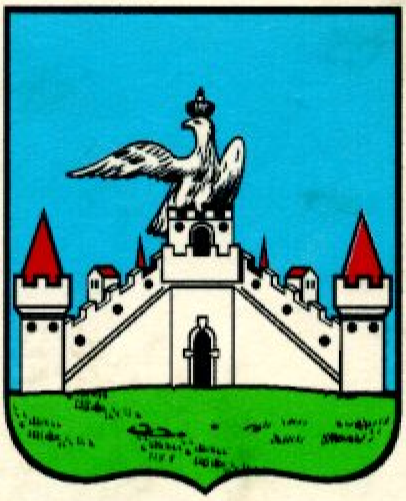
Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации



Современные методы физико-математических наук

Труды международной
конференции
9 – 14 октября, Россия

Орел, 2006

Том 1

- Дифференциальные уравнения и математическая физика
- Теория функций и функциональный анализ
- Алгебра, топология и геометрия

Орловский государственный университет

Федеральное Агентство по Образованию
Российской Федерации
Государственное Образовательное Учреждение
Высшего Профессионального Образования
«Орловский Государственный Университет»

Современные методы физико-математических наук

Труды международной конференции
9 – 14 октября 2006 г., Орел

Том 1

Орел, 2006

УДК 517.9+517.5+517.98+512.5+515.1+514.7

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Орловского государственного университета
Протокол №8 от 05.07.06

Современные методы физико-математических наук. Труды международной конференции. 9-14 октября 2006 г., г. Орел. Т. 1. – Орел: Издательство ОГУ, Полиграфическая фирма «Картуш», 2006 г. – 210 с.

ISBN 5-9708-0061-9 (978-5-9708-0061-4)

В этом томе содержатся тексты докладов, прочитанных на юбилейной конференции физико-математического факультета Орловского госуниверситета, по следующим разделам математики: Дифференциальные уравнения и математическая физика; Теория функций и функциональный анализ; Алгебра, топология и геометрия.

Книга может быть полезна преподавателям, научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов физико-математических факультетов университетов и педагогических институтов.

Редактор тома: А.Г. Мешков

ISBN 5-9708-0061-9 (978-5-9708-0061-4)

Посвящается 75-летию Орловского государственного университета и 75-летию физико-математического факультета

Предисловие

Проведение конференции приурочено к юбилею Орловского государственного педагогического института (ОГПИ), преобразованного в 1998 г. в классический университетет. В год основания ОГПИ были открыты несколько факультетов, одним из них был физико-математический факультет. На факультете работали замечательные педагоги – математики и физики: Б.И. Аргунов, П.С. Кудрявцев, С.М. Клименко, В.Л. Минковский, И.В. Парнасский, Н.М. Ростовцев и другие. Ныне преподавательский состав физико-математического факультета значительно вырос и пополнился. Многие преподаватели имеют высокий научный рейтинг как в России, так и за рубежом. Это ректор университетета д.п.н., профессор Ф.С. Авдеев; зав. лабораторией теории функций и функционального анализа д.ф.-м.н, профессор В.П. Громов; зав. кафедрой алгебры и математических методов в экономике д.ф.-м.н, профессор А.Б. Секерин; зав. кафедрой геометрии и методики преподавания математики профессор В.В. Ветров; зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений д.ф.-м.н, профессор А.Н. Зарубин; зав. кафедрой теоретической физики и математического моделирования д.ф.-м.н, профессор В.Ф. Пивень; зав. кафедрой информатики д.ф.-м.н, профессор А.Г. Мешков; д.п.н., профессор Т.К. Авдеева; д.ф.-м.н, профессор С.А. Савков и др. Большая часть из перечисленных ученых имеют свои научные школы и руководят научной работой аспирантов. В 2005 г. в ОГУ создан научно-исследовательский институт Естественных наук, в состав которого входит отдел Прикладной математики. Сотрудники этого отдела – преподаватели и аспиранты физико-математического факультета.

Тематика конференции определялась, в основном, исходя из научных интересов сотрудников ОГУ. Статьи, включенные в Труды конференции, были разбиты на три тома. Первый том посвящен «чистой» математике, т.е. дифференциальным уравнениям, математической физике, алгебре, топологии, геометрии, теории функций и функциональному анализу. Во второй том вошли статьи по наукам более близким к приложениям – это математические методы в экономике, математическое моделирование в гидродинамике и физике, физическая кинетика и механика дисперсных систем. Возможно, разделение статей на 1 и 2 тома было несколько условным, скорее оно диктовалось техническими причинами. Третий том содержит статьи по методике преподавания математики, физики и информатики. Мы надеемся, что статьи, включенные в Труды, вызовут интерес научной общественности. Мы также верим, что конференция Орловского государственного университета станет традиционной.

Редколлегия сборника

Международная конференция

Современные методы физико-математических наук

9 – 14 октября 2006, Орел, Россия

Организатор – Орловский государственный университет

Организационный комитет

Мешков А.Г., председатель, зав. кафедрой информатики ОГУ
Федяев Ю.С., ученый секретарь, доц. кафедры теоретической физики
Ветров В.В., зав. кафедрой геометрии и методики преподавания математики ОГУ
Громов В.П., зав. лабораторией теории функций и функционального анализа ОГУ
Зарубин А.Н., зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений ОГУ
Ильина Н.А., проректор по учебной работе ОГУ
Можарова Т.Н., декан физико-математического факультета, доц. кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ОГУ
Пивень В.Ф., зав. кафедрой теоретической физики и математического моделирования ОГУ
Секерин А.Б., зав. кафедрой алгебры и математических методов в экономике ОГУ
Селютин В.Д., проф. кафедры алгебры и математических методов в экономике ОГУ
Сысоев И.В., зав. кафедрой общей физики ОГУ
Дьяконов С.Н., ст. преп. кафедры общей физики ОГУ
Чернобровкина И.И., доц. кафедры алгебры и математических методов в экономике ОГУ

Тематика конференции

⋆ Краевые задачи для дифференциальных уравнений
⋆ Математическая физика
⋆ Симметрии и законы сохранения для дифференциальных уравнений, точная интегрируемость
⋆ Алгебра, топология, геометрия
⋆ Теория функций и функциональный анализ
⋆ Математические методы в экономике
⋆ Математическое моделирование в гидродинамике и физике
⋆ Физическая кинетика и механика дисперсных систем
⋆ Методика преподавания математики
⋆ Методика преподавания физики
⋆ Методика преподавания информатики

Список участников

(секции 1–3)

Секция 1. Дифференциальные уравнения и математическая физика

1. ***Арланова Екатерина Юрьевна***, Самарский государственный технический университет, Самара, E-mail: kitten8@list.ru
2. ***Баландин Александр Владимирович***, Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского, Н. Новгород, E-mail: balandin@pmk.unn.runnet.ru
3. ***Белова Ольга Сергеевна***, Казанский государственный университет, Казань, E-mail: eudaimonia@list.ru
4. ***Васильев Владимир Борисович***, Брянский государственный университет, Брянск, E-mail: vbv57@inbox.ru
5. ***Гинзгеймер Сергей Александрович***, Калужский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, E-mail: ginzgeymer@mail.ru
6. ***Гладышев Юрий Александрович***, Калужский государственный педагогический университет им. К.Э. Циолковского, Калуга
7. ***Гумбаталиев Ровшан Зульфигар***, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
8. ***Гутов Азамат Заурбиевич***, НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, E-mail: azamat-gutov@rambler.ru
9. ***Данилова Ольга Юрьевна***, Воронежский институт МВД России, Воронеж, E-mail: danilova_olga@hotmail.com
10. ***Ефимова Светлана Витальевна***, Самарский государственный экономический университет, Самара, E-mail: efimova72@bk.ru
11. ***Жегалов Валентин Иванович***, Казанский государственный университет, Казань, E-mail: Valentin.Zhegalov@ksu.ru
12. ***Жуков Константин Геннадьевич***, Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону, E-mail: kgz@inbox.ru
13. ***Зайцев Валентин Федорович***, Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, E-mail: valentin_zaitsev@mail.ru
14. ***Зарубин Александр Николаевич***, Орловский государственный университет, Орел
15. ***Зарубин Евгений Александрович***, Орловский государственный университет, Орел
16. ***Каранджулов Людмил Иванов***, Технический университет-София, София, Болгария, E-mail: likar@tu-sofia.bg
17. ***Карюк Анастасия Игоревна***, Ставропольский государственный университет, Ставрополь, E-mail: karyuk@mail.ru

18. ***Кащеева Ольга Николаевна***, Волжская государственная академия водного транспорта, Н. Новгород
19. ***Колыбасова Валентина Викторовна***, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, E-mail: Termoyad@rambler.ru
20. ***Копылов А.Н.***, Воронежский институт МВД России, Воронеж
21. ***Кузнецова Ирина Анатольевна***, Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Самара
22. ***Лагно Виктор Иванович***, Полтавский государственный педагогический университет, Полтава, Украина, E-mail: lvi@pdpu.poltava.ua
23. ***Лаштабега Оксана Владимировна***, Орловский государственный университет, Орел
24. ***Мерлин Анатолий Вольфович***, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары, E-mail: merlina@cbx.ru
25. ***Мешков Анатолий Георгиевич***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: meshkov@orel.ru
26. ***Редькина Татьяна Валентиновна***, Ставропольский государственный университет, Ставрополь, E-mail: karyuk@mail.ru
27. ***Репин Олег Александрович***, Самарский государственный экономический университет, Самара, E-mail: matstat@mail.ru
28. ***Савкова Ольга Валерьевна***, Орловский государственный университет, Орел
29. ***Салихов Рустам Назипович***, Самарский государственный технический университет, Самара, E-mail: salrus@mail.ru
30. ***Спичак Станислав Викторович***, Институт математики НАН Украины, Киев, Украина, E-mail: stas_sp@mail.ru
31. ***Старцев Сергей Яковлевич***, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, E-mail: startsev@anrb.ru
32. ***Талагаев Юрий Викторович***, Балашовский филиал Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского, Балашов
33. ***Тараканов Андрей Федорович***, Борисоглебский государственный педагогический институт, Борисоглебск, E-mail: aft777@mail.ru
34. ***Уткина Елена Анатольевна***, Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, Казань, E-mail: eutkina1@yandex.ru
35. ***Флегонтов Александр Владимирович***, Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург,
E-mail: flegontoff@yandex.ru
36. ***Хакимова Гузель Рефкадовна***, Казанский государственный университет, Казань, E-mail: haki05@rambler.ru

37. ***Черкасова Владлена Владиславовна***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: cher_vl@orel.ru
38. ***Чечин Георгий Михайлович***, Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону
39. ***Шанько Юрий Вадимович***, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, E-mail: shanko@ksc.krasn.ru
40. ***Шатохин Михаил Михайлович***, Орловский государственный институт экономики и торговли, Орел
41. ***Шувалова Татьяна Витальевна***, Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Самара
42. ***Яковенко Геннадий Николаевич***, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, E-mail: yakovenko_g@mtu-net.ru

Секция 2. Теория функций и функциональный анализ

43. ***Абдукаримов Анар Рафик***, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
44. ***Агамалиев Намик Черкез***, Азербайджанский архитектурно-строительный университет, Баку, Азербайджан
45. ***Алексеева Елена Николаевна***, Орловский государственный университет, Орел
46. ***Бандалиев Ровшан Алифага***, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан, E-mail: bandalievr@rambler.ru
47. ***Билалов Билал Телман***, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан, E-mail: b_bilalov@mail.ru
48. ***Гаджибеков Мубариз Кафаршах***, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан, E-mail: mubarizh@rambler.ru
49. ***Громов Виталий Петрович***, Орловский государственный университет, Орел
50. ***Джабарзаде Рахшанда Мамед кызы***, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан, E-mail: rmi@lan.ab.az
51. ***Касумов Заур Алияр***, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
52. ***Можарова Татьяна Николаевна***, Орловский государственный университет, Орел
53. ***Панюшкин Сергей Владимирович***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: hexenhammer@rambler.ru
54. ***Салманов Валид Фатали***, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

Секция 3. Алгебра, топология и геометрия

55. ***Батуров Дмитрий Петрович***, Орловский государственный университет, Орел
56. ***Вечтомов Евгений Михайлович***, Вятский государственный гуманитарный университет, Киров, E-mail: vecht@mail.ru
57. ***Лукин Михаил Александрович***, Вятский государственный гуманитарный университет, Киров
58. ***Старостина Ольга Валентиновна***, Вятский государственный гуманитарный университет, Киров
59. ***Стрижов Павел Борисович***, Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург, E-mail: pstrig@mail.ru
60. ***Черанева Анна Владимировна***, Вятский государственный гуманитарный университет, Киров
61. ***Чермных Василий Владимирович***, Вятский государственный гуманитарный университет, Киров

Дифференциальные уравнения и математическая физика

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА

Е. Ю. Арланова
Самарский государственный технический университет,
Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Рассмотрим уравнение

$$Lu = y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_x = 0, \quad a = \pm 1, \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x,\,y) : 0 < x - \frac{y^2}{2} < x + \frac{y^2}{2} < 1\}$, являющейся характеристическим треугольником.

1. Постановка задачи при $\mathbf{a = 1}$. Введем следующие обозначения: $\Theta_0(x) = (\frac{x}{2}; \sqrt{x})$ и $\Theta_1(x) = (\frac{1+x}{2}; \sqrt{1-x})$ – аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из произвольной точки $x \in [0,\,1]$, с характеристиками $\xi = x - \frac{y^2}{2} = 0$ и $\eta = x + \frac{y^2}{2} = 1$ соответственно, $D_{0+}^{-\alpha} f(x)$ – оператор дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля [1, 2], $E_{0+}^{\alpha,\eta} f(x) = \dfrac{x^{-\alpha+\eta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\eta} f(t)dt = x^{-(\alpha+\eta)} D_{0+}^{-\alpha} x^{\eta} f(x)$ – оператор дробного интегродифференцирования Кобера-Эрдейи, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция [3].

Для уравнения (1) поставим и исследуем следующую задачу.

Задача 1. Найти функцию $u(x,\,y)$ со свойствами:

1) $Lu = 0$ в области Ω;

2) $u(x,\,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup (0,\,1)) \cap C^2(\Omega)$;

3)$E_{0+}^{-\alpha,\alpha-\frac{1}{2}} u\,[\Theta_0(x)] = E_{0+}^{-\alpha,\alpha-\frac{1}{2}} u(x,\,0) + C_0(x) \lim\limits_{y\to 0+} u_y(x,\,y) + f_0(x)$;

$$\sqrt{1-x}\frac{d}{dx} u\,[\Theta_1(x)] = B_1(x) u(x,\,0) + C_1(x) \lim_{y\to 0+} u_y(x,\,y) + f_1(x),$$

где $B_1(x)$, $C_0(x)$, $C_1(x)$, $f_0(x)$, $f_1(x)$ – заданные функции такие, что

$$\begin{gathered} B_1(x) \neq 0, \quad x \in [0,\ 1]; \\ B_1(x),\, C_0(x),\, C_1(x),\, f_0(x),\, f_1(x) \in C[0,\,1] \cap C^2(0,\,1), \end{gathered} \tag{2}$$

α – заданная константа такая, что

$$\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1. \tag{3}$$

2. Доказательство однозначной разрешимости задачи 1. Введем обозначения

$$u(x,\,0)=\tau(x),\quad \lim_{y\to 0+} u_y(x,\,y)=\nu(x). \tag{4}$$

Используя решение задачи Коши в области Ω [4]

$$u(x,\,y)=\tau\left(x+\frac{y^2}{2}\right)+\frac{y}{2}\int\limits_0^1 \nu\left(x+(1-2t)\,\frac{y^2}{2}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}}, \tag{5}$$

находим

$$u[\Theta_0]=\tau(x)+\frac{\sqrt{\pi}}{2}D_{0+}^{-\frac{1}{2}}\nu(x),\quad u[\Theta_1(x)]=\tau(1)+\frac{1}{2}D_{1-}^{-1}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\nu(x). \tag{6}$$

Подставив (6) в краевое условие 3) с учетом обозначений (4), после несложных преобразований получим систему двух уравнений с двумя неизвестными – $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}x^{-\frac{1}{2}}E_{0+}^{-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right),\alpha}\nu(x)=C_0(x)\nu(x)+f_0(x), \tag{7}$$

$$\tau(x)=-\frac{1}{B_1(x)}\left[\left(\frac{1}{2}+C_1(x)\right)\nu(x)+f_1(x)\right]. \tag{8}$$

Докажем однозначную разрешимость системы (7)–(8). С этой целью, применяя к обеим частям (7) оператор $E_{0+}^{\alpha-\frac{1}{2},2\alpha-\frac{1}{2}}f(x)$, после преобразований получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\mu(x)=f(x)+\lambda\int\limits_0^x x^{-\alpha}(x-t)^{\alpha-\frac{3}{2}}C_0(t)\mu(t)dt, \tag{9}$$

где $f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{2\alpha-1}E_{0+}^{\alpha-\frac{1}{2},2\alpha-\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}f_0(x)\right)$, $\mu(x)=x^{2\alpha-1}\nu(x)$, $\lambda=\frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}$.

Иначе говоря, мы свели решение исходной задачи к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра (9).

Ядро $K(x,\,t)=x^{-\alpha+1}(x-t)^{\alpha-\frac{3}{2}}C_0(t)$ и функция $f(x)$ являются непрерывными в целом функциями, причем их особенности имеют порядок меньше единицы. Тогда по теории интегральных уравнений Вольтерра [5] уравнение (9) имеет единственное решение.

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть функции $B_1(x)$, $C_0(x)$, $C_1(x)$, $f_0(x)$, $f_1(x)$ удовлетворяют условиям (2), действительная константа α – условию (3). Тогда задача 1)–3) для уравнения (1) имеет единственное решение, определяемое формулой решения задачи Коши (5), где $\nu(x)$ – решение интегрального уравнения (9), а $\tau(x)$ – определена в формуле (8).*

3. Постановка задачи при a = −1. Рассмотрим уравнение

$$Lu = y^2 u_{xx} - u_{yy} - u_x = 0 \tag{10}$$

в области Ω, описанной выше. Поставим и исследуем для этого уравнения следующую задачу.

Задача 2. Найти функцию $u(x,\ y)$ со свойствами:

1) $Lu = 0$ в области Ω;

2) $u(x,\ y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup (0,\ 1)) \cap C^2(\Omega)$;

3) $\dfrac{d}{dx} u\left[\Theta_0(x)\right] = B_0(x) u(x,\ 0) + C_0 \lim\limits_{y \to 0+} u_y(x,\ y) + f_0(x)$

$E_{1-}^{-\alpha, \alpha - \frac{1}{2}} u\left[\Theta_1(x)\right] = E_{1-}^{-\alpha, \alpha - \frac{1}{2}} u(x,\ 0) + C_1(x) \lim\limits_{y \to 0+} u_y(x,\ y) + f_1(x),$

где $B_0(x)$, $C_0(x)$, $C_1(x)$, $f_0(x)$, $f_1(x)$ – заданные функции такие, что

$$B_0(x) \neq 0, \quad x \in [0,\ 1]; \quad B_0(x),\ C_0(x),\ C_1(x),\ f_0(x),\ f_1(x) \in C[0,\ 1] \cap C^2(0,\ 1), \tag{11}$$

α – заданная константа такая, что удовлетворяет условию (3)

4. Доказательство однозначной разрешимости задачи 2. Используя решение задачи Коши в области Ω [4]

$$u(x,\ y) = \tau\left(x - \frac{y^2}{2}\right) - \frac{y}{2} \int\limits_0^1 \nu\left(x + (1-2t)\frac{y^2}{2}\right) \frac{dt}{\sqrt{1-t}}, \tag{12}$$

и обозначения (4), находим

$$u\left[\Theta_0(x)\right] = \tau(0) + \frac{1}{2} D_{0+}^{-1} x^{-\frac{1}{2}} \nu(x), \quad u\left[\Theta_1(x)\right] = \tau(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{1-}^{-\frac{1}{2}} \nu(x). \tag{13}$$

Подставляя (13) в краевое условие 3), после несложных преобразований получим систему двух уравнений относительно двух неизвестных – $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\tau(x) = -\frac{1}{B_0(x)} \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + C_0(x)\right) \nu(x) + f_0(x)\right], \tag{14}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} x^{\frac{1}{2}} E_{1-}^{-\left(\alpha - \frac{1}{2}\right), \alpha} \nu(x) = C_1(x) \nu(x) + f_1(x). \tag{15}$$

Разрешимость системы (14)–(15) докажем аналогично нахождению решения системы (7)–(8). Применяя оператор $E_{1-}^{\alpha - \frac{1}{2}, 2\alpha - \frac{1}{2}} f(x)$, после преобразований получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\mu(x) = f(x) + \lambda \int\limits_x^1 x^{-\alpha} (x-t)^{\alpha - \frac{3}{2}} C_1(t) \mu(t) dt, \tag{16}$$

где $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{2\alpha - 1} E_{1-}^{\alpha - \frac{1}{2}, 2\alpha - \frac{1}{2}} \left(x^{-\frac{1}{2}} f_1(x)\right)$, $\mu(x) = x^{2\alpha - 1} \nu(x)$, $\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}$.

Однозначная разрешимость этого уравнения доказывается так же, как для уравнения (9).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции* $B_0(x)$, $C_0(x)$, $C_1(x)$, $f_0(x)$, $f_1(x)$ *удовлетворяют условиям (11), действительная константа* α *– условию (3). Тогда задача 1)–3) для уравнения (10) имеет единственное решение, определяемое формулой решения задачи Коши (12), где* $\nu(x)$ *– решение интегрального уравнения (16), а* $\tau(x)$ *– определена в формуле (14).*

Список литературы

[1] *С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987.

[2] *А.М. Нахушев.* Элементы дробного исчисления и их приминение. Нальчик: КБНЦ РАН. 2000.

[3] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.

[4] *А.В. Бицадзе.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука. 1981.

[5] *Ф. Трикоми.* О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.-Л.: Гостехиздат. 1947.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СИСТЕМ КИРАЛЬНОГО ТИПА

А.В. Баландин*, О.Н. Кащеева*

$*$ Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина 23

$\star$ Волжская государственная академия водного транспорта

603600, Нижний Новгород, ул. Нестерова 5

Системами кирального типа будем называть, следуя [1], системы дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$U^\alpha_{xy} + G^\alpha_{\beta\gamma} U^\beta_x U^\gamma_y + Q^\alpha = 0, \tag{1}$$

где x, y – независимые переменные, греческие индексы α, β, γ принимают значения от 1 до n; $G^\alpha_{\beta\gamma}, Q^\alpha$ – гладкие функции от $U^1, \ldots, U^n$.

Заметим, что при произвольных невырожденных заменах $W^\beta = W^\beta(U^\alpha)$, система (1) переходит в систему того же вида, причем коэффициенты $G^\alpha_{\beta\gamma}$ изменяются по закону преобразования коэффициентов аффинной связности. Будем считать $G^\alpha_{\beta\gamma}$ символами Кристоффеля некоторого пространства аффинной связности V^n в локальной системе координат $U^1, \ldots, U^n$.

Одним из признаков интегрируемых систем является наличие представления Лакса.

В данной работе представление Лакса будем понимать следующим образом.

Определение 1. Будем говорить, что система (1) допускает представление Лакса со значениями в полупростой вещественной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, если существуют отображения

$$A\ :\mathbb{R}\times J^{(1)}(V^n\times\mathbb{R}^2)\to\mathfrak{g}\ :\ \ (\lambda,x,y,U^\alpha,U^\alpha_x,U^\alpha_y)\mapsto A(\lambda,x,y,U^\alpha,U^\alpha_x,U^\alpha_y),$$

$$B\ :\mathbb{R}\times J^{(1)}(V^n\times\mathbb{R}^2)\to\mathfrak{g}\ :\ \ (\lambda,x,y,U^\alpha,U^\alpha_x,U^\alpha_y)\mapsto B(\lambda,x,y,U^\alpha,U^\alpha_x,U^\alpha_y),$$

такие, что условие

$$D_yA-D_xB=[B,A]$$

эквивалентно системе (1). Здесь λ – произвольный параметр, $A=e_aA^a=e_a(A^a_\beta U^\beta_x+M^a)$, $B=e_aB^a=e_a(B^a_\beta U^\beta_y+N^a)$, e_a – некоторый базис в алгебре $\mathfrak{g}$; $A^a_\beta,M^a,B^a_\beta,N^a$ – функции от U^δ и λ; квадратные скобки $[\ ,\ ]$ обозначают произведение в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и

$$D_yA=\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial U^\alpha}U^\alpha_y+\frac{\partial A}{\partial U^\alpha_x}U^\alpha_{xy}+\frac{\partial A}{\partial U^\alpha_y}U^\alpha_{yy},\ \ D_xB=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial U^\alpha}U^\alpha_x+\frac{\partial B}{\partial U^\alpha_x}U^\alpha_{xx}+\frac{\partial B}{\partial U^\alpha_y}U^\alpha_{xy}.$$

Далее будет удобно переформулировать определение 1 с помощью форм. Пусть

$$\Theta^a=A^adx+B^ady\quad(a=\overline{1,r})\tag{2}$$

– формы на $\mathbb{R}\times J^{(1)}(V^n\times\mathbb{R}^2)$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Система (1) допускает представление Лакса со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда подстановка (2) в уравнения

$$d\Theta^a=C^a_{bc}\Theta^c\wedge\Theta^b\tag{3}$$

приводит к системе, эквивалентной системе (1), т.е. система (2) вполне интегрируема (по Фробениусу) на решениях системы (1). Здесь $C^a_{bc}=-\frac{1}{2}\overline{C}^a_{bc}$, $\overline{C}^a_{bc}$ – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Лемма 1. *Пусть система* (1) *допускает представление Лакса со значениями в полупростой алгебре Ли* $\widehat{\mathfrak{g}}$, *т.е. система*

$$\theta^{\widehat{a}}=(A^{\widehat{a}}_\beta U^\beta_x+M^{\widehat{a}})dx+(B^{\widehat{a}}_\beta U^\beta_y+N^{\widehat{a}})dy\tag{4}$$

вполне интегрируема

$$d\theta^{\widehat{a}}=C^{\widehat{a}}_{\widehat{b}\widehat{c}}\theta^{\widehat{c}}\wedge\theta^{\widehat{b}}\tag{5}$$

на решениях системы (1)*. Здесь* $A^{\widehat{a}}_\beta,B^{\widehat{a}}_\beta,M^{\widehat{a}},N^{\widehat{a}}$ *– гладкие функции от* U^δ *и некоторого параметра* λ*;* $C^{\widehat{a}}_{\widehat{b}\widehat{c}}=-\frac{1}{2}\overline{C}^{\widehat{a}}_{\widehat{b}\widehat{c}}$, $\overline{C}^{\widehat{a}}_{\widehat{b}\widehat{c}}$ *– структурные константы алгебры* $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Тогда существует r*-мерная полупростая алгебра* $\mathfrak{g}$ *такая, что* $r\geqslant n$ *и формы*

$$\theta^a=(A^a_\beta U^\beta_x+M^a)dx+(B^a_\beta U^\beta_y+N^a)dy,\tag{6}$$

$$d\theta^a=C^a_{bc}\theta^c\wedge\theta^b\tag{7}$$

определяют представление Лакса для системы (1)*, причем* $\operatorname{rang}||A^a_\beta-B^a_\beta||\geqslant n$.

Доказательство. Пусть формы (4) определяют представление Лакса. Не ограничивая общности, можно предполагать, что параметр λ изменяется в окрестности нуля. При фиксированном произвольном значении параметра λ подстановка (4) в (5) приводит к линейной комбинации уравнений системы (1). При этом, вообще говоря, разные уравнения системы могут получаться при разных значениях параметра λ. Но существует конечное число k значений параметра $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$, при которых получаются все уравнения системы (1). Теперь в качестве $\mathfrak{g}$ возьмем произведение k экземпляров алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ и для каждого экземпляра запишем представление Лакса при соответствующем значении параметра. Записывая теперь представление Лакса (6),(7) со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, получим все уравнения системы (1). При этом, коэффициентами при уравнениях системы (1), полученными при подстановке (6) в (7), будут как раз коэффициенты матрицы $||A^a_\beta - B^a_\beta||$, следовательно $\mathrm{rang}\,||A^a_\beta - B^a_\beta|| \geqslant n$, по крайней мере в некоторой окрестности нуля. Заметим, что алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста, т.к. $\mathfrak{g}$ – прямое произведение k экземпляров полупростой алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$. Лемма доказана.

Обозначим $S^a_\beta = \frac{1}{2}(A^a_\beta - B^a_\beta)$, $P^a_\beta = \frac{1}{2}(A^a_\beta + B^a_\beta)$.

Лемма 2. *Пусть система* (1) *допускает представление Лакса. Тогда функции* S^a_β, P^a_β, M^a, N^a *удовлетворяют условиям*

$$S^a_\delta G^\delta_{\beta\gamma} = S^a_{(\beta,\gamma)} + P^a_{[\beta,\gamma]} + C^a_{bc}(-S^c_\beta S^b_\gamma + P^c_\beta P^b_\gamma + 2S^c_{(\beta} P^b_{\gamma)}), \tag{8}$$

$$S^a_\delta Q^\delta = C^a_{bc} M^c N^b, \tag{9}$$

$$M^a_{,\delta} = 2C^a_{bc}(P^c_\delta - S^c_\delta)M^b, \tag{10}$$

$$N^a_{,\delta} = 2C^a_{bc}(P^c_\delta + S^c_\delta)N^b, \tag{11}$$

$$\mathrm{rang}||S^a_\delta|| \geqslant n,$$

$$M^b[C^a_{bg}(P^g_{[\delta,\gamma]} - S^g_{[\delta,\gamma]}) + C^a_{gb}C^g_{cd}(P^d_\delta P^c_\gamma + S^d_\delta S^c_\gamma - 2S^d_{[\delta} P^c_{\gamma]})] = 0,$$

$$N^b[C^a_{bg}(P^g_{[\delta,\gamma]} + S^g_{[\delta,\gamma]}) + C^a_{gb}C^g_{cd}(P^d_\delta P^c_\gamma + S^d_\delta S^c_\gamma + 2S^d_{[\delta} P^c_{\gamma]})] = 0.$$

Доказательство получается непосредственной проверкой.

Оказывается, что представление Лакса системы (1) позволяет определить на многообразии V^n семейство симметрических тензорных полей.

Пусть система (1) допускает представление Лакса и

$$f : \underbrace{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times ... \times \mathfrak{g}}_{q} \to \mathbb{R},$$

– Ad-инвариантное симметрическое полилинейное отображение. Определим на пространстве V^n симметричный тензор $F_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ равенством

$$F_{\alpha_1 \dots \alpha_q} = f(S_{\alpha_1}, \dots, S_{\alpha_q}), \tag{12}$$

где S_{α_i} – вектор с координатами $S^a_{\alpha_i}$ $(i = \overline{1,q})$, индексы α_i принимают значения от 1 до n.

Замечание 1. Непосредственная проверка показывает, что $F_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ действительно является тензорным полем на V^n.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *допускает представление Лакса.*

Тогда для любого тензорного поля $F_{\alpha_1\ldots\alpha_q}$, *определенного равенством* (12) *справедливо*

$$\bigtriangledown_{(\beta}F_{\alpha_1\ldots\alpha_q)} = 0, \tag{13}$$

где $\bigtriangledown_\beta F_{\alpha_1\ldots\alpha_q}$ – *ковариантная производная тензора* $F_{\alpha_1\ldots\alpha_q}$ *относительно связности на* V^n, *определенной коэффициентами* $G^\alpha_{\beta\gamma}$.

Доказательство. Симметрируя и альтернируя (8) по индексам β и γ, получим

$$\bigtriangledown_{(\gamma}S^a_{\beta)} = 2C^a_{bc}S^c_{(\beta}P^b_{\gamma)}, \tag{14}$$

$$\bigtriangledown_{[\gamma}P^a_{\beta]} = (S^a_\delta - P^a_\delta)G^\delta_{[\beta\gamma]} + C^a_{bc}(P^b_\beta P^c_\gamma - S^b_\beta S^c_\gamma).$$

Из (14) следует

$$\bigtriangledown_\gamma S^a_\beta = 2C^a_{bc}S^c_\beta P^b_\gamma + D^a_{\beta\gamma}, \tag{15}$$

где

$$D^a_{(\beta\gamma)} = 0. \tag{16}$$

Найдем ковариантную производную тензора $F_{\alpha_1\ldots\alpha_q}$, учитывая (15):

$$\begin{aligned}\bigtriangledown_\beta F_{\alpha_1\ldots\alpha_q} &= \bigtriangledown_\beta f(S_{\alpha_1},\ldots,S_{\alpha_q}) = f(\bigtriangledown_\beta S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2},\ldots,S_{\alpha_q}) + f(S_{\alpha_1},\bigtriangledown_\beta S_{\alpha_2},\ldots,S_{\alpha_q}) + \ldots\\ &+ f(S_{\alpha_1},S_{\alpha_2},\ldots,\bigtriangledown_\beta S_{\alpha_q}) = f([S_{\alpha_1},P_\beta],S_{\alpha_2},\ldots,S_{\alpha_q}) + f(D_{\alpha_1\beta},S_{\alpha_2},\ldots,S_{\alpha_q}) +\\ &+ f(S_{\alpha_1},[S_{\alpha_2},P_\beta],\ldots,S_{\alpha_q}) + f(S_{\alpha_1},D_{\alpha_2\beta},\ldots,S_{\alpha_q}) + \ldots\\ &+ f(S_{\alpha_1},S_{\alpha_2},\ldots,[S_{\alpha_q},P_\beta]) + f(S_{\alpha_1},S_{\alpha_2},\ldots,D_{\alpha_q\beta}).\end{aligned}$$

Напомним (см., например, [2]), что для любого Ad-инвариантного отображения f и любых $Y, X_1,\ldots,X_q \in \mathfrak{g}$ справедливо равенство

$$f([Y,X_1],X_2,\ldots,X_q) + f(X_1,[Y,X_2],\ldots,X_q) + \cdots + f(X_1,X_2,\ldots[Y,X_q]) = 0.$$

Поэтому

$$\bigtriangledown_\beta F_{\alpha_1\ldots\alpha_q} = f(D_{\alpha_1\beta},S_{\alpha_2},\ldots,S_{\alpha_q}) +$$
$$+ f(S_{\alpha_1},D_{\alpha_2\beta},\ldots,S_{\alpha_q}) + \cdots + f(S_{\alpha_1},S_{\alpha_2},\ldots,D_{\alpha_q\beta}).$$

Симметрируя последнее равенство по всем индексам, получим (13), т.к.

$$f(D_{(\alpha_1\beta},S_{\alpha_2},\ldots,S_{\alpha_q)}) = f(D_{((\alpha_1\beta)},S_{\alpha_2},\ldots,S_{\alpha_q)}) = 0$$

в силу (16). Теорема доказана.

Замечание 2. Условие (13) показывает, что функция $F_{\alpha_1\ldots\alpha_q}\dot U^{\alpha_1}\ldots\dot U^{\alpha_q}$ является полиномиальным интегралом геодезических на пространстве аффинной связности V^n.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *допускает представление Лакса со значениями в компактной алгебре Ли* $\mathfrak{g}$. *Тогда на пространстве аффинной связности* V^n
(i) существует поле положительно определенного симметрического тензора $F_{\alpha\beta}$, *удовлетворяющего условию*

$$\bigtriangledown_{(\gamma}F_{\alpha\beta)} = 0; \tag{17}$$

(ii) существует такая функция H, что $H_{,\alpha} = F_{\alpha\mu}Q^\mu$, т.е.

$$F_{\mu[\alpha,\beta]}Q^\mu + F_{\mu[\alpha}Q^\mu_{,\beta]} = 0. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть система (1) допускает представление Лакса (6),(7) со значениями в компактной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Положим

$$F_{\alpha\beta} = -g^0_{ab}S^a_\alpha S^b_\beta = (S_\alpha, S_\beta), \tag{19}$$

где g^0_{ab} – метрика Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда из теоремы 1 следует справедливость (17), т.к. метрика Киллинга Ad-инвариантна. Кроме того, скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, заданное равенством (19), положительно определено, а $\mathrm{rang}||S^a_\alpha|| \geqslant n$. Поэтому $||F_{\alpha\beta}||$ можно рассматривать как матрицу Грама линейно независимых векторов S_α и, следовательно, $\det||F_{\alpha\beta}|| > 0$.

Обозначим $H = -1/4(M,N)$, где $(M,N) = -g^0_{ab}M^aN^b$, и найдем производную $H_{,\alpha}$, учитывая (10), (11):

$$\begin{aligned} H_{,\alpha} &= \frac{1}{4}g^0_{ab}(M^a_{,\alpha}N^b + M^aN^b_{,\alpha}) = \frac{1}{2}g^0_{ab}(C^a_{dc}B^c_\alpha M^dN^b + C^b_{dc}A^c_\alpha N^dM^a) \\ &= \frac{1}{2}(C_{bdc}B^c_\alpha M^dN^b + C_{adc}A^c_\alpha N^dM^a). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$H_{,\alpha} = \frac{1}{2}(C_{bac}B^c_\alpha + C_{abc}A^c_\alpha)M^aN^b = C_{abc}S^c_\alpha M^aN^b = C_{cab}S^c_\alpha M^aN^b = g^0_{cd}S^c_\alpha C^d_{ab}M^aN^b,$$

т.к. тензор C_{abc} кососимметричен по всем индексам.

Теперь, учитывая (9), получим $H_{,\alpha} = -g^0_{cd}S^c_\alpha S^d_\beta Q^\beta = F_{\alpha\beta}Q^\beta$. Теорема доказана.

Замечание 3. Необходимые условия, указанные в теореме 2, в ряде случаев оказываются бесполезными. Например, в случае собственно риманова пространства V^n первое условие всегда выполнено.

Список литературы

[1] *D. K. Demskoi, A. G. Meshkov.* Zero-curvature representation for a chiral-type three-field system. Inverse Problems. 2003. V. 19. №3. P. 563–571.

[2] *В.В. Трофимов.* Введение в геометрию многообразий с симметриями. М.: МГУ, 1989.

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ*

В.Б. Васильев

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского,
241036, Брянск, ул. Бежицкая, 14

Теория краевых задач для эллиптических и параболических псевдодифференциальных уравнений с гладкими границами была построена в работах М.И. Вишика и Г.И. Эскина [1-3]. Для негладких областей автором был предложен вариант такой теории [4,5], основанный на специальной факторизации символа эллиптического псевдодифференциального оператора. Здесь описывается простейший параболический вариант этой теории, связанный с двумерным углом.

Пусть $s \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$. Пространство Соболева-Слободецкого $H^{s,\gamma}(\mathbf{R}^m)$ состоит из обобщенных функций u, преобразование Фурье которых представляют собой локально интегрируемые функции $\tilde{u}$ такие, что

$$\|u\|^2_{s,\gamma} = \int\limits_{\mathbf{R}^m} |\tilde{u}(\xi)|^2 \left(1 + |\xi'| + |\xi_m|^{\frac{2}{\gamma}}\right)^{2s} d\xi < +\infty, \tag{1}$$

где $\tilde{u}(\xi) = Fu = \int\limits_{\mathbf{R}^m} e^{ix\cdot\xi} u(x)dx$ – преобразование Фурье функции u, $\xi = (\xi', \xi_m)$, $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$.

Фурье-образ пространства $H^{s,\gamma} \equiv H^{s,\gamma}(\mathbf{R}^m)$ обозначим $\widetilde{H}^{s,\gamma}$. Формула (1) определяет норму в пространствах $H^{s,\gamma}$ и $\widetilde{H}^{s,\gamma}$. Отметим, что $\widetilde{H}^{s,\gamma}$ и значит, $H^{s,\gamma}$ – гильбертовы пространства со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle_{s,\gamma} = \int\limits_{\mathbf{R}^m} \tilde{u}(\xi)\tilde{v}(\xi) \left(1 + |\xi'| + |\xi_m|^{\frac{2}{\gamma}}\right)^{2s} d\xi,$$

откуда, в частности, следует, что эти пространства полны.

Аналогично эллиптическому случаю ($\gamma = 1$) имеют место следующие (см. [1]) факты.

Предложение 1. *Функции класса $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ плотны в пространстве $H^{s,\gamma}(\mathbf{R}^m)$.*

(Напоминание: $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем).

Обозначим C_+^a конус в пространстве $\mathbf{R}^m$ вида

$$C_+^a = \{\xi \in \mathbf{R}^m: \ \xi_m > a|\xi'|, \ a > 0\}.$$

Пространство $H_+^{s,\gamma}$ определяется как подпространство $H^{s,\gamma}$, состоящее из функций $u(x)$ с носителем $\overline{C_+^a}$. Аналогично, $H_-^{s,\gamma}$ является подространством в $H^{s,\gamma}$, состоящим из функций с носителем в $\mathbf{R}^m \backslash C_+^a$. Норма в этих пространствах индуцируется нормой (1). При $s \geqslant 0$ запись $u(x) \in H_+^{s,\gamma}$ означает, что $u(x) = 0$ почти всюду при $x \in \mathbf{R}^m \backslash \overline{C_+^a}$. Для произвольных, в частности, отрицательных s, запись $u \in H_+^{s,\gamma}$ означает, что $u \in H^{s,\gamma}$, и по определению носителя обобщенной функции, $(u, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(C_+^a)$.

*Работа выполнена при поддержке программы Университеты России (проект Ур. 04.01.03).

Предложение 2. *Подпространство* $H_{+}^{s,\gamma}$ *замкнуто в* $H^{s,\gamma}$.

Предложение 3. *Функции из классов* C_0^{∞} (C_{+}^{a}), C_0^{∞} $(\mathbf{R}^m \setminus \overline{C_a^{+}})$ *плотны в* $H_{+}^{s,\gamma}$, $H_{-}^{s,\gamma}$ *соответственно.*

Под псевдодифференциальным оператором A понимается оператор, определенный на функциях из класса Шварца $S(\mathbf{R}^m)$ (бесконечно дифференцируемые, быстро убывающие на бесконечности функции) формулой

$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} A(\xi)\tilde{u}(\xi) e^{-ix\cdot\xi} d\xi,$$

где заданная функция $A(\xi)$ называется символом оператора A.

Пусть $A(\xi)$ – локально интегрируемая функция, удовлетворяющая оценке

$$|A(\xi)| \leqslant c\left(1 + |\xi'| + |\xi_m|^{1/\gamma}\right)^{\alpha}.$$

Класс таких функций обозначим $S_{\alpha}^{0,\gamma}$.

Стандартными методами [1] можно получить

Предложение 4. *Пусть* $A(\xi) \in S_{\alpha}^{0,\gamma}$. *Псевдодифференциальный оператор* A *с символом* $A(\xi)$ *при всех* $s \in \mathbf{R}$ *удовлетворяет оценке*

$$\|Au\|_{s-\alpha,\gamma} \leqslant c_s \|u\|_{s,\gamma}, \quad \forall u \in S(\mathbf{R}^m),$$

и следовательно, продолжается по непрерывности как оператор, действующий из $H^{s,\gamma}(\mathbf{R}^m)$ *в* $H^{s-\alpha,\gamma}(\mathbf{R}^m)$.

Пусть $A(\xi)$, $\xi \in \mathbf{R}^m$, – символ псевдодифференциального оператора A, удовлетворяющий условию

$$c_1 \leqslant \left| A(\xi)\left(1 + |\xi'| + |\xi_m|^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{-\alpha} \right| \leqslant c_2, \tag{2}$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные.

Число $\alpha \in \mathbf{R}$ назовем порядком псевдодифференциального оператора A. Символы $A(\xi)$, удовлетворяющие неравенству (2), назовем параболическими символами, и класс таких символов обозначим $C_{\alpha,\gamma}$.

Определение 1. *Волновой факторизацией параболического символа* $A(\xi)$ *называется его представление в виде*

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) A_{=}(\xi),$$

где сомножители $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ *обладают следующими свойствами:*

1) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ *определены почти всюду на* $\mathbf{R}^m$ *кроме, может быть, точек* $\{\xi \in \mathbf{R}^m : |\xi'|^2 = a^2\xi_m^2\}$;

2) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ *допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области* $T(\overset{*}{C}{}_{+}^{a})$, $T(\overset{*}{C}{}_{-}^{a})$ *[6] над сопряженными конусами* $\overset{*}{C}{}_{+}^{a}$, $\overset{*}{C}{}_{-}^{a}$ *соответственно, удовлетворяющее оценкам*

$$\left|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi + i\tau)\right| \leqslant c_1 \left(1 + |\xi'| + |\xi_m|^{\frac{1}{\gamma}} + |\tau|\right)^{\pm\varkappa},$$

$$\left|A_{=}^{\pm 1}(\xi+i\tau)\right| \leqslant c_2 \left(1+|\xi'|+|\xi_m|^{\frac{1}{\gamma}}+|\tau|\right)^{\pm(\alpha-\varkappa)}, \quad \forall \tau \in \overset{*}{C}{}_{\pm}^{a},$$

$$\overset{*}{C}{}_{+}^{a} = \{\xi \in \mathbf{R}^m : \ a\xi_m > |\xi'|\}, \quad \overset{*}{C}{}_{-}^{a} \equiv -\overset{*}{C}{}_{+}^{a}.$$

Число $\varkappa \in \mathbf{R}$ назовем индексом волновой факторизации.

Замечание. Определение 1 можно «приспособить» и для однородных символов. Так, если $C^{\infty}_{\alpha,\gamma}$, $\alpha,\gamma \in \mathbf{R}$, – такой класс параболических символов $A(\xi)$, которые бесконечно дифференцируемы при $\xi \neq 0$ и однородны порядка α с весом γ по ξ_m, т.е.

$$A(t\xi', t^{\gamma}\xi_m) = t^{\alpha} A(\xi', \xi_m), \quad \forall t > 0,$$

и в условии 2) потребовать однородности порядка $\varkappa$ для $A_{\neq}$ и порядка $\alpha - \varkappa$ для $A_{=}$ с весом γ по ξ_m, то получится определение однородной волновой факторизации.

Под параболическим псевдодифференциальным уравнением в конусе понимается уравнение вида

$$PAu_{+} = f, \tag{3}$$

где решение u_{+} разыскивается в пространстве $H_{+}^{s,\gamma}$, функция f задана в C_{+}^{a}, P – оператор сужения на C_{+}^{a}, A – псевдодифференциальный оператор с параболическим символом $A(\xi) \in C_{\alpha}$.

Псевдодифференциальные операторы, подобные $A_{\neq}$, $A_{=}$, обладают очень важным свойством.

Обозначим $\widetilde{H}_{\pm}^{s,\gamma}$ Фурье-образ пространства $H_{\pm}^{s,\gamma}$.

Предложение 5. *Пусть функция $B_{\pm}(\xi+i\tau)$ аналитична в $T(\overset{*}{C}{}_{\pm}^{a})$ и допускает оценку*

$$|B_{\pm}(\xi+i\tau)| \leqslant c\left(1+|\xi'|+|\xi_m|^{\frac{1}{\gamma}}+|\tau|\right)^{\alpha}, \quad \tau \in \overset{*}{C}{}_{\pm}^{a}.$$

Тогда оператор умножения на $B_{\pm}(\xi)$ ограничен как оператор, действующий из пространства $\widetilde{H}_{\pm}^{s,\gamma}$ в пространство $\widetilde{H}_{\pm}^{s-\alpha,\gamma}$.

Всюду ниже полагаем $m = 2$. На функциях из класса Шварца $S(\mathbf{R}^2)$ определим интегральный оператор G_2 формулой

$$(G_2)(\xi_1,\xi_2) = \lim_{\tau\to 0+} \int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{u(\eta_1,\eta_2)d\eta}{(\xi_1-\eta_1)^2 - a^2(\xi_2-\eta_2+i\tau)^2}.$$

Ключевую роль при исследовании разрешимости параболического уравнения (3) играет следующее

Предложение 6. *Пусть $|s/\gamma| < 1/2$. Тогда оператор G_2 является ограниченным проектором пространства $\widetilde{H}^{s,\gamma}$ на подпространство $\widetilde{H}_{+}^{s,\gamma}$. Любая функция $\tilde{f} \in \widetilde{H}^{s,\gamma}$ может быть единственным образом представлена в виде*

$$\tilde{f} = \tilde{f}_{+} + \tilde{f}_{-},$$

где $\tilde{f}_{\pm} \in \widetilde{H}_{\pm}^{s,\gamma}$ и $\tilde{f}_{+} = G_2\tilde{f}$.

Определение 2. *Под 0-волновой факторизацией параболического символа $A(\xi)$ из C_{α} относительно C_{+}^{a} понимается волновая факторизация этого символа в смысле определения 1.*

Ниже будут приведены два основных результата, полученных при исследовании разрешимости параболического псевдодифференциального уравнения (3) в угле C_+^a. Предполагается, что параболический символ $A(\xi) \in C_\alpha$ допускает 0-волновую факторизацию относительно C_+^a с индексом $\varkappa$.

Обозначим $H_0^{s,\gamma}$ пространство обобщенных функций, которые допускают продолжение ℓf на все $\mathbf{R}^2$, принадлежащее $H^{s,\gamma}(\mathbf{R}^2)$.

Норма в пространстве $H_0^{s,\gamma}(C_+^a)$ задается как

$$\|f\|_{s,\gamma}^+ = \inf_{\ell} \|\ell f\|_{s,\gamma},$$

где $infimum$ берется по всем продолжениям f, принадлежащим $H^{s,\gamma}(\mathbf{R}^2)$.

Теорема 1. *Пусть* $\frac{\varkappa - s}{\gamma} = \delta$, $|\delta| < 1/2$. *Тогда уравнение* (3) *для произвольной правой части* $f \in H_0^{s-\alpha,\gamma}(C_+^a)$ *имеет единственное решение* $u_+ \in H^{s,\gamma}(C_+^a)$, *преобразование Фурье которого записывается в виде*

$$\tilde{u}_+ = A_{\neq}^{-1} G_2 A_{=}^{-1} \widetilde{\ell f},$$

где ℓf *– произвольное продолжение* $f \in H_0^{s-\alpha,\gamma}(C_+^a)$ *на* $H^{s-\alpha,\gamma}(\mathbf{R}^m)$.

Имеет место априорная оценка:

$$\|u_+\| \leqslant c\|f\|_{s-\alpha,\gamma}^+.$$

Имеются некоторые обобщения теоремы 1. Приведем одно их них.

Теорема 2. *Пусть* $\frac{\varkappa - s}{\gamma} = n + \delta$, $n \in \mathbf{Z}$, $n > 0$, $|\delta| < 1/2$. *Тогда уравнение* (3) *для произвольной правой части* $f \in H_0^{s-\alpha,\gamma}(C_+^a)$ *имеет решения* $u_+ \in H^{s,\gamma}(C_+^a)$, *преобразование Фурье которых можно записать в виде*

$$\begin{aligned} \tilde{u}_+(\xi) = {} & A_{\neq}^{-1} P_n G_2 P_n^{-1} A_{=}^{-1} \widetilde{\ell f} + \\ & + A_{\neq}^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\tilde{c}_k(\xi_1 - a\xi_2)(\xi_1 + a\xi_2)^k + \tilde{d}_k(\xi_1 + a\xi_2)(\xi_1 - a\xi_2)^k \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{k_1+k_2=0}^{n_\delta} a_{k_1k_2}(\xi_1 - a\xi_2)^{k_1}(\xi_1 + a\xi_2)^{k_2} \right), \end{aligned} \tag{4}$$

где c_k, d_k *– произвольные функции из* $H^{s_k,\gamma}(\mathbf{R}_+)$, $P_n(\xi_1, \xi_2)$ *– произвольный полином переменных* ξ_1, $\xi_2^{\frac{1}{\gamma}}$, *удовлетворяющий оценке (2) с* $\alpha = n$, $s_k = s - \varkappa + k + 1/2$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $a_{k_1k_2} \in \mathbf{C}$,

$$n_\delta = \begin{cases} n-1, & \delta > 0 \\ n-2, & \delta \leqslant 0, \end{cases}$$

причем формула (4) *описывает все возможные решения уравнения* (3).

Имеет место априорная оценка:

$$\|u_+\|_{s,\gamma} \leqslant c \left(\|f\|_{s-\alpha,\gamma}^+ + \sum_{k=0}^{n-1} \left([c_k]_{s_k,\gamma} + [d_k]_{s_k,\gamma} \right) + \sum_{k_1+k_2=0}^{n_\delta} |a_{k_!k_2}| \right),$$

где $[\cdot]_{s_k,\gamma}$ *обозначает* $H^{s_k,\gamma}(\mathbf{R}_+)$*-норму.*

Теорема 2, в частности, позволяет дать корректные постановки краевых задач для уравнения (3); иными словами, она "подсказывает"выбор условий, которые надо присовокупить к уравнению (3), чтобы "зафиксировать"функции c_k, d_k.

В заключение остановимся на параболических уравнениях и краевых задачах в цилиндрических областях с гладким основанием. Принцип "замораживания коэффициентов"в точке пересечения боковой поверхности с основанием приводит к необходимости изучения модельной задачи в области $E_+^{m+1} \subset \mathbf{R}^{m+1} = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_m)\}$, определенной неравенствами $x_0 > 0, x_m > 0$. Основная схема исследования такого модельного уравнения остается прежней, но возникает задача с параметром $x'' = (x_1, \ldots, x_{m-1})$ (в двойственных переменных $\xi'' = (\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$). Вместо оператора G_2 следует ввести оператор G_{m-2} (см. [4,5]) и определить $(m-2)$-волновую факторизацию.

Список литературы

[1] *М.И. Вишик.* Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения. В кн.: Труды международного конгресса математиков (Москва – 1966). М.: Мир, 1968. С. 409–420.

[2] *Г.И. Эскин.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений М.: Наука, 1973.

[3] *М.И. Вишик, Г.И. Эскин.* Параболические уравнения в свертках в ограниченной области. Матем. сборник, 1966. Т. 71, №2. С. 162–190.

[4] *V.B. Vasil'ev.* Wave factorization of elliptic symbols: theory and applications. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[5] *В.Б. Васильев.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизацмя, краевые задачи. М.: КомКнига, 2006.

[6] *В.С. Владимиров.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ФУРЬЕ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

С.А. Гинзгеймер, Ю.А. Гладышев

КГПУ им. К.Э. Циолковского, Калуга, ул. Ст. Разина, 26

В практике часто встречаются конструкции, отдельные детали которых состоят из элементов (пластин, профилей и т.д.), которые, при моделировании процессов теплопередачи, можно достаточно точно считать стержнями, так как длина этих элементов много больше поперечных размеров.

Изучая стержневые системы, целесообразно использовать терминологию теории графов, полагая вершинами графов концы стержней, а ребрами сами стержни.

Основной задачей работы является решение нестационарной задачи теплопроводности по определению температуры в любой точке системы, заданной графом, в любой момент времени, при задании начального распределения температуры на всех ребрах. На некоторых вершинах, их мы назовем открытыми или внешними, задано начальное расределение температуры или теплового потока. Все остальные вершины назовем закрытыми или внешними и условия на них определены условиями сопряжения.

Математический аппарат, который соответствовал бы поставленной задаче, еще далек от того состояния, при котором его можно было бы применить для решения конкретных практических задач. Следует отметить, что появившаяся в 2005 году книга Ю.В. Покорного [3], значительно продвинула решение задачи и внесла коррективы в направление исследований.

Как показано ниже, задача определения поля температур на сложных графах, в случае наличия симметрии на графе, зачастую, может быть сведена к простейшей задаче контакта трех и более ребер в одной вершине. В случае граничных условий задачи Дирихле, если условие нулевой температуры задано на всех открытых вершинах, то решение распадается на решения этой задачи для отдельных ребер, поэтому этот случай не будет нас более интересовать. Далее хотя бы одна вершина считается закрытой.

Первоначальный интерес представляет всесторонее изучение случая соединения трех ребер. При моделировании процессов теплопередачи на ребрах с учетом теплоотдачи во внешнюю среду с постоянной внешней температурой можно перейти от уравнения с учетом внешней теплоотдачи к уравнению с адиабатической изоляцией поверхности ребра [2].

Считаем, что каждый элемент конструкции – ребро длины l_i. В общем случае все параметры ребер зависят от x, то есть, с точки зрения физики ребро предполагается неоднородным, криволинейным и имеющим переменную площадь поперечного сечения. Однако в целях упрощения приведенных ниже результатов, считаем все ребра прямолинейными, а параметры c, ρ, k- постоянными. Площадь поперечного сечения i-го ребра считаем постоянной вдоль этого ребра и равной S_i. Эти условия в реальных конструкциях, как правило, бывают выполнены.

Задано начальное распределение температуры на ребрах:

$$T_i(x,t)|_{t=0} = f_i(x),\ i = 1,\ 2,\ ...,\ N \tag{1}$$

Здесь N – общее количество ребер в графе. Уравнение теплопроводности определено как:

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} - \frac{1}{a_i^2}\frac{\partial T_i}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

где $a_i^2 = k_i/c_i\rho_i$.

В закрытых вершинах графа должны быть выполнены условия сопряжения. В простейшем виде при идеальном контакте N ребер в одной вершине эти условия сводятся к равенству температур и сохранению теплового потока, проходящего через закрытую вершину:

$$T_1 = T_2 = ... = T_N, \quad \sum_{i=1}^{N} J_i = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим три контактирующих в одной вершине ребра, на открытых вершинах которых поддерживается нулевая температура, и отсутствует теплообмен с внешней средой. Контакт считаем идеальным, т.е. без потерь тепла и разрыва температуры при теплообмене между ребрами в точке контакта. Данные условия позволяют рассматривать эту задачу в одном измерении, считая второе и третье ребро лежащими на оси OX (рис. 1). Поместим начало координат в точку контакта, а концы ребер положим имеющими координаты x_1, x_2, x_3.

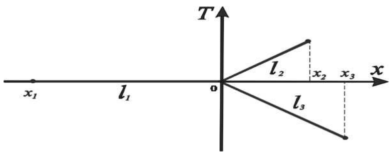


Рис. 1. Схема соединения трех ребер в одной вершине.

Для трех ребер имеем следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a_i^2}\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial x}, \quad i = 1,2,3, \tag{4}$$

и граничные условия

$$T_1|_{x=x_1} = 0, T_2|_{x=x_2} = 0, T_3|_{x=x_3} = 0 \tag{5}$$

Условия сопряжения заключаются в равенстве температур в точке контакта при любом t, и в равенстве нулю суммарного тока, проходящего через точку контакта, т.к. здесь теплообмен идет без потерь тепла:

$$T_1(0,t) = T_2(0,t) = T_3(0,t), \tag{6}$$

$$S_1 k_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = S_2 k_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} + S_3 k_3 \frac{\partial T_3(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}. \tag{7}$$

Будем рассматривать случай, когда ребра выполнены из одного материала, т.е. $a_1 = a_2 = a_3 = a$ и $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Таким образом имеем задачу Дирихле, определенную на графе. Решение задачи ищем по методу Фурье в виде разложения в ряд для каждого ребра, обращая внимание на тот факт, что коэффициенты разложения Фурье C_n и собственные значения λ_n – общие для всех ребер:

$$T_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_{ni}(x)\, e^{-\lambda^2 a^2 t}, \; i = 1,\ 2,\ 3. \tag{8}$$

Получим решения в виде:

$$T_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\sin\lambda_n(x_i - x)}{\sin\lambda_n x_i} e^{-\lambda_n a^2 t}, \; i = 1,2,3, \tag{9}$$

где C_n – коэффициенты Фурье, $x_1 = -l_1, \quad x_2 = l_2, \quad x_3 = l_3$, λ_n – собственные значения, которые можно получить из уравнения

$$\operatorname{ctg}\lambda_n l_1 = \operatorname{ctg}\lambda_n l_2 + \operatorname{ctg}\lambda_n l_2, \tag{10}$$

которое, в свою очередь, получается при подстановке координатной части решения (9) в условия сопряжения (6)–(7).

С помощью тождества Грина можно показать ортогональность полученной системы решений и получить нормировочные множители для гармоник разложения Фурье.

Более подробно результаты этой работы, а также результаты использование формализма Бельтрами-Берса для решения данной задачи в случае неднородных стержней, изложены в [1] и [2].

Заменим граничные условия в открытых вершинах на условия адиабатической изоляции, т.е. положим тепловой поток в этих точках равным нулю.

$$\left.\frac{dT_i}{dx}\right|_{x=x_i} = 0, \;\; i = 1,\, 2,\, 3. \tag{11}$$

Начальное распределение температур на ребрах задано в виде (1). Требуется найти распределение температуры на всех ребрах графа в любой момент времени. Здесь мы имеем задачу Неймана, определенную на графе. Решение будем искать в виде (8). Решения уравнения (4), удовлетворяющие граничным условиям (11) на открытых вершинах графа, можно записать в виде:

$$u_{n,1} = T_0 \frac{\cos\lambda_n\,(x + l_1)}{\cos\lambda_n l_1}, \quad u_{n,2} = T_0 \frac{\cos\lambda_n\,(x - l_2)}{cos\lambda_n l_2}, \;\; u_{n,3} = T_0 \frac{\cos\lambda_n\,(x - l_3)}{\cos\lambda_n l_3}, \tag{12}$$

где T_0 – температура в точке контакта. Предполагаем $T_0 \neq 0$, т.к. случай $T_0 = 0$ требует специального исследования.

Уравнение для определения собственных значений λ_n получим в виде:

$$S_1 \operatorname{tg}\lambda_n l_1 = S_2 \operatorname{tg}\lambda_n l_2 + S_3 \operatorname{tg}\lambda_n l_3. \tag{13}$$

В приложениях большое значение имеет случай, когда $l_2 = l_3 = l_1/2 = l/2$ и $S_1 = S_2 = S_3 = S$. В этом случае уравнение для нахождения собственных значений задачи упрощается:

$$\operatorname{tg}\lambda_n l = -2\operatorname{tg}\frac{\lambda_n l}{2} \tag{14}$$

Положительные корни этого уравнения будут определять три серии:

$$\lambda = \frac{2\pi n}{l}, \;\; n = 1,\, 2,\, ...; \lambda = \frac{2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\right)}{l} + \frac{2\pi n}{l}, \;\; n = 0,\, 1,\, 2,\, ...;$$

$$\lambda = -\frac{2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\right)}{l} + \frac{2\pi n}{l}, \;\; n = 1,\, 2,\, ... \,. \tag{15}$$

Рассмотрим пространственный граф в виде тетраэдра с ребром длиной l (рис. 2).

Распределение температуры на ребрах описывается уравнениями

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial T_i}{\partial t} = 0, i = 1,\, 2,\, ...,\, 6. \tag{16}$$

где $a^2 = k/c\rho$, решения которых будем искать в виде $T_i\,(x, t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n u_{n,i} e^{-\lambda^2 a^2 t}$, $i = 1, 2, 3$, где $u_{n,i}$ – функция, определенная на i-м ребре, константа C_n – общая для всех ребер графа.

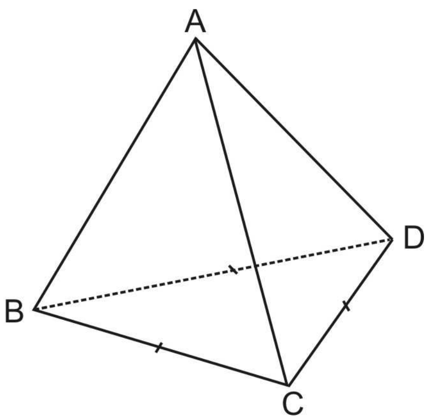


Рис. 2. Пространственный граф в виде тетраэдра.

Предположим, что тетраэдр полностью теплоизолирован. Дано начальное распределение температуры на всех ребрах $T|_{l_i} = f_i\,(x)$.
На вершины тетраэдра не накладывается никаких специальных условий, но считается, что внешнее тепло в вершины не поступает. Таким образом, это – краевая задача Неймана. Требуется выяснить характер процесса установления общей температуры на ребрах графа. Главная проблема – это найти гармоники $u_{n,i}$, составляющие разложение Фурье на ребрах.

Начнем рассмотрение процесса теплопередачи в тетраэдре с некоторой вершины A (рис. 2). Очевидно, что температура вершин определена самой задачей. Можно предложить случай, когда в этой вершине поток тепла равен нулю. Далее имеем симметрию по всем трем ребрам, сходящимся в вершине A. Очевидно, что на серединах ребер BC, CD, DB расположены точки нулевого потока и температуры в них одинаковы. По этой причине тетраэдр, как теплопроводящая конструкция эквивалентен следующей схеме:

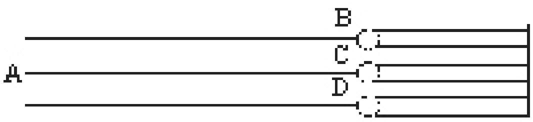


Рис. 3. Схема теплопроводности тетраэдра.

Это три параллельно включенных графа, состоящих из трех ребер, контактирующих в одной вершине при $l_2 = l_3 = l_1/2 = l/2$, где собственные значения задачи можно получить по формулам (15).

Аналогичным образом, учитывая симметрию, можно рассмотреть случай кубической структуры.

В связи с прикладной важностью системы трех контактирующих ребер, был проведен ряд вычислительных экспериментов. Были получены кривые зависимости первых собственных значений задачи и зависимости времени остывания системы от длин ребер при различных граничных условиях.

Список литературы

[1] *С.А. Гинзгеймер, Ю.А. Гладышев.* О некоторых нестационарных задачах теплопередачи для системы криволинейных стержней. Математика в современном мире. Калуга. 2004. С. 199–212.

[2] *С.А. Гинзгеймер, Ю.А. Гладышев.* О процессе установления стационарного режима теплопередачи в некоторых стержневых системах. Проблемы газодинамики и тепломассобмена в энергетических установках: Тр. XV Школы-семинара молодых ученых под руководством академика РАН А.И. Леонтьева. Т.2. М.: Изд-во МЭИ. 2005. С. 235–238.

[3] *Ю.В. Покорный и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М: Физматлит, 2004.

О ВОЗМОЖНОСТИ ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО НА ФУНКЦИИ ПОЛИКОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Ю.А. Гладышев

КГПУ им. К.Э. Циолковского, Калуга, ул. Ст. Разина, 26

В работе сделана попытка показать возможные пути обобщения методов теории функций комплексного переменного в направлении повышения порядка основных уравнений при сохранении двух независимых переменных и в направлении повышения размерности пространства независимых переменных. В качестве алгебраической основы использован особый класс ассоциативно-коммутативных алгебр (далее АС-алгебр), который содержит алгебру поличисел [1]. Получены системы дифференциальных уравнений, обобщающие систему Коши-Римана, решения которых есть функции на введенной алгебре.

Существует большое число работ (см. [2]), где методы теории функций обобщаются на кватернионные переменные в трех- или четырехмерном пространстве. Обобщения для функций поличисел, в форме приведенной ниже, автору неизвестны.

Специальный тип АС-алгебр над полем действительных чисел, который будет использоваться ниже, введен как как алгебры с единицей $e_0 = 1$, обладающие специальным базисом $e_0 = j^0 = 1$, $e_1 = j$, $e_2 = j^2$, $\dots, e_r = j^r$, где j – некоторый элемент алгебры. Кроме того, мы рассматриваем только конечномерные алгебры, наложив естественное условие

$$j^r + a_1 j^{r-1} + \cdots + a_r = 0. \tag{1}$$

Здесь a_i – действительные числа, а $1, j, \dots, j^{r-1}$ – линейно независимы. Из ассоциативности умножения вытекает обычное правило умножения степеней j: $j^n j^m = j^{n+m}$. При этом более высокие чем j^{r-1} степени можно выразить как линейные комбинации $1, j, \dots, j^{r-1}$, из уравнения (1). В обозначениях e_i можно записать таблицу умножения Кэли, найдя соответствующие структурные постоянные. Введенные базисные элементы допускают матричную реализацию с помощью так называемой «циклической клетки» [3] вида

$$j = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_r \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{r-1} \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Если положить $r = 2, a_1 = 0, a_2 = 1$, то приходим к комплексным числам. Если $a_1 = a_2 = 0, a_3 \neq 0$, то имеем три-числа, при $r = 4$ – четыре-числа [4]. Поэтому ниже будем называть элементы такой алгебры поликомплексными числами.

Общий вид поликомплексного числа U размерности r запишем в виде

$$U = u_0 + u_1 j + \cdots + u_{r-1} j^{r-1}, \tag{3}$$

где u_i – действительные числа.

Умножение поликомплексных чисел, по определению ассоциативно, коммутативно и состоит в замене всех единиц j^k степени, более высокой, чем r из (1). Простейший пример $r = 2$ имеет вид:

$$UV = (u_0 + ju_1)\,(v_0 + jv_1) = (u_0v_0 - a_2u_1u_2) + j(u_1v_0 + u_0v_1 - a_1u_1v_1) \tag{4}$$

Если положить $a_2 = 1, a_1 = 0$, то получим закон умножения комплексных чисел.

Поскольку ниже будем использовать алгебру размерности $r = 3$, приведем вид операции умножеия двух поликомплексных чисел U, V:

$$\begin{aligned} W = UV &= (u_0 + ju_1 + j^2u_2)(v_0 + jv_1 + j^2v_2) \equiv (w_0 + jw_1 + j^2w_2) \\ &= (u_0v_0 - a_3u_2v_1 - a_3v_2u_1 + a_3a_1u_2v_2) \\ &+ j(u_1v_0 + u_0v_1 - a_2u_2v_1 - a_2u_1v_2 + (a_1^2 - a_2)u_2v_2) \\ &+ j^2(u_1v_0 + u_0v_1 - a_1u_2v_2 - a_1u_1v_2 + (a_1^2 - a_2)u_2v_2). \end{aligned} \tag{5}$$

Для $r = 4$ произведение находится аналогично, но выглядит значительно сложнее.

Для определения операции деления важнейшим является вопрос о наличии делителей нуля. Для решения этого вопроса воспользуемся понятием сопряжения. Предположим наличие сопряженных элементов

$$j = j_1, j_2, j_3, \ldots, j_r, \tag{6}$$

подчиненных обычным соотношениям для корней уравнения. Вопрос о существовании сопряженных элементов изучался в ряде работ [4], [5]. В [4] показано, что их наличие ведет к соотношению (1). Будем использовать это понятие, хотя основные результаты можно получить и другим способом.

Определение 1. *Поликомплексные числа $u_0 + j_iu_1 + \cdots + j_i^{r-1}u_{r-1}$, $i = 1, \ldots, r$ называются сопряженными, если их произведение есть действитеьное число N:*

$$\prod_{i=1}^{r}(u_0 + j_iu_1 + \cdots + j_i^{r-1}u_{r-1}) = N.$$

Ввиду громоздкости формул для N, приведем простейшую для $r = 3$

$$\begin{aligned} N = \prod_{i=1}^{3}(u_0 + j_iu_1 + j_i^2u_2) = u_0^3 - a_3u_1^3 + a_3^2u_2^3 + a_2u_0u_1^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)u_0u_2^2 + \\ + (3a_3 - a_1a_2)u_0u_1u_2 - a_1u_0^2u_1 + (a_1^2 - 2a_3)u_0^2u_2 - a_2a_3u_1u_2^2 + a_1a_3u_1^2u_2, \end{aligned} \tag{7}$$

где N – вещественное число в силу действительности a_i, u_i.

Пусть при $r = 3$ уравнение (1) имеет различные корни ξ_1, ξ_2, ξ_3 в поле комплексных чисел, тогда формулу (7) можно записать в виде

$$N = \prod_{i=1}^{3}(u_0 + \xi_iu_1 + \xi_i^2u_2). \tag{8}$$

Будем использовать далее поликомплексные переменные вида

$$w = x + jy \tag{9}$$

на плоскости и

$$w = x + jy + j^2 z \tag{10}$$

в трехмерном евклидовом пространстве. Размерность пространства независимых переменных обозначим буквой n.

Изучение делителй нуля начнем со случая $n = 2$. Если все корни действительны, то имеем:

$$x + \xi_i y = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r - 1 \tag{11}$$

Это прямые, проходящие через начало координат и поличисла, лежащие на этих прямых, являются делителями нуля. Комплексные корни могут дать в качестве делителей нуля только одну точку – начало координат.

Результат рассмотрения выражает следующая

Теорема 1. *Если число независимых переменных два, то деление на $w = x + jy$ возможно при всех $x, y \neq 0$, если размерность алгебры со степенным базисом четна и все корни уравнения*

$$\xi^r + a_1 \xi^{r-1} + \cdots + a_r = 0 \tag{12}$$

комплексны.

При установлении системы уравнений, определяющих класс функций поликомплексного переменного, можно исходить из различных позиций. Первая состоит в поиске условий существования производной по поликомплексному переменному не зависящей от направления. В случае двух переменных, когда поликомплексные переменные имеют вид $w = x + jy$, легко устанавливается следующая

Теорема 2. *Пусть $w = x + jy$ – поликомплексная переменная, где j есть элемент AC-алгебры размерности $r = 2q$ со степенным базисом; все корни ξ_i уравнения (12) комплексные; компоненты функции U непрерывно дифференцируемы по x, y и функция U удовлетворяет системе уравнений*

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} j + \frac{\partial}{\partial y} \right) U = 0. \tag{13}$$

Тогда существует производная функции U, не зависящая от направления.

Доказательство следует из следующих соотношений:

$$u'_w = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x + j \Delta y}$$

при стремлении Δw к нулю по оси x $\Delta y = 0$ имеем $u'_w = \partial u / \partial x$, а при стремлении по оси y $(\Delta x = 0)$:

$$u'_w = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{j \Delta y} = \frac{1}{j} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Для равенства необходимо $\partial u / \partial x = (1/j) \partial u / \partial y$. Поскольку j не является делителем нуля, то умножив это равенство на j, имеем

$$-j \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{14}$$

Очевидно, что решение этого уравнения может быть дано как

$$u = u(x + jy). \tag{15}$$

Можно обычным образом определить криволинейный интеграл по поликомплексному переменному

$$U(w) = \int\limits_{w_0}^{w} u(w')\, dw', \tag{16}$$

который не зависит от пути интегрирования благодаря (14). Можно проверить, что $U(w)$ удовлетворяет уравнению (14) как и $u(w)$. Введение операции интегрирования позволяет обощить многие интегральные конструкции (интеграл типа Коши и т.д.), которые столь эффективны в теории функций.

Введение решения в виде ряда по степеням p-комплексного переменного позволяет построить решение первой краевой задачи.

Построение отрицательных степеней не встречает препятствий, ибо введено понятие сопряжения и следовательно имеем:

$$w^{-1} = \frac{1}{x + j_1 y} = \frac{(x + j_2 y) \dots (x + j_r y)}{(x + j_1 y)(x + j_2 y) \dots (x + j_r y)} = \frac{1}{N}(x + j_2 y) \dots (x + j_r y), \tag{17}$$

причем всегда можно преобразовать выражение, стоящее в числителе, к виду, содержащенму только единицу j.

Если применить оператор $\prod\limits_{i=2}^{r} \left(-j_i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)$ к (14), то получаем уравнение порядка r:

$$a_r \frac{\partial^r U}{\partial x^r} + a_{r-1} \frac{\partial^{r-1} U}{\partial x^{r-1} \partial y} + \dots + \frac{\partial^r U}{\partial y^r} = 0,$$

для каждой из компонент. В этом можно убедиться проводя последовательное исключение компонент в системе (14). Для случая $r = 4, 6$ уравнение совпадает с уравнением для упругих деформаций анизотропных стержней и пластин [6]. Попытки использовать методы теории функций для решения этих уравнений другим способом приведены в [6], [7].

В случае трех измерений для наличия делителей нуля необходимо чтобы было выполнено по крайней мере одно из соотношений

$$x + \xi_i y + \xi_i^2 = 0, i = 1, 2, 3, \tag{18}$$

имеем три плоскости, если все корни действительные.

Если два корня комплексно сопряженные, то получаем прямую и плоскость. При $r = 4$, если два корня комплексные, имеем прямую

$$x + (a + ib)\, y + \left(\left(a^2 - b^2 \right) + i2ab \right) z = 0 \tag{19}$$

и две плоскости. Если все корни комплексные, получаем две прямые.

Подводя итог имеем, что при переходе к трем переменным в любом случае есть делители нуля.

Требование независимости производной от направления стремления в случае трех и более независимых переменных $n > 2$, приводит к системе, содержащей большое число уравнений и не определяет интересного класса функций. Эта ситуация аналогична положению с функциями кватернионного переменного [2].

Другой путь, в полной аналогии со случаем кватернионных функций, состоит во введении поликомплексного оператора вида

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + j^2\frac{\partial}{\partial z} \tag{20}$$

Поэтому условие для поликомплексной функции запишем как

$$Df = 0. \tag{21}$$

Легко видеть, что один класс решений системы дан в виде

$$f = f(2z - yj - zj^2),$$

где $f(t)$ - любая непрерывно дифференцируемая функция t. Проведено исследование ряда конкретных функций типа степенной и экспоненциальной.

Другой метод, который предлагается автором, состоит во введении сопряженных поликомплексных переменных. Рассмотрим его на примере поликомплексных чисел размерности 3.

В соответствии с определением 1 назовем переменные $w_i = x + j_i y + j_i^2 z$, $i = 1, 2, 3$ сопряженными поликомплексными переменными. Соответствующие операторы дифференцирования по сопряженным поликомплексным переменным имеют следующую форму:

$$\frac{\partial}{\partial w_i} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial}{\partial x} + j_i\frac{\partial}{\partial z} + j_i^2\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Для простоты взят случай $a_1 = a_2 = 0, a_3 = 1$, что соответствует случаю три-чисел. Тогда основная система уравнений, являющаяся аналогом системы Коши-Римана, запишется в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial w_1} = 0.$$

Обратим внимание, что оно практически совпадает с ранее указанным уравнением (21). Формально, решение дано функциями вида $f = f(w_2, w_3)$, однако на последнем этапе решение должно быть выражено только через единицу j_1.

Список литературы

[1] *Д.Г. Павлов.* Гиперкомплексные числа и связанные с ними пространства. http://hypercomplex.xpsweb.com.

[2] *A. Sudbery.* Quaternionic Analisys. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1979. V. 85. P. 199–225.

[3] *А.И. Кострикин.* Линейная алгебра и геометрия, М: МГУ, 1980.

[4] *С.В. Лебедев.* Некоторые свойства ассоциативных коммутативных чисел. http://hypercomplex.xpsweb.com.

[5] *Г.И. Гарасько.* Нормальное сопряжение на множестве поличисел. http://hypercomplex.xpsweb.com.

[6] *Н.Н. Мусхелишвили.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

[7] *С.Г. Лехницкий.* Кручение анизотропных и однородных стержней, М.: Наука, 1971.

[8] *Ю.А. Гладышев.* Об одном обобщении методов теории функций комплексного переменного. 1998. Депонировано в ВИНИТИ. 21.05.98/561-B98.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕГУЛЯРНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Р.З. Гумбаталиев
ИММ НАН Азербайджана

В работе доказана теорема типа Фрагмена-Линделефа для регулярных голоморфных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений 4-го порядка.

