решение этой задачи подразумевает детальный анализ предметной области, которую реализует система и применение унифицированных стандартов обработки временных данных в архитектуре микросервисов.

В рамках исследования был проведен ретроспективный анализ нескольких программных проектов, с целью выявления распространенных ошибок при работе с датой и временем. Особое внимание было уделено использованию epoch time [2] - количество секунд или чаще миллисекунд, прошедших с полуночи 1 января 1970 года по координированному времени (UTC). Несмотря на кажущуюся простоту при использовании epoch time для передачи даты и времени и универсальность такого подхода, полученные данные свидетельствуют о частых ошибках, возникающих у разработчиков. Проблема заключается в неправильной интерпретации временной зоны при форматировании даты и времени. Встречаются случаи, когда в качестве основы берется временная зона сервера, клиента, или использование UTC, что без строгих соглашений и ясной документации приводит к ошибкам в отображении даты и времени у конечного пользователя. Данная ситуация подчеркивает необходимость разработки и внедрения четких правил работы с временными данными и временными зонами в рамках проектов.

Также исследование показало еще один из аспектов, связанных с ошибками в обработке даты и времени - механизм их хранения в системах управления базами данных (СУБД), на примере PostgreSQL [3]. Особое внимание уделено типу данных "timestamp with time zone", который представляет собой значительный источник путаницы среди разработчиков и системных аналитиков. В отличие от некоторых других СУБД, таких, как Oracle [4], где аналогичный тип данных сохраняет информацию о временной зоне, PostgreSQL работает иначе. Тип "timestamp with time zone" в PostgreSQL не хранит информацию о временной зоне. Вместо этого, временные данные преобразуются и сохраняются в формате UTC, а временные зоны используются только на этапе форматирования и парсинга в соответствии с настройками клиента или сервера. Эта особенность важна, поскольку она требует внимания к процессу парсинга и форматирования временных данных, чтобы избежать ошибок, связанных с неправильной интерпретацией временной зоны.

В соответствии со стандартом ISO 8601 [5], представление даты и времени включает в себя возможность указания смещения относительно координированного всемирного времени (UTC) с использованием знаков плюс (+) или минус (−) для обозначения часов и минут этого смещения. Кроме того, для обозначения времени, соответствующего точно UTC, применяется сокращенная запись, включающая символ Z. Основная функция такого смещения — обеспечить форматирование даты и времени для улучшения читаемости формата. В ходе исследования было выявлено, что использование смещения в виде часов и минут вызывает путаницу среди разработчиков. Основная проблема состояла в том, что смещение ошибочно интерпретировалось как данные о временной зоне, что совсем не так. В процессе преобразования форматированной строки времени во внутреннее представление,

информация о смещении теряется, поскольку многие типы данных не хранят информацию об этом. Таким образом, смещение в ISO 8601 должно применяться исключительно для обеспечения читаемости даты и времени, не неся в себе информацию о временной зоне. В ходе исследования также была выявлена распространенная ошибка, заключающаяся в неправильном использовании смещения: как разработчики, так и аналитики иногда некорректно прибавляли указанное смещение к дате и времени, однако форматированная строка уже это учитывает.

**2. Результаты и обсуждения**

В ходе исследования проведен комплексный анализ процессов обработки данных о дате и времени в нескольких проектах. Целью анализа являлась оптимизация процессов и минимизация рисков потенциальных ошибок при передаче и интерпретации даты и времени. На основе полученных результатов был разработан набор технических и административных рекомендаций. Эти рекомендации предназначены для внедрения в другие проекты с целью улучшения процессов работы с датой и временем и снижению вероятности ошибок, связанные с их передачей и интерпретацией.

В качестве технических рекомендаций при передаче даты и времени в микросервисах, рекомендуется по возможности использовать стандарт ISO 8601, в случае отсутствия каких-либо технических ограничений. Основой стандарта ISO 8601 является числовой формат в виде строки, в котором дата и время записываются последовательно: год, месяц, день, часы, минуты и секунды, разделенные специальными символами. Примером даты и времени, представленной в формате ISO 8601, может быть 2022-10-31T15:30:00, где "T" используется для разделения даты и времени. Применение стандарта ISO 8601 обеспечивает ясность, однозначность и удобство интерпретации временных данных в микросервисах.

Предлагается ввести и выделить два основных понятия относительно даты и времени, а именно системную дату и время, а также фактическую дату и время. Фактическую дату и время еще можно называть бизнес датой и временем.

Системная дата и время представляют собой понятия, широко применяемые в информационных технологиях для обозначения специфических временных параметров в рамках конкретной системы. Они могут быть использованы для внутренних операций, логики работы и управления временными данными внутри системы. Примерами системной даты и времени могут служить временные метки, которые автоматически присваиваются объектам данных или событиям в процессе их обработки системой. Например, в базе данных одной компании может быть реализована системная дата и время для отслеживания изменений в записях или для регистрации времени выполнения определенных операций. Системную дату и время предлагается передавать в формате ISO 8601 со смещением, например - 2023-01-01T13:50:30+00:00. Примеры использования формата ISO 8601 в структуре JSON представлены на рисунке 1.

Представленный JSON содержит информацию о дате и времени в трех различных часовых поясах с использованием формата ISO 8601:

- timestamp_utc: Временная метка "2023-08-15T12:30:00Z" указывает на 15 августа 2023 года в 12:30 по всемирному координированному времени (UTC). Обозначение "Z" означает, что это время в формате UTC.

- timestamp_msk: Временная метка "2023-08-15T08:30:00+03:00" соответствует 15 августа 2023 года в 08:30 по Московскому времени (MSK) с временным смещением +03:00 относительно UTC.

- timestamp_jst: Временная метка "2023-08-15T21:30:00+09:00" отражает время 15 августа 2023 года в 21:30 по японскому стандартному времени (JST) с временным смещением +09:00 относительно UTC.


```
{
"timestamp_utc": "2023-08-15T12:30:00Z",
"timestamp_msk": "2023-08-15T08:30:00+03:00",
"timestamp_jst": "2023-08-15T21:30:00+09:00"
}
```


Рисунок 1 — Примеры использования формата ISO 8601 в структуре JSON.

Важно отметить, что данное смещение не несет информации о временной зоне, а служит исключительно для улучшения форматирования и удобочитаемости даты и времени. В принципе, можно применять любое смещение, например, с учетом временной зоны сервера, на котором размещен сервис. Тем не менее более предпочтительным является использование смещения 0, что эквивалентно времени в UTC. В качестве примера, дата и время могут быть представлены в виде "2022-04-01T15:30:00Z", где "Z" обозначает UTC временную метку. Это обеспечивает единообразие и точность интерпретации временных данных в рамках различных систем и приложений. Дополнительно приведены еще некоторые примеры системной даты и времени:

- регистрация пользователя в системе: предположим, что пользователь зарегистрировался на веб-сайте в определенное время. Система автоматически присваивает дату и время регистрации в формате ISO 8601 со смещением. Например, "2023-04-01T08:45:00Z".
- создание заказа или оплаты: когда пользователь делает заказ или совершает оплату через систему, система фиксирует дату и время операции. Например, "2023-04-02T14:20:00Z".
- журнал событий системы: важной частью мониторинга работы системы является запись событий в журнале. Каждое событие, например, обновление базы данных или выполнение задачи, будет содержать системную дату и время. Например, "202-04-03T10:00:00Z".

Системная дата и время не ограничены конкретной временной зоной и могут быть легко адаптированы к часовому поясу пользователя, являются своего рода универсальным хронометром, охватывая в себе моменты без привязки к географическим границам. При необходимости использования системной даты и времени в конкретном числовом поясе, например для отображения журнала событий на клиентской стороне с учетом выбора временной зоны, например пользователем в личном кабинете, рекомендуется передавать информацию о

временной зоне в отдельном дополнительном поле наряду с системной датой и временем. Пример представлена на рисунке 2.

В международном стандарте времени и даты ISO 8601 нет явного стандарта для идентификаторов часовых поясов. Однако существует широко принятая практика использования определенных стандартов для идентификации часовых поясов, таких как база данных часовых поясов IANA (Internet Assigned Numbers Authority) [6] или стандарты, определенные в различных языках программирования и библиотеках для работы с датой и временем. В базе данных часовых поясов IANA, наиболее распространенным форматом идентификаторов часовых поясов является "Регион/Город", например "Europe/Moscow" или "America/New_York". Эти идентификаторы обычно используются в различных программах и веб-приложениях для установки и отображения правильного часового пояса.

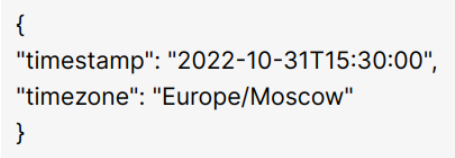



Рисунок 2 — Рекомендация передачи информацию о временной зоне в отдельном дополнительном поле с системной датой и временем.

Понятие "фактическая дата и время" или "бизнес дата и время" обозначают временные метки, которые являются инвариантами относительно часовых поясов. Это означает, что их регистрация, обработка и интерпретация должны осуществляться без привязки к конкретной временной зоне. Это обеспечивает унификацию и стандартизацию ведения временных записей в многочасовых и мультирегиональных условиях. В качестве иллюстрации данных временных меток могут выступать: время вылета самолета, указываемое в соответствии с местным временем аэропорта вылета; расписания движения поездов, дата рождения лица и дата подписания договоров, важность которых заключается в обеспечении точности и единства восприятия независимо от географического положения участников процесса.

Для передачи фактической даты и времени рекомендуется использовать формат ISO 8601 без смещения. Примером такой временной метки может служить "2023-09-20T15:00:00". Данный формат удобен для работы на стороне клиента, в частности, при разработке фронтэнд-компонентов. Браузеры и фронтэнд-фреймворки предоставляют встроенные механизмы для преобразования строк в формате ISO 8601 во внутренний тип date в JavaScript, автоматически адаптируя их под временную зону пользователя. Это обеспечивает, что независимо от локальных настроек времени у конечного пользователя, дата и время будут отображаться корректно. Далее, представлены примеры даты и времени для различных событий в формате ISO 8601 без указания смещения временной зоны:

- дата и время вылета самолета: пример: «2023-12-15T10:30:00». Здесь дата вылета – 15 декабря 2023 года, время – 10:30 по местному времени.

- дата и время заезда в отель: пример: «2023-08-21T14:00:00». Заезд запланирован на 21 августа 2023 года, 14:00 по местному времени.
- дата и время начала концерта: пример: «2023-09-30T18:00:00». Концерт начнется 30 сентября 2023 года в 18:00 по местному времени.
- дата подписания договора: пример: «2023-11-12T09:00:00». договор подписан 12 ноября 2023 года в 09:00 утра по местному времени.

В случаях, когда фактического времени недостаточно для полноценной интерпретации происходящих событий, особенно если они охватывают несколько временных зон, ключевым становится сохранение и передача не только фактической даты, но также системного времени в формате UTC и явной индикации временной зоны, где произошло событие. Пример представления данных в формате JSON, учитывающий указанные рекомендации, представлен на рисунке 3.


```
{
"event": "Flight",
"actual_date": "2023-12-15T10:30:00",
"system_time_utc": "2023-12-15T07:30:00Z",
"time_zone": "Europe/Moscow"
}
```


Рисунок 3 — Пример передачи не только фактической даты, но и системного времени в формате UTC и явной индикации временной зоны, где произошло событие.

В рамках того же исследований особое внимание было уделено механизмам именования полей, отвечающих за дату и время в базах данных, классах объектов и в объектах передачи данных (DTO). Анализ текущих подходов к именованию подобных полей выявил, что предпочтительнее всего использовать инфинитивы глаголов для обозначения действий с данными (например, create, update, delete, sign, send, receive) с последующим указанием типа хранимых данных (date, datetime, time) в качестве суффикса. Таким образом, названия таких полей приобретают форму create_date, update_datetime, delete_time, sign_date и тому подобное. Такой подход не только облегчает восприятие и интерпретацию названий полей, но и способствует их стандартизации в рамках проектов. В то же время, методика использования форм прошедшего времени с предлогом (как в created_at), хотя и популярна, демонстрирует ряд недостатков, включая затруднения с ясностью типа данных и необходимостью тратить дополнительное время на грамматическую адаптацию слов. Практика показывает, что такой подход может вводить в заблуждение и усложнять восприятие, особенно когда трансформация в форму past participle не имеет прямого отношения к времени (как, например, в случае с arrived_at). Для удобства и ясности в названиях полей в базе данных и объектах передачи данных (DTO) также рекомендуется использовать обозначения, которые однозначно указывают на суффиксы _utc для времени, выраженного в координированном всемирном времени (UTC), и _timezone для полей, связанных с часовыми поясами. Пример рекомендации по правилам наименования даты и времени в базе данных и DTO представлен на рисунке 4.

```
CREATE TABLE example_dates (
id SERIAL PRIMARY KEY,
create_date DATE,
update_datetime TIMESTAMP,
delete_time TIME,
sign_date DATE,
received_datetime_utc TIMESTAMP WITH TIME ZONE,
received_timezone VARCHAR(40)
);
```

```
{
"id": 1,
"createDate": "2023-10-01",
"updateDatetime": "2023-10-01T12:00:00",
"deleteTime": "18:00:00",
"signDate": "2023-10-01",
"receivedDatetimeUtc": "2023-10-01T12:00:00+00:00",
"receivedTimezone": "Europe/Moscow"
}
```

Рисунок 4 — Пример рекомендации по правилам наименования дат и времени в базе данных и DTO.

В современной практике разработки программного обеспечения неотъемлемую роль играет согласованное использование систем дат и времени среди всех членов проектной команды, включая разработчиков и аналитиков. Учитывая сложность и разнообразие подходов к работе с датами и временем в различных системах, принятие единых стандартов и правил является критически важным. Одним из эффективных административных инструментов, способствующих достижению данной цели, является создание специализированной страницы в корпоративной wiki-системе [7] проекта, такой как Confluence [8]. Такая страница должна служить централизованным источником всех требований и соглашений, касающихся работы с датой и временем, включая, в частности, различие между системными и фактическими датами и временем, а также бизнес-примеры использования в контексте специфики проекта. Не менее важным аспектом является включение в документ чек-лист ознакомления, который обязывает каждого члена команды подтвердить своё знакомство с документом и прилагаемыми к нему правилами и стандартами. Это обеспечивает не только формализацию процесса ознакомления, но и способствует формированию общей культуры и подхода к работе с данными в проектной команде, что в свою очередь способствует снижению числа ошибок, вызванных несогласованностью в обработке даты и времени. В документацию обязательно рекомендуется включить таблицу с правилами применения типов данных в СУБД и языках программирования, используемых в системе. Пример такой таблицы приведен в таблице 1.

Таблица 1 — Пример применения типов.

| Формат передачи | Описание | Тип поля в PostgreSQL | Тип поля в Java | Тип поля в JavaScript |
|---|---|---|---|---|
| yyyy-MM-dd | Фактическая дата | date | LocalDate | Date |
| HH:mm:ss | Фактическое время | time | LocalTime | Date |
| yyyy-MM-dd’T’HH:mm:ss | Фактическая дата и время | timestamp | LocalDateTime | Date |
| yyyy-MM-dd’T’HH:mm:ss[.sss]Z ±HH:mm | Системная дата и время | timestamp with timezone | Instant OffsetDateTime | Date |
| ^[A-Za-z]+\/[A-Za-z_\-]+$ | Временная зона | text | String | String |

Описание правил работы с датой и временем, а также приведение конкретных примеров и форматов, используемых в базах данных и языках программирования в инструментах вики-проекта, несет значительную пользу для всех участников. Это обеспечивает не только единую основу для взаимопонимания между разработчиками различного уровня квалификации, но и способствует более эффективному и менее затратному в плане времени процессу разработки. В дополнение к этому, чек-лист для ознакомления с правилами работы с датами и временем вводит строгость и последовательность в рабочий процесс, что не только формирует продуктивную рабочую культуру, но и заметно снижает количество допускаемых ошибок и возникающих вопросов, связанных с интерпретацией временных данных. Таким образом, структурированный и четко организованный подход к работе с датой и временем является незаменимым компонентом в разработке программного обеспечения, создающим основу для качественной и эффективной работы всей команды проекта.

**3. Заключение**

Исследование охватило несколько крупных проектов, включая как современные системы, так и системы, унаследованные от предыдущих разработок. Независимо от размера и специфики проектов, общими для всех оказались определенные проблемы, связанные с датой и временем, в частности, несогласованность в передаче временных зон и проблемы с обеспечением согласованности даты и времени в микросервисной архитектуре. Как было установлено, одной из ключевых причин возникновения данных проблем является неэффективная коммуникация между командами разработчиков и аналитиков. Недостаточное понимание основных принципов работы с датой и временем в составе проектных групп приводит к ошибкам, которые, впоследствии, серьезно затрудняют поддержку и развитие систем. На основе анализа полученных данных, в статье предложен ряд технических и административных рекомендаций, направленных на преодоление выявленных недостатков. Внедрение предложенных мер в проектную практику позволило значительно снизить количество ошибок, связанных с датой и временем, тем самым подняв общий уровень качества разработки и управляемости проектов. Рекомендации, полученные в ходе исследования, применялись в последующих проектах и продемонстрировали их высокую эффективность, став инструментом для достижения более высокого качества в работе с микросервисными архитектурами.

## Список источников

1. Маркова, В. Д. Цифровизация управления: от АСУ к микросервисам / В. Д. Маркова // ЭКО. – 2022. – № 9(579). – С. 113-129. – DOI 10.30680/ECO0131-7652-2022-9-113-129. – EDN CEAOBT.

2. Электронные ресурс https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Glossary/Unix_time (дата обращения 01.11.2024).

3. Парфенов, Ю. П. Архитектура хранилища Database as a Service на основе PostgreSQL / Ю. П. Парфенов, Д. А. Девятериков, В. О. Васюнин // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. – 2012. – № 7. – С. 112-118. – EDN RAGKXX.

4. Малых, В. Л. Миграция с Oracle на PostgreSQL сильно связной МИС Интерин / В. Л. Малых, А. Н. Калинин // Программные системы: теория и приложения. – 2022. – Т. 13, № 4(55). – С. 77-91. – DOI 10.25209/2079-3316-2022-13-4-77-91. – EDN WXXVKQ.

5. Сукиасян, Э. Р. Новые стандарты 2019 года / Э. Р. Сукиасян // Научные и технические библиотеки. – 2019. – № 1. – С. 80-85. – DOI 10.33186/1027-3689-2019-1-80-85. – EDN ENCIWF.

6. Электронные ресурс https://www.timeapi.io/documentation/iana-timezones (дата обращения 01.11.2024).

7. Архитектура системы управления знаниями на основе WiKi-технологии и интегрированных онтологических моделей / Д. И. Муромцев, В. А. Горовой, А. Н. Злобин [и др.] // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2011. – Т. 54, № 1. – С. 5-12. – EDN NEKDGD.

8. Электронные ресурс https://www.atlassian.com/software/confluence (дата обращения 01.11.2024).

## References

1. Markova, V. D. Digitalization of management: from automated control systems to microservices / V. D. Markova // ECO. – 2022. – № 9(579). – Pp. 113-129. – DOI 10.30680/ECO0131-7652-2022-9-113-129. – EDN CEAOBT.

2. Electronic resource https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Glossary/Unix_time (accessed 01.11.2024).

3. Parfenov, Yu. P. Architecture of the Database as a Service repository based on PostgreSQL / Yu. P. Parfenov, D. A. Devyaterikov, V. O. Vasyunin // Izvestia of Higher educational institutions of Russia. Radio electronics. – 2012. – No. 7. – pp. 112-118. – EDN RAGKXX.

4. Malykh, V. L. Migration from Oracle to PostgreSQL strongly connected MIS Interin / V. L. Malykh, A. N. Kalinin // Software systems: theory and applications. - 2022. – Vol. 13, No. 4(55). – pp. 77-91. – DOI 10.25209/2079-3316-2022-13-4-77-91. – EDN WXXVKQ.

5. Sukiasyan, E. R. New standards 2019 / E. R. Sukiasyan // Scientific and technical libraries. - 2019. – No. 1. – pp. 80-85. – DOI 10.33186/1027-3689-2019-1-80-85. – EDN ENCIWF.

6. Electronic resource https://www.timeapi.io/documentation/iana-timezones (accessed 11/01/2024).

7. Architecture of a knowledge management system based on WiKi technology and integrated ontological models / D. I. Muromtsev, V. A. Gorovoy, A. N. Zlobin [et al.] // Izvestia of Higher Educational Institutions. Instrumentation. - 2011. – Vol. 54, No. 1. – pp. 5-12. – EDN NEKDGD.

8. Electronic resource https://www.atlassian.com/software/confluence (accessed 01.11.2024).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 450-458.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 450-458.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.9:378+303.64

# ОСВОЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ДАННЫХ КАК СТУПЕНЬ РОСТА ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ БУДУЩЕГО МЕДИКА

***Вера Николаевна Русакова[1]✉, Юлия Сергеевна Козлова[2], Кристина Сергеевна Никонорова[3]***
*[1,2,3]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]v.n.rusakova@yandex.ru✉, [2]ks_yulia19@mail.ru, [3]nikonorova2004kris@gmail.com*

***Аннотация.*** *Студентам медицинских вузов важно освоить основные методы и разнообразные инструменты для анализа данных, поэтому верное построение и наполнение курса информационных технологий, направленное на развитие соответствующих компетенций – залог их успешного применения в будущей профессиональной деятельности. В статье изложена основная линия курса, позволяющая эффективно развивать навыки аналитики у студентов, а также некоторые практические примеры.*

***Ключевые слова:*** *обучение анализу медицинских данных, информационные технологии, SQL, проектная работа студентов.*

Conference paper

# STUDYING THE BASICS OF DATA ANALYSIS IN INFORMATION TECHNOLOGY TRAINING AT A MEDICAL UNIVERSITY

***Vera N. Rusakova[1]✉, Julia S. Kozlova[2], Kristina S. Nikonorova[3]***
*[1,2,3]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]v.n.rusakova@yandex.ru✉, [2]ks_yulia19@mail.ru, [3]nikonorova2004kris@gmail.com*

***Abstract.*** *It is important for students of medical universities to master the basic methods and diverse tools for data analysis, therefore, the correct construction and content of the information technology course aimed at developing relevant competencies is the key to their successful application in future professional activities. The article outlines the main line of the course, which allows students to effectively developing analytics skills, as well as some practical examples.*

***Keywords:*** *medical data analysis training, information technology, SQL.*

© Русакова В. Н., Козлова Ю. С., Никонорова К. С., 2024

## 1. Введение

Медик – это всегда во многом аналитик. Любому участковому врачу необходимо на хорошем уровне владеть основами анализа и систематизации данных, чтобы верно интерпретировать результаты обследований пациентов, но однозначно на первое место данная компетенция выходит, когда требуется умение комплексно подойти к проведению важных научных экспериментов в области медицины (см., например, [1-4]).

Сегодня на помощь специалисту приходят информационные технологии. Возможности современных аналитических систем поистине велики. Начиная от разнообразных калькуляторов, позволяющих не только производить арифметические действия, но и делать сложные вычисления, а также конвертировать всевозможные величины, до систем искусственного интеллекта, уже позволяющих дать достаточно аргументированные рекомендации, как по постановке диагноза и по ведению больного, так и по планированию и организации исследовательской работы (см., например, [5-7]).

## 2. Аналитика как часть курса информационных технологий

В рамках курса информационных технологий в медвузе можно построить систему заданий, постепенно подводящую будущего специалиста к пониманию возможностей и разнообразия методов и инструментов для анализа медицинских данных, важности их освоения для успешного профессионального роста в современном мире глобальной информатизации.

Первые шаги здесь – освоение электронных таблиц, построение дашбордов в них. Студенты проходят путь от правильного представления данных, их оформления и применения первых простейших формул, до построения сводных таблиц, использования инструментов анализа данных и вывода аналитики в виде тщательно подобранных, как с точки зрения максимальной информативности, так и эргономического визуального представления диаграмм.

Следующая ступень – написание индивидуальных или групповых проектных работ по аналитике данных выбранного медицинского направления. Это позволяет закрепить изученный материал, при использовании разнообразных формул и функций, углубить свои знания по работе с электронными таблицами, а также дополнительно мотивировать будущих медиков на применение освоенных медиков на практике. Построение интерактивного дашборда дает незаменимый опыт в анализе и обнаружении зависимостей между имеющимися данными и формулировать гипотезы для более детальных исследований.

Хорошо иллюстрирует такую работу, представленная студентками, тогда еще 2 курса МИ ОГУ им. И.С. Тургенева, аналитика по базе данных аптеки (рисунки 1 и 2).

Целью работы было проанализировать эффективность продаж гипотетической аптеки. (Все значения для заполнения таблицы были выдуманы, любые совпадения личных данных случайны, но параметры подобраны по результатам анализа деятельности реальных компаний).

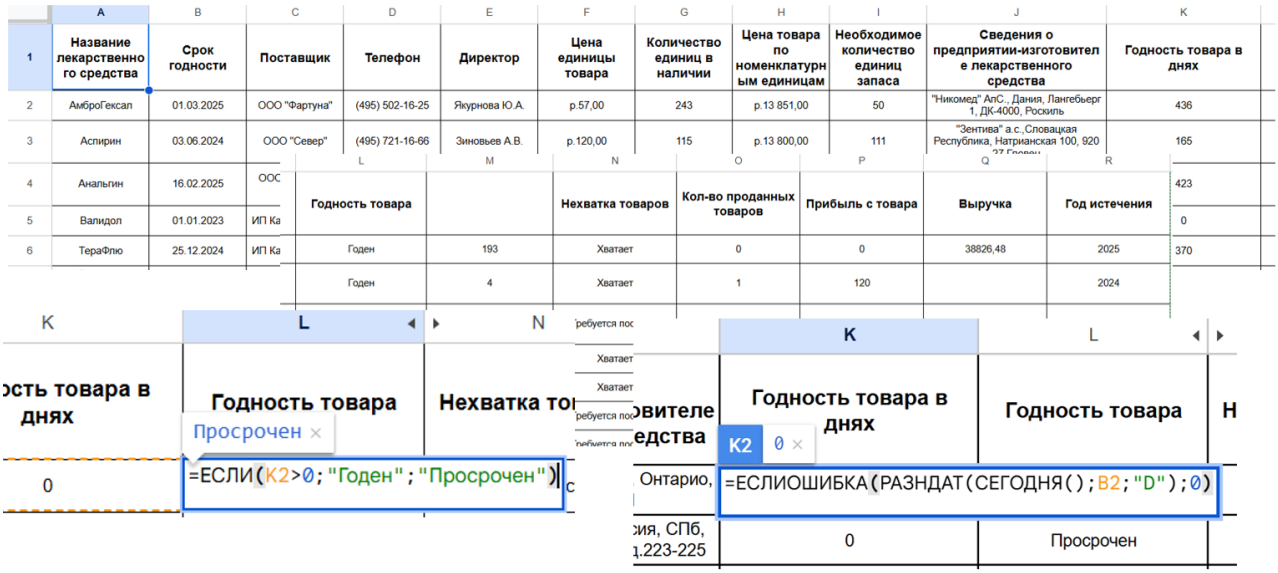



Рисунок 1 — Фрагменты таблицы «Лекарственные средства» с примерами использованных формул.




Рисунок 2 — Фрагменты таблицы «Заказы» с примером использования раскрывающегося списка.

Так, по таблице «Лекарственные средства» был построен интерактивный дашборд (рисунок 3), где, в зависимости от выбранного лекарства и срока истечения его срока годности можно отслеживать, например, зависимость выручки от процента просроченных и закупленных товаров, а также достаточность имеющегося запаса лекарственных средств, количество проданных товаров и цену лекарств у различных поставщиков.

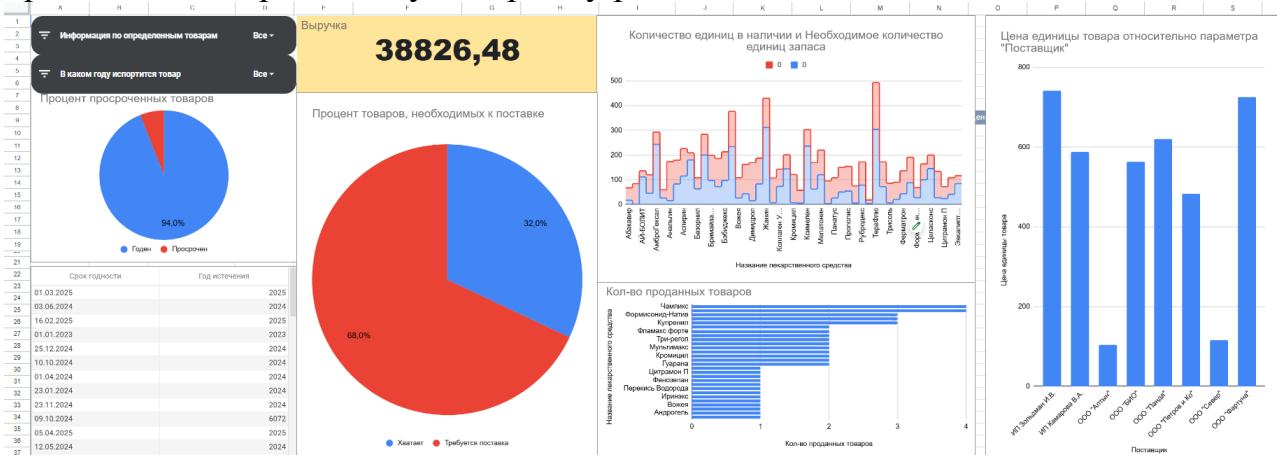



Рисунок 3 — Дашборд, построенный по таблице «Лекарственные средства».

Очевидно, что такое визуальное представление данных гораздо удобнее для восприятия информации, чем простая таблица, что значительно упрощает проведение аналитики.

Выполнение такой работы требует немалых усилий, но наличие навыков подготовки отчетов в виде интерактивных дашбордов может существенно повлиять на успешность карьерного роста медработника.

После знакомства с возможностями электронных таблиц, изучаются основы языка программирования Python. Подбор примеров из области медицины и здравоохранения позволяет, как продемонстрировать возможности языка, так и сделать дисциплину более доступной для студентов, исключив из нее сложные математические задачи, зачастую характерные для курсов программирования.

Здесь можно, например, подсчитывать необходимое число приемов лекарственных средств и их дозировку, искать лекарство в списке или в словаре по ключу и т.п.

Далее, изучаем основы SQL и осваиваем элементарные возможности Python для работы с БД.

**3. Применение SQL и Python для анализа и визуализации медицинских данных**

Важным аспектом является разработка базы данных (БД). Студенты должны понимать, что существующие медицинские информационные системы, позволяющие хранить данные по пациентам (и др. аналогичное программное обеспечение) имеют существенное ограничение по объему хранимых данных, а разработанные под конкретные задачи, специализированные системы – еще и достаточно ограниченный функционал. Выходом здесь может стать знакомство с языком SQL и библиотеками Python для работы с БД, что позволит студентам понять принцип такой обработки информации.

Для лучшего усвоения материала, после знакомства с основными понятиями указанной предметной области и базовыми командами языка SQL, учащимся предлагается выполнить ряд лабораторных работ, подводящих их к проектированию собственной БД. Поскольку объем их достаточно большой и выполнение отдельных заданий предполагается в качестве самостоятельного внеаудиторного проекта, предпочтение отдано онлайн-редактору SQLite https://sqliteonline.com/, несмотря на его существенные ограничения.

В лабораторной работе 1 студенты по шагам повторяют построение схемы данных для упрощенной БД клиники, содержащей таблицы “Отделения”, “Врачи”, “Пациенты” и “Оказанные услуги”, разбираются с типами связей между таблицами и нормализацией данных, а затем практикуются в написании запросов на создание таблиц.

Творческое задание к первой лабораторной – спроектировать собственную БД по результатам медицинских исследований и создать таблицы с найденными связями между ними. Сведения предлагается найти в специализированных литературных источниках, или сгенерировать при помощи программ с искусственным интеллектом, взяв за основу реально существующие параметры измерений.

Лабораторная работа 2 предполагает написание запросов на удаление и модификацию таблиц, а также на заполнение их данными.

Для отработки первых изначально создается еще одна таблица “Рейтинг”, куда выносятся соответствующие данные по врачам со связью один к одному с этой таблицей. В ходе работы схема данных изменяется, указанные сведения переносятся в таблицу “Врачи”, а таблица “Рейтинг” удаляется, что позволяет не только изучить соответствующие запросы, но и смоделировать реальную ситуацию проектирования БД, когда первичный анализ имеющейся информации не выявляет всех существенных нюансов в работе с базой, таких, например, как востребованность сведений по рейтингу врачей и необходимость упростить в дальнейшем запросы на выборку данных по специалистам, не обращаясь каждый раз к отдельной таблице.

Закрепляя изученный материал, студенты в ходе индивидуальной работы заполняют разработанную ранее БД.

Следующая лабораторная работа – это запросы на выборку, сортировку и удаление данных по условию. Для освоения команд можно предложить примеры запросов, а для закрепления изученного, – выполнить аналогичные задания, подобные, например, предложенным ниже.

*Задача 1.* Выберите из БД всех врачей, стаж которых не превышает номер Вашего варианта. Результатом выполнения запроса должны быть 2 столбца: имя врача и его стаж.

*Задача 2.* Выведите все имеющиеся данные о пациентах с платиновыми картами.

*Задача 3.* Напишите запрос на выборку врачей, имеющих ученую степень кандидата медицинских наук (к.м.н.), стаж работы которых не превышает номер Вашего варианта. Результатом выполнения запроса должны быть 3 столбца: имя врача, его стаж и рейтинг.

*Задача 4.* Напишите запрос на выборку всех данных о врачах, удовлетворяющих условию: доктор имеет ученую степень, стаж работы не меньше номера Вашего варианта и рейтинг в пределах от 5 до 9, включительно (обязательно использовать оператор BETWEEN).

*Задача 5.* Напишите запрос на выборку данных о пациентах, фамилия которых начинается с той же буквы, что и Ваша и с датой рождения, большей Вашей.

*Задача 6.* Выберите, используя оператор IN, всех докторов, имеющих ученую степень, чей стаж работы, при этом, меньше, чем Вам полных лет.

*Задача 7.* Выведите в алфавитном порядке ФИО пациентов, которые старше Вас и имя которых начинается на ту же букву, что и Ваше.

*Задача 8.* Выведите в порядке убывания цен все уникальные идентификаторы врачей и названия проданных услуг, цена которых превышает 1000.

*Задача 9.* Вычислите количество койко-мест в больнице.

*Задача 10.* Подсчитайте среднюю стоимость чека для всех пациентов Вашего пола, совершивших покупку в месяц, совпадающий с месяцем Вашего рождения.

Творческое задание. Придумайте и реализуйте не менее 10 запросов к БД, созданной ранее в соответствии с Вашим вариантом с различными условиями (должны охватывать все изученные операторы). Не менее 5 из них должны включать составные условия.

Последняя лабораторная работа по данной теме предполагает отработку применения библиотек pandas и sqlite3. Имеет смысл повторить создание и заполнение БД уже непосредственно в Python, а не использовать готовую базу (это можно делать для индивидуального проекта), также проделать запросы на выборку данных. Это позволит увидеть и понять отличие между написанием запросов в СУБД и обращением к БД с помощью кода на Питоне. После чего добавляем к подключаемым модулям библиотеки matplotlib и seabern и можем построить диаграмму по результатам выборки (см., например, [8]).

Рассмотрим простейший пример такого кода (пустые строки пусть предполагают написание и запуск команд в отдельной ячейке блокнота).

```
# Подключаем необходимые библиотеки
import pandas as pd
import sqlite3
# matplotlib и seaborn в ходе лабораторной работы
# подключаем позднее, но, поскольку делать это будем в
# той же ячейке блокнота, то в примере укажем их сразу:
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

# Подключаем БД HOSPITAL (в нашем случае - создаем):
conn = sqlite3.connect('HOSPITAL.db')

# Помещаем в переменную запросы на создание и заполнение
#таблиц БД (ниже создадим простой вариант одной таблицы):
create_database = '''
CREATE table DOCTORS (
  doctor_id INTEGER PRIMARY KEY AUTOINCREMENT,
  full_name_of_doctor TEXT NOT NULL,
  job_title TEXT NOT NULL,
  rating INTEGER NOT NULL,
);
INSERT INTO DOCTORS (full_name_of_doctor, job_title,
 rating)
VALUES
('Иванов Петр Сергеевич', 'Главный врач', 8),
('Петров Сергей Иванович', 'Хирург', 7),
('Сергеев Иван Петрович', 'Терапевт', 8)
'''
# Выполняем эти запросы
conn.executescript(create_database)
```

```
# Тренируемся в выборке и выводе данных, например:
select_DOCTORS = '''
SELECT * FROM DOCTORS
'''
df = pd.read_sql_query(select_DOCTORS, conn)
print(df)

# Строим гистограмму с наложенной плотностью
plt.figure(figsize=(10, 5))
sns.histplot(rating['rating'], kde=True, bins=10)
plt.title('Распределение рейтинга врачей')
plt.xlabel('Рейтинг')
plt.ylabel('Количество')
plt.show()
```

Творческое задание. Используя разработанную ранее БД создайте не менее 5 различных диаграмм по имеющимся данным. Предварительно продумайте, какие зависимости важно визуализировать. Также попробуйте воспользоваться подсказками чат-бота https://formulabot.com/ для анализа данных в вашей БД.

**4. Заключение**

Изложенная методология не охватывает все тематики дисциплины, а лишь позволяет проследить линию анализа данных в курсе. Ограниченное число часов дает возможность лишь поверхностного знакомства студентов с основными аспектами данной области, поэтому важную роль в курсе играет проектная деятельность учащихся [9-10], а для тех, кто заинтересуется данным вопросом, можно организовать дополнительные семинары.

Использование в курсе практических задач из области медицины позволяет повысить мотивацию студентов к его изучению, наглядно демонстрируя возможности современных инструментов обработки данных и то, насколько важно для будущего успешного медработника владеть широким спектром навыков в данной области.

Как для тех, кто планирует строить свое будущее в организации научных исследований, так и для простого представления отчетности по итогам текущей деятельности в удобном для визуального восприятия формате, комплексное освоение предлагаемых методов работы с информацией позволит достичь существенных успехов в выбранной сфере за счет повышения общепрофессиональных компетенций.

## Список источников

1. Смирнова Е. А. Применение методов анализа больших данных в исследованиях здравоохранения. Медицинские технологии. Оценка и выбор, (2), 2021. С. 21-26.

2. Бакурина А. А., Шкор О. Н. Big Data и advanced analytics в медицине // Девятая Международная научно-практическая конференция «BIG DATA and Advanced Analytics. BIG DATA и анализ высокого уровня». – Минск. 2023.

С. 329-332. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologiya-bolshih-dannyh-v-meditsine-i-zdravoohranenii-rossii-i-mira.

3. Маркина Н. В., Касюк С. Т., Шамаева Т. Н., Анализ данных в медицинских информационных системах с использованием технологии Data Mining // Информатика, вычислительная техника и управление. 2019. №6. С 111-116. URL: http://www.nauteh-journal.ru/files/c9dbe8c8-8f81-4bb2-87eb-5cc178ca2a62.

4. Простое руководство по анализу данных в здравоохранении // https://www.iso.org/ru/healthcare/data-analytics.

5. Том И. Информационные технологии в анализе медицинских данных // Наука и инновации. 2016. №3 (157). С. 28-31. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/informatsionnye-tehnologii-v-analize-meditsinskih-dannyh/viewer.

6. Зубов Н.Н., Умаров С.З., Парфишин В.П., Любогор Е.Ф. Информационные технологии анализа данных в медицине и фармации на основе открытого программного обеспечения : учебное пособие. М : РУСАЙНС, 2022. – 480 с.

7. ИИ-Инструменты. URL: https://academics.hse.ru/awc/AITools/

8. Грозин А. Python в научных вычислениях. URL: https://www.opennet.ru/opennews/art.shtml?num=43594.

9. Русакова В.Н., Аванесова И.С., Соловьева О.Р. Расчет некоторых синтетических данных и построение дашборда для руководителя подразделения клиники средствами электронных таблиц // International Journal of Humanities and Natural Sciences, vol. 2-2 (89), 2024. – С.146-150. URL: http://intjournal.ru/wp-content/uploads/2024/03/Mezhdunarodnyj-ZHurnal-2-2.pdf.

10. Русакова В.Н., Крыжановский М.Е., Хомяков А.Н. К вопросу о возможностях визуализации статистических данных клиники средствами MS Excel // «Современные тенденции развития науки и мирового сообщества в эпоху цифровизации», (2024, Москва). Сб. материалов XXIV Международной научно-практической конференции, Издательство «АНО ДПО ЦРОН», 2024, Москва, 2024. - С. 28-33.

## References

1. Smirnova, E. A. Application of big data analysis methods in healthcare research. Medical technology. Evaluation and selection, 2021;(2):21-26. (In Russ.).

2. Bakurina A. A., Shkor O. N. Big Data and advanced analytics in medicine//Ninth International Scientific and Practical Conference "BIG DATA and Advanced Analytics. BIG DATA and high-level analysis. " - Minsk. 2023:329-332. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologiya-bolshih-dannyh-v-meditsine-i-zdravoohranenii-rossii-i-mira (In Russ.).

3. Markina N.V., Kasyuk S.T., Shamaeva T.N., Data analysis in medical information systems using Data Mining technology//Informatics, computer engineering and management. 2019;(6):111-116. URL: http://www.nauteh-journal.ru/files/c9dbe8c8-8f81-4bb2-87eb-5cc178ca2a62 (In Russ.).

4. A simple guide to analyzing data in healthcare// https://www.iso.org/ru/healthcare/data-analytics (In Russ.).

5. Tom I. Information Technology in Medical Data Analysis//Science and Innovation. 2016;(3)(157):28-31. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/informatsionnye-tehnologii-v-analize-meditsinskih-dannyh/viewer (In Russ.).

6. Zubov N.N., Umarov S.Z., Parfishin V.P., Lyubogor E.F. Information technologies for data analysis in medicine and pharmacy based on open source software: a textbook. M: RUSINES; 2022. 480p. (In Russ.).

7. AI-tools. URL: https://academics.hse.ru/awc/AITools/ (In Russ.).

8. Grozin A. Python in scientific computing. URL: https://www.opennet.ru/opennews/art.shtml?num=43594 (In Russ.).

9. Rusakova V.N., Avanesova I.S., Solovyova O.R. Calculation of some synthetic data and building a dashboard for the head of the clinic division by means of spreadsheets // International Journal of Humanities and Natural Sciences, vol. 2-2, 2024;(89):146-150. URL: http://intjournal.ru/wp-content/uploads/2024/03/Mezhdunarodnyj-ZHurnal-2-2.pdf (In Russ.).

10. Rusakova V.N., Kryzhanovsky M.E., Khomyakov A.N. To the question of the possibilities of visualizing the statistical data of the clinic using MS Excel // "Modern trends in the development of science and the world community in the era of digitalization", (2024, Moscow). Sat. materials of the XXIV International Scientific and Practical Conference, Publishing House "ANO DPO CRON", 2024, Moscow, 2024:28-33. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 459-465.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 459-465.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.9

# РАЗРАБОТКА МОДУЛЕЙ СЕРВИСА ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ ВРАЧЕБНЫХ РЕШЕНИЙ

***Татьяна Николаевна Русских[1]✉, Илья Андреевич Буцев[2]***
*[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]trusskih@rambler.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8514-7508*
*[2]anbucew@gmail.com*

***Аннотация.*** *В статье затрагивается проблема разработки систем поддержки принятия врачебных решений. Описываются отдельные элементы разработки прототипа онлайн-сервиса поддержки принятия врачебных решений, в частности, результаты реализации процесса авторизации пользователей в системе, процессов поиска и заполнения электронной медицинской карты пациента.*

***Ключевые слова:*** *информационная система, врачебные решения, разработка, авторизация, электронная медицинская карта.*

Conference paper

# DEVELOPMENT OF MEDICAL DECISION SUPPORT SERVICE MODULES

***Tatyana N. Russkikh[1]✉, Ilya A. Butsev[2]***
*[1,2]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]trusskih@rambler.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-8514-7508*
*[2]anbucew@gmail.com*

***Abstract.*** *The paper is devoted to the problem of developing medical decision support systems. The paper describes individual elements of the development of a prototype of an online service for supporting medical decision-making, in particular, the results of implementing the process of user authorization in the system, the processes of searching and filling in the patient's electronic medical record.*

***Keywords:*** *information system, medical decisions, development, authorization, electronic medical record.*

© Русских Т. Н., Буцев И. А., 2024

## 1. Введение

В условиях растущего объема медицинской информации и ограниченных временных ресурсов системы поддержки принятия врачебных решений (далее СППВР) становятся неотъемлемым инструментом в повседневной клинической практике врачей. Информационные системы могут значительно ускорить процесс медицинской диагностики и выбора методов лечения, минимизируя риски ошибок [1-3]. Вышеизложенное обуславливает актуальность темы исследования.

## 2. Основной текст статьи

Система поддержки принятия врачебных решений – это программное обеспечение, позволяющее снизить количество врачебных ошибок, повысить качество медицинской помощи за счет анализа медицинской информации, разработки рекомендаций на основе врачебной базы знаний [1].

На рынке программных продуктов предлагаются различные СППВР. Эти системы автоматизируют процессы анализа медицинских данных, диагностики и прогнозирования заболеваний, что значительно повышает точность постановки диагнозов. Например, система «Webiomed» оценивает здоровье пациента и предсказывает развитие заболеваний, сервис «ТОП-3» помогает ставить предварительные диагнозы, а «MedicBK» корректирует терапию. Для оптимизации работы этих систем можно предложить систематическое обновление баз данных, повышение степени их интеграции с другими медицинскими системами.

Для разработки прототипа онлайн-сервиса ППВР был использован следующий стек технологий:

1. В качестве языка программирования выбран Python. Python отличается простым в использовании синтаксисом и в разы повышает производительность труда.
2. В роли системы управления базами данных (СУБД) для хранения данных пациентов, медицинской информации выбран MySQL. Основными преимуществами данной СУБД являются: свободная лицензия GNU GPL, бесплатность, высокая производительность.
3. Для разметки и создания пользовательского интерфейса использовались HTML и CSS. HTML-файл содержит описание структуры и содержания этой страницы, а CSS-файл – описание ее внешнего вида.

Для разработки онлайн-сервиса на основе языка программирования Python необходимо выбрать удобный веб-фреймворк. Поскольку разработка СППВР является масштабной задачей, требуется мощный и гибкий каркас веб-приложения. Одним из таких фреймворков является Django.

В ходе исследования разработан прототип онлайн-сервиса ППВР. Созданы три личных кабинета: для врача, администратора и руководителя. В системе врач может заполнять электронную медицинскую карту (далее ЭМК), пользоваться МКБ-10, справочником лекарственных препаратов, формировать запрос на постановку диагноза пациенту, получать рекомендации и формировать отзыв о работе сервиса. Администратор может анализировать и обрабатывать отзывы и предложения врачей.

Приведем элементы разработки прототипа онлайн-сервиса, в частности, результаты реализации процесса авторизации пользователей в системе, процессов поиска и заполнения ЭМК пациента.

На первом этапе была создана начальная страница с формой авторизации. Рассмотрим подробнее полученные результаты.

В системе существует 3 роли – Врач, Администратор и Руководитель, поэтому был определен класс «User». Для расширения стандартной модели пользователя Django импортирован «AbstractUser» из «django.contrib.auth.models». Получен следующий класс (рисунок 1).

```
from django.contrib.auth.models import AbstractUser, User
class User(AbstractUser):
    ROLE_CHOICES = [
        ('Врач', 'Врач'),
        ('Администратор', 'Администратор'),
        ('Руководитель', 'Руководитель'),
    ]
    role = models.CharField(max_length=20, choices=ROLE_CHOICES)
```

Рисунок 1 — Класс «User».

Помимо классов в «models.py», использующихся для создания таблиц в БД, существуют классы в «forms.py», которые предоставляют пользовательский интерфейс для ввода данных. В процессе разработки создана форма для окна авторизации (рисунок 2).

```
class UserLoginForm(AuthenticationForm):
    username = forms.CharField(widget=forms.TextInput(attrs={
        'class': 'form-control',
        'placeholder': 'Username',
    }))
    password = forms.CharField(widget=forms.PasswordInput(attrs={
        'class': 'form-control',
        'placeholder': 'Password',
    }))
```

Рисунок 2 — Форма для окна авторизации.

Для логина использовался «TextInput», а для пароля – «PasswordInput», который скроет введенный текст пароля.

Для обработки запросов и возвращения ответов (HTML-страниц, JSON-данных) от пользователей были созданы функции «login_view» (рисунок 3).

Данная функция обрабатывает запрос пользователя, если на вход она получает метод запрос «POST», то происходит извлечение логина и пароля. Затем происходит аутентификация пользователя через функцию «authenticate». В случае успеха выполняется вход в систему с помощью «login (request, user)». Далее проверяется роль пользователя при помощи класса «User», и, в зависимости от роли, пользователь перенаправляется на свою панель управления. При неудачной авторизации (ошибка в логине/пароле или нет соответствующей записи в БД) пользователь обратно возвращается на страницу авторизации до тех пор, пока не будут введены корректные данные.

```python
def login_view(request):
    if request.method == 'POST':
        username = request.POST['username']
        password = request.POST['password']
        user = authenticate(request, username=username, password=password)
        if user is not None:
            login(request, user)
            if user.role == 'Врач':
                return redirect('doctor_dashboard')
            elif user.role == 'Администратор':
                return redirect('admin_dashboard')
            elif user.role == 'Руководитель':
                return redirect('management_dashboard')
        else:
            return render(request, 'users/login.html', {
                'error_message': 'Invalid login credentials',
                'form': UserLoginForm(),
            })
    else:
        return render(request, 'users/login.html', {'form': UserLoginForm()})
```

Рисунок 3 — View-функция для авторизации.

После выполнения всех шагов разработки получена первая страничка онлайн-сервиса (рисунок 4).

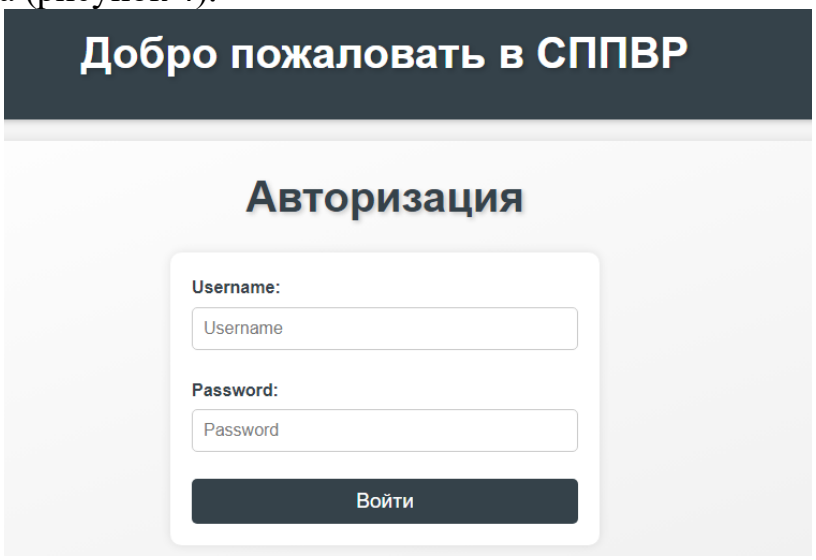



Рисунок 4 — Страница авторизации.

Далее были разработаны страницы сайта с 3 готовыми панелями администратора, руководства, врача. На рисунке 5 приведена панель врача.

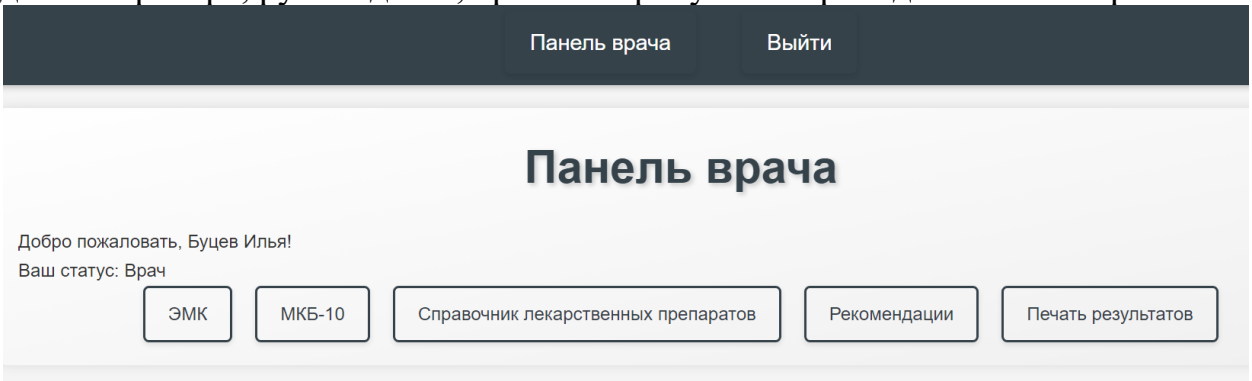



Рисунок 5 — Панель врача.

Опишем подробнее этапы разработки панели врача. Для начала был создан функционал для ЭМК. Для хранения данных о пациентах сформированы несколько связанных таблиц в БД. Были созданы 2 класса («class Patient» и «class MedicalRecord»). В классе «Patient» содержится основная информация о пациенте: имя, фамилия, отчество, дата рождения, пол, фотография, ИНН, СНИЛС, серия и номер паспорта, индекс массы тела, наличие вредных привычек и другие.

В классе «MedicalRecord» хранится информация о порядковом номере ЭМК пациента, диагнозе, плане лечения, а также, когда появилась и обновлялась запись о пациенте.

Кроме классов моделей были созданы классы форм с названиями «MedicalRecordForm» и «PatientForm». Для полноценной реализации функционала ЭМК потребовалось создать несколько функций. После реализации всех шагов была получена вкладка ЭМК (рисунки 6-9).

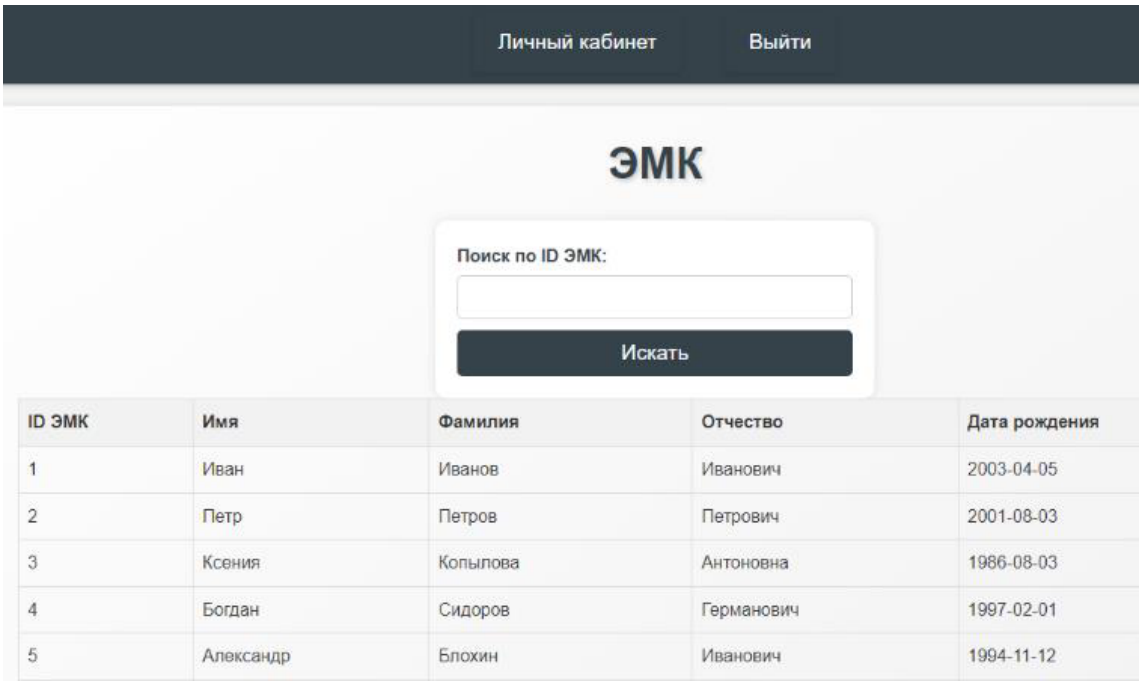



Рисунок 6 — Фрагмент первоначальной вкладки ЭМК.

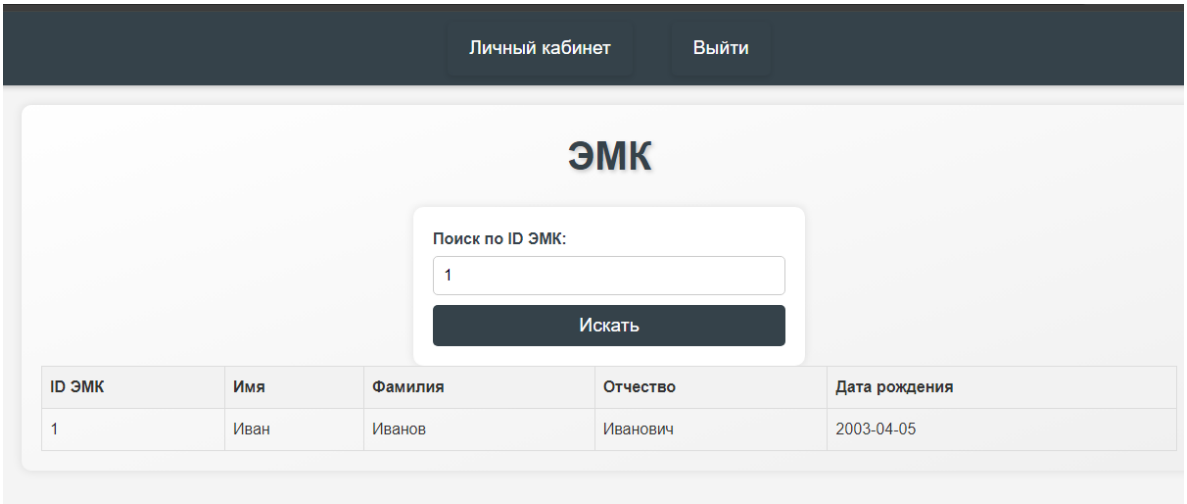



Рисунок 7 — Поиск по «id» ЭМК.

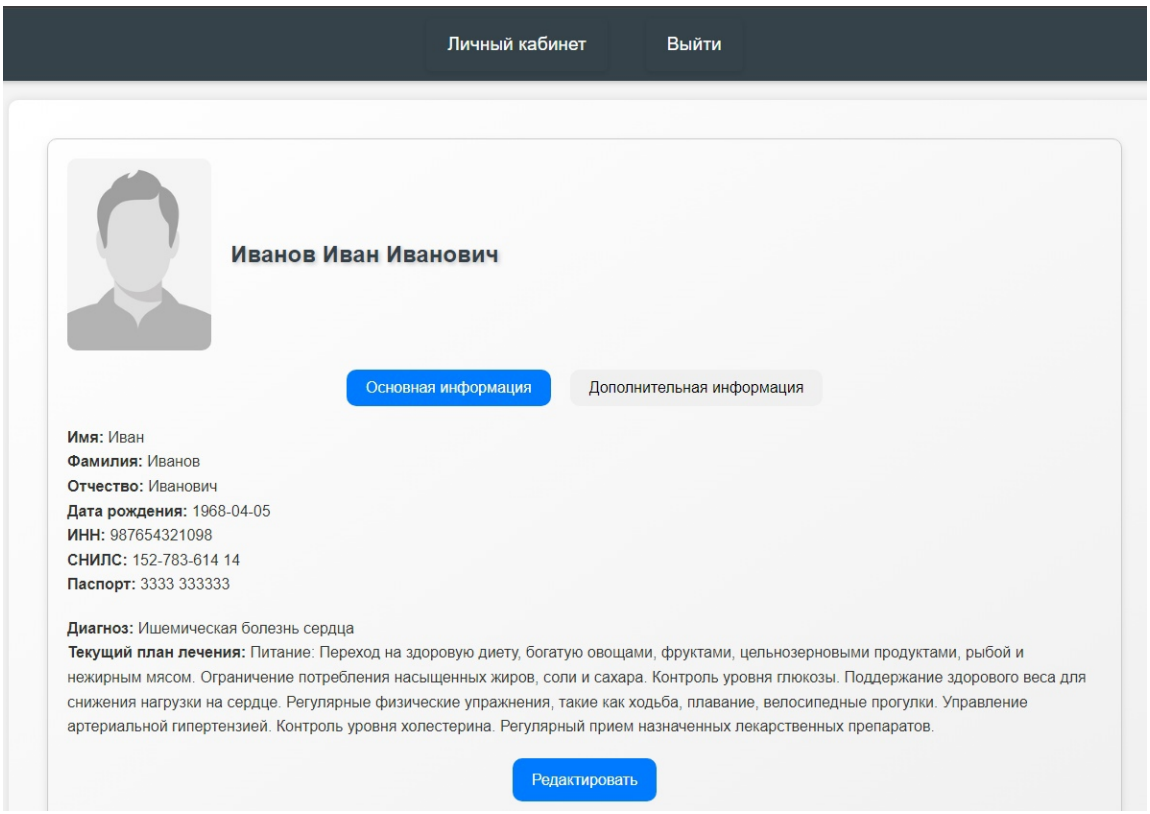



Рисунок 8 — Основная информация о пациенте.

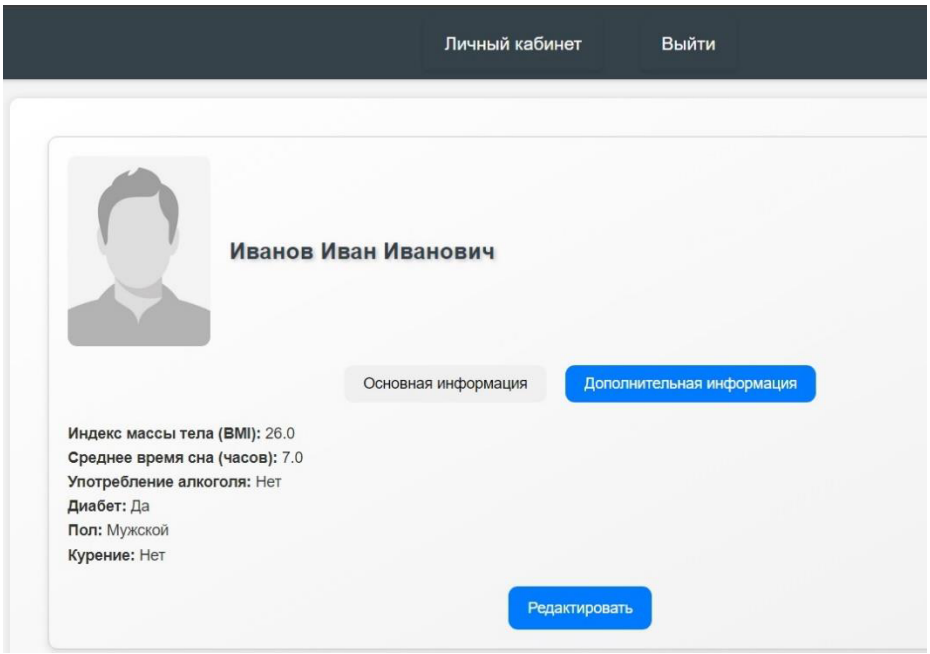



Рисунок 9 — Дополнительная информация о пациенте.

Представленные интерфейсы описывают отдельный функционал врача в системе.

## 3. Заключение

В рамках разработки сервиса создана веб-страница авторизации и три панели управления для каждой роли. Разработан функционал врача в виде поиска и редактирования ЭМК, возможности просматривать классификатор МКБ-10 и выполнять поиск записей по болезням или коду. В системе врачу

доступно просматривать справочник лекарственных препаратов, формировать запросы на постановку диагноза и схемы лечения и оставлять отзыв о работе системы. Разработка ИС позволит улучшить точность диагностики заболеваний, предоставив врачам доступ к современным инструментам анализа данных.

## Список источников

1. Гусев А.В., Зарубина Т.В. Поддержка принятия врачебных решений в медицинских информационных системах медицинской организации // Врач и информационные технологии. 2017. № 2. С. 60-72.

2. Атьков О.Ю., Кудряшов Ю.Ю., Прохоров А.А., Касимов О.В. Система поддержки принятия врачебных решений // Врач и информационные технологии. 2013. №6. С. 67-75.

3. Реброва О.Ю. Жизненный цикл систем поддержки принятия врачебных решений как медицинских технологий // Врач и информационные технологии. 2020. №1. С. 27-37.

## References

1. Gusev A.V., Zarubina T.V. Support for medical decision-making in medical information systems of a medical organization. Doctor and information technologies. 2017;(2):60-72 (In Russ.).

2. Atkov O.Yu., Kudryashov Yu.Yu., Prokhorov A.A., Kasimov O.V. Medical decision support system. Doctor and information technologies. 2013; (6): 67-75 (In Russ.).

3. Rebrova O. Yu. Life cycle of medical decision support systems as medical technologies. Doctor and information technologies. 2020; (1):27-37 (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 466-474.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 466-474.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91+519.65

# ИНФОРМАЦИОННО-СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ В ОБЛАСТИ СТРОИТЕЛЬСТВА

***Дмитрий Сергеевич Рыжков[1]✉, Александр Николаевич Привалов[2]***
*[1,2]Шуйский филиал Ивановского государственного университета, Шуя, Россия*
*[1]rizhkov.dima37@mail.ru✉, https://orcid.org/0009-0001-7375-7595*
*[2]privalov.61@mail.ru*

***Аннотация.*** *В статье анализируются существующие информационно-справочные системы (ИСС), используемые в строительной отрасли. Современные строительные компании сталкиваются с необходимостью управлять обширными массивами данных, включающими нормативно- правовую и техническую документацию. Несмотря на значительное количество доступных ИСС, отсутствуют полноценные исследования, которые бы всесторонне оценивали их эффективность, масштабы применения и потенциал для повышения точности и оперативности информационного управления проектами. В работе рассматриваются четыре ключевые ИСС: «Гранд СтройИнфо», «Техэксперт», «КонсультантПлюс: Технические нормы» и ISO Online Browsing Platform, каждая из которых обладает уникальными функциями и преимуществами. «Гранд СтройИнфо» специализируется на сметном ценообразовании, предоставляя доступ к обновляемым руководящим документам. «Техэксперт» отличается разветвленной системой интеллектуального поиска, актуальной для всех этапов строительства. «КонсультантПлюс» фокусируется на нормативно-технических документах, охватывая широкий спектр промышленных стандартов. ISO Online Browsing Platform предоставляет доступ к международным стандартам ISO, что актуально для соблюдения передовых международных практик. Проведенное исследование позволяет сделать выводы о предпочтительности использования одной из этих систем для разных аспектов строительного процесса, с учётом специфических требований и задач организаций.*

***Ключевые слова:*** *информационно-справочные системы, строительные нормы, нормативно-технические документы, сметное ценообразование, «Гранд СтройИнфо», «Техэксперт», «КонсультантПлюс», ISO стандарты, управление строительной информацией, интеллектуальный поиск, актуальные строительные данные, интеграция ИСС, эффективность управления.*

***Финансирование:*** *работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 17-77-3019.*

© Рыжков Д. С., Привалов А. Н., 2024

Conference paper

# INFORMATION AND REFERENCE SYSTEMS IN THE FIELD OF CONSTRUCTION

***Dmitry S. Ryzhkov[1]✉, Alexander N. Privalov[2]***
*[1,2]Shuisky Branch of Ivanovo State University, Shuya, Russia*
*[1]rizhkov.dima37@mail.ru✉, https://orcid.org/0009-0001-7375-7595*
*[2]privalov.61@mail.ru*

***Abstract.*** *The article analyzes the existing information and reference systems (ISS) used in the construction industry. Modern construction companies face the need to manage vast amounts of data, including regulatory and technical documentation. Despite the significant number of available ISS, there are no full- fledged studies that would comprehensively assess their effectiveness, scope of application and potential for improving the accuracy and efficiency of project information management. The paper considers four key ISS: Grand StroyInfo, Techexpert, ConsultantPlus: Technical Standards and ISO Online Browsing Platform, each of which has unique functions and advantages. Grand StroyInfo specializes in estimated pricing, providing access to updated guidance documents. Techexpert is distinguished by an extensive intelligent search system that is relevant for all stages of construction. ConsultantPlus focuses on regulatory and technical documents, covering a wide range of industrial standards. The ISO Online Browsing Platform provides access to international ISO standards, which is important for compliance with international best practices. The conducted research allows us to draw conclusions about the preference of using one of these systems for different aspects of the construction process, taking into account the specific requirements and tasks of organizations.*

***Keywords:*** *information and reference systems, building codes, regulatory and technical documents, estimated pricing, Grand StroyInfo, Techexpert, ConsultantPlus, ISO standards, construction information management, intelligent search, current construction data, integration of ISS, management efficiency.*

***Funding:*** *the work was supported by the Russian Science Foundation, Project № 17-77-300.*

## 1. Введение

Строительная отрасль в современном мире сталкивается с необходимостью обработки и управления огромными объемами информации. Эти данные включают в себя техническую документацию, проектную информацию, нормативно-правовые акты и производственные графики. Сложности управления такой разноплановой информацией могут вызвать существенные риски, включая задержки, перерасход бюджета и снижение качества работ. Особую актуальность приобретает проблема ограниченного понимания и использования информационно-справочных систем (ИСС) в строительстве.

Одной из ключевых проблем является отсутствие обзорных исследований, которые всесторонне рассматривают имеющиеся на рынке ИСС, сравнивают их функционал, удобство использования и точность результатов. Этот пробел в информации может привести к тому, что строительные компании делают выбор в пользу не самых оптимальных решений. Без четкого понимания всех доступных инструментов и их сравнительных преимуществ, компании могут упустить возможность повышения эффективности своих процессов.

Актуальность данного исследования обусловлена необходимостью в повышении точности и оперативности управления строительной информацией. ИСС предоставляют инструменты, которые могут значительно улучшить точность выдаваемых результатов, упростить процесс поиска информации и обеспечить ее актуальность и своевременность получения.

Целью данного исследования является предоставление обзорного анализа существующих ИСС в строительной отрасли, выявление их преимуществ и недостатков, а также разработка рекомендаций по выбору наилучших решений для оптимизации управления проектной информацией.

## 2. Основной текст статьи

Информационно-справочная система представляет собой комплекс, обеспечивающий сбор, хранение и предоставление информации по запросу. Эффективная работа ИСС обеспечивается следующими компонентами:

- общее хранилище данных;
- специализированные устройства, преобразующие данные в доступный пользователю формат;
- каналы передачи информации;
- обработка данных, осуществляемая либо группой людей, либо электронно-вычислительной машиной.

Классификация информационных систем включает государственные, территориальные и отраслевые системы. Актуальными для строительной отрасли являются именно отраслевые ИСС, которые включают как сложные автоматизированные программы, способные обрабатывать информацию самостоятельно, так и более простые системы, предоставляющие только справочные данные.

Рассмотрим существующие информационно-справочные системы, используемые в области строительства.

«Гранд СтройИнфо» – информационно-справочная система, специально разработанная для сметного ценообразования в строительстве. Она выполняет функции электронной библиотеки, предоставляя доступ к руководящим документам и нормативным актам. Основные функции и разделы системы включают:

- руководящие документы по ценообразованию, включая указы и распоряжения государственных органов;
- федеральная сметно-нормативная база;
- справочники базовых цен для проектных и изыскательских работ;

- полный архив главного периодического издания, адресованного специалистам, работающим в сфере ценообразования в строительстве – «Вестник ценообразования». Вестник выходит ежемесячно. Там публикуются нормативные и методические документы по ценообразованию в строительстве, также в каждом номере есть раздел «Консультации», в котором ведущие специалисты отвечают на актуальные вопросы по сметному делу. Номера сгруппированы по годам, начиная с первого номера, выпущенного в 1995 году.

Имеется подраздел «Авторские издания», содержащий разработки, выполненные рядом ведущих экспертов в области сметного ценообразования, а также издания ряда компаний-партнеров.

Система обновляется ежемесячно, что обеспечивает актуальность предоставляемой информации [1]. Главная страница системы приведена на рисунке 1.

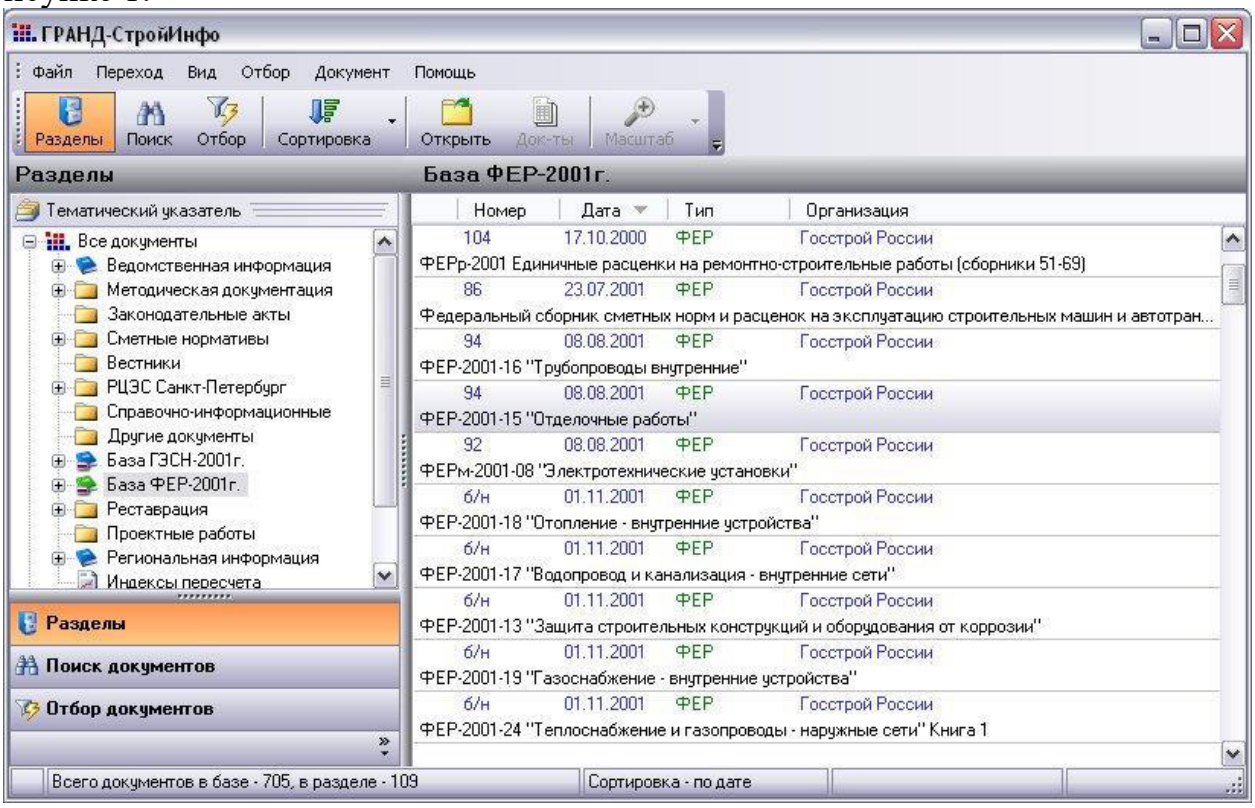



Рисунок 1 — Главная страница ИСС «Гранд СройИнфо».

Система «Техэксперт» – это комплекс отраслевых информационно-справочных систем. Для строительной отрасли есть отдельная версия, включающая в себя следующие информационные системы: «Стройэксперт», «Стройтехнолог», «Строй-Ресурс: подрядные организации», «ТПД. Здания, сооружения, конструкции и узлы», «ТПД. Инженерные сети, оборудование и сооружения». Обеспечивает специалистов широким спектром нормативно-технической информации, актуальной на всех этапах строительства — от проектирования до сдачи объекта в эксплуатацию. Система включает в себя обширный массив документов: СНиПы, ГОСТы, документы Росстроя и многое другое [2].

Основные преимущества системы:

- обеспечение актуальности информации посредством регулярного обновления;

- возможность работы с документами в системе MS Office и связь с другими специализированными приложениями;

- широкий спектр дополнительных сервисов, включая инженерные калькуляторы и аналитические инструменты для сравнения редакций документов.

Среди возможностей ИСС «Техэксперт» стоит отметить «интеллектуальный поиск» [3] – это инструмент, который в рамках одного запроса предоставляет весь комплекс необходимой информации: не только искомый документ, но и актуальные справки, техническую документацию, комментарии специалистов, образцы документов по заданной тематике и многое другое. При этом не требуется точного знания атрибутов документа – достаточно запроса в свободной форме, который можно ввести прямо с главной страницы системы (рисунок 2). Поисковик понимает общие фразы, профессиональный сленг и сокращения.

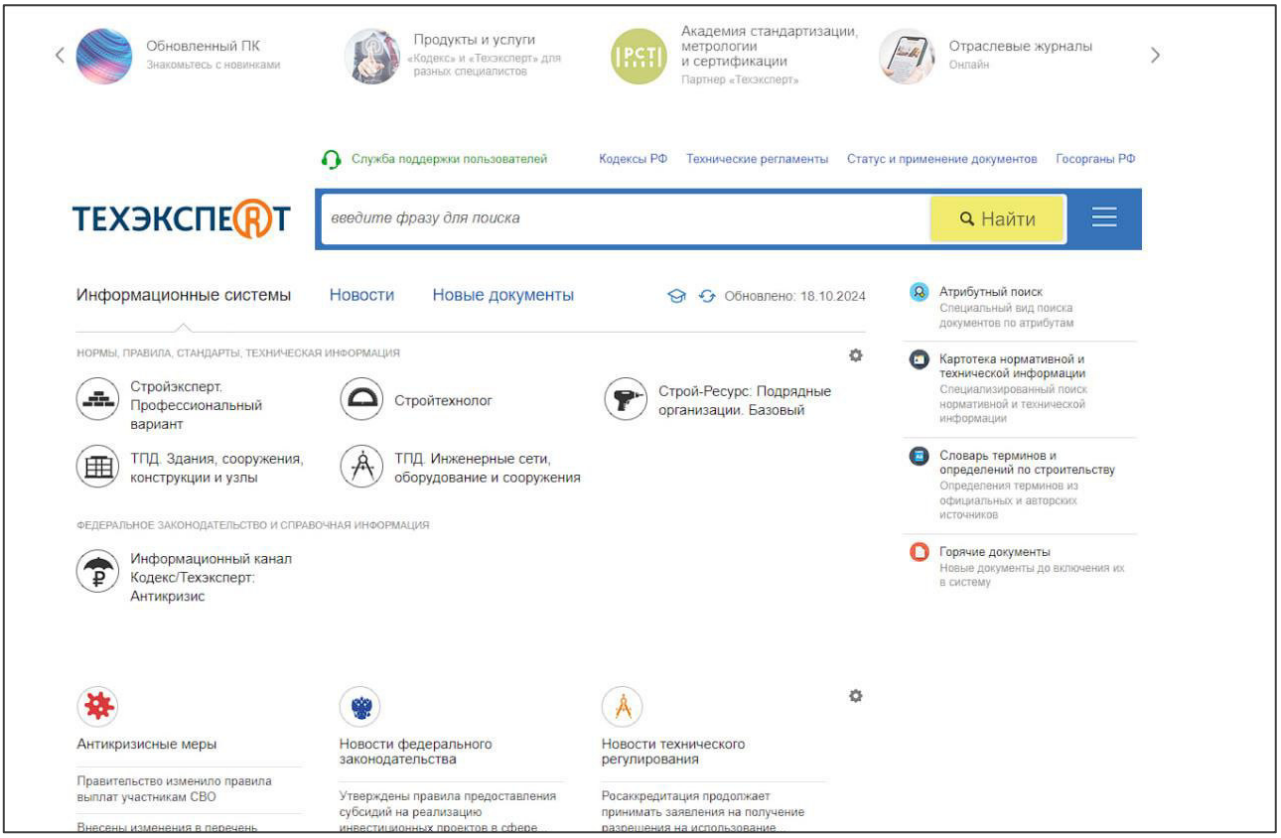


Рисунок 2 — Главная страница ИСС «Техэксперт».

«КонсультантПлюс: Технические нормы» – это информационно-справочная система, содержащая свыше 123 тысяч нормативно-технических документов по ряду направлений:

- строительство, градостроительство и архитектура;
- пищевая промышленность;
- легкая промышленность.

В рамках строительства система предоставляет нормативно-техническую документацию по строительству и смежным отраслям: СНиП, СНиР, ГОСТ, ГОСТр, ВСН, ГСН, ГСНр, ГЭСН, ГЭСНр, ГЭСНм, ГЭСНп, ЕНиР, МДС, НПР, ФЕР, ФЕРр, СП и другие документы [4].

Поиск и предоставление информации в системе организованы следующим образом: в карточке поиска есть поле «Предметный классификатор», словарь которого основан на специальном тематическом классификаторе, разработанном для данного тематического раздела. Это позволяет вести тематический поиск документов с учетом специфики содержания [4].

Информация в системе обновляется еженедельно.

Среди зарубежных информационно-справочных систем стоит выделить ISO Online Browsing Platform (OBP) – онлайн-платформу, предоставленную Международной организацией по стандартизации (ISO) для доступа к международным стандартам. ISO OBP позволяет пользователям просматривать метаданные стандартов ISO и читать часть их содержания. Платформа предоставляет доступ к большому количеству стандартов ISO, которые могут иметь непосредственное применение в строительстве. Это может включать стандарты, относящиеся к качеству строительных материалов, методам испытаний, безопасности, устойчивости сооружений и другим аспектам строительства [5].

С точки зрения информационных технологий, ISO OBP работает следующим образом:

- пользователи могут получить доступ к платформе через веб-браузеры без необходимости установки программного обеспечения.
- платформа предоставляет мощные инструменты поиска, позволяющие найти стандарты по ключевым словам, номерам стандартов или категориям.
- пользовательский интерфейс разработан для быстрого доступа к информации с интуитивно понятной навигацией.
- пользователи могут просматривать предварительный просмотр стандартов (обычно включает первые страницы и оглавление).
- полный доступ к тексту доступен через покупку. Это может быть сделано непосредственно на платформе.
- платформа постоянно обновляет свои записи в соответствии с новыми публикациями и пересмотрами стандартов ISO.

Возможности:

- большой каталог стандартов: охватывает разнообразные аспекты строительства, предоставляя ресурс для специалистов, чтобы они могли следовать международным передовым практикам.
- инструменты поиска и фильтрации: позволяют быстро ориентироваться в обширной библиотеке стандартов.

Рассмотренные выше системы необходимо сравнить (см. таблицу 1):

Таблица 1 — Сравнение информационно-справочных систем в области строительства.

| **Критерий сравнения** | **Гранд СтройИнфо** | **Техэксперт** | **КонсультантПлюс: Технические норма** | **ISO Online Browsing Platform** |
|---|---|---|---|---|
| Тип системы | Отраслевая (сметное ценообразование) | Отраслевая (строительство) | Отраслевая (нормативно технические документы) | Общая (любые сферы, для которых есть стандарты ISO) |
| Наличие базы нормативно правовых документов | Да, включает руководящие документы и нормативные акты | Да, включает СНиПы, ГОСТы, документы Росстроя и пр. | Да, содержит более 123 000 нормативно-технических документов | Да, включает метаданные международных стандартов ISO |
| Наличие базы технических документов | Да, нормативные документы по ценообразованию и справочники базовых цен | Да, широкий выбор технических документов и актуальны справочных материалов | Да, включает СНиПы, ГОСТы и другие типы документов | Да, предоставляет доступ к стандартам ISO |
| Наличие базы описания случаев из практики | Да, через архив изданий «Вестник ценообразования» | Да, предоставляет доступ к комментариям специалистов и образцам документов | Нет, основное внимание на нормативно-техническую документацию | Нет, только международные стандарты |
| Поиск информации | Через электронную библиотеку и архив изданий | Интеллектуальный поиск с поддержкой запроса в свободной форме | Поиск через предметный классификатор | Поиск по ключевым словам, номерам стандартов или категориям |
| Возможность обратиться для анализа ситуации | Да, через консультационный раздел «Вестника ценообразования» | Возможность получения актуальных справок от специалистов | Нет | Нет |
| Актуальность информации | Обновляется ежемесячно | Обновляется ежедневно | Обновляется еженедельно | Нет данных |
| Охват территорий действия документов | Российская Федерация | Российская Федерация | Российская Федерация | Международный охват |
| Расположение системы | Российская Федерация | Российская Федерация | Российская Федерация | Зарубежная (международная платформа) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Интеграция с другими системами | Возможна интеграция с 1С и другими бухгалтерскими программами | Открытые API для интеграции | Интеграция с программами документооборот а и другими системами | Нет |

**3. Заключение**

Анализируя различные информационно-справочные системы, применяемые в строительной отрасли, можно сделать вывод, что каждая из них обладает уникальными функциональными возможностями. «Гранд СтройИнфо», с его акцентом на сметное ценообразование, является незаменимым инструментом для специалистов, занимающихся разработкой и управлением бюджетами строительных проектов. «Техэксперт» выделяется интеллектуальными функциями поиска и широким спектром технических ресурсов, что делает его подходящим для комплексного управления проектами на разных стадиях. «КонсультантПлюс» предлагает глубокий массив нормативно-технических материалов и удобную систему поиска, что является преимуществом для обеспечения соответствия нормативным требованиям. ISO Online Browsing Platform предоставляет доступ к международным стандартам, что важно для проектов, ориентированных на международные стандарты и лучшие практики. В общем, для строительства наиболее предпочтительным является комплексное использование систем «Техэксперт» и «КонсультантПлюс» в комбинации с ISO OBP для международных стандартов, что позволит покрыть весь спектр необходимых документов и информации, обеспечивая максимальную точность и актуальность.

## Список источников

1. Программный комплекс «Гранд СтройИнфо». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: http://grandrb.ru/nashi-produkty/grandstrojinfo (10.11.2024).

2. Методическое пособие по эффективной работе с нормативно-технической информацией на примере профессиональных справочных систем «Техэксперт» для строительной отрасли. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://mgsu.ru/resources/Biblioteka/Metodichka_Tekhexpert_MGSU.pdf (10.11.2024).

3. Стройтехнолог. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://www.smeta.su/Techexpert/files/StroyTehnolog.pdf (10.11.2024).

4. КонсультантПлюс: ежемесячный бюллетень общероссийской сети распространения правовой информации №11 (339) ноябрь 2023. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://cmokhv.ru/media/cms_page_media/2023/12/28/ноябрь.pdf (10.11.2024).

5. ISO Online Browsing Platform. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: https://www.iso.org/obp/ui/#iso (10.11.2024).

## References

1. The Grand StroyInfo software package. URL: http://grandrb.ru/nashi-produkty/grandstrojinfo.

2. A methodological guide for effective work with regulatory and technical information on the example of professional reference systems "Techexpert" for the construction industry. URL: https://mgsu.ru/resources/Biblioteka/Metodichka_Tekhexpert_MGSU.pdf.

3. Stroytechnologist. URL: https://www.smeta.su/Techexpert/files/StroyTehnolog.pdf.

4. ConsultantPlus: Monthly bulletin of the All-Russian Legal Information Dissemination Network No.11 (339) November 2023. URL: https://cmokhv.ru/media/cms_page_media/2023/12/28/ноябрь.pdf.

5. ISO Online Browsing Platform. URL: https://www.iso.org/obp/ui/#iso.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 475-484.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 475-484.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.056.55

# РЕАЛИЗАЦИЯ БЕЗОПАСНОЙ ОТПРАВКИ ПОЧТОВЫХ СООБЩЕНИЙ ПОСРЕДСТВОМ ПРОТОКОЛОВ TLS И SASL С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ POSTFIX НА ПРИМЕРЕ ОС АЛЬТ

***Анастасия Алексеевна Созина***[1]✉
[1]*РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, Москва, Россия*
[1]*sosnaza@mail.ru*✉

***Аннотация.*** *В данной статье рассмотрена специфика работы почтового сервера Postfix на примере ОС альт, продемонстрирована его интеграция с протоколами безопасности TLS и SASL, а также приведена пошаговая инструкция по созданию самоподписанных SSL-сертификатов. На практике, используя средства анализатора сетевых пакетов и протоколов Wireshark, проведено тестирование полученной системы путем отправки почтового сообщения и анализа исходящего трафика.*

***Ключевые слова:*** *Postfix, электронная почта, SMTP, TLS, SASL, SSL-сертификаты, ALT Linux, настройка почтового сервера, безопасность.*

Conference paper

# IMPLEMENTATION OF SECURE EMAIL SENDING USING TLS AND SASL PROTOCOLS WITH POSTFIX ON THE ALT OS EXAMPLE

***Anastasia A. Sozina***[1]✉
[1]*Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University), Moscow, Russia*
[1]*sosnaza@mail.ru*✉

***Abstract.*** *This article examines the specifics of the Postfix mail server's operation using the ALT OS, demonstrating its integration with TLS and SASL security protocols, as well as providing a step-by-step guide for creating self-signed SSL certificates. In practice, the system was tested by sending an email and analyzing the outgoing traffic using the Wireshark network packet and protocol analyzer.*

***Keywords:*** *Postfix, email, SMTP, TLS, SASL, SSL certificates, ALT Linux, mail server configuration, security.*

© Созина А. А., 2024

## 1. Введение

На сегодняшний день сложно найти организацию, не реализующую внутренние и внешние коммуникации путем отправки почтовых сообщений, так как электронная почта остается важным инструментом для осуществления рабочих и учебных задач, а с учетом всевозрастающих требований к информационной безопасности, настройка эффективных и защищенных почтовых систем становится не просто необходимостью, но и обязательным требованием. В условиях активного перехода на отечественное программное обеспечение одним из наиболее актуальных решений является использование надежного и удобного в настройке почтового сервера Postfix – одного из самых рекомендованных и часто используемых в рамках российского дистрибутива ALT Linux.

В данной статье рассматривается поэтапная реализация системы отправки электронных писем с использованием протоколов TLS (Transport Layer Security) и SASL (Simple Authentication and Security Layer). Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

– изучить основы работы почтового сервера Postfix;

– обеспечить безопасность отправки писем путем использования протоколов TSL и SASL;

– сгенерировать SSL-сертификаты;

– провести тестирование настроенного почтового сервера.

## 2. Особенности работы Postfix

Витсе Венема, голландский программист и физик, еще в далеком 1999 году начал разрабатывать Postfix как более современную, производительную и безопасную альтернативу Sendmail. Первые версии программы стали доступны уже в середине 1999 года. Получившийся агент передачи почты (MTA) имел простую модульную архитектуру, позволявшую быстро разворачивать почтовую систему за счет компактных и интуитивно понятных конфигурационных файлов[2]. Основная рабочая директория – /etc/postfix. Перейдя в неё после скачивания основного пакета, можно обнаружить небольшое количество файлов для настройки Postfix.

Первое на что стоит обратить внимание – группа файлов, имена которых начинаются с «main.cf». main.cf – главный конфигурационный файл, в котором задаются основные параметры работы почтового сервера, такие как доменные имена, параметры безопасности, контроль доступа и другие настройки. Далее идут два «вспомогательных» файла, которые в отличие от предыдущего, не созданы для редактирования: main.cf.params и main.cf.default[3]. Первый служит в качестве списка доступных переменных настройки сервера, а второй представляет из себя набор стандартных опций Postfix, регламентирующих его работу по умолчанию.

[2] The Postfix Home Page. URL: http://www.postfix.org/start.html

[3] Руководство администратора. URL: https://www.basealt.ru/fileadmin/user_upload/8_sp_90-02.pdf

Файл main.cf.dist, как указано в основном конфигурационном файле, является «commented and more complete version of main.cf file». Открыв main.cf.dist, можно обнаружить большое количество рекомендаций и комментариев по настройке параметров сервера. main.cf.proto – идентичен предыдущему и служит для восстановления вышеуказанного файла в случае некорректной работы сервера после его изменения.

Для редактирования файла main.cf необязательно использовать «vim» или «nano», так как это можно сделать с помощью команды postconf, Параметры могут располагаться в файле в любом порядке и записываются так, как ожидается.

Далее рассмотрим не менее важный master.cf. Основная задача файла – управлять тем, как различные службы и процессы Postfix запускаются и взаимодействуют друг с другом. В данном файле настраивается работа вспомогательных сервисов. Описание каждого сервиса начинается с новой строки без отступа, затем идут настройки для сервиса и параметры запуска.

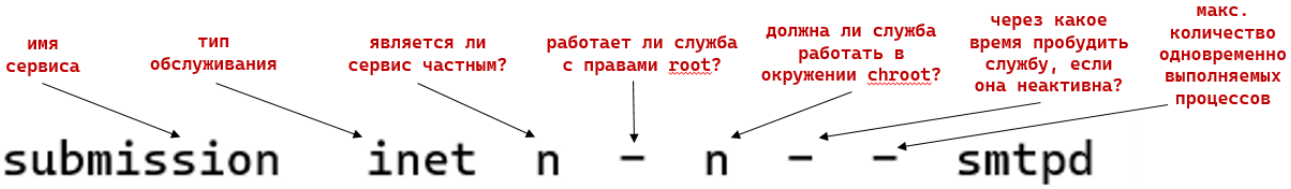



Рисунок 1 – Синтаксис описания сервисов в master.cf.

В качестве примера структуры рассмотрим сервис submission, представленный на рисунке 1. В дополнение к представленной иллюстрации можно упомянуть о том, что тип обслуживания предполагает несколько вариантов: inet (сокет TCP/IP), unix (потоковый сокет), unix-dgram (сокет дейтаграммы), fifo (именованный канал очереди) и pass (потоковый сокет UNIX-домена)[4]. Во всех последующих категориях, кроме последней, ответственной за название выполняемой команды, возможны установки «y», «n» или «-». Прочерк означает неприменимость данного параметра к конкретному сервису. После команды идут аргументы ее запуска. Они могут переопределять параметры, заданные в main.cf. Каждый аргумент записывается с новой строки и начинается с двух пробелов.

Рассмотренные файл main.cf и master.cf, как уже было упомянуто, являются основными, поэтому остальные файлы рассматриваются в ознакомительном режиме в таблице 1.

Таблица 1 – Назначение и принцип работы конфигурационных файлов.

| Файл/директория | Назначение | Как работает |
|---|---|---|
| access | Контроль доступа к SMTP-серверу | Определяет, какие источники могут отправлять почту, используя правила на основе адресов и хостов. |
| aliases | Перенаправление почты | Позволяет создавать псевдонимы для адресов, перенаправляя почту с одного адреса на другой. |

[4] Настройка Postfix + Dovecot + LDAP. URL: https://www.dmosk.ru/miniinstruktions.php?mini=postfix-dovecot-ldap&ysclid=m31zkz31a479148179

| | | |
|---|---|---|
| aliases.cdb | Быстрый доступ к псевдонимам | Бинарный индексированный файл, созданный из aliases, для быстрого поиска и обработки псевдонимов. |
| bounce.cf.default | Управление уведомлениями о недоставленных сообщениях | Содержит шаблоны для обработки и отправки уведомлений о недоставленных письмах. |
| canonical | Преобразование адресов | Задает правила для изменения формата адресов перед отправкой почты. |
| generic | Преобразование локальных адресов в интернет-адреса | Определяет, как локальные адреса преобразуются в допустимые интернет-адреса для доставки. |
| header_checks | Фильтрация заголовков сообщений | Применяет правила к заголовкам входящей почты для блокировки спама или модификации заголовков. |
| mydestination | Определение локальных доменов | Указывает, какие домены обрабатываются локально, что позволяет серверу правильно маршрутизировать почту. |
| mynetworks | Разрешение доступа для определенных сетей | Определяет сети, из которых можно отправлять почту без аутентификации, обычно для локальных пользователей. |
| README_FILES | Документация и справочные материалы | Содержит информацию и инструкции по настройке и администрированию Postfix. |
| relocated | Уведомление о перемещении получателей | Хранит информацию о новых адресах получателей, чтобы уведомить отправителей о перемещении. |
| transport | Настройка методов доставки сообщений | Содержит таблицу сопоставления адресов с методами доставки и следующими хопами, обрабатывается демоном trivial-rewrite. |
| virtual | Виртуальные алиасы для переписывания адресов | Представляет таблицу виртуальных алиасов для переписывания адресов получателей, обрабатывается демоном cleanup. |

Если говорить о практической стороне вопроса, то Postfix не является полноценным почтовым сервером — он предназначен только для приема и пересылки электронной почты. Для организации почтовой системы он почти всегда интегрируется с Dovecat, PostfixAdmin, Amavis и другими приложениями. Помимо этого, также важно упомянуть о том, что Postfix является довольно гибким инструментом и совместим с AIX, BSD, HP-UX, IRIX, GNU/Linux, Mac OS X, Solaris, Tru64 UNIX[5].

Рабочий порт для Postfix — 25. У части хостинговых компаний он заблокирован, поскольку очень часто используется для массовой рассылки сообщений.

## 3. Настройка Postfix

### 3.1. Базовая настройка сервера

Для практической демонстрации используется ОС альт версии 10.2, а также Wireshark 4.0.11. Как уже было упомянуто ранее, базовая настройка Postfix компактна и не занимает много времени. В первую очередь необходимо при

[5] The Postfix Home Page. URL: http://www.postfix.org/start.html

помощи команды <hostnamectl set-hostname>[6] правильно установить имя хоста и доменное имя. Для примера были выбраны следующие: mail.sozina.alt и sozina.alt соответственно. После этого можно обновлять систему и устанавливать необходимые пакеты.

#apt-get update

#apt-get install postfix[7]

Перейдем к настройке основного конфигурационного файла, который можно найти в /etc/postfix/main.cf. Для начала укажем там следующие строчки:

# Устанавливает полное доменное имя (FQDN) почтового сервера.

myhostname = mail.sozina.alt

# Задаёт доменное имя для почтового сервера.

mydomain = sozina.alt

# Указывает, что отправляемые письма будут иметь адрес отправителя с доменным именем, указанным в mydomain.

myorigin = $mydomain

# Определяет, что почтовый сервер будет слушать на всех доступных сетевых интерфейсах.

inet_interfaces = all

# Указывает, что сервер будет использовать только протокол IPv4 для связи.

inet_protocols = ipv4

# Устанавливает список доменных имён и адресов, для которых сервер будет принимать почту.

mydestination = $myhostname, localhost.$mydomain, localhost, $mydomain

# Указывает, что все исходящие письма следует перенаправлять через внешний SMTP сервер Gmail, который слушает на порту 587.

relayhost = [smtp.gmail.com]:587[8]

На данном этапе базовая настройка закончена. Необходимо убедиться, что машина имеет доступ к интернету и не имеет проблем с работой DNS. Если такие проблемы имеются необходимо проверить настройки используемых интерфейсов, а также изучить содержимое файлов /etc/resolv.conf и /etc/samba/smb.conf. В рамках используемой машины настройки resolv.conf следующие:

search sozina.alt

nameserver 127.0.0.1

nameserver 8.8.8.8

И smb.conf:

[global]

dns forwarder = 8.8.8.8

### 3.2. Настройка SASL аутентификации

SMTP-аутентификация обеспечивает идентификацию клиентов независимо от их IP-адресов и позволяет серверу пересылать сообщения от

[6] Настройка сети. URL: https://www.altlinux.org/Настройка_сети

[7] Ральф Гильдебрандт, Патрик Кеттер. Postfix. Подробное руководство. – СПб.: Символ-Плюс, 2008. – С. 510

[8] Postfix Basic Configuration. URL: http://www.postfix.org/BASIC_CONFIGURATION_README.html

почтовых клиентов, чьи IP-адреса не входят в список доверенных. Postfix реализует SMTP-аутентификацию при помощи протокола SASL (Simple Authentication and Security Layer) и использует библиотеки Cyrus-SASL.

Для начала создадим файл sasl_passwd и добавим туда данные в следующем формате [smtp.gmail.com]:587 <адрес>@gmail.com:пароль. Конфигурация адреса SMTP-сервера smtp.gmail.com поддерживает отправку сообщений через порт 587 (TLS) и порт 465 (SSL). Какой бы протокол ни будет выбран, необходимо убедиться, что номер порта в /etc/postfix/sasl/sasl_passwd и /etc/postfix/main.cf совпадает.

Сразу хотелось бы сказать о том, что использовать основной пароль от почты не рекомендуется, так как для таких целей был изобретен пароль для приложений, который можно сгенерировать в соответствующем разделе на сайте myaccount.google.com[9]. Такой вариант будет безопаснее и надежнее. Далее преобразуем sasl_passwd в файл базы данных sasl_passwd.db при помощи следующей команды:

#postmap /etc/postfix/sasl/sasl_passwd

Также для безопасности изменим параметры и владельца файла паролей, чтобы ограничить доступ пользователя root и разрешить только чтение и запись:

#chown root:root /etc/postfix/sasl/sasl_passwd.db

#chmod 600 /etc/postfix/sasl/sasl_passwd.db

Теперь, имея все необходимые файлы с установленными разрешениями, можно добавить новые строки в конфигурационный файл:

# Включение аутентификации SASL для Postfix

smtp_sasl_auth_enable = yes

# Запрет методов, которые позволяют анонимную аутентификацию

smtp_sasl_security_options = noanonymous

# Указание расположения файла sasl_passwd, где хранятся учетные данные для аутентификации

smtp_sasl_password_maps = hash:/etc/postfix/sasl/sasl_passwd[10]

### 3.3. Создание SSL-сертификатов

Используемый MTA Postfix, как известно, не отвечает высоким требованиям безопасности и работает без шифрования. Для того, чтобы сервер мог отправлять почтовые сообщения, необходимо получить SSL-сертификаты, как раз отвечающие за данную сторону вопроса. Для достижения поставленной цели всего есть три пути: приобрести сертификат, выпустить самоподписанный или обратиться к услугам удостоверяющих центров. Несмотря на то, что последнее время наблюдается тенденция по отказу от самоподписанных сертификатов из обращения, для задач, описанных в данной статье, подойдет и такой вариант[11].

---

[9] Как входить в аккаунт с помощью паролей приложений. URL: https://support.google.com/accounts/answer/185833?hl=ru

[10] Postfix SASL Howto. URL: http://www.postfix.org/SASL_README.html

[11] Бесплатный SSL vs платный SSL-сертификат: какой выбрать?. URL: https://www.reg.ru/blog/besplatnyj-ssl-vs-platnyj-ssl-sertifikat-kakoj-vybrat/?utm_source=yandex.ru&utm_medium=organic&utm_campaign=yandex.ru&utm_referrer=yandex.ru

Для того, чтобы произвести указанное действия в рамках ОС альт, необходимо для начала убедиться в наличие необходимого пакета (openssl) и создать закрытый корневой ключ при помощи следующей команды:

#openssl genrsa -out rootCA.key

После ее применения можно обнаружить появившийся файл rootCA.key. Далее с использованием сгенерированного ключа создадим корневой сертификат rootCA.pem, используя команду:

#openssl req -x509 -new -nodes -key rootCA.key -sha256 -days 1024 -out rootCA.pem

Как можно заметить, данный сертификат использует алгоритм хэширования sha256, а также будет действовать в совокупность 1024 дня. Следующем шагом будет создание запроса на сертификат или же CRT. Обычно это та информация, которая отправляется в УЦ, но в данном случае сертификат является самоподписанным.

#openssl req -new -key rootCA.key -out org.csr

При запуске команды в консоли в интерактивном режиме будет предложено заполнить поля, содержащие информацию о стране, области, организации, а также электронной почте. Данные поля можно заполнить или же оставить пустыми, обязательным в данном случае является только пароль. Получаем файл org.csr, содержащий информацию, необходимую для выпуска сертификата.

Получив все необходимые файлы, можно приступать к последнему этапу – выпуску сертификата:

#openssl x509 -req -in org.csr -CA rootCA.pem -CAkey rootCA.key -CAcreateserial -out org.crt -days 365 -sha256[12]

Для дальнейшей настройки ключевыми будут являться файлы rootCA.key и rootCA.pem, которые и обеспечат безопасность работы сервера.

Для защиты соединений используется протокол SSL/TLS (для включения поддержки необходимо установить пакет postfix-tls). На данном этапе настройки необходимо будет применить сгенерированные ранее SSL-сертификаты. Для этого зайдем в уже известный файл main.cf и добавим следующие строчки:

```
# Включение безопасных соединений и использование TLS для SMTP
smtpd_tls_cert_file = /etc/postfix/rootCA.pem
# Указание расположения ключа SSL
smtpd_tls_key_file = /etc/postfix/rootCA.key
# Включение использования TLS
smtpd_use_tls = yes
# Разрешение авторизации только через TLS
smtpd_tls_auth_only = yes[13]
```

Если оставить все как есть сообщения на почту будут приходить от имени System Administrator. Для того, чтобы изменить этот параметр воспользуемся командой:

[12] Создание самоподписанных сертификатов. URL: https://www.altlinux.org/Создание_самоподписанных_сертификатов

[13] Postfix TLS Support. URL: http://www.postfix.org/TLS_README.html

#chfn -f "Sozina Nastya" root[14]

**4. Тестирование**

Наконец, можно провести тестирование системы и попробовать отправить сообщение, используя команду из пакета «mailutils»:

#echo "Тестовое сообщение" | mail -s "Заголовок" <название>@mail.ru

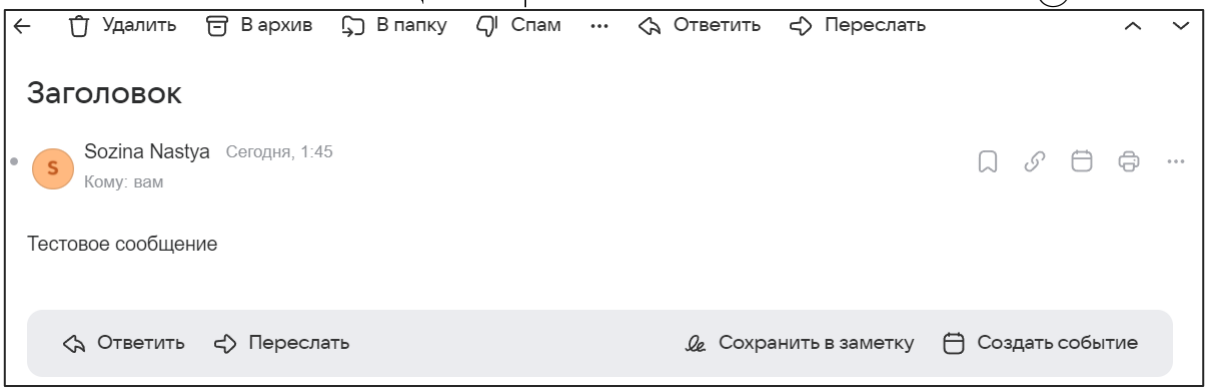



Рисунок 2 – Результат отправки почтового сообщения.

Как видно из рисунка 2, на почту приходит сообщение от пользователя Sozina Nastya с выбранным заголовком и содержимым. Система успешно работает. Помимо практического тестирование можно также посмотреть, как именно происходит пересылка при помощи Wireshark.

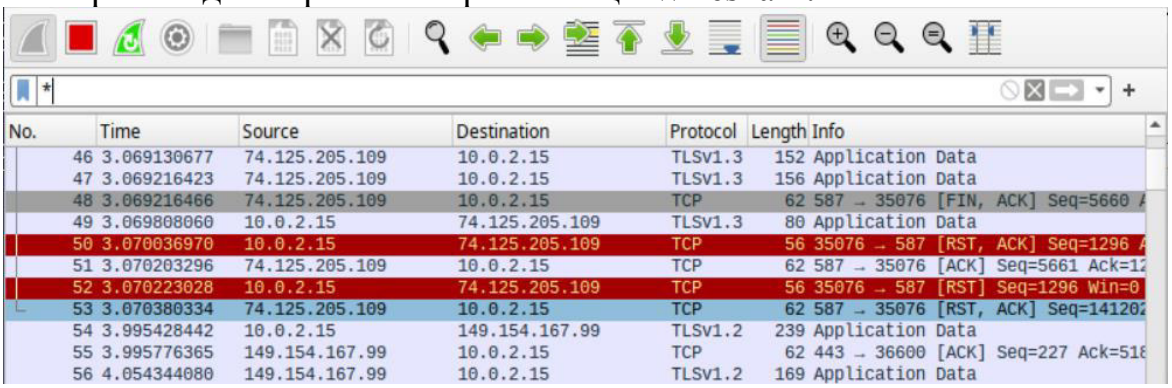



Рисунок 3 – Демонстрация пакетов через Wireshark.

В приведенных выше на рисунке 3 пакетах можно увидеть обмен данными между клиентом (10.0.2.15) и сервером (74.125.205.109), являющийся SMTP-сервером. Также можно обратить внимание на используемый протокол безопасности – TSL[15].

**5. Заключение**

В ходе работы над статьей была рассмотрена возможность реализации безопасной отправки почтовых сообщений с использованием протоколов TSL и SASL на базе почтового сервера Postfix в ОС альт. Этапы настройки сервера и обеспечения безопасности передаваемой информации продемонстрировали

[14] Install and Configure Postfix with Gmail SMTP for Perfect Mailing System. URL: https://wpaq.com/configure-postfix-smtp-relay/#changing-the-full-display-name.