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2}+A^2\right)^2 u(\tau)+\sum_{j=0}^{4} A_{u-j}u^{(j)}(\tau)=0, \quad \tau\in S_{\pi/4}, \tag{1}$$

где $S_{\pi/4}$ есть угловой сектор

$$S_{\pi/4}=\{\tau|\,|\arg\tau|<\pi/4\}, \tag{2}$$

а $u(\tau)$ – векторозначная голоморфная функция, определенная в $S_{\pi/4}$ со значениями из H; оператор A – положительно-определенный самосопряженный, а A_j, $j=\overline{0,4}$ – линейные операторы в H, все производные понимаются в смысле теории функций комплексного переменного, $A_j\cdot A^{-j}$ $\left(j=\overline{0,4}\right)$ ограничены в H. Обозначим через $H_{2,\pi/4}$ пространство вектор-функций $f(\tau)$ со значениями в H, которые голоморфны в секторе $S_{\pi/4}$, причем

$$\sup_{\varphi:\,|\varphi|<\pi/4}\int_0^\infty \left\|f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|_H^2 dt<\infty.$$

Если $f(\tau)\in H_{2,\pi/4}$, то существуют граничные значения в смысле $L_2(R_+:H)$, т.е. существуют

$$f_{\pi/4}(t)=f\left(te^{i\frac{\pi}{4}}\right)\in L_2(R_+:H), \quad f_{-\pi/4}(t)=f\left(te^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\in L_2(R_+:H),$$

такие, что

$$\lim_{\varphi\to\pi/4}\left\|f_\varphi(t)-f_{\frac{\pi}{4}}(t)\right\|_{L_2(R_+:H)}=0, \quad \lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}}\left\|f_\varphi(t)-f_{-\frac{\pi}{4}}(t)\right\|_{L_2(R_+:H)}=0,$$

причем $f(\tau)$ можно представить в виде

$$f(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{f_{-\pi/4}(t)}{te^{-i\frac{\pi}{4}}-\tau}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{f_{\pi/4}(t)}{te^{i\frac{\pi}{4}}-\tau}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}dt.$$

Класс $H_{2,\pi/4}$ со скалярным произведением

$$(f(\tau),g(\tau))_{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\infty \left(f_{\pi/4}(t),g_{\pi/4}(t)\right)dt+\int\limits_0^\infty\left(f_{-\frac{\pi}{4}}(t),g_{-\frac{\pi}{4}}(t)\right)dt\right)$$

становится гильбертовым пространством, причем очевидно, что норма задается следующим образом [1]:

$$\|f\|_{H_{2,\pi/4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left\|f_{\pi/4}(t)\right\|^2_{L_2(R_+:H)}+\left\|f_{-\pi/4}(t)\right\|^2_{L_2(R_+:H)}\right)^{1/2}.$$

Введем пространство $W^4_{2,\pi/4}$ как класс вектор-функций $u(\tau)$ со значениями в H, которые голоморфны в секторе $S_{\pi/4}$ и для которых

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\pi/4}\int\limits_0^\infty\left(\left\|\frac{\partial^4}{\partial t^4}u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2_H+\left\|A^4u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2_H\right)dt<\infty.$$

Отметим, что граничные значения $u_{\pi/4}(t)$ и $u_{-\pi/4}(t)\in W^4_2(R_+:H)$, если в линейном множестве определить скалярное произведение следующим образом:

$$(u,v)_{W^4_{2,\pi/4}}=\left(\left\|u^{(4)}\right\|^2_{H_{2,\pi/4}}+\left\|A^4u\right\|^2_{H_{2,\pi/4}}\right)^{1/2}.$$

Отметим, что для $u(t)\in W^4_{2,\pi/4}$ имеет место следующее соотношение:

$$\left\|A^{4-j}u^{(j)}(\tau)\right\|_{H_{2,\pi/4}}\leqslant M_j\|u\|_{W^4_{2,\pi/4}}\quad\left(j=\overline{1,3}\right)$$

и существуют пределы

$$\lim_{\substack{\tau\to0\\|arq\tau|<\frac{\pi}{4}}}A^{4-j-1/2}u^{(j)}(\tau)\qquad\left(j=\overline{0,3}\right)$$

причем

$$\left\|A^{4-j-1/2}u^{(j)}(0)\right\|\leqslant q_j\|u\|_{W^4_{2,\pi/4}}$$

(теоремы о промежуточных производных и теоремы о следах).

Определение. *Если вектор-функция $u(\tau)\in W^4_{2,\pi/4}$ удовлетворяет уравнению (1) в $S_{\pi/4}$ тождественно, то его будем называть регулярным голоморфным решением уравнения (1).*

Обозначим через $u^{(\eta)}_{2,\pi/4}$ $(\eta\geqslant0)$ подмножество регулярных решений уравнения (1), для которых $e^{\eta\tau}u(\tau)\in H_{2,\pi/4}$. Очевидно, что при $\eta=0$, $U^{(0)}_{2,\pi/4}$ есть множество регулярных голоморфных решений.

Лемма 1. *Множество* $U_{2,\pi/4}^{(0)}$ *является замкнутым подпространством пространства* $W_{2,\pi/4}^{4}$.

Доказательство. Очевидно, что если u и $\upsilon \in U_{2,\pi/4}^{(0)}$, то $\alpha u+\beta\upsilon \in U_{2,\pi/4}^{(0)}$ при любом α и β. Пусть последовательность $u_n(\tau) \in U_{2,\pi/4}^{(0)}$, т.е. $p(d/d\tau)\,u_n(\tau)=0$ и $u_n(\tau)$ сходится по норме $W_{2,\pi/4}^{4}$ к некоторой вектор-функции $u(\tau) \in W_{2,\pi/4}^{4}$. Покажем, что $u(\tau) \in u_{2,\pi/4}^{(0)}$ т.е. $u(\tau) \in W_{2,\pi/4}^{4}$ и $p(d/d\tau)\,u(\tau)=0$ при $\tau \in S_{\pi/4}$. Так как,

$$\|u_n(\tau)-u(\tau)\|_{W_{2,\pi/4}^{4}}^{2}=\left\|u_n^{(4)}(\tau)-u^{(4)}(\tau)\right\|_{\pi/4}^{2}+\left\|A^4u_n(\tau)-A^4u(\tau)\right\|_{\pi/4}^{2}\to 0,$$

то очевидно, что при $n\to\infty$

$$u_n^{(4)}(\tau)\to u^{(4)}(\tau),$$

в пространстве $H_{2,\pi/4}$. С другой стороны, из теоремы о промежуточных производных вытекает, что

$$0\leqslant\left\|A^{4-j}u_n^{(j)}(\tau)-A^{4-j}u^{(j)}(\tau)\right\|_{\pi/4}\leqslant const\|u_n(\tau)-u(\tau)\|_{W_{2,\pi/4}^{4}}\to 0.$$

Следовательно, последовательность

$$A^{4-j}u_n^{(j)}(\tau)\to A^{4-j}u^{(j)}(\tau),\quad j=\overline{0,4}$$

в пространстве $H_{2,\pi/4}$. Покажем, что при любом компакте $Q\subset S_{\pi/4}$ последовательность $A^{4-j}u_n^{(j)}(\tau)$ сходится к предельной функции $A^{4-j}u^{(j)}(\tau)$ равномерно $\left(j=\overline{0,4}\right)$. Так как $A^{4-j}u_n^{(j)}(\tau)$ и $A^{4-j}u^{(j)}(\tau)$ принадлежат пространству $H_{2,\pi/4}$, то их граничные значения $u_{j,n}^{\pm}(t)$ и $u(\tau)=0$ принадлежат пространству $L_2(R_+:H)$. Тогда их можно восстановить с помощью граничных значений

$$A^{4-j}u_n^{(j)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\frac{u_{j,n}^{-}(\xi)\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\xi e^{-i\frac{\pi}{4}}-\tau}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\frac{u_{j,n}^{+}(\xi)\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{\xi e^{i\frac{\pi}{4}}-\tau}d\xi, \tag{3}$$

и

$$A^{4-j}u^{(j)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\frac{u_{j}^{-}(\xi)\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\xi e^{-i\frac{\pi}{4}}-\tau}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\frac{u_{j,n}^{+}(\xi)\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{\xi e^{i\frac{\pi}{4}}-\tau}d\xi. \tag{4}$$

Так как

$$\left\|u_{j,n}^{\pm}(\xi)-u_j^{\pm}(\xi)\right\|_{L_2(R_+:H)}\leqslant const\left\|A^{4-j}u_n^{(j)}-A^{4-j}u^{(j)}\right\|_{\pi/4}, \tag{5}$$

то граничные значения вектор-функции $A^{4-j}u_n^{(j)}$, т.е. $u_{j,n}^{\pm}(\xi)$ сходятся к $u_j^{\pm}(\xi)$-граничным значениям $A^{4-j}u_n^{(j)}$ в $L_2(R_+:H)$. Используя (3) и (4), получаем

$$\sup_{\tau\in Q}\left\|A^{4-j}u_n^{(j)}-A^{4-j}u^{(j)}\right\|_H\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(\left(\sup_{\tau\in Q}\int\limits_0^\infty\frac{1}{|\xi e^{-i\pi/4}-\tau|}d\xi\right)^{1/2}\times\right.$$

$$\left.\times\left\|u_{j,n}^{-}-u_j^{-}\right\|_{L_2}+\left(\sup_{\tau\in Q}\int\limits_0^\infty\frac{1}{|\xi e^{i\pi/4}-\tau|}d\xi\right)^{1/2}\left\|u_{j,n}^{+}(\xi)-u_j^{+}(\xi)\right\|_{L_2}\right). \tag{6}$$

Так как Q – компактное подмножество из углового сектора $S_{\pi/4}$, то при $\tau \in Q$ и $\xi = re^{\pm i3\pi/4}$ имеет место оценка $\inf\limits_{\tau \in Q}\left|\xi e^{\pm i3\pi/4} - \tau\right| \geqslant \delta\left(|\xi|+1\right)^2, \quad \delta > 0$. Тогда из неравенства (6) следует, что

$$\sup_{\tau \in Q}\left\|A^{4-j}u_n^{(j)} - A^{4-j}u^{(j)}\right\|_H \leqslant const\left(\left\|u_{j,n}^{-}(\xi) - u_j^{-}(\xi)\right\|_{L_2(R_+:H)}\right) +$$
$$+\left\|u_{j,n}^{+}(\xi) - u_j^{+}(\xi)\right\|_{L_2(R_+:H)}.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ получаем, что на любом компакте Q последовательность $A^{4-j}u_n^{(j)}$ сходится вектор-функции $A^{4-j}u^{(j)}$ равномерно $\left(j = \overline{0,4}\right)$. Так как $u_n(\tau) \in U_{2,\pi/4}^{(0)}$ и $p\left(d/d\tau\right)u_n(\tau) = 0$, то

$$\sup_{\tau \in Q}\left\|p\left(d/d\tau\right)u(\tau)\right\| = \sup_{\tau \in Q}\left\|p\left(d/d\tau\right)u(\tau) - p\left(d/d\tau\right)u_n(\tau)\right\|_H \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\tau \in Q}\left\|u_n^{(4)} - u^{(4)}\right\| + \sup_{\tau \in Q}\left\|A^4u_n - A^4u\right\|_H + 2\sup_{\tau \in Q}\left\|A^2u_n^{(2)} - A^2u^{(2)}\right\| +$$
$$+\sum_{j=0}^{4}\left\|B_j\right\|\sup_{\tau \in Q}\left\|A^{4-j}u_n^{(j)} - A^{4-j}u^{(j)}\right\|_H,$$

где $B_j = A_j \cdot A^{-j}, \quad \left(j = \overline{0,4}\right)$

Так как правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, то $p\left(d/d\tau\right)u(\tau) = 0$ при $\tau \in Q \subset S_{\pi/4}$.

Таким образом, $u(\tau) = U_{2,\pi/4}^{(0)}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A – самосопряженный оператор с вполне непрерывным обратным A^{-1} и $A^{-1} \in \sigma_p \quad (0 < p < \infty)$, операторы $B_j = A^j \cdot A^{-j}$ $j = \overline{0,4}$ вполне непрерывны. Тогда преобразование Лапласа регулярного голоморфного решения $u(\tau)$ уравнения (1) удовлетворяет оценке*

$$\left\|\hat{u}(\lambda)\right\|_H \leqslant const\frac{1}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in S_{3\pi/4} = \{\lambda : |arq\,\lambda| < 3\pi/4\}.$$

Теперь докажем принцип Фрагмена-Линделефа.

Теорема. *Пусть A – самосопряженный обратимый оператор, $B_j = A_j \cdot A^{-j}$, $j = \overline{1,4}$ ограничены в H, оператор $(E + B_4)$ обратим, и на лучах $\Gamma = \left\{\tau : \tau = \mathrm{re}^{\pm i3\pi/4}\right\}$ существует $p^{-1}(\lambda)$, причем имеет место оценка*

$$\left\|A^4p^{-1}(\lambda)\right\| + \left\|\lambda^4p^{-1}(\lambda)\right\| \leqslant const, \tag{7}$$

а также выполняется одно из следующих условий:

1) $A^{-1} \in \sigma_p \quad (0 \leqslant p \leqslant 2)$;

2) $A^{-1} \in \sigma_p \quad (0 \leqslant p < \infty), \quad B_j = A_j \cdot A^{-j}$ вполне непрерывны в H.

Тогда, если $u(\tau) \in U_{2,\pi/4}^{(\eta)}$ при всех $\eta \geqslant 0$, то $u(\tau) = 0$.

Доказательство. Если $u(\tau) \in U_{2,\pi/4}^{(0)}$, то его преобразование Лапласа $\hat{u}(\lambda)$ допускает голоморфное предложение в области $S_{\frac{3\pi}{4}} = \{\lambda/|arq| < 3\pi/4\}$. Так как выполняется неравенство (7), то $u(\tau) \in U_{2,\pi/4}^{(0)}$ можно представить в виде

$$u(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}\hat{\mathrm{u}}(\lambda)\,e^{\lambda\tau}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}\hat{\mathrm{u}}(\lambda)\,e^{\lambda\tau}d\lambda.$$

Из условия $u(\tau) \in U^{(\eta)}_{2,\pi/4}$ при любом $\eta \geqslant 0$, то $\hat{u}(\lambda)$ голоморфно продолжается в область

$$S_\eta = \{\lambda : |arq\lambda + \eta| < 3\pi/4\}.$$

Так как $\eta \geqslant 0$ любое неотрицательное число, то $\hat{u}(\lambda)$ целая функция. Очевидно, что

$$p(\lambda) = (E + B_4)(E + L(\lambda)) A^4,$$

где $L(\lambda) = \lambda^4 (E + B_4)^{-1} A^{-4} - 2\lambda^2 (E + B_4)^{-1} A^{-2} + \sum\limits_{j=1}^{3} \lambda^j (E + B_4)^{-1} B_{4-j} \cdot A^{-j}$.

Так как, $(E + B^4)^{-1} A^{-4} \in \sigma_{p/4}$, $(E + B_4)^{-1} A^{-2} + (E + B_4)^{-1} B_2 A^{-2} \in \tau_{p/2}$, $(E + B_4) B_1 \in \tau_p$, $(E + B_4) B_3 \in \tau_{p/3}$, то по лемме Келдыша [3] $p^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка не выше p и минимального типа при порядке p. Из вида $\hat{u}(\lambda)$, очевидно, что $\hat{u}(\lambda)$ также имеет порядок p и минимальный тип при порядке p. При выполнении условия 1) на лучах $\Gamma_{\pm\frac{3\pi}{4}}$ имеет оценка (7) и угол между соседними лучами равен $\pi/2$. Поэтому при $0 < p \leqslant 2$ к $\hat{u}(\lambda)$ можно применить теорему Фрагмена-Линделефа $\|\hat{u}(\lambda)\| \leqslant const\,(1 + |\lambda|)^{-1}$, то это верно и при $\lambda \in C$, таким образом, $\hat{u}(\lambda) = 0$, т.е. $u(\tau) = 0$. При выполнении условия 2) снова можно последовательно применять теорему Келдыша и теорему Фрагмена-Линделефа и с этим доказательство завершается. Теорема доказана.

Список литературы

[1] *М.Г. Гасымов.* О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков. Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1971. Т. 6. №2-3. С. 131–147.

[2] *Lax P.D.* Phragmen-Lindelef theorem in hormonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations. Comm. Pure Appl. Math. 1957. V.10. P. 361–389.

[3] *Келдыш М.В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов. УМН. 1971. Т. 26. №4. С. 15–41.

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СИНУСА И КОСИНУСА

А.З. Гутов

НИИ ПМА КБНЦ РАН, Нальчик

В работе [1] было исследовано дробное осцилляционное уравнение

$$D^{2-\alpha}_{0t} U''(\tau) + \omega^\alpha U(t) = 0, \quad \omega = const, \tag{1}$$

где D^{α}_{0t}- оператор дробного интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с началом в точке t=0

$$D^{\alpha}_{0t}\phi(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int\limits_0^t \dfrac{\phi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0 \\ \phi(\tau), & \alpha = 0 \\ \dfrac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}} D^{\alpha-[\alpha]-1}_{0t}\phi(\tau), & \alpha > 0. \end{cases}$$

В работе было показано, что единственное решение $U(t) \equiv U(\alpha,\beta,\gamma;t)$ задачи Коши $U(\alpha,\beta,\gamma,0)=\beta$, $U'(\alpha,\beta,\gamma,0)=\gamma$ для уравнения (1) записывается в терминах обобщенных синуса и косинуса, которые впервые встречаются в этой работе.

Обобщенным синусом и обобщенным косинусом называются функции, определяемые степенными рядами соответственно:

$$\sin_\alpha(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k+1}}{\Gamma(\alpha k+2)},\quad \cos_\alpha(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \alpha>0,\quad t\in C.$$

Имеют место соотношения:

$$\sin_\alpha(t)=tE_{\frac{1}{\alpha}}(-t^\alpha,2),\qquad \cos_\alpha(t)=E_{\frac{1}{\alpha}}(-t^\alpha,1), \tag{2}$$

где $E_{\frac{1}{\alpha}}(t,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k/\Gamma(\alpha k+\mu)$ – функция типа Миттаг-Леффлера и совпадает с функцией Миттаг-Леффлера $E_\alpha[t]$ при $\mu=1$ [2].

При $\alpha=2$ уравнение (1) переходит в классическое уравнение осциллятора $U''(t)+\lambda U(t)=0$, а функции $\sin_\alpha(t)$ и $\cos_\alpha(t)$ в обычные тригонометрические функции $\sin(t)$ и $\cos(t)$ соответственно.

Цель настоящей статьи - обобщить для $\sin_\alpha(t)$ и $\cos_\alpha(t)$ известную формулу Эйлера $\cos t+i\sin t=e^{it}$.

Запишем разложение функции Миттаг-Леффлера по четным и нечетным степеням:

$$E_{\frac{2}{\alpha}}(t,1)=E_{\frac{1}{\alpha}}\left(t^2,1\right)+tE_{\frac{1}{\alpha}}\left(t^2,\alpha/2+1\right). \tag{3}$$

Подставив $t=iz^{\alpha/2}$ в (3), получим, что

$$E_{\frac{2}{\alpha}}\left(iz^{\alpha/2},1\right)=E_{\frac{1}{\alpha}}(-z^\alpha,1)+iz^{\alpha/2}E_{\frac{1}{\alpha}}(-z^\alpha,\alpha/2+1). \tag{4}$$

С помощью соотношения $D_{0z}^{\alpha}x^\nu=z^{\nu-\alpha}\Gamma(\nu+1)/\Gamma(\nu+1-\alpha)$, найдем

$$D_{0z}^{1-\alpha/2}tE_{\frac{1}{\alpha}}(-t^\alpha,2)=D_{0z}^{1-\alpha/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k+1}}{\Gamma(\alpha k+2)}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{D_{0z}^{1-\alpha/2}t^{\alpha k+1}}{\Gamma(\alpha k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{\alpha k+\alpha/2}\Gamma(\alpha k+2)}{\Gamma(\alpha k+2)\Gamma(\alpha k+2-1+\alpha/2)}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{\alpha k+\alpha/2}}{\Gamma(\alpha k+\alpha/2+1)}=z^{\alpha/2}E_{\frac{1}{\alpha}}(z^\alpha,\alpha/2+1).$$

С учетом этого формула (4) перепишется в виде

$$E_{\frac{2}{\alpha}}\left(iz^{\alpha/2},1\right)=E_{\frac{1}{\alpha}}(-z^\alpha,1)+i\,D_{0z}^{1-\alpha/2}tE_{\frac{1}{\alpha}}(-t^\alpha,2).$$

Учитывая (2), это выражение можно переписать следующим образом

$$\cos_\alpha z+iD_{0z}^{1-\alpha/2}\sin_\alpha t=E_{\frac{2}{\alpha}}\left[iz^{\alpha/2}\right]. \tag{5}$$

Таким образом, получен аналог формулы Эйлера для обобщенных синуса и косинуса (5), переходящий в формулу Эйлера при $\alpha=2$.

Список литературы

[1] *В.А. Нахушева.* Некоторые классы дифференциальных уравнений математических моделей нелокальных процессов. Нальчик: КБНЦ РАН, 2002.

[2] *М.М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.

БИФУРКАЦИИ РАВНОВЕСНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

О.Ю. Данилова, А.Н. Копылов

Воронежский институт МВД России, 394065, Воронеж, пр. Патриотов 53

Введение. В настоящей работе описано закритическое поведение продольно сжатой и шарнирно закрепленной на крае прямоугольной пластины с интегральным ограничением на конфигурацию пластины в виде неравенства. Равновесные конфигурации пластины описываются уравнениями Кармана [1]. В статье рассмотрен случай двухмодового вырождения, ранее исследованный в работах [2, 3].

В статье применяется метод, основанный на функционально – аналитическом подходе [4], в соответствии с которым равновесия пластины отвечают точкам локального минимума функционала полной энергии пластины на некотором пространстве функций E.

Наличие интегрального ограничения в этой схеме приводит к необходимости исследования функционала в окрестности краевой вырожденной критической точки [5] (то есть критической точки, лежащей на крае области $\{\iint_{\Omega_a} \omega w\, dxdy \geqslant 0\}$).

Исследование такой задачи посредством одной из схем конечномерной редукции (схемы Ляпунова – Шмидта [6]) сводится к анализу поведения (ключевой) функции двух переменных, представляющей собой возмущение функции с особенностью двумерной сборки, четной по каждой переменной.

Бифуркации равновесий упругой пластины без ограничения. Равновесное состояние упругой прямоугольной пластины, продольно сжатой и шарнирно закрепленной на крае, описывается уравнениями Кармана (промасштабированными) [1]:

$$\Delta^2 w - [w,\varphi] + \lambda w_{xx} = \Delta^2\varphi + \frac{1}{2}[w,w] = 0 \qquad (1)$$

при краевых условиях

$$\{\Delta w = w = \Delta\varphi = \varphi = 0\}\Big|_{\partial\Omega_a}. \qquad (2)$$

Здесь Δ – гармонический оператор Лапласа , $[w,\varphi] = w_{xx}\varphi_{yy} + w_{yy}\varphi_{xx} - 2w_{xy}\varphi_{xy}$, w – функция прогиба пластины, φ – функция напряжения пластины, λ – параметр нагрузки,$\Omega_a = [0,a]\times[0,1]$ – область определения функций w и φ, интерпретируемая как геометрическая форма ненагруженной пластины.

Если исключить из уравнения φ, то получим краевую задачу для редуцированного уравнения Кармана

$$\Delta^2 w + \frac{1}{2}\left[w, \Delta^{-2}[w,w]\right] + \lambda w_{xx} = 0, \qquad (3)$$

$$\{\Delta w = w = 0\}\Big|_{\partial\Omega_a}. \tag{4}$$

Через Δ^{-1} в уравнении (3) обозначается оператор Грина $\psi \to \varphi$, где φ – решение уравнения Пуассона $\Delta\varphi = \psi, \varphi\Big|_{\partial\Omega_a} = 0$.

Уравнение (3) является уравнением Эйлера – Лагранжа экстремалей функционала V

$$V(w,\lambda) = \frac{1}{2}\left(\mid \Delta w \mid^2 - \lambda \mid w_x \mid^2\right) + \frac{1}{8} \mid \Delta^{-1}[w,w] \mid^2 . \tag{5}$$

Здесь $\mid w \mid = \sqrt{\langle w, w\rangle}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega_a)$, то есть

$$\mid w \mid^2 := \iint_{\Omega_a} w(x,y)^2 dxdy.$$

Обозначим через E банахово пространство $\{w \in H^4; \Delta^2 w \in F\}$ с нормой $\|w\|_E := \|\Delta^2 w\|_{C^{0+\alpha}(\Omega_a)}$, где H^4 – пространство соболевских функций w класса W_2^4, удовлетворяющих условиям $\{w = \Delta w = 0\}\Big|_{\partial\Omega_a}$. Тогда левая часть уравнения (3) задает гладкое фредгольмово отображение из E в F. Обозначим его $f(w,\lambda)$.

Функционал (5) инвариантен относительно инволюций J_1, J_2:

$$V(J_1(w),\lambda) \equiv V(J_2(w),\lambda) \equiv V(w,\lambda), \quad J_2(w)(x,y) = w(a-x,y), \quad J_1 = -J_2.$$

Через функционал (5) в теории упругих оболочек оценивается устойчивость равновесных состояний : состояние устойчиво, если оно реализует точку локального минимума функционала (5). Потеря устойчивости происходит при переходе λ через критическое значение (верхнюю критическую нагрузку):

$$\lambda^*(a) = \sup\{\bar\lambda : \frac{\partial^2 V}{\partial w^2}(0,\lambda)(h,h) > 0, \lambda < \bar\lambda, h \neq 0, h \in E\}.$$

Верхняя критическая нагрузка непрерывно и кусочно гладко зависит от длины a пластины. Разрыв производной от $\lambda^*(a)$ происходит в точках $a_m = \sqrt{m(m+1)}$, $m = 1, 2\ldots$ При $a = a_m$ и $\lambda = \lambda_m := \lambda^*(a_m)$ в нуле уравнение Кармана при краевых условиях (2) имеет двумерное вырождение. В нуле теряется устойчивость по двум модам :

$$e_1 = 2\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin(\pi y), \quad e_2 = 2\sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right)\sin(\pi y).$$

Анализ соответствующих закритических равновесий сводится к изучению критических точек ключевой функции W, получаемой по редуцирующей схеме Ляпунова-Шмидта [3, 6]

$$W(\xi,\lambda,a) := \inf_{u:\, u\in\mathcal{O}_*} V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + u, \lambda), \xi \in \mathcal{O}^2 \tag{6}$$

(при (λ, a), достаточно близких к (λ_m, a_m)). Здесь $\mathcal{O}^2$ и $\mathcal{O}_*$ – достаточно малые окрестности нулей в R^2 и $E_* = \{u \in E : \langle u, e_1\rangle = \langle u, e_2\rangle = 0\}$.

Более того

$$W(\xi,\lambda,a) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \Phi(\xi_1,\xi_2,\lambda,a),\lambda), \tag{7}$$

где $\Phi(\xi_1,\xi_2,\lambda,a)$ – решение уравнения $f_*(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + u, \lambda) = 0$, определяемое теоремой о неявной функции. Здесь $f_*(w,\lambda) = f(w,\lambda) - \sum\limits_{j=1}^{2}\langle f(w,\lambda), e_j\rangle e_j$.

Между критическими точками W и V существует взаимно однозначное соответствие. Соответствующие друг другу точки имеют одинаковые кратности (числа Милнора) и индексы Морса.

Локальный анализ (7) успешно осуществляется благодаря тому, что имеет место представление :

$$W(\xi, \lambda, a) = \frac{1}{2}(\alpha_1(\lambda, a)\xi_1^2 + \alpha_2(\lambda, a)\xi_2^2) + \sum_{i,j=1}^{2} h_{i,j}\xi_i^2\xi_j^2 + \cdots , \quad (8)$$

где α_1, α_2 – собственные значения оператора $\Delta^2 + \lambda(\frac{\partial}{\partial x})^2$, отвечающие собственным векторам e_1, e_2,

$$h_{j,j} = \frac{1}{8} \mid \Delta^{-1}[e_j, e_j] \mid^2, j = 1, 2,$$
$$h_{1,2} = h_{2,1} = \frac{1}{8}\left(\langle \Delta^{-1}[e_1, e_1], \Delta^{-1}[e_2, e_2]\rangle + 2 \mid \Delta^{-1}[e_1, e_2] \mid^2\right).$$

Для коэффициентов $h_{i,j}$ из разложения (8) при $m \leqslant 10$ выполняется соотношение

$$h_{1,2} > \sqrt{h_{1,1}h_{2,2}} \quad (9)$$

(см. [2]). Неравенство (9) означает положительную определенность формы $\sum\limits_{i,j=1}^{2} h_{i,j}\eta_i\eta_j$ в положительной четверти плоскости R^2. Ключевую функцию (8) можно теперь переписать в виде

$$W(\eta, \lambda, a) = \frac{1}{2}(\beta_1(\lambda, a)\eta_1^2 + \beta_2(\lambda, a)\eta_2^2) + \eta_1^4 + c\eta_1^2\eta_2^2 + \eta_2^4 + \cdots , \quad (10)$$

где $c > 2$ (следует из неравенства (9)).

Пусть Σ – бифуркационное множество функции W. Множество $R^3 \backslash \Sigma$ разбивается на зоны – компоненты связности. С каждой точкой $\beta = (\beta_1, \beta_2, c) \notin \Sigma$ и принадлежащей одной компоненте связности свяжем тройку целых чисел $bif(\beta) = \{p, q, r\}$, изображающую количество минимумов, седел, и максимумов; данную тройку назовем bif -раскладом.

Теорема 1. *При $\beta \notin \Sigma$ имеют место следующие и только следующие bif-расклады: (1,0,0),(2,1,0),(2,2,1),(4,4,1).*

Случай наличия симметричного интегрального ограничения. Наложим дополнительное условие на функцию прогиба w в виде следующего интегрального ограничения

$$\iint_{\Omega_a} \omega(x, y)w(x, y)\, dxdy \geqslant 0,$$

где $\omega(x, y)$ – гладкая функция, для которой $\omega(a - x, y) = \omega(x, y), \omega(x, 1 - y) = \omega(x, y)$. Пусть $m = 1, a = a_1 = \sqrt{2}, \lambda = \lambda_1 = \lambda^*(a_1)$. Тогда уравнение Кармана в нуле имеет двумерное вырождение. Пластина в прямолинейном состоянии теряет устойчивость по двум модам :

$$e_1 = e_{1,1} = 2\sin\frac{\pi x}{a}\sin \pi y, \; e_2 = e_{2,1} = 2\sin\frac{2\pi x}{a}\sin \pi y.$$

Обозначим $\tilde{e}_1 = \omega,\ \tilde{e}_2 = e_2$.

Редуцируя задачу $V(w) \longrightarrow extr, \quad w \in E$ по схеме Ляпунова – Шмидта [6], получаем задачу $\tilde{W}(\tilde{\xi}) \longrightarrow extr, \quad \tilde{\xi} \in R^2$, где

$$\tilde{W}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) = \inf_{u: u \perp \tilde{e}_1, u \perp \tilde{e}_2} V(\tilde{\xi}_1 \tilde{e}_1 + \tilde{\xi}_2 \tilde{e}_2 + u), \tag{11}$$

при условии $\tilde{\xi}_1 \geqslant 0$, так как

$$\tilde{\xi}_1 = \langle w, \omega \rangle = \iint_{\Omega_a} \omega w dxdy \geqslant 0.$$

Ключевая функция $\tilde{W}$ приводится к виду

$$\tilde{W}(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) = \frac{1}{2}(\beta_1 \tilde{\eta}_1^2 + \beta_2 \tilde{\eta}_2^2) + \tilde{\eta}_1^4 + d\tilde{\eta}_1^2 \tilde{\eta}_2^2 + \tilde{\eta}_2^4 + \cdots, \tilde{\eta}_1 \geqslant 0. \tag{12}$$

Условие $\tilde{\eta}_1 \geqslant 0$ означает, что в рассматриваемой задаче появляются краевые особенности [5].

Из результатов работы [7] следует, что ключевые функции W и $\tilde{W}$ гладко эквивалентны. Следовательно, $d = c > 2$ (следует из соотношения (9)).

При наличии края bif – расклады ключевой функции $\tilde{W}$ удобно описывать посредством матрицы 2×3:

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix},$$

в которой l_1, l_2, l_3 – число краевых минимумов, седел, максимумов соответственно, а m_1, m_2, m_3 – количество обычных минимумов, седел, максимумов (то есть расположенных внутри области $\{\iint_{\Omega_a} \omega w\, dxdy \geqslant 0\}$).

Теорема 2. *При $\beta \notin \Sigma$ все возможные bif-расклады для задачи $\tilde{W}(\tilde{\eta}) \longrightarrow extr$, при условии $\tilde{\eta}_1 \geqslant 0$ описываются следующими шестью матрицами:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этой теоремы вытекает описание бифуркационной картины для функционала V.

Пусть теперь наложено ограничение

$$\iint_{\Omega_a} \omega(x, y) w(x, y) dxdy \geqslant c.$$

Тогда, редуцируя задачу $V(w) \longrightarrow extr, \quad w \in E$ по схеме Ляпунова – Шмидта [6], получаем задачу $\tilde{W}(\tilde{\xi}) \longrightarrow extr, \quad \tilde{\xi} \in R^2, \quad \tilde{\xi}_1 \geqslant c$.

Ключевая функция W приводится к виду, эквивалентному (12).

Теорема 3. *При $\beta \notin \Sigma$ все возможные bif-расклады (вблизи нуля) для задачи $\tilde{W}(\tilde{\eta}) \longrightarrow extr$ при условии $\tilde{\eta}_1 \geqslant c$ описываются следующими 18 матрицами:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Список литературы

[1] *А.С. Вольмир.* Гибкие пластины и оболочки. М.: Гостехиздат. 1956.

[2] *E. J. Holder, D. Schaeffer.* Boundary conditions and mode jumping in the Karman Equations. SIAM J. Math. Anal. 1984. V.15. №3. P. 446–457.

[3] *Ю. И. Сапронов.* Двумодовая бифуркация решений уравнения Кармана. Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. №6. С. 1078–1081.

[4] *М. А. Красносельский, П. П. Забрейко.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука. 1975.

[5] *В. И. Арнольд.* Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют. УМН. 1978. Т. 33, вып. 5(203). С. 91–105.

[6] *Ю.И. Сапронов.* Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах. Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, вып. 1. С. 101–132.

[7] *С.Л. Царев.* Глобальное сравнение эквивариантных конечномерных редукций для гладкого G-инвариантного функционала. Труды матем. фак–та (новая серия). Воронеж, ВГУ. 1998, вып. 3. С. 73–76.

ДВУХМОДОВЫЕ БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЯ

О.Ю. Данилова

Воронежский институт МВД России, 394065, Воронеж, пр. Патриотов 53

Известно, что некоторые упругие системы и некоторые фазовые состояния сегнетоэлектрических кристаллов моделируются решениями нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка [1]

$$\frac{d^4p}{dx^4} + \kappa\frac{d^2p}{dx^2} + \alpha p + p^3 = 0, \tag{1}$$

рассмотренного на отрезке $[0, \pi]$ числовой оси при краевых условиях

$$p(0) = \frac{d^2p}{dx^2}(0) = p(\pi) = \frac{d^2p}{dx^2}(\pi) = 0. \tag{2}$$

Это уравнение является уравнением Эйлера – Лагранжа экстремалей функционала

$$V(p,\kappa,\alpha)=\int\limits_0^\pi\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)^2-\kappa\left(\frac{dp}{dx}\right)^2+\alpha p^2\right)+\frac{p^4}{4}\right)dx, \tag{3}$$

где $\alpha>0$.

Функционал (3) ниже рассматривается на пространстве E функций класса C^4 на отрезке $[0,\pi]$, удовлетворяющих краевым условиям (2).

Анализ бифуркационных эффектов можно осуществить посредством редукции Ляпунова-Шмидта [2] к ключевой функции (от двух ключевых переменных)

$$W(\xi,\delta)=\inf_{p:\ \langle p,e_1\rangle=\xi_1,\ \langle p,e_2\rangle=\xi_2} V(p,\alpha_1+\delta_1,\kappa_1+\delta_2), \tag{4}$$

$$\xi=(\xi_1,\xi_2),\quad \delta=(\delta_1,\delta_2),$$

где e_n – моды бифуркации

$$e_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx).$$

Функционал (3) инвариантен относительно инволюций J_1,J_2:

$$J_2(p)(x)=p(\pi-x),\quad J_1=-J_2.$$

Следовательно, функция (4) имеет симметрию прямоугольника:

$$W(-\xi_1,\xi_2,\delta_1,\delta_2)=W(\xi_1,-\xi_2,\delta_1,\delta_2)=W(\xi_1,\xi_2,\delta_1,\delta_2), \tag{5}$$

из которой вытекает справедливость асимптотического представления (см. [2, 3])

$$W(\xi,\delta)=U(\xi,\delta)+o(|\xi|^4)+O(|\xi|^4)O(\delta), \tag{6}$$

где $U(\xi,\delta)=V(\xi_1e_1+\xi_2e_2,\delta)$ – ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1,e_2.

Таким образом, для ключевой функции (4) имеет место асимптотическое представление

$$W(\xi,\delta)=\frac{\lambda_1}{2}\xi_1^2+\frac{\lambda_2}{2}\xi_2^2+A\xi_1^4+2B\xi_1^2\xi_2^2+C\xi_2^4+o(|\xi|^4)+O(|\xi|^4)O(\delta), \tag{7}$$

где

$$\lambda_1=\delta_1-\delta_2,\ \lambda_2=\delta_1-4\delta_2,\quad A=\int\limits_0^\pi e_1^4dx=\frac{3}{2\pi},\quad B=\int\limits_0^\pi e_1^2e_2^2dx=\frac{3}{\pi},\quad C=\int\limits_0^\pi e_2^4dx=\frac{3}{2\pi}.$$

Сократив функцию (7) на множитель $6/\pi$, получим функцию с нормализованной главной частью:

$$\tilde W(\xi,\delta)=\tilde U(\xi,\delta)+o(|\xi|^4)+O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\tilde U(\xi,\delta)=\frac{\tilde\lambda_1}{2}\xi_1^2+\frac{\tilde\lambda_2}{2}\xi_2^2+\frac{1}{4}\left(\xi_1^4+4\xi_1^2\xi_2^2+\xi_2^4\right).$$

«Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $\tilde{W}(\xi,\delta)$ полностью определяются ее главной частью $\tilde{U}(\xi,\delta)$ [3].

Главная часть ключевой функции представляет собой возмущенную двумерную сборку, четную по каждой переменной с коэффициентом двойного отношения $a > 2$.

Пусть Σ – бифуркационное множество функции $\tilde{W}$. Множество $R^3 \backslash \Sigma$ разбивается на зоны – компоненты связности. С каждой точкой $\beta = (\beta_1, \beta_2, c) \notin \Sigma$ и принадлежащей одной компоненте связности свяжем тройку целых чисел $bif(\beta) = \{p, q, r\}$, изображающую количество минимумов, седел, и максимумов (данную тройку назовем bif-раскладом).

В этом случае появляются только следующие bif-расклады : (1,0,0), (2,1,0), (2,2,1), (4,4,1).

При наличии ограничения

$$\langle p, \omega \rangle = \int_0^\pi p(x)\omega(x)dx \geq 0$$

анализ функционала сводится к анализу ключевой функции

$$\tilde{U}(\xi,\delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2}\xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2}\xi_2^2 + \xi_1^4 + a\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4 \tag{8}$$

с коэффициентом $a > 2$ [5] и при условии $\xi_1 \geqslant 0$.

В этом случае появляются краевые критические точки [4]. При наличии края bif-расклады ключевой функции $\tilde{W}$ удобно описывать посредством матрицы 2×3:

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix},$$

в которой l_1, l_2, l_3 – число краевых минимумов, седел, максимумов соответственно, а m_1, m_2, m_3 – количество обычных минимумов, седел, максимумов (то есть расположенных внутри области).

Реализуются только следующие bif-расклады:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наложим ограничение

$$\langle p, \omega \rangle = \int_0^\pi p(x)\omega(x)dx \geq c,$$

где c – малый параметр.

Тогда, редуцируя задачу $V(w) \longrightarrow extr, \quad p \in E$ по схеме Ляпунова-Шмидта [2], получаем задачу $W(\xi) \longrightarrow extr, \quad \xi \in R^2, \quad \xi_1 \geqslant c$.

Главная часть ключевой функции $W(\xi)$ приводится к виду, эквивалентному (8). Она представляет собой возмущенную двумерную сборку, симметричную по каждой переменной с коэффициентом двойного отношения больше двух. Все bif-расклады для задачи описываются следующими 18 матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

При вычислении bif-раскладов пользуются следующими правилами: если линия уровня функции W касается в точке a границы области снаружи и $\operatorname{grad} W$ направлен внутрь рассматриваемой области, то a является для W точкой минимума, если же $\operatorname{grad} W$ направлен наружу, то a – точка максимума, в седловой точке линия уровня касается ребра изнутри. К точкам, лежащим внутри, применяются обычные правила.

Пусть
$$\langle p, \omega \rangle = \int_0^\pi p(x)\omega(x)dx \geq 0,$$
где $\omega = ae_1 + be_2$.

Тогда задача $V(w) \longrightarrow extr, \quad p \in E$ по схеме Ляпунова – Шмидта [2] сводится к задаче
$$W(\xi) \longrightarrow extr, \quad \xi \in R^2, \quad a\xi_1 + b\xi_2 \geqslant 0.$$

В этом случае все расклады описываются шестью матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При наложении ограничений возникают новые бифуркационные эффекты: 1) появляются морсовские краевые особенности с нулевым градиентом, 2) на крае могут сосуществовать три седла или три разнотипные критические точки – минимум, седло и максимум – для функционала с особенностью двумерной сборки.

Список литературы

[1] *Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов.* Топологические подход к классификации фаз кристаллических сегнетоэлектриков. В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. Воронеж: ВГУ, 2000. С. 41–57.

[2] *Ю.И. Сапронов.* Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах. Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, вып. 1. С. 101–132.

[3] *Ю.И. Сапронов.* Многомодовые бифуркации упругих равновесий. Прикл. матем. и механ. 1988. Т. 52, вып. 6. С. 997–1006.

[4] *В.И. Арнольд.* Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют. УМН. 1978. Т. 33, вып. 5(203). С. 91–105.

[5] *С.Л. Царев.* Глобальное сравнение эквивариантных конечномерных редукций для гладкого G – инвариантного функционала. Труды матем. фак–та (новая серия). Воронеж, ВГУ. 1998, вып. 3. С. 73–76.

О ЗАДАЧЕ С ОПЕРАТОРАМИ ОБОБЩЁННОГО ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА С $a = -1$ В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

С.В. Ефимова

Самарский государственный экономический университет

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение влагопереноса в случае $a = -1$, т.е.

$$Lu = y^2 u_{xx} - u_{yy} - u_x = 0. \tag{1}$$

Введём следующие обозначения: за I примем интервал $AB = (0,1)$; за D_1 – область, ограниченную интервалом I и характеристиками уравнения (1)

$$AC_1 \left\{ (x,y) : x - \frac{y^2}{2} = 0, y \leqslant 0 \right\} \quad \text{и} \quad BC_1 \left\{ (x,y) : x + \frac{y^2}{2} = 1, y \leqslant 0 \right\},$$

где $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C_1 = (1/2,-1)$; за $\theta_0^{(1)}(x)$, $\theta_1^{(1)}(x)$ – аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0) \in I$, с характеристиками AC_1, BC_1 соответственно; за $\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f\right)(x)$, $\left(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} f\right)(x)$ – операторы обобщённого дробного интегродифференцирования, введённые М.Сайго [1]; за $\left(I_{1-}^{\alpha} f\right)(x)$ – дробный интеграл Римана-Лиувилля [2], за $H^\lambda[0,1]$ – класс функций, удовлетворяющих на отрезке $[0,1]$ условию Гёльдера порядка λ; за $H^\lambda(\rho;[0,1]) = \{f(x) : \rho(x)f(x) \in H^\lambda[0,1]\}$, где $0 < \lambda \leq 1$, $\rho \geq 0$.

Для уравнения (1) поставим и исследуем следующую нелокальную краевую задачу.

Задача. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1), которое принадлежит классу $C\left(\overline{D_1}\right) \bigcap C^2\left(D_1\right)$ и удовлетворяет краевым условиям:

1) $u(x,0) = \tau_1(x)$, $x \in \bar{I}$;

2) $$A\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,-\alpha-1} u\left[\theta_0^{(1)}(t)\right]\right)(x) + B\left(I_{1-}^{\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\alpha-1} u\left[\theta_1^{(1)}(t)\right]\right)(x) + \\ +C\left(I_{0+}^{\delta,\eta,\gamma} u\left[t,0\right]\right)(x) + D\left(I_{1-}^{\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\alpha-1} u\left[t,0\right]\right)(x) + \\ +E\left(I_{0+}^{\alpha+1,\beta-\frac{1}{2},-\alpha-1} u_y\left[t,0\right]\right)(x) + F\left(I_{1-}^{\alpha+1,0,-\alpha-1} u_y\left[t,0\right]\right)(x) = g(x),\ x \in I,$$

где $\tau_1(x)$, $g(x)$ – такие заданные функции, что

$$\tau_1(x) \in H^{\lambda_1}[0,1], \tag{2}$$

$$\tau_1(0) = 0, \tag{3}$$

$$g(x) \in H^{\lambda_2}[0,1]. \tag{4}$$

$A, B, C, D, E, F, \alpha, \beta, \delta, \eta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2$ – такие заданные константы, что

$$0 < \alpha + 1 < \min\{\lambda_1, \lambda_2, -\eta\}, \tag{5}$$

$$D = -B, \tag{6}$$

$$B\sqrt{\pi}-2F\neq 0, \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2}<\beta<-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right), \tag{8}$$

$$\lambda_1\leqslant 1, \tag{9}$$

$$\lambda_2\leqslant 1, \tag{10}$$

$$\delta>0, \eta<\min[0,\gamma+1]. \tag{11}$$

Будем искать решение этой задачи в классе функций $u(x,y)$ таких, что

$$\lim_{y\to 0-}u_y(x,y)\in H^{\lambda}\left(x^{\alpha+1};[0,1]\right), 0<\lambda\leq 1. \tag{12}$$

2. Получение интегрального уравнения. Положим

$$u(x,-0)=\tau_1(x), \lim_{y\to 0-}u_y(x,y)=\nu_1(x). \tag{13}$$

Используя обозначения (13), решение задачи Коши в области D_1 [3]

$$u(x,y)=\tau_1\left(x-\frac{y^2}{2}\right)+\frac{y}{2}\int_0^1\nu_1\left(x+(1-2t)\frac{y^2}{2}\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t}} \tag{14}$$

и равенство [4]

$$F(a,b;b;x)=(1-x)^{-a}, \tag{15}$$

находим

$$u\left[\theta_0^{(1)}(x)\right]=\tau_1(0)-\frac{1}{2}\Big(I_{0+}^{1,-\frac{1}{2},-1}\nu_1\Big)(x), \tag{16}$$

$$u\left[\theta_1^{(1)}(x)\right]=\tau_1(x)-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big(I_{1-}^{\frac{1}{2}}\nu_1\Big)(x). \tag{17}$$

Подставим (16), (17) в краевое условие 2). С учётом формул [2], [5]

$$\begin{gathered}\big(I_{1-}^{\alpha}f\big)(x)=\big(I_{1-}^{\alpha,-\alpha,\eta}f\big)(x),\\ \left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\left(I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}f\right)(t)\right)(x)=\left(I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f\right)(x), \gamma>0,\\ \left(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}\left(I_{1-}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}f\right)(t)\right)(x)=\left(I_{1-}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f\right)(x), \gamma>0,\end{gathered} \tag{18}$$

а также (3), (6) придём к равенству

$$\begin{gathered}C\Big(I_{0+}^{\delta,\eta,\gamma}\tau_1\Big)(x)-\left(\frac{A}{2}-E\right)\Big(I_{0+}^{\alpha+1,\beta-\frac{1}{2},-\alpha-1}\nu_1\Big)(x)-\\ -\left(\frac{B\sqrt{\pi}}{2}-F\right)\big(I_{1-}^{\alpha+1,0,-\alpha-1}\nu_1\big)(x)=g(x).\end{gathered} \tag{19}$$

Применим к обеим частям (19) оператор $I_{0+}^{-\alpha-1,\frac{1}{2}-\beta,0}$. Принимая во внимание (18), (5), равенство [2] $\big(I_{0+}^{0,0,\eta}f\big)(x)=f(x)$ и (7), получим

$$\begin{gathered}\frac{A-2E}{B\sqrt{\pi}-2F}\nu_1(x)+\Big(I_{0+}^{-\alpha-1,\frac{1}{2}-\beta,0}\left(I_{1-}^{\alpha+1,0,-\alpha-1}\nu_1\right)(t)\Big)(x)=\\ =\frac{2C}{B\sqrt{\pi}-2F}\Big(I_{0+}^{-\alpha-1,\frac{1}{2}-\beta,0}\Big(I_{0+}^{\delta,\eta,\gamma}\tau_1\Big)(t)\Big)(x)-\frac{2}{B\sqrt{\pi}-2F}\Big(I_{0+}^{-\alpha-1,\frac{1}{2}-\beta,0}g\Big)(x).\end{gathered} \tag{20}$$

Известно [6], что при $0 < p < 1$

$$\left(I_{0+}^{-p,q,0}\left(I_{1-}^{p,0,t}f\right)(v)\right)(x) = x^{p-q}(1-x)^{-p}\cos\pi p\, f(x) + \int_0^1 K(x,u)\, f(u)\, du, \tag{21}$$

где

$$K(x,u) = \begin{cases} \dfrac{-x^{-q-1}u^p(1-u)^t}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} F_1\left(1, p+1, p+t; p+1; \dfrac{u}{x}, u\right), & 0 < u < x, \\[2ex] \dfrac{x^{-q}u^{p-1}(1-u)^t}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} F_1\left(1, 1-p, p+t; 1-p; \dfrac{x}{u}, x\right), & x < u < 1, \end{cases}$$

$F_1(a,b,b';c;x,y) = \sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \dfrac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}} \dfrac{x^m}{m!}\dfrac{y^n}{n!}$ – функция Аппеля,

$(a)_n = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ – символ Похгаммера [4].

Тогда согласно (21), (5), (9)

$$\begin{aligned} &\left(I_{0+}^{-\alpha-1,\frac{1}{2}-\beta,0}\left(I_{1-}^{\alpha+1,0,-\alpha-1}\nu_1\right)(t)\right)(x) = \\ &= x^{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}(1-x)^{-\alpha-1}\cos\pi(\alpha+1)\,\nu_1(x) + \int_0^1 K(x,u)\,\nu_1(u)\,du, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$K(x,u) = \begin{cases} \dfrac{-x^{\beta-\frac{3}{2}}u^{\alpha+1}(1-u)^{-\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)} F_1\left(1, \alpha+2, 0; \alpha+2; \dfrac{u}{x}, u\right), & 0 < u < x, \\ \dfrac{x^{\beta-\frac{1}{2}}u^{\alpha}(1-u)^{-\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)} F_1\left(1, -\alpha, 0; -\alpha; \dfrac{x}{u}, x\right), & x < u < 1. \end{cases} \tag{23}$$

Из формулы [7]

$$F_1(a,b,b';c;x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} F(a+n, b'; c+n; y)\frac{x^n}{n!},$$

где $F(a,b;c;x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [4] следует, что

$$F_1(a,b,0;c;x,y) = F(a,b;c;x). \tag{24}$$

В силу (24) и равенства (15) получаем

$$F_1\left(1, \alpha+2, 0; \alpha+2; \frac{u}{x}, u\right) = \frac{x}{x-u}, F_1\left(1, -\alpha, 0; -\alpha; \frac{x}{u}, x\right) = \frac{u}{u-x}. \tag{25}$$

Подставим (25) в (23) и учтём формулу [4] $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin\pi x}$. Тогда $K(x,u)$ перепишется так:

$$K(x,u) = \frac{\sin\pi(\alpha+1)}{\pi(u-x)} x^{\beta-\frac{1}{2}}u^{\alpha+1}(1-u)^{-\alpha-1}, 0 < x, u < 1, u \neq x. \tag{26}$$

Соотношения (22) и (26) дадут нам следующий результат:

$$\Big(I_{0+}^{-\alpha-1,\frac{1}{2}-\beta,0}\left(I_{1-}^{\alpha+1,0,-\alpha-1}\nu_1\right)(t)\Big)(x) = x^{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}(1-x)^{-\alpha-1}\cos\pi(\alpha+1)\,\nu_1(x)+$$
$$+\frac{\sin\pi(\alpha+1)}{\pi}x^{\beta-\frac{1}{2}}\int_0^1\frac{u^{\alpha+1}(1-u)^{-\alpha-1}\nu_1(u)\,du}{u-x}.$$

Поэтому (20) примет вид

$$\begin{aligned}&\frac{A-2E}{B\sqrt{\pi}-2F}\nu_1(x)+x^{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}(1-x)^{-\alpha-1}\cos\pi(\alpha+1)\,\nu_1(x)+\\&+\frac{\sin\pi(\alpha+1)}{\pi}x^{\beta-\frac{1}{2}}\int_0^1\frac{u^{\alpha+1}(1-u)^{-\alpha-1}\nu_1(u)\,du}{u-x}=\\&=\frac{2C}{B\sqrt{\pi}-2F}\Big(I_{0+}^{-\alpha-1,\frac{1}{2}-\beta,0}\Big(I_{0+}^{\delta,\eta,\gamma}\tau_1\Big)(t)\Big)(x)-\frac{2}{B\sqrt{\pi}-2F}\Big(I_{0+}^{-\alpha-1,\frac{1}{2}-\beta,0}g\Big)(x).\end{aligned}\tag{27}$$

Умножив обе части равенства (27) на $x^{1/2-\beta}$ и произведя в нём замену $\mu(x)=x^{\alpha+1}(1-x)^{-\alpha-1}\nu_1(x)$, придём к характеристическому сингулярному уравнению на конечном отрезке [2]

$$a_1(x)\mu(x)+\frac{a_2(x)}{\pi}\int_0^1\frac{\mu(u)\,du}{u-x}=F(x),\tag{28}$$

где

$$a_1(x)=\frac{A-2E}{B\sqrt{\pi}-2F}x^{-\alpha-\beta-\frac{1}{2}}(1-x)^{\alpha+1}+\cos\pi(\alpha+1),\tag{29}$$

$$a_2(x)=\sin\pi(\alpha+1),\tag{30}$$

$$\begin{aligned}F(x)=\ \ x^{\frac{1}{2}-\beta}\Bigg[&\frac{2C}{B\sqrt{\pi}-2F}\Big(I_{0+}^{-\alpha-1,\frac{1}{2}-\beta,0}\Big(I_{0+}^{\delta,\eta,\gamma}\tau_1\Big)(t)\Big)(x)-\\&-\frac{2}{B\sqrt{\pi}-2F}\Big(I_{0+}^{-\alpha-1,\frac{1}{2}-\beta,0}g\Big)(x)\Bigg].\end{aligned}\tag{31}$$

Исходя из теоремы 30.2 [2], можно доказать следующее заключение.

Теорема 1. *Пусть для функций $\tau_1(x)$, $g(x)$ выполняются условия (2), (4), для параметров α, β, δ, η, γ, λ_1, λ_2 – (5), (8)-(11), для констант B, F – (7). Пусть $a_1(x)$, $a_2(x)$, $F(x)$ определены соответственно формулами (29)-(31). Тогда уравнение (28) имеет в классе $H^\lambda\left((1-x)^{\alpha+1};[0,1]\right)$ единственное решение, которое даётся формулой*

$$\mu(x)=\frac{a_1(x)F(x)}{A(x)}-\frac{a_2(x)Z_0(x)}{\pi A(x)}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{-\alpha-1}\frac{F(t)\,dt}{Z_0(t)(t-x)},\tag{32}$$

где

$$Z_0(x)=\exp\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^1\frac{\theta(t)\,dt}{t-x}-2\pi\alpha\ln\frac{x}{1-x}\right],\tag{33}$$

$$\theta(x)=\arg\frac{a_1(x)-ia_2(x)}{a_1(x)+ia_2(x)},\quad A(x)=a_1^2(x)+a_2^2(x).\tag{34}$$

Теорема 2. *Пусть для функций $\tau_1(x)$, $g(x)$ выполняются условия (2)–(4), для параметров α, β, δ, η, γ, λ_1, λ_2 – (5), (8)-(11), для констант B, D, F – (6), (7). Тогда задача 1)-2), (12) для уравнения (1) имеет единственное решение $u(x,y)$, определяемое формулой (14), где $\nu_1(x)=x^{-\alpha-1}(1-x)^{\alpha+1}\times\ \times\mu(x)$. Здесь $\mu(x)$ имеет вид (32), а $a_1(x)$, $a_2(x)$, $F(x)$, $Z_0(x)$, $\theta(x)$, $A(x)$ даются соответственно равенствами (29), (30), (31), (33), (34), (35).*

Список литературы

[1] *M. Saigo.* A remark on integral operatorsinvolving the Gauss hypergeometric functions. Math. Rep. Kyushu. Univ. 1978. V. 11. №2. P. 135–143.

[2] *С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987.

[3] *А.В. Бицадзе.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР. 1959.

[4] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т.1. М.: Наука. 1973.

[5] *О.А. Репин.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Саратов: Саратовский ун-т. 1992. 162с.

[6] *С.В. Ефимова.* О свойстве композиции операторов дробного интегродифференцирования с различными началами. Тезисы докладов III-ей школы молодых учёных «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик-Эльбрус. 2005. С. 30–32.

[7] *H.M. Srivastava, M. Saigo.* Multiplication of fractional calculus operators and boundary value problems involving the Euler-Darboux equation. J. Math. Anal. and Appl. 1987. V. 121. №2. P. 325–369.

О СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СМЕШАННЫМИ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В.И. Жегалов, О.С. Белова

Казанский государственный университет

В области $D = \{x_0 < x < x_1, \quad y_0 < y < y_1, \quad z_0 < z < z_1\}$ определим операторы

$$\begin{aligned} &L_1(u) \equiv u_{xy} + a_1u_x + b_1u_y + c_1u, \quad L_2(v) \equiv v_{yz} + a_2v_y + b_2v_z + c_2v, \\ &L_3(w) \equiv w_{xz} + a_3w_x + b_3w_z + c_3w, \end{aligned}$$

где a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2, 3) \in C(\overline{D})$ вместе с теми производными, которые берутся от искомых функций в соответствующих слагаемых (например, $a_2 \in C^{(0,1,0)}(\overline{D})$). Целью нашего исследования является система

$$\begin{aligned} L_1(u) &= p_1v + e_1w + g_1v_x + k_1v_y + m_1w_x + n_1w_y + F_1(x, y, z, u, v, w), \\ L_2(v) &= p_2u + e_2w + g_2u_y + k_2u_z + m_2w_y + n_2w_z + F_2(x, y, z, u, v, w), \\ L_3(w) &= p_3u + e_3v + g_3u_x + k_3u_z + m_3v_x + n_3v_z + F_3(x, y, z, u, v, w). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $g_1, m_1, g_3, m_3 \in C^{(1,0,0)}(\overline{D})$, $k_1, n_1, g_2, m_2 \in C^{(0,1,0)}(\overline{D})$, $k_2, n_2, k_3, n_3 \in C^{(0,0,1)}(\overline{D})$. Можно рассматривать (1) как определенное обобщение системы

$$u_x = au + bv + f, \quad v_y = cu + dv + g$$

и ее трехмерного аналога из работ [1], [2] и др.

Задача Г (Гурса): Найти функции $u, v, w \in C^{(1,1,1)}(D) \bigcap C(\overline{D})$, удовлетворяющие в D системе (1) и граничным условиям

$$\begin{aligned} &u(x_0, y, z) = \varphi_1(y, z), \quad v(x, y_0, z) = \psi_1(x, z), \quad w(x_0, y, z) = \chi_1(y, z), \\ &u(x, y_0, z) = \varphi_2(x, z), \quad v(x, y, z_0) = \psi_2(x, y), \quad w(x, y, z_0) = \chi_2(x, y), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\varphi_k, \psi_k, \chi_k$ $(k = 1, 2) \in C^{(1,1)}$ на соответствующих гранях $\overline{D}$. В силу $u, v, w \in C(\overline{D})$ должны выполняться соотношения

$$\varphi_1(y_0, z) = \varphi_2(x_0, z), \quad \psi_1(x, z_0) = \psi_2(x, y_0), \quad \chi_1(y, z_0) = \chi_2(x_0, y). \tag{3}$$

1. Линейный случай: $F_k = F_k(x, y, z) \in C(\overline{D}),\ k = 1, 2, 3.$

Рассматривая временно правые части (1) как известные функции Φ_k, запишем формально решение задачи Гурса для каждого из этих уравнений [3, с.65], пользуясь соответствующими условиями, выбранными из (2).

Если в полученных формулах проинтегрируем по частям слагаемые, содержащие производные от искомых функций, то получим

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) = &\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\Big[R_1(\alpha,\beta,z,x,y,z)p_1(\alpha,\beta,z)v(\alpha,\beta,z)\\
&+ R_1(\alpha,\beta,z,x,y,z)e_1(\alpha,\beta,z)w(\alpha,\beta,z) - v(\alpha,\beta,z)\frac{\partial[R_1(\alpha,\beta,z,x,y,z)g_1(\alpha,\beta,z)]}{\partial\alpha}\\
&- v(\alpha,\beta,z)\frac{\partial[R_1(\alpha,\beta,z,x,y,z)k_1(\alpha,\beta,z)]}{\partial\beta} - w(\alpha,\beta,z)\frac{\partial[R_1(\alpha,\beta,z,x,y,z)m_1(\alpha,\beta,z)]}{\partial\alpha}\\
&- w(\alpha,\beta,z)\frac{\partial[R_1(\alpha,\beta,z,x,y,z)n_1(\alpha,\beta,z)]}{\partial\beta}\Big]d\beta d\alpha + \Omega_1(x,y,z)\\
&+ \int\limits_{y_0}^{y}\Big[R_1(x,\beta,z,x,y,z)g_1(x,\beta,z)v(x,\beta,z) + R_1(x,\beta,z,x,y,z)m_1(x,\beta,z)w(x,\beta,z)\Big]d\beta\\
&+ \int\limits_{x_0}^{x}\Big[R_1(\alpha,y,z,x,y,z)k_1(\alpha,y,z)v(\alpha,y,z) + R_1(\alpha,y,z,x,y,z)n_1(\alpha,y,z)w(\alpha,y,z)\Big]d\alpha,
\end{aligned} \tag{4a}$$

$$\begin{aligned}
v(x,y,z) = &\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}\Big[R_2(x,\beta,\gamma,x,y,z)p_2(x,\beta,\gamma)u(x,\beta,\gamma)\\
&+ R_2(x,\beta,\gamma,x,y,z)e_2(x,\beta,\gamma)w(x,\beta,\gamma) - u(x,\beta,\gamma)\frac{\partial[R_2(x,\beta,\gamma,x,y,z)g_2(x,\beta,\gamma)]}{\partial\beta}\\
&- u(x,\beta,\gamma)\frac{\partial[R_2(x,\beta,\gamma,x,y,z)k_2(x,\beta,\gamma)]}{\partial\gamma} - w(x,\beta,\gamma)\frac{\partial[R_2(x,\beta,\gamma,x,y,z)m_2(x,\beta,\gamma)]}{\partial\beta}\\
&- w(x,\beta,\gamma)\frac{\partial[R_2(x,\beta,\gamma,x,y,z)n_2(x,\beta,\gamma)]}{\partial\gamma}\Big]d\gamma d\beta + \Omega_2(x,y,z)\\
&+ \int\limits_{y_0}^{y}\Big[R_2(x,\beta,z,x,y,z)k_2(x,\beta,z)u(x,\beta,z) + R_2(x,\beta,z,x,y,z)n_2(x,\beta,z)w(x,\beta,z)\Big]d\beta\\
&+ \int\limits_{z_0}^{z}\Big[R_2(x,y,\gamma,x,y,z)g_2(x,y,\gamma)u(x,y,\gamma) + R_2(x,y,\gamma,x,y,z)m_2(x,y,\gamma)w(x,y,\gamma)\Big]d\gamma,
\end{aligned} \tag{4b}$$

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}\Big[& R_3(\alpha,y,\gamma,x,y,z)p_3(\alpha,y,\gamma)u(\alpha,y,\gamma) \\
& + R_3(\alpha,y,\gamma,x,y,z)e_3(\alpha,y,\gamma)v(\alpha,y,\gamma) - u(\alpha,y,\gamma)\frac{\partial[R_3(\alpha,y,\gamma,x,y,z)g_3(\alpha,y,\gamma)]}{\partial\alpha} \\
& - u(\alpha,y,\gamma)\frac{\partial[R_3(\alpha,y,\gamma,x,y,z)k_3(\alpha,y,\gamma)]}{\partial\gamma} - v(\alpha,y,\gamma)\frac{\partial[R_3(\alpha,y,\gamma,x,y,z)m_3(\alpha,y,\gamma)]}{\partial\alpha} \\
& - v(\alpha,y,\gamma)\frac{\partial[R_3(\alpha,y,\gamma,x,y,z)n_3(\alpha,y,\gamma)]}{\partial\gamma}\Big]d\gamma d\alpha + \Omega_3(x,y,z)+ \qquad \text{(4c)} \\
& + \int\limits_{z_0}^{z}\Big[R_3(x,y,\gamma,x,y,z)g_3(x,y,\gamma)u(x,y,\gamma) + R_3(x,y,\gamma,x,y,z)m_3(x,y,\gamma)v(x,y,\gamma)\Big]d\gamma \\
& + \int\limits_{x_0}^{x}\Big[R_3(\alpha,y,z,x,y,z)k_3(\alpha,y,z)u(\alpha,y,z) + R_3(\alpha,y,z,x,y,z)n_3(\alpha,y,z)v(\alpha,y,z)\Big]d\alpha.
\end{aligned}
$$

Здесь R_k $(k = 1, 2, 3)$ есть функции Римана для уравнений сопряженных с $L_1(u) = 0$, $L_2(v) = 0$, $L_3(w) = 0$ соответственно, а Ω_k зависят только от граничных условий (2) и тех же R_k.

Введя векторы $\Theta = (u, v, w)$, $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$, нетрудно заметить, что можно рассматривать (4a–4c) как векторно-матричный аналог уравнения (2.2) из [4, с.21]. Все входящие в него матрицы (их легко записать с помощью (4a–4c) будут непрерывны в $\overline{D}$, что обеспечивает проведение всей схемы рассуждений, относящейся к (2.2) в [4]. Это означает, что система интегральных уравнений (4a–4c) однозначно разрешима. Другими словами, верна

Теорема 1. *Задача Г однозначно разрешима.*

Заметим, что в частном случае данного пункта (когда все g_s, k_s, m_s, n_s равны нулю) однозначная разрешимость задачи Г ранее доказана в [5].

2. Общий случай. Введем область $G = \{-\infty < u < +\infty,\ -\infty < v < +\infty,\ -\infty < w < +\infty\}$ и будем предполагать F_k непрерывными в $\overline{D}$, ограниченными в $D \times G$ и удовлетворяющими по u, v, w условиям Липшица. Другими словами, будем считать, что

$$
|F_k(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3) - F_k(x,y,z,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)| \leqslant N\sum_{s=1}^{3}|\tau_s - \sigma_s|, \quad |F_k| \leqslant M, \qquad (5)
$$

где $x, y, z \in \overline{D}$, $(\tau_1,\tau_2,\tau_3), (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) \in G$, $M, N = \mathrm{const} > 0$. Тогда с помощью схемы рассуждений из п.1 мы тоже придем к векторно-матричному интегральному уравнению, но уже нелинейному. Если схематично записать его в виде $\Theta = \Phi(x,y,z,u,v,w)$, то можно построить последовательные приближения $\Theta_n = \Phi(x,y,z,u_{n-1},v_{n-1},w_{n-1})$, $\Theta_0 = 0$, которые не выйдут за пределы области $D \times G$. Условия (5) оказываются достаточными для равномерной сходимости $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$, что обеспечивает существование единственного решения полученной системы нелинейных интегральных уравнений. Таким образом, верна

Теорема 2. *Задача Г при условиях (5) имеет единственное решение.*

Изложенный здесь результат можно рассматривать как базовый: к задаче Г редуцируются другие граничные задачи, например, когда граничные значения (2) или их части заменяются граничными значениями нормальных производных от u, v, w.

Список литературы

[1] *А.В. Бицадзе.* Математическое моделирование. 1994. Т. 6. №6. С. 22–31.

[2] *Т.В. Чекмарев.* Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. №9. С. 1614–1622.

[3] *А.В. Бицадзе.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука. 1981. С. 448.

[4] *В.И. Жегалов, А.Н. Миронов.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казанское математическое общество. 2001. С. 226.

[5] *В.В. Бушуев.* Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казань. 2002. Т. 18. С. 10–12.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В.И. Жегалов, Г.Р. Хакимова

Казанский государственный университет

Пусть $D = \{0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$, $G = \{-\infty < t_k < +\infty,\ k = 1, \ldots, 5\}$, а функция f определена в $D \times G$, непрерывна в $\overline{D}$ и удовлетворяет условиям

$$|f| \leqslant M,\ |f(x, y, \tau_1, \ldots, \tau_5) - f(x, y, \theta_1, \ldots, \theta_5)| \leqslant L \sum_{s=1}^{5} |\tau_s - \theta_s|, \tag{1}$$

$$(x, y) \in D, \quad (\tau_1, \ldots, \tau_5),\ (\theta_1, \ldots, \theta_5) \in G, \quad M, L = const > 0.$$

В настоящей заметке речь идет об уравнении

$$U_{xxy} = f(x, y, U, U_x, U_y, U_{xy}, U_{xx}), \tag{2}$$

частные случаи которого встречаются при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах [1]. Оно содержит в себе известные уравнения Аллера и Бенджамена-Бона-Махони [2], [3, с.261–262]. При линейной по последним пяти аргументам функции f уравнение (2) изучалось в [4], [5] и др., где оно было названо псевдопараболическим. Обзор этих исследований имеется в [6].

Задача 1 (Гурса). Найти функцию $U(x, y) \in C^{(2,1)}(\overline{D})$, удовлетворяющую в D уравнению (2) и граничным условиям

$$U(0, y) = \varphi(y), \tag{3}$$

$$U_x(0, y) = \varphi_1(y), \tag{4}$$

$$U(x,0)=\psi(x), \tag{5}$$

$$y\in p=[0,1],\ x\in q=[0,1],\ \varphi,\varphi_1\in C^1(p),\ \psi\in C^1(q),\ \varphi(0)=\psi(0).$$

При ссылках (3)–(5) соответствуют порядку записанных граничных значений.

Эта задача, очевидно, эквивалентна интегральному уравнению

$$\begin{gathered}U(x,y)=\omega(x,y)\\ +\int\limits_0^x(x-\xi)\int\limits_0^y f\left[\xi,\eta,U(\xi,\eta),U_\xi(\xi,\eta),U_\eta(\xi,\eta),U_{\xi\eta}(\xi,\eta),U_{\xi\xi}(\xi,\eta)\right]d\eta d\xi,\\ \omega(x,y)=\psi(x)+\varphi(y)+[\varphi_1(y)-\varphi_1(0)]x-\varphi(0),\end{gathered} \tag{6}$$

решение которого можно получить с помощью последовательных приближений

$$\begin{gathered}U_n(x,y)=\omega(x,y)\\ +\int\limits_0^x(x-\xi)\int\limits_0^y f\left(\xi,\eta,U_{n-1},\frac{\partial U_{n-1}}{\partial\xi},\frac{\partial U_{n-1}}{\partial\eta},\frac{\partial^2U_{n-1}}{\partial\xi\partial\eta},\frac{\partial^2U_{n-1}}{\partial\xi^2}\right)d\eta d\xi,\\ U_0=\omega(x,y),\quad n=1,2,\ldots.\end{gathered} \tag{7}$$

Из (1) следует, что все U_n могут быть вычислены, а их разности $Z_n=U_n-U_{n-1}$ и их первые производные оцениваются неравенствами

$$\max\left\{|Z_n|,\left|\frac{\partial Z_n}{\partial x}\right|\right\}\leqslant\frac{M(2LK)^{n+2}}{L^2K^2(n+2)!},\quad \max\left\{\left|\frac{\partial Z_n}{\partial y}\right|,\left|\frac{\partial^2Z_n}{\partial x\partial y}\right|,\left|\frac{\partial^2Z_n}{\partial x^2}\right|\right\}\leqslant\frac{M(2LK)^{n+1}}{L^2K^2(n+1)!}.$$

Здесь в качестве K можно выбрать любое число не меньшее 7. Очевидно, из этих неравенств следует равномерная сходимость $\{U_n\}$ и входящих в (7) производных от U_n, что обеспечивает существование решения задачи 1. Его единственность устанавливается стандартным для метода последовательных приближений приемом. Следовательно, верна

Теорема 1. *Задача 1 однозначно разрешима.*

Полученный результат является для нас базовым: он позволяет изучить вопросы разрешимости задач, получаемых из задачи Гурса заменой в (3)–(5) хотя бы одного условия соотношениями из набора

$$U_{xx}(0,y)=\varphi_2(y), \tag{8}$$

$$U_y(x,0)=\psi_1(x). \tag{9}$$

Получающиеся при этом задачи соотносятся с задачей Гурса аналогично тому, как в теории эллиптических уравнений задача Неймана с задачей Дирихле.

Комбинация из (3)–(5) и (8)–(9) дают пять задач, которые можно закодировать цифрами, соответствующими участвующим в их постановке граничным значениям: 349, 358, 458, 389, 489.

Определенные результаты о разрешимости этих задач удается получить при дополнительных предположениях относительно функции f: она допускает выделение линейной части и при этом имеет специальную структуру по производным искомой функции. А именно, речь идет об уравнениях вида

$$U_{xxy} + aU_{xx} + bU_{xy} + cU_x + dU_y + eU = f(x, y, U, U_x, U_y, U_{xy}, U_{xx}), \tag{10}$$

где $a \in C^{(2,0)}(\overline{D}),\ b \in C^{(1,1)}(\overline{D}),\ c \in C^{(1,0)}(\overline{D}),\ d \in C^{(0,1)}(\overline{D}),\ e \in C^{(0,0)}(\overline{D})$.

Обратимся, например, к задаче 358, предполагая, что f имеет вид

$$f(x, y, U, U_x, U_y, U_{xy}, U_{xx}) \equiv g(x, y, U, U_x, U_y, \alpha U_{xy}, U_{xx}), \tag{11}$$

и при этом

$$\alpha(0, y) = 0,\ b(0, y) \neq 0,\ y \in p. \tag{12}$$

Очевидно, (11) определяет указанную выше специальную структуру f. Проинтегрируем (10) один раз по y в пределах от y_* до у $((y_*, y) \in D)$, затем в полученном соотношении устремим y_* и x к 0. Учитывая граничные условия, получим для определения функции $\varphi_1(y)$ интегральное уравнение

$$\varphi_1(y) = b^{-1}(y)\{r(y) + \int\limits_0^y K[\eta, \varphi_1(\eta)]d\eta\}. \tag{13}$$

Здесь $K\big[y, \varphi_1(y)\big] = \big[c(0, y) - b_y(0, y)\big]\varphi_1(y) + g\big(0, y, \varphi(y), \varphi_1(y), \varphi_2(y)\big)$, $r(y) \in C(p)$ – известная функция, записанная через исходные данные задачи.

Нетрудно видеть, что условия (1) обеспечивают для (13) реализацию рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 1. Таким образом, $\varphi_1(y)$ существует и определяется единственным образом, а задача 358 при условиях (11) и (12) оказывается редуцированной к задаче 1. Поэтому в силу теоремы 1 верна

Теорема 2. *Задача 358 при условиях (11)–(12) однозначно разрешима.*

Аналогично исследуются остальные 4 задачи. Из них 349, 458 редуцируются к задаче Гурса однозначно, а 389 и 489 с точностью до одной произвольной постоянной.

Аналоги условий (11)–(12) в задачах 349, 458 представляются соответственно в видах:

$$f(x, y, U, U_x, U_y, U_{xy}, U_{xx}) \equiv g(x, y, \alpha U, U_x, U_y, U_{xy}, \beta U_{xx}), \tag{14}$$

$$\alpha(x, 0) = 0,\ \beta(x, 0) = 0,\ a(x, 0) \neq 0,\ x \in q. \tag{15}$$

$$f(x, y, U, U_x, U_y, U_{xy}, U_{xx}) \equiv g(x, y, U, U_x, \alpha U_y, U_{xy}, U_{xx}), \tag{16}$$

$$\alpha(0, y) = 0,\ d(0, y) \neq 0,\ y \in p. \tag{17}$$

Так как наборы 389, 489 получаются заменой в (3)–(5) двух условий, то и ищутся две функции. Для каждой из них своя специальная структура функции f. В случае 389 она задается соотношениями

$$f(x, y, U, U_x, U_y, U_{xy}, U_{xx}) \equiv g(x, y, U, U_x, U_y, \alpha_1 U_{xy}, U_{xx}), \tag{18}$$

$$\alpha_1(0, y) = 0,\ b(0, y) \neq 0,\ y \in p. \tag{19}$$

$$f(x,y,U,U_x,U_y,U_{xy},U_{xx}) \equiv g(x,y,U,\alpha_2 U_x,U_y,U_{xy},\beta U_{xx}), \tag{20}$$

$$\alpha_2(x,0)=0,\ \beta(x,0)=0,\ a(x,0)\neq 0,\ x\in q, \tag{21}$$

а для 489

$$f(x,y,U,U_x,U_y,U_{xy},U_{xx}) \equiv g(x,y,U,U_x,\alpha_1 U_y,U_{xy},U_{xx}) \tag{22}$$

$$\alpha_1(0,y)=0,\ d(0,y)\neq 0,\ y\in p. \tag{23}$$

$$f(x,y,U,U_x,U_y,U_{xy},U_{xx}) \equiv g(x,y,U,\alpha_2 U_x,U_y,\beta U_{xy},U_{xx}), \tag{24}$$

$$\alpha_2(x,0)=0,\ \beta(x,0)=0,\ a(x,0)\neq 0,\ x\in q. \tag{25}$$

Окончательные результаты можно сформулировать в виде утверждений:
1) *задачи 349, 458 однозначно разрешимы соответственно при условиях (13)–(14) и (15)–(16);*
2) *задачи 389, 489 разрешимы с точностью до одной произвольной постоянной при условиях (18)–(21) и (22)–(25) соответственно.*

Замечание. Нетрудно понять, что все проведенные рассуждения распространяются на случай, когда $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$. Мы выбрали $x_0 = y_0 = 0,\ x_1 = y_1 = 1$ с целью некоторого упрощения формул.

Наконец, отметим, что все рассмотренные здесь задачи для уравнения (10) при $f \equiv 0$ были исследованы ранее [6, с.132–138] с помощью метода Римана.

Список литературы

[1] *М.Х. Шхануков.* Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. №4. С. 689–699.

[2] *M. Hallaire.* Inst. Rech. Agronom. 1964. №9.

[3] *А.М. Нахушев.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. С. 310.

[4] *D. Colton.* J. Different. equations. 1972. V.12. №3. P. 559–565.

[5] *W. Rundell, M. Stecher.* Proc. Amer. Math. Soc. 1977. V.63. №1. P. 77–81.

[6] *В.И. Жегалов, А.Н. Миронов.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казанское математическое общество. 2001. С. 226.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТОЧНЫХ МНОГОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ДИСКРЕТНОЙ СИММЕТРИЕЙ

К. Г. Жуков, Г. М. Чечин

Ростовский государственный университет, НИИ физики,

344090, Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 194

Различные динамические режимы в нелинейной механической системе с дискретной группой симметрии G_0 могут быть классифицированы по ее подгруппам $G_j \in G_0$. При помощи развитых в работах [1, 2] теоретико-групповых методов для каждой такой подгруппы может быть найдено соответствующее ей колебательное состояние обладающее симметрией G_j. Такое состояние может быть представлено в виде некоторой линейной комбинации базисных векторов всех неприводимых представлений группы G_0 с зависящими от времени коэффициентами. Фактически эта линейная комбинация представляет собой определенную суперпозицию симметрийно-обусловленных колебательных мод. При этом в силу определенных правил отбора для передачи возбуждения между модами с разной симметрией [1] в процесс колебаний оказываются вовлеченными не все моды, а лишь ограниченный их набор, сохраняющийся с течением времени. Такие наборы были названы в [1] бушами колебательных мод. Они представляют собой *точные* многочастотные возбуждения в механических системах с дискретной симметрией. Размерность буша равна числу входящих в него мод.

Каждый буш имеет свою область устойчивости в пространстве амплитуд и скоростей входящих в него мод. При превышении порога устойчивости за счет явления, аналогичного явлению параметрического резонанса происходит возбуждение мод, не входящих в рассматриваемый буш, который при этом переходит в другой буш более низкой симметрии.

Будем рассматривать механическую систему с N степенями свободы вида

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}), \tag{1}$$

обладающую группой симметрии G_0. Здесь вектор $\boldsymbol{X} = \{x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_N(t)\}$ определяет отклонение системы из своего равновесного состояния $\boldsymbol{X}_0 = \{0,\ 0,\ \ldots,\ 0\}$ в момент времени t, а вектор-функция $\boldsymbol{F} = \{f_1(\boldsymbol{X}),\ f_2(\boldsymbol{X}),\ \ldots,\ f_N(\boldsymbol{X})\}$ задает правые части динамических уравнений (1).

Для бушей мод характерны определенные связи между компонентами вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$. Например, при продольных колебаниях моноатомных цепочек с числом частиц N кратным четырем могут существовать точные динамические режимы вида [3, 4]:

$$\boldsymbol{X}^{(1)} = \{A(t),\ 0,\ -A(t),\ 0 \mid A(t),\ 0,\ -A(t),\ 0 \mid \ldots\}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{X}^{(2)} = \{A(t),\ B(t),\ -B(t), -A(t) \mid A(t),\ B(t),\ -B(t), -A(t) \mid \ldots\}, \tag{3}$$

и др.

Уравнение (2) определяет одномерный буш, поскольку сооответствующее колебательное состояние системы полностью описывается одной степенью свободы $A(t)$, для которой из системы (1) можно получить одно уравнение движения второго порядка. Соотношение (3) определяет двумерный буш, поскольку ему отвечает колебательное состояние, описываемое двумя степенями свободы, $A(t)$ и $B(t)$, для которых из уравнений (1) можно получить систему двух связанных динамических уравнений второго порядка.

В общем случае, m-мерный буш определяется N-мерным вектором $\boldsymbol{C}(t)$, который имеет m независимых компонент, полностью описывающих некоторый динамический режим в рассматриваемой механической системе.

Для исследования линейной устойчивости буша мод $\boldsymbol{C}(t)$ линеаризуем исходную систему нелинейных уравнений (1) в его окрестности и проанализируем устойчивость нулевого решения полученной системы линейных ОДУ с переменными коэффициентами относительно компонент инфинитезимального вектора возмущений $\boldsymbol{y}(t)$. В результате этих операций получим линеаризованную систему вида

$$\ddot{\boldsymbol{y}} = \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] \cdot \boldsymbol{y}, \tag{4}$$

где $\mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{X}}\Big|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}(t)}$ – соответствующая матрица Якоби.

В работе [5] нами была доказана теорема, позволяющая добиться упрощения матрицы Якоби $\mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)]$ и, как следствие, расщепления линеаризованной системы (4) на некоторое число независимых подсистем:

Теорема 1. *Матрица Якоби* $\mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)]$ *системы, линеаризованной в окрестности некоторого буша, заданного вектором состояния* $\boldsymbol{C}(t)$, *коммутирует со всеми матрицами* $\mathbf{M}(g)$ $(g \in G_j)$ *механического представления группы симметрии* G_j *рассматриваемого буша:*

$$\mathbf{M}(g) \cdot \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] = \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] \cdot \mathbf{M}(g).$$

Теорема 1 позволяет применить для расщепления линеаризованной системы (4) известную теорему Вигнера [6]. Введем необходимые обозначения. Пусть имеется представление Γ группы G, которое может быть разложено на прямую сумму неприводимых представлений Γ_j этой группы

$$\Gamma = \sum_j^{\oplus} m_j \Gamma_j, \tag{5}$$

где m_j обозначает число раз, которое представление Γ_j размерности n_j входит в это разложение. Тогда теорему Вигнера для наших целей можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2 (*теорема Вигнера*). *Матрица* $\mathbf{H}$, *коммутирующая со всеми матрицами представления* Γ *группы* G *может быть приведена к блок-диагональной форме*

$$\mathbf{H} = \sum^{\oplus} \mathbf{D}_j, \tag{6}$$

такой, что

(1) *размерность каждого блока* $\mathbf{D}_j$ *равна произведению* $m_j \cdot n_j$;

(2) *блок* $\mathbf{D}_j$ *состоит из подблоков, имеющих вид матриц, пропорциональных единичной матрице* $\mathbf{I}_n$ *размерности* n_j, *которые повторяются* m_j *раз вдоль строк и столбцов блока* D_j.

В работе [5] показано, что совместное применение теорем 1 и 2 позволяет расщепить линеаризованную систему (4) на независимые подсистемы, размерность которых определяется кратностями вхождения отдельных неприводимых представлений группы G_j в механическое представление этой группы. При этом, число таких подсистем, получаемых для каждого из неприводимых представлений группы G_j, равно размерности этого представления.

В качестве примера применения вышеописанного аппарата анализа устойчивости динамических режимов в системах с дискретной симметрией рассмотрим колебания механической модели молекулы, состоящей из шести идентичных атомов, расположенных в вершинах правильного октаэдра (см. Рис.). К такому классу структур относятся, например, семейство молекул типа SF_6 и молекулярные комплексы в редкоземельных гексаборидах с химической формулой RB_6. Пусть взаимодействие между атомами описывается некоторым потенциалом парного взаимодействия $u(r)$, где r - расстояние между атомами. Например, это может быть потенциал Леннарда-Джонса $u(r) = \dfrac{A}{r^{12}} - \dfrac{B}{r^6}$. Буши мод для этой модели были найдены в работе [7]. Рассмотрим расщепление систем линеаризованных в окрестности трех из них: одномерного буша B$[O_h]$, двумерного B$[D_{4h}]$ и трехмерного B$[C_{4v}]$ (в квадратных скобках указаны группы симметрии рассматриваемых бушей, которые являются подгруппами группы O_h).

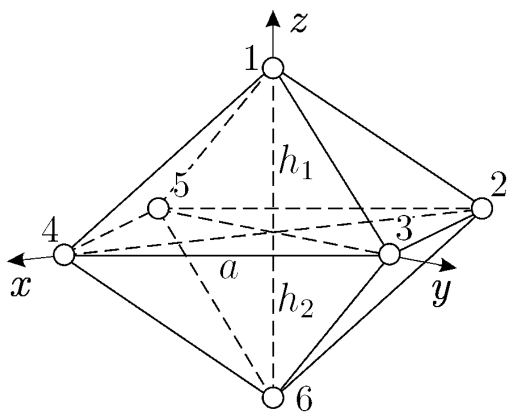


Рис. 1. Октаэдрическая структура с группой симметрии O_h.

Буш B$[O_h]$ описывает колебания правильного октаэдра с длиной ребра $a = a(t)$, которая может быть выбрана в качестве единственной динамической переменной, характеризующей данный режим. Уравнение движения для $a(t)$ имеет вид [7]:

$$\ddot{a} = -4u'(a) - \sqrt{2}\,u'(\sqrt{2}\,a). \tag{7}$$

Проведенный теоретико-групповой анализ показал, что линеаризованная в окрестности буша B$[O_h]$ система динамических уравнений распадается на 12 независимых уравнений (по числу колебательных степеней свободы рассматриваемой модели). Общий вид этих уравнений может быть записан как

$$\ddot{y}_j = \left(\left(\gamma_1\phi\left(\sqrt{2}a\right) + \gamma_2\phi\left(a\right)\right)(a - a_0) + \gamma_3\psi\left(\sqrt{2}a\right) + \gamma_4\psi\left(a\right)\right)y_j, \tag{8}$$

где функции ϕ и ψ имеют вид

$$\phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d^2u(r)}{dr^2} - \frac{1}{r^3}\frac{du(r)}{dr}, \quad \psi(r) = \frac{1}{r}\frac{du(r)}{dr},$$

где γ_k – соответствующие константы, a_0 – равновесная длина ребра октаэдра.

Трехмерному бушу B$[C_{4v}]$ соответствуют колебания октаэдра, вытянутого вдоль одной из своих пространственных диагоналей. В качестве динамических переменных, в добавление к $a(t)$, для этого буша можно выбрать расстояния от двух атомов, лежащих на этой диагонали, до плоскости, образованной четырьмя другими атомами: $h_1 = h_1(t)$ и $h_2 = h_2(t)$ (см. Рис.). Уравнения движения для буша B$[C_{4v}]$ имеют вид [7]:

$$\begin{aligned} &\ddot{a} = -2u'(a) - \sqrt{2}u'(\sqrt{2}a) - u'(b)\frac{a}{b} - u'(c)\frac{a}{c}, \\ &\ddot{h}_1 = -u'(b)\frac{5h_1 - h_2}{b} - u'(h_1 + h_2), \quad \ddot{h}_2 = -u'(c)\frac{5h_2 - h_1}{c} - u'(h_1 + h_2), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + (5h_1 - h_2)^2}, \qquad c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + (5h_2 - h_1)^2}$$

Двумерный буш $\mathrm{B}[D_{4h}]$ является частным случаем буша $\mathrm{B}[C_{4v}]$ при $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$.

В результате применения рассматриваемого нами метода расщепления линеаризованной системы для этих бушей были получены подсистемы вида

$$\ddot{\boldsymbol{y}}_j = \mathbf{K}_j(t)\boldsymbol{y}_j, \tag{10}$$

где коэффициенты матриц $\mathbf{K}_j(t)$ зависят от переменных $a(t)$, $h_1(t)$ и $h_2(t)$ достаточно сложным образом. Для буша $\mathrm{B}[D_{4h}]$ исходная линеаризованная система расщепляется на три подсистемы из двух уравнений и шесть независимых уравнений, а для буша $\mathrm{B}[C_{4v}]$ имеем три подсистемы из трех уравнений и по одной подсистеме из одного и двух уравнений.

Список литературы

[1] *В. П. Сахненко, Г. М. Чечин.* ДАН. 1993. Т. 330. С. 308; ДАН. 1994. Т. 338. С. 42.

[2] *G. M. Chechin and V. P. Sakhnenko.* Physica D. 1998. V. 117. P. 43.

[3] *G.M. Chechin, N.V. Novikova, and A.A. Abramenko.* Physica D. 2002. V. 166. P. 208.

[4] *G. M. Chechin, D. S. Ryabov, and K. G. Zhukov.* Physica D.2005. V. 203. P. 121.

[5] *G. M. Chechin, K. G. Zhukov.* Phys. Rev. E. 2006. V. 73. 036216.

[6] *М. И. Петрашень, Е. Д. Трифонов.* Применение теории групп в квантовой механике. М.: Наука, 1967.

[7] *G.M. Chechin, A.V. Gnezdilov, and M.Yu. Zekhtser.* Int. J. Non-Linear Mech. 2003. V. 38. P. 1451.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

А.Н. Зарубин, Е.А. Зарубин

Орловский государственный университет, 302026, Орел, ул. Комсомольская, 95

1. Введение. Уравнение

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) - D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = -H(t-h)u(x,t-h), t > 0, \\ u_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t) = H(x-\tau)u(x-\tau,t), t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $0 < \alpha < 1$; $0 < \tau, h \equiv const$; $H(\xi)$ - функция Хевисайда; D_{0t}^{α} - оператор дробного [1] интегро-дифференцирования (в смысле Римана-Лиувилля), действующий на функцию $u(x,t)$ по переменной t, рассмотрим в области $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup J$, когда $D^+ = \bigcup\limits_{l=0}^{+\infty} D_l^+ = \{(x,t) : |x| < +\infty; t > 0\}$ и $D^- = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_k^-$ – «параболическая» и гиперболическая части области D, а

$$J = \{(x,t) : x > 0; t = 0\},$$

причем

$$D_l^+ = \{(x,t) : |x| < +\infty; lh \leqslant t \leqslant (l+1)h\},$$
$$D_k^- = \{(x,t) : k\tau - t < x < (k+1)\tau + t; -\tau/2 < t < 0\}.$$

Задача. Найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1) такое, что $D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) \in C(\overline{D^+})$, $t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C(D^+ \bigcup J)$, $u(x,t) \in C(\overline{D^-})$,$u_{xx}(x,t) \in C(D^- \bigcup D^+)$, $u_{tt}(x,t) \in C(D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = 0, -\infty < x \leqslant 0, \tag{2}$$

$$u(x, k\tau - x) = \psi_k(x), k\tau \leqslant x \leqslant (2k+1)\tau/2, \tag{3}$$

и условиям сопряжения

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \lim_{t\to 0-} u(x,t), x \in \overline{J}, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to 0+} t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = \lim_{t\to 0-} u_t(x,t), x \in J, \tag{5}$$

причем $\psi_k(x) \in C\left[k\tau,(2k+1)\tau/2\right] \bigcap C^2\left(k\tau,(2k+1)\tau/2\right)$ – заданные функции; $\psi_0(0)=0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \max\limits_{x\in[k\tau,(2k+1)\tau/2]} |\psi_k(x)| = 0$.

2. Единственность решения задачи. Пусть существует решение исследуемой задачи. Введем обозначения

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \omega_1(x), \qquad \lim_{t\to 0-} u(x,t) = \omega_2(x), \tag{6}$$

$$\lim_{t\to 0+} t^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = \nu_1(x), \qquad \lim_{t\to 0-} u_t(x,t) = \nu_2(x). \tag{7}$$

Известно [2], что решение уравнения (1) в полуплоскости $t>0$, удовлетворяющее условию (2) и условию

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \omega_1(x), x \in \overline{J},$$

дается формулой

$$u(x,t) = \left\{u_l(x,t), (x,t) \in \overline{D_l^+}(l=0,1,2,...)\right\}, \tag{8}$$

где

$$u_l(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} \omega_1(\xi)G_l(x-\xi,t)d\xi, \tag{9}$$

а

$$G_l(x,t) = \frac{1}{x\sqrt{\pi}}\sum_{\theta=0}^{l}\frac{(t-\theta h)^{(\theta+1)\alpha-1}}{\theta!\alpha^{\theta}}\left((t-\theta h)^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\right)^{\theta} \times \tag{10}$$

$$\times\left\{(t-\theta h)^{\theta\alpha}H_{12}^{20}\left[\frac{x^2}{4(t-\theta h)^{\alpha}}\left|^{((\theta+1)\alpha,\alpha)}_{(\frac{1}{2},1),(1,1)}\right.\right]\right\},$$

в которой $H_{pq}^{mn}[...]$ – функция Фокса [3].

Исходя из (8)–(10), можно показать, что равенство

$$\nu_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\omega_1''(x), x \in J, \tag{11}$$

является функциональным соотношением между $\omega_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенным из «параболической» части D^+ области D на линию $t=0$.

Решение задачи Коши для уравнения (1) в области D^-, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t\to 0-} u(x,t)=\omega_2(x), \lim_{t\to 0-} u_t(x,t)=\nu_2(x), x\in J,$$

имеет [4] вид

$$u(x,t)=\left\{u_k(x,t),(x,t)\in \overline{D_k^-}(k=0,1,2,...)\right\}, \tag{12}$$

где

$$u_k(x,t)=\phi(x,t)H(x)+\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_{0}^{x-m\tau}\eta((x-m\tau)^2-\eta^2)^{m-1}\phi(\eta,t)d\eta, \tag{13}$$

а

$$\phi(x,t)=\frac{1}{2}\left[z^{\omega_2}(x-t)+z^{\omega_2}(x+t)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}z^{\nu_2}(\xi)d\xi, \tag{14}$$

причем

$$z^{\omega_2}(x)=\omega_2(x)H(x)+\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_{0}^{x-m\tau}\eta(x^2-(\eta+m\tau)^2)^{m-1}\omega_2(\eta)d\eta,$$
$$\gamma_m=\left(m!\Gamma(m)2^{2m-1}\right)^{-1},$$

а $z^{\nu_2}(x)$ соответствует $z^{\omega_2}(x)$ при замене $\omega_2(x)$ на $\nu_2(x)$.

Функциональное соотношение между $\omega_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесенное на линию $t=0$ из гиперболической части D^- области D, можно получить из (12)-(14), учитывая условие (3), которое имеет [4] форму

$$\begin{gathered}\nu_2(x)=\omega_2'(x)H(x)+\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\times\\ \times\int\limits_{0}^{x-m\tau}(x-m\tau-\eta)^{2(m-1)}\omega_2(\eta)d\eta+\delta_k(x), k\tau<x<(k+1)\tau,\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}\delta_k(x)={}&\rho_k'(x)H(x)\\ &-\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\gamma_m H(x-m\tau)\left\{\int\limits_{(k-m)\tau}^{x-m\tau}\eta(x^2-(\eta+m\tau)^2)^{m-1}\delta_{k-m}(\eta)d\eta+\right.\\ &\left.+\sum_{\theta=0}^{k-m+1}\int\limits_{\theta\tau}^{(\theta+1)\tau}\eta(x^2-(\eta+m\tau)^2)^{m-1}\delta_\theta(\eta)d\eta\right\},\end{aligned}$$

$$\rho_k(x) = 2\phi\left((x+k\tau)/2, r_k\left((x+k\tau)/2\right)\right), \quad \text{причем} \quad r_k(x) = k\tau - x,$$
$$\phi(x, r_k(x)) = \psi_k(x)H(x)$$
$$-\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\left\{\int\limits_{(k-m)\tau}^{x-m\tau}\eta((x-m\tau)^2-\eta^2)^{m-1}\phi(\eta, r_{k-m}(x))d\eta + \right.$$
$$\left. + \sum_{\theta=0}^{k-m+1}\int\limits_{\theta\tau}^{(\theta+1)\tau}\eta((x-m\tau)^2-\eta^2)^{m-1}\phi(\eta, r_\theta(x))d\eta\right\}.$$

Покажем, что однородная задача ($\psi_k(x) \equiv 0$) имеет тривиальное решение.

Оценим интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty}\omega_1(x)\nu_1(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} I_k$, где

$$I_k = \int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau}\omega_1(x)\nu_1(x)dx. \tag{16}$$

Учитывая в интеграле (16) функциональное соотношение (11) и $\omega_1(k\tau) = \omega_1((k+1)\tau) = 0$, интегрируя по частям, получим

$$I_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau}\omega_1(x)\omega_1''(x)dx = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau}\left(\omega_1'(x)\right)^2 dx \leqslant 0. \tag{17}$$

Значит, $I_k \leqslant 0$ и $I \leqslant 0$. Далее, в силу (4)–(5) и (6)–(7),

$$I = \int\limits_0^{+\infty}\omega_1(x)\nu_1(x)dx = \int\limits_0^{+\infty}\omega_2(x)\nu_2(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k,$$

где

$$I_k = \int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau}\omega_2(x)\nu_2(x)dx.$$

Покажем, что для гиперболической области D^- справедливо неравенство $I \geqslant 0$. Так как $\psi_k(x) \equiv 0$, то (15) можно записать в виде

$$\nu_2(x) = \omega_2'(x)H(x) + \sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_0^{x-m\tau}(x-\eta-m\tau)^{2(m-1)}\omega_2(\eta)d\eta. \tag{18}$$

При $k = 0$, т.е. когда $0 < x < \tau$, из (18) имеем $\nu_2(x) = \omega_2'(x)$, а потому

$$I_0 = \int\limits_0^{\tau}\omega_2(x)\nu_2(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau}\left((\omega_2(x))^2\right)_x' dx = 0. \tag{19}$$

Из (17), (19) получаем $\int\limits_0^\tau \left(\omega_1'(x)\right)^2 dx = 0$, т.е. $\omega_1'(x) \equiv 0, x \in (0;\tau)$ и, следовательно, $\omega_1(x) \equiv const, x \in (0;\tau)$. Но, $\omega_1(0) = \omega_1(\tau) = 0$, а потому $\omega_1(x) \equiv 0, x \in [0;\tau]$.

При $k = 1$, т.е. когда $\tau < x < 2\tau$, из (18), на основании $\omega_1(x) = \omega_2(x) = 0, x \in [0;\tau]$, имеем $\nu_2(x) = \omega_2'(x)$. Поэтому

$$I_1 = \int\limits_\tau^{2\tau} \omega_2(x)\nu_2(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_\tau^{2\tau} \left((\omega_2(x))^2\right)_x' dx = 0. \tag{20}$$

Из (16) и (20) следует равенство $\int\limits_\tau^{2\tau} \left(\omega_1'(x)\right)^2 dx = 0$, т.е. $\omega_1'(x) \equiv 0, x \in (\tau;2\tau)$ и, следовательно, $\omega_1(x) \equiv const, x \in (\tau;2\tau)$. Но $\omega_1(\tau) = \omega_1(2\tau) = 0$, а потому $\omega_1(x) \equiv 0, x \in [\tau;2\tau]$.

Аналогично можно показать, что $\omega_1(x) \equiv 0, x \in \overline{J}$. Это, согласно (11), (8), (12), означает, что $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \overline{D}$, что и доказывает единственность решения задачи.

3. Существование решения задачи. Для доказательства существования решения задачи сведем ее с помощью функциональных соотношений (11), (15), условий (4)-(5), (6)-(7) к интегро-дифференциально-разностному уравнению

$$\begin{gathered} \omega_1''(x) - \Gamma(\alpha)\omega_1'(x) = g_k(x) \equiv \Gamma(\alpha)\delta_k(x) + \\ + \Gamma(\alpha)\sum_{m=1}^k \gamma_m H(x - m\tau)\int\limits_0^{x-m\tau} (x - m\tau - \eta)^{2(m-1)}\omega_1(\eta)d\eta, \quad k\tau < x < (k+1)\tau \end{gathered} \tag{21}$$

и условиям

$$\omega_1(k\tau) = \psi_k(k\tau); \omega_1((k+1)\tau) = \psi_{k+1}((k+1)\tau), k = 0, 1, 2, ... \quad . \tag{22}$$

Единственное решение задачи (21)–(22) имеет вид

$$\omega_1(x) = A_{1k}\psi_k(k\tau) + A_{2k}\psi_{k+1}((k+1)\tau) - \int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} g_k(t)G_k(x,t)dt, \ k\tau \leqslant x \leqslant (k+1)\tau, \tag{23}$$

где

$$A_{1k} = \frac{sh\left[((k+1)\tau - x)\Gamma(\alpha)/2\right]}{sh\left[\tau\Gamma(\alpha)/2\right]} exp\left[(x - k\tau)\Gamma(\alpha)/2\right],$$

$$A_{2k} = \frac{sh\left[(x - k\tau)\Gamma(\alpha)/2\right]}{sh\left[\tau\Gamma(\alpha)/2\right]} exp\left[(x - (k+1)\tau)\Gamma(\alpha)/2\right],$$

$$G_k(x,t) = \frac{2exp\left[((k+1)\tau - t)\Gamma(\alpha)/2\right]}{\Gamma(\alpha)sh\left[\tau\Gamma(\alpha)/2\right]exp\left[((k+1)\tau - x)\Gamma(\alpha)/2\right]} \times$$

$$\times \begin{cases} \mathrm{sh}\left[((k+1)\tau - x)\Gamma(\alpha)/2\right]\mathrm{sh}\left[(t - k\tau)\Gamma(\alpha)/2\right], k\tau < t < x, \\ \mathrm{sh}\left[((k+1)\tau - t)\Gamma(\alpha)/2\right]\mathrm{sh}\left[(x - k\tau)\Gamma(\alpha)/2\right], x < t < (k+1)\tau. \end{cases}$$

Равенство (23) представляет собой рекуррентное соотношение для получения решений $\omega_1(x)$ при $k\tau \leqslant x \leqslant (k+1)\tau$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ с учетом выражений для $g_k(x)$ из (21).

Подставляя (23) в (9), получаем явное решение $u(x,t)$ в области D^+.

Учитывая (23) в (11), найдем $\nu_1(x)$, а на основании (12) решение $u(x,t)$ в области D^-. Используя явный вид решений в областях D^+ и D^-, непосредственно проверяется выполнение краевых условий (2)-(3) и условий сопряжения (4)-(5), а также принадлежность полученного решения поставленной задачи классу искомых функций $u(x,t)$.

Это завершает доказательство существования решения исходной задачи.

Список литературы

[1] *С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Высшая школа, 1987.

[2] *Е. А. Зарубин.* Задача Коши для дифференциально- разностного уравнения диффузии дробного порядка по времени. Вестник науки. Орел: ОГУ, 2005. Вып. 4. С. 73–79.

[3] *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.

[4] *А.Н. Зарубин.* Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орел: ОГУ, 1999. 225 с.

НЕТЕРОВЫ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОДУ С СИНГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Л.И. Каранджулов

Технический Универсистет-София, Болгария, P.O.Box 384, 1000 Sofia, Bulgaria

e-mail: likar@tu-sofia.bg

1. Постановка задачи и предварительные результаты. В этом работе рассматривается поведение решений при $\varepsilon \to 0$ линейных краевых задач

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon A_1(t)x + \varphi(t), \quad t \in [a,b], \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{1}$$

$$l(x) = h, \quad h \in \mathbf{R}^m, \tag{2}$$

где коэфициенты системы (1), (2) подчиним условиям:

У$_1$) A – постоянная $n \times n$ матрица, собственные числа таковы, что $\lambda_i = 0$, $i = \overline{1,k}$, $k < n, Re\lambda_i < 0$, $i = \overline{k+1,n}$, причем нулевому собственному числу соответствует k линейно независимых собственных векторов матрицы A.

У$_2$) $A_1(t)$ – $(n \times n)$ матрица, $A_1(t) \in C^\infty[a,b]$, $\varphi(t)$ – $n-$мерная вектор-функция, такая, что $\varphi(t) \in C^\infty[a,b]$;

У$_3$) l – m-мерный ограниченный векторный функционал $l = col(l_1, \ldots, l_m)$, $l \in (x : C[a,b] \to \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$;

У$_4$) Вырожденная при $\varepsilon = 0$ система (1) $Ax_0 + \varphi(t) = 0$ разрешима относительно x_0.

Условие У$_1$) показывает, что рассматриваем критический случай [3].

Пусть матрица A^+ единственная $(n \times n)$-псевдообратная по Муру-Пенроузу к матрице A [5], [6]. Через P_A и P_{A^*} обозначаем ортопроекторы $P_A : R^n \to \ker(A)$, $P_{A^*} : R^n \to \ker(A^*)$, $A^* = A^T$. Из условия У$_1$) следует, что $\operatorname{rank} A = n - k$ и $\operatorname{rank} P_A = \operatorname{rank} P_{A^*} = n - (n - k) = k$. Через P_{A_k} будем обозначать $(n \times k)$-матрицу, которая составлена из k линейно независимых столбцов матрицы P_A, и через $P_{A_k^*}$ – $(k \times n)$-матрицу, составленную из k линейно независимых строк матрицы P_{A^*}.

Мы рассматриваем задачу (1), (2) в классе непрерывно дифференцируемых функций. Тогда область определения $D(L_\varepsilon)$ оператора $(L_\varepsilon x)(t) = \varepsilon \frac{dx}{dt} - Ax(t) - \varepsilon A_1(t)x(t)$ состоит из непрерывно-дифференцируемых на $[a, b]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям (2). Вырожденная система $Ax_0(t) + \varphi(t) = 0$ разрешима относительно x_0 тогда и только тогда, когда $P_{A^*}\varphi(t) = 0$ для каждого $t \in [a, b]$. В этом случае решение системы имеет вид

$$x_0(t) = P_{A_k}\alpha_0(t) - A^+\varphi(t), \tag{3}$$

где $\alpha_0(t)$ – произвольная k-мерная вектор-функция.

Можно считать, что $x_0(t)$ не принадлежит области $D(L_\varepsilon)$ и условие (2) для x_0 не выполнено.

Пусть система (1) имеет решение при произвольной $\varphi \in C^\infty[a, b]$. Тогда размерность ядра оператора L_ε равна размерности n системы (1) и граничная система (1), (2) будет иметь индекс $n - m : \operatorname{ind}[L_\varepsilon, l] = n - m$. Задача с нулевым индексом $m = n$ называется фредгольмовой. Задача с ненулевым индексом $m \neq n$ называется нетеровой. Можно сказать, что если размерность n дифференциальной системы (1) не совпадает с размерностью m векторного функционалом l, то задача (1), (2) является нетеровой [1].

Мы исследуем случай, когда $m \neq n$, т.е. исследуем нетерову краевую задачу. В работе получено условие разрешимости и построено асимптотическое представление решения задачи (1), (2) методом пограничных функций [2, 3]. Показано, что при определенных условиях краевая задача (1), (2) имеет решение с единственной граничной функцией в окрестности точки $t = a$. Решение $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ будет стремиться к одному из решений вырожденной системы (3) при $t \in (a, b]$.

Лемма 1. *Пусть для матрицы A выполнено условие У$_1$), а для вектор-функции $f(\tau) \in C[0, +\infty)$ – неравенство $\|f(\tau)\| < c_1 e^{-\alpha_1 \tau}$ при $\tau \geq 0$, $c_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$. Тогда существуют положительные постоянные c и β такие, что, система $dx/d\tau = Ax + f(\tau)$ имеет частное решение вида $x(\tau) = \int_0^\infty K(\tau, s)f(s)ds$, удовлетворяющее неравенству $\|x(\tau)\| \leq c \exp(-\gamma\tau)$, $\tau \geq 0$, где*

$$K(\tau, s) = \begin{cases} X(\tau)PX^{-1}(s) & \text{при} \quad 0 \leq s \leq \tau < \infty, \\ -X(\tau)(I - P)X^{-1}(s) & \text{при} \quad 0 < \tau < s \leq \infty. \end{cases}$$

Здесь P – спектральный проектор матрицы A на левую полуплоскость, а $X(\tau)$, – нормальная фундаментальная матрица однородной системы $\frac{dx}{d\tau} = Ax$, $\tau = \frac{t-a}{\varepsilon}$.

Доказательство леммы 1 проводится традиционным способом (см., например, [8] или леммы 2.1 из [4]).

Обозначим через $X_{n-k}(\tau)$ – $(m \times (n-k))$-подматрицу, которая получается из $X(\tau)$ и содержит только экспоненциально малые елементы (см. [7]). Пусть $D(\varepsilon) = l(X_{n-k})$ – $(m \times (n-k))$-матрица. Вид функционала l определяет структуру матрицы $D(\varepsilon)$. В работе [7] рассмотрен случай, когда матрицу $D(\varepsilon)$ можно представить в виде

$$D(\varepsilon) = D_0 + O\left(\exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right),$$

где $D_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} D(\varepsilon)$ – постоянная матрица, а $O\left(\exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right)$, $\alpha > 0$ – матрица соответствующей размерности, компоненты которой бесконечно малы по сравнению с произвольной степенью ε.

Если функционал содержит интегральные члены, то можно рассмотреть второй случай, когда

$$D(\varepsilon) = \overline{D}_0(\varepsilon) + \varepsilon\overline{D}_1(\varepsilon) + \dots + \varepsilon^s\overline{D}_s(\varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right), \tag{4}$$

где $\overline{D}_i(\varepsilon)$ – $(m \times (n-k))$-матрицы, $\alpha > 0$. Элементы матрицы $\overline{D}_i(\varepsilon)$ – непрерывные для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\overline{D}_i(\varepsilon) = D_i$. Доопределяем матрицы $\overline{D}_i(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ следующим образом: $\overline{D}_i(0) = D_i$. Тогда (4) принимает вид

$$D(\varepsilon) = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots + \varepsilon^s D_s + O\left(\varepsilon^q \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right), \tag{5}$$

где D_i – постоянные $(m \times (n-k))$ матрицы.

В этой работе мы рассматриваем случай (4). Тогда асимтотика решения (1), (2) строится иным способом и при других условиях, чем в [7].

Рассмотрим систему

$$C\dot{z}(t) = B(t)z(t) + l(t),\ t \in [a, b], \tag{6}$$

где

$$C = P_{A_k^*}P_{A_k},\ B(t) = P_{A_k^*}A_1(t)P_{A_k}, \tag{7}$$

а $l(t)$ – k-мерная вектор-функция такая, что $l(t) \in C^\infty[a, b]$.

Принимая во внимание условие $У_1$) и вид ортопроекторов, легко доказать невырожденность $(k \times k)$-матрицы C из (7). Дифференциальная система (6) всегда разрешима и имеет общее решение

$$z(t) = \Phi(t)\eta + \int_a^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)C^{-1}l(s)ds, \tag{8}$$

где $\Phi(t)$ – нормальная фундаментальная $(k \times k)$-матрица системы $\dot{z} = C^{-1}B(t)z$, η – произвольный k-мерный вектор.

2. Асимптотическое разложение. Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (x_i(t) + \Pi_i(\tau)),\quad \tau = \frac{t-a}{\varepsilon}, \tag{9}$$

где $x_i(t)$ и $\Pi_i(\tau))$ – неизвестные n-мерные вектор-функции. Через $\Pi_i(\tau))$ обозначены граничные функции в окрестности точки $t = a$. Они будут построенs так, что придостаточно малом на сегменте $[a, b]$ ε выполняются неравенства

$$\|\Pi_i(\tau))\| \le \gamma_i \exp(-\alpha_i \tau),\ \gamma_i > 0,\ \alpha_i > 0,\ i = 0, 1, 2, \cdots, \tau \ge 0. \tag{10}$$

Для определения коэффициентов $x_i(t)$ получаем систему

$$Ax_i(t) = f_i(t), \quad t \in [a, b], \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{11}$$

$$f_i(t) = \begin{cases} -\varphi(t) & \text{при} \quad i = 0, \\ (L_1 x_{i-1})(t) & \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

где L_1 – дифференциальный оператор $L_1(x(t)) = \frac{dx(t)}{dt} - A_1 x(t)$. Граничные функции $\Pi_i(\tau)$ определяются из краевых задач

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_i(\tau) = A\Pi_i(\tau) + \psi_i(\tau), \quad \tau \in [\tau_a, \tau_b], \quad \tau_b = \frac{b-a}{\varepsilon}, \tag{12}$$

$$l(x_i(\cdot)) + l(\Pi_i\left(\frac{(\cdot) - a}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} h, & \text{при} \quad i = 0, \\ 0 & \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\psi_i(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i = 0, \\ \sum\limits_{q=i-1}^{0} \frac{1}{q!}\tau^q A_1^{(q)}(a)\Pi_{i-1-q}(\tau) & \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Решение системы (11) при $i = 0$ имеет вид (3). Неизвестная k-мерная вектор-функция $\alpha_0(t)$ будет определяться из условия разрешимости системы (11) при $i = 1$.

Решение системы (12) при $i = 0$ имеет вид $\Pi_0(\tau) = X(\tau)c, \quad c \in R^n$. Для того чтобы выполнялось требование $\lim\limits_{\tau\to\infty} \Pi_0(\tau) = 0$ нужно положить в общем решении k компонент вектора c равными нулю. Поэтому решение $\Pi_0(\tau)$ примет вид

$$\Pi_0(\tau) = X_{n-k}(\tau)c_0, \quad c_0 \in R^{n-k}. \tag{14}$$

Подставляя (3) и (14) в краевое условие (13) при $i = 0$, получаем, что постоянный вектор c_0 и вектор-функция $\alpha_0(t)$ удовлетворяют уравнению

$$l_1(\alpha(\cdot)) + D(\varepsilon)c_0 = h_0, \tag{15}$$

где $l_1(\alpha(\cdot)) \equiv l(P_A\alpha(\cdot)),\ h_0 = h + l(A^+\varphi(\cdot))$ – m-мерный вектор-столбец.

Рассмотрим систему (11) при $i = 1$. Тогда $x_1(t)$ определяется из уравнения $Ax_1(t) = (L_1x_0)(t)$, условие разрешимости которого приводит, с учетом (15), к следующей краевой задаче для определения вектор-функции $\alpha_0(t)$:

$$\begin{aligned} &C\frac{d}{dt}\alpha_0(t) = B(t)\alpha_0(t) + g_0(t), \quad t \in [a, b], \\ &l_1(\alpha_0(\cdot)) + D(\varepsilon)c_0 = h_0, \end{aligned} \tag{16}$$

где C, $B(t)$ матрицы из (7), а $g_0(t) = -P_{A^*}(L_1A^+\varphi)(t)$.

Согласно (7) и (8) при $l(t) \equiv g_0(t)$ имеем

$$\alpha_0(t) = \Phi(t)\eta_0 + \int_a^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)C^{-1}g_0(s)ds,\ \eta_0 \in \mathbf{R^k}, \tag{17}$$

Подставляя (17) в краевое условие из (16) получим алгебраическую систему относительно η_0 и c_0

$$D(\varepsilon)c_0 + Q\eta_0 = \bar{h}_0, \tag{18}$$

где $Q = l_1(\Phi(\cdot))$ – $(m \times k)$-матрица, $\bar{h}_0 = h_0 - l\left(\int_a^{(\cdot)} \Phi(\cdot)\Phi^{-1}(s)C^{-1}g_0(s)ds\right) \in R^m$.

Вектор c_0 ищем в виде

$$c_0 = c_0(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s} c_{0j}\varepsilon^j,\ \ c_{0j} \in R^{n-k}. \tag{19}$$

Коэффициенты c_{0k} определим из (18).

Введем $((2s+1)m \times (s+1)(n-k))$-блочную матрицу

$$\begin{bmatrix} D_0 & & & & \\ D_1 & D_0 & & 0 & \\ D_2 & D_1 & D_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_s & D_{s-1} & D_{s-2} & \dots & D_0 \\ & D_s & D_{s-1} & \dots & D_1 \\ & & D_s & \dots & D_2 \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & D_s \end{bmatrix},$$

а также $(2s+1)m$-мерный вектор

$$b_i = \Bigg(b_{i0} - Q\eta_i, \underbrace{b_{i1}, \cdots, b_{is}}_{sm}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{sm}\Bigg)^T \quad \text{при } i = 0, 1, 2, \cdots,$$

где b_{ij} – постоянные m-мерные векторы, которые в дальнейшем принимают определенный вид, $\eta_i \in R^k,\ i = \overline{0, s}$.

Матрица M^+ состоит из $(2s+1)$ блоков из m столбцов. Через $[M^+]_m^1$ обозначим первый блок из m столбцов, а через $[M^+]_m^{2s}$ – остальные блоки. Пусть P_{M^*} – ортопроектор:$R^{(2s+1)m} \rightarrow \ker(M^*)$, которой представляет $((2s+1)m \times (2s+1)m)$-матрица, а $P_{M_d^*}$ – $(d \times (2s+1)m)$-матрица, которая состоит из d линейно независимых столбцов матрицы P_{M^*}. Через $\left[P_{M_d^*}\right]_m^1$ обозначим первый блок из m столбцов матрицы $P_{M_d^*}$, а через $\left[P_{M_d^*}\right]_m^s$ – следующие s блоков из m столбцов.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия:*

(a) $\operatorname{rank} M = (s+1)(n-k) < (2s+1)m,\ d = (2s+1)m - (s+1)(n-k)$;
(b) $\operatorname{rank} R = d = k\,(\det R \neq 0),\ R = \left[P_{M_d^*}\right]_m^1 Q - (d \times k)$ *– матрица;*
(c) $\left[P_{M_d^*}\right]_m^s (b_{i1}, B_{i2}, \cdots, b_{is})^T = 0,\ i = \overline{0,s}.$

Тогда из алгебраической системы

$$Mc_i = b_i, \tag{20}$$

где $c_i = (c_{i0}, \cdots, c_{is})^T,\ c_{ij} \in R^{n-k},\ i = 0, 1, \cdots$ *единственным образом определяются* $\eta_i,\ c_{i0}, \cdots, c_{is}$*:*

$$\eta_i = R^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_m^1 b_{i0}, \tag{21}$$

$$c_{ij} = \left\{\left[M^+\right]_m^1 \left(E_m - QR^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_m^1\right) b_{i0} + \left[M^+\right]_m^{2s} (b_{i1}, \cdots, b_{is})^T\right\}_{(n-k)_j}, \tag{22}$$

$j = \overline{0,s}.$

Замечание 1. Если $(b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{is})^T = (0, 0, \cdots, 0)^T$, условие (c) леммы превращается в тождество.

Замечание 2. Очевидно, векторы $c_{i0}, \cdots, c_{is}$ можно определить последовательно из системы (20). Тогда необходимо изменить условия леммы.

Замечание 3. Если $\operatorname{rank} M < \min((s+1)(n-k), (2s+1)m)$, то $c_{ij},\ j = \overline{0,s}$ определяются при других условиях.

Введем обозначения:

$$x_0(t) = P_(A_k)\Phi(t)R^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_m^1 \bar{h}_0 + \bar{x}_0, \tag{23}$$

где

$$\bar{x}_0(t) = P_{A_k}\int_a^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)C^{-1}g_0(s)ds - A^+\varphi(t) \tag{24}$$

и

$$\begin{aligned} x_i(t) &= P_(A_k)\Phi(t)R^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_m^1 b_{i0} + \overline{x}_i(t), \\ \Pi_i(\tau) &= X_{n-k}\sum_{j=0}^{s}\left\{[M^+]_m^1\left(E_m - QR^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_m^1\right) b_{i0} + \right. \\ &\quad \left. + [M^+]_m^{2s}(b_{i1}, \cdots, b_{is})^T\right\}_{(n-k)_j}\varepsilon^j + \overline{\Pi}_i(\tau), \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} \overline{x}_i(t) &= P_{A_k}\Phi(t)\int_a^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)C^{-1}g_i(s)ds + A^+(L_1x_{i-1})(t), \\ \overline{\Pi}_i(\tau) &= \int_0^\infty K(\tau, s)\psi_i(s)ds,\ i = 1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{26}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $У_1) – У_4)$ *и условия леммы 2. Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное решение, представимое формальным асимптотическим рядом вида (9). Коэффициенты разложения* $x_i(t), \Pi_i(\tau)$ *имеют вид (23)–(26). Граничные функции* $\Pi_i(\tau)$ *удовлетворяют неравенству (10). Это решение при* $\varepsilon \to 0$ *стремится к решению (23) вырожденной системы при* $t \in (a, b]$.

Замечание 4. Доказательство того, что для формального ряда (9) справедлива оценка

$$\|x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)\| \leqslant K\varepsilon^{n+1},\ K > 0, \quad \text{где}\ \ X_n(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \left[x_i(t) + \Pi_i(\tau)\right] \varepsilon_i$$

представляет самостоятельный интерес.

Список литературы

[1] *A.A. Boichuk and A.M. Samoilenko.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. Utrecht-Boston: VSP, 2004.

[2] *А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М: Наука, 1973.

[3] *А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М: Изд-во Моск. ун-та, 1978.

[4] *L.I. Karandjulov.* Asymptotic solution of definite class of singularly perturbed linear boundary value problem for ordinary differential equations. Annuaire de l'Universite de Sofia "St. Kliment Ohridski". Faculte de mathematiques et informatique. Livr 1 - Mathematiques et Macanique. 1997. T. 91. №1. P. 79–95.

[5] *M.Z. Nashed.* Generalize inverse and applications: New York, San Francisco, London: Acad. Press, 1967.

[6] *R. Penrose.* A generalize inverse for matrices. Proc. Cambrige Philos. Soc. 1955. V. 51. P. 406–413.

[7] *А.М. Самойленко, А.А. Бойчук, Л.И. Каранджулов.* Нетеровы краевые задачи с сингулярным возмущением. Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. №9. С. 1186 – 1193.

[8] *Ю.Л. Далекций, М.Г. Крейн.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ, ОБЛАДАЮЩЕЕ ОПЕРАТОРОМ РАССЕЯНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.И. Карюк, Т.В. Редькина

Ставропольский Государственный Университет

Операторное уравнение Лакса [1] имеет вид

$$L_t = [L, A] = LA - AL, \tag{1}$$

где операторы могут быть различной природы (дифференциальные, интегральные, матрицы, проектирующие и др.). Идея, лежащая в основе работы Лакса, заключается в том, что нелинейное операторное уравнение (1) эквивалентно системе линейных уравнений:

$$L\varphi = \mu\varphi, \qquad \varphi_t = -A\varphi,$$

где для оператора L поставлена спектральная задача (φ – собственная функция, μ – собственное значение оператора L), оператор A определяет эволюцию собственных функций по времени.

Рассмотрим частный случай, когда L, A - дифференциальные операторы первого порядка, заданные на некотором пространстве непрерывных и дифференцируемых функций и имеющие вид

$$L = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + u, \qquad A = \beta\frac{\partial}{\partial x} + v, \tag{2}$$

где $\alpha = (\alpha_{ij})$, $\beta = (\beta_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ – постоянные матрицы третьего порядка, $u(x,t) = (u_{ij})$, $v(x,t) = (v_{ij})$ – матрицы 3×3 с элементами $u_{ij}(x,t)$, $v_{ij}(x,t)$, $i, j = 1, 2, 3$.

Лемма 1. Правая часть уравнения Лакса (1) представляет собой дифференциальный оператор второго порядка вида:

$$[L, A] = [\alpha, \beta]\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ([u, \beta] + [v, \alpha])\frac{\partial}{\partial x} + ([u, v] + (\alpha v_x - \beta u_x)).$$

Следствие 1. Если матрицы α, β, u, v удовлетворяют следующим условиям

$$[\alpha, \beta] = 0, \quad [u, \beta] + [\alpha, v] = 0, \tag{3}$$

то коммутатор $[L, A]$ представляет собой оператор умножения

$$[L, A] = [u, v] + (\alpha v_x - \beta u_x).$$

Лемма 2. Условия (3) выполняются тогда и только тогда, когда имеют место равенства:

$$\sum_{k=1}^{3}(\alpha_{jk}\beta_{kj} - \beta_{jk}\alpha_{kj}) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{3}(u_{jk}\beta_{kj} - \beta_{jk}u_{kj} + \alpha_{jk}v_{kj} - v_{jk}\alpha_{kj}) = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{3}(\alpha_{jk}\beta_{km} - \beta_{jk}\alpha_{km}) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{3}(u_{mk}\beta_{kj} - \beta_{mk}u_{kj} + \alpha_{mk}v_{kj} - v_{mk}\alpha_{kj}) = 0,$$

где $j, m = 1, 2, 3$, $j \neq m$.

Замечание. При условии выполнения лемм 1 и 2 уравнение Лакса эквивалентно следующей системе:

$$u_{ij,t} = \sum_{k=1}^{3}(u_{ik}v_{kj} - v_{ik}u_{kj}) + \sum_{k=1}^{3}(\alpha_{ik}v_{kj,x} - \beta_{ik}u_{kj,x}),$$

где $i, j = 1, 2, 3$.

Теорема. Если выполняются условия $\alpha_{11} = -\alpha_{22} = -\alpha_{33}$, $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{13} = 0$, $\alpha_{23} = 0$, $\alpha_{21} \neq 0$, $\alpha_{31} \neq 0$, $\alpha_{32} \neq 0$, $\beta_{21} = k\alpha_{21}$, $\beta_{31} = k\alpha_{31}$, $\beta_{32} = k\alpha_{32}$, $k \neq 0$, $u_{12} \neq 0$, $u_{13} \neq 0$, $u_{13z} \neq 0$, $u_{23} \neq 0$, $v_{11} = -v_{22} = v_{33}$, то операторное уравнение Лакса (1) эквивалентно нелинейному уравнению с частными производными:

$$w_{x'z'} = \alpha e^{w}(w_{x'} + w_{z'} - w), \tag{4}$$

где α – постоянная.

Доказательство. При выполнении условий теоремы коэффициенты операторов (2) имеют вид:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & -\alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & -\alpha_{11} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 3k\alpha_{11} & 0 & 0 \\ k\alpha_{21} & k\alpha_{11} & 0 \\ k\alpha_{31} & k\alpha_{32} & k\alpha_{11} \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{22} + \frac{2}{k}v_{11} \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_{11} & ku_{12} & ku_{13} \\ ku_{21} + \alpha_{21}p & -v_{11} & ku_{23} \\ ku_{31} + \alpha_{31}p & ku_{32} + \alpha_{32}p & v_{11} \end{pmatrix},$$

где $p = \frac{1}{\alpha_{11}}\Big(2v_{11}+k(u_{22}-u_{11})\Big)$. Это дает выполнение лемм 1,2, следствия 1 и упомянутого выше замечания. Следовательно, уравнение Лакса эквивалентно системе дифференциальных уравнений (для компактной записи введено обозначение $2k\alpha_{11}\partial_x + \partial_t = \partial_z$):

$$u_{11z} + k\alpha_{11}u_{11x} - \alpha_{11}v_{11x} = p(\alpha_{21}u_{12} + \alpha_{31}u_{13}), \tag{5}$$

$$u_{12z} = p(\alpha_{32}u_{13} - 2\alpha_{11}u_{12}), \tag{6}$$

$$u_{13z} = -2\alpha_{11}u_{13}p, \tag{7}$$

$$u_{21z} = p\Big(\alpha_{21}(u_{22} - u_{11}) + \alpha_{31}u_{23} + 2\alpha_{11}u_{21}\Big) - \frac{k}{2}\alpha_{21}(u_{11} + u_{22})_x, \tag{8}$$

$$u_{22z} - k\alpha_{11}u_{22x} - \alpha_{11}v_{11x} = p(\alpha_{32}u_{23} - \alpha_{21}u_{12}), \tag{9}$$

$$u_{23z} = -\alpha_{21}u_{13}p, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} u_{31z} &= \alpha_{32}p_x - \frac{k}{2}\alpha_{31}(u_{11} + u_{22})_x \\ &+ \left(\alpha_{21}u_{32} - \alpha_{32}u_{21} + \alpha_{31}\Big(u_{22} - u_{11} + \frac{2}{k}v_{11}\Big) + 2\alpha_{11}u_{31}\right)p, \end{aligned} \tag{11}$$

$$u_{32z} = p\left(\alpha_{32}v_{11} - \alpha_{31}u_{12}\right) + \alpha_{32}\left(v_{11} - \frac{k}{2}\Big(u_{11} + u_{22}\Big)\right)_x, \tag{12}$$

$$\frac{2}{k}v_{11z} + u_{22z} - k\alpha_{11}u_{22x} - \alpha_{11}v_{11x} = -p\left(\alpha_{31}u_{13} + \alpha_{32}u_{23}\right), \tag{13}$$

где $p = \frac{1}{\alpha_{11}}\Big(2v_{11} + k(u_{22} - u_{11})\Big)$.

Покажем, что данную систему можно свести к одному нелинейному уравнению в частных производных. Функцию $u_{13}(x,t)$ будем считать отличной от нуля и постараемся выразить остальные неизвестные функции через нее. Из уравнения (7) системы путем деления на $u_{13}(x,t)$ получаем функцию $v_{11}(x,t)$:

$$v_{11} = \frac{k}{2}(u_{11} - u_{22}) - \frac{1}{2}(\ln u_{13})_z.$$

В результате подстановки найденного значения в систему уравнение (10) интегрируется, и функция $u_{23}(x,t)$ явно выражается через функцию
$u_{13}(x,t)$, а уравнение (6) представляет собой линейное уравнение, решая которое, определяется вид функции $u_{12}(x,t)$:

$$u_{23} = \frac{\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}u_{13}, \quad u_{12} = -\frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}u_{13}\ln u_{13}.$$

Находя разность уравнений (5) и (6), можно выразить сумму $\alpha_{11}k(u_{11}+u_{22})_x$, в результате чего система сводится к такому виду, что интегрирование по переменной z уравнений (5) и (9) становится возможным, следовательно, ранее неизвестные функции $u_{11}(x,t)$ и $u_{22}(x,t)$ определяются в явном виде:

$$u_{11}=\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{8\alpha_{11}^2}u_{13}\ln u_{13}+\frac{1}{2k}(\ln u_{13})_z-\frac{\alpha_{11}}{2}(\ln u_{13})_x,$$
$$u_{22}=-\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{8\alpha_{11}^2}u_{13}\ln u_{13}-\frac{1}{2k}(\ln u_{13})_z-\frac{\alpha_{11}}{2}(\ln u_{13})_x-\frac{1}{2\alpha_{11}}\Big(\alpha_{31}+\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\Big)u_{13}.$$

После подстановки найденных функций последнее равенство системы будет содержать только одну функцию $u_{13}(x,t)$:

$$\frac{1}{\alpha_{11}}\left(\alpha_{31}+\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{4\alpha_{11}}\right)u_{13z}-\frac{k}{2}\left(\alpha_{31}+\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\right)u_{13x}$$
$$+\frac{1}{k}(\ln u_{13})_{zz}-\alpha_{11}^2k(\ln u_{13})_{xx}-\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{4\alpha_{11}^2}u_{13}\ln u_{13}=0,$$

поэтому все прочие уравнения должны определять остальные неизвестные функции и это действительно так.

В восьмом уравнении выражается производная функции u_{32z}:

$$u_{32z}=k\frac{\alpha_{32}}{4\alpha_{11}}(A+B)u_{13z}+k\frac{\alpha_{32}}{4\alpha_{11}}\left(\frac{3\alpha_{21}\alpha_{32}}{8\alpha_{11}^2}-A-\frac{\alpha_{31}}{k\alpha_{11}}\right)u_{13z}\ln u_{13}-$$
$$-\alpha_{32}(\ln u_{13})_{xz}+k\frac{\alpha_{32}}{4}(\ln u_{13})_x(\ln u_{13})_z-k\alpha_{32}\Big(B+\frac{3\alpha_{21}\alpha_{32}}{8\alpha_{11}^2}\Big)u_{13x}-$$
$$-k\frac{3\alpha_{21}\alpha_{32}^2}{8\alpha_{11}^2}u_{13x}\ln u_{13}-k\frac{\alpha_{11}\alpha_{32}}{2}(\ln u_{13})_{xx}-kA\frac{\alpha_{32}}{4\alpha_{11}}u_{13z}(\ln u_{13})_z++\frac{\alpha_{32}}{4\alpha_{11}}(\ln u_{13})_z^2,$$

где для краткости записи введены обозначения постоянных

$$A=\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{4\alpha_{11}},\quad B=\frac{1}{2\alpha_{11}}\left(\alpha_{31}+\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\right).$$

Заметим, что во всех остальных уравнениях функция u_{32} входит только как прозводная по z, следовтельно, от этой функции можно избавиться путем подстановки.

Четвертое уравнение системы, полученной после предыдущей замены, становится линейным первого порядка относительно функции u_{21}, интегрируя которое находим ее явный вид:

$$u_{21}=\frac{\alpha_{21}}{2k\alpha_{11}}(\ln u_{13})_z+\frac{\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\left(\alpha_{31}+\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\right)u_{13}.$$

Седьмое равенство представляет уравнение второго порядка на функцию $u_{31}(x,t)$, но не содержащее ее в явном виде, поэтому оно допускает понижение и в дальнейшем его полное интегрирование:

$$u_{31z} = \frac{1}{2\alpha_{11}} \frac{(\ln u_{13})_z}{u_{13}} \left[-2kA^2 \int u_{13} u_{13x} \ln u_{13} dz - 2kA\alpha_{11}^2 \int u_{13} (\ln u_{13})_{xx} dz + \right.$$
$$+ \frac{kA^2}{2\alpha_{11}} \left(\ln u_{13} - \frac{1}{2} \right) u_{13}^2 - kA \left(2\alpha_{31} + \frac{3\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}} \right) \int u_{13} u_{13x} dz +$$
$$+ \frac{2A}{k} (u_{13z} - \ln u_{13}) + \frac{A}{\alpha_{11}} \left((k+2) \frac{\alpha_{31}}{2} + A(k+2) + \frac{\alpha_{31}^2}{A} \right) \frac{u_{13}^2}{2} -$$
$$\left. - \alpha_{32} u_{13} \left(\ln(\ln u_{13})_z \right)_x + \alpha_{32} \int \left(\ln(\ln u_{13})_z \right)_x du_{13} + \frac{\alpha_{31}}{k} u_{13} (\ln(\ln u_{13})_z)_z \right].$$

Таким образом, найдены восемь неизвестных функций v_{11}, u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{31}, u_{32} и система из девяти уравнений свелась к одному:

$$\frac{1}{\alpha_{11}} \left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{4\alpha_{11}} \right) u_z - \frac{k}{2} \left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}} \right) u_x + \frac{1}{k} (\ln u)_{zz}$$
$$- \alpha_{11}^2 k (\ln u)_{xx} - \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{4\alpha_{11}^2} u \ln u = 0,$$

где α_{ij} - постоянные элементы матрицы 3×3, функция $u = u_{13} \neq 0$, $u_{13z} \neq 0$, $u_{13x} \neq 0$.

Можно показать, что если выполнено одно из условий $\alpha_{31} = 0$ или $\alpha_{31} = -\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{3\alpha_{11}}$, то линейное преобразование $z' = \pm \alpha_{11} k z + x$, $x' = z \pm \frac{1}{\alpha_{11} k} x$, приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, Исключая эту возможность, положим $\alpha_{31} = -\frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}$ и для большей компактности записи дадим некоторым параметрам следующие значения: $\alpha_{11} = \frac{1}{k}$, $k = 2$.

После выполнения дополнительного преобразования

$$u(x', z') = e^{w(x', z')}, \quad x' = z + x, \quad z' = \frac{1}{5} (z - x)$$

получаем уравнение (4), где $\alpha = -(5/2)\alpha_{21}\alpha_{32}$. Теорема доказана.

Следствие. Уравнение (4) эквивалентно уравнению Лакса с операторами вида $L\varphi = \mu\varphi, \varphi_t = -A\varphi$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & -1/2 & 0 \\ \gamma & \alpha_{32} & -1/2 \end{pmatrix}, \; \beta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2\alpha_{21} & 1 & 0 \\ 2\gamma & 2\alpha_{32} & 1 \end{pmatrix}, \; u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{22} + v_{11} \end{pmatrix},$$

$$v = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} v_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} + \alpha_{21}(u_{22} - u_{11} + v_{11}) & -\frac{1}{2} v_{11} & u_{23} \\ u_{31} + \alpha_{21}\alpha_{32}(u_{22} - u_{11} + v_{11}) & u_{32} + \alpha_{32}(u_{22} - u_{11} + v_{11}) & \frac{1}{2} v_{11} \end{pmatrix},$$

где $\gamma = \alpha_{21}\alpha_{32}$,

$$v_{11} = \alpha_{21}\alpha_{32} e^w (2 + w), \quad u_{11} = \frac{1}{2} \left(\alpha_{21}\alpha_{32} w e^w + w_{z'} \right), \quad u_{12} = -\alpha_{32} w e^w, \quad u_{23} = \alpha_{21} e^w,$$

$$u_{13} = e^w, \quad u_{21} = 2\alpha_{21}^2 \alpha_{32} e^w + \frac{\alpha_{21}}{2} (w_{z'} + w_{x'}), \quad u_{22} = -\alpha_{21}\alpha_{32} e^w (\frac{1}{2} w + 2) - \frac{1}{2} w_{x'},$$

$$u_{31z} = w_z e^{-w} \left[-4A^2 \int e^{2w} (w+5) w_x dz + A^2 (2w + 11) e^{2w} - \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2} \times \right.$$
$$\left. \times \left(w + \int e^w w_{xx} dz - e^w (w + \ln w_z)_z \right) - \alpha_{32} \left(e^w (\ln w_z)_x - \int e^w (\ln w_z)_x dw \right) \right],$$

$$u_{32z} = \alpha_{21}\alpha_{32}^2 e^w \left[w_x (w + 5) - 2 w_z (w + 1) \right] + \frac{\alpha_{32}}{2} w_{xx},$$

где $z = 2x + t$, $z = \frac{1}{2}(x' + 5z')$, $x = \frac{1}{2}(x' - 5z')$.

Список литературы

[1] *П.Д. Лакс.* Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. Математика. 13:5. М.: Мир, 1969. С. 128–150.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ЗАДАНИЕМ УСЛОВИЙ ДИРИХЛЕ И ТРЕТЬЕГО РОДА НА РАЗНЫХ СТОРОНАХ РАЗРЕЗОВ*

В.В. Колыбасова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. 119899, Москва, Ленинские горы

В настоящей работе изучается краевая задача для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости, при этом на одной стороне разрезов задано условие Дирихле, а на другой – граничное условие третьего рода. С помощью потенциала простого слоя и неклассического углового потенциала [1] задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений с дополнительными условиями. Посредством регуляризации и дальнейших преобразований эта система сводится к векторному уравнению Фредгольма второго рода, которое оказывается однозначно разрешимым. Численные методы решения сингулярных интегральных уравнений, возникающих в рассматриваемой задаче, развиты в [2].

На плоскости $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ рассмотрим совокупность простых разомкнутых кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, не имеющих общих точек, в том числе и концов. Положим $\Gamma = \bigcup\limits_{n=1}^{N} \Gamma_n$. Предположим, что каждая кривая Γ_n параметризована длиной дуги s: $\Gamma_n = \big\{x\colon\ x = x(s) = \big(x_1(s), x_2(s)\big),\ \ s \in [a_n, b_n]\big\}$, $n = 1, \ldots, N$, так, что $a_1 < b_1 < \cdots < a_N < b_N$. Совокупность отрезков оси Os $\bigcup\limits_{n=1}^{N} [a_n, b_n]$ далее также будем обозначать Γ. Пусть $\tau_x = \big(x_1'(s), x_2'(s)\big)$ и $\mathbf{n}_x = \big(x_2'(s), -x_1'(s)\big)$ – векторы касательной и нормали к Γ в точке $x(s)$. Будем рассматривать Γ как совокупность разрезов. Через Γ^+ обозначим ту сторону контура Γ, которая остается слева при возрастании параметра s, а через Γ^- – противоположную сторону.

Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит классу гладкости $\mathbf{K}$, если

1) $u \in C^0\left(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma}\right) \cap C^2\left(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma\right)$ и $u(x)$ непрерывна на концах разрезов Γ;

2) $\nabla u \in C^0\left(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \setminus X\right)$, где X – множество точек плоскости, состоящее из концов Γ: $X = \bigcup\limits_{n=1}^{N} \big(x(a_n) \cup x(b_n)\big)$;

*Работа поддержана грантом РФФИ № 05-01-00050.

3) в окрестности любой точки $x(d) \in X$ для некоторых констант $\mathcal{C} > 0$, $\epsilon > -1$ выполняется неравенство

$$|\nabla u| \leqslant \mathcal{C}|x - x(d)|^{\epsilon}, \tag{1}$$

где $x \to x(d)$ и $d = a_n$ или $d = b_n$, $n = 1, \ldots, N$.

В определении класса $\mathbf{K}$ $u(x)$ и $\nabla u(x)$ непрерывно продолжимы на разрезы $\Gamma \setminus X$ слева и справа, но могут иметь скачок при переходе через $\Gamma \setminus X$.

Задача U. Найти функцию $u(x)$ из класса $\mathbf{K}$, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad k = \mathrm{const} \neq 0, \quad 0 \leqslant \arg k < \pi, \tag{2}$$

граничным условиям

$$u(x)|_{x(s)\in\Gamma^+} = f^+(s), \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x} - \beta(s)u(x)\right]\bigg|_{x(s)\in\Gamma^-} = f(s) \tag{4}$$

и условиям на бесконечности. Если $\arg k = 0$, то на бесконечности потребуем выполнение условий излучения Зоммерфельда

$$u = O\left(|x|^{-1/2}\right), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - iku(x) = o\left(|x|^{-1/2}\right), \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty.$$

Если $0 < \arg k < \pi$, то на бесконечности потребуем выполнения условий

$$u = o\left(|x|^{-1/2}\right), \qquad |\nabla u(x)| = o\left(|x|^{-1/2}\right), \qquad |x| \to \infty.$$

Считаем, что $\beta(s) \in C^0(\Gamma)$ удовлетворяет одному из дополнительных условий:

1) если $\arg k = 0$, то $\operatorname{Im}\beta(s) \leqslant 0$ для любого $s \in \Gamma$;

2) если $\arg k = \pi/2$, то $\beta(s) = \operatorname{Re}\beta(s) \geqslant 0$ для любого $s \in \Gamma$;

3) если $\operatorname{Re} k \neq 0$, $\operatorname{Im} k > 0$, то $(\operatorname{Re} k) \cdot \operatorname{Im}\beta(s) \leqslant 0$ для любого $s \in \Gamma$.

Все условия задачи $\mathbf{U}$ должны выполняться в классическом смысле. Частным случаем задачи $\mathbf{U}$ при $\beta(s) \equiv 0$ является задача Дирихле–Неймана, рассмотренная в [4]. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости были изучены в [1], [3].

Замечание. С учетом (3) условие (4) можно заменить эквивалентным условием

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\bigg|_{x(s)\in\Gamma^-} + \beta(s)\left[u(x)|_{x(s)\in\Gamma^+} - u(x)|_{x(s)\in\Gamma^-}\right] = f^-(s), \tag{5}$$

где

$$f^-(s) = f(s) + \beta(s)f^+(s). \tag{6}$$

С помощью энергетических тождеств и леммы Реллиха [5] можно доказать теорему 1.

Теорема 1. Если $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0,1]$, то задача $\mathbf{U}$ имеет не более одного решения.

Ниже будем считать, что

$$f^{+}(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma), \qquad f(s), \beta(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma), \qquad \lambda \in (0,1]. \tag{7}$$

Тогда из (6) получим $f^{-}(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma)$.

Под $\int\limits_{\Gamma} \ldots d\sigma$ будем понимать $\sum\limits_{n=1}^{N} \int\limits_{a_n}^{b_n} \ldots d\sigma$.

Вместо граничного условия (3) запишем эквивалентное

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \tau_x}\right|_{x(s)\in\Gamma^{+}} = \left(f^{+}\right)'(s), \tag{8}$$

$$u\big(x(a_n)\big) = f^{+}(a_n), \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Будем искать решение задачи $\mathbf{U}$ в виде

$$u[\mu,\nu](x) = T[\mu](x) + W[\nu](x), \tag{10}$$

где

$$T[\mu](x) = \frac{i}{4} \int\limits_{\Gamma} \mu(\sigma) V(x,\sigma)\, d\sigma$$

– угловой потенциал из [1, 3] для уравнения Гельмгольца (2), его ядро

$$V(x,\sigma) = \int\limits_{a_n}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \mathcal{H}_0^{(1)}\big(k|x - y(\xi)|\big)\, d\xi, \qquad \sigma \in [a_n, b_n], \qquad n = 1, \ldots, N,$$

$$W[\nu](x) = \frac{i}{4} \int\limits_{\Gamma} \nu(\sigma) \mathcal{H}_0^{(1)}\big(k|x - y(\sigma)|\big)\, d\sigma$$

– потенциал простого слоя, $\mathcal{H}_0^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка [6].

Будем искать $\mu(s)$, $\nu(s)$ в пространстве $C_q^{\omega}(\Gamma)$, $\omega \in (0,1]$, $q \in [0,1)$.

Будем говорить, что $\mathcal{F}(s) \in C_q^{\omega}(\Gamma)$, если $\mathcal{F}_0(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$, где $\mathcal{F}_0(s) = \mathcal{F}(s) \prod\limits_{n=1}^{N} |s - a_n|^q |s - b_n|^q$, и $\|\mathcal{F}(\cdot)\|_{C_q^{\omega}(\Gamma)} = \|\mathcal{F}_0(\cdot)\|_{C^{0,\omega}(\Gamma)}$.

Кроме того, функция $\mu(s)$ должна удовлетворять условиям

$$\int\limits_{a_n}^{b_n} \mu(\sigma)\, d\sigma = 0, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{11}$$

Используя результаты [1], можно проверить, что функция (10) удовлетворяет всем условиям задачи, кроме граничных. Чтобы удовлетворить граничным условиям, подставим (10) в (5), (8) и получим интегральные уравнения для $\mu(s)$ и $\nu(s)$ на Γ

$$\mu(s) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \nu(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - s} + \int\limits_{\Gamma} \mu(\sigma) v_1(s,\sigma)\, d\sigma + \int\limits_{\Gamma} \nu(\sigma) v_2(s,\sigma)\, d\sigma =$$

$$= 2\left(f^+\right)'(s), \qquad s \in \Gamma, \tag{12}$$

$$-\nu(s) - \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \mu(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - s} + \int\limits_\Gamma \nu(\sigma)v_3(s,\sigma)\,d\sigma - \int\limits_\Gamma \mu(\sigma)v_4(s,\sigma)\,d\sigma +$$

$$+ 2\beta(s)\rho[\mu](s) = 2f^-(s), \qquad s \in \Gamma, \tag{13}$$

где

$$v_1(s,\sigma) = \frac{1}{\pi}\frac{\cos\varphi_0\big(x(s),y(\sigma)\big)}{|x(s)-y(\sigma)|} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial s}V_0\big(x(s),\sigma\big),$$

$$v_2(s,\sigma) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\varphi_0\big(x(s),y(\sigma)\big)}{|x(s)-y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma - s}\right) + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial s}h\big(|x(s)-y(\sigma)|\big),$$

$$v_3(s,\sigma) = \frac{1}{\pi}\frac{\cos\varphi_0\big(x(s),y(\sigma)\big)}{|x(s)-y(\sigma)|} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}h\big(|x(s)-y(\sigma)|\big),$$

$$v_4(s,\sigma) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\varphi_0\big(x(s),y(\sigma)\big)}{|x(s)-y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma - s}\right) - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}V_0\big(x(s),\sigma\big),$$

$$V_0(x,\sigma) = \int\limits_{a_n}^{\sigma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}h\big(k|x-y(\xi)|\big)\,d\xi, \qquad h(z) = \mathcal{H}_0^{(1)}(z) - \frac{2i}{\pi}\ln\frac{z}{k},$$

$$\rho[\mu](s) = \int\limits_{a_n}^{s}\mu(\sigma)\,d\sigma, \qquad \sigma \in [a_n, b_n], \qquad n = 1,\ldots,N.$$

Через $\varphi_0(x,y)$ обозначен угол между вектором $\overrightarrow{xy}$ и направлением нормали $\mathbf{n}_x$. Угол $\varphi_0(x,y)$ считается положительным, если он отложен от $\mathbf{n}_x$ против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае. Кроме того, $\varphi_0(x,y)$ непрерывен при $x, y \in \Gamma$, если $x \neq y$. Согласно [1, 3] $v_3(s,\sigma) \in C^{0,\lambda}(\Gamma\times\Gamma)$ и $v_j(s,\sigma) \in C^{0,p_0}(\Gamma\times\Gamma)$ при j =1, 2, 4. Здесь $p_0 = \lambda$, если $0 < \lambda < 1$, и $p_0 = 1 - \varepsilon_0$ для любого $\varepsilon_0 \in (0,1)$, если $\lambda = 1$.

Уравнения (12), (13) представляют собой сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши [7].

Подставляя функцию (10) в условия (9), получим дополнительные уравнения для $\mu(s)$, $\nu(s)$

$$T[\mu]\big(x(a_n)\big) + W[\nu]\big(x(a_n)\big) = 0, \qquad n = 1,\ldots,N. \tag{14}$$

Произведем замену неизвестных функций $\mu(s)$, $\nu(s)$

$$\mu(s) = \big(\mu_1(s) + \nu_1(s)\big)/2, \qquad \nu(s) = \big(\mu_1(s) - \nu_1(s)\big)/2$$

и перейдем от уравнений (12), (13) к их сумме и разности. Тогда характеристическая часть каждого из полученных сингулярных интегральных уравнений содержит только одну неизвестную функцию. Регуляризируя полученную систему по схеме из [7], с учетом условий (11), (14) приходим к векторному интегральному уравнению второго рода и доказываем, что это уравнение фредгольмово, показываем, что однородное уравнение имеет только тривиальное решение, а значит, неоднородное уравнение однозначно разрешимо. Таким образом, система (11)–(14) однозначно разрешима.

Теорема 2. Если $\Gamma \in C^{2,\lambda}$ и выполнены условия (7), то решение задачи **U** существует, единственно и дается формулой (10), где $\mu(s)$, $\nu(s)$ – единственное решение системы (11)–(14) в $C^p_{3/4}(\Gamma)$, $p = \min\{1/4, \lambda\}$.

Решение задачи **U** удовлетворяет условию (1) с $\epsilon = -3/4$.

Список литературы

[1] *П.А. Крутицкий.* ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34. №8–9. С. 1237–1257.

[2] *И.К. Лифанов.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995.

[3] *П.А. Крутицкий.* ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34. №11. С. 1652–1665.

[4] *П.А. Крутицкий, К.В. Прозоров.* ДАН. 2004. Т. 398. №5. С. 602–606.

[5] *В.С. Владимиров.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

[6] *А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.

[7] *Н.И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В.И. Лагно***, С.В. Спичак***

$\star$ Полтавский государственный педагогический университет,

36000, Полтава, ул. Остроградского, 2

$*$ Институт математики НАН Украины, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3

Введение. Предметом изучения данной работы является групповая классификация квазилинейных двухмерных уравнений эллиптического типа

$$\Delta u = F(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

относительно алгебр Ли с нетривиальным фактором Леви.

В уравнении (1) $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ – двумерный оператор Лапласа, $u = u(x, y)$, F – произвольная гладкая функция в некоторой области пространства $W = \mathbb{R}^2 \times \underset{1}{V} = \langle x, y\rangle \times \langle u, u_x, u_y\rangle$. Функцию F считаем нелинейной хотя бы по одной из трех переменных u, u_x, u_y.

Теорема 1. *Группа инвариантности уравнения (1) генерируется инфинитезимальными операторами*

$$\mathrm{v} = a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y + c(x, y, u)\partial_u, \tag{2}$$

где функции a, b, c, F удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &a_y + b_x = 0, \quad a_x - b_y = 0,\\ &c_{xx} + c_{yy} + 2u_x c_{xu} + 2u_y c_{yu} + (u_x^2 + u_y^2)c_{uu} + (c_u - 2a_x)F =\\ &= aF_x + bF_y + cF_u + [c_x + u_x(c_u - a_x) - u_y b_x]F_{u_x} + [c_y + u_y(c_u - b_y) - u_x a_y]F_{u_y}. \end{aligned} \tag{3}$$

Групповую классификацию уравнения (1) проводим с точностью до эквивалентности, которую определяют преобразования из группы эквивалентности уравнения (1) (далее обозначаем ее $\mathcal{E}$). Группа $\mathcal{E}$ состоит из тех преобразований

$$\bar{x} = \alpha(x, y, u), \ \bar{y} = \beta(x, y, u), \quad v = \gamma(x, y, u), \quad \frac{D(\bar{x}, \bar{y}, v)}{D(x, y, u)} \neq 0,$$

которые сохраняют дифференциальную структуру уравнения (1), т.е трансформируют его в уравнение вида

$$v_{\bar{x}\bar{x}} + v_{\bar{y}\bar{y}} = \Phi(\bar{x}, \bar{y}, v, v_{\bar{x}}, v_{\bar{y}}).$$

Прямые вычисления показали, что выполняется следующее

Утверждение 1. *Группу $\mathcal{E}$ уравнения (1) образуют преобразования*

$$\bar{x} = \alpha(x, y), \ \bar{y} = \beta(x, y), \ v = \gamma(x, y, u), \tag{4}$$

где $\alpha_x = \epsilon\beta_y, \quad \alpha_y = -\epsilon\beta_x \ (\epsilon = \pm 1), \quad \alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 \neq 0, \ \gamma_u \neq 0.$

Также, имеет место следующая

Лемма 1. *Существует такие преобразования из группы $\mathcal{E}$, которые сводят оператор (2) к одному из следующих двух:*

$$\mathrm{v} = \partial_x; \quad \mathrm{v} = \partial_u. \tag{5}$$

Инвариантность относительно полупростых алгебр Ли операторов симметрии. Описание квазилинейных уравнений вида (1), которые допускают полупростые алгебры Ли, начинаем с классификации тех уравнений, алгебры инвариантности которых изоморфны простым классическим алгебрам Ли с наименьшей размерностью: $so(3)$ и $sl(2, \mathbb{R})$.

Теорема 2. *С точностью до эквивалентности существуют два класса квазилинейных уравнений вида (1), которые допускают алгебры Ли операторов симметрии изоморфных алгебре $so(3)$. Представители этих классов уравнений и соответствующие алгебры инвариантности таковы:*

$$\begin{aligned}
I.\ & \Delta u = \operatorname{ch}^{-2} y \tilde{F}(u, \omega), \quad \omega = (u_x^2 + u_y^2) \operatorname{ch}^2 y : \\
& so^1(3) = \langle \partial_x, \operatorname{sh} y \cos x \partial_x - \operatorname{ch} y \sin x \partial_y, - \operatorname{sh} y \sin x \partial_x - \operatorname{ch} y \cos x \partial_y \rangle;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
II.\ & \Delta u = \operatorname{ch}^{-2} y \tilde{F}(\xi \operatorname{ch} y, \eta \operatorname{ch} y), \\
& \xi = (u_x - \operatorname{th} y) \sin u + u_y \cos u, \quad \eta = (u_x - \operatorname{th} y) \cos u - u_y \sin u : \\
& so^2(3) = \langle \partial_x, \operatorname{sh} y \cos x \partial_x - \operatorname{ch} y \sin x \partial_y + \operatorname{ch} y \cos x \partial_u, \\
& - \operatorname{sh} y \sin x \partial_x - \operatorname{ch} y \cos x \partial_y - \operatorname{ch} y \sin x \partial_u \rangle.
\end{aligned}$$

Теорема 3. *С точностью до эквивалентности существуют два класса квазилинейных уравнений вида (1), которые допускают алгебры Ли операторов симметрии изоморфных алгебре $sl(2, \mathbb{R})$. Представители этих классов уравнений и соответст-*

вующие алгебры инвариантности таковы:

$$I.\ \Delta u = y^{-2}\tilde{F}(u,\omega), \quad \omega = y^2(u_x^2+u_y^2):$$
$$sl^1(2,\mathbb{R}) = \langle 2x\partial_x + 2y\partial_y, -(x^2-y^2)\partial_x - 2xy\partial_y, \partial_x\rangle;$$

$$II.\ \Delta u = y^{-2}\tilde{F}(v,\omega),\ v = (1-2yu_x)\cos 2u + 2yu_y \sin 2u,$$
$$\omega = 2yu_y\cos 2u - (1-2yu_x)\sin 2u:$$
$$sl^2(2,\mathbb{R}) = \langle 2x\partial_x + 2y\partial_y, -(x^2-y^2)\partial_x - 2xy\partial_y + y\partial_u, \partial_x\rangle.$$

Далее, в соответствие с известной теоремой Картана [4] любую полупростую действительную алгебру Ли можно разложить в прямую сумму попарно ортогональних простых алгебр Ли и это разложение единственно (с точностью до изоморфизма). Также известно (см., например, [4]), что в теории абстрактных алгебр Ли над полем $\mathbb{R}$ различают четыре типа классических простых алгебр Ли:

1) тип $A_{n-1}(n>1)$, который содержит четыре действительных формы алгебры $sl(n,C)$: $su(n)$, $sl(n,\mathbb{R})$, $su(p,q)$ $(p+q=n, p\geq q), su^*(2n)$;
2) тип $D_n(n>1)$ содержит три действительных формы алгебры $so(2n,C): so(2n), so(p,q)\ (p+q=2n, p\geq q), so^*(2n)$;
3) тип $B_n(n>1)$ содержит две действительных формы алгебры $so(2n+1,C)$: $so(2n+1)$, $so(p,q)$ $(p+q=2n+1, p>q)$;
4) тип $C_n(n\geq 1)$ содержит три действительных формы алгебры $sp(n,C): sp(n), sp(n,\mathbb{R}),\ sp(p,q)\ (p+q=n, p\geq q)$.

Кроме того, существуют специальные случаи простых действительных алгебр: G_1, F_4, E_6, E_7, E_8.

Теорема 4. *В рамках сформулированной задачи, все уравнения, которые допускают полупростые группы локальных преобразований, исчерпываются $SO(3)$- и $SL(2,\mathbb{R})$-инвариантными уравнениями, описанными в теоремах 2 и 3.*

Идея доказательства. Поскольку $su^*(4)\sim so(5,1)$, а алгебра $so(5,1)$ содержит как подалгебру алгебру $so(4)$, то в классе операторов (2) алгебры типов A_n и D_n $(n>1)$ не имеют реализаций, отличных от полученных в теоремах 2 и 3.

Не имеют других реализаций и алгебры типов B_n $(n>1)$ и C_n $(n\geq 1)$. Действительно, уже для $n=2$ алгебры типа B_n содержат подалгебры $so(4)$ и $so(3,1)$. Также, имеют место такие соотношения: $sp(2,\mathbb{R})\sim so(3,2)$ (подалгеброй $so(3,2)$ является $so(3,1)$), $sp(1,1)\sim so(4,1)$ (подалгеброй $so(4,1)$ является $so(4)$), $sp(2)\sim so(5)$ (подалгеброй $so(5)$ является $so(4)$).

Остается рассмотреть случаи исключительных полупростых действительных алгебр Ли, которые относятся к одному из пяти типов [4]: G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. Поскольку их рассмотрение проводится аналогично, то остановимся лишь на первом типе этих алгебр, размерность которых является наименьшей, равной 14. Тип G_2 содержит одну компактную действительную форму g_2 и одну некомпактную форму g_2'. Поскольку $g_2\cap g'_2\sim su(2)\oplus su(2)\sim so(4)$, а алгебра $so(4)$ не имеет реализаций в заданном классе операторов, то в этом классе операторов нет реализаций алгебр g_2 и g_2'.

Инвариантность относительно разложимых алгебр. Далее, мы исследуем существование уравнений вида (1), алгебры инвариантности которых имеют структуру $S \oplus N$, т.е. справедливы соотношения

$$[S, S] \subset S, \quad [N, N] \subset N, \quad [S, N] = 0. \tag{6}$$

Здесь S – полупростая алгебра (фактор Леви), N – разрешимая алгебра. Возможные реализации полупростых алгебр S найдены в теоремах 2 и 3. Поэтому нам, исходя из третьего условия (6), остается описать в классе операторов (2) всевозможные реализации разрешимых алгебр N, которые бы удовлетворяли условиям сформулированной задачи.

Приведем результат такого исследования.