[15] Уймин, А. Г. Разработка методики тестирования системы безопасности автоматизированных систем управления технологическими процессами на основе корпоративного стандарта / А. Г. Уймин // Автоматизация и информатизация ТЭК. – 2024. – № 5(610). – С. 59-65. – EDN VSLWIA.

потенциал данной технологии, которая, несмотря на простоту первоначальной конфигурации, предоставляет надежные механизмы для защиты данных.

На сегодняшний день обеспечение безопасности при отправке писем является критически важным аспектом в условиях активного роста киберугроз и необходимости защиты конфиденциальной информации. Тестирование настроенного почтового сервера через Wireshark показало его функциональность и способность к отправке сообщений в безопасном режиме, открывая возможности для использования Postfix в различных проектах и сценариях.

## Список источников


1. The Postfix Home Page. URL: http://www.postfix.org/start.html.
2. Руководство администратора. URL: https://www.basealt.ru/fileadmin /user_upload/8_sp_90-02.pdf.
3. Настройка Postfix + Dovecot + LDAP. URL: https://www.dmosk.ru/miniinst ruktions.php?mini=postfix-dovecot-ldap&ysclid=m31zkz31a479148179.
4. Настройка сети. URL: https://www.altlinux.org/Настройка_сети.
5. Ральф Гильдебрандт, Патрик Кеттер. Postfix. Подробное руководство. – СПб.: Символ-Плюс, 2008. – С. 510.
6. Postfix Basic Configuration. URL: http://www.postfix.org/BASIC_ CONFIGURATION_README.html.
7. Как входить в аккаунт с помощью паролей приложений. URL: https://support.google.com/accounts/answer/185833?hl=ru.
8. Postfix SASL Howto. URL: http://www.postfix.org/SASL_README.html.
9. Бесплатный SSL vs платный SSL-сертификат: какой выбрать?. URL: https://www.reg.ru/blog/besplatnyj-ssl-vs-platnyj-ssl-sertifikat-kakoj-vybrat/?utm_ source=yandex.ru&utm_medium=organic&utm_campaign=yandex.ru&utm_referrer =yandex.ru.
10. Создание самоподписанных сертификатов. URL: https://www.altlinux.org/ Создание_самоподписанных_сертификатов.
11. Postfix TLS Support. URL: http://www.postfix.org/TLS_README.html.
12. Install and Configure Postfix with Gmail SMTP for Perfect Mailing System. URL: https://wpaq.com/configure-postfix-smtp-relay/#changing-the-full-display-name.
13. Уймин, А. Г. Разработка методики тестирования системы безопасности автоматизированных систем управления технологическими процессами на основе корпоративного стандарта / А. Г. Уймин // Автоматизация и информатизация ТЭК. – 2024. – № 5(610). – С. 59-65. – EDN VSLWIA.


## References


1. The Postfix Home Page. URL: http://www.postfix.org/start.html.
2. Administrator's Guide. URL: https://www.basealt.ru/fileadmin/userupload/ 8sp90-02.pdf.

3. Setting Up Postfix + Dovecot + LDAP. URL: https://www.dmosk.ru/miniinstructions.php?mini=postfix-dovecot-ldap&ysclid=m31zkz31a479148179.

4. Network Configuration. URL: https://www.altlinux.org/Настройкасети.

5. Guildebrandt, R., Ketter, P. Postfix. Detailed Guide. – St. Petersburg: Symbol-Plus, 2008. – 510 p.

6. Postfix Basic Configuration. URL: http://www.postfix.org/BASICCONFIGURATIONREADME.html.

7. How to Sign in to Your Account Using App Passwords. URL: https://support.google.com/accounts/answer/185833?hl=ru.

8. Postfix SASL Howto. URL: http://www.postfix.org/SASLREADME.html.

9. Free SSL vs Paid SSL Certificates: Which to Choose? URL: https://www.reg.ru/blog/besplatnyj-ssl-vs-platnyj-ssl-sertifikat-kakoj-vybrat/?utmsource=yandex.ru&utmmedium=organic&utmcampaign=yandex.ru&utmreferrer=yandex.ru.

10. Creating Self-Signed Certificates. URL: https://www.altlinux.org/Создание_самоподписанных_сертификатов.

11. Postfix TLS Support. URL: http://www.postfix.org/TLSREADME.html.

12. Install and Configure Postfix with Gmail SMTP for Perfect Mailing System. URL: https://wpaq.com/configure-postfix-smtp-relay/#changing-the-full-display-name.

13. Uimin, A. G. Development of a Security Testing Methodology for Automated Process Control Systems Based on the Corporate Standard / A.G. Uimin // Automation and Informatization of the Fuel and Energy Complex. – 2024. – No. 5(610). – P. 59-65. – EDN VSLWIA.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 485-491.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 485-491.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 538.91+519.65

# ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ПРИТОЧНО-ВЫТЯЖНОЙ ВЕНТИЛЯЦИИ

***Николай Александрович Фролов[1]✉, Александр Николаевич Привалов[2]***
*[1,2]Шуйский филиал Ивановского государственного университета, Шуя, Россия*
*[1]fna913@mail.ru✉, [2]privalov.61@mail.ru*

***Аннотация.*** *В статье рассматриваются современные проблемы управления системами приточно-вытяжной вентиляции в зданиях, которые являются ключевым элементом обеспечения комфортных условий и безопасности эксплуатации. Подчеркивается, что традиционные методы управления вентиляцией часто недостаточно эффективны, что приводит к излишнему энергопотреблению и несоответствию нормативным требованиям. Целью исследования является анализ текущих проблем и поиск их решений. Представлены различные современные программные решения, такие как Danfoss VLT HVAC Drive, Siemens Desigo CC, Schneider Electric EcoStruxure Building Operation и другие, которые позволяют улучшить управляемость системами вентиляции. Программные комплексы отличаются такими функциями, как энергосбережение, автоматизация процессов, интеграция с системами управления зданиями и удаленный доступ. Основное внимание уделено интеграции вентиляционных систем с другими инженерными системами здания для улучшения эффективности управления и снижения эксплуатационных расходов. Также акцентируется важность подготовки и обучения квалифицированного персонала. В заключение предлагается внедрение интеллектуальных систем управления, учитывающих множество факторов для повышения эффективности работы вентиляционных систем. Реализация предложенных мер позволит значительно повысить качество воздуха в помещениях, снизить энергозатраты и улучшить общую удовлетворённость пользователей.*

***Ключевые слова:*** *приточно-вытяжная вентиляция, энергосбережение, автоматизация, интеграция систем, интеллектуальные технологии, управление зданиями, обучение персонала.*

***Финансирование:*** *работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 17-77-3019.*

© Фролов Н. А., Привалов А. Н., 2024

Conference paper

# SOFTWARE FOR CONTROL OF SUPPLY AND EXHAUST VENTILATION SYSTEMS

***Nikolai A. Frolov[1]✉, Alexander N. Privalov[2]***
*[1,2] Shuisky Branch of Ivanovo State University, Shuya, Russia*
*[1]fna913@mail.ru✉, [2]privalov.61@mail.ru*

***Abstract.*** *The article discusses the modern problems of managing supply and exhaust ventilation systems in buildings, which are a key element in ensuring comfortable conditions and safe operation. It is emphasized that traditional ventilation management methods are often insufficiently effective, which leads to excessive energy consumption and non-compliance with regulatory requirements. The purpose of the study is to analyze current problems and find solutions to them. Various modern software solutions are presented, such as Danfoss VLT HVAC Drive, Siemens Desigo CC, Schneider Electric EcoStruxure Building Operation and others that improve the controllability of ventilation systems. Software packages are distinguished by such functions as energy saving, process automation, integration with building management systems and remote access. The focus is on integrating ventilation systems with other building engineering systems to improve management efficiency and reduce operating costs. The importance of training and education of qualified personnel is also emphasized. In conclusion, it is proposed to introduce intelligent control systems that take into account many factors to improve the efficiency of ventilation systems. The implementation of the proposed measures will significantly improve indoor air quality, reduce energy consumption and improve overall user satisfaction.*

***Keywords:*** *supply and exhaust ventilation, energy saving, automation, system integration, intelligent technologies, building management, staff training.*

***Funding:*** *the work was supported by the Russian Science Foundation, Project № 17-77-300.*

## 1. Введение

Современное здание – это сложный организм, состоящий из множества инженерных систем, каждая из которых выполняет свою уникальную функцию. Одной из ключевых составляющих комфортной и безопасной эксплуатации любого здания являются системы приточно-вытяжной вентиляции. Они обеспечивают подачу свежего воздуха внутрь помещения, удаляют загрязнённый воздух наружу, поддерживают оптимальный температурный режим и уровень влажности, а также предотвращают накопление вредных веществ, таких как углекислый газ.

Однако, несмотря на важность этих систем, их эффективное управление остаётся сложной задачей. Традиционные подходы к управлению вентиляцией часто оказываются недостаточно гибкими и адаптивными к изменяющимся условиям эксплуатации. Это приводит к избыточному энергопотреблению, неудобствам для пользователей и даже нарушению нормативных требований по

качеству воздуха в помещениях.

Целью данного исследования является анализ существующих проблем в управлении системами приточно-вытяжной вентиляции и выявление путей их решения. Мы рассмотрим основные трудности, с которыми сталкиваются операторы и инженеры при эксплуатации таких систем, а также предложим современные технологии и методы, способные улучшить эффективность управления и сократить эксплуатационные расходы.

**2. Основной текст статьи**

Рассмотрим существующие методы и технологии управления вентиляционными системами:

1. Danfoss VLT HVAC Drive

Danfoss – известный производитель оборудования для систем отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха (ОВК). Их программное обеспечение VLT HVAC Drive предназначено для управления вентиляторами и насосами в системах вентиляции. Основные функции включают:

- энергосбережение: ПО позволяет оптимизировать работу вентиляторов и насосов, снижая энергопотребление до 50%;
- автоматическое управление: Поддержка различных режимов работы, таких как постоянное давление, постоянный расход воздуха и другие;
- мониторинг и диагностика: Возможность отслеживать состояние системы в реальном времени и получать уведомления о неисправностях;
- интеграция с BMS (Building Management System): Совместимость с различными системами управления зданиями [1].

2. Siemens Desigo CC

Siemens предлагает комплексное решение для управления инженерными системами здания под названием Desigo CC. Оно включает в себя модули для управления системой вентиляции, такими как:

- управление вентиляционными установками: контроль за температурой, влажностью, качеством воздуха и другими параметрами;
- интеллектуальные алгоритмы управления: автоматическая адаптация параметров системы к изменяющимся условиям окружающей среды;
- мониторинг состояния оборудования: возможность отслеживания работы всех компонентов системы в режиме реального времени;
- интерфейсы для интеграции с другими системами: поддержка протоколов BACnet, Modbus, KNX и других.

3. Schneider Electric EcoStruxure Building Operation

Schneider Electric предоставляет платформу EcoStruxure, которая объединяет различные аспекты управления зданием, включая систему вентиляции. Ключевые возможности:

Централизованное управление всеми системами здания через единый интерфейс.

Аналитика данных: сбор и анализ информации о работе системы вентиляции для оптимизации её эффективности.

Гибкость настроек: возможность настройки индивидуальных сценариев

работы системы в зависимости от времени суток, дня недели и других факторов.

Облачная платформа: доступ к системе управления через интернет с любого устройства [1].

4. Johnson Controls Metasys

Johnson Controls предлагает систему управления зданиями Metasys, которая поддерживает управление системами вентиляции. Она обладает следующими функциями:

- автоматизация процессов: возможность программирования различных сценариев работы вентиляционной системы;
- энергоменеджмент: мониторинг потребления энергии и рекомендации по его снижению [2];
- открытая архитектура: совместимость с оборудованием разных производителей благодаря поддержке открытых стандартов;
- мобильный доступ: возможность удаленного управления системой через мобильные приложения.

5. Trane Tracer SC+

Trane является одним из ведущих мировых поставщиков климатического оборудования. Tracer SC+ — это система управления зданиями, которая может использоваться для контроля над вентиляцией. Особенности программы:

- управление несколькими объектами: позволяет управлять вентиляцией сразу нескольких объектов одновременно;
- графический интерфейс: Удобная визуализация работы системы, позволяющая быстро находить нужные параметры и изменять их;
- алгоритмы энергосбережения: Специальные алгоритмы позволяют минимизировать потребление электроэнергии без ущерба для комфорта;
- удаленный доступ: Доступ к управлению системой возможен через веб-интерфейс или мобильное приложение. [3]

6. Carrier i-Vu

Carrier — крупный игрок на рынке ОВКВ, предлагающий комплексную систему управления зданием i-Vu. Основные характеристики:

- широкий функционал: поддерживает управление не только вентиляцией, но и другими инженерными системами здания;
- интерактивные отчеты: Система генерирует подробные отчёты о работе вентиляционных установок, что облегчает анализ и принятие решений;
- обучение персонала: Встроенная система обучения помогает новым пользователям быстрее освоить все функции программы;
- поддержка BACnet/IP: Совместима с большинством современных устройств и систем управления зданий. [3, 4]

7. Honeywell Enterprise Buildings Integrator (EBI)

Honeywell EBI — это мощная платформа для управления инженерными системами зданий, включая вентиляцию. Основные функции:

- централизованный контроль: Все данные о состоянии системы вентиляции собираются в одном месте, что упрощает управление;
- анализ данных: Система собирает и анализирует информацию о работе вентиляции, помогая выявить потенциальные проблемы и оптимизировать

работу;

- открытые стандарты: Поддержка множества протоколов связи, таких как BACnet, LonWorks, Modbus и др., что делает интеграцию с существующими системами простой задачей;

- мультиязычный интерфейс: Программа доступна на многих языках, что удобно при международном использовании. [4]

8. Distech Controls EC-Net AX

Distech Controls предлагает EC-Net AX — универсальную систему управления инженерным оборудованием зданий. Особенности:

- масштабируемость: подходит как для небольших объектов, так и для крупных коммерческих зданий.

- интуитивный интерфейс: Простое и удобное управление вентиляцией через графические схемы и диаграммы.

- совместимость с IoT: поддерживается интеграция с устройствами Интернета вещей, что открывает новые возможности для автоматизации.

- экологические показатели: помогает контролировать выбросы углекислого газа и другие экологические параметры. [5]

Для наглядности различия между программным обеспечением для управления системами приточно-вытяжной вентиляции приведена ниже (см. таблица 1):

Таблица 1 – Программное обеспечение для управления системами приточно-вытяжной вентиляции.

| Критерий | Danfoss VLT HVAC Drive | Johnson Controls Metasys | Schneider Electric EcoStruxure Duilding Operation | Siemens Desigo CC |
|---|---|---|---|---|
| Тип системы | Привод HVAC | Комплексная система | Комплексная система | Комплексная система |
| Поддержка протоколов | Modbus, BACnet | BACnet, LonWorks, IP | BACnet, Modbus TCP\|IP, OPC UA | BACnet, KNX, M-bus |
| Интерфейсы | Веб-интерфейс, мобильное приложение | Веб-интерфейс, мобильные приложения | Веб-платформа, мобильные устройства | Веб-клиент, мобильное устройства |
| Функции мониторинга | Мониторинг энергопотребления, диагностика оборудования | Энергомониторинг, анализ данных, отчетность | Энергия, управление активами, аналитика | Мониторинг состояния здания, управление энергопотреблением |
| Интеграция с другими системами | Ограниченная | Широкая интеграция с системами безопасности, освещения и др. | Открытая архитектура, поддержка множества сторонних систем | Хорошая интеграция с различными системами |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Управление освещением | Нет | Да | Да | Да |
| Стоимость | Средняя | Высокая | Высокая | Высокая |

## 3. Заключение

На основании проведённого анализа можно сделать вывод, что современное управление системами приточно-вытяжной вентиляции сталкивается с рядом серьёзных вызовов. Эти вызовы связаны как с техническими аспектами работы оборудования, так и с организационными вопросами, касающимися обслуживания и эксплуатации систем.

Одним из основных направлений улучшения ситуации является внедрение интеллектуальных систем управления, способных автоматически адаптироваться к изменяющимся условиям эксплуатации. Такие системы должны учитывать множество факторов, включая погодные условия, количество людей в помещении и уровень загрязнения воздуха. Это позволит значительно повысить эффективность работы вентиляционных систем и снизить энергозатраты.

Также важно уделять внимание интеграции различных инженерных систем здания, чтобы обеспечить их согласованную работу. Совместное функционирование систем отопления, освещения и вентиляции поможет достичь максимального эффекта в плане энергосбережения и повышения комфорта.

Не менее значимым является вопрос подготовки и обучения обслуживающего персонала. Квалифицированные специалисты смогут правильно настроить и эксплуатировать сложные системы управления, что снизит вероятность возникновения аварийных ситуаций и повысит надёжность работы всего комплекса инженерных коммуникаций.

Таким образом, комплексный подход к решению проблем управления системами приточно-вытяжной вентиляции включает в себя технические инновации, интеграцию различных систем и развитие профессиональных компетенций сотрудников. Реализация этих мер позволит существенно улучшить качество воздуха в помещениях, снизить эксплуатационные расходы и повысить общую удовлетворённость пользователей.

## Список источников

1. Рымаров, А. Г. Проектирование систем вентиляции и кондиционирования воздуха гражданского здания : учебно-методическое пособие / А. Г. Рымаров, Д. Г. Титков. - Москва : МИСИ-Московский государственный строительный университет, 2020. - 47 с. - ISBN 978-5-7264-2054-7. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/2128407 (дата обращения: 11.11.2024).

2. Тертичник, Е. И. Расчеты вентиляционных систем: Учебное пособие / Тертичник Е.И., - 2-е изд., (эл.) - Москва : МИСИ-МГСУ, 2017. - 86 с.: ISBN 978-

5-7264-1595-6. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/968887 (дата обращения: 11.11.2024).

3. Протасевич, А. М. Строительная теплофизика ограждающих конструкций зданий и сооружений : учебное пособие / А. М. Протасевич. - Минск : Вышэйшая школа, 2015. - 239 с. - ISBN 978-985-06-2503-8. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1010212 (дата обращения: 11.11.2024).

4. Абрамкина, Д. В. Проектирование систем вентиляции опасных производственных объектов : учебно-методическое пособие / Д. В. Абрамкина, К. М. Фатуллаева. — Москва : МИСИ – МГСУ, 2022. — 46 с. — ISBN 978-5-7264-3180-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/342542 (дата обращения: 11.11.2024).

5. Вентиляция и кондиционирование [Текст] : [практическое пособие] / В. С. Самойлов, В. С. Левадный. - Москва : Аделант, 2009. - 239, [1] с. : ил. - (Советы профессионалов). - Библиогр.: с. 237. - ISBN 978-5-93642-195-2 (в пер.).

## References

1. Rymarov, A. G. Design of ventilation and air conditioning systems of a civil building : an educational and methodological guide / A. G. Rymarov, D. G. Titkov. - Moscow : MISI-Moscow State University of Civil Engineering, 2020. - 47 p. - ISBN 978-5-7264-2054-7. - Text : electronic. - URL: https://znanium.com/catalog/product/2128407 (date of application: 11.11.2024).

2. Tertichnik, E. I. Calculations of ventilation systems: Textbook / Tertichnik E.I., - 2nd ed., (e-mail) - Moscow :MISI-MGSU, 2017. - 86 p.: ISBN 978-5-7264-1595-6. - Text : electronic. - URL: https://znanium.com/catalog/product/968887 (date of issue: 11.11.2024).

3. Protasevich, A.M. Construction thermophysics of enclosing structures of buildings and structures : a textbook / A.M. Protasevich. - Minsk : Higher School, 2015. - 239 p. - ISBN 978-985-06-2503-8. - Text : electronic. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1010212 (date of application: 11.11.2024).

4. Abramkina, D. V. Designing ventilation systems for hazardous production facilities : an educational and methodological guide / D. V. Abramkina, K. M. Fatullayeva. — Moscow : MISI – MGSU, 2022. — 46 p. — ISBN 978-5-7264-3180-2. — Text : electronic // Lan : electronic library system. — URL: https://e.lanbook.com/book/342542 (date of application: 11.11.2024).

5. Ventilation and air conditioning [Text] : [practical guide] / V. S. Samoilov, V. S. Levadny. - Moscow : Adelant, 2009. - 239, [1] p. : ill. - (Professional advice). - Bibliogr.: p. 237. - ISBN 978-5-93642-195-2 (in trans.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 492-501.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 492-501.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 004.056.5

# СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В СОЦИАЛЬНОЙ ИНЖЕНЕРИИ

***Юлия Владимировна Чижикова[1]✉, Данила Геннадьевич Ефремов[2]***
*[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]detkovayv@mail.ru✉*
*[2]efremovdg@bk.ru*

***Аннотация.*** *В статье рассматриваются проблемы распространения технологий социальной инженерии в современном цифровом мире, выявляются тенденции развития данных технологий и их влияние на информационную безопасность, а также выделяются основные направления деятельности для противодействия методам социальных инженеров.*

***Ключевые слова:*** *социальная инженерия, информационная безопасность, угрозы информационной безопасности, человеческий фактор, тренды*

Conference paper

# CURRENT TRENDS IN SOCIAL ENGINEERING

***Yulia V. Chizhikova[1]✉, Danila G. Efremov[2]***
*[1,2]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]detkovayv@mail.ru✉*
*[2]efremovdg @bk.ru*

***Abstract.*** *The article examines the problems of the spread of social engineering technologies in the modern digital world, identifies trends in the development of these technologies and their impact on information security, and highlights the main areas of activity to counter the methods of social engineers.*

***Keywords:*** *social engineering, information security, threats to information security, human factor, trends*

## 1. Введение

Дистанционное мошенничество продолжает оставаться одной из самых серьезных проблем информационной безопасности. Так, вице-президент по кибербезопасности ПАО «Сбербанк» Сергей Лебедь назвал сложившуюся на

© Чижикова Ю. В., Ефремов Д. Г., 2024

сегодняшний день ситуацию «пандемией» и спрогнозировал суммарные финансовые потери населения от действий мошенников по итогам 2024 года в 250 миллиардов рублей. Этот тренд находит отражение и в результатах опросов россиян. Так, согласно данным Национального агентства финансовых исследований (НАФИ), в 2023 году в России на 9% выросла доля тех, кто пострадал от аферистов или сталкивался с попытками мошенничества. В 2022 году в этом признались 82% россиян, а в 2023 году уже 91%. Также по данным Kaspersky Who Calls в первом квартале 2024 года доля российских пользователей, которым поступали телефонные звонки с неизвестных номеров с подозрением на мошенничество, увеличилась в 1,5 раза по сравнению с аналогичным периодом 2023 года.

Основным инструментом злоумышленников, в том числе при компьютерных атаках, остаются методы социальной инженерии – это методы психологического воздействия, которые вынуждают людей добровольно переводить денежные средства или раскрывать банковские сведения. Эксперты уверены, что киберпреступники будут и дальше активно пользоваться методами социальной инженерии, которая становится все более изощренной и сложной для обнаружения. [1, 6]

## 2. Основной текст статьи

В 2023 году Банк России опубликовал очередной обзор операций, совершенных без согласия клиентов финансовых организаций. Согласно отчету Центробанка, основным инструментом злоумышленников для хищения средств продолжает оставаться использование приемов и методов социальной инженерии.

По данным Банка России, в 2023 году, объем операций без согласия клиентов увеличился по сравнению с 2022 годом на 11,48% на фоне роста объема денежных переводов с использованием карт (+10,54%, до 136,38 трлн руб.). При этом доля объема операций без согласия клиентов в общем объеме операций по переводу денежных средств в 2023 году составила 0,00119% (в 2022 году – 0,00097%). На рисунке 1 приведена динамика изменения общего объема и количества операций без согласия клиентов с 2019 по 2023 годы. [2-6]




Рисунок 1 – Общий объем и количество операций без согласия клиентов.

Согласно отчету Центробанка, в 2023 году средняя сумма одной операции без согласия клиента составила 13100 рублей. Таким образом, можно отметить незначительное снижение средней суммы одного хищения по сравнению с 2022 годом. На рисунке 2 приведена динамика изменения средней суммы одной операции без согласия клиента с 2019 по 2023 годы. [2-6]

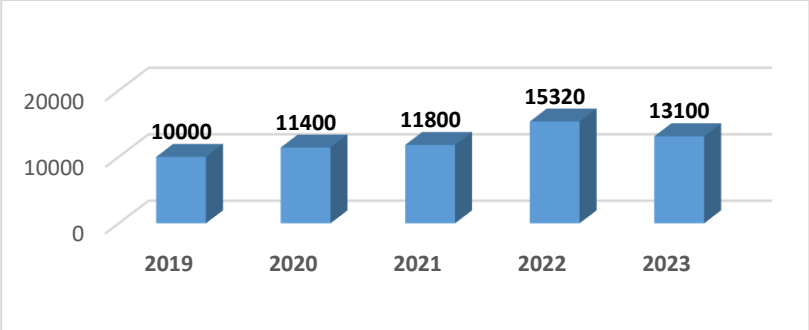



Рисунок 2 – Средняя сумма одной операции без согласия клиента (руб.).

По данным Банка России 2023 год стал первым за пять лет годом, нарушившим динамику снижения и показавшим рост объема денежных средств, возмещенных кредитными организациями клиентам. Так в 2023 году клиентам кредитных организаций вернули 8,7% (1378,8 млн руб.) от всего объема операций по переводу денежных средств, совершенных без согласия клиентов. В 2022 году данный показатель составил всего лишь 4,4% или 618,4 млн. руб.. Таким образом, объем возвращенных денежных средств в 2023 году практически в 2 раза превысил аналогичный показатель 2022 года, но еще далек от максимального на данный момент показателя в 14,55%, зафиксированного в 2019 году. На рисунке 3 приведена динамика изменения объемов денежных средств, возвращенных клиентам с 2019 по 2023 годы. [2-6]

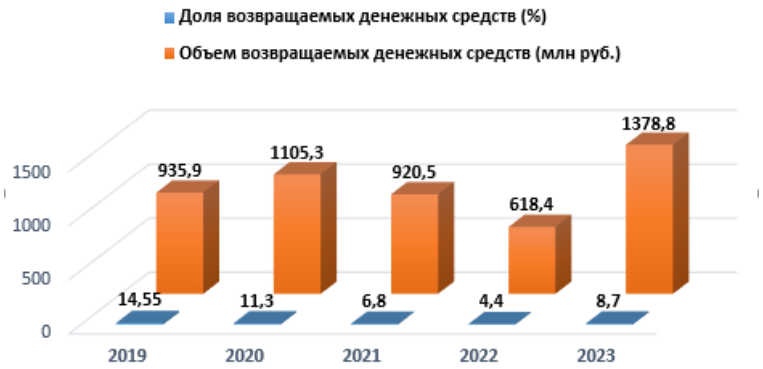



Рисунок 3 – Общий объем денежных средств, возвращенных клиентам.

Отметим, что на данный момент закон не обязывает банки возвращать деньги, украденные с помощью приёмов социальной инженерии.

В 2023 году кредитные организации направляли в Центробанк информацию по операциям без согласия клиентов – физических лиц в разрезе следующих основных типов операций: «Карты», «Счета», «СБП», «Электронные кошельки», «Без открытия счета». На рисунке 4 представлена информация о количестве и объемах операций без согласия клиентов по выделенным типам.

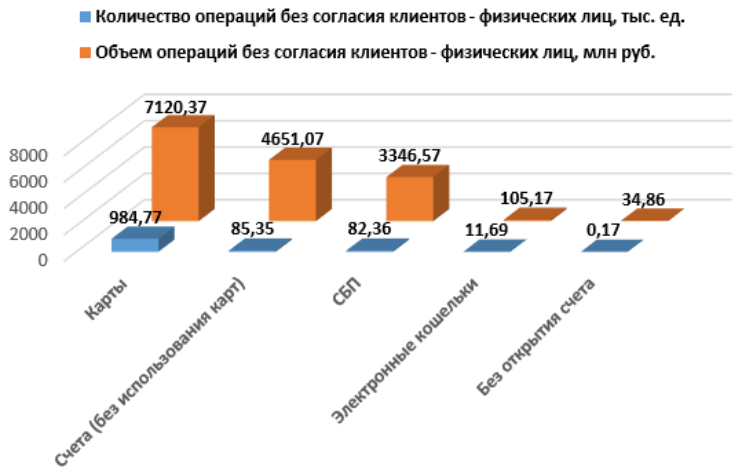



Рисунок 4 – Объем и количество операций без согласия клиентов по типам операций.

Приведенная статистика показывает, что количество мошеннических операций с использованием платежных карт было самым высоким среди остальных типов операций и составило 984,77 тыс. инцидентов. Также, на карты приходится и наибольший объем хищений денежных средств 7120,37 млн руб. При этом, следует отметить, что наибольший объем возмещенных (возвращенных) клиентам денежных средств характерен для типа операций «Счета» и составляет 666,77 млн рублей.

Начиная с 2023 года кредитные организации направляют в Банк России информацию о предотвращенных хищениях денежных средств. Так, за 2023 год объем предотвращенных операций без согласия клиентов составил 5798,35 млрд рублей. Благодаря эффективной работе антифрод-процедур кредитных организаций злоумышленникам не удалось совершить 34,77 млн мошеннических операций.

В 2024 году наиболее частым способом осуществления мошеннических действий продолжает оставаться телефонное мошенничество.

По словам заместителя председателя правления СберБанка Станислава Кузнецова, в 2024 году было зафиксировано беспрецедентное количество мошеннических звонков гражданам России. В феврале и марте Сбер фиксировал пик таких звонков – 20 млн в сутки. Такого всплеска телефонного мошенничества не было никогда. Сейчас эта цифра снизилась до 6-6,5 млн в сутки, но звонки стали более профессиональными и продуманными. Кузнецов также отмечает, что общее количество попыток мошеннических звонков может достигать значения в 15 млн в сутки, если учитывать новые каналы, используемые преступниками – мессенджеры, виртуальные АТС и SIM-боксы. По оценкам экспертов против россиян ежедневно работают более 300 тыс. злоумышленников, которые организованы в мошеннические колл-центры.

На рисунке 5 приведены наиболее распространенные в 2023 году каналы реализации финансовых хищений.

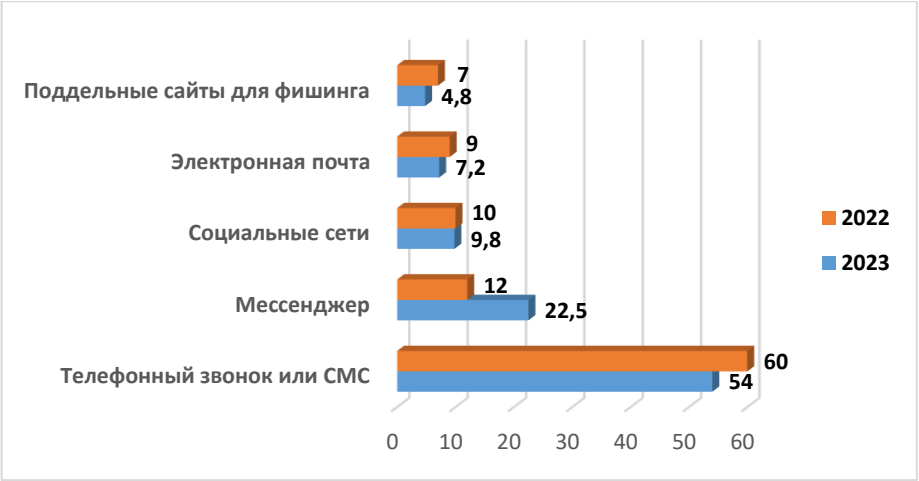


Рисунок 5 – Каналы совершения мошеннический действий (%).

Анализ приведенных данных показывает, что по сравнению с 2022 годом процент мошенничеств совершенных с помощью звонков и СМС немного снизился, а процент инцидентов с использованием мессенджеров увеличился практически в 2 раза. [2,6]

В 2023 году Банк России направил операторам связи с целью принятия соответствующих мер реагирования 575 669 номеров телефонов, используемых злоумышленниками для хищения средств у граждан. Из промежуточной статистики Банка России за 2024 год следует, что мошенники стали в три раза реже звонить с городских номеров и почти в два раза реже с мобильных, а также с использованием номера 8-800. Тем не менее, в январе – марте 2024 года Банк России инициировал блокировку 48 626 мошеннических номеров. И это больше, чем количество номеров, выявленных за аналогичный период 2023 года.

В 2023 году Центробанк также инициировал ограничение доступа почти к 4,5 тыс. страницам (группам) в социальных сетях и к 35 приложениям. Такие ресурсы чаще всего использовали для фишинга, финансовых пирамид и безлицензионной деятельности. Примечательно, что в компьютерных инцидентах и атаках на первом месте стоят методы социальной инженерии, за которыми уже следуют фишинговые атаки. Полученные знания о человеке злоумышленники пытаются использовать для взлома аккаунтов работников и клиентов организаций. [2]

Активную работу по противодействию кибермошенничеству ведут Банк России, Минцифры, Роскомнадзор, а также телеком-сектор. Так, для борьбы с мошенничествами, использующими подменные номера с 1 января 2023 года вступили в силу требования статьи 46.1 Федерального закона № 126-ФЗ от 7 июля 2003 года «О связи». Согласно закону, к марту 2024 года все российские операторы связи должны подключиться к единой платформе верификации телефонных вызовов (ЕПВВ) «Антифрод» предназначенной для проверки того, действительно ли вызов идет с номера определившегося оператора.

По данным Роскомнадзора к началу марта 2024 года, к системе блокировки звонков с подменных номеров «Антифрод» подключены четыре основных оператора связи («Мегафон», «МТС», «Билайн» и Tele2), а также ещё

904 небольших операторов из 1183 с действующими лицензиями, номерная ёмкость которых составляет более 94%. Например, в 2024 году антифрод-система Tele2 блокировала примерно 1 млн мошеннических вызовов в день.

Однако, следует отметить, что мошенники достаточно быстро адаптировались к мерам борьбы с подменными номерами перейдя на новые технологии. В качестве основных мер обхода ЕПВВ можно выделить следующие три: виртуальные АТС, SIM-боксы, а также переход в мессенджеры.

Виртуальная АТС (автоматическая телефонная станция) заменяет физическую станцию для компании, обладая ее функциями. Виртуальная АТС – это услуга обеспечения телефонной связи для компаний, которая заменяет физическую офисную мини-АТС и даже колл-центр. Услуга виртуальной АТС предоставляется провайдерами Интернета, IP-телефонии, а также различными операторами связи. Виртуальная АТС предоставляет все стандартные возможности IP-АТС: многоканальный номер, запись разговоров, голосовые приветствия, перевод вызова – всё это и многое другое доступно через Интернет без приобретения специализированного коммутационного оборудования.

SIM-боксы – устройство для агрегации нескольких SIM-карт в одном аппарате. В этих устройствах можно одновременно подключить несколько сотен или даже тысяч сим-карт, которые потом используются для звонков или регистрации аккаунтов в мессенджерах и соцсетях. Изначально они создавались для расширения возможностей услуг связи. Но сегодня ими по основному назначению никто не пользуется. При этом SIM-боксы компактны – их можно легко установить, например, на съемной квартире. А самое главное – они без труда приобретаются через любые открытые интернет-площадки, и никакой ответственности за это не предусмотрено. Сейчас, по некоторым данным, в России есть около 150 локаций, где они установлены.

Также в своей деятельности мошенники используют так называемых фродов. Это люди, которые за денежное вознаграждение предоставляют злоумышленникам свои карточки и банковские реквизиты, чтобы через них перекачивались ворованные деньги. Сегодня в эту схему вовлечено значительное количество человек – в основном молодежь, попавшаяся на обещания легкого заработка.

В связи с возросшей популярностью использования в повседневной жизни мессенджеров они стали самой простой и удобной площадкой для реализации атак при помощи социальной инженерии и вредоносных программ.

Киберпреступники не ограничиваются только сбережениями граждан, заставляя их брать кредиты или продавать недвижимость. Чтобы уберечь граждан от действий мошенников, регулятор разработал следующие заградительные меры.

Для борьбы с кредитами, оформленными мошенническим путем Банк России разработал процедуру самозапрета на онлайн-кредитование. Соответствующий федеральный закон от 26.02.2024 № 31-ФЗ «О внесении изменений в Федеральный закон «О кредитных историях» и

Федеральный закон «О потребительском кредите (займе)» подписал президент России Владимир Владимирович Путин. Документ планируется ввести в действие 1 марта 2025 года. До этого момента будет продолжать действовать указание Банка России.

Самозапрет на кредитование – это ограничение, которое банк накладывает на онлайн-операции по заявлению клиента. Самомозапрет будет распространяться только на потребительские кредиты и займы, но не будет касаться ипотеки, автокредитов и образовательных кредитов с господдержкой. Центробанк сообщил, что можно выбрать разные условия запрета:

- ✓ по виду кредитора – банк или МФО;
- ✓ по способу обращения за кредитом или займом – в офисе или дистанционно, только дистанционно.

С 1 марта 2025 года самозапрет на кредиты можно будет оформить на «Госуслугах», а с 1 сентября 2025 года в МФЦ. Информация об установленных ограничениях будет отображаться в кредитной истории клиента, следовательно, при наличии в ней ограничений банки не смогут выдать кредит. Обновление кредитной истории займет три рабочих дня. Устанавливать и снимать самозапрет можно бесплатно неограниченное количество раз.

Для борьбы с кредитными мошенниками Банк России также планирует установить требования к антифрод-процедурам финансовых организаций при выдаче кредитов и займов. Как указал Центробанк, использование злоумышленниками «чувствительных данных» увеличивает риск хищений как собственных накоплений граждан, так и полученных под влиянием мошенников кредитных средств.

Кроме того, с июля 2024 года заработал новый механизм противодействия мошенническим операциям, связанным с переводами средств. Его суть заключается в двухдневной приостановке банком подозрительного перевода. В этот период клиент сможет отменить транзакцию. Банк осуществляет проверку перевода по базе регулятора, куда внесены счета мошенников. Если банк не сверился с этим списком и перечислил средства злоумышленникам без периода «охлаждения», то будет обязан вернуть потерянные средства клиенту. Соответствующие изменения внесены Госдумой в Федеральный закон «О национальной платежной системе» в июле 2023 года.

Социальные инженеры достаточно быстро адаптируются к изменениям в социальной, политической и экономической жизни общества. Если в 2021 году действия мошенников были направлены в основном на сбережения граждан, то в 2022-м они научились вынуждать граждан брать кредиты, а в 2023-м – продавать недвижимость. В своих сценариях киберпреступники продолжают чаще всего выдавать себя за специалистов службы безопасности банка, сотрудников правоохранительных органов, центробанка, автоинформаторов или роботизированных помощников. Помимо уже привычных подходов, злоумышленники начали внедрять схемы, связанные со звонками от службы поддержки операторов сотовой связи. При этом злоумышленники могут ссылаться на то, что у клиента истекает срок действия договора, карта будет заблокирована, что его личный кабинет хотят взломать или пытаются

переоформить номер на третье лицо. Мошенники под разными предлогами требуют сообщить код из СМС, который затем используют для доступа к личным сервисам абонента.

Также одним из самых распространённых методов кибермошенников стал целевой фишинг от лица руководителя организации или коллеги. При этом злоумышленники всё чаще используют мессенджеры для реализации целенаправленные атаки на сотрудников компаний. При целевом фишинге злоумышленник тщательно собирает информацию о собеседнике, используя в беседе обращение по имени и отчеству, чтобы повысить степень доверия к себе. В последнее время схемы со звонком от родственников, попавших в беду, банка и правоохранительных органов срабатывают всё реже. Поэтому мошенники точечно используют новые сценарии – например, звонок якобы от лица директора компании, где работает потенциальная жертва. Под разными предлогами сотрудника убеждают взять на своё имя кредит и перевести на «безопасный» счёт.

На рисунке 6 приведены примеры реальных атак злоумышленников: на левой части рисунка сообщение от якобы председателя Комитета ветеринарии города Москвы; на правой части рисунка сообщение от якобы директора ГКУ «Московский центр развития социальных технологий».




Рисунок 6 – примеры реальных атак злоумышленников.

Одной из современных тенденций в работе социальных инженеров стало активное использование ими технологий искусственного интеллекта. Например, с помощью таких технологий реализованы программы, которые позволяют на основе утекших в сеть данных составить краткую справку о любом человеке, который попадет в зону внимания мошенников. В свою очередь, генеративные технологии ИИ дают возможность создавать практически неотличимые от реальных, образцы голоса и внешности. Причем такие программы находятся в открытом доступе и просты в освоении. Так, чтобы подменить голос, нужен лишь образец или набор образцов длительностью от получаса до часа. А сама генерация происходит за одну-две минуты.

Эксперты в области информационной безопасности выделяют тенденцию усложнения мошеннических схем за счет увеличения числа действующих лиц. Простые сценарии с одним или двумя лицами («сотрудник правоохранительных органов», «специалист службы безопасности банка») становятся не эффективными. Таким образом, в новых сценариях злоумышленников, для повышения вероятности убедить человека в правдивости истории, участвую от трех действующих лиц.

Например, Сбер описал новую схему-гибрид с «налоговым кодом». «Новая деталь в схеме – оплата несуществующего «налогового кода» для выманивания нового перевода и угрозы со стороны якобы Центрального банка, который подозревает клиента в мошенничестве», – рассказал зампредседателя правления Сбербанка Станислав Кузнецов. Сначала человек, ответивший на звонок мошенника, получает предложение перевести деньги на счёт, чтобы получить «доход от инвестиций». При этом с клиентом работает персональный консультант – личный «брокер». Как только клиент принимает решение снять деньги со счёта, ему поступает запрос на несуществующий «налоговый код». Чтобы получить его, человеку предлагают оплатить комиссию. Если жертва обмана соглашается, ей сообщают, что деньги снять нельзя, поскольку её якобы заподозрили в мошенничестве. На этом этапе человеку поступают новые звонки – теперь якобы от представителей Банка России, заявляющих, что он потерял свои сбережения. Запугивая, его заставляют вовлекать в схему знакомых и родственников. Для этого «представители» ЦБ РФ заявляют, что человеку нужно доверенное лицо, которое могло бы снять деньги с брокерского счёта. Жертва находит доверенных лиц, при этом ей продолжают поступать угрозы. Человеку грозят конфискацией денег и имущества, судебными приставами, тюремным заключением.

Среди новых техник злоумышленников также можно выделить получение одноразовых кодов подтверждения с помощью функции трансляции экрана в мессенджере во время разговора, без использования вредоносного ПО или программ для удалённого управления устройством.

Следует отметить, что пострадать от действий финансовых мошенников может любой человек, независимо от его возраста и статуса. Для защиты пользователям важно не сообщать никому конфиденциальную информацию, внимательно следить за уведомлениями от финансовых и информационных систем и всегда перепроверять сообщения в мессенджерах по другим каналам связи.

## 3. Заключение

Эксперты в области информационной безопасности уверены, что злоумышленники и дальше будут активно пользоваться методами социальной инженерии, которая становится все более изощренной и сложной для обнаружения. Поэтому пользователям крайне важно повышать собственную цифровую грамотность и следовать базовым правилам кибербезопасности: не сообщать посторонним конфиденциальные сведения, коды из СМС и push-уведомлений, не устанавливать на устройства (в том числе смартфоны) никакие программы по просьбе звонящего, завершать беседу, как только она покажется

сомнительной, и не перезванивать на тот же номер, с которого поступил вызов. Крайне важно обеспечить дополнительный уровень защиты с помощью технических средств – в этом помогут специальные приложения, которые прямо во время звонка предупреждают о жалобах на мошенничество, поступающих на тот или иной номер. Это поможет не вступать в диалог с потенциальным злоумышленником.

## Список источников


1. Кристофер Хэднеги Искусство обмана: Социальная инженерия в мошеннических схемах/ пер. с англ. А. Соломина. – М.: Альпина Паблишер, 2020. – 430 с.
2. Банк России, Обзор операций, совершенных без согласия клиентов финансовых организаций за 2023 год. – М.:, 2024. – 7 с.
3. Банк России, Обзор операций, совершенных без согласия клиентов финансовых организаций за 2022 год. – М.:, 2023. – 13 с.
4. Банк России, Обзор операций, совершенных без согласия клиентов финансовых организаций за 2021 год.: [сайт]. – URL: https://cbr.ru/analytics/ib/operations_survey/2021/ (дата обращения: 25.10.2024).
5. Банк России, Обзор операций, совершенных без согласия клиентов финансовых организаций за 2020 год. – М.:, 2021. – 16 с.
6. Чижикова Ю.В., Чижиков В.В. Социальная инженерия: новые тренды //Современные проблемы физико-математических наук. Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции. – Орёл: 2023. – С. 459–465.


## References


1. Christopher Hadnegy The Art of Deception: Social Engineering in Fraud Schemes / trans. from English A. Solomina. – M.: Alpina Publisher, 2020. – 430 p.
2. Bank of Russia, Review of transactions carried out without the consent of clients of financial organizations for 2023. - M.:, 2024. - 7 p.
3. Bank of Russia, Review of transactions carried out without the consent of clients of financial organizations for 2022. - M.:, 2023. - 13 p.
4. Bank of Russia, Review of transactions carried out without the consent of clients of financial organizations for 2021.: [website]. – URL: https://cbr.ru/analytics/ib/operations_survey/2021/ (accessed: 10/25/2024).
5. Bank of Russia, Review of transactions carried out without the consent of clients of financial organizations for 2020. - M.:, 2021. - 16 p.
6. Chizhikova Yu.V., Chizhikov V.V. Social engineering: new trends//Modern problems of physical and mathematical sciences. Materials of the IX All-Russian Scientific and Practical Conference. – Orel: 2023. – pp. 459-465.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 502-510.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 502-510.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.851

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ПОДХОДА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ» В 5-6 КЛАССАХ

***Анастасия Алексеевна Бухарина***[1]✉
[1]*Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
[1]*bukharinaaa_an@mail.ru*✉

***Аннотация.*** *В статье представлены рекомендации по использованию дифференцированного подхода при обучении учащихся 5-6 классов. Применение технологии дифференцированного обучения при изучении раздела «Наглядная геометрия» позволяет существенным образом повысить эффективность образовательного процесса. Автор предлагает делить класс на две группы в соответствии с уровнем мотивации и математическими способностями учащихся.*

***Ключевые слова:*** *дифференцированный подход, математические способности, мотивация к обучению, наглядная геометрия в 5-6 классах.*

Conference paper

# THE USE OF A DIFFERENTIATED APPROACH IN THE STUDY OF THE TOPIC «VISUAL GEOMETRY» IN GRADES 5-6

***Anastasia A. Bukharina***[1]✉
[1]*Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
[1]*bukharinaaa_an@mail.ru*✉

***Abstract.*** *The article presents recommendations on the use of a differentiated approach in teaching students in grades 5-6. The use of differentiated learning technology in the study of the section "Visual geometry" can significantly improve the effectiveness of the educational process. The author suggests dividing the class into two groups according to the level of motivation for learning and mathematical abilities.*

***Keywords:*** *differentiated approach, mathematical abilities, teaching motivation, visual geometry.*

© Бухарина А. А., 2024

## 1. Введение

Деятельностный подход, который в настоящее время является стержнем образовательного процесса, хорошо согласуется с идеями дифференцированного обучения. Дифференциация позволяет осуществить индивидуальный подход к каждому ученику с учётом его возможностей и способностей посредством вариативной организации процесса обучения. При этом каждый учащийся овладевает базовыми знаниями по теме и имеет возможность развиваться дальше, изучая материал углублённо.

Разработке теории индивидуализации и дифференциации обучения посвящены работы М. В. Богданович, А. А. Бударного, Н. Н. Деменевой, И. Э. Унт, Н. М. Шахмаева, В. Д. Шадрикова и др. [2, 4, 5, 16, 17, 18, 19].

Несмотря на то, что вопросами дифференцированного обучения занимались и продолжают заниматься многие методисты, его применение на уроках математики, особенно в 5-6 классах, остаётся разработанным недостаточно.

## 2. Основная часть

Основными содержательными линиями в курсе математики 5-6 классов являются арифметическая и геометрическая. Их изучение происходит параллельно, и они имеют тесную взаимосвязь. Изучение геометрии на данном этапе носит пропедевтический характер. Впервые о важности подготовительного этапа в обучении геометрии высказался С. Е. Гурьев [8]. В дальнейшем его идеи продвигали М. Ф. Борышкевич, М. О. Косинский и др [3, 6]. Необходимость организации пропедевтического обучения обуславливалась рядом трудностей, возникающих при изучении систематического курса геометрии в более старших классах.

Первоначально задачей пропедевтического курса геометрии было только введение основных геометрических понятий. Но по итогам изучения предлагаемого материала учащиеся оставались также не готовы к восприятию систематического курса геометрии. Встал вопрос о преемственности пропедевтического и систематического курсов геометрии, на который обращал особое внимание А. М. Пышкало [14].

В настоящее время обучение в 5-6 классах ведётся с опорой на учебно-методический комплект под редакцией Н. Я. Виленкина, В. И. Жохова, А. С. Чеснокова и др. [10, 11, 12, 13]. Анализируя содержание учебников данного авторского коллектива, можно отметить ряд особенностей и недостатков. Уже в первом параграфе учащихся знакомят с понятиями плоскости, прямой, луча и угла. Курс математики 5-6 классов предполагает скорее повторение изученных в начальной школе свойств треугольников, окружностей, четырёхугольников, а не изучение нового, что не позволяет познакомиться с геометрическими методами исследования фигур. Несмотря на то, что ученики ещё в начальной школе тренируются распознавать геометрические фигуры, задания на их отыскание в различных конфигурациях вызывает ряд сложностей. Знакомство с пространственными фигурами составляет совсем малую часть пропедевтического курса: авторы учебника предлагают рассмотреть куб и

прямоугольный параллелепипед и выполнить практическую работу по определению площади поверхности тел.

Следует отметить, что хотя изучение геометрического материала происходит параллельно с арифметической линией, связь настолько тесна, что можно говорить о подчинении геометрической линии арифметической. Материал, посвящённый наглядной геометрии, служит опорой и иллюстрацией различных вопросов арифметики и алгебры. После изучения окружности и круга учащимся предлагается познакомиться с долями и дробями. Изучение перпендикулярных и параллельных прямых предшествует освоению координатной плоскости.

Анализ задачного материала учебно-методического комплекта позволяет сделать вывод о том, что задач на построение геометрических фигур недостаточно. Согласно Федеральной образовательной программе основного общего образования, на изучение темы «Окружность, круг, шар, цилиндр» в 5 классе отводится 2 часа. В течение этого времени не представляется возможным глубоко познакомиться с данными понятиями, научиться строить их. Последующие темы не содержат заданий на работу с окружностями, что является недостатком, ведь полученные умения работы с циркулем без повторения утратятся очень быстро.

Обзор представленных в учебнике задач показывает, что геометрических среди них немало, но практически все они решаются арифметическими и алгебраическими методами.

Таким образом, несмотря на значимость пропедевтического курса геометрии, учебники содержат недостаточное количество материала, способствующего усвоению учащимися основ наглядной геометрии в 5-6 классах.

Проводя изучение психолого-педагогических особенностей школьников 11-13 лет, можно заметить ряд особенностей, влияющих на восприятие геометрического материала. Так, в данный период у детей восприятие становится более осмысленным и направленным, что положительно влияет на развитие наглядно-образного мышления учеников 5-6 классов, являющегося промежуточным этапом между наглядно-действенным и словесно-логическим. Внимание также претерпевает серьёзные изменения: становится целенаправленным, более сосредоточенным, имеет преднамеренный характер.

Замечено, что на продуктивность изучения геометрического материала оказывает большое влияние мотивация учащихся. Мотивация к учению связана в первую очередь с практическим применением знаний. Учащимся важно понимать, как материал урока поможет в жизненных ситуациях, как он связан с будущей профессией, их мировоззрением. При этом мотивация имеет важнейшее значение в обучении математике. Овладение математическим материалом напрямую связано с заинтересованностью ученика. Изучением мотивации к учению занималась А. К. Маркова, ей же принадлежат экспериментальные приемы изучения мотивации совместной деятельности школьников [9]. Аэлита Капитоновна выделяла следующие типы отношения к учению: отрицательное, нейтральное, положительное (аморфное,

нерасчлененное), положительное (познавательное, инициативное, осознанное), положительное (личностное, ответственное).

Отрицательное отношение характеризуется проявлением антипатии к учению, следующее за этим снижение успеваемости и мотивации. Причины могут быть различными, но чаще всего они связаны с отсутствием интереса к данному предмету, дискомфортом на уроке, неудачами. Нейтральное отношение проявляется в наличии низкой мотивации, отсутствием яркого интереса. Учащиеся способны достичь базовых результатов обучения, но деятельность по более глубокому изучению предмета их не интересует. Дети, имеющие положительное отношение к учению, активно интересуются всем происходящим на уроке, увлечены поиском дополнительной информации, стремятся узнать больше.

Учащиеся могут иметь разное отношение к различным предметам, в зависимости от многих факторов. К ним можно отнести личные обстоятельства, авторитет учителя, качество обучения, обстановку на уроке и др.

Не следует отвергать также и другой фактор, существенным образом влияющий на успешность учащегося в освоении математики – уровень его математических способностей. Даже самый замотивированный ученик не сможет добиться высоких результатов, не имея достаточного уровня математических способностей. Вопросами формирования и повышения математических способностей занимался В. А. Крутецкий [7]. Ему принадлежит классификация, подразумевающая деление детей на три группы: способные школьники, средние по способностям и относительно неспособные учащиеся. Вадиму Андреевичу принадлежат серии задач, позволяющие провести диагностику и установить, к какой группе можно отнести ученика.

Следовательно, можно говорить о достаточно большой части учащихся 5-6 классов, которым интересно осваивать геометрический материал на более высоком уровне и которые способны к такому обучению. Идеи дифференцированного обучения хорошо согласовываются с рассмотренными особенностями психического развития детей и позволяют организовать учебный процесс более эффективно для каждого ученика.

Существует два вида дифференцированного обучения: внутреннее и внешнее. Внешняя дифференциация подразумевает организацию работы по углубленному изучению предмета в профильных классах или осуществление учебного процесса по индивидуальным программам. Такая форма организации наиболее приемлема для старшеклассников, которые в большей степени определились уже со своими интересами, склонностями, мечтами на будущее. Для работы с учащимися 5-6 классов больше подходит внутренняя дифференциация.

Внутренняя дифференциация предполагает деление класса на группы, обучение которых проводится на разном уровне с привлечением различных средств и методов.

К. С. Бажин дает следующее определение: «Учет специфики дифференцированного обучения позволяет определить технологию дифференцированного обучения на основе психодидактического подхода как

совокупность последовательно сменяющих друг друга этапов организации обучения (подготовительный, практический, контрольно-оценочный), обладающих специфическими формами, методами, средствами решения поставленной задачи в целях обеспечения разностороннего развития обучающихся» [1]. Предполагается, что работа на подготовительном этапе направлена на диагностику учащихся, определение их в ту или иную группу и разработку методических материалов для обучения разных групп. Практический этап связан с реализацией учебного плана, проведением занятий с включением методов дифференцированного обучения. На контрольно-оценочном этапе происходит оценка полученных результатов, при этом могут использоваться различные материалы, например, тесты С. К. Росошека, позволяющие увидеть эффективность применения данной технологии и вовремя скорректировать план [15].