Теорема 5. *В рамках сформулированной задачи, с точностью до эквивалентности, существует шесть классов нелинейных уравнений вида (1), максимальные алгебры инвариантности которых есть алгебры Ли операторов симметрии с нетривиальным фактором Леви. Представители этих классов и соответствующие максимальные алгебры инвариантности имеют вид:*

$$1)\ \Delta u = \operatorname{ch}^{-2} y \tilde{F}(\omega), \quad \omega = (u_x^2 + u_y^2) \operatorname{ch}^2 y : so^1(3) \oplus \langle \partial_u \rangle;$$

$$2)\ \Delta u = \operatorname{ch}^{-2} y \tilde{F}(\omega), \quad \omega = (u_x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)^2 + u_y^2 \operatorname{ch}^2 y : so^2(3) \oplus \langle \partial_u \rangle;$$

$$3)\ \Delta u = y^{-2} \tilde{F}(\omega), \quad \omega = (u_x^2 + u_y^2) y^2 : sl^1(2, \mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle;$$

$$4)\ \Delta u = y^{-2} \tilde{F}(\omega), \quad \omega = 4y^2 u_y^2 + (1 - 2yu_x)^2 : sl^2(2, \mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle;$$

$$5)\ \Delta u = \lambda \operatorname{ch}^{-1} y \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \lambda \neq 0 : so^1(3) \oplus \langle \partial_u, u\partial_u \rangle;$$

$$6)\ \Delta u = \lambda y^{-1} \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \lambda \neq 0 : sl^1(2, \mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u, u\partial_u \rangle.$$

Инвариантность относительно неразложимых алгебр. Мы исследовали существование уравнений вида (1), алгебры инвариантности которых имеют размерность меньше 9 и изоморфные полупрямой сумме $S \subset\!\!\!\!+ N$ (полупростой и разрешимой алгебр), для которых выполняются соотношения

$$[S, S] \subset S, \quad [N, N] \subset N, \quad [S, N] \subset N. \tag{7}$$

В этих исследованиях мы использовали результаты работы [5], в которой проведена классификация алгебр Ли, размерность которых не превышает восьми и фактор Леви которых совпадает с алгебрами $so(3)$ и $sl(2, \mathbb{R})$.

В результате получено утверждение, что не существует нелинейных уравнений (1), чьи алгебры инвариантности имели бы описанную структуру.

Полную групповую классификацию рассматриваемых уравнений относительно неразложимых алгебр Ли операторов симетрии мы сможем осуществить после того, как проведем соответствующую классификацию уравнений, алгебры инвариантности которых являются разрешимыми. Эта задача будет рассмотрена в ближайшее время.

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[2] Zhdanov R.Z. and Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source. J. Phys. A: Math. Gen. 1999.V. 32. P. 7405–7418.

[3] Basarab–Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations Acta Appl. Math. 2001. V. 69, №1. P. 43–94.

[4] Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1980.

[5] Turkowski P. Low–dimensional real Lie algebras. J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 2139–2144.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ГУРСА И ДАРБУ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШЕННО-СОСТАВНОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

О.В. Лаштабега

Орловский государственный университет, 302026, Орел, ул. Комсомольская, 95

Уравнение

$$TFu(x,y)=0, \tag{1}$$

где $F\equiv L-H\left(x-\tau\right)R_x^\tau-\operatorname{sgn}\left(x\right)H\left(y-h\right)R_y^h$, $L\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\operatorname{sgn}\left(xy\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $T\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $H\left(t\right)$ – функция Хевисайда, $R_x^\tau\left(R_y^h\right)$ – оператор сдвига по переменной $x(y)$: $R_x^\tau q\left(x,y\right)=q\left(x-\tau,y\right)$ $\left(R_y^h q\left(x,y\right)=q\left(x,y-h\right)\right)$, $0<h$, $\tau\equiv const$, рассмотрим в области $D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup I_1\cup I_2$, где $D_1=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}D_{1k}$, $D_2=\bigcup\limits_{l=0}^{\infty}D_{2l}$ и $D_3=\left\{(x,y):x>0,y>0\right\}$ – гиперболические и эллиптическая части области D, причем

$$D_{1k}=\left\{(x,y):k\tau-y<x<\left(k+1\right)\tau+y,\ -\frac{\tau}{2}<y<0\right\},$$

$$D_{2l}=\left\{(x,y):\ -\frac{h}{2}<x<0,lh-x<y<\left(l+1\right)h+x\right\},\ \text{а}$$

$$I_1=\left\{(x,y):x>0,y=0\right\},\ I_2=\left\{(x,y):x=0,y>0\right\}.$$

Регулярным решением уравнения (1) в области D будем называть функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) из класса $C\left(\bar{D}\right)\cap C^1\left(D\right)\cap C^4\left(D\setminus\left(J_1\cup J_2\right)\right)$, причем третьи производные в точке (0,0) могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы.

Для решения уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача SS. Найти в области D регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty}u(x,y)=0,\ x>0,\ y>0, \tag{2}$$

$$u(x,y)|_{y=k\tau-x}=\psi_{1k}(x),\ k\tau\leqslant x\leqslant(2k+1)\frac{\tau}{2}, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{y=k\tau-x} = \varphi_{1k}(x),\ k\tau \leqslant x \leqslant (2k+1)\frac{\tau}{2}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{y=x-(k+1)\tau} = \alpha_{1k}(x),\ (2k+1)\frac{\tau}{2} \leqslant x \leqslant (k+1)\tau, \tag{5}$$

$$u(x,y)|_{x=lh-y} = \psi_{2l}(y),\ lh \leqslant y \leqslant (2l+1)\frac{h}{2}, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{x=lh-y} = \varphi_{2l}(y),\ lh \leqslant y \leqslant (2l+1)\frac{h}{2}, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{x=y-(l+1)h} = \alpha_{2l}(y),\ (2l+1)\frac{h}{2} \leqslant y \leqslant (l+1)h, \tag{8}$$

где n – внутренняя нормаль, $\psi_{jp}(t)$, $\varphi_{jp}(t)$, $\alpha_{jp}(t)$, $j=1,2$, $p=k,l$ – трижды непрерывно дифференцируемые функции, причем

$$\varphi'_{1k}\left((2k+1)\tau/2\right) = -\alpha'_{1k}\left((2k+1)\tau/2\right), \quad \varphi'_{2l}\left((2l+1)h/2\right) = -\alpha'_{2l}\left((2l+1)h/2\right),$$

$$\psi_{10}(0)=\psi_{20}(0), \varphi_{1k}(k\tau)=\alpha_{1(k-1)}(k\tau), \varphi_{2l}(lh)=\alpha_{2(l-1)}(lh)(k,l=1,2,...);$$

$$\lim_{p\to\infty}\max_{\left[\xi p,(2p+1)\frac{\xi}{2}\right]}|\psi_{jp}(t)|=0,\quad \lim_{p\to\infty}\max_{\left[\xi p,(2p+1)\frac{\xi}{2}\right]}|\varphi_{jp}(t)|=0,\quad \lim_{p\to\infty}\max_{\left[(2p+1)\frac{\xi}{2},(p+1)\xi\right]}|\alpha_{jp}(t)|=0,$$

$p=k,l$; $\xi=\tau,h$; $j=1,2$; и выполняются условия сопряжения

$$\begin{array}{ll}
u(x,-0)=u(x,+0), & u(-0,y)=u(+0,y),\\
u_y(x,-0)=u_y(x,+0), & u_x(-0,y)=u_x(0+,y),\\
u_{yy}(x,-0)=-u_{yy}(x,+0), & u_{xx}(-0,y)=-u_{xx}(+0,y),\\
u_{yyy}(x,-0)=-u_{yyy}(x,+0), & u_{xxx}(-0,y)=-u_{xxx}(+0,y).
\end{array}$$

Задача SS будет полностью решена, если определить функции

$$\omega_1(x)=u(x,0) \text{ или } \nu_1(x)=u_y(x,0) \text{ и} \tag{9.1)[(9.2)}$$

$$\omega_2(y)=u(0,y) \text{ или } \nu_2(y)=u_x(0,y) \tag{10.1)[(10.2)}$$

Положив

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\operatorname{sgn}(xy)\frac{\partial^2}{\partial y^2}-H(x-\tau)R_x^\tau-\operatorname{sgn}(x)H(y-h)R_y^h\right)u(x,y)=v(x,y),$$

уравнение (1) запишем в виде систем:

а) если $(x,y)\in D_1$, то
$$\begin{cases} u_{xx}-u_{yy}-H(x-\tau)u(x-\tau,y)=v(x,y), & (11)\\ v_{xx}-v_{yy}=0, & (12)\end{cases}$$

б) если $(x,y)\in D_2$, то
$$\begin{cases} u_{xx}-u_{yy}+H(y-h)u(x,y-h)=v(x,y), & (13)\\ v_{xx}-v_{yy}=0, & (14)\end{cases}$$

в) если $(x,y)\in D_3$, то
$$\begin{cases} u_{xx}-u_{yy}-H(x-\tau)u(x-\tau,y)- & \\ \qquad -H(y-h)u(x,y-h)=v(x,y), & (15)\\ v_{xx}-v_{yy}=0. & (16)\end{cases}$$

Для решения задачи необходимо найти функцию $v(x,y)$. В областях D_1 и D_2 функция $v(x,y)$ определяется как решение первой задачи Гурса для уравнений (12), (14), а в области D_3 как решение краевой задачи для уравнения (16). Искомая же функция $u(x,y)$ будет определяться из решения первой задачи Дарбу в областях D_1 и D_2 для уравнений (11), (13) и из решения задачи Неймана-Дирихле в области D_3 для уравнения (15).

Начально-краевая задача для уравнения (1) в области D_1. Для решения уравнения (1) в области D_1, записанного в виде системы (11)-(12) при условиях (3)-(5), (9.1), $k\tau < x < (k+1)\,\tau$, $k = 0, 1, 2, ...$ ставятся следующие задачи:

Первая задача Гурса. Найти функцию $v(x,y)$, являющуюся решением уравнения (12) в классе $C\left(\overline{D_1}\right) \cap C^2\left(D_1\right)$, которая удовлетворяет условиям:

$$v(x,y)\Big|_{y=k\tau-x} = \sqrt{2}\varphi'_{1k}(x) - H(x-\tau)\psi_{1(k-1)}(x-\tau),$$
$$v(x,y)\Big|_{y=x-(k+1)\tau} = -\sqrt{2}\alpha'_{1k}(x) - H(x-\tau)u_{k-1}(x-\tau, x-(k+1)\tau),$$

причем $\varphi'_{1k}\left(\frac{(2k+1)\tau}{2}\right) = -\alpha'_{12}\left(\frac{(2k+1)\tau}{2}\right)$, $k = 0, 1, 2, ...$

Условия, накладываемые на функцию $v(x,y)$, определяются с помощью уравнения (11), условий (4), (5), $u(x,y)|_{y=(k-1)\tau-x} = \psi_{1(k-1)}(x-\tau)$ и решения $u(x,y) = u_{k-1}(x,y)$, где $(k-1)\tau \leqslant x \leqslant k\tau$, $k = 1, 2, 3, ...$

Первая задача Дарбу. Найти функцию $u(x,y)$, являющуюся решением уравнения (11) в классе $C\left(\overline{D_1}\right) \cap C^2\left(D_1\right)$, которая удовлетворяет условиям (3), (9.1).

Решением первой задачи Гурса является функция

$$v(x,y) = \left\{v_k(x,y),\, k\tau \leqslant x \leqslant (k+1)\tau,\, k = 0, 1, 2, ...\right\},$$

где

$$v_k(x,y) = \sqrt{2}\varphi'_{1k}\left(\frac{x-y+k\tau}{2}\right) - \sqrt{2}\alpha'_{1k}\left(\frac{x+y+(k+1)\tau}{2}\right) +$$
$$+\sqrt{2}\alpha'_{1k}\left((2k+1)\frac{\tau}{2}\right) - H(x-\tau)\left(\psi_{1(k-1)}\left(\frac{x-y+(k-2)\tau}{2}\right) -\right.$$
$$\left.-\psi_{1(k-1)}\left(\frac{(2k-1)\tau}{2}\right) + u_{k-1}\left(\frac{x+y+(k-1)\tau}{2}, \frac{x+y-(k+1)\tau}{2}\right)\right)$$

когда $(x,y) \in D_{1k}$.

Решением первой задачи Дарбу является функция

$$u(x,y) = \left\{u_k(x,y), k\tau \leqslant x \leqslant (k+1)\tau, k = 0, 1, 2, ...\right\},$$

где

$$u_k(x,y)=\psi_{1k}\left(\frac{x-y+k\tau}{2}\right)-\psi_{1k}\left(\frac{x+y+k\tau}{2}\right)+\omega_1\left(x+y\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{-\frac{x-y-k\tau}{2}}dt\int\limits_{x-y+t}^{k\tau-t}\left[H(\xi-\tau)u_{k-1}\left(\xi-\tau,t\right)+v_k\left(\xi,t\right)\right]d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{-\frac{x+y-k\tau}{2}}dt\int\limits_{x+y+t}^{k\tau-t}\left[H(\xi-\tau)u_{k-1}\left(\xi-\tau,t\right)+v_k\left(\xi,t\right)\right]d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{y}dt\int\limits_{x-(y-t)}^{x+(y-t)}\left[H(\xi-\tau)u_{k-1}\left(\xi-\tau,t\right)+v_k\left(\xi,t\right)\right]d\xi,\ (x,y)\in D_{1k}.$$

При построении решения поставленной задачи использовался метод шагов.

Дифференцируя $u_k(x,y)$ по y, и полагая в полученном выражении $y=0$, с учетом условия (9.2) получим основное функциональное соотношение между функциями $\omega_1\left(x\right)$ и $\nu_1\left(x\right)$ перенесенное из области D_1 на линию $y=0$:

$$\omega_1'\left(x\right)-\psi_{1k}'\left(\frac{x+k\tau}{2}\right)+\int\limits_0^{-\frac{x-k\tau}{2}}F_k\left(x+t,t\right)dt=\nu_1\left(x\right),$$

где $F_k\left(p,q\right)=v_k\left(p,q\right)+H\left(p-\tau\right)u_{k-1}\left(p-\tau,q\right)$, $k=0,1,2,....$

Начально-краевая задача для уравнения (1) в области D_2. Решение уравнения (1) в области D_2, строится аналогично, тому, как было рассмотрено в предыдущем пункте. Оно будет определяться функцией

$$u(x,y)=\left\{u_l(x,y),\, lh\leqslant y\leqslant(l+1)h,\, l=0,1,2,...\right\},$$

где

$$u_l(x,y)=\psi_{2l}\left(\frac{x-y+l\tau}{2}\right)-\psi_{2l}\left(\frac{x+y+lh}{2}\right)+\omega_2\left(x+y\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{-\frac{x-y-lh}{2}}dt\int\limits_{x-y+t}^{lh-t}\left[v_l\left(\xi,t\right)-H(t-h)u_{l-1}\left(\xi,t-h\right)\right]d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{-\frac{x+y-l}{2}}dt\int\limits_{x+y+t}^{lh-t}\left[v_l\left(\xi,t\right)-H(t-h)u_{l-1}\left(\xi,t-h\right)\right]d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{y}dt\int\limits_{x-(y-t)}^{x+(y-t)}\left[v_l\left(\xi,t\right)-H(t-h)u_{l-1}\left(\xi,t-h\right)\right]d\xi$$

– является решением первой задачи Дарбу для уравнения (13) при условиях (6), (10.1), когда $(x,y) \in D_{2l}$, а

$$v_l(x,y) = -\sqrt{2}\varphi'_{2l}\left(\frac{y-x+lh}{2}\right) + \sqrt{2}\alpha'_{2l}\left(\frac{y+x+(l+1)h}{2}\right) -$$
$$-\sqrt{2}\alpha'_{2l}\left((2l+1)\frac{h}{2}\right) + H(y-h)\left(\psi_{2(l-1)}\left(\frac{y-x+(l-2)h}{2}\right) -\right.$$
$$\left.-\psi_{2(l-1)}\left(\frac{(2l-1)h}{2}\right) + u_{l-1}\left(\frac{x+y+(l-1)h}{2}, \frac{x+y-(l+1)h}{2}\right)\right)$$

– решение первой задачи Гурса для уравнения (14) при $(x,y) \in D_{2l}$. Условия, накладываемые на функцию $v_l\,(x,y)$ при решении данной задачи, будут определяться подобно тому, как это было сделано при решении первой задачи Гурса в области D_1, но уже с помощью уравнения (13) и условий (7)-(8), а так же условия $u(x,y)|_{x=(l-1)h-y} = \psi_{2(l-1)}(y-h)$, и решения $u(x,y) = u_{l-1}(x,y)$, где $(l-1)h \leqslant y \leqslant lh$, $l = 1,2,3,\ldots$.

Дифференцируя $u_l(x,y)$ по x и полагая в полученном выражении $x = 0$ с учетом условия (10.2) получим основное функциональное соотношение между функциями $\omega_2\,(y)$ и $\nu_2\,(y)$ перенесенное из области D_2 на линию $x = 0$:

$$\omega'_2\,(y) - \psi'_{2l}\left(\frac{y+lh}{2}\right) - \int\limits_0^{-\frac{y-lh}{2}} G_l\,(t, y+t)dt = \nu_2\,(y)\,,$$

где $G_l\,(p,q) = v_l\,(p,q) + H\,(q-h)\,u_{l-1}\,(p,q-h)$, $l = 0,1,2,\ldots$

Список литературы

[1] *И.Е. Этлин.* Одна задача для уравнения смешанно-составного типа четвертого порядка. Дифференциальные уравнения. Труды пединститутов РСФСР, 1974.

ОБ ОДНОМ СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ВЫРОЖДЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ЧАСТЬЮ

А.В. Мерлин

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары

Пусть L – простой замкнутый гладкий контур, не проходящий через бесконечно удаленную точку. Пусть на L заданы дифференцируемые достаточное число раз функции $a(t), b(t)$ и $f(t)$, и при этом $a^2(t) - b^2(t) = 1$ $\forall t \in L$ и наивысшая допустимая производная от указанных функций удовлетворяет на L условию Гельдера [1]. Рассмотрим на L сингулярное интегральное уравнение (с.и.у.) следующего вида

$$a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi(t) - H_r(t; S\varphi; \Delta)) = f(t), \tag{1}$$

где $S\varphi$ – сингулярный интегральный оператор (с.и.о.) вдоль L и $H_r(t;\psi;\Delta)$ – интерполяционный многочлен Эрмита степени r, построенный для функции $\psi(t)$ по точкам дивизора $\Delta = (t_0^{\alpha_0}, t_1^{\alpha_1}; \ldots t_n^{\alpha_n})$ [2]. Здесь все α_k – целые неотрицательные числа, причем

$|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ и $r = \alpha - 1$. Частные случаи с.и.у. (1) рассматривались автором в работах [3, 4]. Решение с.и.у. (1) будем искать в классе $C_\lambda^{(\gamma)}(L)$.

С.и.у. (1) будем решать методом сведения к эквивалентной задаче Римана [1].

Рассмотрим сначала вспомогательную кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2}H_r(z; S\varphi; \Delta), \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ – искомое решение с.и.у. (1), принадлежащее классу $C_\lambda^{(\gamma)}(L)$ – множеству функций, дифференцируемых на $L\gamma$ раз и при этом таких, что $\varphi^{(\gamma)}(t) \in H^\lambda(L)$.

Опираясь на формулы Ю.В. Сохоцкого [1] и с.и.у. (1), получаем для функции (2) краевую задачу Римана

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}\Phi^-(t) + \frac{f(t)}{a(t) + b(t)} \tag{3}$$

в классе функций с полюсом порядка r в бесконечно удаленной точке, удовлетворяющих дополнительному условию

$$(\Phi^+)^{(j)}(t_k) + (\Phi^-)^{(j)}(t_k) = 0 \tag{4}$$

где $k = 0, 1, \dots, n;\quad j = 0, 1, \dots, \alpha_k - 1$.

Покажем эквивалентность с.и.у. (1) и задачи Римана (3), (4) в смысле взаимно однозначного соответствия между множествами их решений.

Переход от $\varphi(t) \in (1)$ к $\Phi(z) \in (3), (4)$ является классическим [1]. Пусть теперь $\Phi_0(z)$ является некоторым решением задачи (3), (4). Обозначим через

$$\varphi_0(t) = \Phi_0^+(t) + \Phi_0^-(t)$$

скачок этого решения на L и покажем, что $\varphi_0(t) \in (1)$ Известно [1], что задача Римана о скачке имеет общее решение в виде суммы интеграла типа Коши и многочлена с произвольными коэффициентами. Запишем это решение, используя многочлены $H_{ij}(z)$ [2], линейной комбинацией которых является введенный выше многочлен Эрмита $H_r(t; \psi; \Delta)$ Тогда имеем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_0(\tau)d\tau}{\tau - z} + \sum_{l=0}^{n}\sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} C_{lj}H_{lj}(z) \tag{5}$$

Эта запись действительно дает общее решение задачи о скачке, поскольку вся совокупность этих многочленов образует базис линейного пространства многочленов степени не больше, чем r. Из способа построения многочленов $H_{lj}(z)$ непосредственно вытекает, что условия (4) выполняются, если произвольные коэффициенты C_{lj} в (5) равны

$$C_{lj} = -\frac{1}{2}S\varphi_0^{(j)}(t_l), \quad l = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, \alpha.$$

Это означает, что задача о скачке (3), (4) имеет единственное решение, причем в виде (2) при $\varphi = \varphi_0$. Отсюда, следуя известной схеме [1], сразу же получаем, что $\varphi_0(t)$

является решением с.и.у. (1). Запишем теперь общее решение задачи (3), (4). Оно имеет вид

$$\Phi(z) = \chi(z)\left(\left(S\frac{f}{Z}\right)(z) + P_{r+\kappa}(z)\right), \tag{6}$$

где κ – индекс задачи, $\chi(z)$ – каноническая функция однородной задачи, соответствующей (3),

$$Sh(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \dfrac{h(\tau)d\tau}{\tau - z}, & \forall z \notin L, \\ Sh(t), & \forall t \in Z, \end{cases}$$

$$P_{r+\kappa}(z) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{r+\kappa} C_k z^k, & r+\kappa \geq 0, \\ 0, & r+\kappa < 0. \end{cases}$$

Как обычно, при $r + \kappa < -1$ должны выполняться условия разрешимости

$$\int\limits_L \frac{\tau^k f(\tau)}{Z(\tau)} d\tau = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -r-\kappa-1 \tag{7}$$

где $Z(t)$ – функция, полностью определяемая через $\chi(z)$ и коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ с.и.у. (1). Учитывая дополнительные условия (4), получим необходимую связь между постоянными C_k следующего вида

$$a(t)Z(t)P_{r+\kappa}(t)^{(j)}\Big|_{t=t_l} = -(Qf)^{(j)}(t_l) \tag{8}$$

где Q – линейный с.и.о., введенный автором в [5] формулой

$$(Qt)(t) = -b(t)f(t) + a(t)Z(t)\left(S\frac{f}{Z}\right)(t) \tag{9}$$

Заметим, что при $r + \kappa < 0$ условия (8) превращаются в дополнительные условия разрешимости, наложенные на правую часть с.и.у. (1).

При выполнении условий (7), (8) общее решение с.и.у. (1) записывается в виде [1]

$$\varphi(t) = (Rf)(t) + b(t)Z(t)P_{r+\kappa}(t).$$

Исследование картины разрешимости с.и.у. (1) приводит к необходимости различать две ситуации.

1. Коэффициент $a(t) \neq 0$ $\forall t \in \Delta$

В этом случае картина разрешимости полностью совпадает с таковой для характеристического с.и.у.:

- если $\kappa > 0$ то с.и.у. (1) всегда разрешимо и соответствующее ему однородное с.и.у. (1) имеет ж линейно независимых решений;
- если $\kappa = 0$ то с.и.у. (1) имеет единственное решение;
- если $\kappa < 0$ то с.и.у. (1) разрешимо лишь при выполнении (- ж) условий разрешимости, и в этом случае имеет единственное решение.

2. Коэффициент $a(t)$ обращается в нуль в некоторых точках дивизора Δ, а именно, пусть $a(t_1) = a^{(1)}(t_1) = \cdots = a^{(\beta_l - 1)}(t_l) = 0,$ где $\beta_l \leq \alpha_l \ \forall l = 0, 1, \ldots, m, \ m \leq n.$

В этом случае соответствующая часть условий (8) дает необходимые требования

$$f^{(j)}(t_l) = 0, \ l = 0, 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, \ldots, \beta_l - 1 \tag{10}$$

Эти требования считаются выполненными. Тогда часть постоянных C_k остается произвольной, и исследование условий (8) проводится в соответствии с известной из алгебры теоремой Кронекера-Капелли. В частности, если интерполяционный многочлен Эрмита является многочленом Лагранжа, то число решений однородного с.и.у. (1) увеличивается на число точек t_k в которых $a(t) = 0$. Соответственно изменяется число условий разрешимости [3] неоднородного с.и.у. (1). Если интерполяционный многочлен Эрмита является многочленом Тейлора, то число решений однородного с.и.у. (1) увеличивается на количество производных $a^{(j)}(t_0)$ равных нулю, и снова соответственно изменяется число условий разрешимости неоднородного с.и.у. (1) [4].

Замечание. Приведенные в статье рассуждения можно перенести без изменений на случай составного контура L, или на случай, когда решение $\varphi(t)$ с.и.у. (1) ищется в классах Н.И. Мусхелишвили [6] при условии, что узлы, определяющие класс, не совпадают с точками дивизора Δ.

Список литературы

[1] *Ф.Д. Гахов.* Краевые задачи. М.: Наука, 1970.

[2] *И.С. Березин, Н.П. Жидков.* Методы вычислений. М.: Физматгиз, 1962. Т. 1.

[3] *А.В. Мерлин.* Об одном полном сингулярном интегральном уравнении. Вестн. Чуваш. ун-та. 2002. №2 (естеств. и техн. науки). С. 26–33.

[4] *А.В. Мерлин.* Сингулярное интегральное уравнение в классе несуммируемых функций на составном контуре. Математика в образовании: Сб. ст. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2005. С. 223–229.

[5] *А.В. Мерлин.* О несуммируемых решениях сингулярного интегрального уравнения. Изв. вузов. Математика. 1975. №6. С. 88–95.

[6] *Н.И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1962.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ СИММЕТРИЯХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ*

А. Г. Мешков

Орловский государственный университет,

302026, Орел, ул. Комсомольская, 95, meshkov@orel.ru

Введение. Хорошо известно, что модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКдФ) является симметрией уравнения синус-Гордон [1]. И наоборот, уравнение синус-Гордон, рассматриваемое как нелокальное эволюционное уравнение, является

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05-01-00775.

симметрией уравнения мКдФ. В статье вычислены нелокальные симметрии для некоторых интегрируемых эволюционных систем и указаны связанные с ними гиперболические системы.

Рассмотрим систему с двумя независимыми переменными t, x и m зависимыми переменными u^α:

$$u_t = K(t, x, u, u_x, \ldots, u_n), \tag{1}$$

где $K = \{K^\alpha, \alpha = 1, \ldots, m\}$ и $u = \{u^\alpha, \alpha = 1, \ldots, m\}$ – вектор-функции класса $\mathbb{C}^\infty$ в некоторой области; $u \equiv u_0$, $u_x \equiv u_1$, $u_k = \{\partial^k u^\alpha / \partial x^r\}$. Для сокращения записи совокупность всех переменных u_i^α обычно обозначают одной буквой u.

Определение 1. (см. [2]). *Обобщенной симметрией системы (1) называется вектор-функция $\sigma(t, x, u, u_x, \ldots, u_k)$, удовлетворяющая уравнению*

$$(D_t - K_*)\sigma = 0, \tag{2}$$

где

$$(K_*)^\alpha_\beta = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\partial K^\alpha}{\partial u_k^\beta} D_x^k, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\alpha,k\geqslant 0} u^\alpha_{k+1}\frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}, \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha,k\geqslant 0} \left(D_x^k K^\alpha\right)\frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}.$$

Оператор K_* называется линеаризацией вектор-функции K, D_x – оператор полного диффернцирования по x, D_t – оператор эволюционного дифференцирования (в силу (1)). Порядок дифференциального оператора f_* называется порядком (вектор-) функции f и обозначается $\operatorname{ord} f$.

Не зависящие явно от t обобщенные симметрии часто записывают в виде эволюционных систем

$$u_\tau = \sigma(x, u), \tag{3}$$

где τ – новый параметр эволюции. Это связано с тем, что условие совместности уравнений (1) и (3) имеет вид

$$[K, \sigma] \equiv K_*\sigma - \sigma_* K = 0,$$

совпадающий с (2).

Определение 2. (см. [2]). *Если на любом решении системы (1) выполнено тождество*

$$D_t\rho(t, x, u) = D_x\theta(t, x, u), \tag{4}$$

где ρ и θ – некоторые дифференцируемые функции, то соотношение (4) называется **локальным** *законом сохранения системы (1). Функция ρ называется сохраняющейся плотностью, а функция θ – плотностью тока. Пару функций (ρ, θ) называют также сохраняющимся током.*

Из перестановочности операторов D_t и D_x: $D_t(D_x f(t, x, u_i)) = D_x(D_t f(t, x, u_i))$, $\forall f$ следует, что $\rho_0 = D_x f$ является сохраняющейся плотностью для любой системы. Такие плотности называются тривиальными. Должно быть ясно, что сохраняющиеся плотности всегда определены с точностью до тривиальных (дивергентных) слагаемых.

Пусть (ρ, θ) – сохраняющимся ток конечного порядка. Тогда следующая система

$$D_x w = \rho(t, x, u), \quad D_t w = \theta(t, x, u), \tag{5}$$

где u – решение системы (1), совместна. Ее решение формально записывается в виде $w = D_x^{-1}\rho$. Можно рассматривать w как новую динамическую переменную, она называетя слабо нелокальной или квазилокальной (см. [3]).

Таким образом, по локальным сохраняющимся токам $\{\rho_i, \theta_i\}$ определяется множество слабо нелокальных переменных $\{w_i^1 = D_x^{-1}\rho_i\}$ первого порядка. Если существуют законы сохранения, зависящие от $t, x, u, u_x, \ldots, u_k, w_i^1$, то по ним можно определить слабо нелокальные переменные $\{w_i^2\}$ второго порядка и т.д.

Порядок нелокальных переменных мы определяем индуктивно: пусть определены переменные $w_1, \ldots, w^n$ до n-го порядка. Тогда, если имеется **нетривиальная** сохраняющаяся плотность $\rho(u, w^1, \ldots, w^n)$, то переменная $w = D_x^{-1}\rho(u, w^1, \ldots, w^n)$ называется нелокальной переменной $n+1$-го порядка.

Если уравнение (2) имеет решение, зависящее от нелокальных переменных, то оно называется нелокальной симметрией.

Уравнение Кортевега-де Фриза. Проиллюстрируем сказанное выше на хорошо изученном уравнении КдФ:

$$u_t = u_3 + 6uu_1. \tag{6}$$

Это уравнение имеет бесконечную последовательность сохраняющихся плотностей, не зависящих явно от x и t [4]. Начало этой последовательности таково:

$$\rho_1 = u, \quad \rho_2 = u^2, \quad \rho_3 = u_1^2 - 2u^3, \quad \rho_4 = u_2^2 - 10uu_1^2 + 5u^4, \ldots$$

Эти плотности позволяют ввести нелокальные переменные $w_i = D_x^{-1}\rho_i$ первого порядка. Далее можно пытаться искать нелокальные сохраняющиеся плотности второго порядка. Однако наши вычисления показали, что не существует нетривиальных сохраняющихся плотностей, зависящих от w_1, w_2, w_3, w_4. Есть основания считать, что введение дополнительных нелокальных переменных первого порядка $w_5, \ldots$ не приведет к появлению нетривиальных нелокальных плотностей второго порядка.

Несложные вычисления показали, что уравнение КдФ не имеет нелокальных симметрий, не зависящих явно от t и x. Но, как известно, зависящие от от t и x нелокальные симметрии существуют.

Чтобы получить уравнения, имеющие нелокальные симметрии, рассмотрим дифференциальные подстановки, допускаемые уравнением КдФ. Список этих подстановок довольно длинный, поэтому мы приведем только наиболее интересные:

$$u = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{4}v^2, \qquad v_t = v_3 - \frac{3}{2}\,v^2 v_1, \tag{7}$$

$$u = \frac{i}{2}v_1 + \frac{1}{4}v^2, \qquad v_t = v_3 + \frac{3}{2}\,v^2 v_1, \tag{8}$$

$$u = \frac{1}{2}\,v_2 - \frac{1}{4}\,v_1^2, \qquad v_t = v_3 - \frac{1}{2}\,v_1^3, \tag{9}$$

$$u = \frac{v_3}{2v_1} - \frac{(1+v_2)(1+3v_2)}{4v_1^2}, \quad v_t = v_3 - \frac{3v_2^2}{2v_1} + \frac{3}{2v_1}, \tag{10}$$

$$u = \frac{v_3}{2v_1} - \frac{3v_2^2}{4v_1^2}, \qquad v_t = v_3 - \frac{3v_2^2}{2v_1}. \tag{11}$$

Подстановки (7) – (9), приводящие к уравнению мКдФ, найдены Р. Миурой (см. например [5]) и называются подстановками Миуры. Мы ограничились вычислением симметрий для уравнений (7)–(11), зависящих только от нелокальных переменных первого и второго порядков.

Уравнение мКдФ (7) допускает 9-параметрическую симметрию, зависящую от семи нелокальных переменных первого и второго порядков. Ввиду ее громоздкости мы приведем частное решение

$$v_\tau = c_1 e^{w_0} + c_2 e^{-w_0} + c_3(e^{-w_0} w_1 + e^{w_0} w_2), \tag{12}$$

где c_i – произвольные постоянные, а w_i – нелокальные переменные:

$$w_0 = D_x^{-1} v, \quad w_1 = D_x^{-1} e^{w_0}, \quad w_2 = D_x^{-1} e^{-w_0}.$$

Симметрий, зависящих от $D_x^{-1} v^2$ и других нелокальных переменных первого порядка, не существует.

Уравнение (12) имеет представление нулевой кривизны $U_\tau - V_x + [U, V] = 0$. Матрицы U и V записываются в следующем виде

$$\begin{aligned} &U = \frac{1}{2} v E_1 + \frac{1}{4k} E_2, \\ &V = k(c_1 + c_3 w_2) e^{w_0}(E_2 - E_3) - k(c_2 + c_3 w_1) e^{-w_0}(E_2 + E_3) - 4c_3 k^2 E_1, \end{aligned}$$

где k – спектральный параметр, а E_i – базис в sl(2,$\mathbb{C}$):

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица U та же самая, что и для уравнения (7) (см. [6]). Этим доказано, что уравнение (12) действительно входит в иерархию мКдФ.

Если $c_3 = 0$, то приняв $z = w_0$ за новую неизвестную функцию, находим $z_x = v$, $z_{\tau x} = c_1 e^z + c_2 e^{-z}$. Если $c_3 \neq 0$, то дифференцируя уравнение (12), и комбинируя результат с исходным уравнением, получаем $(v^{-1} v_{\tau x})_x = v v_\tau - 2c_3 v^{-2} v_x$. Растяжением переменной τ можно изменить c_3, поэтому, положив $c_3 = -1/2$, окончательно имеем

$$(v^{-1} v_{\tau x})_x = v v_\tau + v^{-2} v_x, \tag{13}$$

или

$$v_{\tau xx} = v^{-1} v_x (v_{\tau x} + 1) + v^2 v_\tau. \tag{14}$$

Положив здесь $v_{\tau x} = v z_\tau$, получим систему уравнений:

$$z_{\tau x} = v v_\tau + v^{-2} v_x, \quad v_{\tau x} = v z_\tau. \tag{15}$$

Уравнение (13) можно преобразовать к иному виду. Для этого запишем его в виде $(v^{-1} v_{\tau x} + v^{-1})_x = \frac{1}{2}(v^2)_\tau$, что влечет существование такой функции p, что

$$v^2 = p_x, \quad v^{-1} v_{\tau x} + v^{-1} = \frac{1}{2} p_\tau.$$

Исключая отсюда v, приходим к следующему уравнению:

$$p_{\tau xx} = \frac{1}{2} p_x^{-1} p_{xx} p_{\tau x} + p_\tau p_x - 2\sqrt{p_x}. \tag{16}$$

Так как уравнение (12) имеет представление нулевой кривизны, то уравнения (14), (15) и (16) также их имеют. В частности, представление нулевой кривизны для уравнения (14) определяется матрицами

$$U = E_1 v_x + f_1(v)E_2 + f_2(v)E_3, \quad V = v^{-2}(v_{\tau x} f_1' - 4v f_1)E_2 + v^{-2}(v_{\tau x} f_2' - 4v f_2)E_2,$$

где

$$f_1(v) = \frac{k}{8} e^{-2v}(2v+1) + \frac{1}{8k} e^{2v}(2v-1), \quad f_2(v) = \frac{k}{8} e^{-2v}(2v+1) - \frac{1}{8k} e^{2v}(2v-1),$$

k – спектральный параметр, E_i – указанные выше матрицы.

Уравнение мКдФ (8) можно получить из (7) подстановкой $v \to iv$, нелокальные переменные и симметрии уравнения (8) также получаются этой подстановкой:

$$v_\tau = c_1 \sin w_0 + c_2 \cos w_0 + c_3 (w_1 \sin w_0 + w_2 \cos w_0), \tag{17}$$

где c_i – произвольные постоянные,

$$w_0 = D_x^{-1} v, \quad w_1 = D_x^{-1} \sin w_0, \quad w_2 = D_x^{-1} \cos w_0, \quad w_3 = D_x^{-1} w_1 \cos w_0.$$

Если $c_3 = 0$, то приняв в (17) $z = w_0$ за новую неизвестную функцию, приходим к уравнению синус-Гордон. Если же $c_3 \neq 0$, то возникает уравнение вида (14), но с противоположным знаком перед $v^2 v_\tau$. Его можно получить из (14) подстановкой $v \to iv, t \to it$.

Уравнение мКдФ в потенциальной форме (9) получается из (7) подстановкой $v \to v_1$. В результате этой подстановки переменная w_0 становится локальной: $w_0 \to v$, поэтому число нелокальных переменных уменьшается на единицу, а сами переменные остаются прежними. Между симметриями уравнений (9) и (7) имеется взаимнооднозначное соответствие: полная производная по x от симметрии уравнения (9) является симметрией уравнения (7). Например, симметрия (12) получается дифференцированием симметрии $v_\tau = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_1 w_2$ уравнения (9). Однако, применение оператора D_x^{-1} к симметриям уравнения (7) может увеличить порядок нелокальности.

Уравнение (10) является частным случаем уравнения Кричевера-Новикова [7]. Оно допускает следующие нелокальные переменные:

$$w_0 = D_x^{-1} v_1^{-1}, \quad w_1 = D_x^{-1} \frac{v^2 e^{w_0}}{v_1}, \quad w_2 = D_x^{-1} \frac{v^2\, e^{-w_0}}{v_1}, \quad w_3 = D_x^{-1} \frac{v\, e^{w_0}}{v_1}, \quad w_4 = D_x^{-1} \frac{v\, e^{-w_0}}{v_1}.$$

Нелокальная симметрия уравнения (10) имеет вид

$$\begin{aligned} v_\tau &= c_1(w_3 - v e^{w_0}) + c_2(w_4 + v e^{-w_0}) + c_3(w_1 - v^2 e^{w_0}) + c_4(w_2 + v^2 e^{-w_0}) \\ &\quad + c_5(w_2 w_3 - w_1 w_4 - v w_1 e^{-w_0} - v w_2 e^{w_0} + v^2 w_4 e^{w_0} + v^2 w_3 e^{-w_0}) \\ &\quad + c_6(v^2 - w_3 w_4 - v w_3 e^{-w_0} + v w_4 e^{w_0}) \end{aligned} \tag{18}$$

где c_i – произвольные постоянные.

Приняв w_0 за новую неизвестную функцию, можно привести уравнение (18) к виду:

$$w_{0,x\tau} = w_{0,x}\left(c_1 e^{w_0} - c_2 e^{-w_0} + 2(c_3 e^{w_0} - c_4 e^{-w_0}) D_x^{-1}(w_{0,x})^{-1}\right) + \dots \qquad (18a)$$

Это нелокальное уравнение имеет симметрию

$$w_{0,t} = w_{0,xxx} - \frac{3 {w_{0,xx}}^2}{2 w_{0,x}} - \frac{1}{2} {w_{0,x}}^3, \qquad (19)$$

которая связана с уравнением (10) подстановкой $v_x = 1/w_{0,x}$, а с уравнением КдФ – подстановкой

$$u = -\frac{w_{0,xxx}}{2w_{0,x}} + \frac{{w_{0,xx}}^2}{4{w_{0,x}}^2} + w_{0,xx} - \frac{1}{4}{w_{0,x}}^2.$$

Уравнение Шварц-КдФ (11) имеет самый богатый набор нелокальных переменных

$$w_0 = D_x^{-1} v_1^{-1}, \quad w_1 = D_x^{-1}\frac{v}{v_1}, \quad w_2 = D_x^{-1}\frac{v^2}{v_1}, \quad w_3 = D_x^{-1}\frac{w_1}{v_1}, \quad w_4 = D_x^{-1}\frac{w_2}{v_1},$$
$$w_5 = D_x^{-1}\frac{v\, w_2}{v_1}, \quad w_6 = D_x^{-1}\frac{w_1^2 - w_0\, w_2}{v_1}, \quad w_7 = D_x^{-1}\frac{v\, w_0\, w_2}{v_1}, \quad w_8 = D_x^{-1}\frac{w_2^2 - 4\, v\, w_1\, w_2}{v_1},$$

и 12-параметрическую нелокальную симметрию

$$\begin{aligned}
v_\tau = {} & c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + c_3(w_1 - w_0 v) + c_4(w_2 - w_0 v^2) + c_5 v(w_1 v - w_2) \\
& + c_6(-v^2 w_1 w_0 + v w_2 w_0 - w_5 + v^2 w_3) + c_7(4 v w_5 - 2v^2 w_4 + 2v^2 w_1^2 \\
& - 4 v w_2 w_1 + w_2^2) + c_8(4 v w_3 + 2 w_0 w_2 - 2 w_1^2 - 2 w_4 - v^2 w_0^2) \\
& + c_9(6 v w_6 - 6 w_4 w_1 + 6 w_7 - 2 w_1^3 + 3 v^2 w_1 w_0^2 - 6 v^2 w_3 w_0 - 3 v w_2 w_0^2 \\
& + 6 v w_4 w_0 + 6 w_2 w_3) + c_{10}(4 w_1 w_5 - 4 v w_2 w_3 + 4 v^2 w_1 w_3 + w_8 + 4 v w_2 w_1 w_0 \\
& - 2 v^2 w_6 - 4 v w_0 w_5 - 2 v^2 w_1^2 w_0 - w_2^2 w_0) + c_{11}(2 v^2 w_1^3 - 6 w_5 w_2 - 6 v^2 w_7 \\
& - 6 v^2 w_1 w_4 + 6 v w_2 w_4 - 6 v w_2 w_1^2 + 6 v^2 w_0 w_5 - 3 v w_8 + 3 w_1 w_2^2).
\end{aligned} \qquad (20)$$

Симметрия $\sigma = c_0 + c_1 v + c_2 v^2$ соответствует инвариантности уравнения Шварц-КдФ относительно произвольного дробно-линейного преобразования зависимой переменной v. За вычетом этой симметрии получаем девять независимых нелокальных симметрий.

Уравнение (20) приводится к виду

$$w_{0,x\tau} = -w_{0,x}\left(c_1 + c_3 w_0 + 2(c_2 + c_4 w_0) D_x^{-1} {w_{0,x}}^{-1}\right) + \dots \qquad (20a)$$

Уравнение (11) переходит само в себя при подстановке $v_x = 1/w_{0,x}$, поэтому уравнение Шварц-КдФ

$$w_{0,t} = w_{0,xxx} - \frac{3{w_{0,xx}}^2}{2w_{0,x}}$$

является симметрией обоих уравнений и (20), и (20a).

Можно проверить, что все приведенные симметрии (12), (17), (**??**), (18) и (20) являются симметриями не только для уравнений (7)–(11), но и для их высших аналогов. Это дает серьезные основания надеяться на точную интегрируемость перечисленных нелокальных уравнений. Интегрируемость уравнения (12) доказана.

Системы из двух уравнений. Здесь мы исследуем нелокальные симметрии интегрируемых систем, найденных в работе [8]. Мы ограничились вычислением симметрий, зависящих только от нелокальных переменных первого и второго порядков. Для построения нелокальных переменных мы вычисляем сохраняющиеся плотности не выше первого порядка. Симметрии выше первого порядка не рассматриваем. Мы проверили, что каждая представленная нелокальная симметрия являются симметрией как для указанной системы, так и для ее высшего аналога. Приводимые ниже системы и их высшие аналоги допускают многопараметрические нелокальные симметрии. Для уменьшения объема статьи мы приводим только самые простые из этих симметрий.

1. Первая из систем имеет следующий вид

$$u_t = u_3 + \frac{3}{2}\,u_1 v_2 - \frac{3}{4}\,u_1 v_1^2 + \frac{e}{4}\,u_1{}^3, \quad v_t = -\frac{1}{2}v_3 - \frac{3}{4}\,e(2u_1u_2 + u_1^2 v_1) + \frac{1}{4}\,v_1^3, \quad e = \pm 1. \tag{21}$$

Вид нелокальных переменных и симметрий зависит от значения e. Но эти две системы связаны подстановкой $u \to iu$, поэтому мы приведем все выражения только для $e = 1$.

Нелокальная симметрия системы (21) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} u_\tau &= c_2w_2 + c_3w_3 + c_4(w_4 - w_1w_2) + c_5(w_5 - w_1w_3) + c_6(w_3w_4 - w_2w_5),\\ v_\tau &= c_1w_1 - c_2w_2 + c_3w_3 + c_4w_1w_2 - c_5w_1w_3 + c_6(w_3w_4 - w_8 + w_2w_5), \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$w_1 = D_x^{-1}e^v, \quad w_2 = D_x^{-1}e^{u-v}, \quad w_3 = D_x^{-1}e^{-u-v}, \quad w_4 = D_x^{-1}w_2e^v, \quad w_5 = D_x^{-1}w_3e^v.$$

Простейшие гиперболические системы имеют следующий вид:

$$u_{\tau x} = c_2e^{u-v} + c_3e^{-u-v}, \qquad v_{\tau x} = c_1e^v - c_2e^{u-v} + c_3e^{-u-v}, \qquad \text{при } e = 1, \tag{23}$$

$$u_{\tau x} = e^{-v}(c_2\cos u + c_3\sin u), \quad v_{\tau x} = c_1e^v + e^{-v}(c_2\sin u - c_3\cos u), \quad \text{при } e = -1. \tag{24}$$

Очевидно, при $c_1 = 0$ каждая из этих систем распадается на два уравнения Лиувилля. Систему (23) можно представить в различных формах, выбирая в качестве новых переменных нелокальные переменные. Например:

$$p = w_2,\ q = w_3, \quad p_{\tau x} = p_x(2c_2p - c_1w), \quad q_{\tau x} = -q_x(c_1w + c_3q), \quad w_x = (p_xq_x)^{-1/2};$$

$$p = w_1,\ q = w_2, \quad p_{\tau x} = p_x(c_1p - c_2q + c_3w), \quad q_{\tau x} = q_x(2c_2q - c_1p), \quad w_x = p_x^{-2}q_x^{-1};$$

Системы с переменными второго порядка тоже можно привести к локальному виду, но результаты более громоздкие. Например, если принять $c_i = 0$ для $i > 4$ и $c_4 \neq 0$, то сдвиги $w_1 \to w_1 + c_2/c_4, w_2 \to w_2 - c_1/c_4, w_4 \to w_4 - c_1/c_4w_1$ уничтожают c_1 и c_2, и мы получаем

$$u_\tau = c_3w_3 + c_4(w_4 - w_1w_2), \quad v_\tau = c_3w_3 + c_4w_1w_2. \tag{25}$$

В переменных $p = w_1,\ q = w_2$ эта система принимает вид

$$p_{\tau x} = p_x(c_3w_3 + c_4pq), \quad q_{\tau x} = q_x(c_4w_4 - 2c_4pq), \quad w_{3,x} = p_x^{-2}q_x^{-1}, \quad w_{4,x} = qp_x,$$

или

$$(p_x^{-1}p_{\tau x})_x = c_3p_x^{-2}q_x^{-1} + c_4(pq)_x, \quad (q_x^{-1}q_{\tau x})_x = -c_4(qp_x + 2pq_x).$$

Можно, конечно, просто дважды продифференцировать систему (25) и получить локальную систему

$$u_{\tau xx} = (2u_x - z_x)u_{\tau x} - 3c_3 u_x e^{-z} - c_4 e^u, \quad z_{\tau xx} = (z_x - u_x) z_{\tau x} + 2c_3(u_x - 2z_x)e^{-z} + c_4 e^u,$$

где $z = u + v$. Подобные примеры можно продолжить.

2. Вторая интегрируемая система

$$\begin{aligned} u_t &= 4\,u_3 + 3\,v_3 - 15\,v_2 u_1 - 2\,{u_1}^3 - 6\,{v_1}^3 + 18\,v_1 {u_1}^2 - 9\,{v_1}^2 u_1, \\ v_t &= 3\,u_3 + v_3 + 15\,u_2 u_1 + 6\,{u_1}^3 - 2\,{v_1}^3 - 9\,v_1 {u_1}^2 - 18\,{v_1}^2 u_1, \end{aligned} \tag{26}$$

имеет следующую нелокальную симметрию

$$\begin{aligned} u_\tau &= c_1 w_1 + c_2 w_2 - 2c_3 w_3 + c_4(w_1 w_2 - 2w_4) + c_5(3w_5 - 4w_2 w_3) + c_6(2w_1 w_4 - 3w_6), \\ v_\tau &= 2c_1 w_1 - 3c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4(w_4 + 2w_1 w_2) + c_5(w_5 + 2w_2 w_3) + c_6(4w_1 w_4 - w_6), \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned} &w_1 = D_x^{-1} e^{u+2v}, \quad w_2 = D_x^{-1} e^{u-3v}, \quad w_3 = D_x^{-1} e^{2v-4u}, \\ &w_4 = D_x^{-1} w_1 e^{u-3v}, \quad w_5 = D_x^{-1} w_3 e^{u-3v}, \quad w_6 = D_x^{-1} w_1^2 e^{u-3v}. \end{aligned}$$

Приведем некоторые локальные системы, вытекающие из (27).

2.a. Цепочка Тоды:

$$u_{\tau x} = c_1 e^{u+2v} + c_2 e^{u-3v} + 2c_3 e^{2v-4u}, \quad v_{\tau x} = 2c_1 e^{u+2v} - 3c_2 e^{u-3v} - c_3 e^{-4u+2v}. \tag{28}$$

2.b. Пусть $c_i = 0, i > 4$, $c_4 \neq 0$, тогда сдвигами $w_1 \to w_1 + c_2/c_4$, $w_2 \to w_2 - c_1/c_4$ приводим систему (27) к виду

$$u_\tau + 2v_\tau = 5c_4 w_1 w_2, \quad v_\tau - 2u_\tau = 5(c_3 w_3 + c_4 w_4).$$

Приняв за новые функции $p = w_1$ и $q = v - 2u$, получаем

$$\big((pp_x)^{-1} p_{\tau x}\big)_x = 5c_4 e^{-q} p_x^{-1}, \quad q_{\tau x} = 5c_3 e^{2q} + 5c_4 p e^{-q} p_x^{-1}.$$

Эти примеры можно продолжить.

3. Следующие две системы

$$u_t = u_3 + u_1 v_2 - u_1 v_1^2, \quad v_t = (u_2 u_1 + u_1^2 v_1)e, \quad e = \pm 1, \tag{29}$$

связаны подстановкой $u \to iu$, поэтому их симметрии имеют различный вид. Мы приведем все выражения только для случая $e = -1$.

$$\begin{aligned} u_\tau &= c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_4(w_4 - w_1 w_3) + c_5(w_5 - w_2 w_3), \\ v_\tau &= -c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4(w_4 + w_1 w_3) - c_5(w_5 + w_2 w_3), \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$w_1 = D_x^{-1} e^{u-v}, \quad w_2 = D_x^{-1} e^{-u-v}, \quad w_3 = D_x^{-1} e^{2v}, \quad w_4 = D_x^{-1} w_1 e^{2v}, \quad w_5 = D_x^{-1} w_2 e^{2v}.$$

В случае $c_4 = c_5 = 0$ получаем следующие гиперболические системы

$$u_{\tau x} = c_1 e^{u-v} + c_2 e^{-u-v}, \qquad v_{\tau x} = -c_1 e^{u-v} + c_2 e^{-u-v} + c_3 e^{2v}, \qquad \text{при } e = -1, \tag{31}$$

$$u_{\tau x} = e^{-v}(c_1 \cos u + c_2 \sin u), \quad v_{\tau x} = e^{-v}(c_1 \sin u - c_2 \cos u) + c_3 e^{2v}, \text{ при } e = 1, \tag{32}$$

похожие на (23) и (24). Если $c_3 = 0$, то эти системы распадаются на независимые уравнения Лиувилля.

Если $c_5 = 0$, то в переменных $p = w_1, q = w_3$ система (30) принимает следующий вид:

$$p_{\tau x} = p_x(2c_1 p - c_3 q - 2c_4 pq), \quad (q_x^{-1} q_{\tau x})_x = 2c_3 q_x - 2c_1 p_x + 4c_4 p q_x + 2c_4 q p_x + 2c_2 p_x^{-1} q_x^{-1}.$$

4. Система

$$u_t = u_3 + v_1 v_2 - \frac{1}{2}\, u_1^3 + \frac{1}{2}\, u_1 v_1^2 + c_1 v_1, \quad v_t = u_2 v_1 - \frac{1}{2}\, u_1^2 v_1 + \frac{1}{2}\, v_1^3 - u_1 c_1 + c_2 v_1, \tag{33}$$

содержит две существенные константы, от которых зависят и количество и вид допускаемых симметрий.

4.1. $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. В этом случае система (33) упрощается

$$u_t = u_3 + v_1 v_2 - \frac{1}{2}\, u_1^3 + \frac{1}{2}\, u_1 v_1^2, \quad v_t = u_2 v_1 - \frac{1}{2}\, u_1^2 v_1 + \frac{1}{2}\, v_1^3, \tag{34}$$

и приобретает удивительные свойства. Эта система имеет бесконечное множество сохраняющихся плотностей, содержащих произвольные функции. Например, следующее выражение с произвольной функцией трех переменных F

$$\rho = v_1 F\big((v_2 - u_1 v_1) v_1^{-2}, v_1 e^{-u}, v\big) \tag{35}$$

является сохраняющейся плотностью. В частности, $f(v)e^u$ – сохраняющаяся плотность при произвольной функции f. Обобщенные симметрии системы (34) также имеют функциональный произвол.

Система (34) видимо не интегрируются методом обратной задачи. Наличие функционального произвола в сохраняющихся плотностях указывает на ее вырожденность. Действительно, если перейти в уравнениях (34) к переменным U, V по формулам $U_x = e^u, V_x = ve^u$, то приходим к соотношению $U_t V_x - V_t U_x = 0$, которое означает функциональную зависимость между U и V.

4.2. Если $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, то допускается следующая 4-параметрическая нелокальная симметрия

$$\begin{aligned} u_\tau &= k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3(w_5 + 2w_2 w_3) + k_4(w_1 w_5 - 4w_1 w_2 + 2w_2 w_4), \\ v_\tau &= -2k_2 e^{-u} v_x - 4e^{-u} v_x k_3(2 + w_3) - 4k_4 e^{-u} v_x w_4, \end{aligned} \tag{36}$$

где

$$\begin{aligned} & w_1 = D_x^{-1} e^u, w_2 = D_x^{-1} e^{-u}(v_x^2 + c_2), \quad w_3 = D_x^{-1} e^u w_2, \\ & w_4 = D_x^{-1} e^u w_2 w_1, \quad w_5 = D_x^{-1}(4v_x^2 e^{-u} - e^u w_2^2). \end{aligned}$$

По-видимому, имеется одна интересная локальная система, которая получается из (36), в случае $k_i = 0, i > 2$, простым дифференцированием:

$$u_{\tau x} = k_1 e^u + k_2(v_x^2 + c_2)e^{-u}, \quad v_\tau = -2k_2 v_x e^{-u}. \tag{37}$$

4.3. Пусть далее в системе (33) $c_1 \neq 0$, тогда изменив знак v, мы меняем знак c_1, поэтому будем считать для определенности $c_1 > 0$. Далее, растяжением переменных t и x получаем $c_1 = 1$:

$$u_t = u_3 + v_1 v_2 - \frac{1}{2} u_1^3 + \frac{1}{2} u_1 v_1^2 + v_1, \quad v_t = u_2 v_1 - \frac{1}{2} u_1^2 v_1 + \frac{1}{2} v_1^3 - u_1 + c_2 v_1, \qquad (33a)$$

Свойства этой системы существенно зависят от c_2, мы рассмотрим один случай $c_2 = -a - a^{-1}$.

Нелокальная симметрия имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_\tau &= -ak_1 w_1 + k_2 w_2 + ak_3 w_3 + k_4 w_4, \\ v_\tau &= k_1 w_1 - ak_2 w_2 - k_3(w_3 - 2av_x e^{-u-v/a}) - ak_4(w_4 - 2v_x e^{-u-av}). \end{aligned} \qquad (38)$$

Здесь

$$w_1 = D_x^{-1} e^{u+v/a}, \quad w_2 = D_x^{-1} e^{u+av}, \quad w_3 = D_x^{-1} e^{-u-v/a}(a - v_x^2), \quad w_4 = D_x^{-1} e^{-u-av}(1 - av_x^2).$$

Дифференцирование уравнений (38) приводит к следующей локальной системе:

$$\begin{aligned} u_{\tau x} &= -ak_1 e^{u+v/a} + k_2 e^{u+av} + ak_3 e^{-u-v/a}(a - v_x^2) + k_4 e^{-u-av}(1 - av_x^2), \\ v_{\tau x} &= k_1 e^{u+v/a} - ak_2 e^{u+av} - k_3 e^{-u-v/a}(2au_x v_x - 2av_{xx} + v_x^2 + a) \\ &\quad - ak_4 e^{-u-av}(2u_x v_x - 2v_{xx} + av_x^2 + 1) \end{aligned} \qquad (39)$$

В приведенных формулах можно произвести замену параметра $a = k + ic, a^{-1} = k - ic, c = \sqrt{1 - k^2}$. Это дает гиперболическую систему с функциями $e^{u+kv}, e^{-u-kv}, \sin(cv)$ и $\cos(cv)$. Затем, в полученных выражениях можно перейти к пределу $k \to \varepsilon = \pm 1, c \to 0$. Но эти вычисления довольно утомительны.

Все остальные точно интегрируемые системы, найденные в работе [8], не допускают нелокальных симметрий.

Заключение. Наше рассмотрение позволяет наметить следующий путь построения точно интегрируемых гиперболических систем из нелокальных эволюционных:

- найти все системы, связанные с исходной дифференциальными подстановками;
- вычислить нелокальные симметрии для найденных эволюционных систем, если таковые существуют;
- для каждой нелокальной системы выполнить некоторую замену переменных или продифференцировать систему по x.

Обычно в качестве новых динамических переменных выбираются нелокальные переменные, возможно в какой-то комбинации с локальными выражениями. Иногда замена переменных вообще не требуется.

Список литературы

[1] *S. Kumei.* J. Math. Phys. 1975. V. 16. №12. P. 2461–2468.

[2] *Н.Х. Ибрагимов.* Применение групп преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. *П. Олвер.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. *А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, В. В. Соколов.* В сб.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Ред. В. Г. Бахтарьяр, В. Е. Захаров, В. М. Черноусенко. Киев: Наукова думка, 1990. С. 213–279.

[3] В.В. Соколов, С.И. Свинолупов. Матем. заметки. 1990. Т. 48. №16. С. 91. И.Ш. Ахатов, Р.К. Газизов, Н.Х. Ибрагимов. Нелокальные симметрии. Эвристический подход. В сб. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 34. Ред. Р.В. Гамкрелидзе. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 3–83.

[4] *P.D. Lax.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Communs Pure and Appl. Math. 1968. V. 21. №5. P. 467–490. Перевод в сб. Математика. 13:5. М.: Мир, 1969. С. 128–150.

[5] *Р. Миура.* В кн. Солитоны в действии. М.: Мир, 1981. С. 13–31.

[6] *В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. Ред. С.П. Новиков. М.: Наука, 1980.

[7] *И.М. Кричевер, С.П. Новиков.* Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения. Успехи матем. наук. 1980. Т. 35. С. 47–68.

[8] *А. Г. Мешков.* К симметрийной классификации эволюционных систем третьего порядка дивергентного вида. Фундам. и прикл. математика. 2006. Т. 12. №3-4. С. 119–137.

[9] *Д. К. Демской, В.Г. Марихин, А.Г. Мешков.* Представления Лакса для триплетов двумерных скалярных полей кирального типа. ТМФ. 2006. Т. 148. №2. С. 189–205.

[10] *Д.К. Демской, А.Г. Мешков.* Представления Лакса для триплета скалярных полей. ТМФ. 2003. Т. 134. №3. С. 401–415.

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИЦАДЗЕ-ЛЫКОВА

О.А. Репин, И.А. Кузнецова
СГЭУ, Самара, ул. Советской Армии, 141

Рассмотрим уравнение

$$y^2U_{xx} - U_{yy} + \alpha U_x = 0, \ \ (|\alpha| < 1) \tag{1}$$

в области D, ограниченной интервалом $J = (0,1)$ и характеристиками $AC = \{(x,y) : x - \frac{y^2}{2} = 0, y \le 0\}$, $BC = \{(x,y) : x + \frac{y^2}{2} = 1, y \le 0\}$, уравнения (1).

Уравнение (1) имеет богатую историю. В своей книге [1], вышедшей в 1959 году, А.В. Бицадзе рассмотрел его как пример уравнения

$$y^2U_{xx} - U_{yy} + a(x,y)U_x + b(x,y)U_y + c(x,y)U = 0$$

для которого при $|\alpha| \le 1$ корректна по Адамару задача Коши, хотя нарушено известное условие Геллерстедта $\lim\limits_{y\to 0} y^{1-\frac{m}{2}}a(x,y) = 0$.

В 1965 году это уравнение было выведено известным теплофизиком А.В. Лыковым [2] методом термодинамики необратимых процессов.

В 1998 году В.А. Нахушева [3] уточнила постановку задачи для уравнения (1), сформулированной А.В. Лыковым, и нашла конструктивную формулу решения вновь поставленной задачи через гипергеометрические функции.

В монографии А.М. Нахушева [4] показано, что к уравнению (1) можно прийти и с помощью линеаризации реактивно-диффузионного уравнения $U_t = [(\alpha U + \beta)U]_{xx} + \mu U - \gamma U^2$.

Уравнение (1), пользуясь терминологией А.М. Нахушева, принято называть уравнением Бицадзе-Лыкова или уравнением влагопереноса.

Примем следующие обозначения

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{t}{x})\varphi(t)dt, \alpha > 0, \\ \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}\varphi)(x), \alpha < 0, 0 < x < 1, n = [-\alpha] + 1 \end{cases}$$

– обобщенный дробный оператор с гипергеометрической функцией Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$, введенный М. Сайго [5], который при $\beta = -\alpha$ обращается в хорошо известный оператор Римана-Лиувилля [6]

$$(I_{0+}^{\alpha,-\alpha,\eta}\varphi)(x) = (I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt, \quad \alpha > 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$(I_{0+}^{-\alpha,\alpha,\eta}\varphi)(x) = (D_{0+}^{\alpha}\varphi)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{n-\alpha}\varphi)(x), \quad \alpha > 0, \quad 0 < x < 1, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Через $W(J)$ обозначим множество функций $U(x, y)$ таких, что

$$\lim_{y\to-0}[a(x,y)U_y + b(x,y)U] \in C(\overline{J}),$$

где $a(x, y)$ и $b(x, y)$ – заданные функции требуемой гладкости, причем предполагается существование пределов $a(x, 0)$, $b(x, 0)$ при $y \to -0$.

Пусть $H^\lambda[0, 1](0 < \lambda \leq 1)$ – класс функций, удовлетворяющих на отрезке $[0, 1]$ условию Гельдера фиксированного порядка λ [6] и $H_0^\lambda[0, 1] = \{\varphi(x) \in H^\lambda[0, 1]; \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$.

Для уравнения (1) изучим следующую краевую задачу.

Задача 1. Найти решение $U(x, y)$ уравнения (1) из класса $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D) \cap W(J)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y\to-0}[a(x,y)U_y + b(x,y)U] = C(x)(x \in \bar{J}), \tag{2}$$

$$\begin{gathered} A_1 x^{q+\frac{1}{2}} \left(I_{0+}^{p,q,(\alpha-1)/4-p}\, t^{-1/2}\, U[\Theta_0(t)]\right)(x) = \\ A_2(I_{0+}^{p+\frac{1-\alpha}{4},0,\frac{a-3}{4}-h}[\beta(t)U(t,-0)](x) + \gamma(x), \quad (x \in J), \end{gathered} \tag{3}$$

где $h = p + q$, A_1 и A_2 – ненулевые действительные константы; $\Theta_0(x)$ – аффикс точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0)$ с характеристикой AC; $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ – такие заданные функции, что

$$a(x,0), b(x,0), \beta(x) \in C^1(\overline{J}) \cap C^2(J), \quad a(x,0) \neq 0, \beta(x) \neq 0, \quad \forall x \in \overline{J},$$
$$\gamma(x) \in H^{\lambda}(\overline{J}) \cap C^2(J), \quad 0 < \lambda < \frac{3+\alpha}{4} - p, \tag{4}$$
$$c(x) \in H_0^{\lambda_1}(\overline{J}) \cap C^2(J), \quad 0 < \lambda_1 < \frac{1}{2};$$
$$\frac{\alpha - 1}{4} < p < \frac{3+\alpha}{4}, q < \frac{1}{2}. \tag{5}$$

В дальнейшем нам потребуются следующие свойства операторов обобщенного дробного исчисления [5], [7]

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = x^{-\alpha-\beta-\eta}(I_{0+}^{\alpha,-\alpha-\eta,-\alpha-\beta} f)(x)(\alpha > 0), \tag{6}$$

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}(I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} f)(t)(x) = (I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} f)(x)(\gamma > 0), \tag{7}$$

а также лемма 5.1. из работы [8].

Лемма 5.1. *Пусть* $0 < -\alpha < \lambda \leq 1$ *и* $\eta > \beta - 1$. *Если* $\varphi(x) \in H^{\lambda}(\overline{J})$, *то* $x^{\beta}(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x) \in H^{\lambda+\alpha}(\overline{J})$.

Переходим к доказательству однозначной разрешимости исследуемой задачи 1.

Используя решение задачи Коши $U(x,0) = \tau(x)$, $x \in \overline{J}$, $\lim\limits_{y \to 0-0} U_y(x,y) = \nu(x)$ $x \in J$ для уравнения (1), когда $|\alpha| < 1$ [9]

$$U(x,y) = c_1 \int_0^1 \tau[x + \frac{y^2}{2}(1-2t)](1-t)^{\frac{\alpha-3}{4}} t^{-\frac{\alpha+3}{4}} dt +$$
$$+ c_2 y \int_0^1 \nu[x + \frac{y^2}{2}(1-2t)](1-t)^{\frac{\alpha-1}{4}} t^{-\frac{\alpha+1}{4}} dt, \tag{8}$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{4}\right)}, c_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3-\alpha}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{4}\right)}$$

найдем $U[\Theta_0(x)]$.

$$U[\Theta_0(x)] = \kappa_1(I_{0+}^{\frac{1-\alpha}{4},0,\frac{\alpha-3}{4}}\tau)(x) + \kappa_2(I_{0+}^{\frac{3-\alpha}{4},-\frac{1}{2},\frac{\alpha-3}{4}}\nu)(x), \tag{9}$$

где

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{4}\right)}, \kappa_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{4}\right)}.$$

На основании краевого условия (2) из соотношения (8) после простых преобразований получим

$$a(x,0)\nu(x) + b(x,0)\tau(x) = c(x)$$

или

$$\nu(x) = c_1(x) - b_1(x,0)\tau(x), \tag{10}$$

где $c_1(x) = \frac{c(x)}{a(x,0)}$, $b_1(x,0) = \frac{b(x,0)}{a(x,0)}$, $a(x,0) \neq 0$ $\forall x \in \overline{J}$

Учитывая (9), (6) и (7), левая часть краевого условия (3) может быть представлена следующим образом

$$
\begin{aligned}
&A_1 x^{q+\frac{1}{2}}(I_{0+}^{p,q,\frac{\alpha-1}{4}-p}[t^{-\frac{1}{2}}(I_{0+}^{\frac{1-\alpha}{4},0,\frac{\alpha-3}{4}}\tau)(t)])(x) = \\
&\quad = A_1 x^{q+\frac{1}{2}}(I_{0+}^{p,q,\frac{\alpha-1}{4}-p}(I_{0+}^{\frac{1-\alpha}{4},\frac{1}{2},\frac{\alpha-1}{4}}\tau)(t))(x) \\
&\quad = A_1 x^{q+\frac{1}{2}}(I_{0+}^{p+\frac{1-\alpha}{4},q+\frac{1}{2},\frac{\alpha-1}{4}-p}\tau)(x) = A_1(I_{0+}^{p+\frac{1-\alpha}{4},0,\frac{\alpha-3}{4}-h}\tau)(x)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

и подобным образом

$$
A_1 x^{q+\frac{1}{2}}(I_{0+}^{p,q,\frac{\alpha-1}{4}-p}[t^{-\frac{1}{2}}(I_{0+}^{\frac{3-\alpha}{4},-\frac{1}{2},\frac{\alpha-3}{4}}\nu)(t)])(x) = A_1(I_{0+}^{p+\frac{3-\alpha}{4},-\frac{1}{2},\frac{\alpha-3}{4}-h}\nu)(x). \tag{12}
$$

А тогда, принимая во внимание (9), (11) и (12), имеем

$$
\begin{aligned}
A_1\kappa_1(I_{0+}^{p+\frac{1-\alpha}{4},0,\frac{\alpha-3}{4}-h}\tau)(x) + A_1\kappa_2(I_{0+}^{p+\frac{3-\alpha}{4},-\frac{1}{2},\frac{\alpha-3}{4}-h}\nu)(x) = \\
= A_2(I_{0+}^{p+\frac{1-\alpha}{4},0,\frac{\alpha-3}{4}-h}[\beta(t)\tau(t)])(x) + \gamma(x).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Применяя оператор

$$
(I_{0+}^{p+\frac{1-\alpha}{4},0,\frac{\alpha-3}{4}-h})^{-1} = I_{0+}^{-p-\frac{1-\alpha}{4},0,-q-\frac{1}{2}}
$$

к обеим частям (13), после несложных вычислений получим

$$
(A_1\kappa_1 - A_2\beta(x))\tau(x) = -A_1\kappa_2\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \frac{\nu(t)}{\sqrt{x-t}}dt + (I_{0+}^{-p-\frac{1-\alpha}{4},0,-q-\frac{1}{2}}\gamma)(x).(x \in J) \tag{14}
$$

Подставляя $\nu(x)$ из (10) в (14), будем иметь

$$
\tau(x) + \int\limits_0^x K(x,t)\tau(t)dt = f(x), \tag{15}
$$

где

$$
K(x,t) = -\frac{A_1\kappa_2 b_1(t,0)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{x-t}}\frac{1}{\mu(x)}, \quad \mu(x) = A_1\kappa_1 - A_2\beta(x) \neq 0.
$$

$$
f(x) = \frac{1}{\mu(x)}(I_{0+}^{-p-\frac{1-\alpha}{4},0,-q-\frac{1}{2}}\gamma)(x) - \frac{A_1\kappa_2\sqrt{\pi}}{\mu(x)}(I_{0+}^{\frac{1}{2}}c_1)(x).
$$

Выясним гладкость правой части уравнения (15) $f(x)$.

На основании леммы 5.1 и условий (4)-(5)

$$
(I_{0+}^{-p-\frac{1-\alpha}{4},0,-q-\frac{1}{2}}\gamma)(x) \in H^{\lambda+p+\frac{1-\alpha}{4}}(\overline{J}).
$$

Опираясь на условия (4) и (5), нетрудно показать, что

$$
(I_{0+}^{\frac{1}{2}}c_1)(x) \in H^{\lambda_1+\frac{1}{2}}(\overline{J}).
$$

А поэтому окончательно имеем

$$
f(x) \in H^{min(\lambda+p+\frac{1-\alpha}{4},\lambda_1+\frac{1}{2})}(\overline{J}).
$$

Таким образом интегральное уравнение Вольтерра второго рода (15) со слабой особенностью в ядре $K(x,t)$ всегда однозначно разрешимо [10] и $\tau(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$.

Стало быть решение исследуемой задачи 1 дается формулой (8), где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ однозначно определяются соответственно из (15) и соотношения (10), причем $\nu(x)C^1(J)$.

Перейдем теперь к случаю, когда $\alpha = 1$. Для уравнения (1) при $\alpha = 1$ исследуем задачу 2, где по сравнению с задачей 1 условие (3) принимает вид условия

$$A_1 x^{-p}(I^p_{0+}U[\Theta_0(t)])(x) = A_2(I^{p,0,0}_{0+}\beta(t)U(t,0))(x) + \gamma_1(x). \tag{16}$$

Здесь $0 < p < 1$, $\gamma_1(x) \in H^{\lambda_2}(\overline{J})$, $0 < p < \lambda_2 \le 1$, A_1, A_2 и $\beta(x)$ отвечают требованиям задачи 1.

Как и в задаче 1 вопрос однозначной разрешимости задачи 2 эквивалентно сводится к разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

В заключение рассмотрим уравнение (1) при $a = -1$.

В этом случае изучим задачу 3, где по сравнению с задачей 2 краевое условие (16) заменяется условием

$$A_1 x^{q-\frac{1}{2}}(I^{p,q,-1-p}_{0+}U[\Theta_0(t)])(x) = A_2(I^{1+p,0,-(p+q+\frac{1}{2})}_{0+}\beta(t)U(t,0))(x) + \gamma_2(x).$$

Здесь $-1 < p < 0$, $q < \frac{3}{2}$, $0 < 1+p < \lambda_3 \le 1$, $c_1(x), \gamma_2(x) \in H^{\lambda_3}(\overline{J})$; A_1, A_2 и $\beta(x)$ те же самые, что и в задаче 2.

Методика доказательства однозначной разрешимости задачи 3 аналогична доказательству однозначной разрешимости задач 1 и 2.

Список литературы

[1] *А.В. Бицадзе.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АНСССР. 1959.

[2] *А.В. Лыков* Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена. Инженерно-физический журнал. 1965. Т. 9. №3. С. 287–304.

[3] *В.А. Нахушева.* Об одной задаче А.В. Лыкова и конструктивной формуле ее решения. Вестник КБНЦ РАН. Нальчик. 1998. Т. 1. №1. С. 48–53.

[4] *А.М. Нахушев.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк. 1995.

[5] *Saigo M.* A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions. Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. V. 11. №2. P. 135–143.

[6] *С. Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987.

[7] *О.А. Репин.* Краевые задачи со смещением для уравнения гиперболического и смешанного типов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 1992.

[8] *M. Saigo, A.A. Kilbas.* Generalized fractional integrals and derivatives in Holder spaces. Transform Methods and Special Functions. Sofia 94. Sci. Cult. Tech. Publ., Singapore. 1995. P. 282–293.

[9] *А.В. Бицадзе.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.:. Наука. 1981.

[10] *А.Д. Полянин, А.В. Манжиров.* Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит. 2003.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

О.А. Репин, Т.В. Шувалова

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,

Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y = 0, \frac{1}{2} < \alpha, \beta < 1 \tag{1}$$

в области D, ограниченной при $x > 0$, $y > 0$ кривой Жордана σ с концами в точках $A(1;0)$ и $B(0;1)$ и отрезком $OB(x = 0, 0 \le y \le 1)$; при $x > 0$, $y < 0$ характеристиками уравнения (1): $OC : x + y = 0$, $AC : \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1$.

Обозначим через $D_0 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$ эллиптическую часть области D и через $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$ гиперболическую часть области D.

Пусть $\theta_0(x) = \frac{x}{4} - i\frac{x}{4}$ – аффикс точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x;0)$, $0 < x < 1$, с характеристикой OC.

$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x)$ – обобщенный оператор дробного интегродифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; z)$, введенный японским математиком М. Сайго [1]

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\Big(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{t}{x}\Big)\varphi(t)\,dt, \\ 0 < x < 1,\ \alpha > 0,\ \beta, \eta \in C, \\ \dfrac{d^n}{dx^n} I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}\varphi(x), \quad 0 < x < 1,\ \alpha < 0,\ \beta,\ \eta \in C,\ n = [-\alpha] + 1. \end{cases} \tag{2}$$

Для уравнения (1) поставим и исследуем следующую нелокальную краевую задачу.
Задача I. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:
1) $u(x, y)$ является решением уравнения (1) в области D;
2) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D) \cap C^1[(D_0 \setminus OB \cup OA) \cap (D_1 \setminus OA)]$;
3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x, y)|_\sigma = \varphi(s), \quad 0 \le s \le l; \tag{3}$$

$$u(0; y) = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{4}$$

$$I_{0+}^{\frac{1}{2}-\beta, \frac{1+\beta-\alpha}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2}} x^{\beta-1} u[\theta_0(x)] = Ax^{\frac{\alpha+\beta-3}{2}} a(x)u(x,0) + b(x); \tag{5}$$

4) $u(x, y)$ удовлетворяет условию склеивания

$$\lim_{y\to 0+0} y^\beta u_y(x, y) = \lim_{y\to 0-0} (-y)^\beta u_y(x, y), (0 < x < 1); \tag{6}$$

где $\varphi(s)$ и $\varphi_1(y)$ - заданные непрерывные функции; A – отрицательная действительная константа; $a(x) \in C[0, 1]$, $a(x)$ – положительная, неубывающая на отрезке $[0, 1]$ функция; $b(x)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Отметим, что краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа изучались в работах [2]-[6] и др. Данная работа посвящена доказательству единственности решения нелокальной задачи, существенной особенностью которой является наличие оператора обобщенного дробного интегродифференцирования в краевом условии (5).

Задача DN (Дирихле-Неймана). Найти в области D_0 регулярное решение уравнения (1), непрерывное в замкнутой области D_0, удовлетворяющее краевым условиям (3), (4) и

$$\lim_{y\to 0+0} y^\beta u_y(x,y) = \nu_1(x), (0 < x < 1); \tag{7}$$

где $\varphi(s)$ и $\varphi_1(y)$ – заданные непрерывные функции; $\nu_1(x) \in C(0;1)$, может обращаться в бесконечность на концах интервала $(0;1)$ порядка меньше $1-\alpha$; $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi_1(1) = 0$.

Регулярным решением уравнения (1) [7] в области D_0 будем называть функцию $u(x,y)$, имеющую непрерывные производные до второго порядка в области D_0 и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках области D_0.

С помощью функции Грина [8]

$$G(x,y;x_0,y_0) = g(x,y;x_0,y_0) - (R^2)^{1-\alpha-\beta} g(x,y;\overline{x_0},\overline{y_0}),$$

где $g(x,y;x_0,y_0)$ – фундаментальное решение уравнения (1), имеющее вид

$$g(x,y;x_0,y_0) = k x_0^{1-\alpha} y^{\beta-1} (r^2)^{\alpha-\beta-1} F_2(\beta-\alpha+1, \frac{3}{2}-\alpha, \beta-\frac{1}{2}; 3-2\alpha, 2\beta-1; t, z),$$

где

$$k = \frac{2^{\beta-\alpha-1}\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)\Gamma(\beta-\frac{1}{2})\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\pi\Gamma(3-2\alpha)\Gamma(2\beta-1)}, \quad t = 1-\frac{r_1^2}{r^2},$$
$$z = 1-\frac{r_2^2}{r^2}, \quad r^2 = (\sqrt{x}-\sqrt{x_0})^2 + (\sqrt{y}-\sqrt{y_0})^2, \quad r_1^2 = (\sqrt{x}+\sqrt{x_0})^2 + (\sqrt{y}-\sqrt{y_0})^2,$$
$$r_2^2 = (\sqrt{x}-\sqrt{x_0})^2 + (\sqrt{y}+\sqrt{y_0})^2, \quad \sqrt{\overline{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}}{R^2}, \quad \sqrt{\overline{y_0}} = \frac{\sqrt{y_0}}{R^2}, \quad R^2 = x_0 + y_0,$$
$$F_2(a,b,b';c,c';x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_m(c')_n}\cdot\frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^n}{n!},$$

F_2 – гипергеометрическая функция Горна [9], решение задачи DN можно получить в явном виде

$$u(x,y) = -kx^{1-\alpha}\int\limits_0^1 \nu_1(t)\Big[\frac{F(\beta-\alpha+1,\frac{3}{2}-\alpha;3-2\alpha;-\frac{4\sqrt{tx}}{(\sqrt{t}-\sqrt{x})^2+y})}{((\sqrt{t}-\sqrt{x})^2+y)^{1+\beta-\alpha}}-$$
$$-\frac{(x+y)^{1-\alpha+\beta}F(\beta-\alpha+1,\frac{3}{2}-\alpha;3-2\alpha;-\frac{4\sqrt{tx}(x+y)}{(\sqrt{t}(x+y)-\sqrt{x})^2+y})}{((\sqrt{t}(x+y)-\sqrt{x})^2+y)^{1+\beta-\alpha}}\Big]dt+$$
$$+(1-\alpha)kx^{1-\alpha}\int\limits_0^1 \varphi_1(t)t^{\beta-1}\Big[\frac{F(\beta-\alpha+1,\beta-\frac{1}{2};2\beta-1;-\frac{4\sqrt{ty}}{x+(\sqrt{t}-\sqrt{y})^2})}{(x+(\sqrt{t}-\sqrt{y})^2)^{1+\beta-\alpha}}- \qquad (8)$$
$$-\frac{(x+y)^{1+\beta-\alpha}F(\beta-\alpha+1,\beta-\frac{1}{2};2\beta-1;-\frac{4\sqrt{ty}(x+y)}{x+(\sqrt{t}(x+y)-\sqrt{y})^2})}{(x+(\sqrt{t}(x+y)-\sqrt{y})^2)^{1+\beta-\alpha}}\Big]dt-$$
$$-\int\limits_0^{\sqrt{2}}\varphi(s)A_s[G(\xi,\eta;x,y)]ds,$$

где

$$A_s[f] = x\frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial x}f - y\frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial y}f, \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\boldsymbol{n},x), \quad \frac{dx}{ds} = -\cos(\boldsymbol{n},y),$$

$\boldsymbol{n}$ – внешняя нормаль к кривой σ.

Полагая в формуле (8) $y=0$, найдем соотношение между $\tau_1(x)=u(x,0)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из эллиптической части D_0 на отрезок OA.

$$\tau_1(x) = u(x,0) = -kA_1^*x^{1-\alpha-\beta}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}\nu_1(t)F\Big(\alpha+\beta-1,\beta;2\beta;1-\frac{t}{x}\Big)\,dt-$$
$$-kA_2^*x^{\beta-\alpha}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}\nu_1(t)(t-x)^{1-2\beta}F\Big(1-\beta,\alpha-\beta;2-2\beta;1-\frac{t}{x}\Big)\,dt+ \qquad (9)$$
$$+kA_1^*\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}\nu_1(t)F(\alpha+\beta-1,\beta;2\beta;1-tx)dt+$$
$$+kA_2^*\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}\nu_1(t)(tx-1)^{1-2\beta}F(1-\beta,\alpha-\beta;2-2\beta;1-tx)dt+f(x),$$

где

$$A_1^* = \frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2-\alpha-\beta)}, \quad A_2^* = \frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta)},$$
$$f(x) = (1-\alpha)kx^{1-\alpha}\int\limits_0^1 \varphi_1(t)t^{\beta-1}\left(\frac{1}{(x+t)^{1+\beta-\alpha}} - \frac{1}{(1+xt)^{1+\beta-\alpha}}\right)dt + f_0(x),$$

$$f_0(x) = -\int\limits_0^{\sqrt{2}} \varphi(s) A_s[G(\xi,\eta;x,y)]_{y=0}\, ds =$$

$$= (1+\beta-\alpha)kx^{1-\alpha}(x-1)\int\limits_0^1 \varphi[\sqrt{2}(1-t)](1-t)^{\beta-1}(1+x+2\sqrt{xt})^{\alpha-\beta-2}\times$$

$$\times F\Big(\beta-\alpha+2, \frac{3}{2}-\alpha; 3-2\alpha; \frac{4\sqrt{tx}}{1+x+2\sqrt{tx}}\Big)dt.$$

Справедлива следующая лемма [10].

Лемма 1. *Если решение $u(x,y)$ уравнения (1) достигает максимума (минимума) в точке $(x_0;0)$, $0 < x_0 < 1$, то $\lim\limits_{y\to 0+0} y^\beta u_y(x_0,y) < 0$ ($\lim\limits_{y\to 0+0} y^\beta u_y(x_0,y) > 0$), при условии, что этот предел существует.*

Исследование уравнения (1) в гиперболической области. D_1. Воспользовавшись решением задачи Коши для уравнения (1) [11], найдем $u[\theta_0(x)]$.

$$\begin{aligned} u[\theta_0(x)] = k_1 x^{1-\beta}\Big(I_{0+}^{\beta-\frac{1}{2},\frac{\alpha-\beta-1}{2},\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{\alpha+\beta-3}{2}}\tau_2(t)\Big)(x)+ \\ + k_2 x^{1-\alpha}\Big(I_{0+}^{\frac{3}{2}-\beta,\frac{\beta-\alpha-1}{2},\frac{\beta-\alpha}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta-1}{2}}\nu_2(t)\Big)(x), \end{aligned} \qquad (10)$$

где $\tau_2(x) = u(x,-0)$, $\nu_2(x) = \lim\limits_{y\to 0-0}(-y)^\beta u_y(x,y)$,

$$k_1 = \frac{2^{\alpha-\beta}\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma(\beta-\frac{1}{2})}, \quad k_2 = -\frac{2^{\alpha+3\beta-3}\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\beta)}.$$

Подставим $u[\theta_0(x)]$ в краевое условие (5) и, выполнив необходимые вычисления, получим

$$k_2\nu_2(x) = AI_{0+}^{2\beta-2,\alpha-\beta,1-\beta}x^{\alpha-1}a(x)\tau_2(x) - k_1 I_{0+}^{2\beta-2,\alpha-\beta,1-\beta}x^{\alpha-1}\tau_2(x) + b_1(x), \qquad (11)$$

где $b_1(x) = I_{0+}^{2\beta-2,\alpha-\beta,1-\beta}x^{(1+\alpha-\beta)/2}b(x)$.

Лемма 2. *Если $u(x,y)$ - решение уравнения (1) таково, что $u(x,0) = \tau_2(x)$ достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке x_0, $0 < x_0 < 1$, (при этом $b(x) \equiv 0$), то $\nu_2(x_0) > 0$ ($\nu_2(x_0) < 0$).*

Доказательство. Рассмотрим обобщенный оператор из второго слагаемого

$$I_{0+}^{2\beta-2,\alpha-\beta,1-\beta}x^{\alpha-1}\tau_2(x) = \frac{d}{dx}(I_{0+}^{2\beta-1,\alpha-\beta-1,-\beta}x^{\alpha-1}\tau_2(t))(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2\beta-1)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x x^{2-\alpha-\beta}(x-t)^{2\beta-2}t^{\alpha-1}F\Big(\alpha+\beta-2,\beta;2\beta-1;\frac{x-t}{x}\Big)\tau_2(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2\beta-1)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x t^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-\alpha}\Big(\frac{x-t}{x}\Big)^{\alpha+\beta-2}F\Big(\alpha+\beta-2,\beta;2\beta-1;\frac{x-t}{x}\Big)\tau_2(t)dt.$$

Пусть

$$J_{1\delta}(x) = \frac{1}{\Gamma(2\beta-1)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x-\delta} t^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-\alpha}\Big(\frac{x-t}{x}\Big)^{\alpha+\beta-2}F\Big(\alpha+\beta-2,\beta;2\beta-1;\frac{x-t}{x}\Big)\tau_2(t)dt.$$

После определенных преобразований получим

$$J_{1\delta}(x) = \frac{1}{\Gamma(2\beta-1)}(x-\delta)^{\alpha-1}\delta^{\beta-\alpha}\Big(\frac{\delta}{x}\Big)^{\alpha+\beta-2}F\Big(\alpha+\beta-2,\beta;2\beta-1;\frac{\delta}{x}\Big)\tau_2(x-\delta)-$$
$$-\frac{1}{\Gamma(2\beta-1)}x^{\beta-1}\Big(\frac{\delta}{x}\Big)^{2\beta-2}F\Big(\beta-\alpha,\beta-1;2\beta-1;\frac{\delta}{x}\Big)\tau_2(x)+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(2\beta-1)}x^{\beta-1}\frac{\Gamma(2\beta-1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)\Gamma(\beta)}\tau_2(x)-$$
$$-\frac{2\beta-2}{\Gamma(2\beta-1)}\int\limits_0^{x-\delta}x^{2-\alpha-\beta}\frac{\tau_2(x)-\tau_2(t)}{(x-t)^{3-2\beta}}t^{\alpha-1}F\Big(\alpha+\beta-2;\beta-1;2\beta-2;\frac{x-t}{x}\Big)dt.$$

При переходе к пределу при $\delta \to 0$ с учетом преобразований гипергеометрической функции, стоящей под знаком интеграла, окончательно имеем

$$J_1 = x^{\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)\Gamma(\beta)}\tau_2(x) + \frac{(2-2\beta)2^{\beta-\alpha}}{\Gamma(2\beta-1)}x^{1-\alpha}\times$$
$$\times\int\limits_0^x\frac{\tau_2(x)-\tau_2(t)}{(x-t)^{3-2\beta}}(t+x)^{\alpha-\beta}F\Big(\frac{\beta-\alpha}{2};\frac{\beta-\alpha+1}{2};\beta-\frac{1}{2};\Big(\frac{t-x}{t+x}\Big)^2\Big)dt.$$

Таким образом доказано, что в точке x_0 $\quad I_{0+}^{2\beta-2,\alpha-\beta,1-\beta}x^{\alpha-1}\tau_2(x) > 0$.

При условиях, наложенных на функцию $a(x)$, аналогично тому, как проделано выше, можно показать, что обобщенный оператор, входящий в первое слагаемое в формуле (11), также положителен.

Заметим теперь, что в формуле (11) $k_2 < 0$, $A < 0$, $k_1 > 0$. Из этого следует, что $\nu_2(x_0) > 0$. Лемма 2 доказана.

Теорема. *Задача I для уравнения (1) имеет единственное решение.*

Доказательство теоремы непосредственно следует из лемм 1 и 2 и условия склеивания (6).

Список литературы

[1] *M. Saigo.* Math. Japan. 1978. Vol. 11, №2. P. 135–143.

[2] *М.М. Зайнулабидов.* Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, №1. С. 99-108.

[3] *В.В. Азовский.* Волж. мат. сб. Куйбышев, 1971. Вып. 9. с. 3–7.

[4] *И.А. Макаров.* Дифференц. уравнения. Сб. тр. мат. кафедр пединститутов РСФСР. Рязань, 1973. Вып. 2. С. 124–155.

[5] *Хе Кан Чер.* Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск, 1980. С. 64–67.

[6] *К.Б. Сабитов, Г.Г. Шарафутдинова.* Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, №6. С. 788–800.

[7] *М.М. Смирнов.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966.

[8] *С.И. Макаров.* В сб. «Аналитические методы решения дифференциальных уравнений». Куйбышев, КГУ, 1986. С. 80–87.

[9] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.

[10] *С.А. Терсенов.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1973.

[11] *А.М. Гордеев.* Волжск. матем. сб. Вып. 6. Куйбышев, 1968. С. 56–61.

СУЩЕСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

О.А. Репин, Р.Н. Салихов
СамГТУ, Самара, E-mail: salrus@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$|y|^{2m}u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0\,, \tag{1}$$

где $m > \frac{1}{2}$, а α – заданная действительная постоянная. Данное уравнение было предложено и исследовано при $\frac{(1-2m)}{2} \leqslant \alpha < 1$ в работах А. В. Бицадзе [1] как модель уравнения смешанного типа, порядок которого вырождается вдоль линии изменения типа.

Пусть D – конечная односвязная область плоскости независимых переменных x и y, ограниченная характеристиками

$$AC: x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0, \quad BC: x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

уравнения (1) и отрезком $\bar{J} \equiv AB = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

$\Theta_0(x) = \Big(x/2, -(x/m_0)^{m_0/2}\Big)$ – точка пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $x \in J$ с характеристикой AC. $I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}$ – оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса, введенный в [2] и имеющий при действительных $\alpha(\alpha \neq 0), \beta, \eta \in \mathbb{R}$ и $x > 0$ вид

$$(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x) = \frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F\Big(\alpha+\beta, -\eta, \alpha; \frac{t-x}{1-x}\Big)\varphi(t)dt, \quad \alpha > 0. \tag{2}$$

$E_{0+}^{\alpha,\beta}$ – оператор Эрдейи-Кобера, который действует на функцию $f(x)$ по формуле [3]

$$(E_{0+}^{\alpha,\beta}f)(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\beta} f(t)dt\,; \tag{3}$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера; $F(a, b, c; x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

В области D поставим и изучим следующую задачу:

Задача 1. Найти решение $u(x, y) \in C(\bar{D}) \bigcap C^2(D)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y \to 0-} \Big[(E_{0+}^{1-2\beta,2\beta-1} a(t,y)u_y(t,y))(x) + u(x,y)\Big] = \varphi_1(x), \tag{4}$$

$$A(E_{0+}^{\gamma,-\gamma+\beta-1} u[\Theta_0])(x) + B(I_{1-}^{\gamma-\beta+,c,-\gamma+\beta-1} \lim_{y \to 0-} (-y)^{\alpha} u_y(x,y))(x) = \varphi_2(x), \tag{5}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – известные функции, A и B – действительные постоянные, γ, c – заданные числа, $\frac{1}{2} - m < \alpha < 1$.

Теорема 1. *Пусть* $m > \frac{1}{2}$ *и выполнены условия*

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} - m < \alpha < 1, \quad a(x,y) = (-y)^{\alpha} a_1(x), \quad \gamma < \beta - 1, \quad c > -\gamma + \beta - 1, \\
&\lambda_0 > 0, \quad 1 - 2\beta < \lambda_1 \leqslant 1, \quad \lambda_2 > 0, \\
&a_1(x) \in H^{\lambda_0}[0,1], \quad \varphi_1(x) \in H^{\lambda_1}[0,1], \quad \varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}[0,1],
\end{aligned}
$$

тогда задача 1 имеет и притом единственное решение в классе $H_0[0,1]$.

Доказательство. При $\frac{1}{2} - m < \alpha < 1$ регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$
u(x,0) = \tau(x)\,, \qquad\qquad 0 \leqslant x \leqslant 1\,, \tag{6}
$$

$$
\lim_{y \to -0} (-y)^{\alpha} u_y(x,y) = \nu(x)\,, \quad 0 < x < 1\,, \tag{7}
$$

где $\tau(x) \in C^1(\bar{J}) \bigcap C^2(J)$, $\nu(x) \in C^1(J)$ дается формулой [1]

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = {}& \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau \left[x + (1-2t)(-y)^{\frac{2}{m_0}} \frac{m_0}{2} \right] t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1} dt - \\
& - \frac{m_0 \Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma^2(1-\beta)} (-y)^{1-\alpha} \int_0^1 \nu \left[x + (1-2t)(-y)^{\frac{2}{m_0}} \frac{m_0}{2} \right] t^{-\beta}(1-t)^{-\beta} dt\,,
\end{aligned} \tag{8}
$$

где

$$
\beta = \frac{2m - 1 + 2\alpha}{2(2m+1)}, \quad m_0 = \frac{4}{2m+1}.
$$

Используя (6),(7), из условия (4) имеем

$$
\tau(x) = \varphi_1(x) - (E_{0+}^{1-2\beta, 2\beta-1} a_1(t)\nu)(x). \tag{9}
$$

На основании решения задачи Коши (8) и формулы (3) получим, что

$$
u[\Theta_0] = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)} (E_{0+}^{\beta,\beta-1}\tau)(x) - \frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{2m+1}{4} \right)^{-2\beta} x^{1-2\beta} (E_{0+}^{1-\beta,-\beta}\nu)(x). \tag{10}
$$

С учетом обозначений

$$
A_0 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}\,, B_0 = \frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{2m+1}{4} \right)^{-2\beta} \tag{11}
$$

соотношение (10) перепишем в виде

$$
u[\Theta_0] = A_0 (E_{0+}^{\beta,\beta-1}\tau)(x) - B_0 x^{1-2\beta} (E_{0+}^{1-\beta,-\beta}\nu)(x). \tag{12}
$$

При условиях $\beta > 0, \alpha + \beta \geqslant 0$, либо $\beta < 0, \alpha > 0$, либо $\alpha < 0, \alpha + \beta \leqslant 0$ верна формула [3]

$$
(E_{0+}^{\alpha,\eta} t^{\beta} f)(x) = x^{\beta} (E_{0+}^{\alpha,\eta+\beta} f)(x). \tag{13}
$$

Используя (13), получим

$$u[\Theta_0] = A_0(E_{0+}^{\beta,\beta-1}\tau)(x) - B_0(E_{0+}^{1-\beta,\beta-1}t^{1-2\beta}\nu)(x). \tag{14}$$

Подставив (14) в условие (5) и используя формулу [3]

$$(E_{0+}^{\alpha,\eta}E_{0+}^{\beta,\eta+\alpha}f)(x) = (E_{0+}^{\alpha+\beta,\eta}f)(x). \tag{15}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} AA_0(E_{0+}^{\gamma+\beta,-\gamma+\beta-1}\tau)(x) - AB_0(E_{0+}^{\gamma-\beta+1,-\gamma+\beta-1}t^{1-2\beta}\nu)(x) + \\ + B(I_{1-}^{\gamma-\beta+1,c,-\gamma+\beta-1}\nu)(x) = \varphi_2(x). \end{aligned} \tag{16}$$

Применив к (16) оператор $E_{0+}^{-\gamma+\beta-1,0}$, на основании (15) получим

$$\begin{aligned} &AA_0(E_{0+}^{2\beta-1,0}\tau)(x) - AB_0x^{1-2\beta}\nu(x) + \\ &+B(E_{0+}^{-\gamma+\beta-1,0}I_{1-}^{\gamma-\beta+1,c,-\gamma+\beta-1}\nu)(x) = (E_{0+}^{-\gamma+\beta-1,0}\varphi_2)(x). \end{aligned} \tag{17}$$

Подставим $\tau(x)$ из (9) в соотношение (17)

$$\begin{aligned} AA_0(E_{0+}^{2\beta-1,0}\varphi_1)(x) - AA_0(E_{0+}^{2\beta-1,0}E_{0+}^{1-2\beta,2\beta-1}a_1(t)\nu)(x) - AB_0x^{1-2\beta}\nu(x) + \\ +B(E_{0+}^{-\gamma+\beta-1,0}I_{1-}^{\gamma-\beta+1,c,-\gamma+\beta-1}\nu)(x) = (E_{0+}^{-\gamma+\beta-1,0}\varphi_2)(x). \end{aligned} \tag{18}$$

Перепишем (18) в следующем виде

$$\begin{aligned} -AA_0a_1(x)\nu(x) - AB_0x^{1-2\beta}\nu(x) + B(E_{0+}^{-\gamma+\beta-1,0}I_{1-}^{\gamma-\beta+1,c,-\gamma+\beta-1}\nu)(x) = \\ = (E_{0+}^{-\gamma+\beta-1,0}\varphi_2)(x) - AA_0E_{0+}^{2\beta-1,0}\varphi_1(x). \end{aligned} \tag{19}$$

С учетом формулы [4]

$$\begin{aligned} (I_{0+}^{a,b,0}I_{1-}^{-a,c,a}\nu)(x) = \frac{\sin\pi(a+1)}{\pi}x^b\int_0^1 u^{-a}(1-u)^{a-c}(u-x)^{-1}\nu(u)du - \\ -\cos\pi(a+1)x^{-a-b}(1-x)^{a-c}\nu(x). \end{aligned} \tag{20}$$

и в силу того, что $E_{0+}^{\alpha,\eta} = I_{0+}^{\alpha,0,\eta}$ равенство (19) примет вид

$$\begin{aligned} \left[-AA_0a_1(x) - AB_0x^{1-2\beta} - B\cos\pi(-\gamma+\beta)x^{\gamma-\beta+1}(1-x)^{-\gamma+\beta-1-c}\right]\nu(x) + \\ +B\frac{\sin\pi(-\gamma+\beta)}{\pi}\int_0^1 u^{\gamma-\beta+1}(1-u)^{-\gamma+\beta-1-c}\frac{\nu(u)}{u-x}du = g(x)\,, \end{aligned} \tag{21}$$

где $g(x) = (E_{0+}^{-\gamma+\beta-1,0}\varphi_2)(x) - AA_0E_{0+}^{2\beta-1,0}\varphi_1(x)$.
Произведя замену

$$\omega(x) = x^{\gamma-\beta+1}(1-x)^{-\gamma+\beta-1-c}\nu(x)\,, \tag{22}$$

получим сингулярное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} &[AA_0a_1(x)x^{-\gamma+\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta+1+c} + AB_0x^{-\gamma-\beta}(1-x)^{\gamma-\beta+1+c}]\omega(x) + \\ &+ B\cos\pi(-\gamma+\beta)\omega(x) - B\frac{\sin\pi(-\gamma+\beta)}{\pi}\int_0^1\frac{\omega(u)}{u-x}du = g(x). \end{aligned} \tag{23}$$

Решение полученного характеристического сингулярного уравнения (23) будем искать в классе $H_0^* = H^*([0,1)])\bigcap C([0,1))$ гельдеровских функций ограниченных в точке $x=0$ и неограниченных в точке $x=1$.

При $\gamma < \beta - 1$ верны все формулы композиции и сдвига для операторов Эрдейи-Кобера, а при $\gamma < \beta - 1$, $c > -\gamma + \beta - 1$, $a_1(x) \in H^{\lambda_0}[0,1]$, $\lambda_0 > 0$ функция

$$s_1(x) = -AA_0 a_1(x) x^{-\gamma+\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta+1+c} - AB_0 x^{-\gamma-\beta}(1-x)^{\gamma-\beta+1+c} - \\ -B\cos\pi(-\gamma+\beta) \in H^{\min(-\gamma+\beta-1,\gamma-\beta+1+c,\lambda_0)}[0,1].$$

Так как $s_2(x) = B\sin\pi(-\gamma+\beta)$,то при $x \in [0,1]$ выполняется условие $s_1^2 + s_2^2 \neq 0$.

Для выяснения гладкости правой части $g(x)$ интегрального уравнения (23) воспользуемся следующими леммами [5], [6]:

Лемма 1. *Пусть* $0 < -\alpha < \lambda \leqslant 1$ *и* $\eta > \beta - 1$. *Если* $\varphi(x) \in H^{\lambda}[0,1]$, *то* $x^{\beta}(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x)\,, (1-x)^{\beta}(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x) \in H^{\lambda+\alpha}[0,1]$.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha > 0$, $\eta > \beta - 1$, $\lambda > 0$ *и* $\varphi(x) \in H^{\lambda}[0,1]$. *Тогда* $x^{\beta}(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x)\,, (1-x)^{\beta}(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x) \in H^{\lambda}[0,1]$.

Рассмотрим функцию $g(x) = (E_{0+}^{-\gamma+\beta-1,0}\varphi_2)(x) - AA_0(E_{0+}^{2\beta-1,0}\varphi_1)(x)$. Если $\varphi_1(x) \in H^{\lambda_1}[0,1]$ и $1-2\beta < \lambda_1 < 1$, то согласно лемме 1 $(I_{0+}^{2\beta-1,0,0}\varphi_1)(x) \in H^{\lambda_1+2\beta-1}[0,1]$. При $\varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}[0,1]$, $\lambda_2 > 0$ и $\gamma < \beta - 1$ согласно лемме 2 имеем, что $(I_{0+}^{-\gamma+\beta-1,0,0}\varphi_2)(x) \in H^{\lambda_2}[0,1]$. Следовательно, функция $g(x) \in H^{\min(\lambda_1+2\beta-1,\lambda_2)}[0,1]$.

Найдем индекс интегрального уравнения

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{s_1(x) - is_2(x)}{s_1(x) + is_2(x)} = e^{i\theta(x)}, \theta(x) = \arg G(x); \\ G(0) = G(1) &= \frac{-B\cos\pi(-\gamma+\beta) - iB\sin\pi(-\gamma+\beta)}{-B\cos\pi(-\gamma+\beta) + iB\sin\pi(-\gamma+\beta)} = \\ &= \cos^2\pi(-\gamma+\beta) - \sin^2\pi(-\gamma+\beta) + 2i\sin\pi(-\gamma+\beta)\cos\pi(-\gamma+\beta) = \\ &= \cos 2\pi(-\gamma+\beta) + i\sin 2\pi(-\gamma+\beta) = e^{i2\pi(-\gamma+\beta)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\arg G(0) = \arg G(1) = 2\pi(-\gamma+\beta) + 2\pi n, n \in Z.$$

Возьмем $0 \leqslant \arg G(0) < 2\pi$. Индекс уравнения (23) для искомого класса функций равен

$$\chi = \left[\frac{\theta(1)}{2\pi}\right] = 0.$$

Таким образом, сингулярное уравнение (23) имеет единственное решение, а значит и решение задачи 1 существует и единственно.

Отметим, что задачу с подобным условием (4) для вырождающегося гиперболического уравнения рассматривал С.Ю. Назаров [7], однако в данной работе были использованы только операторы Римана-Лиувилля. Краевое условие (5) названо А.М. Нахушевым в его книге [8], как нелокальное внутреннекраевое условие, но А.М. Нахушев использовал также операторы Римана-Лиувилля.

Список литературы

[1] *А.В. Бицадзе.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

[2] *M. Saigo.* A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions. Math. Rep. Kyushu. Univ. 1978. V. 11. №2. P. 135–143.

[3] *С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.

[4] *Srivastava N.M., Saigo M.* Multiplication of fractional calculus operators and boundary value problem involving the Euler-Darboux equation. J.Math.Anal. and Appl. 1987. V. 121. №2. P. 325–369.

[5] *M. Saigo, A.A. Kilbas.* Generalized fractional integrals and derivatives in Holder spaces. Transfom Methods and Special Functions, Sofia 94. (Proceeding of International Workshop). Sci. Cult. Tech. Publ. Singapore. 1995. P. 282–293.

[6] *О.А. Репин.* О разрешимости задачи с краевым условием на характеристиках для вырождающегося гиперболического уравнения. Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. №1. С. 110–113.

[7] *С.Ю. Назаров.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений второго порядка. Кабардино-Балкарский Ордена дружбы народов гос. университет. Винити №2144-85, Нальчик 1985. 21 с.

[8] *А.М. Нахушев.* Уравнения математической биологии: Учеб. пособие для университетов. М.: Высш. шк., 1995.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

О.В. Савкова

Орловский государственный университет, 302026, Орел, ул. Комсомольская, 95

При рассмотрении начально-краевой задачи для уравнения смешанного типа с кратным запаздыванием [1]

$$L(u) \equiv yu_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) - yu(x-(1+H(y))\tau, y) = 0, \tag{1}$$

где $H(\xi)$ – функция Хевисайда, $0 < \tau \equiv \text{const}$, вопрос существования решения сводится к разрешимости сингулярного интегрального уравнения

$$z_k^{\nu}(x) + \lambda \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu}(t) \left(\frac{|(2k+1)\tau - t|}{|(2k+1)\tau - x|}\right)^{2/3} \left[\frac{\text{sign}(t-(2k+1)\tau)}{t-x} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{t+(2k+1)\tau}{|(2k+1)\tau - t|}\right)^{2/3} \frac{1}{t+x}\right] dt = \rho_k(x), \tag{2}$$

$$2k\tau \leqslant x \leqslant 2(k+1)\tau,\ x \neq (2k+1)\tau,\ k = 0, 1, ...$$

Здесь $\rho_k(x)$ известная функция, принадлежащая классу $C([2k\tau;(2k+1)\tau)\bigcup((2k+1)\tau;2(k+1)\tau])\bigcap C^{(1,\lambda)}([2k\tau;(2k+1)\tau)\bigcup((2k+1)\tau;2(k+1)\tau])$, $0<\lambda\leqslant 1$ и при $x\to(2k+1)\tau$ обращается в бесконечность порядка не выше $2/3$, а при $x\to 0$ $\rho_0(x)$ и $\rho_0'(x)$ конечны. Кроме того $\rho_k(x)\to 0$ при $x\to+\infty$.

Для регуляризации сингулярного интегрального уравнения (2) представим его в виде

$$z_k^\nu(x)+\lambda\int\limits_{2k\tau}^{2(k+1)\tau} z_k^\nu(t)\left(\frac{t-2(k+1)\tau}{x-2(k+1)\tau}\right)^{2/3}\frac{\operatorname{sign}(t-2(k+1)\tau)}{\tau-x}dt=\beta_k(x) \tag{3}$$

$(k=1,2,\dots)$, $2k\tau<x<2(k+1)\tau$, $x\neq(2k+1)\tau$ и

$$z_0^\nu(x)+\lambda\int\limits_0^{2\tau} z_0^\nu(t)\left(\frac{t-\tau}{x-\tau}\right)^{2/3}\frac{2t\operatorname{sign}(t-\tau)}{\tau^2-x^2}dt=\beta_0(x),\ 0<x<\tau,\ x\neq\tau, \tag{4}$$

где

$$\beta_k(x)=\rho_k(x)+\lambda\int\limits_0^\infty z^\nu(t)A_k(x,t)dt,\quad (k=0,1,\dots), \tag{5}$$

$$A_k(x,t)=\left(\frac{t-2(k+1)\tau}{x-2(k+1)\tau}\right)^{2/3}\left\{\left(\frac{t+2(k+1)\tau}{t-2(k+1)\tau}\right)^{2/3}\frac{1}{t+x}-\right.$$
$$\left.-[H(2k\tau-t)+H(t-2(k+1)\tau)]\frac{\operatorname{sign}(t-2(k+1)\tau)}{t-x}\right\}$$

$(k=1,2,\dots)$, $2k\tau\leqslant x\leqslant 2(k+1)\tau$, $x\neq(2k+1)\tau$ и

$$A_0(x,t)=\left(\frac{t-\tau}{x-\tau}\right)^{2/3}\left\{\left[\operatorname{sign}(t-\tau)+\left(\frac{t+\tau}{t-\tau}\right)^{2/3}\right]\frac{H(2\tau-t)}{t+x}-\right.$$
$$\left.-H(t-2\tau)\left[\frac{\operatorname{sign}(t-\tau)}{t-x}-\left(\frac{t+\tau}{t-\tau}\right)^{2/3}\frac{1}{t+x}\right]\right\},$$

$0<x\leqslant 2\tau$, $x\neq\tau$.

Ядра $A_k(x,t)$ непрерывно дифференцируемы в квадратах $2k\tau\leqslant x,\,t\leqslant 2(k+1)\tau$, $x\neq(2k+1)\tau$, $k=1,2,\dots$ и $0<x,t\leqslant 2\tau$, $x\neq(2k+1)\tau$, а в случае $x=(2k+1)\tau$, $k=1,2,\dots$ $(x=0)$ имеют особенность порядка $2/3$ $(1/3)$ и исчезают на бесконечности.

Делая в (3) и (4) подстановки $t=2\tau(z+k)$, $x=2\tau(y+k)$ и $t=2\tau\sqrt{z}$, $x=2\tau\sqrt{y}$ соответственно, получим сингулярные интегральные уравнения

$$p_k(y)-\lambda\int\limits_0^1 p_k(z)\frac{\operatorname{sign}(1-2z)}{z-y}dz=\alpha_k(y),\ 0<y<1,\ y\neq\frac{1}{2} \tag{6}$$

и

$$p_0(y)-\lambda\int\limits_0^1 p_0(z)\frac{\operatorname{sign}(1-4z)}{z-y}dz=\alpha_0(y),\ 0<y<1,\ y\neq\frac{1}{4}, \tag{7}$$

где

$$p_k(y){=}z_k^\nu(2\tau(y{+}k))(2y{-}1)^{2/3},\ \ \alpha_k(y){=}\beta_k(2\tau(y{+}k))(2y{-}1)^{2/3}\ \ (k{=}1,2,\ldots)$$

и

$$p_0(y)=z_0^\nu(2\tau\sqrt{y})(2\sqrt{y}-1)^{2/3},\ \ \alpha_0(y)=\beta_0(2\tau\sqrt{y})(2\sqrt{y}-1)^{2/3}.$$

Решение уравнений (6)–(7) будем искать в классе функций $z_k^\nu(x)$, удовлетворяющих условию Гельдера внутри промежутков $(2k\tau, 2(k+1)\tau)$, $x \neq (2k+1)\tau$ и имеющих в точках $x=(2k+1)\tau$ $(x=0)$ особенность порядка не выше (ниже) $2/3$.

Уравнения (6) и (7) совпадают с уравнением (7) работы [2], где проведена его регуляризация. Используя полученную в указанной работе формулу обращения и возвращаясь к старым обозначениям, представим решение сингулярных интегральных уравнений (3)–(4) в форме

$$z_k^\nu(x)=\frac{\beta_k(x)}{1+\lambda^2\pi^2}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2\pi^2}\int\limits_{2k\tau}^{2(k+1)\tau}\beta_k(t)R_k(x,t)dt \tag{8}$$

где, $2k\tau<x<2(k+1)\tau$, $x\neq 2(k+1)\tau$, $k=0,1,\ldots,$

$$R_k(x,t){=}\frac{\exp\left(\Gamma\left(\dfrac{x{-}2k\tau}{2\tau}\right)\right)}{\exp\left(\Gamma\left(\dfrac{t{-}2k\tau}{2\tau}\right)\right)}\left(\frac{t{-}(2k{+}1)\tau}{x{-}(2k{+}1)\tau}\right)^{2/3}\frac{\mathrm{sign}((2k{+}1)\tau{-}t)}{t-x} \tag{9}$$

$2k\tau<x<2(k+1)\tau$, $x\neq 2(k+1)\tau$, $k=1,2,\ldots$ и

$$R_0(x,t){=}\frac{\exp\Gamma\left(\dfrac{x^2}{4\tau^2}\right)}{\exp\Gamma\left(\dfrac{t^2}{4\tau^2}\right)}\left(\frac{t{-}\tau}{x{-}\tau}\right)^{2/3}\frac{2t\mathrm{sign}(\tau{-}t)}{t^2{-}x^2},\ \ 0<x<2\tau,\ \ x\neq\tau. \tag{10}$$

Подставляя в (8) значение $\beta_k(x)$ из (5), приходим к интегральному уравнению

$$z_k^\nu(x)-\lambda\int\limits_0^{+\infty}z^\nu(t)T_k(x,t)dt=\eta_k(x) \tag{11}$$

$2k\tau<x<2(k+1)\tau$, $x\neq 2(k+1)\tau$, $k=0,1,\ldots,$ где

$$T_k(x,t)=\frac{A_k(x,t)}{1+\lambda^2\pi^2}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2\pi^2}\int\limits_{2k\tau}^{2(k+1)\tau}R_k(x,\xi)A_k(\xi,t)d\xi,$$

$$\eta_k(x,t)=\frac{\rho_k(x)}{1+\lambda^2\pi^2}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2\pi^2}\int\limits_{2k\tau}^{2(k+1)\tau}\rho_k(\xi)R_k(x,\xi)d\xi.$$

Полагая в (11)

$$z^\nu(x) = \{z^\nu_k(x),\ 2k\tau{<}x{<}2(k{+}1)\tau, x{\neq}(2k{+}1)\tau\ (k{=}0,1,2\ldots)\},$$
$$\eta(x) = \{\eta_k(x),\ 2k\tau{<}x{<}2(k{+}1)\tau, x{\neq}(2k{+}1)\tau\ (k{=}0,1,2\ldots)\},$$
$$T(x,t){=}\{T_k(x,t),\ 2k\tau{<}x{<}2(k{+}1)\tau, x{\neq}(2k{+}1)\tau\ (k{=}0,1,2\ldots)\},$$

получаем интегральное уравнение

$$z^\nu(x) - \lambda \int\limits_0^{+\infty} z^\nu(t) T(x,t) dt = \eta(x). \tag{12}$$

Исследование уравнения (12) аналогично [2] показывает, что оно является уравнением Фредгольма, однозначная разрешимость которого следует из теоремы единственности решения задачи для уравнения (1) в неограниченной области [1].

Список литературы

[1] *О.В.Савкова.* Начально-краевая задача для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа с кратным запаздыванием в неограниченной области. Вестник науки. Вып. 3. Орел: Изд-во ОГУ. 2004, с. 110–112.

[2] *А.Н.Зарубин.* О регуляризации одной системы полных сингулярных интегральных уравнений. Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. №1, с. 177–180.

О ПОСТРОЕНИИ СИММЕТРИЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА*

С.Я. Старцев

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, ул. Чернышевского, 112

Одним из хорошо известных нелинейных интегрируемых уравнений является уравнение Лиувилля $u_{xy} = \mathrm{e}^u$. К числу наиболее характерных свойств уравнения Лиувилля относятся наличие у него нетривиальных интегралов и завершение нулем последовательности инвариантов Лапласа [1] линеаризованного уравнения. Каждое из указанных свойств может быть положено в основу определения уравнений лиувиллевского типа. В [2]–[4] было доказано, что для скалярных уравнений

$$u_{xy} = F(x,y,u,u_x,u_y) \tag{1}$$

эти два определения эквивалентны, и на основе этого для уравнений, допускающих нетривиальные интегралы, в [2] были построены явные формулы для симметрий. В случае же систем уравнений вида (1), то есть когда u является n-мерным вектором, а F – вектор-функцией, эти определения, согласно [5], вообще говоря различны и вопрос о построении симметрий для каждого их этих двух определений следует рассматривать отдельно. Это и является темой настоящей заметки.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00775.

Введем необходимые обозначения и определения. Через $g_z = \partial g/\partial z$, где g – скалярная функция, z – вектор $(z^1, z^2, \ldots, z^n)^\top$, будем обозначать строку $(\partial g/\partial z^1, \partial g/\partial z^2, \ldots, \partial g/\partial z^n)$, а для вектор-функции g через g_z будем обозначать матрицу, строки которой получены применением $\partial/\partial z$ к компонентам вектор-функции. Под функциями далее мы будем понимать дифференциальные функции, то есть будем предполагать, что они зависят не только от x и y, но и, вообще говоря, от вектор-функции $u(x, y)$ и конечного числа ее частных производных. Так как смешанные производные u мы можем исключить в силу системы (1), в дальнейшем будем считать, что все функции могут зависеть лишь от x, y, u, $u_i = \partial^i u/\partial x^i$, $v_i = \partial^i u/\partial y^i$. Когда нам необходимо подчеркнуть, что g зависит от конечного числа переменных из вышеуказанного набора, мы пишем $g[u]$.

Полные производные по x и y в силу (1) обозначим через D_x и D_y соответственно. Для любой скалярной функции g эти полные производные задаются формулами

$$D_x(g) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} u_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} u_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial v_i} D_y^{i-1}(F) \right),$$

$$D_y(g) = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u} v_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g}{\partial v_i} v_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial u_i} D_x^{i-1}(F) \right).$$

Для более компактной записи формул, здесь и далее мы исходим из того соглашения, что нулевые степени любых дифференцирований совпадают с оператором умножения на единицу (тождественным отображением). На векторах и матрицах действие D_x и D_y определяется как результат покомпонентного применения этих операций.

Оператором, *формально сопряженным* к дифференциальному оператору

$$Z = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m} c_{ij}[u] D_x^i D_y^j \ ,$$

где c_{ij} – матрицы, будем называть оператор

$$Z^+ = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{j+j} D_x^i D_y^j \circ c_{ij}^\top[u] \ ,$$

где символами $\circ$ и $\top$ обозначены композиция операторов и операция транспонирования матриц соответственно.

Действующий на множестве n-мерных вектор-функций оператор

$$L = D_x D_y - F_{u_x} D_x - F_{u_y} D_y - F_u \tag{2}$$

мы будем называть *оператором линеаризации системы* (1). Будем говорить, что вектор-функция f является *симметрией системы* (1), если выполнено соотношение $L(f) = 0$.

Пользуясь симметрией $x \leftrightarrow y$ формулы (1), далее мы будем приводить лишь одно из двух «симметричных» определений и утверждений.

Построение симметрий по интегралам.

Определение 1. *Функцию w будем называть* x-интегралом *системы* (1), *если* $D_y(w) = 0$. *Если w зависит только от x, то w будем называть* тривиальным x-*интегралом.*

Нетрудно видеть, что x-интеграл не может зависеть от переменных v_i. Порядок старшей из частных производных u_i, от которых зависит интеграл, будем называть *порядком интеграла.*

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$w_* = \frac{\partial w}{\partial u} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial w}{\partial u_i} D_x^i \ .$$

В [6] было доказано, что для любого нетривиального x-интеграла w порядка k оператор $(w_*)^+$ делится на оператор $D_x + (F_{u_y})^\top$ без остатка:

$$(w_*)^+ = \left(D_x + (F_{u_y})^\top\right) \circ P \ , \qquad P = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i D_x^i \ , \tag{3}$$

где α_i – n-мерные вектор-функции. При этом, если для некоторой матрицы S выполнено соотношение

$$L \circ S(x,y,u) = S(x,y,u) \circ L^+ \ , \tag{4}$$

то $SP(\Omega)$ является симметрией системы (1) для любого ее x-интеграла Ω.

Покажем, что условие (4) выполнено, в частности, для систем Эйлера-Лагранжа с лагранжианом вида

$$g = u_x \cdot (A(x,y,u) \cdot u_y) + B(x,y,u) \cdot u_x + C(x,y,u) \cdot u_y + D(x,y,u) \ , \tag{5}$$

где A – матрица, B и C – векторы, D – скаляр, а точка $\cdot$ обозначает скалярное произведение. Прямое вычисление показывает, что получающаяся из лагранжиана (5) система вида (1) в ситуации общего положения связана с ним формулой

$$(A + A^\top)(F(x,y,u,u_x,u_y) - u_{xy}) = \frac{\delta g}{\delta u},$$

где через $\delta/\delta u$ обозначена вариационная производная. Линеаризовав это равенство, воспользовавшись самосопряженностью линеаризации вариационной производной и ограничив линеаризацию на решения системы (1), получим, что для систем Эйлера-Лагранжа выполнено (4) с $S = \left(A + A^\top\right)^{-1}$. Таким образом, приходим к следующей специальной версии теоремы Нётер для систем, допускающих интегралы.

Утверждение 1. *Пусть система* (1) *допускает нетривиальный x-интеграл w порядка k и получена из лагранжиана* (5), *такого что матрица $A + A^\top$ невырождена. Тогда $f = \left(A + A^\top\right)^{-1} P(\Omega)$, где P находится по формуле* (3), *является симметрией системы* (1) *для любого ее x-интеграла Ω.*

Аналогичное утверждение для гамильтоновых систем (1) получено в [7], однако, в отличие от утверждения 1, оно не гарантирует локальность как оператора, переводящего интегралы в симметрии, так и получающихся симметрий.

Симметрии и инварианты Лапласа. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$M = D_x D_y + a[u]D_x + b[u]D_y + c[u] \ , \tag{6}$$

где a, b и c – квадратные матрицы. Следуя [8], *обобщенными y-инвариантами Лапласа* оператора (6) будем называть матрицы Y_i, заданные рекуррентными формулами $Y_{i+1} = H_{i+1}Y_i$, $H_{i+1} = D_x(a_i) + [b, a_i] - D_y(b) + H_i$, где $Y_1 = H_1 = D_x(a) + ba - c$, а матрицы a_i находится из уравнения

$$D_y(Y_i) - Y_i a + a_i Y_i = 0 \ . \tag{7}$$

Обобщенные x-инварианты Лапласа X_i оператора (6) задаются аналогичными формулами:

$$\begin{aligned} &X_1 = K_1 = D_y(b) + ab - c \ , && X_{i+1} = K_{i+1}X_i \ , \\ &K_{i+1} = D_y(b_i) + [a, b_i] - D_x(a) + K_i \ , && D_x(X_i) - X_i b + b_i X_i = 0. \end{aligned}$$

Инвариантами Лапласа системы (1) будем называть инварианты Лапласа ее оператора линеаризации (2).

Заметим, что в случае вырожденных инвариантов Лапласа уравнения для нахождения матриц a_i и b_i могут быть неразрешимы, а при наличии решений матрицы a_i и b_i определены неоднозначно.

В [8] было предложено следующее

Определение 2. *Система уравнений* (1) *называется системой лиувиллевского типа, если найдутся $p > 0$ и $q > 0$, такие, что для всех $i \leqslant p$, $j \leqslant q$ ее инварианты Лапласа X_i и Y_j существуют, однозначно определены и $X_p = Y_q = 0$.*

В пользу такого определения свидетельствует тот факт (см. [9]), что экспоненциальные системы, заданные матрицами Картана простых алгебр Ли, которые естественно считать многокомпонентными аналогами уравнения Лиувилля, удовлетворяют определению 2.

Для практических нужд условия существования и единственности удобно переписать в виде операторных равенств

$$(D_y + a_i) \circ Y_i = Y_i \circ (D_y + a) \, , \qquad (D_x + b) \circ Y_i = Y_i \circ (D_x + B_i) \, . \tag{8}$$

Первое из этих соотношение есть другая форма записи уравнения (7), а разрешимость второго, согласно [8], является необходимым условием для единственности Y_{i+1}. Учитывая, что обобщенные x-инварианты Лапласа $\hat{X}_i = \hat{K}_i \hat{K}_{i-1} \dots \hat{K}_1$ оператора M^+, если они существуют, связаны с y-инвариантами Лапласа Y_i оператора (6) формулой $Y_i^\top = \hat{X}_i$ (см. [9]), нетрудно проверить, что единственность Y_i гарантирует существование $\hat{X}_i$.

С обобщенными инвариантами Лапласа естественно связать последовательность операторов $M_i = (D_x + b) \circ Y_i \circ (D_y + a) - Y_{i+1}$. Полагая $Y_0 = 1$, нетрудно убедиться, что $M_0 = M$. Опишем для этой последовательности операторов аналог процедуры каскадного интегрирования Лапласа [1], предполагая, что найдется невырожденная квадратная матрица $\gamma[u]$, такая что $(D_y + a)(\gamma) = 0$, и для всех $i \leqslant q$ существуют и единственны Y_i и $Y_q = 0$. При таких предположениях вектор $s_q = \gamma\ \Omega$ является решением уравнения $M_q(s_q) = 0$ для любого n-мерного вектора Ω, такого что $D_y(\Omega) = 0$. Нашей целью будет алгоритм получения решения уравнения $M_{i-1}(s_{i-1}) = 0$ из решения уравнения $M_i(s_i) = 0$, что позволит построить решение уравнения $M(s) = 0$ исходя из предъявленного выше решения s_q.

Учитывая формулу (8) и тот факт, что $Y_i = \hat{X}_i^\top = \hat{K}_1^\top \dots \hat{K}_{i-1}^\top \hat{K}_i^\top$, оператор M_i можно записать в виде $Y_i\ \mathfrak{M}_i$, где

$$\mathfrak{M}_i = (D_x + B_i)(D_y + a) - \hat{K}_{i+1}^\top = (D_y + a)(D_x + B_i) - \hat{K}_i^\top\ .$$

В силу этого, из уравнения $M_i(s_i) = 0$ следует, что $r_i = \mathfrak{M}_i(s_i)$ лежит в ядре Y_i. Так как, согласно [5], разрешимость соотношения (7) гарантирует наличие в $\ker Y_i$ базиса $\theta_1, \dots, \theta_\ell$, такого что $(D_y + a)(\theta_j) = 0$, $j = \overline{1, \ell}$, мы можем записать $r_i = \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \theta_j$, где μ_j – некоторые скалярные функции, и построить (возможно нелокальный) вектор $R_i = \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j \theta_j$, найдя η_j из условия $D_y(\eta_j) = \mu_j$.

Покажем, что $M_{i-1}(s_{i-1}) = 0$ для $s_{i-1} = (D_x + B_i)(s_i) - R_i$. Нетрудно проверить, что

$$\mathfrak{M}_{i-1} \circ (D_x + B_i) = (D_x + B_{i-1}) \circ \mathfrak{M}_i + z_{i-1}\ ,$$

где $z_i = D_x(\hat{K}_i^\top) + B_{i-1}\hat{K}_i^\top - \hat{K}_i^\top B_i$. В силу этой формулы и того, что по построению $(D_y + a)(R_i) = r_i = \mathfrak{M}_i(s_i)$, получаем

$$\mathfrak{M}_{i-1}\left(D_x(s_i) + B_i s_i\right) = (D_x + B_{i-1})\,(D_y + a)\,(R_i) + z_{i-1}s_i = \mathfrak{M}_{i-1}(R_i) + \hat{K}_i^\top R_i + z_{i-1}s_i\,.$$

Таким образом, $M_{i-1}(s_{i-1}) = \hat{K}_i^\top R_i + z_{i-1}s_i$. Сопоставляя формулы (8) при i и $i-1$, легко видеть, что столбцы матрицы z_{i-1} лежат в ядре Y_{i-1}, а $Y_{i-1}\hat{K}_i^\top R_i = Y_i R_i = 0$ в силу того, что R_i по построению лежит в ядре Y_i. Поэтому $M_{i-1}(s_{i-1}) = Y_{i-1}\mathfrak{M}_{i-1}(s_{i-1}) = 0$. Тем самым мы обосновали алгоритм нахождения симметрий для систем уравнений лиувиллевского типа.

Поскольку в случае линейных систем уравнений не возникает проблем с обоснованием существования матрицы γ и локальности R_i , для линейных систем вышеописанный алгоритм позволяет строго доказать следующее

Утверждение 2. *Пусть для системы уравнений*

$$u_{xy} = a(x, y)u + b(x, y)u + c(x, y)u$$

для всех $j \leqslant q$ существуют и единственны обобщенные y-инварианты Лапласа Y_j и $Y_q = 0$. Тогда существует дифференциальный оператор

$$P = \sum_{i=0}^{q-1} \xi_j(x, y) D_x^i\ , \qquad \det(\xi_{q-1}) \neq 0\ , \tag{9}$$

такой что $u = P(f(x))$ является решением системы (1) *для любого вектора $f(x)$.*

Несмотря на необоснованность локальности результата, для конкретных нелинейных систем вида (1) вышеописанный алгоритм также позволяет построить локальный дифференциальный оператор P вида (9), с матрицами ξ_i зависящими уже от переменных x, y, u, u_j, v_j, такой что $P(\Omega)$ является симметрией для любого вектора Ω из ядра D_y. Например, для системы уравнений

$$u^1_{xy} = 2\mathrm{e}^{u^1} - 2\mathrm{e}^{u^2}, \quad u^2_{xy} = 2\mathrm{e}^{u^2} - \mathrm{e}^{u^1},$$

найденный с помощью вышеописанного алгоритма оператор P задается формулой

$$P = \left(D_x + \begin{pmatrix} u^1_1 & 0 \\ 0 & u^2_1 \end{pmatrix} \right) \circ \left(D_x^2 + \begin{pmatrix} u^1_1 + 2u^2_1 & -u^1_1 - 2u^2_1 \\ -u^1_1 - u^2_1 & u^1_1 + u^2_1 \end{pmatrix} D_x + \Delta \right),$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2u^1_2 + 3u^2_2 + u^2_1(u^1_1 + u^2_1) & -\frac{1}{2}(u^1_1 + 2u^2_1)^2 \\ u^1_2 + u^2_2 - (u^1_1 + u^2_1)^2 & u^1_2 + 2u^2_2 + \frac{1}{2}u^1_1(u^1_1 + 2u^2_1) \end{pmatrix}.$$

В заключение заметим, что если найдется n-мерный вектор W, составленный из x-интегралов порядка ℓ, такой что $\det(W_{u_\ell}) \neq 0$, то в качестве матрицы γ, лежащей в ядре оператора $D_y - F_{u_x}$, можно взять $W^{-1}_{u_\ell}$.

Список литературы

[1] *Ф. Трикоми.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.

[2] *А.В. Жибер, В.В. Соколов, С.Я. Старцев.* О нелинейных гиперболических уравнениях, интегрируемых по Дарбу. Докл. РАН. 1995. Т. 343. №6. С. 746–748.

[3] *V.V. Sokolov, A.V. Zhiber.* On the Darboux integrable hyperbolic equations. Phys. Lett. A. 1995. V. 208. P. 303–308.

[4] *I.M. Anderson, N. Kamran.* The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane. Duke Math. J. 1997. V. 87. №2. P. 265–319.

[5] *А.В. Жибер, С.Я. Старцев.* Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений. Мат. заметки. 2003. Т. 74. №6. С. 849–858.

[6] *Д.К. Демской, С.Я. Старцев.* Фундам. и прикл. математика. 2004. Т. 10. №1. С. 29–37.

[7] *Д.К. Демской.* ТМФ. 2004. Т. 141. №2. С. 208–227.

[8] *А.В. Жибер, В.В. Соколов.* Точно интегрируемые уравнения лиувиллевского типа. УМН. 2001. Т. 56. №1. С. 63–106.

[9] *А.М. Гурьева, А.В. Жибер.* Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды. ТМФ. 2004. Т. 138. №3. С. 401–421.

СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОСА В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ДУФФИНГА МЕТОДОМ ОПТИМАЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИИ*

Ю.В. Талагаев†, А.Ф.Тараканов⋆

† Балашовский филиал Саратовского госуниверситета им. Н.Г.Чернышевского
412300, Балашов, ул. Карла Маркса, 29

⋆ Борисоглебский госпединститут 397140, Борисоглебск, ул. Народная, 43

Введение. Рост числа приложений привлекает в последние годы значительное внимание исследователей к синхронизации и управлению хаосом в связанных динамических системах [1]. Важной частью данного направления являются параметрические методы управления хаосом [2], распространение которых на взаимодействующие системы – естественный шаг развития теории.

Среди методов управления хаосом без обратной связи наиболее употребителен метод параметрических возбуждений. Основная идея заключается в возбуждении управляющего параметра системы внешней силой $F(t) = 1 + f(t)$, где функция $f(t)$ может быть периодической [3], [4], квазипериодической [5], либо случайной [6]. Исследования последних лет показали, что данный метод результативен и в случае связанных систем. В частности, показано, что режим синхронизации хаотических колебаний связанных осцилляторов обеспечивается при определенных типах периодических воздействий на параметр связи [1].

Прямое использование метода параметрических возбуждений в каждом конкретном случае предполагает выбор эффективного варианта воздействия, учитывающего специфические особенности системы. Однако даже в том случае, когда конструирование управлений, стабилизирующих хаотическое поведение, ведется с соблюдением требования минимальности воздействия [7], [8] иногда не вполне ясно, насколько данные техники отвечают требованиям оптимальности воздействия на параметры системы. Особенно эта проблема касается задач по управляемой синхронизации связанных систем, где параметрические методы только пробивают себе дорогу.

Целью данной работы является формулировка общей задачи по нахождению оптимального корректирующего воздействия на параметр связи взаимодействующих подсистем и изложение результатов этого воздействия. При этом требование малости управляющего воздействия выражается в требовании минимизации интеграла энергии. В качестве объекта исследований выбраны два связанных идентичных неавтономных осциллятора Дуффинга, являющихся эталонной моделью связанных систем.

Задача коррекции динамической системы и ее сведение к задаче оптимальной коррекции. Пусть имеется динамическая система, описываемая дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x(t)),\ i = \overline{1, n},\ t \in [t_0, T], \tag{1}$$

$$x \in R^n,\ x_i(t_0) \in [x_{i0}^1, x_{i0}^2],$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ.

момент времени t_0 и числа x_{i0}^1, x_{i0}^2 $(i = \overline{1,n})$ заданы, а момент времени $T > t_0$ может быть задан произвольно. Система (1) предполагается неустойчивой по Ляпунову. Требуется перевести систему (1) в устойчивое состояние (стабилизация – частный случай устойчивости). Такой перевод будем называть коррекцией.

Будем производить коррекцию системы только по параметрам (1) с помощью вектор-функции $h(t) = (h_1(t), \dots, h_r(t))$, $r \le n$, компоненты которой назовцм корректирующими функциями. Потребуем, чтобы функции $h_j(t)$ были оптимальными в смысле обеспечения минимума затрачиваемой на коррекцию энергии, то есть

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\sum_{j=1}^{n} h_j^2(t)\,dt \to \min\,. \tag{2}$$

Введение в (1) корректирующих воздействий приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x(t), h(t)),\ i = \overline{1,n},\ t \in [t_0, T], \tag{3}$$
$$x \in R^n,\ h \in E^r,\ r \le n,\ x_i(t_0) \in [x_{i0}^1, x_{i0}^2].$$

Таким образом, задача коррекции системы (1) преобразована в задачу оптимальной коррекции системы (3) с функционалом качества типа Лагранжа (2), без ограничений на функцию h, с заданным временем, с подвижным левым концом (ограничение $x_i(t_0) \in [x_{i0}^1, x_{i0}^2]$) и нефиксированным правым концом траектории. Условие $r \le n$ означает, что коррекции могут подвергаться не все параметры системы, а лишь их часть (без ограничения общности можно считать, что при каждом x_i имеется параметр). Подынтегральная функция не зависит от x, поэтому задача (2)-(3) есть задача об оптимальной устойчивости.

Условия оптимальности в такой задаче дает хорошо известный принцип Лагранжа [9] – [11]. Ниже сформулированы необходимые условия оптимальности в задаче (2)–(3).

Составим функцию Гамильтона

$$H(t, x, h, \psi) = \sum_{i=1}^{n}\psi_i f_i(t, x, h) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} h_j^2, \tag{4}$$

где $\psi = \psi(t) \in R^n$ – вектор-функция сопряжцнных переменных. Если $h^*(t)$ – оптимальная корректирующая вектор-функция, $x^*(t)$ – соответствующая траектория, то существуют ненулевые функции $\psi_i(t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial}{\partial x_i}H(t, x^*(t), h^*(t), \psi(t)),\ i = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^{n}\psi_i(t_0)x_i(t_0) = 0,\ i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

и выполняются условия стационарности

$$\frac{\partial}{\partial h_j}H(t, x^*(t), h^*(t), \psi(t)) = 0,\ j = \overline{1,r}. \tag{6}$$

Если первое уравнение в (5) и равенство (6) хорошо известны в теории оптимального управления, то второе равенство (условие трансверсальности) в (5) требует пояснения. В задачах управления с синтезом обратной связи, основанном на прямом применении результатов теории оптимального управления, основная трудность заключается в определении неизвестных сопряженных переменных и, в частности, их начальных значений. Согласно, например [10], рассматриваемое равенство означает, что выбор начальных условий следует проводить исходя из условия ортогональности (второе равенство в (5)).

Сформулированная задача близка к задаче аналитического конструирования оптимального регулятора. Принципиальное отличие в том, что устойчивость предполагается обеспечить не внешним управляющим воздействием, а только за счет воздействия на параметры системы. Тем самым в достижении цели управления используются внутренние свойства динамической системы.

Оптимальная параметрическая коррекция взаимно связанных осцилляторов. Рассмотрим два связанных идентичных неавтономных осциллятора Дуффинга:

$$\ddot{x}_{1,3} = x_{2,4},\ x_{2,4} = -2\alpha x_{2,4} - x_{1,3} - x_{1,3}^3 + R(t) + (\lambda + h)(x_{3,1} - x_{1,3}), \tag{7}$$

где α – параметр диссипации, $R(t)$ – возмущение, λ – параметр связи, $h = h(t)$ – корректирующее управляющее воздействие на параметр связи. Ghb $h = 0$ выше порогового значения $\lambda = 0.6$ в системе реализуется режим синхронизации хаоса. В диапазоне $0 < \lambda_0 < 0.6$ также существуют синхронные хаотические движения, но фазовые траектории неустойчивы в трансверсальном направлении к симметричному подпространству $x_1 = x_3$ (7). Следовательно, к ним может быть применена процедура оптимальной параметрической коррекции.

Составим функцию Гамильтона:

$$H(x, h, \psi) = \psi_{1,3} x_{2,4} + \psi_{2,4}\left[-2\alpha x_{2,4} - x_{1,3} - x_{1,3}^3 + R(t) + (\lambda + h)(x_{3,1} - x_{1,3})\right] - \frac{h^2}{2},$$

где ψ_i – сопряженные переменные, и запишем уравнения вариационной задачи

$$\dot{x}_{1,3} = x_{2,4},\ \ \dot{x}_{2,4} = -2\alpha x_{2,4} - x_{1,3} - x_{1,3}^3 + R(t) + (\lambda + h)(x_{3,1} - x_{1,3}),\ \ \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H(t, x, h, \psi)}{\partial x_i}.$$

Из условия (6) получаем закон изменения корректирующей функции

$$h = \psi_2(x_3 - x_1) + \psi_4(x_1 - x_3), \tag{8}$$

который обеспечивает устойчивость в трансверсальном направлении.

Вначале численные эксперименты проводились с гармоническим возмущением $R(t) = f\cos(\omega t)$. Значения параметров $(\alpha = 0.01, f = 16, \omega = 1)$ выбирались таким образом, чтобы при $\lambda = \lambda_0$ и $h = 0$ наблюдался режим несинхронных хаотических колебаний. Тогда "включение"коррекции осуществляет стабилизирующее воздействие через параметр связи системы (7) относительно заданного уровня $\lambda = \lambda_0$. В задачах управления с синтезом обратной связи, основанном на прямом применении принципа максимума Понтрягина, основная трудность заключается в определении неизвестных сопряженных переменных и, в частности, их начальных значений. Начальные условия выбирались на основании условия ортогональности в (5): $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4,\ \psi_0^1 = x_0^2, \psi_0^2 = -x_0^1, \psi_0^3 = x_0^4, \psi_0^4 = -x_0^3)$. В дополнение к этому полагалось $x_0^2 = x_0^1 + \triangle x, x_0^4 = x_0^3 + \triangle x$, $\triangle x \ll 1$, что отвечает стабилизации в одном из симметричных подпространств полного фазового пространства системы.

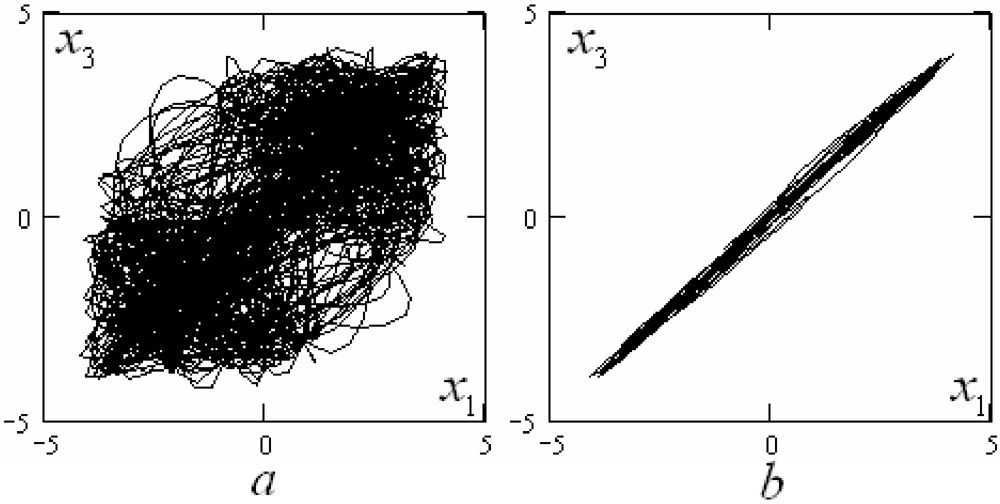


Рис. 1. Проекции фазовых портретов $\lambda = 0.1$, $x_0^1 = x_0^3 = 0.1$, $x_0^2 = x_0^4 = 0.12$: a – режим несинхронных хаотических колебаний; b – режим коррекции (синхронизация хаоса).

Результаты применения метода представлены на рис. 1. Основной результат заключается в том, что под воздействием оптимальной корректирующей функции вида (8) в интервале $\lambda_0 \in (0, 0.6)$ происходит управляемый переход из режима несинхронных колебаний к синхронизации хаотических колебаний. Варьирование начальных условий показало, что их выбор определяет только ширину интервала $[t_0, T]$, на котором контролируется система. При этом фазовая траектория стабилизируется в окрестности симметричного подпространства $x_1 = x_3$, что соответствует режиму синфазной синхронизации (рис.1, b). Рост величины λ уменьшает отклонение траекторий от трансверсального направления, повышая тем самым идентичность хаотических синхронных колебаний.

График $h(t)$, изображенный на рис.2, позволяет идентифицировать специфические особенности оптимальной корректирующей функции и аппроксимировать полученный сигнал. Рассматривался вариант аппроксимации управляющим воздействием

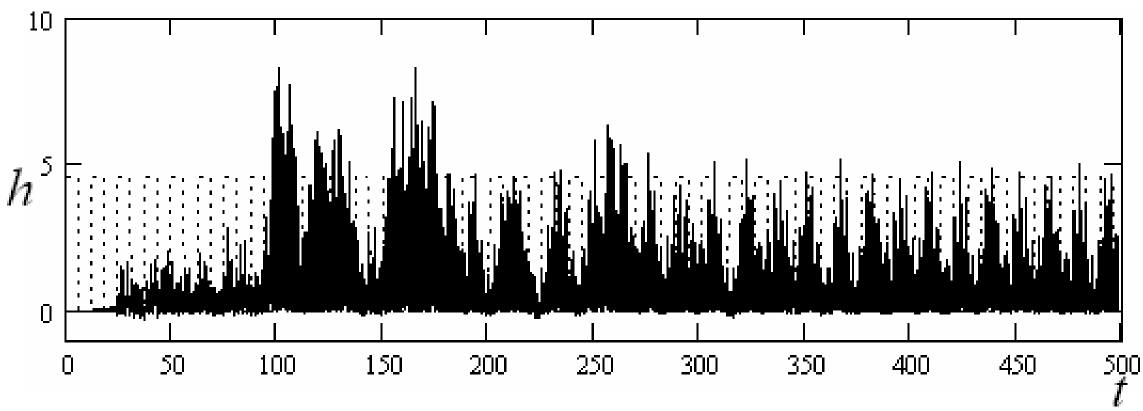


Рис. 2. Оптимальная корректирующая функция $h(t)$ (сплошная линия), аппроксимация управляющего воздействия (пунктирная линия).

$h(t) = \varepsilon \operatorname{sign}(\sin(\Omega t)) + h_0$. При значениях $\varepsilon = h_0 = 2.3$, $\Omega = 0.5$ (пунктирная линия на рис. 2) наблюдается полная синхронизация хаотических колебаний. Посредством увеличения частоты параметрического воздействия можно значительно уменьшить оптимальную амплитуду накачки (например, $\varepsilon = 0.09$, $\Omega = 3.1$, $h_0 = 0$). Однако, в отличие от управления (8), выходу на режим синхронизации предшествует более длительный переходной процесс.

Синхронизирующий характер корректирующего воздействия $h(t)$ также качественно подтвердился при квазипериодическом $R(t) = f_1 \cos(\omega_1 t) + f_2 \cos(\omega_2 t)$, $\omega_1/\omega_2 = (\sqrt{5}-1)/2$ и гармоническом (в присутствии малого аддитивного шума) $R(t) = f \cos(\omega t) + \sqrt{D}\xi(t)$ возмущениях в (7).

Таким образом, на основе объединения идей теории оптимального управления и параметрических методов управления хаосом представлена новая техника для идентификации корректирующего воздействия и управления связанными нелинейными хаотическими системами. Несмотря на то, что оптимальная корректирующая функция из-за специфической динамики конкретной системы не всегда является малой величиной, полученные результаты дополняют параметрические методы управления хаосом, поскольку проливаются свет на общую картину синтеза регуляторов для рассмотренного типа систем.

Список литературы

[1] *В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова и др.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[2] *А.Л. Фрадков.* Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003.

[3] *R. Lima, M. Pettini.* Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P.726–733.

[4] *Yu.S. Kivshar, K.H. Spatschek.* Chaos, Solitons and Fractals. 1995. V. 5. №12. P. 2551–2569.

[5] *M. Belhaq, M. Houssni.* Nonlinear Dynamics. 1999. №18. P. 1–24.

[6] *V. Basios, T. Bountis, G. Nicolis.* Phys. Lett. A. 1999. V. 251. P. 250–258.

[7] *E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke.* Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P.1196–1199.

[8] *R. Chacon, Bejarano J. Diaz.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 3103-3106.

[9] *Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.

[10] *Р. Габасов, Ф.М. Кириллова.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974.

[11] *В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003.

К РАЗВИТИЮ МЕТОДА ЛАПЛАСА ДЛЯ ОДНОГО ОБЩЕГО ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ

Е.А.Уткина

Татарский гос. гуманитарно-педагогический ун-т, Казань, Татарстан, 2

В работе распространяется метод каскадного интегрирования Лапласа, хорошо изученный для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u_{xy} - \frac{\beta'}{x-y}u_x + \frac{\beta}{x-y}u_y = 0, \tag{1}$$

на наиболее общее уравнение третьего порядка с тремя независимыми переменными.

Этот метод, как известно [1], первоначально рассматривался для уравнения вида

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0. \tag{2}$$

Введение обозначений

$$u_1 = u_y + au, \quad u_2 = u_x + bu, \tag{3}$$

позволило представить (2) в двух формах:

$$u_{1x} + bu_1 - hu = 0, \quad u_{2y} + au_2 - ku = 0, \tag{4}$$

где $h = a_x + ab - c$, $k = b_y + ab - c$. Если получалось, что хотя бы одна из величин h или k равна нулю, то u_1 (или u_2) из (4) определяются в квадратурах. А значит, искомая функция u определяется из (3). Если ни одна из объявленных величин не равна нулю, $u\,(x,y)$из (2) и (4) можно исключить и перейти к новым уравнениям вида (2) относительно новой неизвестной функции u_1 (или u_2). К новым уравнениям также можно применить изложенный прием. Если для какого-нибудь нового уравнения на некотором этапе окажется, что одна из соответствующих конструкций вида h или k равна нулю, то и исходное уравнение будет разрешимо в квадратурах.

Перейдем теперь к трехмерному аналогу (2)

$$\sum_{i=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_2}\sum_{k=0}^{m_3} a_{ijk}\,(x_1,x_2,x_3)\,\frac{\partial^{i+j+k}u}{\partial x_1^i \partial x_2^j \partial x_3^k} = 0, \quad a_{m_1 m_2 m_3}\,(x_1,x_2,x_3) \equiv 1, \tag{5}$$

к которому применим изложенную схему.

В данном случае мы можем в качестве новой функции использовать $u_1 = D^1_{x_2}u + a_{m_1,m_2-1,m_3}u$ (случаи $u_2 = D^1_{x_1}u + a_{m_1-1,m_2 m_3}u$ и $u_3 = D^1_{x_3}u + a_{m_1 m_2,m_3-1}u$, рассматриваются аналогичным образом в силу независимости переменных x_1, x_2 и x_3). После этого (5) преобразуется к виду

$$\begin{gathered} D^{m_1}_{x_1}D^{m_2-1}_{x_2}D^{m_3}_{x_3}u_1 + D^{m_1-1}_{x_1}D^{m_2-1}_{x_2}D^{m_3}_{x_3}\,(a_{m_1-1,m_2 m_3}u_1) - \\ - \sum_{\substack{b_1=0 \\ b_1+b_2+b_3<m_1+m_2+m_3-2}}^{m_1-1}\sum_{b_2=0}^{m_2-1}\sum_{b_3=0}^{m_3} h_{b_1 b_2 b_3}u = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$h_{m_1b_2b_3} = C_{m_2-1}^{b_2}C_{m_3}^{b_3}D_{x_2}^{m_2-1-b_2}D_{x_3}^{m_3-b_3}\left(a_{m_1,m_2-1,m_3}\right) - a_{m_1b_2b_3}, \quad b_2 = \overline{0, m_2-1}, \quad b_3 = \overline{0, m_3},$$

$$h_{b_1m_2b_3} = C_{m_1-1}^{b_1}C_{m_3}^{b_3}D_{x_1}^{m_1-1-b_1}D_{x_3}^{m_3-b_3}\left(a_{m_1-1,m_2m_3}\right) - a_{b_1m_2b_3}, \quad b_1 = \overline{0, m_1-1}, \quad b_3 = \overline{0, m_3},$$

$$\begin{aligned} h_{b_10b_3} &= C_{m_1-1}^{b_1}C_{m_3}^{b_3}D_{x_1}^{m_1-b_1-1}D_{x_2}^{m_2-1}D_{x_3}^{m_3-b_3}\left(a_{m_1-1,m_2m_3}a_{m_1,m_2-1,m_3}\right) - a_{b_10b_3} \\ &+ C_{m_1}^{b_1}C_{m_3}^{b_3}D_{x_1}^{m_1-b_1}D_{x_2}^{m_2-1}D_{x_3}^{m_3-b_3}\left(a_{m_1,m_2-1,m_3}\right), \quad b_1 = \overline{0, m_1-1}, \quad b_3 = \overline{0, m_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{b_1b_2b_3} &= C_{m_1-1}^{b_1}C_{m_2-1}^{b_2}C_{m_3}^{b_3}D_{x_1}^{m_1-b_1-1}D_{x_2}^{m_2-b_2-1}D_{x_3}^{m_3-b_3}\left(a_{m_1-1m_2m_3}a_{m_1m_2-1m_3}\right) - a_{b_1b_2b_3} \\ &+ C_{m_1}^{b_1}C_{m_2-1}^{b_2}C_{m_3}^{b_3}D_{x_1}^{m_1-b_1}D_{x_2}^{m_2-1-b_2}D_{x_3}^{m_3-b_3}\left(a_{m_1m_2-1m_3}\right) + \\ &+ C_{m_1-1}^{b_1}C_{m_2-1}^{b_2-1}C_{m_3}^{b_3}D_{x_1}^{m_1-b_1-1}D_{x_2}^{m_2-b_2}D_{x_3}^{m_3-b_3}\left(a_{m_1-1m_2m_3}\right), \\ & b_1 = \overline{0, m_1-1}, b_2 = \overline{1, m_2-1}, b_3 = \overline{0, m_3}. \end{aligned}$$

Если имеет место группа тождеств

$$h_{b_1b_2b_3} \equiv 0, \quad b_1 + b_2 + b_3 > 0, \quad h_{000} \equiv 0, \tag{7}$$

то (5) допускает приведение к уравнению более простого вида:

$$D_{x_1}^{m_1}D_{x_2}^{m_2-1}D_{x_3}^{m_3}\left(u_1\right) + D_{x_1}^{m_1-1}D_{x_2}^{m_2-1}D_{x_3}^{m_3}\left(a_{m_1-1,m_2m_3}u_1\right) = 0, \tag{8}$$

которое интегрируеся в квадратурах.

Пусть вместо (7) выполняются соотношения $h_{b_1b_2b_3} \equiv 0$, $b_1 + b_2 + b_3 > 0$, $h_{000} \neq 0$, тогда перейдем от уравнения (6) к новому уравнению вида (5) относительно новой неизвестной функции u_1. При этом коэффициенты $a_{ijk}^{(1)}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} & a_{m_1m_2m_3}^{(1)} \equiv 1, \quad a_{m_1m_2-1m_3}^{(1)} = a_{m_1m_2-1m_3} - D_{x_2}^{1}\left(\ln h_{000}\right), \\ & a_{b_1m_2b_3}^{(1)} \equiv C_{m_1-1}^{b_1}C_{m_3}^{b_3}D_{x_1}^{m_1-1-b_1}D_{x_3}^{m_3-b_3}\left(a_{m_1-1m_2m_3}\right) \quad \left(b_1 = \overline{0, m_1-1}, b_3 = \overline{0, m_3}\right), \\ & a_{b_1b_2b_3}^{(1)} \equiv C_{m_1-1}^{b_1}C_{m_2}^{b_2}C_{m_3}^{b_3}D_{x_1}^{m_1-1-b_1}D_{x_2}^{m_2-b_2}D_{x_3}^{m_3-b_3}\left(a_{m_1-1m_2m_3}\right) + \\ & + a_{m_1m_2-1m_3}^{(1)}C_{m_1-1}^{b_1}C_{m_2-1}^{b_2}C_{m_3}^{b_3}D_{x_1}^{m_1-1-b_1}D_{x_2}^{m_2-1-b_2}D_{x_3}^{m_3-b_3}\left(a_{m_1-1m_2m_3}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_1 = \overline{0, m_1-1}, \quad b_2 = \overline{0, m_2-1}\ , b_3 = \overline{0, m_3}, \quad b_1 + b_2 + b_3 > 0, \\ & a_{000}^{(1)} = D_{x_1}^{m_1-1}D_{x_2}^{m_2}D_{x_3}^{m_3}\left(a_{m_1-1m_2m_3}\right) + a_{m_1m_2-1m_3}^{(1)}D_{x_1}^{m_1-1}D_{x_2}^{m_2-1}D_{x_3}^{m_3}\left(a_{m_1-1m_2m_3}\right) - h_{000}. \end{aligned}$$

Если для полученного уравнения имеет место группа тождеств вида (7), его можно преобразовать к виду (8), и разрешить в квадратурах. Это будет означать разрешимость в квадратурах и исходного уравнения. В противном случае процесс может быть продолжен.

Аналог (1) в данном случае имеет вид:

$$\begin{aligned} & D_{x_1}^{m_1}D_{x_2}^{m_2}D_{x_3}^{m_3}u + \frac{\beta_1}{x_1-x_2-x_3}D_{x_1}^{m_1}D_{x_2}^{m_2-1}D_{x_3}^{m_3}u + \frac{\beta_2}{x_1-x_2-x_3}D_{x_1}^{m_1}D_{x_2}^{m_2}D_{x_3}^{m_3-1}u + \\ & + \frac{\beta_3}{x_1-x_2-x_3}D_{x_1}^{m_1-1}D_{x_2}^{m_2}D_{x_3}^{m_3}u + \sum_{\substack{b_1=0 \\ m_1+m_2+m_3-1>b_1+b_2+b_3>0}}^{m_1}\sum_{b_2=0}^{m_2}\sum_{b_3=0}^{m_3} a_{i_1i_2i_3}D_{x_1}^{b_1}D_{x_2}^{b_2}D_{x_3}^{b_3}u = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$a_{m_1 b_2 b_3} = C_{m_2-1}^{b_2} C_{m_3}^{b_3} (-1)^{m_1-b_1-1} \frac{(m_2-1-b_2+m_3-b_3)!\beta_1}{(x_1-x_2-x_3)^{m_2-b_2+m_3-b_3}}, \quad b_2 = \overline{0, m_2-1}, \quad b_3 = \overline{0, m_3},$$

$$a_{b_1 m_2 b_3} = C_{m_1-1}^{b_1} C_{m_3}^{b_3} (-1)^{m_1-b_1-1} \frac{(m_1-1-b_1+m_3-b_3)!\beta_1}{(x_1-x_2-x_3)^{m_1-b_1+m_3-b_3}}, \quad b_1 = \overline{0, m_1-1}, \quad b_3 = \overline{0, m_3},$$

$$\begin{aligned} a_{b_1 0 b_3} &= C_{m_1}^{b_1} C_{m_3}^{b_3} \frac{(m_1-b_1+m_2-1+m_3)!(-1)^{m_1-b_1}}{(x_1-x_2-x_3)^{m_1-b_1+m_2+m_3-b_3}} + \\ &+ C_{m_1-1}^{b_1} C_{m_3}^{b_3} \frac{(m_1-b_1+m_2-1+m_3)!(-1)^{m_1-b_1-1}}{(x_1-x_2-x_3)^{m_1-b_1+m_2+m_3-b_3}}, \\ & b_1 = \overline{0, m_1-1}, \quad b_3 = \overline{0, m_3}, b_1+b_3 > 0, \\ a_{b_1 b_2 b_3} &= C_{m_1}^{b_1} C_{m_2-1}^{b_2} C_{m_3}^{b_3} \frac{(-1)^{m_1-b_1}(m_1-b_1+m_2-1-b_2+m_3-b_3)!\beta_1}{(x_1-x_2-x_3)^{m_1-b_1+m_2-b_2+m_3-b_3}} + \\ &+ C_{m_1-1}^{b_1} C_{m_2-1}^{b_2-1} C_{m_3}^{b_3} \frac{(-1)^{m_1-b_1-1}(m_1-b_1-1+m_2-b_2+m_3-b_3)!\beta_3}{(x_1-x_2-x_3)^{m_1-b_1+m_2-b_2+m_3-b_3}} + \\ &+ C_{m_1-1}^{b_1} C_{m_2-1}^{b_2} C_{m_3}^{b_3} \frac{(m_1-b_1+m_2-b_2-1+m_3-b_3)!(-1)^{m_1-b_1-1}\beta_1\beta_3}{(x_1-x_2-x_3)^{m_1-b_1+m_2-b_2+m_3-b_3}}, \\ & b_1 = \overline{0, m_1-1}, \quad b_2 = \overline{1, m_2-1}, \quad b_3 = \overline{0, m_3}. \end{aligned}$$

Здесь

$$h_{000} = \frac{\beta_1 (-1)^{m_1-1} (m_1+m_2+m_3-1)!}{(x_1-x_2-x_3)^{m_1+m_2+m_3}} [-1+\beta_3].$$

Если $\beta_3 = 1$ или $\beta_1 = 0$, то (9) разрешимо в квадратурах. Если $h_{000} \neq 0$, то

$$h_{000}^{(1)} = h_{000} + \frac{(-1)^{m_1-1} (m_1+m_2+m_3-2)!}{(x_1-x_2-x_3)^{m_1+m_2+m_3}} \{(\beta_1 - m_1 - m_2 - m_3)\}$$

$$(m_1+m_2+m_3)(\beta_3-1) - \beta_3(\beta_1-1)$$

Очевидно, если $h_{000}^{(1)}$ равно нулю, получаем решение уравнения (9) в квадратурах. Продолжение процесса позволяет построить цепочку уравнений вида (9), для которых $h_{000}^{(n)}$ определяется с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} h_{000}^{(k)} = h_{000}^{(k-1)} &+ \frac{(-1)^{m_1-1} (m_1+m_2+m_3-2)!}{(x_1-x_2-x_3)^{m_1+m_2+m_3}} \times \\ &\times \{(\beta_1 - k(m_1+m_2+m_3))(m_1+m_2+m_3-1)(\beta_3-1) \\ &\qquad -\beta_3(\beta_1 - 1 + (m_1+m_2+m_3)(k-1))\}. \end{aligned}$$

Если при некотором n $\quad h_{000}^{(n)} = 0$, то исходное уравнение разрешимо в квадратурах.