Следует отметить, что при организации работы групп важно учесть психологический аспект: каждый ребенок должен видеть траекторию своего развития, ощущать ситуацию успеха. Только в случае, когда учащийся верит в свои силы и чувствует поддержку педагога и родителей, он сможет добиться высоких результатов.

Учитывая мотивацию к учению и уровень математических способностей учеников можно разделить учащихся на 2 группы: базовая (Б) и продвинутая (П) (см. таблицу 1).

Таблица 1 — Классификация учащихся класса при организации дифференцированного обучения.

| | | **Математические способности школьников** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Высокий уровень | Средний уровень | Низкий уровень |
| **Мотивация учения** | Отрицательное отношение | П | Б | Б |
| | Нейтральное отношение | П | П | Б |
| | Положительное отношение | П | П | Б |

Учащихся, отнесённых к группе П, можно характеризовать как имеющих большой потенциал к изучению математики. Они проявляют живой интерес к предмету, стремятся к изучению математического материала на более высоком уровне, задают много вопросов, находятся в поиске дополнительной информации по изучаемым темам. Ученики продвинутой группы имеют хорошо развитые аналитические способности: легко производят анализ и синтез информации, выполняют сравнение, проводят аналогии, делают выводы. Следует отметить оригинальность мышления учащихся, они подходят нестандартно к решению задач, применяют необычные методы и средства. Школьники проявляют упорство и настойчивость, способны в течение длительного времени концентрироваться на решении одной задачи. Важно отметить и высокую способность к самообучению, которую проявляют

учащиеся, отнесённые к группе П. Все перечисленные особенности должны быть учтены учителем при организации дифференцированного обучения. Организуя работу с такими школьниками, учителю следует подбирать больше нестандартных задач, побуждая к построению более сложных цепочек логического рассуждения, тренируя внимание, память, развивая творческие математические способности, а также побуждать их к участию в различных математических конкурсах, олимпиадах.

Школьники, которых можно отнести к группе базового уровня, не проявляют особого интереса к изучению математики. Они характеризуются средним или низким уровнем успеваемости по предмету, имеют менее развитые аналитические способности. У учеников возникают сложности в восприятии абстрактных математических объектов, при обучении существенную роль играет опора на наглядность. Учащиеся испытывают трудности с концентрацией внимания, запоминанием, способны решать задания базового уровня, в то время как изменённые условия или новый сюжет представляет для них совершенно новую задачу, которую они не всегда могут решить. Таким учащимся нужна опора в усвоении геометрического материала, разработка алгоритмов и инструкций пошагового действия при решении задач, большее количество упражнений для закрепления материала, а также поддержка учителя, подмечающего даже небольшие продвижения в изучении сложного для них геометрического материала.

В соответствии с предложенным делением учащихся на две группы, предложим систему задач, направленных на усвоение темы «Площадь. Формула площади прямоугольника» в 5 классе.

*Для группы Б:*

1. Найдите, сколько квадратных сантиметров содержится в 1 $м^2$?

2. Вычислите площадь прямоугольника, стороны которого равны 8 см и 15 см [10].

3. Поле квадратной формы имеет площадь 49 $м^2$. Найдите периметр поля, ответ выразите в дециметрах.

4. На рисунке 1 дана фигура. Разбейте её на два прямоугольника. Найдите площадь каждого из полученных прямоугольников, а затем площадь всей фигуры. Сколькими способами можно решить задачу?

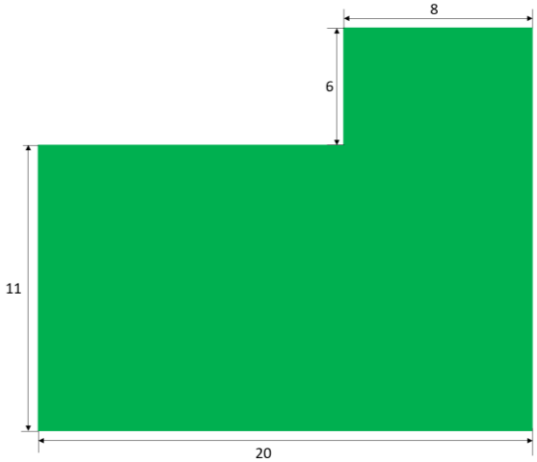



Рисунок 1 — Чертеж к задаче 4.

*Для группы П:*

1. Одна сторона прямоугольника равна 18 см, а другая в 6 раз меньше. Найдите площадь прямоугольника [10].

2. На рисунке 2 изображён прямоугольник размером 4×9 клеточек. Можно ли из этого прямоугольника получить квадрат, разрезав его на 2 равные части (разрезы можно делать так, чтобы каждая из полученных фигур состояла из целого числа клеточек)? Если можно, то приведите пример такого разрезания.

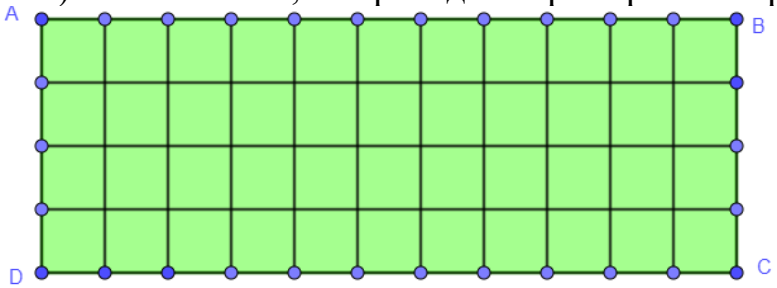



Рисунок 2 — Чертеж к задаче 2.

3. Выполняя ремонт в ванной комнате, было решено облицевать стену кафельной плиткой. Ширина стены 4 м, высота 3 м. В таблице 2 представлена информация о возможных видах плитки и ее стоимости. Выберите самый выгодный вариант покупки.

Таблица 2 — Ассортимент строительного магазина.

| **Название товара** | **Размеры** | **Цена за штуку** |
|---|---|---|
| Плитка облицовочная Тахо | 25×60 | 185 рублей |
| Плитка облицовочная Нимбус | 25×50 | 167 рубля |
| Плитка облицовочная Юнона | 20×30 | 92 рубля |
| Плитка облицовочная Мартиника | 30×60 | 233бля |

## 3. Заключение

Использованием методов дифференциации при обучении учащихся 5-6 классов позволяет существенным образом оптимизировать образовательный процесс. Учёт индивидуальных особенностей и возможностей детей даёт возможность каждому ребёнку обучаться на том уровне, который ему доступен. При этом хорошо успевающие дети могут осваивать материал на более высоком уровне, решать задачи повышенной трудности, развивать логическое мышление, внимание, память, пространственное воображение, в то время как слабо успевающие дети овладевают темой на базовом уровне, соответствующем образовательной программе, испытывают меньше трудностей.

Таким образом может быть достигнут успех каждого ребёнка, повышается интерес учащихся к математике и к процессу обучения в целом.

## Список источников

1. Бажин К. С. Технология дифференцированного обучения: психолого-педагогический аспект // Вестник ВятГУ. 2011. №1-1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologiya-differentsirovannogo-obucheniya-psihologo-pedagogicheskiy-aspekt (дата обращения: 30.10.2024).

2. Богданович М. В. Уроки математики в начальной школе: Пособие для учителя. – К.: Рад. шк., 1991. 208 с.

3. Борышкевич М. Ф. Курс элементарной геометрии с практическими задачами: Для гор. уч-щ по прогр. Винниц. съезда учителей. – С.-Пб: тип. т-ва «Обществ. Польза», 1876. 95 с.

4. Бударный А. А. Индивидуальный подход в обучении // Советская педагогика. 1965. №7. С. 18-20.

5. Деменева Н. Н. Дифференцированная работа на уроках математики в начальной школе // Начальная школа. 2004. № 2. С. 55-61.

6. Косинский М. О. Наглядная геометрия: с прил. вопросов для повторения пройденного и списка пособий для объясн. каждой ст., 29 фиг. и 8 отд. сеток для вырезывания и склеивания тел самими учащимися: для детей от 9 до 12 лет. – С.- Пб: Н.Г. Мартынов, 1902. 94 с.

7. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / под ред. Н. И. Чуприковой. – М.: Ин-т практ. психологии; Воронеж: НПО «МОДЭК», 1998. 411 с.

8. Ланков А. В. К истории развития передовых идей в русской методике математики: пособие для учителей. – М.: Гос. уч.-пед. изд-во Мин. просв. РСФСР, 1951. 152 с.

9. Маркова А. К., Матис Т. А., Орлов А. Б. Формирование мотивации учения. Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1990. 191 с.

10. Математика: 5-й класс: базовый уровень: учебник: в 2 частях / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков [и др.]. – М.: Просвещение, 2023. Ч. 1. 160 с.

11. Математика: 5-й класс: базовый уровень: учебник: в 2 частях / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков [и др.]. – М.: Просвещение, 2023. Ч. 2. 176 с.

12. Математика: 6-й класс: базовый уровень: учебник: в 2 частях / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков [и др.]. – М.: Просвещение, 2023. Ч. 1. 160 с.

13. Математика: 6-й класс: базовый уровень: учебник: в 2 частях / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков [и др.]. – М.: Просвещение, 2023. Ч. 2. 144 с.

14. Пышкало А. М. Геометрия в I-IV классах. – М.: Просвещение, 1968. 263 с.

15. Росошек С. К. Тесты по математике для учащихся 5-9 классов средней школы, обучающихся по программе МПИ / Под ред. проф. Э.Г. Гельфан. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 59 с.

16. Унт И.Э. Индивидуализация и дифференциация обучения. – М.: Педагогика, 1990. 192 с.

17. Шадриков В. Д., Мазилов В. А., Слепко Ю. Н. Методология и методы изучения способностей и одаренности. Ярославль: РИО ЯГПУ, 2018. 159 с.

18. Шахмаев Н. М. Дифференциация обучения в средней общеобразовательной школе // Дидактика средней школа / под ред. М.А. Данилова, М.Н. Скаткина. – М.: Просвещение, 1975. С. 251-282.

19. Шахмаев Н. М. Учителю о дифференцированном обучении: (метод. рекомендации). – М.: [Б. и.], 1989. 65 с.

## References


1. Bazhin K. S. Technology of differentiated learning: psychological and pedagogical aspect // Bulletin of Vyatka State University. 2011. No. 1-1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologiya-differentsirovannogo-obucheniya-psihologo-pedagogicheskiy-aspekt (date of access: 10/30/2024).

2. Bogdanovich M. V. Mathematics lessons in elementary school: A teacher's manual. - K.: Rad. school, 1991. 208 p.

3. Boryshkevich M. F. Course of elementary geometry with practical problems: For city. schools according to the program. Vinnitsa. teachers' congress. - St. Petersburg: typing. society "Obshchestvenny Polza", 1876. 95 p.

4. Budarny A. A. Individual approach in teaching // Soviet pedagogy. 1965. No. 7. pp. 18-20.

5. Demeneva N. N. Differentiated work in mathematics lessons in elementary school // Primary school. 2004. No. 2. Pp. 55-61.

6. Kosinsky M. O. Visual geometry: with appendix questions for repetition of the covered material and list of aids for explanation of each article, 29 figures and 8 separate grids for cutting out and gluing bodies by the students themselves: for children from 9 to 12 years old. - St. Petersburg: N.G. Martynov, 1902. 94 p.

7. Krutetsky V. A. Psychology of mathematical abilities of schoolchildren / edited by N.I. Chuprikova. - Moscow: Institute of Practical Psychology; Voronezh: NPO "MODEK", 1998. 411 p.

8. Lankov A.V. On the history of the development of advanced ideas in Russian mathematics methodology: a manual for teachers. - M.: State educational-pedagogical publishing house of the Ministry of Education of the RSFSR, 1951. 152 p.

9. Markova A. K., Matis T. A., Orlov A. B. Formation of motivation for learning. A book for a teacher. - M.: Education, 1990. 191 p.

10. Mathematics: 5th grade: basic level: textbook: in 2 parts / N.Ya. Vilenkin, V.I. Zhokhov, A.S. Chesnokov [and others]. - M.: Education, 2023. Part 1. 160 p.

11. Mathematics: 5th grade: basic level: textbook: in 2 parts / N.Ya. Vilenkin, V.I. Zhokhov, A.S. Chesnokov [et al.]. – M.: Education, 2023. Part 2. 176 p.

12. Mathematics: 6th grade: basic level: textbook: in 2 parts / N.Ya. Vilenkin, V.I. Zhokhov, A.S. Chesnokov [et al.]. – M.: Education, 2023. Part 1. 160 p.

13. Mathematics: 6th grade: basic level: textbook: in 2 parts / N.Ya. Vilenkin, V.I. Zhokhov, A.S. Chesnokov [et al.]. – M.: Education, 2023. Part 2. 144 p.

14. Pyshkalo A. M. Geometry in grades I-IV. – M.: Education, 1968. 263 p.

15. Rososhek S. K. Tests in mathematics for students in grades 5-9 of secondary school studying under the MPI program / Ed. by prof. E.G. Gelfan. - Tomsk: Tomsk University Press, 2004. 59 p.

16. Unt I. E. Individualization and differentiation of instruction. - M.: Pedagogy, 1990. 192 p.

17. Shadrikov V. D., Mazilov V. A., Slepko Yu. N. Methodology and methods of studying abilities and giftedness. Yaroslavl: RIO YAGPU, 2018. 159 p.

18. Shakhmaev N. M. Differentiation of instruction in secondary comprehensive school // Didactics of secondary school / Ed. by M.A. Danilov, M.N. Skatkin. - M.: Education, 1975. Pp. 251-282.

19. Shakhmaev N. M. To the teacher about differentiated instruction: (method. recommendations). - M.: [B. and.], 1989. 65 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 511-517.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 511-517.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 51+373.5

# НЕКОТОРЫЕ ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ ПРИ РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМ С ПАРАМЕТРАМИ

***Марет Балаудиновна Виситаева***[1]✉
[1]*СОШ № 5, г. Урус-Мартан, Чеченская Республика, Россия*
[1]*esm276932@gmail.com*✉

***Аннотация.*** *В работе нами рассматриваются прямая и обратная проблемы, представленные в контексте задач с параметрами. Для рассмотрения направления развития математических способностей обучающихся представлены характеристики составляющих математических способностей (гибкости мыслительных процессов в математической деятельности, способности к аналитико-синтетической деятельности).*

***Ключевые слова:*** *прямая и обратная проблемы, задачи с параметрами, гибкость мыслительных процессов в математической деятельности, способность к аналитико-синтетической деятельности, характеристика.*

Conference paper

# PSYCHOLOGICAL-PEDAGOGICAL ASPECTS OF PROBLEM SOLUTION WITH PARAMETERS

***Maret B. Visitaeva***[1]✉
[1]*Secondary School No. 5, Urus-Martan, Chechen Republic, Russia*
[1]*esm276932@gmail.com*✉

***Abstract.*** *The article considers direct and indirect tasks presented in the context of tasks with parameters. To consider the direction of development of students' mathematical abilities, the characteristics of components of mathematical abilities (flexibility of thought processes in mathematical activity, ability to analytical and synthetic activity) are presented.*

***Keywords:*** *direct and indirect problems, problems with parameters, flexibility of thought processes in mathematical activities, analytical and synthetic abilities, characterisation.*

© Виситаева М. Б., 2024

## 1. Введение

На основе анализа психолого-педагогической литературы нами исследован вопрос в контексте решения задач с параметрами. В работе рассматриваются основные подходы проблемы (прямая и обратная проблемы), представленные в виде задач с параметрами. Для рассмотрения направления развития математических способностей обучающихся представлены характеристики составляющих математических способностей (гибкости мыслительных процессов в математической деятельности, способности к аналитико-синтетической деятельности).

## 2. Некоторые подходы решения проблем с параметрами

В работе мы рассматриваем проблемы (прямую и обратную), с целью в целом охарактеризовать особенности решения каждого класса задач, представляемые ими, в практической части работы представлены некоторые из таких задач.

К проблемам с параметрами, рассматриваемым в школьном курсе математики, относятся, например, проблемы, в которых отыскивается решение линейных, квадратных, дробно-рациональных уравнений и неравенств, и их систем в общем виде, исследуется число (диапазон) их решений в зависимости от значений параметров и т.д. Учитывая допущенные ошибки решателями при решении проблем с параметрами, в частности, уравнений (неравенств) или их систем с параметрами очень важно сфокусировать внимание на возможность обозначить две основные взаимообратные проблемы: прямую и обратную. Нами рассматривается решение проблем с одним параметром.

Прямая проблема. Для каждого значения параметра найти все решения уравнения (неравенства или их системы) и т.д.

Рекомендации к решению прямой проблемы и записи ответа. Если в проблеме сказано (к примеру, «Для всех значений параметра … (при каждом значении параметра ...), решите уравнение (неравенство или их систему) », то следует при решении уравнения (неравенства или их системы) рассматривать все возможные случаи и в ответе выписать полученные решения вместе с ограничениями на параметр (задача 1).

Преимущественно фабула обратной проблемы многоаспектна, но здесь следует учесть: те или иные ограничения, накладываемые на параметр(ы).

Обратная проблема. Найти все значения параметра, при которых решения уравнения (неравенства или их системы) удовлетворяют данным условиям и т.д.

Рекомендации к решению обратной проблемы и записи ответа. Если в проблеме сказано (к примеру, «Найдите все значения параметра …, при каждом из которых уравнение (неравенство или их система) имеет по крайней мере одно решение (имеет ровно два различных решения) … («При каких значениях параметра …, уравнение (неравенство или их система) имеет единственное решение (не имеет решений)?» и т.д.), то при решении проблемы нужно рассматривать все возможные случаи, но в ответе не выписывать полученные решения (если даже они есть), а только соответствующие ограничения на параметр [1] (задача 2).

Для отработки навыков их решения важно готовить обучающихся трансформировать проблему из одного типа в другой. В процессе решения поддерживается вариативность используемых методов: аналитический, графический и т. д.

Нами выявлены характеристики составляющих математических способностей *обучающихся* (*гибкости мыслительных процессов в математической деятельности*, *способности к аналитико-синтетической деятельности)*, для использования в процессе решения задач:

*а*) характеристики критерия [2] *гибкости мыслительных процессов в математической деятельности обучающихся*:

- проявление легкости ориентировки в новых условиях;
- многообразие подходов к решению задачи, переключение с прямого хода мыслей на обратный (дедуктивный и индуктивный метод решения задачи и т. д.);

*б*) характеристики критерия (И. Б. Шмигирилова, А. А. Чугунова и Н. И. Пустовалова [3], С. Л. Рубинштейн [4, 5], И. С. Якиманская [6] и др.) способности *к аналитико-синтетической деятельности обучающихся:*

- распознавание задачной ситуации (сравнение, анализ и т.д.);
- обоснование связи между действиями и этапами решения (синтез через анализ и т.д.);
- обоснование связи между действиями и этапами решения (синтез, конкретизация, сравнение, анализ и т.д.);
- контроль отдельных этапов хода решения задачи, и его корректировка, обоснование связи между действиями и этапами решения (синтез, конкретизация, сравнение, анализ и т.д.).

На основании исследований (С. Л. Рубинштейн [4, 5], И. С. Якиманской [6] и др.) мы принимаем следующую трактовку относительно способности к аналитико-синтетической деятельности. Способность к аналитико-синтетической деятельности проявляется в умении выделять элементы объекта, его признаки мысленного разложения исходных образов на соответствующие части (сравнение, анализ, анализ через синтез, конкретизация и т. д.) или соединять элементы в единое целое, включать их в новые связи, увидеть в них новые отношения (синтез, синтез через анализ, обобщение и т. д.).

Заметим, приведенные характеристики критерия способности к аналитико-синтетической деятельности у обучающихся релевантны этапам решения задачи, выделяемые Д. Пойа.

Д. Пойа прописывает попытки анализа процесса решения задачи, воспринимаемые учащимся и выделяет при этом четыре этапа решения задачи: 1) нужно ясно понять задачу; 2) нужно найти связь между данными и неизвестными. Если сразу не удается обнаружить эту связь, возможно, будет рассмотреть вспомогательные задачи. В конечном счете, необходимо перейти к плану решения; 3) нужно осуществить план решения; 4) нужно изучить найденное решение. Эти этапы представляют собой эвристические правила и относятся больше к задачам нестандартного типа [7]. Приведем примеры.

*Решение прямой проблемы*

**Задача 1.** Решите уравнение: $(a^2 - 4)\,x = a + 2$. (1)

*Схема рассуждений:*

*1)* если $a = 2$, то уравнение (2) примет вид $0 \cdot x = 2$ и не имеет решений; если $a = -2$, то имеем $0 \cdot x = 0$, *и* $x$ – любое число;

*2) если* $a \neq \pm 2$; имеем $x = \frac{1}{a-2}$.

Ответ. Если $a = -2$, то $x$ – любое число; если $a = 2$, то нет решений; если $a \neq \pm 2$; то $x = \frac{1}{a-2}$.

Перейдем к рассмотрению этой задачи в психолого-педагогическом разрезе.

*Примечание*. Иногда такое линейное уравнение считают по ошибке квадратным, хотя здесь переменная $x$ в первой степени, только параметр $a$ во второй степени.

*В процессе анализа решения задач нами использованы 4 категории, в целом соответствующие отметкам «2», «3», «4» и «5».*

При анализе решения задачи 1 мы использовали следующие критерии:

- задача решена неверно или нет решений – категория 1;
- допущены ошибки учащимися в решении задачи, ответ был неполным – категория 2;
- обучающийся сумел понять, что здесь представлена прямая проблема (*распознавание задачной ситуации (сравнение, анализ*); проявление легкости ориентировки в новых условиях), правильно определить ход решения линейного уравнения с параметром с одной переменной (*обоснование связи между действиями* и этапами решения (*синтез через анализ)*, многообразие аспектов к решению задачи), но выписал ответ неполным – категория 3;
- обучающийся догадался, что здесь представлена прямая проблема (*распознавание задачной ситуации (сравнение, анализ*); проявление легкости ориентировки в новых условиях), определили ход решения линейного уравнения с параметром с одной переменной (*обоснование связи между действиями* и этапами решения *(синтез через анализ);* многообразие аспектов к решению задачи), и правильно выписал ответ – категория 4.

В задаче 1 используется преимущественно прием мыслительной деятельности – синтез (решение уравнения начинается с условия задачи), но при этом присутствует и анализ, в целом здесь используется синтез через анализ: преобладает синтез, а анализ здесь неосновной прием мыслительной деятельности, он как бы сопутствует синтезу.

*Решение обратной проблемы.*

**Задача 2**. Найдите все значения параметра $b$, при каждом из которых корни $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ уравнения

$$\boldsymbol{2x^2 - (b+2)x + b + 4 = 0} \qquad (2)$$

различны и удовлетворяют условию

$$\boldsymbol{x_1^2 + x_2^2 + 6\,x_1 x_2 = 36}. \qquad (3)$$

*Схема рассуждений:*

Квадратное уравнение (2) имеет два различных корня, если выполнено условие:

$$D = (b + 2)^2 - 8(b + 4) = b^2 - 4b - 28 > 0. \quad (4)$$

Пусть условие (4) выполнено, тогда уравнение (2) имеет два различных корня $x_1$ и $x_2$ для них по теореме Виета справедливы равенства:

$$x_1 + x_2 = \frac{b+2}{2} \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = \frac{b+4}{2}. \quad (5)$$

Преобразуем левую часть равенства (3), используя равенства (5):

$$(x_1 + x_2)^2 + 6\,x_1\,x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 = \frac{1}{4}(b + 2)^2 + 2(b + 4).$$

Решив уравнение

$$\frac{1}{4}(b + 2)^2 + 2(b + 4) = 36,$$

найдём два его корня: $b_1 = -18$ и $b_2 = 6$.

Проверим, выполняется ли условие (4) для найденных значений $b$.

Если $b = -18$, то $D = 368 > 0$; если $b = 6$, то $D = -16 < 0$.

Таким образом, условия задачи выполняются лишь при $b = -18$.

О т в е т. $b = -18$.

Перейдем к рассмотрению этой задачи в психолого-педагогическом разрезе.

При анализе решения задачи 2 мы использовали следующие четыре критерия:

- задача решена неверно или нет решений – категория 1;
- обучающийся какие-то шаги при решении задачи сделал правильно, но допущены ошибки в этом процессе, ответ был неправильным – категория 2;
- обучающийся сумел понять, что здесь представлена обратная проблема (*распознавание задачной ситуации (сравнение, анализ и т.д.*); проявление легкости ориентировки в новых условиях), определил ход решения квадратного уравнения с параметром (*обоснование связи между действиями* и этапами решения *(анализ через синтез, сравнение и т.д.*); многообразие подходов к решению задачи), но допущена ошибка в ходе решения задачи или выписал ответ неправильно – категория 3;
- обучающийся догадался, что здесь представлена обратная проблема (*распознавание задачной ситуации (сравнение, анализ и т.д.*); проявление легкости ориентировки в новых условиях), определил ход решения квадратного уравнения с параметром и осуществил его (определил условие, при котором квадратное уравнение имеет два различных корня, сумел связать это условие с теоремой Виета, и нашел лишний корень в новом уравнении) (*контроль отдельных этапов хода решения задачи, и его корректировка, обоснование связи между действиями* и этапами решения (*анализ через синтез, конкретизация, сравнение и т.д.*); многообразие аспектов к решению задачи) и правильно выписал ответ – категория 4.

**3. Заключение**

Мы считаем, что задачи с параметрами, следует рассматривать как часть школьного курса математики, встраивая их в соответствующую тему. Следует

начинать с простейших линейных уравнений с параметром еще в 7 классе, перейдя затем к решению их систем и далее в 8 классе перейти к решению квадратных уравнений с параметром и т.д. [8, 9, 10]. На наш взгляд, необходимо обучать школьников выбору метода решения при данной (прямой или обратной) проблеме, тогда у них возникает потребность в механизмах распознавания применимости методов для решения поставленной проблемы. Следует также сделать акцент на эффективность использования психолого-педагогической составляющей при обучении решению рассматриваемых задач с параметрами. Отметим, что нами накоплен некоторый опыт по рассматриваемому направлению в том числе и на полилингвиальной основе ([11] и др.).

## Список источников


1. Виситаева, М. Б. Некоторые аспекты решения проблем с параметрами // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXV : материалы Междунар. Воронежской весенней математической школы (26-30 апреля 2024 г.) / Воронежский государственный университет; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН ; НОМЦ СОГУ им. К. Л. Хетагурова; АО «Концерн «Созвездие». Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2024. С. 83-86.
2. Хабина Э. Л. Развитие математических способностей учащихся 8-9 классов с углубленным изучением математики: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Хабина Элла Львовна. М., 2002. 211 с.
3. Развитие аналитико-синтетической деятельности студентов в процессе обучения математическому анализу / И. Б. Шмигирилова, А. А. Чугунова, Н. И. Пустовалова // Science for Education Today. 2019. Том 9, № 3. С. 121-134.
4. Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его исследования. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 146 с.
5. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии. СПб.: Питер, 2008. 715 с.
6. Якиманская И. С. Психологические основы математического образования. М.: Академия, 2004. 320 с.
7. Пойа Д. Обучение через задачи // В кн. На путях обновления школьного курса математики / Д. Пойа, А. И. Маркушевич, Г. Г. Маслова, Р. С. Черкасов. М.: Просвещение, 1978. С. 220-226.
8. Виситаева М. Б. Задачи с параметром в 8 классе // Математика в школе. 2018. №8. С. 02.
9. Виситаева М. Б. Задачи с параметром в IX классе // Математика в школе. 2019. №4. С. 1-12.
10. Виситаева М. Б. Решение линейных уравнений с параметром // Вестник, ЧИПКРО. 2018. №2. С. 83-89.
11. Visitaeva M. B. Towards a multilingual education of mathematics // Междунар. научно-практ. конф. «Современные исследования и открытия. Научные чтения» (посвященная 70-летию со дня рождения ученого, организатора и преподавателя К. Д. Курбанмагомедова : тезисы докладов. Россия, Махачкала, 17-18 мая 2024, С. 147-151.

## References


1. Visitaeva, M. B. Some aspects of solving problems with parameters // Modern methods of the theory of boundary value problems. Pontryagin Readings - XXXV : Proceedings of the Intern. Voronezh Spring Mathematical School (26-30 April 2024) / Voronezh State University; Lomonosov Moscow State University. Voronezh State University; Lomonosov Moscow State University ; V. A. Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences. Voronezh State University; Moscow State University named after M.V. Lomonosov ; Mathematical Institute named after V.A. Steklov RAS ; NOMC SOGU named after K.L. Khetagurov; JSC Concern Sozvezdie. Voronezh : Publishing House of VSU, 2024. C. 83-86.

2. Khabina E. L. Development of mathematical abilities of students of 8-9 classes with advanced study of mathematics: Cand. of Ped. sciences: 13.00.02 / Khabina Ella Lvovna. M., 2002. 211 c.

3. Development of analytical and synthetic activity of students in the process of teaching mathematical analysis / I. B. Shmigirilova, A. A. Chugunova, N. I. Pustovalova // Science for Education Today. 2019. Vol. 9, No. 3. C. 121-134.

4. Rubinstein S. L. About thinking and ways of its research. Moscow: Izd-vo of the Academy of Sciences of the USSR, 1958. 146 c.

5. Rubinstein S. L. Fundamentals of General Psychology. SPb.: Peter, 2008. 715 c.

6. Yakimanskaya I. C. Psychological foundations of mathematical education. Moscow: Academy, 2004. 320 c.

7. Poya D. Teaching through tasks // In the book On the ways of updating the school course of mathematics / D. Poya, A. I. Markushevich, G. G. Maslova, R. S. Cherkasov. Moscow: Prosveshchenie, 1978. C. 220-226.

8. Visitaeva M. B. Tasks with the parameter in the 8th grade // Mathematics in School. 2018. №8. P. 02.

9. Visitaeva M. B. Tasks with a parameter in IX class // Mathematics at school. 2019. №4. C. 1-12.

10. Visitaeva M. B. Solution of linear equations with a parameter // Vestnik, ChIPKRO. 2018. №2. C. 83-89.

11. Visitaeva M. B. Towards a multilingual education of mathematics // International scientific and practical conference ‘Modern research and discoveries. Scientific Readings’ (dedicated to the 70th anniversary of the scientist, organiser and teacher K. D. Kurbanmagomedov : abstracts of reports. Russia, Makhachkala, 17-18 May 2024, P. 147-151.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 518-527.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 518-527.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 373.51

# МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ПОДГОТОВКИ ШКОЛЬНИКОВ 5-6 КЛАССОВ К УЧАСТИЮ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ

***Наталья Александровна Гончарова*** [1]✉***, Дмитрий Николаевич Полубабин*** [2]
[1,2]*Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
[1]*n.a.goncharowa@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0003-1404-2685*
[2]*dima160579@yandex.ru*

***Аннотация.*** *Возрастание интереса к состоянию математического образования, его значению в подготовке всесторонне развитой личности, желающей и имеющей возможности самореализоваться во внешней среде благодаря своим математическим способностям, а также изменения в роли и развитии математических олимпиад (МОл), выявленные в ходе анализа противоречия теории и практики организации внеурочной деятельности по математике заставляют искать новые подходы к совершенствованию методики организации этой деятельности, ориентированной на интегрированную (сочетающую системную и интенсивную) подготовку школьников к участию в МОл. Наиболее уязвимым в рассматриваемом контексте является переходный этап обучения математике – 5-6 классы. Авторами разработаны предложения по организации подготовки школьников 5-6 классов к участию в МОл в виде соответствующего курса внеурочной деятельности, уточнены методические аспекты его подготовки и практической реализации.*

***Ключевые слова:*** *математическое образование в школе, внеурочная деятельность, математические олимпиады, методика математики, методические рекомендации, школьники 5-6 классов.*

Conference paper

# METHODOLOGICAL RECOMMENDATIONS ON THE ORGANIZATION OF PREPARATION OF STUDENTS IN GRADES 5-6 TO PARTICIPATE IN MATHEMATICAL OLYMPIADS

***Natalia A. Goncharova*** [1]✉***, Dmitry N. Polubabin*** [2]

© Гончарова Н. А., Полубабин Д. Н., 2024

[1,2]*Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
[1]*n.a.goncharowa@yandex.ru*✉*, https://orcid.org/0000-0003-1404-2685*
[2]*dima160579@yandex.ru*

***Annotation**. The increasing interest in the state of mathematical education, its importance in the preparation of a comprehensively developed personality who wants and has the opportunity to self-actualize in the external environment due to his mathematical abilities, as well as changes in the role and development of mathematical Olympiads, revealed during the analysis of contradictions in the theory and practice of organizing extracurricular activities in mathematics, make us look for new approaches to improvement methods of organizing this activity, focused on integrated (combining systematic and intensive) training of schoolchildren to participate in the MOL. The most vulnerable in this context is the transitional stage of mathematics education – grades 5-6. The authors have developed proposals for organizing the preparation of schoolchildren in grades 5-6 to participate in the MOL in the form of an appropriate extracurricular activity course, clarified the methodological aspects of its preparation and practical implementation.*

***Keywords**: mathematical education at school, extracurricular activities, mathematical Olympiads, methods of mathematics, methodological recommendations, students of grades 5-6.*

## 1. Введение

Поддержание высокого уровня качества российского образования в условиях современных вызовов и последних научных достижений становится одним из приоритетных направлений развития образовательной политики в нашей стране. Ведущими составляющими его практической реализации выступают фундаментальность и ориентированность на удовлетворение актуальных и перспективных потребностей личности, общества и государства. В последние десятилетия наблюдается возрастание интереса к состоянию математического образования, его значению в подготовке всесторонне развитой личности, желающей и имеющей возможности самореализоваться во внешней среде благодаря своим математическим способностям. Участие школьников в предметных олимпиадах и конкурсах, как показывает практика, является наиболее публичным и эффективным инструментом выявления, поддержания и развития математических способностей и интереса к овладению новыми знаниями. Мы разделяем точку зрения специалистов, что повышенное внимание к участию школьников в предметных олимпиадах, в том числе и математических, во многом обусловлено введением ЕГЭ и новыми правилами поступления в вузы: призёры некоторых олимпиад зачисляются в вузы без экзаменов, для многих школьников это становится ведущим стимулом для ежегодного участия в таких мероприятиях. Следует также учитывать, что результаты участия школьников в МОл служат не только своеобразным показателем качества, в нашем случае, математического образования в школе, городе, регионе, но и требуют системной модернизации математического образования, одним из насущных вопросов которой становится необходимость

развития системы подготовки учащихся общеобразовательных школ к МОл в рамках внеурочной деятельности. Подчеркнём, что в обновлённых ФГОС (документы стандарта начального общего и основного общего образования) особое внимание обращается на организацию образовательной деятельности школьников вне уроков, учитывая их интересы и возможности. Действительно, в условиях внедрения ФГОС ООО внеурочная деятельность по предмету, в нашем случае по математике, обретает новый статус, так как именно стандарты закрепили обязательность ее организации.

**2. Основной текст статьи**

Проведённый анализ различных информационных источников, учебно-методической литературы, практики организации внеурочной деятельности по математике, проведения МОл позволил выявить следующие противоречия:

– между объективной необходимостью совершенствования подготовки учащихся к МОл в рамках внеурочной деятельности и недостаточной разработанности теоретически обоснованных ее компонентов (в т.ч. с учетом психолого-педагогических особенностей учащихся и современных требований олимпиадного движения, математических конкурсов), а также практического отсутствия единых, современных методических разработок, методических подходов к организации внеурочной деятельности учащихся при подготовке к участию в МОл;

– между накопленным опытом проведения МОл и недостаточным использованием организационного потенциала внеурочной деятельности по математике, направленной на подготовку учащихся к участию в этих мероприятиях.

Особенно остро эти противоречия проявляются на этапе обучения математике в 5-6 классах. А их разрешение актуализирует необходимость рассмотрения методических аспектов организации подготовки школьников 5-6 классов к участию в математических олимпиадах.

Проведённый анализ также показал, что наблюдающиеся качественные и количественные изменения в практике проведения МОл приводят к необходимости обновления методики подготовки школьников 5-6 классов к участию в них. С одной стороны, сами учащиеся начинают осознавать, что для успешного выступления на олимпиаде надо заранее готовиться. С другой стороны, нормативно важность такой подготовки закреплена в документах: Положении о ВсОШ, в котором отмечается направленность предметных олимпиад на «выявление и развитие у обучающихся творческих способностей и интереса к научно-исследовательской деятельности» [1]; ФГОСе ООО, который предполагает «развитие у учащихся средней школы навыков решения нестандартных задач, организацию элективных курсов по подготовке к олимпиадам и индивидуальных занятий по решению заданий углубленного уровня для одарённых детей» [2]; профессиональном стандарте учителя математики и информатики согласно которому учитель должен содействовать подготовке учащихся к участию в математических олимпиадах, работать с одарёнными детьми [3].

Для разрешения перечисленных выше противоречий и решения выявленной проблемы на современном этапе развития математического образования предлагаем учителям-предметникам обратить внимание на разработку и реализацию курса внеурочной деятельности по подготовке учащихся 5-6 классов к принятию участия в МОл**.** В связи с чем представляется целесообразным придерживаться следующих методических рекомендаций. Во-первых, в общем виде различают системную и интенсивную виды подготовки к математическим олимпиадам и конкурсам. Предлагаемый к разработке курс – организация системной работы с учащимися (включая математически способных и одарённых), желающих достигать устойчивых успехов в МОл, в том числе за счёт развития мотивационной и познавательной сферы школьников и обретение социального опыта. Так, находясь в творческом пространстве кружка, например, у математически одарённых детей появляется возможность, сохраняя физическое и психическое здоровье, раскрыть себя, свой математический талант, у других учащихся возможность не только углубить свои знания, но и развивать способности по математике. Во-вторых, работа с учащимися на занятиях должна строиться преимущественно на основе личностно-ориентированного и системно-деятельностного подходов, включающих дифференцирование заданий, организацию индивидуальной и групповой работы, предоставление возможностей для самостоятельности, творчества и самореализации, апробацию инновационных образовательных технологий. В-третьих, разрабатываемый курс должен быть направлен на преодоление естественных и искусственных барьеров активного участия школьников 5-6 классов в математических олимпиадах и конкурсах. Наиболее важными из них, по нашему мнению, являются следующие:

– недостаточная информированность и как следствие недопонимания важности таких мероприятий для учащегося обычной общеобразовательной школы;

– низкая мотивация обучающихся к участию в МОл, обусловленная их кажущейся сложностью, дополнительной нагрузкой к основному курсу математики;

– отсутствие опыта участия в подобных мероприятиях и страх плохо выступить;

– на олимпиаду формально могут посылаться учащиеся-отличники, без предварительного отбора среди всех желающих;

– учащиеся откладывают участие в МОл до более старших классов.

Повышению качества и эффективности реализации курса будет способствовать проведение анкетирования и опросов среди учеников и их родителей. Такие диагностические мероприятия следует провести в начале и в конце курса.

Особое внимание надо обратить на соблюдение организационных принципов: исключить возможность дублирования деятельности учащихся на уроках в применяемых формах взаимодействия членов кружка; комбинировать индивидуальные и групповые занятия; корректировать тематику занятий курса,

перечень заданий в зависимости от запросов учащихся; использовать инновационные образовательные технологии.

В начале учебного года уже на первых уроках по математике в 5-6 классах учителю следует рассказать о предметном курсе внеурочной деятельности. Рекомендуется подчеркнуть, что посещать этот курс могут все желающие, а не только те, кто хорошо учится по предмету, рассказать для чего нужен школьникам этот курс, что они узнают нового и чему смогут научиться. В дальнейшем учителю-предметнику необходимо организовать занятия так, чтобы они были для учащихся увлекательными, интересными и занимательными.

Содержание предлагаемого курса внеурочной деятельности должно учитывать возрастные, психологические особенности развития детей. Это обусловливает требование психологической готовности учителя к выстраиванию диалога, например, с математически одарёнными школьниками. Важно помнить о неординарности их творческого мышления, его гибкости, высоком уровне развития логического мышления, прогностических способностях, развитых наблюдательности, воображении, логической и механической памяти. Их отличают высокая работоспособность, самостоятельность, рефлексивность, настойчивость как качества личности. Одним из ведущих подходов при проведении занятий курса является личностно-ориентированный подход.

Базис формирования устойчивого интереса к математике – естественная любознательность школьников 5-6 классов. В этой связи привлекательным для обучающихся будет возможность соучаствовать непосредственно в проведении кружкового занятия: например, это может быть самостоятельная подготовка с последующим выступлением на занятии с тематическим сообщением по вопросам теории, истории математики или выступление-ознакомление других членов кружка с решением нестандартной задачи. Это органично согласуется с необходимостью привлечения школьников при системно-деятельностном подходе (система «Учусь учиться») в активную деятельность по решению математических олимпиадных и конкурсных задач.

Для того, чтобы подготовить учащихся 5-6 классов к участию в МОл, разрабатывать школьные олимпиады, учителю-предметнику необходимо проводить большую серьёзную подготовительную работу, подбирать и решать различные математические задания, более детально изучать отдельные вопросы/разделы математики, знакомиться с новинками математической литературы.

При непосредственной подготовке к занятию учителю как руководителю кружка следует особое внимание обратить на следующее:

– теоретические вопросы, которые планируется рассмотреть на занятии должны быть им хорошо изучены, даже если выступать с ними будет один из членов кружка;

– предварительно проводить оценку с выявлением того, что в содержании занятия, включая задачи, может вызвать трудности у учащихся, что будет интересно;

– необходимо уточнять перечень выносимых на занятие заданий, ещё раз самому прорешать все из них и упорядочить от простых к сложным;

– предпочтение отдавать задачам оригинальным, интересным, современным, проолимпиадным;

– продумывать систему (серию) вспомогательных задач, а также задач, имеющих одну идею решения, но разной трудности. Возможно, на некоторых занятиях предусмотреть использование задач с ошибками, с лишними данными.

Для поддержания интереса к последующим занятиям рекомендуется подбирать задание по новой теме и предлагать его учащимся в конце текущего занятия. Учителю рекомендуется всегда иметь под рукой интересный увлекательный материал по математике, готовый к использованию.

Усилия учителя-предметника должны быть направлены на формирование доброжелательной непринужденной атмосферы сотворчества и ее поддержание на протяжении всех занятий курса. Учащиеся не должны бояться ошибок при решении нестандартных задач, испытывать неуверенность и страх появления новых идей по решению предлагаемого задания. Они должны научиться аргументировать свою позицию. Со стороны учителя оказывается поддержание достигнутого каждым учащимся личного успеха в индивидуальном развитии. При самостоятельном решении нестандартных задач учащийся должен научиться обращаться к своему опыту, применять его и двигаться вперёд.

Школьники должны приобрести опыт поведения в ситуации успеха, уметь признать и справиться с поражением, они с желанием должны заниматься интеллектуальной деятельностью по математике.

Поскольку курс рассчитан на учащихся 5-6 классов и уровень подготовки желающих посещать его может оказаться разным, то рекомендуется для каждого учащегося выстроить индивидуальную образовательную траекторию, которая поможет отслеживать и анализировать достигнутые учащимся успехи. Подчеркнём, что у ученика есть выбор такой траектории. Например, он приходит на занятия, чтобы ему помогли разобраться в решении олимпиадной задачи или узнать, где можно найти ответ на заинтересовавший его вопрос. Учителю следует работать над формированием индивидуальной методической системы подготовки учащихся к участию в МОл.

При организации групповой работы рекомендуется использовать принцип «солёного огурца» (предложен В.Ф. Шаталовым), особое внимание уделять наличию так называемой творческой группы учащихся, поскольку с ее помощью происходит передача опыта участия в МОл, обеспечивается взаимопомощь и психологическая подготовка новых участников.

Учитель-предметник как руководитель кружка должен развивать свою профессиональную компетентность, быть готов ответить на разные вопросы учащихся, в т.ч. информационного характера, например, об особенностях конкретной МОл. Важно, чтобы подготовка на занятиях была целенаправленной и комплексной. Это предполагает не только повтор и систематизацию изученного учебного материал, но и порционное изучение нового материала по решению заданий олимпиадного типа. Причём при разборе и решении таких заданий учителю необходимо знакомить учащихся как с применением типовых

приёмов рассуждений и расчётов, используемых при решении заданий повышенной сложности, а также с нетривиальными приемами, а возможно и разработкой новых алгоритмов. Основное содержание курса раскрывается комбинированным путём, дедуктивным и конкретно-индуктивным, через задачи, поэтому следует включать и подготовительные, и основные, и вспомогательные задачи.

Категорически нельзя допустить, чтобы учащиеся ограничивались использованием одних и тех же шаблонных приёмов. Избежать этого возможно за счет разнообразия предлагаемых типов задач, провоцирования учащихся на поиск более рациональных, нестандартных способов решения. Для этого нужно развивать навыки эвристического мышления. Вместе с тем, требуется научить школьников работать с математическим текстом задания: прежде всего его внимательно и до конца читать. Научить наблюдать, использовать аналогию, индукцию, проводить сравнения, делать выводы.

Подчеркнём, что подбор материала для кружковых занятий, и для МОл, подготовка к проведению этих мероприятий – одна из форм активной работы учителя-предметника по повышению своей научно-методической квалификации. Учителю важно знать особенности структуры задач, относящихся к олимпиадным. Причём подбор заданий к занятиям математического кружка, тем более к олимпиаде требует от самого учителя математики особых приёмов и дополнительных усилий. Ведь руководитель кружка должен тщательно продумать методику работы над каждым предлагаемым им заданием.

Включая олимпиадные задания прошлых лет в содержание занятий предлагаемого курса, в процессе разбора учителю рекомендуется обращать внимание школьников на следующее. При решении любой задачи учащиеся обязаны аккуратно вести записи в тетради. Прежде всего, они должны, внимательно прочтя условие, определить тип задания. Например, содержащееся в условии требование решить задачу предполагает представление чёткого решения с поэтапным кратким комментированием и конечным ответом. В случае задачи на доказательство учащийся должен доказать, полностью обосновать приведённые утверждения, иначе решение может быть не засчитано.

Вообще, можно сказать, что научить членов кружка читать условие задания до конца, понимать формулировки и контексты – одна из первостепенных, ключевых задач учителя-предметника в рамках предлагаемого курса. Ведь, по сути, это половина успешного решения той или иной задачи. Это потребует и усилий, и повышенного постоянного внимания. Так, если надо найти все возможные способы решения, то учащийся должен их искать и представлять в решении. Надо объяснить, что чем больше будет приведено способов решения, тем больше ученик может заработать баллов на реальной олимпиаде. Но при условии, что о таком типе заданий идёт речь!

Следует отрабатывать у обучающихся навык нахождения и применения более рационального способа при решении конкретной задачи. Это часто вызывает негодование: ведь ученик считает, что задача решена – это главное. Сопротивление необходимо преодолевать, воспитывая у учащихся

настойчивость, усидчивость, терпение, которые также им пригодятся в условиях реальной олимпиады. Этому способствует кропотливая работа по нахождению, исправлению и анализу допущенных ошибок, к которой также важно приучить школьников в рамках предлагаемого курса.

Разбирая тип заданий включающих вопрос «Можно ли…?» следует обратить внимание учащихся на достаточность приведения одного положительного примера для ответа «можно». А вот в противном случае – представить все возможные варианты в рамках последовательного доказательства.

В целом разработка предлагаемого курса должна быть направлена на развитие широкого спектра умений и навыков по решению заданий олимпиадного типа, в которых содержатся взаимно обратные операции, требуется перефразирование условия или дополнительные построения, необходимы несколько вариантов решения, используются внепрограммные эвристические приёмы, методы решения и др. Воспитанию алгоритмической культуры школьников будет способствовать практика по определению необходимых знаний, умений, навыков и порядку их использования в решаемой задаче.

Требуется постоянно знакомить обучающихся с новыми, непривычными формулировками олимпиадных заданий, подчёркивая, что нет неправильно сформулированных, а потому нерешаемых задач, все они подготовлены и разработаны компетентными специалистами. А всё непривычное определяет «нестандартности» олимпиадной задачи. Учитель-предметник должен стремиться вырабатывать у учащихся самостоятельность в проведении анализа условия решаемой задачи, научить преодолевать сомнения и принимать решения, выполнять задания при понимании и чёткого следования условию. Кроме того, он должен постоянно побуждать учащихся в случае необходимости включать нестандартное мышление и не бояться применять оригинальный подход, позитивно относиться к выполняемой деятельности. У членов кружка следует развивать психологию лидера, но не допускать звёздной болезни.

В заключение отметим, что в школе желательно иметь стенд, посвященный МОл, на котором будут представлены не только учащиеся-победители, но и информация о деятельности кружка, а также представлены задания постоянно действующей школьной олимпиады. В конце курса обязательно должны быть подведены его итоги: что учащиеся узнали, чему научились, чего достигли. С этой целью целесообразно провести внутреннюю олимпиаду, преимущественно включающую типы заданий, разобранных в течение года на занятиях. Возможно, предложить учащимся несколько задач для решения на летних каникулах. Выполнение задания по желанию. Учитель может также поделиться своими планами по содержанию курса на будущий учебный год и призвать учащихся также подумать над своими предложениями, пожеланиями по этому вопросу.

## 3. Заключение

Таким образом, на современном этапе развития математического образования одна из ведущих функций учителя-предметника заключается в

выявлении и развитии математических способностей каждого учащегося причём не только ограничиваясь рамками урочной деятельности.

Произошедшие существенные изменения в роли и развитии МОл, выявленные в ходе анализа противоречия теории и практики организации внеурочной деятельности по математике заставляют искать новые подходы к совершенствованию методики организации этой деятельности, ориентированной на интегрированную (сочетающую системную и интенсивную) подготовку школьников к участию в МОл. Наиболее слабым звеном в этом процессе выступает этап обучения математике учащихся 5-6 классов. Выходом из сложившейся ситуации, по мнению авторов, может послужить, с учётом предложенных методических рекомендаций, разработка и реализация курса внеурочной деятельности по подготовке учащихся 5-6 классов к принятию участия в МОл.

## Список источников


1. Приказ Министерства просвещения РФ от 27.11.2020г. № 678 «Об утверждении Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников». – Режим доступа: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202103050027.
2. Приказ Министерства просвещения РФ от 31.05.2021г. № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования». – Режим доступа: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027
3. Профессиональный стандарт педагога: Приказ Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18.10.2013, №544н. – Режим доступа: http://fgosvo.ru/uploadfiles/profstandart/01.001.pdf.
4. Гончарова Н.А., Гончарова М.А. Методические рекомендации по организации работы с одарёнными детьми при преподавании учебного предмета «Математика» / Современные проблемы физико-математических наук / Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: научное электронное издание [Электронный ресурс] // под общей редакцией к.ф.-м.н., проф. Т.Н. Можаровой. – Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2022.
5. Гончарова Н.А., Гончарова М.А. Формы организации работы с одарёнными детьми при преподавании учебного предмета «математика»: исследовательская и олимпиадная деятельность школьников / Современные проблемы физико-математических наук / Материалы IX Всероссийской науч.-практ. конф. / [Электронный ресурс] // под общей редакцией к.ф.-м.н., доц. Т.Н. Можаровой. – Орёл: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2023.

## References

1. Order of the Ministry of Education of the Russian Federation No. 678 dated 11/27/2020 "On Approval of the Procedure for holding the All-Russian Olympiad of Schoolchildren". – Access mode: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202103050027.

2. Order of the Ministry of Education of the Russian Federation dated 05/31/2021 No. 287 "On approval of the Federal State educational standard of basic general education". – Access mode: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027 3.

3. Professional standard of a teacher: Order of the Ministry of Labor and Social Protection of the Russian Federation dated 18.10.2013, No. 544n. – Access mode: http://fgosvo.ru/uploadfiles/profstandart/01.001.pdf.

4. Goncharova N.A., Goncharova M.A. Methodological recommendations on the organization of work with gifted children when teaching the subject "Mathematics" / Modern problems of physical and mathematical sciences / Materials of the VIII All-Russian scientific and practical conference with international participation: scientific electronic edition [Electronic resource] // under the general editorship of Ph.D.-m.sc., prof. T.N. Mozharova. – The eagle: I.S. Turgenev OSU, 2022.

5. Goncharova N.A., Goncharova M.A. Forms of organization of work with gifted children when teaching the academic subject "mathematics": research and Olympiad activities of schoolchildren / Modern problems of physical and mathematical sciences / Materials of the IX All-Russian Scientific and Practical Conference / [Electronic resource] // under the general editorship of k.f.-m.sc., associate professor T.N. Mozharova. – The eagle: OSU named after I.S. Turgenev, 2023.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 528-531.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 528-531.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 378.147

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ ДИСЦИПЛИНАМИ «АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» И «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КРИПТОГРАФИИ» НА ОСНОВЕ ГРАФОВ

***Ольга Юрьевна Данилова[1]✉, Светлана Анатольевна Телкова[2]***
*[1,2]Воронежский институт МВД России, Воронеж, Россия*
*[1]danilova_olga@hotmail.com✉, https://orcid.org/0009-0006-2300-0937*
*[2]tsa76@inbox.ru, https://orcid.org/0000-0003-2401-8363*

***Аннотация.*** *При подготовке специалиста в области информационной и компьютерной безопасности изучается дисциплина специализации «Математические основы криптографии», понимание которой необходимо в дальнейшем для профессиональной деятельности. Для лучшего понимания математических основ криптографии необходимы знания в области теории чисел и алгебры. Доказательства корректности построения криптографических алгоритмов базируются на основных теоремах алгебры. Поэтому для построения оптимальной траектории обучения необходимо выявить существенные связи дисциплины специализации «Математические основы криптографии» с базовой дисциплиной «Алгебра и геометрия». Для этого авторами были введены обозначения для основных тем рассматриваемых курсов и построены графы, позволяющие наглядно представить взаимосвязи дисциплин. Следует выстраивать модель обучения дисциплине специализации «Математические основы криптографии» с учетом полученных связей, что позволит более рационально распределить время на изучение различных тем рассматриваемого предмета.*

***Ключевые слова:*** *внутрипредметные связи, межпредметные связи, графовая модель, криптография, алгебра.*

Conference paper

# REPRESENTATION OF CONNECTIONS BETWEEN THE DISCIPLINES "ALGEBRA AND GEOMETRY" AND "MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF CRYPTOGRAPHY" BASED ON GRAPHS

***Olga Yu. Danilova[1]✉, Svetlana A. Telkova[2]***
*[1,2]Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russia*

© Данилова О. Ю., Телкова С. А., 2024

[1]*danilova_olga@hotmail.com*✉*, https://orcid.org/0009-0006-2300-0937*
[2]*tsa76@inbox.ru, https://orcid.org/0000-0003-2401-8363*

***Abstract.*** *When training a specialist in the field of information and computer security, the discipline of specialization "Mathematical foundations of cryptography" is studied, the understanding of which is necessary in the future for professional activity. To better understand the mathematical foundations of cryptography, knowledge in the field of number theory and algebra is necessary. The proofs of the correctness of the construction of cryptographic algorithms are based on the basic theorems of algebra. Therefore, in order to build an optimal learning trajectory, it is necessary to identify significant links between the discipline of specialization "Mathematical Foundations of Cryptography" and the basic discipline "Algebra and Geometry". To do this, the authors introduced designations for the main topics of the courses under consideration and constructed graphs that allow us to visualize the interrelationships of the disciplines. It is necessary to build a model of teaching the discipline of specialization "Mathematical foundations of cryptography" taking into account the obtained connections, which will allow for a more rational allocation of time to study various topics of the subject under consideration.*

***Keywords:*** *intra-subject connections, intersubject connections, graph model, cryptographic algorithms.*

## 1. Введение

Специалист в сфере информационных технологий должен обладать необходимым понятийным аппаратом в области криптографии, что подразумевает под собой знание разнообразных криптографических способов защиты информации [1, 2]. Дисциплина специализации «Математические основы криптографии» как раз и служит тому, чтобы у обучающихся появились компетенции, необходимые для последующей профессиональной деятельности. Данная учебная дисциплина, в свою очередь, базируется на основных теоремах алгебры [3]. Поэтому выявление связей рассматриваемого курса с базовым курсом алгебры и геометрии позволяет понять, на какие темы следует отвести большее количество часов в рабочей программе, что способствует построению оптимального маршрута обучению.