Список литературы

[1] *Ф. Трикоми.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ЗАДАЧЕ О КАЧЕНИИ ШАРА ПО ПОВЕРХНОСТИ

В.В. Черкасова

Орловский государственный университет, 302026, Орел, ул. Комсомольская, 95

В последнее время в современной математике особое значение приобретают задачи, связанные с геометрическими приложениями теории мультипликативного интеграла [1]. Это, в первую очередь, задачи теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, задачи аналитической, дифференциальной геометрии, а также теории представлений групп и алгебр Ли [5].

Пусть V и W конечномерные векторные пространства, где V — вещественно, W — вещественно или комплексно, а $B = L(V, W)$ — банахова алгебра всех линейных операторов, действующих в пространстве W.

Пусть заданы две функции: $x(t)$ со значениями в пространстве V и $A(t)$ со значениями в пространстве $L(V, W)$, где переменная $t \in [a; b]$.

Рассмотрим разбиение $T = \{t_i\}$ отрезка [a;b], такое что

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

Выберем на каждом из частичных отрезков $[t_{k-1}; t_k]$, где $i = 1, 2, ..., n$, точку ξ_i и построим произведение

$$\Big(E + A(\xi_n)\big(x(\xi_n) - x(\xi_{n-1})\big)\Big) \cdots \Big(E + A(\xi_1)\big(x(\xi_1) - x(\xi_0)\big)\Big)$$

Данное произведение является интегральным [6]. Кроме того, следует отметить, что в общем случае данное интегральное произведение не является коммутативным, и в случае перестановки множителей конечный результат будет изменяться.

Если $n \to \infty$ и $\max\limits_i (t_i - t_{i-1}) \to 0$, то существует единственный предел данного интегрального произведения, не зависящий от разбиения отрезка $[a; b]$ и выбора точек ξ_i, где $i = 1, 2, ..., n$, то этот предел называется мультипликативным интегралом и обозначается

$$Y = \overset{b}{\underset{a}{\overset{\cap}{\int}}} E + A(t)dx(t).$$

Причем следует отметить, что в данном случае E — единичный элемент пространства $L(V, W)$.

Одним из видов мультипликативных интегралов является криволинейный мультипликативный интеграл.

Выражение вида

$$Y = \underset{C}{\overset{\cap}{\int}} E + \Gamma_k(x^1, ..., x^n)dx^k,$$

где $\Gamma_k(x^1, ..., x^n)$ — операторные функции из $L(V, W)$, C — произвольная непрерывная спрямляемая кривая в V, называется криволинейным мультипликативным интегралом.

Возникает криволинейный мультипликативный интеграл при изучении дифференциального уравнения параллельного переноса вектора в пространстве аффинной связности.

Известно, что параллельный перенос касательного вектора вдоль некоторой кривой γ на поверхности определяется системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0,$$

где коэффициенты Γ^k_{ij} будут находиться по формулам:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{ks}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s}\right).$$

В терминах мультипликативного интеграла преобразование касательного вектора при параллельном переносе вдоль кривой $\gamma : u = u(t)$, $v = v(t)$, будет задаваться криволинейным мультипликативныи интегралом

$$\int\limits_{\gamma}^{\cap} E + \Gamma_1 du + \Gamma_2 dv,$$

где Γ_i — матрицы, элементами которых являются коэффициенты римановой связности или символы Кристоффеля [1], [7].

Однако это не единственный случай. Ярким примером геометрического приложения криволинейного мультипликативного интеграла является задача о качении шара по некоторой поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Постановка задачи: По поверхности $z = f(x, y)$ пространства $\mathbb{R}^3$ вдоль некоторой кривой γ без проскальзывания катится шар радиуса R, с жестко прикрепленным репером (e_1, e_2, e_3). В конце пути репер примет свое новое положение относительно неподвижной системы координат $Oxyz$. Вычислим матрицу перехода от начального положения репера к конечному положению.

Решение: Для нахождения матрицы перехода Y построим разбиение $T = \{M_k\}$ кривой γ точками $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), ..., M_n(x_n, y_n, z_n)$ на n частей. Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \lambda(T) = \max(\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n)$, где Δl_k — длина дуги $M_0\breve{} M_1, k = 1, 2, ..., n$.

Таким образом, движение шара вдоль кривой по поверхности можно рассматривать как композицию n линейных преобразований Y_k, каждое из которых в свою очередь, будет суперпозицией сдвига на вектор $M_{k-1}M_k$ и поворота относительно мгновенной оси вращения на угол $\varphi_k = \frac{|M_{k-1}M_k|}{R}, k = 1, 2, ..., n$. Согласно теореме о суперпозиции линейных преобразований [4] матрица композиции n линейных преобразований будет находиться из соотношения

$$\begin{aligned}\tilde{Y}^n = [E + P_n\Delta x_n + Q_n\Delta y_n + R_n\Delta z_n][E + P_{n-1}\Delta x_{n-1} + Q_{n-1}\Delta y_{n-1} + \\ + R_{n-1}\Delta z_{n-1}]\cdots[E + P_2\Delta x_2 + Q_2\Delta y_2 + R_2\Delta z_2][E + P_1\Delta x_1 + Q_1\Delta y_1 + R_1\Delta z_1].\end{aligned}$$

Следовательно, для нахождения матрицы линейного ортогонального преобразования при качении вдоль кривой γ, необходимо найти предел полученных интегральных сумм $\tilde{Y}^n$ при $\lambda(T) \to 0$. Если этот предел существует, то это есть криволинейный мультипликативный интеграл по кривой γ

$$Y = \overset{\cap}{\int\limits_{\gamma}} E + \Gamma_1 dx + \Gamma_2 dy + \Gamma_3 dz.$$

Кроме того, так как поверхность качения задана уравнением вида $z = f(x, y)$, и формула полного дифференциала для функции двух переменных $dz = f'_x dx + f'_y dy$, то полученный выше криволинейный интеграл можно записать так [3]:

$$\begin{aligned} Y &= \overset{\cap}{\int\limits_{\gamma}} E + \Gamma_1^* dx + \Gamma_2^* dy = \\ &= \overset{\cap}{\int\limits_{\gamma}} E + \begin{pmatrix} 0 & -A_2 & B_1 & 0 \\ A_2 & 0 & C & 0 \\ -B_1 & -C & 0 & 0 \\ 1 & 0 & f'_x & 0 \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} 0 & A_1 & C & 0 \\ -A_1 & 0 & B_2 & 0 \\ -C & -B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f'_y & 0 \end{pmatrix} dy, \end{aligned}$$

где

$$C = \frac{f'_x f'_y}{H(x,y)}, \quad H(x,y) = R\sqrt{(f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2 + 1}$$

$$A_1 = \frac{f'_x}{H(x,y)}, \quad A_2 = \frac{f'_y}{H(x,y)}, \quad B_1 = \frac{(f'_x)^2 + 1}{H(x,y)}, \quad B_2 = \frac{(f'_y)^2 + 1}{H(x,y)}.$$

Таким образом в результате мы получили, что при движении шара по поверхности $z = f(x, y)$, изменение положения репера, жестко связанного с шаром, будет описываться криволинейным мультипликативным интегралом вдоль траектории, по которой движется шар. Данный интеграл будет иметь некоторые характеристики, в частности, кривизну [6], зная которую можно найти среднюю и гаусову кривизны поверхности качения.

Список литературы

[1] *Ф.Р. Гантмахер.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

[2] *Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.

[3] *Г. Корн, Т. Корн.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978.

[4] *О.В. Мантуров.* Элементы тензорного исчисления. М.: Просвещение, 1991.

[5] *О.В. Мантуров.* Мультипликативный интеграл. Проблемы геометрии, т. 22, 1990. с. 167-215.

[6] *Л.Ж. Паланджянц.* Геометрия мультипликативного интеграла. Майкоп, 1997.

[7] *П.К. Рашевский.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ДРАША К НЕОДНОРОДНОМУ УРАВНЕНИЮ МОНЖА-АМПЕРА*

Ю. В. Шанько

ИВМ СО РАН, Красноярск

В работе рассматривается неоднородное уравнение Монжа-Ампера

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + \lambda^2(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $\lambda(x,y)$ – заданная функция.

Это уравнение возникает во многих задачах механики (в одномерной газовой динамике [1], в теории упругости [2]).

Метод Драша. Применим к уравнению (1) метод Драша [3]. Введем стандартные обозначения для производных

$$p = z_x,\ q = z_y,\ r = z_{xx},\ s = z_{xy},\ t = z_{yy}.$$

Тогда уравнение (1) перепишется так:

$$rt - s^2 + \lambda^2(x,y) = 0. \tag{2}$$

Переменные

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t \tag{3}$$

связаны следующими соотношениями:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy. \tag{4}$$

Будем считать, что переменные (3) являются функциями от α и β. В качестве α и β берем инварианты характеристик исходного уравнения (2). Иными словами α и β таковы, что квадратичная форма определяющая характеристики уравнения (2) пропорциональна произведению $d\alpha\,d\beta$, т.е.

$$t\,dx^2 - 2s\,dx\,dy + r\,dy^2 = \Omega\,d\alpha\,d\beta. \tag{5}$$

Из условия (5) и уравнений (4) после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} &p_\alpha - \lambda y_\alpha = 0,\ p_\beta + \lambda y_\beta = 0, \quad q_\alpha + \lambda x_\alpha = 0,\ q_\beta - \lambda x_\beta = 0, \\ &z_\alpha - p x_\alpha - q y_\alpha = 0, \quad z_\beta - p x_\beta - q y_\beta = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Исключим p и q из первых четырех уравнений и сделаем замену переменных по формуле

$$u = x\sqrt{\lambda},\ v = y\sqrt{\lambda},\ w = \sqrt{\lambda}. \tag{7}$$

Для u, v и w получаем систему

$$\frac{u_{\alpha\beta}}{u} = \frac{v_{\alpha\beta}}{v} = \frac{w_{\alpha\beta}}{w}, \tag{8}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант 04-01-00130).

где u, v и w связаны соотношением

$$w^2 = \lambda(uw^{-1}, vw^{-1}). \tag{9}$$

Обозначим общую величину в (8) через m и перепишем систему в виде трех уравнений Мутара:

$$u_{\alpha\beta} = mu,\ v_{\alpha\beta} = mv,\ w_{\alpha\beta} = mw. \tag{10}$$

Пример уравнения Монжа-Ампера. Пусть $\lambda = (xy)^{-2/3}$. Для уравнения

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + (xy)^{-4/3} = 0, \tag{11}$$

система (9), (10) запишется так:

$$u_{\alpha\beta} = mu,\ v_{\alpha\beta} = mv,\ w_{\alpha\beta} = mw, uvw = 1. \tag{12}$$

Введем функции a и b по формулам

$$u = a^2/b,\ v = b^2/a. \tag{13}$$

Тогда из последнего уравнения (12) следует, что $w = 1/(ab)$. Подставив u, v и w в оставшиеся уравнения (12) и исключив m, после некоторых преобразований придем к системе

$$a_{\alpha\beta} = Ma,\ b_{\alpha\beta} = Mb,$$

где

$$M = (a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha)/(ab).$$

Промежуточные интегралы для этой системы имеют вид:

$$(a_\alpha b_{\alpha\alpha} - b_\alpha a_{\alpha\alpha})/(ab),\ (a_\beta b_{\beta\beta} - b_\beta a_{\beta\beta})/(ab).$$

Приравнивая интегралы константам k_1 и k_2 соответственно (мы можем это сделать, поскольку α и β определены с точностью до функциональной замены), получим

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= Ma, & b_{\alpha\beta} &= Mb, \\ b_{\alpha\alpha} &= (b_\alpha a_{\alpha\alpha} + k_1 ab)/a_\alpha, & b_{\beta\beta} &= (b_\beta a_{\beta\beta} + k_2 ab)/a_\beta. \end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим (14), как систему относительно M. Исключая, b приходим к системе линейной относительно a:

$$Ma_{\alpha\alpha} - a_\alpha M_\alpha + k_1 a_\beta = 0,\ a_{\alpha\beta} = Ma,\ Ma_{\beta\beta} - a_\beta M_\beta + k_2 a_\alpha = 0. \tag{15}$$

Исключая отсюда a, получим для M уравнение Цицейки (при $k_1 k_2 = 1$):

$$(\ln M)_{\alpha\beta} = M - k_1 k_2 M^{-2}. \tag{16}$$

Уравнение (16) относится к классу интегрируемых уравнений и имеет достаточно богатый запас точных решений, в том числе и солитонных [4].

Переход к исходным переменным для уравнения Цицейки. Определим теперь, как можно получить решение исходного уравнения (11), зная решение уравнения Цицейки (16). Так как a и b входят в систему (14) абсолютно равноправно, то для определения b по известному M нужно решить линейную переопределенную систему, которая отличается от системы (15) только знаками перед k_1 и k_2. Из уравнений (7) и (13) следует, что

$$x = u/w = a^3,\ y = v/w = b^3,\ \lambda = w^2 = (ab)^{-2}. \tag{17}$$

Тогда из (6) вытекает, что

$$p = \int \psi(y_\alpha\, d\alpha - y_\beta\, d\beta) = 3\int \frac{b_\alpha\, d\alpha - b_\beta\, d\beta}{a^2},\ \ q = \int \psi(x_\beta\, d\beta - x_\alpha\, d\alpha) = 3\int \frac{a_\beta\, d\beta - a_\alpha\, d\alpha}{b^2},$$

$$z = 3a^3 \int \frac{b_\alpha\, d\alpha - b_\beta\, d\beta}{a^2} + 3b^3 \int \frac{a_\beta\, d\beta - a_\alpha\, d\alpha}{b^2} + 3\int (ba_\alpha - ab_\alpha)\, d\alpha + (ab_\beta - ba_\beta)\, d\beta. \tag{18}$$

Пример решения. Возьмем тривиальное решение уравнения Цицейки (16) $M = 1$. Подставив его в (15), придем к системе

$$a_{\alpha\alpha} + k_1 a_\beta = 0,\ a_{\alpha\beta} = a,\ a_{\beta\beta} + k_2 a_\alpha = 0,$$

которая легко решается:

$$a = c_1 \exp(\mu\alpha + \mu^{-1}\beta) + c_2 \exp(\tau\mu\alpha + \tau^2\mu^{-1}\beta) + c_3 \exp(\tau^2\mu\alpha + \tau\mu^{-1}\beta). \tag{19}$$

Здесь τ – кубический корень из 1, $\tau = (-1+\sqrt{3}i)/2$; $\mu^3 = k_1 = 1/k_2$. Найдем b:

$$b = d_1 \exp(-\mu\alpha - \mu^{-1}\beta) + d_2 \exp(-\tau\mu\alpha - \tau^2\mu^{-1}\beta) + d_3 \exp(-\tau^2\mu\alpha - \tau\mu^{-1}\beta). \tag{20}$$

Константы d_j не произвольны, а связаны с константами c_j соотношением

$$c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = 0.$$

Рассмотрим один пример. Положим $\mu = 1$, $c_1 = d_2 = d_3 = 1$, $c_2 = c_3 = d_1 = 0$. Тогда из (19) и (20) следует, что

$$a = \exp(\alpha+\beta),\ b = 2\exp\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}(\alpha-\beta)}{2}.$$

А из (17) и (18) находим

$$x = \exp(3(\alpha+\beta)),\quad y = 8\exp\frac{3(\alpha+\beta)}{2}\cdot\cos^3\frac{\sqrt{3}(\alpha-\beta)}{2},$$

$$z = 4\sqrt{3}\exp\frac{3(\alpha+\beta)}{2}\cdot\sin^3\frac{\sqrt{3}(\alpha-\beta)}{2}.$$

Исключая α и β, получим решение уравнения (11) в явном виде

$$z = 2^{-1}3^{1/2}(4x^{1/3} - y^{2/3})^{3/2}.$$

Список литературы

[1] *Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

[2] *А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский Лицей, 1998.

[3] *J. Drach.* Sur la transformation et l'integration des equations aux derivees partielles du second orde a deux variables independantes, par l'usage explicite des characteristiques d'Ampere. Atti Congresso Internaz. Mat. Bologna. 1930. V. 3. P. 11–25.

[4] *О. В. Капцов, Ю. В. Шанько.* Многопараметрические решения уравнения Цицейки. Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. №12. С. 1660–1668.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ В $\mathbb{R}^n$ ОТНОСИТЕЛЬНО ФД-УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

М.М. Шатохин

ОрелГИЭТ, Орел

Теория устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений (ФД - уравнений) запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t),\ f : J \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $f(t, \varphi)$ определена на открытом множестве $J \times \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times C$; J – открытое множество $\mathbb{R}$, содержащее множество $R^+ = [0; \infty]$; $C = C([-r; 0], \mathbb{R})$ – пространство всех непрерывных функций $\varphi(s)$, определенных для $s \in J_r = [-r; 0], r > 0$ и принимающих значения в $\mathbb{R}^n$ с нормой $||\varphi|| = \max\limits_{s \in J_r} |\varphi(s)|$; $x_t = x(t + s)$, $s \in J_r$, в настоящее время является одним из интенсивно развивающихся разделов современной математики.

Еще на стадии становления этой теории ее основоположники [1, 2, 3, 4] указывали на важность изучения поведения решений уравнений (1) и, в частности, автономного ФД-уравнения:

$$\dot{x}(t) = f(x_t),\ f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n \tag{2}$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$, а не в фазовом функциональном пространстве C, причем к числу возникающих при этом проблем была отнесена проблема устойчивости положительно-инвариантного относительно ФД-уравнений (2) множества $M \subset T\mathcal{D} = \{\varphi(s) \in \mathbb{R}^n : s \in J_r\}$ от выбора функциональной надстройки $G_M \subset \mathcal{D}$ над множеством M.

В настоящей статье приводится решение этой проблемы, то есть строится конкретный пример автономного ФД-уравнения (2), положительно-инвариантного относительно ФД-уравнения (2) множества $M \subset \mathbb{R}^n$ и двух различных надстроек над $M : G_M^1$ и G_M^2 таких, что $\rho_C(G_M^1, G_M^2) > 0$ и M устойчиво относительно ФД-уравнения (2) с надстройкой G_M^1 и неустойчиво с надстройкой G_M^2.

Определение основных понятий.

Определение 1. *Множество $G_M \subset \mathcal{D}$ называется функциональной надстройкой над множеством M (короче, надстройкой M), если выполняются следующие условия:*

а) $G_M(0) = \{\varphi_n(0) \in \mathbb{R}^n : \varphi(0) \in G_M\} = M$;

б) Если $\varphi_n(0) \to \varphi(0) \in \mathbb{R}^n, n \to \infty$ где $\varphi_n \in G_M$, то существует подпоследовательность $\varphi_{n_k} \in G_M$ и $\varphi \in G_M$ такие, что $\varphi_{n_k} \to \varphi, k \to \infty$;

в) Если $\varphi, \psi \in G_M$ и $\varphi(0) = \psi(0)$, то φ и ψ принадлежат одной компоненте связности множества G_M.

Отметим, что для любого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ существует очевидная надстройка $G_M = \{\varphi \in \mathcal{D} : \varphi(s) = \varphi(0) \in M \ \forall s \in J_r\}$.

Определение 2. *Множество $C \subset \mathbb{R}^n$ с надстройкой G_M называется положительно-инвариантным относительно ФД- уравнения (2), если оно вместе с каждой точкой $x \in M$ содержит также положительную полутраекторию $x^+(\varphi) = x(t;\varphi)$, начинающуюся в точке $\varphi \in G_M$ такой, что $\varphi(0) = x$.*

Определение 3. *Множество $M \subset T\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ с надстройкой $G_M \subset \mathcal{D}$ называется устойчивым по Ляпунову (короче, устойчивым), если:*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall \varphi \in B_\delta(G_M))\ (\forall t \geqslant 0) \Rightarrow x(t;\varphi) \in S_\varepsilon(M),$$

где $B_\varepsilon(G_M) = \{\varphi \in C[J_r, \mathbb{R}^n] : \rho_C(\varphi, G_M) < \delta\}$, $S_\varepsilon(M) = \{x \in \mathbb{R}^n : S_{\mathbb{R}^n}(x, M) < \varepsilon\}$

Отметим, что, если $M \subset \mathbb{R}^n$ компактно, то из устойчивости M с надстройкой G_M следует положительная инвариантность M с надстройкой G_M.

Построение функционала $f(\varphi)$ и его свойства. Рассмотрим автономное, скалярное ФД-уравнение запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = f(x_t),\ f : C\big([-2;0], R\big) \to R, \tag{3}$$

где функционал $f(\varphi)$ в (3) строится следующим образом:

Пусть A и B подмножества $C([-2;0], R)$, определенные равенствами:

$$A = \{\varphi \in C\big([-2;0], R\big) : |\varphi(s) + s| \leqslant \frac{3}{2}\ \forall s \in [-2;0]\},$$

$$B = \{\varphi \in C\big([-2;0], R\big) : |\varphi(s)| \leqslant \frac{1}{4}\ \forall s \in [-2;0]\}.$$

Очевидно, A и B замкнутые в C, непересекающиеся множества, причем $\rho_C(A, B) = 1/4$. Пусть $f(\varphi) = \omega_1(\varphi) \cdot \omega_2(\varphi)$, где

$$\omega_1(\varphi) = \frac{\rho_C(\varphi, A)}{\rho_C(\varphi, A) + \rho_C(\varphi, B)}, \quad \forall \varphi \in C\big([-2;0], R\big),$$

$$\omega_2(\varphi) = (\varphi(0) - \varphi(1))\frac{e}{e-1}, \quad \forall \varphi \in C\big([-2;0], R\big).$$

Также очевидно, что функционал $f(\varphi)$ обладает следующими свойствами:

1) $f(\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in A;$
2) $f(\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in C\big([-2;0], R\big), \quad \varphi(s) = const, \quad \forall s \in [-1;0];$
3) $f(\varphi) = (\varphi(0) - \varphi(1))\dfrac{e}{e-1}, \quad \forall \varphi \in B;$
4) $f(\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица по φ на каждом компактном множестве $K \subset C\big([-2;0], R\big)$.

Построение положительно-инвариантного множества M. Пусть $M = 0 \in R$. Функциональные надстройки G_M^1 и G_M^2 над M определим следующим образом:

$$G_M^1 = \varphi_1(s) = -s, \quad \forall s \in [-2;0], \quad G_M^2 = \varphi_2(s) = 0, \quad \forall s \in [-2;0].$$

В силу свойства 4) функционала $f(\varphi)$ существует единственное решение $x(t) = x(t,\varphi)$ (2) с начальной функцией $\varphi \in C([-2;0], R)$. Следовательно, $x(t,\varphi_2) = 0 \;\; \forall t \in R^+$ и M положительно-инвариантно с надстройкой $G_M^2 = \varphi_2(s)$. С другой стороны функция $x(t) = x(t,\varphi_1) = 0, \;\; \forall t \in R^+$ будет также нель решение (2) в силу свойств 1)–2) функционала $f(\varphi)$. Следовательно, M является также положительно-инвариантным множеством с надстройкой G_M^1.

Исследование устойчивости M с надстройками G_M^1 и G_M^2. Докажем, что $M = 0$ с надстройкой $G_M^1 = \varphi_1(s)$ устойчиво. Для этого покажем, что если $\rho_C(\varphi, \varphi_1) \leqslant \frac{1}{2}$, то $x(t,\varphi) = x(t)$, если $t \in [-2;0]$ и $x(t,\varphi) = \varphi(0)$, если $t \in R^+$. Это и будет означать, что M с надстройкой G_M^1 устойчиво. Из свойства 1) функционала $f(\varphi)$ и включения $x_t(\varphi) \in A \;\; \forall t \in [0;1]$ следует, что $x(t) = x(t,\varphi) = \varphi(t)$, если $t \in [-2;0]$. Следовательно, из свойства 2) функционала $f(\varphi)$ вытекает, что $x(t) = x(t,\varphi) = \varphi(t)$, если $t \in [-2;0]$ и $x(t) = x(t,\varphi) = \varphi(0)$, если $t \in R^+$.

Для доказательства того, что $M = 0$ с надстройкой G_M^2 неустойчиво заметим, что ФД-уравнение (3) допускает решение $x(t) = x(t,\varphi) = -\varepsilon \exp(t) \;\; t \in R^+$ с начальной функцией $\varphi_\varepsilon(s) = -\varepsilon \exp(s)$, $s \in [-2;0]$. Так как $\varphi_\varepsilon(s) \to 0$, $\varepsilon \to 0+$ равномерно по $s \in [-2;0]$, а $x(t) = x(t,\varphi_\varepsilon) \to -\infty$, $t \to \infty$, то M с надстройкой G_M^2 неустойчиво.

В заключение отметим, что устойчивость надстройки G_M в пространстве C очевидно влечет устойчивость множества M с надстройкой G_M в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пример, который может быть получен модификацией примера, построенного в настоящей статье, показывает, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Список литературы

[1] *Н.Н. Красовский.* Некоторые задачи теории устойчивости систем с последействием. М.: Физматгиз, 1959.

[2] *А.Д. Мышкис.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.

[3] *Э.Д. Эльсгольц, С.Б. Норкин.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1972.

[4] *Д. Хейл.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

ТЕОРЕМА ЭММИ НЁТЕР – НЕГРУППОВОЙ ВАРИАНТ*

Г.Н. Яковенко

Московский физико-технический институт,

Долгопрудный, Московская область, Россия

Для вычисления первого интеграла по теореме Эмми Нётер [1] в модификации Бессель-Хагена [2] требуется, чтобы уравнения Лагранжа допускали однопараметрическую группу дивергентных симметрий. Изучается случай, когда уравнения Лагранжа допускают гладкое семейство (не обязательно группу) дивергентных симметрий [3], [4]. Возможный эффект: по однопараметрическому семейству вычисляется несколько первых интегралов. В приведённом примере – десять. В основу настоящей работы легли статьи [5], [6].

Семейство преобразований

$$\widehat{t} = \widehat{t}\,(t, q, \tau)\,, \quad \widehat{q}_i = \widehat{q}_i\,(t, q, \tau)\,, \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

есть решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\widehat{t}}{d\tau} = \xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right), \frac{d\widehat{q}_i}{d\tau} = \eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right), \ i = \overline{1, n}, \quad \frac{dR}{d\tau} = r\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right), \tag{2}$$

при начальных условиях

$$\widehat{t}\,(0) = t, \qquad \widehat{q}_i\,(0) = q_i, \qquad R\,(0) = 0. \tag{3}$$

Преобразование (1) называется преобразованием дивергентной симметрии лагранжевой системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{4}$$

определённой функцией Лагранжа $L\,(t, q, \dot{q})$, если оно связано с функцией Лагранжа соотношением

$$L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \frac{d\widehat{q}}{d\widehat{t}}\right)\frac{d\widehat{t}}{dt} + \frac{dR}{dt} = L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right). \tag{5}$$

Теорема. *Пусть преобразования (1) удовлетворяют условию (5) дивергентной симметрии. Тогда у лагранжевой системы с функцией Лагранжа $L\,(t, q, \dot{q})$ имеется семейство первых интегралов*

$$w\,(t, q, \dot{q}, \tau) = \sum_{i=1}^{n} p_i \eta_i\,(t, q, \tau) - \xi\,(t, q, \tau)\,H + r\,(t, q, \tau)\,, \tag{6}$$

где $\xi\,(t, q, \tau)$, $\eta_i\,(t, q, \tau)$, $r\,(t, q, \tau)$ – функции из (2), p_i и H – обобщенные импульсы и H – функция Гамильтона [4]:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H\,(t, q, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L\,(t, q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\,(t, q, \dot{q}). \tag{7}$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 05-01-00940, и Советом Программ поддержки ведущих научных школ, грант НШ-2094.2003.1

Далее нам потребуются следующие формулы (при выводе учтена перестановочность дифференцирования по независимым переменным τ и t и уравнения (2))

$$\frac{d}{d\tau}\frac{d\widehat{t}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{d\widehat{t}}{d\tau}=\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{dt}=\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}, \tag{8}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{dR}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{dR}{d\tau}=\frac{dr\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{dt}=\frac{dr\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}, \tag{9}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{d\widehat{q}_i}{d\widehat{t}}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\widehat{q}_i}{dt}\left(\frac{d\widehat{t}}{dt}\right)^{-1}\right)=\left[\left(\frac{d}{d\tau}\frac{d\widehat{q}_i}{dt}\right)\frac{d\widehat{t}}{dt}-\frac{d\widehat{q}_i}{dt}\left(\frac{d}{d\tau}\frac{d\widehat{t}}{dt}\right)\right]\left(\frac{d\widehat{t}}{dt}\right)^{-2}=$$

$$=\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{d\widehat{q}_i}{d\tau}\right)\frac{d\widehat{t}}{dt}-\frac{d\widehat{q}_i}{dt}\left(\frac{d}{dt}\frac{d\widehat{t}}{d\tau}\right)\right]\left(\frac{d\widehat{t}}{dt}\right)^{-2}=$$

$$=\left[\frac{d\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{dt}\frac{d\widehat{t}}{dt}-\frac{d\widehat{q}_i}{dt}\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{dt}\right]\left(\frac{d\widehat{t}}{dt}\right)^{-2}=\frac{d\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}-\frac{d\widehat{q}_i}{d\widehat{t}}\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}. \tag{10}$$

Потребуется также формула [4]

$$\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{dH}{dt}. \tag{11}$$

Для доказательства утверждения (6) теоремы продифференцируем условие (5) по τ (учтены уравнения Лагранжа и формулы (2), (4), (8) – (11)):

$$\left\{\frac{\partial L}{\partial\widehat{t}}\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\widehat{q}_i}\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{\widehat{q}}_i}\left(\frac{d\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}-\dot{\widehat{q}}_i\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\right)\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}+$$

$$+L\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}+\frac{dr(\widehat{t},\widehat{q},\tau)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}=\left\{\frac{\partial L}{\partial\widehat{t}}\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\widehat{t}}\frac{\partial L}{\partial\dot{\widehat{q}}_i}\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{\widehat{q}}_i}\left(\frac{d\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}-\dot{\widehat{q}}_i\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\right)\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}+L\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}+\frac{dr(\widehat{t},\widehat{q},\tau)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}\overset{(8)}{=}$$

$$=\left\{-\frac{dH}{d\widehat{t}}\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\frac{d}{d\widehat{t}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{\widehat{q}}_i}\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\widehat{q}}_i}\dot{\widehat{q}}_i-L\right)\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}+\frac{dr(\widehat{t},\widehat{q},\tau)}{d\widehat{t}}\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}\overset{(9)}{=}$$

$$=\left\{-\frac{dH}{d\widehat{t}}\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\frac{d}{d\widehat{t}}\sum_{i=1}^{n}\widehat{p}_i\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)-H\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}+\frac{dr(\widehat{t},\widehat{q},\tau)}{d\widehat{t}}\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}=$$

$$= \frac{d}{d\widehat{t}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \widehat{p}_i \eta_i \left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau \right) - \xi \left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau \right) H + r(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau) \right\} \frac{d\widehat{t}}{dt} = 0.$$

Как следует из (3), при малых значениях τ выполняется $d\widehat{t}/dt \neq 0$, поэтому на решениях лагранжевой системы, соответствующей функции Лагранжа $L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \dot{\widehat{q}}\right)$, сохраняется формула, находящаяся в фигурных скобках последнего выражения, что доказывает наличие первого интеграла (6) для лагранжевой системы с функцией Лагранжа $L\left(t, q, \dot{q}\right)$.

Пример. Замкнутая консервативная система. Потенциальная энергия $\Pi\left(r_{ik}\right)$ зависит только от расстояний r_{ik} между точками:

$$r_{ik}^2 = \left(x_i - x_k\right)^2 + \left(y_i - y_k\right)^2 + \left(z_i - z_k\right)^2.$$

Функция Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) - \Pi\left(r_{ik}\right). \tag{12}$$

Обобщённые импульсы:

$$p_i^x = m_i \dot{x}_i, \quad p_i^y = m_i \dot{y}_i, \qquad p_i^z = m_i \dot{z}_i. \tag{13}$$

Функция Гамильтона:

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) + \Pi\left(r_{ik}\right). \tag{14}$$

Для введённой в примере материальной системы известна десятипараметрическая группа симметрий [7] – группа Галилея:

$$\begin{array}{ll}
\widehat{t} = t + \tau_1, & \widehat{x}_i = x_i + \tau_2, \quad \widehat{y}_i = y_i + \tau_3, \quad \widehat{z}_i = z_i + \tau_4; \\
\widehat{t} = t, & \widehat{x}_i = x_i, \quad \widehat{y}_i = y_i \cos\tau_5 - z_i \sin\tau_5, \quad \widehat{z}_i = y_i \sin\tau_5 + z_i \cos\tau_5; \\
\widehat{t} = t, & \widehat{x}_i = x_i \cos\tau_6 - z_i \sin\tau_6, \quad \widehat{y}_i = y_i, \quad \widehat{z}_i = x_i \sin\tau_6 + z_i \cos\tau_6; \\
\widehat{t} = t, & \widehat{x}_i = x_i \cos\tau_7 - y_i \sin\tau_7, \quad \widehat{y}_i = x_i \sin\tau_7 + y_i \cos\tau_7, \quad \widehat{z}_i = z_i; \\
\widehat{t} = t, & \widehat{x}_i = x_i + t\tau_8, \quad \widehat{y}_i = y_i + t\tau_9, \quad \widehat{z}_i = z_i + t\tau_{10};
\end{array}$$

Специализация параметров $\tau_1 = \tau^3$, $\tau_2 = 0$, $\tau_3 = 0$, $\tau_4 = 0$, $\tau_5 = \tau$, $\tau_6 = \dfrac{\pi}{2}\tau$, $\tau_7 = 0$, $\tau_8 = 0$, $\tau_9 = 0$, $\tau_{10} = \tau^4$ и суперпозиция τ_5, τ_6, τ_{10}, τ_1 приводит к семейству (1) преобразований

$$\begin{array}{l}
\widehat{t} = t - \tau^3, \quad \widehat{z}_i = x_i \sin\dfrac{\pi}{2}\tau + \left(y_i \sin\tau + z_i \cos\tau\right)\cos\dfrac{\pi}{2}\tau + t\tau^4, \\
\widehat{x}_i = x_i \cos\dfrac{\pi}{2}\tau - \left(y_i \sin\tau + z_i \cos\tau\right)\sin\dfrac{\pi}{2}\tau, \quad \widehat{y}_i = y_i \cos\tau - z_i \sin\tau.
\end{array}$$

Условие (5) дивергентной симметрии удовлетворяется при

$$R = -\sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ x_i \sin\frac{\pi}{2}\tau + \left(y_i \sin\tau + z_i \cos\tau\right)\cos\frac{\pi}{2}\tau \right\} \tau^4 - \frac{1}{2} t\tau^8 \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Функции $\widehat{t}$, $\widehat{x}_i$, $\widehat{y}_i$, $\widehat{z}_i$, R есть решение системы (2), (3) при

$$\begin{aligned}
&\xi = -3\tau^2, \quad \eta_i^x = \left\{\left(\widehat{t} + \tau^3\right)\tau^4 - \widehat{z}_i\right\}\frac{\pi}{2} - \widehat{y}_i \sin\frac{\pi}{2}\tau, \\
&\eta_i^y = \widehat{x}_i \sin\frac{\pi}{2}\tau - \widehat{z}_i \cos\frac{\pi}{2}\tau + \left(\widehat{t} + \tau^3\right)\tau^4 \cos\frac{\pi}{2}\tau, \\
&\eta_i^z = \widehat{x}_i \frac{\pi}{2}\tau + \widehat{y}_i \cos\frac{\pi}{2}\tau + 4\left(\widehat{t} + \tau^3\right)\tau^3, \\
&r = -\frac{\pi}{2}\tau^4 \sum_{i=1}^{N} m_i \widehat{x}_i - \tau^4 \sum_{i=1}^{N} m_i \widehat{y}_i \cos\frac{\pi}{2}\tau - 4\tau^3 \sum_{i=1}^{N} m_i \widehat{z}_i.
\end{aligned} \tag{15}$$

Первый интеграл (6) с учётом (13) – (15) равен

$$\begin{aligned}
w(\tau) = K_x \cos\frac{\pi}{2}\tau - \frac{\pi}{2}K_y + K_z \sin\frac{\pi}{2}\tau + P_x\tau^7 + P_y\tau^7\cos\frac{\pi}{2}\tau + \\
+ 4P_z\tau^6 + G_x\tau^4 + G_y\tau^4\cos\frac{\pi}{2}\tau + 4G_z\tau^3 + 3H\tau^2.
\end{aligned} \tag{16}$$

Введены обозначения для проекций кинетического момента $\mathbf{K}_o$, импульса $\mathbf{P}$, вектора Галилея $\mathbf{G}$:

$$\begin{aligned}
&K_x = \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i), \quad K_y = \sum_{i=1}^{N} m_i (z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i), \quad K_z = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i), \\
&P_x = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{x}_i, \quad P_y = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{y}_i, \quad P_z = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{z}_i, \\
&G_x = P_x t - m x_c, \quad G_y = P_y t - m y_c, \qquad G_z = P_z t - m z_c.
\end{aligned} \tag{17}$$

Подстановка в (16) $\tau = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5$ приводит к алгебраической системе из 10 уравнений и к выводу, что механическая система с функцией Лагранжа (12) обладает 10 первыми интегралами: H и (17).

Список литературы

[1] *E. Noether.* Invariante Variationsprobleme. Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math-Phys. Kl. 1918. S. 235–257. (Перевод в кн.: Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 611–630.)

[2] *E. Bessel-Hagen.* Über die Erhaltungsätze der Electrodynamic. Math. Ann. 1921. Bd. 84. S. 258–276.

[3] *Г.Н. Яковенко.* Симметрии уравнений Гамильтона и Лагранжа. М.: Изд. МЗ Пресс, 2006.

[4] *Г.Н. Яковенко.* Краткий курс аналитической динамики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.

[5] *Г.Н. Яковенко.* К теореме Эмми Нётер: «одним махом семерых убивахом». Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения. 2006. СПб.: Российский педагогический университет. 2006. С. 112–119.

[6] *Г.Н. Яковенко.* Синергетический вариант теоремы Бессель-Хагена. В сб. Синергетические идеи в образовании. Ред. Н. В. Аммосова, Б.Б. Коваленко. Астрахань: Изд-во АИП-КП, 2006. С. 63 – 68.

[7] *F. Engel.* Über zehn algemeinen Integrale der klassischen Mechanik, Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math-Phys. Kl. 1916. S. 270 – 275.

Теория функций и функциональный анализ

О ПОВЕДЕНИИ ЧЛЕНОВ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ УСРЕДНЯЮЩЕГО ПАРАМЕТРА

Н.Ч. Агамалиев, Р.А. Бандалиев
Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет,
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

В работе доказано, что для больших значений усредняющего параметра $h > 0$ в интегральном представлении В.П.Ильина и О.В.Бесова, члены интегрального представления выходят на некоторый многочлен.

Пусть, $R^n = \{x, y, \dots\}$ – евклидово пространство точек. Обозначим

$$x = (x', x''),\quad x' = (x_1, \dots, x_k)\,,\quad x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)\,,\quad k = 1, 2, \dots, n,$$
$$\rho\,(x) = \left(\sum x_i^{\frac{2}{a_i}}\right)^{\frac{1}{2}},\quad a_i > 0,\quad i = 1, \dots, n,$$
$$\rho\,(x') = \rho\,(x', 0'')\,,\quad l = (l_1, \dots, l_n)\,,\quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)\,,$$
$$(a, \nu) = \sum_{i=1}^{n} a_i \nu_i,\quad l! = l_1! \cdots l_n!,\quad \nu_i \in N \cup \{0\}.$$

Далее, предположим, что

$$\begin{aligned}&\Omega_k = \{x : x' \in R^k,\ \ \varphi_i(x') < x_i < \infty,\ \ i = k+1, \dots, n,\ \ 1 \leqslant k \leqslant n-1\}, \qquad (1)\\ &\Omega_0 = \{x : x \in R^n,\ \ x_i^{(0)} < x_i < \infty,\ \ i = 1, \dots, n\},\\ &\Gamma_k = \{x : x' \in R^k,\ \ x'' = \bar{\varphi}_i(x'),\ \ 1 \leqslant k \leqslant n-1\},\end{aligned}$$

где вектор функция $\bar{\varphi}_i\,(x') = (\varphi_{k+1}\,(x')\,, \dots, \varphi_n\,(x'))$ удовлетворяет условию Гёльдера:

$$\rho\,(\bar{\varphi}\,(x') - \bar{\varphi}\,(y')) \leqslant M \rho\,(x' - y')\,,\quad \forall x', y' \in R^k. \qquad (2)$$

Здесь $\rho\,(x, \Gamma_k) = \inf\limits_{y \in \Gamma_k} \rho\,(x - y)\,,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1$. В случае $k = 0$, $\rho\,(x, \Gamma_0) = \rho\left(x - x^{(0)}\right)$, где Γ_0 – множество, состоящее из одной фиксированной точки $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) \in R^n$, при $x^{(0)} = (0, \dots, 0)$, $\Omega_0 = R^n_{++}$, где $R^n_{++} = \{x : x \in R^n, x_i > 0,\ \ i = 1, \dots, n\}$.

Положим $b = (b_1, \dots, b_n)\,,\quad c = (c_1, \dots, c_n)\,,\quad 0 < b_i < c_i < \infty,\quad i = 1, \dots, n.$ Множество

$$\Re\left(\frac{1}{a}\right) = \left\{y : y_i > 0,\ \ b_i h < y_i^{\frac{1}{a_i}} < c_i h,\ i = 1, \dots, n,\ \ 0 < h < \infty\right\}$$

называется $\frac{1}{a}$-рогом, $\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$.

В [1] доказано, что область Ω_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, удовлетворяет условию $\frac{1}{a}$ рога, т.е. $\forall x \in \Omega_k$, $x + \Re\left(\frac{1}{a}\right) \subset \Omega_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, где $a_i > M \sum\limits_{j=1}^{k} b_j$, $i = k+1, \ldots, n$.

Положим,

$$\pi_k(x) = \rho\left(x'' - \bar{\varphi}(x')\right) = \left(\sum_{i=k+1}^{n} \left|x_i - \varphi_i(x')\right|^{\frac{2}{a_i}}\right)^{\frac{1}{2}}, \ 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$\pi_0(x) = \rho\left(x - x^{(0)}\right).$$

Лемма 1. Функции $\rho(x, \Gamma_k)$ и $\pi_k(x)$ эквивалентны в области Ω_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ [1].

Пусть ω-положительная измеримая функция, заданная в Ω_k. Через $L_{p,\omega(\Omega_k)}$ обозначается пространство измеримых по Лебегу в области Ω_k функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{p,\omega(\Omega_k)}} = \|f\|_{p,\omega} = \left(\int\limits_{\Omega_k} |f(x)|^p \omega(\rho)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Весовые пространство Соболева $W^{l_1,\ldots,l_n}_{p,\omega_0,\ldots,\omega_n}(\Omega_k)$, $l_i \geqslant 0$-целые, $1 \leqslant p < \infty$, определяется как совокупность измеримых функций $f(x)$, $x \in R^n$, имеющие обобщенные производные $D_i^{l_i} f$ с конечной нормой

$$\|f\|_{W^{l_1,\ldots,l_n}_{p,\omega_0,\ldots,\omega_n}(\Omega_k)} = \|f\|_{L_{p,\omega_0}(\Omega_k)} + \sum_{i=1}^{n} \left\|D_i^{l_i} f\right\|_{L_{p,\omega_i}(\Omega_k)}, \ 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Далее, для областей удовлетворяющих условию рога, в [2] доказано, что имеет место интегральное представление Ильина-Бесова:

$$D^\nu f_\varepsilon(x) = D^\nu f_h(x) + (-1)^{|\nu|} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\varepsilon}^{h} \upsilon^{1-\sigma_i} d\upsilon \int\limits_{\Re\left(\frac{1}{a}\right)} \Phi_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{\upsilon^a}\right) D_i^{l_i} f(x+y)\, dy, \qquad (3)$$

где $\sigma_i = |a| + (\nu, a) - l_i a_i$, $\ i = 1, 2, \ldots, n$, $\ |a| = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$,

$$D^\nu f_h(x) = \frac{(-1)^{|\nu|}}{h^{|a|+(\nu,a)}} \int\limits_{R^n} \Phi_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{\upsilon^a}\right) f(x+y)\, dy,$$

Φ_j, $j = 1, 2, \ldots n$ – некоторые бесконечно дифференцируемые финитные функции, сосредоточенные в области

$$\{y : 0 < b_i^{a_i} < y_i < c_i^{a_i}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

и обладающие соответственно свойствами

$$\int\limits_{R^n} \Phi_0(y)\, dy = 1, \int\limits_{R^n} \Phi_i^{(\nu)}(y)\, dy = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n\ , \quad \forall \nu \in N_0^n = N^n \cup \{0\}.$$

Предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ в равенстве (3) при $l_i a_i - (\nu, a) > 0$, получается интегральное представление

$$D^{\nu} f(x) = D^{\nu} f_h(x) + (-1)^{|\nu|} \int_0^h \sum_{i=1}^n \upsilon^{-1-\sigma_i} d\upsilon \int_{\Re(y)} \Phi_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{\upsilon^a}\right) D_i^{l_i} f(x+y)\, dy, \qquad (4)$$

справедливое для почти всех $x \in \Omega_k$ (см. [2], стр. 79-87).

Отметим, что в силу равенства (4), функция должна принадлежать анизотропному пространству С.Л. Соболева $W_p^{l_1,\ldots,l_n}(\Omega_k)$.

В настоящей работе рассматривается $L_{q,\omega}(\Omega_k)$-норма функции (или ее производной), уменьшенной на некоторый многочлен и дается оценка через $L_{p,\omega}^l(\Omega_k)$-полунормы, при $1 < p < q < \infty$.

Теорема 1. *Пусть $f \in W_{p,\omega}^l(\Omega_k)$, $k = \overline{1, n-1}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Далее, предположим, что весовая функция $\omega(\pi_k(x))$ удовлетворяет следующим условиям:*

a) $\forall x \in F \subset \Omega_k$, $\forall y \in \left\{y :\ 0 < (a_i\upsilon)^{\chi_i} < y_i < (b_i\upsilon)^{\chi_i};\ i = \overline{1,n}\right\}$, $\chi_i = \frac{1}{l_i}$; и

b) для достаточно больших $\upsilon > 0$ имеет место неравенства:

$$\omega(\pi_k(x+y)) \geqslant c\omega(\upsilon), \qquad (5)$$

$$\lim_{h\to\infty} \int_h^{\infty} \frac{d\upsilon}{\upsilon^{\frac{|\chi|}{p}+(\nu,\chi)}\, \omega^{\frac{1}{p}}(\upsilon)} = 0, \qquad (6)$$

$$\lim_{h\to\infty} \frac{h^{1-\frac{|\chi|}{p}-(\nu,\chi)}}{(\omega(h))^{\frac{1}{p}}} = 0. \qquad (7)$$

Тогда при $h \longrightarrow \infty$, $D^{\nu} f_h(x)$ из представления (3), в котором

$$\operatorname{supp} \Phi_i \subset \{x : 0 < a_i^{\chi_i} < y_i < b_i^{\chi_i}\},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{0,n},$$

$a_i > M \sum_{j=1}^k b_j$, $i = k+1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n-1$, сходится равномерно на любом компакте $F \subset \Omega_k$ если выполняется условия (5) и (6). К тому, же если при некотором $r \leqslant n$, $\nu_r \geqslant l_r$, то $D^{\nu} f_h(x) \rightrightarrows 0$ на любом компакте $F \subset \Omega_k$, при выполнении условий (5), (7).

Доказательство. Имеет место

$$\left|D^{\nu} f_{h_1}(x) - D^{\nu} f_{h_2}(x)\right| \leqslant \sum_{i=1}^n \left| \int_{h_1}^{h_2} \frac{d\upsilon}{\upsilon^{|\chi|+(\nu,\chi)}} \int_{R\left(\frac{1}{\chi}\right)} \Phi_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{\upsilon^{\chi}}\right) D_i^{l_i} f(x+y)\, dy \right|, \qquad (8)$$

где $0 < h_1 < h_2 < \infty$.

Оценим правую часть неравенства (8). Применяя неравенство Гельдера и используя условия (5), (6) получим:

$$\left| \int_{h_1}^{h_2} \frac{d\upsilon}{\upsilon^{|\chi|+(\nu,\chi)}} \int_{R\left(\frac{1}{\chi}\right)} \Phi_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{\upsilon^{\chi}}\right) \left[\omega(\Pi_k(x+y))\right]^{-\frac{1}{p}} D_i^{l_i} f(x+y)\, \omega^{\frac{1}{p}}(\Pi_k(x+y))\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1\left|\int\limits_{h_1}^{h_2}\frac{\left\|\Phi_i^{(\nu)}\left(y/\upsilon^{\chi}\right)\right\|_{p_1',R^n}}{\upsilon^{|\chi|+(\nu,\chi)}\omega^{\frac{1}{p}}\left(\upsilon\right)}d\upsilon\left(\left\|D_i^{l_i}f\right\|_{p,\omega,\Omega_k}\right)\right|\leqslant c_2\int\limits_{h_1}^{\infty}\frac{d\upsilon}{\upsilon^{\frac{|\chi|}{p}+(\nu,\chi)}\omega^{\frac{1}{p}}\left(\upsilon\right)}\to 0,$$

при $h_1,h_2\longrightarrow\infty$. Этим доказано равномерная сходимость функции $D^{\nu}f_h\left(x\right)$ на любом компакте $F\subset\Omega_k$. Далее, имеем

$$\left|D^{\nu}f_h\left(x\right)\right|=\frac{1}{h^{|\chi|+(\nu,\chi)}}\left|\int\limits_{R\left(\frac{1}{\chi}\right)}\Phi_0^{(\nu)}\left(\frac{y}{h^{\chi}}\right)f\left(x+y\right)dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{h^{l_i\chi_i}}{h^{|\chi|+(\nu,\chi)}}\int\limits_{R\left(\frac{1}{\chi}\right)}\left|\Phi_0^{(\tilde{\nu})}\left(\frac{y}{h^{\chi}}\right)\right|\left|D_i^{l_i}f\left(x+y\right)\right|dy=$$

$$=h^{1-|\chi|-(\nu,\chi)}\int\limits_{R\left(\frac{1}{\chi}\right)}\left|\Phi_0^{(\tilde{\nu})}\left(\frac{y}{h^{\chi}}\right)\right|\omega^{-\frac{1}{p}}\left(\Pi_k(x+y)\right)\left|D_i^{l_i}f\left(x+y\right)\right|\omega^{-\frac{1}{p}}\left(\Pi_k(x+y)\right)dy,$$

где $\tilde{\nu}=\left(\nu_1,\ldots,\nu_r-l_r,\ldots,\nu_n\right),\ \nu_r\geqslant l_r.$

Аналогично, применяя неравенство Гельдера и используя условий (5) и (7), получим:

$$\left|D^{\nu}f_h\left(x\right)\right|\leqslant c_1\left\|\Phi_0^{(\tilde{\nu})}\right\|_{p_1',R^n}\left\|D_i^{l_i}f\right\|_{p,\omega,\Omega_k}\frac{h^{1-\frac{|\chi|}{p}+(\nu,\chi)}}{\omega^{\frac{1}{p}}\left(h\right)}\to 0,\quad h\to\infty$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $f\in W_{p,\omega}^{l}\left(\Omega_k\right),\ 1\leqslant p\leqslant\infty$. *Тогда существует многочлен* $P_{l-1}\left(x;f\right)=\sum\limits_{\mu\leqslant l-1}c_{\mu}x^{\mu}$ *степени не выше* l_i-1 *по* x_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ *такой, что при* $h\longrightarrow\infty$ $D^{\nu}f_h(x)$ *из представления (4), для которого выполняются условия теоремы 1, при выполнении условий (5)–(7), сходится к* $D^{\nu}P_{l-1}\left(x;f\right)$ *равномерно на любом компакте* $F\subset\Omega_k$, $k=\overline{1,n-1}$, *где некоторые* c_{μ} *могут быть равными нулю, в зависимости от условий между параметрами* μ,χ,p.

Доказательство. Пусть x' – произвольная точка областиΩ_k и $\bar{B}\subset\Omega_k$, где B – открытый шар с центром в точке x'. Положим

$$\tilde{P}_{l-1}\left(x;f\right)=\sum\limits_{\mu\leqslant l-1}c_{\mu}\left(x-x'\right)^{\mu},\tag{9}$$

где $c_{\mu}=\frac{1}{\mu!}D^{\mu}f_h\left(x'\right)$, если условия (6) и (7) выполнены, и $c_{\mu}=0$ если условия (6) и (7) не выполнены. В первом случае существование предела следует из теоремы 1.

Разлагая функцию $D^{\nu}f_h\left(x\right)$ по формуле Тейлора в шаре $\bar{B}$ имеем:

$$D^{\nu}f_h\left(x\right)=\sum\limits_{\alpha\leqslant l-1}\frac{D^{\alpha+\nu}f\left(x'\right)}{\alpha!}\left(x-x'\right)^{\alpha}+R_{\alpha}\left(x\right),\ x\in\bar{B},$$

где

$$R_{\alpha}\left(x\right)=\frac{1}{l!}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x-x_i'\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right]^{l}f\left(x'+\theta_l\left(x-x'\right)\right),\ 0<\theta_l<1.$$

Если делать замену $\beta = \alpha + \nu$, то $\alpha = \beta - \nu$ и

$$D^{\nu} f_h(x) = \sum_{\beta-\nu \leqslant l-1} \frac{D^{\beta} f(x')}{(\beta-\nu)!} (x-x')^{\beta-\nu} + R_{\beta-\nu}(x). \tag{10}$$

С другой стороны,

$$D^{\nu} \tilde{P}_{l-1}(x; f) = \sum_{|\nu| \leqslant \mu \leqslant l-1} c_{\mu} \frac{(x-x')^{\mu-\nu}}{(\mu-\nu)!}.$$

Взяв в разложении (10) некоторые коэффициенты (а именно, если условия (6) и (7) не выполняются) равными нулю и применяя теорему 1, можно доказать, что

$$D^{\nu} f_h(x) \rightrightarrows D^{\nu} \widetilde{P}_{l-1}(x; f), \ \forall x \in \bar{B}.$$

Раскрывая в (9) скобки, приводя подобные члены и обозначая полученные коэффициенты при степенях x^{μ} через $\bar{c}_{\mu}$, получим:

$$\tilde{P}_{l-1}(x; f) = \sum_{\mu \leqslant l-1} \bar{c}_{\mu} x^{\mu}. \tag{11}$$

Коэффициенты $\bar{c}_k$, при не выполнении условий (6) и (7) исчезают при взятии производной порядка ν. Поэтому многочлен $P_{l-1}(x; f) = \sum\limits_{\mu \leqslant l-1} c_{\mu} x^{\mu}$, $c_{\mu} = \bar{c}_{\mu}$, если выполнены условия (6) и (7), $c_{\mu} = 0$, если условия (6) и (7) не выполнены, также будет удовлетворять условию (11).

Из точки x' до любой точки $x'' \in \Omega_k$ можно добраться по конечной цепочке открытых шаров, каждый из которых пересекается соседними шарами, и вся цепочка вместе со своим замыканием принадлежит области Ω_k, $k = \overline{1, n-1}$. Поэтому в силу доказанного и теоремы 1, получаем, что коэффициенты c_{μ} многочлена $P_{l-1}(x; f)$ не зависят от точки x'. Отсюда в силу теоремы 1 заключаем, что $D^{\nu} f_h(x) \rightrightarrows D^{\nu} P_{l-1}(x; f)$ (при выполнении условий (6) и (7)) на любом компакте $F \subset \Omega_k$. Теорема доказана.

Следствие. *Если в теоремах 1 и 2 взять $\omega(\pi_k(x)) = [\pi_k(x)]^{p\alpha}$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha > 0$, то при $(\nu, \chi) > 1 - |\chi|/p - \alpha$ получатся результаты принадлежащие Ю.С. Никольскому (см. [1]).*

Список литературы

[1] *Ю.С. Никольский.* Теоремы вложения весовых анизотропных пространств дифференцируемых функций. Труды МИ РАН. Москва. 1992. Т.201, с. 302–323.

[2] *О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

О НУЛЯХ ФУНКЦИИ, АНАЛИТИЧЕСКОЙ В КРУГЕ

Е.Н. Алексеева

Орловский государственный университет, 302026, Орел, ул. Комсомольская, 95

В данной статье доказана теорема единственности для функций, аналитических в круге.

Теорема. *Пусть функция $F(z)$ является аналитической в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, а функция $\varphi(t)$ – аналитической в открытом круге $|t| < 1$ и пусть $\{\lambda_j\}, |\lambda_j| < 1$ – нули функции $\varphi(t)$. Пусть также*

$$\Phi(z) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{F(t)\varphi(\frac{1}{t})dt}{t-z}, \tag{1}$$

где γ – контур, охватывающий единичную окружность $|t| < 1$. Тогда если функция (1) обращается в ноль в точках $z_j = \frac{1}{\lambda_j}$, т.е.$\Phi(\frac{1}{\lambda_j}) = 0, j = 1, 2, 3...$, то функция F(z) является рациональной.

Доказательство. Функция $\Phi(z)$ является аналитической в замкнутом круге $|z| \leqslant R$, R>1, и ее нули $z_j = \frac{1}{\lambda_j}$ таковы, что $\left|\frac{1}{\lambda_j}\right| \searrow 1$, т.е. имеют внутреннюю предельную точку. По теореме единственности аналитических в области функций ([1]) $\Phi(z) \equiv 0$. Следовательно, $a_n(\Phi) \equiv 0$, а значит, $\Phi^{(n)}(0) = 0 \ \ \forall n$. Таким образом, имеем

$$\Phi^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} \frac{F(t)\varphi(\frac{1}{t})dt}{t^{(n+1)}} = 0, \quad \forall n. \tag{2}$$

Функция $\Psi(t) = F(t)\varphi(\frac{1}{t})$ аналитическая в кольце $r < |t| < R$. Следовательно, $\Psi(t)$ может быть разложена в ряд Лорана:

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{t^n}. \tag{3}$$

Коэффициенты b_n равны правым частям равенств (2), из которых следует,что $b_n = 0, \ \ \forall n$. Формула (3) принимает вид

$$\Psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{t^n}. \tag{4}$$

Функция F(z) является аналитической в замкнутом круге $|z| \leqslant R$, R>1, и

$$F(z) = \frac{\Psi(z)}{\varphi(1/z)}, \quad |z| > R.$$

Таким образом, функция F(z) является мероморфной и имеет конечное число нулей в круге $|z| > R$. Откуда следует, что F(z) рациональная ([2]):

$$F(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{d_k}{z - d_k}.$$

Что и требовалось доказать.

Список литературы

[1] *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФМЛ, 2004.

[2] *А.И. Маркушевич.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967.

БАЗИСЫ ИЗ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ С ИЗМЕРИМОЙ ФАЗОЙ

Б.Т. Билалов, А.Р. Абдукаримов
ИММ НАН Азербайджана

В работе рассматривается система экспонент с комплекснозначными коэффициентами,аргументы которых просто измеримые функции. При определенных условиях доказана базисность этой системы в L_p.

Рассмотрим следующую систему экспонент

$$\left\{ A\left(t\right)\, e^{i\,n\,t};\;\, B\left(t\right)\, e^{-i\,k\,t} \right\}_{n \geqslant 0,\; k \geqslant 1} \tag{1}$$

с комплексно-значными коэфициентами $A(t) \equiv |A(t)|e^{i\alpha}(t)$, $B(t) \equiv |A(t)|e^{i\beta}(t)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$: $|A|^{\pm 1}$, $|B|^{\pm 1} \in L_\infty\left(-\pi, \pi\right)$.

Исследование базисных свойств системы (1) в пространствах $L_p \equiv L_p\left(-\pi, \pi\right)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $(L_\infty \equiv \mathbb{C}[-\pi, \pi])$ диктуют многие задачи математической физики и механики. Поэтому этому кругу вопросов посвящено много работ разных математиков (см. напр. [1–9]). С другой стороны, исследование базисных свойств системы (1) в разных функциональных пространствах представляет интерес и с теоретической точки зрения. Так как, классические результаты Дж. Уолша [10] утверждают о том, что если φ–образ отрезка $[a, b]$ на комплексной плоскости является замкнутым $(\varphi\left(a\right) = \varphi\left(b\right))$ Жордановым контуром, то система $\left\{\varphi^n\left(t\right)\; ;\; \bar{\varphi}^n\left(t\right)\right\}_{n\geqslant 0}$ полна в пространстве непрерывных на $[a,\, b]$ функций $C^0[a,\, b]$, которые на концах отрезка принимают одинаковые значения, где $(\bar{\cdot})$ – комплексное сопряжение. Более того, нетрудно заметить, что система (1) является естественным обобщением классической системы экспонент.

В основном ранее рассмотрены весьма частные случаи системы (1). Впервые система (1) в таком общем виде была рассмотрена в работах Билалова [8, 9], в предположении, что $\alpha\left(t\right)$ и $\beta\left(t\right)$ являются кусочно-непрерывными (могут иметь бесконечное число точек разрыва первого рода), а $\left|A\left(t\right)\right|^{\pm 1}$ и $\left|B\left(t\right)\right|^{\pm 1}$ принадлежат L_∞. В этих работах установлена базисность и получен критерий для полноты и минимальности системы (1) в L_p, $1 < p < +\infty$, при определенных предположениях на коэффициенты $A\left(t\right)$ и $B\left(t\right)$.

В представленной работе рассматривается случай, когда функции $\alpha\left(t\right)$ и $\beta\left(t\right)$ имеют, вообще говоря, измеримые части. Отметим, что этот случай представляет чисто теоретический интерес.

Прежде чем перейти к изложению основного результата работы, приведем вспомогательные понятия.

Итак, через $H_p^{\pm}$ обозначаем обычные классы Харди аналитических функций внутри и вне единичного круга на комплексной плоскости. Пусть $G\,(t)$ и $g\,(t)$ заданные функции на единичной окружности $\Gamma: \; |\,t\,| = 1$. Под решением задачи сопряжения

$$F^{+}\,(t) + G\,(t)\,F^{-}\,(t) = g\,(t)\;, \qquad t \in \Gamma, \tag{2}$$

в классах $H_p^{\pm}$ понимается пара функций $(F^{+}\,;\;F^{-})$: $F^{+}\,(z) \in H_p^{+}$, $F^{-}\,(z) \in H_p^{-}$, некасательные граничные значения на единичной окружности которых удовлетворяют п.в. равенство (2).

Будем исследовать базисные свойства системы (1) в L_p по схеме работы [8]. Предполагаем выполнения неравенства

$$\sup \text{vrai}\,|\omega\,(\text{t})| \leqslant \nu\pi, \qquad \nu < \min\left(\frac{1}{p},\, 1 - \frac{1}{p}\right), \tag{3}$$

где $\omega\,(t) = \beta\,(t) - \alpha\,(t)$.

А теперь в (2) в качестве $G\,(t)$ возьмем функцию $G\,(t) \equiv \frac{B(t)}{A(t)}$. Предполагаем, что $\arg G\,(t) \equiv \omega\,(t)$. Пусть $g \in L_p$ произвольная функция. Рассмотрим оператор Z:

$$Zg \equiv \frac{Z^{+}\,(e^{i\,s})}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{g\,(t)}{Z^{+}\,(e^{i\,t})}\frac{dt}{1 - e^{i(s-t)}}, \quad \text{где} \quad Z\,(z) = \exp\left\{\frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\omega\,(s)\;\frac{e^{is} + z}{e^{is} - z}\,ds\right\},$$

а через $Z^{+}(Z^{-})$ обозначено некасательное граничное значение аналитической внутри (вне) единичного круга функции $Z\,(z)$ на единичной окружности. Рассмотрим кусочно-аналитическую функцию F:

$$F\,(z) = \frac{Z\,(z)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{g\,(\sigma)}{Z^{+}\,(e^{i\sigma})}\frac{d\sigma}{1 - ze^{-i\sigma}}, \quad |z| \neq 1.$$

Применяя формулы Сохоцкого-Племеля [11] легко заметить, что граничные значения $F^{\pm}\,(e^{it})$ функции $F\,(z)$ п.в. удовлетворяет равенство (2). По результатам работы [11] при выполнении неравенства (3) оператор Z ограниченно действует из L_p в L_p : $\;Z: L_p \to L_p$. В силу чего, по формулам Сохоцкого-Племеля, $F^{\pm} \in L_p$. В результате по одной теореме Смирнова $F\,(z) \in H_p^{\pm}$ при $|z|^{\,\pm 1} < 1$. Таким образом, $F\,(z)$ является решением задачи (2). Разложим функцию $Z\,(z)$ в ряд Тейлора по степеням z в нуле

$$Z\,(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{+} z^{n}\,, \quad |z| < 1,$$

и в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$

$$Z\,(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-} z^{-n}\,, \quad |z| > 1.$$

Обозначим

$$h_n^{+}\,(\sigma) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} b_{n-k}^{+} e^{-ik\delta}}{2\pi Z^{+}\,(e^{i\sigma})\;A\,(\delta)}, \;\; n \geqslant 0, \quad h_n^{-}\,(\sigma) = -\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_{n-k}^{-} e^{ik\delta}}{2\pi Z^{+}\,(e^{i\sigma})\;A\,(\delta)}, \;\; n > 1.$$

Тогда для коэффициентов разложений функции $F(z)$ в ряд Тейлора по степеням z в нуле

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ \, z^n, \qquad |z|<1,$$

и в окрестности бесконечно удаленной точки

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \, z^{-n}, \qquad |z|>1,$$

имеем выражения

$$a_n^+=\int_{-\pi}^{\pi} h_n^+(\sigma)\, g(\sigma)\, d\sigma, \quad n\geqslant 0, \qquad a_n^-=\int_{-\pi}^{\pi} h_n^-(\sigma)\, g(\sigma)\, d\sigma, \quad n>1. \tag{4}$$

По теореме Рисса [11] имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|F\left(re^{it}\right)-F^+\left(e^{it}\right)\right|^p dt \to 0, \quad r\to 1-0,$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|F\left(re^{it}\right)-F^-\left(e^{it}\right)\right|^p dt \to 0, \quad r\to 1+0.$$

Из этих соотношений следует:

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^+\left(e^{it}\right)\, e^{-i\,n\,t}\, dt=\begin{cases} a_n^+, & n\geqslant 0,\\ 0, & n<0,\end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} F^-\left(e^{it}\right)\, e^{i\,n\,t}\, dt=\begin{cases} a_n^-, & n\geqslant 1,\\ 0, & n<1.\end{cases}$$

Из того, что система экспонент $\{e^{i\,n\,t}\}_{-\infty}^{+\infty}$ образует базис в L_p получаем:

$$F^+\left(e^{it}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+\, e^{i\,n\,t}, \quad F^-\left(e^{it}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-\, e^{-i\,n\,t}.$$

В результате из (2) следует, что ряд

$$A(t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+\, e^{i\,n\,t}+B(t)\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-\, e^{-i\,n\,t}$$

сходится к $g(t)$ в L_p.

А теперь в качестве функции $g(t)$ в (2) возьмем:

$$g(t)=A(t)\, e^{i\,m\,t},$$

при некотором фиксированном $m\geqslant 0$. Соответствующие коэффициенты $\{a_n^+\}$, $\{a_n^-\}$ снова вычисляются по формулам (4), (5). С другой стороны решением задачи (2) в классах $H_p^{\pm}$ является и функция

$$F(z)\equiv\begin{cases} z^m, & |z|<1\\ 0, & |z|<1.\end{cases}$$

По результатам работы [11] задача (2) в классах $H_p^{\pm}$ при условии $F(\infty) = 0$ имеет единственное решение. Тогда из сравнений получаем: $a_m^+ = 1$, $a_n^- = 0$, при $n \neq m$ и $a_n^- = 0$ при $\forall n$. Таким образом

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(t)\; e^{imt} h_n^+(t)\; dt = \delta_{nm}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} A(t)\; e^{imt} h_n^-(t)\; dt = 0.$$

Совершенно аналогично показывается

$$\int_{-\pi}^{\pi} B(t)\; e^{-imt} h_n^+(t)\; dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} B(t)\; e^{-imt} h_n^-(t)\; dt = \delta_{nm},$$

где δ_{nm}– символ Кронекера.

Из выражений для систем $\{h_n^{\pm}(t)\}$ и граничных значений $Z^{\pm}(e^{it})$ следует, что $\{h_n^{\pm}(t)\} \subset L_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Следовательно, система (1) минимальна в L_p. В итоге получаем, что она образует базис в L_p. Нетрудно заметить, что L_p-нормы элементов системы (1) равномерно отграничены от нуля и от бесконечности. Из того, что система экспонент $\{e^{int}\}_{-\infty}^{+\infty}$ образует безусловный базис в L_2, по теореме Лорча [12] имеем, что система в L_2 образует базис Рисса. Таким образом, нами доказана следующая

Теорема. *Пусть имеет место неравенство (3). Тогда система (1) образует базис (при $p = 2$ базис Рисса) в L_p.*

Список литературы

[1] *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964.

[2] *N. Levinson.* Cap and density theorems. New York, Publ. Amer. Math. Soc. 1940.

[3] *А.М. Седлецкий.* Усп. мат. наук. 1982, т. 37, вып. 5(227), с. 51–95.

[4] *Е.И. Моисеев.* ДАН СССР, 1984, т. 275, No 4, с. 794–798.

[5] *Г.Г. Девдариани.* Базисность некоторых специальных систем собственных функций несамосопряженных дифференциальных операторов. Дисс. канд. физ.-мат. наук, МГУ, 1986.

[6] *А.М. Седлецкий.* ДАН СССР, 1988, т. 301, №5.

[7] *А.Н. Барменков.* Об аппроксимативных свойствах некоторых систем функций. Дисс. канд. физ.-мат. наук, МГУ, 1983.

[8] *Б.Т. Билалов.* Дифференциальные уравнения, 1990, т. 26, №1, с. 10–16.

[9] *Б.Т. Билалов.* Докл. РАН, 1992, т. 322, №6, с. 1019–1021.

[10] *Дж. Л. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.

[11] *И.И. Данилюк.* Нерулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975.

[12] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

ОЦЕНКИ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ РИССОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

М.К. Гаджибеков
Институт Матемамики и Механики НАН Азербайджана
ул. Ф. Агаева 9, AZ1141, Баку, Азербайджан

Пусть R^n является n -мерным евклидовым пространством и $0 < \alpha < n$. Интеграл

$$I_\alpha f(x) = \int\limits_{R^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)\,dy, \tag{1}$$

называется классическим потениалом Рисса, где $f : R^n \to R$ локально интегрируемая функция и $|\cdot|$ – евклидова норма.

По теореме Соболева, если интеграл (1) сходится, $p > \dfrac{n}{\alpha}$ и $f \in L^p(R^n)$, то потенциал $I_\alpha f(x)$ является непрерывной как функция от аргумента. Но при $p \leqslant \dfrac{n}{\alpha}$ это утверждение вообще говоря не верно. Й. Мизута ([4]) нашел при $p = \dfrac{n}{\alpha}$ подкласс класса $L^p(R^n)$ такой, что найденный подкласс не принадлежит никакому другому классу $L^q(R^n)$ и если f принадлежит этому подклассу, то $I_\alpha f(x)$ остается непрерывным как функция от аргумента. В [5] и [7] изучены и другие условия непрерывности для $I_\alpha f(x)$. В работах [2] и [3] получены аналогичные результаты для анизотропных потенциалов Рисса в R^n и для обобщенных интегралов типа потенциала.

В работе [7] найдено при $p = \dfrac{n}{\alpha}$ подкласс класса $L^p(R^n)$, который совпадает с подклассом найденным в работе [4] во всех тех случаях которые представляет интерес, и доказал, что если f принадлежит этому подклассу, то конечная разность $I_\alpha f(x) - I_\alpha f(z)$ является бесконечной малой высшего порядка чем $w^*(|x-z|)$, при $x \to z$, где

$$w^*(r) = \left(\int\limits_0^r w\left(t^{-1}\right)^{-\frac{1}{p-1}} t^{-1} dt \right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

и $w(r)$ удовлетворяет следуюшим условиям:

(w_1) w – положительная монотонно-возрастающая функция на $(0,\infty)$;

(w_2) $\displaystyle\int\limits_1^\infty w(r)^{-1/(p-1)} r^{-1} dr < \infty$;

(w_3) существует такая постоянная $A > 0$, что

$$A^{-1} w(r) \leqslant w\left(r^2\right) \leqslant A w(r).$$

Наша цель найти аналогический результат для потенциалов Рисса на пространствах однородного типа.

Пусть $d > 0$, $0 < \theta \leqslant 1$ и на множестве X задана квазиметрика ρ и Бореловская мера μ , причем $\operatorname{supp}\mu = X$, $\operatorname{diam} X = \infty$ и существуют такие постоянные $C > 0$ и $C_0 > 0$, что для любого $r > 0$ и любых $x, y, z \in X$

$$C^{-1} r^d < \mu(B(x,r)) < C r^d$$

и

$$|\rho(x,y)-\rho(z,y)| \leqslant C_0\rho(x,z)^{\theta}\left[\rho(x,y)+\rho(z,y)\right]^{1-\theta}, \tag{2}$$

где $B(x,r)=\{y\in X:\ \rho(x,y)<r\}$. Ясно, что такое пространство является пространством однородного типа и обозначим его через $(X,\rho,\,\mu)_{d,\theta}$ (см. [1], [6]).

Пусть задано пространство $(X,\rho,\,\mu)_{d,\theta}$ и $0<\alpha<d$. Рассмотрим интеграл

$$R_\alpha f(x)=\int\limits_X \rho(x,y)^{\alpha-d} f(y)\,d\mu(y). \tag{3}$$

Известно, что сходимость интеграла (3) почти всюду в X эквивалентно (см. [3]) условию

$$\int\limits_X (1+\rho(0,y))^{\alpha-d}|f(y)|\,d\mu(y)<\infty. \tag{4}$$

Доказательство следующей леммы можно найти в работе [3] (см.также [2], [4]).

Лемма 1. *Пусть задано однородное пространство $(X,\rho,\,\mu)_{d,\theta}$. Предположим, что $1<p=\dfrac{n}{\alpha}$, f – μ-локально интегрируемая функция на X, удовлетворяющая условиям (4) и*

$$\int\limits_X |f(y)|^p\,w(|f(y)|)\,d\mu(y)<\infty,$$

где $w(r)$ удовлетворяет условиям $(w_1)-(w_3)$. Тогда существует такая постоянная L, что для любого $a>0$

$$\int\limits_D \rho(x,y)^{\alpha-d} f(y)\,d\mu(y)<L\left(\int\limits_D |f(y)|^p\,w(f(y))\,d\mu(y)\right)^{1/p}\left(\int\limits_a^\infty w(t)^{-1/(p-1)}\,t^{-1}dt\right)^{1/p'},$$

где $1/p+1/p'=1$, $D=\{y\in X:|f(y)|\geqslant a\}$.

Лемма 2 ([5], [7]). *Пусть функция $w(r)$ удовлетворяет условиям (w_1) и (w_3). Тогда для $\gamma>0$*

$$A_\gamma^{-1}w(r)\leqslant w(r^\gamma)\leqslant A_\gamma w(r)\quad \text{и}\quad \frac{s_1^\gamma}{w(s_1)}\leqslant A_2\frac{s_2^\gamma}{w(s_2)}$$

где $s_2>s_1>0$.

Теорема 1. *Пусть условия леммы 1 удовлетворяются. Тогда при $\rho(x,z)\to 0$. справедлива следующая формула*

$$|R_\alpha f(x)-R_\alpha f(z)|=o\left(w^*(\rho(x,z))\right).$$

Доказательство. Пусть $r=\rho(x,z)<\frac{1}{2}$. Тогда

$$|R_\alpha f(x)-R_\alpha f(z)|\leqslant \int\limits_{B(x,2cr)}\rho(z,y)^{\alpha-d}|f(y)|\,d\mu(y)+\int\limits_{B(x,2cr)}\rho(x,y)^{\alpha-d}|f(y)|\,d\mu(y)+$$

$$+\int\limits_{X\setminus B(x,2cr)}\left|\rho\left(x,y\right)^{\alpha-d}-\rho\left(z,y\right)^{\alpha-d}\right|\left|f\left(y\right)\right|d\mu\left(y\right)\equiv J_1(z)+J_2(x)+J_3(x,z).$$

Расмотрим $J_1(z)$. Если $y\in B\left(x,2cr\right)$, то

$$\rho\left(y,z\right)\leqslant c\left(\rho\left(x,y\right)+\rho\left(x,z\right)\right)\leqslant c_1r,$$

где $c_1=c\left(2c+1\right)$ и c постоянное в обобщенном неравенстве треугольника для ρ. Пусть $\alpha-\theta<\gamma<\alpha$. Из Леммы 1 и Леммы 2 получаем:

$$J_1\left(z\right)\leqslant\int\limits_{B(z,c_1r)}\rho\left(z,y\right)^{\alpha-d-\gamma}d\mu\left(y\right)+\int\limits_{\left\{y:B(z,c_1r)\,|f(y)|>\rho(z,y)^{-\gamma}\right\}}\rho\left(z,y\right)^{\alpha-d}\left|f\left(y\right)\right|d\mu\left(y\right)$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{-j-1}c_1r\right)^{\alpha-d-\gamma}\int\limits_{2^{-j-1}c_1r\leqslant\rho(z,y)<2^{-j}c_1r}d\mu\left(y\right)+$$

$$+L\left(\int\limits_{\left\{y:B(z,c_1r)\,|f(y)|>\rho(z,y)^{-\gamma}\right\}}\left|f\left(y\right)\right|^pw\left(\left|f\left(y\right)\right|\right)d\mu\left(y\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{(c_1r)^{-\gamma}}^{\infty}w\left(t\right)^{-\frac{1}{p-1}}t^{-1}dt\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqslant C_1r^{\alpha-\gamma}+L\left(\int\limits_{B(z,c_1r)}\left|f\left(y\right)\right|^pw\left(\left|f\left(y\right)\right|\right)d\mu\left(y\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\gamma\int\limits_0^r w\left(\left(c_1t\right)^{-\gamma}\right)^{-\frac{1}{p-1}}t^{-1}dt\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqslant C_1r^{\alpha-\gamma}+C_2\left(\int\limits_{B(z,c_1r)}\left|f\left(y\right)\right|^pw\left(f\left(y\right)\right)d\mu\left(y\right)\right)^{\frac{1}{p}}w^*\left(r\right).$$

Если $\rho\left(z,y\right)<c_1r$, то $\rho\left(x,y\right)<c_2r$, где $c_2=c\left(c_1+1\right)$. Таким образом

$$J_1\left(z\right)\leqslant C_1r^{\alpha-\gamma}+C_2\left(\int\limits_{B(x,c_2r)}\left|f\left(y\right)\right|^pw\left(\left|f\left(y\right)\right|\right)d\mu\left(y\right)\right)^{\frac{1}{p}}w^*\left(r\right).$$

Таким же путем

$$J_2\left(x\right)\leqslant C_1r^{\alpha-\gamma}+C_2\left(\int\limits_{B(x,c_2r)}\left|f\left(y\right)\right|^pw\left(\left|f\left(y\right)\right|\right)d\mu\left(y\right)\right)^{\frac{1}{p}}w^*\left(r\right).$$

Пусть $\overline{u}=\max\left(\rho\left(x,y\right),\rho\left(z,y\right)\right)$ и $\underline{u}=\min\left(\rho\left(x,y\right),\rho\left(z,y\right)\right)$. По теореме о среднем значении, существует $u_0\in\left(\underline{u},\overline{u}\right)$ такое, что

$$\left|\rho\left(x,y\right)^{\alpha-d}-\rho\left(z,y\right)^{\alpha-d}\right|=\underline{u}^{\alpha-d}-\overline{u}^{\alpha-d}=\left(d-\alpha\right)\left(\overline{u}-\underline{u}\right)u_0^{\alpha-d-1}.$$

Согласно (2) имеем:

$$\overline{u}-\underline{u}\leqslant C_0\rho\left(x,z\right)^{\theta}\left[\rho\left(x,y\right)+\rho\left(z,y\right)\right]^{1-\theta}\leqslant C_3r^{\theta}\rho\left(x,y\right)^{1-\theta},$$

где $\rho(x,y) \geq 2cr$. Тогда

$$\left|\rho(x,y)^{\alpha-d} - \rho(z,y)^{\alpha-d}\right| \leqslant C_4 r^\theta \rho(x,y)^{\alpha-d-\theta},$$

где $\rho(x,y) \geq 2cr$. Таким образом

$$J_3(x,z) \leqslant C_4 r^\theta \int\limits_{X\setminus B(x,2cr)} \rho(x,y)^{\alpha-d-\theta} |f(y)|\, d\mu(y) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 r^\theta \int\limits_{X\setminus B(x,2cr)} \rho(x,y)^{\alpha-d-\theta-\gamma} d\mu(y) + C_4 r^\theta w\left(r^{-\gamma}\right)^{-\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \int\limits_{\{y: X\setminus B(x,2cr), |f(y)|>r^{-\gamma}\}} \rho(x,y)^{\alpha-d-\theta} \left[|f(y)|\, w(|f(y)|)^{\frac{1}{p}}\right] d\mu(y) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 C r^\theta (2cr)^{\alpha-\theta-\gamma} + C_4 r^\theta w\left(r^{-\gamma}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{X\setminus B(x,2cr)} \rho(x,y)^{(\alpha-d-\theta)p'} d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p'}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{X\setminus B(x,2cr)} |f(y)|^p\, w(|f(y)|)\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 r^{\alpha-\gamma} + C_6 r^\theta w\left(r^{-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{2^{j+1}cr \leqslant \rho(x,y) < 2^{j+2}cr} \rho(x,y)^{-d-\theta p'} d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 r^{\alpha-\gamma} + C_6 r^\theta w\left(r^{-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} C\left(2^{j+1}cr\right)^{-d-\theta p'} \left(2^{j+2}cr\right)^d\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 r^{\alpha-\gamma} + C_7 w\left(r^{-1}\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

По условию (w_2) мы можем написать:

$$w^*(r) \geq \left(\int\limits_{r^2}^{r} w\left(t^{-1}\right)^{-\frac{1}{p-1}} t^{-1} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \geq C_8 w\left(r^{-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \log\left(r^{-1}\right)^{\frac{1}{p'}}. \qquad (5)$$

По Лемме 2

$$s^{\alpha-d} \leqslant C_9 w\left(s^{-1}\right)^{-1} \qquad (6)$$

для $0 < s < 1$. Таким образом

$$J_3(x,z) \leqslant C_{10} w^*(r) \log(r^{-1})^{-\frac{1}{p'}}.$$

Наконец

$$|R_\alpha f(x) - R_\alpha f(z)| \leqslant 2C_1 r^{\alpha-\gamma} +$$

$$+2C_2 \left(\int\limits_{B(x,c_2 r)} |f(y)|^p\, w(f(y))\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} w^*(r) + C_{10} w^*(r) \log(r^{-1})^{-\frac{1}{p'}}$$

и используя (5) и (6) получим нужный результат.

Список литературы

[1] *Y. Han, D. Yang.* Dissertationes Math. 2002. V. 403. P. 1–102.

[2] *A.D. Gadjiev, O. Doğru.* Indian J. Pure Appl. Math. 1999. V. 30. №6. P. 546–556.

[3] *M.G. Hajibayov.* Trans. of NAS. of Azerb. 2006. V. 26. №1. P. 81–89.

[4] *Y. Mizuta.* Math. Scand. 1988. T. 63. C. 238–260.

[5] *Y. Mizuta.* Hiroshima Math. J. 1993. T. 23. C. 79–153.

[6] *E. Nakai, H. Sumitomo.* Scien. Math. Japon. 2001. T. 54. №3. C. 463–472.

[7] *T. Shimomura, Y. Mizuta.* Hiroshima Math. J. 1995. T. 25. №2. C. 595–621.

О ПОЛНЫХ СИСТЕМАХ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.П. Громов

Орловский государственный университет, 302026, Орел, ул. Комсомольская, 95

Пусть H – полное локально выпуклое пространство над полем комплексных чисел, топология которого определяется мультинормой $\left\{\|\cdot\|_p\right\}$. И пусть

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \lambda^n; \;\; x_n \in H; \;\; \lambda \in \mathbb{C} \tag{1}$$

– целая вектор-функция: $\mathbb{C} \in H$.

Данная заметка посвящена одной задаче о полноте систем вида $\{f(\lambda_j)\}$ и представляет фрагмент работы автора [5] о полноте систем в локально выпуклом пространстве.

Теорема 1. *Пусть функция (1) – целая порядка роста $\rho > 0$ и последовательность ее коэффициентов $\{x_n\}$ полна в H. Если показатель τ сходимости последовательности $\{\lambda_j\}$ удовлетворяет условию $\tau > \rho$, то система $\{f(\lambda_j)\}$ полна в H.*

Доказательство. Доказательство проведем от противного: пусть система $\{f(\lambda_j)\}$ не полна в H, тогда по теореме Банаха $\exists l \in H^*$, $l \neq 0$;

$$l[f(\lambda_j)] = 0, \;\; j = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) = l[f(\lambda)]$. Справедлива следующая оценка:

$$|\varphi(\lambda)| = |l[f(\lambda)]| \leqslant C_p \, \|f(\lambda)\|_p \, ; \;\; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \;\; C_p > 0,$$

где $\|\cdot\|_p$ – фиксированная полунорма, зависящая от l.

Эта оценка показывает, что $\varphi(\lambda)$ – целая скалярная функция и ее порядок роста не превосходит ρ. Кроме этого, в силу (2) $\varphi(\lambda)$ обращается в ноль в точках последовательности $\{\lambda_j\}$, показатель сходимости которой $\tau > \rho$. По теореме единственности заключаем, что

$$\varphi(\lambda) = l[f(\lambda)] = \sum_{n=0}^{\infty} l(x_n) \lambda^n \equiv 0; \;\; \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

А поскольку $\varphi(\lambda)$ – целая, то $l(x_n) = 0$; $\forall n$. По условию теоремы система $\{x_n\}$ полна в H. Следовательно $l = \theta$. Это противоречие и доказывает теорему.

Теорема 1 содержит в себе много разнообразных конкретных предложений, описывающих условия полноты тех или иных функциональных последовательностей. Так, например, в теореме 1 содержится следующая теорема А.О. Гельфонда, доказанная им в 1938 г. и послужившая началом активных исследований функциональных последовательностей вида $\{f(\lambda_j z)\}$ (и рядов по таким системам), проведенных в работах А.И. Маркушевича [2], А.Ф. Леонтьева [3], автора [4] и многих их учеников.

Теорема. (А.О. Гельфонд) *Пусть*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \;\; a_n \neq 0 \tag{3}$$

– целая скалярная функция порядка роста $\rho < \infty$. Если показатель сходимости τ последовательности $\{\lambda_j\}$ удовлетворяет условию $\tau > \rho$, то система $\{f(\lambda_j z)\}$ полна в пространстве $H(\mathbb{C})$ всех целых функций.

Эта теорема является простейшим частным случаем теоремы 1, если заметить, что вектор-функция $f_1(\lambda) = f(\lambda z) : \mathbb{C} \to H(\mathbb{C})$, имеет порядок ρ и $\tau > \rho$. Кроме этого, в силу (3) ее коэффициенты $\{x_n = a_n z^n\}$ представляют в $H(\mathbb{C})$ полную систему и, следовательно, все условия теоремы 1 выполнены.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $H = [\rho, \sigma]$, $\rho > 0$, – весовое пространство, состоящее из целых функций порядка роста, не превосходящего ρ а при порядке ρ, их тип не превосходит σ. Естественная топология этого пространства задается следующий системой норм:

$$\|F\|_\varepsilon = \sup_{r>0} \left\{ \max_{|z|\leqslant r} |F(z)| \exp\left[-(\sigma+\varepsilon) r^\rho\right] \right\}; \;\; \varepsilon > 0; \;\; F \in [\rho, \sigma].$$

С этой топологией $[\rho, \sigma]$ – полное счетнонормированное пространство (пространство Фреше). Справедлива

Теорема 2. *Пусть (3) – целая функция порядка роста $\rho_1 < \rho$, коэффициенты которой удовлетворяют следующему условию регулярности*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|} = \rho_1.$$

Если показатель τ сходимости в последовательности $\{\lambda_j\}$ удовлетворяет неравенству

$$\tau > \frac{\rho \rho_1}{\rho - \rho_1}, \tag{4}$$

то система $\{f(\lambda_j z)\}$ полна в $[\rho, \sigma]$.

Если же

$$\tau < \frac{\rho \rho_1}{\rho - \rho_1}, \tag{5}$$

то система $\{f(\lambda_j z)\}$ в $[\rho, \sigma]$ не полна.

Теорема 2 также является частным случаем теоремы 1. Для ее доказательства рассматривается целая вектор-функция $f_1(\lambda) = f(\lambda z) : \mathbb{C} \to [\rho, \sigma]$; находится ее порядок роста $R(f_1)$. Он равен $R(f_1) = \frac{\rho\rho_1}{\rho-\rho_1}$. Далее, поскольку $a_n \neq 0;\ \ \forall n$, то система коэффициентов $\{a_n z^n = x_n\}$ функции f_1 полна в пространстве $[\rho, \sigma]$. Все условия теоремы 1 выполнены и система $\{f(\lambda_j z)\}$ в пространстве $[\rho, \sigma]$ полна.

Если же имеет место условие (5), то из этого факта следует существование (см.[3]) целой скалярной функции

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

порядок которой не превосходит τ, и она определяет оператор вида

$$\varphi(D)F(Z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n D_f^n F(z), \tag{6}$$

где D_f – оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева (см.[3]). И при этом

$$\overline{L\{f(\lambda_j, z)\}} = Ker\{\varphi(D)\}$$

Следовательно, система $\{f(\lambda_j z)\}$ в $[\rho, \sigma]$ не полна.

В заключение отметим, что если $\tau = \frac{\rho\rho_1}{\rho-\rho_1}$, то система $\{f(\lambda_j z)\}$ может быть как полной, так и не полной в $[\rho, \sigma]$. Например, нетрудно показать, что функция $f(\lambda) = f_1(\lambda z) : \mathbb{C} \to [\rho, \sigma]$, имеет следующие характеристики роста: порядок $R(f) = \frac{\rho\rho_1}{\rho-\rho_1}$ и ее тип

$$\omega(f) = \left(\frac{\rho-\rho_1}{\rho\rho_1}\right) \frac{(\sigma_1\rho_1)^{\frac{\rho}{\rho-\rho_1}}}{(\sigma\rho)^{\frac{\rho}{\rho-\rho_1}}}.$$

Пользуясь теоремой единственности для целой функции с привлечением указанных характеристик роста, легко доказывается следующее:

Предложение 1. *Пусть последовательность* $\{\lambda_j\}$ *удовлетворяет условию:* $\tau = R(f)$ *и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^R} > \omega e R,$$

тогда система $\{f(\lambda_j z)\}$ *полна в пространстве* $[\rho, \sigma]$.

Если же

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^R} < \omega e R,$$

то существует уравнение вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n D_f^n F(z) = 0$$

множество решений которого в $[\rho, \sigma]$ *равно*

$$V = \overline{L\{f(\lambda_j, z)\}} \subset [\rho, \sigma].$$

Список литературы

[1] *А.О. Гельфонд.* О полных системах аналитических функций. Матем. сб. 1938. Т. 4 (46). С. 149–156.

[2] *А.И. Маркушевич.* О базисе в пространстве аналитических функций. Матем. сб. 1945. Т. 17(59). С. 211–252.

[3] *А.Ф. Леонтьев.* Обобщения рядов экспонент. М.: Наука. 1981.

[4] *В.П. Громов.* О рядах по системе $\{f(\lambda_j z)\}$. Матем.сб. 1963. Т. 61(103). С. 272–290.

[5] *В.П. Громов.* О полноте системы значений голоморфной вектор-функции в пространстве Фреше. Матем. заметки. 2003. Т.73, вып.6. С. 827–840.

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ

Р.М. Джабарзаде

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

Спектральная теория операторных пучков в гильбертовом простран-стве многие годы привлекает внимание математиков, работающих в спек-тральной теории операторов.

Актуальность этих рассмотрений обусловлена тесной связью спектраль-ной теории полиномиальных пучков с проблемами нахождения решений дифференциальных операторов, в частности, кратная полнота системы собственных и присоединенных (с.п.) векторов полиномиального пучка обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши для соответствующего операторно-дифференциального уравнения.

Следует отметить, что полнота и базисность систем с.п. векторов опера-торного пучка приводит также к нахождению в гильбертовом пространстве полных систем и базиса.

Спектральная теория самосопряженных операторных пучков продол-жает оставаться существенной частью этой теории.

В статье дается достаточное условие вещественности спектра полино-миального пучка

$$L(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \cdots + \lambda^n A_n \tag{1}$$

в сепарабельном гильбертовом пространстве, когда операторы A_i являются ограниченными и самосопряженными. Доказательство этого факта ис-пользует результаты многопараметрической спектральной теории.

Напомним, что λ_0 собственное значение (1), а x_0 соответствующий собственный вектор, если

$$L(\lambda_0)x_0 = 0.$$

В (1) вводим новые обозначения $\lambda_i = \lambda^i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ и дополним уравнение (1) до многопараметрической системы с помощью $n-1$ дополни-тельных уравнений

$$(\lambda_{i-2}t_2 + \lambda_{i-1}t_0 + \lambda_i t_1)\, x_i = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \quad \lambda_0 = 1, \tag{2}$$

где операторы t_0, t_1, t_2 в действуют пространстве R_2 и заданы с помощью матриц

$$t_0 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_i = (a_i, b_i) \in R_2 \tag{3}$$

Предполагается, что уравнения из (2) в дальнейшем будут обеспечивать связи между параметрами λ_i в собственных значениях $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i) \in C^i$ самосопряженной многопараметрической системы

$$(A_0 + \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n)\, x_1 = 0, \quad (\lambda_{i-2} t_2 + \lambda_{i-1} t_0 + \lambda_i t_1)\, x_i = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n \tag{4}$$

такие, что $\lambda_i = \lambda_1^i$.

В (4) число уравнений равно числу параметров.

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in C^n$ есть собственное значение (4), если существует ненулевой тензор $\widehat{x} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ из тензорного произведения $\overline{H} = H \otimes R_1 \otimes \cdots \otimes R_2$ пространства H и $n-1$ штук пространств $R_2,\ x_i \in R_2\ (i = 2, \ldots, n)$, такое, что выполнено (4).

Нетрудно установить, что если тензор $x = x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n \neq 0$ есть собственный вектор (4) с собственным значением $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, когда $\lambda_1 \neq 0$, то собственные векторы i-тых уравнений из (4), $x_i = (a_i, b_i)$ таковы, что $a_i \neq 0$ и $b_i \neq 0$. Кроме того, $\lambda_i = \lambda_1^i \quad (i = 2, \ldots, n)$. Действительно, из 2-го уравнения системы (4), а именно, из

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0$$

следует, что a_2 и b_2 одновременно не равны нулю и

$$\lambda_1 b_2 + \lambda_2 a_2 = 0, \quad b_2 + \lambda_1 a_2 = 0,$$

т.е.

$$\lambda_2 = \lambda_1^2.$$

Далее, из следующего уравнения системы (4)

$$\left[\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0$$

следует $a_3 \neq 0,\ b_3 \neq 0$ и

$$\lambda_2 b_3 + \lambda_3 a_3 = 0, \quad \lambda_1 b_3 + \lambda_2 a_3 = 0,$$

т.е. $\lambda_1 \lambda_3 = \lambda_2^2$, или $\lambda_1 \lambda_3 = \lambda_1^4$, $\lambda_3 = \lambda_1^3$.

Продолжая этот процесс, получаем, что для всех собственных зна-чений $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ с отличной от нуля 1-ой компонентой λ_1 имеем $\lambda_i = \lambda_1^i \quad (i = 2, \ldots, n)$.

Далее, с помощью исследований в многопараметрической теории уста-навливается, что спектр многопараметрической системы (4) вещественен, что и будет означать вещественность спектра оператора $L(\lambda)$.

Самосопряженные системы (4) в конечномерном случае изучены Аткинсоном [1]. В случае бесконечномерного гильбертова пространства результаты Аткинсона обобщены Брауне [2], Слииманом [3] и другими авторами, когда все операторы, входящие в систему ограниченные.

Для дальнейшего изложения необходимо дать ряд известных определений.

1. Пусть $\overline{H} = H_1 \otimes R_2 \otimes \cdots \otimes R_2$, где R_2 повторяется $(n-1)$ раз.

В $\overline{H}$ вводятся операторы Δ_i, являющиеся абстрактными аналогами определителей Крамера для системы (4).

На разложимых тензорах $\overline{x} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ операторы Δ_i определяются с помощью формул

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \Delta_i \overline{x} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ A_0^+ & A_1^+ & A_2^+ & \dots & A_n^+ \\ t_{22}^+ & t_{02}^+ & t_{12}^+ \, 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 & t_{2n}^+ & t_{02}^+ & t_{1n}^+ \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ произвольные комплексные числа.

Оператор Δ_i получается из (5), когда $\alpha_i = 1$, а $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \cdots = \alpha_n = 0$.

На всех других векторах $\overline{x} = \overline{H}$ операторы Δ_i определяются по линей-ности и непрерывности.

Операторы $A_i^+ \quad (i = 0, 1, \dots, n)$, $t_{ik}^+ \ (i = 0, 1, 2; k = 2, 3, \dots, n)$ индуцированы операторами A_i и t_i соответственно в $\overline{H}$ с помощью формул

$$A_i^+ \overline{x} = A_i x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n, \quad t_{i,k}^+ \overline{x} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{k-1} \otimes t_i x_k \otimes x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_n.$$

Если оператор Δ_0^{-1} существует, и $R(\Delta_i) \subset D(\Delta_0^{-1})$, то операторы $\Gamma_i = \Delta_0^{-1} \Delta_i$ определены в тензорном произведении пространств $\overline{H}$ и, как известно, из многопараметрической литературы, они попарно коммутируют.

Скалярное произведение в $\overline{H}$ определяется для двух разложимых тензоров $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \overline{H}$ и $y = y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in \overline{H}$ по формуле

$$(x, y)_H = (x_1, y_1)_{H_1} + \sum_{i=2}^{n} (x_i, y_i)_{R_2},$$

причем $(x_i, y_i)_{R_2} = a_i a_i' + b_i b_i'$, где $x_i = (a_i, b_i)$, $y_i = (a_i', b_i')$.

Для всех других пар векторов из $\overline{H}$ скалярное произведение опреде-ляется по линейности и непрерывности.

Предполагая равномерную положительную определенность оператора Δ_0, а именно, существование постоянного числа $d > 0$ такого, что

$$(\Delta_0 x, x)_H \geq d(x, x)_H, \quad \forall x \in \overline{H},$$

где $(\cdot, \cdot)$ знак скалярного произведения в $\overline{H}$, вводят еще одно скалярное произведение в пространстве H по формуле

$$[x, y]_0 = (\Delta_0 x, x), \quad x, y \in H.$$

Операторы $\Gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ обладают в этом энергетическом пространстве $\widetilde{H}_0$ очень хорошими свойствами а, именно, они образуют к набор коммутирующих ограниченных самосопряженных операторов.

Если E_r есть разложение единицы для оператора Γ_r, то проекторы E_r также коммутируют.

Носитель функции $M_r \subset R$ есть борелево подмножество на вещественность оси R, $r = 1, 2, \dots, n$.

Однозначно определяется проектор

$$E(M_1 \times \cdots \times M_n) = E_1(M_1) \dots E_n(M_n),$$

являющийся спектральной мерой на подмножестве $M = M_1 \times \cdots \times M_n \subset R^n$ исчезающей вне множества $\sigma = \sigma(\Gamma_1) \times \cdots \times \sigma(\Gamma_n)$, которая и представляет совместный спектр операторов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$.

Если $\lambda \in \sigma$ и $E\{\lambda\} \neq 0$ то λ есть собственное значение системы (4).

Естественно, что совместный спектр коммутирующих самосопряженных операторов вещественнен. Имеет место

Теорема 1 *Пусть выполнены следующие условия:*

а) операторы A_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ ограниченные и самосопряженные

б) $(\Delta_0 x, x) \geq d(x, x)$, $d > 0$ для $\forall x \in \overline{H}$

в) выполнено одно из двух следующих условий

$в_1$) $Ker\ A_0 = \theta$, $в_2$) $Ker\ \Gamma_1 = \theta$.

Тогда собственные значения уравнения (1) вещественны.

Доказательство. При выполнении условий теоремы 1 из работ [2] и [3] следует, что операторы Γ_i разделяют спектр многопараметрической задачи (4), т.е., если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in C^n$ есть собственное значение системы (4), а разложимый тензор $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ соответствующий собственный вектор, то

$$\Gamma_i x = \lambda_i x, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая связи между параметрами λ_i, вытекающие из того, что x_i есть собственный вектор i-го уравнения $(i = 2, \dots, n)$ системы (4) при $\lambda_1 = 0$, что следует из условий в$_1$) либо в$_2$) теоремы, имеем

$$\Gamma_1 x = \lambda_1 x, \quad \Gamma_2 x = \lambda_1^2 x, \dots, \ \Gamma_n x = \lambda_1^n x, \quad \lambda_1 = \lambda,$$

т.е. собственное значение уравнения (1) вещественно, что и требовалось доказать.

Опираясь на исследования, проведенные в [2], можем сформулировать:

Теорема 2 *Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 1, тогда для любого $f \in \overline{H}$ имеем*

$$f = \int\limits_{\sigma} dE_\lambda f, \quad \|f\|_0^2 = (\Delta_0 f, f)_H = \int\limits_{\sigma} d\,[E_\lambda f, f]_0,$$

где интегралы сходятся по норме пространств H_2.

Эти формулы являются разложениями Аткинсона-Парсеваля, то есть спектральными разложениями.

Замечания. 1°. При $n=2$ оператор Δ_0 есть

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} A_1^+ & A_2^+ \\ t_{0,2}^1 & t_{1,2}^+ \end{pmatrix} = A_1^+ t_{1,2}^+ - A_2^+ t_{0,2}^+ = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ -A_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Для вещественности собственных значений операторного пучка $A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2$ при условиях самосопряженности и ограниченности операторов A_i и условия $KerA_i=\theta$ достаточно потребовать также равномерную положительность оператора (6).

2°. При $n=3$ имеем

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} A_1^+ & A_2^+ & A_3^+ \\ t_{0,2}^+ & t_{1,2}^+ & 0 \\ t_{2,1}^+ & t_{0,3}^+ & t_{1,3}^+ \end{pmatrix} = A_1^+ t_{1,2}^+ t_{1,3}^+ + A_3^+ t_{0,2} t_{0,3}^+ - A_3^+ t_{1,2}^+ t_{2,3}^+ - A_2^+ t_{0,2}^+ t_{1,3}^+ =$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 & -A_3 & A_3 \\ -A_2 & 0 & A_3 & 0 \\ -A_3 & A_3 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

и следовательно, при всех остальных требованиях, имеющихся в теореме 1, для вещественности спектра следует требовать также и равномерную положительность оператора (7).

Список литературы

[1] *F.V. Atkinson.* Multiparameter spectral theory. Bull. Amer. Math.Soc. 1968. №74. P. 1–27.

[2] *P. Browne.* Multiparameter spectral theory. Indiana Univ. Math. J. 1974. №24. T.3.

[3] *B.D. Sleeman.* Multiparameter spectral theory in Hilbert space. Pitnam Press, London, 1978. P.118.

[4] *А.И. Балинский.* Обобщение понятия безутианты и результанта. ДАН Укр ССР. Сер. Физ-мат. и Техн. Наук. 1980. №2.

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

З.А. Касумов

ИММ НАН Азербайджана

В работе рассматривается система экспонент с комплекснозначными коэффициентами и при определенных условиях на коэффициенты доказывается базисность этой системы в весовом пространстве $L_{p,\rho}$.

Рассмотрим следующую систему экспонент

$$\left\{A(t)e^{int}; B(t)e^{-i(n+1)t}\right\}_{n\geqslant 0} \tag{1}$$

с комплексно-значными коэффициентами $A(t) \equiv |A(t)|\, e^{i\alpha(t)}$, $B(t) \equiv |B(t)|\, e^{i\beta(t)}$ на сегменте $[-\pi,\pi]$. Базисным свойствам системы (1) посвящено много работ начиная с основопологающей работы Н. Винера и Р. Пэли [1]. В таком общем виде система (1) была рассмотрена Б.Т. Билаловым [2] и им польностью изучены базисные свойства этой системы в $L_p \equiv L_p\left(\pi, \pi\right),\ 1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\left(L_\infty \equiv \mathbb{C}\left[-\pi, \pi\right]\right)$.

Базисные свойства подобных систем в весовых пространствах менее изучены. В работе К.С. Казаряна, П.И. Лизоркина [3] найдено необходимое и достаточное условие на вес $\rho(t)$ для базисности классической системы экспонент $\{e^{int}\}_{-\infty}^{+\infty}$ в весовом пространстве $L_{p,\rho} : (1 < p < +\infty)$

$$L_{p,\rho} \equiv \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \rho(t) dt < +\infty \right\},$$

с нормой

$$\|f\|_{p,\rho} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \rho dt \right)^{1/p}.$$

Е.И. Моисеев [4,5] получил необходимое и достаточное условие на параметры $\alpha, \beta \in R$ (R-действительная ось) для базисности системы синусов $\{\sin\left[(n+\alpha)t+\beta\right]\}_{n\geqslant 1}$ в $L_{p,\rho}(0,\pi)$ и системы экспонент $\exp\left[i(n + sign\ n\alpha)t\right]$, $n = 0, \pm 1, \dots$, когда вес ρ имеет конкретный степенной вид.

В предлагаемой работе изучается базисность системы (1) в пространстве $L_{p,\rho}$, когда вес ρ имеет вид:

$$\rho(t) \equiv \prod_{i=1}^{l} \left\{ \sin\left| \frac{t-\tau_i}{2} \right| \right\}^{\beta_i},$$

где $\{\tau_i\} \subset (-\pi, \pi)\,, \{\beta_i\} \subset R$ некоторые множества.

Предположим выполнение следующих условий:

1) $|A(t)|^{\pm 1}, |B(t)|^{\pm 1} \in L_\infty$;

2) $\alpha(t), \beta(t)$ кусочно-гельдеревы на $[-\pi, \pi]$ и $\{s_i : -\pi < s_1 < \cdots < s_r < \pi\}$ множество точек разрывов функции $\theta(t) \equiv \alpha(t) - \beta(t)$;

3) Множества $T \equiv \{\tau_i\}_1^l$ и $S \equiv \{s_i\}_1^r$ не пересекаются: $T \cap S = \emptyset$.

Прежде чем сформулировать основной результат, отметим следующие тривиальные леммы. Пусть $\nu(t)$ некоторая весовая функция и $\mu = \nu^p$.

Лемма 1. *Система $\{\nu(t)x_n(t)\}_{n\geqslant 1} \subset L_p$ минимальна в L_p только в том случае, если $\{x_n(t)\}_{n\geqslant 1} \subset L_{p,\mu}$ минимальна в $L_{p,\mu}$, причем соответствующие биортогональные системы $\{y_n(t)\}_{n\geqslant 1} \subset L_q$ и $\{\widetilde{y}_n(t)\} \subset L_{q,\mu}$ связаны формулой $\widetilde{y}_m = \nu^{1-p} y_m$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(p \in (1, \infty))$.*

Лемма 2. *Система $\{\nu(t)x_n(t)\}_{n\geqslant 1} \subset L_p$ образует базис в L_p только тогда, когда система $\{x_n(t)\}_{n\geqslant 1}$ образует базис в $L_{p,\mu}$.*

Эти леммы непосредственно доказываются исходя из определений биортогональности и базисности систем.

Учитывая эти леммы можем применить результаты работы [6] к базисности системы (1) в $L_{p,\rho}$. Итак, в соответствии с этой работой найдем нужные величины: $\left\{\beta_i^{\pm}\right\}$:

$$\beta_i^{\pm} = \beta_i^{-} = \frac{\beta_i}{p}, \quad i = \overline{1, l}.$$

Теорема.. *Пусть выполнены следующие неравенства*

$$-1<\beta_i<\frac{p}{q},\ i=\overline{1,l};\quad -\frac{1}{p}<\frac{h_k}{2\pi}<\frac{1}{q},\ k=\overline{1,r};\quad -\frac{2\pi}{p}<\theta(-\pi)-\theta(\pi)<\frac{2\pi}{q},$$

где $h_k=\theta\left(s_k+0\right)-\theta\left(s_k-0\right)$ – скачки функции $\theta(t)$ в точках s_k, $k=\overline{1,r}$. Тогда система (1) образует базис в $L_{p,\rho}$, причем если $\exists n_0:\beta_{n_0}>0$, то она не является Бесселевой в $L_{2,\rho}$ и если $\exists i_0:\beta_{i_0}<0$ то не является Гильбертовой в $L_{2,\rho}$.

Доказательство. Как следует из результатов работы [6], при выполнении всех условий теоремы система экспонент с вырождающимися коэффициентами

$$\left\{\widetilde{\rho}(t)A(t)e^{int};\widetilde{\rho}(t)B(t)e^{-i(n+1)t}\right\}_{n\geqslant 0}$$

образует базис в L_p, где

$$\widetilde{\rho}(t)\equiv\prod_{i=1}^{l}\left\{\sin\left|\frac{t-\tau_i}{2}\right|\right\}^{\frac{\beta_i}{p}}.$$

Тогда по лемме 2 получаем базисность системы (1) в L_p. Рассмотрим случай, когда $p=2$. Пусть выполнены все условия теоремы при $p=2$. Тогда относительно системы (1) выполняются все условия теоремы 1 работы [2] в L_2. По этой теореме она образует базис Рисса в L_2. Обозначим через $\left\{h_n^+(t);h_{n+1}^-(t)\right\}_{n\geqslant 0}$ биортогональную к ней в L_2 систему, т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi}A(t)e^{int}\overline{h_m^+(t)}dt=\delta_{nm},\qquad \int_{-\pi}^{\pi}A(t)e^{int}\overline{h_m^-(t)}dt=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}B(t)e^{int}\overline{h_m^+(t)}dt=0,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}B(t)e^{-int}\overline{h_m^-(t)}dt=\delta_{nm}.$$

Совершенно очевидно, что тогда биортогональная к (1) в $L_{2,\rho}$ система $\left\{l_n^+(t);\ l_{n+1}^-\right\}_{n\geqslant 0}$ будет задаваться формулами:

$$l_n^{\pm}(t)\equiv\frac{h_n^{\pm}(t)}{\rho(t)}.$$

Таким образом для $\forall f\in L_{2,\rho}$ биортогональные коэффициенты $\left\{f_n^+;f_{n+1}^-\right\}_{n\geqslant 0}$ вычисляются по формулам:

$$f_n^{\pm}=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)l_n^{\pm}(t)\rho(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)h_n^{\pm}(t)dt.$$

Если $\exists n_0:\beta_{n_0}>0$, то существует функция $f\in L_{2,\rho}$, которая не принадлежит L_2. Тогда из базисности Рисса (1) в L_2 следует, что $\sum\left|f_n^+\right|^2+\left|f_n^-\right|^2=+\infty$, т.е. система (1) не является Бесселевой в $L_{2,\rho}$.

А теперь, пусть $\exists i_0:\beta_{i_0}<0$. Тогда $\exists f\in L_2$, которая не принадлежит $L_{2,\rho}$. Пусть $\left\{f_n^+;f_{n+1}^-\right\}_{n\geqslant 0}\subset l_2$ биортогональные коэффициенты функции f по системе (1) в L_2. Ясно, что не существует функция из $L_{2,\rho}$, для которой $\left\{f_n^+;f_{n+1}^-\right\}_{n\geqslant 0}$ являлалсь бы последовательностью биортогональных коэффициентов по системе (1) в $L_{2,\rho}$. Это следует из того, что система (1) полна в L_1 и $L_{2,\rho} \subset L_1$. Следовательно в этом случае система (1) не является Гильбертовой в $L_{2,\rho}$. Теорема доказана.

Из этой теоремы непосредственно следует следующее

Следствие. *Если $\rho(t) \not\equiv 1$, то система (1) не образует базис Рисса в $L_{2,\rho}$.*

Список литературы

[1] *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964.

[2] *Б.Т. Билалов.* Базисность некоторых систем экспонент, косинусов и синусов. Дифференц. уравнения. 1990, т. 26, №1, с. 10–16.

[3] *К.С. Казарян, П.И. Лизоркин.* Мультипликаторы, базисы, безусловные базисы в весовых пространствах B и SB. Тр. мат. ин-та АН СССР. (1989), т. 187, с. 98–115.

[4] *Е.И. Моисеев.* Базисность в весовом пространстве одной системы собственных функций дифференциального оператора. Дифференц. уравнения. 1999, т. 35, №2, с. 200–205.

[5] *Е.И. Моисеев.* О базисности систем синусов и косинусов в весовом пространстве. Дифференц. уравнения. 1998, т. 34, №1, с. 40–44.

[6] *С.Г. Велиев.* Базисы из экспонент с вырождением и граничные задачи. Препринт ИММ НАН Азерб. 29 сентября 2004. Баку, 56 с.

О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.Н. Можарова

Орловский государственный университет

Пусть H – банахово пространство и $A : \mathcal{D}(A) \to H, \mathcal{D}(A) \subset H,$ – замкнутый линейный неограниченный оператор; $\mathcal{D}(A)$ – инвариантно относительно оператора A. Если характеристическая функция $\varphi(t)$ оператора

$$\varphi(A)(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} x_k A^k(x), \quad x \in \mathcal{D}(A), \{x_k\} \subset H, \tag{1}$$

является целой векторнозначной со значениями в H и имеет порядок роста, не превосходящий $1/\beta$, а при порядке $1/\beta$ – тип меньший, чем $\beta/(\alpha e)$ (здесь $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ – фиксированные числа), то оператор $\varphi(A)$ определен и является линейным и непрерывным на некотором подпространстве H_α^β пространства H [2]. Этот результат справедлив и для скалярной характеристической функци $\varphi(t)$.

Пусть

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k, \{x_k\} \subset H, \forall\ \lambda \in \mathbb{C} \tag{2}$$

– целая собственная вектор-функция оператора A, имеющая порядок роста $\rho \neq 0, \infty$ и тип σ. Векторы $f(\lambda_j) \in H_\alpha^\beta, \forall\ \alpha, \beta > 0$. Здесь $\{\lambda_j\}, j = 1, 2, \ldots$ – нули характеристической функции оператора φ:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, c_k \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Можно показать [3], что если λ_j – нули $\varphi(t)$ соответственно кратности m_j, $j = 1, 2, \ldots$, то векторы $f^{(k)}(\lambda_j), k = 0, 1, \ldots, m_j - 1$, являются частными решениями уравнения
$$\varphi(A)(x) = 0. \qquad (4)$$

Для доказательства теорем, показывающих, что каждое решение уравнения (4) аппроксимируется (в определенных условиях) посредством указанных выше элементарных решений, проведен ряд вспомогательных построений.

Пусть функция
$$\psi_\varphi(\lambda, t) = \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(t)}{\lambda - t}, \qquad (5)$$

где $\varphi \in [1/\beta, \beta/(\alpha e)); t$ – фиксированный комплексный параметр. Следовательно, $\psi_\varphi(\lambda, t)$, как функция λ, – целая, причем $\psi_\varphi(\lambda, t) \in [1/\beta, \beta/(\alpha e))$. При фиксированном t такая функция определяет на H_α^β линейный непрерывный оператор

$$\psi_\varphi[A, t_0](x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k[A^{k-1}(x) + t_0 A^{k-2}(x) + \cdots + t_0^{k-1}x], t_0 \in \mathbb{C}. \qquad (6)$$

Ряд (6) абсолютно сходится по норме в H для всех $x \in H_\alpha^\beta$.

На основании свойств интерполирующей функции $\psi_\varphi[A, t](x)$ [1] доказана [2]

Теорема 1. *Для любого вектора $x \in H_\alpha^\beta$ и любой функции $\varphi \in [1/\beta, \beta/(\alpha e))$ справедлива формула*
$$x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{\psi_\varphi[A, t](x)}{\varphi(t)} dt + R_r(A)(x), \qquad (7)$$

где $R_r(\lambda) \in [1/\beta, \beta/(\alpha e))$ и для $|\lambda| < r$ определяется как

$$R_r(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{dt}{(t - \lambda)\varphi(t)}. \qquad (8)$$

(Здесь $r > 0$ – любое, но такое, что окружность $|t| = r$ не проходит через нули функции $\varphi(t)$.)

В этих же обозначениях справедлива

Лемма. *Пусть φ – фиксированная целая функция, $\varphi \in [1/\beta, \beta/(\alpha e))$. Тогда для любого $x \in H_\alpha^\beta$, являющегося решением уравнения $\varphi(A)(x) = 0$, имеет место следующее равенство:*
$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{\psi_\varphi[A, t](x)}{\varphi(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{l_0\{\psi_\varphi[A, t](x)\} f(t)}{\varphi(t)} dt, \qquad (9)$$

где $f(t)$ – собственная вектор-функция оператора A; l_0 – линейный непрерывный функционал, участвующий в определении $f(t)$.

Исходя из теоремы 1 и с привлечением леммы, доказано следующее утверждение, описывающее условия аппроксимации каждого решения уравнения (4) посредством системы $\{f^{(k)}(\lambda_j)\}$ его элементарных решений.

Теорема 2. *Пусть целая функция $\varphi \in [1/\beta, \beta/(\alpha e))$ удовлетворяет условию: существуют окружности $|t| = r_k, r_k \uparrow \infty$, на которых имеет место оценка*

$$|\varphi(t)| > M_k, \quad \frac{r_k}{M_k} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{10}$$

Тогда каждое решение $x \in H_\alpha^\beta$ уравнения (4) представляется в виде

$$x = \lim_{r_k \to \infty} \sum_{|\lambda_j| < r_k} \sum_{\nu=0}^{m_j - 1} d_{j\nu} f^{(\nu)}(\lambda_j), \tag{11}$$

где λ_j – нули функции $\varphi(t), m_j$ – кратность нуля $\lambda_j, j = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. В формуле (7) в качестве контура интегрирования возьмем окружность $|t| = r_k$, не проходящую через нули функции $\varphi(t)$, так как по условию $|\varphi(t)| > M_k$. Тогда имеем:

$$x - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t| = r_k} \frac{\psi_\varphi[A, t](x)}{\varphi(t)} dt = R_k(A)(x).$$

По лемме получаем:

$$x - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t| = r_k} \frac{l_0\{\psi_\varphi[A, t](x)\} f(t)}{\varphi(t)} dt = R_k(A)(x). \tag{12}$$

Для доказательства теоремы требуется оценить остаточный член формулы (12) и показать, что в условиях теоремы он стремится к нулю при $k \to \infty$.

Для этого, оценивая функцию $R_k(\lambda)$, получаем:

$$|R_k(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon) \frac{e^{(\sigma_1 + \varepsilon)|\lambda|^{1/\beta}} r_k}{M_k}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall\, \varepsilon > 0,$$

где σ_1 – тип функции $\varphi(t)$ при порядке роста $1/\beta$. Следовательно, ее тейлоровские коэффициенты имеют оценку:

$$|B_m^{(k)}| \leqslant C(\varepsilon) \frac{r_k}{M_k} \left[\frac{(\sigma_1 + \varepsilon)e}{\beta m} \right]^{\beta m}, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Отсюда

$$\|B_m^{(k)} A^m(x)\| \leqslant C(\varepsilon) \left[\frac{(\sigma_1 + \varepsilon)e}{\beta m} \right]^{\beta m} \frac{r_k}{M_k} \|A^m(x)\| \leqslant C(\varepsilon) \left[\frac{(\sigma_1 + \varepsilon)e}{\beta m} \right]^{\beta m} \frac{r_k}{M_k} (\varepsilon_p m)^{\beta m} \|x\|_p,$$

$$\exists\, \varepsilon_p < \frac{\beta}{(\sigma_1 + \delta)e}, \quad \forall \delta > 0, \quad m > m_0(\varepsilon, \delta), \quad 0 < \varepsilon < \delta,$$

$x \in H_\alpha^\beta$ – решение уравнения $\varphi(A)(x) = 0$.

Следовательно, ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} B_m^{(k)} A^m(x)$, определяющий оператор $R_k(A)(x)$ сходится абсолютно по топологии пространства H, причем

$$\|R_k(A)(x)\| \leqslant C_p \frac{r_k}{M_k} \|x\|_p,$$

где $C_p > 0, x$ – любое решение уравнения $\varphi(A)(x) = 0$ из H_α^β. Теорема доказана.

Отметим основные частные случаи данной теоремы.

Пусть H – полное, счетно-нормированное пространство; A – линейный непрерывный оператор, действующий на H и имеющий порядок $\beta \neq 0, \infty$ и тип α. $f(\lambda)$ – целая собственная вектор-функция оператора A, имеющая порядок роста $\rho = 1/\beta$ и тип $\sigma = \beta/(\alpha e)$.

В этих условиях из теоремы 2 следует

Теорема 3. *A – линейный оператор, действующий в полном, счетно-нормированном пространстве H, имеющий конечный порядок $\beta > 0$ и тип α. И пусть $f(\lambda)$ – целая собственная вектор-функция оператора A, имеющая порядок роста $\rho = 1/\beta$ и тип $\sigma = \beta/(\alpha e)$. Если характеристическая функция $\varphi \in [1/\beta, \beta/(\alpha e))$ удовлетворяет условию: существуют окружности $|t| = r_k, r_k \uparrow \infty$, на которых выполняется оценка*

$$|\varphi(t)| > M_k, \frac{r_k}{M_k} \to 0, k \to \infty,$$

то каждое решение $x \in H$ уравнения

$$\varphi(A)(x) = 0$$

представляется (в топологии пространства H) в виде

$$x = \lim_{r_k \to \infty} \sum_{|\lambda_j| < r_k} \sum_{\nu=0}^{m_j - 1} d_{j\nu} f^{(\nu)}(\lambda_j),$$

где $\{\lambda_j\}$ – нули функции $\varphi(t), m_j$ – кратность соответствующего нуля.

Отдельно рассмотрим случай, когда функция $\varphi(t)$ имеет только простые нули.

Теорема 4. *Пусть целая функция $\varphi \in [1/\beta, \beta/(\alpha e))$ имеет нули λ_j, и все они простые. Если выполняется условие (10), то каждое решение $x \in H$ уравнения $\varphi(A)(x) = 0$ представляется рядом*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} d_j f(\lambda_j),$$

причем к x сходится или сам ряд, или подпоследовательность его частичных сумм.

В частности, если $H = H(\mathbb{C}), A = d/dz$ $(\beta = 1, \alpha = 0)$ и $f(\lambda) = e^{\lambda z}$ – собственная вектор-функция оператора дифференцирования, целая, имеющая порядок роста $\rho = 1$ и тип $\sigma = \infty$ при всех конечных $p-$типах роста σ_p, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть целая функция $\varphi \in [1, \infty)$ имеет нули λ_j и удовлетворяет условию (10). Тогда каждое решение $F \in H(\mathbb{C})$ уравнения*

$$\varphi\left(\frac{d}{dz}\right)(F) = 0$$

представляется рядом

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{m_j - 1} d_{j\nu} z^\nu e^{\lambda_j z},$$

где m_j – кратность соответствующего нуля λ_j, или

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} d_j e^{\lambda_j z},$$

если все нули λ_j – простые. Причем в каждом случае к x сходится или сам ряд, или подпоследовательность его частичных сумм.

Список литературы

[1] *Т.Н. Можарова.* Об интерполирующей функции, порожденной векторнозначной функцей $\varphi(t)$ и линейным неограниченным оператором A. Вестник науки. Выпуск 3. Орел: ОГУ, 2004. С. 95–100.

[2] *Т.Н. Можарова.* Об элементах локально-выпуклого пространства H_α^β. Вестник науки. Выпуск 5. Орел: ОГУ, 2006. С. 75–77.

[3] *Т.Н. Можарова.* К вопросу о решениях одного класса операторных уравнений. Вестник науки. Выпуск 1. Орел: ОГУ, 2001. С. 42–47.

ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПРОСТРАНСТВА, СОПРЯЖЕННОГО К ПРОСТРАНСТВУ БЫСТРО УБЫВАЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

С.В. Панюшкин

Орловский государственный университет

Для решения разнообразных задач функционального анализа часто применяется преобразование Фурье сопряженного пространства и его обобщения. Пусть H – отделимое локально выпуклое пространство функций аргумента z. Оператор T, действующий на сильно сопряженном к H пространстве по правилу:

$$T(l) = l(e^{\lambda z}) = \varphi(\lambda), \quad \forall l \in H^*,$$

называется преобразованием Фурье пространства H^*. В литературе употребляются также и другие названия оператора H^*: преобразование Фурье-Лапласа, преобразование Лапласа, преобразование Фурье-Бореля. Образом преобразования Фурье часто является некоторое пространство целых функций Λ. Как правило, оно обладает достаточно «хорошими» свойствами, позволяющими изучать пространства H и H^*.

В данной работе рассматривается обобщение преобразования Фурье и описывается образ пространства, сопряженного к пространству быстро убывающих последовательностей.

Пусть H – локально выпуклое отделимое линейное топологическое пространство, топология которого определена мультинормой $\left\{\|.\|_p\right\}$, $p \in \mathbb{P}$ и H^* – сопряженное к нему (пространство всех линейных непрерывных комплекснозначных функционалов на H).

Пусть $f : \mathbb{C} \to H$ – фиксированная аналитическая в некоторой области G вектор-функция. Оператор

$$T : H^* \to \Lambda; \;\; H^* \ni l \to T(l) = l[f(\lambda)] = \varphi(\lambda)$$

назовем обобщенным преобразованием Фурье с ядром f. Здесь Λ – множество значений оператора T: $\Lambda = \{\varphi = T(l)\,;\, \forall\, l \in H^*\}$.

Значениями обобщенного преобразования Фурье являются скалярные функции, аналитические в G.

Рассмотрим семейство нормированных пространств целых функций

$$\Lambda_p^N = \{\varphi(\lambda) : |\varphi(\lambda)| \leqslant CN_p(|\lambda|)\}\,, \; p \in \mathbb{P}$$

с нормами

$$\|\varphi\| = \sup_{r>0} \left\{ \frac{\max\limits_{|\lambda|\leqslant r} |\varphi(\lambda)|}{N_p(r)} \right\},$$

и определим пространство $\Lambda^N = \lim\limits_{p} ind\, \Lambda_p^N$

В работе [1] автора доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть H – пространство Фреше и $\{x_n\} \subset H$ – базис, по которому каждый вектор $x \in H$ разлагается в ряд с коэффициентами $\{c_n(x)\}$. Пусть*

$$\forall p \in \mathbb{P}, \quad \forall x \in H, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x)|\, a_{p,n} < +\infty, \tag{1}$$

где

$$a_{p,n} = \inf_{r>0} \frac{N_p(r)}{r^n}.$$

Пусть также функции $N_p(r)$ удовлетворяют условию:

$$\forall p \geqslant 1, \quad \lim_{r\to\infty} (N_{p+1}(r) - N_p(r)) = +\infty. \tag{2}$$

Тогда Λ совпадает с Λ^N, то есть оператор T осуществляет топологический изоморфизм пространств H^* и Λ^N.

Возьмем в качестве H пространство $\Sigma \ni \{b_k\}$ – пространство числовых последовательностей, удовлетворяющих условию:

$$\|\{b_k\}\|_p = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^p\, |b_k| < +\infty, \;\; \forall p \tag{3}$$

(пространство быстро убывающих последовательностей).

Топология пространства Σ определяется мультинормой $\|\cdot\|_p$. Известно, что оно является пространством Фреше (см. [2]).

Определим целую векторнозначную функцию $f(\lambda)$ со значениями в Σ следующим образом:

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{n!} \lambda^n,$$

где e_n – единичные векторы: $e_n = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\}$ – единица в n-ой позиции. Система векторов $\{e_n\}$ является абсолютным базисом в Σ (см. [2]), значит, и $\left\{\frac{e_n}{n!}\right\}$ также является абсолютным базисом в Σ. Элемент $x = \{b_k\} \in \Sigma$ разлагается по нему с коэффициентами $c_k(x) = b_k k!$.

Выясним, что представляет собой образ пространства Σ^* при обобщенном преобразовании Фурье с ядром $f(\lambda)$.

Непосредственным подсчетом находим: $\|e_n\|_p = (n+1)^p$, тогда

$$N_p(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^p}{n!} r^n.$$

Установим вид функций $N_p(r)$. Прежде всего отметим, что они удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$(rN_p(r))' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^p}{n!} \left(r^{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{p+1}}{n!} r^n = N_{p+1}(r).$$

Покажем по индукции, что $N_p(r) = Q_p(r)e^r$, где $Q_p(r)$ – многочлен p-й степени. Очевидно, что $N_0(r) = e^r$. Пусть $N_p(r) = Q_p(r)e^r$, тогда

$$N_{p+1}(r) = (rN_p(r))' = (rQ_p(r)e^r)' = Q_p(r)e^r + rQ_p'(r)e^r + rQ_p(r)e^r = Q_{p+1}(r)e^r,$$

где $Q_{p+1}(r) = (r+1)Q_p(r) + rQ_p'(r)$.

Из вышеприведенных равенств также следует, что старший коэффициент многочлена $Q_{p+1}(r)$ равен старшему коэффициенту многочлена $Q_p(r)$. Так как $N_0(r) = e^r$, то старшие коэффиценты всех многоленов $Q_p(r)$ равны 1.

Проверим выполнение условия (1). Зафиксируем произвольное p и оценим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x)|\, a_{p,n} = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\, n! a_{p,n}, \quad \forall x \in \Sigma. \tag{4}$$

где числа $a_{p,n}$ по определению равны:

$$a_{p,n} = \inf_{r>0} \frac{N_p(r)}{r^n} = \inf_{r>0} \frac{Q_p(r)e^r}{r^n}.$$

Так как старший коэффициент многочлена $Q_p(r)$ равен 1, то для достаточно больших r (начиная с некоторого r_p) будет выполняться $Q_p(r) < 2r^p$ (r_p – наибольший неотрицательный корень уравнения $Q_p(r) = 2r^p$, или 0, если это уравнение не имеет корней).

Тогда

$$a_{p,n} = \inf_{r>0} \frac{Q_p(r)e^r}{r^n} \leqslant \inf_{r>r_p} \frac{Q_p(r)e^r}{r^n} \leqslant \inf_{r>r_p} \frac{2r^p e^r}{r^n} = 2 \inf_{r>r_p} r^{p-n}e^r.$$

Вычислим $\inf\limits_{r>0} r^{p-n}e^r$ при $n > p$. При $r \to 0$ и $r \to \infty$ выражение $r^{p-n}e^r$ стремится к бесконечности, поэтому наименьшее значение достигается в нуле его производной:

$$\left(r^{p-n}e^r\right)' = 0 \Rightarrow r = n - p.$$

Таким образом, наименьшее значение достигается при $r = n - p$, и оно равно $\left(\frac{e}{n-p}\right)^{n-p}$. Тогда при $n > r_p + p$ справедливо

$$a_{p,n} \leqslant 2 \inf_{r>r_p} r^{p-n} e^r = 2 \inf_{r>0} r^{p-n} e^r = 2 \left(\frac{e}{n-p}\right)^{n-p}.$$

Так как по формуле Стирлинга

$$(n-p)! \sim \sqrt{2\pi(n-p)} \left(\frac{n-p}{e}\right)^{n-p},$$

то $\exists C$, такое, что

$$(n-p)! \leqslant C(n-p) \left(\frac{n-p}{e}\right)^{n-p} \quad \text{или} \quad C\frac{n-p}{(n-p)!} \geqslant \left(\frac{e}{n-p}\right)^{n-p}, \quad \forall n > r_p + p,$$

$$|b_n|\, n! a_{p,n} \leqslant 2\,|b_n|\, n! \left(\frac{e}{n-p}\right)^{n-p} \leqslant 2\,|b_n|\, n!\, C \frac{n-p}{(n-p)!} \leqslant$$
$$\leqslant 2C\,|b_n|\, \underbrace{(n-p)(n-p+1)\ldots n}_{p+1} \leqslant 2C\,|b_n|\, n^{p+1} \leqslant 2C\,|b_n|\,(n+1)^{p+1}.$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2C\,|b_n|\,(n+1)^{p+1}$$

сходится согласно условию (3), следовательно, сходится и ряд (4), члены которого с номерами, большими $r_p + p$, не превосходят соответствующих членов данного ряда. Таким образом, условие (1) выполняется, и по теореме 1 обобщенное преобразование Фурье взаимно однозначно и взаимно непрерывно переводит пространство Σ^* в пространство целых функций $\Lambda_\Sigma = \lim\limits_{p\to\infty} ind\, \Lambda_p^N$, где

$$\Lambda_p^N = \left\{\varphi(\lambda) : |\varphi(\lambda)| \leqslant C_0 Q_p(|\lambda|) e^{|\lambda|}\right\},$$

с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{r>0} \left\{ \frac{\max\limits_{|\lambda|\leqslant r} |\varphi(\lambda)|}{Q_p(r) e^r} \right\}.$$

Список литературы

[1] *С.В. Панюшкин.* Обобщенное преобразование Фурье пространства, сопряженного к локально выпуклому. Ученые записки. Орел: ОГУ. 2006. Вып. 6. С. 67–90.

[2] *А. Пич.* Ядерные локально выпуклые пространства. М.: Мир, 1967.

[3] *Л.В. Канторович, Г.П. Акилов.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.

О ПОЛНОТЕ И МИНИМАЛЬНОСТИ НЕКОТОРОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

В.Ф. Салманов

ИММ НАН Азербайджана

Описано сопряженное пространство к весовому пространству кусочно-непрерывных функций и получены необходимые и достаточные условия полноты и минимальности некоторой системы в этом пространстве.

1. Весовое пространство кусочно-непрерывных функций. Обозначим через $KC[-\pi,\pi]$ – банахово пространство с $\sup$ –нормой кусочно-непрерывных функций на отрезке $[-\pi,\pi]$, которые могут иметь разрыв первого рода в точке нуль. Для определенности предположим, что $f(0)=f(0+0)$.

Пусть

$$KC_\rho(\Gamma)=\{f:\exists f^\rho\in KC[-\pi,\pi],\ f\cdot\rho=f^\rho|_\Gamma\},$$

где $\Gamma=(-\pi,0)\cup(0,\pi)$, $f|_\Gamma$ – сужение функции f на Γ, $\rho(t)=\left|e^{it}-1\right|^{\nu_1}\left|e^{it}+1\right|^{\nu_2}$, $0<\nu_i<1$, $i=1,2$.

Легко заметить, что

$$\|f\|_\rho=\sup_{t\in\Gamma}|f(t)\cdot\rho(t)|$$

является нормой в $KC_\rho(\Gamma)$.

Функцию $f^\rho(t)$ будем называть «образом» функции $f\in KC_\rho(\Gamma)$ в пространстве $KC[-\pi,\pi]$, а функцию $f(t)$ «прообразом» функции $f^\rho(t)$ в пространстве $KC_\rho(\Gamma)$. «Прообраз» функции $g\in KC[-\pi,\pi]$ будем обозначать через $g_\rho(t)$. Очевидно, что «образ» и «прообраз» определяются однозначно и

$$\|f\|_\rho=\|f^\rho\|_C\,,\qquad \|g\|_C=\|g_\rho\|_\rho\,,\qquad (f^\rho)_\rho=f,\qquad (g_\rho)^\rho=g.$$

Легко доказывается следующая

Теорема 1. *$KC_\rho(\Gamma)$ является банаховым пространством относительно нормы $\|\cdot\|_\rho$.*

2. Общий вид линейных функционалов в $KC_\rho(\Gamma)$. Пусть $V[a,b]$ – пространство функций ограниченной вариации на $[a,b]$.

Теорема 2. *Всякий линейный ограниченный функционал L на $KC_\rho(\Gamma)$ представим в виде*

$$L(f)=\int_{-\pi}^{0}f^\rho(t)d\Phi_1(t)+\int_0^\pi f^\rho(t)d\Phi_2(t),$$

где $\Phi_1\in V\left[-\pi,0\right],\Phi_2\in V[0,\pi]$.

Доказательство. Пусть $L\in(KC_\rho(\Gamma))^*$. Определим функционал L_ρ следующим образом $L_\rho(g)=L\left(g_\rho\right)$, где g_ρ–«прообраз» функции $g\in KC[-\pi,\pi]$. Очевидно, что L_ρ определяется однозначно и действует линейно. Действительно, если $g_i\in KC[-\pi,\pi]$, $i=1,2$, то

$$L_\rho\left(\lambda_1g_1+\lambda_2g_2\right)=L\left[\left(\lambda_1g_1+\lambda_2g_2\right)_\rho\right]=L\left[\lambda_1\left(g_1\right)_\rho+\lambda_2\left(g_2\right)_\rho\right]=$$

$$= L\left[\lambda_1 (g_1)_\rho\right] + L\left[\lambda_2 (g_2)_\rho\right] = \lambda_1 L_\rho(g_1) + \lambda_2 L_\rho(g_2).$$

Так как

$$|L_\rho(g)| = |L(g_\rho)| \le \|L\| \, \|g_\rho\|_\rho = \|L\| \, \|g\|_C\,,$$

то L_ρ – линейный непрерывный функционал на $KC[-\pi,\pi]$, т.е. $L_\rho \in (KC[-\pi,\pi])^*$.

Очевидно, что $KC[-\pi,\pi]$ изометрично-изоморфно декартовому произведению $C[-\pi,0] \times C[0,\pi]$. Известно, что сопряженное пространство декартовых произведений Банаховых пространств есть декартовое произведение соответствующих сопряженных пространств [1, стр. 209], т.е.

$$(KC[-\pi,\pi])^* = (C[-\pi,0])^* \times (C[0,\pi])^*\,.$$

По теореме Ф.Рисса $(C[a,b])^* = V[a,b]$. Поэтому

$$(KC[-\pi,\pi])^* = V[-\pi,0] \times V[0,\pi].$$

Тогда существуют такие $\Phi_1 \in V\left[-\pi,0\right], \Phi_2 \in V[0,\pi]$, что

$$L_\rho(g) = \int\limits_{-\pi}^{0} g(t)d\Phi_1(t) + \int\limits_{0}^{\pi} g(t)d\Phi_2(t).$$

Теорема доказана.

3. Минимальность «двойной» системы. Рассмотрим систему

$$\left\{x_n^+(t), x_n^-(t)\right\}_{n=0,k=1}^{\infty}, \tag{1}$$

где $x_n^+(t)$ и $x_n^-(t)$ принадлежат пространству $KC[-\pi,\pi]$.

Биортогональную систему в $KC[-\pi,\pi]$ к системе (1) обозначим через $\left\{\omega_n^+(t);\omega_k^-(t)\right\}_{n=0,k=1}^{\infty}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_{-\pi}^{0} x_n^+(t)d\overline{\omega_{1,m}^+(t)} + \int\limits_{0}^{\pi} x_n^+(t)d\overline{\omega_{2,m}^+(t)} = \delta_{nm}, \ \ n \ge 0, \ m \ge 0,\\
&\int\limits_{-\pi}^{0} x_n^+(t)d\overline{\omega_{1,m}^-(t)} + \int\limits_{0}^{\pi} x_n^+(t)d\overline{\omega_{2,m}^-(t)} = 0, \ \ n \ge 0, \ m \ge 1,\\
&\int\limits_{-\pi}^{0} x_n^-(t)d\overline{\omega_{1,m}^+(t)} + \int\limits_{0}^{\pi} x_n^-(t)d\overline{\omega_{2,m}^+(t)} = 0, \ \ n \ge 1, \ m \ge 0,\\
&\int\limits_{-\pi}^{0} x_n^-(t)d\overline{\omega_{1,m}^-(t)} + \int\limits_{0}^{\pi} x_n^-(t)d\overline{\omega_{2,m}^-(t)} = \delta_{nm}, \ \ n \ge 1, \ m \ge 1,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $\omega_{i,n}^\pm = \omega_n^\pm|_{\Gamma_i}$, $\Gamma_1 = (-\pi,0)$, $\Gamma_2 = (0,\pi)$.

Теорема 3. *Пусть система (1) минимальна в $KC[-\pi,\pi]$. Если существуют интегралы*

$$\int\limits_{-\pi}^{0} \overline{\rho^{-1}(\tau)}d\omega_{1,n}^\pm(\tau), \qquad \int\limits_{0}^{\pi} \overline{\rho^{-1}(\tau)}d\omega_{2,n}^\pm(\tau),$$

то система (1) будеть минимальной в $KC_\rho(\Gamma)$, и биортогональная система $\{\lambda_n^+(t);\lambda_n^-(t)\}_{n=0,k=1}^{\infty}\subset(KC_\rho(\Gamma))^*$ будет иметь вид

$$\lambda_{1,n}^{\pm}(t)=\int\limits_{-\pi}^{t}\overline{\rho^{-1}(\tau)}d\omega_{1,n}^{\pm}(\tau),\quad t\in[-\pi,0]\,,\quad \lambda_{2,n}^{\pm}(t)=\int\limits_{0}^{t}\overline{\rho^{-1}(\tau)}d\omega_{2,n}^{\pm}(\tau),\quad t\in[0,\pi]\,,$$

где $\lambda_{i,n}^{\pm}=\lambda_n^{\pm}|_{\Gamma_i}$, $i=1,2$.

Доказательство. Ясно, что $\omega_{1,n}^{\pm}\in V\,[-\pi,0]\,,\ \omega_{2,n}^{\pm}\in V\,[0,\pi]$. По правилу замены переменных, имеем:

$$\int\limits_{-\pi}^{0}x_n^{\pm}(t)\rho(t)d\overline{\lambda_{1,m}^{\pm}(t)}=\int\limits_{-\pi}^{0}x_n^{\pm}(t)\rho(t)\rho^{-1}(t)d\overline{\omega_{1,m}^{\pm}(t)}=\int\limits_{-\pi}^{0}x_n^{\pm}(t)d\overline{\omega_{1,m}^{\pm}(t)},$$

$$\int\limits_{0}^{\pi}x_n^{\pm}(t)\rho(t)d\overline{\lambda_{2,m}^{\pm}(t)}=\int\limits_{0}^{\pi}x_n^{\pm}(t)\rho(t)\rho^{-1}(t)d\overline{\omega_{1,m}^{\pm}(t)}=\int\limits_{0}^{\pi}x_n^{\pm}(t)d\overline{\omega_{1,m}^{\pm}(t)}.$$

Отсюда, следуя (2), получаем:

$$\int\limits_{-\pi}^{0}x_n^{+}(t)\rho(t)d\overline{\lambda_{1,m}^{+}(t)}+\int\limits_{0}^{\pi}x_n^{+}(t)\rho(t)d\overline{\lambda_{2,m}^{+}(t)}=\delta_{nm},\quad n\geq 0,\ m\geq 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{0}x_n^{+}(t)\rho(t)d\overline{\lambda_{1,m}^{-}(t)}+\int\limits_{0}^{\pi}x_n^{+}(t)\rho(t)d\overline{\lambda_{2,m}^{-}(t)}=0,\quad n\geq 0,\ m\geq 1,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{0}x_n^{-}(t)\rho(t)d\overline{\lambda_{1,m}^{+}(t)}+\int\limits_{0}^{\pi}x_n^{-}(t)\rho(t)d\overline{\lambda_{2,m}^{+}(t)}=0,\quad n\geq 1,\ m\geq 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{0}x_n^{-}(t)\rho(t)d\overline{\lambda_{1,m}^{-}(t)}+\int\limits_{0}^{\pi}x_n^{-}(t)\rho(t)d\overline{\lambda_{2,m}^{-}(t)}=\delta_{nm},\quad n\geq 1,\ m\geq 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть система (1) минимальна в $KC_\rho(\Gamma)$. Если существуют интегралы*

$$\int\limits_{-\pi}^{0}\overline{\rho(t)}d\lambda_{1,n}^{\pm}(t),\qquad\int\limits_{0}^{\pi}\overline{\rho(t)}d\lambda_{2,n}^{\pm}(t),$$

то эта система минимальна в $KC[-\pi,\pi]$, и биортогональная к ней система имеет вид:

$$\omega_{1,n}^{\pm}(t)=\int\limits_{-\pi}^{t}\overline{\rho(\tau)}d\lambda_{1,n}^{\pm}(\tau),\quad t\in[-\pi,0]\,,\quad \omega_{2,n}^{\pm}(t)=\int\limits_{0}^{t}\overline{\rho(\tau)}d\lambda_{2,n}^{\pm}(\tau),\quad t\in[0,\pi]\,.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\int\limits_{-\pi}^{0} x_n^{\pm}(t)d\overline{\omega_{1,n}^{\pm}(t)} = \int\limits_{-\pi}^{0} x_n^{\pm}(t)\rho(t)d\overline{\lambda_{1,n}^{\pm}(t)}, \quad \int\limits_{0}^{\pi} x_n^{\pm}(t)d\overline{\omega_{2,n}^{\pm}(t)} = \int\limits_{0}^{\pi} x_n^{\pm}(t)\rho(t)d\overline{\lambda_{2,n}^{\pm}(t)}.$$

Далее, по схеме доказательства теоремы 3 получаем требуемое.

4. Полнота «двойной» системы. Обозначим через $\overset{\circ}{K}C_\rho(\Gamma) = \{f : f \in KC_\rho(\Gamma),$ $f^\rho(-\pi) = f^\rho(0) = f^\rho(\pi) = 0\}$.

Теорема 5. *Пусть система (1) полна в* $KC[-\pi, \pi]$. *Тогда замыкание этой системы в* $KC_\rho(\Gamma)$ *есть* $\overset{\circ}{K}C_\rho(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть для некоторых $\Phi_1(t) \in V[-\pi, 0]$, $\Phi_2 \in V[0, \pi]$

$$\int\limits_{-\pi}^{0} x_n^{\pm}(t)\rho(t)d\overline{\Phi_1(t)} + \int\limits_{0}^{\pi} x_n^{\pm}(t)\rho(t)d\overline{\Phi_2(t)} = 0, \quad \forall n.$$

Рассмотрим следующие функции:

$$\varphi_1(t) = \int\limits_{-\pi}^{t} \overline{\rho(\tau)}d\Phi_1(\tau), \qquad t \in [-\pi, 0], \quad \varphi_2(t) = \int\limits_{0}^{t} \overline{\rho(\tau)}d\Phi_2(\tau), \qquad t \in [0, \pi].$$

По правилу замены переменных имеем:

$$\int\limits_{-\pi}^{0} x_n^{\pm}(t)d\overline{\varphi_1(t)} = \int\limits_{-\pi}^{0} x_n^{\pm}(t)\rho(t)d\overline{\Phi_1(t)}, \quad \int\limits_{0}^{\pi} x_n^{\pm}(t)d\overline{\varphi_2(t)} = \int\limits_{0}^{\pi} x_n^{\pm}(t)\rho(t)d\overline{\Phi_2(t)},$$

т.е.

$$\int\limits_{-\pi}^{0} x_n^{\pm}(t)d\overline{\varphi_1(t)} + \int\limits_{0}^{\pi} x_n^{\pm}(t)d\overline{\varphi_2(t)} = 0.$$

Так как система (1) полна в $KC\,[-\pi, \pi]$, то

$$\varphi_1(t) = const, \quad t \in [-\pi, 0]\,, \quad \varphi_2(t) = const, \quad t \in [0, \pi]\,.$$

Значит,

$$\int\limits_{-\pi}^{t} \overline{\rho(\tau)}d\Phi_1(\tau) = const, \quad \forall t \in [-\pi, 0], \quad \int\limits_{0}^{t} \overline{\rho(\tau)}d\Phi_2(\tau) = const, \quad \forall t \in [0, \pi].$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\alpha}^{t} \overline{\rho(\tau)}d\Phi_1(\tau) = 0, \qquad \forall \alpha, t \in (-\pi, 0).$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\overline{\rho(\tau)}\Phi_1(t)-\overline{\rho(\alpha)}\Phi_1(\alpha)-\int\limits_{\alpha}^{t}\Phi_1(\tau)\overline{\rho'(\tau)}d\tau=0.$$

Отсюда следует, что функция $y_1(t)=\overline{\rho(\tau)}\Phi_1(t)$ абсолютно непрерывна на $[\alpha,t]$.

Дифференцируя по t последнее равенство получаем:

$$y_1'(t)-\frac{\overline{\rho'(t)}}{\overline{\rho(t)}}y_1(t)=0,\quad t\in(0\,,\pi)\,.$$

Общим решением этого уравнения является $y_1(t)=C\overline{\rho(\tau)}$. Значит, $\Phi_1(t)\equiv const$, $t\in(0\,,\pi)$.

Аналогично получаем $\Phi_2(t)\equiv const,\quad t\in(0\,,\pi)$.

Таким образом, функции

$$\Phi_1(t)=\begin{cases}C_1, & t=-\pi,\\ C_2, & t\in(-\pi,0)\,,\\ C_3, & t=0,\end{cases}\qquad \Phi_2(t)=\begin{cases}C_4, & t=0,\\ C_5, & t\in(0,\pi)\,,\\ C_6, & t=\pi,\end{cases}$$

являются аннуляторами системы (1), где C_i – произвольные постоянные.

Функция $f(t)$ принадлежит замыканию линейной оболочки системы (1), тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{-\pi}^{0}f(t)\rho(t)d\overline{\Phi_1(t)}+\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\rho(t)d\overline{\Phi_2(t)}=0, \tag{3}$$

где $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ аннуляторы системы (1). Из (3) непосредственно получаем

$$f^\rho(-\pi)(C_2-C_1)+f^\rho(0)\,(C_3-C_2+C_5-C_4)+f^\rho(\pi)\,(C_6-C_5)=0.$$

Из произвольности C_i следует, что

$$f^\rho(-\pi)=f^\rho(0)=f^\rho(\pi)=0.$$

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность Б.Т. Билалову за постоянное внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

Список литературы

[1] *Т. Като.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1972.

Алгебра, топология и геометрия

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Д.П. Батуров

Орловский государственный университет, 302026, Орел, ул. Комсомольская, 95

В этой заметке рассматриваются нормальные всюду плотные подпространства произведений сепарабельных тихоновских пространств. Напомним, что топологическое пространство X называется нормальным если X является T_1-пространством (т. е. для любой точки $x \in X$ множество $\{x\}$ замкнуто в X) и для любых замкнутых непересекающихся множеств F_1, $F_2 \subset X$ существуют открытые непересекающиеся множества U_1, $U_2 \subset X$ такие, что $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$ [1].

Известная теорема Джоунса [2] (см. также [1, Пример 2.1.10]) утверждает, что если X – сепарабельное нормальное пространство, то в X нет замкнутых дискретных подпространств мощности 2^{ω_0}. Несложная модификация доказательства этой теоремы позволяет получить следующую формулировку: если X – сепарабельное пространство, Y – нормальное всюду плотное подпространство X, τ – кардинал и $2^{\omega_0} < 2^{\tau}$, то в Y нет замкнутых дискретных подпространств мощности τ.

Основным результатом этой заметки является следующая теорема, которая обобщает теорему, сформулированную выше.

Теорема 1. *Пусть $\{X_a : a \in A\}$ – семейство сепарабельных тихоновских пространств, τ – кардинал, $2^{\omega_0} < 2^{\tau}$, $|A|^{\omega_0} < 2^{\tau}$, Y – нормальное всюду плотное подпространство произведения $\prod\{X_a : a \in A\}$. Тогда Y не содержит замкнутых дискретных подпространств мощности τ.*

Доказательство. Для любого не более чем счетного $S \subset A$ произведение $\prod\{X_a : a \in S\}$ сепарабельно [1, Теорема 2.3.15]. Зафиксируем счетное всюду плотное множество $D_S = \{d_1^S, d_2^S, \ldots\}$ в $\prod\{X_a : a \in S\}$.

Пусть F – замкнутое дискретное подпространство Y, $|F| = \tau$. Для любого $B \subset F$ в силу нормальности Y существуют открытые непересекающиеся множества U_B и V_B в Y такие, что $B \subset U_B$, $F \setminus B \subset V_B$. Найдутся открытые множества $\widetilde{U}_B$ и $\widetilde{V}_B$ в $\prod\{X_a : a \in A\}$ такие, что $U_B = Y \cap \widetilde{U}_B$, $V_B = Y \cap \widetilde{V}_B$, причем, так как Y всюду плотно в $\prod\{X_a : a \in A\}$, множества $\widetilde{U}_B$ и $\widetilde{V}_B$ также не пересекаются.

Выберем максимальное семейство γ_B непустых попарно непересекающихся базисных открытых множеств, лежащих в $\widetilde{U}_B$ и максимальное семейство ξ_B непустых попарно непересекающихся базисных открытых множеств, лежащих в $\widetilde{V}_B$. Поскольку $\prod\{X_a : a \in A\}$ обладает свойством Суслина [1, Задача 2.7.10(d)], γ_B и ξ_B не более чем счетны, поэтому существует не более чем счетное $S_B \subset A$ такое, что $p_{S_B}(\bigcup \gamma_B)$ и $p_{S_B}(\bigcup \xi_B)$ открыты в $\prod\{X_a : a \in S_B\}$ и $p_{S_B}^{-1}\big(p_{S_B}(\bigcup \gamma_B)\big) = \bigcup \gamma_B$, $p_{S_B}^{-1}\big(p_{S_B}(\bigcup \xi_B)\big) = \bigcup \xi_B$ (здесь p_{S_B} – проектирование $\prod\{X_a : a \in A\}$ на $\prod\{X_a : a \in S_B\}$). Обозначим $M_B = \{i \in N : d_i^{S_B} \in p_{S_B}(\bigcup \gamma_B)\}$.

Отображение, ставящее в соответствие каждому $B \subset F$ упорядоченную пару $\langle S_B, M_B \rangle$, инъективно. В самом деле, пусть B_1, $B_2 \subset F$, $B_1 \setminus B_2 \neq \varnothing$ и $S_{B_1} = S_{B_2} = S$. Тогда $B_1 \setminus B_2 \subset \widetilde{U}_{B_1} \cap \widetilde{V}_{B_2} \neq \varnothing$ и, так как $\bigcup \gamma_{B_1}$ открыто и всюду плотно в $\widetilde{U}_{B_1}$, $\bigcup \xi_{B_2}$ открыто и всюду плотно в $\widetilde{V}_{B_2}$, $\bigcup \gamma_{B_1} \cap \bigcup \xi_{B_2} \neq \varnothing$, поэтому $p_S(\bigcup \gamma_{B_1}) \cap p_S(\bigcup \xi_{B_2})$ – непустое открытое множество в $\prod\{X_a : a \in A\}$. Для некоторого $i \in N$ $d_i^S \in p_S(\bigcup \gamma_{B_1}) \cap p_S(\bigcup \xi_{B_2})$, тогда $d_i^S \notin p_S(\bigcup \gamma_{B_2})$ ($p_S(\bigcup \gamma_{B_2})$ и $p_S(\bigcup \xi_{B_2})$ не пересекаются), т. е. $i \in M_{B_1}$ и $i \notin M_{B_2}$.

Итак, мы получили инъективное отображение семейства всех подмножеств множества F в множество пар $\langle S, M \rangle$, где S – не более чем счетное подмножество множества A, M – подмножество натурального ряда, что противоречит условиям $|A|^{\omega_0} < 2^\tau$, $2^{\omega_0} < 2^\tau$.

Рассмотрим теперь условие $\lambda^{\omega_0} < 2^\tau$ (λ и τ – кардиналы).

Лемма 1. *Пусть $2^{\omega_0} \leqslant \lambda$ и $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega_0$. Тогда $\lambda^{\omega_0} = \lambda$.*

Доказательство. По индукции. Пусть $\mu^{\omega_0} = \mu$ для любого кардинала μ такого, что $2^{\omega_0} \leqslant \mu < \lambda$ и $\mathrm{cf}(\mu) > \omega_0$. Так как $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega_0$, получаем:

$$\lambda^{\omega_0} = \sum \big\{ |\alpha|^{\omega_0} : \alpha \text{ – ординал, } \alpha < \lambda \big\} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \cdot \sup \big\{ \mu^{\omega_0} : \mu \text{ – изолированный кардинал, } \mu < \lambda \big\} = \lambda$$

(последнее равенство получаем по индуктивному предположению).

Следствие 1. *Пусть $2^{\omega_0} \leqslant \lambda < 2^\tau$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий: а) $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega_0$; б) $\lambda^+ < 2^\tau$. Тогда $\lambda^{\omega_0} < 2^\tau$.*

Доказательство. В случае (а) по лемме 2.1 $\lambda^{\omega_0} = \lambda < 2^\tau$. В случае (б) $\lambda^{\omega_0} \leqslant (\lambda^+)^{\omega_0} = \lambda^+ < 2^\tau$.

Утверждение 1. *Пусть $2^{\omega_0} \leqslant \lambda < 2^\tau$. Тогда $\lambda^{\omega_0} = 2^\tau$ если и только если $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega_0$ и $\lambda^+ = 2^\tau$.*

Доказательство. Если $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega_0$, то существуют кардиналы $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \lambda$ такие, что $\lambda = \sum\limits_{n \in \omega_0} \mu_n$, применяя теорему Кёнига [3, Теорема 3.3.4], получаем:

$$\lambda^{\omega_0} \geqslant \prod_{n=2}^{\infty} \mu_n > \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \lambda.$$

Напомним, что топологическое пространство X называется коллективно нормальным если X является T_1-пространством и для любого дискретного семейства $\{F_a : a \in A\}$ замкнутых подмножеств в X существует семейство $\{U_a : a \in A\}$ попарно непересекающихся открытых подмножеств в X такое, что $F_a \subset U_a$ для любого $a \in A$ [1, Теорема 5.1.17]. Если пространство X нормально и не содержит несчетных замкнутых дискретных подпространств, то всякое дискретное семейство непустых замкнутых подмножеств X не более чем счетно, поэтому X будет коллективно нормальным. Применяя теорему 1, в предположении $2^{\omega_0} < 2^{\omega_1}$ получаем

Следствие 2. *Предположим $2^{\omega_0} < 2^{\omega_1}$. Пусть $\{X_a : a \in A\}$ – семейство сепарабельных тихоновских пространств, $|A|^{\omega_0} < 2^{\omega_1}$, Y – нормальное всюду плотное подпространство произведения $\prod\{X_a : a \in A\}$. Тогда Y коллективно нормально.*

Применяя результаты пункта 2, получаем обобщение следствия 2.3 из [5] и Теоремы 1.5.21 из [4]:

Следствие 3. *Предположим $2^{\omega_0} < 2^{\omega_1}$. Пусть $\{X_a : a \in A\}$ – семейство сепарабельных тихоновских пространств, $|A| < 2^{\omega_1}$, $\mathrm{cf}(|A|) > \omega_0$, Y – нормальное всюду плотное подпространство произведения $\prod\{X_a : a \in A\}$. Тогда Y коллективно нормально.*

Список литературы

[1] *Р. Энгелькинг.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

[2] *F.B. Jones.* Concerning normal and completely normal spaces. Bull. Amer. Math Soc. 1937. V. 43. P. 671–677.

[3] *А.В. Архангельский.* Канторовская теория множеств. М.: Изд-во МГУ, 1988.

[4] *А.В. Архангельский.* Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.

[5] *F.D. Tall.* Normality versus collectionwise normality. Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam. 1984. P. 685–732.

ВЗАИМОСВЯЗЬ ОСНОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Е.М. Вечтомов

Вятский государственный гуманитарный университет

610002, Киров, ул. Красноармейская, 26, vecht@mail.ru

Существует тесная взаимосвязь трех типов фундаментальных математических структур (по Бурбаки): алгебраического, порядкового и топологического. К ним можно добавить пространства с мерой и графы. Рассмотрим такие связи, главным образом, для конечных объектов. Пусть X – топологическое пространство с топологией τ . Относительно отношения включения топология представляет собой полную дистрибутивную решетку. Определим на топологическом пространстве X отношение квазипорядка ρ: $x\rho y$ означает $[x] \subseteq [y]$ для любых $x, y \in X$, где $[x]$ – замыкание в X одноточечного множества $\{x\}$. Бинарное отношение ρ на X рефлексивно и транзитивно, т. е. является *квазипорядком.* Имеем $[x] = \{z \in X : z\rho x\}$ при любом $x \in X$. Обратно, возьмем квазиупорядоченное множество $< X, \rho >$. Подмножество Y в X называется его *ρ-идеалом* (*ρ-фильтром*), если $x \in X$, $y \in Y$ и $x\rho y$ ($y\rho x$) влекут $x \in Y$. Множество J всех ρ-идеалов и множество F всех ρ-фильтров в X служат топологиями на X, превращающими X в дуальные симметрические пространства. Топологическое пространство назовем *симметрическим*, если всевозможные пересечения его открытых множеств также открыты. Напомним, что топологическое пространство X называется *T_0-пространством*, если для любых двух его различных точек найдется открытое множество в X, содержащее ровно одну их этих точек, что равносильно соотношению: $[x] = [y]$ влечет $x = y$ для любых $x, y \in X$.