## 2. Основной текст статьи

Авторами были рассмотрены дисциплина специализации «Математические основы криптографии» и базовая дисциплина «Алгебра и геометрия», выделены основные темы предметов и выявлены межпредметные [4] и внутрипредметные связи рассматриваемых курсов. На рисунке 1 на графах показаны выявленные связи между темами дисциплин: а) сильные связи; б) средние связи; в) слабые связи. Здесь АГ1 – АГ8 — темы предмета «Алгебра и геометрия», КР1 – КР10 — темы предмета «Математические основы криптографии» [5].

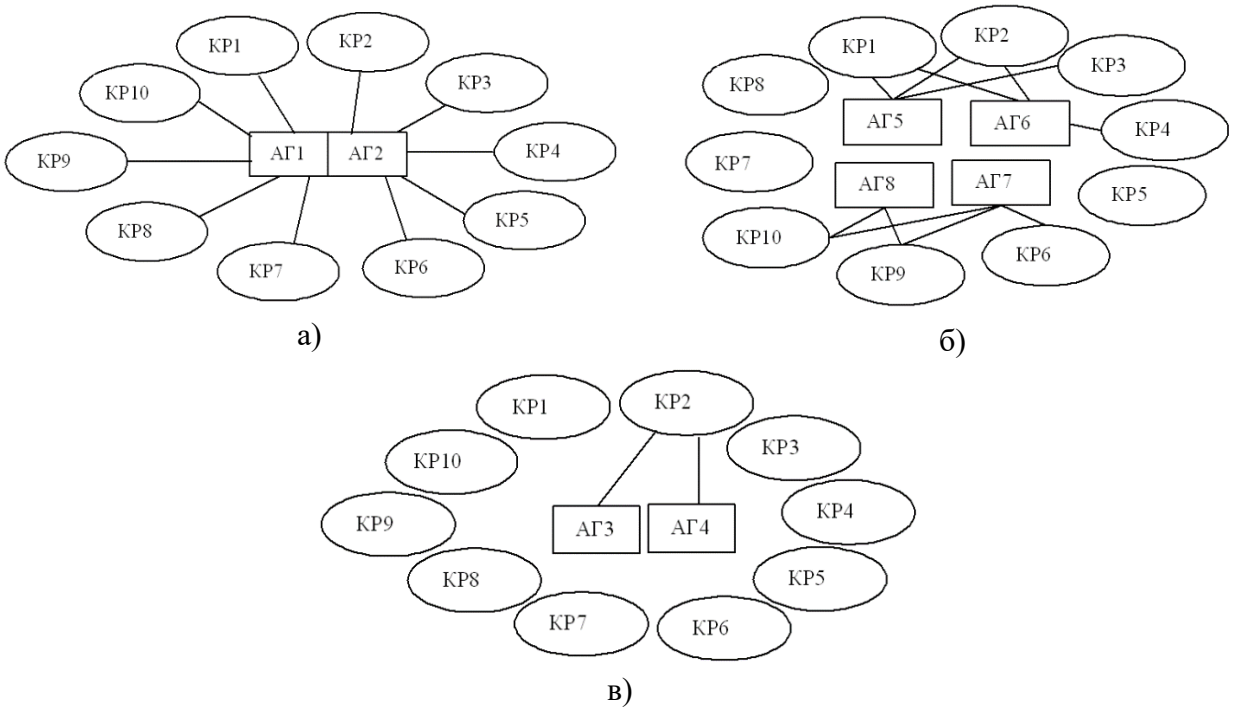



Рисунок 1 — Связи тем предмета «Алгебра и геометрия» с темами предмета «Математические основы криптографии».

## 3. Заключение

На основе выявленных связей между темами рассматриваемых предметов можно сделать вывод о том, что при изучении предмета «Математические основы криптографии» существует ряд основополагающих тем, которые сильнейшим образом связаны с темами предмета «Алгебра и геометрия». Поэтому для построения оптимального маршрута изучения дисциплины специализации темам с наиболее сильными связями следует предусмотреть набольшее часов в рабочей программе и уделить наибольшее внимание.

## Список источников

1. Данилова О.Ю. Математические основы криптографии: учебник / О.Ю. Данилова, В.Н. Думачев // Воронеж: ВИ МВД России, 2017. — 301 с.

2. Данилова О.Ю. Математические основы криптографии [Текст] : практикум / О.Ю. Данилова, В.Н. Думачев // Воронеж: ВИ МВД России, 2019. — 145 с.

3. Думачев В.Н. Алгебра и геометрия: учебник / В.Н. Думачев, В.В. Меньших, С.А. Телкова // Воронеж: ВИ МВД России, 2014. — 431 с.

4. Данилова О.Ю. Реализация межпредметных связей дисциплин «Алгебра и геометрия» и «Математические основы криптографии» в вузах МВД России / О.Ю. Данилова, С.А. Телкова // Вестник Воронежского института высоких технологий, 2018. — №2 (25). — С. 107–111.

5. Данилова О.Ю. Графовое представление межпредметных связей дисциплин «Алгебра и геометрия» и «Математические основы криптографии» / О.Ю. Данилова, С.А. Телкова, Т.В. Ларина // Известия Воронежского государственного педагогического университета, 2023. — №3 (300). — С. 28–33.

## References

1. Danilova O. Yu. Mathematical foundations of cryptography: textbook / O.Yu. Danilova, V.N. Dumachev // Voronezh: VI MVD Rossii, 2017. — 301 p. (In Russ.).

2. Danilova O. Yu. Mathematical foundations of cryptography [Text]: practical work / O.Yu. Danilova, V.N. Dumachev // Voronezh: VI MVD Rossii, 2019. — 145 p. (In Russ.).

3. Dumachev V. N. Algebra and geometry: textbook / V.N. Dumachev, V.V. Men'shikh, S.A. Telkova // Voronezh: VI MVD Rossii, 2014. — 431 p. (In Russ.).

4. Danilova O. Yu. Realization of intersubject communications of the disciplines "Algebra and Geometry" and "Mathematical Foundations of Cryptography" in the universities of the Ministry of Internal Affairs of Russia / O.Yu. Danilova, S.A. Telkova // Vestnik Voronezhskogo instituta vysokikh tekhnologiy, 2018. — №2 (25). — Pp. 107–111. (In Russ.).

5. Danilova O. Yu. Graph representation of interdisciplinary connections of the disciplines "Algebra and geometry" and "Mathematical foundations of cryptography"/ O.Yu. Danilova, S.A. Telkova, T.V. Larina // Proceedings of the Voronezh State Pedagogical University, 2023. — №3 (300). — Pp. 28-33. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 532-535.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 532-535.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.851

# ФОРМИРОВАНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ НАВЫКОВ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ

***Лариса Николаевна Зубкова***[1]✉
[1]*Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
[1]*ZubkovaLN@yandex.ru*✉

***Аннотация.*** *В статье рассматриваются отдельные вопросы формирования конструктивных навыков школьников при изучении курса стереометрии.*

***Ключевые слова:*** *изображение пространственной фигуры, построение сечения, конструктивное доказательство.*

Conference paper

# FORMATION OF CONSTRUCTIVE SKILLS OF SCHOOLCHILDREN WHILE STUDYING THE COURSE OF STEREOMETRY

***Larisa N. Zubkova***[1]✉
[1]*Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
[1]*ZubkovaLN@yandex.ru*✉

***Annotation.*** *The article discusses some issues of the formation of constructive skills of schoolchildren when studying the course of stereometry.*

***Keywords:*** *image of a spatial figure, construction of a section, constructive proof.*

## 1. Введение

Стереометрия является традиционным разделом курса математики старшей школы, а стереометрические задачи прочно вошли в контрольно-измерительные материалы ЕГЭ по математике базового и профильного уровней. Практика показывает, что достаточно трудно дается школьникам изучение стереометрического материала. По информации аналитических отчетов по результатам ЕГЭ можно заметить, что небольшое число школьников берутся решать стереометрические задачи части с развернутым ответом экзамена по математике профильного уровня, и еще меньшее число школьников успешно с

© Зубкова Л. Н., 2024

ними справляются. Трудности вызывает правильное изображение на чертеже пространственных фигур, их сечений или отдельных элементов фигуры, «участвующих» в решении задачи. Даже в тестовой части ЕГЭ по математике стереометрическая задача предложена, как правило, с чертежом или эскизом пространственной фигуры и строить изображение не нужно. Конечно, объективно сложно перенести трехмерную конструкцию на плоскость, требуется хорошее пространственное воображение. С другой стороны, школьникам не хватает опыта, недостаточно сформированы базовые навыки построения пространственных фигур, их сечений. Могли бы помочь знания из курса черчения, но далеко не каждый школьник с этим курсом знаком. Как устранить разрыв между реальной практикой среднего школьника в области геометрических построений и необходимостью выполнять построения на чертеже пространственной фигуры при освоении курса стереометрии?

Для успешного освоения курса стереометрии необходимо уметь изображать пространственную фигуру, строить её сечение некоторой плоскостью, определять положение перпендикуляров, длины которых определяют заданные или искомые расстояния, другие элементы фигуры. Даже для решения достаточно простых задач по стереометрии необходимы базовые конструктивные навыки и умения. Именно о них, о некоторых приемах их формирования и отдельных особенностях построения методики обучения началам стереометрии и пойдет речь.

Представим ряд методических положений, которые на наш взгляд, помогут учителю выстроить технологию формирования конструктивных навыков школьников в процессе обучения стереометрии.

## 2. Основной текст статьи

Рассматривая основные принципы построения методики обучения геометрическим построениям, в том числе построению сечений, изображению пространственных фигур в курсе стереометрии, отметим, что такое обучение должно строиться в рамках школьного курса математики, в соответствии с целями обучения этому предмету. В такой концепции мы не просто знакомим школьников с системой математики, с её разделами и идеями, а рассматриваем изучение предмета как средство всестороннего развития личности школьника, как метод познания им действительности, как инструмент, который может быть применен в других науках. Важно, чтобы школьник изучал «имеющую богатые связи» математику.

К содержательным линиям в рамках рассматриваемого вопроса следует отнести параллельное и ортогональное проектирование фигур на плоскость, построение сечений пространственных фигур, конструктивное доказательство теорем существования.

При изображении многогранников и тел вращения на плоскости целесообразно познакомить учащихся с рядом правил, основанных на свойствах параллельного проектирования. Так, элементами любого многогранника являются вершины, ребра и грани, то есть точки, отрезки и многоугольники. В свою очередь, стороны многоугольника – тоже отрезки, то есть части прямых,

поэтому важно выделить правила проектирования прямых и их частей – отрезков. Эти правила необходимо зафиксировать с учениками, например, в следующем виде:

– проекция прямой есть прямая;
– проекция отрезка есть отрезок;
– проекции параллельных отрезков есть параллельные отрезки;
– проекции параллельных отрезков пропорциональны самим отрезкам.

Также целесообразно сформулировать вместе с учащимися правила изображения основных планиметрических фигур (треугольников, параллелограммов, трапеций, окружностей), которые являются элементами многогранников и тел вращения. Такие правила также полезно зафиксировать с учениками в следующем виде:

– на чертеже любой треугольник (произвольный, правильный, равнобедренный, прямоугольный) изображается произвольным треугольником;
– на чертеже любой параллелограмм (в том числе ромб, прямоугольник, квадрат) изображается произвольным параллелограммом;
– на чертеже любая трапеция изображается трапецией с основаниями пропорциональными основаниям трапеции-оригинала;
– на чертеже любая окружность изображается эллипсом.

Использование ортогональной или прямоугольной проекции целесообразно при решении задач, когда есть необходимость рассмотреть часть сложного чертежа, например, фигуру, полученную в сечении пространственного тела плоскостью.

Построение сечения многогранника является еще одной задачей, вызывающей трудности у учащихся. Для формирования конструктивных навыков учеников, необходимых для её решения, важно обосновать и зафиксировать ряд следующих теоретических положений:

– сечение многогранника плоскостью есть многоугольник, вершины которого находятся на ребрах данного многогранника;
– в сечении многогранника плоскостью может получиться многоугольник, число сторон которого не превышает числа граней многогранника;
– секущая плоскость пересекает параллельные грани многогранника по отрезкам, принадлежащим параллельным прямым;
– если две точки секущей плоскости лежат в одной грани многогранника, то определена прямая пересечения секущей плоскости с этой гранью.

Для формирования навыков построения сечений ученикам необходимо научиться решать базовые опорные конструктивные задачи. В качестве базовых целесообразно рассматривать задачи в два-три шага решения с непосредственной опорой на теоретический факт, закрепленный в теореме или в определении. К ним можно отнести, например, такие задачи:

– построить точку пересечения прямой $m$, лежащей в грани $SAB$ тетраэдра $SABC$, с плоскостью смежной грани $CAB$;

– построить прямую пересечения секущей плоскости *KLM* с гранью *ABC* тетраэдра *SABC*, если *K* и *M* – точки на ребрах *SB* и *SC* соответственно, *L*-точка грани *ABC*.

В первой из приведенных задач грани *SAB* и *CAB* имеют общее ребро *AB*. Прямые *m* и *AB*, находясь в одной плоскости *SAB*, могут быть параллельными или пересекаться. Если *m* и *AB* параллельны, то общих точек у них нет, значит, нет общих точек у прямой *m* и плоскости *CAB*, в которой лежит прямая *AB*. Прямая *m* и плоскость *CAB* параллельны по признаку параллельности прямой и плоскости. Если же *m* и *AB* пересекаются в некоторой точке, то эта точка и будет искомой, поскольку она принадлежит прямой *AB*, а следовательно, и плоскости *CAB*.

Круг опорных задач должен формироваться учителем в зависимости от условий, в которых происходит обучение стереометрии (число часов на изучение, уровень подготовки и возможности учеников).

Отметим еще одну важную особенность задач, связанных с конструктивными действиями, будь то построение чертежа фигуры, построение сечения, построение перпендикулярной прямой к плоскости и т.п. Решение каждой такой задачи правильно сопровождать обоснованием каждого шага построения некоторым теоретическим положением курса. Более того, доказательство части теорем начал стереометрии носит конструктивный характер. Это относится к теоремам существования геометрических объектов. Например, доказательство существования плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые, сводится к последовательности обоснованных шагов построения этой плоскости.

## 3. Заключение

Итак, обучая школьников решению стереометрических задач, важно формировать у них конструктивные навыки построения изображения фигур, навыки конструктивного доказательства теорем существования геометрических фигур, навыки построения сечений пространственных фигур. Для успешного овладения школьников конструктивными навыками необходимо формирование знаний свойств параллельного проектирования и правил изображения на чертеже основных фигур при параллельном проектировании, решение базового набора опорных задач на построение, в том числе задач на доказательство существования фигуры с заданными свойствами, задач на построение сечений многогранников.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 536-545.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 536-545.

Статья в сборнике трудов конференции

# РОЛЬ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ КОМПЕТЕНТНОСТНОГО ПОДХОДА В ИНЖЕНЕРНОМ ОБРАЗОВАНИИ

***Антон Владимирович Кокорев[1]✉, Ирина Ивановна Чернобровкина[2], Елена Владимировна Кокорева[3]***
*[1]Академия ФСО России, Орёл, Россия*
*[2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[3]МБОУ СОШ №27 им. Л.С. Лескова, Орёл, Россия*
*[1]pears911@mail.ru✉, [2]iichernobrovkina@yandex.ru, [3]kokoreva-6464@mail.ru*

***Аннотация.*** *Аналитическое мышление в профессиональной деятельности дает целый ряд преимуществ, которые способствуют успешности и эффективности в работе инженера. Компетентностный подход в обучении использует фундаментальную и прикладную математику для развития аналитическое мышление через конкретные методы и подходы, которые помогают формировать систематический и логически обоснованный взгляд на разнообразные технические задачи и способы их решения.*

***Ключевые слова:*** *аналитическое мышление, профессиональные компетенции, математика, прикладная математика.*

Conference paper

# THE ROLE OF ANALYTICAL THINKING IN THE CONTEXT OF A COMPETENCE-BASED APPROACH IN ENGINEERING EDUCATION

***Anton V. Kokorev[1]✉, Irina I. Chernobrovkina[2], Elena V. Kokoreva[3]***
*[1]Federal Guard Service Academy of the Russian Federation, Orel, Russia*
*[2]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[3]МБОУ СОШ №27 им. Л.С. Лескова, Orel, Russia*
*[1]pears911@mail.ru✉, [2]iichernobrovkina@yandex.ru, [3]kokoreva-6464@mail.ru*

***Abstract.*** *Analytical thinking in professional activity provides a number of advantages that contribute to success and efficiency in the work of an engineer. The competence-based approach in teaching uses fundamental and applied mathematics to develop analytical thinking through specific methods and approaches that help to form*

© Кокорев А. В., Чернобровкина И. И., Кокорева Е. В., 2024

*a systematic and logically sound view of a variety of technical problems and ways to solve them.*

***Keywords:*** *analytical thinking, professional competencies, mathematics, applied mathematics.*

## 1. Введение

Аналитическое мышление в инженерной деятельности имеет огромное значение, поскольку оно позволяет эффективно решать сложные технические и прикладные задачи. В современных условиях инженер должен не только разбираться в технических аспектах своей работы, но и обладать развитыми навыками анализа, системного мышления и оптимизации решений.

В условиях компетентностного подхода в инженерном образовании аналитическое мышление стало основой, необходимой для успешной подготовки будущих специалистов. Данный подход ориентирован на практическое применение знаний, формирование навыков и умений, позволяющих выпускникам быстро адаптироваться к профессиональной среде.

Аналитическое мышление в инженерном образовании формирует у выпускников ключевые навыки, которые делают их не только компетентными специалистами, но и эффективными практиками, способными адаптироваться к изменениям. Оно способствует структурированно и логически обрабатывать информацию, находить взаимосвязи, систематизировать данные и решать сложные задачи, а также включает в себя умение делить информацию на составляющие, анализировать их по отдельности и в комплексе, делать выводы и прогнозировать возможные исходы.

## 2. Основной текст статьи

Аналитическое мышление является ключевым навыком в современных профессиях, требующих решения сложных задач и работы с большими объемами данных. Регулярная практика и использование различных техник анализа информации помогут не только улучшить способность к логическому мышлению, но и научат быстрее находить оптимальные пути решения любых задач. Поэтому оно играет ключевую роль в инженерном образовании, особенно в рамках компетентностного подхода, который ориентирован на развитие профессионально значимых навыков и умений. Компетентностный подход требует от студентов не просто запоминания информации, но и умения применять знания на практике, решать реальные инженерные задачи, адаптироваться к новым ситуациям и эффективно взаимодействовать в команде.

Аналитическое мышление включает в себя навыки:

1. логического мышления,
2. критического мышления,
3. анализа и синтеза,
4. прогнозирования и моделирования,
5. систематизации информации,
6. формулировки и проверки гипотез.

Они помогают видеть структуру проблемы, предлагать логичные и эффективные решения, а также прогнозировать последствия своих решений.

Многие исследователи в области психологии, педагогики и когнитивных наук внесли значительный вклад в понимание процессов, способствующих развитию аналитического мышления. Одним из самых известных зарубежных представителей является Ж. Пиаже — швейцарский психолог, изучавший когнитивное развитие детей [6]. Его теория когнитивных стадий описывает, как развиваются логическое и аналитическое мышление у детей. Ж. Пиаже рассматривал аналитическое мышление как часть более широкой структуры логического мышления, развивающегося в ходе перехода к формально-операциональной стадии. Д. Брунер [2] предложил концепцию "открытия" в обучении, которая предполагает активное участие учащегося в процессе обучения. Д. Брунер подчеркивал, что аналитическое мышление развивается через самостоятельное исследование, формулирование гипотез и их проверку. Р. Стернберг [7] разработал теорию "триархического интеллекта" включает компонент аналитического интеллекта, который отвечает за анализ, оценку и решение задач. Стернберг полагал, что развитие аналитического мышления способствует обучение решению реальных проблем. Д. Клустер и Э. де Боно [1] исследовали развитие креативного и критического мышления, которые тесно связаны с аналитическим мышлением. Де Боно, в частности, разработал методику "шести шляп мышления", которая помогает развивать умение структурировать информацию и рассматривать задачи с разных сторон, что является важной частью аналитического мышления. Блум [9] считал, что аналитическое мышление — это способность к разложению информации на составляющие и выявлению связей между ними. Г. Гарднер разработал теорию множественного интеллекта, в которой логико-математический интеллект включает навыки аналитического мышления. Г. Гарднер указывал, что люди обладают разными типами интеллекта, и аналитическое мышление более выражено у людей с сильным логико-математическим интеллектом.

Среди российских учёных, изучавших развитие аналитического мышления, особенно выделяется Л. С. Выготский [3]. Он внёс значительный вклад в понимание того, как развиваются мышление и познавательные способности человека, включая аналитическое мышление. Л. Выготский исследовал роль социального окружения и взаимодействия в развитии мышления и разработал теорию социального и культурного развития когнитивных процессов. Он ввел концепцию "зоны ближайшего развития", подчеркивая, что аналитическое мышление развивается в процессе обучения и взаимодействия с более опытными людьми, будь то учителя, родители или сверстники.

Кроме того, Выготский выделял роль речи и языка в развитии мышления. По его мнению, языковые инструменты помогают детям структурировать мысли, анализировать ситуации и лучше понимать причинно-следственные связи.

Помимо Л. Выготского, развитием мышления, в том числе аналитического, занимались и другие российские исследователи. А. Н. Леонтьев является основателем деятельностного подхода в психологии [5]. Он рассматривал

мышление как продукт деятельности, развивающийся в процессе решения практических задач. Леонтьев изучал, как аналитические способности развиваются через активное участие в различных видах деятельности. П. Я. Гальперин создал теорию поэтапного формирования умственных действий [4]. Он разработал методику постепенного развития аналитического мышления через поэтапное выполнение действий, начиная от внешних, практических действий и заканчивая внутренними, умственными операциями. Д. Б. Эльконин занимался изучением когнитивного развития детей [8]. Эльконин считал, что аналитическое мышление можно развивать в процессе игры, где дети учатся анализировать ситуации, строить причинно-следственные связи и решать задачи. Давыдов считал, что обучение должно строиться таким образом, чтобы у школьников развивались теоретические и абстрактные формы мышления, что является основой для аналитического мышления. Н. А. Менчинская исследовала вопросы интеллектуального развития и закономерности усвоения знаний. Она занималась изучением интеллектуальных способностей и формированием мыслительных процессов, среди которых важное место отводится аналитическому мышлению. А. Р. Лурия изучал, как различные зоны мозга способствуют формированию аналитического мышления. Он выявил, как различные когнитивные функции (память, внимание, восприятие) взаимодействуют, обеспечивая аналитическую деятельность. Лурия показал, что аналитическое мышление связано с работой лобных долей мозга. С. Л. Рубинштейн разработал основные принципы методологии психологии, среди которых анализ выступает как один из ключевых методов. Рубинштейн утверждал, что мышление и аналитические способности формируются в процессе решения практических задач.

Анализ, логика и критическое мышление в профессиональной деятельности играют ключевую роль. Аналитическое мышление в инженерии имеет ключевое значение при проектировании и оптимизации, анализе и обработке данных, принятии решений, инновациях и исследовательской деятельности, междисциплинарном подходе, моделировании, повышении эффективности управления ресурсами, адаптации к изменениям, критической оценки информации и др. Таким образом, аналитическое мышление способствуют более глубокой, осознанной и качественной работе инженера.

История развития аналитического мышления в математике охватывает долгий процесс становления аналитических методов, начиная с древности и до наших дней. Основными этапами являются:

1. В Древнем мире (Древний Египет, Вавилон, Индия и Китай) были заложены базовые арифметические операции, геометрия и решение простых уравнений. Эти знания служили для решения практических задач – измерения земли, строительства и астрономии.

2. В Древней Греции математика начала приобретать черты абстрактной науки. Евклид систематизировал знания о геометрии в труде "Начала", Архимед разработал методы для вычисления площадей и объемов, приближаясь к понятию интеграла. Греческие математики стремились не просто решать задачи, а формулировать общие принципы и применять логические рассуждения.

3. Развитие алгебры и числообразных систем в Средневековом Востоке и арабском мире позволило математикам строить более сложные аналитические модели и использовать алгебраические методы для решения уравнений.

4. Математика начинает развиваться в Европе в эпоху Возрождения и Нового Время. Этому способствовало развитие науки и техники. Например, работы Ф. Виета, Р. Декарта и Ферма.

5. Активное становление анализа началось в XVII в. И. Ньютон и Г. Лейбниц создали математический, что стало мощным инструментом для анализа непрерывных процессов, таких как движение, рост и изменение. Это стало важным этапом в развитии аналитического мышления, так как позволило решать сложные задачи динамики и физики.

6. В XVIII в.: Лагранж, Эйлер и другие математики усовершенствовали методы математического анализа и начали изучать ряды, дифференциальные уравнения и теорию функций. Работы в области механики, гидродинамики и астрономии позволили математикам анализировать физические процессы и делать точные предсказания.

7. IXX в. характеризуется появлением теории множеств и абстрактной алгебры. Г. Кантор заложил основы теории множеств, которая привела к дальнейшему развитию математики в абстрактной и аналитической форме.

8. Начало 20-го века: аксиоматизация и логический анализ. Д. Гильберт предприняли попытки аксиоматизировать всю математику.

9. Развитие вычислительной математики и численных методов: В середине и второй половине 20-го века, с развитием компьютеров, акцент в аналитическом мышлении стал смещаться в сторону численных методов и вычислительной математики.

10. Математическое моделирование и прикладной анализ: в последние десятилетия аналитическое мышление активно применяется в области математического моделирования.

11. Теория оптимизация: В XX в. также активно развивались теория оптимизации. Теория оптимизации, особенно линейное программирование, стало важным инструментом в экономике, логистике, управлении и других сферах, где требуется максимизировать или минимизировать различные показатели.

12. Теория хаоса и нелинейная динамика: в конце 20 века большое значение приобрела теория хаоса и нелинейные системы, благодаря которым аналитическое мышление стало применяться для понимания сложных, нелинейных процессов, например, в погодных моделях, экологии и биологии.

13. В XXI в. аналитическое мышление развивается в новых направлениях, связанных с обработкой и анализом больших данных, машинным обучением и искусственным интеллектом.

Сегодня аналитическое мышление также активно изучается в контексте новых технологий и цифровых образовательных сред, где рассматриваются когнитивные стратегии, подходы к обучению и влияния цифровых инструментов на развитие мышления. История развития аналитического мышления в математике отражает постепенный переход от решения конкретных задач к

созданию универсальных методов и абстрактных структур. Этот процесс привел к формированию аналитического подхода, который лежит в основе современной науки и позволяет находить решения для широкого спектра задач.

Сегодня особенно актуальным, в связи с изменениями, происходящими в образовании, встает вопрос о формировании и развитии профессиональных компетенций. Анализируя предыдущие этапы развития общества, а также возрастающую потребность в новых квалифицированных инженерных кадрах, можно прийти к выводу, что аналитическое мышление является основой при формировании профессиональных компетенций. Разработаны множество различных подходов в методике обучения математики, которые позволяет развивать аналитическое мышление. Приведем некоторые из них:

1. Решение математических задач, начиная с простых задач по арифметике, алгебре, геометрии, постепенно переходя к более сложным темам, как теория вероятностей и математический анализ.

2. Логика лежит в основе аналитического мышления. Изучение логики помогает развивать навыки рассуждения, анализа и структурирования информации.

3. Решение уравнений и неравенств требует способности находить связи между разными частями задачи, структурировать решения и выбирать подходящие методы.

4. Математическое моделирование реальных процессов в виде математических задач помогает развивать способность к абстракции и выделению главных факторов в задачах.

5. Изучение геометрии и анализа фигур требует работы с пространственным мышлением и анализа свойств фигур.

6. Решение задач на вероятность и статистику учит принимать решения в условиях неопределенности и прогнозировать результаты, что полезно для развития критического мышления и умения работать с данными.

7. Понимание и решение дифференциальных уравнений, которые описывают процессы изменения, поэтому их решение развивает навыки анализа динамических систем и моделирования.

8. Занятия по теории графов и анализу сетей помогают анализировать связи и развивает структурированное мышление.

9. Разбор математических доказательств способствует развитию строгой логике и критическому анализу, вниманию к деталям и последовательности рассуждений.

10. Использование численных методов решения уравнений и анализа данных развивает навыки алгоритмического мышления и учат оценивать точность полученных результатов.

11. Решение нестандартных задач, требующие нестандартного подхода, гибкого аналитического и креативного мышления.

12. Использование программ MATLAB, Wolfram Mathematica и Python. Программы помогает освоить методы анализа данных, автоматизации расчетов и моделирования, что важно для современных аналитических задач.

Освоение этих методов помогает лучше понимать математические концепции, расширяет спектр аналитических подходов и формирует устойчивое аналитическое мышление, применимое в будущей профессиональной деятельности.

Введение отдельной дисциплины «Прикладная математика» также поможет развивать аналитическое мышление необходимое будущему инженеру. Представим несколько способов.

1. Моделирование и абстрагирование реальных ситуаций в математические модели. Умение видеть ключевые параметры и преобразовывать их в математические формулы развивает способность к анализу, структурированию и обобщению информации.
2. Развитие логического мышление при решении задач требует строгой логической последовательности, соблюдения правил и точности вычислений.
3. Интерпретация результатов развивает умение анализировать результаты, критически оценивать их применимость и делать выводы, которые можно использовать на практике.
4. Критический анализ формируется при работе с математическими моделями, так как требует критического отношения к данным, выявления погрешностей и ошибок.
5. Прикладная математика учит анализировать (разбирать) сложные задачи на более простые.
6. Формирование навыков оптимизации часто требуется при нахождении наилучшее решение среди множества возможных.
7. Прикладная математика тесно связана с алгоритмическим мышлением, так как многие задачи требуют четко структурированных шагов для их решения. Это важно в сфере IT и программирования, где нужно разрабатывать алгоритмы для обработки данных, автоматизации процессов и оптимизации рабочих процессов.
8. В прикладной математике требуется применение численных методов решения сложных уравнений, которые невозможно решить аналитически. Это развивает навыки анализа точности и приближенных расчетов.
9. Работа с дифференциальными уравнениями описывающие процессы изменения. Решение этих уравнений помогает понимать поведение динамических систем и прогнозировать их эволюцию во времени.
10. Изучение теории вероятностей и статистики: Задачи на оценку вероятностей важны для анализа данных, прогнозирования и принятия решений в условиях неопределенности и учат работать с данными и находить закономерности, что крайне важно в инженерии.
11. Изучение методов регрессии, кластеризации и анализа больших данных помогает развивать аналитическое мышление, позволяя находить закономерности в больших массивах данных и принимать решения на основе статистических моделей.
12. Использование компьютерных симуляций для моделирования реальных процессов учит анализировать изменения параметров, оценивать результаты, что усиливает аналитическое мышление.

13. Работа в междисциплинарных проектах, где необходимо использовать математические методы для анализа задач из разных областей, развивает способность понимать связи между теориями и применять аналитическое мышление в разных областях.

14. Практика решения задач на реальных данных учит применять математические методы для анализа и интерпретации информации. Это позволяет увидеть, как математические модели помогают принимать обоснованные решения в реальном мире.

В итоге, прикладная математика создает базу для развития всестороннего аналитического мышления, которое помогает решать профессиональные задачи. Наравне с математикой, это делает её важным инструментом для формирования и развития профессиональных компетенций.

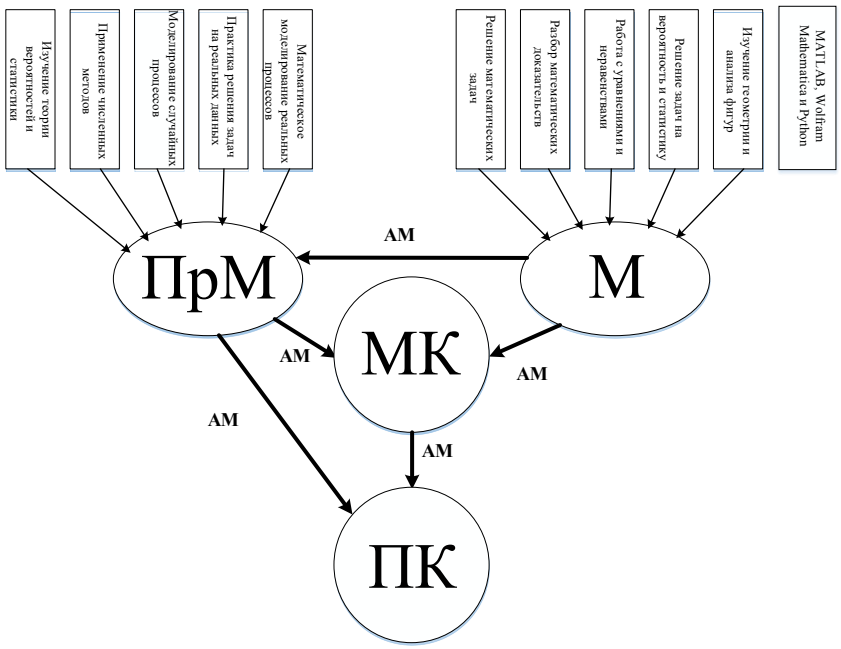



Рис. 1 Структура формирования и развития аналитического мышление.

Таким образом, развитие аналитического мышления с помощью математических дисциплин стало сложным и многогранным процессом, который эволюционировал от простых вычислений и геометрических построений к глубоким абстрактным теориям, моделированию сложных процессов и анализу больших данных. Сегодня аналитическое мышление в математике продолжает развиваться, интегрируясь с другими науками и помогая решать актуальные проблемы в самых разных областях.

Компетентностный подход, фокусируясь на практическом применении знаний и формировании умений, необходимых для решения реальных задач, также подчеркивает важность аналитических навыков для создания технически обоснованных решений и их успешного внедрения на практике. Аналитическое мышление выступает как одна из ключевых компетенций, позволяя эффективно работать с информацией, выявлять и решать проблемы.

## 3. Заключение

Аналитическое мышление в условиях компетентностного подхода является основой для формирования универсальных и профессиональных навыков, которые позволяют выпускникам успешно адаптироваться к требованиям рынка труда. Благодаря развитию аналитического мышления студенты учатся не просто накапливать знания, а критически мыслить, решать проблемы, работать с данными и постоянно улучшать свои умения, что делает их востребованными и конкурентоспособными специалистами.

## Список источников


1. Боно, Э. Шесть шляп мышления / Пер. с англ. – Мн.: Поппури, 2006. – 208 с.
2. Брунер, Дж. Процесс обучения / Д.С. Брунер ; Перевод с англ. О.К. Тихомирова ; Под ред. действ. чл. АПН РСФСР проф. А.Р. Лурия. - М. : Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1962. - 84 с.
3. Выготский, Л. С. Педагогическая психология / Л. С. Выготский ; ред. В. В. Давыдов. Москва : Педагогика, 1991. 480 с.
4. Гальперин, П. Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий // Исследования мышления в современной психологии. - М.: Наука, 1966.
5. Леонтьев, А. Н. Деятельность. Сознание. Личность М.: Издательство Республика, 1977.
6. Садовский, В. Н., Юдин, Э. Г. Ж. Пиаже — психолог, логик, философ // Вопросы психологии. 1966. № 4.
7. Стернберг, Р. Практический интеллект / Роберт Дж. Стернберг, Джордж Б. Форсайт, Дженнифер Хедланд [и др.]; [Под общ. ред. Роберта Стернберга.]. - СПб. : Питер, 2002. - 265 с.
8. Эльконин, Д. Б. Избранные психологические труды. — М.: Педагогика, 1989. 560 с.
9. A Committee of College and University Examiners. Taxonomy of educational objectives. The Classification of Educational Goals. HANDBOOK 1 Cognitive domain / ed. Benjamin S. Bloom et al. LONGMANS, 1956.


## References


1. Bono, E. Six hats of thinking / Translated from English – Mn.: Poppuri, 2006. - 208 p.
2. Bruner, J. The learning process / D.S. Bruner ; Translated from English by O.K. Tikhomirov ; Edited by the acting member of the APN of the RSFSR prof. A.R. Luria. - M. : Publishing house of the Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR, 1962. - 84 p.
3. Vygotsky, L. S. Pedagogical psychology / L. S. Vygotsky; ed. by V. V. Davydov. Moscow : Pedagogika, 1991. 480 p.

4. Galperin, P. Ya. Psychology of thinking and the doctrine of the gradual formation of mental actions // Studies of thinking in modern psychology. - M.: Nauka, 1966.

5. Leontiev, A. N. Activity. Conscience. Personality M.: Publishing House Republic, 1977.

6. Sadovsky, V. N., Yudin, E. G. J. Piaget — psychologist, logician, philosopher // Questions of psychology. 1966. № 4.

7. Sternberg, R. Practical intelligence / Robert J. Sternberg, George B. Forsyth, Jennifer Hedland [et al.]; [Ed. Robert Sternberg.]. - St. Petersburg : St. Petersburg, 2002. - 265 p.

8. Elkonin, D. B. Selected psychological works. — M.: Pedagogy, 1989. 560 p.

9. A committee consisting of college and university examiners. The taxonomy of educational goals. Classification of educational goals. HANDBOOK 1. Cognitive field / ed. Benjamin S. Bloom and others LONGMANS, 1956.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 546-555.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 546-555.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.851+37.031.1

# ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ АКТИВНОСТИ УЧАЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДСТВ НАГЛЯДНОСТИ

***Наталья Николаевна Костикова***[1]✉
[1]*Коровье-Болотовская средняя общеобразовательная школа, Орёл, Россия*
[1]*natalya-kostikova@mail.ru*✉

***Аннотация.*** *Статья посвящена актуальной в настоящее время проблеме формирования познавательной активности учащихся на уроках математики. В статье акцентируется внимание на важности использования средств наглядности при обучении математике с целью повышения познавательного интереса учащихся, формирования прочных представлений о дробях, более осмысленных знаний и умений. Определяется содержание понятий «доля», «обыкновенная дробь», приводятся примеры использования средств наглядности при изучении действий над дробями и решении задач. В результате исследования определено, что использование средств наглядности способствует более четкому и правильному усвоению понятия дроби, осознанному выполнению действий при решении задач.*

***Ключевые слова:*** *познавательная активность, средства наглядности, обыкновенные дроби, обучение решению задач, мотивация.*

Conference paper

# FORMATION OF COGNITIVE ACTIVITY OF STUDENTS WHEN STUDYING THE TOPIC «ORDINARY FRACTIONS» USING VISUAL AIDS

***Natalya N. Kostikova***[1]✉
[1]*Korovye-Bolotovskaya secondary school, Orel, Russia*
[1]*natalya-kostikova@mail.ru*✉

***Abstract.*** *The article is devoted to the currently relevant problem of the formation of cognitive activity of students in mathematics lessons. The article focuses on the importance of using visual aids in teaching mathematics in order to increase the cognitive interest of students, form strong ideas about fractions, and more meaningful knowledge and skills. The content of the concepts "fraction", "ordinary*

© Костикова Н. Н., 2024

*fraction" is determined, examples of the use of visual aids in the study of actions on fractions and problem solving are given. As a result of the study, it was determined that the use of visual aids contributes to a clearer and more correct assimilation of the concept of fractions, conscious performance of actions in solving problems.*

***Keywords:*** *cognitive activity, visual aids, ordinary fractions, problem solving training, motivation.*

## 1. Введение

Дроби находят большое практическое применение в повседневной жизни, поэтому проблема четкого и правильного усвоения понятия дроби, свойств и действий над дробями является важной и актуальной в данный момент.

Учащиеся знакомятся с множеством рациональных чисел в начальной школе, рассматривая доли. Здесь у учащихся создается конкретное представление о долях как о частях целого, это предусмотрено программой с целью подготовки учащихся к изучению дробей. Мотивацию их введения можно связать с невозможностью использования на практике только целых чисел, для примера можно привести измерение длины, веса. В связи с этим целесообразно познакомить учащихся с возникновением дробных чисел в процессе практической деятельности человека, т.е. рассмотреть дробь, как результат измерения, результат деления целого на равные части, частное от деления целого числа на другое натуральное число.

Знакомство школьников с долями предполагает формирование конкретных представлений о долях, в результате чего учащиеся должны научиться образовывать доли практически и понимать их смысл. Затем понятие дроби расширяется и углубляется в 5-6 классах, где изучаются свойства дробей и правила действий с ними. На этом тема «Дроби» не заканчивает свое применение. Большое количество материала средней школы излагается на основе данной темы. И нередко случается так, что при выполнении действий с дробями возникают трудности не только у учащихся 5-6 классов, которые только приступили к изучению данных понятий, но даже у старшеклассников и студентов. Это связано с недостаточным или неправильным пониманием самого понятия дробей и долей, в следствие чего, все выполняемые с дробями действия носят лишь алгоритмический характер. Учащиеся не понимают, почему выполняются те или иные действия, и поэтому не запоминают правила, методику решения задачи. Многие из возникающих трудностей можно предупредить, если использовать в процессе изучения обыкновенных дробей особые методические приёмы, которые помогут сформировать у обучающихся более полные и осмысленные знания и умения.

## 2. Основной текст статьи

Для формирования правильных представлений о дробях необходимо использовать достаточное количество разнообразных наглядных моделей. Наиболее удобными моделями являются геометрические фигуры (круг, квадрат, прямоугольник, отрезок и т.д.).

При формировании понятия дроби наглядность играет большую роль, так как наиболее полно показывает содержательную сторону изучаемого понятия. Важно уделить этому моменту достаточное количество времени, чтобы переход к формальному оперированию дробями не привел к непониманию учениками изучаемого материала. На первом этапе основной целью урока является знакомство учащихся и формирование понятия дроби как «числа, состоящего из одной или нескольких равных частей (долей) единицы», обучение чтению, записи и пониманию обыкновенных дробей. В дальнейшем можно приступать к решению задач, в которых закладываются основы для восприятия некоторых важных идей, которые получают развитие в дальнейшем, - это основное свойство дроби, нахождение части от целого и целого по его части, нахождение части, которую составляет данная величина от целого. Начинать обучение решению задач следует с простейших задач, в которых необходимо найти одну долю от целого или целое по одной доле, сопровождая решение с использованием изученных правил схематическими рисунками.

**Задача №1.** Купили кусок ткани длиной 3 м 20 см и из $\frac{1}{5}$ сшили наряд для куклы. Сколько сантиметров ткани ушло на наряд?

Для начала учащиеся делают рисунок задачи (рисунок 1). Вопросы учащимся перед решением задачи: «Сколько ткани купили? Какую часть ткани израсходовали? Как вы это понимаете? (Целое разделили на 5 равных частей и взяли одну часть). Значит, что нужно сделать, чтобы решить задачу? Что нужно сделать перед решением задачи?»

*Решение:*

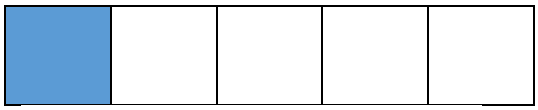


Рисунок 1 - Рисунок к задаче №1.

3 м 20 см = 320 см

320 : 5 · 1 = 64 (см) ушло на платье

*Ответ:* 64 см.

Дроби есть числа, поэтому уже на первом этапе можно дать ученику возможность сравнивать, пользуясь только наглядностью, полученные дроби с целыми числами, например с 1, и дробь с дробью (рисунок 2).

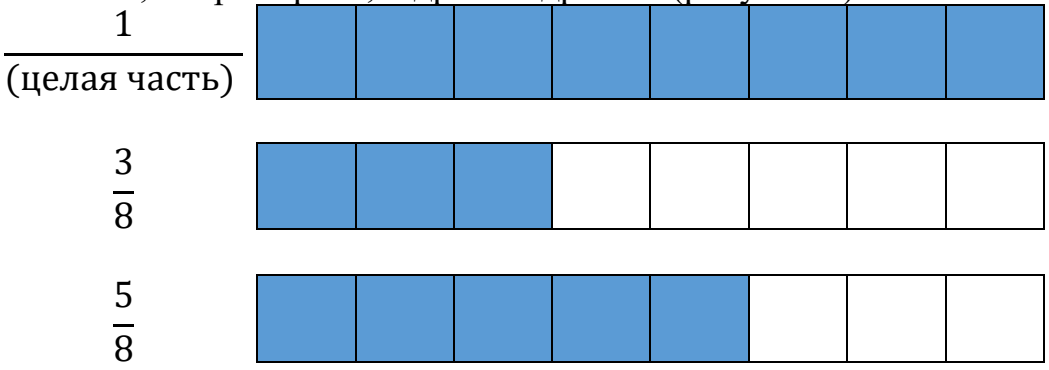



Рисунок 2 - Сравнение дробей.

Сравнение дробей можно приводить на основе суммы долей, при этом ученики должны повторять, что понимается под числителем и знаменателем. Например, сравним дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{5}{7}$. У первой дроби числитель 3, а знаменатель 7, значит она равна сумме трех седьмых долей: $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$. А дробь $\frac{5}{7}$ равна сумме пяти таких же долей: $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$. Слагаемые в обеих суммах одинаковые, но во второй сумме их больше, поэтому вторая сумма больше первой, то есть $\frac{3}{7}<\frac{5}{7}$. Подвести учащихся к выводу: «Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой больше числитель, и меньше та, у которой меньше числитель». Этот метод введения сравнения дробей хорош тем, что при его реализации происходит первичное, понятийное знакомство учащихся с темой сложение дробей с одинаковыми знаменателями.

Равенство дробей наиболее удобно показывать наглядно, изобразив три одинаковых круга (или прямоугольника, звездочки), каждый из которых разделен соответственно, например, на 4, 8, 16 частей (рисунок 3). В первом круге закрасить 1 из 4 частей, во втором – 2 из 8 частей, в третьем – 4 из 16 частей. Затем попросить учащихся сравнить закрашенные участки и выписать для каждого круга получившиеся дроби, для этого учащимся предстоит подсчитать количество закрашенных долей и общее количество равных долей в каждом круге. Такой процесс позволяет учащимся самостоятельно оперировать наглядным материалом и постепенно в ходе этого оперирования вырабатывать формальное правило, что способствует развитию инициативности и познавательной активности учащихся.

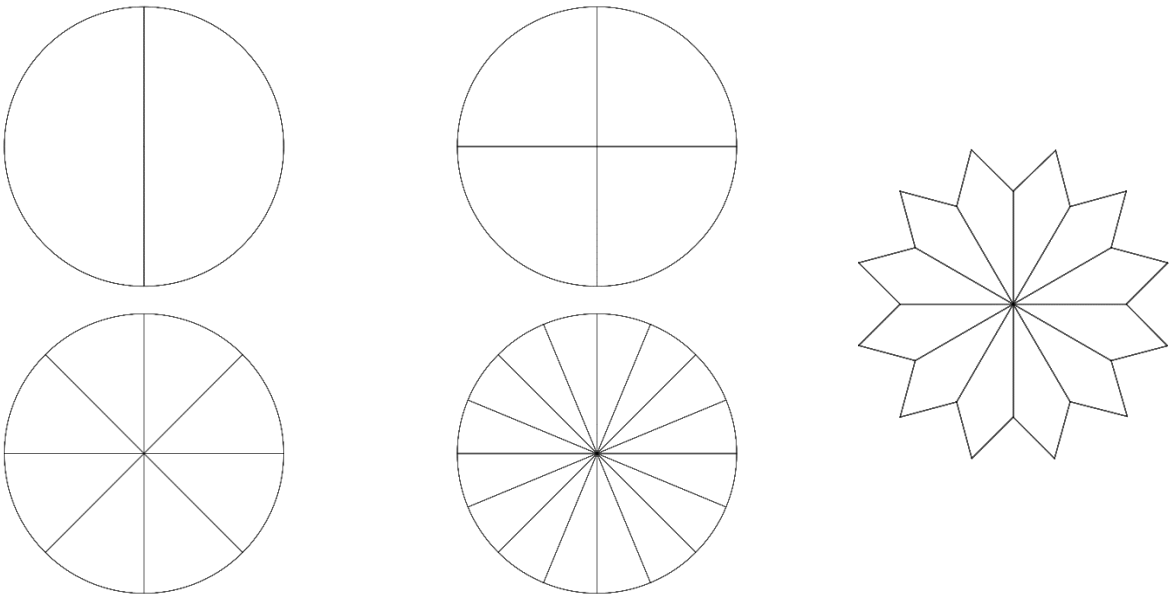


Рисунок 3 – Наглядные иллюстрации к теме «Равенство дробей».

Сравнение дробей можно приводить на основе суммы долей, при этом ученики должны повторять, что понимается под числителем и знаменателем. Например, сравним дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{5}{7}$. У первой дроби числитель 3, а знаменатель 7, значит она равна сумме трех седьмых долей: $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$. А дробь $\frac{5}{7}$ равна сумме

пяти таких же долей: $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$. Слагаемые в обеих суммах одинаковые, но во второй сумме их больше, поэтому вторая сумма больше первой, то есть $\frac{3}{7}<\frac{5}{7}$. Подвести учащихся к выводу: «Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой больше числитель, и меньше та, у которой меньше числитель». Этот метод введения сравнения дробей хорош тем, что при его реализации происходит первичное, понятийное знакомство учащихся с темой сложение дробей с одинаковыми знаменателями.

При объяснении сложения и вычитания дробей можно предложить учащимся практическую задачу: «Начертите в тетради прямоугольник. Покажите $\frac{2}{7}$ прямоугольника. Что для этого нужно сделать? Покажите $\frac{5}{7}$ прямоугольника. Сколько надо прибавить к $\frac{2}{7}$, чтобы получить $\frac{5}{7}$? Как записать это действие? Кто догадался, как выполнить сложение дробей с одинаковыми знаменателями?» (рисунок 4)

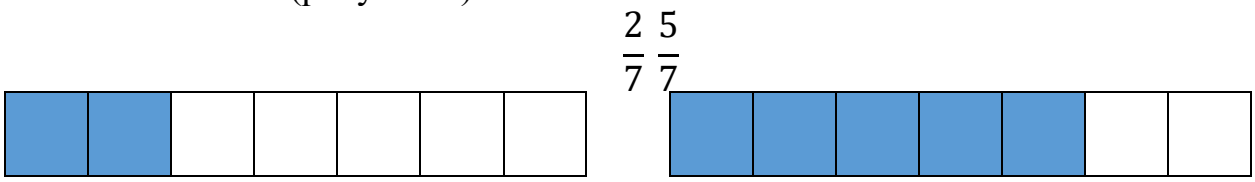



Рисунок 4 – Иллюстрации к теме «Сложение обыкновенных дробей».

Далее вывести правила сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями и записать их в тетрадь.

Изучение смешанных чисел также можно проводить на основе наглядности и имеющихся у учащихся знаний. Например, в начале урока подготовить модели и предложить учащимся задачу: «Посмотрите, что лежит у меня на тарелке (2 яблока и $\frac{1}{4}$ яблока). Придумайте с данными числами пример на сложение ($2+\frac{1}{4}$). Кто догадался, как записать ответ?» Если учащиеся затрудняются, можно предложить им выбрать ответ из записанных на доске. Затем разобрать, что входит в состав числа (натуральное число и обыкновенная дробь) и какой знак между ними подразумевается. Привести правило чтения смешанных дробей. Ввести алгоритм представления смешанной дроби в виде неправильной и наоборот.

Основное свойство дроби вытекает из определения равных дробей: «Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной». При объяснении возможно использование тех же моделей, что использовались при изложении темы о сравнении и равенстве дробей. На тех же примерах может быть изложено сокращение дробей. Оно основано на разложении числителя и знаменателя на множители. В практической части задания по данной теме должны быть направлены лишь на выработку навыков сокращения дробей, используя изученные раннее признаки делимости, разложение на множители.

Таким образом, при выполнении заданий на дроби, наиболее важным моментом является наглядность. Успешное выполнение учащимися заданий

способствует также формированию положительной мотивации к изучению темы. Далее перейдем к решению задач, здесь важно показать учащимся практическую направленность таких заданий.

Среди опорных задач на дроби можно выделить следующие типы:

– задачи на отыскание указанной части (дроби) данного числа;

– задачи на отыскание числа, если известна часть (дробь) этого числа;

– задачи на отыскание части (дроби), которую составляет одно число от другого.

При объяснении решения задач на нахождение дроби от числа и числа по его дроби обязательно присутствие краткой записи и иллюстрации задачи, чтобы ученики видели, что в условии задачи является целым, а что – его частью. В связи с этим решение задачи целесообразно начинать с ее схематического изображения, на котором:

1) отмечается произвольный отрезок прямой, который изображает «целое» – отрезок, длина которого известна или является искомой величиной по условию задачи;

2) приблизительно отмечается известная или неизвестная часть этого целого;

3) над отрезком и над частью указываются известные или неизвестные величины, которые они изображают; под ними –соответствующие им известные или неизвестные дроби.

Далее, в зависимости от типа задачи, производятся соответствующие действия над известными величинами.

Обучение школьников решению задач на тему «Дроби» следует начинать с задач, не требующих выполнения последовательности действий. Но при этом важно, чтобы решение данных задач происходило обдуманно и с пониманием сути понятия долей и дробей, сопровождалось наглядными иллюстрациями.

**Задача №2.** Нахождение части числа.

Андрей прочитал повесть, которая занимает $\frac{7}{15}$ книги. Сколько страниц прочитал Андрей, если известно, что в книге 300 страниц?