Теорема 1. (П.С. Александров, 1935 г.; см. [4, теоремы 56 и 57]). *На любом множестве X существует взаимно однозначное соответствие между симметрическими топологиями и квазипорядками, задаваемое отображениями ρ и J. При этом симметрическим T_0-пространствам $< X, \tau >$, отвечают упорядоченные множества $< X, \leqslant >$.*

Рассмотрим далее категорию **T** всевозможных симметрических пространств $< X, \tau >$ с непрерывными отображениями в качестве морфизмов и категорию **K** всех квазиупорядоченных множеств $< X, \rho >$ с гомоморфизмами, т. е. отображениями, сохраняющими отношение квазипорядка. В силу теоремы 1 имеет место:

Теорема 2. *Категории* **T** *и* **K** *изоморфны между собой. В частности, изоморфны и их полные подкатегории, объектами которых являются симметрические T_0-пространства и упорядоченные множества соответственно.*

Пусть теперь $< A, +, \cdot, \leqslant, 0, 1 >$ – дистрибутивная решетка. Элемент $a \in A$ называется: (а) *неразложимым* (в сумму), если $a \neq 0$ и для любых $b, c \in A$ равенство $a = b + c$ влечет $b = a$ или $c = a$; (б) *простым* (неразложимым в произведение), если $a \neq 1$ и из $a = bc$ следует, что $b = a$ или $c = a$ при любых $b, c \in A$.

В случае решетки $L(X)$ всех замкнутых множеств топологического пространства X неразложимыми элементами будут замыкания $[x]$ точек x из X. Для конечных T_0-пространств верно и обратное

Покажем, как по конечной дистрибутивной решетке A с $1 \neq 0$ найти такое упорядоченное множество X, чтобы решетка J всех порядковых идеалов ($\leqslant$ -идеалов) в X была изоморфна A. В качестве X возьмем множество всех неразложимых элементов решетки A. Оно не пусто, поскольку содержит атомы решетки A. Будем рассматривать X как упорядоченное подмножество в A с индуцированным порядком.

Теперь устанавливается изоморфность решеток A и J [3, с. 161-162].

Теорема 3. (Г. Биркгоф, 1933 г.). *Любая конечная дистрибутивная решетка A изоморфна решетке J всех порядковых идеалов некоторого конечного упорядоченного множества X, определенного однозначно с точностью до порядкового изоморфизма.*

Заметим, что изоморфизм решеток A и J можно задать формулой:

$$f(a) = \{x \in X : x \leqslant a\} \in J, \quad a \in A.$$

Для данной конечной дистрибутивной решетки A с $1 \neq 0$ можно построить соответствующее упорядоченное множество X несколько иным способом. Пусть $\operatorname{Spec} A$ – упорядоченное по включению множество всех простых идеалов решетки A. Имеет место:

Теорема 4. *Всякая конечная дистрибутивная решетка A изоморфна решетке $J(\operatorname{Spec} A)$ всех порядковых идеалов упорядоченного множества простых идеалов в A.*

Пусть дан гомоморфизм $f : X \to Y$ квазиупорядоченных множеств. Рассмотрим решетки $J(X)$ и $J(Y)$ всех ρ-идеалов для X и Y. Тогда отображение $f^{-1} : J(Y) \to J(X)$, $f^{-1}(U) \in J(X)$ для каждого ρ-идеала U квазиупорядоченного множества Y, является решеточным гомоморфизмом, сохраняющим все точные грани. Укажем обратное соответствие для конечных дистрибутивных решеток A и B. Возьмем произвольный решеточный гомоморфизм $\alpha : B \to A$, сохраняющий 0 и 1. В силу теоремы 4 фактически мы имеем решеточный гомоморфизм $\alpha : J(\operatorname{Spec} B) \to J(\operatorname{Spec} A)$, по которому строится изотонное отображение $f : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$, порождающее исходный гомоморфизм: $\alpha = f^{-1}$.

Суммируя сказанное, получаем следующий результат о взаимосвязи трех основных видов математических структур. См. также [1, 2].

Теорема 5. *Следующие категории попарно эквивалентны или антиэквивалентны:*

1) *категория конечных дистрибутивных решеток и их гомоморфизмов, сохраняющих 0 и 1;*
2) *категория конечных упорядоченных множеств с изотонными отображениями;*
3) *категория конечных T_0 - пространств с непрерывными отображениями.*

Меры на конечных множествах. *Мерой* на множестве X со значениями в ограниченной решетке L назовем любое отображение $\mu : \mathbf{B}(X) \to L$, такое, что $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(X) = 1$ и $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для всех $A, B \subseteq X$. *Пространство с мерой* - это пара $< X, \mu >$, где μ есть мера на множестве X. Пусть $< X, \leqslant>$ - конечное упорядоченное множество. Каждому порядковому идеалу в X поставим в соответствие сам этот идеал, рассматриваемый как элемент решетки $L = J(X)$. Продолжим это соответствие до сюръективного отображения $\mu : \mathbf{B}(X) \to L$. Мы знаем, что $J(X)$ является множеством всех замкнутых множеств T_0 - пространства X, дуального к $< X, J(X) >$. Поэтому элементы $\mu(\{x\})$, $x \in X$, - это в точности неразложимые элементы решетки $J(X)$. Для любого $A \subseteq X$ полагаем: $\mu(A) = [A] \in J(X) = L$, где $[A]$ - замыкание множества A в пространстве X. Поскольку $[A \cup B] = [A] \cup [B]$, то $\mu : \mathbf{B}(X) \to L$ есть мера на множестве X. Полученная мера μ *разделяет точки множества* X, т. е. $\mu(\{x\}) \neq \mu(\{y\})$, если $x \neq y$ в X.

Возьмем теперь произвольное непустое конечное множество X и меру μ на X, отображающую $\mathbf{B}(X)$ на (конечную) дистрибутивную решетку L. Предположим, что мера μ разделяет точки множества X и множество значений $\mu(x)$, $x \in X$, совпадает с множеством всех неразложимых элементов решетки L (см. пеорему 3). Такие меры будем называть *специальными мерами.* Для каждого $a \in L$ определим множество $X_a \subseteq X$:

$$X_a = \cup \mu^{-1}(a) = \{A \in \mathbf{B}(X) : \mu(A) = a\}.$$

Тем самым, X_a есть наибольшее подмножество в X, на котором мера μ принимает значение a. Покажем, что множество $\{X_a : a \in L\}$ замкнуто относительно операций пересечения и объединения, точнее, $X_a \cap X_b = X_{ab}$ и $X_a \cup X_b = X_{a+b}$ при любых $a, b \in L$. Сначала докажем лемму.

Лемма. *Для любых* $A \subseteq X$ *и* $a \in L$ *справедливо соотношение:*

$$A \subseteq X_a \Leftrightarrow \mu(A) \leqslant a.$$

Доказательство. Если $A \subseteq X_a$, то $A \cup X_a = X_a$, откуда $\mu(A) + \mu(X_a) = (X_a) = a$. Поэтому $\mu(A) \leqslant a$. Обратно, пусть $\mu(A) \leqslant a$. Тогда $\mu(A \cup X_a) = \mu(A) + \mu(X_a) = \mu(A) + a = a$. Значит, $A \cup X_a = X_a$ и $A \subseteq X_a$.

Для $a, b \in L$ имеем:

$$X_a \subseteq X_b \Leftrightarrow X_a \cup X_b = X_b \Leftrightarrow \mu(X_a) + \mu(X_b) = \mu(X_b) \Leftrightarrow \mu(X_a) \leqslant \mu(X_b) \Leftrightarrow a \leqslant b.$$

Поэтому $X_a \cap X_b \supseteq X_{ab}$ и $X_a \cup X_b \subseteq X_{a+b}$. С другой стороны, по лемме $\mu(X_a \cap X_b) \leqslant \mu(X_a) = a$ и $\mu(X_a \cap X_b) \leqslant \mu(X_b) = b$, значит, $\mu(X_a \cap X_b) \leqslant ab$, откуда $X_a \cap X_b \subseteq X_{ab}$. Остается проверить включение $X_a \cup X_b \supseteq X_{a+b}$. Берем $x \in X_{a+b}$. Тогда $p = \mu(\{x\}) \leqslant$

$a+b$, и $p = p(a+b) = pa+pb$. Поскольку элемент $p \in L$ неразложим, то $p = pa$ или $p = pb$, т. е. $p \leqslant a$ или $p \leqslant b$. Поэтому $X_p \subseteq X_a$ или $X_p \subseteq X_b$. Стало быть, $x \in X_p \subseteq X_a \cup X_b$.

Следовательно, множество $\{X_a : a \in L\}$ является подрешеткой булеана $B(X)$, изоморфной решетке L при соответствии $X_a \leftrightarrow a$.

Зададим на множестве X отношение порядка по формуле:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \mu(\{x\}) \leqslant \mu(\{y\}) \text{для любых } x, y \in X.$$

Очевидно, что $< X, \leqslant >$ - упорядоченное множество. Покажем, что порядковыми идеалами в X служат множества вида X_a и только они. На основании леммы заключаем, что

$$X_a = \{x \in X : \mu(\{x\}) \leqslant a\}, a \in L.$$

Поэтому X_a является порядковым идеалом упорядоченного множества X. Обратно, рассмотрим произвольный порядковый идеал J в X. Докажем равенство $J = X_a$ при $a = \mu(J) \in L$. Для любого $x \in X$ верно равенство $X_{\mu(\{x\})} = \{y \in X : \mu(\{y\}) \leqslant \mu(\{x\})\}$. Кроме того, имеем

$$\mu(J) = \Sigma\{\mu(\{x\}) : x \in J\}.$$

Следовательно,

$$J = \cup\{X_{\mu(\{x\})} : x \in J\} = X_{\mu(J)} = X_a.$$

Таким образом, доказан следующий результат:

Предложение 1. *Для любого непустого конечного множества X существует взаимно однозначное соответствие между множеством всевозможных упорядочений X и множеством всех специальных мер на нем.*

Далее пусть даны пространства с мерой $< X, \mu >$ и $< Y, \nu >$, где $\mu : \mathbf{B}(X) \to L$ и $\nu : \mathbf{B}(Y) \to T$ для соответствующих ограниченных решеток L и T. *Морфизмом* пространства $< X, \mu >$ в пространство $< Y, \nu >$ называется пара отображений $f : X \to Y$ и $\alpha : T \to L$, таких, что α - решеточный гомоморфизм, сохраняющий 0 и 1, и для всех $Z \subseteq Y$ выполняется равенство $\mu(f^{-1}(Z)) = \alpha(\nu(Z))$. Очевидным образом определяется композиция морфизмов. В результате получается категория пространств с мерой. Рассмотрим ее подкатегорию $\mathbf{M}$, объектами которой являются всевозможные конечные пространства $< X, \mu >$ со специальной мерой.

Предложение 2. *Категория M эквивалентна категории всех конечных упорядоченных множеств с изотонными отображениями.*

Вместо специальной меры $\mu : \mathbf{B}(X) \to L$ на конечном множестве X можно рассмотреть систему $\mathbf{D}$-значных мер на X, где $\mathbf{D} = \{0, 1\}$ – фиксированная двухэлементная цепь. Именно, для каждого $x \in X$ определим меру $\mu_x : \mathbf{B}(X) \to \mathbf{D}$ следующим образом: для всех $A \in \mathbf{B}(X)$

$$\mu_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu(A) \geqslant \mu(\{x\}), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что семейство мер $(\mu_x)_{x \in X}$ разделяет точки множества X. Какими еще свойствами обладает семейство мер $(\mu_x)_{x \in X}$, соответствующее специальной мере μ на X? Для решения этого вопроса перенумеруем элементы множества

$X : x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для $k = 1, 2, \ldots, n$ обозначим $\mu_k = \mu_{x_k}$. Зададим отображение $\phi : \mathbf{B}(X) \to \mathbf{D}^n$ формулой:

$$\phi(A) = (\mu_1(A), \mu_2(A), \ldots, \mu_n(A)) \text{ при } A \subseteq X.$$

Образ $\operatorname{Im}\phi$ отображения ϕ является подрешеткой булевой решетки $\mathbf{D}^n$. Заметим, что n-ки $\phi(\{x\}), x \in X$, ненулевые, порождают полурешетку $< \operatorname{Im}\phi \backslash \{0\}, + >$ и образуют множество всех неразложимых элементов дистрибутивной решетки $\operatorname{Im}\phi = \phi(\mathbf{B}(X))$. При этом решетка $\operatorname{Im}\phi$ изоморфна подрешетке $\{X_a : a \in L\}$ булеана $\mathbf{B}(X)$, которая, в свою очередь изоморфна L. Поэтому решетки $\operatorname{Im}\phi$ и L канонически изоморфны. И пространства с мерой $< X, \phi >$ и $< X, \mu >$ изоморфны между собой. Обратно. Пусть на n-элементном множестве X заданы попарно различные $\mathbf{D}$-значные меры $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Как и выше, определим отображение $\phi : \mathbf{B}(X) \to \mathbf{D}^n$. Такое ϕ осуществляет $\cup$ - гомоморфизм булеана $\mathbf{B}(X)$ на верхнюю подполурешетку $L = \operatorname{Im}\phi$ в $\mathbf{D}^n$. Ясно, что в L любой элемент $a \neq 0 \equiv (0, 0, \ldots, 0)$ является суммой элементов вида $\phi(\{x\}), x \in X$. Систему D-значных мер $(\mu_k) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ назовем *согласованной*, если:

1) она разделяет точки множества X;
2) для любых $x, y \in X$ найдется множество $A \subseteq X$, для которого $\mu_k(\{x\}) \cdot \mu_k(\{y\}) = \mu_k(\{A\})$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$;
3) множество элементов $\phi(\{x\}), x \in X$, совпадает с множеством всех неразложимых элементов решетки $\operatorname{Im}\phi$.

Предложение 3. *Для любого конечного множества X соответствие $\mu \leftrightarrow (\mu_k)$ между специальными мерами μ на X и согласованными системами $\{0, 1\}$-значных мер (μ_k) на X взаимно однозначно (с точностью до соответствующих изоморфизмов).*

Список литературы

[1] *Г. Биркгоф.* Теория решеток. М.: Наука. 1984.

[2] *П.Т. Джонстон.* Теория топосов М.: Наука. 1986.

[3] *Р. Стенли.* Перечислительная комбинаторика М.: Мир. 1990.

[4] *M. Stone.* Application of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. Amer. Math. Soc. 1937. V. 41. №3. P. 375–481.

О СТРОЕНИИ КОЛЕЦ, ВХОДЯЩИХ В ПОЛУКОЛЬЦЕВОЕ ДИЗЪЮНКТНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ С ДАННЫМ ПОЛУТЕЛОМ

М.А. Лукин

Вятский государственный гуманитарный университет

610002, Киров, ул. Красноармейская, 26, center@extedu.kirov.ru

В работе дается характеризация полутел, для которых существуют ненулевые кольца, образующие с полутелами дизъюнктное объединение, дается описание колец для данных сократимых полутел.

Полукольцом называется такая алгебраическая структура $< S;\ +, \cdot\ ,\ 0,\ 1 >$, что $< S;\ +,\ 0 >$ – коммутативный моноид, $< S, \cdot, 1 >$ – моноид с $1 \neq 0$ и в S выполняются тождества $a(b+c) = ab + ac$, $(a+b)c = ac + bc$ и $a0 = 0a = 0$ [1].

Полукольцо с делением, не являющееся кольцом, называется *полутелом с нулем.* Если из полутела S исключить 0, то получим структуру $< S;\ +,\ \cdot >$, которую будем называть *полутелом.*

Полутело U называется сократимым, если $\forall u_1, u_2, u \in U, u_1 + u = u_2 + u \Rightarrow u_1 = u_2$.

Полутело U называется *зероидным*, если выполняется одно из равносильных условий:

1) $\exists a, b\ \in U : a = a + b$; 2) $\forall a\ \in U \exists b \in U : a = a + b$;

3) $\forall a\ \in U \exists b \in U : b = b + a$; 4) $\forall a, b \in U \exists c \in U : a + c = b + c$.

Ядром полутела, называется класс 1 любой его конгруэнции.

Пусть имеется полукольцо S с конгруэнцией ρ, для которой $[0]_\rho \cong R$, $[1]_\rho \cong U$, $F/\rho \cong$- двухэлементная цепь. Такое полукольцо S назовем *полукольцевым дизъюнктным объединением* кольца R и полутела U, и обозначим $U\dot{\cup}R$.

В [2] доказано, что кольцо R образует полукольцевое дизъюнктное объединение с некоторым полутелом U тогда и только тогда, когда оно радикально по Джекобсону, и его аддитивная группа – делимая группа без кручения. При этом полутело U обязано содержать в качестве подполутела $\mathbf{Q}^+$, если R – ненулевое кольцо.

Отметим, что есть примеры кольца и полутела, для которых существуют неизоморфные полукольцевые дизъюнктные объединения [3].

Теорема 1. *Полутело U входит в допустимую двойку с некоторым ненулевым кольцом тогда и только тогда, когда оно не является зероидным.*

Доказательство. Если $U\dot{\cup}R$, для некоторого кольца R, то на U существует сократимая нееденичная конгруэнция, фактор по которой лежит в $D(R)$. Поэтому U не является зероидным.

Обратно, пусть полутело U не является зероидным, рассмотрим на нем сократимую неединичную конгруэнцию $\equiv$ и фактор $U/\equiv$. Поскольку $U/\equiv$ – сократимое полутело, оно обладает нетривиальным кольцом разностей $T(U/\equiv)$. Существует инъективный гомоморфизм $f : U/\equiv \to T(U/\equiv)$. Докажем, что кольцо $(T(U/\equiv)[x])/(x^2)$ без свободных коэффициентов входит в допустимую двойку с U (полагаем, что переменная x коммутирует с элементами кольца $T(U/\equiv)$). Зададим операции на $U \cup ((T(U/\equiv)[x])/(x^2))$. Пусть $\forall u \in U, \forall tx, t \in T(U/\equiv) : u + tx = u, u \cdot tx = f(u) \cdot tx, tx \cdot u = t \cdot f(u)x$. Очевидным образом проверяются полукольцевые законы. Теорема доказана.

Заметим, что если кольцо R входит в допустимую двойку с данным полутелом U, то $U/\sim \dot{\cup} R/AnnR$, где $\sim$ – некоторая сократиая конгруэнция на U, при этом $U/\sim = U/\sim + R/AnnR$ – сократимое полутело.

Ввиду вышесказанного, полезно решить вопрос нахождения для полутела колец, образующих с ним дизъюнктное объединение, для случая когда полутело сократимо.

Будем дальше полагать, что U – сократимое полутело.

Под Ker_ϕ будем понимать класс 1 конгруэнции ϕ.

Рассмотрим ядро Ker_α в U, такое что $\forall k \in \mathrm{Ker}_\alpha$, $\forall u \in U, \exists x \in \mathrm{Ker}_\alpha$, что $uk + 1 = u + x$. Из того, что любое ядро является нормальной группой, следует, что $\forall k \in \mathrm{Ker}_\alpha, \forall u \in U,\ \exists x \in \mathrm{Ker}_\alpha$, что $ku + 1 = u + x$.

Замечание 1. $\mathrm{Ker}_\alpha + 1 = \mathrm{Ker}_\alpha + \mathrm{Ker}_\alpha$.

Доказательство. Для любых элементов $k_1, k_2 \in \mathrm{Ker}_\alpha$ найдется $x \in \mathrm{Ker}_\alpha$, что ${k_1}^{-1}k_2 + 1 = x + {k_1}^{-1}$. Умножив последнее на k_1 слева получим, $k_2 + k_1 = k_1x + 1$. Поскольку $k_1x \in \mathrm{Ker}_\alpha$, утверждение замечания доказано.

Замечание 2. $U + 1 = U + \mathrm{Ker}_\alpha$.

Доказательство. Для любых $k \in \mathrm{Ker}_\alpha, u \in U$ существует $x \in \mathrm{Ker}_\alpha$, что $u^{-1}k + 1 = u^{-1} + x$, что равносильно $k + u = 1 + xu$, что завершает доказательство.

Определим на Ker_α операции следующим образом.

Сложение. Пусть $\forall k_1, k_2 \in \mathrm{Ker}_\alpha\ k_1 \oplus k_2 = t$, где $1 + t = k_1 + k_2$. Здесь $< \mathrm{Ker}_\alpha, \oplus >$ - абелева группа с нейтральным элементом $1_U \in \mathrm{Ker}_\alpha$.

Ассоциативность: пусть для некоторых $k_1, k_2, k_3 : k_1 \oplus k_2 = t, k_2 \oplus k_3 = p$. Заметим, что $t \oplus k_3 = x, 1 + x = t + k_3$, тогда $1 + 1 + x = 1 + t + k_3 = k_1 + k_2 + k_3$. Далее, $k_1 \oplus p = y, 1 + y = k_1 + p$, тогда $1 + 1 + y = k_1 + 1 + p = k_1 + k_2 + k_3$. Очевидно, $1+1+x = 1+1+y$, поскольку полутело сократимо, $x = y$. Сложение задано корректно, ввиду сократимости U.

Умножение. Для $k_1, k_2 \in \mathrm{Ker}_\alpha$, положим $k_1 \otimes k_2 = k_1k_2 \ominus k_1 \ominus k_2$.

Покажем, что $< \mathrm{Ker}, \otimes >$ – полугруппа.

Замечание 3. $\forall a, b, k \in \mathrm{Ker}_\alpha, (a \oplus b)k \oplus k = ak \oplus bk$.

Действительно, пусть $(a \oplus b) = x$, тогда $1 + x = (a + b) \Leftrightarrow k + xk = (a + b)k$. Пусть $ak \oplus bk = y$, тогда $ak + bk = (a + b)k = y + 1$. Значит, $k + xk = 1 + y \Leftrightarrow k \oplus xk = y$, ч.т.д. Аналогично, $k(a \oplus b) \oplus k = ka \oplus kb$

Ассоциативность: $(k_1 \otimes k_2) \otimes k_3 = (k_1k_2 \ominus k_1 \ominus k_2) \otimes k_3 = (k_1k_2 \ominus k_1 \ominus k_2)k_3 \ominus (k_1k_2 \ominus k_1 \ominus k_2) \ominus k_3$ добавим к сумме $k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3$, получим $k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3 + ((k_1k_2 \ominus k_1 \ominus k_2)k_3 \oplus k_1 \oplus k_2 \ominus k_3) = 3 + (k_1k_2 \oplus k_1k_3 \oplus k_2k_3 \oplus ((k_1k_2 \ominus k_1 \ominus k_2)k_3 \oplus k_1 \oplus k_2 \ominus k_3))$. По замечанию 3, последнее выражение равно $3 + ((k_1k_2 \ominus k_1 \ominus k_2 \oplus k_2 \oplus k_1)k_3) \oplus k_3 \oplus k_3 \oplus k_1 \oplus k_2 \ominus k_3) = 3 + (k_1k_2k_3 \oplus k_1 \oplus k_2 \oplus k_3)$. Таким же образом, добавив к $k_1 \otimes (k_2 \otimes k_3)$ элемент полутела $k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3$, получим $3 + (k_1k_2k_3 \oplus k_1 \oplus k_2 \oplus k_3)$. Поскольку полутело сократимо, то $(k_1 \otimes k_2) \otimes k_3 = k_1 \otimes (k_2 \otimes k_3)$.

Предложение 1. *Алгебра* $< \mathrm{Ker}_\alpha, \oplus, \otimes >$ *является кольцом.*

Доказательство. Для этого достаточно проверить дистрибутивность. Рассмотрим выражение $k \otimes (k_1 \oplus k_2) = k(k_1 \oplus k_2) \ominus k \ominus k_1 \ominus k_2$, по замечанию оно равно $kk_1 \oplus kk_2 \ominus k \ominus k \ominus k_1 \ominus k_2 = k \otimes k_1 \oplus k \otimes k_2$, ч.т.д, аналогично доказывается левосторонняя дистрибутивность.

Предложение 2. *Пусть* $K =< \mathrm{Ker}_\alpha, \oplus, \otimes >$, *где* Ker_α *– ядро* U. *Тогда* $U\dot{\cup}K$.

Доказательство. Зададим операции между элементами кольца и полутела на множестве их объединения $U\dot{\cup}K$. Пусть $u \oplus k = x$ - элемент, полутела U, такой, что $1 + x = u + k$. Такое определение корректно, поскольку полутело U сократимо.

Умножение: считаем, что $u\otimes k = x$ – такой элемент ядра, что $uk+1 = u+x, k\otimes u = x$ – такой элемент ядра, что $ku + 1 = u + x$.

Проверим полукольцевые законы на $U \cup K$.

Ассоциативность. Рассмотрим выражение $(u \oplus k_1) \oplus k_2$, очевидно, $((u \oplus k_1) \oplus k_2) + 1 + 1 = u + k_1 + k_2$. Также точно $1 + 1 + u \oplus (k_1 \oplus k_2) = u + k_1 + k_2$, поскольку полутело сократимо, то $(u \oplus k_1) \oplus k_2 = u \oplus (k_1 \oplus k_2)$. Аналогично $(u_1 \oplus u_2) \oplus k = u_1 \oplus (u_2 \oplus k)$.

Дистрибутивность. Проверим левую дистрибутивность, для правой аналогично.

1) $u\otimes(k_1\oplus k_2)$. Добавим к выражению u, получим $u\otimes(k_1\oplus k_2)+u = u(k_1\oplus k_2)+1$. Еще раз добавив u, имеем, $u(k_1\oplus k_2)+1+u = u(1+(k_1\oplus k_2))+1 = u(k_1+k_2)+1$. Добавим к выражению $u \otimes k_1 \oplus u \otimes k_2$ единичный элемент. Получим $u \otimes k_1 \oplus u \otimes k_2 + 1 = u \otimes k_1 + u \otimes k_2$ добавив два раза u, получим $u(k_1 + k_2) + 2$. Из сократимости полутела вытекает $u \otimes (k_1 \oplus k_2) = u \otimes k_1 \oplus u \oplus k_2$;
2) $u\otimes(u_1\oplus k_2) = u(u_1\oplus k_2)$. Добавим к выражению u получим $u(u_1+k_2)$. Рассмотрим $u\otimes u_1\oplus u\otimes k_2 = uu_1\oplus u\otimes k_2$. Добавим 1 получим $uu_1+u\otimes k_2$, добавим u, получим $uu_1 + uk_2 + 1$. Значит, $u \otimes (u_1 \oplus k_2) = u \otimes u_1 \oplus u \otimes k_2$;
3) $k\otimes(u_1\oplus u_2)$. Добавив $(u_1\oplus u_2)$, получим $k(u_1\oplus u_2)+1 = k(u_1+u_2)+1$. Рассмотрим $k \otimes u_1 \oplus k \otimes u_2$. Добавим 1, получим $k \otimes u_1 + k \otimes u_2$, добавим $u_1 + u_2$, получим $ku_1 + ku_2 + 2$. Поскольку $(u_1 \oplus u_2) + 1 = u_1 + u_2, k \otimes (u_1 \oplus u_2) = k \oplus u_1 \oplus k \otimes u_2$;
4) $k \otimes (u \oplus k_1)$. Добавим $(u \oplus k_1)$. Получим $k(u \oplus k_1) + 1$, добавим k. Получим $k(u+k_1)+1$. Рассмотрим $k\otimes u\oplus k\otimes k_1$. Добавим 1, получим $k\otimes u+k\otimes k_1$, добавим u, получим $ku+1+kk_1\ominus k\ominus k_1$. Добавим k и k_1, получим $ku+3+kk_1$. Таким образом, $[k\otimes(u\oplus k_1)]+(u\oplus k_1)+k+2 = k(u+k_1)+3$, и $[k\otimes u\oplus k\otimes k_1]+1+u+k+k_1 = k(u+k_1)+3$. Поскольку $(u\oplus k_1)+k+2 = 1+u+k+k_1$, равны выражения $k\otimes(u\oplus k_1)$ и $k\otimes u\oplus k\otimes k_1$.

Теорема 2. *Кольцо* R *входит в полукольцевое дизъюнктное объединение с сократимым полутелом* U *тогда и только тогда, когда существует эпиморфизм* $f : R \to K, K \cong< \mathrm{Ker}_\alpha, \oplus, \otimes >$, $ur \in f^{-1}(f(u)r)$, *для некоторого* Ker_α, R *– полумодуль над* U, *и* $\mathrm{Ker}\, f$ *– идеал аннулятора* R.

Доказательство. Действительно, если $U\dot{\cup}R$, рассмотрим эпиморфизм $f : R \to< 1 + R, \oplus, \otimes >$, при котором $r \mapsto 1 + r$. Необходимо показать только, что $\mathrm{Ker}\, f$ – идеал аннулятора R. В самом деле, если $1 + r_1 = 1$ и $1 + r_2 = 1$, то $1 + (r_1 - r_2) = 1$, также, если $1 + r_1 = 1$, то $rr_1 = r_1r = 0, \forall r \in R$

Обратно. Необходимо корректно определить операции между U и R. Пусть $u \oplus r = u + f(r)$,операция сложения задается корректно, поскольку $U\dot{\cup} < \mathrm{Ker}_\alpha, \oplus, \otimes >$, ur задается ввиду того, что R – полумодуль над U. Учитывая, что $\mathrm{Ker}\, f$ – идеал аннулятора R и $ur \in f^{-1}(f(u)r)$, нетрудно проверить полукольцевые аксиомы.

Список литературы

[1] *J.S. Golan.* The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science. Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics. 1992. V. 54.

[2] *Е.М. Вечтомов, М.А. Лукин.* Кольца, допускающие полукольцевое расширение при помощи полутела. Вестник ВятГГУ Информатика. Математика. Язык. Вып. 3. 2005. С. 128–131.

[3] *М.А. Лукин.* О строении полутел, состоящих в полукольцевом дизъюнктном объединении с кольцом. Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2006. Вып. 8. С. 77–84.

ОБ ИДЕАЛАХ ARP-ПОЛУКОЛЕЦ

О. В. Старостина

Вятский государственный гуманитарный университет,

610002, Киров, ул. Красноармейская, 26, center@extedu.kirov.ru

В работе рассмотрены некоторые свойства идеалов *arp*-полуколец.

I. Полукольцо S называется *абелево-регулярным положительным*, или *arp-полукольцом*, если S – положительное (т. е. элемент $a+1$ обратим в S для любого $a \in S$) и абелево-регулярное полукольцо (т. е. для каждого $a \in S$ уравнение $axa = a$ разрешимо в S и любой его идемпотент e перестановочен со всеми элементами из S) [1].

Для *arp*-полукольца S используются следующие обозначения: $U(S)$ – множество всех обратимых элементов в S, $L(S)$ – множество всех идемпотентов полукольца S.

Исходные понятия и структурная теория класса *arp*-полуколец развиты в работе [1]. В [3] продолжено изучение *arp*-полуколец и завершено доказательство основной структурной теоремы.

Известно, что каждый элемент a *arp*-полукольца S представляется в виде произведения $a = e_a \cdot u$ однозначно определенного идемпотента $e_a \in L(S)$ и обратимого элемента $u \in U(S)$. Откуда в силу центральности идемпотентов полукольца S следует, что все односторонние идеалы в S являются двусторонними. Равенство идемпотентов $e_a = e_b$ элементов a и b равносильно равенству $aS = bS$, или $a = b \cdot u$ для некоторого $u \in U(S)$. Значит, $aS = e_aS = Se_a$ для всех $a \in S$ [1, предложение 2.1].

Для главных идеалов *arp*-полукольца S выполняется равенство [1, предложение 2.1]

$$aS + bS = (a + b)S.$$

Действительно, так как $(u + e_bv)e_a = (e_au + e_bv)e_a = (a + b)e_a \in (a + b)S$ и $u + e_bv = u(1+e_bu^{-1}v) \in U(S)$ для $a = e_a \cdot u$ и $b = e_b \cdot v$, то $e_a \in (a+b)S$ и $a \in (a+b)S$. Аналогично, $b \in (a+b)S$. Тогда $aS+bS \subseteq (a+b)S$. Обратное включение очевидно. Из этого свойства вытекает, что

$$fS + gS = (f \vee g)S, \tag{1}$$

где $f, g \in L(S)$, $f \vee g = e_{f+g}$. Это означает, что *arp*-полукольцо является полукольцом Безу: в нем каждый конечно-порожденный идеал главный.

II. Изучение *arp*-полуколец сводится к изучению троек $\langle L(S), U(S), \varphi_S\rangle$, или $\langle L(S), U(S), \psi_S\rangle$. $\langle U(S), +, \cdot\rangle$ – полутело без нуля относительно операций сложения и умножения в S. $\langle L(S), \vee, \cdot\rangle$ – дистрибутивная решетка с 0 и 1 относительно операции умножения $\cdot$ полукольца S и сложения $\vee$. Отображения $\varphi_S\colon L(S) \to \mathrm{Con}U(S)$, $e \to \varphi(e)$ и $\psi_S\colon L(S) \to \mathrm{Con}U(S)$, $e \to \psi(e)$ являются соответственно решеточными антигомоморфизмом и гомоморфизмом, где

$$u\varphi(e)v \Leftrightarrow eu = ev,\ u, v \in U(S) \text{ [1]},$$

$$u\psi(e)v \Leftrightarrow u + ex = v + ey \text{ для некоторых } x, y \in U(S) \text{ [3]}.$$

При этом для каждого идемпотента $e \in L(S)$ конгруэнции $\varphi(e)$ и $\psi(e)$ дополняют друг друга, т. е. $\varphi(e) \circ \psi(e) = 1$ и $\varphi(e) \cap \psi(e) = 0$ [3].

Вводится также категория абстрактных троек $\langle L, U, \varphi\rangle$, состоящих из ограниченной дистрибутивной решетки L, полутела без нуля U и решеточного антигомоморфизма $\varphi\colon L \to \mathrm{Con}U$, переводящего 0 в 1 и 1 в 0. Тройка вида $\langle L(S), U(S), \varphi_S\rangle$ для некоторого *arp*-полукольца S называется *индуцированной*. Можно также рассматривать абстрактную тройку $\langle L, U, \psi\rangle$, где $\psi\colon L \to \mathrm{Con}U$ – решеточный гомоморфизм, сохраняющий 0 и 1. Эта тройка также называется *индуцированной*, если она соответствует некоторому *arp*-полукольцу.

Установлено, что абстрактная тройка $\langle L, U, \varphi\rangle$ является индуцированной тогда и только тогда, когда все элементы $\mathrm{Im}\varphi$ дополняемы в $\mathrm{Con}\,U$ [1, 3]. Построение *arp*-полукольца по такой тройке $\langle L, U, \varphi\rangle$, осуществляется следующим образом [1, теорема 3.3]. Пусть

$$S = \dot{\bigcup_{e\in L}} U/\varphi(e)$$

есть дизъюнктное объединение фактор-полутел $U/\varphi(e) = \{[u]_{\varphi(e)} | u \in U\}$. Для любых $e \in L$ и $u \in U$ можно отождествить $[1]_{\varphi(e)} \equiv e$, $[u]_{\varphi(1)} \equiv u$, тогда $[u]_{\varphi(e)} = eu$. Операции умножения и сложения определяются следующим образом:

$$eu \cdot fv = ef \cdot uv, \quad eu + fv = (e \vee f)w,$$

где $e, f \in L$, $u, v, w \in U$ и обратимый элемент w удовлетворяет соотношениям

$$w\varphi(ef)(u + v),\ w(\varphi(e) \circ \psi(f))u,\ w(\varphi(f) \circ \psi(e))v.$$

Два произвольных *arp*-полукольца изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их индуцированные тройки [1, 3].

III. Предложение 1. *Для любого идеала I arp-полукольца S*

$$I = \sum_{e\in L(S)\cap I} eU(S) = (L(S) \cap I)U(S).$$

Доказательство. Для идеала *arp*-полукольца S имеем $I \subseteq \sum\limits_{e\in L(S)\cap I} eU(S)$, так как для $a = e_a \cdot u \in I$ идемпотент $e_a \in I$. Если $a \in \sum\limits_{e\in L(S)\cap I} eU(S)$, т. е. $a = e_1u_1 + \ldots + e_nu_n$, где $u_i \in U(S)$, $e_i \in I \cap L(S)$, то $a \in I$. Равенство $\sum\limits_{e \in L(S) \cap I} eU(S) = (L(S) \cap I)U(S)$ следует из (1).

Следствие [1, предложение 2.1]. Решетка идеалов *arp*-полукольца S изоморфна дистрибутивной решетке всех идеалов дистрибутивной решетки $L(S)$.

Для доказательства достаточно заметить, что $L(S) \cap I$ – идеал решетки $L(S)$.

Идеал I полукольца S называется *строгим*, если $a + b \in I \Rightarrow a, b \in I$ для любых $a, b \in S$.

Предложение 2. *Любой идеал I arp-полукольца S является строгим, а, значит, ядерным идеалом некоторой конгруэнции.*

Доказательство. Пусть $a = e \cdot u$ и $b = f \cdot u$. Если $a + b = e \cdot u + f \cdot v = (e \vee f) \cdot w \in I$ для некоторого $w \in U(S)$, то $e \vee f \in L(S) \cap I$, а, следовательно $e, f \in L(S) \cap I$. Откуда $a, b \in I$. Строгий идеал I является ядерным идеалом конгруэнции Берна $\rho(I)$: $a\rho(I)b \Leftrightarrow a + x = b + y$ для некоторых $x, y \in I$.

Предложение 3. *Для того чтобы каждый идеал arp-полукольца S являлся ядерным идеалом единственной конгруэнции на S необходимо и достаточно, чтобы arp-полукольцо S было булевой решеткой.*

Доказательство. Взаимно однозначное соответствие между идеалами и конгруэнциями решетки $L(S)$ с 0 и 1, при котором идеал является классом нуля соответствующей конгруэнции, существует тогда и только тогда, когда $L(S)$ является булевой решеткой [2, глава II, теорема 8]. Поэтому *достаточность* выполняется.

Необходимость. Сначала докажем, что $U(S) = \{1\}$. Рассмотрим на *arp*-полукольце S две конгруэнции ρ_1 и ρ_2, ядерные идеалы которых совпадают и состоят из одного элемента 0:

$$(eu)\rho_1(fv) \Leftrightarrow e = f \text{ и } eu = fv, \quad (eu)\rho_2(fv) \Leftrightarrow e = f.$$

Тогда $(eu)\rho_1 v \Leftrightarrow e = 1$ и $u = v$, $(eu)\rho_2 v \Leftrightarrow e = 1$, где u, v – произвольные обратимые элементы. Конгруэнции ρ_1 и ρ_2 совпадают только в том случае, когда полутело $U(S)$ состоит из одного элемента 1. Тогда *arp*-полукольцо $S = L(S)$ и по указанной теореме 8 является булевой решеткой.

Список литературы

[1] *Е.М. Вечтомов, А.В. Михалев, В.В. Чермных.* Абелево-регулярные положительные полукольца. Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1997. Т. 20. С. 282–309.

[2] *Г. Гретцер.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

[3] *О.В. Старостина.* К теории абелево-регулярных положительных полуколец. Вестник ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. 2005. № 3. С. 156–159.

О ГИПЕРНОРМАЛЬНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ С НЕКОТОРЫМИ УСЛОВИЯМИ КОНЕЧНОСТИ

П.Б. Стрижов
Уральский государственный педагогический университет,
Екатеринбург, пр. Космонавтов 26

Одним из направлений в теории абстрактных групп является исследование различных классов обобщенно нильпотентных групп, где получено очень много интересных и глубоких результатов (см. [4], [27], [13]). Решение в 50-е годы прошлого века пятой проблемы Гильберта позволило формулировать и решать аналогичные проблемы уже на базе не дисктретных, а локально-компактных топологических групп (см. [26], [9]). Так в работе [2] было установлено строение индуктивно нильпотентных локально-компактных групп; эти результаты обобщены в работах [11], [12], [17], [18], [19] на индуктивно пронильпотентные локально-компактные группы и локально-компактные группы с нормализаторным условием (короче: N-групп). Накладывая на различные классы обобщенно нильпотентных групп условия конечности, удается получить вполне определенное строение групп; много результатов в этом направлении получено в работах [20]–[25], [6], [8], [10], [14] и [15]. В этом направлении подготовлена и данная статья.

Выделим класс *гипернормальных* топологических групп G (короче: *NA-групп*) – групп, в которых $N_\lambda(G) = G$ для некоторого порядкового числа λ, где $N_0(G) = e$, $N_\alpha(G)/N_{\alpha-1}(G)$ – норма фактор-группы $G/N_{\alpha-1}(G)$, если $0 < \alpha$ не предельное, и $N_\mu(G) = \overline{\bigcup_{\alpha<\mu} N_\alpha(G)}$ для каждого предельного μ (*нормой* топологической группы G называется множество всех элементов G перестановочных с каждой замкнутой подгруппой из G). В работе [28] доказано, что норма $N(G)$ дискретной группы G содержит центр $Z(G)$ группы и содержится во втором гиперцентре $Z_2(G)$ (сравни с [29]). В работе [7] этот факт перенесен на класс локально-компактных групп. Из этого результата следует, что в классе локально-компактных групп нильпотентность G будет равносильна $N_k(G) = G$, где k – натуральное; $N_\omega(G) = Z_\omega(G)$, где ω – первое бесконечное порядковое число; и вообще – каждая локально-компактная NA-группа G будет ZA-группой (топологическая группа G называется *ZA-группой*, если $Z_\lambda(G) = G$ для некоторого порядкового числа λ, где $Z_0(G) = E$, $Z_\alpha(G)/Z_{\alpha-1}(G)$ – центр фактор-группы $G/Z_{\alpha-1}(G)$, если $0 < \alpha$ не предельное, и $Z_\mu(G) = \overline{\bigcup_{\alpha<\mu} Z_\alpha(G)}$ для каждого предельного μ).

В статье [16] устанавливаются основные свойства локально-компактных NA-групп, в частности, что локально-компактная NA-группа будет N-группой. Из этого результата и структурной теоремы для локально-компактных N-групп [19] выводится структурная теорема для локально-компактных NA-групп:

Теорема. *в локально-компактной NA-группе G индуктивно компактный радикал I совпадает со множеством $\Psi(G)$ всех компактных элементов группы, причем G/I чиста; $J = IG_0$ – открытая нормальная подгруппа, причем G/J – дискретная ZA-группа без кручения (G_0 – связная компонента единицы e группы G); G_0 нильпотентна, причем $\Psi(G_0) = I_0 \leq Z(G_0)$; $J/I_0 = I/I_0 \times G_0/I_0$; I/I_0 – периодическая* *индуктивно пронильпотентная группа, то есть раскладывается в ограниченное прямое произведение своих силовских p-подгрупп с произвольно отмеченной открытой компактной подгруппой.*

Пример. Топологическое полупрямое произведение $G = \langle a \rangle \leftthreetimes T$, где T – одномерная окружность, $a^2 = e$ и $t^a = t^{-1}$ для любого $t \in T$ будет ZA-группой, так как $Z_\omega(G) = T$. Но $Z_n(G) < D$ для любого натурального n, где D – силовская 2-подгруппа в G.

Накладывая на локально-компактную NA-группу G условия Min (минимальности для замкнутых подгрупп), Max (максимальности для замкнутых подгрупп), конечности ранга, мы получаем следующие результаты:

Теорема A. *Для локально-компактной NA-группы G следующие утверждения равносильны:* (1) *G – Черниковская;* (2) *G – с условием* Min-ab *минимальности для замкнутых абелевых подгрупп;* (3) *G – с условием* Min-n *минимальности для замкнутых нормальных подгрупп;* (4) *некоторая максимальная абелева нормальная подгруппа A группы G будет* Min-*группой и каждый элемент в G/A конечного порядка;* (5) *некоторая максимальная абелева нормальная подгруппа A группы G с лиевой G_0 будет удовлетворять условию минимальности для нормальных замкнутых подгрупп из G и каждый элемент в G/A конечного порядка.*

Теорема B. *Локально-компактная NA-групп G будет* Max-*группой в каждом из случаев:* (1) *G – периодическая с условием* Max-ab *максимальности для замкнутых абелевых подгрупп;* (2) *G – с условием* Max-n *максимальности для замкнутых нормальных подгрупп;* (3) *некоторая максимальная абелева нормальная подгруппа A группы G будет* Max-*группой и каждый элемент в G/A конечного порядка;* (4) *некоторая открытая максимальная абелева нормальная подгруппа A группы G будет удовлетворять условию максимальности для нормальных замкнутых подгрупп из G и каждый элемент в G/A имеет конечный порядок.*

Теорема C. *Локально-компактная NA-группа G конечного ранга обладает конечным рядом замкнутых нормальных подгрупп: $E < T = V_0 < V_1 < \ldots < V_k < J < G$, где T – конечномерная абелева связная компактная подгруппа, $V_{i+1}/V_i \simeq \mathbb{R}$, G/J – дискретная ZA-группа без кручения конечного ранга, J/V_k – ограниченное прямое произведение своих силовских p-подгрупп $\tilde{J}_p$ с произвольно отмеченной открытой компактной подгруппой, причем ранги всех $\tilde{J}_p$ ограничены в совокупности. Локально-компактная NA-группа $\tilde{J}_p$ конечного ранга обладает конечным рядом замкнутых субнормальных подгрупп:*

$$E < A = C_0 < C_1 < \ldots < C_l = K_0 < K_1 < \ldots < K_m = \tilde{J}_p, \qquad (*)$$

где $A \simeq \mathbb{C}^n_{p^\infty}$, C_{i+1}/C_i – конечная циклическая, K_{i+1}/K_i топологически изоморфна $\mathbb{Z}_p$, либо $\mathbb{Q}_p$, причем $\tilde{J}_p/A$ – нильпотентна. Обратно, каждая локально-компактная NA-группа, содержащая ряд вида $(*)$, будет иметь конечный ранг.

Равносильность условий (1) и (2) в теореме A аналогична теореме 5 в [23], установленной для индуктивно разрешимых локально-компактных групп; равносильность условий (1) и (3) теоремы A обобщает основной результат работы [25] (в [25] показано, что в локально-компактной группе G, алгебраически изоморфной дискретной

ZA-группе, связная компонента G_0 содержится в центре $Z(G)$; приведенный **пример** показывает, что в локально-компактной NA-группе G с условием минимальности для замкнутых подгрупп этого может и не быть); равносильность условий (1) и (5) теоремы A обобщает теорему 7 из [5], доказательство этой равносильности опирается на равносильность условий (1) и (4), которое, в свою очередь, опирается на справедливость следующего утверждения:

Лемма. *Если максимальная абелева нормальная подгруппа A локально-компактной NA-группы G будет* Min*-группой или* Max*-группой, то $G_0 = A_0$ и следующие утверждения равносильны: каждый элемент G/A имеет конечный порядок; $Z_{n+1}(G/A)/Z_n(G/A)$ будет* Min*-группой при любом натуральном n; каждый элемент из $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n(G/A)$ имеет конечный порядок; G/A конечна.*

Из доказательства теоремы 4 в [24] следует нильпотентность периодической локально-компактной NA-группы, удовлетворяющей условию Max-ab. Учитывая это, и используя теорему 6 той же работы [24], получим (1) $\Rightarrow$ Max в теореме B; следствие (2) $\Rightarrow$ Max в теореме B является очевидным следствием равносильности условий Max-n и Max в классе индуктивно нильпотентных локально-компактных групп, установленной В.М. Глушковым [3]. Тот факт, что из условия (4) в теореме B следует условие Max в классе локально-компактных NA-групп, аналогичен следствию теоремы 1 из [1].

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю профессору Ю.Н. Мухину за постановку задач и пристальное внимание к работе.

Список литературы

[1] *Г.Ф. Бачурин.* О группах с возрастающим центральным рядом. Матем. сб. 1958. Т. 45(87). №1. С. 105–112.

[2] *В.М. Глушков.* Локально нильпотентные локально бикомпактные группы. Труды Моск. матем. о-ва. 1955. Т. 4. С. 291–332.

[3] *В.М. Глушков.* К теории нильпотентных локально бикомпактных групп. Изв. АН СССР. Сер.:мат. 1956. Т.20. №4. С. 513–546.

[4] *А.Г. Курош, С.Н. Черников.* Разрешимые и нильпотентные группы. Усп. матем. наук. 1947. Т. 2. №3. С. 18–59.

[5] *Х.Х. Мухаммеджан.* О группах, обладающих разрешимым возрастающим инвариантным рядом. Матем. сб. 1956. Т. 39(81). №2. С. 201–218.

[6] *Ю.Н. Мухин.* Локально-компактные группы конечного ранга. Алгебра и логика. 1978. Т. 17. №4. С. 416–435.

[7] *Ю.Н. Мухин.* Об автоморфизмах, фиксирующих замкнутые подгруппы топологической группы. Сиб. матем. журн. 1975. Т. 16. №6. С. 1231–1239.

[8] *Ю.Н. Мухин.* О радикальных топологических группах конечного ранга. Подгрупповая структура групп: Сб. науч. трудов. Свердловск: УрО РАН, 1988. С. 126–134.

[9] *Ю.Н. Мухин.* Топологические группы. Итоги науки и техники. Сер.: Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 3–69.

[10] *Ю.Н. Мухин, Е.Н. Старухина.* О группах конечного ранга. Матем. зап. Урал. ун-та. 1974. Т. 9. №1. С. 56–60.

[11] *В.П. Платонов.* Локально проективно нильпотентные подгруппы и нильэлементы в топологических группах. Изв. АН СССР : Сер. матем. 1966. Т. 30. №6. С. 1257–1274.

[12] *В.П. Платонов.* Строение топологических локально проективно нильпотентных групп и групп с нормализаторным условием. Матем. сб. 1967. Т. 72(114). №1. С. 38–58.

[13] *Б.И. Плоткин.* Обобщенные разрешимые и обобщенные нильпотентные группы. Усп. матем. наук. 1958. Т. 13. №4(82). С. 89–172.

[14] *В.М. Полецких.* Топологічні групи з компактним простором класів спряженіх елементів. ДАН УРСР. 1974. А. №1. С. 47–48.

[15] *В.М. Полецких.* ZA-группы с условием индуктивности для нормальных делителей. ДАН УССР. 1976. А. №4. С. 311–314.

[16] *П.Б. Стрижов.* О топологических гипернормальных группах. Матем. вестник педвузов и ун-тов Волго-Вятского региона. Киров, 2006. Вып. 8. С. 104–111.

[17] *В.И. Ушаков.* Топологические группы с нормализаторным условием для замкнутых подгрупп. Изв. АН СССР: Сер. матем. 1963. Т. 27. №4. С. 943– 948.

[18] *В.И. Ушаков.* Топологические локально нильпотентные группы. Сиб. матем. журн. 1965. Т. 6. №3. С. 580–595.

[19] *В.И. Ушаков.* О группах с нормализаторным условием для замкнутых подгрупп. Изв. АН СССР: Сер. матем. 1965. Т. 29. №5. С. 1055–1068.

[20] *В.С. Чарин.* О группах конечного ранга, I. Укр. матем. журн. 1964. Т. 16. №2. С. 212–219.

[21] *В.С. Чарин.* О группах конечного ранга, II. Укр. матем. журн. 1966. Т. 18. №3. С. 85–96.

[22] *В.С. Чарин.* О группах конечного ранга, III. Укр. матем. журн. 1969. Т. 21. №3. С. 344–353.

[23] *В.С. Чарин.* О локально бикомпактных локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для замкнутых подгрупп. Сиб. матем. журн. 1960. Т. 1. №1. С. 139–151.

[24] *В.С. Чарин.* О некоторых классах локально бикомпактных групп с условием максимальности для абелевых подгрупп. Сиб. матем. журн. 1964. Т. 5. №2. С. 438–458.

[25] *В.С. Чарин.* О топологических ZA-группах, удовлетворяющих условию минимальности для замкнутых подгруппю Усп. матем. наук. 1961. Т. 16. №5. С. 209–214.

[26] *В.С. Чарин.* Топологические группы. Итоги науки. Алгебра 1964. М.: ВИНИТИ. 1966. С. 123–160.

[27] *С.Н. Черников.* Условия конечности в общей теории групп. Усп. матем. наук. 1959. Т. 14. №5. С. 45– 96.

[28] *E. Schenkman.* On the norm of a group. Illinois J. Math. 1960. V.4. P. 150–152.

[29] *T. Wos.* On commutative prime power subgroups of the norm. Illinois J. Math. 1958. V.2. P. 271– 284.

О ДИСТРИБУТИВНОСТИ ПОЛУТЕЛ

А.В. Черанева

Вятский государственный гуманитарный университет

610002, Киров, ул. Красноармейская, 26, center@extedu.kirov.ru

Полутелом называется множество, являющееся одновременно мультипликативной группой и аддитивной коммутативной полугруппой без нуля, причем умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Коммутативное полутело называется *полуполем.*

Всякая конгруэнция на полутеле полностью определяется каждым своим классом. Поэтому заменим работу с конгруэнциями на работу с классами единицы, которые будем называть *ядрами.* Подмножество A полутела P является ядром тогда и только тогда, когда A – нормальная подгруппа в P, для которой

$$x, y \in P \;\&\; x + y = 1 \;\&\; a \in A \Rightarrow ax + y \in A \text{ [3]}.$$

Обозначим конгруэнцию с ядром A через ρ_A. Легко видеть, что $\rho_A \wedge \rho_B = \rho_A \cap \rho_B = \rho_{A\cap B}$, $\rho_A \vee \rho_B = \rho_A \circ \rho_B = \rho_{A\cdot B}$. Поэтому решетка всех конгруэнций полутела изоморфна решетке его ядер относительно включения. Обозначим через $\operatorname{Con} A$ решетку всех конгруэнций универсальной алгебры A . Для полутела P $\operatorname{Con} P$ также будет обозначать решетку его ядер. Известно, что $\operatorname{Con} P$ любого полутела P модулярна, но не обязательно дистрибутивна [3]. Напомним, что решетка называется *модулярной*, если в ней выполняется модулярный закон:

$$\text{если } x \leq z, \text{то } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z \text{ [1, с. 26]}.$$

В [1, с. 59] было показано, что модулярная недистрибутивная решетка содержит диамант.

Назовем полутело P *дистрибутивным*, если его решетка конгруэнций дистрибутивна. Отметим, что любое аддитивно идемпотентное полутело дистрибутивно [3].

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие утверждения.

Теорема А. [3, следствие 1]. *Всякий элемент интервала* $[a, 1]$ *решетки конгруэнций полутела имеет не более одного дополнения в этом интервале.*

Теорема Б. [3, теорема 2]. *Если* P *– полутело, то* $M_3 \subseteq \operatorname{Con} P$ *(т.е.* M_3 *– подрешетка* $\operatorname{Con} P$*) влечет* $M_3 \subseteq M_{\aleph_0} \subseteq \operatorname{Con} P$.

Здесь через M_τ обозначена решетка, полученная из антицепи мощности τ присоединением наибольшего и наименьшего элементов. В частности, M_3 есть диамант.

Теорема В. [4, с. 37]. *Если* A *– универсальная алгебра сигнатуры* Ω *и* $\tau \in \operatorname{Con} A$, *то решетка*

$$\{\rho | \rho \in \operatorname{Con} A, \tau \subseteq \rho\}$$

изоморфна решетке $\operatorname{Con}(A/\tau)$.

Из теоремы В следует, что любое факторполутело дистрибутивного полутела дистрибутивно.

Для произвольных ядер $A, B, K \in \operatorname{Con} P$, где K является также подполутелом, обозначим через A_B^K, A^K ядра

$$A^K = A \cap K, A_B^K = A \cap BK.$$

Лемма. *В любом полутеле P для ядер $A, B, K \in \operatorname{Con} P$ таких, что $A \cap B = \{1\}$ и K – подполутело, выполняется равенство:*

$$AK \cap BK = K.$$

Доказательство. Рассмотрим ядра $A_B^K B^K$, $B_A^K A^K$. Если они различные и не содержатся в K, то они являются дополнениями элемента K решетки $\operatorname{Con}(A_B^K B_A^K K)$ на интервале $[A^K B^K, A_B^K B_A^K K]$, так как по закону модулярности

$$A_B^K B^K K = A_B^K K = (A \cap BK)K = AK \cap BK = (B \cap AK)K = B_A^K K = B_A^K A^K K$$

и

$$A_B^K B^K \cap K = B^K (A_B^K \cap K) = B^K A^K = A^K (B_A^K \cap K) = B_A^K A^K \cap K.$$

Но это противоречит теореме A. Следовательно, либо $A_B^K B^K = B_A^K A^K$, либо $A_B^K B^K \subseteq K$, либо $B_A^K A^K \subseteq K$.

Если $A_B^K B^K = B_A^K A^K$, то в силу единственности представления элементов из AB в виде ab, где $a \in A$, $b \in B$ и $A \cap B = \{1\}$ [3], получаем $A_B^K = A^K$ и $B_A^K = B^K$. Если $A_B^K B^K \subseteq K$, то $A_B^K B^K = A_B^K B^K \cap K = A^K B^K$, откуда снова получаем равенство $A_B^K = A^K$. Аналогичным образом из $B_A^K A^K \subseteq K$ следует $B_A^K = B^K$.

Если $A_B^K = A^K$, то $AK \cap BK = K(A \cap BK) = K \cdot A_B^K = K \cdot A^K = K$. Случай $B_A^K = B^K$ аналогичен только что разобранному – достаточно заменить в выражении A на B и B на A.

Замечание. В лемме показано, что $A_B^K B^K \subseteq K$ влечет равенство $A_B^K = A^K$. Но тогда $A_B^K B^K K = A^K B^K K = K = B_A^K K$, поэтому $B_A^K = B^K$. Аналогично из $B_A^K A^K \subseteq K$ следуют равенства $B_A^K = B^K$ и $A_B^K = A^K$. Далее пусть $ab = k \in K$, где $a \in A$, $b \in B$. Тогда $a = kb^{-1} \Rightarrow a \in A \cap KB = A_B^K = A^K \subseteq K$ и $b = a^{-1}k \subseteq K$. Получаем, что *для произвольных ядер A, B полутела P таких, что $A \cap B = \{1\}$, и для любого ядра K, являющегося подполутелом в P, верно*

$$a \in A \;\&\; b \in B \;\&\; ab \in K \Rightarrow a \in K \;\&\; b \in K.$$

Теорема. *Если подполутело K полутела P, являющееся ядром, дистрибутивно, то и само полутело P дистрибутивно.*

Доказательство. Поскольку решетка конгруэнций полутела модулярна, достаточно показать, что если $\operatorname{Con} P$ содержит диамант, то и $\operatorname{Con} K$ содержит диамант. Пусть $M_3 \subseteq \operatorname{Con} P$ и D – наименьший элемент M_3. Из второй теоремы об изоморфизмах [2, с. 75] следует, что

$$DK/D \cong K/(D \cap K),$$

а это значит, что и

$$\operatorname{Con}(DK/D) \cong \operatorname{Con}(K/(D \cap K)).$$

В силу этого факта и теоремы В можно считать, что $D = \{1\}$.

Из теореме Б следует $M_3 \subseteq M_{\aleph_0} \subseteq \operatorname{Con} P$. Предположим, что найдутся три различных ядра $A, B, C \in M_{\aleph_0}$, не лежащие в K, такие, что $AB = AC = BC = E$, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{1\}$. Тогда

$$AK \cdot BK = AK \cdot CK = BK \cdot CK = EK,$$

по лемме

$$AK \cap BK = AK \cap CK = BK \cap CK = K.$$

Видим, что различные ядра AK, BK, CK, K, EK образуют диамант в $\operatorname{Con} P$, что невозможно, поскольку в противном случае по теореме В получаем недистрибутивное идемпотентное полутело P/K. Таким образом, бесконечное число ядер из $M_{\aleph_0}$ лежат в K, а это значит, что K содержит диамант, что и требовалось доказать.

Обозначим через $\operatorname{Ker}_P(a)$ ядро главной конгруэнции полутела P, порожденной парой $(1, a)$, и назовем *главным ядром*, порожденным элементом a. Легко видеть, что $\operatorname{Ker}_P(2)$ является подполутелом в P. В случае полуполя P решетка $\operatorname{Con} \operatorname{Ker}_P(2)$ является подрешеткой $\operatorname{Con} P$, [6, предложение 1]. Поэтому верно

Следствие 1. *Полуполе P дистрибутивно тогда и только тогда, когда дистрибутивно подполуполе* $\operatorname{Ker}_P(2)$.

В [5, теорема 2] было доказано, что решетка конгруэнций $P = \operatorname{Ker}_P(2)$ канонически изоморфна решетке идеалов его кольца разностей. Значит, справедливо

Следствие 2. *Полуполе P дистрибутивно тогда и только тогда, когда дистрибутивна решетка идеалов кольца разностей полуполя* $\operatorname{Ker}_P(2)$.

Список литературы

[1] *Г. Биркгоф.* Теория решеток. М.: Наука, 1984.

[2] *П. Кон.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

[3] *А.Н. Семенов.* О решетке конгруэнций полутел. Вестник ВятГГУ. 2003. №9. С. 92–95.

[4] *Л.А. Скорняков.* Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.

[5] *А.В. Черанева.* О сократимых конгруэнциях на полутелах. Вестник ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. 2005. Вып. 3. С. 160–163.

[6] *А.В. Черанева.* О главном ядре, порожденном 2. Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2006. Вып. 8. С. 120–125.

ФРЕЙМЫ ИДЕАЛОВ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУКОЛЕЦ

В.В.Чермных
Вятский государственный гуманитарный университет
610002, Киров, ул. Красноармейская, 26, vv146@mail.ru

Введение. Под *полукольцом* будем понимать алгебру, отличающуюся от ассоциативного кольца с единицей, возможно, необратимостью аддитивной операции. Данная статья посвящена вопросам представления полуколец сечениями пучков. В работе автора [1] рассмотрены общие пучковые конструкции, позволяющие получать полные (эпиморфные) представления полуколец. Сформулируем результаты этой статьи, на которые будем опираться, и ниже покажем, как можно применить эти конструкции посредством сопряжений между полными решетками идеалов полукольца.

Пусть S – произвольное полукольцо и $\mathrm{Id}\,S$ – решетка всех его (двусторонних) идеалов относительно включения. Обозначим через τX решетку всех открытых подмножеств топологического пространства X и рассмотрим произвольное отображение $g : \mathrm{Id}\,S \to \tau X$, сохраняющее конечные пересечения: $g(A \cap B) = g(A) \cap g(B)$.

Определим на S конгруэнцию: $a\,\gamma_x\,b \iff x \in g((a,b)^*)$, где $(a,b)^* = \{s \in S : (\forall t \in S)\ (ats = bts)\}$.

Показывается, что произвольно взятое отображение $g : \mathrm{Id}\,S \to \tau X$, сохраняющее конечные пересечения, и введенные конгруэнции γ_x определяют пучок фактор–полуколец $P_g = \bigcup S/\gamma_x$ на X. Обозначим через $\Gamma(P_g)$ полукольцо всех глобальных сечений пучка P_g с поточечно определенными операциями. Представление $\alpha_g : S \to \Gamma(P_g)$ полукольца S сечениями пучка P_g – это гомоморфизм, при котором $\alpha_g(s) = \hat{s} \in \Gamma(P_g)$, где $\hat{s}(x)$ – класс элемента $s \in S$ в полукольце S/γ_x.

Предположим, что задано отображение $f : \tau X \to \mathrm{Id}\,S$. Скажем, что отображение f *сохраняет покрытия*, если $\sum\limits_i f(U_i) = S$ для каждого открытого покрытия $\{U_i\}$ пространства X.

Теорема A. *Пусть для произвольных полукольца S и топологического пространства X заданы отображения $g : \mathrm{Id}\,S \to \tau X$ и $f : \tau X \to \mathrm{Id}\,S$, причем f и g сохраняют конечные пересечения, f сохраняет покрытия и для любых $a, b \in S$ и $U \in \tau X$ выполняется $f(U) \subseteq (a,b)^* \iff U \subseteq g((a,b)^*)$. Тогда функциональное представление α_g полукольца S полно.*

Обозначим через $\mathrm{Cong}\,S$ решетку всех конгруэнций полукольца S. Пусть $f : \tau X \to \mathrm{Cong}\,S$ – произвольное изотонное отображение. Для каждой точки $x \in X$ положим $\overline{\rho}_x = f(X \setminus \overline{x})$. Положим для любого открытого $U \subseteq X$ $\rho_U = \cap\{\overline{\rho}_x :\ x \in U\}$ и $\rho_x = \cup\{\rho_U :\ U \ni x\}$, где $\cap$ и $\cup$ – теоретико–множественные пересечения и объединения конгруэнций. Семейство конгруэнций $\{\rho_x :\ x \in X\}$ определяет пучок фактор–полуколец $P_f = \bigcup S/\rho_x$ на пространстве X. Пусть β_f – соответствующее представление полукольца S глобальными сечениями этого пучка.

Обозначим через $\mathrm{Ker}\,\rho$ класс нуля конгруэнции ρ. Скажем, что отображение $f : \tau X \to \mathrm{Cong}\,S$ *сильно сохраняет покрытия*, если для любого открытого покрытия $\{U_i\}$ пространства X выполняется $\sum\limits_i \mathrm{Ker}\,f(U_i) = S$.

Теорема В. *Если изотонное отображение $f : \tau X \to \operatorname{Cong} S$ сильно сохраняет покрытия, то пучковое представление β_f полукольца S полно.*

Сопряжения и фреймы. Пусть $(L, \vee, \wedge)$ – полная решетка, 0 и 1 – ее наименьший и наибольший элементы. Элемент $p \in L$, отличный от 1, называется $\wedge$-*неприводимым*, если $a \wedge b \leqslant p$ влечет $a \leqslant p$ или $b \leqslant p$ для любых $a, b \in L$. На множестве $\operatorname{Pt} L$ всех $\wedge$-неприводимых элементов вводится стоуновская топология; для каждого $a \in L$ множества $p^*(a) = \{p \in \operatorname{Pt} L : a \nleqslant p\}$ объявляются открытыми. Топологическое пространство $\operatorname{Pt} L$ с введенной топологией называется *точечным пространством решетки* L. Пусть $\tau \operatorname{Pt} L$ – решетка всех открытых подмножеств из $\operatorname{Pt} L$. Скажем, что решетка L *имеет достаточно много $\wedge$–неприводимых элементов*, если для любых $a \nleqslant b$ из L найдется $p \in \operatorname{Pt} L$, такой, что $a \nleqslant p$ и $b \leqslant p$.

Предложение 1. *Отображение $p^* : L \to \tau \operatorname{Pt} L, a \to p^*(a)$, является решеточным изоморфизмом тогда и только тогда, когда решетка L дистрибутивна и имеет достаточно много $\wedge$-неприводимых элементов.*

Доказательство. Ясно, что p^* является эпиморфизмом. Пусть $a \neq b$ и для определенности $a \nleqslant b$. Тогда по условию найдется $p \in \operatorname{Pt} L$, для которого $a \nleqslant p$ и $b \leqslant p$. Получаем, $p \in p^*(a) \setminus p^*(b)$, и p^* – инъекция.

Обратно, пусть p^* – изоморфизм, из чего вытекает дистрибутивность решетки L. Рассмотрим $a, b \in L$, такие, что $a \nleqslant b$. По лемме Цорна найдется максимальный элемент $p \neq 1$ с условиями $b \leqslant p$ и $a \nleqslant p$. Покажем, что он $\wedge$-неприводим. Пусть $x, y \nleqslant p$. Элементы $x \vee p$ и $y \vee p$ строго больше p, поэтому $a \leqslant x \vee p$ и $a \leqslant y \vee p$. Получаем, $a \leqslant (x \vee p) \wedge (y \vee p) = (x \wedge y) \vee p$ и $x \wedge y \nleqslant p$.

Если $\operatorname{Id} S$ – решетка идеалов полукольца S, то ее точечным пространством будет множество всех $\cap$-неприводимых идеалов. Первичный спектр $\operatorname{Spec} S$ (со стоуновской топологией с открытыми множествами вида $D(J) = \{P \in \operatorname{Spec} S : P \not\supseteq J\}$ для любого идеала J) является подпространством $\operatorname{Pt} \tau \operatorname{Id} S$, общем случае, собственным. К примеру, идеалы $p^2\mathbb{Z}$, p – простое число, кольца целых чисел $\cap$-неприводимые, но не простые.

Напомним определение сопряжения между полными решетками.

Определение. Пусть L и K – полные решетки и отображения $f : L \to K$ и $g : K \to L$ сохраняют единицу и конечные точные нижние грани. Пара (f, g) называется *сопряжением* между решетками L и K, если при всех $a \in L$ и $b \in K$ выполняется $f(a) \leqslant b \iff a \leqslant g(b)$. Отображения f и g называются *левым сопряженным* и *правым сопряженным* соответственно.

Примеры сопряжений.

1. Пусть L – произвольная полная решетка. Тогда пара (p^*, p_*) является сопряжением между полными решетками L и $\tau \operatorname{Pt} L$, где левый сопряженный – отображение предложения 1, а правый задается формулой $p_*(U) = \wedge(\operatorname{Pt} L \setminus U)$ для любого $U \in \tau \operatorname{Pt} L$.

2. Частным случаем предыдущего примера является сопряжение (d, h) между решетками $\operatorname{Id} S$ и $\tau \operatorname{Spec} S$, задаваемое отображениями $d(J) = D(J)$ и $h(U) = \bigcap(\operatorname{Spec} S \setminus U)$ для произвольных идеала J и открытого в $\operatorname{Spec} S$ множества U.

3. Наиболее важным для нас примером является сопряжение, основанное на фрейме

идеалов полукольца.

Определение. *Произвольная дистрибутивная решетка идеалов полукольца S, содержащая 0 и S и замкнутая относительно произвольных сумм, называется* **фреймом идеалов полукольца** S.

Пусть F – фрейм идеалов полукольца S. Во-первых, мы имеем отображение $f : F \hookrightarrow \operatorname{Id} S$, являющееся включением. Во-вторых, рассмотрим отображение $g : \operatorname{Id} S \to F, g(J) = \sum\{A \in F : A \subseteq J\}$, для любого идеала J из S. Другими словами, $g(J)$ – наибольший идеал из фрейма F, лежащий в J. Отображение f сохраняет 0, S как наибольший элемент решеток F и $\operatorname{Id} S$, сохраняет конечные точные нижние грани и произвольные суммы. Отображение g сохраняет $0, S$, конечные $\wedge$. Наконец, f и g связаны соотношением $f(A) \subseteq B \iff A \subseteq g(B)$ для любых $A \in F$ и $B \in \operatorname{Id}(S)$. Таким образом, получили еще один пример сопряжения – пару (f, g).

Приведем примеры фреймов идеалов.

Определение. *Идеал A полукольца S назовем* **чистым (равномерно чистым)***, если для любого $a \in A$ выполняется $A + Anna = S(A + AnnaS = S)$. Идеал называется* **регулярным***, если он порождается некоторым множеством дополняемых идемпотентов.*

Заметим, что множество всех регулярных идеалов полукольца S образует подрешетку решетки равномерно чистых идеалов, причем, полную, которая в свою очередь является полной подрешеткой решетки всех чистых идеалов полукольца S. Таким образом, получаем

Предложение 2. *Множества всех чистых, равномерно чистых и регулярных идеалов произвольного полукольца S образуют три фрейма идеалов полукольца S.*

Важным для пучковых представлений является следующее свойство фреймов.

Теорема 3. *Всякий фрейм идеалов F полукольца S изоморфен решетке $\tau \operatorname{Pt} F$ всех открытых множеств точечного пространства $\operatorname{Pt} F$, являющегося компактным T_0-пространством.*

Доказательство. Рассмотрим канонический эпиморфизм $p^* : F \to \tau \operatorname{Pt} F$. Для изоморфности p^* требуется показать, что в F достаточно много $\cap$-неприводимых элементов. Доказательство этого аналогично рассуждениям в доказательстве предложения 1. Покажем компактность $\operatorname{Pt} F$. Пусть $\operatorname{Pt} F = \cup p^*(A_i)$ для семейства идеалов $\{A_i\}$ из F. Тогда $p^*(\sum A_i) = \operatorname{Pt} F$ и, значит, $\sum A_i = S$. Поэтому $A_1 + \ldots + A_n = S$ для некоторых идеалов из семейства $\{A_i\}$, откуда $\operatorname{Pt} F = p^*(A_1) \cup \ldots \cup p^*(A_n)$. Стандартно проверяется T_0-отделимость точек пространства $\operatorname{Pt} F$.

Лемма 4. *Отображение $f : L \to K$ между полными решетками, сохраняющее конечные точные нижние грани, имеет правое сопряженное тогда и только тогда, когда $f(\vee A) = \vee f(A)$ для любого $A \subseteq L$.*

Доказательство. Стандартно.

Лемма 5. *Пусть S – произвольное полукольцо, X – топологическое пространство, $\varphi : \tau X \to \operatorname{Id} S$ – отображение, сохраняющее пересечения, и выполнено одно из условий:*

(1) *φ имеет правое сопряженное отображение;*

(2) *φ имеет левое сопряженное ψ такое, что $\psi\varphi = 1_{\tau X}$ и $\psi(J) = X$ влечет $J = S$.*

Тогда φ сохраняет покрытия.

Доказательство. Пусть выполнено условие (1) и $\cup U_i = X$ для произвольных $U_i \in \tau X$. Тогда по лемме 4 $\sum_i \varphi(U_i) = \varphi(\bigcup_i U_i) = \varphi(X) = S$.

Пусть выполнено (2) и $\cup U_i = X$. Заметим, что ψ имеет правый сопряженный, поэтому по лемме 4 отображение ψ сохраняет произвольные точные верхние грани. Получаем $\psi(\sum_i \varphi(U_i)) = \bigcup_i \psi\varphi(U_i) = \cup_i U_i = X$ и по условию $\sum_i \varphi(U_i) = S$.

Пучковые конструкции. Проанализируем сейчас возможность применения теорем о полноте с помощью фреймов идеалов и сопряжений.

Пусть $g : \operatorname{Id} S \to \tau X$ – произвольное отображение, имеющее имеющее левое сопряженное отображение f. Оба отображения сохраняют конечные пересечения, а условие равносильности в теореме А является частным случаем равносильности в определении сопряжения. По лемме 5 f сохраняет покрытия, следовательно, все условия теоремы А выполнены.

Теорема 6. *Пусть S и X – произвольные полукольцо и топологическое пространство соответственно. Если (f, g) – сопряжение между решетками τX и $\operatorname{Id} S$, то пучковое представление α_g полно.*

Симмонс [2] приводит пример сопряжения (d, h) между решеткой идеалов $\operatorname{Id} R$ кольца R и решеткой τX, где $X \subseteq \operatorname{Spec} R$, и ошибочно говорит о полноте представления, аналоге α_d, ссылаясь на теорему 3.1, кольцевой вариант нашей теоремы 6. Применение этой теоремы было бы правомерным, если бы пара (h, g) являлась сопряжением, что в общем случае не так. Действительно, пусть $U = D(J) = d(J)$ для подходящего $J \in \operatorname{Id} S$, откуда $h(D(J)) = \sqrt{J} = \{P \in \operatorname{Spec} R : P \supseteq J\}$. Из $U = D(\sqrt{J}) = D(J)$ следует $\sqrt{J} = h(U) \subseteq J$ только в том случае, если идеал J полупервичен. Следовательно, (h, d) будет сопряжением тогда и только тогда, когда каждый идеал из S будет полупервичным. Кольцо с таким условием на идеалы называется *наследственно идемпотентным* [3]. Отсюда вытекает, что теорема 6 является существенно более слабой, чем теорема А. Теорема 6, тем не менее, удобна для представлений, основанных на фреймах.

Пусть F – произвольный фрейм идеалов полукольца S. Изоморфизм между F и $\tau \operatorname{Pt} F$ (теорема 3) позволяет из сопряжения $(i, w) : F \longleftrightarrow \operatorname{Id} S$ (пример 3) получить сопряжение между $\tau \operatorname{Pt} F$ и $\operatorname{Id} S$, которое обозначим, как и выше, через (i, w). Отображение $w : \operatorname{Id} S \to \tau \operatorname{Pt} F$, будучи правым сопряженным, индуцирует по теореме 6 полное пучковое представление α_w полукольца S над точечным спектром фрейма F.

Пусть $h : \tau X \to \operatorname{Id} S$ – произвольное изотонное отображение. Каждому идеалу $I \subseteq S$ поставим в соответствие конгруэнцию $\theta(I)$ – *отношение Берна* по идеалу I. Напомним, что $a\theta(I)b \iff a + u = b + v$ для некоторых $u, v \in I$. Подпространство всех максимальных идеалов полукольца S обозначим через $\operatorname{Max} S$.

Лемма 7. *Отображение $g : \operatorname{Id} S \to \operatorname{Con} S, g(I) = \theta(I)$, является изотонным, а если X содержит $\operatorname{Max} S$, то композиция $hg : \tau(X) \to \operatorname{Con} S$ сильно сохраняет покрытия.*

Доказательство. Изотонность g очевидна, а hg сильно сохраняет покрытия в силу того, что $I \subseteq \operatorname{Ker} \theta(I)$ для любого идеала I.

Таким образом, отталкиваясь от произвольного изотонного отображения $h : \tau X \to$

$\operatorname{Id} S$, мы получаем отображение $hg : \tau X \to \operatorname{Con} S$, удовлетворяющее условиям теоремы B. Сформулируем полученный результат.

Теорема 8. *Пусть отображение $h : \tau X \to \operatorname{Id} S$ изотонно и сохраняет покрытия. Тогда представление β_{hg} полно.*

Заметим, что рассуждения остаются в силе, если g заменить на любое другое изотонное отображение $\varphi : \operatorname{Id} S \to \operatorname{Con} S$, такое, что для любого идеала J выполняется $J \subseteq \operatorname{Ker} \varphi(J)$. Однако, отношение Берна по идеалу J является наименьшей конгруэнцией среди тех, ядра которых содержат идеал J, поэтому выбор отображения g выглядит наиболее естественным.

Теорема 8 дает следующие возможности получения полных пучковых представлений. Во–первых, для подпространства X первичного спектра, такого, что $\operatorname{Max} S \subseteq X$, рассмотрим отображение $h : \tau X \to \operatorname{Id} S$, заданное $h(U) = \cap\{P \in X : P \notin U\}$. Очевидно, h изотонно и сохраняет покрытия.

Во–вторых, пусть F – фрейм идеалов полукольца S. Как и выше, сопряжение (i, w) между $\tau \operatorname{Pt} F$ и $\operatorname{Id} S$ гарантирует изотонность отображения i, а по лемме 5 отображение i сохраняет покрытия.

Итак, получаем два полных представления β_{hg} и β_{ig} над пространствами X ($\operatorname{Max} S \subseteq X \subseteq \operatorname{Spec} S$) и $\operatorname{Pt} F$ соответственно.

Применение пучковых конструкций для рассмотренных выше фреймов (предложение 2) дает различные типы представлений. К примеру, представления, основанные на фреймах регулярных идеалов, позволяют получить представления близкие к пирсовским представлениям колец и полуколец [4, 5].

Список литературы

[1] *В.В. Чермных.* О полноте пучковых представлений полуколец. Фундам. и прикл. матем. 1996. Т.2. №1. С. 267–277.

[2] *H. Simmons.* Sheaf representations of strongly harmonic rings. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1985. 99A. №3–4. P. 249–268.

[3] *В.А. Андрунакиевич, Ю.М. Рябухин.* Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука. 1979.

[4] *R.S. Pierce.* Modules over commutative regular rings. Mem. Amer. Math. Soc. 1967. №70. P. 1–112.

[5] *В.В. Чермных.* Пучковые представления полуколец. УМН. 1993. 48, №5. С. 185–186.

Содержание

Для заметок

Современные методы физико-математических наук

Труды международной конференции 9 – 14 октября 2006 г., Орел

Том 1

Редактор Анатолий Георгиевич Мешков

Оригинал-макет создан при помощи системы $\LaTeX\,2_\varepsilon$
Компьютерная верстка: А.Г. Мешков

Подписано в печать 24.08.2006 г. Формат 60×80 1/8
Печать ризография. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Объем 26,25 усл. печ. л. Тираж 500 экз. Заказ №493 от 25.08.06

Редакционно-издательский отдел
ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»
302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95

Лицензия ПД №8-0023 от 25.09.2000 г.
Отпечатано с готового оригинал-макета
в ООО Полиграфическая фирма «Картуш»
г. Орел, ул. Васильевская, 138. Тел./факс (4862)741152