*Решение:* Так как было прочитано $\frac{7}{15}$ книги, иными словами, Андрей прочитал 7 из 15 частей книги. Обозначим объем прочитанной книги отрезком, в котором 15 мерок (рисунок 5).

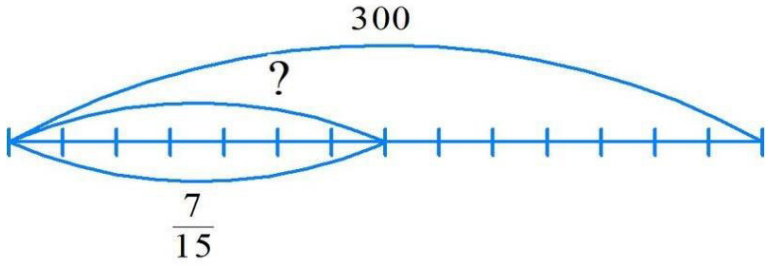



Рисунок 5 – Краткая запись к задаче №2.

Чтобы найти объем $\frac{1}{15}$ части, нужно 300 разделить на 15, получится 20. 20 страниц составляет $\frac{1}{15}$ часть книги. Далее, чтобы найти, какое число страниц

составляет $\frac{7}{15}$ книги, нужно 20 умножить на 7. Зная правило умножения дробей задача может выполняться в одно действие:

$300 \cdot \frac{7}{15} = \frac{300 \cdot 7}{15} = \frac{20 \cdot 7}{1}$=140 (стр.) прочитал Андрей.

*Ответ:* 140 страниц.

**Задача №3.** Нахождение числа по его части.

В парке 35 лип, что составляет $\frac{5}{7}$ всех деревьев парка. Сколько деревьев растет в парке?

*Решение:* Известно, что 5 из 7 частей всех деревьев составляют липы, изобразим это условие на чертеже (рисунок 6).

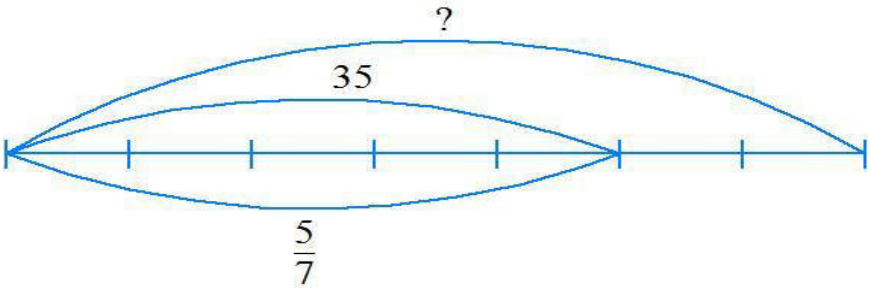



Рисунок 6 – Краткая запись к задаче №3.

На рисунке видно, что 35 лип – это 5 частей. Чтобы найти, сколько деревьев составляет одна часть, нужно 35 поделить на 5. Теперь известно, что $\frac{1}{7}$ часть всех деревьев составляет 7 деревьев, чтобы найти $\frac{5}{7}$, нужно 7 умножить на 5. Зная правило деления дробей, решение может выполняться в одно действие:

$35 : \frac{5}{7} = \frac{35 \cdot 7}{5} = \frac{7 \cdot 7}{1} = 49$ (дер.) всего в парке.

*Ответ:* 49 деревьев.

**Задача №4.** Нахождение части одного число от другого.

От доски длиной 21 м отпилили 3 м. Какую часть доски отпилили?

*Решение:* Чтобы найти, какую часть одно число составляет от другого, необходимо первое число разделить на второе. В нашем случае, чтобы выразить, какую часть доски отпилили, необходимо длину этой части поделить на длину всей доски (рисунок 7), то есть 3 поделить на 21.

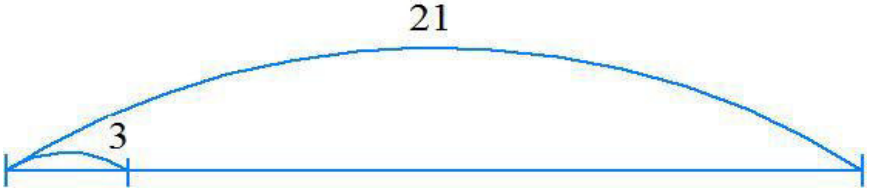



Рисунок 7 – Краткая запись к задаче №4

$3 : 21 = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ (ч.) доски отпилили.

*Ответ:* $\frac{1}{7}$ часть.

Далее можно переходить к составным задачам, требующим более тщательного обдумывания и размышления. Как и раннее следует начинать решение каждой задачи со схематического рисунка.

**Задача №5.** Елена Михайловна купила $2\frac{1}{4}$ кг риса. На приготовление пирога она израсходовала $\frac{2}{3}$ купленного риса, а оставшуюся часть – на приготовление запеканки. Сколько килограммов риса Елена Михайловна израсходовала на запеканку?

*Решение:* Так как на приготовление пирога израсходовано $\frac{2}{3}$ купленного риса, значит, купленный рис был разделен на три части, а две части было взято для приготовления пирога. Обозначим массу купленного риса отрезком, в котором 3 мерки (рисунок 8).

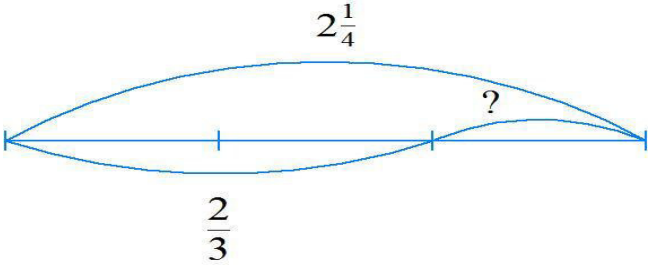



Рисунок 8 – Краткая запись к задаче №5

1) $\frac{2}{3}\cdot 2\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{2\cdot 9}{3\cdot 4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ (кг) риса взято для приготовления пирога.

2) $2\frac{1}{4}-1\frac{1}{2}=2\frac{1}{4}-1\frac{2}{4}=1\frac{5}{4}-1\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$ (кг) риса израсходовано на запеканку.

*Ответ:* $\frac{3}{4}$ кг.

**Задача №6.** Дорога от города А до города В, длиной 324 км, состоит из горизонтального участка пути, который составляет $\frac{8}{9}$ всего пути, подъема – $\frac{1}{12}$ всего пути, а остальная часть пути имеет уклон. Сколько километров составляет уклон?

*Решение:* Изобразим на рисунке известные величины и дроби (рисунок 9).

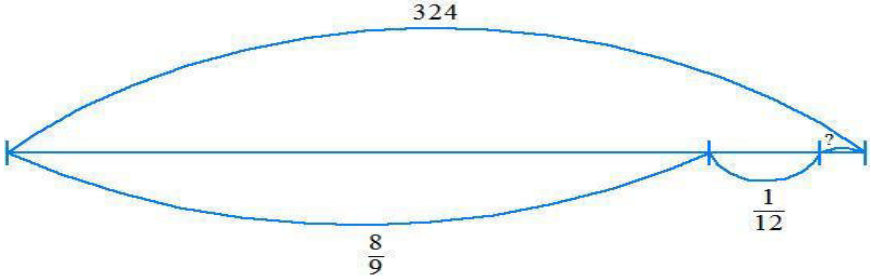



Рисунок 9 – Краткая запись к задаче №6.

1) Для начала найдем, какую часть пути составляют горизонтальный участок и на подъем вместе: $\frac{8}{9}+\frac{1}{12}=\frac{8\cdot 4+3}{36}=\frac{35}{36}$.

2) Далее найдем, какая часть пути имеет уклон, для это нужно из всего пути вычесть ту часть, которая приходится на горизонтальный участок и подъем вместе: $1-\frac{35}{36}=\frac{1}{36}$.

3) И теперь уже найдем, сколько километров составляет уклон: $324 \cdot \frac{1}{36} = \frac{324}{36} = 9$ (км).

*Ответ:* 9 км.

**Задача №7.** Тракторная бригада вспахала в первый день $\frac{5}{12}$ всего отведенного участка, а во второй день $\frac{4}{7}$ оставшейся части участка. В третий день бригада вспахала остальные 216 га. Определите площадь всего участка. [4]

*Решение:* Изобразим схематически условие на рисунке (рисунок 10).

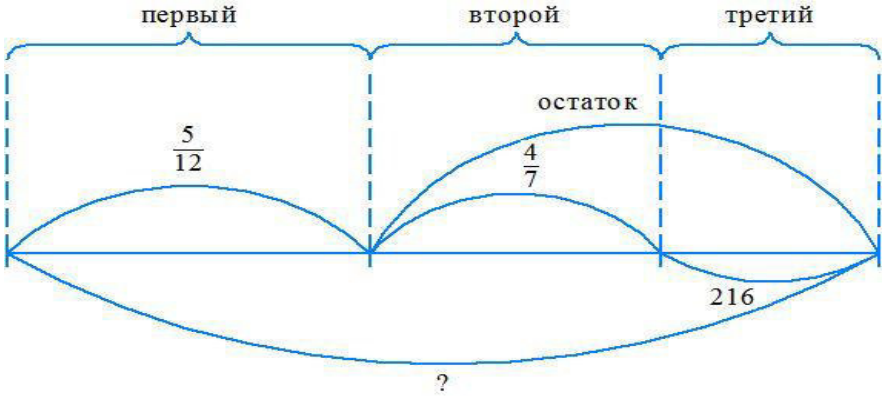



Рисунок 10 – Краткая запись к задаче №7.

1) Так как во второй день вспахали $\frac{4}{7}$ части участка, оставшейся после первого дня, значит в третий день вспахали $1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$ оставшейся части участка.

2) Видим, что к третьему дню относятся два значения: доли и площади, значит можем найти площадь части, оставшейся после первого дня: $216 : \frac{3}{7} = \frac{216 \cdot 7}{3} = \frac{72 \cdot 7}{1} = 504$ (га).

Покажем полученные данные на рисунке (рисунок 11).

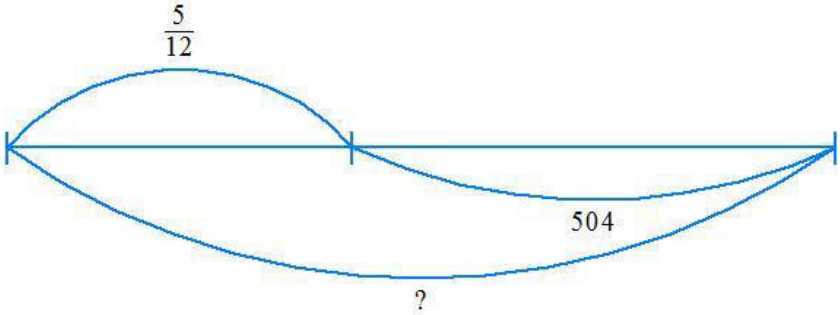



Рисунок 11 – К решению задачи №7.

3) После первого дня осталось вспахать $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ всего участка.

4) Аналогично второму пункту, можем найти площадь всего участка: $504 : \frac{7}{12} = \frac{504 \cdot 12}{7} = \frac{72 \cdot 12}{1} = 864$ (га).

*Ответ:* 864 га.

**3. Заключение**

Обучение решению задач на дроби является важным этапом изучения математики. Осваивая и формируя понятие дроби, учащиеся не только приобретают опыт работы с дробными и целыми величинами, но и постигают

взаимосвязи между ними. На основе полученных при изучении дробей знаний школьники осваивают умения решения практических задач, развивают логическое мышление и сообразительность. Поэтому важно показать им практическую направленной данной на примере задач, наглядно показать формирование дробей как частей целого. Благодаря применению средств наглядности у обучающихся сформируется более прочное понимание дробей, действий над ними, и, следовательно, при решении задач возникнет меньше трудностей, т.к. выполняемые ими действия будут осознанными и понятными. А успешное решение задач с использованием наглядных методов способствует формированию положительной мотивации к изучению предмета и развитию познавательной активности учащихся.

## Список источников

1. Жохов В. И. Преподавание математики в 5 и 6 классах. М.: Мнемозина, 2001. 156 с.

2. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике. Часть I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. М.: Просвещение, 1997. 112 с.

3. Макарова Л. С. Использование визуальных задач на начальном этапе изучения обыкновенных дробей и процентов в 5-6 классах. М., 2007. 137 с.

4. Чесноков А. С. Дидактические материалы по математике для 6 класса. – М.: Классикс Стиль, 2007. 160 с.

5. Шамова Т. И. Проблемность – стимул познавательной активности // Народное образование. 1966. № 4. с. 32-37.

## References

1. Zhokhov V. I. Teaching mathematics in grades 5 and 6. M.: Mnemosyne, 2001. 156 p.

2. Kolyagin Yu. M. Tasks in teaching mathematics. Part I. Mathematical problems as a means of teaching and developing students. M.: Prosveshchenie, 1997. 112 p.

3. Makarova L.S. The use of visual tasks at the initial stage of studying ordinary fractions and percentages in grades 5-6. M., 2007. 137 p.

4. Chesnokov A. S. Didactic materials in mathematics for the 6th grade. – M.: Classics Style, 2007. 160 p.

5. Shamova T. I. Problemativeness – the stimulus of cognitive activity // National education. 1966. No. 4. pp. 32-37.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 556-560.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 556-560.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 378.147

# КОНСТРУИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА В ЗОНЕ БЛИЖАЙШЕГО РАЗВИТИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ НА ПРИМЕРЕ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

***Ирина Сергеевна Кузнецова[1]✉, Инна Владимировна Цветкова[2]***
*[1,2]Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия*
*[1]ikuzn@mail.ru✉, [2]pilipenkoV@mail.ru*

***Аннотация.*** *В статье авторами поднят вопрос о потенциале технологии развивающего обучения крайне редко применяющейся педагогами высшей школы. В работе отражена деятельность авторов по адаптации и применению ряда методик преподавания высшей математики в техническом университете, направленных на конструирование учебного процесса, согласованного с зонами ближайшего развития обучающихся, приведены предварительные результаты.*

***Ключевые слова:*** *развивающее обучение, зона ближайшего развития, методики преподавания высшей математики, инженерная педагогика.*

Conference paper

# DESIGNING THE EDUCATIONAL PROCESS IN THE AREA OF THE IMMEDIATE DEVELOPMENT OF STUDENTS IN HIGHER EDUCATION BY THE EXAMPLE OF STUDYING THE DISCIPLINE «HIGHER MATHEMATICS»

***Irina S. Kuznetsova[1]✉, Inna V. Tsvetkova[2]***
*[1, 2] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia*
*[1]ikuzn@mail.ru✉, [2]pilipenkoV@mail.ru*

***Abstract.*** *In the article, the authors raised the question of the potential of the technology of developmental learning, which is extremely rarely used by teachers of higher education. The paper reflects the activities of the authors on the adaptation and application of a number of methods of teaching higher mathematics at a technical university aimed at designing an educational process consistent with the zones of immediate development of students, and provides the preliminary results.*

© Кузнецова И. С., Цветкова И. В., 2024

***Keywords:*** *developmental education, the zone of immediate development, methods of teaching higher mathematics, engineering pedagogy.*

## 1. Введение

Сложный общероссийский контекст деятельности преподавателя математических дисциплин в высшей школе (компактная позиция математических дисциплин в учебных планах; недостаточная математическая подготовка выпускников школы и др.) заставляет педагогов в поисках путей улучшения предметных результатов обучения, повышения мотивации и познавательной активности обучающихся обращаться к педагогическим концепциям и разноплановому опыту дидактов, в том числе сформированному при работе с обучающимися различных возрастных категорий.

Одной из дидактических проблем, с которой сталкивается практически каждый педагог, ответственный за формирование математической компетентности, является проблема отсутствия «быстрого старта»: несформированность в ходе общеобразовательной подготовки отдельных математических понятий, отсутствие навыков решения задач элементарной математики делает крайне сложным переход к изучению разделов высшей математики. «Быстрый старт» и продвижение по образовательной траектории представляется достаточно сложным процессом для обучающегося, требующим предварительного устранения компетентностных разрывов.

Одной из дидактических платформ, на базе которой, на наш взгляд, возможно снижение остроты проблемы отсутствия «быстрого старта» является технология развивающего обучения, применение которой в целом не характерно для высшей школы, а представлено работами отдельных серьезных методологов [1, 2].

Цель настоящего исследования состоит в анализе предварительных результатов применения технологии развивающего обучения, а именно конструирования учебного процесса в зоне ближайшего развития обучающихся в высшей школе, на примере изучения дисциплины «Высшая математика» студентами инженерных специальностей.

## 2. Основной текст статьи

Истоки используемой технологии развивающего обучения связывают с именем выдающегося российского психолога Л. С. Выготского.

Ключевое понятие технологии – зона ближайшего развития, т.е. расхождение между уровнем решения задач, доступных обучающемуся под руководством, при помощи консультантов, и уровнем решения задач, доступных в самостоятельной деятельности [3]. Зона актуального развития – обучающийся может выполнить действия самостоятельно; зона ближайшего развития – может выполнить, но во взаимодействуя с консультантом; зона перспективного развития – еще пока не может выполнить с консультантом, но проявляет интерес.

Автор не успел завершить разработку концепции, и сегодня мы имеем в доступе наработки его последователей: В. К. Зарецкого [4], И. А. Котляр [5], В. Д. Минсон, М. Хаммер, Н. Н. Вересовой [6] и др.

Чтобы расширить границы зоны ближайшего развития мы используем саму проблему – учебную трудность, можем опереться на нее и сделать шаг вперед. Преодоление трудности является шагом в развитии обучающегося.

Авторы настоящей статьи применили технологию, проводя педагогическое конструирование на примере изучения дисциплины «Высшая математика» в техническом университете.

При построении процесса изучения дидактических единиц дисциплины выполнялась следующая последовательность действий.

**Экспресс-оценка зоны ближайшего развития**. На ранних этапах (вначале изучения нового раздела) выявлялись наиболее типичные учебные трудности, характерные для конкретной учебной группы. Экспресс-оценка проводилась на занятиях лекционного типа по следующей схеме. Обучающимся представлялся учебный материал, в том числе с использованием проблемных методов. Незамедлительно осуществлялась обратная связь в форме фронтального блиц-опроса. В ходе высокоскоростного опроса осуществлялся последовательный перебор единиц контента. При этом могли использоваться заранее подготовленные средства визуальной наглядности. Оценивалась реакция группы. Если в «быстрых» ответах принимало участие большинство группы, выполнялся переход к следующему блоку вопросов. Если ответы постоянно давали лишь отдельные обучающиеся, понятие/определение/правило фиксировалось педагогом как лежащее в основе учебного затруднения. По окончанию учебного занятия конкретные содержательные позиции, вызвавшие учебную трудность, фиксировались педагогом для включения в зону ближайшего развития.

Рассматривая данный метод, можно оставаться на позиции, что подобная диагностика учебных трудностей для гетерогенной по уровню математической компетентности учебной группы является «средней температурой по больнице». Однако, метод не является ресурсоемким для педагога и дает практикоприменимые ориентиры. Кроме того, подобные блиц-опросы выполняют роль первичного закрепления, а их скоростной режим дополнительно вызывает положительную реакцию обучающихся, повышая учебную мотивацию.

Существенная детализация ситуации происходит при организации дальнейшего «тяжеловесного» текущего контроля, например, в формате выполнения типовых расчетов и контрольных работ. Однако, подобный подход не способствует решению проблемы отсутствия «быстрого старта», а зачастую фиксирует уже сложившееся проблемное поле, преодолеть которое обучающимся не всегда удается в полном объёме ввиду наличия зачастую пассивной позиции по отношению к обучению, отсутствия навыков рефлексии в ходе учебной деятельности и др.

**Деятельность в зоне ближайшего развития** осуществляется первично в двух направлениях: устранение учебных затруднений в ходе совместной деятельности с консультантами и развитие рефлексии в ходе обучения.

Устранение учебных затруднений происходит как во взаимодействии с педагогом в позиции консультанта на практических занятиях при

дифференцированном подходе, так и с обучающимися, у которых отсутствует данная учебная трудность. Обучающиеся активно включаются в групповые формы работы, в том числе во внеучебное время, соответствующая активность поощряется педагогом и подкрепляется балльной оценкой студентов-консультантов (достижения – «учатся, обучая»).

Вторым направлением является запуск необходимых механизмов рефлексии. Педагог по начальным разделам дисциплины готовит карточки с перечнем навыков, которые должны быть сформированы при успешном изучении раздела. Обучающиеся осуществляют мониторинг формирования навыков и выставляют бинарную отметку. При наличии «минусов» самостоятельно принимают решение о консультациях/самостоятельной корректирующей работе. Впоследствии обучающиеся перестают получать карточки, самостоятельно фиксируют и устраняют перечень возникающих трудностей, ведя персональный «чек-лист. Таким образом, обучающиеся постепенно меняют позицию: превращаясь из объекта педагогического воздействия в субъект учебной деятельности.

**Предварительные результаты.** Методики используются в процессе обучения студентов инженерно-строительного факультета Донского государственного технического университета. Незначительный временной лаг использования методик позволяет на данном этапе отметить промежуточные результаты.

Экспериментальная группа (22 чел.) на данном этапе несущественно отличается от контрольной (29 чел.) по результатам текущего контроля. Однако, по мере применения методик наглядно изменилось поведение обучающихся: уточняющие вопросы стали нормой, выходы «к доске» перестали пугать возможностью не справиться с задачей перед группой, а стали использоваться обучающимися осознанно, как инструмент диагностики собственных учебных трудностей. Практикуется комфортная позиция – «мне необходимо прояснить - я выхожу к доске разобраться». Критика не допускается. Типовые расчеты постепенно перешли в позицию инструмента самодиагностики, нежели текущего контроля. Учебные трудности устраняются до проведения контрольной точки, а не после, как в контрольной группе.

При этом, помимо очевидного развития механизмов рефлексии, обучающиеся экспериментальной группы активно включились в деятельность по саморазвитию, увеличилась познавательная активность, расширилась сфера интересов: студентами была инициирована деятельность по построению будущих профессиональных трендов, обучающиеся вовлеклись в изучение современных направлений бизнес-анализа и др.

**3. Заключение**

Таким образом, в результате исследования предварительно можно сделать следующий вывод: применение в высшей школе, в частности в техническом университете, технологий развивающего обучения имеет серьезный потенциал, который заключается не только в улучшении учебных результатов, но и в трансформации учебных трудностей обучающихся в задачи личностного

развития. Технология может стать опорой современной инженерной педагогики, снижая барьеры профессиональной подготовки и вхождения в профессию.

## Список источников


1. Каплунович С. М. Возможности реализации технологии адаптивного обучения в зоне ближайшего развития в вузе // Вестник Новгородского филиала РАНХиГС. 2023. Т. 13, № 1(15). С. 62-71.
2. Гутман В. В. Зона ближайшего развития: диапазон применения понятия в образовательном пространстве вуза // Вестник Дальневосточной государственной социально-гуманитарной академии. 2010. № 1-2(5). С. 5-10.
3. Выготский Л. С. Собрание сочинений в 6 томах, Т. 4. / гл. ред. А. В. Запорожец. М.: Педагогика, 1984. Т. 4. 433 с.
4. Зарецкий В. К. Зона ближайшего развития: о чем не успел написать Выготский…// Культурно-историческая психология. 2007. № 3. С. 96–104.
5. Котляр И. А. Зона ближайшего развития как проблема современной психологии. Сообщение 1 // Психологическая наука и образование. 2002. Т. 7. № 1. С. 42–50.
6. Минсон В. Д., Хаммер М., Вересов Н. Переоценивая оценки: разработка нового инструмента оценивания с опорой на зону ближайшего развития в традиции культурно-исторической психологии // Культурно-историческая психология. 2016. Т. 12. № 3. С. 338–345.


## References


1. Kaplunovich S. M. The possibilities of implementing adaptive learning technology in the zone of immediate development at the university // Bulletin of the Novgorod branch of the RANEPA. 2023, vol. 13, 1 (15): 62–71 (in Russ).
2. Gutman V. V. Zone of immediate development: the range of application of the concept in the educational space of the university // Bulletin of the Far Eastern State Social and Humanitarian Academy. 2010;1-2(5):5-10. (In Russ.).
3. Vygotsky L.S. Vygotsky L. S. Collected works in 6 volumes, vol. 4. / Chief editor A.V. Zaporozhets. Moscow: Pedagogika, 1984. Vol. 4. 433 p. (in Russ).
4. Zaretsky V. K. The zone of immediate development: what Vygotsky did not have time to write about ... // Cultural and historical psychology. 2007. No. 3. pp. 96-104.
5. Kotlyar I. A. The zone of proximal development as a problem of modern psychology. Message 1 // Psychological science and education. 2002. Vol. 7. No. 1. pp. 42-50. (in Russ.).
6. Manson V. D., Hammer M., Veresov N. Overestimating assessments: the development of a new assessment tool based on the zone of immediate development in the tradition of cultural and historical psychology // Cultural and historical psychology. 2016. Vol. 12. No. 3. pp. 338-345. (in Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 561-565.
Modern problems of physical and mathematical sciences. 2024. 561-565.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 514.743.28

# О ДЕЛЕНИИ ОКРУЖНОСТИ НА РАВНЫЕ ЧАСТИ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ

***Игорь Сергеевич Логунов***[1]✉
[1]*Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, Орёл, Россия*
[1]*logun57orel@mail.ru*✉

***Аннотация.*** *Статья посвящена описанию способов деления окружности на равные части с помощью одного циркуля.*

***Ключевые слова.*** *Задачи на построение на плоскости, циркуль, односторонняя линейка, правильные многоугольники, основные построения одним циркулем, теоремы Мора-Маскерони и К. Ф. Гаусса.*

Conference paper

# SEPARATION OF THE CIRCLE INTO EQUAL PARTS BY ONE COMPASS

***Igor S. Logunov***[1]✉
[1]*Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
[1]*logun57orel@mail.ru*✉

***Abstract.*** *The article is devoted to the description of methods of dividing a circle into equal parts using one compass.*

***Keywords.*** *Problems of construction on a plane, compass, one-sided ruler, regular polygons, basic constructions with one compass, Mohr-Mascheroni and C. F. Gauss theorems.*

## 1. Введение

В любом школьном учебнике геометрии описывается деление окружности на шесть равных частей с помощью одного циркуля (без ограничения раздвижения его ножек). Из этого построения легко следует её деление на три равные части.

Если домыслить наличие отрезков, соединяющих полученные нужные точки, то имеем построенные на плоскости одним циркулем правильные шестиугольник и треугольник.

© Логунов И. С., 2024

**2. Основная часть**

Некоторые задачи на построение на плоскости (и их достаточно много) могут быть решены без использования односторонней линейки, то есть одним циркулем. К таким задачам следует отнести построение точки, симметричной данной точке относительно фиксированной прямой, построения образов данных точек при центральной симметрии и преобразовании инверсии.

В книге [2] изложено простое доказательство важной теоремы для теории геометрических построений на плоскости, а именно теорема Мора-Маскерони: «любая задача на построение, решаемая циркулем и односторонней линейкой, разрешима одним лишь циркулем». Из этого следует, что теоретически линейка не является необходимым инструментом и без неё можно обойтись. При этом значительно увеличивается количество построений, то есть шагов.

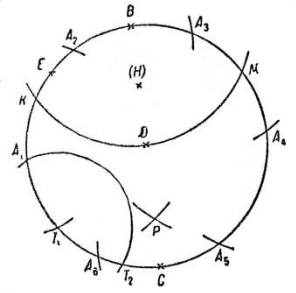



Рисунок 1- Правильные шестиугольник и треугольник.

Шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ является правильным, а треугольник $A_1A_3A_5$ тоже правильный со стороной $A_1A_3$, равной $\sqrt{3}$, если $OA_1 = A_1A_2 = \cdots = A_6A_1 = 1$ (это нетрудно показать с помощью теоремы косинусов).

Для дальнейших рассуждений нам понадобиться два основных построения одним циркулем.

*Построение 1.* Деление данной дуги AB пополам, где точка O является центром данной дуги.

Простейшие построения:

1. $\omega_1(A, AO), \omega_2(B, AO)$ – дуги с центрами A и B радиуса AO.
2. $\omega_3(O, AB) \cap \omega_1(A, AO) = M$, $\omega_4(O, AB) \cap \omega_2(B, AO) = C$.
3. $\omega_5(C, CB) \cap \omega_6(M, CB = MA) = E$.
4. $\omega_7(C, OE) \cap \omega_8(M, OE) = K$ – искомая середина дуги AB.

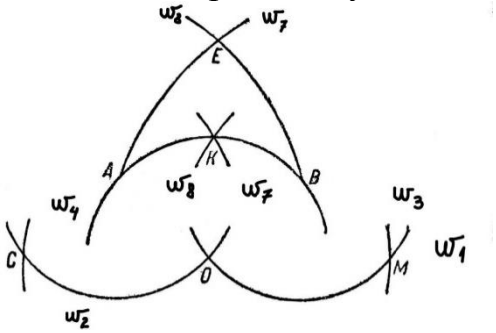



Рисунок 2 – Построение середины данной дуги.

Докажем это утверждение.

Очевидна параллельность прямых AB и CO, при этом AB = CO, значит CABO – параллелограмм и $CB^2 + AO^2 = 2AB^2 + 2OB^2$ (известное свойство параллелогрмма). Далее имеем

$$CB^2 = 2AB^2 + OB^2. \quad (1)$$

Так как точки C и M симметричны относительно прямой OE, то $OE \perp CM$ и имеет место серия равенств $CE^2 = CB^2 = OC^2 + OE^2 = AB^2 + OE^2$ или

$$CB^2 = AB^2 + OE^2. \quad (2)$$

Далее из (1) и (2) имеем $2AB^2 + OB^2 = AB^2 + OE^2$ или

$$OE^2 = AB^2 + OB^2. \quad (3)$$

Из перпендикулярности прямых OK и CM следует, что $CK^2 = OE^2 = OC^2 + OK^2 = AB^2 + OK^2$ или $OE^2 = AB^2 + OK^2$. (4)

Сравнивая (3) и (4), имеем $OB^2 = OK^2$, то есть OB=OK. (5)

Значит точка K лежит на дуге AB, а так как $AB \perp OE$, то окончательно AK=AB, что и требовалось доказать.

*Построение 2.* Нахождение точки пересечения прямых AB и CE (рис. 3).

1. $C = S_{AB}(C), E_1 = S_{AB}(E)$ – точки, симметричные точкам C и E относительно прямой AB.
2. $K \in EE_1, EK \in CC_1$.
3. $x{:}\,x{:}\,E_1C_1 = EE_1{:}\,KE_1$.
4. $O \in E_1C_1{:}\,E_1O = x$. (описание этих пунктов см. в [3]).

$O = AB \cap CE$ – искомая точка.

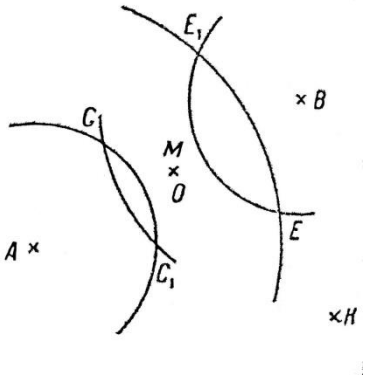



Рисунок 3 – Нахождение точки пересечения двух прямых.

Вернёмся к рисунку 1. В соответствии с построением 1 делим пополам дуги $A_2A_3$ и $A_5A_6$, тогда четыре точки $A_1$, B, $A_4$ и C делят данную окружность га четыре равные части и $A_1\text{B} = \sqrt{2}$. Дуга $A_2$B ппредставляет собой одну двенадцатую часть всей окружности, причём можно показать, что хорда $AB_2 = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

Более этого делим точкой E дугу $A_1$B пополам и получаем дугу $A_1$E как одну восьмую часть всей окружности, поэтому длина дуги $A_1$E равна $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ .

Теперь опишем дуги $\omega_9(B, A_1O)$ и $\omega_{10}(B, A_1O)$, где $\omega_9 \cap \omega_{10} = K$, $\omega_{10} \cap \omega_0 = M$, причем $KM = \sqrt{3}$. Далее проведём посредине $\omega_{11}\left(K, \sqrt{2}\right) \cap \omega_{12}\left(M, \sqrt{2}\right)$ =P.

С помощью описанного в [3] построения построим точку Н – точку пересечения диагоналей ромба KBMO, тогда точки Р, Н, О, Р окажутся на одной прямой.

Дальнейшее соотношения связаны с прямоугольным треугольником KHP:

$$KH^2 + HP^2 = KP^2, \quad (7)$$

$$KH^2 + (HO + OP)^2 = KP^2, \quad (8)$$

$$(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2} + OP)^2 = (\sqrt{2})^2, \quad (9)$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + OP + OP^2 = 2, \quad (10)$$

$$OP^2 + OP - 1 = 0, \quad (11)$$

$$OP = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (12)$$

Ясно, что $OP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$ и это есть сторона правильного десятиугольника, вписанного в данную окружность $\omega_0$. При этом есть $A_1T_1 = OP$, то дуга $A_1T_1$ является одной десятой частью всей длинны окружности $\omega_0$. Если $T_1T_2 = A_1T_1$, то дуга $A_1T_2$ есть одна пятая часть данной окружности $\omega_0$ и поэтому

$$A_1T_1 = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}. \quad (13)$$

Теперь видим, что $A_1T_1 = A_1P$, так как из $\triangle A_1OP$ (прямоугольного) имеем

$$A_1P = \sqrt{A_1O^2 + OP^2} = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}. \quad (14)$$

Сравнение углов окружности $\omega_0$ приводит к цепочке равенств:

$$\angle T_1OA_6 = \angle A_1OA_6 - \angle A_1OT_1 = 60° - 36° = 24° = \frac{1}{15} \cdot 360°. \quad (15)$$

Тогда дуги $T_1A_6$ представляет собой одну пятнадцатую часть данной окружности $\omega_0$, а длина хорды $T_1A_6$ выражается впечатляющим своей сложностью записи числом

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} + \sqrt{15}\right). \quad (16)$$

**3. Заключение**

В статье описываются способы использования циркуля при делении окружности на n равных частей для n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15. Если далее делить полученные дуги окружности $\omega_0$ пополам (что возможно!), то будем получать $\frac{1}{16}, \frac{1}{20}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}$ и так далее части данной окружности $\omega_0$.

*Замечание.* «Король математиков» Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) доказал, что возможно построение правильного семнадцатиугольника с помощью циркуля и линейки, а значит, и деление окружности на семнадцать равных дуг при наличии одного лишь циркуля.

## Список источников

1. Аргунов В. Л., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. - М.: Учпедгиз, 1957. –269 с., илл.

2. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. В 2-х ч. Ч. I. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. –М.: Просвещение, 1986. -336 с., илл.

3. Воронец А. М. Геометрия циркуля. – М.-Л.: ОНТИ. –Государственное технико-теоретическое издательство, 1934. -40 с., илл.

## References

1. Argunov V. L., Balk M. B. Geometric constructions on a plane. Moscow: Uchpedgiz, 1957. 269 p. (In Russ.).

2. Atanasyan L. S., Bazylev V. T. Geometry. In 2 ch. Ch. I. Textbook for students of physical and mathematical Sciences, Faculty of Pedagogical Sciences, Moscow: Prosveshchenie, 1986. 336 p. (In Russ.).

3. Voronets A. M. Geometry of a compass. – Moscow-Leningrad: ONTI. -State Technical and Theoretical Publishing House, 1934. -40 p. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 566-572.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 566-572.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.851

# О ПРЕПОДАВАНИИ УСКОРЕННОГО КУРСА «ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

***Артем Игоревич Мусин***[1✉]***, Владимир Николаевич Самойлов***[2]***, Геннадий Федоильевич Насыров***[3]

[1] *Вятский государственный университет, Киров, Россия*

[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

[3] *Независимый исследователь, Саров, Россия*

[1] *ai.musin@physics.msu.ru*[✉]*, https://orcid.org/0000-0002-3167-9023*

[2] *samoilov@polly.phys.msu.ru, https://orcid.org/0000-0003-4140-2957*

[3] *g.f.nasirov@gmail.com*

***Аннотация.*** *В работе рассматриваются некоторые методические приемы преподавания высшей математики, которые можно применить в условиях большой нехватки аудиторных часов. Был предложен вариант изложения и отработки следующих тем: пределы последовательностей и функций, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных.*

***Ключевые слова:*** *методика преподавания, высшая математика, предел, производная, интегральное исчисление.*

Conference paper

# ON THE TEACHING THE ACCELERATED COURSE «ELEMENTS OF HIGHER MATHEMATICS»

***Artem I. Musin***[1✉]***, Vladimir N. Samoilov***[2]***, Gennady F. Nasyrov***[3]

[1] *Vyatka State University, Kirov, Russia*

[2] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[3] *Independent Researcher, Sarov, Russia*

[1] *ai.musin@physics.msu.ru*[✉]*, https://orcid.org/0000-0002-3167-9023*

[2] *samoilov@polly.phys.msu.ru, https://orcid.org/0000-0003-4140-2957*

[3] *g.f.nasirov@gmail.com*

© Мусин А. И., Самойлов В. Н., Насыров Г. Ф., 2024

***Abstract.*** *The report examines some methodological techniques for teaching higher mathematics that can be applied in conditions of a significant shortage of classroom hours. A version of the presentation and development of the following topics was proposed: limits of sequences and functions, differential and integral calculus of functions of one and several variables.*

***Keywords:*** *teaching methods, higher mathematics, limit, derivative, integral calculus.*

## 1. Введение

Изучение высшей математики является неотъемлемой частью фундаментального и инженерного образования, как высшего, так и среднего специального. При этом квалифицированный преподаватель должен уметь рассказать элементы теории и задачи не только в рамках специального предназначенного для этого курса высшей математики, но и в рамках других курсов — чтобы быстро вспомнить забытое или ввести в оборот неизвестное.

Данному вопросу посвящено огромное число работ, но среди них хотелось бы отметить статью М.Е. Степанова [1], содержащую полезные рассуждения на основе опыта преподавания на факультете информационных технологий МГППУ, а также статью Л.И. Бортник и соавторов [2].

В данной работе обсуждаются предложения по методике преподавания элементов высшей математики, возникшие как в процессе преподавания одноименного курса в колледже ВятГУ одним из авторов (А.И.М.), так и на основе многолетнего опыта авторов по преподаванию физики и математики школьникам и студентам.

## 2. Параметры рабочей программы

Рабочая программа дисциплины «Элементы высшей математики» в колледже ВятГУ для специальности 9.02.07 «Информационные системы и программирование» была создана в 2022 г. Она предполагает 16 часов лекций, 30 часов практических занятий и 24 часа самостоятельной работы. В программе изучаются 12 тем:

1. Основы теории комплексных чисел.

2. Теория пределов.

3. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.

4. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной.

5. Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных.

6. Интегральное исчисление функции нескольких действительных переменных.

7. Теория рядов.
8. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
9. Матрицы и определители.
10. Системы линейных уравнений.
11. Векторы и действия с ними.
12. Аналитическая геометрия на плоскости.

При этом по темам 1–3 и 11 лекции не предполагаются, материал полностью выносится на практические занятия.

Выполнение такой программы наиболее остро ставит задачу, которая всегда стоит перед преподавателем — рассказывать сжато, доступно, интересно, с упором на практику. В этом случае «академическому» стилю изложения, предполагающему дедуктивное изложение, определенно нужно предпочесть «живой» стиль, который характеризуется «многообразием приемов, используемых лектором для создания у аудитории живого интереса и понимания» и созданием картины «той борьбы, через которую человеческая мысль пришла к этим выводам и заключениям» [2, с. 22].

В условии ограниченности аудиторных часов можно хотя бы делать небольшие пятиминутные отступления, чтобы рассказать, к примеру, о том, что комплексные числа применяются в квантовой физике, которая играет важную роль для современных технологий.

Студентам (и преподавателям) необходимо рекомендовать двухтомник М.Ю. Пантаева [3]. В нем заинтересованный читатель найдет не только теоретический материал и множество разобранных задач, но и много рассказов из истории математики, которые показывают, как развивались математические знания и (самое важное) где и как они могут быть применены.

Также необходимо учитывать возможности современных цифровых технологий, позволяющих сделать восприятие материала более доступным для студентов. Этому посвящено много исследований, например, Ж.И. Зайцева рассматривала эффективность пакета Mathematica (напр. [4]). Также можно использовать короткие ролики, демонстрации в пакетах GeoGebra и Scilab, виртуальную лабораторию Algodoo. При нехватке времени эти материалы можно вынести на самостоятельную проработку, с последующими контрольными замерами.

Далее рассмотрим подробнее только темы 2–6, которые входят во все курсы матанализа.

**3. Предел последовательности и предел функции**

Строгое определение предела последовательности на языке $\epsilon$–$N$ не дается из-за нехватки времени. В таких условиях разумно дать представление о последовательности $\{x_n\}$ как о динамическом процессе, который при больших номерах $n$ стабилизируется вблизи некоторого числа $a$ (и тогда $\lim_{n\to\infty} x_n = a$) или не стабилизируется (тогда предел не существует).

Полезна аналогия с самолетом или ракетой: самолет через какое-то время стремится занять определенную высоту $a$ — значения его высоты через равные промежутки времени представляют собой сходящуюся последовательность, а ракета улетает в космос ($\infty$) — значения ее высоты через равные промежутки времени представляют собой бесконечно большую последовательность.

Пределы простых последовательностей типа $\{1/n\}$, $\{1/n^2\}$ считаются «интуитивно», а далее используются свойства: предел суммы, разности, произведения, частного. Решаются примеры на простейшее раскрытие неопределенности, например:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}. \tag{1}$$

Предел функции вводится по Гейне:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \Leftarrow \left(\lim_{n\to\infty} x_n=a \wedge \lim_{n\to\infty} f(x_n)=b\right), \tag{2}$$

причем функция $y=f(x)$ мыслится как черный ящик, которому на вход подают все более и более точные данные $x_n\to a$, и ответ ящика на выходе в случае существования предела также стабилизируется: $y_n\to b$.

Замечательные пределы рассказываются без доказательства, с упором на практическое применение: у первого — приближение длины дуги длиной хорды и формула приближенного вычисления $\sin\alpha\approx\alpha$, у второго — задача о непрерывном начислении сложных процентов, которую для простоты можно рассмотреть для условного МММ со 100% годовых.

**4. Производная**

Производная $y=f'(x)$ вводится стандартно, как предел отношения приращений $\Delta y/\Delta x$, однако требуется пояснить смысл приращения. Возле некоторого фиксированного $x$ мы начинаем «шевелить» входные данные нашего черного ящика, внося изменение $\Delta x$, и смотрим отклик ящика, то есть как изменяется его ответ на выходе ($\Delta y$). Тут же рассказывается физический смысл производной как скорости движения $v(t)=S'(t)$ и вообще как скорости изменения любой величины.

По определению вычисляются $(x)'=1$ и $(x^2)'=2x$. Табличные производные $(x^n)'$, $(\sin x)'$, $(\cos x)'$, $(e^x)'$ даются без доказательства. Правила дифференцирования суммы, разности и произведения кратко поясняются, правило для частного дается без доказательств. Некоторые производные, например $(\tan x)'$, можно вывести.

Затем вводится понятие сложной функции $y=f(g(x))$. Активно используется два образа: первый — два черных ящика $f$ и $g$, соединенных последовательно; второй — матрешка $f$, внутри которой матрешка $g$. Необходимо решить пару примеров на «сборку» матрешки, например для

$f(x) = 2x^2 - x + 3$ и $g(x) = \sin 4x$:

$$f(g(x)) = 2\sin^2 4x - \sin 4x + 3, \tag{3}$$

$$g(f(x)) = \sin(8x^2 - 4x + 12). \tag{4}$$

Сборка осуществляется изнутри наружу.

Производная сложной функции $y = f(g(x))$ поясняется через замену $t = g(x)$ (это промежуточный результат, полученный ящиком $g$, который потом передается на вход ящика $f$) и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}. \tag{5}$$

Итоговая формула $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ отрабатывается на примерах с использованием образа матрешек: при взятии производной сначала вскрывается внешняя матрешка $f$ (и она получает штрих, при этом в производную подставляется то, что лежало во внешней матрешке, т.е. $g(x)$), затем вскрывается внутренняя матрешка $g$. Когда мы добрались до «конфетки» $x$, процесс останавливается.

**5. Интегрирование**

В этом разделе вводится понятие первообразной $F(x)$ и неопределенного интеграла

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{6}$$

Создается таблица первообразных на основе таблицы производных, рассказываются линейные свойства интеграла и метод подстановки $t = g(x)$:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(g(x)) + C. \tag{7}$$

Достаточно сложное понятие дифференциала вводится сначала просто как указание на переменную интегрирования, а затем, после вывода (7), как конструкцию под интегралом, которая тоже требует замены: $dt = g'(x)\,dx$. С помощью замены выводятся еще три табличных интеграла:

$$\int \frac{dx}{x - a} = \ln|x - a| + C, \tag{8}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C. \tag{10}$$

Обязательно считаются интегралы методом понижением степени:

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C, \tag{11}$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C. \tag{12}$$

Определенный интеграл вводится на лекции через интегральную сумму с предельно малым разбиением, что имеет смысл площади под графиком неотрицательной функции $f(x)$. Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{13}$$

поясняется с помощью приближенных рассуждений:

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n, \tag{14}$$

$$f(x_k)\Delta x_k = F'(x_k)\Delta x_k \approx \Delta F(x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1}), \tag{15}$$

где $x_0 = a$, $x_n = b$, $\Delta x_k \ll |b - a|$.

В этом же разделе вводятся несобственные интегралы и разбирается на примерах, что интегралы

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \tag{16}$$

сходятся при $\alpha < 1$ и $\alpha > 1$ соответственно. Полезно отметить, что при этом получаются конечные площади бесконечно длинных фигур, которые дополняют друг друга, так как соответствующие функции, например, $y = x^{-1/2}$ и $x = y^{-2}$, взаимно обратны:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1 + \int_1^\infty \frac{dy}{y^2}, \tag{17}$$

здесь 1 — площадь квадрата с вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$.

**6. Функции нескольких переменных**

Для функций нескольких переменных вводится понятие частных производных и отрабатывается на задачах. Затем вводится двойной интеграл

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy, \tag{18}$$

который имеет смысл объема тела, ограниченного поверхностью $z = f(x,y)$.

На практических занятиях решаются задачи на сведение двойного интеграла к повторному, смена порядка интегрирования, переход в полярные координаты. Хорошие примеры можно найти в [3, т. 2, с. 239-246].

## Список источников

1. Степанов М. Е. Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики // Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 54-94.

2. Бортник Л. И., Кайгородов Е. В., Раенко Е. А. О некоторых проблемах преподавания математики в высшей школе // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2013. № 4 (132). С. 19-24.

3. Пантаев М. Ю. Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода. В 2-х т. Т. 1. Изд. 2-е, испр. М.: ЛЕНАНД, 2015. 368 с. Т. 2. Изд. стереотип. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. 416 с.

4. Зайниев Р. М., Зайцева Ж. И. Компьютерные технологии в математическом образовании // Казанская наука. 2015. № 4. С. 195-198.

## References

1. Stepanov M. E. Some issues of methods of teaching higher mathematics. Modelirovanie i analiz dannykh = Modeling and data analysis. 2017. No. 1. P. 54-94. (In Russ.).

2. Bortnik L. I., Kaigorodov E. V., Raenko E. A. On some problems of teaching mathematics in higher education. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta = Bulletin of Tomsk State Pedagogical University. 2013. No. 4 (132). P. 19-24. (In Russ.).

3. Pantaev M. Iu. Mathematical Analysis with a Human Face, or How to Survive After the Limit Transition / 2 vols. Moscow, LENAND Publ., 2015. 368 p. Moscow, LIBROKOM Publ., 2015. 416 p. (In Russ.).

4. Zainiev R. M., Zaitseva Zh. I. Computer technologies in mathematical education. Kazanskaia nauka = Kazan Science. 2015. No. 4. P. 195-198. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 573-581.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 573-581.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.851

# ПРИЁМЫ АКТИВИЗАЦИИ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ СПО ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИИ

***Татьяна Львовна Овсянникова[1]✉, Ирина Евгеньевна Марахова[2]***
*[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]otl19@yandex.ru✉, [2]ira_marakhova@mail.ru*

***Аннотация.*** *Статья посвящена описанию методических приёмов, повышающих активность познавательной учебной деятельности студентов учреждений СПО при изучении тригонометрии. Активизации познавательной учебной деятельности студентов способствует систематическая организация их самостоятельной работы, проведение эвристической беседы, выполнение исследовательских заданий, использование в обучении информационно-коммуникационных технологий.*

***Ключевые слова:*** *обучение студентов СПО, активизация познавательной учебной деятельности студентов, изучение тригонометрии.*

Conference paper

# METHODS OF ACTIVATING COGNITIVE LEARNING ACTIVITIES OF STUDENTS OF SECONDARY VOCATIONAL EDUCATION WHEN STUDYING TRIGONOMETRY

***Tatiana L. Ovsyannikova[1]✉, Irina E. Marakhova[2]***
*[1,2]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]otl19@yandex.ru✉, [2]ira_marakhova@mail.ru*

***Abstract.*** *The article is devoted to the description of methods that increase the students' cognitive learning activities of vocational education institutions in the study of trigonometry. The improvement of students' cognitive learning activities is facilitated by the systematic organization of their independent work, conducting heuristic conversations, performing research tasks, and using information and communication technologies in teaching.*

© Овсянникова Т. Л., Марахова И. Е., 2024

***Keywords:*** *teaching students of secondary vocational education, activation of cognitive learning activities of students, the study of trigonometry.*

**Введение**

Изучение тригонометрии в школе и учреждениях СПО является важной составляющей математического образования. Студенты СПО, особенно технических и естественно-научных направлений подготовки, должны обладать прочными знаниями по тригонометрии, поскольку они являются звеном огромной цепи понятий и играют важную роль в освоении смежных предметов – физики, электротехники, экономики, биологии.

Однако изучение тригонометрических функций сопряжено с определёнными трудностями, среди которых сложность логической структуры определений, высокий уровень абстракции, широкий круг рассматриваемых вопросов и при этом недостаточное количество учебного времени, отводимого на их изучение [1].

Опытные педагоги отмечают, что для более глубокого погружения в тему и качественного усвоения материала, необходимо создать благоприятные условия обучения. Ещё в 1895 году Дж. Дьюи делал акцент на развитии собственной активности обучаемых и отмечал, что обучение, построенное с учётом интересов учащихся и связанное с их жизненными потребностями, даёт гораздо лучшие результаты, чем «вербальное» (словесное, книжное) обучение, основанное на запоминании знаний. Ведущий специалист в области теории и истории педагогики И.П. Подласый отмечал, что в зависимости от того, какую познавательную активность развивает учащийся, он достигает одного из уровней обучения: чем выше активность, тем продуктивнее его деятельность [2].

Отсутствие активности и познавательного интереса у учащихся – показатель серьёзных недостатков в организации процесса обучения. Именно познавательному интересу присуща эмоциональная окраска, которая выражается в чувстве радости, глубокого удовлетворения, появляющегося в результате осознания личностью собственного движения на пути познания. Поэтому одной из важнейших задач учителя при изучении такого сложного раздела математики как тригонометрия является задача активизации познавательной учебной деятельности учащихся.

**Текст статьи**

Формирование и развитие личности студента происходит во время обучения, приобретения им широких жизненных, активно осваиваемых и используемых знаний. Нельзя себе представить, что учебный процесс ограничен замкнутым кругом научных знаний, обособленных от направленности личности. При организации процесса обучения преподавателю нельзя настраивать себя на стандартное прохождение программы, главный его ориентир – активная позиция учащегося, его познавательная деятельность в учебном процессе. Активность студентов не возникает сама по себе, она должна преднамеренно и специально регулироваться преподавателям. Существуют различные методические приёмы, способствующие активизации познавательной деятельности учащихся.

Рассмотрим те из них, которые на наш взгляд, наиболее эффективны при изучении тригонометрии.

**1.** Активизации познавательной учебной деятельности студентов среднего профессионального образования при изучении тригонометрии будет способствовать организация их самостоятельной работы [3].

Именно в результате собственной деятельности студент может наиболее глубоко и осознанно освоить изучаемый материал. Активная работа учащегося должна происходить как на уроке, так и обязательно дома. Обратим особое внимание, что далеко не все учащиеся умеют работать самостоятельно с предоставленным заданием. А если результата работы нет, то пропадает интерес к её выполнению, у студента появляется привычка приходить на занятия без выполненного домашнего задания или учащийся начинает злоупотреблять списыванием.

Успешному обучению сопутствует желание учиться, но обстановку для данного обучения должен создавать преподаватель. Важно помочь учащимся правильно организовать работу дома или на занятии самостоятельно: дать ориентиры в последовательности выполнения работы, показать особенности работы со справочным материалом, научить составлять опорные конспекты, выделять базовые задачи по теме и приёмы их решения, составить соответствующие памятки. Чтобы студентов не пугала самостоятельная работа, необходимо организовать постепенный переход от работы под руководством учителя и выполнения заданий по образцу к индивидуальной работе, систематически предлагать тренировочные работы, а также давать долгосрочные творческие домашние задания. Например: самим изучить по предложенному преподавателем плану тему и объяснить её на занятии своим однокурсникам. Это могут быть такие темы как «Формулы суммы и разности двух углов», «Частные случаи формул для решения тригонометрических уравнений», «Использование ограниченности функций при решении уравнений», «Отбор корней тригонометрического уравнения графическим методом» и другие. Такая работа с одной стороны повысит ответственность тех, кто будет выступать в роли обучающего, а с другой стороны вызовет интерес и внимание слушателей.

Именно при самостоятельной работе учащиеся вынуждены активно работать: преодолевать затруднения, перерабатывать в своём сознании учебный материал и, благодаря этому, лучше осмысливать и усваивать его. Самостоятельные работы содействуют не только повышению познавательной активности учащихся, но и укреплению их веры в свои силы, развитию их умения учиться, добывать знания.

**2.** Эвристическая беседа – это диалог между учителем и учащимися, в течение которого, преподаватель задаёт в определённой системе, хорошо продуманные и умело поставленные вопросы проблемного характера, которые подтолкнут студентов к открытию новых знаний, различных методов доказательства и определения математических понятий. Эвристическая беседа является такой формой обучения, которая способствует побуждению учащихся к активной мыслительной деятельности, приучает их самостоятельно делать выводы и обобщения [2].

Для того чтобы беседа достигла цели, то есть чтобы в результате неё студенты обрели новые знания, активизировали свою деятельность на занятии и развили навыки самостоятельного мышления, необходимо не только составить определённую систему вопросов, но и всей предыдущей работой подготовить учащихся к тому, чтобы они сумели дать ответы на эти вопросы. Это объясняется тем, что одним из условий успешного проведения беседы является наличие у студентов знаний и представлений, приобретённых ими в предшествующей учебной работе, которые должны составить исходный материал беседы.

Например, на уроке по теме «Формулы приведения» преподаватель может построить изучение нового материала в форме эвристической беседы.

На этапе актуализации знаний следует повторить определения функций синус, косинус, тангенс и котангенс, а также зависимость знаков этих функций от четверти.

Следующим этапом будет, непосредственно, сообщение нового материала методом эвристической беседы. Учитель предлагает рассмотреть чертёж (рисунок 1) и ответить на вопросы.

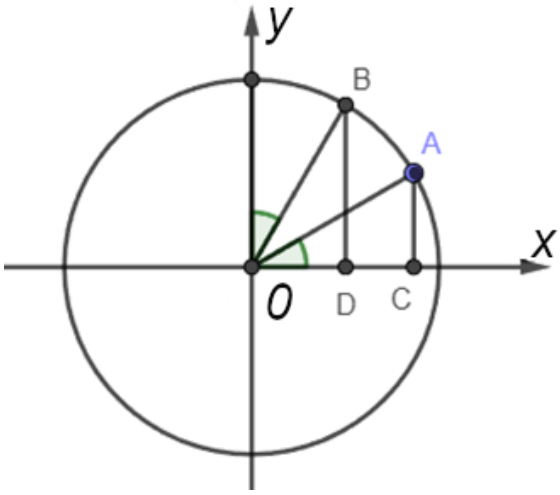



Рисунок 1 – Единичная окружность.

*Учитель.* Рассмотрим единичную окружность. Проведём луч, составляющий с осью абсцисс угол α и на единичной окружности отметим точку *A* пересечения с этим лучом. Проведём перпендикуляр *AC* к оси абсцисс. Рассмотрим получившийся прямоугольный треугольник *OCA*. Его гипотенуза равна единице (радиус единичной окружности), тогда *OC*=cos α, *AC*=sin α. Мы можем говорить, что точка *A* получена при повороте точки с координатами (1; 0) на угол α. Чему равны абсцисса и ордината точки *A*?

*Учащиеся.* Абсцисса точки А равна косинусу угла α, а ордината – синусу угла α.

*Учитель.* Теперь отметим на единичной окружности точку *B* пересечения с лучом, который составляет с осью ординат угол α. Чему будет равен угол BOC?

*Учащиеся.* Угол *BOC* равен $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

*Учитель.* Проведём перпендикуляр *BD* к оси абсцисс. Рассмотрим теперь треугольник *ODB*. Что можно заметить?

*Учащиеся.* Этот треугольник прямоугольный. Его гипотенуза равна единице, а катеты можно найти: $OD = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $BD = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

*Учитель.* Чему равны абсцисса и ордината точки *B*?

*Учащиеся.* Абсцисса точки *B* равна $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, а ордината – $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

*Учитель.* Что можно сказать о треугольниках *OAC* и *OBD*?

*Учащиеся.* Оба треугольника прямоугольные, равны их гипотенузы и острые углы. Значит и сами треугольники тоже равны.

*Учитель.* Что следует из равенства треугольников?

*Учащиеся.* Что равны все соответствующие элементы этих треугольников. Катет $BD$ равен катету $OC$ или $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$. Катет $DO$ равен катету $AC$ или $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$.

*Учитель.* Какой вывод можно сделать?

*Учащиеся.* Делаем вывод, что если приведение осуществляется через угол $\frac{\pi}{2}$, то тригонометрическая функция меняется на кофункцию.

*Учитель.* Аналогичную работу можно проводить и в других координатных четвертях. Как Вы думаете, на что ещё надо обратить внимание?

*Учащиеся.* На знак функции. Например, в третьей четверти тригонометрические функции синус и косинус имеют отрицательные значения.

*Учитель.* Правильно. А как можно определить, положителен или отрицателен знак функции?

*Учащиеся.* Нужно посмотреть на четверть, в которой будет находиться угол, рассмотрев его смещение относительно осей координат.

Рассматривая аналогичным образом другие примеры формул приведения и обобщая их учащиеся под руководством преподавателя придут к формулировке правила использования формул приведения.

Успех занятия зависит от достаточности запаса знаний у учащихся, использование которых помогает им продвигаться дальше, правильно отвечать на вопросы учителя и формулировать свои выводы, а также активности студентов.

Эвристическая беседа имеет исключительно важное значение для развития умения мыслить, рассуждать, искать оригинальное решение любого вопроса как теоретического, так и практического, а главное, активизировать студентов на уроке для обеспечения вполне сознательного и прочного усвоения соответствующего материала всеми учащимися.

**3.** Активизации познавательной учебной деятельности, познавательной активности и творческих способностей студентов среднего профессионального образования при изучении тригонометрии будет способствовать организация исследовательской деятельности учащихся.

Учебная исследовательская деятельность заключается в решении учащимися исследовательской задачи с заранее неизвестным им результатом. Исследовательская работа даёт возможность повысить познавательную активность, способствует формированию интереса к изучаемому предмету и

научному познанию в целом, развивает мышление и творческие способности у учащихся.

Сначала преподаватель может ставить перед учащимися отдельные исследовательские задачи, демонстрируя учащимся поэтапно подходы к их решению. Например, исследовательская работа по изучению влияния параметров $A, \omega, \varphi$ на колебательный процесс, описываемый уравнением $s = A\sin(\omega t + \varphi)$.

Далее можно организовывать более серьёзную и длительную работу учащихся, связанную с проведением исследовательской деятельности. Учащиеся также могут поставить проблему исследования самостоятельно, например, «Как развивался раздел математики «Тригонометрия»?», «Применение тригонометрии при конструировании автомобиля», «Применение тригонометрии при эксплуатации автомобиля», «Тригонометрия в строительном деле» и др. В процессе координирования научно-исследовательской работы студентов, преподаватель знакомит их с методами научного познания, направляет, мотивирует, учит искать информацию, помогает сформулировать и решить проблему исследования. Далее студенты осуществляют самостоятельный поиск путей ее решения, выдвигают и проверяют гипотезы, обосновывают правильность выбранных методов, формулируют выводы о проделанной работе. При этом ученики приобретают новое знание и осваивают технику исследовательской деятельности. Использование в обучении данного метода приближает учебную исследовательскую деятельность к исследовательской работе учёного.

Не менее важно и умение выступить и рассказать о результатах своего исследования. Обычно студенты готовят доклады по результатам выполненной работы и выступают на организованной преподавателем конференции. В случае успешного выполнения разработки студенты могут принять участие и в более серьёзных конкурсах. Это в свою очередь также способствует повышению активности студента, его заинтересованности в качественном изучении предмета.

**4.** Современные информационно-коммуникационные технологии стали неотъемлемой частью нашей жизни. ИК-технологии стали важным инструментом образовательного процесса. Современный урок как для школьников, так и для студентов учреждений СПО не может быть ограничен учебником и классной доской. ИК-технологии позволяют расширить круг изучаемых на уроке вопросов, сделать подачу материала наглядной, а сам процесс обучения интерактивным. Компьютер как средство обучения обладает очень большими с точки зрения воздействия на восприятие, возможностями: точность и наглядность изображения, цвет, звук и динамика. Обладая высокой эффективностью обработки различных типов информации, компьютер даёт способствует проведению различного рода математических опытов и наблюдений, которые могут являться хорошей пропедевтикой введения ряда абстрактных понятий.

При изучении свойств тригонометрических функций очень важно обеспечить наглядность, однако построение сложных графиков – процесс

достаточно трудоёмкий. Для повышения наглядности и с целью экономии времени можно использовать систему динамической геометрии GeoGebra. GeoGebra предоставляет широкий спектр инструментов для работы с функциями (построение графиков и их асимптот, нахождение производных, экстремумов, интегралов и т.д.). Более того, есть команды, позволяющие задавать изменение параметров функции (коэффициентов) и проследить эти изменения на графиках. Преподаватель может открывать по мере необходимости или, наоборот, скрывать изображения необходимых для демонстрации фигур. Таким образом можно не только построить график функции, но и «оживить его». У учителя появляется возможность достаточно быстро продемонстрировать ученикам целые серии графиков тригонометрических функций. Студенты не только смогут увидеть графики тригонометрических функций и особенности их построения, но и провести исследовательскую работу по выявлению свойств функций.

Например, сравнивая графики функций $y = sin\, x$ и $y = sin\, 2x$, выведенные на экран одновременно (рисунок 2), учащиеся приходят к выводу о сжатии графика вдоль оси абсцисс в 2 раза. Далее преподаватель, используя команду «ползунок» и меняя в формуле коэффициент $k$, помогает студентам проследить сжатие и растяжение графика функции $y = \sin kx$ (рисунок 3). После этого учащиеся могут сделать окончательный вывод об особенностях графика функции $y = \sin kx$ в зависимости от аргумента.

Возможно использование и других программ, повышающих активность студентов при изучении тригонометрии. Среди них отметим следующие.

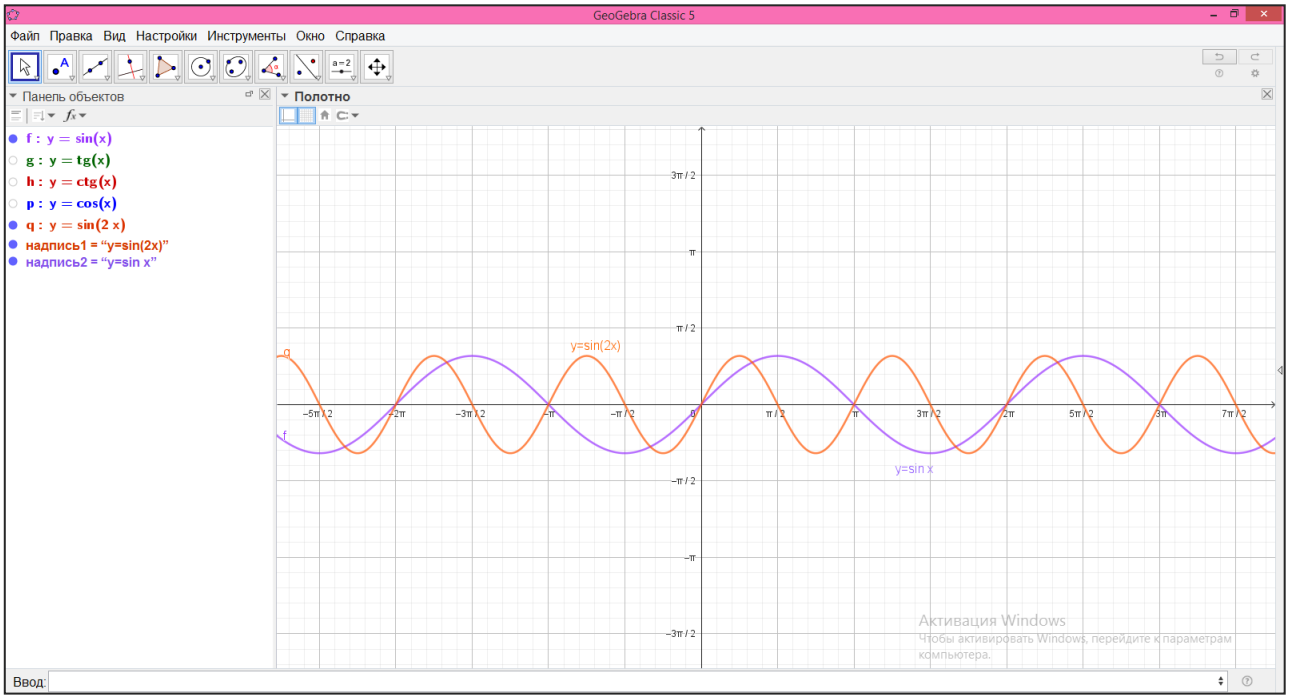



Рисунок 2 – Графики функций $y = \sin x; y = \sin 2x$.

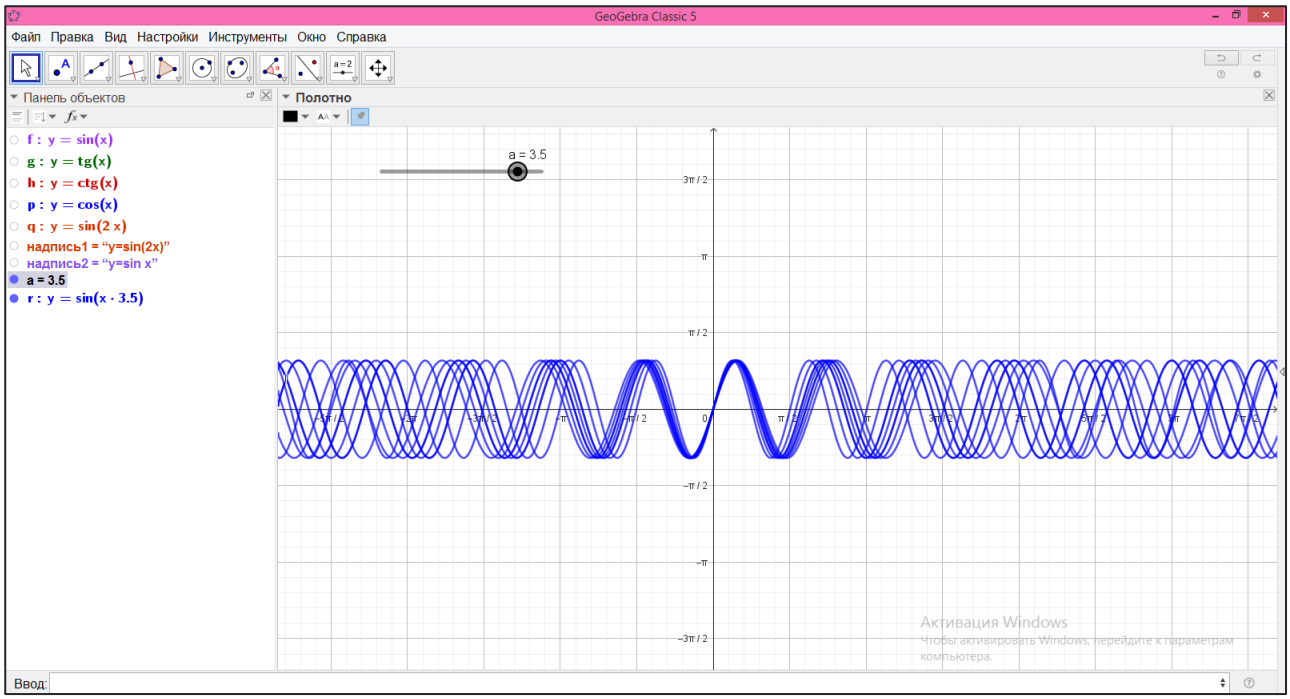



Рисунок 3 – График функции $y = \sin ax$.

Создание и использование презентации PowerPoint в процессе преподавания является качественным средством повышения уровня познавательной деятельности студентов, поскольку позволяет достоверно, системно и целостно представить большой объём изучаемой информации. Переключая слайды, преподаватель управляет учебной деятельностью студентов: одни слайды помогают усвоить им информацию, а другие проверить, насколько понятна изучаемая тема.

Изучение тригонометрии подразумевает запоминание большого числа формул. Их осмысленному запоминанию способствует применение при выполнении различных упражнений. Для того, чтобы каждый студент активно включился в выполнение таких упражнений, можно использовать различного рода тренажёры. По итогам изучения отдельных разделов и темы в целом необходимо организовать систематическую проверку. Проверка студенческих работ достаточно затратна по времени, а результат проверки желательно доводить до студентов как можно быстрее после осуществления контроля. Поэтому можно использовать тесты, составленные учителем самостоятельно или с использованием готовых в таких программах как LearningApps и OnlineTestPad. Они обеспечивают вариативность подачи вопросов, индивидуализацию их выполнения и быструю обратную связь. Всё это повышает активность учащихся в изучении тригонометрии.

## Заключение

Используя вышеперечисленные приёмы, учитель сможет поддерживать высокую активность студентов, формировать их интерес к изучению тригонометрии, а значит обеспечить высококачественное усвоение знаний студентами учреждений СПО.

## Список источников

1. Мухаметова, Л. К., Сабитов, К. Б. Методические особенности изучения тригонометрии в старших классах // Науки об образовании. 2019. №6. С. 908-912.

2. Подласый, И. П. Педагогика: учебник для вузов. – М.: Юрайт, 2024. 575 с. – ISBN 978-5-534-03772-2. – // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/535418.

3. Алексанян, Г. А. Реализация модели формирования самостоятельной деятельности студентов СПО на примере изучения темы «Тригонометрия» // Концепт. 2016. Т. 41. С. 21-27.

4. Менчинская, Н. А. Проблемы обучения, воспитания и психического развития ребёнка: Избранные психологические труды / Под ред. Е.Д. Божович. – М.: Московский психолого-социальный институт. Воронеж: НПО «МОДЭК». 2004. – 512 с. – ISBN 5-89502-514-5, 5-89395-552-8.

## References

1. Mukhametova, L. K., Sabitov, K. B. Methodological features of the study of trigonometry in high school // Science of education. 2019. No.6. pp. 908-912.

2. Podlasyi, I. P. Pedagogy: textbook for universities. – M.: Yurayt, 2024. 575 p. – URL: https://urait.ru/bcode/535418.

3. Aleksanyan, G. A. The implementation of a model for the formation of independent activity of vocational education students on the example of studying the topic "Trigonometry" // Concept. 2016. Vol. 41. pp. 21-27.

4. Menchinskaya, N. A. Problems of teaching, upbringing and mental development of a child: Selected psychological works / Ed. by E.D. Bozhovich. – M.: Moscow Psychological and Social Institute. Voronezh: NPO MODEK. 2004. – 512 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 582-585.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 582-585.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 514(075.8):81(075.8)

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОБЪЕМОВ ФИГУР В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

***Ирина Владимировна Прояева[1]✉, Алексей Николаевич Колобов[2]***
*[1,2]Оренбургский государственный педагогический университет имени В.П. Чкалова, г. Оренбург, Россия*
*[1,2]Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (Оренбургский филиал), г. Оренбург, Россия*
*[1,2]Оренбургский государственный университет, г. Оренбург, Россия*
*[1]docentirina@mail.ru✉, [2]kolobovan@ya.ru*

***Аннотация.*** *В данной статье рассматривается один из важных вопросов современного инженерного образования - решение прикладных задач с помощью математического аппарата, в частности с использованием свойств объемов фигур. Важная и неоценимая роль задач прикладного характера подтверждена многими научными открытиями в области техники, науки, образования и т.п. Также следует отметить, что решение прикладных задач обладает огромным потенциалом для развития логического мышления человека, что показывает актуальность данного исследования и необходимость ее изучения. Основное внимание в работе авторы акцентируют на применении метода объемов к решению прикладных задач физики, которые являются одними из сложных при изучении различных разделов физических дисциплин в ВУЗе.*

***Ключевые слова:*** *метод объемов**,** планиметрические задачи, современная математика, новые технологии, элементарная геометрия.*

Conference paper

# APPLICATION OF THE THEORY OF THE VOLUME OF FIGURES IN APPLIED PROBLEMS

***Irina V. Proyaeva[1]✉, Alexey N. Kolobov[2]***
*[1,2]Orenburg State Pedagogical University named after V.P. Chkalov, Orenburg, Russia*
*[1,2]Volga Region State University of Telecommunications and Informatics (Orenburg branch), Orenburg, Russia*
*[1,2]Orenburg State University, Orenburg, Russia*
*[1]docentirina@mail.ru✉, [2]kolobovan@ya.ru*

© Прояева И. В., Колобов А. Н., 2024

***Abstract.*** *This article discusses one of the important issues of modern engineering education - solving applied problems using a mathematical apparatus, in particular using the properties of the volumes of shapes. The important and invaluable role of applied tasks has been confirmed by many scientific discoveries in the field of technology, science, education, etc. It should also be noted that the solution of applied problems has great potential for the development of human logical thinking, which shows the relevance of this research and the need to study it. The authors focus on the application of the volume method to solving applied physics problems, which are among the most difficult when studying various sections of physical disciplines at a university.*

***Keywords:*** *volume method, planimetric problems, modern mathematics, new technologies, elementary geometry.*

## 1. Введение

В период активного развития информационных и цифровых технологий, математика и ее разделы со своими специфическими методами и подходами к решению прикладных задач в любой области науки и техники выходит на первый план. Начиная с древних времен и на протяжении тысячелетий ученые – математики продвигали науку своими, порой кажущимися безумными новыми идеями и технологиями, которые сначала не принимались в силу своей непонятности. Но после прохождения некоторого времени, когда аппарат был осознан, математические методы позволяли решать сложные и порой, неразрешимые задачи разных научных направлений с легкостью. И постепенно геометрия со своими законами стала активно использоваться в математике и ее приложениях [1].

## 2. Основной текст статьи

Рассмотрим в качестве примера решение физической задачи с использованием геометрического аппарата, подтверждающее этот факт [2].

Пример.

Доска толщиной 5 см плавает в воде, погрузившись на 70%. Поверх воды разливается слой нефти толщиной 1 см. На сколько будет выступать доска над поверхностью нефти [3]?

*Решение:*

Так как доска изначально плавает в воде, то можно записать для нее условие плавания тел: $F_{A1} = mg$.

Левая часть записанной формулы представляет собой силу Архимеда. Запишем эту формулу учитывая, что $F_{A1} = \rho_{ж} g V_{тв}$ и $m = \rho V$:

$$\rho_{ж} g V_{тв} = \rho V g,$$

$$\rho_{ж} V_{тв} = \rho V.$$

По условию $\frac{V_{тв}}{V} = 0{,}7$ (погруженные 70% доски), значит плотность материала доски равна: $0{,}7\rho_{ж} V = \rho V \Rightarrow \rho = 0{,}7\rho_{ж}$.

По условию доска погружена в воду. Плотность воды $\rho_{ж} = 1000$ кг/м$^3$.

Далее поверх воды разливают нефть. Очевидно, она будет находиться выше, чем вода, поскольку имеет меньшую плотность ($\rho_{\text{н}} = 800$ кг/м$^3$). Доска также будет плавать, запишем второй раз условие плавания тел:

$$F_{A2} + F_{A\text{н}} = mg$$

Рассматривая два равенства $F_{A1} = mg$ и $F_{A2} + F_{A\text{н}} = mg$, можно заметить, что их правые части одинаковые, следовательно, мы имеем право приравнять левые части: $F_{A1} = F_{A2} + F_{A\text{н}}$. Из этого равенства следует, что Архимедова сила в первом случае оказалась больше, чем во втором, значит, когда разольют нефть, объем доски, погруженный в воду, станет меньше.

Распишем равенство [3] $F_{A2} + F_{A\text{н}} = mg$:

$$\rho_{\text{ж}} g V_{\text{тв2}} + \rho_{\text{н}} g V_{\text{тн}} = \rho V g$$
$$\rho_{\text{ж}} V_{\text{тв2}} + \rho_{\text{н}} V_{\text{тн}} = \rho V.$$

Полный объем доски с площадью основания $S$ будет равен $V = Sh$, а объем части доски, погруженной в нефть, будет равен: $V_{\text{тн}} = Sh_{\text{н}}$. А если же доска будет выступать над нефтью на величину а, то объем доски $V_{\text{тв2}}$, погруженный в воду, равен $S(h - h_{\text{н}} - a)$.

Подставим полученные значения объемов в последнюю формулу:

$$\rho_{\text{ж}} S(h - h_{\text{н}} - a) + \rho_{\text{н}} S h_{\text{н}} = \rho S h$$
$$\rho_{\text{ж}} (h - h_{\text{н}} - a) + \rho_{\text{н}} h_{\text{н}} = \rho h$$

Учитывая, что $\rho = 0{,}7\rho_{\text{ж}}$, получим:

$$\rho_{\text{ж}} (h - h_{\text{н}} - a) + \rho_{\text{н}} h_{\text{н}} = 0{,}7\rho_{\text{ж}} h$$

Из полученного равенства выразим искомую величину $a$:

$$0{,}3\rho_{\text{ж}} h - \rho_{\text{ж}} h_{\text{н}} + \rho_{\text{н}} h_{\text{н}} = \rho_{\text{ж}} a,$$
$$a = 0{,}3h - h_{\text{н}} \left(1 - \frac{\rho_{\text{н}}}{\rho_{\text{в}}}\right).$$

Подставляя численные значения, переведенные в систему СИ, вычисляем:

$$a = 0{,}3 * 0{,}5 - 0{,}01 \left(1 - \frac{800}{1000}\right) = 0{,}013 \text{ м}.$$

Данная задача является примером того, как используются знания обучающихся по разделу геометрии «Объемы тел». Многие физические задачи из раздела «Статика» предполагают нахождение объема каких-либо тел, газа или жидкости, которые заполняют сосуд определенной форм.

### 3. Заключение

Результаты взаимодополняемости дисциплин [4] естественно-научного цикла современной науки успешно применяются в военной области, сельском хозяйстве, индустрии, транспортной отрасли, экономике, системе здравоохранения и в технике. Широкое использование межпредметных связей подкрепляется высокоэффективными компьютерными алгоритмами, реализующими различные методы [5]. Материал статьи может быть полезен студентам высших учебных заведений, обучающихся на математических, инженерных и экономических специальностях.

## Список источников

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики: Учеб пособие: для вузов. В 5 т. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. – 5-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.

2. Беликов Б. С. Решение задач по физике. Общие методы: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 256 с.

3. Савченко О. Я. Задачи по физике: Учеб. пособие / И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова и др.; под ред О. Я. Савченко. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. – 416 с.

4. Замятнин М. Ю. Сборник задач по физике. Тепловые явления. Постоянный ток. Оптика. – Уч. изд. – Москва, 2020. – 360 с.

5. Прояева И.В. Об организации компетентностно-ориентированного подхода самостоятельной работы бакалавров по математическим дисциплинам на технических специальностях ВО // Реализация компетентностного подхода в сфере инженерной подготовки (авторская монография), ООО АЭТЕРНА, 2017, г. Уфа. С. 101-10.

## References

1. Sivukhin D. V. General Course of Physics: Textbook: For Universities. In 5 Volumes. Volume II. Thermodynamics and Molecular Physics. - 5th ed., corrected. - Moscow: FIZMATLIT, 2005. - 544 p.

2. Belikov B. S. Solving Problems in Physics. General Methods: Textbook for University Students. - Moscow: Higher School, 1986. - 256 p.

3. Savchenko O. Ya. Problems in Physics: Textbook / I. I. Vorobyov, P. I. Zubkov, G. A. Kutuzova et al.; edited by O. Ya. Savchenko. - 2nd ed., revised. - Moscow: Science. Ed. in Chief of Phys. and Mathematics Literature. 1988. - 416 p.

4. Zamyatin M. Yu. Collection of problems in physics. Thermal phenomena. Direct current. Optics. - Uch. pub. - Moscow. "Chance", 2020. - 360 p.

5. Proyaeva I. V. On the organization of a competency-oriented approach to independent work of bachelors in mathematical disciplines in technical specialties of higher education // Implementation of a competency-based approach in the field of engineering training (author's monograph), OOO AETERNA, 2017, Ufa. P. 101-10.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 586-590.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 586-590.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 53.05

# ЛЕКЦИОННАЯ ДЕМОНСТРАЦИЯ ПИРОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

***Валентин Сергеевич Румянцев[1]✉, Наталья Николаевна Большакова[2]***
*[1]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[2]Тверской государственный университет, Тверь, Россия*
*[1]rumyancev1946@rambler.ru✉*

***Аннотация.*** *В статье обоснован метод демонстрации пироэлектрического эффекта с использованием электронного осциллографа, приведена структурная схема и описана демонстрационная установка, реализованная авторами, изложена методика выполнения демонстрации.*
***Ключевые слова:*** *пироэлектрический эффект, демонстрация.*

Conference paper

# LECTURE DEMONSTRATION OF THE PYROELECTRIC EFFECT

***Valentin S. Rumyantsev[1]✉, Natalia N. Bolshakova[2]***
*[1]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[2]Tver State University, Tver, Russia*
*[1]rumyancev1946@rambler.ru✉*

***Annotation.*** *The article substantiates the method of demonstrating the pyroelectric effect using an electronic oscilloscope, provides a structural diagram and describes the demonstration setup implemented by the authors, and sets out the method of demonstration.*
***Key words:*** *pyroelectric effect, demonstration.*

Среди кристаллических диэлектриков пироэлектрики выделяются тем, что обладают электрической поляризацией, существующей в отсутствии внешних электрических полей и других внешних воздействий. Такое состояние принято называть спонтанно (т. е. самопроизвольно) поляризованным. Оно количественно характеризуется в каждой точке кристалла вектором спонтанной поляризованности (спонтанной поляризованностью) $\vec{P}_S$. Спонтанную поляризованность пироэлектрика в стационарном состоянии обнаружить, а тем

© Румянцев В. С., Большакова Н. Н., 2024

более измерить, весьма трудно, так как связанные поляризационные заряды на поверхности кристалла скомпенсированы свободными зарядами, натекающими из его объёма за счёт хотя и малой, но не нулевой электропроводности, а также извне [1-3].

При достаточно быстром изменении температуры пироэлектрика за счёт изменения $\vec{P}_s$ компенсация поляризационных зарядов нарушается и их можно экспериментально наблюдать до тех пор, пока свободные заряды не скомпенсируют их вновь. Это явление называется первичным (истинным) пироэлектрическим эффектом [4].

Так как все пироэлектрики являются пьезоэлектриками (но не наоборот), то при однородном изменение температуры происходит их пьезоэлектрическая поляризация в результате механических напряжений, воникающих в механически зажатом кристалле, или за счёт теплового расширения в механически свободном кристалле

[4]. Пьезоэлектрическая поляризованность изменяется с температурой, что проявляется аналогично первичному пироэффекту. Это явление называется вторичным (ложным) пироэффектом [4].

Может иметь место третичный пироэффект, являющийся следствием неоднородного нагревания или охлаждения пироэлектрического кристалла, сопровождающегося возникновением в нём неоднородных механических напряжений и соответствующим изменением поляризованности [4]. При одновременном существовании всех трёх или двух разновидностей пироэффекта их вклады в общий результат экспериментально разделить невозможно [5]. Поэтому под пироэффектом понимают весь круг явлений, связанных с изменением поляризованности пироэлектрика при изменении его температуры [4,5].

Наиболее значительным пироэффектом обладают кристаллы турмалина и сульфата лития [3, 4].

Особый подкласс пироэлектриков образуют сегнетоэлектрики. Они отличаются от обычных (линейных) пироэлектриков тем, что спонтанно поляризованное состояние у них существует только в определённом интервале температур, границы которого называются точками Кюри, а направление вектора $\vec{P}_s$ может быть изменено под воздействием внешнего электрического поля. Другая отличительная особенность: сегнетоэлектрики разбиваются на области спонтанной поляризации – электрические домены [1-5]. В области температур, прилегающей к точкам Кюри со стороны сегнетоэлектрической фазы, эти кристаллы проявляют высокую пироэлектрическую активность.

Сегнетоэлектриками являются кристаллы сегнетовой соли, титаната бария, триглицинсульфата и ряд других. Многие из них допускают образование твёрдых растворов и изготовление изделий по керамической технологии [6]. Благодаря большим значениям спонтанной поляризованности и значительным пьезоэлектрическим свойствам, пироэлектрический эффект в сегнетоэлектриках выражен гораздо сильнее, чем в линейных пироэлектриках.

Экспериментально пироэлектрический эффект исследуется двумя методами: квазистатическим [7] и динамическим [7, 8, 9]. В первом случае помещённый между обкладками конденсатора плоский пироэлектрический образец нагревается или охлаждается с постоянной скоростью изменения температуры. При этом регистрируются электрический ток в цепи, замыкающей обкладки конденсатора, или электрическое напряжение на резисторе в этой цепи как функции температуры. При динамическом методе плоский образец, покрытый металлическими электродами так, что спонтанная поляризованность перпендикулярна плоскости электродов, облучается периодическими импульсами электромагнитного излучения. Импульсы излучения, поглощенные образцом, периодически изменяют его температуру. В цепи, замыкающей электроды, возникает пиросигнал: импульсный ток и импульсное напряжение. Если излучение поглощается одним электродом, а противоположный электрод находится при постоянной температуре (образец прижат или приклеен к теплоотводу), то при длительности импульса излучения много меньше тепловой постоянной времени образца пиросигнал напряжения как функция времени прямо пропорционален потоку излучения как функции времени [7, 9] (1):

$$u(\tau) = \frac{\gamma \varepsilon_1 \, SW(\tau) R_{\text{н}}}{\text{c}_1 d}, \qquad (1)$$

где $\text{u}(\tau)$ – пиросигнал напряжения;
$\gamma$ – пироэлектрический коэффициент;
$S$ – площадь поглощающей поверхности образца;
$\varepsilon_1$ – коэффициент поглощения этой поверхности;
$W(\tau)$ – поток излучения;
$\tau$ – время;
$R_{\text{н}}$ – сопротивление входа измерительной цепи;
$\text{c}_1$ –теплоёмкость единицы объёма образца;
$d$ – толщина плоского образца.

Для демонстрации пироэффекта нами был выбран динамический метод. С целью выбора пироэлектрика были экспериментально исследованы этим методом две группы образцов поляризованных сегнетоэлектрических керамик. В одну группу входили образцы модифицированной пьезокерамики титаната бария. Другую группу составляли образцы пьезокерамики цирконата-титаната свинца марки ЦТС19. Все образцы имели форму плоскопараллельных пластинок, покрытых серебреными электродами. На один из электродов был нанесён графит для увеличения поглощения излучения.

Исследование проводилось на экспериментальной установке, блок-схема которой представлена на рис. 1.

В роли источника излучения нами использовался диапроектор «Свитязь». Поток излучения его мощной лампы накаливания формировался с помощью вогнутого зеркала и объектива проектора, а также собирающей линзы на оси оптической системы.

Модулятор формировал периодическую последовательность импульсов излучения. Он представлял собой непрозрачный вращающейся диск с вырезами в форме секторов круга. Поток излучения перекрывался непрозрачными

секторами диска в его самом узком месте после собирающей линзы, обеспечивая практически прямоугольную форму импульсов излучения. Диск приводился во вращение коллекторным электродвигателем переменного тока. Это позволяло изменять частоту вращения диска, а, следовательно, и период повторения импульсов излучения, за счёт изменения напряжения питания двигателя.

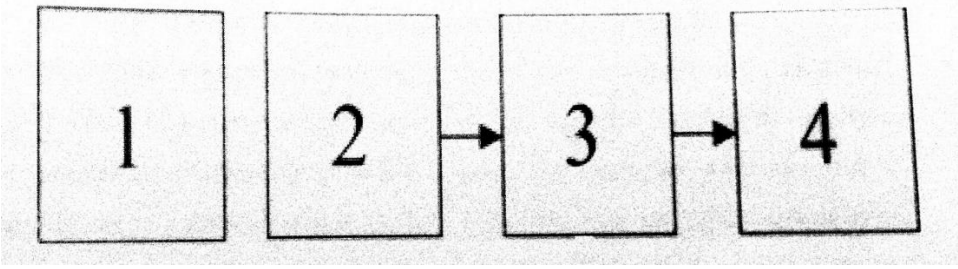



Рисунок 1 – Блок-схема экспериментальной установки: 1. источник излучения; 2. модулятор излучения; 3. кристаллодержатель с образцом; 4. электронный осциллограф.

Кристаллодержатель представлял собой медную посеребрённую пластинку толщиной 1 мм и площадью 23х45 мм$^2$.

К ней прижимался образец при помощи пружинных точечных контактов. Медная пластинка одновременно служила теплоотводом, поддерживающим постоянную температуру поверхности образца, соприкасающейся с ней, и электрическим контактом с соответствующим электродом образца. Поток излучения падал нормально на противоположный электрод через специальное отверстие в корпусе кристаллодержателя. Металлический корпус кристаллодержателя экранировал электрическую цепь образца от шумовых наводок, создаваемых внешними переменными электрическими и магнитными полями. Внутри корпуса электроды образца были замкнуты друг с другом через линейный резистор сопротивлением 9,9 МОм, пиросигнал напряжения с которого по экранированному кабелю подавался на открытый вход вертикальной развёртки электронного осциллографа.

Электронный осциллограф С1-73 позволял регистрировать пиросигнал как функцию времени, измерять напряжение пиросигнала с чувствительностью до 5 мВ/мм и его временные параметры. Входное сопротивление осциллографа 1 МОм. Измерения проводились при постоянной комнатной температуре воздуха. Скважность импульсного излучения была равна 0,5.

У всех исследованных образцов обеих керамик нами была обнаружена высокая пироэлектрическая активность. При облучении образцов со стороны одного из электродов периодическим импульсным потоком излучения в цепи возникали импульсы пиротока с тем же периодом повторения и с той же скважностью. Они имели место как в «светлых» промежутках облучения, так и в «тёмных», отличались противоположным направлением пиротоков, амплитудой и формой импульсов. Установлено, что амплитуда импульсов пиротока прямо зависит от периода повторения и амплитуды прямоугольных импульсов потока излучения. Первая из этих зависимостей для керамики титаната бария насыщается с ростом периода повторения импульсов излучения при постоянной амплитуде их потока излучения, а в керамики ЦТС19 в том же исследованном интервале периодов повторения указанное насыщение отсутствовало, а эта зависимость практически линейная. Вторая из указанных

зависимостей для исследованных образцов обеих керамик линейная, что соответствует теории [7, 9]. Свой выбор для демонстрации мы остановили на образцах пьезокерамики ЦТС19.

Лекционная демонстрация пироэлектрического эффекта нами проводилась с использованием установки, описанной выше. Поток излучения, падающий на поверхность образца, изменялся путём перемещения кристаллодержателя вдоль оптической оси осветительной системы. Период повторения импульсов излучения при их постоянной скважности изменялся за счёт изменения частоты вращения диска модулятора.

## Список литературы


1. Иона Ф., Ширане Д. Сегнетоэлектрические кристаллы. - М.: «Мир», 1965. – 555 с.
2. Смоленский Г.А., Боков В.А., Исупов В.А., Крайник Н.Н., Пасынков Р.Е., Шур М.С. Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики. – Л.: Наука, 1971. – 476 с.
3. Сонин А.С., Струков Б.А. Введение в сегнетоэлектричество / Учеб. пособие для втузов. -- М.: Высшая школа, 1970. – 271 с.
4. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
5. Рудяк В.М. Физика сегнетоэлектрических явлений. – Калинин, 1979.
6. Лайнс М., Гласс А. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы. – М.: Мир, 1981. – 736 с.
7. Новик В.К., Гаврилова Н.Д., Фельдман Н.Б. Пироэлектрические преобразователи. – М.: Советское радио, 1979. – 177 с.
8. Chynoweth A.G., Feldman W.L. J. Phys. Chem. Solids, 1960, v. 15, p. 225.
9. Кременчугский Л.С., Ройцина О.В. Пироэлектрические приёмники излучения. – Киев, Наукова думка, 1979. – 383 с.


## References


1. Jonah F., Sheerane D. Ferroelectric crystals. - Moscow: "Mir", 1965. – 555 p.
2. Smolensky G.A., Bokov V.A., Isupov V.A., Krainik N.N., Pasynkov R.E., Shur M.S. Ferroelectrics and antiferroelectrics. – Leningrad: Nauka, 1971. – 476 p.
3. Sonin A.S., Strukov B.A. Introduction to Ferroelectricity. Manual for Higher Technical Institutions. -- Moscow: Vysshaya shkola, 1970. – 271 p.
4. Zheludev I.S. Physics of crystal dielectrics. Moscow, Nauka Publ., 1968. – 463 p.
5. Rudyak V.M. Physics of ferroelectric phenomena. – Kalinin, 1979.
6. Lines M., Glass A. Ferroelectrics and related materials. Moscow, Mir Publ., 1981. – 736 p.
7. Novik V.K., Gavrilova N.D., Feldman N.B. Pyroelectric converters. Moscow, Soviet Radio Publ., 1979. – 177 p.
8. Chynoweth A.G., Feldman W.L. J. Phys. Chem. Solids, 1960, v. 15, p. 225.
9. Kremenchugsky L.S., Roitsina O.V. Pyroelectric radiation receivers. – Kiev, Naukova Dumka, 1979. – 383 p.

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 591-599.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 591-599.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.8

# ЭФФЕКТИВНЫЕ СТРАТЕГИИ РЕШЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ: ОТ АНАЛИТИКИ К ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

***Татьяна Александровна Симанёва[1]✉, Александра Викторовна Небытова[2]***
*[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]simanevata@mail.ru✉, [2]twicemy3456@gmail.com*

***Аннотация.*** *В статье рассматриваются эффективные стратегии решения основных прототипов 15 задачи в ЕГЭ по информатике. Приводятся примеры решения различных заданий, и обосновывается целесообразность аналитического или программного метода решения в зависимости от прототипа.*

***Ключевые слова:*** *подготовка к ЕГЭ по информатике, методика решения задач по логике, язык программирования Python.*

Conference paper

# EFFECTIVE STRATEGIES FOR SOLVING LOGICAL PROBLEMS IN THE UNIFIED STATE EXAM IN COMPUTER SCIENCE: FROM ANALYTICS TO SOFTWARE IMPLEMENTATION

***Tatyana A. Simaneva[1]✉, Alexandra V. Nebytova[2]***
*[1, 2]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]simanevata@mail.ru✉, [2]twicemy3456@gmail.com*

***Abstract****. The article discusses effective strategies for solving the main prototypes of the 15th problem in the Unified State Exam in computer science. Examples of solving various tasks are given and the expediency of the analytical or software method of solution depending on the prototype is substantiated.*

***Keywords:*** *preparation for the Unified State Exam in computer science, methods for solving problems in logic, Python programming language.*

## 1. Введение

Анализ результатов ЕГЭ по информатике за последние годы показывает, что процент выполнения заданий повышенной сложности остается достаточно

© Симанёва Т. А., Небытова А. В., 2024

низким, даже при использовании в качестве метода решения языки программирования [1]. Статистика выполнения задания 15 показывает, что оно является одним из трудных, выполнения его учащимися составляет менее 40%.

Согласно спецификации КИМ ЕГЭ, задание направлено на проверку знаний основных понятий и законов математической логики [2]. Проверяемые элементы содержания: алгебра логики, высказывательные формы (предикаты), кванторы существования и всеобщности, логические операции, таблицы истинности, логические выражения, логические тождества, логические операции и операции над множествами, законы алгебры логики, эквивалентные преобразования логических выражений, логические уравнения и системы уравнений, логические функции, зависимость количества возможных логических функций от количества аргументов, канонические формы логических выражений.

Проверяемые требования к предметным результатам освоения ООП СОО: строить логическое выражение в дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных формах по заданной таблице истинности; исследовать область истинности высказывания, содержащего переменные; решать несложные логические уравнения. Таким образом, базовыми понятиями данной темы являются: алгебра логики; теория множеств; бинарные операции; действия с предикатами.

Система знаний, умений и навыков, формирующаяся данной темой, является фундаментальной основой для дальнейшего обучения школьников в IT-сфере.

В рамках создания элективного курса «Подготовка к ЕГЭ по информатике с использованием языка программирования Python» мы провели анализ существующих методов решения задачи №15. В результате исследования, для проведения занятий по данной теме мы предложили наиболее эффективные алгоритмы, дающие устойчиво верный код для различных прототипов по данной теме.

**2. Основной текст статьи**

В соответствии с большим разнообразием заданий №15 ЕГЭ по информатике, выделяют несколько прототипов:

1. задачи с отрезки;
2. задачи на множества;
3. задачи с делителями;
4. задачи с битовыми логическими операциями;
5. анализ неравенств на плоскости;
6. смешанные задачи.

Для решения задач каждого типа можно использовать аналитический метод или программный код. Аналитический метод решения задач на преобразование логических выражений строятся на упрощении логического выражения, построении некоторого универсального множества и интерпретации ответа [3]. Данный метод можно эффективно использовать при несложном логическом выражении в условии задачи. Программный код, как правило, нужно использовать для прототипов, которые решать аналитика весьма трудоемко, ведь на решении задачи №15 отводится только 3 минуты. Таким образом,

компьютеризированный формат сдачи экзамена позволяет многие трудоёмкие задачи, которые раньше решались с помощью ручки и листа бумаги, решать быстро на компьютере.

При решении **прототипа «Отрезки»** можно использовать одновременно два основных метода: теоретический анализ и программный код. Существующие подходы к решению в программном коде позволяют выделить следующие проблемы, возникающие у учащихся: ошибки в наборе формулы; выколотые точки при подсчете длины отрезка, неверная интерпретация результатов решения [5, 6] при использовании для определения отрезка типы данных множество или список.

Шаблоны решения задания №15 «Отрезки» на языке программирования Python через множества или списки, предлагаемые различными авторами, подходят лишь для частных случаев и не дают стабильно правильного результата при решении данного прототипа. Наиболее интересное, универсальное решение данного задания, предложено через использование логического выражения для обозначения отрезка [А. Кабанов].

Рассмотрим пример, который дает верный ответ при решении с использованием в качестве отрезка списка или логического выражения.

**Пример 1.** На числовой прямой даны два отрезка: P = [25; 50], Q = [54; 75]. Найдите наименьшую возможную длину отрезка A, при котором формула

$(x \in Q) \rightarrow ( ((x \in P) \equiv (x \in Q)) \vee (\neg(x \in P) \rightarrow (x \in A)) )$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любых x.

Решение:

*Первый способ* с использованием списков в качестве длины отрезка:

```
P = list(range(25, 51))
Q = list(range(54, 76))
A = []
for x in range(24,76):
  if ((x in Q) <= (((x in P)==(x in Q)) or (((x not in P))<=(x in A)))) == False:
    A.append(x)
print(max(A)-min(A))
21
```

*Второй способ* с использованием логического выражения в качестве длины отрезка:

```
from itertools import*
def f(x):
    P=25<=x<=50
    Q=54<=x<=75
    A=a1<=x<=a2
    return (Q <= ((P==Q) or ((not P)<=A)))
Ox=[i/4 for i in range (25*4,76*4)]
m=[]
for a1, a2 in combinations(Ox,2):
    if all(f(x)==1 for x in Ox):
```

```
        m.append(a2-a1)
print(min(m))
```
21

В ответе получается наименьшая длина отрезка 21 и первым и вторым способом.

Другой пример демонстрирует неустойчивость работы кода при использовании списка для нахождения наибольшего отрезка A, при условии, что исходные отрезки не пересекаются.

**Пример 2**. На числовой прямой даны два отрезка: P=[15;33] и Q=[45;68]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что формула

((x ∈ A) ∧ ¬(x ∈ Q)) → ((x ∈ P) ∨ (x ∈ Q)) тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любых x.

*Первый способ* с использованием списка дает неверный результат, так как приводит к формированию списка из всех точек отрезков P и Q, в ответе дает 68-15=53. И если мы распечатаем точки нашего отрезка, то мы увидим разрыв в промежутке между точками 33 и 45, там точек нет, а значит, такого отрезка не существует, так как отрезок это непрерывный объект.

```
p=[i for i in range(15,34)]
q=[i for i in range(45,69)]
a=[i for i in range(1,100 )]
for x in range(1,100):
  if (((x in a)and (x not in q))<=((x in p) or (x in q))):
      a.remove(x)
print(len(a)-1)
```
53

*Второй способ* с использованием логического выражения в качестве обозначения отрезка демонстрирует устойчивость и выбирает правильный отрезок 23.

```
from itertools import*
def f(x):
  P=15<=x<=33
  Q=45<=x<=68
  A=a1<=x<=a2
  return (A and (not Q)) <= (P or Q)
Ox=[i/4 for i in range (1*4,100*4)]
m=[]
for a1, a2 in combinations(Ox,2):
  if all(f(x)==1 for x in Ox):
    m.append(a2-a1)
print(max(m))
```
23

Следует отметить и другие подводные камни, которые помогают обойти использование логического выражения в качестве определения отрезка - это

выколотые точки на границах отрезков, в которых функция может давать ложные значения функции. Для исследования функции вблизи концов отрезка используются дробные значения точек отрезка, строка программы Ox=[i/4 for i in range (1*4,100*4)] генерирует эти точки. При решении задания, иногда, в качестве ответа о нахождении длины отрезка, можно получить, например, 15.75 дробное число. Это говорит о том, что точка правее выколота, но при подсчете длины отрезка мы ее считаем, следовательно ответ 16.

Кроме того, в коде используется функция combinations модуля itertools, которая позволяет достаточно быстро получить все возможные наборы отрезков [a1, a2] из комбинации точек отрезка *Ox*, причём, упорядоченных по возрастанию и далее используя функцию all в условном операторе получить все истинные значения и сохранить отрезки в массиве.

При решении **прототипа «Множества»** можно использовать аналитическое решение и/или программный код.

Рассмотрим задачу с сайта [Полякова]

**Пример 3**. Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение $\neg(\neg(x \in A) \wedge (x \in \{3,6,9,12\})) \vee \neg(x \in \{1,2,3,4,5,6\})$ истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x. Определите наименьшее возможное количество элементов множества A.

1) Аналитическое решение предполагает замену обозначений множеств:

$x \in A = A$

$x \in \{3,6,9,12\} = B$

$x \in \{1,2,3,4,5,6\} = C$

Тогда, выражение перепишем в виде $\overline{(\bar{A} \wedge B)} \vee \bar{C}$.

2) Упростим выражение $\overline{(\bar{A} \wedge B)} \vee \bar{C} = A \vee \bar{B} \vee \bar{C}$

3) Решение задачи – условие, определяющее минимальное множество A= $= A_{min} = \neg\,\overline{(B \vee C)} = B \wedge C$

4) Интерпретируем результат: требуется найти числа, входящие во множество B, но не входящие в C. Таким образом, получим $A = \{3,6\}$

5) Наименьшее возможное количество элементов множества A – 2.

При программной реализации нахождения минимального множества A, полагаем, что множество A пустое и далее в цикле проверяем логическую функцию, и добавляем во множество A значения, для которых она ложна.

```
a=set()
b={3,6,9,12}
c={1,2,3,4,5,6}
def f(x):
  A=x in a
  B= x in b
  C= x in c
  return (not((not A) and B)) or (not C)
```

```
for x in range(1000):
  if f(x)==0:
    a.add(x)
print(a)
print(len(a))
```

```
{3, 6}
2
```

Таким образом, для простого логического выражения аналитический способ вполне укладывается в 3 минуты. Программный код также компактный.

Для нахождения максимального множества А, можно использовать программный код, используя следующий алгоритм: множества А возьмем большое и элементы из этого множества проверяем, подставляя в наше логическое выражение. Если выражение ложно, то элемент убираем из множества.

**Пример 4.** Элементами множеств A, P и Q являются натуральные числа, причём P = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20} и Q = { 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}. Известно, что выражение ((x ∈ A) → (x ∈ P)) ∧ ((x ∈ Q) → ¬(x ∈ A)) истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x. Определите наибольшее возможное количество элементов множества A.

```
a=set(range(1000))
p={2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
q={5,10,15,20,25,30,35,40,45,50}
def f(x):
  A=x in a
  P= x in p
  Q= x in q
  return ( A<= P) and (Q<= (not A))
for x in range(1000):
  if f(x)==0:
    a.remove(x)
print(a)
print(len(a))
```

```
{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18}
8
```

Проверка рассмотренных кодов для реализации заданий на «множество» подтверждает их устойчивость для различных начальных условий. Поэтому при сложных логических выражениях целесообразно решать с помощью кода.

Исследование алгоритма решения задач на другие прототипы: задачи с делителями, задачи с битовыми логическими операциями, анализ неравенств на плоскости показывает, что решение задач аналитически не всегда целесообразно, особенно на прототип с битовыми логическими операциями. Учащимся

достаточно сложно подобрать аналитически нужное значение, поэтому лучше для экономии времени можно использовать код на Python, он является компактным, достаточно понятным и устойчиво работает при любом условии.

Рассмотрим задание на битовые логические операции.

**Пример 5.** Обозначим через m & n поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n. Например, 14 & 5=11102 & 01012=01002=4. Для какого наименьшего натурального числа A формула
((x & 156 ≠ 0) ∨ (x & 436 ≠ 0)) → (x & A > 0) тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом неотрицательном значении переменной X)?

Рассмотри с помощью программирования. Код будет следующий:

```
def f(x):
   B= x&156!=0
   C= x&436!=0
   A= x&a>0
   return (B or C)<=A)
for a in range (1,1000):
   if all (f(x)==1 for x in range(1,1000)):
      print(a)
      break
444
```

В данной программной реализации, вычисление логического выражения мы вынесли в функцию и ввели несколько логических переменных для простоты записи сложного выражения. Как показывает практика при решении подобных задач большинство ошибок из-за неверной записи логического выражения. Разбиение его на несколько простых логических переменных позволяет этого избежать. Для нахождения минимального значения **a**, мы прерываем исполнения алгоритма на первом найденном значении **a**, и выходим из цикла оператором break. Аналогично решается тип, если надо найти наибольшее A. В этом коде достаточно убрать break и последнее выведенное значение будет искомое a. При условии, что логическое выражение **тождественно ложно**, в коде в операторе if необходимо заменить 1 на 0: if all (f(x)==0 for x in range(1,1000)):

«Задачи с делителями» и другие прототипы решаются аналогично предыдущей задаче.

**Пример 6.** Обозначим через **ДЕЛ**(*n, m*) утверждение «натуральное число *n* делится без остатка на натуральное число *m*». Для какого наибольшего натурального числа *A* формула ¬**ДЕЛ**(*x, A*) → (**ДЕЛ**(*x*, 6) → ¬**ДЕЛ**(*x*, 4)) тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной *x*)?

Программный код решения задачи можно записать следующим образом:

```
def delitel(x):
   A= x%a!=0
   B= x%6==0
   C= x%4!=0
   return A <= (B <=  C))
```

```
for a in range (1,1000):
   if all (delitel(x)==1 for x in range(1,1000)):
      print(a)
1
2
3
4
6
12
```

Ответ 12.

Для нахождения минимального значения цикл необходимо прервать оператором break или взять первое полученное число из списка вывода.

**3. Заключение**

В статье проанализированы алгоритмы решения задания №15 на проверку знаний законов алгебра логики и операций над множествами. Рассматриваются различные подходы к решению задач данного прототипа от аналитики до программного кода. Показана целесообразность решения некоторых прототипов с использованием программного кода. Проведено исследование алгоритмов на стабильность получения правильного решения задачи.

Таким образом, развитие у старших школьников алгоритмического стиля мышления и умения решать задачи ЕГЭ на основе шаблонов – программ на языке Python, поможет овладеть им знаниями в области программирования, которые будут востребованы в дальнейшем обучении в вузе по IT - направлениям. Фундаментальное обучение алгоритмизации в старших классах обеспечивает учащимся основу для успешного решения задач ЕГЭ по информатике, развивает у учеников алгоритмическое, критическое мышление, а также готовность использовать язык Python для решения широкого спектра задач ЕГЭ и даёт огромные возможности для успешной сдачи экзамена по информатике.

## Список источников


1. Крылов С.С. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2024 года по информатике. - Москва: Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений», 2024, 28 с.
2. Демоверсии, спецификации, кодификаторы / ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». [Электронный ресурс] – Режим доступа: URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#submenu:ege#!/tab /151883967-5 (дата обращения: 02.11.2024).
3. Поляков К.Ю., Еремин Е.А. «Информатика: 10-й класс: базовый и углублённый уровни: 2 частях. Ч. 1» [Электронный ресурс] // электронно-библиотечная система Лань: [сайт]. 2023 – URL: https://e.lanbook.com/book /334925 (дата обращения: 02.11.2024).

4. Босова, Л. Л. «Информатика: 10-й класс: базовый уровень» [Электронный ресурс] // электронно-библиотечная система Лань: [сайт]. 2024 – URL: https://e.lanbook.com/book/408890 (дата обращения: 02.11.2024).

5. Кабанов А. «Задание 15. Обзор алгоритмов. Best practice» [Электронный ресурс] // сервис VK Видео: [сайт]. [2024] — URL: https://vk.com/video-205865487_456239698 (дата обращения: 01.11.2024).

6. Вахитова Е. «Задания №2 и 15» [Электронный ресурс] // сайт ЕГЭ по информатике с Яндекс Учебником: [сайт]. 2024 – URL: https://education.yandex.ru /ege/go/webinars/mail (дата обращения: 03.11.2024).

## References

1. Krylov S.S. Methodological recommendations for teachers, prepared on the basis of the analysis of typical errors of the participants of the Unified State Exam 2024 in informatics. - Moscow: Federal Service for Supervision in Education and Science of the Federal Institute of Pedagogical Measurements, 2024 (accessed: 01.11.2024).)

2. Demos, specifications, codifiers / Federal State Budgetary Budgetary Institution "Federal Institute of Pedagogical Measurements". [Elektronnyi resurs]. 2024 – URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#submenu:ege#!/ tab/151883967-5 (accessed: 02.11.2024).

3. Polyakov K. Yu., Eremin E. A. "Computer Science: 10th Grade: Basic and Advanced Levels: 2 parts. Part 1" [Elektronnyi resurs] // elektronno-bibliotechnaya sistema Lan: [site]. 2023. – URL: https://e.lanbook.com/book/334925 (accessed: 02.11.2024).

4. Bosova, L. L. "Informatics: 10th Grade: Basic Level" [Informatics: 10th Grade: Basic Level] // Electronic Library System Lan: [site]. 2024. – URL: https://e.lanbook.com/ book/408890 (accessed: 02.11.2024).

5. Kabanov A. "Task 15. Overview of algorithms. Best practice" [Electronic resource] // service VK Video: [site]. [2024] — URL: https://vk.com/video-205865487_456239698 (accessed: 01.11.2024).

6. Vakhitova E. "Tasks No2 and 15" [Elektronnyi resurs] // site of the Unified State Exam on Informatics with Yandex Textbook: [site]. 2024. – URL: https://education.yandex.ru/ege/go/webinars/mail (accessed: 03.11.2024).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 600-609.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 600-609.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.8

# МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ФАЙЛОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ В РАМКАХ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО ИНФОРМАТИКЕ ДЛЯ ПРОФИЛЬНОЙ ШКОЛЫ

***Татьяна Александровна Симанёва[1]✉, Светлана Александровна Нестерова[2]***
*[1,2]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[1]simanevata@mail.ru✉, [2]snesssterova@gmail.com*

***Аннотация.*** *В статье рассматриваются вопросы изучения алгоритмов обработки файлов на языке Python для подготовки к ЕГЭ по информатике учащихся профильной школы, в рамках элективного курса «Решения задач повышенного уровня сложности на языке программирования Python». Приводятся примеры решения различных заданий ЕГЭ, и обосновывается целесообразность программного кода для решения задач.*

***Ключевые слова:*** *ЕГЭ по информатике, методика решения задач, язык программирования Python.*

Conference paper

# METHOD OF STUDYING FILE PROCESSING ALGORITHMS FOR PREPARATION FOR THE UNIFIED STATE EXAM WITHIN THE FRAMEWORK OF AN ELECTIVE COURSE IN INFORMATICS FOR A SPECIALISED SCHOOL

***Tatyana A. Simaneva[1]✉, Svetlana A. Nesterova[2]***
*[1, 2]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[1]simanevata@mail.ru✉, [2]snesssterova@gmail.com*

***Abstract.*** *The article examines the issues of studying file processing algorithms in Python to prepare students of a specialized school for the Unified State Exam in computer science, as part of the elective course "Solving Advanced Problems in Python Programming Language". Examples of solving various Unified State Exam tasks are given and the feasibility of the program code for solving problems is substantiated.*

***Keywords:*** *Unified State Exam in computer science, problem solving methodology, Python programming language.*

© Симанёва Т. А., Нестерова С. А., 2024

## 1. Введение

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) [1] по информатике является важным этапом для абитуриентов, планирующих поступление в технические вузы России. Одним из сложных аспектов экзамена остаются задачи, связанные с работой с файлами, поскольку они требуют от учащихся не только знания синтаксиса языка программирования, но и глубокого понимания алгоритмических подходов к обработке данных. В последние годы задачи, связанные с обработкой файлов, приобретают всё большее значение, поскольку позволяют проверить навыки в решении практических задач, востребованных в современном мире.

Python, как один из самых популярных языков программирования, идеально подходит для решения таких задач благодаря своей простой и понятной синтаксической структуре, обширной библиотеке встроенных функций для работы с файлами. В этой статье предлагается методика изучения алгоритмов обработки файлов при решении задач ЕГЭ по информатике с использованием языка программирования Python.

## 2. Основной текст статьи

Введение школьников в основы программирования на Python позволяет им освоить основные концепции логики, алгоритмизации и структуры данных. Однако значительное внимание уделяется и более сложным темам, одной из которых является работа с файлами. Эта тема полезна и в практическом, и в образовательном аспектах, так как позволяет решать задачи, связанные с хранением и обработкой данных, создавать программы, которые могут обрабатывать информацию из внешних источников, и автоматизировать задачи.

К сожалению, в рамках стандартной школьной программы времени на углублённое изучение работы с файлами и других продвинутых тем часто недостаточно. В условиях ограниченного времени учащиеся осваивают лишь основы, что не всегда позволяет им уверенно решать задачи высокого уровня сложности и тем более готовиться к ЕГЭ по информатике. Как показывает статистика, в среднем, только 20% выпускников справляются с решением задач на обработку файлов.

Разработанный нами элективный курс «Решение задач повышенного уровня сложности на языке программирования Python» позволяет восполнить пробелы базового курса информатики и предоставить ученикам универсального профиля возможность детально изучить алгоритмы обработки файлов и другие важные аспекты программирования. Занятия в рамках такого курса позволят школьникам решать задачи, требующие от них углублённых знаний и навыков. Например, учащиеся смогут научиться читать и записывать данные в файлы, работать с форматами данных, структурировать информацию, что будет полезно не только для сдачи экзаменов, но и для дальнейшего обучения школьников в сфере IT.

В задачах, встречающихся на ЕГЭ, обработка файлов используется в различных аспектах: от анализа содержимого до выполнения специфических

вычислений на основе загруженных данных [2]. Ниже мы разберём, как решать задачи ЕГЭ, связанные с файлами, на примере типичных заданий под номерами 9, 17 и 24.

Прототипы задания №9 подразумевают работу с таблицами, содержащими строки чисел, и требуют от школьника способности выполнять операции с этими строками с использованием определённых условий и алгоритмов. Как правило, в этих задачах требуется выполнить вычисления по строкам таблицы, используя различные статистические и математические операции.

Приведем самые распространенные задания по обработки данных:

– найти сумму чисел в строках таблицы, найти сумму элементов строки при определенных условиях, превышающих или меньше некоторого значения;

– проверка числовых диапазонов, найти строки, в которых числа принадлежат определённому диапазону;

– поиск наибольших или наименьших значений в строках;

– математические операции с элементами строки, такие как вычисление разности, суммы квадратов или произведения;

– проверка на определенные условия, например, максимальное число в строке должно быть больше суммы остальных, или чтобы выполнено какое-то другое сложное условие.

Задачи данного типа проверяют умение обрабатывать числовую информацию с помощью таблиц Excel. Учащихся часто обучают решать их непосредственно с помощью Excel, что вполне логично, поскольку Excel предоставляет интуитивно понятные инструменты для обработки чисел, создания формул и выполнения операций с данными. Альтернативный метод решения данной задачи можно предложить с помощью языка программирования Python, который может быть не только удобнее, но эффективнее и быстрее, так как по спецификации на решение задачи отводится 6 минут.

**Пример 1**. Определите количество строк таблицы, в которых квадрат суммы максимального и минимального чисел в строке больше суммы квадратов трёх оставшихся.

Приведём решение на языке программирования Python:

```
f = open('9.txt')
count = 0
for s in f:
   m = [int(x) for x in s.split()]
   m.sort()
   if (m[0]+m[-1])**2 > m[1]**2+m[2]**2+m[3]**2:
      count += 1
print(count)
```

Для корректной работы программы следует изменить расширение файла на txt.

В первой строке открываем файл 9.txt в режиме чтения, чтобы получить доступ к строкам данных. Далее создаем переменную count, которая будет хранить количество строк, удовлетворяющих заданному условию. После в

цикле, проходим по каждой строке файла и преобразуем строку s в список чисел m, разделив строку по пробелам и преобразовав каждую часть в целое число m = [int(x) for x in s.split()]. Далее сортируем список чисел m по возрастанию: m.sort().

Проверяем условие: квадрат суммы минимального (m[0]) и максимального (m[-1]) элементов списка должен быть больше суммы квадратов остальных трёх элементов (m[1], m[2], m[3]):

if (m[0] + m[-1])**2 > m[1]**2 + m[2]**2 + m[3]**2:

Если условие выполняется, увеличиваем count на единицу: count += 1

Выводим count, представляющее количество строк, удовлетворяющих условию.

Таким образом, приведенный код компактный, эффективно и быстро решает данный прототип.

**Пример 2**. В каждой строке электронной таблицы записаны три натуральных числа, задающих длины трёх взаимно перпендикулярных рёбер прямоугольного параллелепипеда. Определите, сколько в таблице троек, для которых у заданного ими параллелепипеда можно так выбрать три грани с общей вершиной, что сумма площадей двух из них будет меньше площади третьей.

Для нахождения количества параллелепипедов, удовлетворяющих условию, необходимо найти площадь наибольшей грани и сумма площадей двух других граней. То есть для каждой тройки чисел необходимо найти произведение двух наибольших чисел, а также сумму произведений наибольшего и наименьшего чисел и среднего по величине и наименьшего чисел.

Приведём решение на языке программирования Python:

```
f = open('9.txt')
count = 0
for s in f:
   m = [int(x) for x in s.split()]
   m.sort()
   if m[0]*m[2] + m[0]*m[1] < m[1]*m[2]:
      count += 1
print(count)
```

Для корректной работы программы следует изменить расширение файла на txt.

Можно заметить, что структура программы является аналогичной с предыдущей. И, действительно, все задачи данного типа можно решать с помощью языка программирования Python по приведённому шаблону. Единственным отличием кодов для задач данного типа будет строка с условием.

Условие задачи №9 из демоверсии 2025 года по информатике [3] немного сложнее, но код программы не является громоздким.

**Пример 3.** Откройте файл электронной таблицы, содержащей в каждой строке шесть натуральных чисел. Определите количество строк таблицы, содержащих числа, для чисел которых выполнены оба условия:

– в строке только одно число повторяется трижды, остальные числа без повторений;

– квадрат суммы всех повторяющихся чисел строки больше квадрата суммы всех неповторяющихся чисел строки.

В ответе запишите только число.

Приведём решение на языке программирования Python:

```
f = open ('demo_2025_9.txt')
count = 0
for s in f:
   m =  list(map(int, s.split())]
   m_npovt=[x for x in m if  m.count(x)==1]
   m_povt=[x for x in m if m.count(x) > 1]
   if len(m_npovt)==3 and sum(m_povt) **2 >sum(m_npovt)**2:
      count += 1
print(count)
```

Для корректной работы программы следует изменить расширение файла на txt и поместить файл данных в директорию с программным кодом.

В этом файле каждая строка содержит шесть натуральных чисел. Инициализируем счётчик count, который будет хранить количество строк, удовлетворяющих условиям задачи.

В цикле for, проходим по каждой строке s файла f. Разбиваем строку s на отдельные данные (разделённые пробелами) и преобразуем эти данные в массив целых чисел функцией int. Создаём список m_npovt, где содержатся не повторяющиеся элементы массива m, и список m_povt, где содержатся повторяющиеся элементы массива m. Далее проверяем условие, если количество неповторяющихся элементов равно 3 и квадрат суммы всех повторяющихся чисел строки больше квадрата суммы всех неповторяющихся чисел строки увеличиваем счетчик.

Таким образом, можно сделать однозначный вывод о том, что по сравнению с классическим методом решения в Excel, такой способ решения является более эффективным и экономным по времени.

Рассмотрим следующий прототип – задача №17, направлена на нахождение и обработку числовых последовательностей или данных, удовлетворяющих определённым условиям и написание кода на каком-либо языке программирования. На ее решение отводится 14 минут, задача относится к повышенному уровню сложности.

В большинстве случаев ученикам нужно найти такие пары (тройки) чисел в заданной последовательности, которые соответствуют определённым критериям, например:

– разность или сумма, которых делится на заданное число;

– хотя бы одно из чисел в паре удовлетворяет какому-либо условию (например, является чётным или нечётным);

– разность, произведение или частное чисел удовлетворяет определённому диапазону.

Часто задачи данного типа нацелены на нахождение максимального, минимального значений или количества таких пар или троек в

последовательности. Оба этих типа задач требуют анализа данных и работы с последовательностями чисел, но различаются по сложности и объему вычислений.

Задачи на поиск количества пар чисел требуют, например, найти количество пар чисел в последовательности, которые удовлетворяют определенному условию. Задачи могут быть сформулированы таким образом, чтобы нужно было подсчитать пары чисел, у которых выполняются специфические математические условия, причем парой может быть подряд идущие числа или различные из последовательности.

В задачах на поиск количества троек чисел, например, нужно найти количество троек чисел, которые также удовлетворяют определенному условию. Задачи на тройки чисел обычно более сложны, как правило, тройка это подряд идущие элементы. Сложность вычислений, требует от ученика знание более эффективного решения таких задач, важно грамотно организовать алгоритм.

**Пример 4**. В файле содержится последовательность из 10 000 целых положительных чисел. Каждое число не превышает 10 000. Определите и запишите в ответе сначала количество пар элементов последовательности, для которых произведение элементов не кратно 14, затем максимальную из сумм элементов таких пар. В данной задаче под парой подразумевается два различных элемента последовательности. Порядок элементов в паре не важен.

Решение задачи на языке программирования Python:

```
count = m = 0
f = open('17.txt')
l = [int(i) for i in f]
for i in range(len(l) - 1):
   for j in range(i + 1, len(l)):
      if l[i] * l[j] % 14 != 0:
         count += 1
         m = max(m, l[i] + l[j])
print(count, m)
```

Вначале программы инициализируются переменные count и m, где count будет хранить количество подходящих пар, а m — их максимальную сумму: count = m = 0. Максимальную сумму можно взять равной 0, так как используются только положительные числа.

Затем программа открывает файл с последовательностью чисел и считывает их в список *l*, конвертируя каждую строку из файла в целое число.

Далее необходимо организовать перебор возможных пар чисел, причем порядок элементов в паре не важен, главное, чтобы элементы были различны.

Внешний цикл проходит по каждому элементу списка, а внутренний перебирает только те элементы, которые расположены после текущего, чтобы исключить повторные и зеркальные пары. Для каждой пары программа проверяет условие задачи: если произведение чисел в паре *l*[i] * *l*[j] не делится на 14, увеличивается счётчик count и обновляется значение m — максимальная

сумма пар, произведение которых не кратно 14. В конце программа выводит общее количество подходящих пар и максимальную их сумму.

**Пример 5.** В файле находится ряд целых чисел. Элементы ряда могут принимать целые значения в диапазоне [−10000; 10000]. Определите количество троек элементов последовательности, в которой только одно число трехзначное, а сумма тройки меньше наибольшего числа, оканчивающегося на 17. В данной задаче под тройкой подразумевается три идущих подряд элемента последовательности.

Несмотря на то, что задача усложнена, принцип решения данной задачи остаётся аналогичным:

```
count = 0
f = open('17.txt')
l = [int(i) for i in f]
max_dvy = 0
for i in range(len(l)):
   if abs(l[i]) % 100 == 17:
      max_dvy = max(max_dvy, l[i])
for i in range(len(l) - 2):
   c = 0
   s = [l[i], l[i+1],  l[i+2]]
   for x in s:
      if 99 < abs(x) < 1000:
         c += 1
   if c == 1 and sum(s) < max_dvy:
      count += 1
   print(count)
```

Создается переменная max_dvy, которая будет хранить наибольшее число, оканчивающееся на 17. С помощью цикла for i in range(len(*l*)) программа перебирает все элементы списка, и проверяет, заканчивается ли каждое число на 17. Это делается с помощью условия abs(*l*[i]) % 100 == 17, которое проверяет остаток от деления числа на 100. Если условие выполняется, то текущее число может быть записано в max_dvy, если оно больше уже найденного максимального числа.

После того как найдено наибольшее число, заканчивающееся на 17, программа приступает к поиску троек чисел, удовлетворяющих условиям задачи. Для этого используется второй цикл for i in range(len(*l*) - 2), который перебирает все возможные тройки подряд идущих элементов. Каждая тройка состоит из элементов *l*[i], *l*[i+1], и *l*[i+2]. Переменная с инициализируется нулем и будет отслеживать количество трехзначных чисел в текущей тройке. Программа проходит по всем числам в тройке и с помощью условия 99 < abs(x) < 1000 проверяет, является ли каждое число трехзначным. Если число трехзначное, переменная с увеличивается на 1.

После проверки всех трех чисел в тройке, программа проверяет два условия: во-первых, что в тройке ровно одно трехзначное число, а во-вторых, что сумма чисел в тройке меньше найденного максимального числа, заканчивающегося на 17. Если оба условия выполняются, счетчик count увеличивается на 1. В конце программа выводит количество троек, удовлетворяющих всем этим условиям.

Рассмотрим еще один прототип, в котором необходимы навыки работы с файлами это задание №24. В нем, как правило, требуется обработать строки или последовательности символьных данных, где требуется найти различные характеристики или свойства последовательности символов.

В данном задании часто требуется поиск определенных характеристик в строках, состоящих из ограниченного набора символов (например, символов X, Y, Z). Учащиеся должны уметь эффективно обрабатывать такие строки, искать повторяющиеся или разные элементы, подсчитывать длину наибольшей или наименьшей последовательностей элементов и т. д.

В этих задачах важно учитывать ограничения, такие как длина строки, которая может составлять до $10^6$ символов. Это означает, что алгоритмы обработки должны быть оптимальны.

**Пример 6**. Текстовый файл состоит не более чем из $10^6$ символов «A», «B» и «C». Определите максимальное количество подряд символов «B».

Решение задачи на языке программирования Python:

```
f = open('24.txt').readline()
k = 1
m = 0
for i in range(len(f)-1):
   if f[i] == 'B' and f[i+1] == 'B':
      k += 1
      m = max(m, k)
   else: k = 1
print(m)
```

Решение задачи начинается с того, что открывается текстовый файл с помощью функции open('24.txt') и считывается его первая строка с помощью метода .readline(). Таким образом, мы получаем строку символов «A», «B» и «C», которую необходимо обработать. Далее в программе создаются две переменные. Переменная k инициализируется значением 1, так как минимальная длина последовательности символов «B» равна 1 (если хотя бы один символ «B» присутствует в строке). Переменная m инициализируется значением 0 и будет использоваться для хранения максимальной длины последовательности подряд идущих символов «B».

Затем в цикле, просматриваются все символы строки, кроме последнего. Это сделано для того, чтобы можно было сравнивать каждый символ с последующим, не выходя за пределы строки. Внутри цикла проверяется условие: если текущий символ и следующий символ в строке оба равны «B», то мы

увеличиваем переменную k на 1, что означает продолжение последовательности из символов «B». Если же символы не равны "B", то переменная k сбрасывается в 1, так как последовательность прерывается. В случае продолжения последовательности длина текущей последовательности сравнивается с максимальной найденной длиной, и если текущая длина больше, то обновляется значение переменной m. После того как строка обработана, выводится результат значение переменной m – максимальная длина последовательности подряд идущих символов «B».

Пример 7. Текстовый файл состоит из символов *A*, *B* и *C*. Определите максимальное количество идущих подряд пар символов *AB* или *CB* в прилагаемом файле. Искомая подпоследовательность должна состоять только из пар *AB*, или только из пар *CB*, или только из пар *AB* и *CB* в произвольном порядке следования этих пар.

Решение задачи на языке программирования Python:

```
f = open('24.txt')
n=f.read()
n=n.replace('AB','x')
n=n.replace('CB','x')
k=0
m=0
for i in range(len(n)):
   if n[i]=='x':
      k+=1
      m=max(m, k)
   else:
      k=0
print(m)
```

Заменив каждую пару символов *AB* и *CB* в строке n на символ x, мы сводим данную задачу к тривиальному случаю, рассмотренному ранее.

**3. Заключение**

В статье подробно рассматривается методика решения задач ЕГЭ 9, 17 и 24, связанных с обработкой файлов. Каждая из этих задач требует применения специфических подходов для эффективной работы с данными и оптимизации вычислений. В контексте файловой обработки показывается, насколько важно уметь работать с большими объёмами информации, правильно структурировать данные и применять алгоритмы. Ключевыми моментами являются правильная организация ввода-вывода данных, использование циклов и условных операторов для анализа и обработки содержимого файлов, а также применение различных методов сортировки и поиска. Все эти знания учащиеся могут получить, в рамках элективного курса, который посвящён решению задач повышенной трудности.

## Список источников

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. URL: https://forester.run/educational_standard/federally-gosudarstvennyi -obrazovatelnyi-standart-srednego-obshchego-obrazovaniia-1 (дата обращения: 2.11.2024).

2. Сдам ГИА: решу ЕГЭ. – URL: https://inf-ege.sdamgia.ru/?redir=1 (дата обращения: 5.11.2024).

3. Демоверсии, спецификации, кодификаторы / ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». [Электронный ресурс] – Режим доступа: URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#submenu:ege#!/tab /151883967-5 (дата обращения: 10.11.2024).

## References

1. Federal State Educational Standard of Secondary General Education. Available at: https://fgosreestr.ru/educational_standard/federalnyi-gosudarstvennyi-obrazovatelnyi-standart-srednego-obshchego-obrazovaniia-1 (accessed: 2.11.2024).

2. I will pass the GIA: I will solve the Unified State Exam. Available at: https://inf-ege.sdamgia.ru/?redir=1 (accessed: 5.11.2024).

3. Demos, specifications, codifiers / Federal State Budgetary Budgetary Institution "Federal Institute of Pedagogical Measurements". [Elektronnyi resurs]. 2024 – URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/ 151883967-5 (accessed: 10.11.2024).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 610-617.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 610-617.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.851

# РОЛЬ И МЕСТО ИГРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ НА УРОКАХ ПРЕДМЕТА «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА»

***Татьяна Петровна Фомина[1]✉, Елена Анатольевна Седлева[2]***
*[1]Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия*
*[2]МБОУ гимназия 3 г. Грязи Липецкой области, Россия*
*[1]fomina_t_p@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-5300-326X*
*[2]lena.sedleva@mail.ru*

***Аннотация.*** *В статье авторы рассматривают роль и место игровых технологий при изучении школьниками предмета «Вероятность и статистика». Итогом работы являются результаты анкетирования учителей математики, которые подтверждают значимость использования элементов игровой технологии, и комплекты заданий игрового характера для применения на уроках учебной дисциплины.*

***Ключевые слова:*** *математика, игровая технология, предмет «Вероятность и статистика», вероятностно-статистическое мышление.*

Conference paper

# THE ROLE AND PLACE OF GAMING TECHNOLOGIES IN THE LESSONS OF THE SUBJECT "PROBABILITY AND STATISTICS"

***Tatiana P. Fomina[1]✉, Elena A. Sedleva[2]***
*[1]Lipetsk State Pedagogical University named after P.P. Semenov-Tyan-Shanskiy Lipetsk, Russia*
*[2]MBOU gymnasium 3, Gryazi, Lipetsk region, Russia*
*[1]fomina_t_p@mail.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-5300-326X*
*[2]lena.sedleva@mail.ru*

***Abstract.*** *In the article, the authors consider the role and place of gaming technologies in the study of the subject "Probability and statistics" by schoolchildren. The result of the work is the results of a survey of mathematics teachers, which confirm the importance of using elements of game technology, and sets of tasks of a game nature for use in the lessons of an academic discipline.*

© Фомина Т. П., Седлева Е. А., 2024

***Keywords:*** *mathematics, game technology, the subject "Probability and statistics", probabilistic and statistical thinking.*

## 1. Введение

Основная задача развития обучающихся сегодня – совершенствование уровня вероятностной интуиции и формирование статистического мышления, т.к. современный образовательный процесс ориентирован не только на обучение математике, но и на становление личности обучающегося посредством математики [1, 2].

Многие педагоги и ученые, анализируя факторы, которые могут оказывать влияние на качество математических знаний школьников, отмечают заинтересованность к изучению предмета [1, 3, 6]. Они едины во мнении, что одной из причин низкого познавательного интереса к изучению математики является использование однообразных форм работы учащихся на уроке. Поэтому в целях повышения интереса обучающихся к изучению математики необходимо разработать урок и представить материал таким образом, чтобы у школьников возник интерес к изучению предмета. Это однозначно требует изменения подходов изложения материала, применения эффективных педагогических технологий, способствующих активизации познавательной деятельности обучающихся [4-6]. Несомненно, важную роль в этом плане игровые технологии.

Реализации игровой формы проведения уроков способствует широкий спектр игровых приемов, оказывающий непосредственное влияние на развитие интереса к обучению.

## 2. Основной текст статьи

При проектировании урока с использованием игровых технологий следует учитывать следующие аспекты:

– постановка перед обучающимися дидактической цели в виде игровой задачи;

– следование правилам игры при реализации процесса обучения;

– использование обучающих материалов в виде средства, позволяющего осуществлять образовательный процесс с элементами соревнования, что способствует переходу от дидактической задачи к игровой;

– взаимосвязь игрового результата и качества выполнения дидактического задания.

Для выявления места игровых технологий на уроках предмета «Вероятность и статистика» в основной школе было проведено анкетирование учителей математики общеобразовательных школ Липецкой области. Анкета состояла из 6 вопросов закрытого тип:

1. Отметьте Ваш работы учителем математики:

а) меньше 5 лет; б) 5-10 лет; в) 10-25 лет; г) больше 25 лет.

2. Как часто Вы проводите уроки по вероятности и статистике в основной школе с применением игровых технологий обучения?

а) не провожу такие уроки; б) провожу с периодичностью 1 или 2 раза в месяц; в) провожу с периодичностью 1 раз в четверть;

г) провожу с периодичностью 1 или 2 раза в неделю.

3. Если Вы применяете игровые технологии на уроках предмета «Вероятность и статистика», то в каких классах Вы используете их чаще?

а) применяю в 7 классах; б) применяю в 8 классах; в) применяю в 9 классах; г) не применяю.

4. На уроках какого типа Вы чаще используете игровые технологии?

а) на уроках открытия новых знаний; б) на уроках комплексного применения знаний; в) на уроках актуализации знаний и умений; г) на уроках систематизации и обобщения знаний и умений; д) на уроках контроля знаний, умений; е) на уроках урок коррекции знаний, умений, навыков.

5. Как Вы думаете, какой тип урока более целесообразен для организации урока математики с включением игровых технологий?

а) урок открытия новых знаний; б) урок комплексного применения знаний; в) урок актуализации знаний и умений; г) урок систематизации и обобщения знаний и умений; д) урок контроля знаний, умений; е) урок коррекции знаний, умений, навыков; ж) уместна для любого типа урока.

6. Можно ли рассматривать игровые технологии в качестве эффективного и удобного средства обучения в 7-9 классах?

а) да; б) нет; в) затрудняюсь ответить.

В анкетировании приняли участие 40 учителей математики. Результаты анкетирования показали, что респонденты имеют различный педагогический стаж работы (причем 38% опрошенных имеют более 25 лет опыта работы с обучающимися).

Отметим, что 13% респондентов не применяют игровые технологии в ходе обучения предмету «Вероятность и статистика», 31% используют игровые элементы в обучении 1-2 раза в месяц, 32% используют игровые технологии с частотой один раз в четверть, 24% применяют с периодичностью 1-2 раза в неделю. Данные результаты свидетельствуют о заинтересованности педагогов в применении данной формы работы на уроке. Но несмотря на это 13% не используют игровые технологии, аргументируя это сложностью в подготовке материалов, а также нехваткой времени на разработку материалов с использованием игровых технологий.

В ходе ответов на вопрос о приоритетности использования игровых технологий на уроках математики в определенных классах мнения педагогов разделились следующим образом: 58% применяют данные технологии в 7 классах, аргументируя это возрастом обучающихся, удобством использования при активизации познавательного процесса обучающихся, привлечением внимания к предмету, 29% применяют игровые технологии в 8-9 классах, 13% не используют данную форму работы на уроке.

77% респондентов отметили уроки систематизации и обобщения знаний и умений для использования игровых технологий, 23% – уроки актуализации знаний и умений. Кроме того, 80% опрошенных считают, что игровые технологии уместны на любом уроке, 20% – лишь на уроках систематизации и обобщения новых знаний, что, несомненно, свидетельствует о положительном отношении педагогов к данной форме работы.

По мнению 93% учителей математики основной школы игровые приемы активизации познавательной деятельности целесообразны, многие из них хотели бы применять игровые технологии при проведении уроков.

На основании анализа полученных данных заключаем, что педагоги понимают и отмечают эффективность игровых методов обучения на уроках предмета «Вероятность и статистика». Однако многие педагоги отмечают нехватку готовых материалов с использованием игровых технологий, ведь на разработку не всегда хватает времени. Данные мнения свидетельствуют об актуальности игровых технологий на уроках математики, их важном месте в образовательном процессе, а также подтверждают востребованность разработки заданий по математике с использованием игровых технологий [4, 7].

Рассмотрим урок по изучению курса «Вероятность и статистика» в 7 классах (МБОУ гимназия 3, г. Грязи Липецкой области) с применением игровой технологии.

Тема урока: Числовые наборы. Среднее арифметическое.

Игра «Случайные фанты».

Ход проведения:

Перед началом урока учащиеся делятся на две команды, и каждая команда выбирает себе капитана, который будет в роли ведущего. Каждому капитану вручаются по два мешочка: один с заданиями (табл. 1), второй с номерами фантов его команды. Отметим, что среди заданий есть такие, которые необходимо выполнять у доски, а также устные задания. На выполнение заданий отводится 15 минут. Также каждому учащемуся раздают жетон с его порядковым номером (в том числе и капитанам). После капитаны по очереди вытягивают из двух мешочков: задание и номер фанта из своей команды, который будет отвечать на это задание. После того как фант ответил его жетон и задание убирают.

За правильностью ответов наблюдает учитель, который выступает в роли жюри и подсчитывает баллы. За каждый правильный ответ команда получает 1 балл. Если фант не отвечает, то право ответа переходит к фанту из другой команды, номер которого вытянет капитан.

Побеждает команда, набравшая больше всего баллов. В конце игры обе команды получают грамоты за первое и второе место.

Этап урока, на котором может применяться данное задание:

1) проверка домашнего задания;

2) закрепление изученного материала;

3) повторение изученного материала;

4) контроль знаний и умений.

Таблица 1 – Карточка с заданиями и ответами: числовые наборы, среднее арифметическое.

| **Вопросы** | **Ответы** |
|---|---|
| 1) 1 команда<br>Дайте определение понятию числовой набор в статистике. | Числовой набор в статистике – последовательность чисел, неупорядоченная, конечная. |

<table>
<tr><td>1) 2 команда<br>Дайте определение понятию среднее арифметическое.</td><td>Среднее арифметическое – число, равное отношению суммы всех чисел числового набора к их количеству.</td></tr>
<tr><td>2) 1 команда<br>В классе проводился опрос о количестве прочитанных книг на летних каникулах. В соответствии с ответами учеников получился следующий числовой набор: 3; 0; 2; 1; 8; 11; 15; 4; 7; 6. Определите среднее арифметическое значение данного числового набора.</td><td>5,7</td></tr>
<tr><td>2) 2 команда<br>В давние времена многие ученые размышляли над вопросом: «Сколько спутников у планеты Нептун?»<br>Среди мнений ученых были распространены варианты: 5; 7; 14; 15; 8; 9; 1; 2; 11. Определите среднее арифметическое значение данного числового набора.</td><td>8</td></tr>
<tr><td>3) 1 команда<br>Группа туристов решила сравнить изменения температуры воздуха за время их путешествия. В течении недели они наблюдали за температурой воздуха, в конце недели у них получилась таблица:<table><tr><td>день</td><td>день</td><td>день</td><td>день</td><td>день</td><td>день</td><td>день</td></tr><tr><td>–15</td><td>–10</td><td>–5</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>Определите среднюю температуру воздуха за время путешествия туристов.</td><td>–4</td></tr>
<tr><td>3) 2 команда<br>Перед выбором поездки на горнолыжный курорт опытные путешественники решили сравнить изменения температуры воздуха на время их путешествия. Посмотрев прогноз погоды, они составили таблицу:<table><tr><td>день</td><td>день</td><td>день</td><td>день</td><td>день</td><td>день</td><td>день</td></tr><tr><td>0</td><td>–7</td><td>–9</td><td>–15</td><td>–18</td><td>–20</td><td>–15</td></tr></table>Определите среднюю температуру воздуха за данный период путешествия туристов.</td><td>–12</td></tr>
<tr><td>4) 1 команда<br>В наборе 10 чисел. Их среднее арифметическое составляет 28. На сколько изменится среднее арифметическое, если к одному из чисел набора прибавить 10?</td><td>Увеличится на 1</td></tr>
<tr><td>4) 2 команда<br>В числовом наборе 5 ненулевых чисел. Их среднее арифметическое составило 15. Каким станет среднее арифметическое, если каждое число набора увеличить в 6 раз?</td><td>18</td></tr>
<tr><td>5) 1 команда<br>При подготовке исследовательской работы на тему «Изменение климата» группа учащихся решила проанализировать изменения температуры за полгода и составить таблицу:<table><tr><td>Янв.</td><td>Февр.</td><td>Март</td><td>Апр.</td><td>Май</td><td>Июнь</td></tr><tr><td>–17</td><td>–10</td><td>6</td><td>19</td><td>25</td><td>23</td></tr></table>Определите среднее значение температуры зимой, ответ округлите до целых.</td><td>–14</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>5) 2 команда<br>При подготовке исследовательской работы на тему «Изменение климата» группа учащихся решила проанализировать изменения температуры за полгода и составить таблицу:<br><table><tr><td>Дек.</td><td>Янв.</td><td>Февр.</td><td>Март</td><td>Апр.</td><td>Май</td></tr><tr><td>–17</td><td>–10</td><td>–8</td><td>7</td><td>18</td><td>18</td></tr></table>Определите среднее значение температуры зимой, ответ округлите до целых.</td><td>–12</td></tr>
<tr><td>6) 1 команда<br>Планета Уран состоит из льда и горных пород. Но эта планета знаменита не только этим. Температура поверхности этой планеты испытывает сильные колебания, днем она сильно нагревается, а ночью остывает. Примером температур на ее поверхности является числовой набор: 80; –173; 169; –169; 170; –150. Определите наименьшее значение числового набора.</td><td>–173</td></tr>
<tr><td>6) 2 команда<br>Планета Меркурий самая близкая к солнцу планета. Но эта планета знаменита не только этим. Температура поверхности этой планеты испытывает сильные колебания, днем она сильно нагревается, а ночью остывает. Примером температур на ее поверхности является числовой набор: 80; 169; 168; –169; 170; –150. Определите наименьшее значение числового набора.</td><td>–169</td></tr>
</table>

## 3. Заключение

В результате исследования были определены роль и место игровых технологий при изучении учебной дисциплины «Вероятность и статистика». Установлено, что для достижения более продуктивного результата от внедрения игровых элементов в процесс обучения школьников важен учет их интересов, склонностей, уровня математических знаний, возможностей реализации игры в рамках определенной темы. Разработаны и апробированы задания для обучения школьников 7 классов с применением игровых технологий на разных этапах урока по предмету. Результаты показали, что игровые технологии в процессе изучения курса «Вероятность и статистика» служат продуктивным приемом мотивации в освоении материала, создают возможности для развития когнитивных способностей.

## Список источников

1. Бурилич, И. Н. Особенности изучения основ теории вероятностей школьном курсе математики // Всероссийский педагогический ФОРУМ: сборник статей Всероссийского педагогического форума, Петрозаводск, 07 июня 2020 года. Петрозаводск: Международный центр научного партнерства Ивановская Ирина Игоревна), 2020. С. 12-16.

2. Катаржина, Е. Б. Новые технологии в образовании: мотивация и обучение через игру // Цифровая трансформация образования: актуальные проблемы, опыт решения: Материалы Всероссийской научно-практической конференции, Волгоград, 23 ноября 2023 года. Чебоксары: Издательский дом «Среда», 2023. С. 154-156.

3. Куликова, Н.А., Мерзлякова, О. П. Применение элементов геймификации на уроках математики с целью повышения познавательной мотивации школьников // Педагогическая перспектива. 2021 № 4. С. 13-21.

4. Седлева, Е. А., Фомина, Т. П. Реализация практико-ориентированного подхода при изучении теории вероятностей и математической статистики // Актуальные проблемы естественных, математических, технических наук и их преподавания: сб. науч. тр. Липецк: Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, 2023. С. 170-174.

5. Седлева, Е. А. Дидактическая игра как средство повышения мотивации обучающихся // Образование XXI века: факторы и предикторы успешности освоения образовательной программы школьниками: материалы Международной научной конференции, Липецк, 20 октября 2022 года. Липецк: Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, 2022. С. 294-300.

6. Семенова, Е. Е. Игровые технологии на уроках математики как средство мотивации школьников к обучению // Лучшая научная статья 2019: сборник статей XXV Международного научно-исследовательского конкурса, Пенза, 30 мая 2019 года. – Пенза: «Наука и Просвещение» (ИП Гуляев Г.Ю.), 2019. С. 83-87.

7. Хорцев, А. В. Использование геймификации при изучении вероятностно-статистического материала на уроках математики // Достижения вузовской науки 2021: сборник статей XVII Международного научно-исследовательского конкурса, Пенза, 20 января 2021 года. Пенза: «Наука и Просвещение» (ИП Гуляев Г.Ю.), 2021. С. 293-298.

## References

1. Burilich, I. N. Features of studying the basics of probability theory in the school course of mathematics // All-Russian Pedagogical FORUM: collection of articles of the All-Russian Pedagogical Forum, Petrozavodsk, June 07, 2020. Petrozavodsk: International Center for Scientific Partnership Ivanovskaya Irina Igorevna), 2020. Pp. 12-16. (In Russ.).

2. Katarzhina, E. B. New technologies in education: motivation and learning through play // Digital transformation of education: actual problems, experience of solution: Materials of the All-Russian scientific and practical conference, Volgograd, November 23, 2023. Cheboksary: Publishing house "Wednesday", 2023. Pp. 154-156. (In Russ.).

3. Kulikova, N. A., Merzlyakova, O. P. The use of gamification elements in mathematics lessons in order to increase the cognitive motivation of schoolchildren // Pedagogical perspective. 2021; 4:13-21. (In Russ.).

4. Sedleva, E. A., Fomina, T. P. Implementation of a practice-oriented approach in the study of probability theory and mathematical statistics // Actual problems of natural, mathematical, technical sciences and their teaching: collection of scientific tr. Lipetsk: Lipetsk State Pedagogical University named after P.P. Semenov-Tyan-Shansky, 2023. Pp. 170-174. (In Russ.).

5. Sedleva, E. A. Didactic game as a means of increasing the motivation of students // Education of the XXI century: factors and predictors of the success of mastering the educational program by schoolchildren: materials of the International Scientific Conference, Lipetsk, October 20, 2022. Lipetsk: Lipetsk State Pedagogical University named after P.P. Semenov-Tyan-Shansky, 2022. Pp. 294-300. (In Russ.).

6. Semenova, E. E. Game technologies in mathematics lessons as a means of motivating schoolchildren to learn // The best scientific article 2019: collection of articles of the XXV International Scientific Research Competition, Penza, May 30, 2019. – Penza: "Science and Education" (IP Gulyaev G.Yu.), 2019. Pp. 83-87. (In Russ.).

7. Khortsev, A. V. The use of gamification in the study of probabilistic and statistical material in mathematics lessons // Achievements of University science 2021: collection of articles of the XVII International Scientific Research Competition, Penza, January 20, 2021. Penza: "Science and Education" (IP Gulyaev G.Yu.), 2021. Pp. 293-298. (In Russ.).

Современные проблемы физико-математических наук. 2024. С. 618-623.
Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences. 2024. 618-623.

Статья в сборнике трудов конференции
УДК 372.851

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

***Ирина Ивановна Чернобровкина[1]✉, Антон Владимирович Кокорев[2], Маргарита Викторовна Глушкова[3]***
*[1,3]Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орёл, Россия*
*[2]Академия ФСО России, Орёл, Россия*
*[1]iichernobrovkina@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-3170-4986*
*[2]pears911@mail.ru, [3]margo.glushckowa@yandex.ru*

***Аннотация.*** *В статье разбираются примеры заданий, которые удобно решать (и даже, возможно, это единственный путь к решению) способом введения функции и применения её свойств. Такие задачи встречаются на олимпиадах по математике, могут встретиться в ЕГЭ профильного уровня, а также могут быть интересны учащимся, увлеченным математикой.*

***Ключевые слова:*** *задачи, математика, школа, функции, способы решения.*

Conference paper

# FUNCTIONAL WAYS OF SOLVING PROBLEMS OF ELEMENTARY MATHEMATICS

***Irina I. Chernobrovkina[1]✉, Anton V. Kokorev[2], Margarita V. Glushkova[3]***
*[1,3]Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia*
*[2]Russian Federation Security Guard Service Federal Academy*
*[1]iichernobrovkina@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-3170-4986*
*[2]pears911@mail.ru, [3]margo.glushckowa@yandex.ru*

***Abstract.*** *The article examines examples of tasks that are convenient to solve (and even, perhaps, this is the only way to a solution) by introducing a function and applying its properties. Such problems are found at Olympiads in mathematics, can be found in the Unified State Exam at a profile level, and can also be of interest to students who are passionate about mathematics*

***Keywords:*** *tasks, mathematics, school, functions, solutions.*

© Чернобровкина И. И., Кокорев А. В., Глушкова М. В., 2024

## 1. Введение

Функциональный метод решения задач является составной частью и естественным развитием функциональной линии обучения математике в средней школе. Он базируется на использовании функций как основного инструмента для решения различных математических задач.

Выделим основные свойства функций, которые наиболее часто используемые при решении задач [1, 3]:

- монотонность, непрерывность, кусочная непрерывность;
- четность-нечетность, периодичность;
- ограниченность (области определения, области значений);
- дифференцируемость и связанные с ней свойства функции.

Функциональный подход к решению задач часто удобно применять при решении некоторых задач олимпиадного типа [4, 5]

## 2. Основной текст статьи

Предложенный ниже материал предлагается для использования учителями математики скорее старших классов как на уроках, так и внеурочной деятельности.

В рамках заявленной темы предлагаем рассмотреть следующие вопросы:

1) Функциональная зависимость как одно из важнейших понятий в школьном курсе математики. Роль и место изучения функциональной зависимости. Определение функции. Её свойства.

2) Графики функций и их преобразования. Графики монотонных, ограниченных, периодичных, четных-нечетных, кусочно-непрерывных функций. Построение эскизов графиков функций.

3) Понятие производной в школьном курсе математики. Связь между производной и свойствами функции. Исследование функции на максимум и минимум. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции. Задачи на оптимальный выбор.

4) Применение производной к решению текстовых задач. Методика решения текстовых задач с применением производной.

5) Функционально-графические методы решения уравнений, неравенств, систем (решение уравнений, неравенств и систем с использованием свойств монотонности, ограниченности, периодичности, четности – нечетности).

6) Область допустимых значений функции в методе оценки.

7) Функционально- графический метод решения задач с параметрами. Алгоритм решения задач с параметрами функционально графическим методом в координатной плоскости *xOy*. Алгоритм решения задач с параметрами функционально графическим методом в координатной плоскости *xOa*, *aOx*.

Приведем некоторые примеры решения задач с использованием функционального способа.

**Пример 1.** Решить уравнение

$2x(1 + \sqrt{4x^2 + 7}) + (3x+1)(1+\sqrt{(3x + 1)^2 + 7}) = 0.$

При решении можно указать учащимся на «похожесть» слагаемых, а значит можно попробовать ввести функцию

$$f(t) = t(1+\sqrt{t^2+7}) \quad (1)$$

Тогда первое слагаемое уравнения получится при подстановке в формулу (1) $t= 2x$, а втрое слагаемое – при $t = 3x + 1$.

Очевидно, данная функция (1) является нечетной и монотонно возрастающей (ее производная положительно при любом t).

Значит можно записать:

$f(2x)+ f(3x+1) =0,$ отсюда

$f(3x+1) = - f(2x),$ и значит

$f(3x+1) = f(-2x).$

Тогда можно записать: $3x + 1 = -2x$, и уравнение имеет единственное решение $x = - 0{,}2$.

Итак, в этом примере вводилась функция и использовались её свойства: нечетность и монотонность.

Использование свойства монотонности функции также можно продемонстрировать на примере 2.

**Пример 2.** Решить уравнение $2^x + 5^x = 7^x$.

Легко видеть, что $x = 1$ является корнем данного уравнения. Попробуем доказать, что этот корень единственный. Обе части уравнения разделим на $7^x$. Получим $(\frac{2}{7})^x + (\frac{5}{7})^x = 1$ и далее рассмотрим функцию $f(x) = (\frac{2}{7})^x + (\frac{5}{7})^x$, которая является убывающей. Прямая y = 1 может пересечь график функции $f$ не более, чем в одной точке. Значит и исходное уравнение имеет не более одного корня [2, стр. 178]. Аналогичными рассуждениями решаются уравнения

а) $2^x = 3 - x$; ;  б) $3^x + 4^x = 5^x$

в) $7^{6-x} = x + 2$;  г)$3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$;

д) $3^{x-2} = \frac{9}{x}$;  е) $4^{1/x} - 1 = 2^{2x-1}$;

ж) $5^x = \sqrt{26 - x}$.

Рассмотрим пример использования свойства ограниченности функции.

**Пример 3.** Решить уравнение $\cos x + \cos 3x = 2$.

При решении вспомним, что функция косинуса ограничена и принимает значения не более, чем 1. Поэтому данное уравнение равносильно системе

$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 3x = 1 \end{cases}$, решением которой в итоге будет $x = 2\pi k, k \in Z$.

Другие задания, решаемые с помощью свойства ограниченности функции:

а)$\sqrt{x+1} = - \sin^2 \pi x$;  б) $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3$;

в) $\cos \pi x + x^2 - 6x + 10$;  г) $6 \arccos(5x - x^2 - 5{,}75) = \frac{\pi}{\cos^4 \frac{\pi x}{2} + \sin^4 \frac{\pi x}{2}}$;

д) $(x - 3)^4 + (x^2 - 2x - 3)^{10} = 0$;  е) $(x - 7)^6 + \log_5 \sqrt{x^2 - 14x + 74} = 1$.

При подготовке к ЕГЭ по математике в различных сборниках и на сайте ФИПИ встречаются задачи, при решении которых удобно вводить функцию и искать её наибольшее (наименьшее) значение.

**Пример 4.** В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 25 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте

работает $t$ человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ руб. Если на втором объекте работает $t$ человек, то их суточная зарплата составляет $t^2$ руб. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько рублей при таком распределении придётся выплатить рабочим?

При решении этой задачи используется исследование функции с помощью производной. Краткое описание решения:

Пусть $x$ рабочих трудится на первом объекте, зарабатывая при этом $3x^2$ руб. день и 25-храбочих трудится на втором, зарабатывая $(25\text{-}x)^2$ руб. в день. Обозначим за $y$ – выплаты рабочим за сутки и $y = 3x^2 + (25\text{-}x)^2$ – исследуемая функция. Требуется найти $y$ наименьшее. Найдя производную и приравняв её к нулю, получим (рисунок 1):

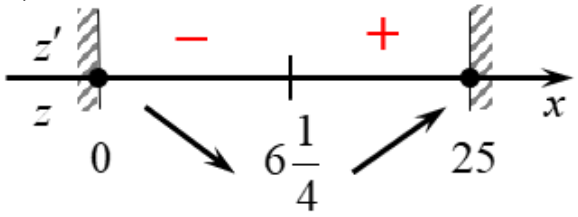



Рисунок 1 — Исследование функции на экстремум.

Как можно видеть, $x = 6{,}25$ является точкой минимума. Значит $y$ будет принимать наименьшее значение при $x = 6$ или $x = 7$. Вычислив, получим, $y(6) = 469$, $y(7) = 471$. Следовательно, $y$ будет наименьшим при $x = 6$.

Аналогичные задачи [6]:

а) Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние? *Считайте, что перекресток не Т-образный, обе дороги продолжаются за перекрестком.*

б) Алексей вышел из дома на прогулку со скоростью $\upsilon$ км/ч. После того, как он прошел 6 км, из дома следом за ним выбежала собака Жучка, скорость которой была на 9 км/ч больше скорости Алексея. Когда Жучка догнала хозяина, они повернули назад и вместе возвратились домой со скоростью 4 км/ч. Найдите значение $\upsilon$, при котором время прогулки Алексея окажется наименьшим. Сколько при этом составит время его прогулки?

в) В бассейн проведены три трубы. Первая труба наливает 30 м$^3$ воды в час. Вторая труба наливает в час на $3V$ м$^3$ меньше, чем первая ($0 < V < 10$), а третья труба наливает в час на $10\ V$ м$^3$ больше первой. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают 30% бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся 0,7 бассейна. При каком значении $V$ бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

Особую сложность для школьников представляет решение задач с параметром. Использование функционально-графического метода в

координатной плоскости *xOa*, *aOx* существенно повысит уровень понимания и восприятия материала.

**Пример 5.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых на интервале (1; 2) существует хотя бы одно число $x$, неудовлетворяющее неравенству $a + \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leq 3x - x^2$.

Начать решение следует с преобразований: $|x - a| \leq 3x - x^2 - a$. Тогда, решая неравество с модулем, получим:

$$\begin{cases} x - a \leq 3x - x^2 - a, \\ x - a \geq -3x + x^2 + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x - a) \leq 0, \\ a \leq -0{,}5x^2 + 2x \end{cases}$$

Первое неравенство последней системы определяет на плоскости *Oxa* полосу, заключенную между прямыми $x = 0$ и $x = -2$. Второе неравенство задаёт часть плоскости, ограниченную сверху параболой (рисунок 2).

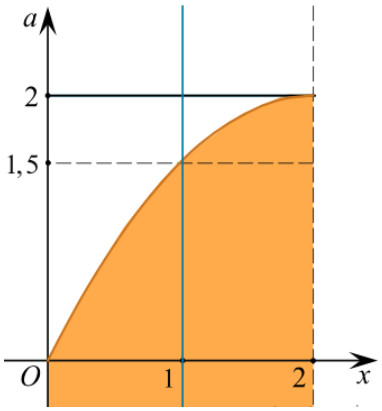



Рисунок 2 – Иллюстрация примера 5.

На рисунке видно, что прямая $x = 1$ пересекает параболу при $a = -0{,}5(1)^2 + 2(1) = 1{,}5$. Это означает, что на интервале (1; 2) есть $x$, не удовлетворяющие неравенству, только если $a > 1{,}5$.

При решении задач с параметрами также могут использоваться свойства четности-нечетности, монотонности.

**Пример 6.** Найти все значения параметра a, при которых любое решение уравнения $4\sqrt[3]{3{,}5x - 2{,}5} + 3\log_2(3x - 1) + 2a = 0$ принадлежит отрезку [1; 3].

Решение функциональным способом предполагает введение функции

$f(x) = 4\sqrt[3]{3{,}5x - 2{,}5} + 3\log_2(3x - 1) + 2a$, которая возрастает на всей своей области определения и принимает значения на множестве R. Значит уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение, которое будет принадлежать заявленному в условии отрезку при $f(1) \leq 0$ и $f(3) \geq 0$. Составляя соответствующую систему, приходим к ответу [-8,5; -3,5].

### 3. Заключение

Таким образом, функциональный метод и функциональные способы решения задач являются эффективным инструментом для глубокого понимания

математики и её применения в реальной жизни Предлагаемые задания достаточно хорошо усваиваются школьниками, особенно старших классов, помогают более глубокому осмыслению понятия функции и её применения. Кроме этого, функциональный метод способствует созданию математических моделей реальных процессов. Ученики учатся применять функции для описания физических явлений, экономических ситуаций и других задач из практики.

## Список источников


1. Гриншпон, И. Э. Функции и графики: учебно-методическое пособие – Томск: ТГУ, 2018. – 110 с.
2. Мерзляк, А.Г., Полонский, В. Б., Якир, М. С. Алгебраический тренажер: Пособие для школьников и абитуриентов. – М.: Илекса, 2007, 320 с.
3. Твердохлебова Е. В. Исследование функций: сборник – Москва: МИСИС, 2019. – 179 с.
4. Шахмейстер, А. Х. Задачи с параметрами на экзаменах: учебное пособие – Москва: МЦНМО, 2009. – 248 с.
5. Шелаев А. Н. Нестандартные и олимпиадные задачи по неэлементарной и высшей математике: учебно-методическое пособие – Москва: МИСИС, 2004. – 159 с.
6. Сдам ГИА: решу ЕГЭ: Образовательный портал для подготовки к экзаменам – [Электронный ресурс], 2024. – Режим доступа: – URL: https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 15.11.2024).


## References


1. Grinshpon, I. E. Functions and graphs: a teaching aid - Tomsk: TSU, 2018. – 110 p.
2. Merzlyak, A.G., Polonsky, V. B., Yakir, M. S. Algebraic trainer: A manual for schoolchildren and applicants. – M.: Ileksa, 2007, 320 p.
3. Tverdokhlebova, E. V. Research of functions: collection - Moscow: MISiS, 2019. – 179 p.
4. Shakhmeister, A. Kh. Problems with parameters in exams: a tutorial – Moscow: MCNO, 2009. - 248 p.
5. Shelayev, A. N. Non-standard and Olympiad problems in non-elementary and higher mathematics: a teaching aid - Moscow: MISiS, 2004. - 159 p.
6. I will pass the GIA: I will solve the Unified State Exam.: Educational portal for preparing for exams – [website], 2024. – URL: https://ege.sdamgia.ru/ (accessed: 15.11.2024).